

# THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Zeinab Karaki**

**Équations cinétiques avec champ magnétique**

Thèse présentée et soutenue à l'UNIVERSITÉ DE NANTES, le 12 décembre 2019

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

**Rapporteurs :**

**M. Thierry GOUDON**, Directeur de recherche, Inria à Sophia Antipolis

**M. Chao Jiang Xu**, Professeur des universités, Université de Rouen

**Jury :**

Président : **M. Francis NIER**, Professeur des universités, Université Paris 13, institut Galilée

Examineurs : **M. Bernard HELFFER**, Professeur émérite, Université de Nantes

**M. Raafat TALHOUK**, Professeur des universités, Université Libanaise

**Mme. Isabelle TRISTANI**, Chargée de recherche CNRS, École normale supérieure

Directeurs de thèse : **M. Frédéric HÉRAU**, Professeur des universités, Université de Nantes

**M. Joseph VIOLA**, Maître de conférences, Université de Nantes



# Remerciements

Avant d'aborder cette thèse, j'aimerais remercier toutes les personnes sans lesquelles ce travail n'as pas pu être réalisé.

En premier lieu, je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse Frédéric Hérau et Joe Viola. Je vous remercie vivement pour tout le temps que vous m'avez attribué, vos précieux remarques et conseils, votre patience, votre gentillesse et surtout votre bienveillance. Merci Frédéric qui m'a fait découvrir les équations cinétiques lors de son cours de master 2. Merci encore pour m'avoir proposé un sujet de thèse très passionnant. Merci de m'avoir bien dirigée tout au long de mon stage et durant ma thèse. Merci d'intervenir toujours au bon moment. Merci d'avoir répondu à toutes mes questions. Merci pour tout le temps consacré à la lecture et à la correction de l'ensemble de mes travaux surtout de lire mes longues phrases et parfois sans verbes. Merci encore pour m'avoir initiée dans la recherche. Merci pour m'avoir encouragée surtout avec ta célèbre phrase «pas de stress, tout va bien se passer». À toi Joe, je te remercie de m'avoir initiée dans le monde quadratique. Merci pour m'avoir répondu à toutes mes questions de manière créative. Merci pour être toujours disponible surtout lors de nos longues discussions qui ont enrichi mes connaissances mathématiques. Merci pour tes relectures, tes corrections et tes remarques pertinentes. Merci encore pour m'apprendre l'expression «on croise les doigts».

Je remercie également les rapporteurs de ma thèse, Chao Jiang Xu et Thierry Goudon, d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci d'avoir eu la patience de me relire et de votre bienveillance dans la rédaction de vos rapports. Aussi je tiens à remercier tous les membres de Jury de thèse, Bernard Helffer, Francis Nier, Raafat Talhouk et Isabelle Tristani, merci d'avoir examiné ma thèse malgré votre temps chargé.

Un merci spécial pour Bernard Helffer, pour me donner l'honneur de travailler avec toi, ce travail qui a abouti à un résultat important dans ma thèse. Merci pour tes lectures pour plusieurs fois qui ont rendu le chapitre 3 et l'annexe A de ma thèse présentables. Merci pour ton encouragement avec ta célèbre question «ça avance ?» Merci pour m'avoir expliqué avec patience la théorie de représentation d'algèbre de Lie et l'application sur des polynômes de champ de vecteurs.

Je tiens également à remercier Stéphane Mischler, Raafat Talhouk pour avoir constitué avec Bernard Helffer mon comité de suivi de thèse, merci pour votre temps, vos précieux conseils et remarques.

Je remercie de façon générale tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, merci à ceux qui m'ont enseignée pendant mon Master 2. Merci notamment

à Xavier Saint Raymond, Frédéric Bernicot, Laurent Guillopé, Eric Paturel, Jean-Louis Milhorat et Benoît Grébert. Je remercie évidemment toutes les secrétaires du Laboratoire, Brigitte pour ton caractère très sympathique, Stéphanie, Annick, Anaïs et Béatrice pour toutes les aides au niveau administratif. Je remercie Claude et Anh, nos Bibliothécaires, pour leur accueil très chaleureux et gentil. Merci à Saïd et Eric d'avoir répondu toujours à mes problèmes de réseaux dans mon bureau.

Ces années de thèse n'auraient jamais été assez agréables sans l'ambiance qui prédomine parmi les doctorants. Tout d'abord, je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mon bureau au cours de mes années de thèse. Chronologiquement, je commence par remercier Noémie pour ta gentillesse, pour ton sourire inoubliable. Nicoloo, je te remercie pour toutes les tasses de café que tu nous as préparées, merci encore pour avoir appelé l'hôtel avant mon voyage à Venise. Merci Thomas Guyard pour être un co-bureau très sympa durant ces quatre années, merci pour ta sagesse et pour m'avoir répondu à tout genres des questions. Merci Anh pour ta vitalité, ton dynamisme, pour m'apprendre le Plumfoot et goûter le thé vietnamien d'Artichaut. Passant maintenant au bureau à côté : Merci Thomas B pour ton sourire quotidien et la soirée de crêperie ! Merci Victor VDR pour ton humour implacable, tes blagues et ton encouragement. Merci Thomas Wallez pour ta bienveillance, ton caractère optimiste et pour m'avoir introduit la notion d'une fonction ghaziemement finie ! Merci Matthieu pour les Symphonies musicales que tu fais quand quelqu'un rentre dans ton bureau. Merci Côme pour ta gentillesse et ton sourire. Merci Mohamad pour m'avoir préparé du café libanais (avec du marre plus que café !) Merci de m'avoir découvert les expressions françaises à la libanaise « sur ma tête », « les cerfs libanais ». Merci Olivier pour ton caractère sérieux en tout ce qui concerne le travail surtout en 3ème année de ta thèse : « j'ai une thèse à terminer ». Merci Caroline Vernier pour ton calme olympien qui fait du bien. Merci Caroline Robet pour tous les passages quotidiens dans notre bureau, merci pour toutes les blagues et anecdotes que tu nous as racontés, merci pour ton humour, pour ta bonne humeur, merci pour la balade passée sur l'Erdre avec Hala et Solène. Merci Germino pour ta politesse, pour ta proposition d'aller à la crêperie « après la pluie » (la meilleur crêperie pour moi). Merci pour nous préparer un gâteau sans alcool pour moi et Maha. Merci Matilde pour ta salutation spéciale « Ciao », pour la soirée passée ensemble avec Beatrice, Maha et Côme pour fêter l'envoi de ton manuscrit aux rapporteurs. Finalement, merci Samuel pour nous expliqués quelle est la surface d'aire minimale à l'intérieur de laquelle il est possible de retourner entièrement une aiguille de manière très simple. Merci Guillaume pour ta gentillesse et pour le séminaire de doctorants très compréhensible. Merci Vytauté pour ton caractère souriant. Merci Guillem pour toutes les tasses de café que tu nous as préparées. Merci Radek pour nous avoir expliqué la définition du pseudo-spectre en répondant à la question posée par Thomas W. Merci Rhiannon pour m'apprendre quelques coutumes britanniques. Merci Claire pour ton caractère calme et sympa et pour ton encouragement. Merci Arthur pour ta amabilité. Merci Amiel pour ta bonne humeur et pour les moments amusants. Merci Fabien pour ton caractère sympathique, pour ton lancement de traditionnel pause thé à midi et merci pour nous dévoiler ta fameuse recette au quinoa, champignon et clémentine, c'était

vraiment originale ! Merci Alexandre pour ta tranquillité d'esprit. Merci Meissa pour ton encouragement, merci pour ta question spéciale « Na nga def ? » Merci pour m'avoir apporté des chips au vinaigre. Merci Trung pour ton humour et pour le poisson du bois que tu m'as apporté de Mexique. Merci Solène pour ton caractère amusant, pour m'avoir appris le jeu Hanabi. Merci pour les moments passés ensemble aux conférences en particulier à SMAI. Merci pour avoir supporté mes fréquentes visites dans votre bureau pour parler avec Hala et pour jouer le Set ou Dobble. Merci Hélène pour d'être une très bonne collègue en master 2, durant les années de ma thèse et jusqu'à maintenant. Merci pour ton calme au début qui cache des talents multiples. Merci pour avoir expliqué les jeux de Set et DOBBLE lors de ton séminaire des doctorants, merci encore pour tous les pauses cafés passées chez Bertrand (où tu n'as jamais pris du café !) Merci Maël, Adrian et Antoine pour votre gentillesse et pour toutes les pauses cafés.

Maintenant, j'adresse mes remerciements à ma famille. Un grand merci pour mes parents pour leur support et leur soutien appréciable. Merci infiniment à ma mère pour ton aide, pour tes prières. Merci d'être une mère, une amie, une conseillère et un garde secret. Je n'ai pas des paroles suffisantes pour te remercier. Mon père, merci de m'offrir tous les besoins, pour ta confiance en moi. Je remercie également mes frères. Ali, merci pour ta sagesse, pour tes conseils et pour d'être toujours présent malgré la distance ! Merci pour ta femme Alaa et votre mignonne fille Fatima. Merci à Abass pour tes blagues et pour tes encouragements, ainsi merci pour ta femme Nour et pour votre mignon fils Fadel. Merci pour mon petit frère Hamza, pour être l'acteur de tous les personnages de bande destinée, en particulier le personnage d'Asaad en série de « Day3a Day3a ».

J'adresse mes remerciements maintenant à Hala. Mon profond respect reste pour toi, je n'ai pas des mots qui suffisent pour te remercier à tout ce que tu m'as apporté pendant ces années. Je te remercie de m'avoir expliqué le sens de sœur en vraie réalité, merci d'être plus qu'une amie, merci d'être une vraie sœur à qui je suis très reconnaissante. Merci pour ton aide inestimable, pour tes encouragements, merci pour tes conseils administratifs et scientifiques, merci d'être toujours à mes côtés. Merci pour ton support et pour ton confiance en moi. Merci d'être une très bonne collègue avec tous les moments amusants passés en jouant les jeux de société. Merci d'être une voisine très sympa. Merci pour toutes les moments passés ensemble, en cuisinant des délicieux plats, en faisant les courses, en regardant les films surtout à Toulouse. Merci encore pour toutes tes précieuses remarques pour améliorer mes exposés lors de chaque répétition devant toi. Merci pour tous les voyages réalisés ensemble, les Pays de la Loire, Paris, Bruges, Saint-Sébastien, Venise, Istanbul et Rome. Merci pour tous les conférences passés ensemble, en particulier, merci de me faire découvrir ta plaisir de mettre «tes pieds dans l'eau» en m'oubliant regardé depuis la plage de Guidel lors de la conférence SMAI ;) Merci pour ta présence dans ma vie, merci pour avoir fait le trajet pour venir à ma soutenance. Ce qui reste. . . . Reste pour toujours. . . . . Grand merci pour ta famille, pour ta sœur ange Hiba, pour ta petit-sœur Rayane et un remerciement spécifique pour ta sage mère Raoufa.

Je tiens à remercier mon amie Missane, pour ton soutien et ta présence à coté de moi malgré la distance. Merci d'être toujours prête à m'écouter, merci pour les moments

passés ensemble au Foyer à Hadth, Beyrouth en Ramadan 2015 et pour tous nos souvenirs inoubliables que j'ai partagés avec toi. Grand merci pour ta famille et un remerciement spécifique pour ta sœur Tala.

Zeina « yo2bouchni Zanzoun ! » Merci d'être une amie fidèle, merci pour ta bonne humeur, merci pour tous les moments passés ensemble et de nous découvrir presque tous les restaurants à Nantes sauf le restaurant de Pinocchio que tu nous as proposé d'essayer mais toujours on n'a pas réussi à le découvrir ! Merci pour tous les voyages passés ensemble surtout à Venise avec Hala et de garder secret ce qui est passé lors de notre voyage à Jordanie ;) Merci pour me proposer de venir chez toi à Paris durant la période où j'ai sentie perdue en août. Merci pour toutes les anecdotes que tu nous as racontées.

Je remercie « chaleureusement » Maha pour être une co-bureau gentille, une voisine sympa et une amie sincère. Merci pour ton caractère calme au bureau à l'exception les moments où tu manges tes biscuits ;) Merci pour m'avoir attendu chaque matin pour prendre le café ensemble. Merci pour le temps que tu m'as accordé chaque soir pour boire les infusions aromatisées ensemble et pour parler tout ce qui est passé dans nos journées. Merci pour toutes les conférences réalisées ensemble surtout nos souvenirs inoubliables de marche sous la pluie à Obernai. Merci pour ta spécifique expression « ya ma5joulé ».

Merci à Rim pour ton amitié et pour ton caractère calme. C'est avec toi que j'ai saisi les premiers pas vers la France. Merci pour tous les jolis souvenirs partagés ensemble surtout dans les années de Master 1 et 2. Merci aussi pour ton accueil à Bordeaux.

À Tonia, merci à toi pour les souvenirs inoubliables partagés ensemble en Master 2. Merci pour ton caractère très sympa. Je suis reconnaissante à ton accueil à Valenciennes et pour le voyage réalisé avec toi et Hala à Bruges.

Merci à Fakhrieldine, mon beau-frère, pour ton caractère formidable, pour ton sourire, pour toutes les journées et les soirées passés ensemble avec Hala. Merci pour ton amour infini à Hala et pour le voyage passé ensemble avec Hala, Maha et Ahmad à Rome. Merci aussi pour ta célèbre phrase « ma badha hal2ad ». Bonne courage pour la suite de ta thèse.

Merci à Fatima pour ton encouragement avec ta célèbre phrase « sna5od lbahra ma3an ». Merci Ahmad pour ta gentillesse, pour avoir toujours oublié tes oreilles dans nos discours et pour ta présence dans la vie de Maha. Merci à Ali, Dominique et leur fille Rivana, pour votre accueil formidable à Nantes, merci pour tous les soirées passées ensemble durant mon Master 2 et ma première année de thèse. Merci à Mariam pour ton encouragement et pour me faire découvrir le monde de thé aromatisé. Merci à Hassan Mohana pour ta gentillesse. Merci à Houssein Milani « Daher » pour ton caractère silencieux qui cache la tempête. Merci à Kassem Asfour pour ton accueil à Toulouse et pour les moments passés ensemble à Nantes. Merci à Marwa, Ali Haidar, Aya, Fatima Saad, Zakaria, Salam, Inas, Ghina, Mostafa Hazim, Houssein Naser Al Dine, Rayan, Mahdi, Khaled pour tous les moments passés ensemble à Nantes. Merci Rayane Hachem, Sara Maki, Alaa Chahadi, Fatima Naaim, Fatima Fahes, Mona Saleme, Mohamed Farhet. Merci à tous ceux que j'ai oubliés...

Finalement, merci à Hala, mon âme sœur.



# Table des matières

|          |                                                                                                                          |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction générale</b>                                                                                             | <b>11</b> |
|          | <b>Introduction générale</b>                                                                                             | <b>11</b> |
| 1.1      | Présentation générale et motivation physique . . . . .                                                                   | 11        |
| 1.1.1    | Plasma . . . . .                                                                                                         | 12        |
| 1.1.2    | Force électromagnétique . . . . .                                                                                        | 13        |
| 1.1.3    | Modèle cinétique général . . . . .                                                                                       | 14        |
| 1.1.4    | Problèmes et outils mathématiques associés . . . . .                                                                     | 16        |
| 1.2      | Le plan détaillé de la thèse . . . . .                                                                                   | 24        |
| 1.2.1    | Retour à l'équilibre pour le système de Fokker-Planck avec un<br>champ magnétique extérieur fort (Chapitre 2) . . . . .  | 25        |
| 1.2.2    | Étude de l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec<br>un champ magnétique (chapitre 3) . . . . .             | 26        |
| 1.2.3    | Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec<br>champ magnétique (chapitre 4) . . . . .                  | 30        |
| 1.3      | Liste de travaux rassemblés dans la thèse . . . . .                                                                      | 31        |
| 1.4      | Perspectives . . . . .                                                                                                   | 32        |
| 1.4.1    | Étude du problème non-linéaire basé au problème linéaire étudié<br>dans cette thèse : . . . . .                          | 32        |
| 1.4.2    | Généralisation du résultat du chapitre 3 . . . . .                                                                       | 33        |
| 1.4.3    | Estimation maximale pour l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck<br>avec un champ électro-magnétique non-régulier . . . . . | 33        |
| 1.4.4    | Étude du problème de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck fraction-<br>naire avec un champ magnétique extérieur . . . . .        | 34        |
| <b>2</b> | <b>Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with a strong external<br/>magnetic field</b>                   | <b>35</b> |
| 2.1      | Introduction and main results . . . . .                                                                                  | 36        |
| 2.1.1    | Introduction . . . . .                                                                                                   | 36        |
| 2.1.2    | Fokker-Planck equation with a given external magnetic field . . .                                                        | 36        |
| 2.2      | Study of the operator $P_1$ . . . . .                                                                                    | 42        |
| 2.3      | Trend to the equilibrium . . . . .                                                                                       | 44        |

|          |                                                                                                                 |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.1    | Hypocoercivity in the space $L^2(\mu^{1/2})$                                                                    | 44         |
| 2.3.2    | Hypocoercivity in the space $H^1(\mu^{1/2})$                                                                    | 48         |
| 2.4      | Enlargement of the functional space                                                                             | 53         |
| 2.4.1    | Intermediate results                                                                                            | 53         |
| 2.4.2    | Study of the magnetic-Fokker-Planck operator on the spaces $L^p(m)$ and $\tilde{W}^{1,p}(m)$ :                  | 56         |
| 2.5      | Appendix A. Property of the operator $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$                                            | 72         |
| 2.6      | Appendix B. Non positivity of a certain integral                                                                | 74         |
| <b>3</b> | <b>Étude de l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur</b>             | <b>75</b>  |
| 3.1      | Introduction et résultats principaux                                                                            | 76         |
| 3.1.1    | Présentation de l'opérateur                                                                                     | 76         |
| 3.1.2    | Les résultats principaux                                                                                        | 78         |
| 3.2      | Spectre de l'opérateur $P_{a,b}$                                                                                | 81         |
| 3.2.1    | Préliminaire.                                                                                                   | 81         |
| 3.2.2    | Démonstration du Théorème 3.1.1.                                                                                | 81         |
| 3.3      | Calcul de la norme de l'exponentielle de $M_{a,b}$                                                              | 88         |
| 3.3.1    | Calcul de la matrice exponentielle $e^{-tM_{a,b}}$                                                              | 88         |
| 3.3.2    | Démonstration du Théorème 3.1.2                                                                                 | 92         |
| 3.4      | Estimations précises en plusieurs régime de la norme exponentielle                                              | 99         |
| 3.4.1    | Asymptotique en temps petit.                                                                                    | 99         |
| 3.4.2    | Asymptotique lorsque $b$ tend vers l'infini.                                                                    | 103        |
| 3.4.3    | Asymptotique en temps long.                                                                                     | 106        |
| 3.5      | Annexe 1. Périodicité de $e^{t\Re\lambda_1}e^{-tM_{a,0}}$ quand $b = 0$ et $a > 1/4$                            | 108        |
| 3.6      | Annexe 2 : Illustrations numériques des résultats principaux                                                    | 109        |
| 3.6.1    | Abscisse spectrale de $M_{a,b}$                                                                                 | 109        |
| 3.6.2    | Régime lorsque $t \rightarrow 0^+$ .                                                                            | 110        |
| 3.6.3    | Régime $b \rightarrow +\infty$ .                                                                                | 110        |
| 3.6.4    | Régime en temps long                                                                                            | 111        |
| <b>4</b> | <b>Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique extérieur</b>                  | <b>119</b> |
| 4.1      | Introduction                                                                                                    | 120        |
| 4.1.1    | Rappels sur l'équation de Fokker-Planck                                                                         | 120        |
| 4.1.2    | Énoncé du résultat                                                                                              | 120        |
| 4.2      | Rappels sur l'hypoellipticité maximale dans l'approche nilpotente                                               | 123        |
| 4.2.1    | Hypoellipticité pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs                                             | 124        |
| 4.2.2    | Algèbres de Lie nilpotentes et graduées                                                                         | 125        |
| 4.2.3    | Théorie des représentations                                                                                     | 126        |
| 4.2.4    | Caractérisation de l'hypoellipticité dans le cas des opérateurs invariants homogènes sur les groupes stratifiés | 131        |

## TABLE DES MATIÈRES

---

|          |                                                                                                                   |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.5    | Application à l'hypoellipticité maximale des champs de vecteurs .                                                 | 133        |
| 4.3      | Démonstration du résultat principal quand $d = 2$ . . . . .                                                       | 134        |
| 4.3.1    | Application de la Proposition 4.2.11 : . . . . .                                                                  | 134        |
| 4.3.2    | Vérification du critère de Rockland . . . . .                                                                     | 136        |
| 4.3.3    | Deuxième approche. . . . .                                                                                        | 138        |
| 4.3.4    | Preuve du Théorème 4.1.7 . . . . .                                                                                | 142        |
| 4.4      | Démonstration du résultat principal quand $d = 3$ . . . . .                                                       | 146        |
| 4.4.1    | Préliminaires . . . . .                                                                                           | 146        |
| 4.4.2    | Construction de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ : . . . . .                                                        | 147        |
| 4.4.3    | Vérification du critère de Rockland . . . . .                                                                     | 149        |
| 4.4.4    | Fin de la preuve . . . . .                                                                                        | 150        |
| <b>A</b> | <b>Accrétivité Maximale pour des opérateurs de Fokker-Planck avec champ électromagnétique faiblement régulier</b> | <b>151</b> |
| A.1      | Introduction . . . . .                                                                                            | 152        |
| A.2      | Rappels . . . . .                                                                                                 | 153        |
| A.2.1    | Remarque préliminaire . . . . .                                                                                   | 153        |
| A.2.2    | Rappels sur la régularité Sobolev pour des opérateurs de Type-2 de Hörmander . . . . .                            | 154        |
| A.3      | Accrétivité de l'opérateur de Fokker-Planck magnétique avec faible régularité . . . . .                           | 155        |
| A.3.1    | Régularité Sobolev . . . . .                                                                                      | 155        |
| A.3.2    | Démonstration du Théorème A.3.1 . . . . .                                                                         | 156        |
| A.3.3    | Démonstration du Théorème A.1.1 . . . . .                                                                         | 157        |
| A.4      | Accrétivité maximale avec champ électromagnétique faiblement régulier .                                           | 157        |
| A.4.1    | Rappels sur la théorie de perturbation par un opérateur non borné                                                 | 158        |
| A.4.2    | Démonstration du Théorème A.1.2 . . . . .                                                                         | 158        |
| A.5      | Démonstration de la proposition A.3.2 . . . . .                                                                   | 159        |
| A.5.1    | Étape 1 . . . . .                                                                                                 | 159        |
| A.5.2    | Étape 2 : Solution générale . . . . .                                                                             | 160        |
| A.5.3    | Étape 3 : Dédire une borne locale et uniforme de $\nabla_v h$ . . . . .                                           | 164        |
| A.5.4    | Conclusion . . . . .                                                                                              | 164        |
| <b>B</b> | <b>Hypocoercivité mode par mode</b>                                                                               | <b>165</b> |
| B.1      | Autre démonstration de l'hypocoercivité de Fokker-Planck magnétique dans $L^2(\mu^{-1/2})$ . . . . .              | 165        |
| B.1.1    | Hypocoercivité mode par mode . . . . .                                                                            | 166        |
| B.2      | Démonstration du Théorème B.1.1 . . . . .                                                                         | 167        |
|          | <b>Conclusion</b>                                                                                                 | <b>171</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                                              | <b>172</b> |

# Introduction générale

## 1.1 Présentation générale et motivation physique

La théorie cinétique des gaz a pour but de modéliser un système formé par un grand nombre de particules tels qu'un gaz. Il existe plusieurs approches pour décrire la dynamique d'un tel système. La première approche est la description microscopique. Cette dernière étudie les trajectoires de chaque particule du système en suivant le principe de Newton. Pour un grand nombre de particules, cela correspond à étudier un modèle composé d'un même nombre d'équations aux dérivées ordinaires couplées. Pour cette raison, l'étude d'un tel modèle est difficile.

La deuxième approche est de décrire le système de particules en fonctions de grandeurs dites macroscopiques associées à ce système. Ce sont des quantités observables et mesurables comme la masse, la vitesse moyenne et la température, c'est la description macroscopique. Des exemples d'équations macroscopiques sont l'équation d'Euler et de Navier-Stokes.

La troisième description est la théorie cinétique des gaz, qui se place entre les approches microscopiques et macroscopiques, et est appelée mésoscopique. C'est une description statistique du mouvement des particules plus simple que l'étude de la trajectoire de chaque particule donnée par la description microscopique. Cette théorie consiste à modéliser la dynamique d'un système de particules décrit par une densité de probabilités  $F(t, x, v)$  représentant au temps  $t \geq 0$  la densité de présence de l'ensemble des particules à la position  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  et à une vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ . Notons que la description cinétique contient plus d'informations que la description macroscopique.

Nous nous intéressons dans cette thèse, dans un cadre mésoscopique, à un système de particules chargées en tenant en compte des collisions entre les particules et sous l'effet d'une force extérieure. Ce qui nous intéresse, en particulier, est de comprendre l'effet

électromagnétique sur le système de particules et son retour à l'équilibre lorsque le système est soumis à un champ électro-magnétique. On va rappeler quelques éléments sur des plasmas, qui sont des exemples fondamentaux de systèmes de particules chargées.

### 1.1.1 Plasma

Le mot "Plasma" a été introduit par les physiciens américains Irving Langmuir et Levi Tonks en 1929 pour désigner un gaz ionisé. Par la suite, ce terme a été utilisé en astrophysique pour désigner un état de la matière constitué de particules chargées (ions et électrons). Il forme un quatrième état de la matière. On note que 99% de l'univers est à l'état plasma. Dans l'environnement terrestre, il existe des exemples frappants de plasmas dans l'ionosphère ou la magnétosphère....

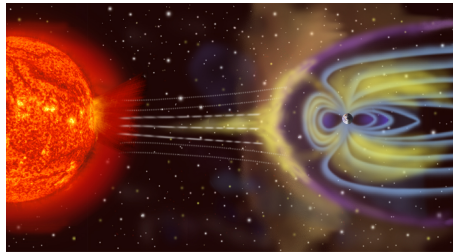


FIGURE 1.1: Magnétosphère

Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Magn%C3%A9tosph%C3%A8re>

Il est essentiel, lorsque l'on s'intéresse à l'étude des plasmas, de considérer le champ électro-magnétique extérieur ou produit par le mouvement des particules (dit auto-consistant). On s'intéresse particulièrement dans cette thèse à l'influence du champ magnétique sur le plasma. Un exemple dans la nature de plasma magnétisé est présent dans *l'ionosphère*.



FIGURE 1.2: L'ionosphère qui protège la terre.

Source : <https://www.youtube.com/watch?v=IZzVQGZFGLk>

**Ionosphère :** C'est une région de l'atmosphère, qui se situe à 80 Kilomètre de la surface terrestre. Elle est composée de particules chargées jouant un rôle crucial dans le comportement radio longue portée. Les rayons ultra-violet ionisent les molécules d'air

dans cette région et produisent des ions et des électrons. Lorsque les molécules d'air sont ionisées les ions et les électrons sont produits et le champ magnétique terrestre les piège, elles sont alors en mouvement hélicoïdale autour du champ.

Au delà de la nature, de nouvelles techniques consistent à fabriquer des plasmas afin de bénéficier de leurs propriétés. Un second exemple est le *tokamak*.

**Tokamak :** Le tokamak est une chambre torique entouré par des bobines magnétiques, inventée dans les années 1950-1960 par les physiciens Igor Tamm et Andreï Sakharov. Pendant le fonctionnement de la machine, un plasma se produit à partir des atomes très légers (comme le deutérium et le tritium), et confiné grâce à un champ magnétique très puissant. Quand les particules chargées ont suffisamment d'énergie cinétique, la réaction de fusion nucléaire se produit. L'énergie générée par cette fusion est utilisée pour maintenir en bon état la réaction de fusion et le reste de l'énergie est récupéré pour produire de l'électricité. Pour plus de détails et un point de vue mathématique sur le tokamak, on renvoie par exemple à la thèse de M. Herda [44] et ses références incluses. (Voir aussi la thèse de M. Badsı [4] pour l'étude mathématique du problème d'interaction plasma-paroi qui se trouve dans le tokamak.)

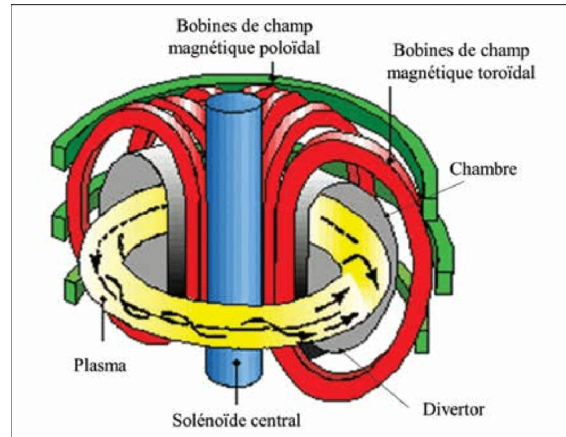


FIGURE 1.3: Schéma montrant les principaux éléments d'un tokamak. Source : Figure 5 dans [57]

Pour mieux comprendre le mouvement de particules chargées dans un champ magnétique, nous allons à présent définir précisément la force électro-magnétique pour une particule chargée.

### 1.1.2 Force électromagnétique

Pour une particule de charge  $q$ , de masse  $m$  se déplaçant à une vitesse  $v$  dans un champ électro-magnétique  $(E, B)$  donné, la force de Lorentz ou électromagnétique prend la forme suivante :

$$\mathcal{F} = q(v \wedge B) + qE = \mathcal{F}_B + \mathcal{F}_E,$$

où “ $\wedge$ ” désigne le produit vectoriel. La force magnétique a pour norme

$$|\mathcal{F}_B| = qvB|\sin \alpha|,$$

où  $\alpha$  est l’angle entre le vecteur vitesse  $v$  et le vecteur du champ magnétique  $B$  comme illustre la Figure 1.4.

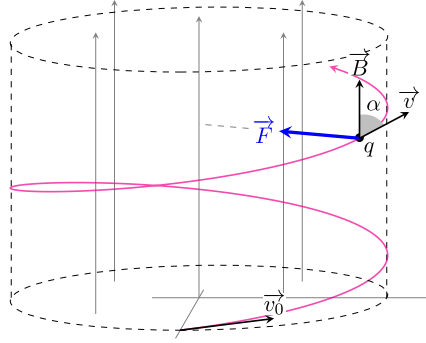


FIGURE 1.4: Mouvements hélicoïdal d’une particule de charge négative dans un champ magnétique.

Source : <https://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-magnetique.php>

Par exemple, dans le cas d’un champ magnétique constant, le mouvement d’une particule chargée est déterminé par la loi de conservation de l’énergie totale et le premier invariant adiabatique<sup>1</sup>. Posons la décomposition suivante :

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp},$$

où  $v_{\parallel}$  et  $v_{\perp}$  sont les composantes de la vitesse parallèle et perpendiculaire à la direction du champ magnétique respectivement (voir Figure 1.5).

Si  $v_{\parallel} = 0$  (i.e.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), la particule exécute un mouvement circulaire autour du champ. Si  $v_{\parallel}$  non nul, le mouvement magnétique de la particule est un hélice dont l’axe de rotation est parallèle à la direction du champ magnétique  $B$ .

### 1.1.3 Modèle cinétique général

Dans cette thèse, on s’intéresse à un modèle d’équation cinétique. Ces équations, comme mentionné avant, modélisent la dynamique d’un système de particules chargées décrit par une densité de distribution  $F(t, x, v)$ . Elle représente au temps  $t \geq 0$  la densité de présence d’un système des particules à la position  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  avec une vitesse  $v \in \mathbb{R}^d$ .

1. la conservation de la quantité  $\frac{m|v_{\perp}|^2}{2|B|}$  le long du temps où  $v_{\perp}$  est la composante de la vitesse perpendiculaire à la direction du champ magnétique  $B$ .

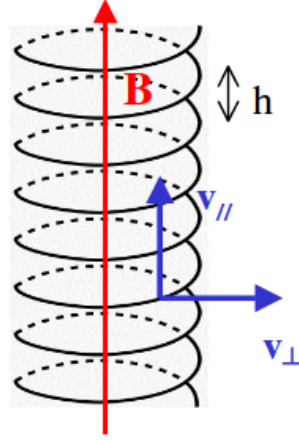


FIGURE 1.5: Les composantes de la vitesse parallèle et perpendiculaire au champ magnétique

Source : [http://www.lesia.obspm.fr/perso/jean-marie-malherbe/COURS\\_L/ELMAdias.pdf](http://www.lesia.obspm.fr/perso/jean-marie-malherbe/COURS_L/ELMAdias.pdf)

En l'absence de force et de chocs, les particules se déplacent en ligne droite à vitesse constante d'après le principe de Newton

$$\begin{cases} dx/dt = v \\ dv/dt = 0 \end{cases}$$

et  $F$  est solution de l'équation de transport libre (dite de Vlasov)

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = 0, \quad F|_{t=0} = F_{in},$$

où  $\nabla_x$  est l'opérateur de gradient par rapport à la variable  $x$ , et le symbole “ $\cdot$ ” représente le produit scalaire dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ .

Lorsqu'il y a des forces et des chocs, cette équation doit être modifiée. On aboutit alors à des équations cinétiques variées, les plus connues étant celles de Boltzmann, Landau [95, 24] et Fokker-Planck [79, 73]. Cette dernière est celle qui nous intéresse dans la suite de la thèse. Le modèle général pour la dynamique des particules chargées, en supposant qu'elles subissent des chocs modélisés par un noyau de collision  $Q$  et sous l'action d'une force extérieure  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^d$ , est donné par l'équation cinétique suivante :

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F + \mathcal{F}(t, x, v) \cdot \nabla_v F = Q(F), \quad (1.1)$$

où  $Q$  n'agit qu'en vitesse et où  $\mathcal{F}$  peut elle même dépendre de  $F$  via des équations de Poisson ou Maxwell. Dans cette thèse nous nous concentrons sur le cas linéaire (*i.e.*  $\mathcal{F}$  est donné et indépendant du temps et  $Q$  est linéaire) et sur le cas où l'opérateur  $Q$  est

l'opérateur de collision de Fokker-Planck défini comme suit :

$$Q_{FP} F = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) F. \quad (1.2)$$

L'équation de Newton associée à chaque particule de l'équation (1.1) avec l'opérateur de collision  $Q = Q_{FP}$  est de la forme

$$\begin{cases} dx/dt = v \\ dv/dt = \mathcal{F} - v + d\Gamma \end{cases}$$

où  $\Gamma$  est un bruit blanc. Pour plus de détails et un point de vue probabiliste associé à l'équation de Fokker-Planck (équation (1.1) avec  $Q = Q_{FP}$ ), on renvoie au livre de H. Risken [79, Chapitre 1]. Dans cette thèse, on va étudier un modèle cinétique de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur *i.e.*

$$\mathcal{F}(x, v) = v \wedge B_e(x), \quad \forall x \in \mathbb{T}^3, v \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad Q = Q_{FP},$$

où  $B_e$  désigne le champ magnétique qui n'agit qu'en  $x$ .

#### 1.1.4 Problèmes et outils mathématiques associés

Le problème de Cauchy que nous étudions est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t F &= LF = X_0 F + QF, \quad F|_{t=0} = F_{in}, \\ \text{où } X_0 &= -v \cdot \nabla_x - \mathcal{F} \cdot \nabla_v, \end{aligned} \quad (1.3)$$

et on s'intéresse aux trois problèmes suivants :

**1) Existence et unicité des solutions.** Afin de prouver qu'un tel problème cinétique linéaire est bien posé, on utilise le Théorème de Hille-Yosida. Ce théorème est un outil puissant et fondamental reliant les propriétés de dissipation d'un opérateur non-borné  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  sur un espace de Banach  $E$  et l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

**Théorème 1.1.1** (Théorème de Hille-Yosida, 1948). *Soit  $(A, D(A) \subset E)$  un opérateur maximal accréatif, alors il existe un unique semi-groupe  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  noté aussi  $e^{-tA}$  tel que  $u(t) = e^{-tA} u_0$  est solution du système (1.4) qui vérifie  $u \in C^1(\mathbb{R}^+, E) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(A))$ .*

Il a été démontré pour la première fois indépendamment par E. Hille dans [47] et par K. Yosida dans [100] pour les  $C^0$ -semi-groupes de contractions. Nous utiliserons ce théorème dans le cas où  $E = H$  est un espace de Hilbert. Nous rappelons la définition d'un opérateur maximal accréatif dans ce cadre.

**Définition 1.1.2.** Soit  $(A, \mathcal{D}(A))$  un opérateur non borné, avec  $\mathcal{D}(A)$  dense dans  $H$ . On dit que  $A$  est un opérateur accréitif maximal si et seulement si

- 1)  $\Re \langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$ .
- 2)  $\exists \lambda_0 > 0$  tel que  $\text{Im}(A + \lambda_0 Id) = H$ .

où  $\Re$  désigne la partie réelle et  $\text{Im}$  désigne l'image d'un opérateur.

On définit un opérateur  $A$  dissipatif si et seulement si  $-A$  est accréitif. Par conséquent, pour montrer l'existence de solution au sens de semi-groupe associé (au sens du Théorème de Hille-Yosida énoncé) du problème (1.3), il est équivalent de montrer que l'opérateur  $L$  est maximal dissipatif (autrement dit  $-L$  est maximal accréitif).

**2) Comportement en temps long.** Le  $H$ -Théorème a été introduit par Boltzmann en 1872 dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, lorsqu'un gaz hors équilibre vérifie l'équation (1.3). Dans notre contexte et selon ce théorème, il existe une certaine grandeur  $H(t)$  appelée entropie qui varie de façon monotone au cours du temps, pendant laquelle le gaz relaxe vers l'équilibre thermodynamique caractérisé par la maxwellienne  $\mu$ , qui est l'unique solution indépendante du temps de l'équation (1.3). L'effet des collisions va faire tendre la distribution  $F(t, x, v)$  vers  $\mu$  avec le temps. Une question cruciale est alors d'étudier le retour à l'équilibre et de connaître le taux de convergence. Il s'agit donc de montrer la convergence de la solution  $F$  de l'équation d'évolution (1.3) vers l'équilibre  $\mu$  lorsque le temps tend vers l'infini. Pour répondre à cette question, plusieurs techniques existent.

(A) - *La méthode d'hypo coercivité hilbertienne*. Cette méthode a été élaborée en référence à l'hypoellipticité (voir en particulier [19, 35, 39, 95]). Rappelons qu'un opérateur  $P$  est dit hypoelliptique lorsqu'il vérifie la propriété suivante : pour une fonction régulière donnée  $g$ , si  $u$  est solution au sens des distributions de  $Pu = g$  alors  $u$  est également régulière. Dans notre contexte, nous regarderons surtout l'effet régularisant de l'équation (1.3), liée au fait que l'opérateur  $L$  contient une partie elliptique en vitesse représenté par l'opérateur de collision  $Q$  et une partie de transport et de force extérieur  $X_0$ . On renvoie par exemple aux travaux fondateurs suivants [53, 63, 80, 81, 82] pour plus de détails sur cette théorie et ses applications aux équations aux dérivées partielles. Dans la méthode hypo coercive, on s'intéresse plutôt aux propriétés spectrales (question sur l'existence d'un trou spectral, estimations de la résolvante, compacité de la résolvante,...) et au retour à l'équilibre (avec une mesure du taux de convergence). Normalement dans l'application de cette méthode aux équations cinétiques linéaires de la forme (1.3), on cherche à montrer la dissipativité globale du système (1.3) dans des espaces hilbertiens pondérés  $H$  avec un poids associé à la maxwellienne (typiquement la maxwellienne à la puissance  $-1/2$ ). Cela revient souvent à chercher une certaine fonctionnelle  $\mathcal{G}$  vérifiant l'estimation d'équivalence suivante :

$$C_1 \|u\|_H^2 \leq \mathcal{G}(u) \leq C_2 \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H,$$

et telle que  $\mathcal{G}(F(t))$  décroît au cours du temps et on appelle  $\mathcal{G}$  dans la théorie cinétique des gaz *entropie relative modifiée*. La décroissance de  $\mathcal{G}(F(t))$  et l'estimation d'équivalence nous implique la dissipativité globale de la solution du système (1.3) dans l'espace  $H$ . Dans le cas où la décroissance est exponentielle, ce résultat d'un point de vue spectral peut s'interpréter comme impliquant l'existence d'un trou spectral pour l'opérateur  $L$  dans l'espace Hilbertien  $H$ . (cf [67, 41, 95, 96])

Par extension, d'autres méthodes ont également été appelées "hypocoercive" à partir du moment où elles ont permis d'établir un retour quantitatif vers l'équilibre. Voir en particulier [18] et aussi [12, 17, 27, 28, 99].

Dans le cas de l'hypocoercivité "hilbertienne" basé sur des techniques microlocales, on obtient dans les cas favorables des taux exponentiels de convergence [39, 35, 37, 36, 68, 69, 10, 95]. Dans cette thèse, on montre l'hypocoercivité de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur dans les espaces pondérés de type  $L^2$  et  $H^1$  avec un poids égale à  $\mu^{-1/2}$ .

- (B) - *La méthode d'élargissement d'espace de Banach*. Cette théorie s'applique à des opérateurs pour lesquels on sait déjà qu'il y a un trou spectral dans un petit espace pondéré comme  $H$ , par exemple par la méthode précédente, et pour lesquels on cherche à obtenir la même type de résultat dans un espace plus grand. Dans l'étude des équations cinétiques, la plupart des résultats d'existence de trou spectral de l'opérateur  $L$  ont lieu dans des espaces de Hilbert à poids (normalement des espaces de type  $L^2$  ou  $H^1$  avec un poids égal à la racine carré de l'inverse de la maxwellienne) dans lesquels l'opérateur de collision  $Q$  est autoadjoint. On souhaite élargir l'espace dans lequel l'opérateur  $L$  a un trou spectral. Mouhot dans [68] a introduit ce type de stratégie développé ensuite dans un cadre abstrait par Gualdani, Mischler et Mouhot dans [26] (voir aussi [65]). Cette méthode donne un ensemble de conditions sur l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  (l'extension de l'opérateur  $L$  dans l'espace élargi) pour que ce dernier hérite de la plupart des propriétés quantitatives de spectre et de semi-groupe associé  $S_{\mathcal{L}}$ . En particulier elle montre que l'opérateur  $\mathcal{L}$  a un trou spectral dans l'espace élargi. Voici quelques hypothèses sur l'opérateur  $\mathcal{L}$  nécessaires pour atteindre l'objectif expliqué précédemment. Comme on a mentionné avant, on suppose que l'opérateur  $L$  admet un trou spectral dans un petit espace  $E$ , ce qui implique la localisation du spectre et la dissipativité de l'opérateur dans l'espace  $E$ . L'opérateur  $\mathcal{L}$  doit pouvoir se diviser en deux parties  $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  avec  $\mathcal{A}$  un opérateur borné (par exemple, la multiplication par une fonction troncature), et  $\mathcal{B}$  un opérateur dissipatif dans  $\mathcal{E}$ . En plus, les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  doivent être tels que l'opérateur  $\mathcal{A}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  a des propriétés régularisantes.

Dans cette thèse, on appliquera cette méthode au modèle de Fokker-Planck magnétique dans le but d'étendre les résultats obtenus de retour exponentiel à l'équilibre dans les espaces de type  $L^2$  et  $H^1$  avec un poids exponentiel à des espaces de type  $L^1(\langle v \rangle^k)$ .

- (C) - *Analyse microlocale des opérateurs quadratiques*. Ces dernières années, l'étude

microlocale des équations aux dérivées partielles a bénéficié d'une nouvelle attention avec des applications inspirées par l'étude de certains problèmes non-autoadjoints. En particulier, elle a permis l'étude du comportement asymptotiques des solutions de certaines équations d'évolution associées à des opérateurs non-autoadjoints

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + Pu(t, x) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Plus spécifiquement, cette problématique a porté ses fruits en théorie cinétique des gaz pour répondre à la question de retour à l'équilibre. Dans notre contexte, Un exemple d'opérateur cinétique non-autoadjoint est l'opérateur de Fokker-Planck avec un potentiel électrique extérieur

$$P_{FP} = v \cdot \nabla_x - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v - \Delta_v + |v|^2/4 - d/2, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2d}, \quad (1.5)$$

où  $V$  est un potentiel de confinement. On note que l'opérateur  $P_{FP}$  est le conjugué par  $\mu^{1/2}$  de l'opérateur de Fokker-Planck  $L = X_0 + Q_{FP}$  où  $Q_{FP}$  donné dans (1.2) et  $X_0$  donné dans (1.3) avec  $\mathcal{F} = -\nabla_x V(x)$ . L'étude microlocal de ce dernier a été initié par Hérau, Nier [39] et Hérau, Sjostrand et Stolk dans [40] dans un cadre semi-classique (voir aussi [38, 52]). Ce dernier article a été une source d'inspiration pour l'étude générale des certains opérateurs pseudodifférentiels à caractéristique double développée dans [49, 48]. Rappelons brièvement la définition : soit  $P = p^w(X, D_X)$  ( $D_X = \frac{1}{i} \nabla_X$ ) un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre  $m$  (nous renvoyons à au livre [85] pour une introduction aux opérateurs pseudodifférentiels) et de symbole de Weyl

$$p(X, \Xi) = p_m(X, \Xi) + p_{m-1}(X, \Xi) + \dots,$$

où  $p_j$  est homogène de degré  $j$ . On dit que  $P$  à un point de caractéristique double  $(X_0, \Xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$  ( $n = 2d$  et  $X = (x, v)$ ) si

$$p_m(X_0, \Xi_0) = \nabla p_m(X_0, \Xi_0) = 0.$$

Il est important, pour étudier les propriétés spectrales de cet opérateur, de considérer la forme quadratique  $q$  associée au développement de Taylor du symbole principal  $p_m$  au point  $(X_0, \Xi_0)$  (nous renvoyons aux travaux [88, 52] pour plus de détails sur le sujet). L'analyse microlocale des opérateurs à caractéristiques double commence par l'étude et la compréhension des propriétés spectrales des opérateurs quadratiques.

On s'intéresse ici à des opérateurs agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et décomposables en opérateurs d'annihilation et de création  $A_j = \partial_{x_j} + x_j$  et  $A_j^* = -\partial_{x_j} + x_j$  comme suit :

$$P = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n m_{jk} A_k^* A_j, \quad (1.6)$$

où  $M = (m_{jk})_{j,k=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Pour cette forme spécifique dite *symétrisé* des opérateurs quadratiques, des nombreux auteurs, en particulier dans les travaux suivants [88, 2, 51], se sont intéressés à ses propriétés spectrales. Plus spécifiquement, les travaux précédents ont mis en relief les relations entre l'opérateur  $P$  et sa matrice associée  $M$ . Voici un résultat donnant une description exacte du spectre de l'opérateur  $P$ .

**Corollaire 1.1.3** (Corollaire 2.3 dans [2]). *Soit  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  les valeurs propres de la matrice  $M$ , répété par leur multiplicité. Soit  $G$  tel que  $GMG^{-1}$  est en forme normale de Jordan, ayant donc des entrées diagonales  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors*

$$\{\mathcal{B}^*((Gz)^\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$$

*forme un système des fonctions propres de l'opérateur  $P$  associées à des valeurs propres généralisées*

$$\lambda_\alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

où  $\mathcal{B}$  désigne la transformation de Bargmann définie comme suit :

$$\mathcal{B}f(z) = \pi^{-3n/4} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\sqrt{2}xz - x^2/2 - z^2/2} dx.$$

Ici  $\mathcal{B}$  est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans l'espace  $\mathcal{H}$  des fonctions holomorphe à  $n$  variables pour lesquelles la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \left( \int_{\mathbb{C}^n} |u(z)|^2 e^{-|z|^2} dz \right)^{1/2}$$

est finie et  $\mathcal{B}^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $\mathcal{B}$ .

A. Aleman et J. Viola dans l'article [2] ont montré le corollaire précédent en suivant essentiellement des travaux fondateurs de J. Sjöstrand dans [88, Théorème 3.5]. (cf aussi [51, Lemme 4.1]).

D'après tout ce qui précède, on est capable à trouver le spectre exacte des opérateurs de type (1.6). Maintenant, on s'intéresse à la question du retour à l'équilibre pour les équations associées aux opérateurs quadratiques de type (1.6). Cela revient généralement à étudier l'opérateur suivant :

$$e^{-tP}(1 - \Pi_0)$$

où  $\Pi_0$  est le projecteur spectral associé à la valeur propre zéro (typiquement, pour l'opérateur de Fokker-Planck, c'est le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel engendré par la racine carrée de la maxwellienne). D'après les travaux [88, 1, 2], la question du retour à équilibre se fait en étudiant la norme de la matrice exponentielle  $e^{-tM}$ , grâce à l'égalité suivante, qui est montré dans [2, Corollaire 7]

$$\|e^{-tP}(1 - \Pi_0)\| = \|e^{-tM}\|.$$

Le calcul de cette norme constitue le cœur de notre étude de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique constant  $B$  et avec un champ électrique linéaire qui est présenté dans le chapitre 3, dans lequel on a rajouté une force de Lorentz ( $\mathcal{F} = v \wedge B$  à l'opérateur  $P_{FP}$  donné en (1.5)). On explicite la forme exacte de la norme exponentielle  $\|e^{-tM}\|$  avec des estimations uniformes et précises dans plusieurs régimes, et en mettant en relief l'influence du champ magnétique.

**3) Régularité des solutions.** Depuis une quinzaine d'années, les estimations hypoelliptiques maximales connaissent un regain d'intérêt en liaison avec des questions provenant de la théorie cinétique des gaz. Dans cette direction de nombreux auteurs ont démontré des estimations maximales pour en déduire la compacité de la résolvante de l'opérateur de Fokker-Planck et avoir des estimations sur la résolvante permettant d'aborder la question du retour à l'équilibre. F. Hérau et F. Nier dans l'article [39] ont mis en évidence les liens entre l'opérateur de Fokker-Planck avec un potentiel de confinement  $P_{FP}$  défini dans (1.5) et le Laplacien de Witten associé, qui est défini comme suit :

$$\Delta_{V,v} = -\Delta_x + |\nabla_x V|^2/4 - \Delta_x V/2 - \Delta_v + |v|^2/4 - d/2.$$

Puis, dans le livre de B. Helffer et F. Nier [73], ces travaux ont été complétés et expliqués de manière générale, et nous renvoyons plus spécifiquement au chapitre 9 pour une démonstration pédagogique de l'estimation maximale ou estimation de type "hypoellipticité maximale". Nous donnons maintenant quelques éléments sur l'esprit des estimations "hypoelliptiques maximales", qui concernent les opérateurs polynômes de champs de vecteurs. On considère des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  et  $Y_1, \dots, Y_q$  réels,  $C^\infty$ , sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Soit  $P(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{p+q}; z)$  un polynôme non commutatif de degré  $m \in \mathbb{N}^*$  à  $p+q$  variables, à coefficients dépendant de manière  $C^\infty$  de  $z \in \Omega$ , et soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur différentiel défini sur  $\Omega$  par

$$\mathcal{P} = P(Z_1, \dots, Z_{p+q}; z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z) Z^\alpha, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p+q\}^k, \quad (1.7)$$

où pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, p+q\}^k$  on désigne par  $|\alpha|$  la norme suivante :

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^k d(\alpha_j) \text{ avec } d(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j \in \{1, \dots, p\} \\ 2 & \text{si } \alpha_j \in \{p+1, \dots, p+q\}, \end{cases}$$

et où les champs de vecteurs  $Z_\ell \forall \ell \in \{1, \dots, p+q\}$  sont définis par

$$\begin{aligned} Z_\ell &= X_\ell, & \forall \ell &= 1, \dots, p \\ Z_\ell &= Y_{\ell-p}, & \forall \ell &= p+1, \dots, p+q, \end{aligned}$$

et pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, p+q\}^k$ ,  $Z^\alpha = Z_{\alpha_1} \dots Z_{\alpha_k}$ . On suppose de plus que les champs  $Z_j$  avec  $j \in \{1, \dots, p+q\}$  vérifient la condition de Hörmander suivante :

**Hypothèse 1.1.4.** *Il existe un entier  $r$  tel que les crochets des champs  $Z_j$  de longueur inférieure ou égale à  $r$  engendrent, en chaque point  $z$  de  $\Omega$ ,  $T_z\Omega$  tout entier.*

Lorsque  $q = 0$  et que les champs de vecteur  $Z_j$  satisfont la condition de Hörmander 1.1.4, l'opérateur  $\mathcal{P}$  est appelé un opérateur différentiel de type 1. Ainsi, l'opérateur de Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2$  (cas  $q = 0$ ) est un opérateur de type-1.

Lorsque  $q = 1$  et que les champs de vecteur  $Z_j$  satisfont la condition de Hörmander 1.1.4, l'opérateur  $\mathcal{P}$  est appelé un opérateur différentiel de type-2. L'opérateur également étudié par Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2 + Y_1$  (cas  $q = 1$ ) est ainsi un opérateur de type-2.

On pose la définition suivante.

**Définition 1.1.5.** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  (avec de plus  $m$  pair si  $q \neq 0$ ). On dit que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal en un point  $z$  de  $\Omega$ , s'il existe un voisinage  $\omega$  de  $z$ , et une constante  $C_\omega$  strictement positive telle que l'on ait :*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 \leq C_\omega [\|\mathcal{P}u\|_{L^2(\omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\omega)}^2], \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega), \quad (1.8)$$

où on désigne par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}$  la norme dont le carré est défini par :

$$u \rightarrow \|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|Z_{\alpha_1} \dots Z_{\alpha_k} u\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p+q\}^k.$$

Helffer et Nourrigat ont montré dans [29], que si la condition de Hörmander est vérifiée en  $z$ , alors l'hypoellipticité maximale en  $z$  implique que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique dans un voisinage de  $z$ , ce qui justifie la terminologie. Rothschild et Stein ont montré dans [82] que si l'opérateur homogène associé à  $\mathcal{P}$ , i.e.  $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z) Z^\alpha$  est hypoelliptique en un point  $z_0$  alors  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal dans un voisinage de  $z_0$ .

Les preuves de ce type d'estimations reposent sur la notion d'algèbre de Lie graduée (on renvoie au Chapitre 4 pour une définition précise) et de propriétés des représentations irréductibles. Rappelons maintenant la notion de représentation irréductible.

Soit  $G$  un groupe de Lie, et  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Une représentation complexe  $(\pi, V)$  du groupe  $G$  est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \pi : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \pi(g, v), \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\pi(e, v) = v$ ,  $\forall v \in V$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$  pour la loi de multiplication.
2.  $\pi(g, \pi(h, v)) = \pi(gh, v)$ ,  $\forall h, g \in G$ ,  $\forall v \in V$ .

L'espace  $V$  (ou  $V_\pi$  si on veut rappeler la référence à  $\pi$ ) est appelé espace de représentation de  $G$ . Si  $V$  est de dimension finie, sa dimension est notée  $d_\pi = \dim V$ .

Si de plus  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ , la représentation  $(\pi, V)$  est dite unitaire si  $\pi$  vérifie la propriété suivante :

$$\langle \pi(g, v), \pi(g, w) \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \quad \forall g \in G, \forall v, w \in V.$$

On utilisera aussi la notation  $\pi(g)$  où

$$\pi(g)v = \pi(g, v).$$

On dit qu'une représentation  $\pi$  de  $G$  est irréductible si elle est non nulle et elle n'admet aucun sous-espace autre que  $\{0\}$  et  $V$  invariant par  $\pi$ .

Rappelons maintenant un théorème, qui relie le caractère d'hypoellipticité d'un opérateur polynôme de champ de vecteur sur une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  avec les propriétés des représentations irréductibles.

**Théorème 1.1.6** (Théorème 0.1 dans [30]). *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie graduée et soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (1.7) est hypoelliptique dans  $G$  (le groupe  $G := \exp \mathcal{G}$  associé à l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ).*
- 2) *Pour toute représentation  $\pi$  dans  $\hat{G}$  (l'ensemble de représentations irréductibles du groupe  $G$  associé à  $\mathcal{G}$ ) non triviale, l'opérateur  $\pi(\mathcal{P})$  est injectif dans  $\mathcal{S}_\pi$  (où  $\mathcal{S}_\pi$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).*

Ce théorème a été conjecturé par C. Rockland dans [80] et démontré dans le cas du groupe de Heisenberg par lui, puis dans le cas général par R. Beals [6] pour la condition nécessaire et par B. Helffer et J. Nourrigat dans [34] pour la condition suffisante.

On sait par la théorie de Kirillov que, dans le cas nilpotent, les représentations irréductibles sont associées à des éléments de  $\mathcal{G}^*$  (l'espace dual de  $\mathcal{G}$ ) et que, quand  $\pi$  est irréductible, l'espace de représentation  $V_\pi$  s'identifie à  $L^2(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  où  $k(\pi)$  est un entier avec  $L^2(\mathbb{R}^0) = \mathbb{C}$  par convention. On note  $\hat{G}$  l'ensemble de représentations irréductibles du groupe, simplement connexe  $G := \exp \mathcal{G}$  associé à  $\mathcal{G}$ . Il est aussi important de noter que dans le cas d'une représentation irréductible,  $\mathcal{S}_\pi$  s'identifie à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ .

La condition 2 du Théorème 1.1.6 sera appelée la condition de Rockland. Pour la vérifier, on observe que pour  $\pi$  une représentation irréductible non triviale il suffit de montrer que, si  $u$  vérifie  $\pi(\mathcal{P})u = 0$ , alors

$$\text{Dans le cas } q = 0 : \quad \pi(X_j)u = 0, \quad \forall j = 1, \dots, p,$$

$$\text{Dans le cas } q \neq 0 : \quad \pi(X_\ell) = 0 \text{ et } \pi(Y_j) = 0, \quad \forall \ell = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, q.$$

Ceci implique en effet, dans le cas de type 1 et 2, que

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G}.$$

Puis, une caractérisation de l'irréductibilité de  $\pi$  et l'hypothèse non triviale donne  $u = 0$ . Dans cette thèse, on va montrer une estimation maximale de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique lipschitzien, qui représente le principal résultat de l'article [58] et le quatrième chapitre de cette thèse.

## 1.2 Le plan détaillé de la thèse

Cette thèse est dédiée à l'étude de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur, en utilisant les techniques mathématiques présentées dans la section précédente.

**Notations :** Nous introduisons ici des notations concernant les espaces fonctionnels qui seront utilisés dans les chapitres 2 et 4 respectivement.

- **Espaces fonctionnels utilisés dans le Chapitre 2.** Nous allons considérer des fonctions à deux variables  $h = h(x, v)$  avec  $x \in \mathbb{T}^3$  et  $v \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $m = m(v)$  une mesure de Borel positive réelle. On définit l'espace de Lebesgue à poids  $L^p(m)$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ , comme l'espace associé à la norme suivante :

$$\|h\|_{L^p(m)} := \|h m\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} h^p m^p dv dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit ensuite l'espace de Sobolev modifié à poids  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  comme l'espace associé à la norme suivante :

$$\|h\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} = \left( \|h\|_{L^p(m(v))}^p + \|\nabla_v h\|_{L^p(m)}^p + \|\nabla_x h\|_{L^p(m)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- **Espaces fonctionnels utilisés dans le Chapitre 4.** On définit  $B^2(\mathbb{R}^d)$  (ou  $B_v^2$  pour indiquer le nom des variables) comme l'espace hilbertien associé à la norme suivante :

$$\|u\|_{B^2} := \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}.$$

On définit ensuite  $\tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{T}_x^d, B_v^2(\mathbb{R}^d))$  associé à la norme hilbertienne suivante :

$$\|u\|_{\tilde{B}^2} = \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)}^2}. \quad (1.9)$$

Finalement, on note  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ , l'espace des fonctions Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On munit l'espace  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$  de la norme suivante

$$\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d) \ni u \mapsto \|u\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} + \sup_{x,y \in \mathbb{T}^d, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)},$$

où  $d$  est la distance sur le tore  $\mathbb{T}^d$  identifié à  $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  par

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^d, d(x, y) = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |x - y + \alpha|.$$

Nous en venons maintenant à la présentation détaillée de l'équation étudiée et de l'opérateur associé ainsi que des principaux résultats prouvés dans cette thèse. Dans les quatre sections suivantes nous résumons et commentons nos contributions des Chapitres 2 à 4.

### 1.2.1 Retour à l'équilibre pour le système de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur fort (Chapitre 2)

On s'intéresse à l'équation cinétique linéaire inhomogène (c'est-à-dire que les solutions dépendent à la fois de la vitesse, de la position et du temps) de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui n'agit qu'en variables spatiales  $x \in \mathbb{T}^3$ . Le problème de Cauchy est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v F = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) F \\ F(0, x, v) = F_0(x, v), \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $F$  est la fonction de distribution des particules,  $t \geq 0$  le temps,  $x \in \mathbb{T}^3$  la position et  $v \in \mathbb{R}^3$  la vitesse. Notons qu'il n'y a pas de champ électrique extérieur dans cette équation.

Pour cette équation, la maxwellienne est donnée par

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2}.$$

c'est l'unique solution positive normalisée du système (1.10) à l'équilibre (voir [18, 36] pour plus des détails sur l'unicité de la maxwellienne). Elle vérifie l'équation, avec en particulier

$$\partial_t \mu + v \cdot \nabla_x \mu = 0, \quad \nabla_v \cdot (-\nabla_v + v) \mu = 0 \quad \text{et} \quad (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v \mu = 0.$$

Le travail réalisé dans [59] consiste à prouver la convergence vers l'équilibre maxwellien  $\mu$  dans de grands espaces du type  $L^p(\langle v \rangle^k)$  ou  $\tilde{W}^{1,p}(\langle v \rangle^k)$  où  $\langle v \rangle = (1 + |v|^2)^{1/2}$ , avec un taux de convergence exponentiel explicite. Dans ce but, on montre d'abord le retour exponentiel à l'équilibre  $\mu$  dans les espaces  $L^2(\mu^{1/2})$  et  $H^1(\mu^{-1/2})$ , en utilisant la méthode d'hypocoercivité hilbertienne présentée dans le point (A) de la partie 1.1.4.

Voici les théorèmes principaux démontrés dans cet article :

**Théorème 1.2.1.** *Supposons que  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ . Soit  $\mathcal{E} = L^p(m)$ , avec  $m = \langle v \rangle^k$ ,  $k > 3(1 - \frac{1}{p})$ ,  $p \in [1, 2]$ . Pour tout  $F_{in} \in L^p(m)$ , il existe une unique solution  $F \in C^0(\mathbb{R}^+, L^p(m))$  du problème (1.10). Elle satisfait de plus l'estimation de décroissance suivante :*

$$\forall t \geq 0, \quad \|F(t) - \mu \langle \langle F_{in} \rangle \rangle\|_{L^p(m)} \leq c e^{-\lambda_{k,p} t} \|F_{in} - \mu \langle \langle F_{in} \rangle \rangle\|_{L^p(m)}, \quad (1.11)$$

où  $c$  et  $\lambda_{k,p} > 0$  sont des constantes explicites en fonctions de  $B_e, p$  et  $k$  avec  $\langle \langle F_0 \rangle \rangle = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} F_0 dx dv$ .

La stratégie utilisée pour démontrer le Théorème 1.2.1 est celle présentée dans le point (B) de la partie 1.1.4 avec les espaces  $E = L^2(\mu^{-1/2})$  et  $\mathcal{E} = L^p(\langle v \rangle^k)$ . Cette stratégie a

été appliqué à des opérateurs de type Fokker-Planck (fractionnaire ou/et avec un potentiel de confinement) dans les articles suivants [26, 65, 66, 72, 92]. Pour des applications à des opérateurs de type Boltzmann et Landau, nous renvoyons les lecteurs aux articles suivantes [14, 42, 90, 91].

On prouve aussi le même type de résultat dans l'espace  $\tilde{W}^{1,p}(\langle v \rangle^k)$ .

**Théorème 1.2.2.** *Soit  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$  et  $\mathcal{E} = \tilde{W}^{1,p}(m)$  avec  $m = \langle v \rangle^k$  tel que*

$$k > 3\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{7}{2} + \max\left(\|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \frac{1}{2}\|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}\right),$$

*avec  $p \in [1, 2]$ . Alors pour tout  $F_{in} \in \tilde{W}^{1,p}(m)$ , il existe une unique solution  $F \in C^0(\mathbb{R}^+, \tilde{W}^{1,p}(m))$  du problème (1.10). Elle satisfait de plus l'estimation de décroissance suivante :*

$$\forall t \geq 0, \quad \|F(t) - \mu \langle \langle F_{in} \rangle \rangle\|_{\mathcal{E}} \leq C e^{-\Lambda_{k,p} t} \|F_{in} - \mu \langle \langle F_{in} \rangle \rangle\|_{\mathcal{E}} \quad (1.12)$$

*où  $\Lambda_{k,p} > 0$  et  $C > 0$  sont des constantes explicites en fonction de  $B_e, p$  et  $k$ .*

Nous notons que nous devons considérer des espaces non classiques de Sobolev à poids (plus de poids est nécessaire sur la fonction que sur ses dérivées en variables  $x$  et  $v$ ), car dans l'espace de Lebesgue à poids  $\mu^{-1/2}$ , il y a un gain de moment ( $f \in L^2(\mu^{-1/2})$  implique  $vf \in L^2(\mu^{-1/2})$  également). On note que ceci est justifié par le fait que

$$\frac{v}{2}\mu^{-1/2} = \nabla_v \mu^{-1/2}.$$

Ce qui n'est plus le cas dans les espaces à poids polynomiaux. (Voir aussi la Remarque 2.4.12 pour plus de détails.)

**Remarque 1.2.3.** *On note que dans [59], on suppose que le champ magnétique est régulier pour assurer l'existence de solution au sens du semi-groupe expliqué dans le paragraphe 1) de la partie 1.1.4 (il est équivalente de montrer l'accrétivité maximale de l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique). Dans l'annexe A nous améliorons ce résultat en affaiblissant l'hypothèse sur le champ magnétique. L'idée clé est de substituer à l'argument d'hypoellipticité (utilisé dans le cas régulier) un argument de régularité pour des opérateurs à coefficients  $L^\infty$ . Nous renvoyons à l'annexe A pour une démonstration détaillée de ce résultat. (Voir également le Théorème 1.2.9 plus loin.)*

## 1.2.2 Étude de l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique (chapitre 3)

Dans le chapitre 3, on va poursuivre l'étude de l'équation de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur, dans le cas d'un champ magnétique constant. Comme nous avons mentionné dans le point (C) de la partie 1.1.4, il est important de passer par l'étude

et la compréhension des propriétés spectrales de l'opérateur quadratique associé à l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique.

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on considère  $P$  l'opérateur de Fokker-Planck quadratique avec un champ magnétique extérieur constant  $B_e \in \mathbb{R}^3$  et un champ électrique linéaire  $E_e(x) := ax$  avec  $a > 0$  tel que

$$P = (-\nabla_v + v/2) \cdot (\nabla_v + v/2) + v \cdot \nabla_x + (E_e + v \wedge B_e) \cdot \nabla_v.$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{R}^d$  représente la variable d'espace et  $t \geq 0$  est le temps.

On note que l'opérateur  $P$  est le même que celle dans le chapitre 2 en ajoutant un potentiel de confinement en variable d'espace  $x$ , et dans  $\mathbb{R}^d$  au lieu d'être dans le tore et en étudiant le cas simple avec le champ magnétique constant.

Sans perte de généralité, on considère que le champ magnétique appartient à l'ensemble  $\{(0, 0, b) / b \in \mathbb{R}\}$ . En effectuant des changements de variables et des réductions, il suffit d'étudier la forme symétrisée suivante, pour  $(x, v) \in \mathbb{R}^4$

$$2P_{a,b} := (-\nabla_v + v) \cdot (\nabla_v + v) + 2\sqrt{a}(v \cdot \nabla_x - x \cdot \nabla_v) + (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v. \quad (1.13)$$

Pour appliquer la stratégie expliqué dans le point (C) de la partie 1.1.4, on va décomposer l'opérateur  $P_{a,b}$  en fonction d'opérateurs d'annihilation  $(A_j)_{j=1}^4$  et de création  $(A_j^*)_{j=1}^4$  définis par

$$\begin{aligned} A_j &= \partial_{x_j} + x_j, & A_j^* &= -\partial_{x_j} + x_j, & \forall j &= 1, 2, \\ A_j &= \partial_{v_{j-2}} + v_{j-2}, & A_j^* &= -\partial_{v_{j-2}} + v_{j-2}, & \forall j &= 3, 4. \end{aligned}$$

H. Risken dans [79] a proposé une décomposition en opérateurs de création et d'annihilation dans le cas de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck sans champ magnétique, et il se trouve que même avec un champ magnétique nous pouvons l'écrire sous la forme suivante :

$$P_{a,b} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 m_{jk} A_k^* A_j \quad (1.14)$$

où  $(m_{j,k})_{j,k}$  sont les coefficients de la matrice  $M_{a,b}$  définie par

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & \sqrt{a} & 0 \\ -b & 1 & 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Le spectre de  $M_{a,b}$  est formé par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-i(b + c_2) + 1 - c_1), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-i(b - c_2) + 1 + c_1), \quad (1.16)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(i(b + c_2) + 1 - c_1), \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(i(b - c_2) + 1 + c_1). \quad (1.17)$$

où  $c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}$  et  $A$  sont définis plus tard dans (1.18) et (1.19).

Voici les théorèmes principaux démontrés dans le chapitre 3 :

**Théorème 1.2.4.** *Soit  $a > 0$ . Alors les valeurs propres généralisées de l'opérateur  $P_{a,b}$  sont de la forme suivante :*

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^4 \lambda_j k_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}^4,$$

où les  $\{\lambda_j\}_{j=1}^4$  sont les valeurs propres de  $M_{a,b}$  qui sont définies dans (1.16) et (1.17). De plus, on a les propriétés suivantes :

1) Quand  $b \rightarrow +\infty$  et  $a > 0$  fixé, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) - i(-\frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) - i(b + \frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_3 &= \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) + i(-\frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_4 &= 1 - \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) + i(b + \frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})). \end{aligned}$$

2) Si  $b \neq 0$ , alors pour tout  $\lambda_j \in \Sigma(M_{a,b})$ ,  $\Im(\lambda_j) \neq 0$ .

3) Le spectre de  $M_{a,b}$  ne dépend pas du signe de  $b$ .

La stratégie utilisée pour démontrer le Théorème 1.2.4 est celle présentée dans le point (C) de la partie 1.1.4 avec l'opérateur  $P = P_{a,b}$  et la matrice  $M = M_{a,b}$ . La preuve consiste à appliquer le Corollaire 1.1.3 dans notre cas. On note que l'asymptotique de la valeur propre  $\lambda_1$ , nous dit que le trou spectral  $\Re \lambda_1$  de l'opérateur  $P_{a,b}$  se comporte comme  $a/b^2$  lorsque  $b \rightarrow +\infty$ . Cela nous conduit à conclure que le champ magnétique ralentit le retour à l'équilibre.

Le but maintenant est d'avoir des estimations le plus explicite possible pour répondre à la question du retour à l'équilibre.

L'étude de l'opérateur de Fokker-Planck quadratique avec un potentiel de confinement quadratique a été fait par exemple dans les travaux suivants [39, 73, 78, 50, 1, 2]. Récemment, M. Ben Said et al. dans [84] ont étudié des estimations globales pour les opérateurs modèles de Fokker-Planck avec des potentiels polynomiaux de degré inférieur ou égale à 2, puis M. Ben Said dans [83] a fourni des estimations subelliptiques globales précises pour des opérateurs de Fokker-Planck dans un cas plus général qui concerne une certaine classe des polynômes de degré supérieur à 2. Nous notons que les résultats cités précédemment sont dans le cas sans champ magnétique. C'est pour cela nous nous intéressons à ce qui se passe lorsqu'on ajoute un champ magnétique constant sur l'opérateur quadratique de Fokker-Planck. Cela représente le cœur du travail accompli dans le chapitre 3.

La première étape de l'étude est d'expliciter la norme de la matrice exponentielle  $M_{a,b}$  en fonctions des quantités auxiliaires définies par

$$A = A_1 + iA_2 = 1 - b^2 - 4a - 2ib \quad (1.18)$$

$$c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}. \quad (1.19)$$

où  $A_1, A_2, c_1$  et  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 1.2.5.** *Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  and  $t > 0$ , considérons  $A = A_1 + iA_2$  et  $c = c_1 + ic_2$  qui sont définis dans (1.18) et (1.19). Soit*

$$T = \frac{1}{2} ((|A| - A_1 + 2) \cosh c_1 t + (|A| + A_1 - 2) \cos c_2 t) \quad (1.20)$$

et

$$\begin{aligned} S = & 8a(1 - \Re(\cosh ct)) + \frac{1}{4}(2 - A_1)|A|(\cosh 2c_1 t - \cos 2c_2 t) \\ & + (2a + \frac{1}{4}|A|^2)(\cosh 2c_1 t + \cos 2c_2 t - 2). \end{aligned} \quad (1.21)$$

La norme de l'exponentielle de  $M_{a,b}$  définie dans (1.15) est alors égale à

$$\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = \frac{1}{|A|} e^{-t} (T + \sqrt{S}).$$

Bien que l'expression de  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  soit assez compliquée, une forme exacte pour l'exponentielle d'une matrice  $4 \times 4$  est rarement aussi simple.

En se basant sur le théorème précédent, nous pouvons en déduire des estimations précises en temps. Lorsque  $t \rightarrow 0^+$ , nous avons un développement asymptotique complet pour la norme de l'exponentielle de  $M_{a,b}$ .

**Proposition 1.2.6.** *La norme  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  admet un développement asymptotique complet en puissances de  $t$  quand  $\langle A \rangle t^2 \rightarrow 0^+$  donné à l'ordre 7 en temps par*

$$\|e^{-tM_{a,b}}\| = 1 - \frac{a}{12}t^3 + \left( \frac{1}{360}ab^2 + \frac{1}{240}a^2 + \frac{1}{120}a \right) t^5 + \frac{1}{288}a^2t^6 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^3 t^7).$$

Lorsque  $|b| \rightarrow \infty$  de telle sorte que  $\langle a \rangle b^{-2} \rightarrow 0$ , nous avons

**Proposition 1.2.7.** *Il existe  $C > 0$  tel que, si  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  et  $\langle a \rangle b^{-2} < \frac{1}{C}$ , alors*

$$\forall t \geq 0, \left| e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1 \right| \leq C \langle a \rangle^2 b^{-4}.$$

Ceci mesure en un sens le caractère non autoadjoint de  $M_{a,b}$  (et donc  $P_{a,b}$ ). En remarquant que  $\Re \lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - c_1)$  est l'abscisse spectrale de la matrice  $M_{a,b}$  égal par définition à  $\min\{\Re \lambda, \lambda \in \Sigma(M_{a,b}) \setminus \{0\}\}$ , on peut faire l'observation suivante : si  $M_{a,b}$  était autoadjoint, l'égalité serait  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = e^{-(1-c_1)t}$  pour tout  $t \geq 0$ . On en déduit que lorsque le champ magnétique augmente le caractère non auto-adjoint est atténué.

Finalement, nous identifions la valeur exacte de  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  qui est égale à la norme de projection spectrale de  $M_{a,b}$  associé au valeur propre  $\lambda_1$ .

**Proposition 1.2.8.** *Pour  $a, b > 0$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$*

$$E(t) = e^{-2c_1 t} + \langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1 t} \leq \frac{1}{C}, \quad (1.22)$$

alors

$$\left| \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2}{1 + c_2^2}} e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\| - 1 \right| \leq CE(t).$$

En particulier, pour tout  $a > 0$  et  $b \neq 0$ ,  $e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  est  $\sqrt{\frac{1 + c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}}$  à une erreur relative exponentiellement petite lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Nous donnons également dans le chapitre 3 plusieurs illustrations numériques des résultats théoriques obtenus.

### 1.2.3 Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique (chapitre 4)

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude du cas modèle de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e$  conjugué par  $\mu^{1/2}$ , commencée dans [59]. On établit une estimation de type "hypoellipticité maximale" sur ce modèle (voir paragraphe 3) dans la partie 1.1.4), donnant une caractérisation du domaine de son extension fermée. Cela nous permet en particulier d'obtenir la régularité dans des variables vitesses.

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on se place sur le tore  $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  et on considère  $K$  l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(d-1)/2}$  tel que

$$K = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2,$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{T}^d$  représente la variable d'espace et  $t > 0$  est le temps. On souligne que dans la définition précédente de notre opérateur, on a utilisé la notation  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  qui s'écrit selon la dimension sous la forme suivante :

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v = \begin{cases} b(x) (v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 2 \\ \begin{aligned} & b_1(x) (v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}) + b_2(x) (v_3 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_3}) \\ & + b_3(x) (v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) \end{aligned} & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

L'opérateur  $K$  est considéré comme un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ . À partir de maintenant, on note  $\mathbf{K}$  la fermeture de l'opérateur  $K$  dans  $H$  ( $K$  est accréitif donc fermable, ce qui assure l'existence de  $\mathbf{K}$ ).

D'abord, on rappelle le résultat de l'existence du semi-groupe fortement continu associé à l'opérateur  $\mathbf{K}$ , qu'on montre dans l'annexe A en améliorant le résultat obtenu dans [59] avec un champ magnétique régulier :

**Théorème 1.2.9.** Si  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ , alors l'opérateur  $\mathbf{K}$  est maximal accréatif dans  $L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ .

Ceci implique que le domaine de l'opérateur  $\mathbf{K}$  coïncide avec le domaine de son extension maximale comme suit

$$D(\mathbf{K}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / Ku \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

Le théorème principal dans ce chapitre est :

**Théorème 1.2.10.** Soit  $d = 2$  ou  $3$ . On suppose que  $B_e \in \text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ . Alors pour tout  $C_1 > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $B_e$  avec  $\|B_e\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1$ , et tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , l'opérateur  $K$  vérifie l'estimation maximale suivante<sup>2</sup> :

$$\|(v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)u\| + \|u\|_{\tilde{B}^2} \leq C(\|Ku\| + \|u\|), \quad (1.23)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme sur l'espace  $L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ .

Compte-tenu de la densité de l'espace de Schwartz dans le domaine de  $\mathbf{K}$ , nous obtenons la caractérisation du domaine de  $\mathbf{K}$  comme suit

$$D(\mathbf{K}) = \{u \in \tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / (v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

La stratégie utilisée pour démontrer le Théorème 1.2.10 est celle présentée dans le paragraphe 3) dans la partie 1.1.4. Notre étude s'appuie sur l'étude préliminaire de la famille des modèles (pour  $b \in \mathbb{R}$ ) suivante :

$$K_b = v \cdot \nabla_x + b(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 1, \text{ dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

où  $d = 2$  ou  $3$ , obtenue par figeage du champ magnétique en un point. Ce dernier opérateur apparaît comme l'image par une représentation induite d'un opérateur hypoelliptique maximal. Ensuite on utilise une partition de l'unité et on contrôle les erreurs. (cf le Chapitre 4 pour une définition précise de représentation induite.)

## 1.3 Liste de travaux rassemblés dans la thèse

Les résultats obtenus dans cette thèse font l'objet d'articles soumis ou en cours de préparation.

- **Article à paraître :**

- ★ Zeinab Karaki. Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with an external magnetic field. *hal-01975138*, à paraître dans *Kinetic and Related Models*.

Le chapitre 2 est la reproduction de cet article (sauf les références intégrées à l'ensemble des références en fin de document).

---

2. On rappelle que  $\|\cdot\|_{\tilde{B}^2}$  a été défini en (1.9).

- **Article soumis :**

- ★ Zeinab Karaki. Maximal estimates for the Fokker-Planck operator with magnetic field *hal-01975164*.

Ce papier présente les résultats obtenus dans le chapitre 4 et Annexe A.

- **Article en préparation :**

- ★ Zeinab Karaki. Study of the Fokker-Planck quadratic operator with a constant magnetic field.

Ce papier présente les résultats obtenus dans le chapitre 3.

## 1.4 Perspectives

### 1.4.1 Étude du problème non-linéaire basé au problème linéaire étudié dans cette thèse :

Dans le chapitre 2, on a montré le retour exponentiel à l'équilibre dans des espaces pondérés avec un poids exponentiel de type  $L^2(\mu^{-1/2})$ . Puis, on a étendu les mêmes résultats aux espaces fonctionnels élargis comme  $L^p(\langle v \rangle^k)$ . Une direction intéressante d'étude est de coupler le système linéaire de Fokker-Planck avec champ magnétique extérieur avec des problèmes non-linéaires comme les équations de Maxwell ou de Poisson. On s'intéresse alors au système de Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e$  qui prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F + (E + v \wedge (B - B_e)) \cdot \nabla_v F = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) F \\ F(0, x, v) = F_0(x, v), \end{cases} \quad (1.24)$$

où la paire  $(E(t, x), B(t, x))$  représente le champ électro-magnétique auto-consistant, créée par les particules elles-mêmes, qui est couplé avec  $F$  par les équations de Maxwell suivantes :

$$\partial_t E - \nabla_x \wedge B = -J = - \int_{R^3} v F dv, \quad (1.25)$$

$$\partial_t B + \nabla_x \wedge E = 0, \quad (1.26)$$

$$\nabla_x \cdot E = \rho - 1 = \int_{R^3} (F - \mu) dv, \quad (1.27)$$

$$\nabla_x \cdot B = 0, \quad (1.28)$$

où  $\rho = \rho(t, x)$  et  $J = J(t, x)$  désignent respectivement les densités de charge et de courant. Dans la limite non relativiste, c'est-à-dire lorsque la vitesse de la lumière  $c$  tend vers l'infini, les équations de Maxwell se réduisent à la loi de Gauss (1.27) (voir [64] pour plus de détails sur ce sujet). Cela revient à prendre  $B = 0$  dans les équations ci-dessus et à ce que le champ électrique  $E$  dérive d'un potentiel *i.e.*  $E = -\nabla_x \Phi$  avec  $\Phi$  satisfaisant l'équation de Poisson

$$-\Delta_x \Phi = \rho - 1. \quad (1.29)$$

Dans l'étude des problèmes non-linéaires, les deux grands problèmes à abordés sur ces équations sont l'existence de solutions et leurs stabilités. On aimerait bien étendre les mêmes types de résultats montrés sur le système linéarisé aux systèmes non-linéaires cités précédemment. Pour la problématique qui nous intéresse, Y. Guo [27]-[28] a étudié le système de Vlasov-Maxwell-Boltzmann (respectivement Vlasov-Poisson-Boltzmann), ainsi que l'existence d'une solution globale pour les problèmes de Cauchy, avec un taux de décroissance exponentiel pour le problème de Vlasov-Poisson-Boltzmann. T. Yang [99] a construit des solutions globales classiques du système de Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck et il a montré le retour à l'équilibre avec un taux de décroissance polynomial d'ordre 2. F. Hérau et L. Thomann ont montré dans [41] l'existence globale en temps avec des données initiales de faible régularité et le retour exponentiel à l'équilibre du système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Il serait intéressant de suivre ces approches, pour le cas avec champ magnétique.

### 1.4.2 Généralisation du résultat du chapitre 3

Dans le chapitre 3, on a montré que le champ magnétique ralentit le retour à l'équilibre et que l'écart entre la norme  $\|e^{-tP_{a,b}} - \Pi_0\|$  et la prédiction "auto-adjointe"  $e^{-t\Re\lambda_{min}}$  tend vers zéro lorsque  $b$  tend vers l'infini. Dans la démonstration du théorème principal de ce chapitre, on a utilisé des symétries et propriétés algébriques qui peuvent se généraliser. En se basant sur le résultat obtenu sur l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique constant et un champ électrique linéaire, une direction possible serait possible de généraliser ce type de résultat sur le cas où du champ magnétique non-constant, en utilisant des techniques de partition de l'unité.

### 1.4.3 Estimation maximale pour l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck avec un champ électro-magnétique non-régulier

Dans le chapitre 4, on a montré une estimation maximale sur l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique lipschitzien en donnant une caractérisation du domaine de son extension fermée et en déduisant des régularités en variables vitesses. Le but sera d'essayer à établir une estimation maximale de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck avec champ électromagnétique peu régulier suivant :

$$K_{V,B} = v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v - (v \wedge B) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2, \quad (1.30)$$

où  $V$  désigne le potentiel électrique (en prenant un champ électrique dérivant d'un potentiel  $V$ ). Dans un travail en cours en collaboration avec Bernard Helffer, nous pensons combiner la preuve que B. Helffer et F. Nier ont donné dans [73, Chapitre 9] pour l'opérateur  $K_{V,0}$  sans champ magnétique avec notre résultat obtenu dans cette thèse dans le cas sans potentiel électrique dans [58].

#### 1.4.4 Étude du problème de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck fractionnaire avec un champ magnétique extérieur

Il serait intéressant d'étudier le problème de Cauchy pour l'opérateur de Fokker-Planck fractionnaire avec champs auto-consistant de type Poisson suivant

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_v f - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f - E(t, x) \cdot \nabla_v f + \Lambda^{2s} f = 0 \\ E(t, x) = -\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|} \frac{x}{|x|^d} *_x \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $\Lambda_v = (1 - \Delta_v)^{1/2}$  et  $0 < s < 1$ . Comme dans le Chapitre 2, on a étudié l'opérateur linéarisé lorsque  $s = 1$ . Ce travail utiliserait des estimation de régularisation nouvelles en temps court pour l'opérateur linéaire montrées dans [43] et les travaux de F. Hérau et L. Thomann dans l'article [41] sur l'étude du problème de Cauchy de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck afin de construire des solutions globales en temps du problème (1.31).

# Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with a strong external magnetic field

## Résumé:

On considère l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur et fort. On montrera l'existence d'une solution globale en temps proche de la maxwellienne, l'état d'équilibre globale du système. En plus, on montrera le retour exponentiel à l'équilibre. Les premiers résultats est obtenus dans les espaces à poids exponentiels. Ils sont ensuite étendus à des espaces fonctionnels plus larges, comme l'espace de Lebesgue à poids polynomial et l'espace de Sobolev à poids modifié, par la méthode de factorisation et d'élargissement d'espace fonctionnel développé dans [Gualdani, Mischler, Mouhot, 2017].

## Abstract

We consider the Fokker-Planck equation with a strong external magnetic field. Global-in-time solutions are built near the Maxwellian, the global equilibrium state for the system. Moreover, we prove the convergence to equilibrium at exponential rate. The results are first obtained on spaces with an exponential weight. Then they are extended to larger functional spaces, like some Lebesgue space with polynomial weight and some modified weighted Sobolev space, by the method of factorization and enlargement of the functional space developed in [Gualdani, Mischler, Mouhot, 2017].

## 2.1 Introduction and main results

### 2.1.1 Introduction

In this article, we are interested in inhomogeneous kinetic equations. These equations model the dynamics of a charged particle system described by a probability density  $F(t, x, v)$  representing at time  $t \geq 0$  the density of particles at position  $x \in \mathbb{T}^3$  and at velocity  $v \in \mathbb{R}^3$ .

In the absence of force and collisions, the particles move in a straight line at constant speed according to the principle of Newton, and  $F$  is the solution of the Vlasov equation

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = 0,$$

where  $\nabla_x$  is the gradient operator with respect to the variable  $x$ , and the symbol “ $\cdot$ ” represents the scalar product in the Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ . When there are forces and collisions, this equation must be corrected. This leads to various kinetic equations, the most famous being those of Boltzmann, Landau and Fokker-Planck. The general model for the dynamics of charged particles, assuming that they undergo collision modulated by a collision kernel  $Q$  and under the action of an external force  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^3$ , is written by the following kinetic equation:

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F + \mathcal{F}(t, x) \cdot \nabla_v F = Q(F), \quad (2.1)$$

where  $Q$ , possibly non-linear, acts only in velocity and where  $\mathcal{F}$  can even depend on  $F$  via Poisson or Maxwell equations.

According to the  $H$ -theorem of Boltzmann in 1872, there exists a quantity  $H(t)$  called entropy which varies monotonically in time, while the gas relaxes towards the thermodynamic equilibrium characterized by the Maxwellian: it is a solution of equation (2.1), independent in time and having the same mass as the initial system. The effect of the collisions will bring the distribution  $F(t)$  to the Maxwellian with time. A crucial question is then to know the rate of convergence and this question has been widely studied over the past 15 years, in particular with the so called hypocoercive strategy (see [94] or [36] for an introductive papers).

### 2.1.2 Fokker-Planck equation with a given external magnetic field

#### Presentation of the equation

We are interested in the Fokker-Planck inhomogeneous linear kinetic equation with a fixed external magnetic field  $x \mapsto B_e(x) \in \mathbb{R}^3$  which depends only on the spatial variables  $x \in \mathbb{T}^3 \equiv [0, 2\pi]^3$ . The Cauchy problem is the following:

$$\begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v F = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v)F \\ F(0, x, v) = F_0(x, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

Here  $F$  is the distribution function of the particles, and represents the probability density of finding a particle with velocity  $v \in \mathbb{R}^3$  and position  $x \in \mathbb{T}^3$  at time  $t \geq 0$ . (Where “ $\wedge$ ” indicates the vector (cross) product.)

We define the Maxwellian

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2}.$$

It is a time independent solution of the system (2.2), since

$$\partial_t \mu + v \cdot \nabla_x \mu = 0, \quad \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) \mu = 0 \quad \text{and} \quad (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v \mu = 0.$$

For the Fokker-Planck system with external magnetic field (2.2), the entropy functional in relation with the so called  $H$ -Theorem

$$H(h, \mu) = \iint h \ln \left( \frac{h}{\mu} \right) dx dv,$$

for a smooth sufficiently decaying (in space and velocity) positive probability density  $h$ . Then, we directly check that  $H(\mu, \mu) = 0$ . According to the non-negativity of the function  $s \mapsto s \ln s - s + 1$ ,  $H(h, \mu)$  is non-negative since

$$H(h, \mu) = \iint \left( \frac{h}{\mu} \ln \left( \frac{h}{\mu} \right) - \left( \frac{h}{\mu} \right) + 1 \right) \mu dx dv \geq 0.$$

When  $F(t, \cdot)$  is a solution of problem (2.2)

$$\frac{d}{dt} H(F(t), \mu) = - \iint \frac{|(\nabla_v + v)F|^2}{F} dx dv \leq 0,$$

see [18, 36]. This is a version of the  $H$ -Theorem about decay of entropy. Let us now check that the equilibrium  $\mu$  is in fact unique.

Let us suppose that  $F$  is a positive probability density, smooth, rapidly-decaying and a time independent solution of (2.2),  $F(t, \cdot) = F(\cdot)$ . Then, we get

$$0 = \frac{d}{dt} H(F, \mu) = - \iint \frac{|(\nabla_v + v)F|^2}{F} dx dv.$$

So that

$$\nabla_v \left( \frac{F}{\mu} \right) = 0,$$

and there exist  $\varphi$  such that  $F = \mu(v) \varphi(x)$ , and putting this into (2.4) yields

$$\nabla_x \varphi = 0,$$

since  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v \mu = 0$ . (Note that this fact will be of use through this article). By positivity and the fact that  $F$  is a probability density, we get  $F = \mu$ .

Concerning (2.2), we are interested in the return to the global equilibrium  $\mu$ , in the sense that exponential decay to equilibrium for perturbations around the Maxwellian is considered, and the convergence of  $F$  to  $\mu$  in norms in the largest possible spaces. Now, we fix some notation for the weighted Lebesgue spaces.

**Notation 2.1.1.** For some given Borel weight function  $m = m(v) > 0$  on  $\mathbb{R}^3$ , let us define  $L^p(m)$   $1 \leq p \leq 2$ , as the weighted Lebesgue space associated with the norm

$$\|F\|_{L^p(m)} := \|Fm\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3} F^p(x, v) m^p(v) dv dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

In particular, we will work in  $L^2(\mu^{1/2})$  and  $H^1(\mu^{1/2})$  the real Hilbert spaces defined specifically by

$$\begin{aligned} \forall h \in L^2(\mu^{1/2}), \quad \|h\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2 &= \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |h(x, v)|^2 \mu(v) dx dv, \\ \forall h \in H^1(\mu^{1/2}), \quad \|h\|_{H^1(\mu^{1/2})}^2 &= \|h\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2 + \|\nabla_x h\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2 + \|\nabla_v h\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2, \end{aligned}$$

and the (real) Hilbertian scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on the space  $L^2(\mu^{1/2})$  defined by

$$\forall g, h \in L^2(\mu^{1/2}), \quad \langle h, g \rangle = \iint h g \mu dx dv.$$

To answer such questions, when  $F$  is close to the equilibrium  $\mu$ , we define  $f$  to be the standard perturbation of  $\mu$

$$F = \mu + \mu f.$$

We then rewrite equation (2.2) in the following form:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f = -(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \end{cases} \quad (2.4)$$

### The main results

First we will show that the problem (2.4) is well-posed in the  $L^2(\mu^{1/2})$  space, in the sense of the associated semi-group (See [76]). We associate with the problem (3.9) the operator  $P_1$  defined by

$$P_1 := X_0 + L, \quad (2.5)$$

$$\text{where } X_0 = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v \text{ and } L = -(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v \quad (2.6)$$

The problem (2.4) is then written

$$\begin{cases} \partial_t f + P_1 f = 0 \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \end{cases} \quad (2.7)$$

**Theorem 2.1.1.** *If  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$  and  $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , then the problem (2.7) admits a unique solution  $f \in C^1([0, +\infty[, L^2(\mu^{1/2}))$ .*

**Remark 2.1.2.** *We note that in a work in progress, we show that operator  $P_1$  is maximal accretive with non-regular magnetic field and more precisely we suppose just that  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$ , which matches Hypothesis 2.1.7. For the time being, we rely on Theorem 2.1.1 which forces us to assume that  $B_e$  is smooth.*

We also show the exponential convergence towards equilibrium in the norm  $L^2(\mu^{1/2})$ .

**Theorem 2.1.3.** *Let  $f_0 \in L^2(\mu^{1/2})$  such that  $\langle\langle f_0 \rangle\rangle_\mu = \iint f_0(x, v) \mu(v) dx dv = 0$ . If  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ , then there exist  $\kappa > 0$  and  $c > 0$  (two explicit constants independent of  $f_0$ ) such that*

$$\forall t \geq 0, \quad \|f(t)\|_{L^2(\mu^{1/2})} \leq ce^{-\kappa t} \|f_0\|_{L^2(\mu^{1/2})}.$$

Note that in the preceding statement the mean  $\langle\langle f(t) \rangle\rangle_\mu$  is preserved over time.

We give a result about the return to the global equilibrium  $\mu$  with an exponential decay rate in the space  $H^1(\mu^{1/2})$ .

**Theorem 2.1.4.** *We suppose that  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ . There exist  $c, \kappa > 0$  such that for all  $f_0 \in H^1(\mu^{1/2})$  with  $\langle\langle f_0 \rangle\rangle_\mu = 0$ , the solution  $f$  of the system (2.4) satisfies*

$$\forall t \geq 0, \quad \|f(t)\|_{H^1(\mu^{1/2})} \leq ce^{-\kappa t} \|f_0\|_{H^1(\mu^{1/2})}.$$

Herda and Rodrigues in [46] have showed an estimate of type  $H^1$  for the solution of the Vlasov-Fokker-Planck equation with a constant magnetic field by the hypocoercivity method. Their goal was not to obtain a large-time behaviour result of solutions but to have a uniform estimates for a parameter limit (parameter of diffusion) (see also [7, 45] for the study of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck with constant magnetic field). Kinetic equations with magnetic field have also been studied by Zhang and Yin in [101] who have showed existence theorems for the initial value problem of the cometary flow equation with an external electromagnetic force (see also [16] for the study of the cometary flow equation with a self-consistent electromagnetic field).

**Remark 2.1.5.** *We note that Theorems 2.1.3 and 2.1.4 give convergence to the equilibrium  $\mu$  at exponential rate for the solution  $F$  on spaces with an exponential weight  $\mu^{-1/2}$ . Indeed,*

$$f = (F - \mu) \mu^{-1},$$

with the notation given in (2.3), so

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2 &= \|(F - \mu) \mu^{-1}\|_{L^2(\mu^{1/2})}^2 \\ &= \int |F - \mu|^2 \mu^{-2} \mu dx dv \\ &= \int |F - \mu|^2 \mu^{-1} dx dv =: \|F - \mu\|_{L^2(\mu^{-1/2})}^2. \end{aligned}$$

We are interested in extending the results about the exponential decay of the semi-group to much larger spaces, following the work of Gualdani-Mischler-Mouhot in [26]. The following result gives convergence in  $L^p(m)$  norms of  $F$  to  $\mu$  with  $m = \langle v \rangle^k$ . So that there is no ambiguity, we denote the mean with respect to the usual  $L^1$  norm by

$$\langle\langle H \rangle\rangle = \iint H \, dx dv,$$

The main result of this paper in this direction is the following.

**Theorem 2.1.6.** *Let  $p \in [1, 2]$ , let  $m = \langle v \rangle^k := (1 + |v|^2)^{k/2}$ ,  $k > 3(1 - \frac{1}{p})$ , and suppose  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ . Then for all  $0 > a > 3(1 - \frac{1}{p}) - k$  and for all  $F_0 \in L^p(m)$ , there exists  $c_{k,p} > 0$  such that the solution  $F$  of the problem (2.2) satisfies the decay estimate*

$$\forall t \geq 0, \quad \|F(t) - \mu \langle\langle F_0 \rangle\rangle\|_{L^p(m)} \leq c_{k,p} e^{at} \|F_0 - \mu \langle\langle F_0 \rangle\rangle\|_{L^p(m)}. \quad (2.8)$$

It is also possible to obtain the same type of results in the weighted Sobolev space  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  which is defined by

$$\tilde{W}^{1,p}(m) = \{h \in L^p(m) \text{ such that } \langle v \rangle h, \nabla_v h \text{ and } \nabla_x h \in L^p(m)\}.$$

We equip the previous space with the following standard norm:

$$\|h\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} = \left( \|h\|_{L^p(m(v))}^p + \|\nabla_v h\|_{L^p(m)}^p + \|\nabla_x h\|_{L^p(m)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

**Hypothesis 2.1.7.** *Let  $p \in [1, 2]$ , the polynomial weight  $m(v) = \langle v \rangle^k$  is such that*

$$k > 3(1 - \frac{1}{p}) + \frac{7}{2} + \max \left( \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \right). \quad (2.10)$$

The second main result of this paper is the following.

**Theorem 2.1.8.** *Let  $m$  be a weight that satisfies Hypothesis 2.1.7 with  $p \in [1, 2]$  and suppose that  $B_e \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ . If  $F_0 \in \tilde{W}^{1,p}(m)$ , then there is a solution  $F$  of the problem (2.2), such that  $F(t) \in \tilde{W}^{1,p}(m)$  for all  $t \geq 0$ , and it satisfies the following decay estimate:*

$$\forall t \geq 0, \quad \|F(t) - \mu \langle\langle F_0 \rangle\rangle\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} \leq C e^{at} \|F_0 - \mu \langle\langle F_0 \rangle\rangle\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} \quad (2.11)$$

with  $0 > a > \max(a_{m,1}^i, a_{m,2}^i, -\kappa)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , where  $a_{m,1}^i$  and  $a_{m,2}^i$  are constants defined afterwards in (2.47)-(2.49) and (2.56)-(2.58) and  $\kappa$  is defined in Theorem 2.1.4.

Note that we need to consider a non-classical weighted Sobolev space (more weight is needed on the function than on its derivatives in  $x$  and  $v$ ), which is necessary to close the dissipativity estimates in  $\tilde{W}^{1,p}(m)$ . Note that this trick is not necessary in exponentially weighted spaces. (See also Remark 2.4.12.)

We will end this part by a brief review of the literature related to the analysis of kinetic PDEs using hypocoercivity methods. In some studies [39, 73, 94, 95], the treated hypocoercivity method is very close to that of hypoellipticity following the method of Kohn, which deals simultaneously with regularity properties and trend to the equilibrium.

The hypocoercive results in  $L^2$  specifically were developed in [19, 35] for linear collisional kinetic models. The hypocoercivity  $L^2$  and  $H^1$  methods were developed in [36, 94] for linear collisional kinetic operators with one-dimensional kernels. See also [69] for an introductory papers for the hypocoercivity methods for the general collisional kinetic models. The methods used were close in spirit to the ones developed by Guo in [28, 27] in functional spaces with exponential weights.

In recent years, the theory of factorization and enlargement of Banach spaces was introduced in [26] and [65]. We note that Mouhot in [68] initiated this type of strategy which has then been developed in an abstract setting by Gualdani, Mischler and Mouhot in [26]. This theory allows us to extend hypocoercivity results into much larger spaces with polynomial weights. We refer for example to [10] and [65], where the authors show, using a factorization argument, the return to equilibrium with an exponential decay rate for the Fokker-Planck equation with an external electrical potential, or [42] for the inhomogeneous Boltzmann equation without angular cutoff case.

The main objective of this article is to obtain exponential decay results for solutions of the Fokker-Planck equation with magnetic field in the largest possible space. To achieve this goal, we first develop both  $L^2$  and  $H^1$  hypocoercivity methods. Then by applying the enlargement method we extend the results to much larger spaces like  $L^1$  with polynomial weights. We emphasize that, on the way to proving the previously mentioned results, we also prove quantitative regularity estimates.

We conclude this section with some comments on our result. For the proof of Theorem 2.1.3, we follow the micro-macro method proposed in [36]. Note that for the proof of Theorem 2.1.3, the black box method proposed in [19] (see also [10]) could perhaps be employed, anyway the presence of the Magnetic field induces some difficulties. To prove Theorem 2.1.6 and 2.1.8, we apply the abstract theorem of enlargement from [26, 65] to our Fokker-Planck-Magnetic linear operator. We deduce the semi-group estimates of Theorem 2.1.3 on large spaces like  $L^p(\langle v \rangle^k)$  and  $\tilde{W}^{1,p}(\langle v \rangle^k)$  with  $p \in [1, 2]$ .

We hope that this first work will help in future investigations of non-linear problems like the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck or Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck equations (see [28, 41] and [27, 99]).

**Plan of the paper:** This article is organized as follows. In Section 2, we prove that the Fokker-Planck-magnetic operator  $P_1$  is a generator of a strongly continuous semi-group over the space  $L^2(\mu^{1/2})$ . In section 3, we show hypocoercivity in the weighted spaces  $L^2$  and  $H^1$  with an exponential weight. Finally, section 4 is devoted to the proofs of Theorems 2.1.6 and 2.1.8 with factorization and enlargement of the functional space arguments.

## 2.2 Study of the operator $P_1$

In this part, we show that the problem (2.7) is well-posed in the space  $L^2(\mu^{1/2})$  in the sense of semi-groups. By the Hille-Yosida Theorem, it is sufficient to show that  $P_1$  is maximal accretive in the space  $L^2(\mu^{1/2})$ .

**Notation 2.2.1.** We define  $P_0$  by

$$P_0 = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v - \nabla_v \cdot (\nabla_v + v).$$

The linearization around the equilibrium  $\mu$  of the Cauchy problem (2.2) reduces the study of the operator  $P_1$  defined in (2.5) to the study of  $P_0$ , since  $P_1$  is obtained via a conjugation of the operator  $P_0$  by the function  $\mu$ , that is to say

$$P_1 u = (\mu^{-1} P_0 \mu) u \quad \forall u \in D(P_1).$$

Similarly, we can define the operator  $P_\theta$  as the conjugation of the operator  $P_1$  by the function  $\mu^\theta$  with  $\theta \in ]0, 1]$ . Note that any result on the operator  $P_\theta$  is also true on the operator  $P_1$  in the corresponding conjugated space.

We will work in this section on operator  $P_{1/2}$  which is defined by

$$P_{1/2} := v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v + (-\nabla_v + \frac{v}{2}) \cdot (\nabla_v + \frac{v}{2}) = X_0 + (-\nabla_v + \frac{v}{2})(\nabla_v + \frac{v}{2}),$$

we note that  $(-\nabla_v + \frac{v}{2})$  is the adjoint of  $(\nabla_v + \frac{v}{2})$  in  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  and  $X_0$  is defined in (2.6). We now show that operator  $P_{1/2}$  is maximal accretive in the space  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  and note that this gives the same result for  $P_1$  in the space  $L^2(\mu^{1/2})$ . We study the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t u + P_{1/2} u = 0 \\ u(0, x, v) = u_0(x, v). \end{cases} \quad (2.12)$$

**Proposition 2.2.1.** Suppose that  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$ . Then the closure with respect to the norm  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  of the magnetic-Fokker-Planck operator  $\overline{P}_{1/2}$  on the space  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3)$  is maximally accretive.

*Proof.* We adapt here the proof given in [73, page 44]. We apply the abstract criterion by taking  $H = L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  and the domain of  $P_{1/2}$  defined by  $D(P_{1/2}) = C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . First, we show the accretivity of the operator  $P_{1/2}$ . When  $u \in D(P_{1/2})$ , we have to show that  $\langle P_{1/2} u, u \rangle \geq 0$  where we note by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the scalar product in the space  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  and  $\| \cdot \|$  the associated norm. Indeed,

$$\begin{aligned} \langle P_{1/2} u, u \rangle &= \langle v \cdot \nabla_x u - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v u + (-\nabla_v + \frac{v}{2})(\nabla_v + \frac{v}{2})u, u \rangle \\ &= \underbrace{\iint v \cdot \nabla_x u \times u \, dx dv}_{=0} - \underbrace{\iint (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v u \times u \, dx dv}_{=0} + \|(\nabla_v + \frac{v}{2})u\|^2 \\ &= \|(\nabla_v + \frac{v}{2})u\|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

since operators  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  and  $v \cdot \nabla_x$  are skew-adjoint see Remark 2.5.2.

Let us now show that there exists  $\lambda_0 > 0$  such that the operator

$$P_{1/2} + \lambda_0 Id$$

has dense image in  $H$ . We take  $\lambda_0 = \frac{3}{2} + 1$  (following [73]). Let  $u \in H$  satisfy

$$\langle u, (P_{1/2} + \lambda_0 Id)h \rangle = 0, \quad \forall h \in D(P_{1/2}). \quad (2.13)$$

We have to show that  $u = 0$ .

First, we observe that equality (A.10) implies that

$$(-\Delta_v + \frac{v^2}{4} + 1 - X_0)u = 0, \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Under Hypothesis that  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$ , and following Hormander [53, 54] or Helffer-Nier [73, Chapter 8], operator  $-\Delta_v + \frac{v^2}{4} + 1 - X_0$  is hypoelliptic, so  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3)$ . Now we introduce the family of truncation functions  $\xi_k$  indexed by  $k \in \mathbb{N}^*$  and defined by

$$\xi_k(v) := \xi\left(\frac{v}{k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

where  $\xi$  is a  $C^\infty$  function satisfying  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi = 1$  on  $B(0, 1)$ , and  $\text{Supp } \xi \subset B(0, 2)$ . We note that in [73], a cut-off in  $x$  and  $v$  was necessary to develop the argument whereas here it suffices to perform a cut-off in  $v$  because  $x \in \mathbb{T}^d$ . For all  $u, w \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , we have

$$\begin{aligned} & \iint \nabla_v(\xi_k u) \cdot \nabla_v(\xi_k w) dx dv + \iint \xi_k^2 \left(\frac{v^2}{4} + 1\right) w u dx dv + \iint u X_0(\xi_k^2 w) dx dv \\ &= \iint |\nabla_v \xi_k|^2 w u dx dv + \iint (u \nabla_v w - w \nabla_v u) \cdot \xi_k \nabla_v \xi_k dx dv + \langle u, T(\xi_k^2 w) \rangle. \end{aligned}$$

When  $u$  satisfies (A.10) in particular, when  $h = \xi_k^2 w$ , we get for all  $w \in C^\infty$

$$\begin{aligned} & \iint \nabla_v(\xi_k u) \cdot \nabla_v(\xi_k w) dx dv + \iint \xi_k^2 \left(\frac{v^2}{4} + 1\right) w u dx dv + \iint u X_0(\xi_k^2 w) dx dv \\ &= \iint |\nabla_v \xi_k|^2 w u dx dv + \iint (u \nabla_v w - w \nabla_v u) \cdot \xi_k \nabla_v \xi_k dx dv. \end{aligned}$$

In particular, we take the test function  $w = u$ , so

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_v(\xi_k u), \nabla_v(\xi_k u) \rangle + \iint \xi_k^2 \left(\frac{v^2}{4} + 1\right) u^2 dx dv + \iint u X_0(\xi_k^2 u) dx dv \\ &= \iint |\nabla_v \xi_k|^2 u^2 dx dv. \end{aligned}$$

By an integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_v(\xi_k u), \nabla_v(\xi_k u) \rangle + \iint \xi_k^2 \left( \frac{v^2}{4} + 1 \right) u^2 dx dv + \iint \xi_k u^2 X_0(\xi_k) dx dv \\ &= \iint |\nabla_v \xi_k|^2 u^2 dx dv. \end{aligned}$$

Which gives the existence of a constant  $c > 0$  such that, for all  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} & \|\xi_k u\|^2 + \frac{1}{4} \|\xi_k v u\|^2 \\ & \leq \frac{c}{k^2} \|u\|^2 + \frac{c}{k} \|(v \wedge B_e) \xi_k u\| \|u\|. \end{aligned}$$

This leads to, for  $\eta > 0$  to be chosen later,

$$\|\xi_k u\|^2 + \frac{1}{4} \|\xi_k v u\|^2 \leq c \left( \frac{1}{k^2} + \frac{c_\eta}{k^2} \|B_e\|_\infty^2 \right) \|u\|^2 + \eta \|\xi_k v u\|^2.$$

Choosing  $\eta \leq \frac{1}{4}$ , we get

$$\|\xi_k u\|^2 \leq c \left( \frac{1}{k^2} + \frac{c_\eta}{k^2} \|B_e\|_\infty^2 \right) \|u\|^2. \quad (2.14)$$

Taking  $k \rightarrow +\infty$  in (2.14), leads to  $u = 0$ .  $\square$

*Proof of Theorem 2.1.1.* According to Remark 2.2.1, the operator  $P_1$  has a closure  $\overline{P_1}$  from  $C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . This gives Theorem 2.1.1, by a direct application of Hille-Yosida's theorem (cf. [76] for more details for the semi-group theory) to the problem (2.4), with  $D(P_1) = C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  and  $H = L^2(\mu^{1/2})$ .  $\square$

From now on, we write  $P_\theta$  for the closure of the operator  $P_\theta$  from the space  $C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  with respect the norm  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ .

## 2.3 Trend to the equilibrium

### 2.3.1 Hypocoercivity in the space $L^2(\mu^{1/2})$

The purpose of this subsection is to show the exponential time decay of the  $L^2(\mu^{1/2})$  entropy for  $P_1$ , based on macroscopic equations. First, we try to find the macroscopic equations associated with system (2.4). We write  $f$  in the following form:

$$f(x, v) = r(x) + h(x, v), \quad (2.15)$$

where  $r(f)(x) = \int f(x, v) \mu(v) dv$  and  $m(f)(x) = \int v f(x, v) \mu(v) dv$  will be used later.

**Définition 2.3.1.** *In the following, we define*

$$\Lambda_x = (1 - \Delta_x)^{1/2},$$

*and introduce a class of Hilbert spaces*

$$\mathbb{H}^\alpha := \{u \in \mathcal{S}', \Lambda_x^\alpha u \in L^2(dx)\} \quad \text{with } \alpha \in \mathbb{R},$$

*where  $\mathcal{S}'$  is the space of temperate distributions.*

*We recall that the operator  $\Lambda_x^2$  is an elliptic, self-adjoint, invertible operator from  $\mathbb{H}^2(dx)$  to  $L^2(dx)$  and  $\Lambda_x \geq Id$ . (cf [39, section 6] for a proof of these properties).*

**Lemma 2.3.1.** *Let  $f$  be the solution of the system (2.4), with the decomposition given in (2.15). Then we have*

$$\partial_t r = Op_1(h), \tag{2.16}$$

$$\partial_t m = -\nabla_x r - m \wedge B_e + Op_1(h). \tag{2.17}$$

*Where  $Op_1$  denotes a bounded generic operator from  $L^2(\mu^{1/2})$  to  $\mathbb{H}^{-1}(dx)$ .*

*Proof.* We suppose  $f$  is a Schwarz function. In order to show equation (2.16), we integrate equation (2.4) with respect to the measure  $d\mu := \mu(v) dv$ . We get

$$\begin{aligned} \partial_t \int f d\mu + \int v \cdot \nabla_x f d\mu - \int (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f d\mu &= - \int (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f d\mu \\ &= \langle Lf, 1 \rangle = \langle f, L1 \rangle = 0, \end{aligned}$$

since,  $L1 = 0$ ,  $L$  is a self-adjoint operator and

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f = \nabla_v \cdot (v \wedge B_e) f,$$

where we noted by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the scalar product in the space  $L^2(\mu^{1/2})$  and  $\| \cdot \|$  the associated norm. Then, by using the equality  $\int v f d\mu = \int v h d\mu$  with  $d\mu = \mu dv$  we obtain

$$\partial_t r = \nabla_x \cdot \int v h d\mu = Op_1(h),$$

hence equality (2.16).

To show (2.17), we multiply equation (2.4) by  $v$  before performing an integration with respect to the measure  $d\mu$ , we obtain

$$\partial_t \int v f d\mu + \nabla_x \cdot \int (v \otimes v) f d\mu - \int v((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f) d\mu = \int v Lf d\mu, \tag{2.18}$$

where  $(\nabla_x \cdot \int (v \otimes v) f d\mu)_{1 \leq j \leq 3} = \left( \sum_{i=1}^3 \int v_j v_i \partial_{x_i} f d\mu \right)_{1 \leq j \leq 3}$ . Now, we will calculate term by term the left-hand side of the equality (2.18). We use that

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int v_j v_i \partial_{x_i} f d\mu &= \int v_j^2 \partial_{x_j} f d\mu = \int (v_j^2 - 1) \partial_{x_j} f d\mu + \partial_{x_j} r \\ &= \int (v_j^2 - 1) \partial_{x_j} h d\mu + \partial_{x_j} r, \end{aligned} \tag{2.19}$$

because  $\forall j \neq i$ , performing an integration by parts we get

$$\int v_j v_i \partial_{x_j} f d\mu = \int (v_j^2 - 1) \partial_{x_j} r d\mu = 0.$$

By using the equality (2.19), then we have

$$\nabla_x \cdot \int (v \otimes v) f d\mu = Op_1(h) + \nabla_x r.$$

Furthermore,

$$\int v Lf d\mu = \int Lv f d\mu = \int f v d\mu = \int h v d\mu.$$

It remains to compute component by component  $\int v ((v \wedge B_e \cdot \nabla_v f)) d\mu$ . We have for all  $1 \leq j \leq 3$ ,

$$\begin{aligned} \int v_j ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f) d\mu &= \int v_j \nabla_v \cdot ((v \wedge B_e) f) d\mu \\ &= \int (-\nabla_v + v)(v_j) \cdot (v \wedge B_e) f d\mu \\ &= -\delta_j \cdot \int (v \wedge B_e) f d\mu \\ &= -\delta_j \cdot \left( \int v f d\mu \right) \wedge B_e \\ &= -\delta_j \cdot (m \wedge B_e) \\ &= -(m \wedge B_e)_j. \end{aligned}$$

Therefore  $\int v ((v \wedge B_e \cdot \nabla_v f)) d\mu = -m \wedge B_e$ , where  $m$  is defined in (2.15).

By combining all the previous equalities in (2.18), we obtain

$$\partial_t m = -\nabla_x r - m \wedge B_e + Op_1(h).$$

□

**Remark 2.3.2.** If  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$ , then

$$m \wedge B_e = Op_1(h),$$

so the macroscopic equation (2.15) takes the following form

$$\partial_t m = -\nabla_x r + Op_1(h).$$

Now we are ready to build a new entropy, defined for any  $u \in L^2(\mu^{1/2})$  by

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) = \|u\|^2 + \varepsilon \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r(u), m(u) \rangle, \quad r(u) := \int u d\mu \text{ and } m(u) := \int v u d\mu,$$

where  $d\mu = \mu(v) dv$ . Using the Cauchy-Schwarz inequality gives us directly that

**Lemma 2.3.3.** *If  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , then*

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \mathcal{F}_\varepsilon(u) \leq 2\|u\|^2 \quad (2.20)$$

Now, we can prove the main result of hypocoercivity leading to the proof of Theorem 2.1.3.

**Proposition 2.3.4.** *There exists  $\kappa > 0$  such that, if  $f_0 \in L^2(\mu^{1/2})$  and  $\langle f_0 \rangle = 0$ , then the solution of system (2.4) satisfies*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_\varepsilon(f(t)) \leq e^{-\kappa t} \mathcal{F}_\varepsilon(f_0).$$

*Proof.* We write

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_\varepsilon(f(t)) = \frac{d}{dt} \|f\|^2 + \varepsilon \frac{d}{dt} \langle \Lambda_x^{-2} r, m \rangle.$$

We will omit the dependence of  $f$  with respect to  $t$ . For the first term, we notice that

$$\frac{d}{dt} \|f\|^2 = 2 \langle Lf, f \rangle = -2 \|\nabla_v f\|^2 \leq -2 \|h\|^2, \quad (2.21)$$

by Poincaré's inequality and the spectral gap property of the operator  $L$  (see [20, Lemma 2.1] for more details on this subject). For the second term, using the macroscopic equations, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, m \rangle &= \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x \partial_t r, m \rangle + \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, \partial_t m \rangle \\ &= -\langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, \nabla_x r \rangle + \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x Op_1(h), m \rangle + \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, Op_1(h) \rangle \\ &\leq -\|\Lambda_x^{-1} \nabla_x r\|^2 + C \|\Lambda_x^{-1} Op_1(h)\| \left( \|\Lambda_x^{-1} \nabla_x r\| + \|\Lambda_x^{-1} \nabla_x m\| \right). \end{aligned}$$

Now, using  $\|m\| \leq \|h\|$ , the Cauchy-Schwarz inequality and the following estimate:

$$\|\Lambda_x^{-1} \nabla_x \phi\| \leq \|\phi\|, \quad \forall \phi \in L^2(\mu^{1/2}),$$

we obtain

$$\frac{d}{dt} \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, m \rangle \leq -\frac{1}{2} \|\Lambda_x^{-1} \nabla_x r\|^2 + C \|h\|^2.$$

Poincaré's inequality on  $L^2(dx)$  takes the form

$$\forall \phi \in L^2(dx), \quad \text{such that } \langle \phi \rangle = 0, \quad \|\Lambda_x^{-1} \nabla_x \phi\|^2 \geq \frac{c_P}{c_P + 1} \|\phi\|^2,$$

where  $\langle \phi \rangle = \int \phi(x) dx$  and  $c_P > 0$  is the spectral gap of  $-\Delta_x$  on the torus (see [36, Lemma 2.6] for the proof of the previous inequality). Using this, we obtain, by applying the previous estimate to  $r$  (since  $\langle r \rangle = \langle f \rangle = \langle f_0 \rangle = 0$ ),

$$\frac{d}{dt} \langle \Lambda_x^{-2} \nabla_x r, m \rangle \leq -\frac{1}{2} \frac{c_P}{c_P + 1} \|r\|^2 + C \|h\|^2. \quad (2.22)$$

gathering (2.21) and (2.22), we get

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(f) \leq -\|h\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{c_P}{c_P + 1} \|r\|^2 + C\varepsilon \|h\|^2$$

Now we choose  $\varepsilon$  such that  $C\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , we get

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(f) \leq -\frac{1}{2}\|h\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{c_P}{c_P + 1} \|r\|^2 \leq -\frac{\varepsilon}{2} \frac{c_P}{c_P + 1} \|f\|^2 \leq -\frac{\varepsilon}{4} \frac{c_P}{c_P + 1} \mathcal{F}_\varepsilon(f).$$

Which gives the result with  $\kappa = \frac{\varepsilon}{4} \frac{c_P}{c_P + 1} > 0$ .  $\square$

We can deduce the proof of Theorem 2.1.3.

*Proof of Theorem 2.1.3.* Starting from Lemma 2.3.3 and Proposition 2.3.4, we have, for  $f$  the solution of the system (2.4),

$$\|f\|^2 \leq 2\mathcal{F}_\varepsilon(f) \leq 2e^{-\kappa t} \mathcal{F}_\varepsilon(f_0) \leq 4e^{-\kappa t} \|f_0\|^2.$$

This completes the proof of Theorem 2.1.3.  $\square$

### 2.3.2 Hypocoercivity in the space $H^1(\mu^{1/2})$

We will establish some technical lemmas, which will help us to deduce the exponential time decay of the norm  $H^1(\mu^{1/2})$ , noting that we work in three dimensions.

The following lemma gives the exact values of some commutators will be used later.

**Lemma 2.3.5.** *The following equalities hold:*

1.  $[\partial_{v_i}, v \cdot \nabla_x] = \partial_{x_i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$
2.  $[\partial_{v_i}, (-\partial_{v_j} + v_j)] = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$
3.  $[\nabla_v, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v] = B_e \wedge \nabla_v.$
4.  $[\nabla_x, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v] = (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v.$

*Proof.* Let  $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . The first two equalities are obvious. We go directly to the proof of 3. Writing  $B_e = (B_1, B_2, B_3)$ ,

$$\begin{aligned} [\partial_{v_1}, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v]f &= \partial_{v_1}((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)f - ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)\partial_{v_1}f \\ &= \partial_{v_1}[(v_2B_3 - v_3B_2)\partial_{v_1}f + (v_3B_1 - v_1B_3)\partial_{v_2}f \\ &\quad + (v_1B_2 - v_2B_1)\partial_{v_3}f] - ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)\partial_{v_1}f \\ &= (B_2\partial_{v_3}f - B_3\partial_{v_2}f) \\ &= (B_e \wedge \nabla_v)_1f. \end{aligned}$$

Similarly we can show that, for all  $1 \leq i \leq 3$ ,

$$[\partial_{v_i}, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v] = (B_e \wedge \nabla_v)_i.$$

This proves the equality 3. Now, we will show (4),

$$\begin{aligned} [\nabla_x, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v]f &= \nabla_x((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)f - ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)\nabla_x f \\ &= (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f. \end{aligned}$$

□

Now, we are ready to build a new entropy that will allow us to show the exponential decay of the norm  $H^1(\mu^{1/2})$ . We define this modified entropy by

$$\mathcal{E}(u) = C\|u\|^2 + D\|\nabla_v u\|^2 + E\langle \nabla_x u, \nabla_v u \rangle + \|\nabla_x u\|^2, \quad \forall u \in H^1(\mu^{1/2}),$$

where  $C > D > E > 1$  are constants fixed below. We first show that  $\mathcal{E}(u)$  is equivalent to the norm  $H^1(\mu^{1/2})$  of  $u$ .

**Lemma 2.3.6.** *If  $E^2 < D$ , then  $\forall u \in H^1(\mu^{1/2})$*

$$\frac{1}{2}\|u\|_{H^1(\mu^{1/2})}^2 \leq \mathcal{E}(u) \leq 2C\|u\|_{H^1(\mu^{1/2})}^2. \quad (2.23)$$

*Proof.* Let  $u \in H^1(\mu^{1/2})$ . Using the Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$|E\langle \nabla_x u, \nabla_v u \rangle| \leq \frac{E^2}{2}\|\nabla_v u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_x u\|^2,$$

which implies

$$\begin{aligned} C\|u\|^2 + (D - \frac{E^2}{2})\|\nabla_v u\|^2 + (1 - \frac{1}{2})\|\nabla_x u\|^2 &\leq \mathcal{E}(u) \\ &\leq C\|u\|^2 + (D + \frac{E^2}{2})\|\nabla_v u\|^2 + (1 + \frac{1}{2})\|\nabla_x u\|^2. \end{aligned}$$

This implies (2.23) if  $E^2 < D$ . □

Note that using the same approach as in Section 3, we can show the existence of a solution of the problem (2.4), which will be denoted as  $f$ , in the space  $H^1(\mu^{1/2})$  in the sense of an associated semi-group. Using the preceding results, we are able to study the decrease of the modified entropy  $\mathcal{E}(f(t))$ .

**Proposition 2.3.7.** *Suppose that  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$ , then there exist  $C, D, E$  and  $\kappa > 0$ , such that for all  $f_0 \in H^1(\mu^{1/2})$  with  $\langle \langle f_0 \rangle \rangle = 0$ , the solution  $f$  of the system (2.4) satisfies*

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{E}(f(t)) \leq \mathcal{E}(f_0) e^{-\kappa t}.$$

*Proof.* The time derivatives of the four terms defining  $\mathcal{E}(f(t))$  will be calculated separately. For the first term we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|f\|^2 &= -2\langle \partial_t f, f \rangle \\ &= -2 \underbrace{\langle v \cdot \nabla_x f, f \rangle}_{=0} + 2 \underbrace{\langle (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f, f \rangle}_{=0} - 2\langle (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, f \rangle \\ &= -2\|\nabla_v f\|^2. \end{aligned}$$

The second term may be calculated as

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla_v f\|^2 &= 2\langle \nabla_v \partial_t f, \nabla_v f \rangle \\ &= -2\langle \nabla_v (v \cdot \nabla_x f), \nabla_v f \rangle + 2\langle \nabla_v ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f), \nabla_v f \rangle \\ &\quad - 2\langle \nabla_v (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle \\ &= -2 \underbrace{\langle v \nabla_x \nabla_v f, \nabla_v f \rangle}_{=0} - 2\langle [\nabla_v, v \cdot \nabla_x] f, \nabla_v f \rangle + 2\langle [\nabla_v, (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v] f, \nabla_v f \rangle \\ &\quad + 2 \underbrace{\langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_v f, \nabla_v f \rangle}_{=0} - 2\|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2. \end{aligned}$$

We used the fact that the operators  $v \cdot \nabla_x$  and  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  are skew-adjoint in  $L^2(\mu^{1/2})$  by Lemma 2.5.1. According to equalities (1) and (3) of Lemma 2.3.5, we then obtain

$$\frac{d}{dt} \|\nabla_v f\|^2 = -2\langle \nabla_x f, \nabla_v f \rangle + 2\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_v f \rangle - 2\|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2.$$

The time derivative of the third term can be calculated as follows:

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle = \langle \nabla_v \partial_t f, \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, \nabla_x \partial_t f \rangle. \quad (2.24)$$

We calculate each term of equality (2.24). For the first term, using equalities (1), (2) and (3) of Lemma 2.3.5, we obtain

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v \partial_t f, \nabla_x f \rangle &= -\langle \nabla_v (v \cdot \nabla_x f - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f + (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f), \nabla_x f \rangle \\ &= -\|\nabla_x f\|^2 - \langle v \cdot \nabla_x (\nabla_v f), \nabla_x f \rangle - \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle - \langle \Delta_v f, \nabla_v \cdot \nabla_x f \rangle \\ &\quad + \langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle + \langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_v f, \nabla_x f \rangle. \end{aligned}$$

For the second term of equality (2.24), using equality (4) of Lemma 2.3.5, we have

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v f, \nabla_x \partial_t f \rangle &= -\langle \nabla_v f, \nabla_x (v \cdot \nabla_x f - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f + (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f) \rangle \\ &= -\langle \nabla_v f, v \cdot \nabla_x (\nabla_x f) \rangle + \langle \nabla_v f, (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_v f, ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_x f \rangle - \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle - \langle \Delta_v f, \nabla_v \cdot \nabla_x f \rangle. \end{aligned}$$

Combining the preceding equalities of the two terms in (2.24), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle &= -\|\nabla_x f\|^2 - \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle + 2\langle (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_v \cdot (\nabla_x f) \rangle \\ &\quad - [\langle v \cdot \nabla_x (\nabla_v f), \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, v \cdot \nabla_x (\nabla_x f) \rangle] \\ &\quad + \langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f \rangle \\ &\quad + [\langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_v f, \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_x f \rangle]. \end{aligned}$$

According to Lemma 2.5.1, the operators  $v \cdot \nabla_x$  and  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  are skew-adjoint in  $L^2(\mu^{1/2})$ , so we have

$$\langle v \cdot \nabla_x (\nabla_v f), \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, v \cdot \nabla_x (\nabla_x f) \rangle = 0 \quad (2.25)$$

$$\langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_v f, \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_x f \rangle = 0. \quad (2.26)$$

Using equalities (2.25)-(2.26), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle &= -\|\nabla_x f\|^2 - \langle \nabla_v f, \nabla_x f \rangle + 2\langle (-\nabla_v + v) \nabla_v f, \nabla_v \cdot (\nabla_x f) \rangle \\ &\quad + \langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle + \langle \nabla_v f, (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f \rangle. \end{aligned}$$

Finally, the time derivative of the last term takes the following form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla_x f\|^2 &= 2\langle \nabla_x \partial_t f, \nabla_x f \rangle \\ &= -2 \underbrace{\langle \nabla_x (v \cdot \nabla_x f), \nabla_x f \rangle}_{=0} + 2\langle \nabla_x ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f), \nabla_x f \rangle \\ &\quad - 2\langle \nabla_x (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_x f \rangle \\ &= -2\|\nabla_x \nabla_v f\|^2 + 2\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_x f \rangle + 2 \underbrace{\langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) \nabla_x f, \nabla_x f \rangle}_{=0} \\ &= -2\|\nabla_x \nabla_v f\|^2 + 2\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_x f \rangle, \end{aligned}$$

Tying together all these computations, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f) &= -2C\|\nabla_v f\|^2 - 2D\|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2 - E\|\nabla_x f\|^2 - 2\|\nabla_x \nabla_v f\|^2 \\ &\quad - (2D + E)\langle \nabla_x f, \nabla_v f \rangle + 2E\langle (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_v \cdot (\nabla_x f) \rangle \\ &\quad + 2D\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_v f \rangle + E\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle \\ &\quad + E\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle + 2\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_x f \rangle. \end{aligned}$$

Now, using Lemma 2.5.3, the time derivative of  $\mathcal{E}(f(t))$  takes the following form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f(t)) &= -2C\|\nabla_v f\|^2 - 2D\|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2 - E\|\nabla_x f\|^2 - 2\|\nabla_x \nabla_v f\|^2 \\ &\quad - (2D + E)\langle \nabla_x f, \nabla_v f \rangle + 2E\langle (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_v \cdot (\nabla_x f) \rangle \\ &\quad + 2D\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_v f \rangle + E\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle \\ &\quad - E\langle \nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_v f), \nabla_v f \rangle - 2\langle \nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_x f), \nabla_v f \rangle. \end{aligned}$$

Now we estimate the scalar products in the previous equality in  $L^2(\mu^{1/2})$ . For all  $\eta, \eta'$  and  $\eta'' > 0$ , we have

$$\begin{aligned} |(2D + E)\langle \nabla_x f, \nabla_v f \rangle| &\leq \frac{1}{2} \|\nabla_x f\|^2 + \frac{1}{2} (2D + E)^2 \|\nabla_v f\|^2, \\ |2E\langle (-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f, \nabla_v \cdot (\nabla_x f) \rangle| &\leq \|\nabla_v \cdot (\nabla_x f)\|^2 + E^2 \|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2, \\ |2D\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_v f \rangle| &\leq 2D \|B_e\|_\infty \|\nabla_v f\|^2, \\ |E\langle (B_e \wedge \nabla_v) f, \nabla_x f \rangle| &\leq E \frac{\eta}{2} \|\nabla_x f\|^2 + E \frac{1}{2\eta} \|B_e\|_\infty^2 \|\nabla_v f\|^2, \end{aligned}$$

and using then  $\|\nabla_v^2 f\|^2 \leq \|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2 + \|\nabla_v f\|^2$ , we obtain

$$\begin{aligned} |E\langle (\nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_v)) f, \nabla_v f \rangle| &\leq \frac{\eta'}{2} \|\nabla_v^2 f\|^2 + \frac{E^2}{2\eta'} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2 \|\nabla_v f\|^2 \\ &\leq \frac{\eta'}{2} \|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2 + \left( \frac{E^2}{2\eta'} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2 + \frac{\eta'}{2} \right) \|\nabla_v f\|^2, \end{aligned}$$

The last scalar product is bounded by

$$|2\langle (\nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_x)) f, \nabla_v f \rangle| \leq \eta'' \|\nabla_x \nabla_v f\|^2 + \frac{1}{\eta''} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2 \|\nabla_v f\|^2.$$

Combining all the previous estimates, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(f) &\leq (-2C + \frac{1}{2} (2D + E)^2 + 2D \|B_e\|_\infty + \frac{E}{2\eta} \|B_e\|_\infty^2 \\ &\quad + \frac{E^2}{2\eta'} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2 + \frac{\eta'}{2} + \frac{1}{\eta''} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2) \|\nabla_v f\|^2 \\ &\quad + (-2D + E^2 + \frac{\eta'}{2}) \|(-\nabla_v + v) \cdot \nabla_v f\|^2 \\ &\quad + (-E + \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2} E) \|\nabla_x f\|^2 \\ &\quad + (-2 + 1 + \eta'') \|\nabla_x \nabla_v f\|^2. \end{aligned}$$

We notice that

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (2D + E)^2 + 2D \|B_e\|_\infty + \frac{E}{2\eta} \|B_e\|_\infty^2 \\ &\quad + \frac{E^2}{2\eta'} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2 + \frac{\eta'}{2} + \frac{1}{\eta''} \|\nabla_x B_e\|_\infty^2. \end{aligned}$$

We choose  $\eta, \eta'', E, D$  and  $C$  such that

1.  $\eta \leq 1$  and  $\eta'' \leq 1$ .

2.  $E \geq 2$ .
3.  $D \geq \frac{1}{2}(E^2 + \frac{\eta'}{2})$ .
4.  $C \geq A$ .

Under the previous conditions, we get

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(f) \leq -C\|\nabla_v f\|^2 - \frac{E}{4}\|\nabla_x f\|^2 \leq -\frac{E}{4}(\|\nabla_v f\|^2 + \|\nabla_x f\|^2).$$

Using the Poincaré inequality in space and velocity variables, we then obtain

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(f) \leq -\frac{E}{8}(\|\nabla_v f\|^2 + \|\nabla_x f\|^2) - \frac{E}{8}c_p\|f\|^2 \leq -\frac{E}{8}\frac{c_p}{2C}\mathcal{E}(f).$$

Which completes Proposition A.1.2 with  $\kappa = \frac{E}{8}\frac{c_p}{2C} > 0$ . □

*Proof of Theorem 2.1.4.* Using Lemma 2.3.6 and Proposition 2.3.7, we get  $\kappa > 0$  and  $1 < E < D < C$  such that

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1(\mu^{1/2})}^2 &\leq 2\mathcal{E}(f) \leq 2Ce^{-\kappa t}\mathcal{E}(f_0) \\ &\leq 4Ce^{-\kappa t}\|f_0\|_{H^1(\mu^{1/2})}^2. \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 2.1.4. □

## 2.4 Enlargement of the functional space

### 2.4.1 Intermediate results

In this section, we extend the results of exponential time decay of the semi-group to enlarged spaces (which we will define later), following the recent work of Gualdani, Mischler, Mouhot in [26].

**Notation:** Let  $E$  be a Banach space.

- We denote by  $\mathcal{C}(E)$  the space of unbounded, closed operators with dense domains in  $E$ .
- We denote by  $B(E)$  the space of bounded operators in  $E$ .
- Let  $a \in \mathbb{R}$ . We define the complex half-plane

$$\Delta_a = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > a\}.$$

- Let  $L \in \mathcal{C}(E)$ .  $\Sigma(L)$  denote the spectrum of the operator  $L$  and  $\Sigma_d(L)$  its discrete spectrum.

- Let  $\xi \in \Sigma_d(L)$ , for  $r$  sufficiently small we define the spectral projection associated with  $\xi$  by

$$\Pi_{L,\xi} := \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-\xi|=r} (L - z)^{-1} dz.$$

- Let  $a \in \mathbb{R}$  be such that  $\Delta_a \cap \Sigma(L) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \subset \Sigma_d(L)$ . We define  $\Pi_{L,a}$  as the operator

$$\Pi_{L,a} = \sum_{j=1}^k \Pi_{L,\xi_j}.$$

We need the following definition on the convolution of semigroups (corresponding to composition at the level of the resolvent operators).

**Définition 2.4.1** (Convolution of time dependent operators). *Let  $X_1, X_2$  and  $X_3$  be Banach spaces. For two given functions*

$$\mathcal{S}_1 \in L^1(\mathbb{R}^+; B(X_1, X_2)) \text{ and } \mathcal{S}_2 \in L^1(\mathbb{R}^+; B(X_2, X_3)),$$

*we define the convolution  $\mathcal{S}_2 * \mathcal{S}_1 \in L^1(\mathbb{R}^+; B(X_1, X_3))$  by*

$$\forall t \geq 0, (\mathcal{S}_2 * \mathcal{S}_1)(t) := \int_0^t \mathcal{S}_2(s) \mathcal{S}_1(t-s) ds.$$

When  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$  and  $X_1 = X_2 = X_3$ , we define inductively  $\mathcal{S}^{(*1)} = \mathcal{S}$  and  $\mathcal{S}^{(*\ell)} = \mathcal{S} * \mathcal{S}^{(*(\ell-1))}$  for any  $\ell \geq 2$ .

**Définition 2.4.2.** *Consider a Banach space  $(E, \|\cdot\|_E)$  and some operator  $L \in \mathcal{C}(E)$ . We say that  $L$  is hypodissipative if it is dissipative for some norm equivalent to the canonical norm of  $E$  and we say that  $L$  is dissipative for the norm  $\|\cdot\|_E$  on  $E$  if for all  $f \in D(L)$  and  $f^* \in E^*$  such that*

$$\langle f, f^* \rangle = \|f\|_E^2 = \|f^*\|_{E^*}^2,$$

*we have  $\Re \langle Lf, f^* \rangle \leq 0$ .*

The concept of hypodissipativity will be needed later. We give a practical criterion to prove that an operator  $L$  is hypodissipative in  $E$ .

**Corollary 2.4.1.** [76, Chapter 1] *Consider  $E$  a Banach space,  $L$  the generator of a  $C^0$ -semi-group  $(S_L(t))_{t \geq 0}$ , and  $a \in \mathbb{R}$ , then the operator  $L - a$  is hypodissipative on  $E$  if and only if the semi-group  $S_L(t)$  satisfies the growth estimate*

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_L(t)\|_{B(E)} \leq M e^{at}, \quad \text{where } M > 0.$$

We refer to the paper [26, Section 2.3] for an introduction to this subject. Now, we recall the crucial Theorem of enlargement of the functional space.

**Theorem 2.4.2** (Theorem 2.13 in [26]). *Let  $E$  and  $\mathcal{E}$  be two Banach spaces such that  $E \subset \mathcal{E}$ ,  $L \in \mathcal{C}(E)$  and  $\mathcal{L} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  such that  $\mathcal{L}|_E = L$ . We suppose that there exist  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  such that  $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  (with corresponding restrictions  $A, B$  on  $E$ ). Suppose there exists  $a \in \mathbb{R}$  and  $n \in \mathbb{N}$  such that*

(H<sub>1</sub>) **Locating the spectrum of  $L$ :**

$$\Sigma(L) \cap \Delta_a = \{0\} \subset \Sigma_d(L),$$

and  $L - a$  is dissipative on  $\text{Im}(Id_E - \Pi_{L,0})$

(H<sub>2</sub>) **Dissipativity of  $\mathcal{B}$  and bounded character of  $\mathcal{A}$ :**  $(\mathcal{B} - a)$  is hypodissipative on  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{A} \in B(\mathcal{E})$  and  $A \in B(E)$ .

(H<sub>3</sub>) **Regularization properties of  $T_n(t) = (\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t))^{(*n)}$ :**

$$\|T_n(t)\|_{B(\mathcal{E}, E)} \leq C_{a,n} e^{at},$$

where  $S_{\mathcal{B}}$  is the semi-group associated to the operator  $\mathcal{B}$  acting on  $\mathcal{E}$ . Then for all  $0 > a' > a$ , we have the following estimate:

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{L}}(t) - S_{\mathcal{L}}(t)\Pi_{\mathcal{L},0}\|_{B(\mathcal{E})} \leq C_{a'} e^{a't},$$

where  $S_{\mathcal{L}}$  is the semi-group associated to the operator  $\mathcal{L}$  acting on  $\mathcal{E}$ .

In the application of the previous theorem in the case of the Fokker-Planck operator with magnetic field, the key step of the proof is to obtain decay estimates verifying dissipation and regularization properties. In order to prove the dissipativity of the operator we apply Corollary 2.4.1. We give a lemma providing a practical criterion to prove hypothesis (H<sub>3</sub>) of the previous theorem.

**Lemma 2.4.3** (Lemma 2.4 in [65]). *Let  $E$  and  $\mathcal{E}$  be two Banach spaces with  $E \subset \mathcal{E}$  dense with continuous embedding, and consider  $L \in \mathcal{C}(E)$  and  $\mathcal{L} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  with  $\mathcal{L}|_E = L$  and  $a \in \mathbb{R}$ . Let us assume that:*

- a)  $\mathcal{B} - a$  is hypodissipative on  $\mathcal{E}$  and  $B - a$  on  $E$ .
- b)  $\mathcal{A} \in B(\mathcal{E})$  and  $A \in B(E)$ .
- c) There are constants  $b \in \mathbb{R}$  and  $\Theta \geq 0$  such that

$$\|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)\|_{B(\mathcal{E}, E)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \text{ and } \|S_{\mathcal{B}}(t)\mathcal{A}\|_{B(\mathcal{E}, E)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta}.$$

Then for all  $a' > a$ , there exist some explicit constants  $n \in \mathbb{N}$  and  $C_{a'} \geq 1$ , such that

$$\forall t \geq 0, \quad \|T_n\|_{B(\mathcal{E}, E)} \leq C_{a'} e^{a't}.$$

Note that, in the application of the previous lemma in the case of the Fokker-Planck operator with magnetic field, only regularization properties of the operator  $\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)$  are needed to deduce the hypothesis (H<sub>3</sub>) of Theorem 2.4.2. (See the proof of Lemma 2.4 in [65] and Lemma 2.17 in [26]).

## 2.4.2 Study of the magnetic-Fokker-Planck operator on the spaces $L^p(m)$ and $\tilde{W}^{1,p}(m)$ :

This part consists in building the general framework of the problem.

Recall first the equation of Fokker-Planck (2.2) written in original variable:

$$\begin{aligned} \partial_t F &= -P_0 F, \quad F(0, x, v) = F_0(x, v), \\ \text{where} \quad -P_0 F &= \nabla_v \cdot (\nabla_v F + K F) - v \cdot \nabla_x F, \end{aligned} \quad (2.27)$$

and where we recall that  $P_0$  was introduced in Section 2 and with

$$K(x, v) = v + v \wedge B_e(x) = \nabla_v \Phi + v \wedge B_e(x), \text{ where } \Phi(v) = \frac{|v|^2}{2}$$

and  $B_e$  is the external magnetic field satisfying  $B_e \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}^3)$ . As mentioned in Section 2, the Maxwellian  $\mu$  is a solution of the system (2.2). We will need the following modified Poincaré inequality:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \left| \nabla_v \left( \frac{F}{\mu} \right) \right|^2 \mu(v) dx dv \\ \geq 2\lambda_p \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \left( F - \int_{\mathbb{R}^3} F(v') dv' \right)^2 (1 + |\nabla_v \Phi|^2) \mu^{-1}(v) dx dv, \end{aligned} \quad (2.28)$$

where  $\lambda_p > 0$  which depends on the dimension (see [65, Lemma 3.6]). See also [69], [5] and [3].

Now we will define the expanded functional space.

**Définition 2.4.3.** Let  $m = m(v) > 0$  on  $\mathbb{R}^3$  be a weight of class  $C^\infty$  and recall that

- The space  $L^p(m)$  for  $p \in [1, 2]$ , is the Lebesgue space with weight associated with the norm

$$\|F\|_{L^p(m)} := \|Fm\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3} F^p(x, v) m^p(v) dv dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- We define the technical function  $\Psi_{m,p}$  by

$$\Psi_{m,p} := (p-1) \frac{|\nabla_v m|^2}{m^2} + \frac{\Delta_v m}{m} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \nabla_v \cdot K - K \cdot \frac{\nabla_v m}{m},$$

where  $K(x, v) = v \wedge B_e(x) + v$ .

**Remark 2.4.4.** We note that  $\nabla_v \cdot (v \wedge B_e) = 0$  (because  $B_e$  is independent of  $v$ ) and for all  $m$  which are radial in  $v$  and independent of  $x$ , we obtain

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v m = 0, \text{ since } (v \wedge B_e) \cdot v = 0.$$

Therefore, we obtain that  $\Psi_{m,p}$  is independent of the magnetic field when  $m$  is radial in  $v$ .

We will show the decay of the semi-group associated with the problem (2.2) in the spaces  $L^p(m)$  where  $p \in [1, 2]$ , when  $m$  verifies the following hypothesis:

(W<sub>p</sub>) The weight  $m$  is defined such that  $L^2(\mu^{-1/2}) \subset L^p(m)$  with continuous injection and

$$\limsup_{|v| \rightarrow +\infty} \Psi_{m,p} =: a_{m,p} < 0.$$

**Remark 2.4.5.** In the following, we note  $m_0 = \mu^{-1/2}$  the exponential weight. By direct computation,  $L^2(\mu^{-1/2}) \subset L^q(m_0)$  for any  $q \in [1, 2]$  with continuous injection and there exists  $b \in \mathbb{R}$  such that

$$\begin{cases} \sup_{q \in [1,2], v \in \mathbb{R}^3} \Psi_{m_0,q} \leq b \\ \sup_{v \in \mathbb{R}^3} \left( \frac{\Delta_v m_0}{m_0} - \frac{|\nabla_v m_0|^2}{m_0^2} \right) \leq b. \end{cases} \quad (2.29)$$

(See Lemma 3.7 in [26] for a proof of the previous property). Under the previous hypothesis, by direct computation we obtain that the semi-group  $\mathcal{S}_{L_0}$  associated to the operator  $L_0 := -P_0$  defined in (2.27) is bounded from  $L^p(m_0)$  to  $L^p(m_0)$ .

We work now in  $L^p(m)$  with a polynomial weight  $m$  satisfying Hypothesis (W<sub>p</sub>).

**Lemma 2.4.6.** Let  $m = \langle v \rangle^k := (1 + |v|^2)^{k/2}$  and  $p \in [1, 2]$ . Then hypothesis (W<sub>p</sub>) is true when  $k$  satisfies the following estimate:

$$k > 3\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

*Proof.* We consider  $m = \langle v \rangle^k$ ,  $k > 0$ , and we compute

$$\nabla_v m = k v \langle v \rangle^{k-2} \text{ and } \Delta_v m = k(k+1) \langle v \rangle^{k-2}.$$

We recall that

$$\Psi_{m,p} = (p-1) \frac{|\nabla_v m|^2}{m^2} + \frac{\Delta_v m}{m} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \nabla_v \cdot K - K \cdot \frac{\nabla_v m}{m}.$$

Using Remark 2.4.4

$$\nabla_v \cdot (v \wedge B_e) = 0 \text{ and } (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v m = 0,$$

As  $|v| \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{m,p} &= 3\left(1 - \frac{1}{p}\right) - v \cdot \frac{\nabla_v m}{m} + \mathcal{O}(|v|^{-1}) \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{p}\right) - k \frac{|v|^2 \langle v \rangle^{k-2}}{\langle v \rangle^k} + \mathcal{O}(|v|^{-1}). \end{aligned}$$

. We deduce that

$$a_{m,p} = \limsup_{|v| \rightarrow \infty} \Psi_{m,p} = 3(1 - \frac{1}{p}) - k,$$

and  $a_{m,p}$  is negative if  $k > 3(1 - \frac{1}{p})$ .

By applying Holder's inequality, we can easily show the continuous injection  $L^2(\mu^{-1/2}) \subset L^p(\langle v \rangle^k)$  for any  $p \in [1, 2]$ . (Cf. [26, Lemma 3.7] for more details on this subject).  $\square$

### Proof of Theorem 2.1.6

From now on, we write  $L_0$  for the operator  $-P_0$ , the Fokker-Planck operator defined in (2.27) considered on the space  $L^2(\mu^{-1/2})$  defined in (2.27), respectively  $\mathcal{L}_0$  for  $-P_0$  the Fokker-Planck operator considered on the space  $\mathcal{E} = L^p(m)$ , with  $m = \langle v \rangle^k$ , where  $k > 3(1 - \frac{1}{p})$  and  $p \in [1, 2]$ . We will prove Theorem 2.1.6 by applying Theorem 2.4.2 to  $\mathcal{L}_0$ . To verify Hypotheses  $(H_2)$  and  $(H_3)$  of Theorem 2.4.2, we need two lemmas about the dissipativity and regularization properties of  $\mathcal{L}_0$  following [26].

**Définition 2.4.4.** We split the operator  $\mathcal{L}_0$  into two pieces: for  $M, R > 1$ , we define the operator  $\mathcal{B}$  by

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{A} \text{ with } \mathcal{A}f = M\chi_R f, \quad (2.30)$$

where  $\chi_R(v) = \chi(v/R)$ , and  $0 \leq \chi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$  is such that  $\chi(v) = 1$  when  $|v| \leq 1$ . We also denote by  $A$  and  $B$  the restriction of the operators  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  to the space  $E$ .

**Lemma 2.4.7** (Dissipativity of  $\mathcal{B}$ ). Under Assumption  $(W_p)$ , for all  $0 > a > a_{m,p}$ , we can choose  $R, M > 1$  such that the operator  $\mathcal{B} - a$  satisfies the dissipativity estimate for some  $C > 0$

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{B}}(t)F\|_{L^p(m)} \leq Ce^{at} \|F\|_{L^p(m)}.$$

*Proof.* The proof follows the one given in Lemma 3.8 in [26]. Let  $F$  be smooth, rapidly decaying and positive function  $F$ . Since  $\Psi_{m,p}$  is independent of the magnetic field (see Remark 2.4.4), by performing an integration by parts with respect to  $x$  and  $v$  and using Remark 2.5.2 (specifically the fact that the operator  $v \cdot \nabla x$  is skew-adjoint in  $L^2(m)$  with  $m = \langle v \rangle^k$  and  $m$  is independent of  $x$ ), we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|F\|_{L^p(m)}^p &= \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\mathcal{L}_0 F - M\chi_R(v)F) |F|^{p-2} F m^p(v) dx dv \\ &= -(p-1) \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\nabla_v F|^2 |F|^{p-2} m^p(v) dx dv \\ &\quad + \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |F|^p \Psi_{m,p} m^p(v) dx dv - \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} M \chi_R(v) |F|^p m^p(v) dx dv \\ &\leq \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |F|^p (\Psi_{m,p} - M\chi_R) m^p(v) dx dv. \end{aligned}$$

Let now take  $a > a_{m,p}$ . As  $m$  satisfies the hypothesis  $(W_p)$ , there exist  $M$  and  $R$  two large constants such that

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad \Psi_{m,p} - M\chi_R \leq a,$$

and we obtain

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|F\|_{L^p(m)}^p \leq a \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |F|^p m^p(v) dx dv.$$

This completes the proof of Lemma 2.4.7.  $\square$

From now on,  $a$ ,  $M$  and  $R$  are fixed. We note that  $\mathcal{B}^*$  is the dual operator of  $\mathcal{B}$  relative to the pivot space  $L^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , which is defined as follows:

$$\mathcal{B}^* F := \nabla_v \cdot (\nabla_v F - K F) + v \cdot \nabla_x F - M\chi_R F.$$

**Lemma 2.4.8** (Regularization properties). *There exists  $b \in \mathbb{R}$  and  $C > 0$  such that, for all  $t \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq p \leq q \leq 2, \quad & \|S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^q(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{L^p(m_0)}, \\ \forall 2 \leq q' \leq p' \leq +\infty, \quad & \|S_{\mathcal{B}^*}(t)F_0\|_{L^{q'}(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{L^{q'}(m_0)}, \end{aligned}$$

where  $p'$  and  $q'$  are the conjugates of  $p$  and  $q$  respectively and  $m_0 = \mu^{-1/2}$ .

*Proof.* We consider  $F(t)$  the solution of the evolution equation

$$\partial_t F(t) = \mathcal{B}F(t), \quad F|_{t=0} = F_0.$$

We introduce the following entropy defined for all  $t \in [0, T]$ , with  $T \ll 1$  and  $r > 1$  to be fixed later:

$$\mathcal{H}(t, h) = B\|h\|_{L^1(m_0)}^2 + t^r \mathcal{G}(t, h),$$

with

$$\mathcal{G}(t, h) = \alpha\|h\|_{L^2(m_0)}^2 + D t \|\nabla_v h\|_{L^2(m_0)}^2 + E t^2 \langle \nabla_x h, \nabla_v h \rangle_{L^2(m_0)} + \beta t^3 \|\nabla_x h\|_{L^2(m_0)}^2,$$

where  $B > \alpha > D, \beta, E < \sqrt{\beta D}$  and  $r$  is an integer that will be determined later. We will omit the dependence of  $F$  on  $t$ . Using the methods and computations of the proof of Proposition 2.3.7 and adapting the techniques used in [36], we choose the constants  $\alpha, D$  and  $E > 0$  large enough such that there exist a constant  $C_{\mathcal{G}} > 0$  (depending on  $\|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}$  and  $\|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}$ ) such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t, F) &\leq -C_{\mathcal{G}}(\|\nabla_v F\|_{L^2(m_0)}^2 + t^2 \|\nabla_x F\|_{L^2(m_0)}^2) \\ &\quad + \left( \frac{M}{2} \|\Delta_v \chi_R\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{M}{2} \|\chi_R\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 + M \|\nabla_v \chi_R\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}^2 \right) \|F\|_{L^2(m_0)}^2 \\ &\leq -C_{\mathcal{G}}(\|\nabla_v F\|_{L^2(m_0)}^2 + t^2 \|\nabla_x F\|_{L^2(m_0)}^2) + C_{\chi} \|F\|_{L^2(m_0)}^2. \end{aligned}$$

Here,  $C_\chi > 0$  is a uniform constant in  $R > 1$  but depends on  $M$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, F) &= B \frac{d}{dt} \|F\|_{L^1(m_0)}^2 + r t^{r-1} \mathcal{G}(t, F) + t^r \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t, F) \\ &\leq B \frac{d}{dt} \|F\|_{L^1(m_0)}^2 + r t^{r-1} \mathcal{G}(t, F) \\ &\quad - C_{\mathcal{G}} t^r (\|\nabla_v F\|_{L^2(m_0)}^2 + t^2 \|\nabla_x F\|_{L^2(m_0)}^2) + C_\chi t^r \|F\|_{L^2(m_0)}^2. \end{aligned}$$

We choose the constants  $\beta$  and  $T > 0$  such that

$$\beta < \frac{C_{\mathcal{G}}}{2r} \text{ and } T \leq \frac{C_{\mathcal{G}}}{2r} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{\beta} \right).$$

We deduce that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, F) &\leq B \frac{d}{dt} \|F\|_{L^1(m_0)}^2 - \frac{C_{\mathcal{G}}}{2} t^r (\|\nabla_v F\|_{L^2(m_0)}^2 + t^2 \|\nabla_x F\|_{L^2(m_0)}^2) \\ &\quad + \frac{C_\chi}{2} t^{r-1} \|F\|_{L^2(m_0)}^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Now, the Nash inequality [71] implies that there exists  $C_d > 0$  such that

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x, v)|^2 m_0^2 dx dv &\leq C_d \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |\nabla_{x,v}(F m_0)|^2 dx dv \right)^{\frac{d}{d+1}} \\ &\quad \times \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F| m_0 dx dv \right)^{\frac{2}{d+1}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

We need to have an estimate based on  $\|\nabla_{x,v} F\|_{L^2(m_0)}$ . Firstly,

$$\begin{aligned} \iint |\nabla_v(F m_0)|^2 dx dv &= \iint |\nabla_v F + \frac{v}{2} F|^2 m_0^2 dx dv \\ &\leq 2 \left( \iint |\nabla_v F|^2 m_0^2 dx dv + \iint |F|^2 |v|^2 m_0^2 dx dv \right) \\ &\leq 2 \left( \|\nabla_v F\|_{L^2(m_0)}^2 + \|v F\|_{L^2(m_0)}^2 \right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

On the other hand, we use the fact that  $v m_0^2 = \nabla_v(m_0^2)$  to estimate  $\|v F\|_{L^2(m_0)}$ . We get

$$\begin{aligned} \iint |F|^2 |v|^2 m_0^2 dx dv &= \iint v |F|^2 \cdot v m_0^2 dx dv \\ &= \iint v |F|^2 \cdot \nabla_v(m_0^2) dx dv, \end{aligned}$$

and integrating by parts in  $v$  in the previous estimate, we obtain

$$\begin{aligned} \iint |F|^2 |v|^2 m_0^2 dx dv &\leq - \iint \nabla_v \cdot (v |F|^2) m_0^2 dx dv \\ &= -3 \iint |F|^2 m_0^2 dx dv - 2 \iint v \cdot F \nabla_v F m_0^2 dx dv \\ &\leq -2 \iint v \cdot F \nabla_v F m_0^2 dx dv. \end{aligned}$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\begin{aligned} \iint |F|^2 |v|^2 m_0^2 dx dv &\leq 2 \left( \iint |v|^2 |F|^2 m_0^2 dx dv \right)^{1/2} \times \left( \iint |\nabla_v F|^2 m_0^2 dx dv \right)^{1/2} \\ &\leq 8 \iint |\nabla_v F|^2 m_0^2 dx dv + \frac{1}{2} \iint |v|^2 |F|^2 m_0^2 dx dv. \end{aligned}$$

Therefore

$$\iint |F|^2 |v|^2 m_0^2 dx dv \leq 16 \iint |\nabla_v F|^2 m_0^2 dx dv. \quad (2.34)$$

Using the previous estimate and inequality (2.33), we have

$$\iint |\nabla_v (F m_0)|^2 dx dv \leq 34 \iint |\nabla_v F|^2 m_0^2 dx dv.$$

Using the previous inequality and the fact that  $\nabla_x (F m_0) = m_0 \nabla_x F$  (since  $m_0$  does not depend on  $x$ ), there exists  $C'_d > 0$  such that the estimate (2.32) becomes

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x, v)|^2 m_0^2 dx dv &\leq C'_d \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |\nabla_{x,v} F|^2 m_0^2 dx dv \right)^{\frac{d}{d+1}} \\ &\quad \times \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F| m_0 dx dv \right)^{\frac{2}{d+1}}. \end{aligned}$$

Using Young's inequality with  $p = (d+1)$  and  $q = (d+1)/d$ , we get, for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x, v)|^2 m_0^2 dx dv &\leq C'_d t^{-3d/d+1} \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |F| m_0 dx dv \right)^{\frac{2}{d+1}} \\ &\quad \times t^{3d/d+1} \left( \iint_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} |\nabla_{x,v} F|^2 m_0^2 dx dv \right)^{\frac{d}{d+1}} \\ &\leq C_{\varepsilon,d} t^{-3d} \|F\|_{L^1(m_0)}^2 + \varepsilon t^3 \|\nabla_{x,v} F\|_{L^2(m_0)}^2. \end{aligned}$$

Using the previous estimate, we choose  $\varepsilon > 0$  small enough that there is a  $C'' > 0$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, F) \leq B \frac{d}{dt} \|F\|_{L^1(m_0)}^2 + C'' t^{r-1-3d} \|F\|_{L^1(m_0)}^2.$$

According to Remark 2.4.5 there exists  $b \in \mathbb{R}$  such that  $\forall p \in [1, 2]$

$$\frac{d}{dt} \|F\|_{L^p(m_0)} \leq b \|F\|_{L^p(m_0)}, \quad \forall t \geq 0,$$

Finally, using the previous estimate when  $p = 1$  and choosing  $r = 3d + 1$ , we deduce that there exists  $B'' > 0$  such

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, F) \leq B'' \|F\|_{L^1(m_0)}^2 \leq \frac{B''}{B} \mathcal{H}(t, F).$$

Thanks to Gronwall's Lemma, there exists  $B''' > 0$  such that

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathcal{H}(t, F) \leq B''' \mathcal{H}(0, F_0) \leq C \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2.$$

Then,

$$\forall t \in (0, T], \quad \|F\|_{L^2(m_0)}^2 \leq \frac{\alpha}{t^r} \mathcal{H}(t, F) \leq \frac{C}{t^{3d+1}} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2.$$

As a consequence, using the continuity of  $S_B(t)$  on  $L^p(m_0)$  with  $p = 2$ ,

$$\forall t \in (T, +\infty), \quad \|F\|_{L^2(m_0)}^2 = \|S_B(t - T + T)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 \leq C e^{(t-T)b} \|S_B(T)F_0\|_{L^2(m_0)}^2,$$

and eventually for all  $t \in (0, +\infty)$

$$\|F\|_{L^2(m_0)}^2 \leq \frac{C}{t^{3d+1}} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2$$

Let us now consider  $p$  and  $q$  satisfying  $1 \leq p \leq q \leq 2$ .  $S_B(t)$  is continuous from  $L^p(m_0)$  into  $L^q(m_0)$  using the Riesz-Thorin Interpolation Theorem. Moreover, if we denote by  $C_{p,q}(t)$  the norm of  $S_B(t) : L^p(m_0) \rightarrow L^q(m_0)$ , we get the following estimate:

$$C_{p,q}(t) \leq C_{2,2}^{2-\frac{2}{p}}(t) C_{1,1}^{\frac{2}{q}-1}(t) C_{1,2}^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}(t) \leq C \frac{e^{bt}}{t^{(3d+1)(1/p-1/q)}}.$$

This shows the first estimate.

Now we will show the second estimate. According to the first estimate, we have

$$\forall 1 \leq p \leq q \leq 2, \quad \|S_B(t)F_0\|_{L^q(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{L^p(m_0)},$$

which means

$$\|S_{m_0 \mathcal{B} m_0^{-1}}(t)h\|_{L^q} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|h\|_{L^p},$$

where  $h = m_0 F_0$ . Then by duality, we get

$$\|S_{m_0 \mathcal{B}^* m_0^{-1}}(t)h\|_{L^{p'}} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|h\|_{L^{q'}},$$

where  $p'$  and  $q'$  are the conjugates of  $p$  and  $q$  respectively. Which gives the result by reusing the definition of weighted dual spaces

$$\|S_{\mathcal{B}^*}(t)F_0\|_{L^{p'}(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{L^{q'}(m_0)}.$$

This completes the proof. □

**Corollary 2.4.9.** *Let  $m$  be a weight that satisfies Hypothesis 2.1.7, then there exists  $\Theta \geq 0$  such that for all  $F_0 \in L^p(m)$  with  $p \in [1, 2]$ , we have the following estimate*

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad \|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}(t)}F_0\|_{L^2(m_0)} &\leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{L^p(m)}, \\ \forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{B}(t)}\mathcal{A}F_0\|_{L^2(m_0)} &\leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{L^p(m)}, \end{aligned}$$

where  $m_0 = \mu^{-1/2}$ .

*Proof.* We first prove the second inequality. Let  $F_0 \in L^p(m)$  with  $m$  a polynomial weight satisfying Hypothesis 2.1.7. For all  $1 \leq p \leq 2$  and for all  $t \in ]0, 1]$  and  $v \in \mathbb{R}^3$ , using Lemma 2.4.8 with  $q = 2$ , we get

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{B}}(t) \mathcal{A} F_0\|_{L^2(m_0)} &\leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|\mathcal{A} F_0\|_{L^p(m_0)} \\ &\leq C e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left\| \mathcal{A} F_0 \times \frac{m_0}{m} \right\|_{L^p(m)} \\ &\leq C M e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \times \left( \sup_{v \in B(0, R)} \frac{m_0(v)}{m(v)} \right) \|F_0\|_{L^p(m)} \\ &\leq C' e^{bt} t^{-(3d+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|F_0\|_{L^p(m)} \leq C' e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{L^p(m)}, \end{aligned}$$

where  $\Theta = (3d+1)(1/p - 1/2) > 0$ .

To show the first estimate, we proceed step by step.

**Step 1:** First, we will show the following estimate:

$$\|S_{\mathcal{B}^*}(t) g\|_{L^{p'}(m)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|g\|_{L^2(m_0)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.35)$$

Indeed, using the continuous and dense injection  $L^{p'}(m_0) \subset L^{p'}(m)$ , we obtain

$$\|S_{\mathcal{B}^*}(t) g\|_{L^{p'}(m)} \leq \|S_{\mathcal{B}^*}(t) g\|_{L^{p'}(m_0)},$$

then using Lemma 2.4.8 with  $q' = 2$ , we obtain

$$\|S_{\mathcal{B}^*}(t) g\|_{L^{p'}(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|g\|_{L^2(m_0)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.36)$$

where  $\Theta = (3d+1)(1/p - 1/2)$ .

**Step 2:** Of the inequality (2.36), it follows that for  $g = \mathcal{A} F_0$ , we get

$$\|S_{\mathcal{B}^*} \mathcal{A} F_0\|_{L^{p'}(m)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|\mathcal{A} F_0\|_{L^2(m_0)},$$

which means, denoting  $h = m F_0$

$$\|S_{m\mathcal{B}^* m^{-1}} \mathcal{A} h\|_{L^{p'}} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \left\| \mathcal{A} h \times \frac{m_0}{m} \right\|_{L^2} \leq C' e^{bt} t^{-\Theta} \|h\|_{L^2},$$

by a duality argument and noting that  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , we get

$$\|\mathcal{A} S_{m\mathcal{B}^* m^{-1}} h\|_{L^2} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|h\|_{L^p}.$$

Finally, according to our definition of weighted dual spaces and replacing  $h$  by  $m F_0$ , we obtain

$$\|\mathcal{A} S_{\mathcal{B}}(t) F_0\|_{L^2(m)} \leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{L^p(m)}. \quad (2.37)$$

To obtain the result, we notice that

$$\|\mathcal{A} S_{\mathcal{B}}(t) F_0\|_{L^2(m_0)} \leq \|\mathcal{A} S_{\mathcal{B}}(t) F_0\|_{L^2(m)},$$

and we combine the previous estimate with the estimate (2.37), which completes the proof of the first estimate.  $\square$

Now we prove Theorem 2.1.6.

*Proof of Theorem 2.1.6.* For  $p \in [1, 2]$ . We consider  $\mathcal{E} = L^p(m)$ ,  $E = L^2(m_0)$ , and denote  $\mathcal{L}_0$  and  $L_0$  the Fokker-planck operator considered respectively on  $\mathcal{E}$  and  $E$  (defined in (2.27)). We split the operator as  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  as in (2.30). Let us proceed step by step:

• **Step 1: Verification of condition  $(H_1)$  of Theorem 2.4.2**

Theorem 2.1.3 shows us the existence of the semi-group  $S_{L_0}(t)$ , associated with the Fokker-Planck operator defined in (2.27) on the space  $L^2(m_0)$  where  $m_0 = \mu^{-1/2}$  and the constants  $\kappa$  and  $c > 0$ , for which, for all  $F_0 \in L^2(m_0)$  such that  $\langle F_0 \rangle = 0$ ,

$$\forall t \geq 0, \quad \|F(t)\|_{L^2(m_0)} \leq ce^{-\kappa t} \|F_0\|_{L^2(m_0)}. \quad (2.38)$$

Which implies the dissipativity of the operator  $L_0 - a$  on  $E$ , for all  $0 > a > -\kappa$ .

• **Step 2: Verification of condition  $(H_2)$  of Theorem 2.4.2.**

According to Lemma 2.4.7 and Corollary 2.4.1, the operator  $\mathcal{B} - a$  is dissipative on  $\mathcal{E}$ , for all  $0 > a > a_{m,p}$ , and by definition of the operator  $\mathcal{A}$  and  $A$ , we have  $\mathcal{A} \in B(\mathcal{E})$  and  $A \in B(E)$ .

• **Step 3: Verification of condition  $(H_3)$  of Theorem 2.4.2.** According to Corollary 2.4.9, the operators  $\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}$  and  $S_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$  satisfy the property c) of Lemma 2.4.3. By applying Lemma 2.4.3,

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\mathcal{A}\|_{B(\mathcal{E},E)} \leq Ce^{bt}t^{-\Theta} \text{ and } \|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)\|_{B(\mathcal{E},E)} \leq Ce^{bt}t^{-\Theta}.$$

Then for all  $a' > a$ , there exist constructible constants  $n \in \mathbb{N}$  and  $C_{a'} \geq 1$ , such that

$$\forall t \geq 0, \quad \|T_n(t)\|_{B(\mathcal{E},E)} \leq C_{a'}e^{a't}.$$

• **Step 4: End of the Proof**

All the hypotheses of Theorem 2.4.2 are satisfied. We deduce that  $\mathcal{L}_0 - a$  is a dissipative operator on  $\mathcal{E}$  for all  $a > \max(a_{m,p}, -\kappa)$ , with the semi-group  $S_{\mathcal{L}_0}(t)$  satisfying estimate (2.8).  $\square$

**Remark 2.4.10.** It is possible to give an alternative proof of results of decay in polynomially weighted  $L^p$  spaces (Theorem 2.1.6) using an enlargement argument, whose starting point is the result of decay in  $H^1(m_0)$  where  $m_0 = \mu^{-1/2}$ , since  $H^1(m_0) \subset L^p(m)$  with  $m = \langle v \rangle^k$  and  $k > 3(1 - \frac{1}{p})$ . Indeed, the conditions  $(H_1)$  and  $(H_2)$  of Theorem 2.4.2 are satisfied by Theorem 2.1.4 and Lemma 2.4.7 respectively. It remains to verify the condition  $(H_3)$ . In the proof of Lemma 2.4.8, it is shown that

$$\mathcal{H}(t, F) \leq C \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2, \quad \forall t \in (0, T].$$

Along with the definition of  $\mathcal{H}$ , we obtain for all  $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{C'}{t^{3d+1}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2, \\ \|\nabla_v S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{C''}{t^{3d+2}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2, \\ \|\nabla_x S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{C'''}{t^{3d+4}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2. \end{aligned}$$

Following in the proof of Lemma 2.4.8, we obtain

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \|S_B(t)F_0\|_{H^1(m_0)}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{t^{3d+4}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2.$$

By interpolation, we get

$$\forall t \in (0, +\infty), \forall 1 \leq p \leq 2, \quad \|S_B(t)F_0\|_{H^1(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+4)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|F_0\|_{L^p(m_0)}.$$

Therefore, using the same techniques as in the proof of Corollary 2.4.9, we prove that the property c) of Lemma 2.4.3 is satisfied. Then by applying Lemma 2.4.3 we obtain that the condition  $(H_3)$  is satisfied. Finally, by applying Theorem 2.4.2 we deduce the proof of Theorem 2.1.6.

One could try to use Lemma 2.17 in [26] to prove the hypothesis  $(H_3)$  in Theorem 2.4.2. But the presence of the magnetic field creates a lot of difficulties in adapting the proof of this lemma. We note also that in the hypothesis of Lemma 2.17 include an estimate of type

$$\|T_n\|_{B(L^p(m); L^2(m_0))} \leq C e^{bt} / t^\alpha,$$

where  $T_n(t) = (\mathcal{A}S_B(t))^{(*n)}$  for some  $n$  with  $\alpha \in (0, 1]$  whereas our estimates are of the form  $\alpha = 3d + 1 > 1$  and  $n = 1$ .

### Proof of Theorem 2.1.8

This part is dedicated to the proof of the exponential time decay estimates of the semi-group associated with the Cauchy problem (2.2) with an external magnetic field  $B_e$ , with an initial datum in  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  defined in (2.9).

For the proof of Theorem 2.1.8, we consider the space  $\mathcal{E} = \tilde{W}^{1,p}(m)$  and  $E = H^1(m_0)$ .

**Définition 2.4.5.** We split operator  $\mathcal{L}_0$  into two pieces and define for all  $R, M > 0$

$$\mathcal{B}u = \mathcal{L}_0 u - \mathcal{A}u \text{ with } \mathcal{A}u = M \chi_R u, \quad (2.39)$$

where  $M > 0$ ,  $\chi_R(v) = \chi(v/R)$   $R > 1$ , and  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  such that  $\chi(v) = 1$   $|v| \leq 1$ . We also denote  $A$  and  $B$  the restriction of operators  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  on the space  $E$  respectively.

**Lemma 2.4.11** (Dissipativity of  $\mathcal{B}$ ). *Under Assumption 2.1.7 and suppose that  $B_e \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}^3)$ , there exists  $M$  and  $R > 0$  such that for all  $0 > a > \max_{i=1,2,3} (a_{m,1}^i, a_{m,2}^i)$  (defined in (2.47)-(2.49) and (2.56)-(2.58)) such that operator  $\mathcal{B} - a$  is dissipative in  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  where  $p \in [1, 2]$ . In other words, the semi-group  $\mathcal{S}_B$  satisfies the following estimate:*

$$\forall t \geq 0, \quad \|\mathcal{S}_B(t)F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} \leq e^{at} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}, \quad \forall F_0 \in \tilde{W}^{1,p}(m).$$

*Proof.* Let  $F_0 \in \tilde{W}^{1,p}(m)$ . We consider  $F$  the solution of the evolution equation

$$\partial_t F = \mathcal{B}F, \quad F|_{t=0} = F_0. \quad (2.40)$$

Recall that the norm on the space  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  is given by

$$\|F\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}^p = \|F\|_{L^p(\tilde{m})}^p + \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p + \|\nabla_x F\|_{L^p(m)}^p,$$

where  $\tilde{m} = m\langle v \rangle$ . Differentiating the previous equality with respect to  $t$ , we get

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|F\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}^p = \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|F\|_{L^p(\tilde{m})}^p + \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p + \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|\nabla_x F\|_{L^p(m)}^p. \quad (2.41)$$

We now estimate each term of the equality (2.41).

For the first term in (2.41), we apply Lemma 2.4.7 and get

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|F\|_{L^p(\tilde{m})}^p \leq \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |F|^p (\Psi_{\tilde{m},p} - M\chi_R) \tilde{m}^p(v) dx dv,$$

Secondly, we differentiate the equation (2.40) with respect to  $v$ , and then we use the equalities of Lemma 2.3.5. We get the following equation (recall  $d = 3$ ):

$$\partial_t \nabla_v F = \mathcal{B}(\nabla_v F) + 3\nabla_v F + (B_e \wedge \nabla_v)F - \nabla_x F - M(\nabla_v \cdot \chi_R)F_t. \quad (2.42)$$

This gives

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p &= \iint \partial_t \nabla_v F |\nabla_v F|^{p-2} \cdot \nabla_v F m^p dx dv \\ &= \iint \mathcal{B}(\nabla_v F) |\nabla_v F|^{p-2} \cdot \nabla_v F m^p dx dv + 3 \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p \\ &\quad - \iint \nabla_x F |\nabla_v F|^{p-2} \cdot \nabla_v F m^p dx dv \\ &\quad + \iint (B_e \wedge \nabla_v) F |\nabla_v F|^{p-2} \cdot \nabla_v F m^p dx dv \\ &\quad - M \iint (\nabla_v \chi_R) F |\nabla_v F|^{p-2} \cdot \nabla_v F m^p dx dv. \end{aligned}$$

Then, proceeding exactly as in the proof of Lemma 2.4.7 and applying Young's inequality, we obtain for all  $\eta_1 > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{1}{p} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p \\ &\leq \iint |\nabla_v F|^p (\Psi_{m,p} - M\chi_R) m^p dx dv + 3 \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^p(m)}^p + \frac{1}{2} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p + \frac{M}{R} C_{\eta_1} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|F\|_{L^p(m)}^p \\ &\quad + \frac{M}{R} \eta_1 \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|\nabla_v F\|_{L^p(m)}^p \\ &\leq \iint \left( |\nabla_v F|^p (\Psi_{m,p} - M\chi_R + 3 + \frac{1}{2} + \frac{M}{R} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \eta_1 + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}) m^p dx dv \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^p(m)}^p + \frac{M}{R} C_{\eta_1} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|F\|_{L^p(m)}^p \right). \end{aligned}$$

Finally, we estimate the last term of the equality (2.41). We treat two cases, and then we use an interpolation argument to complete the proof.

• **Case 1:**  $p = 1$ .

We differentiate the equation (2.40) with respect to  $x_i$  for all  $i = 1, 2, 3$ , then we use the equalities of Lemma 2.3.5. We will have the following equation:

$$\partial_t \partial_{x_i} F = \mathcal{B}(\partial_{x_i} F) + (v \wedge \partial_{x_i} B_e) \cdot \nabla_v F. \quad (2.43)$$

Using the previous equation, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} F\|_{L^1(m)} &= \iint \partial_t |\partial_{x_i} F| m \, dx dv \\ &= \iint (\partial_{x_i} \partial_t F) \partial_{x_i} F |\partial_{x_i} F|^{-1} m \, dx dv \\ &= \iint \mathcal{B}(\partial_{x_i} F) \partial_{x_i} F |\partial_{x_i} F| m \, dx dv \\ &\quad + \iint (v \wedge \partial_{x_i} B_e) \cdot \nabla_v F \partial_{x_i} F |\partial_{x_i} F|^{-1} m \, dx dv. \end{aligned}$$

Using the computations made in Lemma 2.4.7 for  $p = 1$ , using Lemma 2.6.1 in the appendix B, and performing an integration by parts with respect to  $v$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\partial_{x_i} F\|_{L^1(m)} &\leq \iint (\Psi_{m,1} - M\chi_R) |\partial_{x_i} F| m \, dx dv - \underbrace{\iint (v \wedge \partial_{x_i} B_e) F \partial_{x_i} F |\partial_{x_i} F|^{-1} \nabla_v m \, dx dv}_{=0}, \end{aligned}$$

where, we used the fact that  $(v \wedge \partial_{x_i} B_e) \cdot \nabla_v m = 0$ . Then, defining the norm

$$\|\nabla_x F\|_{L^p(m)} := \sum_{i=1}^3 \|\partial_{x_i} F\|_{L^p(m)},$$

and using the previous definition, we have

$$\frac{d}{dt} \|\nabla_x F\|_{L^1(m)} \leq \iint (\Psi_{m,1} - M\chi_R) |\nabla_x F| m \, dx dv.$$

Collecting all the estimates, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|F\|_{\tilde{W}^{1,1}(m)} &\leq \iint \left( \Psi_{\tilde{m},1} - M\chi_R + \frac{M}{R} C_{\eta_1} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right) |F| \tilde{m} \, dx dv \\ &\quad + \iint \left( \Psi_{m,1} - M\chi_R + 3 + \frac{1}{2} + \frac{M}{R} \eta_1 \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \right) |\nabla_v F| m \, dx dv \\ &\quad + \iint \left( \Psi_{m,1} - M\chi_R + \frac{1}{2} \right) |\nabla_x F| m \, dx dv. \end{aligned}$$

We define then (for  $M$  and  $R$  to be fixed below).

$$\Psi_{m,1}^1 := \Psi_{\tilde{m},1} - M\chi_R + \frac{M}{R}C_{\eta_1}\|\nabla_v\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.44)$$

$$\Psi_{m,1}^2 := \Psi_{m,1} - M\chi_R + 3 + \frac{1}{2} + \frac{M}{R}\eta_1\|\nabla_v\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \quad (2.45)$$

$$\Psi_{m,1}^3 := \Psi_{m,1} - M\chi_R + \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

(Recall that  $\limsup_{|v| \rightarrow +\infty} \Psi_{m,1} = -k$ ). We denote then

$$a_{m,1}^1 = -k - 1, \quad (2.47)$$

$$a_{m,1}^2 = -k + \frac{7}{2} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \quad (2.48)$$

$$a_{m,1}^3 = -k + \frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

We now assume that  $k$  satisfies

$$k > \frac{7}{2} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}. \quad (2.50)$$

Hypothesis (2.50) implies that  $a_{m,1}^i < 0$ , for all  $i = 1, 2, 3$ . Consequently, for  $\eta_1$  sufficiently small, we may then find  $M$  and  $R > 0$  large enough so that, for all  $0 > a > \max(a_{m,1}^1, a_{m,1}^2, a_{m,1}^3)$ , we have

$$\frac{d}{dt} \|F(t)\|_{\tilde{W}^{1,1}(m)} \leq a \|F(t)\|_{\tilde{W}^{1,1}(m)}. \quad (2.51)$$

Hence the operator  $\mathcal{B} - a$  is dissipative on  $\tilde{W}^{1,1}(m)$ .

• **Case 2:**  $p = 2$ .

Again, we differentiate the equation (2.40) with respect to  $x$ , and we use the equalities of Lemma 2.3.5 to obtain the following equation:

$$\partial_t \nabla_x F = \mathcal{B}(\nabla_x F) + (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v F. \quad (2.52)$$

Using the calculations made in Lemma 2.4.7 and the previous equation, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^2(m)}^2 &= - \iint |\nabla_v \nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \iint (\Psi_{m,2} - M\chi_R) |\nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \iint (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v F \nabla_x F m^2 dx dv. \end{aligned}$$

Then, by integration by parts with respect to  $v$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^2(m)}^2 &\leq - \iint |\nabla_v \nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \iint (\Psi_{m,2} - M\chi_R) |\nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \iint |v \wedge \nabla_x B_e| |F| |\nabla_x \nabla_v F| m^2 dx dv \end{aligned}$$

According to the Cauchy-Schwarz inequality, for every  $\varepsilon > 0$ , there is a  $C_\varepsilon > 0$  such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^2(m)}^2 &\leq - \iint |\nabla_v \nabla_x F|^2 m^2 dx dv + \iint (\Psi_{m,2} - M\chi_R) |\nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \varepsilon \iint |\nabla_v \nabla_x F|^2 m^2 dx dv + C_\varepsilon \iint |v \wedge B_e|^2 |F|^2 m^2 dx dv. \end{aligned}$$

We choose  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , and we finally get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^2(m)}^2 &\leq \iint (\Psi_{m,2} - M\chi_R) |\nabla_x F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|F\|_{L^2(\tilde{m})}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_x F\|_{L^2(m)}^2. \end{aligned}$$

Collecting all the estimates, we thus obtain

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|F\|_{\tilde{W}^{1,2}(m)}^2 \\ &\leq \iint \left( \Psi_{\tilde{m},2} - M\chi_R + \frac{M}{R} C_{\eta_1} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \right) |F|^2 \tilde{m}^2 dx dv \\ &\quad + \iint \left( \Psi_{m,2} - M\chi_R + 3 + \frac{1}{2} + \frac{M}{R} \eta_1 \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \right) |\nabla_v F|^2 m^2 dx dv \\ &\quad + \iint \left( \Psi_{m,2} - M\chi_R + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) |\nabla_x F|^2 m^2 dx dv \end{aligned}$$

Again, we define then, for  $M$  and  $R$  to be fixed in the next paragraph

$$\Psi_{m,2}^1 = \Psi_{\tilde{m},2} - M\chi_R + \frac{M}{R} C_{\eta_1} \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \quad (2.53)$$

$$\Psi_{m,2}^2 = \Psi_{m,2} - M\chi_R + 3 + \frac{1}{2} + \frac{M}{R} \eta_1 \|\nabla_v \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \quad (2.54)$$

$$\Psi_{m,2}^3 = \Psi_{m,2} - M\chi_R + 1. \quad (2.55)$$

Again, we denote

$$a_{m,2}^1 = \frac{3}{2} - k - 1 + \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \quad (2.56)$$

$$a_{m,2}^2 = \frac{3}{2} - k + \frac{7}{2} + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \quad (2.57)$$

$$a_{m,2}^3 = \frac{3}{2} - k + 1, \quad (2.58)$$

Assuming  $k$  satisfies

$$k > 5 + \max \left( \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}, \frac{1}{2} \|\nabla_x B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \right), \quad (2.59)$$

we obtain that  $a_{m,2}^i < 0$  for all  $i = 1, 2, 3$ . Consequently, we may find  $M, R > 0$  large enough so that for all  $0 > a > \max(a_{m,2}^1, a_{m,2}^2, a_{m,2}^3)$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|F(t)\|_{\tilde{W}^{1,2}(m)}^p \leq a \|F(t)\|_{\tilde{W}^{1,2}(m)}^2.$$

Hence the operator  $\mathcal{B} - a$  is dissipative on  $\tilde{W}^{1,2}(m)$  for such  $M$  and  $R$ .

**For the general case  $1 \leq p \leq 2$ :** The cases 1 and 2 show us that the operator  $S_{\mathcal{B}}(t)$  is continuous on  $\tilde{W}^{1,1}(m)$  (on  $\tilde{W}^{1,2}(m)$ ) with the operator  $\mathcal{B}$  is given by

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}_0 - M \chi_R,$$

where  $M$  and  $R > 0$  agree with the conditions given in case 1 and case 2. Applying the Riesz-Thorin interpolation Theorem and using Hypothesis 2.1.7, we obtain that the operator  $S_{\mathcal{B}}(t)$  is continuous on  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  for all  $1 \leq p \leq 2$ , with the following dissipative estimate:

$$\forall 0 > a > \max(a_{m,1}^i, a_{m,2}^i, i = 1, 2, 3), \quad \|S_{\mathcal{B}}(t) F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)} \leq C e^{at} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}.$$

This completes the proof.  $\square$

**Remark 2.4.12.** We note that the only step where we needed to suppose  $F \in L^2(\langle v \rangle m)$  and  $\nabla_v F, \nabla_x F \in L^2(m)$ , was in the estimate of

$$\iint (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v F \nabla_x F m^2 dx dv. \quad (2.60)$$

But this problem is not encountered in Sobolev space with exponential weight  $\mu^{-1/2}$ , because we have the equality

$$\nabla_v \mu^{-1/2} = \frac{v}{2} \mu^{-1/2},$$

that allowed us to estimate the term (2.60) with  $m = m_0 = \mu^{-1/2}$  without the need to add a weight. (See Lemma 2.5.3). This is no longer true with a polynomial weight because

$$\nabla_v \langle v \rangle^k = k v \langle v \rangle^{k-2}.$$

From now on,  $M$  and  $R$  are fixed as in Lemma 2.4.11.

**Lemma 2.4.13** (Property of regularization). *There exist  $b$  and  $C > 0$  such that, for all  $p, q$  with  $1 \leq p \leq q \leq 2$ , we have*

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{B}}(t) F_0\|_{\tilde{W}^{1,q}(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+4)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m_0)}. \quad (2.61)$$

$$\forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{B}^*}(t) F_0\|_{\tilde{W}^{-1,p'}(m_0)} \leq C e^{bt} t^{-(3d+4)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|F_0\|_{\tilde{W}^{-1,q'}(m_0)}. \quad (2.62)$$

Here  $2 \leq q' \leq p' \leq +\infty$  are the conjugates of  $p$  and  $q$  respectively.

*Proof.* Let  $F$  be the solution of the evolution equation

$$\partial_t F = \mathcal{B}F, \quad F|_{t=0} = F_0.$$

In to the proof of Lemma 2.4.8, the following relative entropy has been introduced

$$\mathcal{H}(t, h) = B \|h\|_{L^1(m_0)}^2 + t^r \mathcal{G}(t, h),$$

with  $\mathcal{G}$  defined by

$$\mathcal{G}(t, h) = C \|h\|_{L^2(m_0)}^2 + D t \|\nabla_v h\|_{L^2(m_0)}^2 + E t^2 \langle \nabla_x h, \nabla_v h \rangle + a t^3 \|\nabla_x h\|_{L^2(m_0)}^2.$$

We have shown, for constants  $\alpha, D, E$  and  $\beta > 0$  well chosen, that there exist  $C > 0$  and  $r = 3d + 1$  such that

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{H}(t, F) \leq B''' \mathcal{H}(0, F_0) \leq C \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2.$$

Using the previous estimate and the definition of  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{G}$ , we get

$$\begin{aligned} \|S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{\alpha}{t^{3d+1}} \mathcal{H}(t, F) \leq \frac{C'}{t^{3d+1}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2, \\ \|\nabla_v S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{D}{t^{3d+2}} \mathcal{H}(t, F) \leq \frac{C''}{t^{3d+2}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2, \\ \|\nabla_x S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{L^2(m_0)}^2 &\leq \frac{\beta}{t^{3d+4}} \mathcal{H}(t, F) \leq \frac{C'''}{t^{3d+4}} e^{bt} \|F_0\|_{L^1(m_0)}^2. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\forall t \in [0, +\infty), \quad \|S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{H^1(m_0)}^2 \leq \frac{\tilde{C}}{t^{3d+4}} e^{bt} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,1}(m_0)}^2.$$

Finally, to complete the proof, we use the Riesz-Thorin Interpolation Theorem in the real case on the operator  $S_{\mathcal{B}}(t)$ . We obtain the continuity of  $S_{\mathcal{B}}(t)$  from  $\tilde{W}^{1,p}(m_0)$  to  $\tilde{W}^{1,q}(m_0)$ , with  $S_{\mathcal{B}}$  satisfying the estimate (2.61).

The estimate (2.62) follows from (2.61) by duality.  $\square$

**Corollary 2.4.14.** *Let  $m$  be a weight that satisfies Hypothesis 2.1.7. Then there exists  $\Theta \geq 0$  such that for all  $F_0 \in \tilde{W}^{1,p}(m)$  with  $p \in [1, 2]$*

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad \|\mathcal{A}S_{\mathcal{B}}(t)F_0\|_{H^1(m_0)} &\leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}, \\ \forall t \geq 0, \quad \|S_{\mathcal{B}}\mathcal{A}(t)F_0\|_{H^1(m_0)} &\leq C e^{bt} t^{-\Theta} \|F_0\|_{\tilde{W}^{1,p}(m)}. \end{aligned}$$

*Proof.* The proof is similar to that of Corollary 2.4.9.  $\square$

*Proof of Theorem 2.1.8.* The estimate (2.11) is an immediate consequence of Theorem 2.4.2 together with Theorem 2.1.4, Lemma 2.4.11, Lemma 2.4.13 and Corollary 2.4.14.  $\square$

## 2.5 Appendix A. Property of the operator $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$

In the following Lemma we show that operator  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  and  $v \cdot \nabla_x$  are formally skew-adjoint operators in the space  $L^2(\mu^{1/2})$ .

**Lemma 2.5.1.** *Let  $B_e$  be the external magnetic field, then, with adjoints in the space  $L^2(\mu^{1/2})$ ,*

$$((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)^* = -(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v,$$

and

$$(v \cdot \nabla_x)^* = -v \cdot \nabla_x.$$

*Proof.* Let  $f$  and  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3)$ . We have

$$\begin{aligned} \langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)^* f, g \rangle &= \langle f, ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) g \rangle \\ &= \iint f ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) g dx d\mu, \end{aligned}$$

where  $d\mu = \mu(v) dv$ . Using the fact

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f = \nabla_v \cdot (v \wedge B_e) f,$$

we obtain

$$\begin{aligned} \langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)^* f, g \rangle &= \iint f \nabla_v \cdot (v \wedge B_e) g dx d\mu \\ &= - \iint f (-\nabla_v + v) \cdot (v \wedge B_e) g dx d\mu, \end{aligned}$$

since  $(v \wedge B_e) \cdot v = 0$ . By integration by parts, we have then

$$\begin{aligned} \langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)^* f, g \rangle &= - \iint \nabla_v f \cdot (v \wedge B_e) g dx d\mu \\ &= - \iint g (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v f dx d\mu \\ &= - \langle ((v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) f, g \rangle. \end{aligned}$$

For the second equality, we obtain

$$\langle (v \cdot \nabla_x)^* f, g \rangle = \langle f, v \cdot \nabla_x g \rangle = \iint f (v \cdot \nabla_x g) dx d\mu,$$

by integration by parts with respect to  $x$ . Since  $\mu$  is independent of  $x$ , we have then

$$\langle (v \cdot \nabla_x)^* f, g \rangle = - \iint (v \cdot \nabla_x f) g dx d\mu = - \langle v \cdot \nabla_x f, g \rangle.$$

This completes the proof. □

**Remark 2.5.2.** We can generalize the results of the preceding Lemma for all function  $m$  which are radial in  $v$  and independent of  $x$ . We obtain that  $v \cdot \nabla_x$  and  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  are formally skew-adjoint operators in the space  $L^2(m)$ .

Now, we give the following technical lemma.

**Lemma 2.5.3.** We have the following equalities in  $L^2(\mu^{1/2})$ :

- i.  $\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle = -\langle \nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_v f), \nabla_v f \rangle.$
- ii.  $\langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_x f \rangle = -\langle \nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_x f), \nabla_v f \rangle.$

where  $\nabla_x B_e$  is the Jacobian matrix of the function  $x \mapsto B_e(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ .

*Proof.* Let  $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . We will show (i), using the fact that

$$-v \mu(v) = \nabla_v(\mu(v)), \forall v \in \mathbb{R}^3,$$

we obtain

$$\begin{aligned} \langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle &= \int ((v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f) \cdot \nabla_v f \, dx d\mu \\ &= - \sum_{i=1}^3 \int ((\nabla_v \mu(v) \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f)_i \partial_{v_i} f \, dx dv \\ &= - \sum_{i=1}^3 \left[ \int \partial_{v_1} \mu(v) ((\nabla_x B_e)_{i2} \partial_{v_3} f - (\nabla_x B_e)_{i3} \partial_{v_2} f) \partial_{v_i} f \, dx dv \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[ \int \partial_{v_2} \mu(v) ((\nabla_x B_e)_{i3} \partial_{v_1} f - (\nabla_x B_e)_{i1} \partial_{v_3} f) \partial_{v_i} f \, dx dv \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[ \int \partial_{v_3} \mu(v) ((\nabla_x B_e)_{i1} \partial_{v_2} f - (\nabla_x B_e)_{i2} \partial_{v_1} f) \partial_{v_i} f \, dx dv \right], \end{aligned}$$

where  $d\mu = \mu(v) \, dv$ . Then, by an integration by parts with respect to  $v$ , we get

$$\begin{aligned} \langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle &= \sum_{i=1}^3 \left[ \int ((\nabla_x B_e)_{i2} \partial_{v_3} f - (\nabla_x B_e)_{i3} \partial_{v_2} f) \partial_{v_1} \partial_{v_i} f \, dx d\mu \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[ \int ((\nabla_x B_e)_{i3} \partial_{v_1} f - (\nabla_x B_e)_{i1} \partial_{v_3} f) \partial_{v_2} \partial_{v_i} f \, dx d\mu \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[ \int ((\nabla_x B_e)_{i1} \partial_{v_2} f - (\nabla_x B_e)_{i2} \partial_{v_1} f) \partial_{v_3} \partial_{v_i} f \, dx d\mu \right]. \end{aligned}$$

Then we rewrite the integrals as mixed products between vectors, so we get

$$\begin{aligned} \langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle &= \sum_{i=1}^3 \left[ \int (\partial_{v_2} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i3} - \partial_{v_3} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i2}) \partial_{v_1} f \, dx d\mu \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[ \int (\partial_{v_3} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i1} - \partial_{v_1} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i3}) \partial_{v_2} f \, dx d\mu \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[ \int (\partial_{v_1} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i2} - \partial_{v_2} \partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_{i1}) \partial_{v_3} f \, dx d\mu \right]. \end{aligned}$$

Finally, we deduce the equality (i) by the following equalities

$$\begin{aligned} \langle (v \wedge \nabla_x B_e) \cdot \nabla_v f, \nabla_v f \rangle &= - \int \left( \nabla_v \wedge \left( \sum_{i=1}^3 (\partial_{v_i} f (\nabla_x B_e)_i) \right) \right) \cdot \nabla_v f \, dx d\mu \\ &= - \int (\nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_v f)) \cdot \nabla_v f \, dx d\mu \\ &= - \langle \nabla_v \wedge (\nabla_x B_e \cdot \nabla_v f), \nabla_v f \rangle. \end{aligned}$$

Similarly, we can show (ii). This completes the proof.  $\square$

## 2.6 Appendix B. Non positivity of a certain integral

The following well-know lemma is used in the proof of the dissipativity of the operator  $\mathcal{B} - a$  in the spaces  $L^p(m)$  and  $\tilde{W}^{1,p}(m)$  in Section 2.4. This lemma is a special case of the general study done in the article [15].

**Lemma 2.6.1.** *Let  $g$  be a smooth function and let  $p \geq 1$ . Then the following integral is well-posed and satisfy the following estimate*

$$\iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (\Delta_v g) |g|^{p-2} g \, dx dv \leq 0.$$

*Proof.* Formal integration by parts with respect to  $v$  justifies the property for all  $p > 1$ . For  $p = 1$ , we regularize and use convexity of the function  $\Psi : s \rightarrow |s|$ .  $\square$

## Acknowledgments

I would like to thank my advisors Frédéric Hérau and Joe Viola for their invaluable help and support during the maturation of this paper. I thank also the Centre Henri Lebesgue ANR-11-LABX-0020-01 and the Faculty of Sciences (Section I) of Lebanese University for its support .

# Étude de l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur

## Résumé

On considère l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique constant et avec un potentiel quadratique. On exprime explicitement la norme du semi-groupe associé à l'opérateur considéré proche de l'équilibre pour étudier l'influence du champ magnétique sur le retour à l'équilibre. On montre des estimations explicites et précises de cette norme en temps petit et long ainsi des estimations uniformes en temps lorsque le paramètre magnétique  $b$  tend vers infini.

## Abstract

We study the quadratic Kramers-Fokker-Planck operator with a constant magnetic field and with a quadratic potential. We describe the exact expression of the norm of the semi-group associated to the operator near the equilibrium. At this level, explicit and accurate estimates of this norm are shown in small and long times as well as uniform-in-time estimates when the magnetic parameter  $b$  tends to infinity.

## 3.1 Introduction et résultats principales

### 3.1.1 Présentation de l'opérateur

On considère  $P$  l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck quadratique avec un champ magnétique extérieur constant  $B_e \in \mathbb{R}^3$  et un champ électrique linéaire isotrope  $E_e(x) := ax$  avec  $a > 0$

$$P = (-\nabla_v + v/2) \cdot (\nabla_v + v/2) + v \cdot \nabla_x + E_e \cdot \nabla_v + (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v.$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{R}^d$  représente la variable d'espace et  $t \geq 0$  est le temps. On note que si  $d = 3$ , en effectuant une rotation on peut toujours se ramener à un champ de vecteur du type  $(0, 0, b)$ , ce qui nous permet de prendre  $B_e \in \{(0, 0, b) / b \in \mathbb{R}\}$ . En plus, en dimension trois, on sait qu'il existe une direction qui ne dépend pas du champ magnétique (direction parallèle ou anti-parallèle au champ magnétique d'où l'effet magnétique est nul). Ceci nous justifie la restriction au cas de dimension 2.

Par changement de variables (voir [58, Section 4.1] pour plus de détails), l'opérateur  $P$  peut s'écrire sous la forme symétrisé suivante :

$$2P_{a,b} := (-\nabla_v + v) \cdot (\nabla_v + v) + 2\sqrt{a}(v \cdot \nabla_x - x \cdot \nabla_v) + b(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1}). \quad (3.1)$$

Maintenant, on décompose l'opérateur  $P_{a,b}$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation (cf [97, Théorème 1.4]). H. Risken dans [79] a proposé une décomposition en opérateurs de création et d'annihilation dans le cas de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck sans champ magnétique, et il se trouve que nous sommes capables même avec un champ magnétique à l'écrire sous la forme suivante :

$$P_{a,b} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 m_{jk} A_k^* A_j, \quad (3.2)$$

où  $(m_{j,k})_{j,k}$  sont les coefficients de la matrice  $M_{a,b}$  définie par

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & \sqrt{a} & 0 \\ -b & 1 & 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

et les opérateurs d'annihilation  $(A_j)_{j=1}^4$  et de création  $(A_j^*)_{j=1}^4$  sont

$$\begin{aligned} A_j &= \partial_{x_j} + x_j, & A_j^* &= -\partial_{x_j} + x_j & \forall j &= 1, 2, \\ A_j &= \partial_{v_{j-2}} + v_{j-2} & A_j^* &= -\partial_{v_{j-2}} + v_{j-2} & \forall j &= 3, 4. \end{aligned}$$

L'avantage de cette décomposition est qu'on peut appliquer la théorie abstraite faite pour ce type des opérateurs. En citant les travaux de Aleman-Viola dans [2], qui consiste, par

exemple, à donner une description exacte du spectre de l'opérateur en fonction du spectre de sa matrice associée (voir [97, Thm 1.4], [1, Section 1] et [88, 51]). Pour des calculs explicites du spectre de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck quadratique sans champ magnétique, nous nous référons les lecteurs au livre de B. Helffer et F. Nier [73, Section 5.5.1].

Il est important d'étudier le comportement asymptotique de la solution de l'équation d'évolution associée à l'opérateur non-autoadjoint  $P_{a,b}$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + P_{a,b} u(t, x) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Plus spécifiquement, on s'intéresse à la question de retour à l'équilibre. Cela revient généralement à étudier l'opérateur suivant :

$$e^{-tP_{a,b}}(1 - \Pi_0)$$

où  $\Pi_0$  est le projecteur spectral associé à la valeur propre zéro (typiquement il représente le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel engendré par la maxwellienne associée au problème) et où  $e^{-tP_{a,b}}$  représente le semi-groupe associé à l'opérateur  $P_{a,b}$ . De nombreux travaux [88, 1, 2] conduisent à aborder la question de retour à équilibre à partir de l'étude de l'asymptotique de la norme de la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$ . Et ceci se fait très bien en utilisant l'égalité suivante :

$$\|e^{-tP_{a,b}}(1 - \Pi_0)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^4))} = \|e^{-tM_{a,b}}\|,$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^4))}$  désigne la norme sur l'ensemble  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^4))$  des opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^4)$  et  $\|\cdot\|$  désigne la norme standard sur l'espace des matrices comme opérateurs linéaires, induite par la norme euclidienne sur  $\mathbb{C}^4$ . On note que cette dernière égalité est montrée dans [2, Corollaire 7]. Le calcul de cette norme représente le cœur de notre présent travail où on calcul explicitement la norme précédente en fonctions des paramètres  $a$  et  $b$ . Dans ce chapitre, on va poursuivre l'étude du cas modèle de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur fort, commencée dans un cadre plus large que quadratique dans [59] pour l'étude purement cinétique en utilisant la méthode d'hypocoercivité, qui a été élaborés par F. Hérau [39] et C. Villani [95], et la méthode de factorisation et d'élargissements d'espace fonctionnel, qui est abordé par M. Gualdani et al. [26]. Puis, nous renvoyons les lecteurs à l'article [58] pour une démonstration des estimations maximales sur ce modèle, en donnant une caractérisation du domaine de son extension fermé en se basant sur des outils d'hypoellipticité maximales extrêmement sophistiqués développés par B. Helffer et J. Nourrigat dans les années 1980 (voir [34]). On va étudier le cas de l'opérateur quadratique de Kramers-Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur constant. Tout d'abord, on cherchera à expliciter l'expression exacte de la norme de l'exponentielle de la matrice  $M_{a,b}$ , en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange et quelques propriétés de symétries qu'on remarquera dans la structure algébrique associée à  $M_{a,b}$ . Ensuite, on pourra en déduire des estimations précises de la norme

de la solution de l'équation d'évolution associée à l'opérateur  $P_{a,b}$  à plusieurs niveaux. En mesurant en particulier le comportement en temps petit et long ainsi, de manière uniforme en  $t$ , l'asymptotique lorsque le champ magnétique tend vers infini.

### 3.1.2 Les résultats principaux

Le premier résultat de ce chapitre est une description exacte du spectre de l'opérateur  $P_{a,b}$  et le comportement lorsque  $b$  tend vers l'infini de son trou spectral qui égale à  $\min\{\Re\lambda, \lambda \in \Sigma(P_{a,b}) \setminus \{0\}\} = \min\{\Re\lambda, \lambda \in \Sigma(M_{a,b})\}$  où  $\Sigma(P_{a,b})$  désigne le spectre de  $P_{a,b}$ .

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $a > 0$ . Alors les valeurs propres généralisées de l'opérateur  $P_{a,b}$  sont*

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^4 \lambda_j k_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}^4,$$

avec  $\{\lambda_j\}_{j=1}^4$  les valeurs propres de  $M_{a,b}$ , qui sont définies dans (3.9) et (3.10). De plus, on a

1) Quand  $b \rightarrow +\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) - i(-\frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) - i(b + \frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_3 &= \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) + i(-\frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})), \\ \lambda_4 &= 1 - \frac{a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) + i(b + \frac{a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3})). \end{aligned}$$

$$\text{où } \langle a \rangle = (1 + a^2)^{1/2}.$$

2) Si  $b \neq 0$ , pour tout  $\lambda_j \in \Sigma(M_{a,b})$  alors  $\Im(\lambda_j) \neq 0$ .

3) Le spectre de  $M_{a,b}$  ne dépend pas du signe de  $b$ .

Maintenant, on s'intéresse au calcul explicite de la norme de la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$  en fonction des quantités auxiliaires suivantes :

$$A = A_1 + iA_2 = 1 - b^2 - 4a - 2ib \quad (3.4)$$

$$c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}, \quad (3.5)$$

où  $A_1, A_2, c_1$  et  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 3.1.2.** *Pour  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ , considérons  $A$  et  $c$  qui sont définis dans (3.4) et (3.5). Soit*

$$T = \frac{1}{2} ((|A| - A_1 + 2) \cosh c_1 t + (|A| + A_1 - 2) \cos c_2 t) \quad (3.6)$$

et

$$S = 8a(1 - \Re(\cosh ct)) + \frac{1}{4}(2 - A_1)|A|(\cosh 2c_1t - \cos 2c_2t) \quad (3.7)$$

$$+ (2a + \frac{1}{4}|A|^2)(\cosh 2c_1t + \cos 2c_2t - 2),$$

la norme de l'exponentielle de  $M_{a,b}$  définie dans (3.3) est

$$\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = \frac{1}{|A|}e^{-t}(T + \sqrt{S}).$$

**Remarque 3.1.3.** Bien que l'expression de  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  soit assez compliquée, une forme exacte pour l'exponentielle d'une matrice  $4 \times 4$  est rarement aussi simple. On voit immédiatement que  $T$  et  $S$  peuvent être étendus en séries de puissances paires de  $t$  où le coefficient de  $t^0$  est  $|A|$  dans l'expression de  $T$  et le coefficient est zéro dans l'expression de  $S$ .

Nous pouvons en déduire des estimations précises. Premièrement, lorsque  $t \rightarrow 0^+$ , nous avons un développement asymptotique complet pour la norme de l'exponentielle de  $M_{a,b}$ .

**Proposition 3.1.4.** La norme  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  admet un développement asymptotique complet en puissance de  $t$  quand  $\langle A \rangle t^2 \rightarrow 0^+$  commençant par

$$\|e^{-tM_{a,b}}\| = 1 - \frac{a}{12}t^3 + \left(\frac{1}{360}ab^2 + \frac{1}{240}a^2 + \frac{1}{120}a\right)t^5 + \frac{1}{288}a^2t^6 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^3 t^7).$$

Deuxièmement, lorsque  $|b| \rightarrow \infty$  de telle sorte que  $\langle a \rangle b^{-2} \rightarrow 0$ , nous avons des estimations uniformes de la différence entre  $e^{(1-c_1)t}\|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  et 1 pour tout  $t \geq 0$ .

**Proposition 3.1.5.** Il existe  $C > 0$  tel que, si  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  et  $\langle a \rangle b^{-2} < \frac{1}{C}$ , alors

$$\left|e^{(1-c_1)t}\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1\right| \leq C\langle a \rangle^2 b^{-4}, \forall t \geq 0.$$

Ceci mesure en un sens comment  $M_{a,b}$  est non auto-adjoint (et alors  $P_{a,b}$ ). Puisque  $\frac{1}{2}(1-c_1)$  est l'abscisse spectrale de la matrice  $M_{a,b}$  qui égale par définition à  $\min\{\Re \lambda, \lambda \in \Sigma(M_{a,b})\}$ . Si  $M_{a,b}$  était auto-adjoint, l'égalité serait  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = e^{-(1-c_1)t}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Enfin, nous identifions la valeur exacte de  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(1-c_1)t}\|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  qui est lié aux normes des projecteurs spectraux de  $M_{a,b}$ .

**Proposition 3.1.6.** Pour  $a, b > 0$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que si

$$E(t) = e^{-2c_1 t} + \langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1 t} \leq \frac{1}{C}, \quad (3.8)$$

alors

$$\left|\left(\frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2^2 + 1}\right)^{1/2} e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\| - 1\right| \leq CE(t).$$

**Remarque 3.1.7.** On note que d'après la Proposition précédente, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\| = \sqrt{\frac{c_2^2 + 1}{c_1^2 + c_2^2}} := \sqrt{R_1},$$

et cette dernière constante coïncide avec la norme de tout projecteur spectral  $\Pi_j$  associé à  $\lambda_j$

$$\sqrt{R_1} = \|\Pi_1\| = \|\Pi_2\| = \|\Pi_3\| = \|\Pi_4\|,$$

qu'on peut calculer comme

$$\|\Pi_j\| = \frac{\|v_j\| \|\omega_j\|}{\langle v_j, \omega_j \rangle} = \frac{a + |\lambda_j^2|}{|a - \lambda_j^2|}, \forall j = 1, \dots, 4$$

où  $M_{a,b} v_j = \lambda_j v_j$  et  $M_{a,b}^* \omega_j = \bar{\lambda}_j \omega_j$ .

On termine cette partie par une brève revue de la littérature liée à l'analyse des opérateurs quadratiques, plus spécifiquement de type Kramers-Fokker-Planck (KFP). Dans ces dernières années, plusieurs travaux ont été concentré sur cet opérateur avec des approches diversifiées. Des nombreux auteurs ont été intéressés à prouver des estimations maximales (ou globales) pour en déduire la compacité de la résolvante de l'opérateur de (KFP) afin d'aborder la question du retour à l'équilibre. F. Hérau et F. Nier dans l'article [39] ont mis les liens entre l'opérateur de (KFP) avec un potentiel confinant et l'opérateur de Laplacien de Witten associé. Puis, dans le livre de B. Helffer et F. Nier [73], ces travaux ont été complétés et expliqués de manière générale, et nous renvoyons plus spécifiquement au section 5.5 pour une étude spécifique de l'opérateur de (KFP) avec un potentiel quadratique où ils ont calculé le spectre exacte de l'opérateur quadratique, où les calculs sont inspirés du livre de H. Risken [79]. Plus récemment, M. Ben Said et al. dans [84] ont étudié des estimations globales pour les opérateurs modèles de (KFP) avec des potentiels polynomiales de degré inférieur ou égale à 2, puis M. Ben Said dans [83] a fourni des estimations subelliptiques globales précises pour des opérateurs de (KFP) sur un cas plus général qui concerne une certaine classe des polynômes de degré supérieur à 2.

**Plan du chapitre :** Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, on montrera le Théorème 3.1.1. Ensuite, dans la section 3.3 on déterminera la forme explicite de la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$  en appliquant la méthode d'interpolation de Lagrange et on donnera ainsi la preuve du Théorème 3.1.2. Enfin, la section 3.4 est dédiée sur la démonstration des Propositions 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.6.

## 3.2 Spectre de l'opérateur $P_{a,b}$

### 3.2.1 Préliminaire.

Pour déterminer le spectre des opérateurs, agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et décomposables en opérateurs d'annihilation et de création  $A_j = \partial_{x_j} + x_j$  et  $A_j^* = -\partial_{x_j} + x_j$  comme suit :

$$P = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n m_{jk} A_k^* A_j ,$$

où  $M = (m_{jk})_{j,k=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ , il est équivalent de déterminer le spectre de la matrice  $M$  en appliquant le résultat suivant qui donne le lien entre le spectre de l'opérateur et sa matrice associée :

**Corollaire 3.2.1** (Corollaire 2.3 dans [2]). *Soit  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  les valeurs propres de la matrice  $M$ , répété par leur multiplicité. Soit  $G$  tel que  $GMG^{-1}$  est en forme normale de Jordan, ayant donc des entrées diagonales  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Alors*

$$\{\mathcal{B}^*((Gz)^\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$$

*forme un système des fonctions propres de l'opérateur  $P$  associées à des valeurs propres généralisées*

$$\lambda_\alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n ,$$

où  $\mathcal{B}$  désigne la transformation de Bargmann qui est définie comme suit :

$$\mathcal{B}f(z) = \pi^{-3n/4} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\sqrt{2}xz - x^2/2 - z^2/2} dx$$

On note que A. Aleman et J. Viola dans l'article [2] ont montré le Corollaire précédent en suivant essentiellement les travaux de J. Sjöstrand dans [88, Théorème 3.5]. (cf aussi [51, Lemme 4.1] et [50]).

### 3.2.2 Démonstration du Théorème 3.1.1.

On remarque que notre opérateur est décomposable en opérateurs d'annihilation et de création dans (3.2). D'après le corollaire 3.2.1, on peut déterminer le spectre de  $P_{a,b}$  en fonctions des éléments du spectre de sa matrice associée  $M_{a,b}$ . Premièrement, on s'intéresse à chercher le spectre de la matrice  $M_{a,b}$ .

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Le spectre de la matrice  $M_{a,b}$  est constituée par*

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{-b^2 - 2ib - 4a + 1} - \frac{ib}{2} + \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-b^2 - 2ib - 4a + 1} - \frac{ib}{2} + \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{-b^2 + 2ib - 4a + 1} + \frac{ib}{2} + \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}\sqrt{-b^2 + 2ib - 4a + 1} + \frac{ib}{2} + \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Soit  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Pour calculer le spectre de la matrice  $M_{a,b}$ , il faut calculer les racines de son polynôme caractéristique  $\mathcal{P}_{M_{a,b}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{M_{a,b}}(\lambda) &:= \begin{vmatrix} 1-\lambda & b & \sqrt{a} & 0 \\ -b & 1-\lambda & 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\sqrt{a} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{a} & 0 \\ -b & 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & b & \sqrt{a} \\ -b & 1-\lambda & 0 \\ -\sqrt{a} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + (2a + b^2 + 1)\lambda^2 - 2a\lambda + a^2.\end{aligned}$$

Maintenant on cherche à résoudre

$$\mathcal{P}_{M_{a,b}}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + (2a + b^2 + 1)\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) est équivalente, par le changement de variables

$$\lambda = z + \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

à une équation sans terme de degré 3

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0, \quad (3.13)$$

où les coefficients  $p, q$  et  $r \in \mathbb{R}$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}(2b^2 + 4a - 1), \\ q = b^2, \\ r = \frac{1}{16}(4b^2 + 16a^2 - 8a + 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

Le principe de cette méthode, qui s'appelle la méthode de Ferrari (voir [56, pages 106-107] pour plus de détails sur cette méthode), consiste à essayer de factoriser le premier membre de l'équation (3.13) sous forme du produit de deux polynômes du second degré, pour pouvoir se ramener à la résolution de deux équations du second degré. Nous remarquons que

$$z^4 = (z^2 + y)^2 - 2yz^2 - y^2.$$

Le premier membre de l'équation (3.13) s'écrit alors

$$\begin{aligned}z^4 + pz^2 + qz + r &= (z^2 + y)^2 - 2yz^2 - y^2 + pz^2 + qz + r \\ &= (z^2 + y)^2 - ((2y - p)z^2 - qz + y^2 - r).\end{aligned}$$

Nous allons maintenant essayer de déterminer  $y$  de façon que l'expression entre parenthèses s'écrive sous la forme de carré pour pouvoir utiliser l'identité algébrique :  $\theta^2 - \rho^2 = (\theta - \rho)(\theta + \rho)$ . L'expression

$$(2y - p)z^2 - qz + y^2 - r$$

peut être considérée comme un polynôme du second degré en  $z$ . Elle pourra se mettre sous forme de carré si son discriminant est nul. Calculons son discriminant :

$$\Delta = -8y^3 + 4py^2 + 8ry - 4pr + q^2.$$

Nous devons donc choisir  $y$  qui annule le discriminant, ce qui revient à résoudre l'équation de troisième degré de l'inconnu  $y$  :  $\Delta = -8y^3 + 4py^2 + 8ry - 4pr + q^2 = 0$ . En utilisant les égalités définies dans le système (3.14), on calcule le coefficient constant de l'équation  $\Delta = 0$  qui est

$$\begin{aligned} -4pr + q^2 &= -\frac{1}{8}(2b^2 + 4a - 1)(4b^2 + 16a^2 - 8a + 1) + b^4 \\ &= -\frac{1}{8}\left(2b^2 + 4\left(a - \frac{1}{4}\right)\right)\left(4b^2 + 16\left(a - \frac{1}{4}\right)^2\right) + b^4 \\ &= -8\left(a - \frac{1}{4}\right)^3 - 4b^2\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 - 2b^2\left(a - \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(a - \frac{1}{4}\right)\left(-8a^2 - 4ab^2 + 4a - b^2 - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

on remarque que  $a - 1/4$  divise le coefficient constant de l'équation  $\Delta = 0$ . Du coup on vérifie que  $y_0 = a - 1/4$  est une solution de l'équation précédente car

$$\begin{aligned} -8\left(a - \frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(a - \frac{1}{4}\right)^2(4a + 2b^2 - 1) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{4}\right)(16a^2 - 8a + 1 + 4b^2) \\ - \frac{1}{8}(4a + 2b^2 - 1)(16a^2 - 8a + 4b^2 + 1) + b^4 \\ = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, en tenant compte que  $y_0$  annule le discriminant ( $\Delta = 0$ ), le premier membre de l'équation (3.13) s'écrit

$$\begin{aligned} z^4 + pz^2 + qz + r &= (z^2 + y_0)^2 - ((2y_0 - p)z^2 - qz + y_0^2 - r) \\ &= (z^2 + y_0)^2 - (2y_0 - p)\left(z^2 - \frac{q}{2(2y_0 - p)}\right)^2 \\ &= \left(z^2 + z\sqrt{2y_0 - p} + y_0 - \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}}\right) \\ &\quad \times \left(z^2 - z\sqrt{2y_0 - p} + y_0 + \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}}\right), \end{aligned}$$

où  $\sqrt{2y_0 - p}$  désigne l'une des racines carrées de  $2y_0 - p$ . L'équation (3.13) est donc équivalente à

$$z^2 + z\sqrt{2y_0 - p} + y_0 - \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}} = 0,$$

ou

$$z^2 - z\sqrt{2y_0 - p} + y_0 + \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}} = 0.$$

Les discriminants associés à chacune des équations précédentes sont  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  respectivement sont définis comme suit

$$\begin{aligned}\Delta_+ &= 2y_0 - p - 4 \left( y_0 - \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}} \right) = -b^2 - 4a - 2ib + 1, \\ \Delta_- &= 2y_0 - p - 4 \left( y_0 + \frac{q}{2\sqrt{2y_0 - p}} \right) = -b^2 - 4a + 2ib + 1.\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (3.13) sont données par :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-\sqrt{2y_0 + p} - \sqrt{\Delta_+}}{2} = \frac{1}{2}(-ib - \sqrt{A}), & z_2 &= \frac{-\sqrt{2y_0 + p} + \sqrt{\Delta_+}}{2} = \frac{1}{2}(-ib + \sqrt{A}), \\ z_3 &= \frac{\sqrt{2y_0 + p} - \sqrt{\Delta_-}}{2} = \frac{1}{2}(ib - \sqrt{A}), & z_4 &= \frac{\sqrt{2y_0 + p} + \sqrt{\Delta_-}}{2} = \frac{1}{2}(ib + \sqrt{A}),\end{aligned}$$

où  $A = -b^2 - 4a - 2ib + 1$  est la quantité auxiliaire qui sera utile dans la suite et  $\bar{A}$  désigne le conjugué complexe de  $A$ .

D'où les racines de l'équation initiale  $\mathcal{P}_{M_{a,b}}(\lambda) = 0$  qui caractérise les valeurs propres de la matrice  $M_{a,b}$ , sont données par

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= z_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-ib - \sqrt{A} + 1) & \lambda_2 &= z_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-ib + \sqrt{A} + 1) \\ \lambda_3 &= z_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(ib - \sqrt{A} + 1) & \lambda_4 &= z_4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(ib + \sqrt{A} + 1).\end{aligned}$$

□

**Remarque 3.2.3.** On remarque que le spectre de la matrice  $M_{a,b}$  est indépendant du signe de  $b$ . Ce qui montre la propriété 3) du Théorème 3.1.1, qui est justifiée physiquement par la symétrie du système par rapport à la direction du champ magnétique, autrement dit, cette symétrie est donnée par :

$$\lambda_1(a, b) = \mathcal{S}(\lambda_3(a, b)) = \lambda_3(a, -b) \text{ et } \lambda_2(a, b) = \mathcal{S}(\lambda_4(a, b)) = \lambda_4(a, -b),$$

où  $\mathcal{S}$  est la transformation qui envoie chaque fonction en  $b$  par la fonction elle-même de  $-b$ . Autrement dit, la symétrie  $\mathcal{S}$  remplace  $b$  par  $-b$ . On note que cette symétrie coïncide avec le conjugué complexe.

Maintenant, on est capable à donner la démonstration du Théorème 3.1.1.

*Démonstration du Théorème 3.1.1.* D'après Lemme 3.2.2, le spectre de la matrice  $M_{a,b}$  est donné par

$$\Sigma(M_{a,b}) := \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$

avec les  $\lambda_j, j = 1, \dots, 4$  sont définies dans (3.9)-(3.10). En appliquant le Corollaire 3.2.1 sur notre opérateur  $P_{a,b}$ , on obtient alors le spectre de l'opérateur  $P_{a,b}$  comme suit

$$\Sigma(P_{a,b}) = \{\alpha_k = \sum_{j=1}^4 \lambda_j k_j, \forall k \in \mathbb{N}^4\}.$$

Maintenant, cherchons à vérifier les propriétés 1) et 2) du Théorème 3.1.1. Tout d'abord, on se rappelle que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-i(b + c_2) + 1 - c_1), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-i(b - c_2) + 1 + c_1), \quad (3.15)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(i(b + c_2) + 1 - c_1), \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}(i(b - c_2) + 1 + c_1). \quad (3.16)$$

où  $c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}$  et  $A = -b^2 - 4a - 2ib + 1$  sont définies dans (3.4)-(3.5) respectivement. Par conséquent, pour calculer l'asymptotique des valeurs propres lorsque  $b \rightarrow +\infty$ , il suffit de calculer les asymptotiques de  $c_1$  et  $c_2$ . On rappelle que  $c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}$  est une racine carré de  $A = A_1 + iA_2$  alors

$$(c_1 + ic_2)^2 = A_1 + iA_2.$$

Le but est de chercher  $c_1$  et  $c_2$ , en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation ci-dessus, ceci signifie

$$\begin{cases} c_1^2 - c_2^2 = A_1 = -b^2 - 4a + 1 \\ 2c_1 c_2 = A_2 = -2b \end{cases} \quad (3.17)$$

et comme  $(c_1 + ic_2)^2 = A$ , il vient aussi l'égalité en module

$$|(c_1 + ic_2)|^2 = |A_1 + iA_2| \iff c_1^2 + c_2^2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = |A|.$$

Ainsi

$$(c_1 + ic_2)^2 = A_1 + iA_2 \iff \begin{cases} c_1^2 - c_2^2 = A_1 \\ 2c_1 c_2 = A_2 \\ c_1^2 + c_2^2 = |A| \end{cases} \quad (3.18)$$

En résolvant le système d'équations à droite (3.18), on obtient

$$\begin{cases} c_1 = \pm \sqrt{\frac{|A| + A_1}{2}} \\ c_2 = \pm \sqrt{\frac{|A| - A_1}{2}} \\ 2c_1 c_2 = A_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

et comme  $A_2 = -2b \leq 0$  quand  $b \geq 0$ , donc les réels  $c_1$  et  $c_2$  sont de signe opposés. Sans perte de généralité on va traiter le cas  $b \geq 0$ , on suppose que  $c_1 \geq 0$  et donc  $c_2 \leq 0$ .

Pour calculer les asymptotiques de  $c_1$  et  $c_2$  lorsque  $b \rightarrow +\infty$ , il faut tout d'abord trouver l'asymptotique de  $|A|$

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A_1^2 + A_2^2 = (-b^2 - 4a + 1)^2 + 4b^2 \\ &= b^4 + b^2(8a + 2) + (4a - 1)^2 \\ &= b^2 \left( 1 + \frac{2(4a + 1)}{b^2} + \frac{(4a - 1)^2}{b^4} \right) \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la formule de Taylor-Young de  $\sqrt{1+x}$  lorsque  $\langle a \rangle b^{-2}$  suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned} |A| &= b^2 \sqrt{1 + \frac{2(4a + 1)}{b^2} + \frac{(4a - 1)^2}{b^4}} \\ &= b^2 \left( 1 + \frac{(4a + 1)}{b^2} + \frac{(4a - 1)^2}{2b^4} - \frac{1}{8} \left( \frac{2(4a + 1)}{b^2} + \frac{(4a - 1)^2}{b^4} \right)^2 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-6}) \right) \\ &= b^2 \left( 1 + \frac{(4a + 1)}{b^2} + \frac{(4a - 1)^2 - (4a - 1)^2}{2b^4} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-6}) \right) \\ &= b^2 + 4a + 1 - \frac{8a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}). \end{aligned}$$

En remplaçant l'asymptotique de  $|A|$  dans les égalités du système (3.19), on a alors

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{|A| + A_1}{2}} = \sqrt{\frac{b^2 + 4a + 1 - \frac{8a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) - b^2 + 1 - 4a}{2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{4a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Taylor  $\sqrt{1-x}$ , on obtient

$$c_1 = 1 - \frac{2a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}).$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} c_2 &= -\sqrt{b^2 + 4a - \frac{4a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})} = -b \sqrt{1 + \frac{4a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})} \\ &= -b \left( 1 + \frac{2a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) \right) \\ &= -b - \frac{2a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3}). \end{aligned}$$

En utilisant les asymptotiques de  $c_1$  et  $c_2$  quand  $b \rightarrow +\infty$ , on a

$$1 - c_1 = \frac{2a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) \text{ et } 1 + c_1 = 2 - \frac{2a}{b^2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}), \quad (3.20)$$

$$b - c_2 = 2b + \frac{2a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3}) \text{ et } b + c_2 = -\frac{2a}{b} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-3}). \quad (3.21)$$

Ceci achève la démonstration de la propriété 1) du Théorème 3.1.1.

Maintenant, on va montrer la propriété 2). Soit  $a > 0$  et  $b \neq 0$ , d'après les expressions (3.15)-(3.16) des valeurs propres de  $M_{a,b}$  en fonction des quantités auxiliaires  $c_1$  et  $c_2$ , on a que les parties imaginaires des valeurs propres s'écrivent comme suit :

$$\pm(c_2 + b) \text{ et } \pm(b - c_2).$$

Sous l'hypothèse que  $b \neq 0$  il y a deux cas à traiter.

• **Cas  $b > 0$  :** Dans ce cas, d'après la troisième équation du système (3.19) on a

$$2c_1 c_2 = A_1 = -2b.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $c_1 \geq 0$  et donc  $c_2 \leq 0$ . On a donc  $b - c_2 > b > 0$ , alors  $\Im(\lambda_2), \Im(\lambda_4) \neq 0$ . Il reste à montrer que  $b + c_2 \neq 0$  lorsque  $b > 0$ , pour cela on va raisonner par l'absurde.

Supposons par l'absurde que  $b + c_2 = 0$ , en utilisant la troisième équation du système (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} c_2 + b = 0 &\iff c_2 - c_1 c_2 = 0 \iff c_2(1 - c_1) = 0 \\ &\iff c_2 = 0 \text{ ou } c_1 = 1, \end{aligned}$$

comme  $c_2 = -b < 0$ , donc  $c_2 \neq 0$ . D'où  $c_1 = 1$ , ce qui implique que  $\lambda_1, \lambda_3 = 0$ . Or d'après la première équation du système (3.19), on a

$$c_1^2 - c_2^2 = A_2 = -b^2 - 4a + 1 \iff 1 - b^2 = -b^2 - 4a + 1 \iff a = 0,$$

ce qui est impossible comme  $a > 0$ . Par conséquent,  $c_2 + b \neq 0$ , alors  $\Im(\lambda_1), \Im(\lambda_3) \neq 0$ . Ce qui achève la démonstration de la propriété 2) lorsque  $b > 0$ .

• **Cas  $b < 0$  :** Par la symétrie donnée dans la Remarque 3.2.3, on peut montrer aussi que  $\Im(\lambda_j) \neq 0$ , pour tout  $j = 1, 2, 3, 4$ . Ceci achève la preuve du Théorème 3.1.1.  $\square$

**Remarque 3.2.4.** On note que pour  $a > 0$  et  $b \neq 0$ , alors tous les valeurs propres de  $M_{a,b}$  sont distincts. En effet, d'après la propriété 2) du Théorème 3.1.1 tous les valeurs propres de  $M_{a,b}$  sont non réelles i.e.  $\Im(\lambda_j) \neq 0$ , pour tout  $j = 1, 2, 3, 4$ . On en déduit que

$$\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1 = \lambda_3 \text{ et } \lambda_2 \neq \bar{\lambda}_2 = \lambda_4.$$

D'après la symétrie de conjugué complexe, il reste à montrer que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_4$ . On va raisonner par l'absurde, supposons que  $\lambda_1 = \lambda_2$ , alors d'après les égalités données dans (3.15) on a

$$b + c_2 = b - c_2 \text{ et } 1 - c_1 = 1 + c_2,$$

ce qui implique que  $c_1 = c_2 = 0$ . Or, d'après la deuxième équation du système (3.18) on a  $c_1 c_2 = b$  donc  $b = 0$ , ce qui est impossible car  $b$  supposé non nul. D'où  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . De manière similaire on peut montrer que  $\lambda_1 \neq \lambda_4$ .

### 3.3 Calcul de la norme de l'exponentielle de $M_{a,b}$

#### 3.3.1 Calcul de la matrice exponentielle $e^{-tM_{a,b}}$

##### Préliminaire.

Le but de cette partie est d'introduire une méthode qui consiste à calculer l'exponentielle d'une matrice qu'on va s'en servir après. (cf [87, Chapitre 10] pour plus des détails sur ce sujet).

La proposition suivante nous donne une méthode pour calculer la matrice exponentielle.

**Proposition 3.3.1.** *Si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , alors  $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ .*

*Démonstration.* D'après la continuité de la morphisme d'algèbre  $A \mapsto P^{-1}AP$ , pour tout  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . En effet, en utilisant l'égalité suivante pour achever la preuve :

$$\sum_{k=0}^N \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = P^{-1} \left( \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) P,$$

on obtient alors

$$e^{P^{-1}AP} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = P^{-1} \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) P = P^{-1}e^A P.$$

□

On peut utiliser la proposition 3.3.1, si la matrice est diagonalisable et l'on connaît les valeurs propres. Ceci nécessite de calculer les matrices de passages, ce qui ne peut pas toujours facile à l'expliciter, surtout dans les cas où la matrice est à paramètres.

Il existe une méthode simple qui se fonde sur l'interpolation de Lagrange, la seule condition pour pouvoir l'appliquer est de pouvoir diagonaliser la matrice et identifier les valeurs propres.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  avec  $n$  valeurs propres distincts  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Ceci implique que la matrice  $A$  est diagonalisable, c'est-à-dire

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) / A = PDP^{-1}.$$

On peut trouver un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $e^A = Q(A)$ . Cela existe en utilisant la proposition suivante :

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , alors il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $e^A = Q(A)$ .*

*Démonstration.* Les polynômes en  $A$  forment la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbb{C}[A] \subset M_n(\mathbb{C})$ . La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $M_n(\mathbb{C})$  étant de dimension finie, donc  $\mathbb{C}[A]$  est un fermé. Ainsi

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \in \mathbb{C}[A],$$

donc  $e^A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \in \mathbb{C}[A]$  comme  $\mathbb{C}[A]$  est un fermé.

□

Mais pour une matrice diagonale, on peut être plus explicite. En effet, si  $Q \in \mathbb{C}[X]$  et  $A = P D P^{-1}$  avec  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  alors

$$Q(A) = P Q(D) P^{-1}.$$

Il suffit de trouver  $Q$  tel que

$$Q(D) = \text{Diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = \exp(D).$$

Cela se fait très bien par interpolation de Lagrange si les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $A$  sont distincts

$$Q = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j} P_j \text{ avec } P_j = \prod_{k=1, \dots, n, j \neq k} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k},$$

Finalement, on en déduit l'expression de l'exponentielle de  $A$  comme suit :

$$Q(A) = P^{-1} Q(D) P = P^{-1} e^D P = e^A,$$

ce que l'on souhaitait.

**Exemple 3.3.3.** Soit  $A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ , pour trouver la matrice exponentielle de  $A_t$  en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange, on cherche le spectre de la matrice  $A_t$  qui est

$$\text{Spec}(A_t) = \{it, -it\}.$$

Puis, on calcule le polynôme d'interpolation  $Q$  comme il est mentionné dans la sous-section précédent :

$$Q(X) = \frac{\sin t}{t} X + \cos t,$$

on en déduit alors directement l'expression exacte de la matrice exponentielle comme suit :

$$e^{A_t} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

### Application de la méthode d'interpolation de Lagrange.

On se rappelle que le spectre de la matrice  $M_{a,b}$  est donnée par

$$\text{Spec}(M_{a,b}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},$$

où les  $\lambda_j$  sont définies dans (3.9)-(3.10),  $\forall j = 1, 2, 3, 4$ . Pour  $a > 0$  et  $b \neq 0$ , on note  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  à la base de vecteurs propres  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , l'existence de  $P$  est justifié par le fait que les valeurs propres  $\lambda_j$  sont distincts (voir la Remarque 3.2.4) avec les vecteurs propres  $v_j$  définis comme suit :

$$v_j = \left( \frac{\lambda_j^2 - \lambda_j + a}{b\sqrt{a}}, -\frac{\lambda_j}{\sqrt{a}}, -\frac{\lambda_j^2 - \lambda_j + a}{b\lambda_j}, 1 \right), \forall j = 1, \dots, 4.$$

Pour déterminer la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$ , on pose  $A_t = -tM_{a,b}$ . D'après la Proposition 3.3.2, il existe un polynôme  $H \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$e^{A_t} = H(A_t),$$

et d'après la méthode d'interpolation de Lagrange,

$$H(X) = \sum_{j=1}^4 e^{-\lambda_j t} P_j(X)$$

où

$$P_j(X) = \prod_{k=1, k \neq j}^4 \left( \frac{X + \lambda_k t}{-\lambda_j t + \lambda_k t} \right), \forall j = 1, 2, 3, 4.$$

Après avoir remplacé  $X$  par  $-tM_{a,b}$  dans les polynômes  $P_j$  pour tout  $j = 1, \dots, 4$ , on peut constater que  $P_j(-tM_{a,b})$  ne dépend pas de  $t$ . En utilisant la symétrie défini dans la Remarque 3.2.3, on obtient l'expression exacte de la matrice exponentielle de la matrice  $A_t$  comme suit

$$\begin{aligned} e^{A_t} &= H(-tM_{a,b}) \\ &= 2 \left( \Re(\alpha) M_{a,b}^3 + \Re(\beta) M_{a,b}^2 + \Re(\gamma) M_{a,b} + \Re(\delta) I_4 \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

où  $I_4$  est la matrice identité d'ordre 4, et les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta \in \mathbb{C}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \alpha &= -(X_1 + X_2), \\ \beta &= \frac{1}{2} ((c + 3 + ib) X_1 + (-c + 3 + ib) X_2), \\ \gamma &= -(|\lambda_2|^2 + \lambda_3(c_1 + 1)) X_1 + (|\lambda_1|^2 + \lambda_4(-c_1 + 1)) X_2, \\ \delta &= \frac{1}{4} (|\lambda_2|^2 \lambda_3 X_1 + |\lambda_1|^2 \lambda_4 X_2), \end{aligned}$$

où  $c = c_1 + ic_2 = \sqrt{A}$  sont les quantités auxiliaires définies dans (3.4) et (3.5), et  $X_1$  et  $X_2$  prennent la forme suivante :

$$X_1 := \frac{e^{-t\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} = \frac{e^{-t\lambda_1}}{ic(c_2 + b)(c_1 + ib)}, \quad (3.23)$$

$$X_2 := \frac{e^{-t\lambda_2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{e^{-t\lambda_2}}{-ic(-c_2 + b)(-c_1 + ib)}. \quad (3.24)$$

On remarque que  $X_2$  est la symétrie de  $X_1$  par la transformation  $\sigma$

$$\sigma(f(c)) = f(-c)$$

avec  $c = c_1 + ic_2$ , autrement dit,  $X_2 = \sigma(X_1)$ . Au vu de cette symétrie, l'expression de  $e^{-tM_{a,b}}$  est indépendante du choix de  $\sqrt{A}$ .

**Remarque 3.3.4.** On note que dans l'expression (3.22) de la matrice exponentielle  $e^{-t M_{a,b}}$ , il intervient les parties réelles des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta \in \mathbb{C}$  car la matrice  $e^{-t M_{a,b}}$  est réelle et on peut écrire la matrice  $e^{A_t}$  aussi en fonction de  $X_3$  et  $X_4$  qui sont les conjuguées complexes de  $X_1$  et  $X_2$  respectivement, puisque  $\Re(z) = \Re(\bar{z})$ . Donc, la symétrie de conjugué complexe nous a aidé à simplifier l'expression de la matrice exponentielle et d'avoir la partie réelle donnée dans (3.22).

On cherche à déterminer une base dont laquelle les matrices  $M_{a,b}$ ,  $M_{a,b}^2$  et  $M_{a,b}^3$  s'écrivent comme combinaison linéaires de ses éléments. Pour cela on constate que

$$M_{a,b} = H_{vv} - b J_{vv} - \sqrt{a} J, \quad (3.25)$$

$$M_{a,b}^2 = (-b^2 + 1) H_{vv} - 2b J_{vv} - \sqrt{a} J + \sqrt{ab} J_J - a I_4, \quad (3.26)$$

$$M_{a,b}^3 = (-3b^2 - a + 1) H_{vv} + (b^3 + (2a - 3)b) J_{vv} + (\sqrt{ab}^2 + \sqrt{a}(a - 1)) J + 2\sqrt{ab} J_J + a b J_{xx} - a I_4, \quad (3.27)$$

où les matrices  $H_{vv}$ ,  $H_{xx}$ ,  $J$ ,  $J_J$ ,  $J_{vv}$  et  $J_{xx}$  sont définies comme

$$H_{vv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$J_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

avec  $I_4 = H_{vv} + H_{xx}$ . On note que le choix de ces matrices est basé sur l'étude du cas de l'opérateur quadratique (KFP) sans champ magnétique dans [84], où les auteurs ont choisi  $H_{vv}$ ,  $J_{xx}$ ,  $J$  et  $H_{xx}$ , et en ajoutant les matrices  $J_J$  et  $J_{vv}$  qui dû au paramètre magnétique pour former une base.

En utilisant les égalités (3.25)-(3.27), la matrice exponentielle prend la forme suivante :

$$e^{-t M_{a,b}} = g H_{vv} + d J + e J_J + f J_{vv} + h J_{xx} + k (H_{xx} + H_{vv}), \quad (3.30)$$

où les coefficients  $g, d, e, f, h$  et  $k \in \mathbb{R}$  sont donnés par :

$$g = 2b(b\Re(L) - \Im(L)), \quad (3.31)$$

$$d = 2b\sqrt{a}\Im(L), \quad (3.32)$$

$$e = -2b\sqrt{a}\Re(L), \quad (3.33)$$

$$f = 2b(\Re(L) + b\Im(L)) - 2ba\Re(O), \quad (3.34)$$

$$h = -2ab\Re(O), \quad (3.35)$$

$$k = 2ab\Im(O), \quad (3.36)$$

où

$$L = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \text{ et } O = X_1 + X_2, \quad (3.37)$$

et  $X_1$  et  $X_2$  sont définis dans (3.23) et (3.24) respectivement.

### 3.3.2 Démonstration du Théorème 3.1.2

**Cas intermédiaire.**

Dans cette partie, on cherche à trouver les valeurs propres pour une classe spécifique des matrices réelles, qui s'écrivent comme combinaison linéaire des matrices  $H_{vv} - H_{xx}$ ,  $J_J$ , et

$$K = [J, H_{vv}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $H_{vv}$ ,  $H_{xx}$ ,  $J$  et  $J_J$  sont définies dans (3.28) et (3.29)

**Proposition 3.3.5.** Soit  $A \in M_4(\mathbb{R})$  telle que

$$A = \beta_1(H_{vv} - H_{xx}) + \beta_2 K + \gamma_3 J_J,$$

où  $\beta_j \in \mathbb{C}$  pour tout  $j = 1, 2, 3$ . Alors les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de la forme suivante :

$$\alpha_1 = -\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \text{ et } \alpha_2 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$$

*Démonstration.* On cherche à trouver le spectre de la matrice  $A$ , pour cela on va trouver les racines de son polynôme caractéristique  $\mathcal{P}_A$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(X) &:= \begin{vmatrix} \beta_1 - X & 0 & \beta_3 & \beta_2 \\ 0 & \beta_1 - X & -\beta_2 & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 - X & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 - X \end{vmatrix} \\ &= (\beta_1 - X) \begin{vmatrix} \beta_1 - X & -\beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_2 & -\beta_1 - X & 0 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 - X \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 - X & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_2 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & -\beta_1 - X \end{vmatrix} \\ &\quad - \beta_2 \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 - X & -\beta_2 \\ \beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 - X \\ \beta_2 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= X^4 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) X^2 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\mathcal{P}_A(X) = X^4 - 2(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) X^2 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^2 = 0.$$

On remarque que le polynôme  $\mathcal{P}_A(X)$  est bicarré et il peut se factoriser comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(X) &= (X^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2))^2 \\ &= \left( X - \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \right)^2 \left( X + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Alors le polynôme  $\mathcal{P}_A(X)$  admet deux racines doubles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$

$$\alpha_1 = -\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \text{ et } \alpha_2 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}, \quad (3.38)$$

qui constituent le spectre de  $A$ .  $\square$

**Remarque 3.3.6.** Soit  $B$  la matrice qui s'écrit sous la forme suivante :

$$B = \beta_1 (H_{vv} - H_{xx}) + \beta_2 K + \beta_3 J_J + \beta_4 I_4$$

alors le spectre de cette matrice est constitué par deux valeurs propres de multiplicité 2

$$\gamma_1 = -\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \beta_4 \text{ et } \gamma_2 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \beta_4.$$

En effet, comme le spectre d'une matrice vérifie la propriété suivante :

$$\text{Spec}(B) = \text{Spec}(A + \beta_4 I_4) = \text{Spec}(A) + \beta_4.$$

Ensuite, d'après la Proposition 3.3.5

$$\text{Spec}(A) = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont définies dans (3.38). Par conséquent, le spectre de  $B$  est  $\text{Spec}(B) = \{\alpha_1 + \beta_4, \alpha_2 + \beta_4\}$ .

### Calcul de la norme de la matrice $e^{-tM_{a,b}}$ .

Dans cette section, on va expliciter la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$  en fonction des paramètres  $a$  et  $b$  pour n'importe quel  $t \geq 0$ .

**Proposition 3.3.7.** Soit  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\|e^{-tM_{a,b}}\| = \sqrt{\left( \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + (P_3/2)^2} + P_4/2 \right)},$$

où les  $P_j$  sont

$$P_1 = -4b^2 \sqrt{a} |L|^2, \quad (3.39)$$

$$P_2 = b P_1 - 8b^2 a \sqrt{a} \Im(O \bar{L}), \quad (3.40)$$

$$P_3 = 4b^2 (b^2 + 1) |L|^2 + 8ab^2 (b \Im(O \bar{L}) - \Re(O \bar{L})), \quad (3.41)$$

$$P_4 = P_3 + 8ab^2 (|L|^2 + a |O|^2). \quad (3.42)$$

où  $L$  et  $O$  sont définis dans l'égalité (3.37).

*Démonstration.* Soit  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , d'après la section 4.2, on a montré que la matrice  $e^{-tM_{a,b}}$  s'écrit de la forme suivante

$$e^{-tM_{a,b}} = g H_{vv} + d J + e J_J + f J_{vv} + h J_{xx} + k (H_{xx} + H_{vv}),$$

où les coefficients  $g, d, e, f, h$  et  $k$  sont définies dans les égalités (3.31)-(3.36) respectivement. On se rappelle que la norme de la matrice exponentielle peut être calculée comme suit :

$$\|e^{-tM_{a,b}}\| = \sqrt{\rho(e^{-tM_{a,b}} e^{-tM_{a,b}^*})}, \quad (3.43)$$

où  $\rho(M)$  désigne la plus grande valeurs propres de  $M$  en valeur absolu, pour  $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Il nous reste à calculer la matrice  $e^{-tM_{a,b}} e^{-tM_{a,b}^*}$ . En utilisant l'égalité (3.30), on obtient

$$\begin{aligned} e^{-tM_{a,b}} e^{-tM_{a,b}^*} &= \frac{1}{2}(g^2 + 2kg + f^2 - h^2)(H_{vv} - H_{xx}) \\ &\quad + (dg + e(f - h)) K + (eg + 2ek - df - hd)J_J \\ &\quad + \frac{1}{2}(g^2 + 2kg + f^2 - h^2 + 2(k^2 + d^2 + e^2))(H_{vv} + H_{xx}). \end{aligned}$$

D'après l'égalité précédente, on obtient que la matrice  $e^{-tM_{a,b}} e^{-tM_{a,b}^*}$  appartient à la classe des matrices introduite dans la partie précédente. D'après le cas intermédiaire et la Remarque 3.3.6, on a que la plus grande valeur propre est

$$\rho(e^{-tM_{a,b}} e^{-tM_{a,b}^*}) = \sqrt{\left(\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + (P_3/2)^2} + P_4/2\right)}, \quad (3.44)$$

où les  $P_j$  sont

$$\begin{aligned} P_1 &= dg + e(f - h), \\ P_2 &= eg + 2ek - df - hd, \\ P_3 &= g^2 + 2kg + f^2 - h^2, \\ P_4 &= g^2 + 2kg + f^2 - h^2 + 2(k^2 + d^2 + e^2). \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, en incluant les égalités (3.31)-(3.36), on obtient les égalités (3.39)-(3.42).  $\square$

Maintenant, on va donner la démonstration du Théorème 3.1.2.

*Démonstration du Théorème 3.1.2.* D'après la Proposition précédente, on a

$$\|e^{-tM_{a,b}}\| = \sqrt{\left(\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + (P_3/2)^2} + P_4/2\right)}, \quad (3.45)$$

donc pour achever la démonstration du Théorème 3.1.2, il faut expliciter les coefficients  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  en fonction des quantités auxiliaires  $A$  et  $c$  définis dans (3.4)-(3.5). Comme les coefficients indiqués juste avant sont calculés en fonctions de  $O$  et  $L$ , on s'intéresse en premier temps à calculer explicitement ses quantités. On remarque que

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) = -2ib\lambda_1 \text{ et } \lambda_1 \lambda_2 = a.$$

Cela nous permet d'écrire

$$X_1 := \frac{e^{-t\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} = -\frac{e^{-t\lambda_1}}{2ibc\lambda_1} = -\frac{\lambda_2 e^{-t\lambda_1}}{2iabc},$$

où  $c = \sqrt{A}$  la quantité auxiliaire définie dans (3.5). Cela nous conduit à simplifier les expressions de  $O$  et  $L$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} O &= X_1 + X_2 = \frac{1}{2iabc}(\lambda_1 e^{-t\lambda_2} - \lambda_2 e^{-t\lambda_1}), \\ L &= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \frac{1}{2ibc}(e^{-t\lambda_2} - e^{-t\lambda_1}). \end{aligned}$$

On introduit les notations temporaires analogues au cosh et sinh

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}(e^{-t\lambda_1} + e^{-t\lambda_2}), \quad \mathcal{S} = \frac{1}{2}(e^{-t\lambda_1} - e^{-t\lambda_2}), \quad (3.46)$$

En utilisant les notations précédents on obtient

$$O = -\frac{1}{2iabc}(c\mathcal{C} + (1 - ib)\mathcal{S}), \quad L = -\frac{1}{ibc}\mathcal{S}.$$

Ce qui nous permet d'expliciter la quantité  $O\bar{L}$  comme suit

$$O\bar{L} = \frac{1}{2ab^2|A|} (c\mathcal{C}\bar{\mathcal{S}} + (1 - ib)|\mathcal{S}|^2).$$

Maintenant, on est capable d'expliciter les coefficients qui définissent la norme exponentielle. On commence par calculer  $P_1$

$$P_1 = -4b^2\sqrt{a}|L|^2 = -\frac{4\sqrt{a}}{|A|}|\mathcal{S}|^2.$$

Puis, on peut calculer  $P_2$

$$\begin{aligned} P_2 &= bP_1 - 8b^2a^{3/2}\Im(O\bar{L}) \\ &= -\frac{4b\sqrt{a}}{|A|}|\mathcal{S}|^2 - \frac{8b^2a^{3/2}}{2ab^2|A|}\Im(c\mathcal{C}\bar{\mathcal{S}} + (1 - ib)|\mathcal{S}|^2) \\ &= -\frac{4\sqrt{a}}{|A|}\Im(c\mathcal{C}\bar{\mathcal{S}}). \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule  $P_3$  comme suit

$$\begin{aligned}
 P_3 &= 4b^2(b^2 + 1)|L|^2 + 8ab^2(b\Im(O\bar{L}) - \Re(O\bar{L})) \\
 &= 4b^2(b^2 + 1)\frac{1}{b^2|A|}|\mathcal{S}|^2 + \frac{8ab^2}{2ab^2|A|}(b\Im(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}} + (1 - ib)|\mathcal{S}|^2) \\
 &\quad - \Re(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}} + (1 - ib)|\mathcal{S}|^2)) \\
 &= \frac{4}{|A|}(b^2 + 1)|\mathcal{S}|^2 + \frac{4}{|A|}(b\Im c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}} - b^2|\mathcal{S}|^2 - \Re c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}} - |\mathcal{S}|^2) \\
 &= \frac{4}{|A|}(b\Im(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}}) - \Re(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}})).
 \end{aligned}$$

Enfin, on analyse  $P_4$ , pour lequel on doit étudier

$$\begin{aligned}
 8a^2b^2|O|^2 &= \frac{2}{|A|}|c\mathcal{E} + (1 - ib)\mathcal{S}|^2 \\
 &= \frac{2}{|A|}(|A||\mathcal{E}|^2 + 2\Re(c\mathcal{E}(1 + ib)\bar{\mathcal{S}}) + (1 + b^2)|\mathcal{S}|^2) \\
 &= 2|\mathcal{E}|^2 + \frac{4}{|A|}(\Re(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}}) - b\Im(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}})) + \frac{2}{|A|}(1 + b^2)|\mathcal{S}|^2 \\
 &= 2|\mathcal{E}|^2 + \frac{2}{|A|}(1 + b^2)|\mathcal{S}|^2 - P_3.
 \end{aligned}$$

On peut conclure que

$$\begin{aligned}
 P_4 &= P_3 + 8ab^2(|L|^2 + a|O|^2) \\
 &= P_3 + \frac{8a}{|A|}|\mathcal{S}|^2 + 2|\mathcal{E}|^2 + \frac{2}{|A|}(1 + b^2)|\mathcal{S}|^2 - P_3 \\
 &= \frac{2}{|A|}(1 + b^2 + 4a)|\mathcal{S}|^2 + 2|\mathcal{E}|^2.
 \end{aligned}$$

En combinant toutes ces formules dans l'égalité (3.45), on obtient

$$\begin{aligned}
 \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 &= |\mathcal{E}|^2 + \frac{1}{|A|}(1 + b^2 + 4a)|\mathcal{S}|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{|A|}\sqrt{16a(|\mathcal{S}|^4 + (\Im(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}}))^2) + 4(b\Im(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}}) - \Re(c\mathcal{E}\bar{\mathcal{S}}))^2}. \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, en utilisant les expressions données dans (3.46), on ob-

tient

$$\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}} = \frac{e^{-t}}{2} (\sinh(c_1 t) - i \sin(c_2 t)), \quad (3.48)$$

$$\Im(c\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}}) = \frac{e^{-t}}{2} (c_2 \sinh(c_1 t) - c_1 \sin(c_2 t)), \quad (3.49)$$

$$\Re(c\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}}) = \frac{e^{-t}}{2} (c_1 \sinh(c_1 t) + c_2 \sin(c_2 t)), \quad (3.50)$$

$$|\mathcal{S}|^2 = \frac{e^{-t}}{2} (\cosh(c_1 t) - \cos(c_2 t)), \quad (3.51)$$

$$|\mathcal{C}|^2 = \frac{e^{-t}}{2} (\cosh(c_1 t) + \cos(c_2 t)). \quad (3.52)$$

Finalement, on cherche à simplifier l'expression de la norme exponentielle sous la forme suivante

$$\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = \frac{1}{|A|} e^{-t} (T + \sqrt{S}).$$

En utilisant l'expression de la norme obtenue dans (3.47), les égalités précédentes et  $1 + b^2 + 4a = 2 - A_1$ , on a

$$\begin{aligned} T &:= e^t |A| (|\mathcal{C}|^2 + \frac{1}{|A|} (1 + b^2 + 4a) |\mathcal{S}|^2) \\ &= \frac{1}{2} ((|A| - A_1 + 2) \cosh(c_1 t) + (|A| + A_1 - 2) \cos(c_2 t)), \end{aligned}$$

où  $A_1 = \Re(A)$  est définie dans (3.4). De même, on a

$$\begin{aligned} S &:= e^{2t} (16a(|\mathcal{S}|^4 + (\Im(c\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}}))^2) + 4(b\Im(c\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}}) - \Re(c\mathcal{C}\overline{\mathcal{S}}))^2) \\ &= 4a(\cosh(c_1 t) - \cos(c_2 t))^2 + (4ac_2^2 + (bc_2 - c_1)^2) \sinh^2(c_1 t) \\ &\quad + (4ac_1^2 + (bc_1 + c_2)^2) \sin^2(c_2 t) \\ &\quad + (-8ac_1 c_2 - 2(bc_1 + c_2)(bc_2 - c_1)) \sin(c_2 t) \sinh(c_1 t). \end{aligned}$$

Afin d'achever la démonstration du Théorème, on va calculer chaque coefficient de l'égalité précédente. On commence par calculer

$$\begin{aligned} 4ac_2^2 + (bc_2 - c_1)^2 &= (4a + b^2)c_2^2 + c_1^2 - 2bc_1 c_2 \\ &= (4a + b^2) \left( \frac{|A| - A_1}{2} \right) + \frac{|A| + A_1}{2} + 2b^2 \\ &= (1 + b^2 + 4a) \frac{|A|}{2} + (1 - 4a - b^2) \frac{A_1}{2} + 2b^2 \\ &= (1 + b^2 + 4a) \frac{|A|}{2} + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \\ &= (2 - A_1) \frac{|A|}{2} + \frac{|A|^2}{2}, \end{aligned}$$

on a utilisé les équations du système (3.19) et le fait que  $1 + b^2 + 4a = 2 - A_1$ ,  $A_2 = -2b$  et  $A_1 = 1 - b^2 - 4a$ . De même, on peut calculer

$$4ac_1^2 + (bc_1 + c_2)^2 = (2 - A_1) \frac{|A|}{2} - \frac{|A|^2}{2}.$$

Et le dernier coefficient prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} -8ac_1c_2 - 2(bc_1 + c_2)(bc_2 - c_1) &= 2c_1c_2(-4a - b^2 + 1) + 2b(c_1^2 - c_2^2) \\ &= 2c_1c_2 A_1 + 2b A_1 \\ &= (2c_1c_2 + 2b) A_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

on a utilisé aussi les équations du système (3.19). Par conséquent, on peut réécrire  $S$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S &= 4a(\cosh(c_1t) - \cos(c_2t))^2 + \frac{1}{2}(2 - A_1)|A|(\sinh^2(c_1t) + \sin^2(c_2t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}|A|^2(\sinh^2(c_1t) - \sin^2(c_2t)) \end{aligned}$$

Ensuite, en développant les fonctions  $\cosh^2(c_1t)$ ,  $\cos^2(c_2t)$ ,  $\sinh^2(c_1t)$  et  $\sin^2(c_2t)$  en fonction de  $\cosh(2c_1t)$  et  $\cos(2c_2t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} S &= 8a(1 - \Re(\cosh ct)) + \frac{1}{4}(2 - A_1)|A|(\cosh 2c_1t - \cos 2c_2t) \\ &\quad + (2a + \frac{1}{4}|A|^2)(\cosh 2c_1t + \cos 2c_2t - 2), \end{aligned}$$

où  $\Re(\cosh ct) = \cosh(c_1t) \cos(c_2t)$  et on se rappelle que  $c = c_1 + ic_2$  définie dans (3.5). Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1.2.  $\square$

**Remarque 3.3.8.** On note que l'algèbre de Lie qui constitue la matrice exponentielle  $e^{-tM_{a,b}}$  coïncide avec l'algèbre de Lie qu'on a trouvé pour l'opérateur  $P_{a,b}$  (voir [58, Section 3.1] pour plus de détails). Dans le sens où l'opérateur  $P_{a,b}$  est considéré comme un polynôme de champ de vecteurs sur une algèbre de Lie stratifiée et de type-2. En effet, si on pose

$$\mathcal{G}_1 = \text{Vect}\{H_{vv}, H_{xx}, J_{vv}, J_{xx}\} \text{ et } \mathcal{G}_2 = \text{Vect}\{J, J_J\},$$

où les matrices citées ci-dessus sont définies dans (3.28) et (3.29), et on définit le sous algèbre  $\mathcal{G}_3 = \text{Vect}\{K, K_J\}$ , avec

$$K = [J, H_{vv}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_J = [J_J, H_{vv}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui forme l'algèbre de Lie  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$  de dimension 8.

## 3.4 Estimations précises en plusieurs régime de la norme exponentielle

### 3.4.1 Asymptotique en temps petit.

Dans cette partie, on va trouver un développement asymptotique complet pour la norme de l'exponentielle de  $-tM_{a,b}$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . On va développer les quantités  $T$  et  $S$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$  qui définissent la norme de la matrice  $e^{-tM_{a,b}}$ .

**Proposition 3.4.1.** *Les quantités  $T$  et  $S$  définies dans (3.6) et (3.7) peuvent être exprimées sous la forme*

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} |A| \tau_k t^{2k}, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} |A|^2 \sigma_k t^{2k},$$

où chaque  $\tau_k$  et  $\sigma_k$  peuvent être exprimés sous la forme d'un polynôme en  $A_1 = 1 - b^2 - 4a$  et  $|A|^2 = (1 - b^2 - 4a)^2 + 4b^2$  (et donc en tant que polynôme en  $a$  et  $b^2$ ).

*Démonstration.* On introduit les notations de comptabilité suivantes :

$$\begin{aligned} B_{+,k} &= (c_1^2)^k + (-1)^k (c_2^2)^k = 2^{-k} \left( (A_1 + |A|)^k + (A_1 - |A|)^k \right), \\ B_{-,k} &= (c_1^2)^k - (-1)^k (c_2^2)^k = 2^{-k} \left( (A_1 + |A|)^k - (A_1 - |A|)^k \right). \end{aligned}$$

On va utiliser les notations précédentes afin d'exprimer les quantités  $T$  et  $S$ . Commençons par exprimer  $T$  en utilisant les développement en séries entières de fonctions  $\cosh(c_1 t)$  et  $\cos(c_2 t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( (|A| - A_1 + 2) \cosh(c_1 t) + (|A| + A_1 - 2) \cos(c_2 t) \right) \\ &= \frac{1}{2} (|A| - A_1 + 2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(c_1 t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2} (|A| + A_1 - 2) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(c_2 t)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (|A| B_{+,k} + (2 - A_1) B_{-,k}) \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Par comparaison, on obtient alors

$$(2k)! |A| \tau_k = \frac{1}{2} (|A| B_{+,k} + (2 - A_1) B_{-,k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De même on peut exprimer les coefficients de  $S$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} (2k)! |A|^2 \sigma_k &= -8a \Re(A^k) + 2^{2(k-1)} \left( (2 - A_1) |A| B_{-,k} + (|A|^2 + 8a) B_{+,k} \right) \\ &= 8a(2^{2(k-1)} B_{+,k} - \Re(A^k)) + 2^{2(k-1)} \left( (2 - A_1) |A| B_{-,k} + |A|^2 B_{+,k} \right), \end{aligned}$$

et  $\sigma_0 = 0$ .

Maintenant, on va calculer  $\Re(A^k)$ ,  $B_{+,k}$  et  $B_{-,k}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par la formule de Binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\Re(A^k) &= \Re((A_1 + iA_2)^k) \\ &= \Re\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_1^{k-j} (iA_2)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_1^{k-j} \Re((iA_2)^j) \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} (-1)^j A_1^{k-2j} A_2^{2j}\end{aligned}$$

De même, on peut exprimer  $B_{+,k}$  et  $B_{-,k}$

$$\begin{aligned}B_{+,k} &= 2^{1-k} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} A_1^{k-2j} |A|^{2j}, \\ B_{-,k} &= 2^{1-k} \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k}{2j+1} A_1^{k-2j-1} |A|^{2j+1}.\end{aligned}$$

En utilisant les égalités précédentes, on remarque que chaque terme de  $|A|\tau_k$  est divisible par  $|A|$  et laissant une reste polynomiale en fonction de  $A_1$  et  $|A|^2$ . Regardons maintenant  $|A|^2\sigma_k$ . Les derniers termes avec  $|A|B_{-,k}$  et  $|A|^2B_{+,k}$  sont divisibles par  $|A|^2$  en laissant des polynômes en fonction de  $A_1$  et  $|A|^2$ . Pour achever la démonstration il faut étudier les premiers termes de  $|A|^2\sigma_k$ , puisque  $A_2^2 = |A|^2 - A_1^2$ , on peut réécrire

$$\begin{aligned}\Re(A^k) &= \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} (-1)^j A_1^{k-2j} (|A|^2 - A_1^2)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{\ell=0}^j \binom{k}{2j} \binom{j}{\ell} (-1)^\ell A_1^{k-2j} (A_1^2)^{j-\ell} (|A|^2)^\ell.\end{aligned}$$

Le coefficient de  $A_1^k$ , donné par les termes lorsque  $\ell = 0$ , est

$$\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2j} = \frac{1}{2} \left( (1+1)^k + (1-1)^k \right) = 2^{k-1},$$

qui coïncide exactement avec le coefficient de  $A_1^k$  dans  $2^{2(k-1)}B_{+,k}$ . Ces termes s'annulent, ce qui nous permet de conclure que chaque terme de  $|A|^2\sigma_k$  est effectivement divisible par  $|A|^2$ , laissant une reste polynomiale en fonction de  $A_1$  et  $|A|^2$ , complétant ainsi la preuve de la Proposition 3.4.1.  $\square$

**Remarque 3.4.2.** Comme  $|A_1|$  est inférieur ou égale à  $|A|$  et

$$a = (1 - b^2 - A_1)/4 \leq \langle A \rangle/4,$$

il est évident que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $R > 0$ , il existe une constante  $C = C(N, R)$  telle que quand  $\langle A \rangle t^2 \leq R$ ,

$$\left| T - \sum_{k=0}^N |A| \tau_k t^{2k} \right| \leq C \langle A \rangle^{N+2} |t|^{2N+2}, \quad \left| S - \sum_{k=1}^N |A|^2 \sigma_k t^{2k} \right| \leq C \langle A \rangle^{N+3} |t|^{2N+2}.$$

Puisqu'on peut calculer que  $\sigma_1 = \tau_0 = 1$ , on obtient (lorsque  $\langle A \rangle t^2$  est borné)

$$\begin{aligned} e^t \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 &= 1 + \sum_{k=1}^N \tau_k t^{2k} + \mathcal{O}(\langle A \rangle^{N+1} t^{2N+2}) \\ &\quad + t \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{k+1} t^{2k} + \mathcal{O}(\langle A \rangle^{N+1} t^{2N})}. \end{aligned}$$

Pour  $\langle A \rangle t^2$  suffisamment petit, on peut développer la fonction de racine carrée d'une série de Taylor et la multiplier par la série de Taylor pour  $e^{-t}$  pour obtenir un développement asymptotique complète pour  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  (et donc pour  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  si on prend une autre racine carrée).

Pour terminer cette partie, on va donner la démonstration de la Proposition 3.1.4.

*Démonstration de la Proposition 3.1.4.* On remarque que dans la Proposition 3.1.4, on cherche le développement asymptotique de la norme  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  jusqu'à l'ordre 6. Pour cela et d'après la Remarque 3.4.2 il suffit de calculer les termes  $\tau_k$  et  $\sigma_k$  à l'ordre 3. On va commencer par calculer les coefficients  $B_{+,k}$  et  $B_{-,k}$  en suivant les égalités de la Proposition 3.4.1, par simple calculs on peut montrer que

$$\begin{aligned} \{B_{+,k}\}_{k=0}^3 &= \{2, A_1, \frac{1}{2}(A_1^2 + |A|^2), \frac{1}{4}(A_1^3 + 3A_1|A|^2)\} \\ \{B_{-,k}\}_{k=0}^3 &= \{0, |A|, A_1|A|, \frac{1}{4}(3A_1^2|A| + |A|^3)\}. \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs des  $B_{+,k}$  et  $B_{-,k}$  avec  $k = 0, 1, 2, 3$ , on peut calculer

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{2|A|} (2|A| + 0) = 1, \\ \tau_1 &= \frac{1}{4|A|} (|A|A_1 + (2 - A_1)|A|) = \frac{1}{2}, \\ \tau_2 &= \frac{1}{48|A|} \left( \frac{1}{2}(A_1^2 + |A|^2) + (2 - A_1)A_1|A| \right) = \frac{1}{24}(1 - 4a) \end{aligned}$$

Et  $\tau_3$  vaut

$$\begin{aligned}
 \tau_3 &= \frac{1}{6!} \frac{1}{2|A|} (|A|B_{+,3} + (2 - A_1)B_{-,3}) \\
 &= \frac{1}{5760} (2A_1(|A|^2 - A_1^2) + 6A_1^2 + 2|A|^2) \\
 &= \frac{1}{5760} (8A_1b^2 + 6A_1^2 + 2A_1^2 + 2A_2^2) \\
 &= \frac{1}{720} (A_1(b^2 + A_1) + b^2) \\
 &= \frac{1}{720} (1 - 4a(2 - 4a - b^2)).
 \end{aligned}$$

On passe maintenant à calculer

$$\sigma_1 = \frac{1}{2|A|^2} (-8aA_1 + (2 - A_1)|A|^2 + (|A|^2 + 8a)A_1) = 1$$

et  $\sigma_2$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \frac{1}{24|A|^2} (8a\Re(A^2) + 4((2 - A_1)|A|B_{-,2} + (|A|^2 + 8a)B_{+,k})) \\
 &= \frac{1}{24|A|^2} (8a(-A_1^2 + A_2^2 + 2A_1^2 + 2|A|^2)) \\
 &\quad + \frac{1}{24|A|^2} 4 \left( (2 - A_1)A_1|A|^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + |A|^2) \right) \\
 &= \frac{1}{24} \left( 24a + 4(2A_1 + \frac{1}{2}(|A|^2 - A_1^2)) \right) \\
 &= \frac{1}{24} (24a + 8(1 - 4a)) \\
 &= \frac{1}{3} (1 - a).
 \end{aligned}$$

(Même le calcul de  $\sigma_3 = (4a^2 - 17a + 4 + ab^2)/90$  devient très long.) D'après la Remarque 3.4.2, on peut développer  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$  à l'ordre 6

$$\begin{aligned}
 \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 &= e^{-t} \left( 1 + \tau_1 t^2 + \tau_2 t^4 + \tau_3 t^6 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^4 t^8) + t \sqrt{1 + \sigma_2 t^2 + \sigma_3 t^4 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^4 t^6)} \right) \\
 &= e^{-t} \left( 1 + t + \tau_1 t^2 + \frac{1}{2} \sigma_2 t^3 + \tau_2 t^4 + \left( \frac{1}{2} \sigma_3 - \frac{1}{8} \sigma_2^2 \right) t^5 + \tau_3 t^6 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^4 t^7) \right).
 \end{aligned}$$

On multiplie par la représentation de la série de Taylor pour  $e^{-t}$  à l'ordre 6. Le coefficient de  $t^0$  dans  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2$  est donc 1, le coefficient de  $t$  est  $1 - 1 = 0$ . Le coefficient de  $t^2$  est donné par

$$\frac{1}{2} \tau_1 - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$

et le coefficient de  $t^3$  est

$$\frac{1}{2}\sigma_2 - \tau_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 - a) - \frac{1}{6} = -\frac{a}{6}.$$

Ensuite, le coefficient de  $t^4$  est

$$\frac{1}{24} + \tau_2 + \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{a}{6} - \frac{a}{6} = 0.$$

Puis, le coefficient de  $t^5$  est

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2^2}{8} - \frac{1}{120} - \tau_2 + \frac{1}{24} + \frac{\sigma_2}{4} - \frac{\tau_1}{6} \\ &= \left( \frac{4}{180} - \frac{1}{72} \right) a^2 + \frac{1}{180} ab^2 + \left( -\frac{17}{180} + \frac{2}{72} + \frac{4}{24} - \frac{1}{12} \right) a + \frac{4}{180} - \frac{1}{72} - \frac{1}{120} \\ &= \frac{1}{120} a^2 + \frac{1}{180} ab^2 + \frac{1}{60} a. \end{aligned}$$

Finalement, le coefficient de  $t^6$  est

$$\begin{aligned} & \tau_3 + \frac{1}{720} - \left( \frac{\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2^2}{8} \right) - \frac{1}{120} + \frac{\tau_2}{2} + \frac{\tau_1}{24} - \frac{\sigma_2}{12} \\ &= \left( \frac{16}{720} - \frac{4}{180} + \frac{1}{72} \right) a^2 + \left( \frac{4}{720} - \frac{1}{180} \right) ab^2 \\ &+ \left( -\frac{8}{720} + \frac{17}{180} - \frac{4}{48} \right) a + \left( \frac{2}{720} - \frac{4}{180} + \frac{1}{72} - \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{1}{24} \right) \\ &= \frac{1}{72} a^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = 1 - \frac{a}{6}t^3 + \left( \frac{1}{120} a^2 + \frac{1}{180} ab^2 + \frac{1}{60} a \right) t^5 + \frac{a^2}{72} t^6 + \mathcal{O}(\langle A \rangle^4 t^7).$$

et en prenant une racine carrée, en utilisant le développement de Taylor  $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)$ , on termine la démonstration de la Proposition 3.1.4.  $\square$

### 3.4.2 Asymptotique lorsque $b$ tend vers l'infini.

Si  $M_{a,b}$  était auto-adjoint, on aurait l'égalité  $\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = e^{-(1-c_1)t}$  pour tout  $t \geq 0$ . Pour cela, on cherche à comparer  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  avec  $e^{-(1-c_1)t/2} = e^{-t\Re\lambda_1}$  où  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - ib - c_1 - ic_2)$  est l'une des valeurs propres de  $M_{a,b}$  avec une partie réelle minimale. Pour cela on va étudier le régime lorsque  $|b| \rightarrow +\infty$ .

*Démonstration de la Proposition 3.1.5.* D'après le Théorème 3.1.2, on a

$$\|e^{-tM_{a,b}}\|^2 = \frac{1}{|A|} e^{-t} (T + \sqrt{S}),$$

où  $T$  et  $S$  sont définis dans (3.7) et (3.6). En multipliant l'égalité précédente par  $e^{2t\Re\lambda_1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{2t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 &= e^{2t\Re\lambda_1} \frac{e^{-t}}{|A|} (T + \sqrt{S}) \\ &= \frac{e^{-c_1 t}}{|A|} T + \sqrt{\frac{e^{-2c_1 t}}{|A|^2}} S. \end{aligned}$$

On considère le régime quand  $b \rightarrow +\infty$ . On se rappelle que

$$T = \frac{1}{2} ((|A| - A_1 + 2) \cosh(c_1 t) + (|A| + A_1 - 2) \cos(c_2 t)),$$

alors on peut développer

$$\frac{e^{-c_1 t}}{|A|} T = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2 - A_1}{|A|}\right) (1 + e^{-2c_1 t}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2 - A_1}{|A|}\right) e^{-c_1 t} \cos c_2 t \quad (3.53)$$

On note que

$$|A|^2 = (1 - 4a - b^2)^2 + 4b^2 = b^4 \left(1 + 2(1 + 4a)b^{-2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})\right),$$

ainsi, le développement en série de Taylor de la fonction racine carrée donne (pour  $\langle a \rangle b^{-2}$  suffisamment petit)

$$|A| = b^2 \left(1 + (1 + 4a)b^{-2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})\right).$$

En utilisant la série géométrique, on a

$$\frac{2 - A_1}{|A|} = \frac{1 + (1 + 4a)b^{-2}}{1 + (1 + 4a)b^{-2} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})} = 1 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}). \quad (3.54)$$

Comme

$$\Re \cosh(ct) = \cosh(c_1 t) \cos(c_2 t),$$

on a alors

$$\begin{aligned} S &= 4a - 8a \cosh c_1 t \cos c_2 t + \frac{1}{4} (|A|^2 - (2 - A_1)|A| + 8a) \cos 2c_2 t \\ &\quad + \frac{1}{4} (|A|^2 + |A|(2 - A_1) + 8a) \cosh 2c_1 t - \frac{1}{2} |A|^2 \end{aligned}$$

On peut écrire  $|A|^{-2} e^{-2c_1 t} S$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2c_1 t}}{|A|^2} S &= \frac{4a}{|A|^2} (e^{-2c_1 t} - (e^{-c_1 t} + e^{-3c_1 t}) \cos c_2 t) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2}\right) e^{-2c_1 t} \cos 2c_2 t \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2}\right) (1 + e^{-4c_1 t}) - \frac{1}{2} e^{-2c_1 t}. \end{aligned}$$

Maintenant on écrit  $\frac{1}{2}e^{-2c_1t}$  comme suit

$$\frac{1}{2}e^{-2c_1t} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2} + 1 - \frac{2 - A_1}{|A|} - \frac{8a}{|A|^2} \right) e^{-2c_1t}$$

et on combine les termes pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2c_1t}}{|A|^2} S &= \frac{4a}{|A|^2} \left( 2e^{-2c_1t} - (e^{-c_1t} + e^{-3c_1t}) \cos c_2t \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2} \right) e^{-2c_1t} (\cos 2c_2t - 1) \\ &+ \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2} \right) (1 - e^{-2c_1t})^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pour obtenir une estimation indépendant du temps, on utilise les égalités (3.53), (3.54) et (3.55)

$$\begin{aligned} e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1 &= \frac{e^{-c_1t}}{|A|} T - 1 + \sqrt{\frac{e^{-2c_1t}}{|A|^2} S} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})) (e^{-2c_1t} - 1) + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}) \\ &+ \frac{1}{2} (1 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})) \sqrt{(1 - e^{-2c_1t})^2 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})}, \end{aligned}$$

on note qu'on a remplacé 1 par

$$1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + 1 - \frac{2 - A_1}{|A|} \right)$$

dans l'égalité précédente.

Si on prend  $x = 1 - e^{-2c_1t} \in [0, 1]$ , on a

$$e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1 = \frac{1}{2} (-x + \sqrt{x^2 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4})}) + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}).$$

Mais pour  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  la valeur absolue de la fonction

$$\varphi(x) = -x + \sqrt{x^2 + r} = \frac{r}{x + \sqrt{x^2 + r}}$$

est décroissante lorsque  $x \geq 0$  si  $r \geq 0$  ou  $x \geq (-r)^{1/2}$  si  $r < 0$ . Le maximum de  $|\varphi(x)|$  est obtenu lorsque  $r \geq 0$  si  $x = 0$  et si  $r < 0$ , le maximum est atteint lorsque  $x = |r|^{1/2}$ . Dans les deux cas le maximum est égale à  $|r|^{1/2}$ , et on a montré

$$|e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1| = \mathcal{O}(\langle a \rangle b^{-2}).$$

La borne inférieur  $0 \leq e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 - 1$  est trivial en testant un vecteur propre de  $M_{a,b}$  associé à la valeur propre  $\lambda_1 = (1 - ib - c_1 - ic_2)/2$ . Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.1.5.  $\square$

### 3.4.3 Asymptotique en temps long.

Dans cette partie, on calcule la valeur exacte de  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(1-c_1)t} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2$ , qui mesure en un sens la norme du projecteur spectral de  $M_{a,b}$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$  (ou bien  $\lambda_3$ ) vue que  $(1 - c_1) = 2\Re\lambda_1 = 2\Re\lambda_3$ .

*Démonstration de la Proposition 3.1.6.* En utilisant l'égalité (3.55), on obtient

$$\begin{aligned} e^{-2c_1t}S &= \frac{1}{8}(|A|^2 + 8a + |A|(2 - A_1))(e^{-4c_1t} + 1) - 4a(e^{-3c_1t} + e^{-c_1t}) \cos c_2t \\ &\quad + (4a - \frac{1}{2}|A|^2 + \frac{1}{4}(|A|^2 + 8a - |A|(2 - A_1)) \cos 2c_2t)e^{-2c_1t}. \end{aligned}$$

On cherche à obtenir une estimation précise lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , en utilisant

$$\frac{e^{-2c_1t}}{|A|^2}S = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|^2} + \frac{8a}{|A|^2} \right) - \frac{1}{2}e^{-2c_1t} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t}).$$

De même, on peut montrer

$$\frac{e^{-c_1t}}{|A|}T = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} \right) + \frac{1}{2}e^{-2c_1t} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t}).$$

En posant

$$R_0 = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2} \right)$$

et en notant que  $R_0 = \frac{1}{4}(1 + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4}))$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{2t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|^2 &= \frac{e^{-c_1t}}{|A|}T + \sqrt{\frac{e^{-2c_1t}}{|A|^2}S} \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} \right) + \frac{1}{2}e^{-2c_1t} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t}) \\ &\quad + \sqrt{R_0} \sqrt{1 - \frac{1}{2R_0}e^{-2c_1t} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t})} \\ &= R_1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{R_0}} \right) e^{-2c_1t} + \mathcal{O}(\langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t}), \end{aligned}$$

où  $R_1$  est définie par

$$R_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} \right) + \sqrt{R_0}.$$

Par le développement de Taylor de la fonction racine carré, on obtient alors qu'il existe  $C > 0$  telle que si

$$E(t) = e^{-2c_1t} + \langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1t} \leq \frac{1}{C}$$

alors

$$\left| \frac{1}{\sqrt{R_1}} e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\| - 1 \right| \leq CE(t). \quad (3.56)$$

Maintenant, cherchons à simplifier les expressions de  $R_0$  et  $R_1$ . Pour cela on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $a > 0$  et  $b \neq 0$ . Alors*

$$|A| + 2 - A_1 = 2(c_2^2 + 1), \quad (3.57)$$

$$4a = (1 + c_2^2)(1 - c_1^2), \quad (3.58)$$

$$|\lambda_1|^2 = (1 + c_2^2)(1 - c_1)^2/4. \quad (3.59)$$

*Démonstration.* On commence par montrer l'égalité (3.57), pour cela on utilise les égalités du système (3.18)

$$|A| + 2 - A_1 = c_1^2 + c_2^2 + 2 - c_1^2 + c_2^2 = 2(1 + c_2^2).$$

Ensuite, on passe à montrer l'égalité (3.58). En utilisant les égalités du système (3.18) et la définition de  $A_1 = -b^2 - 4a + 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} 4a &= -b^2 - A_1 + 1 = -c_1^2 c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 + 1 \\ &= c_2^2(1 - c_1^2) + 1 - c_1^2 \\ &= (1 - c_1^2)(1 + c_2^2). \end{aligned}$$

Finalement, on va montrer l'égalité (3.59). En utilisant la définition de  $\lambda_1$  en fonction de  $c_1, c_2$  et  $b$  et en remplaçant  $b$  par  $-c_1 c_2$ , on a

$$\begin{aligned} |\lambda_1|^2 &= \frac{1}{4} \left( (1 - c_1)^2 + (b + c_2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (1 - c_1)^2 + (-c_1 c_2 + c_2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (1 - c_1)^2 + c_2^2(1 - c_1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + c_2^2)(1 - c_1^2). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Lemme 3.4.1. □

Retournons à la démonstration de la Proposition 3.1.6, en utilisant les égalités du Lemme 3.4.1,  $R_0$  prend la forme suivante

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} + \frac{8a}{|A|^2} \right) \\ &= \frac{1}{8|A|} \left( |A| + 2 - A_1 + \frac{8a}{|A|} \right) \\ &= \frac{(1 + c_2^2)^2}{4|A|^2}. \end{aligned}$$

Donc  $\sqrt{R_0} = \frac{1 + c_2^2}{2|A|}$ . On finit cette démonstration par simplifier l'expression de  $R_1$  comme suit

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2 - A_1}{|A|} \right) + \sqrt{R_0} \\ &= \frac{1}{4|A|} (|A| + 2 - A_1) + \frac{c_2^2 + 1}{2|A|} \\ &= \frac{c_2^2 + 1}{|A|} \\ &= \frac{c_2^2 + 1}{c_1^2 + c_2^2}. \end{aligned}$$

En utilisant la forme simplifier de  $R_1$  dans l'inégalité (3.56), ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.6.  $\square$

### 3.5 Annexe 1. Périodicité de $e^{t\Re\lambda_1}e^{-tM_{a,0}}$ quand $b = 0$ et $a > 1/4$

Quand le champ magnétique s'annule, on remarque que  $e^{t\Re\lambda_1}e^{-tM_{a,0}}$  est périodique lorsque  $a > 1/4$ , comme montre la Figure 3.1 quand  $a = 24 > 1/4$  si on fait diminuer l'échelle du temps on obtient la même graphe. Puis on remarque, dans le cas où  $a = 0.2 < 1/4$ , la phénomène de périodicité est disparue. Le but de cette partie est de montrer ce qu'on a observé numériquement et d'exprimer la période en fonction de paramètre électrique et d'expliquer d'où intervient l'hypothèse  $a > 1/4$ .

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $a > 1/4$ . Alors  $e^{t\Re\lambda_1}e^{-tM_{a,0}}$  est périodique de période  $T = \frac{4\pi}{\sqrt{4a-1}}$ .*

*Démonstration.* On rappelle la matrice  $M_{a,0}$  associé à l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck quand  $b = 0$  comme suit :

$$M_{a,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et les valeurs propres de  $M_{a,0}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec multiplicité 2 chacune, sont données par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{1-4a} + 1) \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1-4a} + 1).$$

On peut montrer que la matrice  $M_{a,0}$  est diagonalisable et on note  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\lambda_1}{\sqrt{a}} & 0 & -\frac{\lambda_2}{\sqrt{a}} \\ -\frac{\lambda_1}{\sqrt{a}} & 0 & -\frac{\lambda_2}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $M_{a,0}$  vérifie l'égalité suivante :

$$M_{a,0} = P D P^{-1} \text{ avec } D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2). \quad (3.60)$$

Pour montrer que  $e^{t\Re\lambda_1}e^{-tM_{a,0}}$  est périodique, il faut montrer qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que

$$e^{-t_0/2}e^{t_0M_{a,0}} = I_4,$$

car  $\Re\lambda_1 = 1/2$ , d'après la proposition 3.3.1, on a que

$$e^{-tM_{a,0}} = P e^{-tD} P^{-1},$$

donc, la question revient à montrer la périodicité de la matrice  $e^{-t/2}e^{-tD}$  dans le sens introduit ci-dessus, c'est-à-dire cherchons un réel  $t_0 > 0$  tel que

$$e^{-t_0D} = e^{-t_0/2}I_4,$$

et en utilisant le fait que

$$e^{-t_0D} = \text{Diag}(e^{-t_0\lambda_1}, e^{-t_0\lambda_2}, e^{-t_0\lambda_1}, e^{-t_0\lambda_2}),$$

ceci nous implique que

$$\begin{aligned} e^{-t_0D} = e^{-t_0/2}I_4 &\iff e^{\frac{t_0}{2}(i\sqrt{4a-1}-1)} = e^{-\frac{t_0}{2}}, \\ &\iff \frac{t_0}{2}\sqrt{4a-1} = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \\ &\iff t_0 = \frac{4k\pi}{\sqrt{4a-1}}. \end{aligned}$$

En particulier, prenons  $k = 1$  on obtient  $T = \frac{4\pi}{\sqrt{4a-1}}$ , ceci montre la périodicité  $e^{-t_0/2}e^{-tM_{a,0}}$  lorsque  $a > 1/4$  avec la période  $T$ .  $\square$

## 3.6 Annexe 2 : Illustrations numériques des résultats principaux

### 3.6.1 Abscisse spectrale de $M_{a,b}$

Dans le tableau ci-dessous on calcule numériquement, en Scilab, les valeurs de l'abscisse spectrale de la matrice  $M_{a,b}$  qui égale exactement à  $\Re\lambda_1 = (1 - c_1)/2$  en comparant celles avec les valeurs de  $a/b^2$  en fixant  $a = 14$  et en prenant plusieurs valeurs de  $b$ .

| b   | Abscisse spectrale | $a/b^2$   |
|-----|--------------------|-----------|
| 5   | 0.221337           | 0.56      |
| 10  | 0.0992201          | 0.14      |
| 100 | 0.0013940          | 0.0014    |
| 200 | 0.0003496          | 0.00035   |
| 800 | 0.0000219          | 0.0000219 |

On observe dans le tableau précédent que lorsque  $b$  augmente le trou spectral de l'opérateur  $P_{a,b}$ , qui coïncide avec l'abscisse spectrale de la matrice  $M_{a,b}$ , se rapproche de  $a/b^2$ , en particulier cela justifie l'asymptotique lorsque  $b \rightarrow +\infty$  de  $\Re \lambda_1$ . Ce qui représente le taux de retour à l'équilibre qui se comporte comme  $a/b^2$ . Ceci peut mesurer l'influence du champ magnétique sur le retour à l'équilibre. Par conclusion, on peut déduire que le champ magnétique ralentit le retour à l'équilibre.

### 3.6.2 Régime lorsque $t \rightarrow 0^+$ .

Dans cette partie, on va donner quelques illustrations numériques en temps petit de la norme de  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$ . Ceci est correspond au taux de retour à l'équilibre pour  $e^{-tP_{a,b}}$  dans une régime où  $\|e^{-tM_{a,b}}\|$  est bien plus grande que  $e^{-t\Re \lambda_1}$ . En observant les Figures 3.3 et 3.4, où on dessine la norme exponentielle exacte et ses approximations associées données dans la Proposition 3.1.4 avec un erreur polynomiale d'ordre  $t^7$ . On constate que lorsqu'on augmente le champ magnétique l'erreur augmente, ce qui est normale car l'approximation est justifié dans le régime où  $\langle A \rangle t^2$  est suffisamment petit. Puis, dans les Figures 3.5 et 3.6, on dessine la norme exacte avec le polynôme donné dans la Proposition 3.1.4 d'ordre 6. On observe que lorsqu'on augmente le champ magnétique l'erreur devient plus important (voir Figure 3.6).

### 3.6.3 Régime $b \rightarrow +\infty$ .

Dans cette partie, on va donner des illustrations numériques qui illustrent les estimations uniformes obtenues dans la Proposition 3.1.5. Surtout on compare les déviations

$$\|e^{-tP_{a,b}} - \Pi_0\| = \|e^{-tM_{a,b}}\|,$$

avec les approximations données dans la proposition citée. On observe numériquement dans les Figures 3.7 et 3.8 que lorsqu'on augmente le champ magnétique l'approximation devient plus précis. Et on peut interpréter les figures en disant quand on augmente le champ magnétique la matrice exponentielle ça ressemble au prédiction autoadjoint qui égale à  $e^{-t\Re \lambda_1}$ . En plus, on compare à un échelle logarithmique dans la Figure 3.9 la norme exponentielle quand  $b = 0$  et  $b \neq 0$ . On observe que le caractère non-autoadjoint semble disparaître lorsque  $b$  augmente.

Au niveau de retour à l'équilibre, on représente dans la Figure 3.10 la norme  $\|e^{-tP_{a,b}} - \Pi_0\|$  en prenant plusieurs valeurs de paramètre magnétique  $b$  entre 20 et 100. On remarque

que par exemple lorsque  $b = 20$  on ne voit pas le retour à l'équilibre à un temps entre 200 et 300, tandis que lorsque  $b = 100$  sur une échelle du temps est égale à 500 le retour à l'équilibre est faible. Par conséquent, on constate que le champ magnétique ralentit le retour à l'équilibre.

### 3.6.4 Régime en temps long

Dans cette partie on va donner des illustrations numériques qui illustrent le résultat obtenu dans la Proposition 3.1.6. Comme mentionné dans l'introduction, le résultat de la Proposition 3.1.6 montre qu'il existe  $C > 0$  tel que si on suppose que

$$E(t) = e^{-2c_1 t} + \langle a \rangle^2 b^{-4} e^{-c_1 t} \leq \frac{1}{C},$$

alors on a

$$\left| \left( \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2^2 + 1} \right)^{1/2} e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\| - 1 \right| \leq CE(t).$$

On peut montrer que la norme de  $\Pi_1$  le projecteur spectral associé à  $\lambda_1$  est

$$\|\Pi_1\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\| = \sqrt{\frac{1 + c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}} = \sqrt{R_1}.$$

Dans la figure 3.11, on dessine le comportement en temps de la fonction  $e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  et la norme exacte de projecteur spectral  $\Pi_1$  lorsque le paramètre électrique  $a = 8$  et le paramètre magnétique  $b = 12$ . On observe alors que avec le temps la fonction  $e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  se rapproche de la norme exacte du  $\Pi_1$ .

Ensuite, dans les Figures 3.12 et 3.13 on compare la fonction  $e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  et les approximations  $\sqrt{R_1}(1 - CE(t))$  et  $\sqrt{R_1}(1 + CE(t))$  lorsque  $a = 8$  et  $b = 12$  ou 5 respectivement avec la constante  $C = 50$ . On remarque que dans les deux figures la courbe de la fonction  $t \rightarrow e^{\frac{t(1-c_1)}{2}} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  compris bien entre les deux courbes associés aux approximations cités juste avant. En plus, à partir d'un certain temps  $t$  compris entre 2.5 et 3 pour le Figure 3.12 (lorsque  $b = 12$ ), on voit que l'erreur entre les trois courbes tend vers zéro. Tandis que dans la Figure 3.13 et lorsque  $b = 5$ , on voit qu'à partir du temps  $t$  compris entre 4 et 5 l'erreur entre les trois courbes tend vers zéro. Par conclusion, l'estimation donnée dans la Proposition 3.1.6 devient plus précise lorsqu'on augmente le champ magnétique  $b$ .

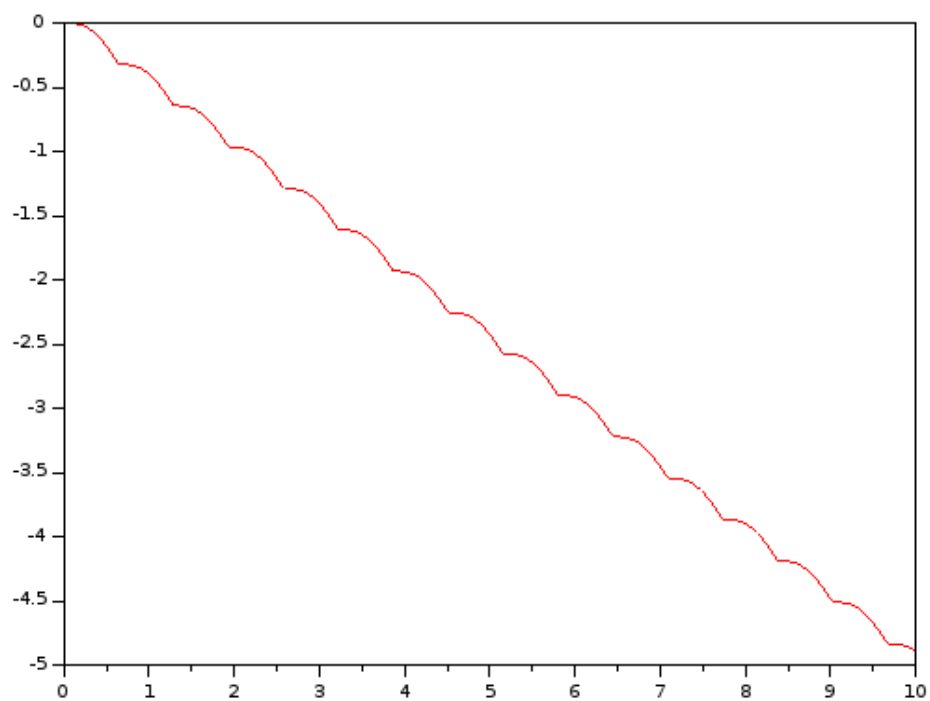


FIGURE 3.1: Comportement en temps de  $\log(\|e^{-t} M_{a,0}\|)$  avec  $b = 0$  et  $a = 24 > 1/4$

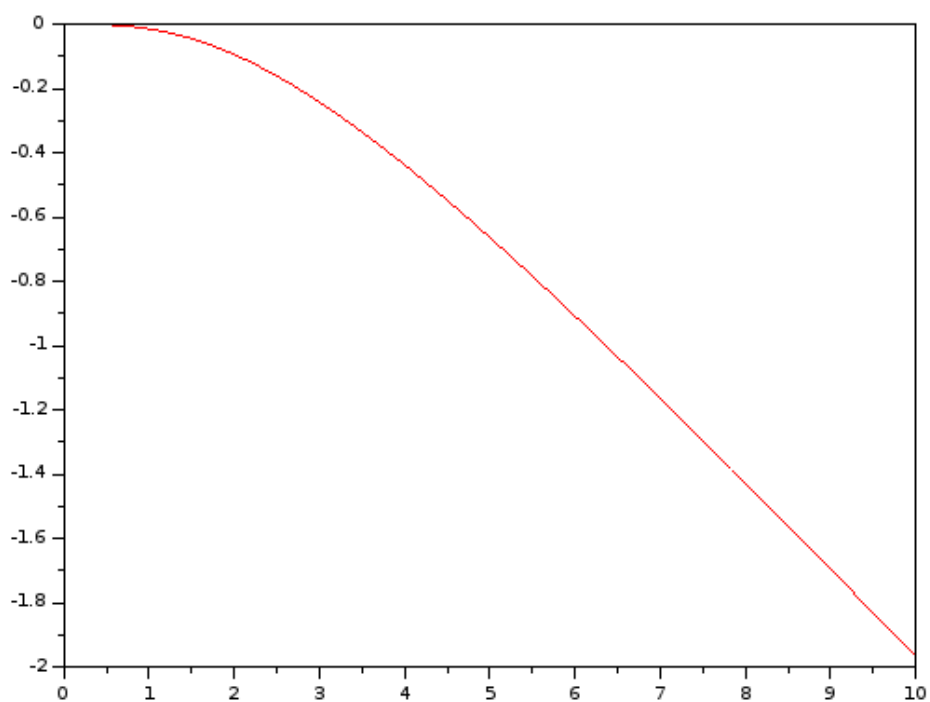


FIGURE 3.2: Comportement en temps de  $\log(\|e^{-t} M_{a,0}\|)$  avec  $b = 0$  et  $a = 0.2 < 1/4$

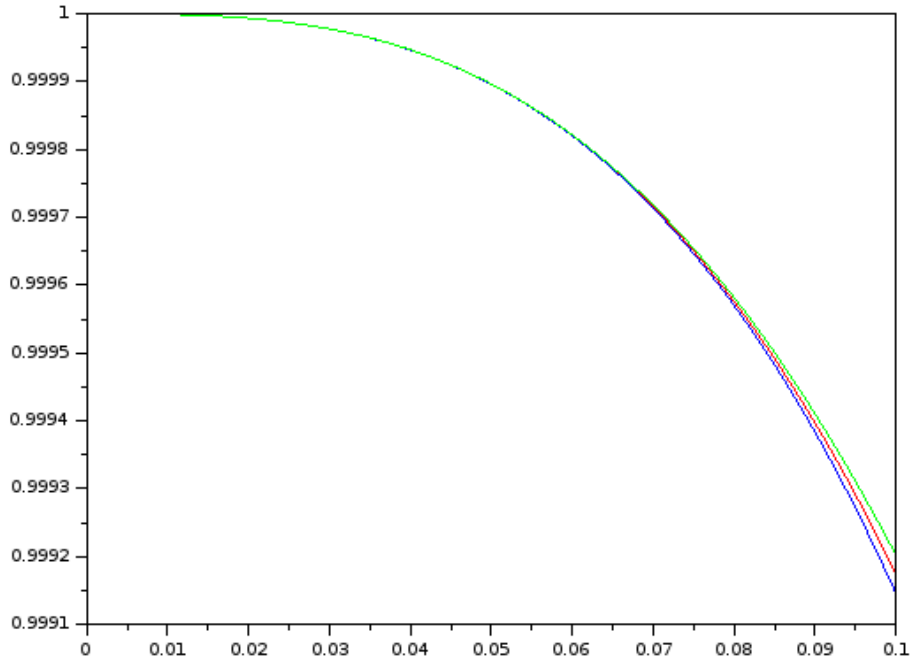


FIGURE 3.3: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t M_{a,b}}\|$  et leurs approximations en temps petit des erreurs  $(-\langle A \rangle^3 t^7$  et  $\langle A \rangle^3 t^7)$  avec  $b = 2$  de gauche à droite.

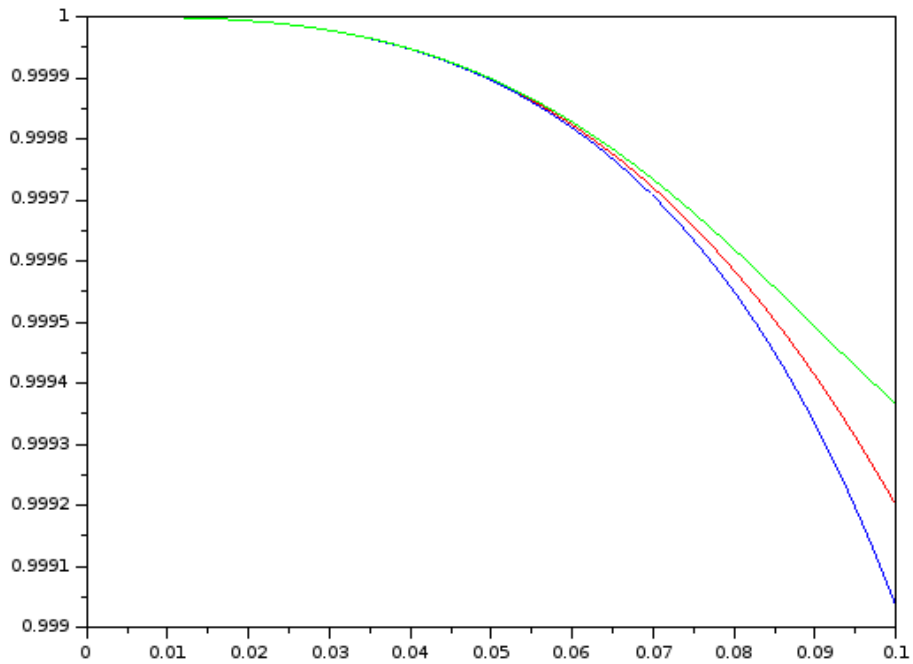


FIGURE 3.4: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t M_{a,b}}\|$  et leurs approximations en temps petit des erreurs  $(-\langle A \rangle^3 t^7$  et  $\langle A \rangle^3 t^7)$  avec  $b = 10$  de gauche à droite.

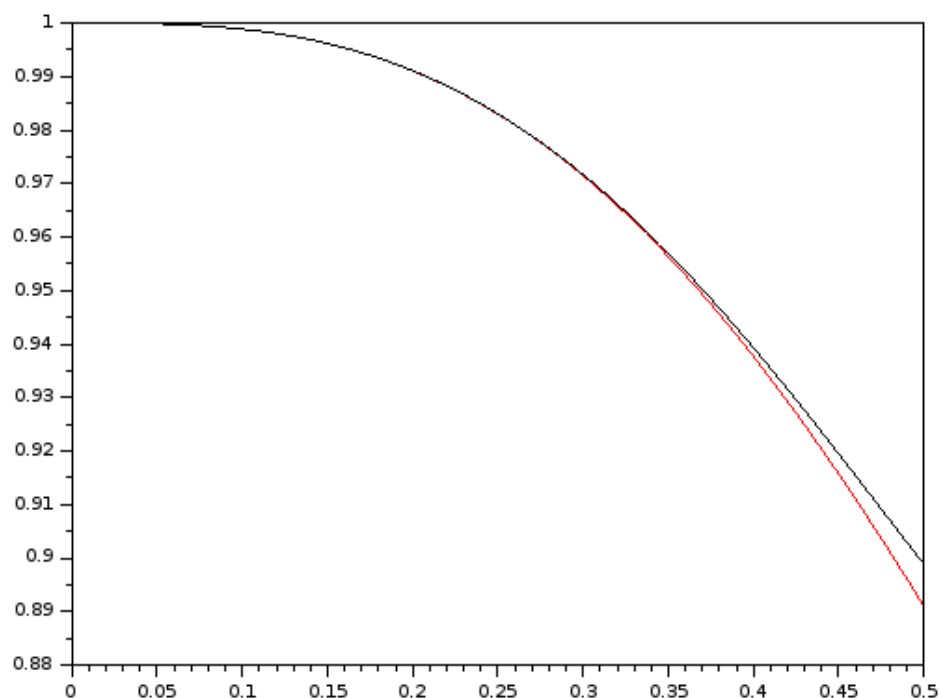


FIGURE 3.5: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t} M_{a,b}\|$  et son développement limité quand  $t \rightarrow 0$  à l'ordre 6 lorsque  $b = 2$ .

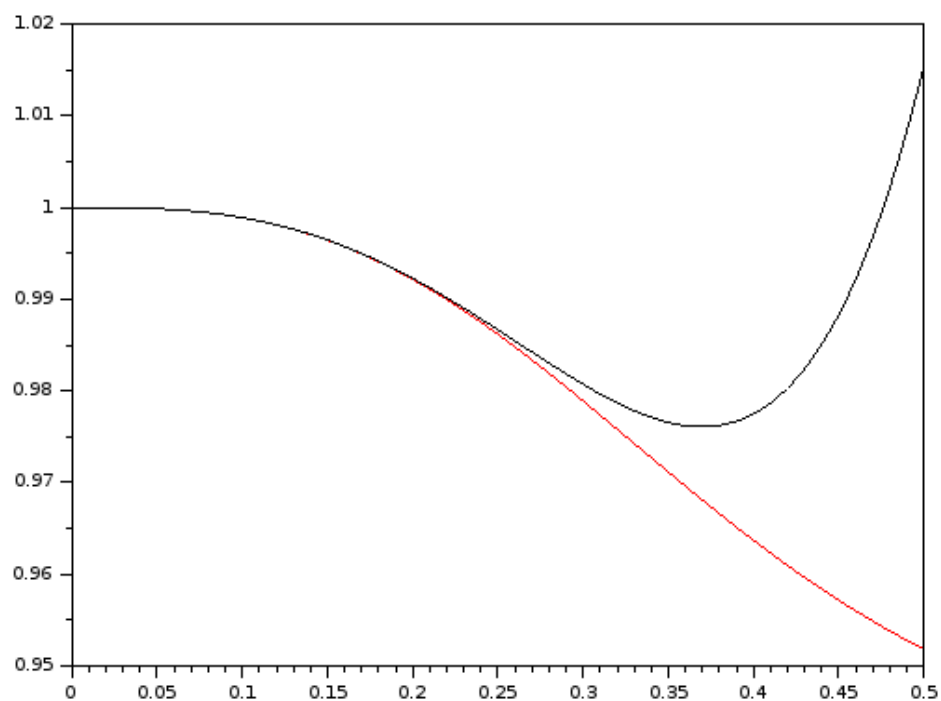


FIGURE 3.6: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t} M_{a,b}\|$  et son développement limité quand  $t \rightarrow 0$  à l'ordre 6 lorsque  $b = 10$ .

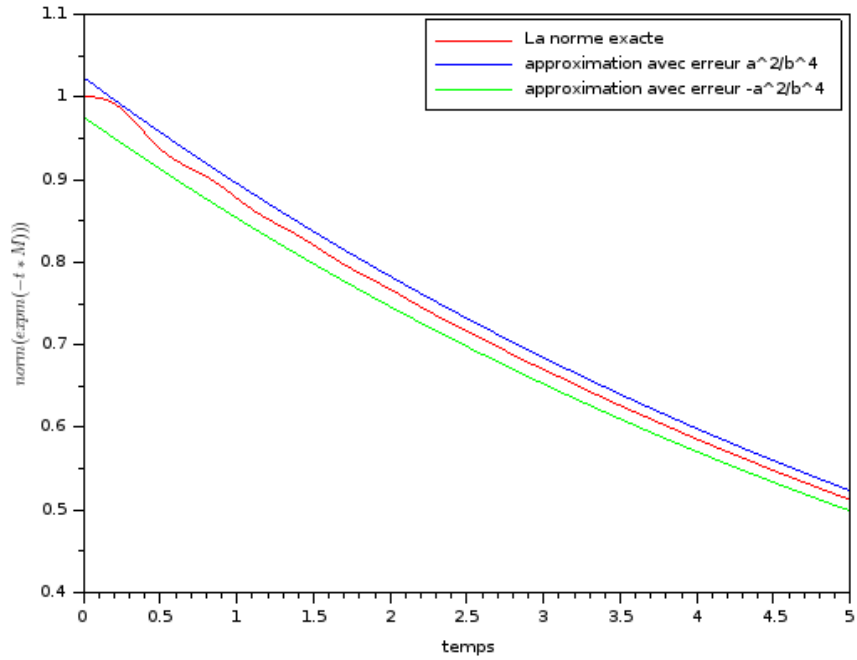


FIGURE 3.7: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t M_{a,b}}\|$  et ses approximations associés à la Proposition 3.1.5 quand  $b = 8$ .

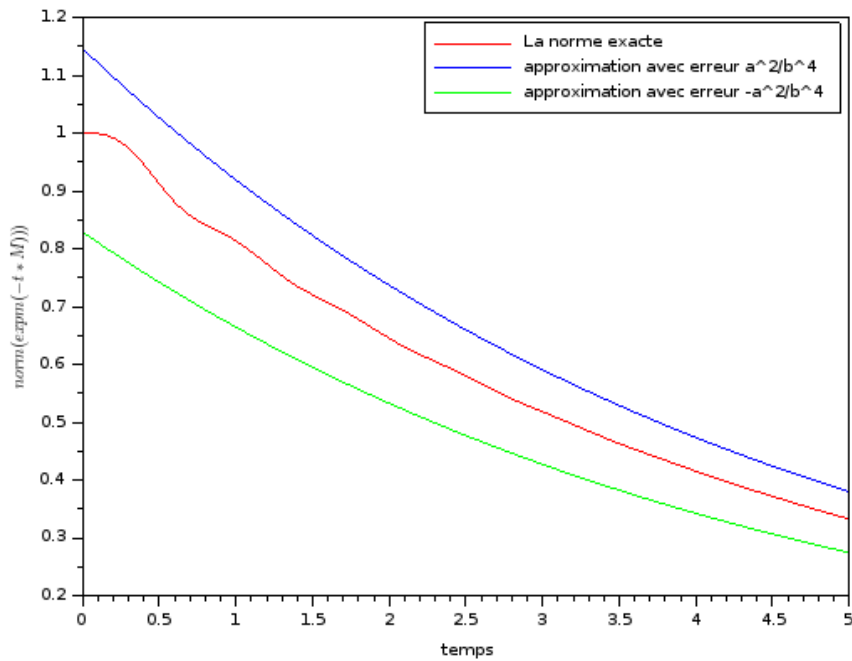


FIGURE 3.8: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $\|e^{-t M_{a,b}}\|$  et ses approximation associés à la Proposition 3.1.5 quand  $b = 5$ .

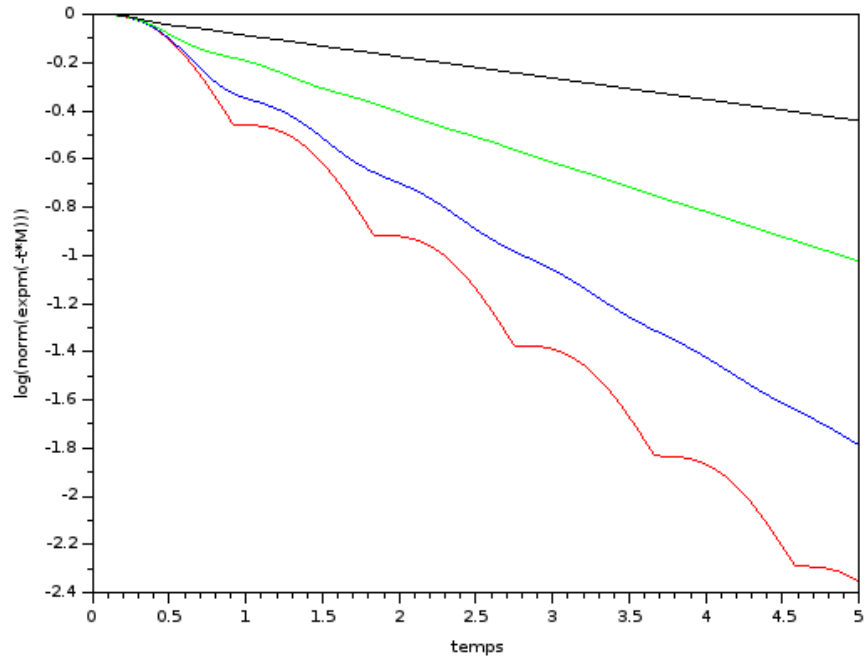


FIGURE 3.9: Comparaison entre le comportement de temps de  $\log(\|e^{-t M_{a,b}}\|)$  quand  $b = 0$  et quand  $b \neq 0$  de gauche à droite

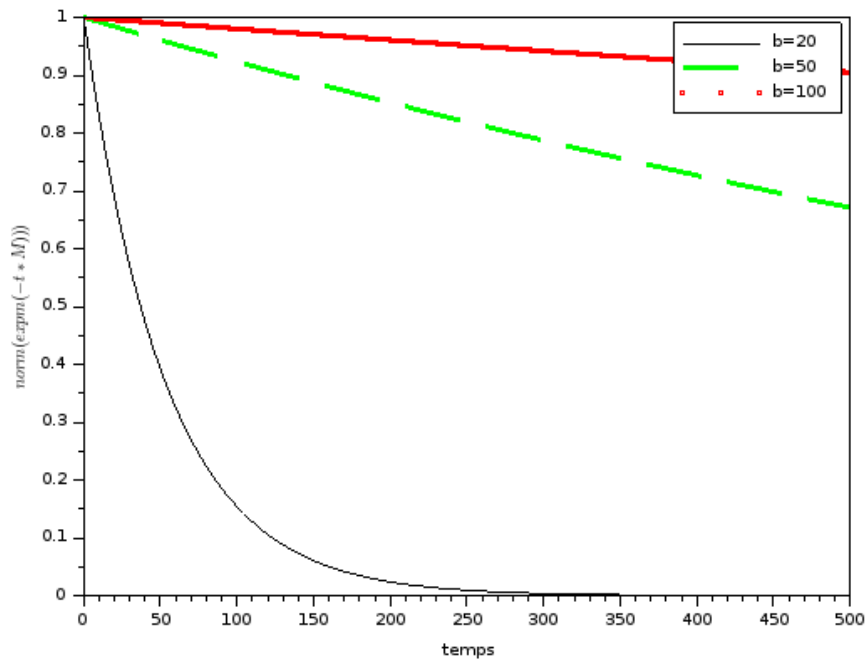


FIGURE 3.10: Comportement en temps  $t$  de  $\|e^{-t M_{a,b}}\|$  en plusieurs valeurs de  $b = 20, 50$  et  $100$ .

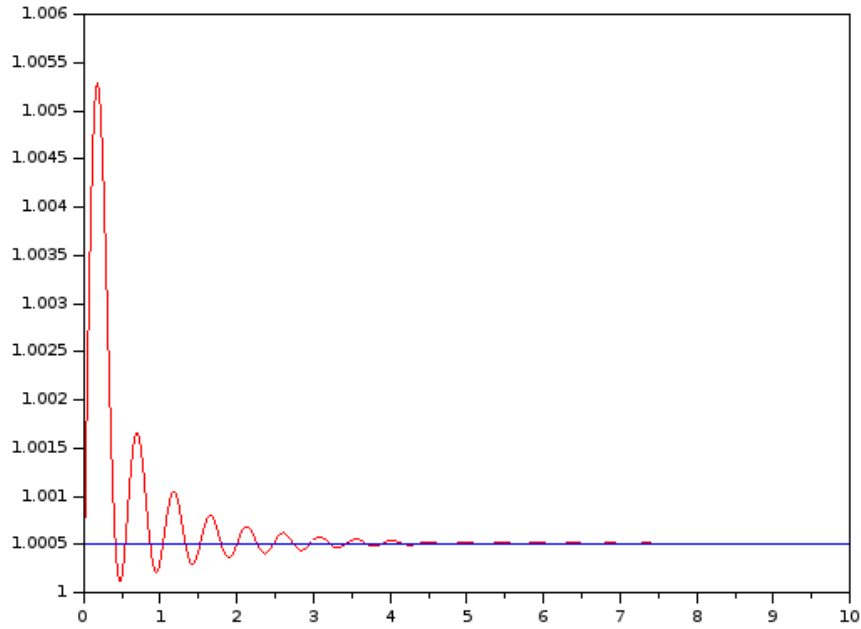


FIGURE 3.11: Comparaison entre le comportement en temps de la norme  $e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  et  $\sqrt{\frac{c_2^2 + 1}{c_1^2 + c_2^2}}$  lorsque  $a = 8$  et  $b = 12$ .

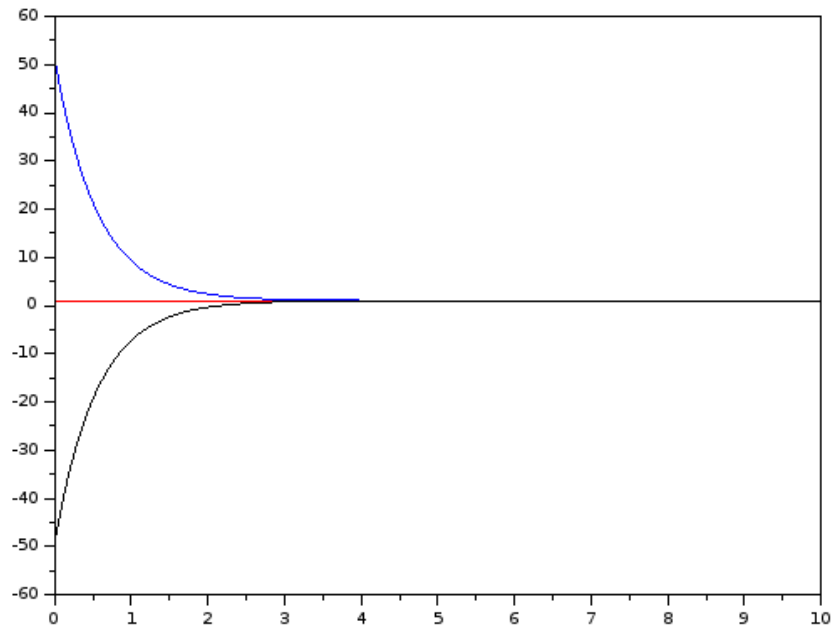


FIGURE 3.12: Comparaison entre le comportement en temps de la fonction  $e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  et ses approximations donnés dans la Proposition 3.1.6 avec  $a = 8$  et  $b = 12$  de gauche à droite lorsque  $C = 50$ .

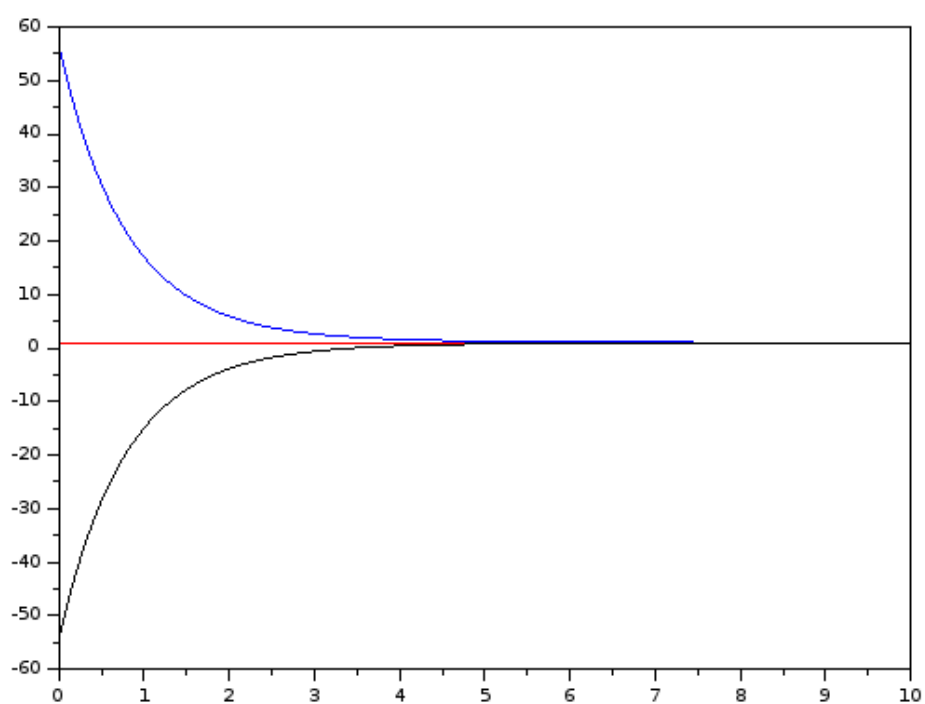


FIGURE 3.13: Comparaison entre le comportement en temps de la fonction  $e^{t\Re\lambda_1} \|e^{-tM_{a,b}}\|$  et ses approximations donnés dans la Proposition 3.1.6 avec  $a = 8$  et  $b = 5$  de gauche à droite lorsque  $C = 50$ .

# Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique extérieur

## Résumé

On considère l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur fort. On montre une estimation maximale sur cet opérateur en utilisant une approche nilpotente pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs et en incluant la notion de la représentation sur une algèbre de Lie. Cette estimation permet de donner une meilleure caractérisation du domaine de la fermeture de l'opérateur considéré.

## Abstract

We consider the Fokker-Planck operator with a strong external magnetic field. We show a maximal type estimate on this operator using a nilpotent approach on vector field polynomial operators and including the notion of representation of a Lie algebra. This estimate makes it possible to give an optimal characterization of the domain of the closure of the considered operator.

## 4.1 Introduction

### 4.1.1 Rappels sur l'équation de Fokker-Planck

L'équation de Fokker-Planck a été introduite par Fokker [23] et Planck [77], pour décrire le mouvement brownien des particules. Dans ces dernières années, les estimations hypoelliptiques maximales ont connu une renaissance en liaison avec des questions provenant de la théorie cinétique des gaz. Dans cette direction de nombreux auteurs ont démontré des estimations maximales pour en déduire la compacité de la résolvante de l'opérateur de Fokker-Planck et avoir des estimations sur la résolvante permettant d'aborder la question du retour à l'équilibre. F. Hérau et F. Nier dans l'article [39] ont mis en évidence les liens entre l'opérateur de Fokker-Planck avec un potentiel de confinement et l'opérateur de Laplacien de Witten associé. Puis, dans le livre de B. Helffer et F. Nier [73], ces travaux ont été complétés et expliqués de manière générale, et nous renvoyons plus spécifiquement au chapitre 9 pour une démonstration pédagogique de l'estimation maximale.

Dans ce chapitre, on va poursuivre l'étude du cas modèle de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e$ , commencée dans [59] et établir une estimation maximale sur ce modèle, donnant une caractérisation du domaine de son extension fermée.

### 4.1.2 Énoncé du résultat

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on se place sur le tore  $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$  et on considère  $K$  l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B_e : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(d-1)/2}$  tel que

$$K = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2,$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{T}^d$  représente la variable d'espace et  $t > 0$  est le temps. On souligne que dans la définition précédente de notre opérateur, on a utilisé la notation  $(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  qui s'écrit comme suivant

$$(v \wedge B_e) \cdot \nabla_v = \begin{cases} b(x) (v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 2 \\ \begin{aligned} &b_1(x)(v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}) + b_2(x)(v_3 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_3}) \\ &+ b_3(x)(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) \end{aligned} & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

On peut identifier les distributions  $T$  sur  $\mathbb{T}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$  avec les distributions qui sont  $\tilde{T}$   $\Gamma$ -périodiques sur  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$  où  $\Gamma = \mathbb{Z}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$ . Ce qui est noté plus haut  $\partial_x T$  est en fait la distribution sur  $\mathbb{T}^d$  telle que

$$\widetilde{\partial_x T} = \partial_x \tilde{T}.$$

Dans cette identification la norme de  $u$  dans  $L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est la norme de  $\tilde{u}$  sur un domaine fondamental, par exemple  $(-\pi, \pi)^d \times \mathbb{R}^d$ . De même, dans cette identification  $C^\infty(\mathbb{T}^d)$  s'identifie avec l'espace des fonctions  $C^\infty$   $\Gamma$ -périodiques. Quand cela ne prêterait pas à confusion nous omettrons par la suite les tildes.

On veut associé à  $K$  un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ . Pour cela, on considère  $K$  comme un opérateur non-borné sur  $H$ .

On note

- $\overline{K}$  (ou bien  $\overline{K}_{\min}$ ) l'extension minimale de  $K$  où  $D(\overline{K})$  est la fermeture de  $D(K)$  pour la norme du graphe dans  $H \times H$ .
- $\overline{K}_{\max}$  l'extension maximale de  $K$  dont le domaine  $D(\overline{K}_{\max})$  est donné par

$$D(\overline{K}_{\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / Ku \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

À partir de maintenant, on note  $\mathbf{K}$  l'opérateur  $\overline{K}$ .

L'existence d'un semi-groupe fortement continu associé à l'opérateur  $\mathbf{K}$  est montrée dans [59] lorsque le champ magnétique est régulier. Nous améliorons ce résultat, dans l'annexe A, en considérant une régularité beaucoup plus faible. Pour obtenir l'accrétivité maximale, nous sommes conduits à substituer l'argument d'hypoellipticité par un argument de régularité pour les opérateurs ayant des coefficients dans  $L^\infty$ , qui sera combiné avec des résultats plus classiques de Rothschild-Stein dans [81] pour les opérateurs de type 2 de Hörmander (voir [53] pour plus de détails sur ce sujet).

**Théorème 4.1.1.** *Si  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ , alors  $\mathbf{K}$  est maximal accrétif.*

*Démonstration.* Voir l'annexe A pour la preuve détaillée de ce résultat. □

Ceci implique que le domaine de l'opérateur  $\mathbf{K}$  a la propriété suivante

$$D(\mathbf{K}) = D(\overline{K}_{\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / Ku \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}. \quad (4.1)$$

Il est aussi démontré dans [59] que :

**Théorème 4.1.2.** *Supposons que  $B_e$  est dans l'espace  $W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$ , défini par*

$$W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d) := \{u \in L^\infty(\mathbb{T}^d), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq 2, \quad D^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{T}^d)\},$$

*et muni de sa norme naturelle d'espace de Banach.*

*Si  $f_0 \in D(\mathbf{K})$ , alors le problème*

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{K}f = 0 \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), \end{cases} \quad (4.2)$$

*admet une unique solution  $f \in C^1([0, +\infty[, L^2(dx dv)) \cap C([0, +\infty[, D(\mathbf{K}))$ .*

On a enfin montré dans [59] la convergence exponentielle vers l'équilibre  $\mu^{1/2}$  en norme  $L^2(dx dv)$ , avec  $\mu$  est donnée par

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-v^2/2},$$

**Théorème 4.1.3.** *Si  $B_e \in W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$ , alors il existe  $\kappa > 0$  et  $c > 0$  telles que, pour tout  $f_0 \in L^2(dx dv)$  orthogonale à  $\mu^{1/2}$  on ait*

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{-t\mathbf{K}} f_0\|_{L^2(dx dv)} \leq c e^{-\kappa t} \|f_0\|_{L^2(dx dv)}.$$

Dans ce travail, on s'intéresse à préciser le domaine de l'opérateur  $\mathbf{K}$  introduit en (4.1). Pour cela on va obtenir des estimations maximales pour  $\mathbf{K}$ , en utilisant une approche nilpotente, c'est à dire des techniques développées initialement pour l'étude de l'hypoellipticité des opérateurs invariants sur des groupes nilpotents. Avant d'énoncer notre résultat principal, on va rappeler quelques notions utiles dans la suite.

**Définition 4.1.4.** *On dit que  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  si  $\tilde{\varphi}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $\Gamma$ -périodique et si, pour tous  $\beta, \gamma$  et  $\delta \in \mathbb{N}^d$ ,  $v^\gamma \partial_x^\beta \partial_v^\delta \tilde{\varphi}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .*

L'espace vectoriel  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est une variante de l'espace de Schwartz. On note que l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  est dense dans l'espace  $L^q(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  pour tout  $q \in [1, \infty[$ .

**Définition 4.1.5.** *On note  $B^2(\mathbb{R}^d)$  (ou  $B_v^2$  pour indiquer le nom des variables)*

$$B^2(\mathbb{R}^d) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d}, |\alpha| + |\beta| \leq 2, v^\alpha \partial_v^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

*l'espace de Hilbert muni de sa norme hilbertienne naturelle*

$$\|u\|_{B^2} := \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}.$$

**Définition 4.1.6.** *Soit  $u$  une fonction de  $\mathbb{T}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $u$  est lipschitzienne s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $u$  soit  $k$ -lipschitzienne, i.e si  $u$  vérifie*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{T}^{2d}, \quad |u(x) - u(y)| \leq k d(x, y),$$

*où  $d$  est la distance sur le tore  $\mathbb{T}^d$  définie par :*

$$d(x, y) = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |x - y + \alpha|.$$

*On note  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ , l'espace des fonctions Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d(d-1)/2}$ . On munit l'espace  $\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$  de la norme suivante*

$$\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d) \ni u \mapsto \|u\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} + \sup_{x, y \in \mathbb{T}^d, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)}.$$

On note  $\tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , le sous espace  $L_x^2(\mathbb{T}^d, B_v^2(\mathbb{R}^d))$  muni de sa norme hilbertienne naturelle :

$$\tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) \ni u \longrightarrow \|u\|_{\tilde{B}^2} = \sqrt{\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|_{L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)}^2}.$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme  $L^2$  et la notation  $\hat{\otimes}$  est la loi définie entre deux espaces de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  comme suit

$$f \in X \hat{\otimes} Y \iff \|f\|_Y \in X.$$

Notons que l'espace  $L_x^2(\mathbb{T}^d)$  peut s'identifier à l'espace suivant :

$$L_{\text{per}}^2(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) / u \text{ est } \mathbb{Z}^d - \text{périodique}\}.$$

Dans cette identification, l'espace  $\tilde{B}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  s'identifie à l'espace  $L_{\text{per}}^2(\mathbb{R}^d) \hat{\otimes} B_v^2$ .

On peut maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre :

**Théorème 4.1.7.** *Soit  $d = 2$  ou  $3$ . On suppose que  $B_e \in \text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)$ . Alors pour tout  $C_1 > 0$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $B_e$  avec  $\|B_e\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1$ , et pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$ , l'opérateur  $K$  vérifie l'estimation maximale suivante :*

$$\|(v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v)u\| + \|u\|_{\tilde{B}^2} \leq C(\|Ku\| + \|u\|). \quad (4.3)$$

Compte-tenu de la densité de l'espace de Schwartz dans le domaine de  $\mathbf{K}$ , nous obtenons la caractérisation du domaine de  $\mathbf{K}$  :

**Corollaire 4.1.8.**

$$D(\mathbf{K}) := \{u \in \tilde{B}^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d) / (v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v) u \in L^2(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)\}.$$

**Organisation du chapitre :** Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section suivante, on fera des rappels sur la notion d'hypoellipticité maximale, et plus spécifiquement, on donnera quelques résultats d'hypoellipticité maximale (plus exactement les inégalités maximales qui l'impliquent) pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs dans l'approche nilpotente. Ensuite, dans les deux dernières sections, on montrera comment ces techniques permettent la démonstration du théorème principal 4.1.7, en distinguant entre le cas  $d = 2$  et le cas  $d = 3$  respectivement.

## 4.2 Rappels sur l'hypoellipticité maximale dans l'approche nilpotente

Cette partie a pour but de faire quelques rappels sur les algèbres de Lie nilpotentes graduées et sur les résultats d'hypoellipticité pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs.

### 4.2.1 Hypoellipticité pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs

On commence par rappeler la définition de base de l'hypoellipticité introduite par L. Schwartz.

**Définition 4.2.1.** *Un opérateur différentiel avec des coefficients  $C^\infty$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est hypoelliptique dans  $\Omega$ , si, pour tout  $\omega \subset \Omega$  et pour tout  $u \in D'(\Omega)$ , tel que  $Pu \in C^\infty(\omega)$ , alors  $u \in C^\infty(\omega)$ .*

On s'intéresse maintenant aux opérateurs polynômes de champs de vecteurs. On considère des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  et  $Y_1, \dots, Y_q$  réels,  $C^\infty$ , sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Soit  $P(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{p+q})$  un polynôme non commutatif de degré  $m$  à  $p + q$  variables, à coefficients  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , et soit  $\mathcal{P}$  l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{P} = P(z, Z_1, \dots, Z_{p+q}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z) Z^\alpha, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p+q\}^k, \quad (4.4)$$

où les champs de vecteurs  $Z_\ell \forall \ell \in \{1, \dots, p+q\}$  sont définis par

$$\begin{aligned} Z_\ell &= X_\ell, \quad \forall \ell = 1, \dots, p \\ Z_\ell &= Y_{\ell-p}, \quad \forall \ell = p+1, \dots, p+q, \end{aligned}$$

avec, pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, p+q\}^k$ ,

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^k d(\alpha_j) \text{ avec } d(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j \in \{1, \dots, p\} \\ 2 & \text{si } \alpha_j \in \{p+1, \dots, p+q\}. \end{cases}$$

On suppose de plus que les champs  $Z_j$  avec  $j \in \{1, \dots, p+q\}$  vérifient la condition de Hörmander suivante :

**(Ho)** Il existe un entier  $r$  tel que les crochets des champs  $Z_j$  de longueur inférieure ou égale à  $r$  engendrent, en chaque point  $z$  de  $\Omega$ ,  $T_z\Omega$  tout entier.

Autrement dit, si  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et si on note :

$$Z_I = [Z_{i_k}, [Z_{i_{k-1}}, \dots, [Z_{i_2}, Z_{i_1}] \dots]], \quad (4.5)$$

et si on désigne par  $Z_I(z, \zeta)$  le symbole de  $Z_I$  en  $(z, \zeta)$ , on peut réécrire la condition **(Ho)** sous la forme suivante

$$\begin{cases} \text{Le système des } Z_I \text{ avec } |I| \leq r \text{ est elliptique en } z_0 \text{ c'est-à-dire} \\ \sum_{|I| \leq r} |Z_I(z, \zeta)| \neq 0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Ceci conduit à une version microlocale de la condition de Hörmander (voir [9]).

Lorsque  $q = 0$  et que les champs de vecteur  $Z_j$  satisfont la condition de Hörmander (Ho), l'opérateur  $\mathcal{P}$  est appelé un opérateur différentiel de type 1. Ainsi, l'opérateur de Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2$  (cas  $q = 0$ ) est appelé “**opérateur de Hörmander de type-1**”. Lorsque  $q = 1$  et que les champs de vecteur  $Z_j$  satisfont la condition de Hörmander (Ho), l'opérateur  $\mathcal{P}$  est appelé un opérateur différentiel de type-2. L'opérateur également étudié par Hörmander  $\sum_{j=1}^p X_j^2 + Y_1$  (cas  $q = 1$ ) est appelé “**opérateur de Hörmander de type-2**”.

On pose la définition suivante :

**Définition 4.2.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  (avec de plus  $m$  pair si on est dans le cas de type 2). On dit que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal en un point  $z$  de  $\Omega$ , s'il existe un voisinage  $\omega$  de  $z$ , et une constante  $C$  strictement positive telle que l'on ait :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 \leq C[\|\mathcal{P}u\|_{L^2(\omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\omega)}^2], \quad \forall u \in C_0^\infty(\omega), \quad (4.6)$$

où on désigne par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}$  la norme dont le carré est défini par :

$$u \rightarrow \|u\|_{\mathcal{H}^m(\omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|Z_{\alpha_1} \dots Z_{\alpha_k} u\|_{L^2(\omega)}^2, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, p\}^m.$$

Il a été démontré par Helffer-Nourrigat dans [29], que si la condition de Hörmander est vérifiée en  $z$ , alors l'hypoellipticité maximale en  $z$  implique que  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique dans un voisinage de  $z$ , ce qui justifie la terminologie.

Il a aussi été démontré par Rothschild-Stein dans [82], si l'opérateur homogène associé à  $\mathcal{P}$ , i.e  $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z) Z^\alpha$  est hypoelliptique en un point  $z_0$ , au sens introduit par L. Schwartz, alors  $\mathcal{P}$  est hypoelliptique maximal dans un voisinage de  $z_0$ .

## 4.2.2 Algèbres de Lie nilpotentes et graduées

**Définition 4.2.3.** Une algèbre de Lie réelle est un espace vectoriel  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{R}$  muni d'une application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y], \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall X, Y \in \mathcal{G}, [X, Y] = -[Y, X]$  (bilinéaire alternée),
2.  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}, [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ , (Identité de Jacobi).

**Définition 4.2.4.** Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$  et considérons la suite décroissante d'idéaux de  $\mathcal{G}$  définie par

$$C^1(\mathcal{G}) := \mathcal{G} \text{ et } C^m(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, C^{m-1}(\mathcal{G})], \quad \forall m > 1,$$

telle que

$$C^n(\mathcal{G}) = \text{Vect}([X_n, [X_{n-1}, \dots, [X_2, X_1] \dots]]) \text{ avec } X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{G}.$$

On dit que  $\mathcal{G}$  est nilpotente, s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $C^{n_0}(\mathcal{G}) = 0$ .

Par récurrence, on peut vérifier que  $[C^r(\mathcal{G}), C^s(\mathcal{G})] \subset C^{r+s}(\mathcal{G})$ ,  $\forall r, s \in \mathbb{N}$ .

**Définition 4.2.5.** On dit que  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang  $r$ , si elle admet une décomposition de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r, \\ [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] &\subset \mathcal{G}_{i+j} \quad \text{si } i+j \leq r \quad \text{et} \quad [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] = 0 \quad \text{si } i+j > r. \end{aligned}$$

**Définition 4.2.6.** Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r$ , une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang  $r$ ,

1. On dit qu'elle est stratifiée de type 1 (ou simplement stratifiée), si elle est engendrée par  $\mathcal{G}_1$ .
2. On dit qu'elle est stratifiée de type 2, si elle est engendrée par  $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ .

### 4.2.3 Théorie des représentations

Dans cette partie, on va expliquer très brièvement quelques résultats de la théorie de Kirillov dans le cas nilpotent (cf [62] pour plus de détails). Tout d'abord, on va commencer par quelques rappels sur la théorie des représentations d'un groupe nilpotent  $G$ .

#### Représentations sur un groupe $G$

Soit  $G$  un groupe de Lie, et  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Une représentation complexe  $(\pi, V)$  du groupe  $G$  est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \pi : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \pi(g, v), \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\pi(e, v) = v$ ,  $\forall v \in V$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$  pour la loi de multiplication.
2.  $\pi(g, \pi(h, v)) = \pi(gh, v)$ ,  $\forall h, g \in G$ ,  $\forall v \in V$ .

L'espace  $V$  (ou  $V_\pi$  si on veut rappeler la référence à  $\pi$ ) est appelé espace de représentation de  $G$ . Si  $V$  est de dimension finie, sa dimension est notée  $d_\pi = \dim V$ . Dans le cas contraire, on pose  $d_\pi = +\infty$ .

Si de plus  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ , la représentation  $(\pi, V)$  est dite unitaire si  $\pi$  vérifie la propriété suivante :

$$\langle \pi(g, v), \pi(g, w) \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \quad \forall g \in G, \forall v, w \in V.$$

On utilisera aussi la notation  $\pi(g)$  où

$$\pi(g)v = \pi(g, v).$$

Ensuite, on introduit la notion de sous-représentation qui nous servira à introduire la notion de représentation irréductible de  $G$ .

**Définition 4.2.7.** Si  $(\pi, V)$  une représentation de  $G$ , et  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , on dit que  $W$  est invariant par  $\pi$ , si

$$\forall g \in G, \forall w \in W, \pi(g, w) \in W.$$

Dans ce cas, on note  $\pi_W$  l'application ainsi définie par restriction à  $W \times G$  et on dit que  $(\pi_W, W)$  est une sous-représentation de  $(\pi, V)$ .

**Définition 4.2.8.** On dit qu'une représentation  $\pi$  de  $G$  est irréductible si :

1. Elle est non nulle.
2. Elle n'admet aucun sous-espace autre que  $\{0\}$  et  $V$  invariant par  $\pi$ .

On introduit maintenant la notion d'équivalence entre deux représentations sur le groupe  $G$ .

**Définition 4.2.9.** Soient  $(\pi, V)$  et  $(\tau, W)$  deux représentations du groupe  $G$ .

1. Un opérateur d'entrelacement est une application  $T : V \longrightarrow W$  linéaire de  $V$  dans  $W$  vérifiant

$$T(\pi(g, v)) = \tau(g, T(v)), \quad \forall g \in G, \forall v \in V.$$

2. Les deux représentations  $(\pi, V)$  et  $(\tau, W)$  sont équivalentes s'il existe un opérateur d'entrelacement  $T : V \longrightarrow W$  inversible.

Enfin, on donne la définition d'une représentation unitaire.

**Définition 4.2.10.** Soit  $(\pi, V)$  une représentation d'un groupe  $G$ . On dit que  $(\pi, V)$  est une représentation unitaire si  $V$  est un espace de Hilbert (réel ou plus souvent complexe), et si pour tout élément de  $g \in G$ ,  $V \ni v \mapsto \pi(g, v) \in V$  est un opérateur unitaire sur  $V$ .

### Représentations unitaires induites sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$

Parmi les représentations, les représentations unitaires irréductibles jouent un rôle crucial. La théorie de Kirillov permet d'associer à tout élément du dual  $\mathcal{G}^*$  de  $\mathcal{G}$  une représentation irréductible.

De plus, cette théorie dit que toute représentation unitaire irréductible peut être représentée de cette manière.

Pour être plus précis, on donne une définition de la représentation induite. Le point de

départ est une sous-algèbre  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  et une forme linéaire  $\ell$  sur  $\mathcal{G}$  telle que  $\ell([\mathcal{H}, \mathcal{H}]) = 0$ . On va alors associer une représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  du groupe de  $G$  dans  $V_\pi := L^2(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  qui est défini de façon unique modulo une conjugaison unitaire, où  $k(\pi)$  est la codimension de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ . Pour cette construction et en utilisant le caractère nilpotent, on peut trouver  $k = k(\pi)$  vecteurs indépendants  $e_1, \dots, e_k$  tels que tout  $g$  peut être écrit sous la forme

$$g = h \exp(s_k e_k) \dots \exp(s_1 e_1), \quad (4.7)$$

et tels que, si

$$\mathcal{A}_j = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_{k-j+1},$$

alors  $\mathcal{A}_{j-1}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathcal{A}_j$ .

Avec cette construction, on peut obtenir que  $g \mapsto (s, h)$  est un difféomorphisme global de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbb{R}^k \times \mathcal{H}$ . La représentation induite est donnée par

$$(\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\exp a)f)(t) = \exp i \langle \ell, h(t, a) \rangle f(\sigma(t, a)),$$

où  $h(t, a)$  et  $\sigma(t, a)$  sont définis par la formule suivante

$$\exp t_k e_k \dots \exp t_1 e_1 \exp a = \exp(h(t, a)) \exp \sigma_k(t, a) e_k \dots \exp \sigma_1(t, a) e_1.$$

On note aussi  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  la représentation de l'algèbre de Lie associée définie par

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(a)u = \frac{d}{ds} (\pi_{\ell, \mathcal{H}}(e^{sa})u)_{|s=0}, \quad (4.8)$$

où la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  peut-être définie sur l'ensemble des  $u \in V_\pi$  tels que l'application  $s \rightarrow \pi_{\ell, \mathcal{H}}(e^{sa})u$  est de classe  $C^1$ . On va en fait surtout travailler sur l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ .

Plus explicitement, on a

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(a) = i \langle \ell, h'(t, a) \rangle + \sum_{j=1}^k \sigma'_j(t, a) \partial_{t_j},$$

où  $h'$  et  $\sigma'$  désignent

$$\begin{aligned} h'(t, a) &:= \frac{d}{ds} (h(t, sa))_{|s=0}, \\ \sigma'(t, a) &:= \frac{d}{ds} (\sigma(t, sa))_{|s=0}. \end{aligned}$$

De plus,  $\sigma$  a la structure suivante :

$$\sigma_j(t_j, \dots, t_1, a) = t_j + \psi_j(t_{j-1}, \dots, t_1, a), \quad (4.9)$$

où les  $\psi_j$  sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^k$ , ne dépendant que des variables indiquées, à coefficients réels.

On sait par la théorie de Kirillov que, dans le cas nilpotent, les représentations irréductibles sont associées à des éléments de  $\mathcal{G}^*$  et que, quand  $\pi$  est irréductible, l'espace de représentation  $V_\pi$  s'identifie à  $L^2(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  où  $k(\pi)$  est un entier avec  $L^2(\mathbb{R}^0) = \mathbb{C}$  par convention si  $k(\pi) = 0$ . On note  $\hat{G}$  l'ensemble de représentations irréductibles du groupe, simplement connexe  $G := \exp \mathcal{G}$  associé à  $\mathcal{G}$ . Il est aussi important de noter que dans le cas d'une représentation irréductible,  $\mathcal{S}_\pi$  s'identifie à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ .

Revenant aux représentations induites  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ , deux cas particuliers vont nous intéresser. Quand  $\ell = 0$ , on obtient l'extension standard de la représentation triviale du sous-groupe  $H$  de  $G$ . On peut considérer cela comme une représentation sur  $L^2(G/H)$ . Un problème intéressant (qui est résolu dans [34]) est de caractériser l'hypoellipticité maximale de  $\pi_{0, \mathcal{H}}(P)$  pour  $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ .

Le second cas est pour une forme  $\ell \in \mathcal{G}^*$  donnée et lorsque  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  est de dimension maximale, avec la propriété  $\ell([\pi, \pi]) = 0$ . Dans ce cas, on peut montrer que la représentation est irréductible. De plus on peut ainsi construire toutes les représentations irréductibles (à équivalence unitaire près). Partant cette fois d'un élément  $\ell \in \mathcal{G}^*$ , on peut construire une sous-algèbre maximale  $V_\ell$  telle que  $\ell([V_\ell, V_\ell]) = 0$ . On peut aussi montrer que la codimension  $k(\ell)$  de  $V_\ell$  est égale à  $\frac{1}{2} \text{rang } B_\ell$ , où  $B_\ell$  est la 2-forme suivante :

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \ell([X, Y]).$$

Pour  $a \in \mathcal{G}$ , on définit par  $(\text{ad } a)^*$  l'adjoint de  $\text{ad } a$  qui est un endomorphisme de  $\mathcal{G}^*$  défini par

$$(\text{ad } a)^* \ell(b) := \ell([a, b]).$$

Le groupe  $G$  agit alors naturellement sur  $\mathcal{G}^*$  par :

$$g \mapsto g\ell = \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^k}{k!} (\text{ada})^{*k} \ell,$$

avec  $g = \exp(a)$ .

Cette action est appelée action coadjointe. La théorie de Kirillov nous dit que si  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$  sont sur la même orbite pour l'action coadjointe, alors les représentations correspondantes sont unitairement équivalentes. Inversement, deux orbites différentes donnent deux représentations irréductibles non équivalentes. On peut ainsi identifier l'ensemble  $\hat{G}$  des représentations unitaires de  $G$  avec l'ensemble des  $G$ -orbites dans  $\mathcal{G}^*$  :

$$\hat{G} = \mathcal{G}^*/G.$$

Dans la démonstration du théorème principal, nous rencontrons des représentations  $\pi$  d'une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$  ( $k \geq 1$ ) qui ont la forme suivante. Pour tout  $X \in \mathcal{G}$ ,  $\pi(X)$  est un opérateur différentiel de la forme suivante :

$$\pi(X) = P_1(X) \frac{\partial}{\partial y_1} + P_2(y_1; X) \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + P_k(y_1, \dots, y_{k-1}; X) \frac{\partial}{\partial y_k} + i Q(y_1, \dots, y_k; X), \quad (4.10)$$

où les  $P_j(y; X)$  et  $Q(y; X)$  sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^k$ , ne dépendant que des variables indiquées, à coefficients réels, dépendant linéairement de  $X \in \mathcal{G}$ . On suppose que les formes linéaires  $X \rightarrow P_j(0; X)$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sont linéairement indépendantes dans  $\mathcal{G}^*$ .

On notera que les représentations induites ont toujours cette forme. Il s'agit donc de se poser la question inverse :

La représentation introduite plus haut est-elle en fait une représentation induite ?

La réponse positive est donnée par Helffer-Nourrigat dans [34]. La forme linéaire  $\ell$  est définie en posant, pour tout  $X \in \mathcal{G}$

$$\langle \ell, X \rangle = Q(0; X), \quad (4.11)$$

et  $\mathcal{H}$  est le sous-espace des  $X \in \mathcal{G}$  tels que  $P_j(0; X) = 0$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Les auteurs démontrent la proposition suivante :

**Proposition 4.2.11.** *Sous les hypothèses ci-dessus :*

i) *Le sous-espace  $\mathcal{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{G}$ , et l'on a*

$$\langle \ell, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}. \quad (4.12)$$

ii) *La représentation  $\pi$  est unitairement équivalente à  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ . La transformation qui réalise l'équivalence est un isomorphisme de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ .*

**Remarque 4.2.12.** *Dans la suite, on utilisera la proposition précédente pour passer des estimations maximales pour  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}(P)$  aux estimations maximales pour  $\pi(P)$ . Ce passage est justifié via la forme explicite de la transformation  $T$ , qui va réaliser l'équivalence*

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\exp X) T f = T \pi(\exp X) f, \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{G} \text{ et } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k),$$

où

- *$T$  est définie par :*

$$T f(t) = \pi(\exp Y(t)) f|_{Y=0} = e^{i\varphi(0, Y(t))} f(\theta(t)), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$$

- *$\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_k(t))$  est une application sur  $\mathbb{R}^k$  définie comme suit :*

$$\theta_1(t) = t_1$$

$$\theta_j(t) = t_j + H_j(t_1, \dots, t_{j-1}), \quad \forall j = 2, \dots, k,$$

- *les  $H_j$  sont des polynômes.*

Par conséquent  $\theta$  est un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^k$ , dont le jacobien vaut 1. On passe ainsi sans problème d'une inégalité maximale à l'autre par un changement de variable qui conserve la mesure de Lebesgue.

On va finir cette partie en démontrant une propriété spécifique qui sera utilisée dans la suite.

**Proposition 4.2.13.** *Soit  $\pi$  une représentation définie par (4.10), alors pour tout  $X \in \mathcal{G}$  l'opérateur  $\pi(X)$  est formellement anti-adjoint pour le produit scalaire usuel défini sur l'espace  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , i.e.*

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), \quad \langle \pi(X) u, v \rangle = -\langle u, \pi(X) v \rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $u$  et  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ . Pour  $X \in \mathcal{G}$ , on a

$$\langle \pi(X) u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^k} \pi(X) u(y) \overline{v(y)} dy,$$

en effectuant des intégrations par parties en fonction de  $y_j$  avec  $j = 1, \dots, k$  et en utilisant le fait que  $P_j(y; X)$  sont des polynômes à coefficients réels et qui ne dépendent que de  $y_1, \dots, y_{j-1}$  pour tout  $j = 1, \dots, k$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \langle \pi(X) u, v \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^k} u(y) \overline{P_j(y_1, \dots, y_{j-1}; X) \frac{\partial v}{\partial y_j}(y)} dy + \int_{\mathbb{R}^k} u(y) \overline{(-i Q(y_1, \dots, y_k; X) v(y))} dy, \end{aligned}$$

puisque  $Q(y; X)$  aussi est un polynôme à coefficients réels. Puis en réutilisant la définition (4.10) de la représentation  $\pi(X)$ , on obtient

$$\langle \pi(X) u, v \rangle = -\langle u, \pi(X) v \rangle,$$

ce qui implique le résultat.  $\square$

**Remarque 4.2.14.** *La proposition 4.2.13 est en particulier vraie pour toute représentation induite  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$ . Comme remarqué plus haut, les représentations induites vérifient en effet (4.10).*

#### 4.2.4 Caractérisation de l'hypoellipticité dans le cas des opérateurs invariants homogènes sur les groupes stratifiés

Cette partie a pour but de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur polynôme de champs de vecteurs soit hypoelliptique maximal.

**Définition 4.2.15.** *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie réelle. On définit l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  comme étant l'algèbre non commutative des expressions polynomiales de la forme suivante :*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha Y^\alpha, \tag{4.13}$$

où  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  et  $Y_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, p_j$  et  $j = 1, 2$ ) désigne une base de  $\mathcal{G}_j$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  est un  $k$ -uplet de couples  $(i, j)$  avec  $i \in \{1, \dots, p_j\}$ , et où l'on pose :

$$Y^\alpha = Y_{\alpha_1} \dots Y_{\alpha_k} \text{ avec } |\alpha| = \sum_{l=1}^k j(\alpha_l).$$

Lorsque dans (4.13), on ne considère que des termes avec  $|\alpha| = m$ , l'ensemble des expressions polynomiales de cette forme est désigné par  $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ .

Il est noté dans [34, Chapter 2] que la représentation  $\pi_{\ell, \mathcal{H}}$  de l'algèbre  $\mathcal{G}$  s'étend naturellement à une représentation de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ . Pour tout  $t > 0$ , on définit un automorphisme  $\delta_t$  de  $\mathcal{G}$  par la condition :

$$\delta_t(a) = t^j a \quad \text{si } a \in \mathcal{G}_j.$$

On peut naturellement étendre la définition de  $\delta_t$  (appelée famille de dilatation) à l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  en posant :

$$\delta_t(P) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (\delta_t Y)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha t^{|\alpha|} Y^\alpha \text{ pour } t > 0.$$

On note que :

$$\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G}) \iff \delta_t(\mathcal{P}) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha (\delta_t Y)^\alpha = t^m \mathcal{P}, \quad \forall t > 0.$$

À tout élément  $Y$  de  $\mathcal{G}$ , on peut associer un champ de vecteur  $\lambda(Y)$  sur le groupe  $G$ , invariant à gauche défini par :

$$(\lambda(Y) f)(u) = \frac{d}{dt} f(u \cdot \exp(tY))|_{t=0}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^k), \forall u \in G$$

Cette correspondance permet aussi d'identifier l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  avec l'algèbre de tous les polynômes de champs de vecteurs invariants à gauche. À  $P \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ , défini dans (4.13), on peut en effet associer :

$$\lambda(P) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \lambda(Y)^\alpha.$$

Rappelons le théorème conjecturé par C. Rockland dans [80], démontré dans le cas du groupe de Heisenberg par lui, puis dans le cas général par R. Beals [6] pour la condition nécessaire et par B. Helffer et J. Nourrigat dans [34] pour la condition suffisante. A noter que le cas du rang 3, qui finalement est le seul qui nous sera utile ici fut traité antérieurement dans [29].

**Théorème 4.2.16** (Théorème 0.1 dans [30]). *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie graduée et soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4.4) est hypoelliptique dans  $G$  (le groupe associé à l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ).*
2. *Pour toute représentation  $\pi$  dans  $\hat{G}$  non triviale, l'opérateur  $\pi(\mathcal{P})$  est injectif dans  $\mathcal{S}_\pi$  (où  $\mathcal{S}_\pi$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).*

Combiné avec un résultat de Rothschild-Stein [82] dans le cas particulier où l'ordre  $m$  de l'opérateur  $\mathcal{P}$  est pair et l'algèbre de Lie est stratifiée de type 1 ou de type 2, le théorème de Helffer-Nourrigat prend la forme suivante.

**Théorème 4.2.17.** *Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie graduée et stratifiée de type 1 ou de type 2 et soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  avec  $m$  est pair (juste dans le cas de type-2), alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4.4) est hypoelliptique dans  $G$ .*
2. *L'opérateur  $\mathcal{P}$  défini dans (4.4) est hypoelliptique maximal dans  $G$ .*
3. *Pour toute représentation  $\pi$  dans  $\hat{G}$  non triviale, l'opérateur  $\pi(\mathcal{P})$  est injectif dans  $S_\pi$  (où  $S_\pi$  désigne l'espace des vecteurs  $C^\infty$  de la représentation).*

**Remarque 4.2.18.** *La condition 3 du théorème sera appelée la condition de Rockland. Pour la vérifier, on observe que pour  $\pi$  dans  $\hat{G}$  non triviale il suffit de montrer que, si  $u$  vérifie  $\pi(\mathcal{P})u = 0$ , alors :*

*Dans le cas stratifié de Type 1 :  $\pi(Y_j)u = 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, p$ ,*

*Dans le cas stratifié de Type 2 :  $\pi(X_\ell)u = 0$  et  $\pi(Y_j)u = 0$ ,  $\forall \ell = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .*

*Ceci implique en effet, dans les deux cas, que*

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G}.$$

*Puis, par l'hypothèse que  $\pi$  est irréductible et non triviale, nous obtenons que  $u = 0$ .*

On termine cette partie en citant un autre résultat, dû à Helffer-Nourrigat dans [31], qui intervient dans la preuve de leur théorème et qui nous sera très utile.

**Théorème 4.2.19.** *Si  $\mathcal{P} \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  est un opérateur hypoelliptique maximal, alors il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour toute représentation induite  $\pi = \pi_{\ell, \mathcal{H}}$ , pour tout  $u$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ , on ait l'estimation maximale suivante :*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(Y^\alpha)u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 \leq C \left( \|\pi(\mathcal{P})u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^k)}^2 \right).$$

#### 4.2.5 Application à l'hypoellipticité maximale des champs de vecteurs

On suppose que les champs  $X_i$  et  $Y_j$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $j \in \{1, \dots, q\}$  vérifient (Ho) en  $z_0$ . A l'opérateur défini en (4.4), on va d'abord associer en  $x_0$ , un élément de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  désigne l'algèbre de Lie nilpotente libre à  $p + q$  générateurs  $(Z_1, \dots, Z_{p+q})$  et de rang de nilpotence  $r$ . On suit ici la démarche de Rothschild-Stein dans [82]. On associe à l'opérateur  $\mathcal{P}$  un élément  $\mathcal{P}_{z_0}$  de  $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$  défini par :

$$\mathcal{P}_{z_0} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z_0) Z^\alpha$$

et on rappelle un résultat qui s'appuie sur les articles [81], [30] et [9]) :

**Théorème 4.2.20.** *Soit  $P$  l'opérateur défini en (4.4) avec la condition de Hörmander et  $z_0 \in \Omega$ . Si  $\mathcal{P}_{z_0}$  est hypoelliptique alors l'opérateur  $P$  est hypoelliptique maximal dans un voisinage de  $z_0$ .*

La réciproque n'est en général pas vraie. C'est tout l'objet du livre de [34] de donner des conditions suffisantes optimales pour cette hypoellipticité maximale.

### 4.3 Démonstration du résultat principal quand $d = 2$

La démonstration consiste à construire une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de rang 3, stratifiée de type 2 et, en tout point  $x \in \mathbb{T}^2$ , un élément  $\mathcal{K}_x$  de  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  hypoelliptique. On déduira ensuite de l'estimation maximale obtenue pour chaque  $\mathcal{K}_x$ , une estimation maximale pour l'opérateur  $K$ .

Pour définir  $\mathcal{K}_x$ , on remplacera  $B_e(x)$  par une constante  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$  fixé, et on montrera une estimation globale pour le modèle suivant :

$$K_{\mathbf{b}} = v \cdot \nabla_x + \mathbf{b}(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 1, \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

qui apparaîtra comme l'image par une représentation induite de  $\mathcal{K}_x$ .

Ensuite on utilisera une partition de l'unité et on contrôlera les erreurs.

#### 4.3.1 Application de la Proposition 4.2.11 :

On va montrer qu'on peut se mettre dans le cadre de la Proposition 4.2.11. On cherche donc une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de type 2, une sous-algèbre  $\mathcal{H}$ , un élément  $\tilde{K}_{\mathbf{b}}$  dans  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  et une forme linéaire  $\ell$  tels que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_{\mathbf{b}}) = K_{\mathbf{b}}.$$

Pour cela, on détermine les conditions nécessaires sur les crochets entre les éléments générateurs de cette algèbre. Dans l'écriture de  $K_{\mathbf{b}}$  on voit apparaître les opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients polynomiaux suivants :

$$X'_{1,1} = \partial_{v_1} \quad X''_{1,1} = iv_1 \quad (4.14)$$

$$X'_{2,1} = \partial_{v_2} \quad X''_{2,1} = iv_2 \quad (4.15)$$

$$X_{1,2} = v \cdot \nabla_x. \quad (4.16)$$

$K_{\mathbf{b}}$  s'écrit en effet comme polynôme de ces cinq opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{b}} = & X_{1,2} - \sum_{k=1}^2 \left( (X'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(X''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(X'_{k,1}X''_{k,1} - X''_{k,1}X'_{k,1}) \right) \\ & - i\mathbf{b} (X'_{1,1}X''_{2,1} - X'_{2,1}X''_{1,1}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

On regarde maintenant l'algèbre de Lie engendrée par ces cinq opérateurs et leurs crochets. Ceci nous conduit à introduire trois nouveaux éléments qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{2,2} &:= [X'_{1,1}, X''_{1,1}] = [X'_{2,1}, X''_{2,1}] = i, \\ X_{1,3} &:= [X_{1,2}, X'_{1,1}] = \partial_{x_1}, \quad X_{2,3} := [X_{1,2}, X'_{2,1}] = \partial_{x_2}. \end{aligned}$$

On observe aussi que l'on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} [X'_{1,1}, X'_{2,1}] &= [X''_{1,1}, X''_{2,1}] = 0, \\ [X'_{j,1}, X_{k,3}] &= [X''_{j,1}, X_{k,3}] = [X_{k,3}, X_{2,2}] = \dots = 0, \quad \forall j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

On construit alors une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  graduée vérifiant les mêmes relations de commutations. Plus précisément,  $\mathcal{G}$  est stratifiée de type 2, nilpotente de rang 3, son espace vectoriel sous-jacent est  $\mathbb{R}^8$ , et  $\mathcal{G}_1$  est engendrée par  $Y'_{1,1}, Y'_{2,1}, Y''_{1,1}$  et  $Y''_{2,1}$ ,  $\mathcal{G}_2$  est engendrée par  $Y_{1,2}$  et  $Y_{2,2}$  et  $\mathcal{G}_3$  est engendré par  $Y_{1,3}$  et  $Y_{2,3}$ . Les lois de l'algèbre sont données par :

$$Y_{2,2} = [Y'_{1,1}, Y''_{1,1}] = [Y'_{2,1}, Y''_{2,1}], \quad Y_{1,3} = [Y_{1,2}, Y'_{1,1}], \quad Y_{2,3} = [Y_{1,2}, Y'_{2,1}], \quad (4.18)$$

$$[Y'_{1,1}, Y'_{2,1}] = [Y''_{1,1}, Y''_{2,1}] = 0, \quad (4.19)$$

$$[Y'_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y''_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y_{k,3}, Y_{2,2}] = \dots = 0 \quad \forall j, k = 1, 2. \quad (4.20)$$

On vérifie que l'application  $\pi$  (avec la convention que si  $\diamond = \emptyset$  il n'y a pas d'exposant) définie sur la base de  $\mathcal{G}$  par

$$\pi(Y_{i,j}^\diamond) = X_{i,j}^\diamond \text{ avec } i = 1, 2, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, ', ''\}. \quad (4.21)$$

définit bien une représentation  $\pi$  de l'algèbre  $\mathcal{G}$ .

On observe maintenant que notre représentation  $\pi$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \pi(Y) &= P_1(Y)\partial_{v_1} + P_2(v_1; Y)\partial_{v_2} + P_3(v_1, v_2; Y)\partial_{x_1} + P_4(v_1, v_2, x_1; Y)\partial_{x_2} \\ &\quad + iQ(v_1, v_2, x_1, x_2; Y), \end{aligned}$$

où pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ , il existe  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} Y &= aY'_{1,1} + bY'_{2,1} + cY''_{1,1} + dY''_{2,1} \\ &\quad + \alpha Y_{1,2} + \beta Y_{2,2} \\ &\quad + \gamma Y_{1,3} + \delta Y_{2,3}, \end{aligned}$$

et les polynômes  $P_j$  avec  $j = 1, \dots, 4$  et  $Q$  sont définis par

$$\begin{aligned} P_1(Y) &= a, \quad P_2(v_1; Y) = b, \quad P_3(v_1, v_2, Y) = \alpha v_1 + \gamma \\ P_4(v_1, v_2, x_1; Y) &= \alpha v_2 + \delta \text{ et } Q(v, x; Y) = cv_1 + dv_2 + \beta. \end{aligned}$$

On peut désormais appliquer la Proposition 4.2.11. On obtient alors  $\pi \equiv \pi_{\ell, \mathcal{H}}$  avec

$$\begin{aligned} \ell &\in \mathcal{G}^*, \langle \ell, Y \rangle = Q(0; Y) = \beta, \\ \mathcal{H} &:= \{Y \in \mathcal{G} / P_1(0; Y) = \dots = P_4(0; Y) = 0\} = \text{Vect}(Y''_{1,1}, Y''_{2,1}, Y_{1,2}, Y_{2,2}), \end{aligned}$$

Retournons à notre opérateur  $K_{\mathbf{b}}$  qui a été écrit comme un polynôme de champs de vecteurs  $\{X_{j,2}, X_{j,3}, X'_{j,1}, X''_{j,1}\}_{j=1,2}$  dans (4.17). On définit alors  $\tilde{K}_{\mathbf{b}}$  comme le même polynôme mais cette fois-ci fonction des champs de vecteurs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y'_{j,1}, Y''_{j,1}\}_{j=1,2}$  définis comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\mathbf{b}} &= Y_{1,2} - \sum_{k=1}^2 \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}(Y'_{k,1}Y''_{k,1} - Y''_{k,1}Y'_{k,1}) \right) \\ &\quad - i\mathbf{b} (Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

et on vérifie que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_{\mathbf{b}}) = K_{\mathbf{b}}.$$

Notons qu'avec les notations utilisées dans l'introduction de la section, on a :

$$\mathcal{K}_x = \widetilde{K}_{B_e(x)}.$$

### 4.3.2 Vérification du critère de Rockland

Pour démontrer l'hypoellipticité maximale, il faut vérifier le critère de Rockland (cf Théorème 4.2.17) pour  $\tilde{K}_{\mathbf{b}}$ . Soit  $\pi$  une représentation unitaire sur  $G$  dans  $V_{\pi}$ . On va montrer que l'opérateur  $\pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})$  est un opérateur injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_{\pi}$  des vecteurs  $C^{\infty}$  de la représentation, qui s'identifie quand  $\pi$  est irréductible non-triviale, à  $S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ . Soit  $u \in S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  tel que

$$\pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})u = 0.$$

D'une part, on a

$$\text{Re}\langle \pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})u, u \rangle = 0,$$

D'autre part, par intégration par parties et en utilisant que l'opérateur  $\pi(Y)$  est un opérateur formellement anti-adjoint (voir Proposition 4.2.13), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle \pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})u, u \rangle &= \underbrace{\text{Re}\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle}_I + \sum_{k=1}^2 \left( \|\pi(Y'_{k,1})u\|^2 + \|\pi(Y''_{k,1})u\|^2 \right) \\ &\quad - \underbrace{\mathbf{b} \text{Re}\langle i(\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1}) - \pi(Y''_{2,1})\pi(Y'_{1,1}))u, u \rangle}_{II}. \end{aligned}$$

D'abord, on va calculer  $I$ . En utilisant le fait que l'opérateur  $\pi(Y_{1,2})$  est anti-adjoint d'après la Proposition 4.2.13, on obtient

$$\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle = -\langle u, \pi(Y_{1,2})u \rangle = -\overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle}.$$

Par conséquent, on a

$$\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle + \overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle} = 0,$$

d'où ,

$$I = \operatorname{Re} \langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle = \left( \langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle + \overline{\langle \pi(Y_{1,2})u, u \rangle} \right) / 2 = 0.$$

Ensuite, on passe au calcul du terme  $II$ . En utilisant que  $\pi$  est une représentation et les relations des commutations données dans (4.19), on obtient

$$\begin{aligned} [\pi(\tilde{Y}'_{1,1}), \pi(\tilde{Y}''_{2,1})] &= \pi([\tilde{Y}'_{1,1}, \tilde{Y}''_{2,1}]) = 0 \\ [\pi(\tilde{Y}'_{2,1}), \pi(\tilde{Y}''_{1,1})] &= \pi([\tilde{Y}'_{2,1}, \tilde{Y}''_{1,1}]) = 0. \end{aligned}$$

Alors les opérateurs  $i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})$  et  $i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})$  sont des opérateurs anti-adjoints sur l'espace  $\mathcal{S}_\pi$  munis du produit scalaire de  $V_\pi$  pour toute représentation  $\pi$ . Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle &= -\overline{\langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle}, \\ \langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle &= -\overline{\langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle}, \end{aligned}$$

et donc,

$$\operatorname{Re} \langle i\pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1})u, u \rangle = \operatorname{Re} \langle i\pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1})u, u \rangle = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$II = \operatorname{Re} \langle i \left( \pi(Y'_{1,1})\pi(Y''_{2,1}) - \pi(Y'_{2,1})\pi(Y''_{1,1}) \right) u, u \rangle = 0.$$

D'où,

$$\operatorname{Re} \langle \pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})u, u \rangle = \sum_{k=1}^2 \left( \|\pi(Y'_{k,1})u\|^2 + \|\pi(Y''_{k,1})u\|^2 \right),$$

qui implique que

$$\pi(Y'_{j,1})u = \pi(Y''_{j,1})u = 0, \quad \forall j = 1, 2. \quad (4.23)$$

Il reste à considérer  $Y_{1,2}$ , pour lequel on peut remarquer que

$$Y_{1,2} = \tilde{K}_{\mathbf{b}} + \sum_{k=1}^2 \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}[Y'_{k,1}, Y''_{k,1}] \right) + i\mathbf{b} \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right).$$

En appliquant  $\pi$  et par action sur  $u$ , on a

$$\begin{aligned}\pi(Y_{1,2})u &= \pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})u + \sum_{k=1}^2 \pi \left( (Y'_{k,1})^2 + \frac{1}{4}(Y''_{k,1})^2 - \frac{i}{4}[Y'_{k,1}, Y''_{k,1}] \right) u \\ &\quad + i\mathbf{b} \pi \left( Y'_{1,1}Y''_{2,1} - Y'_{2,1}Y''_{1,1} \right) u \\ &= 0.\end{aligned}$$

De la Remarque 4.2.18 dans le cas stratifié de type 2, on déduit que

$$\pi(Y)u = 0, \forall Y \in \mathcal{G}, \text{ et } u = 0,$$

où pour le dernier point on a utilisé que  $\pi$  est triviale.

L'opérateur  $\pi(\tilde{K}_{\mathbf{b}})$  est donc injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_{\pi}$  pour toute représentation irréductible et non triviale  $\pi$ . Par conséquent, d'après le Théorème 4.2.17 l'opérateur  $\tilde{K}_{\mathbf{b}}$  est hypoelliptique maximal dans le groupe  $G$ . En appliquant le Théorème 4.2.19 avec  $K_{\mathbf{b}} = \pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_{\mathbf{b}})$ , on obtient l'existence de  $C > 0$  telle que l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2u\| + \|(X''_{k,1})^2u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1}X''_{\ell,1}u\| \\ \leq C (\|K_{\mathbf{b}}u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2),\end{aligned}\tag{4.24}$$

soit vérifiée.

**Remarque 4.3.1.** *Même si cela ne sera pas utilisé dans ce texte, on peut montrer que pour tout compact  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\mathbf{b}$  dans ce compact, l'estimation (4.24) soit vérifiée.*

### 4.3.3 Deuxième approche.

Dans cette approche, on va démontrer directement les inégalités sans passer par la Proposition 4.2.11. Pour cela, on va utiliser la méthode d'addition des variables pour remplacer les champs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y'_{j,1}, Y''_{j,1}\}_{j=1,2}$  par les champs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$  sur  $\mathbb{R}^8$  définies par :

$$Z'_{1,1} = \partial_{x'_1} \quad Z''_{1,1} = \partial_{x''_1} + x'_1 \partial_{y_2} \tag{4.25}$$

$$Z'_{2,1} = \partial_{x'_2} \quad Z''_{2,1} = \partial_{x''_2} + x'_2 \partial_{y_2} \tag{4.26}$$

$$Z_{1,2} = \partial_{y_1} + x'_1 \partial_{z_1} + x'_2 \partial_{z_2} \quad Z_{2,2} = \partial_{y_2} \tag{4.27}$$

$$Z_{1,3} = \partial_{z_1} \quad Z_{2,3} = \partial_{z_2}. \tag{4.28}$$

Dans les coordonnées exponentielles convenables sur  $G$  les champs de vecteurs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$  correspondent à la représentation régulière de  $\mathcal{G}$  dans  $G$  et sont

des champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe. Dans ces coordonnées, l'opérateur  $\tilde{K}_{\mathbf{b}}$  s'écrit comme un polynôme des champs de vecteurs  $\{Z_{j,2}, Z_{j,3}, Z'_{j,1}, Z''_{j,1}\}_{j=1,2}$ , et en utilisant le Théorème 4.2.19 sur les groupes nilpotents, on obtient l'estimation maximale suivante

$$\begin{aligned} & \|Z_{1,2}u\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(Z'_{k,1})^2u\|^2 + \|(Z''_{k,1})^2u\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|Z'_{k,1}Z''_{\ell,1}u\|^2 \\ & \leq C \left( \|\tilde{K}_{\mathbf{b}}u\|^2 + \|u\|^2 \right), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8). \end{aligned} \quad (4.29)$$

### Étude préliminaire.

Avant de donner la démonstration de l'inégalité maximale pour l'opérateur  $K_{\mathbf{b}}$ , on va commencer par montrer comment on passe aisément de l'inégalité :

$$\|Q(D_x)u\|^2 \leq C(\|P(D_x)u\|^2 + \|u\|^2), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k), \quad (4.30)$$

à l'inégalité

$$|Q(\xi)|^2 \leq C(|P(\xi)|^2 + 1), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k. \quad (4.31)$$

Ici  $D_{x_j} = -i\frac{d}{dx_j}$  et  $P$  et  $Q$  sont des polynômes.

En utilisant le Théorème de Plancherel, on obtient

$$\|Q(\cdot)w\|^2 \leq C(\|P(\cdot)w\|^2 + \|w\|^2), \quad \forall w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k_\xi), \quad (4.32)$$

Pour montrer (4.31) en  $\xi = \xi_0$ , on considère la famille de gaussiennes

$$w_h(\xi) = ch^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2h}}, \quad h > 0, \quad (4.33)$$

où  $c > 0$  est tel que  $\|w_h\| = 1$ .

Par application de l'inégalité (4.32) à la fonction  $w_h$ , on obtient

$$\|Q(\cdot)w_h\|^2 \leq C(\|P(\cdot)w_h\|^2 + 1), \quad (4.34)$$

Il reste à montrer que

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\| = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}) \text{ et } \|(Q(\cdot) - Q(\xi_0))w_h\| = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}). \quad (4.35)$$

En effet, on peut écrire :

$$P(\xi) = P(\xi_0) + O_1(\eta) \text{ et } Q(\xi) = Q(\xi_0) + O_2(\eta)$$

où  $\eta = \xi - \xi_0$ ,  $O_1(\eta)$  et  $O_2(\eta)$  sont des polynômes qui s'annulent en  $\eta = 0$ . Ensuite, par définition de la norme  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , on a

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = ch^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} O_1^2(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{h}} d\eta. \quad (4.36)$$

En effectuant le changement de variables :

$$\mathbb{R}^k \ni \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \rightarrow \Phi(\eta) = (\tau_1, \dots, \tau_k) = \left( \frac{\eta_1}{\sqrt{h}}, \dots, \frac{\eta_k}{\sqrt{h}} \right),$$

l'égalité (4.36) prend la forme suivante :

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = c \int_{\mathbb{R}^k} O_1^2(h^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}) e^{-\tau^2} d\tau.$$

Comme  $O_1$  est un polynôme s'annulant en 0, il peut s'écrire comme suit :

$$O_1(\tau) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 1 \leq |\alpha| \leq m} C_\alpha \tau^\alpha,$$

avec  $m = \deg(O_1)$ . En utilisant l'expression précédente, on obtient

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = c \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 2 \leq |\alpha| \leq 2m} C_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} \tau^\alpha e^{-\tau^2} d\tau.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^k} \tau^\alpha e^{-\tau^2} d\tau$  est convergente, on a donc

$$\|(P(\cdot) - P(\xi_0))w_h\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^k, 2 \leq |\alpha| \leq 2m} C'_\alpha h^{\frac{|\alpha|}{2}} = O(h).$$

Ceci montre l'égalité (4.35). Puis, en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$  dans l'estimation (4.34), on déduit

$$|Q(\xi_0)|^2 \leq C(|P(\xi_0)|^2 + 1), \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^k.$$

### Retour à la démonstration de l'inégalité maximale.

On montre maintenant comment on en déduit l'inégalité maximale pour l'opérateur  $K_{\mathbf{b}}$  sans passer par la Proposition 4.2.11. En appliquant la transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)}$  en les variables  $(x'', y) = (x''_1, x''_2, y_1, y_2)$  à l'estimation (4.29), le théorème de Plancherel implique, pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x',z,\xi'',\eta}^8)$ ,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z_{1,2} u\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} (Z'_{k,1})^2 u\|^2 + \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} (Z''_{k,1})^2 u\|^2 \right) \\ & + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z'_{k,1} Z''_{\ell,1} u\|^2 \leq C \left( \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} \tilde{K}_{\mathbf{b}} u\|^2 + \|\mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} u\|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

où les normes sont celles de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^8)$ .

On pose  $\hat{Z} = \mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)} Z \mathcal{F}_{(x'',y) \rightarrow (\xi'',\eta)}^{-1}$  pour tout  $Z$  polynôme de champs de vecteurs

sur  $\mathbb{R}^8$ . En particulier, les opérateurs  $\widehat{Z}_{k,j}^\diamond$  avec  $k = 1, 2, j = 1, 2, 3$  et  $\diamond \in \{\emptyset, \prime, \prime\prime\}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{1,1}' &= \partial_{x_1'} & \widehat{Z}_{1,1}'' &= i(\xi_1'' + x_1' \eta_2) \\ \widehat{Z}_{2,1}' &= \partial_{x_2'} & \widehat{Z}_{2,1}'' &= i(\xi_2'' + x_2' \eta_2) \\ \widehat{Z}_{1,2} &= i\eta_1 + x_1' \partial_{z_1} + x_2' \partial_{z_2} & \widehat{Z}_{2,2} &= i\eta_2 \\ \widehat{Z}_{1,3} &= \partial_{z_1} & \widehat{Z}_{2,3} &= \partial_{z_2}. \end{aligned}$$

Alors l'estimation (4.37) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_{1,2} w\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}_{k,1}')^2 w\|^2 + \|(\widehat{Z}_{k,1}'')^2 w\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}_{k,1}' \widehat{Z}_{\ell,1}'' w\|^2 \\ \leq C \left( \|\widehat{K}_{\mathbf{b}} w\|^2 + \|w\|^2 \right), \quad \forall w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8), \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ensuite, pour montrer le passage de  $k = 8$  à  $k = 4$  avec des paramètres  $(\xi'', \eta) = (\xi_0'', \eta_0)$  dans l'estimation (4.38), on considère la famille de fonctions test suivante :

$$\mathbb{R}^8 \ni (x', z, \xi'', \eta) \rightarrow W_h(x', z, \xi'', \eta) = f(x', z) w_h(\xi'', \eta), \quad h > 0,$$

où  $w_h$  est définie en (4.33). Par application de l'inégalité (4.37) à la fonction  $W_h$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_{1,2} W_h\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}_{k,1}')^2 W_h\|^2 + \|(\widehat{Z}_{k,1}'')^2 W_h\|^2 \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}_{k,1}' \widehat{Z}_{\ell,1}'' W_h\|^2 \\ \leq C \left( \|\widehat{K}_{\mathbf{b}} W_h\|^2 + \|W_h\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En procédant comme dans le cas préliminaire, on passe à la limite quand  $h \rightarrow 0$  dans l'estimation (4.39) et on déduit qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(\xi_0'', \eta_0) \in \mathbb{R}^4$  et  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widehat{Z}_{k,1}' \widehat{Z}_{\ell,1}''(\xi_0'', \eta_0) f\|^2 + \sum_{k=1}^2 \left( \|(\widehat{Z}_{k,1}')^2(\xi_0'', \eta_0) f\|^2 + \|(\widehat{Z}_{k,1}'')^2(\xi_0'', \eta_0) f\|^2 \right) \\ + \|\widehat{Z}_{1,2}(\xi_0'', \eta_0) f\|^2 \leq C \left( \|\widehat{K}_{\mathbf{b}}(\xi_0'', \eta_0) f\|^2 + \|f\|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

où les normes sont maintenant dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^4)$ .

Finalement, pour déduire l'estimation maximale (4.29), il suffit de choisir  $(\xi_0'', \eta_0) = (0, 0, 0, 1)$  et d'effectuer le changement de notation suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &\longleftrightarrow v_1 & x_2' &\longleftrightarrow v_2 \\ z_1 &\longleftrightarrow x_1 & z_2 &\longleftrightarrow x_2. \end{aligned}$$

On en déduit alors l'estimation maximale (4.24).

### 4.3.4 Preuve du Théorème 4.1.7

**Première étape.**

On fixe  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et on note  $\mathcal{B}_e(x_0) = \mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}$ . On rappelle l'opérateur  $K$

$$K = v \cdot \nabla_x - (v \wedge \mathcal{B}_e) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - 1,$$

On commence par  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  avec  $P_x(\text{Supp } u) \subset B(x_0, \varepsilon)$ , où  $P_x$  est la projection standard en ce qui concerne les variables  $x$  et  $\varepsilon > 0$ , une constante qui sera choisie plus tard, on a

$$Ku = (K - K_{\mathbf{b}_0})u + K_{\mathbf{b}_0}u,$$

D'une part, on vérifie qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \|(K - K_{\mathbf{b}_0})u\| &= \|(\mathcal{B}_e - \mathcal{B}_e(x_0))(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\| \\ &\leq \|\nabla_x \mathcal{B}_e\|_{L^\infty} |x - x_0| \|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\| \\ &\leq \varepsilon \|\nabla_x \mathcal{B}_e\|_{L^\infty} \|(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1})u\|. \end{aligned} \quad (4.41)$$

On obtient alors l'estimation suivante :

$$\|(K - K_{\mathbf{b}_0})u\| \leq \varepsilon \|\mathcal{B}_e\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^2)} \|u\|_{\tilde{B}^2}.$$

D'autre part, par l'inégalité (4.24) et le Théorème 4.2.20 au point  $x_0$ , on obtient que l'opérateur  $K_{\mathbf{b}_0}$  est hypoelliptique maximal dans  $B(x_0, \varepsilon)$ . Donc l'opérateur  $K_{\mathbf{b}_0}$  vérifie, pour une constante  $C > 0$  assez grande, l'estimation suivante

$$\|K_{\mathbf{b}_0}u\| + \|u\| \geq \frac{1}{C} \|X_{1,2}u\| + \frac{1}{C} \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 u\| + \|(X''_{k,1})^2 u\| \right) + \frac{1}{C} \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} u\|, \quad (4.42)$$

Finalement, on observe que

$$\|Ku\| \geq \|K_{\mathbf{b}_0}u\| - \|(K - K_{\mathbf{b}_0})u\|,$$

En utilisant les inégalités (4.41) et (4.42) et en choisissant  $0 < \varepsilon < \frac{1}{C \|\mathcal{B}_e\|_{\text{Lipsch}(\mathbb{T}^2)}}$ , on obtient alors qu'il existe  $\tilde{C} > 0$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  avec  $P_x(\text{Supp } u) \subset B(x_0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 u\| + \|(X''_{k,1})^2 u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} u\| \\ \leq \tilde{C} (\|Ku\| + \|u\|). \end{aligned} \quad (4.43)$$

**Deuxième étape.**

On a montré que pour chaque  $x_0 \in \mathbb{T}^2$ , il existe un  $B(x_0, \varepsilon(x_0))$  tel que l'inégalité maximale (4.43) s'applique. Le tore  $\mathbb{T}^2$  étant une variété compacte, il existe une partition de l'unité lisse  $(\varphi_j)_{j=1}^{n_0}$  dans la variable  $x \in \mathbb{T}^2$  telle que

$$\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \text{ et } \sum_{j=0}^{n_0} \varphi_j^2 = 1 \text{ sur } \mathbb{T}^2,$$

et l'inégalité (4.43) est vérifiée sur chaque  $\text{Supp} \varphi_j$  (avec une constante uniforme puisque la famille de  $\varphi_j$  est finie). Plus précisément, on prend  $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_j, j = 1, \dots, n_0\} > 0$ , où  $\varepsilon_j$  est le rayon de la boule centrée en  $x_j$  dont (4.43) est vrai, tel que

$$\text{Supp} \varphi_j \subset B(x_j, \varepsilon) \subset B(x_j, \varepsilon_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n_0\},$$

où la boule  $B(x_j, \varepsilon)$  est définie par, pour tout  $j = 1, \dots, n_0$

$$B(x_j, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{T}^2 / d(x, x_j) < \varepsilon\}.$$

**Étape intermédiaire 1.** On va montrer l'estimation maximale suivante :

$$\begin{aligned} \|X_{1,2} \varphi_j u\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 \varphi_j u\| + \|(X''_{k,1})^2 \varphi_j u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} \varphi_j u\| \\ \leq C (\|K \varphi_j u\| + \|\varphi_j u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour la montrer, on va revenir à l'identification entre  $u$  et  $\tilde{u}$  expliquée dans l'introduction. Pour  $j = 1, \dots, n_0$ , on peut identifier la fonction  $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ , avec  $\text{Supp} \varphi_j \subset B(x_j, \varepsilon)$ , à la fonction  $\tilde{\varphi}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  qui est  $\Gamma$ -périodique. Pour  $\varepsilon$  assez petit, les composantes connexes de  $\text{Supp} \tilde{\varphi}_j$  se décomposent de façon qu'il existe  $\tilde{x}_j$  et une fonction  $\tilde{\varphi}_{j,0}$  à support dans  $B(\tilde{x}_j, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$  tels que

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2 \times \{0\}} \tau_\alpha \tilde{\varphi}_{j,0},$$

où  $\tau_\alpha$  est la translation par  $\alpha$  et telle que

$$\|\varphi_j u\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} = \|\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)}.$$

En appliquant l'estimation (4.43) à la fonction  $w = \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}$  avec  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  et observant que  $\text{diam}(\text{Supp} w) \leq \varepsilon$ , on obtient qu'il existe  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|X_{1,2} \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|(X'_{k,1})^2 \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \|(X''_{k,1})^2 \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X'_{k,1} X''_{\ell,1} \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| \\ \leq C (\|K \tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\| + \|\tilde{\varphi}_{j,0} \tilde{u}\|). \end{aligned} \quad (4.45)$$

On note que  $X_{j,2}, X_{j,3}, X'_{j,1}$ , et  $X''_{j,1}$ , avec  $j = 1, 2$  sont des opérateurs différentiels. D'après l'identification et la définition des dérivées sur le tore, on a alors

$$\begin{aligned} \|\widetilde{X_{1,2}\varphi_j u}\| + \sum_{k=1}^2 \left( \|\widetilde{(X'_{k,1})^2 \varphi_j u}\| + \|\widetilde{(X''_{k,1})^2 \varphi_j u}\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|\widetilde{X'_{k,1} X''_{\ell,1} \varphi_j u}\| \\ \leq C \left( \|\widetilde{K \varphi_j u}\| + \|\varphi_j u\| \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

Finalement, par l'équivalence entre la norme  $\|\cdot\|_{L^2_{\text{per}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)}$  et la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)}$ , on en déduit l'estimation (4.44).

**Étape intermédiaire 2.** Le but de cette étape est de montrer les deux estimations suivantes :

$$\forall \eta > 0, \exists C_\eta > 0 / \forall u \in \tilde{B}^2, \|u\|_{\tilde{B}^1} \leq \eta \|u\|_{\tilde{B}^2} + C_\eta \|u\|, \quad (4.47)$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}_x^2), \exists C_\varphi > 0 / \|[K, \varphi]u\| \leq C_\varphi \|u\|_{\tilde{B}^1}, \quad (4.48)$$

où  $\tilde{B}^1$  est le sous-espace  $L_x^2 \hat{\otimes} B_v^1$  muni de sa norme hilbertienne naturelle

$$\|u\|_{\tilde{B}^1}^2 := \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \|v^\alpha \partial_v^\beta u\|^2, \quad \forall u \in \tilde{B}^1.$$

Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , d'après la définition de la norme  $\|\cdot\|_{B^1}$ , on a

$$\begin{aligned} \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \|v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \langle v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot), v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties par rapport à  $v$ , on a, pour tout  $x \in \mathbb{T}^2$ ,

$$\begin{aligned} \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \left\langle v^\alpha u(x, \cdot), (-1)^{|\beta|} \partial_v^\beta \left( v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 1} \left\langle u(x, \cdot), (-1)^{|\beta|} v^\alpha \partial_v^\beta \left( v^\alpha \partial_v^\beta u(x, \cdot) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Leibniz, l'égalité précédente prend la forme suivante :

$$\|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 = \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq 2} C_{\alpha'} C_{\beta'} \left\langle u(x, \cdot), v^{\alpha'} \partial_v^{\beta'} u(x, \cdot) \right\rangle.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 \leq C \|u(x, \cdot)\| \|u(x, \cdot)\|_{B^2}.$$

Finalement, par l'identité remarquable on obtient que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  tel que :

$$\forall \eta > 0, \|u(x, \cdot)\|_{B^1}^2 \leq \eta \|u(x, \cdot)\|_{B^2}^2 + C_\eta \|u(x, \cdot)\|^2,$$

puis, en intégrant en  $x$  sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , on déduit l'estimation (4.47).

En remarquant maintenant que le commutateur vaut

$$[K, \varphi] = [v \cdot \nabla_x, \varphi] = v \cdot \nabla_x \varphi,$$

d'après l'égalité précédente et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|[K, \varphi]u\| = \|v \cdot \nabla_x \varphi u\| \leq \|\nabla_x \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|u\|_{\tilde{B}^1} \leq C_\varphi \|u\|_{\tilde{B}^1}.$$

**Fin de la preuve :** Soit  $B_e \in \text{Lipsch}(\mathbb{T}^2)$  et  $u \in S(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ . On va contrôler terme par terme. Par la partition de l'unité et par l'application de l'inégalité (4.44), on obtient qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\|u\|_{\tilde{B}^2}^2 = \sum_{j=1}^{n_0} \|\varphi_j u\|_{\tilde{B}^2}^2 \leq C \sum_{j=1}^{n_0} (\|K \varphi_j u\|^2 + \|\varphi_j u\|^2), \quad (4.49)$$

En utilisant la définition du commutateur, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n_0} \|K \varphi_j u\|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{n_0} (\|[\varphi_j, K]u\|^2 + \|\varphi_j K u\|^2).$$

D'après l'estimation (4.47)-(4.48), on obtient, pour tout  $\eta > 0$ , l'existence de  $C_\eta > 0$  telle que :

$$\sum_{j=1}^{n_0} \|K \varphi_j u\|^2 \leq 2 \|K u\|^2 + 2 \eta \|u\|_{\tilde{B}^2}^2 + C_\eta \|u\|^2. \quad (4.50)$$

En injectant l'inégalité (4.50) dans l'inégalité (4.49), on en déduit que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  telle que :

$$\|u\|_{\tilde{B}^2}^2 \leq 2 C \|K u\|^2 + 2 \eta C \|u\|_{\tilde{B}^2}^2 + C_\eta \|u\|^2,$$

Ensuite, en utilisant les mêmes techniques, on a

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla_x u\|^2 &= \sum_{j=1}^{n_0} \|\varphi_j (v \cdot \nabla_x u)\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{n_0} (\|[\varphi_j, v \cdot \nabla_x]u\|^2 + \|(v \cdot \nabla_x)(\varphi_j u)\|^2) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (4.50) et (4.44), on obtient qu'il existe  $C' > 0$  et pour tout  $\eta' > 0$ ,  $C_{\eta'} > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla_x u\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n_0} (C' \|\varphi_j K u\|^2 + \eta' \|\varphi_j u\|_{\tilde{B}^2}^2 + C_{\eta'} \|\varphi_j u\|^2) \\ &\leq C' \|K u\|^2 + \eta' \|u\|_{\tilde{B}^2}^2 + C_{\eta'} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Il reste à estimer le terme suivant

$$\|B_e(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1})u\|^2 = \sum_{j=1}^{n_0} \|B_e(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1})(\varphi_j u)\|^2.$$

Par application directe des inégalités (4.44) et (4.50), on obtient qu'il existe  $C, C'' > 0$  et pour tout  $\eta'' > 0, C_{\eta''} > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \|B_e(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1})u\|^2 &\leq C \sum_{j=1}^{n_0} (\|K(\varphi_j u)\|^2 + \|u\|^2) \\ &\leq C'' \|Ku\|^2 + \eta'' \|u\|_{\tilde{B}^2}^2 + C_{\eta''} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Choissant  $\eta, \eta'$  et  $\eta'' > 0$  tels que  $2C\eta + \eta' + \eta'' < 1$ , on obtient donc l'existence d'une constante  $\tilde{C} > 0$  tel que :

$$\|(v \cdot \nabla_v - B_e(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1}))u\| + \|u\|_{B^2} \leq \tilde{C}(\|Ku\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2).$$

## 4.4 Démonstration du résultat principal quand $d = 3$

### 4.4.1 Préliminaires

On présente maintenant la démonstration du Théorème 4.1.7 quand  $d = 3$ , et on va seulement expliquer les différences dans les étapes de la preuve, avec celles dans le cas où  $d = 2$ . L'approche est la suivante, on remplace d'abord  $B_e(x)$  par un vecteur constant  $\mathbf{b} := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ , et on montre une estimation globale pour le modèle suivant :

$$K_{\mathbf{b}} = v \cdot \nabla_x + (v \wedge \mathbf{b}) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - 3/2. \quad (4.51)$$

On définit la transformation canonique suivante

$$V_M : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (x, v) \longrightarrow V_M(x, v) := (Mx, (M^{-1})^t v),$$

où  $M$  est la matrice de rotation qui s'obtient par la multiplication entre les deux matrices de rotations  $R(\theta_1)$  et  $R(\theta_2)$  autour des axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$  et d'angles de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement

$$R(\theta_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad R(\theta_2) := \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les deux angles sont définis par

$$\theta_1 = \arctan(b_1 / b_2) \quad , \quad \theta_2 = \arctan(\sqrt{b_1^2 + b_2^2} / b_3).$$

On note que les opérateurs différentiels suivants sont invariants par conjugaison par la transformation  $V_M$  :

$$V_M (v \cdot \nabla_x) V_{M^{-1}} = v \cdot \nabla_x \text{ et } V_M (-\Delta_v + v^2/4 - 3/2) V_{M^{-1}} = -\Delta_v + v^2/4 - 3/2.$$

Par construction de la matrice  $M$ , la conjugaison de l'opérateur magnétique donne la forme suivante :

$$V_M (v \wedge \mathbf{b}) \cdot \nabla_v V_{M^{-1}} = |\mathbf{b}| (v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}).$$

Par conséquent, la conjugaison de l'opérateur de Fokker-Planck-magnétique défini en (4.51), par l'opérateur de transformation canonique  $V_M$ , nous donne l'opérateur suivant

$$Q_{|\mathbf{b}|} := V_M K_{\mathbf{b}} V_{M^{-1}} = v \cdot \nabla_x + |\mathbf{b}| (v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 3/2, \quad (4.52)$$

où on désigne par  $|\mathbf{b}|$  la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ .

On remarque que l'espace  $\tilde{B}^2$  est invariant par rotation. Les estimations maximales pour  $K_{\mathbf{b}}$  sont donc équivalentes aux estimations maximales pour  $Q_{|\mathbf{b}|}$  (avec contrôle uniforme des constantes).

Comme dans le cas  $d = 2$ , la démonstration consiste à construire une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de rang 3, et, en tout point  $x \in \mathbb{T}^3$ , un élément  $Q_{|\mathbf{b}|}$  de  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  hypoelliptique. On déduira de l'estimation maximale obtenue pour chaque  $Q_{|\mathbf{b}|}$ , une estimation maximale pour l'opérateur  $Q_{|\mathbf{b}|}$ .

#### 4.4.2 Construction de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ :

On se met dans le cadre de la Proposition 4.2.11. On cherche donc une algèbre de Lie graduée  $\mathcal{G}$  de type 2 et de rang 3, une sous-algèbre  $\mathcal{H}$ , un élément  $\tilde{Q}_{\mathbf{b}}$  dans  $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$  et une forme linéaire  $\ell$  tels que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{Q}_{\mathbf{b}}) = Q_{\mathbf{b}}.$$

Pour cela, on détermine les conditions nécessaires sur les crochets entre les éléments générateurs de cette algèbre. Dans l'écriture de  $K_{\mathbf{b}}$  on voit apparaître les opérateurs différentiels de degré 1 à coefficients polynomiaux suivants :

$$\begin{aligned} X'_{1,1} &= \partial_{v_1} & X''_{1,1} &= i v_1 \\ X'_{2,1} &= \partial_{v_2} & X''_{2,1} &= i v_2 \\ X'_{3,1} &= \partial_{v_3} & X''_{3,1} &= i v_3 \\ X_{1,2} &= v \cdot \nabla_x \end{aligned} \quad (4.53)$$

$Q_{\mathbf{b}}$  s'écrit en effet comme polynôme de ces sept opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{b}} &= X_{1,2} - \sum_{k=1}^3 \left( (X'_{k,1})^2 + \frac{1}{4} (X''_{k,1})^2 - \frac{i}{4} (X'_{k,1} X''_{k,1} - X''_{k,1} X'_{k,1}) \right) \\ &\quad - i |\mathbf{b}| (X'_{1,1} X''_{2,1} - X'_{2,1} X''_{1,1}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

On regarde maintenant l'algèbre de Lie engendrée par ces sept opérateurs et leurs crochets. Ceci nous conduit à introduire quatre nouveaux éléments :

$$\begin{aligned} X_{2,2} &= [X'_{1,1}, X''_{1,1}] = [X'_{2,1}, X''_{2,1}] = i & X_{1,3} &= [X_{1,2}, X'_{1,1}] = \partial_{x_1} \\ X_{2,3} &= [X_{1,2}, X'_{2,1}] = \partial_{x_2} & X_{3,3} &= [X_{1,2}, X'_{3,1}] = \partial_{x_3}. \end{aligned}$$

On observe aussi les relations de commutations triviales comme

$$[X'_{1,1}, X'_{2,1}] = [X''_{1,1}, X''_{2,1}] = [X'_{j,1}, X_{k,3}] = [X''_{j,1}, X_{k,3}] = [X_{k,3}, X_{2,2}] = 0,$$

pour tout  $j, k = 1, 2, 3$ .

On construit alors une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  stratifiée de type 2 vérifiant les mêmes relations de commutateurs. Plus précisément  $\mathcal{G}$  est stratifiée de type 2 et nilpotente de rang 3, dont l'espace vectoriel sous-jacent est  $\mathbb{R}^{11}$ , où  $\mathcal{G}_1$  est engendrée par  $Y'_{1,1}, Y'_{2,1}, Y'_{3,1}, Y''_{1,1}, Y''_{2,1}$  et  $Y''_{3,1}$ ,  $\mathcal{G}_2$  est engendré par  $Y_{1,2}$  et  $Y_{2,2}$  et  $\mathcal{G}_3$  est engendrée par  $Y_{1,3}, Y_{2,3}$  et  $Y_{3,3}$ . Les lois de l'algèbre sont données par :

$$Y_{2,2} = [Y'_{1,1}, Y''_{1,1}] = [Y'_{2,1}, Y''_{2,1}], \quad Y_{1,3} = [Y_{1,2}, Y'_{1,1}], \quad (4.55)$$

$$Y_{2,3} = [Y_{1,2}, Y'_{2,1}], \quad Y_{3,3} = [Y_{1,2}, Y'_{3,1}], \quad (4.56)$$

$$[Y'_{1,1}, Y'_{2,1}] = [Y''_{1,1}, Y''_{2,1}] = 0, \quad (4.57)$$

$$[Y'_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y''_{j,1}, Y_{k,3}] = [Y_{k,3}, Y_{2,2}] = \dots = 0, \quad \forall j, k = 1, 2, 3. \quad (4.58)$$

On vérifie que l'application  $\pi$  (avec la convention que si  $\diamond = \emptyset$  il n'y a pas d'exposant)

$$\pi(Y_{i,j}^\diamond) = X_{i,j}^\diamond \text{ avec } i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, ', ''\} \quad (4.59)$$

définit une représentation  $\pi$  de  $\mathcal{G}$ . On observe maintenant que notre représentation  $\pi$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \pi(Y) &= P_1(Y)\partial_{v_1} + P_2(v_1; Y)\partial_{v_2} + P_3(v_1, v_2; Y)\partial_{v_3} \\ &\quad + P_4(v_1, v_2, v_3; Y)\partial_{x_1} + P_5(v_1, v_2, v_3, x_1; Y)\partial_{x_2} \\ &\quad + P_6(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2; Y)\partial_{x_3} + Q'(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, x_3; Y), \end{aligned}$$

où pour tout  $Y \in \mathcal{G}$ , il existe  $a_i, b_i, \beta, \gamma, \alpha_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, 2, 3$  tels que

$$\begin{aligned} Y &= a_1 Y'_{1,1} + a_2 Y'_{2,1} + a_3 Y'_{3,1} + b_1 Y''_{1,1} + b_2 Y''_{2,1} + b_3 Y''_{3,1} \\ &\quad + \beta Y_{1,2} + \gamma Y_{2,2} \\ &\quad + \alpha_1 Y_{1,3} + \alpha_2 Y_{2,3} + \alpha_3 Y_{3,3}, \end{aligned}$$

et les polynômes  $P_j$  avec  $j = 1, \dots, 6$  et  $Q'$  sont définis par

$$\begin{aligned} P_1(Y) &= a_1, \quad P_2(v_1; Y) = a_2, \quad P_3(v_1, v_2; Y) = a_3 \\ P_4(v_1, v_2, v_3; Y) &= cv_1 + \alpha_1, \quad P_5(v_1, v_2, x_1; Y) = \beta v_2 + \alpha_2, \\ P_6(v_1, v_2, v_3, x_1, x_2; Y) &= cv_3 + \alpha_3 \text{ et } Q'(v, x; Y) = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + d. \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 4.2.11, on obtient alors  $\pi \equiv \pi_{\ell, \mathcal{H}}$  avec

$$\begin{aligned} \ell &\in \mathcal{G}^*, \langle \ell, Y \rangle = Q'(0; Y) = d, \\ \mathcal{H} &:= \{Y \in \mathcal{G} / P_1(0; Y) = \dots = P_6(0; Y) = 0\} = \text{Vect}(Y_{1,1}'', Y_{2,1}'', Y_{3,1}'', Y_{1,2}, Y_{2,2}), \end{aligned}$$

Retournons à notre opérateur  $Q_{\mathbf{b}}$  qui a été écrit comme un polynôme de champs de vecteurs  $\{X_{j,2}, X_{j,3}, X_{j,1}', X_{j,1}''\}_{j=1,2,3}$  dans (4.17). On définit alors  $\tilde{Q}_{\mathbf{b}}$  comme le même polynôme mais cette fois-ci fonction des champs de vecteurs  $\{Y_{j,2}, Y_{j,3}, Y_{j,1}', Y_{j,1}''\}_{j=1,2,3}$  comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{|\mathbf{b}|} &= Y_{1,2} - \sum_{k=1}^3 \left( (Y_{k,1}')^2 + \frac{1}{4}(Y_{k,1}'')^2 - \frac{i}{4}(Y_{k,1}' Y_{k,1}'' - Y_{k,1}'' Y_{k,1}') \right) \\ &\quad - i|\mathbf{b}| (Y_{1,1}' Y_{2,1}'' - Y_{2,1}' Y_{1,1}''), \end{aligned} \quad (4.60)$$

et on vérifie que

$$\pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{K}_{\mathbf{b}}) = K_{\mathbf{b}}.$$

#### 4.4.3 Vérification du critère de Rockland

Soit  $\pi$  une représentation unitaire sur  $G$  dans  $V_{\pi}$  non triviale. On va montrer que l'opérateur  $\pi(\tilde{Q}_{|\mathbf{b}|})$  est un opérateur injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_{\pi}$  des vecteurs  $C^{\infty}$  de la représentation, s'identifie quand  $\pi$  est irréductible à  $S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$ . Soit  $u \in S(\mathbb{R}^{k(\pi)})$  tel que

$$\pi(\tilde{Q}_{|\mathbf{b}|})u = 0.$$

En appliquant les techniques utilisées dans la Sous-Section 3.2, on vérifie pour un système de générateurs la propriété suivante :

$$\pi(Y_{i,j}^{\diamond})u = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \text{ et } \diamond \in \{\emptyset, ', ''\}.$$

D'après la Remarque 4.2.18 dans le cas stratifié de type 2, on en déduit que

$$\pi(Y)u = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G},$$

et que  $u = 0$ .

L'opérateur  $\pi(\tilde{Q}_{|\mathbf{b}|})$  est donc injectif dans l'espace  $\mathcal{S}_{\pi}$  pour tout représentation irréductible et non triviale  $\pi$ . Par conséquent, d'après le Théorème 4.2.17 l'opérateur  $\tilde{Q}_{|\mathbf{b}|}$  est hypoelliptique maximal dans le groupe  $G$ . En appliquant le Théorème 4.2.19 ( $Q_{|\mathbf{b}|} = \pi_{\ell, \mathcal{H}}(\tilde{Q}_{|\mathbf{b}|})$ ), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| &+ \sum_{k=1}^2 \left( \|(X_{k,1}')^2 u\| + \|(X_{k,1}'')^2 u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^2 \|X_{k,1}' X_{\ell,1}'' u\| \\ &\leq C \left( \|Q_{|\mathbf{b}|}u\| + \|u\| \right), \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Par la conjugaison par la transformation canonique  $V_{M^{-1}}$  de l'opérateur  $Q_{|\mathbf{b}|}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \|X_{1,2}u\| + \sum_{k=1}^3 \left( \|(X'_{k,1})^2u\| + \|(X''_{k,1})^2u\| \right) + \sum_{k,\ell=1}^3 \|X'_{k,1}X''_{\ell,1}u\| \\ \leq C (\|K_{\mathbf{b}}u\| + \|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.62)$$

#### 4.4.4 Fin de la preuve

Pour la suite de la preuve, il n'y a aucune différence avec le cas  $d = 2$ , on utilise une partition de l'unité et on contrôle l'erreur, afin d'obtenir l'estimation maximale (4.3) pour l'opérateur initial  $K$  dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ . Pour plus de détails sur un résultat similaire sans champ magnétique mais avec un potentiel électrique, nous renvoyons au chapitre 9 du livre de B. Helffer et F. Nier [73].

**Remerciement.** L'auteure est reconnaissante à Bernard Helffer pour son aide importante et ses précieux conseils tout au long de la rédaction de ce chapitre. L'auteure remercie également le Centre Henri Lebesgue, l'ANR-11-LABX-0020-01 et la Faculté des sciences (Section I) de l'Université Libanaise pour leurs soutiens.



# Accrétivité Maximale pour des opérateurs de Fokker-Planck avec champ électromagnétique faiblement régulier

## Résumé

On considère l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ électromagnétique extérieur. On montre l'accrétivité maximale de l'opérateur considéré dans le cas où le champ électromagnétique a une faible régularité. La preuve s'appuie sur l'établissement d'une régularité Sobolev maximale pour des polynômes de champs des vecteurs à coefficients non réguliers.

## Abstract

The Fokker-Planck operator is considered with an external electromagnetic field. We show the maximal accretivity of the considered operator in the case when the electromagnetic field has low regularity. The proof is based on the establishment of a maximal Sobolev regularity for polynomials of vectors field with non-regular coefficient.

## A.1 Introduction

Dans l'étude des équations cinétiques de la forme suivante :

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F + \mathcal{F}(x, v) \cdot \nabla_v F - \mathcal{Q}(F) = 0, \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^d$  représente le champ de force extérieur et  $\mathcal{Q}$  désigne l'opérateur de collision (comme par exemple les opérateurs de Boltzmann, Landau ou de Fokker-Planck) il est fondamental de montrer que l'opérateur  $P = v \cdot \nabla_x + \mathcal{F} \cdot \nabla_v - \mathcal{Q}$  est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu. Ceci assure l'existence d'une solution du problème de Cauchy associé à l'équation (A.1) en appliquant le fameux Théorème de Hille-Yosida (cf [76, Théorème 3.1]) dans le cas où  $P$  est un opérateur maximal accréatif.

Pour l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ électrique extérieur régulier, de F. Hérau et F. Nier ont démontré dans [39] l'accrétivité maximale, en adaptant la preuve qu'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel régulier est essentiellement auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Ultérieurement B. Helffer et F. Nier ont donné dans [73, Proposition 5.5] une autre démonstration se basant sur l'hypoellipticité locale de l'opérateur résultant des travaux de L. Hörmander [53]. Dans ce chapitre, on poursuit l'étude du cas de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur  $B$ , commencée dans [59], en considérant une régularité beaucoup plus faible. Pour obtenir l'accrétivité maximale, on est conduit à substituer à l'argument d'hypoellipticité un argument de régularité pour des opérateurs à coefficients  $L^\infty$ , qu'on combinera avec des résultats plus classiques de Rothschild-Stein pour des opérateurs de Hörmander de type-2.

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on considère  $K_{V,B}$  l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck avec un champ électromagnétique extérieur  $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d(d-1)/2}$  tel que

$$K_{V,B} = v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v - (v \wedge B) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2, \quad (\text{A.2})$$

où  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse,  $x \in \mathbb{R}^d$  représente la variable d'espace,  $t > 0$  est le temps et  $V(x)$  désigne un potentiel électrique. On souligne que dans la définition précédente de notre opérateur, on a utilisé la notation  $(v \wedge B) \cdot \nabla_v$  qui s'écrit comme suit

$$(v \wedge B) \cdot \nabla_v = \begin{cases} b(x)(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 2 \\ b_1(x)(v_2 \partial_{v_3} - v_3 \partial_{v_2}) + b_2(x)(v_3 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_3}) \\ + b_3(x)(v_1 \partial_{v_2} - v_2 \partial_{v_1}) & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

L'opérateur  $K_{V,B}$  est considéré comme un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert réel  $H = L^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

On peut maintenant énoncer les théorèmes principaux de cette annexe. Dans le cas où  $V = 0$ , on note  $K_{0,B} = K_B$ , on obtient l'accrétivité maximale de l'extension minimale  $\mathbf{K}_B$  de  $K_B$ .

**Théorème A.1.1.** *Si  $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d(d-1)/2})$ , alors  $K_B$  est accréatif maximal .*

Ensuite, on étudie l'accrétivité maximale de l'extension minimale  $K_{V,B}$  de l'opérateur  $K_{V,B}$  défini dans (A.2), comme étant une perturbation de l'opérateur  $K_B$  comme suit :

$$K_{V,B} = K_B - \nabla_x V \cdot \nabla_v. \quad (\text{A.3})$$

On obtient le résultat suivant :

**Théorème A.1.2.** *Si  $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d(d-1)/2})$ ,  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\nabla V \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , alors  $K_{V,B}$  est maximal accréatif.*

De nombreux auteurs ont étudié l'accrétivité maximale de l'opérateur de Fokker-Planck sans champ magnétique mais avec un potentiel électrique  $C^\infty$  (cf Helffer-Nier [73, Proposition 5.5] et Hérau-Thomann [41, Lemme 3.14] pour une démonstration se basant sur la théorie des perturbations par un opérateur non borné).

Pour l'étude de l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique mais sans potentiel électrique, nous renvoyons les lecteurs à [59], pour l'étude du retour exponentiel à l'équilibre thermodynamique et la démonstration de l'accrétivité maximale avec un champ magnétique régulier. L'article [58] établit des estimations maximales sur ce modèle en supposant qu'on est sur le tore  $\mathbb{T}^d$  et que  $B$  est dans une classe de Hölder.

## A.2 Rappels

### A.2.1 Remarque préliminaire

En suivant les étapes de la preuve de l'accrétivité maximale de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck sans champ magnétique, donnée dans [73, Proposition 5.5], nous avons besoin d'une certaine régularité locale de l'opérateur suivant :

$$v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v - (v \wedge B) \cdot \nabla_v - \Delta_v = Y_0 + \sum_{j=1}^d Y_j^2,$$

où les vecteurs  $Y_j$  et  $Y_0$  sont définis comme suit :

$$Y_0 = v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v - (v \wedge B) \cdot \nabla_v \text{ et } Y_j = \partial_{v_j}, \forall j = 1, \dots, d.$$

Dans le cas où  $V$  et  $B$  sont  $C^\infty$ , cette régularité résulte immédiatement de l'hypoellipticité des opérateurs de Hörmander. La difficulté dans notre cas faiblement régulier est que le champ de vecteur  $Y_0$  est à coefficients  $L^\infty$ . On ne peut donc espérer qu'une régularité plus faible de type Sobolev.

## A.2.2 Rappels sur la régularité Sobolev pour des opérateurs de Type-2 de Hörmander

Dans cette partie, on va rappeler un résultat de régularité Sobolev pour une classe d'opérateurs différentiels apparaissant dans notre cas.

On considère l'opérateur différentiel de Hörmander de type-2 donné par :

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n X_j^2 + X_0,$$

où les champs des vecteurs  $X_0, \dots, X_n$  sont réels de classe  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On suppose de plus que les  $X_j$  avec  $j = 0, 1, \dots, n$  vérifient la condition de Hörmander suivante :

**Condition A.2.1.** *Il existe un entier  $r$  tel que les crochets des champs  $X_j$  de longueur inférieure ou égale à  $r$  engendrent, en chaque point  $z$  de  $\Omega$ ,  $T_z\Omega$  tout entier.*

L'hypoellipticité de l'opérateur  $\mathcal{L}$  et de l'opérateur de type-1,  $\sum_{j=1}^n X_j^2$ , a été étudié par L. Hörmander dans [53]. Ce qui nous intéresse dans la suite est d'étudier l'opérateur de type-2 dont l'hypoellipticité est également démontré dans [53].

**Définition A.2.2.** *Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $S^k(\Omega)$  le sous-espace de  $L^2(\Omega)$*

$$\{u \in L^2(\Omega) / X^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ tel que } |\alpha|_{1,2} \leq k\},$$

*muni de sa norme Hilbertienne naturelle*

$$\|u\|_{S^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|_{1,2} \leq k} \|X^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (\text{A.4})$$

où  $X^\alpha = X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_{n+1}}$ , pour tout  $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, n\}$  et

$$|\alpha|_{1,2} = \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j |\alpha_j|, \text{ avec } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j \in \{1, \dots, n\} \\ 2 & \text{si } \alpha_j = 0. \end{cases}$$

On note par  $S_{loc}^k(\Omega)$  l'espace des fonctions localement dans  $S^k(\Omega)$ .

Avec cette définition, on rappelle un résultat, dû à Rothschild-Stein dans [82], qui nous sera très utile dans la suite.

**Théorème A.2.3** (Théorème 18 dans [82]). *Si  $f$  et  $\mathcal{L}f \in L_{loc}^2(\Omega)$  alors  $f \in S_{loc}^2(\Omega)$ .*

Ce théorème utilise que les pôlynomes de champs de vecteurs sont à coefficients  $C^\infty$ , une hypothèse qui ne sera pas vérifiée dans notre cas. Le cas de coefficients moins réguliers a été étudié dans la littérature. On note par exemple que le cas de l'opérateur de la forme suivante :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} X_i X_j + X_0,$$

avec des coefficients  $a_{i,j}$  non réguliers a été étudié par C.J. Xu dans [98] et M. Bramanti et L. Brandolini dans [11], qui obtiennent des résultats de régularité hölderienne et Sobolev. On renvoie les lecteurs à l'article [75] pour l'étude de la régularité Hölderienne pour le cas particulier des opérateurs de type Kolmogorov à coefficients Hölderiens. Aucun de ces théorèmes ne s'applique directement. De plus ils nécessitent une hypothèse de régularité hölderienne dont nous n'aurons pas besoin pour nos résultats.

### A.3 Accrétivité de l'opérateur de Fokker-Planck magnétique avec faible régularité

#### A.3.1 Régularité Sobolev

Pour démontrer le Théorème A.1.1, on va montrer la régularité Sobolev associée au problème

$$K_B^* f = g \text{ avec } f, g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$$

où  $K_B^*$  est l'opérateur adjoint formel de  $K_B$  :

$$K_B^* = -v \cdot \nabla_x + (v \wedge B) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2.$$

Le résultat de régularité Sobolev est le suivant :

**Théorème A.3.1.** *Soit  $d = 2$  ou  $3$ . On suppose que  $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d(d-1)/2})$ . Alors, pour tout  $f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ , tel que  $K_B^* f = g$  avec  $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $f \in S_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ .*

Avant de montrer le Théorème A.3.1, il est important pour se ramener à un problème à coefficients réguliers de prouver une régularité partielle en  $v$  pour la famille d'opérateurs suivante :

**Proposition A.3.2.** *Soit  $c_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d, L_{loc}^2(\mathbb{R}^d))$  tel que*

$$\partial_{v_j} (c_j(x, v)) = 0, \forall j = 1, \dots, d. \quad (\text{A.5})$$

*Soit  $P_0$  l'opérateur de Kolmogorov :*

$$P_0 := -v \cdot \nabla_x - \Delta_v.$$

*Si  $h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$  vérifie*

$$\begin{cases} P_0 h = \sum_{j=1}^d c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j + \tilde{g} \\ h_j \text{ et } \tilde{g} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}), \forall j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

*alors  $\nabla_v h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^d)$ .*

Cette proposition sera démontrée dans la sous-section A.5.

### A.3.2 Démonstration du Théorème A.3.1

On termine maintenant la démonstration du Théorème A.3.1. L'idée clé de la preuve est de décomposer l'opérateur (A.2) comme suit :

$$K_B^* = P_0 + (v \wedge B) \cdot \nabla_v + v^2/4 - d/2. \quad (\text{A.7})$$

Pour  $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d(d-1)/2})$  et  $f, g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$  tels que

$$K_B^* f = g,$$

le but est de montrer que  $f \in S_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

#### Étape 1. Reformulation du problème :

En suivant la décomposition (A.7) de l'opérateur  $K_B^*$ , on peut considérer notre problème comme un cas particulier du problème généralisé suivant :

$$\begin{cases} P_0 f = \sum_{j=1}^d c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j + \tilde{g} \\ h_j = f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}), \\ \tilde{g} = g - \frac{v^2}{4} f + \frac{d}{2} f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}), \forall j = 1, \dots, d, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où :

$$c_j(x, v) = -(v \wedge B)_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d, L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)), \forall j = 1, \dots, d,$$

la notation  $L_j$  désignant la  $j$ -ième composante du vecteur  $L \in \mathbb{R}^d$ .

On remarque que les coefficients  $c_j$  vérifient la condition (A.5) de la Proposition A.3.2 car

$$\partial_{v_j}(v \wedge B)_j = 0, \forall j = 1, \dots, d.$$

La Proposition A.3.2 donne alors que  $\nabla_v f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

#### Étape 2. Application du Théorème A.2.3 :

Notre opérateur  $P_0$  s'écrit comme suit :

$$P_0 = -\Delta_v - v \cdot \nabla_x = - \left( \sum_{j=1}^d X_j^2 + X_0 \right), \quad (\text{A.9})$$

où les  $X_j$  pour  $j = 0, 1, \dots, d$  sont définis par :

$$X_j = \begin{cases} \partial_{v_j} & \text{si } j \neq 0, \\ v \cdot \nabla_x & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

D'après l'étape 1, le problème (A.8) est un cas particulier du problème de régularité du type  $P_0 f = \tilde{h}$ , avec  $f$  et  $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$  et  $\tilde{h}$  est donnée par :

$$\tilde{h} = \sum_{j=1}^d c_j(x, v) \partial_{v_j} f + g - \frac{v^2}{4} f + \frac{d}{2} f.$$

D'après l'étape 1, on a montré que  $\nabla_v f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$ , ce qui implique que  $\tilde{h} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$ . Finalement, en appliquant le Théorème A.2.3 on obtient que  $f \in S^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$ , ce qui achève la démonstration.

### A.3.3 Démonstration du Théorème A.1.1

L'accrétivité de l'opérateur  $K_B$  est claire. Pour montrer que l'opérateur est accréatif maximal, il suffit de montrer qu'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que l'opérateur  $T = K_B + \lambda_0 Id$  est d'image dense dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Prenons  $\lambda_0 = \frac{d}{2} + 1$  (en se basant sur [73]). Pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ , tel que

$$\langle u, (K_B + \lambda_0 Id) w \rangle = 0, \quad \forall w \in D(K_B), \quad (\text{A.10})$$

on doit montrer que  $u = 0$ .

Pour cela on observe que l'égalité (A.10) implique que :

$$K_B^* u = -\left(\frac{d}{2} + 1\right)u, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}),$$

où  $K_B^*$  est l'opérateur adjoint formel de  $K_B$  :

$$K_B^* = -v \cdot \nabla_x + (v \wedge B) \cdot \nabla_v - \Delta_v + v^2/4 - d/2.$$

Sous l'hypothèse que  $B \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et comme  $u \in D(K) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$ , le Théorème A.3.1 montre que  $u \in S^2_{loc}(\mathbb{R}^{2d})$ . La suite de la preuve est assez classique (la régularité obtenue pour  $u$  permet de justifier les intégrations par parties) et on se réfère à l'article [59, Proposition 3.1]. (cf aussi [73, Proposition 5.5]).

## A.4 Accrétivité maximale avec champ électromagnétique faiblement régulier

Pour  $d = 2$  ou  $3$ , on rappelle que  $K_{V,B}$  est l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck avec un champ électromagnétique extérieur tel que

$$K_{V,B} = K_B - \nabla_x V \cdot \nabla_v. \quad (\text{A.11})$$

L'opérateur  $K_{V,B}$  est considéré comme un opérateur non-borné sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . On va montrer le Théorème A.1.2, en utilisant la théorie de perturbation par un opérateur non borné.

### A.4.1 Rappels sur la théorie de perturbation par un opérateur non borné

La somme de deux opérateurs non bornés  $(A, D(A))$  et  $(B, D(B))$  est une opération très délicate et elle peut détruire des bonnes propriétés que les opérateurs peuvent avoir. Ceci est dû au fait que le domaine "naïf"

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B),$$

de la somme  $A + B$  peut être trop petit. On renvoie les lecteurs à [21, Exemple 1.2] pour des exemples concrets sur la situation.

Afin d'éviter cette difficulté, on suppose que la perturbation  $B$  est  $A$ -borné au sens de Kato comme suit :

**Définition A.4.1.** Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  et  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  deux opérateurs non bornés sur un espace de Banach  $X$ . L'opérateur  $B$  est appelé  $A$ -borné si

$$\begin{aligned} D(A) &\subset D(B), \\ \exists a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \|B(x)\| &\leq a\|A(x)\| + b\|x\|. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La borne- $A$  de  $B$  est définie alors par

$$a_0 = \inf \{ a \geq 0 / \exists b \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que (A.12) est satisfaite } \}.$$

**Théorème A.4.2** (Théorème 2.7 de [21]). Soit  $(A, D(A))$  un opérateur maximal accréatif et  $(B, D(B))$  est accréatif et  $A$ -borné avec  $a_0 < 1$ , alors l'opérateur  $(A + B, D(A))$  est accréatif maximal.

### A.4.2 Démonstration du Théorème A.1.2

Il suffit de montrer que  $\mathcal{B} = -\nabla_v V \cdot \nabla_v$  est un opérateur  $\mathbf{K}_B$ -borné où la borne- $\mathbf{K}_B$  notée  $a_0$  satisfait  $a_0 < 1$ . Soit  $f \in D(K_B)$  on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 &= \|\nabla_x V \cdot \nabla_v f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \leq \|\nabla_x V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 \|\nabla_v f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \\ &\leq C_0 \|\nabla_v f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \\ &= C_0 \langle K_B f, f \rangle \\ &\leq C_0 \|K_B f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité classique, pour tout  $\eta > 0$ , on obtient l'existence de  $C_\eta > 0$  telle que

$$\|\nabla_x V \cdot \nabla_v f\|_{L^2}^2 \leq C_0^2 \eta \|K_B f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + C_\eta \|f\|_{L^2}^2.$$

Ensuite, on choisit  $\eta$  tel que  $C_0^2 \eta < 1$ . D'après le Théorème A.1.1 l'opérateur  $\mathbf{K}_B$  est maximal accréatif, et en appliquant le Théorème A.4.2, on obtient que l'opérateur  $\mathbf{K}_{V,B}$  est maximal accréatif.

**Remarque A.4.3.** On peut aussi montrer l'accrétivité maximale de l'opérateur  $K_{V,B}$ , en prouvant la régularité Sobolev du problème  $K_{V,B}^* f = g$  avec  $f$  et  $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$  en notant qu'on peut reformuler le problème comme suit :

$$\begin{cases} P_0 f = \sum_{j=1}^d c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j + \tilde{g} \\ h_j = f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}), \\ \tilde{g} = g - \frac{v^2}{4} f + \frac{d}{2} f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d}), \forall j = 1, \dots, d. \end{cases}$$

Ici les coefficients  $c_j$  sont définis par :

$$c_j(x, v) = -(v \wedge B)_j - \partial_{x_j} V \in L^\infty(\mathbb{R}^d, L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)), \forall j = 1, \dots, d.$$

On note que les coefficients  $c_j$  vérifient la condition (A.5) de la Proposition A.3.2 car

$$\partial_{v_j}(v \wedge B)_j = 0 \text{ et } \partial_{v_j} \partial_{x_j} V = 0, \forall j = 1, \dots, d.$$

**Remarque A.4.4.** Le Théorème A.4.2 de perturbation ne s'applique pas pour la perturbation magnétique. En effet, même si l'opérateur  $K_B$  admet la décomposition suivante :

$$K_B = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

où  $\mathcal{A} = v \cdot \nabla_x - \Delta_v + v^2/4 - d/2$  et  $\mathcal{B} = -(v \wedge B) \cdot \nabla_v$ , l'opérateur  $\mathcal{B}$  n'est pas un opérateur  $\mathcal{A}$ -borné,  $v \wedge B$  n'appartenant pas à  $L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ .

## A.5 Démonstration de la proposition A.3.2

Soit  $h$  vérifiant le problème (A.6). On peut travailler au voisinage d'un point  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2d}$  i.e dans une boule  $B((x_0, v_0), r_0)$  pour un  $r_0 > 0$ . On doit montrer que  $\nabla_v h \in L^2(B((x_0, v_0), r_0/2))$ .

### A.5.1 Étape 1

On suppose donc que  $h \in H^2(\mathbb{R}^{2d})$  est à support dans une boule  $B((x_0, v_0), r_0)$  avec  $r_0 > 0$  et on va établir des inégalités a priori. Multiplions l'équation du problème (A.6) par  $h$  et intégrons par rapport à  $x$  et  $v$ , on obtient

$$\langle P_0 h, h \rangle = \sum_{j=1}^d \langle c_j \partial_{v_j} h_j, h \rangle + \langle \tilde{g}, h \rangle, \quad (\text{A.13})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire hilbertien sur l'espace de Hilbert réel  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

Commençons par calculer le côté gauche de l'égalité précédente. On a

$$\begin{aligned} \langle P_0 h, h \rangle &= \langle (v \cdot \nabla_x - \Delta_v) h, h \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (v \cdot \nabla_x h) h \, dx \, dv - \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\Delta_v h) h \, dx \, dv. \end{aligned}$$

Puis en effectuant des intégrations par parties par rapport à  $x$  et  $v$  dans l'égalité précédente, on obtient

$$\langle P_0 h, h \rangle = \|\nabla_v h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

On a ici utilisé que l'opérateur  $v \cdot \nabla_x$  est formellement anti-adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

On estime maintenant chaque terme dans le membre de droite de l'égalité (A.13). En utilisant l'hypothèse (A.5) et en effectuant des intégrations par parties par rapport à  $v_j$ , on a

$$\sum_{j=1}^d \langle c_j \partial_{v_j} h_j, h \rangle = - \sum_{j=1}^d \langle c_j h_j, \partial_{v_j} h \rangle.$$

Ensuite en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire, on obtient

$$\left| \sum_{j=1}^d \langle c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j, h \rangle \right| \leq \sum_{j=1}^d \|c_j h_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|\partial_{v_j} h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

On obtient que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$  tel que

$$\left| \sum_{j=1}^d \langle c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j, h \rangle \right| \leq \eta \|\nabla_v h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + C_\eta \sum_{j=1}^d \|c_j h_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

De même on obtient

$$|\langle \tilde{g}, h \rangle| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

En choisissant  $\eta < 1$ , on obtient l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla_v h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \leq C \left( \sum_{j=1}^d \|c_j h_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + \|\tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \right). \quad (\text{A.14})$$

## A.5.2 Étape 2 : Solution générale

### Cadre général et remarque utile :

Pour avoir la régularité énoncée dans la Proposition A.3.2 pour une solution  $h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$  du problème (A.6), sans hypothèse sur le support. On introduit deux fonctions de troncatures  $\chi_1$  et  $\chi_2$  telles que

$$\begin{cases} \chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}), & \text{Supp } \chi_1 \subset B((x_0, v_0), r_0) \\ \chi_1 = 1 \text{ in } B((x_0, v_0), \frac{r_0}{2}) \text{ and } \chi_1 = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{2d} \setminus B((x_0, v_0), r_0) \\ \chi_1 \chi_2 = \chi_1. \end{cases}$$

où  $r_0 > 0$  est fixé au début de la preuve.

Soit  $h_\delta$  la fonction définie par :

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R}^{2d}, h_\delta(x, v) = \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 h(x, v), \text{ pour } \delta > 0, \quad (\text{A.15})$$

où l'opérateur  $(1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1}$  est défini via la transformation de Fourier.

On note que  $h_\delta \in H^2(\mathbb{R}^{2d})$  est à support dans  $B((x_0, v_0), r_0)$ . En utilisant le théorème de convergence dominée on montre que

$$h_\delta \rightarrow \chi_1 h \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^{2d}) \text{ quand } \delta \rightarrow 0. \quad (\text{A.16})$$

On va maintenant montrer qu'il existe une constante  $C$  et  $\delta_0$  tels que  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$

$$\|\nabla_v h_\delta\| \leq C. \quad (\text{A.17})$$

Avant de donner la démonstration, on fera la remarque simple et utile dans la suite :  
Si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux opérateurs différentiels indépendants de  $\delta$  d'ordre  $k_1$  et  $k_2$  respectivement à coefficients de classe  $C_0^\infty$  tels que

$$k_1 + k_2 \leq k \leq 2,$$

alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\|Q_1 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} Q_2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq C \delta^{-k} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}, \forall u \in L^2(\mathbb{R}^{2d}). \quad (\text{A.18})$$

## Reformulation et relations de commutations

Retournons à la démonstration de l'inégalité (A.17). On rappelle que  $h$  satisfait l'équation suivante :

$$P_0 h = \sum_{j=1}^d c_j(x, v) \partial_{v_j} h_j + \tilde{g}. \quad (\text{A.19})$$

L'objectif est de suivre la démarche de la première étape pour  $h_\delta$  avec cependant quelques différences. À partir de (A.19), cherchons l'équation vérifiée par  $h_\delta$ . On a

$$P_0 h_\delta = \chi_2 (1 - \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 P_0 h + [\chi_2 (1 - \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1, P_0]. \quad (\text{A.20})$$

Pour contrôler le commutateur dans le membre de droite, on va utiliser les relations de commutations suivantes :

$$[\varphi, P_0] = -\Delta_v \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi - 2 \nabla_v \varphi \cdot \nabla_v, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}), \quad (\text{A.21})$$

$$[\varphi, \partial_{v_j}] = -\partial_{v_j} \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d}), \forall j = 1, \dots, d, \quad (\text{A.22})$$

$$[(1 - \delta^2 \Delta_{x,v}), P_0] = \delta^2 [\Delta_{x,v}, v \cdot \nabla_x] = 2 \delta^2 \sum_{j=1}^d \partial_{v_j} \partial_{x_j}, \quad (\text{A.23})$$

$$[(1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1}, P_0] = -(1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} [(1 - \delta^2 \Delta_{x,v}), P_0] (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1}. \quad (\text{A.24})$$

En utilisant les relations de commutations précédentes et les égalités (A.19) et (A.20), on réécrit  $P_0 h_\delta$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_0 h_\delta &= \sum_{j=1}^d \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j \partial_{v_j} h_j + B_0 \tilde{g} \\ &\quad + B_1 h + 2 \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \nabla_v \chi_1 \cdot \nabla_v h \\ &\quad + B_2 h + 2 \nabla_v \chi_2 \cdot \nabla_v \left( (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 h \right). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ici les  $B_j$  pour  $j = 0, 1, 2$  sont les opérateurs uniformément bornés par rapport à  $\delta$  sur  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  (d'après (A.18))

$$B_0 = \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1, \quad (\text{A.26})$$

$$B_1 = \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} (\Delta_{x,v} \chi_1) + \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} (v \cdot \nabla_x \chi_1), \quad (\text{A.27})$$

$$B_2 = \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \delta^2 R (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1, \quad (\text{A.28})$$

où  $R$  est l'opérateur de second ordre

$$R = [\Delta_{x,v}, v \cdot \nabla_x] = 2 \sum_{j=1}^d \partial_{v_j} \partial_{x_j}. \quad (\text{A.29})$$

### Démonstration de la borne uniforme de $\|\nabla_v h_\delta\|$

Dans le but de montrer l'estimation (A.17), on multiplie l'égalité (A.25) par  $h_\delta$

$$\begin{aligned} \langle P_0 h_\delta, h_\delta \rangle &= \sum_{j=1}^d \langle \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j \partial_{v_j} h_j, h_\delta \rangle + \langle B_0 \tilde{g}, h_\delta \rangle \\ &\quad + \langle B_1 h, h_\delta \rangle + \langle 2 \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \nabla_v \chi_1 \cdot \nabla_v h, h_\delta \rangle \\ &\quad + \langle B_2 h, h_\delta \rangle + \langle 2 \nabla_v \chi_2 \cdot \nabla_v \left( (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 h \right), h_\delta \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

et on estime chaque terme du membre de droite de l'égalité précédente.

Pour le premier terme on utilise la relation (A.22) pour commuter  $\partial_{v_j}$  et  $\chi_k$  pour  $k = 1, 2$ , on a alors

$$\langle \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j \partial_{v_j} h_j, h_\delta \rangle = I_0 + I_1 + I_2,$$

où les  $I_j$  sont définies par

$$I_0 = \langle \partial_{v_j} \left( \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j h_j \right), h_\delta \rangle \quad (\text{A.31})$$

$$I_1 = \langle \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} (\partial_{v_j} \chi_1) c_j h_j, h_\delta \rangle \quad (\text{A.32})$$

$$I_2 = \langle (\partial_{v_j} \chi_2) (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j h_j, h_\delta \rangle \quad (\text{A.33})$$

Pour estimer  $I_0$ , on intègre par parties par rapport à  $v_j$

$$I_0 = - \langle \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j h_j, \partial_{v_j} h_\delta \rangle ,$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|I_0| \leq \|B_0 (c_j h_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|\partial_{v_j} h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} .$$

Puis en utilisant la bornitude uniforme de l'opérateur  $B_0$  et l'inégalité classique on obtient que pour tout  $\eta' > 0$ , il existe  $C_{\eta'} > 0$  tel que

$$|I_0| \leq C_{\eta'} \|c_j h_j\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \eta' \|\partial_{v_j} h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 . \quad (\text{A.34})$$

Ensuite, les deux termes  $|I_1|$  et  $|I_2|$  vérifient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|\chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} (\partial_{v_j} \chi_1) c_j h_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &\leq C \|c_j h_j\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \|(\partial_{v_j} \chi_2) (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j h_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &\leq C \|c_j h_j\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} . \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

En utilisant les estimations (A.34)-(A.36), on obtient que pour tout  $\eta' > 0$ , il existe  $C_{\eta'} > 0$  tel que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^d \langle \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 c_j \partial_{v_j} h_j, h_\delta \rangle \right| \\ &\leq C_{\eta'} \sum_{j=1}^d \|c_j h_j\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \eta' \|\nabla_v h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 + C_{\eta'} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

On montre pour le quatrième et le sixième terme de (A.30) que pour tous  $\eta''$  et  $\eta''' > 0$ , il existe  $C_{\eta''}$  et  $C_{\eta'''} > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \langle 2 \chi_2 (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \nabla_v \chi_1 \cdot \nabla_v h, h_\delta \rangle &\leq C_{\eta''} \|h\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \eta'' \|\nabla_v h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \\ &\quad + C_{\eta''} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \langle 2 \nabla_v \chi_2 \cdot \nabla_v ((1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1} \chi_1 h), h_\delta \rangle &\leq C_{\eta'''} \|h\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \eta''' \|\nabla_v h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \\ &\quad + C_{\eta'''} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Il reste à estimer les 3 termes restants correspondant aux produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} |\langle B_0 \tilde{g}, h_\delta \rangle| &\leq \|B_0 \tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ |\langle B_1 h, h_\delta \rangle| &\leq \|B_1 h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ |\langle B_2 h, h_\delta \rangle| &\leq \|B_2 h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} . \end{aligned}$$

On applique (A.18), on obtient l'existence des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que

$$\langle B_0 \tilde{g}, h_\delta \rangle \leq C_1 \|\tilde{g}\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}, \quad (\text{A.40})$$

$$\langle B_1 h, h_\delta \rangle \leq C_2 \|h\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}. \quad (\text{A.41})$$

Pour estimer la norme  $\|B_2 h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$ , on applique (A.18) (avec  $Q_1 = (1 - \delta^2 \Delta_{x,v})^{-1}$  et  $Q_2 = \delta^2 R$  où  $R$  est défini dans (A.29)). On obtient aussi l'existence de  $C_3$  et  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\delta \in (0, \delta_0]$

$$|\langle B_2 h, h_\delta \rangle| \leq C_3 \|h\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))} \|h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}. \quad (\text{A.42})$$

Finalement, en utilisant les estimations (A.37)-(A.42), et en choisissant  $\eta', \eta''$  et  $\eta''' > 0$  tels que  $\eta' + \eta'' + \eta''' < 1$ , on obtient l'existence d'une constante  $\tilde{C}$  et  $\delta_0 > 0$  telle que  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$

$$\|\nabla_v h_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 \leq \tilde{C} \left( \sum_{j=1}^d \|c_j h_j\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \|\tilde{g}\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 + \|h\|_{L^2(B((x_0, v_0), r_0))}^2 \right). \quad (\text{A.43})$$

Ceci achève la démonstration de (A.17).

### A.5.3 Étape 3 : Dédire une borne locale et uniforme de $\nabla_v h$

Soit  $h \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  qui vérifie le problème (A.6). D'une part, d'après (A.16) on sait que

$$h_\delta \rightarrow \chi_1 h \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^{2d}) \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Ceci implique que

$$h_\delta \rightarrow \chi_1 h \text{ et } \nabla_v h_\delta \rightarrow \nabla_v(\chi_1 h) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}) \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

D'autre part, d'après l'inégalité (A.43), on obtient que  $(\nabla_v h_\delta)_\delta$  est borné dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$  pour  $\delta \in (0, \delta_0]$ . Par faible compacité, il existe une sous-suite  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 et une fonction  $u \in L^2(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^{2d})$  telles que

$$\nabla_v h_{\delta_k} \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}) \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

d'où  $\nabla_v(\chi_1 h) = u$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$ . Alors  $\nabla_v h \in L^2(B((x_0, v_0), r_0/2), \mathbb{R}^d)$ .

### A.5.4 Conclusion

Reprenant les informations obtenues près de chaque point  $(x_0, v_0)$ , on en déduit que  $\nabla_v h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^{2d})$ , ce qui termine la démonstration de la proposition A.3.2.

## Hypocoercivité mode par mode

### Résumé

Dans cette partie, on va montrer le retour exponentiel à l'équilibre dans l'espace  $L^2$  avec un poids exponentiel  $\mu^{-1/2}$ , en utilisant l'approche dite "hypocoercivité mode par mode".

### B.1 Autre démonstration de l'hypocoercivité de Fokker-Planck magnétique dans $L^2(\mu^{-1/2})$

On s'intéresse à l'équation cinétique inhomogène de Vlasov-Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur fixé  $B_e$  suivante :

$$\begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v F = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) F \\ F(0, x, v) = F_0(x, v) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec  $F$  est la densité de distribution,  $t \geq 0$  le temps,  $x \in \mathbb{T}^3$  la position et  $v \in \mathbb{R}^3$  la vitesse. On rappelle que la maxwellienne associée au système est

$$\mu(v) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

On note par  $L^2(\mu^{-1/2})$  l'espace de Hilbert réel muni de la norme  $\|\cdot\|$  suivante :

$$\forall h \in L^2(\mu^{-1/2}), \quad \|h\|^2 = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |h(x, v)|^2 \mu^{-1} dx dv,$$

---

et le produit scalaire réel associé  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur l'espace  $L^2(\mu^{-1/2})$  définit par

$$\forall g, h \in L^2(\mu^{-1/2}), \quad \langle h, g \rangle = \iint hg \mu^{-1} dx dv.$$

On note  $T = v \cdot \nabla_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v$  et  $L = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v)$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème B.1.1.** *Soit  $B_e \in L^\infty(\mathbb{T}^3)$  et  $F_{in} \in L^2(\mu^{-1/2})$  tel que*

$$\langle F_{in} \rangle := \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} F_{in} dx dv = 0.$$

*Alors  $L - T$  est un générateur d'un  $C^0$ -semi groupe  $e^{t(L-T)}$  et  $F(t) = e^{t(L-T)} F_{in} \in L^2(\mu^{-1/2})$  et il existe  $C > 0$  tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{t(L-T)} F_{in}\| \leq C e^{-\lambda t} \|F_{in}\|, \quad (\text{B.2})$$

*où  $\lambda > 0$  est explicite en fonction du champ magnétique  $B_e$ .*

On note que le Théorème B.1.1 est démontré dans [59] en utilisant la méthode d'hypocoercivité développée dans [35, 94] et que l'existence de solution au sens du semi groupe sous une condition de type  $L^\infty$  sur le champ magnétique est montré dans l'annexe A. Dans cette annexe, on donne une démonstration suivant l'approche d'hypocoercivité mode par mode.

### B.1.1 Hypocoercivité mode par mode

L'approche d'hypocoercivité mode par mode a été élaboré dans [25, 19, 10]. Cette méthode est inspirée à la fois de la méthode d'hypocoercivité donnée dans [35] et à la méthode de fonction de compensation de Kawashima donnée par exemple dans [24, 61].

On va essayer d'expliquer le contexte de cette méthode. Considérons l'équation d'évolution suivante :

$$\partial_t f + T f = L f, \quad (\text{B.3})$$

où  $T$  et  $L$  sont respectivement un opérateur de transport général et un opérateur de collision linéaire. On va rappeler le Théorème suivant :

**Théorème B.1.2** (Théorème 3 dans [10]). *Soit  $L$  et  $T$  deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  avec la norme induite  $\|\cdot\|$ . Supposons que  $L$  est un opérateur auto-adjoint et  $T$  est un opérateur anti-adjoint. Soit  $\Pi$  la projection orthogonale sur le noyau de l'opérateur  $L$  définit*

$$A := (Id + (T\Pi)^* T\Pi)(T\Pi)^*$$

*où  $*$  désigne l'opérateur adjoint par rapport au produit scalaire hilbertien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Nous supposons qu'il existe des constantes positives  $\lambda_m, \lambda_M$  et  $C_M$ , de sorte que, pour tout  $F \in \mathcal{H}$ , les propriétés suivantes sont valables :*

---

(H1)- *Coercivité microscopique :*

$$-\langle Lf, f \rangle \geq \lambda_m \|(Id - \Pi)f\|^2.$$

(H2)- *Coercivité macroscopique :*

$$\|T\Pi f\|^2 \geq \lambda_M \|\Pi f\|^2.$$

(H3)- *Dynamique macroscopique et parabolique :*

$$\Pi T \Pi f = 0.$$

(H4)- *Bornitude de l'opérateur d'auxiliaire :*

$$\|AT(Id - \Pi)f\| + \|ALf\| \leq C_M \|(Id - \Pi)f\|.$$

Alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\|e^{(L-T)t}\|^2 \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\text{où } \lambda = \frac{\lambda_M}{3(1 + \lambda_M)} \min \left\{ 1, \lambda_m, \frac{\lambda_m \lambda_M}{(1 + \lambda_M) C_M^2} \right\} > 0.$$

On note que dans les applications aux opérateurs cinétiques linéaires de noyau de collision de dimension 1, la coercivité macroscopique ne vaut que pour les fonctions à moyenne nulle et est une conséquence de l'inégalité de Poincaré.

## B.2 Démonstration du Théorème B.1.1

L'idée est d'appliquer le Théorème B.1.2 au problème (B.1). On note  $\Pi$  le projecteur orthogonal sur le noyau de l'opérateur  $L$  dans l'espace  $L^2(\mu^{-1/2})$  :

$$\Pi h = \mu \int_{\mathbb{R}^3} h dv = \mu \rho(h).$$

*Démonstration du Théorème B.1.1.* On considère  $\mathcal{H} = L^2(\mu^{-1/2})$ , les opérateurs

$$LF = \partial_v \cdot (\partial_v + v)F, \quad TF = v \cdot \partial_x - (v \wedge B_e) \cdot \nabla_v F.$$

Vérifions les hypothèses du Théorème B.1.2. Tout d'abord, montrons la condition de coercivité microscopique. En effectuant des intégrations par parties en variable  $v$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle LF, F \rangle &= \langle \nabla_v \cdot (\nabla_v + v)F, F \rangle = - \int_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\nabla_v (F/\mu)|^2 \mu dx dv \\ &\leq -\lambda_p \|(Id - \Pi)F\|^2 \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Poincaré donnée dans [65, Lemme 3.6] où  $\lambda_p > 0$  est la constante de Poincaré sur l'espace  $\mathcal{H}$ . Donc (H2) est vérifié avec  $\lambda_m = \lambda_p > 0$ . Ensuite, on passe à la condition de coercivité macroscopique. L'opérateur  $T\Pi$  est défini comme suit :

$$T\Pi F = v \cdot \nabla_x \left( \mu(v) \left( \int F dv \right) \right) = v \cdot \nabla_x \rho(F(t)) \mu(v).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré en espace sur le tore  $\mathbb{T}^3$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} \|T\Pi F\|^2 &= \int \mu^2(v) |v \cdot \nabla_x \rho(t, x)|^2 \mu^{-1}(v) dx dv \\ &= \alpha \int |\nabla_x \rho(t, x)|^2 dx \\ &= \alpha \|\nabla_x \Pi F\|^2 \geq C_P \alpha \|\Pi F\|^2, \end{aligned}$$

où  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu(v) dv$  et  $C_P > 0$  est le constant de Poincaré. Ceci implique que l'hypothèse (H2) est vérifiée avec  $\lambda_M = 2 \alpha C_P > 0$ .

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^3} v \mu(v) dv = 0,$$

on a

$$\Pi T \Pi F = 0, \quad \forall F \in \mathcal{H},$$

et la condition de dynamique macro-parabolique (H3) est donc vraie.

Maintenant, on va vérifier la condition de bornitude de l'opérateur auxiliaire  $A$  donné par

$$AF := (1 - \alpha \Delta_x)^{-1} \nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v' F(v') dv' \right) \mu(v).$$

où  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu(v) dv$ . Commençons par calculer

$$ALF := (1 - \alpha \Delta_x)^{-1} \nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v' LF(v') dv' \right) \mu(v). \quad (\text{B.4})$$

Pour expliciter  $ALF$ , on note qu'en effectuant des intégrations par parties par rapport à  $v$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v LF(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} = \int_{\mathbb{R}^3} v \nabla_v \cdot (\nabla_v + v) F dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \mu \nabla_v \left( \frac{F}{\mu} \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F}{\mu} \nabla_v \mu dv \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_v \mu^{1/2} \times \frac{F}{\mu^{1/2}} dv, \end{aligned}$$

on a utilisé l'égalité suivante

$$\frac{\nabla_v \mu}{\mu} = 2 \frac{\nabla_v \mu^{1/2}}{\mu^{1/2}}.$$

---

Alors on peut réécrire l'égalité (B.4) sous la forme suivante :

$$ALF = 2(1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v'} \mu^{1/2} \times \frac{F}{\mu^{1/2}} dv' \right) \mu(v).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de l'opérateur  $(1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\nabla_x$  sur  $L^2$  (en tant qu'opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1), on obtient

$$\|ALF\| \leq 2C_\alpha \sqrt{\alpha} \|(Id - \Pi)F\|.$$

où  $C_\alpha = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^3} \left( \frac{|\xi|}{1 + \alpha|\xi|^2} \right) > 0$  est la constante de bornitude de l'opérateur  $(1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\nabla_x$  sur  $L^2$ . On passe maintenant à l'opérateur  $AT(Id - \Pi)$ , on a

$$\begin{aligned} AT(I - \Pi)F &= (1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v' T(Id - \Pi)F(v') dv' \right) \mu(v) \\ &= (1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\nabla_x \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} v' (v' \cdot \nabla_x - (v' \wedge B_e) \cdot \nabla_v) (Id - \Pi)F(v') dv' \right) \mu(v) \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant la continuité de l'opérateur  $(1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\Delta_x$  sur  $L^2$ , on obtient

$$\|AT(Id - \Pi)F\| \leq \alpha(1 + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)})C'_\alpha \|(Id - \Pi)F\|,$$

où  $C'_\alpha = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^3} \left( \frac{|\xi|^2}{1 + \alpha|\xi|^2} \right) > 0$  est la constante de bornitude de l'opérateur  $(1 - \alpha\Delta_x)^{-1}\Delta_x$  sur  $L^2$ . La condition (H4) est donc vérifiée avec

$$C_M = 2C_\alpha \sqrt{\alpha} + \alpha(1 + \|B_e\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)})C'_\alpha > 0.$$

Par conséquent, la preuve du Théorème B.1.1 est complète par application directe du Théorème B.1.2 avec un taux de décroissance donné par

$$\lambda = \frac{\lambda_M}{3(1 + \lambda_M)} \min \left\{ 1, \lambda_m, \frac{\lambda_m \lambda_M}{(1 + \lambda_M) C_M^2} \right\} > 0.$$

□



## Conclusion

Cette thèse est consacrée sur l'étude de l'équation de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur. Plus précisément, dans le chapitre 2, nous avons prouvé le retour à l'équilibre des solutions de cette équation avec un taux exponentiel dans des espaces de type  $L^1$  avec un poids polynomial ainsi dans des espaces de Sobolev non-classiques avec un poids polynomial. La preuve de ces résultats est basé sur des premiers résultats d'hypo-coercivité obtenus dans le même chapitre dans les espaces de Hilbert  $L^2$  et  $H^1$  avec un poids exponentiel, puis nous avons pu étendre ces résultats aux espaces beaucoup plus large en appliquant la méthode d'élargissement des espaces de Banach. Ensuite, dans le chapitre 3, nous sommes intéressés à obtenir des régularités en variables de vitesse des solutions de l'équation considérée. Pour cela, nous avons montré sous une hypothèse de type Lipschitzienne sur le champ magnétique une estimation de type "hypoellipticité maximale". Cette dernière nous a donnée la caractérisation optimale du domaine maximale de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique. Cela nous permet en particulier d'obtenir la régularité dans des variables vitesses. La preuve de cette estimation est basé sur une approche nilpotente pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs et en incluant la notion de la représentation sur une algèbre de Lie. Ce travail a profité aussi d'un appendice sur l'accrétivité maximale dans le cas où le champ magnétique non régulier. Cette question nécessite de prouver des régularités faibles en suivant la preuve originale de Hörmander sur l'hypoellipticité de l'opérateur associé dans le cas lisse et nous combinons avec des résultats plus classiques de Rothschild-Stein pour des opérateurs de Hörmander de type-2. Finalement, nous nous sommes intéressés à étudier l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck quadratique avec un champ magnétique constant et en présence d'un potentiel électrique quadratique. Le but de cette étude est d'expliciter l'influence du champ magnétique sur le retour à l'équilibre. Nous avons commencé par décomposer l'opérateur considéré en opérateur de création et d'annihilation afin d'associer cet opérateur à une matrice de taille  $d \times d$ . Puis nous avons calculé le spectre de l'opérateur en fonction du spectre de sa matrice associée, en suivant l'étude abstraite de Aleman-Viola pour des opérateurs quadratiques symétrisés. Nous avons prouvé en particulier que le trou spectral de l'opérateur étudié tend vers zéro lorsque le champ magnétique tend vers l'infini. Cela nous a dit que le champ magnétique ralentit le retour à l'équilibre. En plus, nous avons exprimé explicitement la norme exacte de la matrice exponentielle  $-tM_{a,b}$ , qui coïncide avec la norme du semi-groupe associé à l'opérateur considéré proche de l'équilibre. La preuve de ce dernier résultat est basé sur la méthode

---

d'interpolation de Lagrange et des propriétés algébriques que nous avons observé sur la structure algébrique de sa matrice associé. En revanche, nous avons montré des estimations explicites et précises de cette dernière norme, ainsi des estimations uniformes en temps lorsque le champ magnétique tend vers l'infini. Et nous avons fini ce chapitre par des illustrations numériques qui justifient les résultats théoriques obtenus.

## Bibliographie

- [1] A. ALEMAN et J. VIOLA, « On weak and strong solution operators for evolution equations coming from quadratic operators », in : *Journal of Spectral Theory* 8.1 (2018), p. 33–122.
- [2] A. ALEMAN et J. VIOLA, « Singular-value decomposition of solution operators to model evolution equations », in : *International Mathematics Research Notices* 2015.17 (2014), p. 8275–8288.
- [3] C. ANÉ, D. BAKRY et M. LEDOUX, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, t. 10, Société mathématique de France Paris, 2000.
- [4] M. BADSI, « Mathematical study and numerical simulations of bi-kinetic plasma sheaths. », Theses, UPMC - Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, oct. 2016, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01378881>.
- [5] D. BAKRY et al., « A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures », in : *Electronic Communications in Probability* 13 (2008), p. 60–66.
- [6] R BEALS, « Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe de Lie nilpotent », in : *Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976/1977 : Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle* (1976), p. 1–8.
- [7] J. BEDROSSIAN et F. WANG, « The linearized Vlasov and Vlasov-Fokker-Planck equations in a uniform magnetic field », in : *arXiv preprint arXiv :1805.10756* (2018).
- [8] P BOLLEY, J CAMUS et B HELFFER, « Sur une classe d’opérateurs partiellement hypoelliptiques », in : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) 1974* (1975), p. 1–16.
- [9] P. BOLLEY, J. CAMUS et J. NOURRIGAT, « La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels », in : *Communications in Partial Differential Equations* 7.2 (1982), p. 197–221.
- [10] E. BOUIN et al., « Hypocoercivity without confinement », in : *arXiv preprint arXiv :1708.06180* (2017).

- 
- [11] M. B.-L. BRANDOLINI, « Lp estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups », in : *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 58.4 (2000), p. 389–433.
  - [12] M. J. CÁCERES, J. A. CARRILLO et T. GOUDON, « Equilibration rate for the linear inhomogeneous relaxation-time Boltzmann equation for charged particles », in : (2003).
  - [13] C. CAO, « THE KINETIC FOKKER-PLANCK EQUATION WITH WEAK CONFINEMENT FORCE », working paper or preprint, juin 2018, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01697058>.
  - [14] K. CARRAPATOSO, I. TRISTANI et K. WU, « On the cauchy problem and long time behavior for the non homogeneous landau equation », in : *arXiv preprint arxiv:1504.04124* ().
  - [15] D. CHAFAÏ et al., « Entropies, convexity, and functional inequalities, on  $\phi$ -entropies and  $\phi$ -Sobolev inequalities. », in : *Journal of Mathematics of Kyoto University* 44.2 (2004), p. 325–363.
  - [16] Z. CHEN et X. ZHANG, « Cometary flow equation with a self-consistent electromagnetic field », in : ().
  - [17] L. DESVILLETES et C. VILLANI, « On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation », in : *Inventiones mathematicae* 159.2 (2005), p. 245–316.
  - [18] L. DESVILLETES et C. VILLANI, « On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : The linear Fokker-Planck equation », in : *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 54.1 (2001), p. 1–42.
  - [19] J. DOLBEAULT, C. MOUHOT et C. SCHMEISER, « Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 367.6 (2015), p. 3807–3828.
  - [20] G. DUJARDIN, F. HÉRAU et P. LAFITTE, « Coercivity, hypocoercivity, exponential time decay and simulations for discrete Fokker-Planck equations », in : *arXiv preprint arXiv:1802.02173* (2018).
  - [21] K.-J. ENGEL et R. NAGEL, « One-parameter semigroups for linear evolution equations », in : *Semigroup Forum*, t. 63, 2, Springer, 2001, p. 278–280.
  - [22] J.-C. EVARD, *Commutation d'une matrice avec sa dérivée*, rapp. tech., EPFL, 1986.
  - [23] A. FOKKER, « AD Fokker, Ann. d. Physik 43, 812 (1914) », in : *Ann. d. Physik* 43 (1914), p. 812.
  - [24] R. T. GLASSEY, *The Cauchy problem in kinetic theory*, Siam, 1996.

- 
- [25] M. GROTHAUS et P. STILGENBAUER, « Hypocoercivity for degenerate Kolmogorov equations and applications to the Langevin dynamics », in : *PAMM* 14.1 (2014), p. 999–1000.
- [26] M. P. GUALDANI, S. MISCHLER et C. MOUHOT, « Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem », in : *arXiv preprint arXiv :1006.5523* (2010).
- [27] Y. GUO, « The Vlasov-Maxwell-Boltzmann system near Maxwellians », in : *Inventiones mathematicae* 153.3 (2003), p. 593–630.
- [28] Y. GUO, « The Vlasov-Poisson-Boltzmann system near Maxwellians », in : *Communications on pure and applied mathematics* 55.9 (2002), p. 1104–1135.
- [29] B. HELFFER et F. NOURRIGAT, « Hypocoercivité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3 », in : *Communications in Partial Differential Equations* 3.8 (1978), p. 643–743.
- [30] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, « Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes », in : *Communications in Partial Differential Equations* 4.8 (1979), p. 899–958.
- [31] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, « Approximation d’un système de champs de vecteurs et applications à l’hypoellipticité », in : *Arkiv för Matematik* 17.1-2 (1979), p. 237–254.
- [32] B. HELFFER, « Hypocoercivité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents », in : *Pseudodifferential Operators with Applications*, Springer, 2010, p. 73–88.
- [33] B. HELFFER, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, t. 1336, Springer, 2006.
- [34] B. HELFFER et J. NOURRIGAT, « Hypocoercivité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs », in : *Progress in Mathematics* 58 (1985).
- [35] F. HÉRAU, « Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation », in : *Asymptotic Analysis* 46.3, 4 (2006), p. 349–359.
- [36] F. HÉRAU, « Introduction to hypocoercive methods and applications for simple linear inhomogeneous kinetic models », in : *arXiv preprint arXiv :1710.05588* (2017).
- [37] F. HÉRAU, « Short and long time behavior of the Fokker–Planck equation in a confining potential and applications », in : *Journal of Functional Analysis* 244.1 (2007), p. 95–118.
- [38] F. HÉRAU, M. HITRIK et J. SJÖSTRAND, « Tunnel effect and symmetries for Kramers–Fokker–Planck type operators », in : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 10.3 (2011), p. 567–634.

- 
- [39] F. HÉRAU et F. NIER, « Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential », in : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 171.2 (2004), p. 151–218.
  - [40] F. HÉRAU, J. SJOSTRAND et C. C. STOLK, « Semiclassical analysis for the Kramers–Fokker–Planck equation », in : *Communications in partial differential equations* 30.5-6 (2005), p. 689–760.
  - [41] F. HÉRAU et L. THOMANN, « On global existence and trend to the equilibrium for the Vlasov–Poisson–Fokker–Planck system with exterior confining potential », in : *Journal of Functional Analysis* 271.5 (2016), p. 1301–1340.
  - [42] F. HÉRAU, D. TONON et I. TRISTANI, « Cauchy theory and exponential stability for inhomogeneous boltzmann equation for hard potentials without cut-off », in : *arXiv preprint arXiv :1710.01098* (2017).
  - [43] F. HÉRAU, D. TONON et I. TRISTANI, « Short time diffusion properties of inhomogeneous kinetic equations with fractional collision kernel », working paper or preprint, avr. 2018, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01596009>.
  - [44] M. HERDA, « Asymptotic and numerical analysis of kinetic and fluid models for the transport of charged particles », Theses, Université de Lyon, sept. 2017, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01684780>.
  - [45] M. HERDA, « On massless electron limit for a multispecies kinetic system with external magnetic field », in : *Journal of Differential Equations* 260.11 (2016), p. 7861–7891.
  - [46] M. HERDA et L. M. M. RODRIGUES, « Anisotropic Boltzmann-Gibbs dynamics of strongly magnetized Vlasov-Fokker-Planck equations », in : *Kinetic and Related Models* 12.3 (2018), p. 593–636, DOI : 10.3934/krm.2019024, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01382854>.
  - [47] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, 1948.
  - [48] M. HITRIK et K. PRAVDA-STAROV, « Eigenvalues and subelliptic estimates for non-selfadjoint semiclassical operators with double characteristics », in : *Annales de l’Institut Fourier*, t. 63, 3, 2013, p. 985–1032.
  - [49] M. HITRIK et K. PRAVDA-STAROV, « Semiclassical hypoelliptic estimates for non-selfadjoint operators with double characteristics », in : *Communications in Partial Differential Equations* 35.6 (2010), p. 988–1028.
  - [50] M. HITRIK et K. PRAVDA-STAROV, « Spectra and semigroup smoothing for non-elliptic quadratic operators », in : *Mathematische Annalen* 344.4 (2009), p. 801–846.
  - [51] M. HITRIK, J. SJÖSTRAND et J. VIOLA, « Resolvent estimates for elliptic quadratic differential operators », in : *arXiv preprint arXiv :1109.4497* (2011).

- 
- [52] L. HÖRMANDER, « A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics », in : *Mathematische Annalen* 217.2 (1975), p. 165–188.
- [53] L. HÖRMANDER, « Hypoelliptic second order differential equations », in : *Acta Mathematica* 119.1 (1967), p. 147–171.
- [54] L. HORMANDER, « The analysis of linear partial differential operators III », in : (1985).
- [55] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators III : Pseudo-differential operators*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [56] J. HYMERS, *A treatise on the theory of algebraical equations*, 1858.
- [57] J. JACQUINOT, « La fusion thermonucléaire », in : ().
- [58] Z. KARAKI, « Maximal estimates for the Fokker-Planck operator with strong magnetic field », in : *arXiv preprint arXiv :1901.08120* (2019).
- [59] Z. KARAKI, « Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with a strong external magnetic field », in : *arXiv preprint arXiv :1901.03499* (2019).
- [60] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators. Reprint of the corr. print. of the 2nd ed. 1980. Classics in Mathematics*, 1995.
- [61] S. KAWASHIMA, « The Boltzmann equation and thirteen moments », in : ().
- [62] A. A. KIRILLOV, « Unitary representations of nilpotent Lie groups », in : *Russian mathematical surveys* 17.4 (1962), p. 53.
- [63] J. J. KOHN, « Pseudo-differential operators and hypoellipticity », in : *Proc. Symp. Pure Math*, t. 23, 1973, p. 61–69.
- [64] G. MANFREDI, « Non-relativistic limits of Maxwell’s equations », in : *European Journal of Physics* 34 ().
- [65] S. MISCHLER et C. MOUHOT, « Exponential stability of slowly decaying solutions to the kinetic-Fokker-Planck equation », in : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 221.2 (2016), p. 677–723.
- [66] S. MISCHLER et I. TRISTANI, « Uniform semigroup spectral analysis of the discrete, fractional and classical Fokker-Planck equations », in : *Journal de l’École polytechnique-Mathématiques* 4 (2017), p. 389–433.
- [67] C. MOUHOT, « Quelques résultats d’hypocoercitivité en théorie cinétique collisionnelle », in : *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (2008), p. 1–19.
- [68] C. MOUHOT, « Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials », in : *Communications in mathematical physics* 261.3 (2006), p. 629–672.

- 
- [69] C. MOUHOT et L. NEUMANN, « Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus », in : *Nonlinearity* 19.4 (2006), p. 969.
- [70] C. MOUHOT, E. RUSS et Y. SIRE, « Fractional Poincaré inequalities for general measures », in : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 95.1 (2011), p. 72–84.
- [71] J. NASH, « Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations », in : *American Journal of Mathematics* 80.4 (1958), p. 931–954.
- [72] M. NDAO, « Convergence to equilibrium for Fokker-Planck equation with a general force field », in : *arXiv preprint arXiv :1603.05085* (2016).
- [73] F. NIER et B. HELFFER, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Springer, 2005.
- [75] A. PASCUCCI, « Hölder regularity for a Kolmogorov equation », in : *Transactions of the American Mathematical Society* (2003), p. 901–924.
- [76] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, t. 44, Springer Science & Business Media, 2012.
- [77] M. PLANCK, in : *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1917), p. 324.
- [78] K. PRAVDA-STAROV, « Subelliptic estimates for quadratic differential operators », in : *American journal of mathematics* 133.1 (2011), p. 39–89.
- [79] H. RISKEN, *The Fokker-Planck Equation*, 3rd Printing, 1998.
- [80] C. ROCKLAND, « Hypoellipticity on the Heisenberg group-representation-theoretic criteria », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 240 (1978), p. 1–52.
- [81] L. P. ROTHSCHILD, « A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields », in : *Communications in Partial Differential Equations* 4.6 (1979), p. 645–699.
- [82] L. P. ROTHSCHILD et E. M. STEIN, « Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups », in : *Acta Mathematica* 137.1 (1976), p. 247–320.
- [83] M. B. SAID, « Global subelliptic estimates for Kramers-Fokker-Planck operators with some class of polynomial », in : *arXiv preprint arXiv :1812.06645* (2018).
- [84] M. B. SAID et al., « Quaternionic structure and analysis of some Kramers-Fokker-Planck operators », in : *arXiv preprint arXiv :1807.01881* (2018).
- [85] X. SAINT RAYMOND, *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, Routledge, 2018.
- [86] M. SCHECHTER, *Principles of functional analysis*, 36, American Mathematical Soc., 2001.
- [87] D. SERRE, *Matrices : Theory and Applications*.

- 
- [88] J. SJÖSTRAND, « Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics », in : *Arkiv för Matematik* 12.1 (1974), p. 85–130.
  - [89] D. SPRING, *Convex integration theory : solutions to the h-principle in geometry and topology*, Springer Science & Business Media, 2010.
  - [90] I. TRISTANI, « Existence et stabilité de solutions fortes en théorie cinétique des gaz », thèse de doct., Paris 9, 2015.
  - [91] I. TRISTANI, « Exponential convergence to equilibrium for the homogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off », in : *Journal of Statistical Physics* 157.3 (2014), p. 474–496.
  - [92] I. TRISTANI, « Fractional Fokker-Planck equation », 18 pages, oct. 2014, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00914059>.
  - [93] C. VILLANI, « A review of mathematical topics in collisional kinetic theory », in : *Handbook of mathematical fluid dynamics* 1 (2002), p. 71–305.
  - [94] C. VILLANI, « Hypocoercive diffusion operators », in : *International Congress of Mathematicians*, t. 3, 2006, p. 473–498.
  - [95] C. VILLANI, *Hypocoercivity*, 949-951, American Mathematical Soc., 2009.
  - [96] C. VILLANI, « (Ir) réversibilité et entropie », in : *Time*, Springer, 2013, p. 81–143.
  - [97] J. VIOLA, « Spectral projections and resolvent bounds for partially elliptic quadratic differential operators », in : *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* 4.2 (2013), p. 145–221.
  - [98] C. J. XU, « Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations », in : *Comm. Pure Appl. Math.* 45.1 (1992).
  - [99] T. YANG et H. YU, « Global classical solutions for the Vlasov–Maxwell–Fokker-Planck system », in : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 42.1 (2010), p. 459–488.
  - [100] K. YOSIDA, « On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators », in : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 1 ().
  - [101] X. ZHANG et X. YIN, « Existence theorems for the initial value problem of the cometary flow equation with an external force », in : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 405.2 (2013), p. 574 –594, ISSN : 0022-247X, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.042>, URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X1300351X>.

# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1  | Magnétosphère . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 12  |
| 1.2  | L'ionosphère qui protège la terre. . . . .                                                                                                                                                                                         | 12  |
| 1.3  | Schéma montrant les principaux éléments d'un tokamak. Source : Figure 5 dans [57] . . . . .                                                                                                                                        | 13  |
| 1.4  | Mouvements hélicoïdal d'une particule de charge négative dans un champ magnétique. . . . .                                                                                                                                         | 14  |
| 1.5  | Les composantes de la vitesse parallèle et perpendiculaire au champ magnétique . . . . .                                                                                                                                           | 15  |
| 3.1  | Comportement en temps de $\log(\ e^{-t M_{a,0}}\ )$ avec $b = 0$ et $a = 24 > 1/4$ .                                                                                                                                               | 112 |
| 3.2  | Comportement en temps de $\log(\ e^{-t M_{a,0}}\ )$ avec $b = 0$ et $a = 0.2 < 1/4$ .                                                                                                                                              | 112 |
| 3.3  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et leurs approximations en temps petit des erreurs $(-\langle A \rangle^3 t^7$ et $\langle A \rangle^3 t^7)$ avec $b = 2$ de gauche à droite. . . . .  | 113 |
| 3.4  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et leurs approximations en temps petit des erreurs $(-\langle A \rangle^3 t^7$ et $\langle A \rangle^3 t^7)$ avec $b = 10$ de gauche à droite. . . . . | 113 |
| 3.5  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et son développement limité quand $t \rightarrow 0$ à l'ordre 6 lorsque $b = 2$ . . . . .                                                              | 114 |
| 3.6  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et son développement limité quand $t \rightarrow 0$ à l'ordre 6 lorsque $b = 10$ . . . . .                                                             | 114 |
| 3.7  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et ses approximations associés à la Proposition 3.1.5 quand $b = 8$ . . . . .                                                                          | 115 |
| 3.8  | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ et ses approximation associés à la Proposition 3.1.5 quand $b = 5$ . . . . .                                                                           | 115 |
| 3.9  | Comparaison entre le comportement de temps de $\log(\ e^{-t M_{a,b}}\ )$ quand $b = 0$ et quand $b \neq 0$ de gauche à droite . . . . .                                                                                            | 116 |
| 3.10 | Comportement en temps $t$ de $\ e^{-t M_{a,b}}\ $ en plusieurs valeurs de $b = 20, 50$ et $100$ . . . . .                                                                                                                          | 116 |
| 3.11 | Comparaison entre le comportement en temps de la norme $e^{t\Re\lambda_1} \ e^{-t M_{a,b}}\ $ et $\sqrt{\frac{c_2^2 + 1}{c_1^2 + c_2^2}}$ lorsque $a = 8$ et $b = 12$ . . . . .                                                    | 117 |

|      |                                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.12 | Comparaison entre le comportement en temps de la fonction $e^{t\Re\lambda_1} \ e^{-tM_{a,b}}\ $ et ses approximations donnés dans la Proposition 3.1.6 avec $a = 8$ et $b = 12$ de gauche à droite lorsque $C = 50$ . . . . . | 117 |
| 3.13 | Comparaison entre le comportement en temps de la fonction $e^{t\Re\lambda_1} \ e^{-tM_{a,b}}\ $ et ses approximations donnés dans la Proposition 3.1.6 avec $a = 8$ et $b = 5$ de gauche à droite lorsque $C = 50$ . . . . .  | 118 |



## Titre : Équations cinétiques avec champ magnétique

**Mot clés :** Équation de Fokker-Planck ; hypocoercivité ; champ magnétique ; hypoellipticité maximale ; trou spectral ; semi-groupe.

**Resumé :** Cette thèse est dédiée à l'étude de l'équation cinétique de Fokker-Planck en présence d'un champ magnétique externe et fort. Premièrement, nous montrons le retour exponentiel à l'équilibre des solutions de cette équation dans des espaces de type  $L^p$  et des espaces de Sobolev à poids polynomial non-classique. Deuxièmement, nous nous intéressons à une estimation de type maximal sur l'opérateur associé. Cette estimation permet de donner une meilleure

caractérisation du domaine de la fermeture de l'opérateur considéré. Finalement, nous étudions l'opérateur quadratique de Fokker-Planck électro-magnétique. Nous calculons explicitement la norme du semi-groupe associé à l'opérateur considéré. Nous montrons des estimations explicites et précises de cette norme en temps petit et long ainsi que des estimations uniformes en temps lorsque le paramètre magnétique tend vers l'infini.

## Title : Kinetic equations with magnetic field

**Keywords :** Fokker-Planck equation ; hypocoercivity ; magnetic field ; hypoellipticity maximal ; gap spectral ; semi-group.

**Abstract :** This thesis is dedicated to the study of the Fokker-Planck kinetic equation in the presence of an external and strong magnetic field. First, we show the exponential return to equilibrium of the solutions of this equation in  $L^p$ -type spaces and Sobolev spaces with non-classical polynomial weights. Secondly, we are interested in a maximal-type estimate on the associated operator. This estimate makes it possible

to give a better characterization of the domain of the closure of the operator considered. Finally, we study the quadratic Fokker-Planck electromagnetic operator. We explicitly compute the norm of the semi-group associated to the considered operator. We show an explicit and precise estimates of this norm in small and long time as well as uniform-in-time estimates when the magnetic parameter tends to infinity.