

# Thèse de Doctorat

Noémie LEGOUT

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25

Unité de recherche : Laboratoire de mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 26 janvier 2018

## Structures produits sur l'homologie de Floer des cobordismes lagrangiens

### JURY

Président : **M. Alexandru OANCEA**, Professeur, Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche, Université Pierre et Marie Curie  
Rapporteur : **M. Jean-François BARRAUD**, Professeur, Institut de mathématiques de Toulouse  
Examineurs : **M. Paolo GHIGGINI**, Chargé de recherche CNRS, Laboratoire de mathématiques Jean Leray, Université de Nantes  
**M. Klaus NIEDERKRÜGER**, Professeur, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1  
Directeur de thèse : **M. Frédéric BOURGEOIS**, Professeur, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud  
Co-directeur de thèse : **M. Baptiste CHANTRAINE**, Maître de conférences, Laboratoire de mathématiques Jean Leray, Université de Nantes  
Rapporteur : **M. Lenhard NG**, Professeur, Duke University

\* \* \*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Géométries de contact et symplectique</b>	<b>17</b>
2.1	Premières définitions . . . . .	17
2.2	Sous-variétés legendriennes. . . . .	20
2.3	Cobordismes lagrangiens exacts. . . . .	22
<b>3</b>	<b>Structure <math>A_\infty</math> et espaces de modules</b>	<b>25</b>
3.1	Définitions . . . . .	25
3.2	Polytopes de Stasheff . . . . .	26
3.3	Espace de Deligne et compactification . . . . .	28
3.3.1	Courbe universelle . . . . .	28
3.3.2	Compactification . . . . .	28
3.3.3	Étiquettes lagrangiennes . . . . .	29
3.4	Structures presque complexes . . . . .	31
3.4.1	Définitions . . . . .	31
3.4.2	Structure dépendante du domaine . . . . .	32
3.5	Espaces de modules de courbes holomorphes . . . . .	33
3.5.1	Définition . . . . .	33
3.5.2	Courbes à bord sur un cylindre trivial . . . . .	36
3.5.3	Courbes à bord sur un cobordisme non trivial . . . . .	36
3.6	Bâtiments holomorphes . . . . .	39
3.6.1	Action et énergie . . . . .	39
3.6.2	Compacité . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Homologie de contact legendrienne.</b>	<b>47</b>
4.1	Degré. . . . .	47
4.2	Espaces de modules, transversalité et recollement. . . . .	49
4.3	Algèbre de Chekanov . . . . .	51
4.4	Morphisme induit par un cobordisme . . . . .	54
4.5	Linéarisation . . . . .	55
4.6	Une $A_\infty$ -catégorie : la catégorie d'augmentations . . . . .	57
4.6.1	Cohomologie de contact legendrienne . . . . .	57

4.6.2	Une algèbre $A_\infty$ . . . . .	58
4.6.3	La catégorie d'augmentations . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Homologie de Floer de cobordismes lagrangiens</b>	<b>65</b>
5.1	Espaces de modules, transversalité et recollement . . . . .	65
5.2	Complexe de Cthulhu . . . . .	69
5.3	Perturbations hamiltoniennes . . . . .	71
5.3.1	Définition . . . . .	72
5.3.2	Acyclicité du complexe . . . . .	72
5.3.3	Perturbation dirigée et perturbation en $V$ . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Structure produit</b>	<b>77</b>
6.1	Espaces de modules . . . . .	77
6.2	Définition du produit . . . . .	78
6.2.1	Définition . . . . .	78
6.2.2	Dégénérescences des courbes holomorphes. . . . .	83
6.3	Un morphisme d'anneaux . . . . .	107
6.4	Un exemple . . . . .	112
6.5	Associativité du produit et structure $A_\infty$ . . . . .	115
6.5.1	Définition des opérations . . . . .	116
6.5.2	Preuve de (6.53). . . . .	121
6.5.3	Preuve de (6.54). . . . .	123
6.6	Foncteur $A_\infty$ . . . . .	130
6.7	Vers une catégorie $A_\infty$ . . . . .	131

## Remerciements

J'ai tellement rêvé au moment où j'écrirais ces remerciements qui annonceraient la dernière ligne droite que j'ai du mal à réaliser ! Ces années de thèse ont été tellement denses que j'ai beaucoup de personnes à remercier, et je m'excuse par avance pour tous ceux que j'ai involontairement oubliés.

Je ne pourrais jamais remercier assez Baptiste pour tout ce qu'il m'a apporté pendant ces quatre années depuis le stage de master jusqu'à la fin de la thèse. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a appris, pour son optimisme, ses idées, sa disponibilité, sa patience, et pour son soutien sans faille pendant les moments difficiles. Je le remercie d'avoir l'air plus stressé que moi parfois (quelle solidarité !), et de m'avoir obligée à faire des dessins sur inkscape (parce que c'est de mon âge). Je remercie également Frédéric pour son accueil à Orsay, pour ses explications lors de nos discussions mathématiques, pour m'avoir aidée à calculer des exemples !

Je remercie Jean-François Barraud et Lenny Ng d'avoir accepté d'être rapporteurs. Merci à Jean-François pour son travail intense entre deux coupes de champagne, pour les erreurs qu'il a relevées dans une première version de ce manuscrit, pour ses remarques pertinentes, pour les discussions sur la transversalité et les Rois-champignons. Merci aussi d'avoir accepté d'être membre du jury. Merci à Lenny pour ses remarques et pour l'école d'été à Krusenberg en août très intéressante et stimulante.

Merci à Paolo Ghiggini, Klaus Niederkrüger et Alexandru Oancea d'avoir accepté d'être membres du jury. Je remercie particulièrement Paolo pour ses idées, sa disponibilité pour répondre à mes questions, ses gâteaux, pour Lericci et pour son "povero Paolo" universel.

Je remercie chaleureusement François Laudenbach pour tout ce qu'il m'a appris, que ce soit en rentrant d'un groupe de travail à Angers ou en passant par mon bureau. Je le remercie pour son soutien et son écoute lors de nos discussions mathématiques ou non, et pour ses conseils sur la préparation des séminaires, le théorème avant tout !

Merci à Jean-Marc Patin pour son soutien depuis ma première année à l'université il y a presque dix ans !

Je remercie de façon plus générale tous les membres du Laboratoire de mathématiques Jean Leray, merci à ceux que j'ai eu comme enseignant pendant toutes ces années à Nantes. Merci notamment à Gilles Carron, Vincent Colin, Sylvain Gervais, Frédéric Héreau, Gueorgui Popov, Christoph Sorger (et son cours si passionnant de topologie en L3 !), Samuel Tapie, Friedrich Wagemann, et je ne peux pas écrire tous les

noms donc merci à vous tous tout simplement.

Je remercie évidemment toutes les secrétaires du laboratoire qui m'ont grandement aidée pour toutes les démarches administratives par leur réactivité et leur efficacité. Merci notamment à Brigitte d'avoir bien voulu toujours me répondre quand après trois années de thèse je ne savais toujours pas comment remplir parfaitement une demande de mission... ! Merci à Claude du CRDM de rendre plus gais les passages à la bibliothèque, même s'il se borne à penser que les concerts du Big Band c'est mieux que les concerts du chœur universitaire, n'importe quoi ! Merci à Bertrand de la cafèt'.

Merci à Stéphane Guillermou et Vincent Humilière de m'avoir invitée pour mes premiers séminaires à Grenoble et au Symplectix.

Je remercie Anne Vaugon, Rémi Leclercq et Patrick Massot pour leur accueil à Orsay. Merci à Anne de m'avoir prêté son vélo pour pouvoir repousser de quelques minutes le réveil le matin !

Ces années de thèse auraient été bien différentes sans la très bonne ambiance qui règne parmi les doctorants à Nantes. Tout d'abord, je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mon bureau plus ou moins longtemps au cours de ces trois années. Chronologiquement, merci à Christophe, co-bureau un peu fou sans qui je n'aurais probablement toujours pas eduroam sur mon ordinateur, Thomas G. pour les faits divers les plus bizarres, glauques et que sais-je encore qui ont rythmé mes journées de bureau, Niccolo et sa contribution à la collection de cafetières du bureau, Zoé la business woman et enfin Zeinab pour son calme olympien qui fait du bien. Merci au trio du bureau d'à côté : Thomas B. le mélanchoniste végan qui a même emmené sa maman à un concert du chœur universitaire, franchement bravo ! Thomas W. pour les discussions sérieuses et non sérieuses depuis toutes ces années de fac, et parce que tu me fais bien rigoler, et Victor V.D.R. qui nous a tous donné la passion des pinces à linge et pour ses petites chansons qui traversent les murs (surtout "je n'suis paaas Fred Hérau !"). Je remercie Olivier, le guide suprême pour toutes les démarches concernant l'agreg (sans toi je suis perdue !) et merci aussi d'être venu à la rescousse de deux âmes en panique un certain soir il y a quelques mois, en tout cas il y avait une araignée dans l'histoire (oui je sais je te dois encore une bière !) Merci à Guillaume pour toutes nos discussions mathématiques, pour les problèmes de constructions géométriques de je ne sais plus quel jeu qui nous ont bien occupés parfois, pour les soirées crêperie que tu organisais si bien et auxquelles je ne pouvais jamais aller (dois-je y voir un signe ? !), et pour cette année d'airs d'opéras au chœur universitaire. Merci à Guogang et Vytauté pour leur sourire et leur gentillesse, à Victor MD reconnaissable par ses éternuements à plusieurs bureaux de distance, à Florian qui, quoi qu'il en dise, avait souvent l'air plus fatigué que moi, à Moudhaffar pour avoir redonné vie à Suzette deux fois de suite, à Virgile pour les soirées raclette et un basilic baptisé Ernesto qui a fait son temps. Merci à Guillem et Claire pour leur petit accent du sud qui réchauffait les couloirs, à Simon le sosie ou presque de Matt, à Damien parce que tu me fais bien rire même avec des blagues nulles, à Pierre parce que tu me fais bien rire même sans blague, mais je te jure je ne me moque pas ! Merci à Valentin pour ces petits moments de colocation parta-

gés, à Johan pour sa sympathie, ses dessins pour nous aider à comprendre les doubles poissons (franchement je pense qu'un seul ça suffit), et ce gâteau improbable et si bon au potimarron et à la chantilly involontairement fondue (d'ailleurs pour ne pas te faire d'ombre j'ai décidé de ne rien cuisiner moi-même pour le pot de thèse). Merci aussi à Caroline et Caroline, Hala et ses bons desserts libanais, Solène et Hélène, Matthieu et Côme, et à ceux que j'ai oublié sans le vouloir... !

Je remercie Maÿlis de Paris et de Köln (sehr gut !) pour toutes nos discussions sur les maths et sur la vie, et pour cette semaine en Suède rythmée par "Soy boyero..." et "Tititi...". Je remercie aussi pour cette semaine Alexandre et sa maniaquerie avec les cartes du Gobbit, Antoine notre super guide, super organisé, qui s'est pris de passion pour le train entre Stockholm et Uppsala, Benoît, Côme et sa grippe, et Michelle. Merci à vous tous d'avoir tant pressé le bouton du rire ! Benoît, j'espère que tu trouveras Le Juste Titre (des barres).

Merci à Jeanne et Guillaume le pianiste pour les goûters et dîners orcéens.

Je ne pourrais écrire ces quelques lignes sans remercier celle qui m'a supportée pendant toutes ces années de thèse, Coca coloc' la super *colocatrice* ! Merci pour ces années de cohabitation, pour tous ces moments de vie partagés, pour tous nos fous rires et nos récitatifs interminables que j'aime tant ! Merci à la bande joyeuse des choristes du chœur universitaire : Magalite de la "team-présidente", Katia et son déhanché de cou inimitable, Julien le champion dans nos coeurs (même si ce n'est peut-être pas l'avis de Samuel), Claire au rouge à lèvres et sa place de présidente réservée dans la voiture de Julien, Emmanuelle S. pour les trinquettes pré-chorale et les journées à la campagne qui font du bien, Ségo et le petit Saelig qui nous a plongés dans le doux monde des comptines et des berceuses, Valentine et son romantisme, Emmanuelle B. pour son éternelle classe, Nico pour les fous-rires et son organisation des pots optimale, Jorge et sa voix de ténor si merveilleuse et Yohan public fidèle, Philippe pour sa sympathie et surtout RTL2 dans la C3. Merci aussi à Marion Knospagheti (c'est pas de ma faute c'est Camille !) d'être une fille aussi cool, merci à Solal le président pour ses discours religieusement bien tournés, merci aussi à tous ceux que je n'ai pas cités. Merci pour ces cinq années si chouettes avec vous !

Merci à Charlotte pour sa joie de vivre, à Poutchou, Maÿlis et Guillaume, j'espère que les légumes pousseront bien.

Merci aussi à ceux à qui je disais souvent quelque chose du genre "j'peux pas, j'ai chorale" : Alicia, Alain et Nicolas. Merci pour ces bières partagées, ces vagabondages dans les rues nantaises et dans les Deux-Sèvres depuis tant d'années !

Merci à Marion, notre Huguette adorée, à Marjolaine, Joséphine et Alicia. Je n'aurai jamais assez de place pour vous remercier assez d'être toujours là !

Je remercie enfin tous les membres de ma famille. Merci notamment à ma mère d'être encore avec nous, merci à mon frère Thomas pour son courage et sa force (et aussi piscine Noné parce que quand même il fallait bien que ce soit écrit quelque part, signé Totéti), à Sandra et à Soizic la plus mignonne des petites filles. Merci à Annick et Jean-Pierre pour leur aide, leur générosité, leur soutien. Merci à mon père et à Nadine, à

Nicole et Jean-Marc, à Claude et Marie-Claude, à Béatrice et Jean-Paul, à mes cousins et cousines. Merci à vous tous.

Merci à Anna Maria et à Carlo Felice pour leur gentillesse et leur accueil toujours chaleureux en Sardaigne.

Finalement, je remercie Gilberto de m'avoir supportée pendant toutes les périodes de stress, de désespoir, d'angoisse, de questionnements et j'en passe. Merci de m'avoir aidée à traverser tous les moments difficiles et de rendre ma vie plus joyeuse.

## Introduction

La géométrie de contact est une partie de la géométrie différentielle consacrée à l'étude de variétés dites de contact. Une variété de contact est la donnée d'une paire  $(Y, \xi)$  où  $Y$  est une variété de dimension impaire  $2n + 1$  et  $\xi$  un champ d'hyperplans sur  $Y$  complètement non intégrable, appelé structure de contact sur  $Y$ . Localement, et globalement si  $\xi$  est coorientée,  $\xi$  s'écrit comme le noyau d'une 1-forme différentielle  $\alpha$  satisfaisant  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ . Cette condition donne la non-intégrabilité de  $\xi$  mais elle est en fait plus forte. En effet, elle implique que toute sous-variété de  $Y$  qui est tangente à  $\xi$  en chaque point est de dimension au plus  $n$ . De telles sous-variétés de dimension exactement  $n$  sont appelées sous-variétés legendriennes de  $Y$ .

Un certain nombre d'invariants algébriques de sous-variétés legendriennes ont vu le jour dans un but de classification à isotopie près, où deux sous-variétés legendriennes sont dites isotopes s'il existe une famille lisse à un paramètre de plongements legendriens les reliant. Un des premiers invariants non-classiques à avoir été développé, les invariants classiques étant le type d'isotopie lisse, le nombre de Thurston-Bennequin et l'indice de Maslov, est l'homologie de contact legendrienne. Cette dernière correspond à une petite partie de la théorie des champs symplectiques développée par Eliashberg, Givental et Hofer ([EGH00]). L'homologie de contact legendrienne en est une version relative qui a été introduite par Eliashberg [Eli98]. Simultanément, elle a été définie de façon combinatoire par Chekanov [Che02] pour les noeuds legendriens dans la variété de contact standard  $(\mathbb{R}^3, dz - ydx)$ , et grâce à la théorie des courbes holomorphes introduites par Gromov en géométrie symplectique ([Gro85]), elle a ensuite été généralisée au cas des sous-variétés legendriennes dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et  $P \times \mathbb{R}$  la contactisation d'une variété de Liouville, par Ekholm, Etnyre et Sullivan [EES05a, EES07].

Dans sa version combinatoire et généralisée en dimension supérieure, l'homologie de contact legendrienne est une homologie de type Floer. Elle est définie en associant à

une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  dans une variété de contact  $(Y = P \times \mathbb{R}, \alpha = dz + \beta)$  une algèbre différentielle graduée (DGA) appelée l’algèbre de Chekanov de  $\Lambda$  et notée  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial)$ . Brièvement, c’est une algèbre sur  $\mathbb{Z}_2$  engendrée par les cordes de Reeb de  $\Lambda$  et la différentielle  $\partial$  compte des courbes holomorphes dans  $P$  à bords sur  $\Pi_P(\Lambda)$ , la projection lagrangienne de  $\Lambda$ , et asymptotes à des points d’intersection de  $\Pi_P(\Lambda)$  en correspondance bijective avec les cordes de Reeb de  $\Lambda$ . L’homologie associée est notée  $LCH_*(\Lambda)$ , c’est l’homologie de contact legendrienne de  $\Lambda$ . Il est aussi possible de la définir sur  $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda)]$  sous certaines conditions [ENS02, EES05c]. La version “théorie des champs symplectiques” de l’homologie de contact legendrienne est définie un peu différemment mais est équivalente ([DR16b]). La différentielle ne compte pas des courbes holomorphes à bord sur la projection lagrangienne de  $\Lambda$  mais des courbes holomorphes dans la symplectisation  $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$  de  $Y$ , à bords sur  $\mathbb{R} \times \Lambda$  et asymptotes à des cordes de Reeb de  $\Lambda$ . L’homologie de contact legendrienne étant généralement de dimension infinie, Chekanov a introduit la notion d’augmentation de l’algèbre  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , donnée algébrique permettant de définir un invariant de dimension finie plus calculable. Une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$  est un morphisme de DGA  $\varepsilon: (\mathcal{A}(\Lambda), \partial) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, 0)$  qui vérifie donc en particulier  $\varepsilon \circ \partial = 0$ . Si l’algèbre  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial)$  possède une augmentation  $\varepsilon$ , il est possible de lui associer un complexe  $(C(\Lambda), \partial^\varepsilon)$ , où  $C(\Lambda)$  est l’espace vectoriel engendré par les cordes de Reeb de  $\Lambda$  et  $\partial^\varepsilon$  est une application linéaire vérifiant  $(\partial^\varepsilon)^2 = 0$ . L’homologie de ce complexe est l’homologie de contact legendrienne de  $\Lambda$  linéarisée par  $\varepsilon$ , notée  $LCH_*^\varepsilon(\Lambda)$ . L’ensemble des classes d’isomorphismes d’homologies de contact legendrienne linéarisées de  $\Lambda$ , pour toutes les augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , est invariant par isotopie legendrienne de  $\Lambda$ . En particulier, ceci a permis à Chekanov d’exhiber deux noeuds legendriens ayant les mêmes invariants classiques mais n’étant pourtant pas isotopes.

Par ce processus de linéarisation de l’algèbre de Chekanov, Civan, Koprowski, Etnyre, Sabloff et Walker ([CKE<sup>+</sup>11]) ont associé à une sous-variété legendrienne une algèbre  $A_\infty$ . Ils ont alors prouvé que cette structure algébrique était un invariant plus puissant que l’ensemble des homologies de contact linéarisées. En effet, ils ont par exemple trouvé une famille infinie de noeuds legendriens qui ne sont pas isotopes à leurs miroirs car ils n’ont pas les mêmes ensembles d’anneaux de cohomologie de contact legendrienne linéarisée alors qu’ils ont les mêmes ensembles de groupes de cohomologie de contact legendrienne linéarisée. Finalement, Bourgeois et Chantraine vont encore plus loin en multi-linéarisant la différentielle de Chekanov par non pas une seule augmentation mais plusieurs, conduisant à la catégorie d’augmentation de  $\Lambda$ ,  $\text{Aug}_-(\Lambda)$ . Cette catégorie est une catégorie  $A_\infty$  dont les objets sont les augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , l’espace des morphismes entre deux augmentations correspond au complexe de la cohomologie de contact legendrienne bilinéarisée, et les opérations  $A_\infty$  sont définies en comptant des courbes dans  $\mathbb{R} \times Y$  à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda$ . Cette catégorie donne lieu à de nouveaux invariants de  $\Lambda$  à isotopie près comme par exemple l’ensemble des classes d’isomorphismes de (co)homologie de contact legendrienne bilinéarisée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  pour tous les couples d’augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , ou encore

l'ensemble des classes d'équivalence d'augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ . Une version unitaire de cette catégorie d'augmentation a été définie par Ng, Rutherford, Shende, Sivek et Zaslow ([NRS<sup>+</sup>]), c'est la catégorie  $\mathcal{A}ug_+(\Lambda)$ .

Les augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$  sont donc des objets qui contiennent un certain nombre d'informations sur les sous-variétés legendriennes. Par la relation  $\varepsilon \circ \partial = 0$ , chercher des augmentations d'une DGA revient à résoudre un système d'équations, les augmentations sont des objets algébriques. Toutefois, certaines augmentations ont une interprétation très géométrique. Un remplissage lagrangien exact de  $\Lambda$  est une sous-variété lagrangienne exactes  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R} \times Y$ , possédant un bout cylindrique en  $+\infty$  du type  $(T, +\infty) \times \Lambda$  et tel que  $\Sigma \setminus ((T, +\infty) \times \Lambda)$  soit compact. Ekholm, Honda et Kàlmàn [EHK16] ont montré qu'un remplissage lagrangien de  $\Lambda$  induit une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ . Dans le cas où  $\varepsilon$  est une augmentation géométrique, il existe alors un lien fort entre la cohomologie de contact legendrienne de  $\Lambda$  linéarisée par  $\varepsilon$  et la topologie du remplissage, donné par l'isomorphisme d'Ekholm-Seidel ([Ekh08], [DR16b]) : si  $\Sigma$  est un remplissage lagrangien de  $\Lambda$  qui induit une augmentation  $\varepsilon_\Sigma$ , alors  $LCH_{\varepsilon_\Sigma}^*(\Lambda) \simeq H_*(\Sigma)$ .

Plus généralement, on peut étudier une autre relation que celle d'isotopie legendrienne entre sous-variétés legendriennes, c'est la relation de cobordisme lagrangien exact. Étant donné deux sous-variétés legendriennes  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$ , une sous-variété lagrangienne exacte  $\Sigma$  dans la symplectisation  $\mathbb{R} \times Y$  est un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$  si elle possède des bouts en  $-\infty$  et  $+\infty$  du type  $(-\infty, -T) \times \Lambda^-$  et  $(T, +\infty) \times \Lambda^+$  respectivement et que  $\Sigma \cap ([-T, T] \times Y)$  est compact. Les remplissages lagrangiens correspondent au cas  $\Lambda^- = \emptyset$ . Les cobordismes lagrangiens entre sous-variétés legendriennes ont été beaucoup étudiés. Tout d'abord, cette relation a un lien avec celle d'isotopie legendrienne. En effet, Eliashberg et Gromov ([EG98]) et Chantraine ([Cha10]) ont prouvé qu'entre deux noeuds legendriens isotopes il existe toujours une concordance lagrangienne (cobordisme lagrangien exact difféomorphe à un cylindre). D'autre part, Ekholm, Honda et Kàlmàn ont défini la notion de cobordismes élémentaires, cobordismes induit par des manipulations sur la projection lagrangienne ou la projection de front d'un noeud legendrien. Cela permet notamment de construire explicitement des cobordismes. En particulier, ils ont montré que les 5 augmentations du trèfle  $T_{2,3}$  sont géométriques, en construisant à la main 5 remplissages lagrangiens de  $T_{2,3}$ .

Les invariants associés aux sous-variétés legendriennes apportent souvent des obstructions à l'existence de cobordismes lagrangiens. Entre autres, Chantraine a établi un lien direct entre les invariants classiques de deux noeuds legendriens cobordants. Il prouve par exemple que s'il existe un cobordisme  $\Sigma$  entre deux noeuds legendriens  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$ , alors  $tb(\Lambda^+) - tb(\Lambda^-) = -\chi(\Sigma)$  où  $tb$  est le nombre de Thurston-Bennequin et  $\chi(\Sigma)$  la caractéristique d'Euler de  $\Sigma$ . En particulier, si  $\Lambda$  admet un remplissage lagrangien  $\Sigma$  alors  $tb(\Lambda) = 2g(\Sigma) - 1$  où  $g(\Sigma)$  est le genre de la surface  $\Sigma$ , donc si un noeud legendrien a un nombre de Thurston-Bennequin strictement inférieur à  $-1$ , il n'est pas remplissable (voir [Cha15]). Des résultats similaires ont ensuite été mon-

trés pour des sous-variétés legendriennes dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  par Golovko ([Gol13]). L’homologie de contact legendrienne est un invariant de sous-variétés legendriennes qui apporte aussi des résultats d’obstruction à l’existence de cobordismes lagrangiens. L’isomorphisme d’Ekholm-Seidel en est un premier exemple. Dans le cas d’un noeud legendrien  $\Lambda$ , si la cohomologie de contact legendrienne linéarisée par une augmentation  $\varepsilon$  n’est pas isomorphe à l’homologie d’une surface à bord, alors cela signifie que l’augmentation n’est pas géométrique. Plus généralement, un cobordisme lagrangien  $\Sigma$  de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$  induit un morphisme de DGA  $\phi : \mathcal{A}(\Lambda^+) \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda^-)$  grâce auquel on peut définir un  $A_\infty$ -foncteur  $\mathcal{G}_\Sigma : \mathcal{A}ug_-(\Lambda^-) \rightarrow \mathcal{A}ug_-(\Lambda^+)$  (voir [BC14]). Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko ont ainsi montré que si deux sous-variétés legendriennes  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  sont concordantes et que  $\mathcal{A}(\Lambda^-)$  possède des augmentations  $\varepsilon_1^-$  et  $\varepsilon_2^-$ , alors l’application induite par  $\mathcal{G}_\Sigma^1$  en homologie,  $G_\Sigma^1 : LCH_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^*(\Lambda^-) \rightarrow LCH_{\varepsilon_1^- \circ \phi, \varepsilon_2^- \circ \phi}^*(\Lambda^+)$ , est un isomorphisme ([CDRGG15]). L’analogie de ce résultat dans le cas plus général d’un cobordisme a été démontré par Yu Pan ([Pan17]), en se basant sur la théorie de Floer pour les cobordismes lagrangiens exacts développée par Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko ([CDRGG]). Elle prouve que si  $\Sigma$  est un cobordisme de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$ , alors l’homologie linéarisée  $LCH_*^{\varepsilon^- \circ \phi}(\Lambda^+)$  est isomorphe à  $LCH_*^{\varepsilon^-}(\Lambda^-)$  sauf en degré 0 où elle est isomorphe à la somme directe de  $LCH_0^{\varepsilon^-}(\Lambda^-)$  et de  $-\chi(\Sigma)$  copies de  $\mathbb{Z}_2$  (la raison pour laquelle ce résultat porte sur l’homologie linéarisée plutôt que la cohomologie est que Yu Pan travaille avec la catégorie d’augmentation  $\mathcal{A}ug_+$  plutôt que  $\mathcal{A}ug_-$ ). D’autre part, elle montre que le foncteur  $\mathcal{G}_\Sigma$  est injectif au niveau des classes d’équivalence d’augmentations.

L’ensemble des résultats cités ci-dessus ne représente en aucun cas une liste exhaustive. Effectivement, d’autres approches ne faisant pas appel à l’homologie de contact legendrienne mais à d’autres invariants de sous-variétés legendriennes que nous n’avons pas évoqués permettent d’obtenir des obstructions à l’existence de cobordismes lagrangiens. Par exemple, Corwell, Ng et Sivek ([CNS16]) trouvent des obstructions à l’existence de concordances lagrangiennes en utilisant des décompositions du front (ruling) et ils redémontrent en particulier le fait que la relation de concordance lagrangienne n’est pas symétrique, résultat obtenu par Chantraine dans [Cha15]. D’autre part, il y a aussi beaucoup de travaux en lien avec la théorie des familles génératrices, dont on ne parlera pas dans cette thèse. L’homologie des familles génératrices est plus ou moins “parallèle” à l’homologie de contact legendrienne linéarisée dans le sens qu’un certain nombre de résultats montrés du côté homologie de contact ont leur analogue du côté familles génératrices. Par exemple, Sabloff-Traynor ([ST13]) montrent des résultats similaires à ceux de Chantraine et Golovko dans le cas des familles génératrices, et l’isomorphisme d’Ekholm-Seidel dans sa version familles génératrices. En fait, le lien entre homologie de contact legendrienne linéarisée et homologie des familles génératrices est clairement établi en dimension 3 (voir par exemple [FR11]), mais il reste encore très flou en dimension supérieure.

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à la théorie de Floer

pour cobordismes lagrangiens exacts, citée brièvement ci-dessus, développée par Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko dans [CDRGG]. L'idée principale motivant ces travaux est de mieux comprendre la topologie d'un cobordisme à partir des données des legendriennes au bord, ou autrement dit quelles restrictions sur la topologie d'un cobordisme apportent les legendriennes au bord. Cette théorie de Floer consiste à associer à une paire de cobordismes lagrangiens exacts transverses un complexe : le complexe de Cthulhu. Plus précisément, considérons des sous-variétés legendriennes  $\Lambda_i^\pm \subset P \times \mathbb{R}$ , pour  $i = 1, 2$ , dans la contactisation d'une variété de Liouville, et deux cobordismes lagrangiens exacts transverses  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  de  $\Lambda_1^-$  à  $\Lambda_1^+$  et de  $\Lambda_2^-$  à  $\Lambda_2^+$  respectivement. Supposons de plus que les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  admettent des augmentations  $\varepsilon_i^-$ . Le complexe de Cthulhu  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  est engendré par les cordes de Reeb de  $\Lambda_2^+$  à  $\Lambda_1^+$ , les points d'intersection dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , et les cordes de Reeb de  $\Lambda_2^-$  à  $\Lambda_1^-$ . La différentielle est une application bilinéarisée qui compte des courbes holomorphes rigides à bord sur les cobordismes et asymptotes à des générateurs du complexe. Le complexe de Cthulhu possède un complexe quotient, le complexe de Floer de la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , engendré seulement par les points d'intersection et les cordes de  $\Lambda_2^-$  à  $\Lambda_1^-$ , on le note  $(CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2), \partial_{-\infty})$ . Dans cette thèse, nous montrons qu'on peut définir une structure de produit sur les complexes de Floer. Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème 1** (Théorème 14). *Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  trois cobordismes lagrangiens exacts transverses de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , où les  $\Lambda_i^\pm$  sont des sous-variétés legendriennes de  $P \times \mathbb{R}$  telles que les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  admettent des augmentations. Alors, pour tout choix d'augmentations  $\varepsilon_i^-$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , il existe une application :*

$$\mathfrak{m}_2 : CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_3)$$

qui satisfait :  $\partial_{-\infty} \circ \mathfrak{m}_2(-, -) + \mathfrak{m}_2(\partial_{-\infty}, -) + \mathfrak{m}_2(-, \partial_{-\infty}) = 0$ .

Dans le cas où  $\Lambda_1^- = \emptyset$ , si  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  sont de petites perturbations de  $\Sigma_1$  telles que les paires  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $(\Sigma_2, \Sigma_3)$  et  $(\Sigma_1, \Sigma_3)$  soient dirigées (voir section 5.3.3), alors l'homologie des complexes  $CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3)$  et  $CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_3)$  est isomorphe à la cohomologie singulière de  $\Sigma_1$  relativement à  $\Lambda_1^+$  et le produit  $\mathfrak{m}_2$  par cette identification correspond au produit cup.

D'autre part, l'homologie de Cthulhu est invariante par isotopie hamiltonienne, ce qui implique que le complexe de Cthulhu  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  est acyclique car il est possible de déplacer les cobordismes dans  $\mathbb{R} \times Y$  de telle sorte que le complexe n'ait plus de générateurs. Or, le complexe de Cthulhu est le cône d'une application  $\mathcal{F}^1 : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow LCC_{\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+}^*(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  qui se trouve alors être un quasi-isomorphisme. Nous montrerons dans cette thèse que l'application induite par  $\mathcal{F}^1$  en cohomologie préserve la structure produit. Autrement dit, elle transporte le produit des complexes de Floer sur le produit  $\mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2$  de la catégorie d'augmentation associée à

$\Lambda_1^+ \cup \Lambda_2^+ \cup \Lambda_3^+$ , où  $\varepsilon_{1,2,3}^+$  est l'augmentation diagonale définie à partir de  $\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+$  et  $\varepsilon_3^+$  (voir section 4.6.3). Plus précisément, on a le théorème :

**Théorème 2** (Théorème 15). *Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  trois cobordismes lagrangiens exacts transverses de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , telles que les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  admettent des augmentations. Alors, pour tout choix d'augmentations  $\varepsilon_i^-$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , on a :*

$$[\mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^1) = \mathcal{F}^1 \circ \mathfrak{m}_2]$$

*c'est-à-dire que le morphisme  $\mathcal{F}^1$  préserve les structures produit en cohomologie.*

On peut en fait aller plus loin et étendre la structure de produit sur les complexes de Floer en une structure  $A_\infty$ . Ainsi, dans la section 6.5, on construit des opérations  $\{\mathfrak{m}_d\}_{d \geq 1}$  telles que la différentielle  $\partial_{-\infty}$  est l'opération d'ordre 1 et le produit  $\mathfrak{m}_2$  l'opération d'ordre 2. On montre alors le théorème :

**Théorème 3** (Théorème 16). *Les opérations  $\{\mathfrak{m}_d\}_{d \geq 1}$  sont des opérations  $A_\infty$ , elles satisfont pour tout  $d \geq 1$  :*

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} \mathfrak{m}_{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathfrak{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0$$

On obtient immédiatement de ce théorème que le produit  $\mathfrak{m}_2$  est associatif en homologie.

Enfin, à une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  nous associerons une catégorie de cobordismes lagrangiens notée  $\mathcal{Fuk}_-(\Lambda)$ . Cette catégorie est une catégorie  $A_\infty$  dont les objets sont des triplets  $(\Sigma, \Lambda^-, \varepsilon^-)$  tels que  $\Lambda^-$  est une sous-variété legendrienne,  $\varepsilon^-$  une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^-)$  et  $\Sigma$  un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda$ . On montrera que l'application  $\mathcal{F}^1$  s'étend en un foncteur  $A_\infty$  :

**Théorème 4.** *Il existe un  $A_\infty$ -foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{Fuk}_-(\Lambda) \rightarrow \mathcal{Aug}_-(\Lambda)$  cohomologiquement plein et fidèle.*

Nous donnons maintenant un aperçu de l'organisation de la thèse.

Le chapitre 1 est consacré à quelques notions de géométrie de contact et de géométrie symplectique. Nous rappelons principalement les définitions des objets avec lesquels nous travaillerons tout au long de la thèse, ainsi qu'un certain nombre d'exemples. En particulier, nous rappelons les définitions précises de sous-variétés legendriennes et de cobordismes lagrangiens exacts.

Le chapitre 2 est plus technique, nous rappelons quelques définitions de base concernant les catégories  $A_\infty$  et le lien entre les relations  $A_\infty$  et les polytopes de Stasheff. Ensuite, nous introduisons les structures presque complexes qui sont nécessaires à la définition des différents espaces de modules de courbes holomorphes apparaissant dans

cette thèse. Nous concluons ce chapitre par les résultats de compacité concernant ces espaces de modules.

Le chapitre 3, est consacré à l'homologie de contact legendrienne. Nous donnons la définition de l'homologie de contact legendrienne à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ , ainsi que les versions linéarisée et bilinéarisée. Puis, nous rappelons la construction de la catégorie d'augmentations  $Aug_-(\Lambda)$ .

L'homologie de Cthulhu est décrite brièvement dans le chapitre 4. Nous rappelons la construction du complexe et les différents types de perturbations hamiltoniennes impliquées entre autres dans la preuve de l'acyclicité du complexe.

Enfin dans le chapitre 5 nous démontrerons les résultats de cette thèse évoqués ci-dessus. Dans une première section nous décrirons les applications qui définissent le produit sur les complexes de Floer. Le théorème 1 est démontré à la section 6.2.2, en étudiant les dégénérescences de certains types de courbes holomorphes. La section suivante contient le théorème 2 et sa démonstration. Dans le reste du chapitre, nous définissons la structure  $A_\infty$  généralisant le produit (théorème 3) et le foncteur  $\mathcal{F}$  (théorème 4).





# Géométries de contact et symplectique

## 2.1 Premières définitions

**Définition 1.** Une *variété de contact*  $(Y^{2n+1}, \xi)$  est la donnée d'une variété  $Y$  de dimension impaire  $2n + 1$  et d'une distribution d'hyperplans  $\xi$  sur  $Y$  appelée *structure de contact*, qui localement s'écrit comme le noyau d'une 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $Y$  satisfaisant  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ .

Cette condition sur  $\alpha$  est une condition de maximale non-intégrabilité pour la distribution  $\xi$ . La forme  $\alpha$  est appelée *forme de contact*. Dans toute cette thèse, on considérera des structures de contact  $\xi$  coorientées c'est-à-dire qu'on peut les écrire globalement comme le noyau d'une 1-forme différentielle  $\xi = \ker \alpha$ . Dans ce cas, on notera  $(Y, \alpha)$  la variété de contact. Remarquons que pour toute fonction définie sur  $Y$  et à valeurs strictement positives, la 1-forme  $f\alpha$  est aussi une forme de contact pour  $(Y, \xi)$ .

Deux variétés de contact  $(Y, \alpha)$  et  $(Y', \alpha')$  sont dites *contactomorphes* s'il existe un difféomorphisme  $\varphi: Y \rightarrow Y'$  et une fonction  $f: Y \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telles que  $\varphi^*\alpha' = f\alpha$ .

À une variété de contact  $(Y, \alpha)$ , on peut associer un champ de vecteurs particulier appelé le *champ de Reeb* noté  $R_\alpha$ .

**Proposition 1.** *Il existe un unique champ de vecteurs sur  $(Y, \alpha)$ , noté  $R_\alpha$ , satisfaisant  $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$  et  $\alpha(R_\alpha) = 1$ , c'est le champ de Reeb de  $(Y, \alpha)$ . De plus, le flot du champ de Reeb préserve  $\alpha$ .*

Le flot du champ de Reeb  $R_\alpha$  est donc un contactomorphisme de  $(Y, \alpha)$ .

**Exemple 1.**  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de la 1-forme différentielle  $\alpha_0 = dz + \sum_i y_i dx_i$ . On peut vérifier que  $\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^n = n! dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n \neq 0$ , d'où  $\alpha_0$  est

bien une structure de contact sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et le champ de Reeb associé est  $R_{\alpha_0} = \partial_z$ . C'est en fait la variété de contact standard, le théorème de Darboux (voir par exemple [Gei08]) affirme que dans toute variété de contact il existe des coordonnées locales pour lesquelles la structure de contact est la structure standard, autrement dit, toute variété de contact de dimension  $2n + 1$  est localement contactomorphe à  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_0)$ .

**Exemple 2.** Considérons la sphère  $S^{2n-1} = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) / \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{2n}$  munie de la forme  $\alpha = \sum_i x_i dy_i - y_i dx_i$ . On peut calculer :

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = 2^{n-1} (n-1)! \sum_{i=1}^n (x_i dx_1 dy_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dy_n - y_i dx_1 dy_1 \dots \widehat{dy}_i \dots dy_n) \neq 0$$

Et alors  $(S^{2n-1}, \alpha)$  est une variété de contact. Afin de calculer le champ de Reeb associé à cette structure de contact, on considère les coordonnées  $(r_1, \theta_1, \dots, r_n, \theta_n)$ , où  $(r_i, \theta_i)$  sont les coordonnées polaires du plan  $(x_i, y_i)$ , avec  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ . Avec ces coordonnées la forme de contact s'écrit  $\alpha = \sum_i r_i^2 d\theta_i$  et le champ de Reeb est radial,  $R_\alpha = \sum_i \partial_{\theta_i}$ .

**Exemple 3.** Soit  $M$  une variété. Considérons l'ensemble  $\{(q, H) / q \in M, H \subset T_q M \text{ hyperplan}\}$  qui est l'ensemble des *éléments de contact* de  $M$ . Cet ensemble s'identifie naturellement à la projectivisation du fibré cotangent de  $M$  :  $\mathbb{P}T^*M$ . En effet, un hyperplan  $H \subset T_q M$  peut se décrire comme le noyau d'une forme linéaire  $\beta_q \in T^*M$  et pour tout réel  $\lambda \neq 0$  on a aussi  $\ker(\lambda\beta_q) = H$ .

Soit  $\pi_M: \mathbb{P}T^*M \rightarrow M$  la projection et  $\beta_q \in T^*M$ . On définit l'hyperplan de contact  $\xi_{\beta_q} \subset T_{\beta_q} \mathbb{P}T^*M$  de telle sorte que  $d_{\beta_q} \pi_M(\xi_{\beta_q}) = \ker(\beta_q) \subset T_q M$ . On peut vérifier que la distribution  $\xi$  définie de la sorte est une structure de contact sur  $\mathbb{P}T^*M$  (voir [Gei08]).

Les structures de contact existent seulement sur des variétés de dimension impaire. Les structures qui interagissent naturellement avec les structures de contact et qui sont définies sur des variétés de dimension paire sont les structures symplectiques.

**Définition 2.** Une *variété symplectique*  $(X^{2n}, \omega)$  est la donnée d'une variété  $X$  de dimension paire  $2n$  et d'une 2-forme différentielle  $\omega$  sur  $X$  fermée et non dégénérée, autrement dit  $\omega^n$  est une forme volume sur  $X$ .

La forme  $\omega$  étant antisymétrique, pour être non-dégénérée il faut nécessairement que  $X$  soit de dimension paire, il n'existe donc pas de variété symplectique de dimension impaire. Si la 2-forme  $\omega$  est exacte, c'est-à-dire s'il existe une 1-forme  $\beta$  sur  $X$  satisfaisant  $\omega = d\beta$ , on dira que  $X$  est une *variété symplectique exacte* et on la notera  $(X, \beta)$ .

**Exemple 4.**  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la 2-forme différentielle  $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$  est une variété symplectique exacte.

**Exemple 5.** Le fibré cotangent  $T^*M$  d'une variété  $M$  est naturellement muni d'une forme symplectique exacte  $-d\lambda$  où la 1-forme  $\lambda$  s'appelle forme de Liouville et est définie de la façon suivante. Si on note  $\pi: T^*M \rightarrow M$  la projection sur la base et  $d\pi: TT^*M \rightarrow TM$  sa différentielle, alors  $\lambda$  est définie par  $\lambda(v_\eta) = \eta(d\pi(v_\eta))$ , pour tout  $\eta \in T^*M$  et  $v_\eta \in T_\eta T^*M$ . Si on se donne des coordonnées  $(q_i, p_i)$  sur  $T^*M$ , où les  $q_i$  sont les coordonnées sur la base  $M$  et les  $p_i$  sont les coordonnées dans les fibres, alors  $\lambda$  est la 1-forme  $\sum_i p_i dq_i$ , et donc  $-d\lambda$  est une forme symplectique sur  $T^*M$ . La forme de Liouville est aussi entièrement caractérisée par le fait que pour toute 1-forme  $\gamma$  sur  $M$ , elle satisfait  $\gamma^*\lambda = \gamma$ .

On peut construire une variété de contact à partir d'une variété symplectique exacte et réciproquement obtenir une variété symplectique exacte à partir d'une variété de contact. Si  $(X^{2n}, \beta)$  est une variété symplectique exacte alors  $(X \times \mathbb{R}, dz + \beta)$  est une variété de contact, où  $z$  est la coordonnée réelle. En effet  $X \times \mathbb{R}$  est de dimension impaire et  $(dz + \beta) \wedge (d(dz + \beta))^n = dz \wedge (d\beta)^n \neq 0$ . De plus le champ de Reeb est  $\partial_z$ . On appelle  $(X \times \mathbb{R}, dz + \beta)$  la *contactisation* de  $(X^{2n}, \beta)$ .

**Exemple 6.** La contactisation de la variété symplectique  $(T^*M, -d\lambda)$  est l'espace des 1-jets de  $M$ , noté  $J^1(M)$ .

Réciproquement, considérons une variété de contact  $(Y, \alpha)$  et construisons sa symplectisation. Soit l'ensemble  $S_\xi Y = \{(y, \gamma), y \in Y, \gamma \in T_y^*Y \text{ tel que } \ker \gamma = \xi_y\}$ . C'est un  $\mathbb{R}^*$ -fibré sur  $Y$  et la forme de contact  $\alpha$  est une section globale de ce fibré. On a donc une trivialisation :

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^* \times Y &\rightarrow S_\xi Y \\ (t, y) &\mapsto (y, t\alpha_y) \end{aligned}$$

et  $\phi^*\lambda = t\alpha$ , où  $\lambda$  est la forme de Liouville, d'où  $\phi^*(d\lambda)^{n+1} = (d(t\alpha))^{n+1} = (dt \wedge \alpha + t d\alpha)^{n+1} = (n+1)t^n dt \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^n$  ce qui implique que  $-d\lambda$  est une forme symplectique sur  $S_\xi Y$  car  $\alpha$  est une forme de contact sur  $Y$ . La variété  $S_\xi Y$  est constituée de deux composantes connexes  $S_\xi^+ Y$  et  $S_\xi^- Y$ , correspondant par  $\phi$  à  $\mathbb{R}_+^* \times Y$  et  $\mathbb{R}_-^* \times Y$  respectivement. On appelle *symplectisation* de  $(Y, \xi)$  la variété symplectique  $(S_\xi^+ Y, -d\lambda)$ , qu'on peut voir aussi comme  $(\mathbb{R}_+^* \times Y, d(t\alpha))$  ou plus souvent comme  $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$ .

Dans la suite, on travaillera essentiellement avec des variétés de contact obtenues comme contactisation de variétés de Liouville, qui sont un type de variétés symplectiques exactes.

**Définition 3.** Une variété symplectique compacte à bord  $(P^{2n}, \omega)$  est appelée *variété de Liouville* s'il existe un champ de vecteur  $X$  sur  $P$  tel que :

- $\mathcal{L}_X \omega = \omega$
- $X$  est sortant le long de  $\partial P$ .

où  $\mathcal{L}_X$  est la dérivée de Lie par rapport à  $X$ . Le champ de vecteurs  $X$  est alors appelé champ de vecteurs de Liouville.

La condition  $\mathcal{L}_X\omega = \omega$  se réécrit  $d\iota_X\omega = \omega$  car  $\omega$  est fermée et cela implique donc qu'elle est exacte  $\omega = d\beta$  avec  $\beta = \iota_X\omega$ . La 1-forme  $\beta$  se restreint sur  $\partial P$  en une forme de contact qu'on note  $\alpha$  et on peut construire la complétion de  $(P, \omega)$ , notée  $(\hat{P}, \hat{\omega})$ , par  $\hat{P} = P \cup_{\partial P} [0, \infty) \times \partial P$  et  $\hat{\omega}$  est égale à la 2-forme  $d\beta$  sur  $P$ , qu'on prolonge par  $\omega = d(e^t\alpha)$  sur  $[0, \infty) \times \partial P$ , avec  $t$  la coordonnée dans  $[0, \infty)$ . La complétion  $(\hat{P}, \hat{\omega})$  est toujours une variété symplectique exacte. De plus, on peut prolonger par le flot le champ de vecteurs de Liouville  $X$  sur  $\hat{P}$  tout entier.

**Exemple 7.** La boule unité  $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$  est une variété de Liouville munie de la forme symplectique  $\omega = 2 \sum_i r_i dr_i \wedge d\theta_i = d(\sum_i r_i^2 d\theta_i)$  avec les coordonnées polaires  $(r_1, \theta_1, \dots, r_n, \theta_n)$ , où  $0 \leq r_i \leq 1$ , et du champ de vecteurs radial  $\sum_i \partial_{\theta_i}$ . La complétion associée est  $\mathbb{R}^{2n+1}$  avec la forme symplectique  $\omega = 2 \sum_i r_i dr_i \wedge d\theta_i$  avec  $r_i \in [0, \infty)$  pour tout  $i$ .

**Exemple 8.** On a vu à l'exemple 5 que le fibré cotangent d'une variété  $Q$  est une variété symplectique  $(T^*Q, -d\lambda)$ . Si on munit  $Q$  d'une métrique, elle induit une métrique sur  $T^*Q$  et on peut définir le fibré en disque  $DT^*Q = \{\eta \in T^*Q / \langle \eta, \eta \rangle = 1\}$ . La variété  $(DT^*Q, -d\lambda)$  est une variété de Liouville dont le champ de vecteurs de Liouville est le champ radial  $\sum_i p_i \partial_{p_i}$ . Ce champ de vecteur est sortant le long du bord  $ST^*Q$  qui est une variété de contact avec comme forme de contact la restriction de  $\lambda$ . La complétion de  $(DT^*Q, -d\lambda)$  est le fibré cotangent tout entier, avec le même champ de vecteurs de Liouville.

Par la suite, quand on ne précisera pas la variété en question, on pensera à une variété de Liouville  $P$  comme étant une variété ouverte obtenue comme complétion d'une variété de Liouville compacte  $(P^c, d\beta)$ .

## 2.2 Sous-variétés legendriennes.

Dans une variété de contact  $(Y, \alpha)$ , certaines sous-variétés sont particulièrement intéressantes à étudier car elles apparaissent par exemple naturellement comme les fibrés conormaux unitaires de sous-variétés, ce sont les *sous-variétés legendriennes*. La condition de non-intégrabilité de  $\xi = \ker \alpha$  implique que la dimension maximale d'une sous-variété partout tangente à  $\xi$  est  $n$ .

**Définition 4.** Une sous-variété  $\Lambda$  de dimension  $n$  est appelée *legendrienne* si  $\alpha|_{\Lambda} = 0$ , ou autrement dit pour tout  $x \in \Lambda$ ,  $T_x\Lambda \subset \xi_x$ .

Si  $K \subset M$  est une sous-variété d'une variété  $M$ , alors son fibré normal est défini par :

$$L_K = \{(q, p) \in T^*M / q \in K \text{ et } \langle p, v \rangle = 0 \forall v \in T^*K\}$$

$c$ 'est une sous-variété lagrangienne de  $T^*M$  (c'est-à-dire qu'elle satisfait  $d\lambda|_{L_K} = 0$ ). Le fibré conormal unitaire de  $K$  est défini par  $\Lambda_K = L_K \cap ST^*M$ , et  $c$ 'est une sous-variété legendrienne de  $(ST^*M, -d\lambda)$ .

Les *cordes de Reeb* d'une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  sont les trajectoires du flot de Reeb qui commencent et terminent sur  $\Lambda$ . Dans le cas par exemple où  $Y = P \times \mathbb{R}$  est la contactisation d'une variété symplectique exacte, les sous-variétés legendriennes compactes n'ont génériquement qu'un nombre fini de cordes de Reeb. Ces dernières correspondent aux segments verticaux (car le champ de Reeb est  $\partial_z$ ) qui commencent et terminent sur  $\Lambda$ . Soient  $\gamma$  une corde de Reeb de longueur  $\ell$  et d'extrémités  $x^-$  et  $x^+$  dans  $\Lambda$  et notons  $\varphi_t^R$  le flot de Reeb. Si  $d_{x^-}\varphi_\ell^R(T_{x^-}\Lambda)$  et  $T_{x^+}\Lambda$  s'intersectent transversalement, on dira que la corde de Reeb  $\gamma$  est *non-dégénérée* et alors  $\Lambda$  est dite *corde-générique* si toutes ses cordes de Reeb sont non dégénérées. On note  $\mathcal{R}(\Lambda)$  l'ensemble des cordes de Reeb de  $\Lambda$ . À partir de maintenant, on ne considère que des sous-variétés legendriennes qui sont corde-génériques.

Soient  $d$  sous-variétés legendriennes  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_d$  et considérons l'entrelacs  $\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_d$ . Les cordes de Reeb de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_i$  sont appelées des cordes *pures* et celles qui relient deux legendriennes distinctes, c'est-à-dire les cordes de  $\Lambda_i$  à  $\Lambda_j$  avec  $i \neq j$ , sont appelées des cordes *mixtes*. On note  $\mathcal{R}(\Lambda_i, \Lambda_j)$  les cordes de Reeb de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_j$ .

À une sous-variété legendrienne  $\Lambda$  dans une variété de contact du type  $P \times \mathbb{R}$  on peut associer sa *projection lagrangienne*  $\Pi_P(\Lambda)$  où  $\Pi_P: P \times \mathbb{R} \rightarrow P$  est la projection sur  $P$ . Les cordes de Reeb de  $\Lambda$  sont alors en bijection avec les points d'intersection de  $\Pi_P(\Lambda)$  (voir figure 2.1).

Dans le cas particulier où la variété de contact est l'espace de 1-jets d'une variété  $M$  (i.e.  $P = T^*M$ ), on peut aussi associer à  $\Lambda$  sa *projection de front*  $\Pi_F(\Lambda)$  où  $\Pi_F: J^1(M) \rightarrow M \times \mathbb{R}$  est la projection sur  $M \times \mathbb{R}$ . Dans ce cas les cordes de Reeb sont en bijection avec les segments verticaux dans  $M \times \mathbb{R}$  qui commencent et terminent sur  $\Pi_F(\Lambda)$  en des points  $c^-$  et  $c^+$  respectivement, et tels que les espaces tangents  $T_{c^-}\Pi_F(\Lambda)$  et  $T_{c^+}\Pi_F(\Lambda)$  soient égaux (voir figure 2.2).

Enfin, nous pouvons définir la relation d'isotopie entre sous-variétés legendriennes.

**Définition 5.** Deux sous-variétés legendriennes  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  dans  $(Y, \alpha)$  sont *isotopes* s'il existe une application lisse  $F: [0, 1] \times \Lambda \rightarrow Y$  telle que :

- $F(t, \Lambda) \subset Y$  est legendrienne pour tout  $t \in [0, 1]$
- $F(0, \Lambda) = \Lambda_0$
- $F(1, \Lambda) = \Lambda_1$

Comprendre si deux sous-variétés legendriennes sont isotopes est un problème difficile à résoudre. Il existe beaucoup d'invariants par isotopie legendrienne de sous-variétés legendriennes. Les plus simples à définir sont les invariants classiques qui sont le type d'isotopie lisse, l'invariant de Thurston-Bennequin et classe de rotation (voir par exemple [Etn], pour les noeuds legendriens et [EES05b] en toutes dimensions). Un

invariant plus élaboré est par exemple l'homologie de contact legendrienne, nous la définirons au chapitre 4.

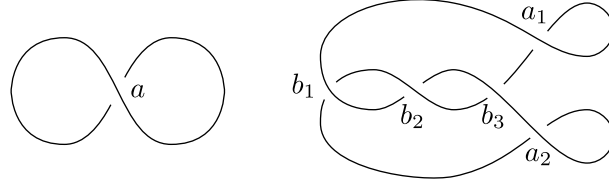


FIGURE 2.1 – Projections lagrangiennes d'un noeud trivial (à gauche) et d'un noeud de trèfle (à droite).

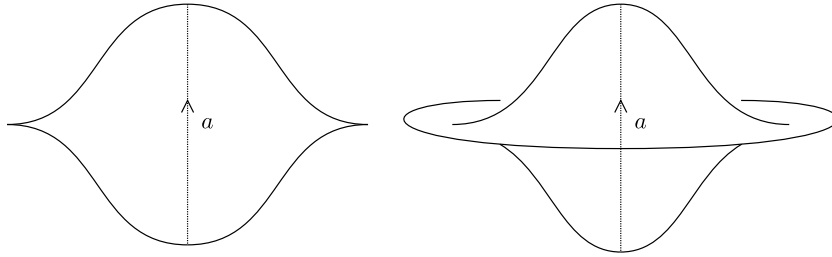


FIGURE 2.2 – Projection de front d'un noeud legendrien trivial (à gauche) et d'une sphère legendrienne (à droite). Dans les deux cas on a représenté l'unique corde de Reeb  $a$ .

### 2.3 Cobordismes lagrangiens exacts.

Dans cette section, nous définissons une relation moins forte que l'isotopie legendrienne entre deux sous-variétés legendriennes : les cobordismes lagrangiens exacts. Ces objets ont déjà été beaucoup étudiés, voir par exemple ([Cha10], [Cha15], [Ekh12], [Ekh08], [EHK16], [CDRGG15], [CDRGG]). Soient  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  deux sous-variétés legendriennes dans  $(Y, \alpha)$ .

**Définition 6.** Une sous-variété  $\Sigma \subset \mathbb{R} \times Y$  est un *cobordisme lagrangien exact* de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$ , noté  $\Lambda^- \prec_{\Sigma} \Lambda^+$  si :

- il existe un réel  $T > 0$  tel que :
  - $\Sigma \cap (-\infty, -T) \times Y = (-\infty, -T) \times \Lambda^-$
  - $\Sigma \cap (T, \infty) \times Y = (T, \infty) \times \Lambda^+$
  - $\Sigma \cap [-T, T] \times Y$  est compact

- il existe une fonction lisse  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $e^t \alpha|_{T\Sigma} = df$
2.  $f|_{(-\infty, -T) \times \Lambda^-}$  est constante
3.  $f|_{(T, \infty) \times \Lambda^+}$  est constante

**Remarque 1.** La condition 1 dit par définition que  $\Sigma$  est une sous-variété lagrangienne exacte de  $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$ . D'autre part, la condition 1 combinée avec le fait que  $\Sigma$  soit un cylindre au dessus de  $\Lambda^-$  et  $\Lambda^+$  dans les bouts négatif et positif respectivement impliquent que  $f$  est constante sur chaque composante connexe dans les bouts positifs et négatifs de  $\Sigma$ . Les conditions 2 et 3 imposent que  $f$  soit globalement constante dans les bouts négatif et positif. Si les  $\Lambda^\pm$  sont connexes, les conditions 2 et 3 sont donc automatiquement vérifiées. De plus, il n'est pas nécessaire que la constante dans le bout négatif soit la même que celle dans le bout positif.

On note la partie compacte  $\bar{\Sigma} := [-T, T] \times \Sigma$ , et ses composantes de bord  $\partial_- \bar{\Sigma} = \{-T\} \times \Sigma$  et  $\partial_+ \bar{\Sigma} := \{T\} \times \Sigma$ .

Dans le cas où  $\Sigma$  est difféomorphe à un cylindre on l'appelle *concordance lagrangienne* de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$  et on note simplement  $\Lambda^- \prec \Lambda^+$ , et quand  $\Lambda^- = \emptyset$  alors  $\Sigma$  est appelé *remplissage lagrangien exact* de  $\Lambda^+$ . Par exemple,  $\mathbb{R} \times \Lambda$  est une concordance lagrangienne de  $\Lambda$  vers elle-même.

On ne sait pas encore aujourd'hui si la relation de concordance contient autant d'information que celle d'isotopie legendrienne : une première différence fondamentale à noter est que la relation d'isotopie legendrienne est symétrique alors que celle de concordance ne l'est pas. En effet, Chantraine a montré dans [Cha15] qu'il existe une concordance du noeud legendrien trivial  $\Lambda_0$  avec  $tb(\Lambda_0) = -1$  vers un représentant legendrien  $\Lambda$  du noeud  $m(9_{46})$  de la table de Rolfsen ([Rol76]), mais qu'il n'y a pas de concordance de  $\Lambda$  vers  $\Lambda_0$  (voir aussi [EG98]). D'autre part, dans [Cha10], Chantraine a prouvé que si deux noeuds legendriens  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  sont legendrien-isotopes, alors il existe une concordance de  $\Lambda_0$  vers  $\Lambda_1$  et une concordance de  $\Lambda_1$  vers  $\Lambda_0$ , et Golovko a généralisé la preuve du résultat pour des legendriennes dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  (voir [Gol13]). Maintenant, si  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  sont telles qu'il existe des concordances  $\Lambda_0 \prec \Lambda_1$  et  $\Lambda_1 \prec \Lambda_0$ , on peut se demander s'il existe une isotopie entre  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$ . C'est une question encore ouverte aujourd'hui. Si deux telles concordances existent, cela implique que les invariants classiques de  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_1$  sont les mêmes, d'après le théorème 1.2 de [Cha10] pour le cas des noeuds legendriens (voir [Gol13] pour l'invariant de Thurston-Bennequin en toute dimension). De plus, dans le cas où les legendriennes admettent des remplissages lagrangiens ou plus généralement des augmentations, les homologies de contact legendriennes linéarisées (voir chapitre 4) doivent être isomorphes, mais tout cela est évidemment bien loin d'être suffisant pour montrer que des sous-variétés legendriennes sont isotopes.



## Structure $A_\infty$ et espaces de modules

### 3.1 Définitions

Soit  $A$  un  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel et  $\otimes$  le produit tensoriel sur  $\mathbb{Z}_2$ . On note  $A^{\otimes d} := \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_d$ .

**Définition 7.** Une algèbre  $A_\infty$  sur  $\mathbb{Z}_2$  est la donnée d'un  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel  $A$  gradué et d'opérations  $m_d: A^{\otimes d} \rightarrow A$  de degré  $2 - d$  telles que pour tout  $d \geq 1$  on ait :

$$\sum_{l=1}^d \sum_{n=0}^{d-l} m_{d-l+1}(\text{id}^{\otimes d-l-n} \otimes m_l \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0 \quad (3.1)$$

La relation 3.1 pour  $d = 1$  donne  $m_1 \circ m_1 = 0$  donc c'est une différentielle et  $(A, m_1)$  est un complexe dont on note  $H_*(A)$  l'homologie. Pour  $d = 2$ , on a  $m_2(\text{id} \otimes m_1) + m_2(m_1 \otimes \text{id}) + m_1 \circ m_2 = 0$  d'où  $m_2$  induit un produit sur  $H_*(A)$  et pour  $d = 3$ , on a

$$\begin{aligned} m_3(\text{id} \otimes \text{id} \otimes m_1) + m_3(\text{id} \otimes m_1 \otimes \text{id}) + m_3(m_1 \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \\ + m_2(\text{id} \otimes m_2) + m_2(m_2 \otimes \text{id}) + m_1 \circ m_3 = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que le produit  $m_2$  est associatif en homologie. Par exemple, une algèbre différentielle graduée sur  $\mathbb{Z}_2$  est une algèbre  $A_\infty$  avec  $m_1 = \partial$  la différentielle et  $m_2$  le produit, puis  $m_d = 0$  pour tout  $d \geq 3$ . Pour  $d = 2$  la relation 3.1 correspond à la règle de Leibniz  $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ . On peut généraliser cette notion d'algèbre  $A_\infty$  par celle de catégorie  $A_\infty$ .

**Définition 8.** Une catégorie  $A_\infty$  (sur  $\mathbb{Z}_2$ )  $\mathcal{A}$  est la donnée d'un ensemble d'objets  $\text{Ob}(\mathcal{A})$ , d'un espace vectoriel gradué  $\text{hom}(X_i, X_j)$  pour toute paire d'objets  $X_i, X_j \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  et pour tout  $d \geq 1$  et pour tout  $(d+1)$ -uplet d'objets  $X_0, \dots, X_d$  une opération

$$m_d: \text{hom}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \text{hom}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}(X_0, X_d)$$

De plus, l'ensemble de ces opérations  $\{m_d\}$  lorsqu'on peut les composer doivent satisfaire la relation  $A_\infty$  3.1.

Un foncteur  $A_\infty$  est un foncteur entre deux catégories  $A_\infty$ . Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  deux catégories  $A_\infty$ .

**Définition 9.** Un  $A_\infty$ -foncteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$  est une famille d'opérations  $\{\mathcal{F}^d\}_{d \geq 0}$  avec  $\mathcal{F}^0: \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$  et pour tout  $(d+1)$ -uplet d'objets  $X_0, \dots, X_d$  dans  $\text{Ob}(\mathcal{A})$ ,

$$\mathcal{F}^d: \text{hom}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \text{hom}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{F}^0 X_0, \mathcal{F}^0 X_d)$$

telles que pour tout  $d \geq 1$  on ait

$$\sum_{l=1}^d \sum_{n=0}^{d-l} \mathcal{F}^{d-l+1}(\text{id}^{\otimes d-l-n} \otimes m_l \otimes \text{id}^{\otimes n}) + \sum_{s=1}^d \sum_{i_1+\dots+i_s=d} m_s(\mathcal{F}^{i_s} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{i_1}) = 0$$

## 3.2 Polytopes de Stasheff

Les structures  $A_\infty$  apparaissent naturellement dans un cadre géométrique : les polytopes de Stasheff. Ces derniers, notés  $\mathcal{K}_{d+1}$ , sont des polytopes de dimension  $d-2$  dont les sommets sont en bijection avec les arbres planaires enracinés stables à  $d$  feuilles et  $d-1$  sommets intérieurs.

Rappelons qu'un *arbre enraciné à  $d$  feuilles* est un arbre qui a  $d+1$  sommets de valence 1 dont l'un d'entre eux est appelé la racine de l'arbre et les autres sont appelés les feuilles. Cette distinction des sommets de valence 1 permet de munir l'arbre d'une orientation, c'est-à-dire d'orienter les arêtes de l'arbre de telle sorte que chaque sommet intérieur (sommet qui n'est pas une feuille) possède une et une seule arête entrante, celle provenant de la racine, et les autres arêtes sont sortantes. Un arbre est dit *stable* si tout ses sommets intérieurs sont de valence au moins 3. Pour un arbre enraciné  $T$ , on note  $Ve(T)$  l'ensemble des sommets de  $T$  et  $|v|$  la valence d'un sommet  $v$ , et on note  $Ed^{int}(T)$  l'ensemble des arêtes intérieures, celles reliant deux sommets intérieurs.

Les faces de  $\mathcal{K}_{d+1}$  de dimension 1 ou autrement dit les arêtes reliant deux sommets de  $\mathcal{K}_{d+1}$  sont en bijection avec les arbres planaires enracinés stables à  $d$  feuilles et  $d-2$  sommets intérieurs. Plus généralement, les faces de  $\mathcal{K}_{d+1}$  de dimension  $k$  sont en bijection avec les arbres planaires enracinés stables à  $d$  feuilles et  $d-k-1$  sommets intérieurs. En particulier, les faces de dimension 0, c'est-à-dire les sommets du

polytope, sont en bijection avec les arbres binaires enracinés. De plus, deux arbres  $T$  et  $T'$  avec  $d - k - 1$  sommets intérieurs (donc correspondant à des faces de dimension  $k$ ) sont sur le bord de la même face de dimension  $k + 1$  si en contractant une arête de chaque arbre on obtient celui correspondant à la  $(k + 1)$ -face.

Loday ([Lod04]) a donné une description des polytopes de Stasheff  $\mathcal{K}_{d+1}$ , pour  $d \geq 2$  par des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Il associe à chaque arbre binaire enraciné à  $d$  feuilles (chaque sommet de  $\mathcal{K}_{d+1}$ ) un point à coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ , et montre que  $\mathcal{K}_{d+1}$  correspond à l'enveloppe convexe de ces points.

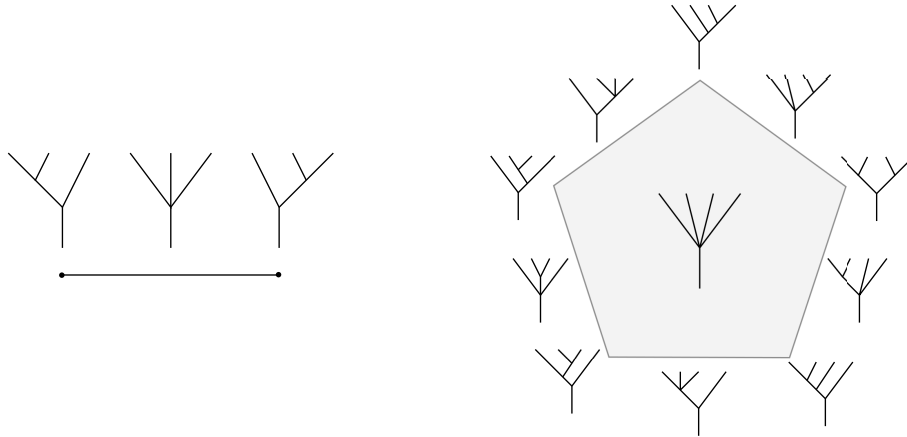


FIGURE 3.1 – Polytopes de Stasheff  $\mathcal{K}_4$  (à gauche) et  $\mathcal{K}_5$  (à droite) et schématisation des arbres planaires enracinés stables associés aux faces.

On peut alors observer la chose suivante. Si  $T^d$  désigne l'arbre enraciné à  $d$  feuilles  $l_1, \dots, l_d$  et un sommet  $v$ , notons  $\mu_v^d$  l'opération qui au  $d$ -uplet de feuilles associe la racine  $r$  de l'arbre  $T_d$ , autrement dit  $m_d(l_d, \dots, l_1) = r$ . L'arbre  $T_d$  correspond à la face de dimension  $d - 2$  du polytope  $\mathcal{K}_{d+1}$ , c'est-à-dire la face de dimension la plus grande. Les faces de dimension  $d - 3$  sont donc en bijection avec les arbres planaires stables à  $d$  feuilles et 2 sommets intérieurs. À chaque sommet intérieur on peut associer un sous arbre avec un seul sommet intérieur. Alors, la somme des composantes de bord de  $\mathcal{K}_{d+1}$  correspond à la somme :

$$\sum_{j=2}^{d-1} \sum_{n=0}^{d-j} m_{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j \otimes \text{id}^{\otimes n})$$

Le reste des compositions de l'équation  $A_\infty$  (3.1) sont toutes celles qui impliquent  $m_1$ . Ces compositions correspondent au cas où l'arête reliant les sommets intérieurs au moins une des extrémités qui est un sommet  $v$  de valence  $|v| < 3$ .

Nous allons voir dans les sections qui suivent que les espaces de modules de courbes holomorphes qui apparaissent tout au long de cette thèse sont des espaces d'applications définies sur un disque privé de points sur le bord. Le domaine de ces

applications s'identifie à un point de l'intérieur du polytope de Stasheff. D'après les résultats de compacité de Gromov, une famille à un paramètre de courbes holomorphes dégénère en un bâtiment holomorphe, ce dernier ayant pour domaine un point du bord du polytope de Stasheff.

### 3.3 Espace de Deligne et compactification

#### 3.3.1 Courbe universelle

On note  $\mathcal{R}^{d+1} = \{(y_0, \dots, y_d) / y_i \in S^1 \text{ et } y_i \in (y_{i-1}, y_{i+1})\} / \text{Aut}(D^2)$  l'espace des disques avec  $d + 1$  points marqués sur le bord, où  $y_{-1} := y_d$  et  $y_{d+1} := y_0$  et  $\mathcal{S}^{d+1}$  la courbe universelle au dessus de  $\mathcal{R}^{d+1}$  qu'on peut voir comme

$$\mathcal{S}^{d+1} = \{(z, y_0, \dots, y_d) / z \in D^2, y_i \in S^1 \text{ et } y_i \in (y_{i-1}, y_{i+1})\} / \text{Aut}(D^2)$$

et on a une projection  $\pi: \mathcal{S}^{d+1} \rightarrow \mathcal{R}^{d+1}$  donnée par  $\pi(z, y_0, \dots, y_d) = (y_0, \dots, y_d)$  qui est une fibration dont la fibre est isomorphe au disque. Pour tout  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  on note  $\widehat{S}_r = \pi^{-1}(r)$  et  $S_r = \widehat{S}_r \setminus \{y_0, \dots, y_1\}$ .

Pour chaque point marqué  $y_i$ ,  $i \geq 1$ , sur le bord du disque, on peut trouver un voisinage  $V_i$  et un biholomorphisme  $\varepsilon_i: (0, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow V_i \setminus \{y_i\}$  et pour  $y_0$  on peut choisir un voisinage  $V_0$  et un biholomorphisme  $\varepsilon_0: (-\infty, 0) \times [0, 1] \rightarrow V_0 \setminus \{y_0\}$ . Ces choix s'appellent des *extrémités en ruban* pour  $\mathcal{R}^{d+1}$ . Un *choix universel d'extrémités en ruban* pour  $\mathcal{R}^{d+1}$  correspond à des applications

$$\varepsilon_0^{d+1}: \mathcal{R}^{d+1} \times (-\infty, 0) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^{d+1}$$

et

$$\varepsilon_i^{d+1}: \mathcal{R}^{d+1} \times (0, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^{d+1}$$

pour  $1 \leq i \leq d$ , telles que pour tout  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$ ,  $\varepsilon_i^{d+1}(r, \cdot, \cdot)$  soit un choix d'extrémités en ruban pour  $S_r$ .

#### 3.3.2 Compactification

L'espace  $\mathcal{R}^{d+1}$  se compactifie et en tant qu'ensemble, cette compactification peut s'exprimer par  $\overline{\mathcal{R}}^{d+1} = \sqcup_T \mathcal{R}^T$  union disjointe sur tous les arbres planaires stables enracinés  $T$  à  $d$  feuilles, avec  $\mathcal{R}^T = \sqcup \mathcal{R}^{|v_i|}$  où on fait la réunion sur tous les sommets de  $T$ .  $\mathcal{R}^{d+1}$  correspond à  $\mathcal{R}^{T_d}$  où  $T_d$  est l'arbre enraciné à  $d$  feuilles avec un seul sommet. Il existe des opérations de recollement sur les arbres qui permettent de donner une topologie sur  $\overline{\mathcal{R}}^{d+1}$ , nous les décrivons maintenant.

Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres enracinés à  $d$  feuilles. Si  $T'$  s'obtient à partir de  $T$  en enlevant une ou plusieurs arêtes et en recollant les sommets de chaque arête deux à deux alors on peut définir une opération

$$\gamma^{T,T'} : \mathcal{R}^T \times (-1, 0]^{Ed^{int}(T)} \rightarrow \mathcal{R}^{T'}$$

de la façon suivante. Soit  $e \in Ed^{int}(T)$  une arête parmi celles à enlever de  $T$  pour obtenir  $T'$ . Cette arête relie deux sommets de  $T$  qu'on note  $v^-$  et  $v^+$  conformément à l'orientation de  $e$ . À ces sommets intérieurs, on peut associer des disques  $r_{v^-} \in \mathcal{R}^{|v^-|}$  et  $r_{v^+} \in \mathcal{R}^{|v^+|}$ , et l'opération de recollement consiste à recoller  $S_{r_{v^-}}$  et  $S_{r_{v^+}}$  le long de l'arête  $e$ . Pour cela, soient  $\varepsilon_-$  et  $\varepsilon_+$  les extrémités en ruban de  $r_{v^-}$  et  $r_{v^+}$  pour les points marqués reliés par  $e$ . On se donne un  $l_e \in (0, \infty)$  et on réalise la somme connexe

$$S_{r_{v^-}} \setminus \varepsilon_-((l_e, \infty) \times [0, 1]) \bigcup S_{r_{v^+}} \setminus \varepsilon_+((-\infty, l_e) \times [0, 1]) / \sim$$

où on recolle de telle sorte que  $\varepsilon_-(s, t) \sim \varepsilon_+(l_e - s, t)$ . L'opération  $\gamma^{T,T'}$  consiste à réaliser ce recollement au niveau de chaque arête à enlever de  $T$  pour obtenir  $T'$  avec le paramètre  $\rho_e = -e^{-\pi l_e} \in (-1, 0]$ . On effectue les sommes connexes les unes après les autres. Dans le cas où  $\rho_e = 0$ , cela signifie qu'on ne modifie pas l'arête en question.

Supposons que  $S \in \mathcal{S}^{d+1}$  soit obtenu à partir des disques  $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$  par recollement, alors  $S$  possède une décomposition *fine-épaisse*. La partie fine  $S^{fine}$  correspond aux extrémités en ruban de  $S$  et aux parties de longueur  $l_e$  correspondant à l'identification des extrémités en ruban dans le recollement de deux disques  $r_{v_i}$  et  $r_{v_j}$  le long d'une arête  $e$ . La partie épaisse est  $S \setminus S^{fine}$ .

Si  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  est dans l'image de  $\gamma^{T,T'}$  alors il possède deux ensembles d'extrémités en ruban : celui provenant du choix universel sur  $\mathcal{R}^{d+1}$  et l'autre provenant du choix universel sur les  $\mathcal{R}^{|v_i|}$  pour tous les  $v_i \in Ve(T)$  et du recollement. On dit qu'un choix universel d'extrémités en ruban sur  $\mathcal{R}^{d+1}$  est *cohérent* s'il existe un voisinage de  $\partial \overline{\mathcal{R}}^{d+1}$  sur lequel les deux choix d'extrémités en ruban coïncident.

**Théorème 5.** [Sei08, Lemme 9.3] *Il existe des choix universels cohérents d'extrémités en ruban.*

### 3.3.3 Étiquettes lagrangiennes

Les disques holomorphes que nous allons considérer auront des conditions lagrangiennes au bord, c'est-à-dire que le bord des disques sera contenu dans des sous-variétés lagrangiennes. Ces dernières font partie d'un choix d'*étiquettes lagrangiennes* sur les disques  $S_r$ . Le bord de  $S_r$  est constitué de plusieurs composantes, on note  $\partial_i S_r$  pour  $1 \leq i \leq d+1$  la composante de bord entre les points marqués  $y_{i-1}$  et  $y_i$  et on veut associer à cette composante une sous-variété lagrangienne.

Soit  $T$  un arbre enraciné à  $d$  feuilles et  $\{L_i\}$  une famille finie de lagrangiennes.

**Définition 10.** Un choix d'étiquettes lagrangiennes pour  $T$  est une application localement constante  $\underline{L}: \mathbb{R}^2 \setminus T \rightarrow \{L_i\}$ , c'est-à-dire qu'on associe à chaque composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus T$  une sous-variété lagrangienne dans  $\{L_i\}$ .

Pour  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$ , le choix d'étiquettes lagrangiennes sur  $S_r$  est alors déterminé par les étiquettes lagrangiennes sur  $T_d$ . En effet, on associe à  $\partial_i S_r$  la sous-variété lagrangienne associée à la composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus T$  qui contient  $\partial_i S_r$ . Il nous arrivera de noter par la suite  $\underline{L} = (L_1, \dots, L_{d+1})$  ce qui signifie que la lagrangienne associée à  $\partial_i S_r$  est  $L_i$ . Pour pouvoir effectuer l'opération de recollement de disques munis d'étiquettes lagrangiennes, il est nécessaire d'avoir une notion de compatibilité. Soit  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  tel que  $r = \gamma^{T, T_d}(\{r_{v^-}, r_{v^+}\}, \rho_e)$  où  $e$  est la seule arête intérieure de  $T$  et relie  $v^-$  à  $v^+$ , avec  $\rho_e < 0$ . Notons  $y^-$  et  $y^+$  les points marqués sur le bord  $\widehat{S}_{v^-}$  et  $\widehat{S}_{v^+}$  respectivement au niveau desquels on effectue la somme connexe  $S_{v^-} \# S_{v^+}$  par l'opération de recollement. Si  $(L_{y^\pm, -}, L_{y^\pm, +})$  correspondent aux étiquettes lagrangiennes associées à  $S_{v^-}$  et  $S_{v^+}$  autour des points  $y^-$  et  $y^+$  respectivement (dans l'ordre anti-horaire), alors la condition de compatibilité nécessaire pour le recollement est que  $L_{y^-, -} = L_{y^+, +}$  et  $L_{y^-, +} = L_{y^+, -}$ . Sur la figure 3.2 on a schématisé le recollement de deux disques avec la condition nécessaire sur les étiquettes lagrangiennes. Cette condition s'étend récursivement au cas où on recolle plus de deux disques.

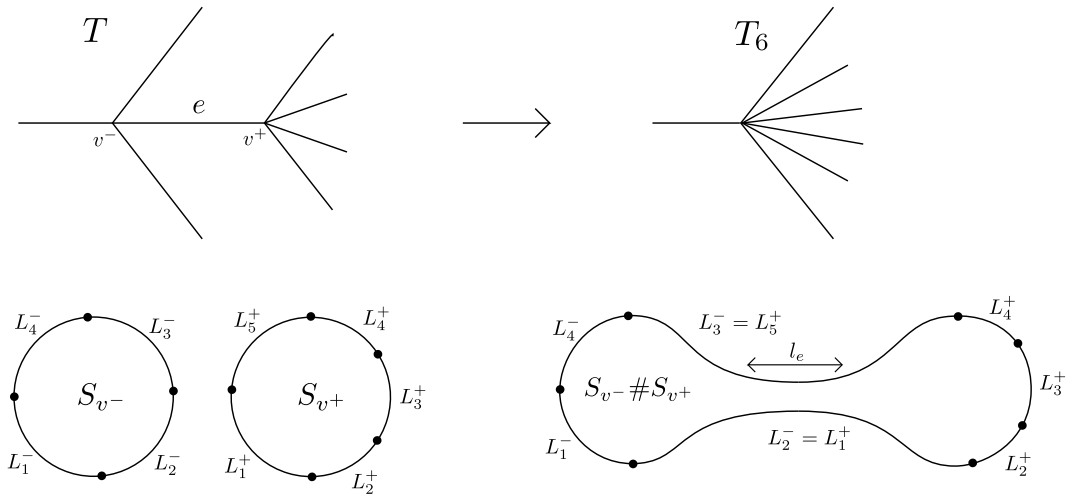


FIGURE 3.2 – Somme connexe de deux disques  $S_1$  et  $S_2$ . Ici,  $S_1 \# S_2 = S_r$  où  $r = \gamma^{T, T_6}((r_{v_1}, r_{v_2}), \rho_e)$ .

## 3.4 Structures presque complexes

### 3.4.1 Définitions

**Définition 11.** Une *structure presque complexe* sur une variété symplectique  $(X, \omega)$  est une application  $J: TX \rightarrow TX$  telle que  $J^2 = -\text{id}$ . On dit que  $J$  est *compatible* avec  $\omega$  (ou  $\omega$ -compatible) si :

1.  $\omega(v, Jv) > 0$  pour tout  $v \in TX$  tel que  $v \neq 0$ ,
2.  $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $u, v \in T_x X$

Les conditions 1 et 2 sur  $J$  sont équivalentes à demander que  $\omega(\cdot, J\cdot)$  soit une métrique Riemannienne sur  $X$ . Dans la symplectisation d'une variété de contact  $(Y, \alpha)$ , il y a un type de structures presque complexes particulières qui sont les structures cylindriques.

**Définition 12.** Une structure presque complexe  $J$  sur  $(\mathbb{R} \times Y, d(e^t \alpha))$  est dite *cylindrique* si :

- $J$  est  $d(e^t \alpha)$ -compatible
- $J$  est invariante par translation le long du facteur de symplectisation
- $J(\partial_t) = R_\alpha$
- $J(\xi) = \xi$  c'est-à-dire que  $J$  préserve la structure de contact

On note  $\mathcal{J}^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$  l'ensemble des structures presque complexes cylindriques sur  $\mathbb{R} \times Y$ . Dans le cas où  $Y = P \times \mathbb{R}$ , nous explicitons le type de structure presque complexe que nous utiliserons dans les sections et chapitres suivants. Rappelons qu'une variété de Liouville  $P$  est obtenue à partir d'une variété compacte à bord  $(P^c, d\beta)$ , à laquelle on a recollé une demi-symplectisation  $[0, \infty) \times \partial P^c$  le long du bord.

**Définition 13.** On dira qu'une structure presque complexe  $J_P$  sur  $P$  est *admissible* si elle est cylindrique dans  $P \setminus P^c$  en dehors d'un compact  $K \subset P \setminus P^c$ .

Comme dans [CDRGG], on note  $\mathcal{J}^{adm}(P)$  l'ensemble des structures presque complexes admissibles sur  $P$ . Maintenant, si  $J_P \in \mathcal{J}^{adm}(P)$  et  $\pi_P: \mathbb{R} \times (P \times \mathbb{R}) \rightarrow P$  denote la projection sur  $P$ , alors on peut construire une unique structure presque complexe cylindrique  $\tilde{J}_P$  sur  $\mathbb{R} \times (P \times \mathbb{R})$  de telle sorte que  $\pi_P$  soit holomorphe, c'est-à-dire que  $d\pi_P \circ \tilde{J}_P = J_P \circ d\pi_P$ . Une telle structure s'appelle *relevé cylindrique* de  $J_P$  et on note  $\mathcal{J}_\pi^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$  l'ensemble des structures presque complexes cylindriques sur  $\mathbb{R} \times Y$  qui sont des relevés de structures admissibles sur  $P$ .

Pour compter des courbes holomorphes dans  $\mathbb{R} \times Y$  à bord sur un ou des cobordismes lagrangiens exacts, considérer une structure presque complexe cylindrique partout dans  $\mathbb{R} \times Y$  est trop restrictif pour obtenir des résultats de transversalité, sauf si par

exemple les cobordismes sont des cylindres triviaux, mais ce n'est pas le seul cas que nous souhaitons étudier. Cependant, se donner une structure cylindrique permet d'éviter que les courbes holomorphes s'échappent à l'infini, c'est-à-dire que la projection sur  $P \times \mathbb{R}$  est compacte. On construit donc des structures presque complexes qui vont garder cette propriété mais pour lesquelles les résultats de transversalité s'appliquent.

Soient  $J^-, J^+ \in \mathcal{J}^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$  telles que  $J^-$  et  $J^+$  coïncident en dehors d'un cylindre  $\mathbb{R} \times K$  où  $K \subset Y$  est compact. Pour tout  $T > 0$  on considère sur  $\mathbb{R} \times Y$  une structure presque complexe  $J$  égale à  $J^-$  sur  $(-\infty, -T) \times Y$ , à  $J^+$  sur  $(T, \infty) \times Y$  et égale au relevé cylindrique d'une structure presque complexe admissible sur  $P$  sur  $[-T, T] \times (Y \setminus K)$ . On note  $\mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  ou même  $\mathcal{J}_{J^-, J^+}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  si on ne tient pas compte du réel  $T$  l'ensemble de ces structures presque complexes et  $\mathcal{J}^{adm}(\mathbb{R} \times Y) = \bigcup_{J^-, J^+} \mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$ .

### 3.4.2 Structure dépendante du domaine

Nous allons construire dans ce paragraphe une structure presque complexe sur  $X = \mathbb{R} \times Y$  qui dépend de  $S_r$ , pour  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$ , de manière à ce qu'elle soit compatible (dans un sens que nous allons expliquer) avec les brisures d'espaces de modules que nous définissons dans le paragraphe suivant. Ces structures presque complexes correspondent à une partie des données de perturbations que considère Seidel dans [Sei08] (paragraphe 8e). On note  $\mathcal{J}_{S_r}^{adm}(X)$  l'ensemble des structures presque complexes admissibles sur  $X$  qui dépendent de  $S_r$ . Soit  $L_1, \dots, L_{d+1}$  une famille de lagrangiens exacts transverses dans  $X$  telle que  $\underline{L} = (L_1, \dots, L_{d+1})$  soit un choix d'étiquettes lagrangiennes pour  $S_r$ , et donnons nous aussi un choix universel d'extrémités en ruban. Pour toute paire  $(L_i, L_{i+1})$ , on considère un chemin  $J_t^{L_i, L_{i+1}}$ , pour  $t \in [0, 1]$ , de structures presque complexes dans  $\mathcal{J}^{adm}(X)$ , tel que ce chemin soit constant près de  $t = 0$  et  $t = 1$ . Un *choix universel de structures presque complexes* dépendantes du domaine est la donnée d'applications

$$\mathcal{J} : \mathcal{S}^{d+1} \rightarrow \mathcal{J}_{dep}^{adm}(X) = \sqcup_{S_r} \mathcal{J}_{S_r}^{adm}(X)$$

pour tout  $d \geq 2$  telles que  $\mathcal{J}(\varepsilon_i^{d+1}(r, s, t)) = J_t^{L_i, L_{i+1}}$  où  $\varepsilon_i^{d+1}$  correspond au choix d'extrémités en ruban dans un voisinage du point marqué  $y_i \in \mathcal{R}^{d+1}$ .

Soit  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  dans l'image de l'application de recollement  $\gamma^{T, T_d}$ . Il existe donc  $\{r_v\}_{v \in Ve(T)}$ , et  $\{\rho_e\}_{e \in Ed^{int}(T)}$  tels que  $r = \gamma^{T, T_d}(\{r_v\}, \{\rho_e\})$ . Alors  $S_r$  admet deux types de structures presque complexes : le choix de structure universelle sur  $S_r$  et la structure presque complexe provenant du choix universel sur les  $S_{r_v}$  et de l'opération de recollement. Le choix universel de structure presque complexe est dit cohérent si :

- il existe un voisinage  $U \subset \mathcal{R}^{d+1}$  de  $\partial \mathcal{R}^{d+1}$  (suffisamment petit pour que le choix d'extrémités en ruban soit cohérent) tel que pour tout  $r \in U$  les deux choix de structures presque complexes ci-dessus coïncident dans les parties fines de  $S_r$ .

- pour toute suite  $\{r^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{R}^{d+1}$  convergeant vers un  $\{r_v\} \in \mathcal{R}^T$  dans  $\partial \overline{\mathcal{R}}^{d+1}$ , il existe des familles  $\{r_v^n\}_{v \in Ve(T)}$  et  $\{\rho_e^n\}_{e \in Ed^{int}(T)}$  telles que

$$r^n = \gamma^{T, T_d}(\{r_v^n\}, \{\rho_e^n\})$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On demande alors que la structure presque complexe sur les parties épaisses de  $S_{r^n}$  converge vers la structure presque complexe dans les parties épaisses de  $S_r$  (la convergence sur les parties fines est contrôlée par la première condition).

**Remarque 2.** En fait la deuxième condition est presque l'équivalent de la première pour le comportement de la structure presque complexe dans les parties épaisses. La différence est qu'on ne peut pas dire que dans un voisinage du bord de  $\mathcal{R}^{d+1}$  les structures dans les parties épaisses sont exactement les mêmes car on n'en a même pas fixé. Le choix de structure presque complexe dans les parties épaisses ne fait pas partie du choix universel de structures presque complexes, contrairement aux chemins  $J_t^{L_i, L_{i+1}}$  qu'on fixe pour chaque paire de lagrangiennes.

**Théorème 6.** [Sei08, lemme 9.5] *Il existe des choix cohérents de structure presque complexe.*

## 3.5 Espaces de modules de courbes holomorphes

### 3.5.1 Définition

Dans cette section, nous allons définir les différents espaces de modules de courbes holomorphes qui vont apparaître dans la suite. Nous allons nous intéresser en fait ici à des disques holomorphes dans  $X$  à bord sur des cobordismes lagrangiens exacts. On pourra trouver dans [MS12] une définition plus générale et des propriétés des courbes holomorphes. Soient  $\underline{\Sigma}$  un choix d'étiquettes lagrangiennes à valeurs dans  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}\}$  tel que pour tout  $i$ ,  $\Sigma_i$  soit un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$ . On suppose que les cobordismes s'intersectent transversalement. On se donne alors un ensemble d'asymptotes  $A(\underline{\Sigma})$  qui est composé des points d'intersection dans  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  pour tout  $1 \leq i \neq j \leq d+1$ , des cordes de Reeb de  $\Lambda_i^+$  à  $\Lambda_j^+$  dont l'ensemble est noté  $\mathcal{R}(\Lambda_i^+, \Lambda_j^+)$ , et celles de  $\Lambda_i^-$  à  $\Lambda_j^-$  ( $\mathcal{R}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$ ) pour tout  $1 \leq i, j \leq d+1$ . Soit  $J$  une structure presque complexe sur  $X$  (éventuellement dépendant du domaine, on le précisera pour chaque type d'espaces de modules lorsqu'on étudiera la transversalité), et  $j$  la structure complexe standard sur le disque, qui donne par uniformisation une structure complexe sur  $S_r$  pour tout  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$ , qu'on note encore  $j$ .

Pour  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  et  $x_0, \dots, x_d$  des asymptotes dans  $A(\underline{\Sigma})$ , on définit l'espace de modules  $\mathcal{M}_{\underline{\Sigma}, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$  comme étant l'ensemble des applications lisses :

$$u: (S_r, j) \rightarrow (X, J)$$

telles que :

- pour tout  $z \in S_r \setminus \partial S_r$  on ait  $du(z) \circ j = J(z) \circ du(z)$
- $u(\partial_i S_r) \subset L_i$
- si  $x_i$  est un point d'intersection alors  $\lim_{z \rightarrow y_i} u(z) = x_i$
- si  $x_0$  est une corde de Reeb et  $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow x_0$  une paramétrisation, alors pour  $z \in S_r$  suffisamment proche de  $y_0$ ,  $z$  est dans le voisinage  $\varepsilon_0((-\infty, 0) \times [0, 1])$  et  $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(\varepsilon_0(s, t)) = (-\infty, \gamma_0(1 - t))$ . On dit que  $x_0$  est une asymptote *positive*.
- si  $x_i$  pour  $i > 0$  est une corde de Reeb et  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow x_i$  une paramétrisation, alors soit  $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(\varepsilon_i(s, t)) = (+\infty, \gamma_0(t))$  et alors  $x_i$  est une asymptote positive, soit  $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(\varepsilon_i(s, t)) = (+\infty, \gamma_0(1 - t))$  et dans ce cas  $x_i$  est une asymptote *négative*.

et dans les cas  $d = 0, 1$ , on quotiente cet ensemble d'applications par l'action des difféomorphismes de  $S_r$  qui préservent l'orientation. La réunion de ces espaces de modules pour tous les  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  se note alors

$$\mathcal{M}_{\Sigma, J}(x_0; x_1, \dots, x_d) = \sqcup_r \mathcal{M}_{\Sigma, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$$

Pour un espace de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma, J}(x_0; x_1, \dots, x_d)$ , l'asymptote  $x_0$  est appelée l'asymptote *entrante* et les asymptotes  $x_1, \dots, x_d$  sont appelées les asymptotes *sortantes*. Ces termes proviennent du fait qu'une courbe  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma, J}(x_0; x_1, \dots, x_d)$  a pour domaine un disque  $S_r$  pour  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  qui s'identifie avec un arbre planaire stable enraciné à  $d$  feuilles et un sommet intérieur (section 3.2). D'après l'orientation naturelle d'un tel arbre, le sommet intérieur possède une arête entrante provenant de la racine et les autres arêtes sont sortantes.

L'équation de Cauchy-Riemann satisfaite par les courbes dans les espaces de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$  pour un  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  se réécrit  $\bar{\partial}_J u = 0$  où  $\bar{\partial}_J$  est une section d'un certain fibré  $\mathcal{E}_{S_r} \rightarrow \mathcal{B}_{S_r}$ . L'idée est de choisir ce fibré de telle sorte que  $(\bar{\partial}_J)^{-1}(0) = \mathcal{M}_{\Sigma, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$ , et d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour les espaces de Banach ([MS12]) pour montrer que  $(\bar{\partial}_J)^{-1}(0)$  est une variété de dimension finie. Pour cela, la base  $\mathcal{B}_{S_r}$  du fibré doit donc être un espace de Banach contenant toutes les courbes holomorphes dans  $\mathcal{M}_{\Sigma, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$ . On considère alors pour  $p > 2$  l'espace de Banach  $\mathcal{B}_{S_r} := W_{\Sigma}^{1,p}(S_r, X)$  qui est l'ensemble des applications  $u: S_r \rightarrow X$  telles que :

$$\begin{cases} u \in W_{loc}^{1,p}(S_r, X) \\ u(\partial_i S_r) \subset \Sigma_i \\ \lim_{z \rightarrow y_i} u(z) = x_i \end{cases}$$

où on considère la limite au sens  $W^{1,p}$ . Soit  $\mathcal{E}_{S_r}$  le fibré sur  $\mathcal{B}_{S_r}$  de fibre  $(\mathcal{E}_{S_r})_u = L^p(S_r, \Omega^{0,1}(S_r, u^*TX))$ . L'opérateur  $\bar{\partial}_J$  défini par  $\bar{\partial}_J(u) = du(z) - J(z) \circ du(z) \circ j$

est une section de  $\mathcal{E}_{S_r} \rightarrow \mathcal{B}_{S_r}$ . La linéarisation de  $\bar{\partial}_J$  en un point  $u \in (\bar{\partial}_J)^{-1}(0)$  est l'opérateur :

$$D\bar{\partial}_J(u) : T_u\mathcal{B}_{S_r} \rightarrow T_{(u,0)}\mathcal{E}_{S_r}$$

et l'espace tangent  $T_{(u,0)}\mathcal{E}_{S_r}$  se décompose sous la forme  $T_{(u,0)}\mathcal{E}_{S_r} = T_u\mathcal{B}_{S_r} \oplus (\mathcal{E}_{S_r})_u$ . En composant  $D\bar{\partial}_J(u)$  avec la projection  $\pi_u : T_{(u,0)}\mathcal{E}_{S_r} \rightarrow (\mathcal{E}_{S_r})_u$  on obtient l'opérateur :

$$D_u : T_u\mathcal{B}_{S_r} \rightarrow (\mathcal{E}_{S_r})_u \quad (3.2)$$

Si les asymptotes  $x_0, x_1, \dots, x_d$  sont toutes des points d'intersection et que les lagrangiennes  $\Sigma_i$  sont transverses, alors  $D_u$  est un opérateur de Fredholm (voir [Flo88a]). D'autre part, pour un choix générique de structure presque complexe admissible dépendant du domaine, l'opérateur  $D_u$  est surjectif (voir résultats de transversalité), on dira dans ce cas que la structure presque complexe est *régulière*. En appliquant le théorème des fonctions implicites pour les espaces de Banach, on en déduit que  $(\bar{\partial}_J)^{-1}(0)$  est une variété dont la dimension "proche de  $u$ " est  $\text{ind}(D_u) = \ker(D_u)$ . On dira alors que  $u$  est une courbe holomorphe d'*indice*  $\text{ind}(D_u)$ , autrement dit l'indice de  $u$  est la dimension de l'espace de modules dans lequel vit la courbe  $u$ . Dans le cas où la courbe  $u$  admet des asymptotes qui sont des cordes de Reeb, pour montrer que la linéarisation est un opérateur de Fredholm il est nécessaire de remplacer les espaces  $\mathcal{B}_{S_r}$  par des espaces de Sobolev à poids  $W_{\Sigma, \delta}^{1,p}(S_r, X)$  (voir par exemple [Flo88b]). En effet, supposons par exemple que  $u$  converge en  $y_0$  vers une corde de Reeb  $\gamma_0$  de  $\Lambda_{d+1}^+$  vers  $\Lambda_1^+$  et notons  $c_-(\gamma_0)$  et  $c_+(\gamma_0)$  les extrémités de  $\gamma_0$ . Alors les sous-variétés lagrangiennes  $T_{(c_+(\gamma_0), t)}(\Lambda_{d+1}^+ \times \mathbb{R}) = T_{c_+(\gamma_0)}\Lambda_{d+1}^+ \times \mathbb{R}$  et  $d\varphi_R(T_{c_+(\gamma_0)}\Lambda_{d+1}^+ \times \mathbb{R})$  ne sont pas transverses donc l'opérateur  $D_u$  (3.2) n'est pas Fredholm. L'utilisation de Sobolev à poids permet d'une certaine façon de perturber les lagrangiennes afin de rendre la situation transverse, et on obtient alors un opérateur  $D_{u, \delta}$  qui est Fredholm. Maintenant, pour récupérer les données de translation dans les bandes holomorphes là où la courbe converge vers une corde, on ajoute à cet opérateur  $D_{u, \delta}$  un opérateur  $\tau_u$  paramétrant ces translations et défini sur un espace de dimension finie  $\mathbb{R}^{j^- + j^+}$  où  $j^-$  (resp  $j^+$ ) est le nombre de corde négative (resp positive) asymptotes de  $u$ . Cet opérateur est de Fredholm et d'indice  $j^- + j^+$ . On obtient ainsi l'opérateur de Fredholm :

$$D_{u, \delta} + \tau_u : T_u W_{\Sigma, \delta}^{1,p}(S_r, X) \times \mathbb{R}^{j^- + j^+} \rightarrow L_{\delta}^p(S_r, \Omega^{0,1}(S_r, u^*TX))$$

On peut généraliser le raisonnement ci-dessus en laissant varier le point  $r \in \mathcal{R}^{d+1}$  et on obtient une section qu'on note encore  $\bar{\partial}_J$  d'un fibré plus général  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que la fibre au dessus d'un point  $(r, u)$  est  $(\mathcal{E}_{S_r})_u$ . Cette fois ci, on trouve que  $(\bar{\partial}_J)^{-1}(0) = \mathcal{M}_{\Sigma, J}(x_0; x_1, \dots, x_d) = \sqcup_r \mathcal{M}_{\Sigma, J}^r(x_0; x_1, \dots, x_d)$ . La linéarisation de cette section en un point  $(r, u)$  tel que  $\bar{\partial}_J(r, u) = 0$  composé avec la projection verticale donnent l'opérateur :

$$\tilde{D}_{(r,u), \delta} : T_r \mathcal{R}^{d+1} \times T_u W_{\Sigma, \delta}^{1,p}(S_r, X) \times \mathbb{R}^{j^- + j^+} \rightarrow L_{\delta}^p(S_r, \Omega^{0,1}(S_r, u^*TX)) \quad (3.3)$$

qui est encore un opérateur de Fredholm (en utilisant comme précédemment des espaces de Sobolev à poids pour définir  $\mathcal{B}$  dans le cas où la courbe est asymptote à des cordes de Reeb) car c'est encore la somme d'un opérateur de Fredholm ( $D_{u,\delta} + \tau_u$ ) et d'un opérateur  $K_r : T_r \mathcal{R}^{d+1} \rightarrow L_\delta^p(S_r, \Omega^{0,1}(S_r, u^*TX))$  défini sur un espace de dimension finie.

Il nous arrivera d'indiquer la dimension des espaces de modules par un exposant, autrement dit on notera  $\mathcal{M}^i(x_0; x_1, \dots, x_d)$  l'espace de modules des courbes holomorphes d'indice  $i$  à bord sur  $\underline{\Sigma}$  et satisfaisant les conditions asymptotiques détaillées ci-dessus.

Dans les sous-sections qui suivent, nous allons détailler certains types d'espaces de modules où on n'indique plus la structure presque complexe  $J$  pour ne pas surcharger les notations.

### 3.5.2 Courbes à bord sur un cylindre trivial

Les espaces de modules de courbes à bord sur un cylindre trivial sont les espaces de modules qui interviennent dans la définition d'homologie de contact legendrienne (chapitre 4). La structure presque complexe  $J$  que l'on considère ici est une structure cylindrique sur  $X$ . Nous verrons au chapitre 4 les éventuelles conditions à ajouter sur  $J$  pour garantir la transversalité. Le choix d'étiquettes lagrangiennes est très simple ici, il est à valeurs dans un ensemble à un élément  $\{\mathbb{R} \times \Lambda\}$  pour  $\Lambda \subset Y$  legendrienne. L'ensemble des asymptotes  $A(\underline{\Sigma})$  est ici réduit aux cordes de Reeb de  $\Lambda$ . Si  $\gamma_+, \gamma_1, \dots, \gamma_d$  sont des cordes de Reeb de  $\Lambda$ , on note alors

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$$

l'espace de modules des disques holomorphes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda$  et d'asymptotes  $\gamma_+, \gamma_1, \dots, \gamma_d$ . Les asymptotes positives sont des asymptotes vers lesquelles la courbe converge dans le bout positif du cobordisme et les asymptotes négatives sont celles vers lesquelles la courbe converge dans le bout négatif du cobordisme. De plus ici toutes les asymptotes sont des cordes de Reeb, les asymptotes positives sont des cordes qu'on "saute" dans le sens de l'orientation du champ de Reeb lorsqu'on parcourt le bord de la courbe dans le sens anti-horaire, les asymptotes négatives sont celle qu'on saute dans le sens inverse (voir figure 3.3).

Il y a une action de  $\mathbb{R}$  sur les espaces de modules  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$ , par translation le long du facteur de symplectisation. On note

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d) := \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d) / \mathbb{R}$$

le quotient par cette action.

### 3.5.3 Courbes à bord sur un cobordisme non trivial

De tels espaces de modules de courbes sont nécessaires pour définir entre autres le morphisme d'algèbres induit par un cobordisme entre deux legendriennes sur les algèbres

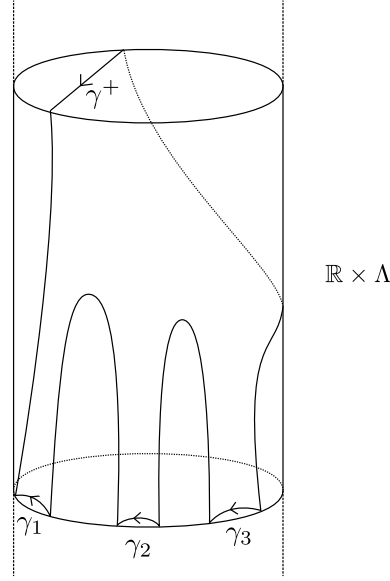


FIGURE 3.3 – Image d’une courbe holomorphe dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  où  $\gamma^+$  est une asymptote positive et  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont négatives.

de Chekanov (chapitre 4).

Soit  $\Lambda^- \prec_{\Sigma} \Lambda^+$  un cobordisme lagrangien exact entre deux sous-variétés legendriennes. L’ensemble d’asymptotes que l’on considère ici sont les cordes de Reeb de  $\Lambda^-$  et les cordes de Reeb de  $\Lambda^+$ . Si  $\gamma^+ \in \mathcal{R}(\Lambda^+)$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathcal{R}(\Lambda^-)$ , on note

$$\mathcal{M}_{\Sigma}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$$

l’espace de module de disques holomorphes à bord sur  $\Sigma$  et d’asymptotes  $\gamma^+$  positive et  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  négatives. Cette fois il n’y a pas d’action de  $\mathbb{R}$  par translation car le cobordisme considéré n’est pas trivial.

On peut enfin considérer des espaces de modules de disques holomorphes à bord sur plusieurs cobordismes  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}$ , où  $\Lambda_i^- \prec_{\Sigma_i} \Lambda_i^+$ . Le choix d’étiquettes lagrangiennes  $\underline{\Sigma}$  est à valeurs dans l’ensemble  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}\}$  et dans ce cas les asymptotes sont les cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_j^-$  et de  $\Lambda_i^+$  vers  $\Lambda_j^+$  pour  $1 \leq i, j \leq d+1$  et les points d’intersection dans  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq d+1$ .

**Remarque 3.** Afin de généraliser la convention de [CDRGG] pour la définition de l’homologie de Cthulhu, si le choix d’étiquettes lagrangiennes est  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{d+1})$ , on veut qu’un point d’intersection dans  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  qui est une asymptote entrante d’un espace de module soit un saut de  $\Sigma_i$  vers  $\Sigma_j$  pour  $i > j$ , alors que si c’est une asymptote sortante, on demande que ce soit un saut de  $\Sigma_j$  vers  $\Sigma_i$ .

Dans le cas où  $d = 1$ , autrement dit quand on a deux cobordismes lagrangiens, les espaces de modules que nous allons considérer sont ceux nécessaires à la définition du

complexe de Cthulhu. Tout d'abord, il y a des espaces de modules de courbes à bord sur les parties cylindriques des cobordismes. Les suivants correspondent à des espaces de modules d'homologie de contact legendrienne :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^+}(\gamma_{2,1}^+; \beta_1, \xi_{2,1}^+, \beta_2) \text{ et } \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2)$$

pour  $\gamma^+, \xi^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_2^+, \Lambda_1^+)$ ,  $\gamma^-, \zeta^- \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$ , et  $\beta_i$  (resp.  $\delta_i$ ) un mot de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^+$  (resp.  $\Lambda_i^-$ ) pour  $i = 1, 2$ . Nous serons aussi amené à considérer des courbes dans la partie cylindrique négative qui ont deux asymptotes positives, des *bananes*, les espaces de modules correspondants sont

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \gamma_{1,2}^-, \delta_2)$$

avec  $\gamma_{2,1}^- \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$  et  $\gamma_{1,2}^- \in \mathcal{R}(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$ , et les indices  $\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^\pm$  signifient que le choix d'étiquettes lagrangiennes est  $(\mathbb{R} \times \Lambda_1^\pm, \mathbb{R} \times \Lambda_2^\pm)$ . Enfin, on considère des espaces de modules de courbes qui intersectent les parties compactes des cobordismes :

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, q, \delta_2), \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2), \\ &\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(x^+; \delta_1, q, \delta_2), \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(x^+; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2) \end{aligned}$$

avec  $x^+, q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  tels que  $x^+$  est un saut de  $\Sigma_2$  vers  $\Sigma_1$  et  $q$  est un saut de  $\Sigma_1$  vers  $\Sigma_2$ , et les indices  $\Sigma_{1,2}$  signifient que le choix d'étiquettes lagrangiennes est  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ .

**Remarque 4.** Par abus de notation, nous écrivons le choix d'étiquettes lagrangiennes  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  plutôt que  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_2)$ . En effet, d'après la définition à la section 3.3.3, à chaque composante du bord du disque  $S_r$  on doit assigner une sous-variété lagrangienne, or au passage d'une corde pure la lagrangienne ne change pas. Donc dans la définition des espace de modules, on rappellera (sauf si c'est clair) quelles sont les cordes pures et les asymptotes mixtes, afin de pouvoir écrire les étiquettes lagrangiennes sous leur forme réduite, de telle sorte qu'on sache simplement dans quel ordre on saute d'une lagrangienne à une autre par les asymptotes mixtes.

Plaçons-nous maintenant dans le cas  $d = 2$ , on considère donc trois cobordismes lagrangiens exacts transverses  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ . Les espaces de modules que nous allons décrire ici interviennent dans la définition du produit au chapitre 6. Encore une fois, tout d'abord, on considérera des espaces de modules de courbes à bord sur les parties cylindriques des cobordismes :

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3) \\ &\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3) \\ &\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \\ &\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \end{aligned}$$

où  $\gamma_{i,j} \in \mathcal{R}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$  pour  $1 \leq i \neq j \leq 3$ , et  $\delta_i$  est un mot de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , qui sont des asymptotes négatives. On peut remarquer que pour les 4 types d'espaces de modules ci-dessus sauf le dernier, on considère des courbes qui ont plusieurs asymptotes positives. Par exemple, les courbes dans l'espace  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3)$  ont pour asymptotes positives  $\gamma_{3,1}$ ,  $\gamma_{1,2}$  et  $\gamma_{2,3}$ . Ensuite, on a des espaces de modules de courbes qui intersectent les parties compactes des cobordismes :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, x_2, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \end{aligned}$$

avec  $x^+ \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3$  saut de  $\Sigma_3$  vers  $\Sigma_1$ ,  $x_2 \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3$  saut de  $\Sigma_2$  vers  $\Sigma_3$ ,  $x_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  saut de  $\Sigma_1$  vers  $\Sigma_2$ . Ces espaces de modules n'ont qu'une seule asymptote positive,  $x^+$ . L'indice  $\Sigma_{1,2,3}$  indique que le choix d'étiquettes lagrangiennes pour les disques dans ces espaces de modules est  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ . Nous considérons enfin les espaces suivants, espaces de modules de courbes intersectant les parties compactes des cobordismes mais avec un choix d'étiquettes lagrangiennes différent :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\Sigma_{3,1,2}}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{3,1,2}}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{2,3,1}}(x_1; \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) \end{aligned}$$

Comme précédemment, la raison du changement d'étiquettes lagrangiennes est que si on considère des espaces de modules de courbes où  $x_2$  qui est un saut de  $\Sigma_2$  vers  $\Sigma_3$  est une asymptote entrante et  $x_1$  qui est un saut de  $\Sigma_1$  vers  $\Sigma_2$  est une asymptote sortante, alors pour respecter la convention dans [CDRGG] on utilise les étiquettes lagrangiennes  $(\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2)$  plutôt que  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ .

## 3.6 Bâtiments holomorphes

### 3.6.1 Action et énergie

Plaçons-nous encore dans le cas où on a  $d + 1$  cobordismes lagrangiens exacts transverses  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1})$ . Rappelons que par définition, pour chaque cobordisme il existe une fonction  $f_i: \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}$  primitive de la forme  $e^t \alpha|_{\Sigma_i}$ , et cette fonction est constante sur les bouts cylindriques de  $\Sigma_i$ . On peut supposer que les constantes sur les bouts cylindriques négatifs sont nulles et on note  $c_i$  la constante que vaut  $f_i$  sur le bout positif de  $\Sigma_i$ . Notons aussi  $T > 0$  et  $\epsilon > 0$  deux réels positifs tels que les cobordismes  $\Sigma_i$  sont tous cylindriques en dehors de  $\Sigma_i \cap ([-T + \epsilon, T - \epsilon] \times Y)$ .

On peut définir une fonction *action*  $\mathfrak{a}: A(\underline{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R}$  sur l'ensemble des asymptotes  $A(\underline{\Sigma})$  de la façon suivante. Si  $x$  est un point d'intersection de  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  avec  $i > j$ , alors on pose

$$\mathfrak{a}(x) = f_i(x) - f_j(x)$$

Pour une corde de Reeb  $\gamma$ , on définit la *longueur* de  $\gamma$  comme étant  $\ell(\gamma) := \int_\gamma \alpha$  et alors l'action d'une corde de Reeb  $\gamma_{i,j}^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_i^+, \Lambda_j^+)$  est définie par :

$$\mathfrak{a}(\gamma_{i,j}^+) = e^T \ell(\gamma_{i,j}^+) + \mathfrak{c}_i - \mathfrak{c}_j$$

et pour une corde  $\gamma_{i,j}^- \in \mathcal{R}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$  on pose

$$\mathfrak{a}(\gamma_{i,j}^-) = e^{-T} \ell(\gamma_{i,j}^-)$$

Si  $u$  est une courbe holomorphe dans  $\mathcal{M}_\Sigma(x_0; x_1, \dots, x_d)$  alors on peut définir une quantité appelée *énergie* qui correspond à l'analogue de l'aire pour le cas de courbes holomorphes dans une variété symplectique compacte. Soit  $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que

$$\begin{cases} \chi(t) = e^t & \text{si } t \in [-T + \epsilon, T - \epsilon] \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \chi(t) = e^T \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi(t) = e^{-T} \\ \chi'(t) > 0 \end{cases}$$

On définit alors la  $d(\chi\alpha)$ -énergie d'une courbe holomorphe  $u: S_r \rightarrow \mathbb{R} \times Y$  par

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \int_{S_r} u^* d(\chi\alpha)$$

**Lemme 1.**  $E_{d(\chi\alpha)}(u) \geq 0$

*Démonstration.* On peut montrer que :

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \frac{1}{2} \int_{S_r} |du|^2 \tag{3.4}$$

où  $|v|^2 = d(\chi\alpha)(v, Jv)$  est une quantité strictement positive si  $v \neq 0$ . Ceci est dû à la  $d(e^t\alpha)$ -compatibilité de la structure presque complexe  $J$  qui implique la compatibilité de la restriction de  $J$  à la structure de contact  $\xi$  munie de la forme symplectique  $(d\alpha)|_\xi$ . En considérant des coordonnées  $(s, t)$  sur  $S_r$ , on a  $|du|^2 = |\partial_s u|^2 + |\partial_t u|^2$ . Or,

$$\begin{aligned} 0 &= |\partial_s u + J\partial_t u|^2 = d(\chi\alpha)(\partial_s u + J\partial_t u, J(\partial_s u + J\partial_t u)) \\ &= d(\chi\alpha)(\partial_s u, J\partial_s u) + d(\chi\alpha)(J\partial_t u, -\partial_t u) \\ &\quad + d(\chi\alpha)(\partial_s u, -\partial_t u) + d(\chi\alpha)(J\partial_t u, J\partial_s u) \\ &= |\partial_s u|^2 + |\partial_t u|^2 - 2d(\chi\alpha)(\partial_s u, \partial_t u) \end{aligned}$$

où la première égalité est satisfaite car  $u$  est holomorphe. D'où  $|du|^2 = |\partial_s u|^2 + |\partial_t u|^2 = 2d(\chi\alpha)(\partial_s u, \partial_t u) = 2u^*d(\chi\alpha)(\partial_s, \partial_t)$ , ce qui implique (3.4) et prouve ainsi le lemme. Ce résultat est valable plus généralement pour toute forme symplectique  $\omega$  sur  $X$  muni d'une structure presque complexe  $J$  compatible avec  $\omega$ , et alors dans ce cas  $|\cdot|^2$  est la norme de la métrique riemannienne induite par  $\omega$  et  $J$ .  $\square$

Maintenant, l'énergie d'une courbe holomorphe peut aussi s'exprimer en fonction des actions des asymptotes.

**Proposition 2.** *On a les relations suivantes :*

1. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ,  $E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma^+) - \sum_i \mathbf{a}(\gamma_i)$ , cette relation étant vraie aussi dans le cas où  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  et  $\gamma^+$  est une corde mixte.

2. Si  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ,  $E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma^+) - \sum_i \mathbf{a}(\gamma_i)$

3. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{1,2}^-, \boldsymbol{\delta}_2)$ ,  $E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma_{2,1}^-) + \mathbf{a}(\gamma_{1,2}^-) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_1) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_2)$

4. Si  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(a; \boldsymbol{\delta}_1, b, \boldsymbol{\delta}_2)$ ,  $E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(a) - \mathbf{a}(b) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_1) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_2)$  pour  $a \in \{\gamma_{2,1}^+, x^+\}$  et  $b \in \{q, \zeta_{2,1}^-\}$

5. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{1,2}, \boldsymbol{\delta}_2, \gamma_{2,3}, \boldsymbol{\delta}_3)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma_{3,1}) + \mathbf{a}(\gamma_{1,2}) + \mathbf{a}(\gamma_{2,3}) - \sum_i \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_i)$$

6. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{2,1}, \boldsymbol{\delta}_2, \gamma_{2,3}, \boldsymbol{\delta}_3)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma_{3,1}) - \mathbf{a}(\gamma_{2,1}) + \mathbf{a}(\gamma_{2,3}) - \sum_i \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_i)$$

7. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{1,2}, \boldsymbol{\delta}_2, \gamma_{3,2}, \boldsymbol{\delta}_3)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma_{3,1}) + \mathbf{a}(\gamma_{1,2}) - \mathbf{a}(\gamma_{3,2}) - \sum_i \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_i)$$

8. Si  $u \in \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_{2,1}, \boldsymbol{\delta}_{3,2}, \gamma_2, \boldsymbol{\delta}_3)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(\gamma_{3,1}) - \mathbf{a}(\gamma_{2,1}) - \mathbf{a}(\gamma_{3,2}) - \sum_i \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_i)$$

9. Si  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, b, \boldsymbol{\delta}_2, c, \boldsymbol{\delta}_3)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(x^+) - \mathbf{a}(b) - \mathbf{a}(c) - \sum_i \mathbf{a}(\boldsymbol{\delta}_i)$$

où  $b \in \{x_1, \gamma_{2,1}\}$  et  $c \in \{x_2, \gamma_{3,2}\}$ .

10. Si  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma_{3,1,2}}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, b, \delta_2)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(x_2) - \mathbf{a}(\gamma_{1,3}) - \mathbf{a}(b) - \sum_i \mathbf{a}(\delta_i)$$

où  $b \in \{x_1, \gamma_{2,1}\}$ .

11. Si  $u \in \mathcal{M}_{\Sigma_{2,3,1}}(x_1; \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1)$ ,

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \mathbf{a}(x_1) - \mathbf{a}(\gamma_{3,2}) - \mathbf{a}(\gamma_{1,3}) - \sum_i \mathbf{a}(\delta_i)$$

*Démonstration.* Montrons par exemple la relation 4 avec  $a = \gamma_{2,1}^+$  et  $b = q$ , en supposant pour alléger les calculs que  $\delta_i = \delta_i$  sont des mots de une seule corde de Reeb, pour  $i = 1, 2$ . On a :

$$E_{d(\chi\alpha)}(u) = \int_{S_r} u^* d(\chi\alpha) = \int_{\partial(u(S_r))} \chi\alpha$$

et en notant pour une corde de Reeb  $\gamma_{i,j}$ ,  $c_-(\gamma_{i,j})$  le point de départ de la corde sur  $\Lambda_i$  et  $c_+(\gamma_{i,j})$  son point d'arrivée sur  $\Lambda_j$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial(u(S_r))} \chi\alpha &= \int_{c_+(\gamma_{2,1}^+)}^{c_+(\delta_1)} e^t \alpha + \int_{c_+(\delta_1)}^{c_-(\delta_1)} e^{-T} \alpha + \int_{c_-(\delta_1)}^q e^t \alpha + \int_q^{c_+(\delta_2)} e^t \alpha \\ &\quad + \int_{c_+(\delta_2)}^{c_-(\delta_2)} e^{-T} \alpha + \int_{c_-(\delta_2)}^{c_+(\gamma_{2,1}^+)} e^t \alpha + \int_{c_-(\gamma_{2,1}^+)}^{c_+(\gamma_{2,1}^+)} e^T \alpha \\ &= f_1(c_+(\delta_1)) - f_1(c_+(\gamma_{2,1}^+)) - \mathbf{a}(\delta_1) + f_1(q) - f_1(c_-(\delta_1)) + f_2(c_+(\delta_2)) \\ &\quad - f_2(q) - \mathbf{a}(\delta_2) + f_2(c_-(\gamma_{2,1}^+)) - f_2(c_-(\delta_2)) + e^T \ell(\gamma_{2,1}^+) \end{aligned}$$

Or,  $f_1(c_+(\delta_1)) = f_1(c_-(\delta_1)) = f_2(c_+(\delta_2)) = f_2(c_-(\delta_2)) = 0$  car on a supposé que les constantes que valent  $f_1$  et  $f_2$  dans les bouts négatifs est nulle, et  $f_1(c_+(\gamma_{2,1}^+)) = \mathbf{c}_1$  et  $f_2(c_-(\gamma_{2,1}^+)) = \mathbf{c}_2$ . En remplaçant dans l'expression ci-dessus et par la définition de l'action, on retrouve bien la relation 4. Les autres relations se montrent de la même façon.  $\square$

Le lemme 1 et la proposition 2 ci-dessus impliquent que les courbes holomorphes dans les espaces de modules que nous considérons doivent nécessairement avoir au moins une corde de Reeb asymptote positive ou un point d'intersection d'action positive.

### 3.6.2 Compacité

Les espaces de modules décrits ci-dessus ne sont pas nécessairement compacts. Ils possèdent toutefois des compactifications “naturelles” obtenues en ajoutant certaines *courbes brisées* qu’on appelle aussi des bâtiments holomorphes. Ces résultats de compacité découlent des résultats de Gromov ([Gro85]) qui a été le premier à introduire les courbes holomorphes en géométrie symplectique. Les résultats de transversalité ensuite donneront que les compactifications des espaces de modules sont des variétés à bord (et même à coins), dont les différentes composantes de bord correspondent aux bâtiments holomorphes de certains types. Nous explicitons maintenant les éléments qui sont dans le bord des compactifications des espaces de modules présentés dans les sections précédentes.

Donnons-nous tout d’abord des étiquettes lagrangiennes  $\underline{\Sigma} = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1})$  telles que les  $\Lambda_i^- \prec_{\Sigma_i} \Lambda_i^+$  soient des cobordismes lagrangiens exacts transverses. Nous définissons dans un premier temps les bâtiments holomorphes à bord sur les parties cylindriques des cobordismes. Nous notons  $\underline{\mathbb{R} \times \Lambda^\pm}$  le choix d’étiquettes lagrangiennes cylindriques  $(\mathbb{R} \times \Lambda_1^\pm, \dots, \mathbb{R} \times \Lambda_{d+1}^\pm)$ .

**Définition 14.** Un *bâtiment holomorphe* de taille  $k$  dans  $\mathbb{R} \times Y$  à bord sur  $\underline{\mathbb{R} \times \Lambda^\pm}$  est la donnée d’un nombre fini de paires  $(v_i, \rho_i)$  telles que  $v_i$  est un disque holomorphe asymptote à des cordes de Reeb et  $1 \leq \rho_i \leq k$  un entier correspondant à “l’étage” tel que chaque étage contient au moins un disque qui n’est pas trivial (un cylindre sur une corde de Reeb). De plus, ces paires doivent satisfaire les conditions suivantes :

1. pour chaque paire  $(v_i, \rho_i)$ , avec  $1 < \rho_i < k$ , il existe des disques  $v_{i,1}^+, \dots, v_{i,s}^+$  dans l’étage  $\rho_i + 1$  et  $v_{i,1}^-, \dots, v_{i,r}^-$  dans l’étage  $\rho_i - 1$  tels que chaque asymptote positive (resp. négative) de  $v_i$  est une asymptote négative (resp. positive) d’un  $v_{i,j}^+$  (resp.  $v_{i,j}^-$ ), et les disques  $v_{i,j}^+$  (resp.  $v_{i,j}^-$ ) peuvent aussi avoir d’autres asymptotes négatives (resp. positives) que celles provenant de  $v_i$ ,
2. pour tout disque  $v_i$  dans l’étage  $k$  (resp. 1), on demande que ses asymptotes négatives (resp. positives) soient des asymptotes positives (resp. négatives) de courbes dans l’étage  $k - 1$  (resp. 2),
3. enfin si on identifie les asymptotes communes des disques, on demande que les  $v_i$  se “recolent” en une application  $v: \dot{D} \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ , où  $\dot{D}$  correspond au disque privés de points sur le bord,  $v(\partial\dot{D}) \subset \underline{\mathbb{R} \times \Lambda^\pm}$  et  $v$  converge vers les asymptotes positives des disques  $(v_i, k)$  et les asymptotes négatives des  $(v_j, 1)$ .

On peut maintenant donner la définition de bâtiment holomorphe avec des conditions au bord lagrangiennes avec des bouts cylindriques (voir [BEH<sup>+</sup>03] et [Abb14]).

**Définition 15.** Un bâtiment holomorphe de taille  $k^-|1|k^+$  dans  $\mathbb{R} \times Y$  à bord sur  $\underline{\Sigma}$  est la donnée d’un ensemble de disques holomorphes répartis en trois niveaux :

1. Le *niveau supérieur* contient un bâtiment holomorphe de taille  $k^+$  à bord sur  $\underline{\mathbb{R}} \times \Lambda^+$ ,
2. Le *niveau inférieur* contient un bâtiment holomorphe de taille  $k^-$  à bord sur  $\underline{\mathbb{R}} \times \Lambda^-$ ,
3. Le *niveau central* est un étage intermédiaire contenant des disques holomorphes  $u_i$  à bord sur  $\underline{\Sigma}$  qui sont asymptotes à des cordes de Reeb ou des points d'intersection dans  $A(\underline{\Sigma})$  (voir 3.5.1) tels que :
  - (a) Deux disques distincts peuvent avoir une asymptote commune vers un point d'intersection dans  $A(\underline{\Sigma})$ ,
  - (b) Chaque corde de Reeb qui est une asymptote négative pour un disque  $u_i$  est une asymptote positive d'une courbe dans le niveau inférieur, et inversement chaque corde de Reeb qui est une asymptote positive d'une courbe dans le niveau inférieur est une asymptote négative d'une courbe dans le niveau central.
  - (c) Chaque corde de Reeb qui est une asymptote positive pour  $u_i$  est une asymptote négative d'une courbe dans le niveau supérieur, et inversement.

et tels que la condition suivante soit satisfaite : notons  $v^+$  (resp.  $v^-$ ) l'application recollée correspondant au bâtiment du niveau supérieur (resp. inférieur). Si on identifie les asymptotes négatives de  $v^+$  et les asymptotes positives de  $v^-$  avec respectivement les asymptotes positives et négatives des disques du niveau central, et si on identifie les points d'intersection qui sont des asymptotes communes de composantes du niveau central, on trouve une application  $u: \dot{D} \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ , telle que  $u(\partial \dot{D}) \subset \underline{\Sigma}$  et  $u$  converge vers les points d'intersection restants, les asymptotes positives de  $v^+$  et les asymptotes négatives de  $v^-$  (voir figure 3.4).

La définition de bâtiment holomorphe pour des espaces de modules de courbes holomorphes définies sur des surface compactes sans bord avec des points marqués asymptotes à des orbites de Reeb est donnée dans [BEH<sup>+</sup>03] à la section 8. La version que nous présentons ici, et qui correspond à celle qui est donnée dans [CDRGG] en est un cas relatif.

**Remarque 5.** Les espaces de modules de courbes à bord sur  $\underline{\mathbb{R}} \times \Lambda^\pm$  présentés dans la section 3.5.1 peuvent être vus comme des bâtiments holomorphes de taille 1 à bord sur  $\underline{\mathbb{R}} \times \Lambda^\pm$  et les espaces de modules de courbes dont le bord intersecte la partie compacte des cobordismes peuvent être vus comme des bâtiments holomorphes de taille  $0|1|0$  à bord sur  $\underline{\Sigma}$ .

L'ensemble de ces bâtiments holomorphes fournit alors une compactification des espaces de modules de la section 3.5.1.

Par la compacité de Gromov, une famille à un paramètre  $u_s$  de courbes holomorphes dans  $\mathcal{M}(x_0; x_1, \dots, x_d)$  possède une sous-suite (qu'on note toujours  $u_s$ ) qui

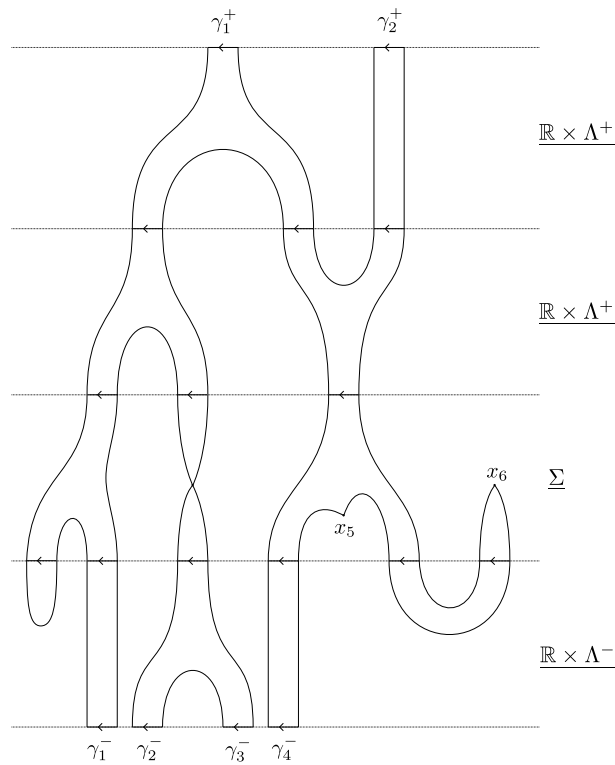


FIGURE 3.4 – Exemple d’un bâtiment holomorphe de taille 1|1|2.

converge vers un bâtiment holomorphe à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^\pm$  si les courbes  $u_s$  sont à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^\pm$ , et à bord sur  $\Sigma$  si les courbes  $u_s$  sont à bord sur  $\Sigma$ . Les bâtiments holomorphes obtenus sont de deux types possibles :

1. Brisure *stable* : bâtiment holomorphe dont les composantes sont des courbes possédant au moins trois asymptotes mixtes, par exemple un bâtiment holomorphe dans un produit de la forme

$$\mathcal{M}(x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+j+1}, \dots, x_d) \times \mathcal{M}(x'_i; x_i, \dots, x_{i+j})$$

avec  $1 \leq i$  et  $2 \leq j \leq d - i - 1$ .

2. Brisure *instable* : bâtiment holomorphe contenant une courbe qui a au plus deux asymptotes. De telles courbes sont soit des demi-plans holomorphes (disque holomorphe avec une seule asymptote qui est alors nécessairement une corde de Reeb pure), soit des bandes holomorphes avec une seule asymptote positive, soit des bandes holomorphes avec deux asymptotes positives, dans ce dernier cas les asymptotes sont des cordes de Reeb et les courbes sont des bananes.

Dans le cas 1 ci-dessus si  $S_{r_s}$  désigne le domaine des courbes  $u_s$  alors  $r_s$  converge vers un point du bord de  $\mathcal{R}^{d+1}$  (génériquement,  $r_s$  converge vers un point sur une face de

codimension 1 du polytope de Stasheff). Dans le cas de la brisure instable, la sous-suite  $r_s$  converge vers un point à l'intérieur du polytope de Stasheff (voir [BEH<sup>+</sup>03] et [Abb14] pour les résultats de compacité pour les courbes holomorphes dans la symplectisation à bord sur des lagrangiennes à bouts cylindriques et [Flo88a] pour le cas de courbes à bord sur des lagrangiennes qui s'intersectent). Finalement, on obtient que la réunion des bâtiments holomorphes

$$\bigsqcup_{k^-, k^+} \mathcal{M}_{\underline{\Sigma}}^{k^- | 1 | k^+} (x_0; x_1, \dots, x_d)$$

est compacte.

# 4

## Homologie de contact legendrienne.

L'homologie de contact legendrienne est un invariant puissant de sous-variétés legendriennes à isotopie legendrienne près. Elle a tout d'abord été définie par Chekanov dans [Che02] pour les noeuds legendriens, puis étendue au cas des sous-variétés legendriennes dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et dans la contactisation d'une variété de Liouville  $P \times \mathbb{R}$  par Ekholm, Etnyre et Sullivan dans [EES05a] et [EES07]. À partir de maintenant quand on ne précisera pas, la variété de contact  $(Y, \alpha)$  sera la contactisation d'une variété de Liouville  $(P \times \mathbb{R}, dz + \beta)$ . L'homologie de contact legendrienne est définie en associant à une sous-variété legendrienne  $\Lambda \subset Y$  une algèbre différentielle graduée (DGA)  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial)$ . La différentielle  $\partial$  sur  $\mathcal{A}(\Lambda)$  est une application de degré  $-1$  définie en comptant des courbes holomorphes dans la symplectisation de  $Y$  à bord sur la lagrangienne  $\mathbb{R} \times \Lambda$ . Nous commençons ce chapitre en définissant un degré qu'on peut attribuer à chaque corde de Reeb de  $\Lambda$ , puis nous explicitons les espaces de modules de courbes holomorphes nécessaires à la définition de l'homologie de contact legendrienne.

### 4.1 Degré.

Soit  $\Lambda \subset (P^{2n} \times \mathbb{R}, dz + \beta)$  une sous-variété legendrienne connexe et  $c$  une corde de Reeb d'extrémités  $c^-$  et  $c^+$ . La définition du degré d'une corde d'une sous-variété legendrienne dans  $P \times \mathbb{R}$  est expliquée dans [EES07], nous la rappelons ici. Considérons un chemin  $\gamma_c: [0, 1] \rightarrow \Lambda$  dans de  $\gamma_c(0) = c^+$  à  $\gamma_c(1) = c^-$  tel que  $\Pi_P(\gamma_c)$  borde une surface  $S$  dans  $P$ , et une structure presque complexe  $J_P$  sur  $P$  compatible avec  $d\beta$ . On peut donc voir  $TP$  comme un fibré complexe et donnons-nous alors une trivialisatation symplectique de  $TP$  le long de  $\Pi_P(\gamma_c)$  induite par  $S$ . Cela permet de voir  $\Pi_P(T_{\gamma_c(t)}\Lambda)$

comme un chemin  $\Gamma(t)$  d'espaces lagrangiens dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ce chemin n'est pas fermé car  $T_{c^-}\Lambda$  et  $T_{c^+}\Lambda$  sont transverses d'où  $\Pi_P(T_{c^-}\Lambda)$  et  $\Pi_P(T_{c^+}\Lambda)$  le sont aussi. Pour fermer le chemin, soit  $\theta \in (0; \frac{\pi}{2}]$  l'angle entre les sous-espaces lagrangiens  $\Pi_P(T_{c^-}\Lambda)$  et  $\Pi_P(T_{c^+}\Lambda)$  ( $\Pi_P(T_{c^-}\Lambda)$  et  $\Pi_P(T_{c^+}\Lambda)$  sont transverses et non orientés). On considère alors le chemin  $\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$  défini par  $\eta(t) = e^{i\theta t}\Pi_P(T_{c^-}\Lambda)$ . L'indice de Conley-Zehnder de  $c$  est alors défini comme étant l'indice de Maslov du lacet de lagrangiens  $\Gamma * \eta$ , et est noté  $\nu_{\gamma_c}(c)$ . Finalement, on définit le degré de  $c$  par  $|c| = \nu_{\gamma_c}(c) - 1$ .

Dans cette définition, on fait un certain nombre de choix :

1. le choix d'un chemin dans  $\Lambda$  reliant les deux extrémités de la corde  $c$  : cela implique que le degré dépend de la classe de Maslov de  $\Lambda$ ,
2. le choix d'une trivialisations de  $TP$  : cela implique que le degré est bien défini modulo  $2c_1(P)$  où  $c_1(P)$  est la première classe de Chern du fibré complexe  $TP$ .

Si la première classe de Chern de  $P$  et la classe de Maslov de  $\Lambda$  sont nulles, alors le degré des cordes est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

Si  $\Lambda$  est une sous-variété legendrienne de  $J^1(M)$  et que  $\Pi_F(\Lambda)$  est sa projection de front alors on peut calculer le degré des cordes de Reeb par la formule suivante. Soit  $c$  une corde de Reeb de  $\Lambda$  avec  $c^-$  et  $c^+$  les points de  $\Pi_F(\Lambda)$  qui correspondent aux extrémités de  $c$ . Il existe des voisinages  $V^-$  et  $V^+$  de  $c^-$  et  $c^+$  respectivement dans  $M \times \mathbb{R}$  tels que  $\Pi_F(\Lambda) \cap V^-$  soit le graphe d'une fonction définie sur un voisinage de  $c_M = \pi_M(c^-) = \pi_M(c^+) \in M$  et à valeurs réelles  $h^-$  et que  $\Pi_F(\Lambda) \cap V^+$  soit le graphe d'une fonction du même type  $h^+$ , où  $\pi_M: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ . Si  $h = h^+ - h^-$ , alors  $c_M$  est un point critique de  $h$  et on peut donc définir la Hessienne  $d_{c_M}^2 h$ . Le degré de la corde  $c$  se calcule alors par :

$$|c| = D(\gamma_c) - U(\gamma_c) + \text{ind}(d_{c_M}^2 h) - 1 \quad (4.1)$$

où  $\gamma_c$  est un chemin dans  $\Pi_F(\Lambda)$  reliant les points  $c^+$  à  $c^-$ ,  $D(\gamma_c)$  correspond au nombre de cusps par lesquels passe  $\gamma_c$  en "descendant",  $U(\gamma_c)$  correspond au nombre de cusps par lesquels passe  $\gamma_c$  en "montant" et  $\text{ind}$  est l'indice de la forme quadratique  $d_{c_M}^2 h$ .

**Exemple 9.** On peut calculer que la corde  $a$  du noeud legendrien sur la figure 2.2 est de degré 1 alors que la corde  $a$  de la sphère legendrienne de la même figure est de degré 2.

**Remarque 6.** Si  $\Lambda$  n'est pas connexe et que  $c$  est une corde mixte d'extrémités  $c^+ \in \Lambda^+$  et  $c^- \in \Lambda^-$ , où  $\Lambda^\pm$  sont des composantes connexes de  $\Lambda$ , on choisit deux points  $p^\pm \in \Lambda^\pm$  et des chemins  $\gamma_c^+$  et  $\gamma_c^-$  reliant respectivement  $c^+$  à  $p^+$  et  $p^-$  à  $c^-$ . Enfin, on se donne un chemin  $\gamma_{+,-}$  reliant  $p^+$  à  $p^-$  et alors le degré de  $c$  est défini par  $|c| = \nu_{\gamma_c^+ \cup \gamma_{+,-} \cup \gamma_c^-}(c) - 1$ , où  $\gamma_c^+ \cup \gamma_{+,-} \cup \gamma_c^-$  représente la concaténation des trois chemins. Le degré des cordes mixtes dépend du choix du chemin  $\gamma_{+,-}$  mais pour deux cordes mixtes  $c_1, c_2$  de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$ , la différence  $|c_1| - |c_2|$  ne dépend pas de  $\gamma_{+,-}$ .

## 4.2 Espaces de modules, transversalité et recollement.

L'approche initiale de Chekanov pour la définition de l'homologie de contact legendrienne en dimension 3 n'est pas de compter des courbes holomorphes dans la symplectisation de  $\mathbb{R}^3$  mais est entièrement combinatoire, il compte des polygones courbes à bord sur la projection lagrangienne du noeud legendrien pour définir la différentielle du complexe. Ekholm, Etnyre et Sullivan ont généralisé cette notion pour des legendriennes dans  $P \times \mathbb{R}$  en comptant des courbes holomorphes dans  $P$  à bord sur  $\Pi_P(\Lambda)$ , où  $\Pi_P: P \times \mathbb{R} \rightarrow P$  est la projection. Plus précisément, si  $J_P$  est une structure presque complexe sur  $P$  et  $a$  et  $b_1, \dots, b_m$  des cordes de Reeb de  $\Lambda$  avec  $\mathbf{b} = b_1 \cdot \dots \cdot b_m$ , ils considèrent des espaces de modules

$$\mathcal{M}_{\Pi_P(\Lambda), J_P}(a; \mathbf{b})$$

de courbes holomorphes  $u: (S_r, j) \rightarrow (P, J_P)$ , telles que :

- $u(\partial_i S_r) \subset \Pi_P(\Lambda)$
- $\lim_{z \rightarrow y_0} u(z) = \Pi_P(a)$  et  $\lim_{z \rightarrow y_i} u(z) = \Pi_P(b_i)$  pour  $i \geq 1$
- $u$  se relève sur  $\partial S_r$  en une application  $\tilde{u}: \partial S_r \rightarrow \Lambda$
- $a$  est une asymptote positive et les  $b_i$  des asymptotes négatives dans le sens où si on note  $a^\pm$  les extrémités de la corde  $a$  et  $b_i^\pm$  les extrémités de la corde  $b_i$ , quand on parcourt  $\tilde{u}(\partial \dot{D}^2)$  dans le sens positif, on atteint  $a^-$  avant  $a^+$  et les  $b_i^+$  avant les  $b_i^-$  pour tout  $i \geq 1$ .

D'un autre côté, Eliashberg, Givental et Hofer ([EGH00]) introduisent la théorie symplectique des champs, et Eliashberg dans [Eli98] donne alors les idées de nouveaux invariants de sous-variétés legendriennes obtenus en comptant des courbes holomorphes dans la symplectisation de la variété de contact. Dans le cas de la dimension 3, pour un noeud legendrien  $\Lambda$ , Etnyre, Ng, et Sabloff ([ENS02, Theorem 7.7]) montrent que les espaces de modules de courbes à bord sur la projection lagrangienne de  $\Lambda$  et asymptotes à des cordes de Reeb sont homéomorphes aux espaces de modules de courbes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda$  dans la symplectisation de la variété de contact et asymptotes à ces mêmes cordes de Reeb. La généralisation de ce résultat en toute dimension est faite dans [EES05b] par Ekholm, Etnyre et Sullivan. Finalement, Dimitroglou-Rizell a montré dans [DR16b] que si  $J_P$  satisfait certaines conditions techniques, alors les deux approches, celle combinatoire (Chekanov) et celle de type théorie des champs symplectiques (Eliashberg) sont équivalentes, autrement dit donnent le même invariant. Plus précisément, notons (A) la condition suivante : il existe un voisinage  $U$  des points doubles de  $\Pi_P(\Lambda)$  tel que dans ce voisinage  $J_P$  soit intégrable et  $\Pi_P(\Lambda)$  soit réel-analytique. Alors si  $J_P$  satisfait (A) et est régulière, un relevé cylindrique  $\tilde{J}_P$  de  $J_P$  par la projection  $\Pi_P$  est aussi régulière et il y a un difféomorphisme entre  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda, \tilde{J}_P}(a; \mathbf{b})/\mathbb{R}$  et  $\mathcal{M}_{\Pi_P(\Lambda), J_P}(a; \mathbf{b})$  donné par  $\Pi_P$ .

Parmi les structures presque complexes sur  $P$  satisfaisant (A), il existe un ouvert dense de telles structures  $J_P$  qui sont régulières [EES07, proposition 2.3], et donc alors les espaces de modules  $\mathcal{M}_{\Pi_P(\Lambda), J_P}(a; \mathbf{b})$  sont des variétés dont la dimension s'exprime en fonction du degré des asymptotes de la façon suivante :

$$\dim \mathcal{M}_{\Pi_P(\Lambda), J_P}(a; \mathbf{b}) = |a| - \sum_i |b_i| - 1$$

et donc on obtient aussi

$$\dim \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda, \tilde{J}_P}(a; \mathbf{b}) = \dim \mathcal{M}_{\Pi_P(\Lambda), J_P}(a; \mathbf{b}) + 1 = |a| - \sum_i |b_i| \quad (4.2)$$

**Remarque 7.** Dans cette thèse, pour définir le produit sur l'homologie de Floer des cobordismes lagrangiens et la structure  $A_\infty$ , nous allons compter des courbes holomorphes à bord sur les cobordismes. C'est pourquoi nous nous intéressons aussi plus spécifiquement à la définition de l'homologie de contact legendrienne en comptant des courbes dans la symplectisation de la variété de contact à bord sur le cylindre  $\mathbb{R} \times \Lambda$ , plutôt que compter des courbes à bord sur la projection lagrangienne de  $\Lambda$ .

**Remarque 8.** Ci-dessus on a rappelé que la transversalité des espaces de modules  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda, \tilde{J}_P}(a; \mathbf{b})$  ( $\tilde{J}_P$  régulière) peut s'obtenir à partir de la transversalité des espaces de courbes dans  $P$ , en utilisant le résultat de Dimitroglou-Rizell. Par un argument d'injectivité, on peut aussi prouver qu'il existe un ouvert dense de structures presque complexes compatibles sur  $\mathbb{R} \times Y$  qui sont régulières pour les espaces de modules  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda, \tilde{J}_P}(a; \mathbf{b})$ , cependant ces structures ne sont pas nécessairement cylindriques. Toutefois, Dimitroglou-Rizell a aussi montré ([DR16a, proposition 3.15]) que génériquement les structures presque complexes cylindriques sur  $\mathbb{R} \times Y$  sont régulières.

Dans ce chapitre, nous aurons aussi besoin de la transversalité des espaces de modules  $\mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$  de courbes à bord sur un cobordisme  $\Lambda^- \prec_\Sigma \Lambda^+$  et d'asymptotes  $\gamma^+ \in \mathcal{R}(\Lambda^+)$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathcal{R}(\Lambda^-)$ . Soit  $T > 0$  tel que  $\Sigma \setminus (\Sigma \cap [-T, T] \times Y)$  soit cylindrique, alors pour un choix générique de structure presque complexe dans  $\mathcal{J}_{J^-, J^+, T}(\mathbb{R} \times Y)$ , les espaces de modules  $\mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$  sont transverses (voir [EHK16, lemme 3.8] et [CDRGG, proposition 4.7]). Étant donné que l'intersection de propriétés génériques donne encore une propriété générique, on en déduit qu'on peut trouver des structures presque complexes qui sont à la fois régulières pour les espaces de modules d'homologie de contact legendrienne de  $\Lambda^\pm$  et les espaces de modules  $\mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$ . En effet, il suffit de considérer des structures presque complexes  $J^\pm \in \mathcal{J}^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$  régulières pour les espaces de modules de type  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda^\pm, J^\pm}(a^\pm; \mathbf{b}^\pm)$  avec  $a^\pm \in \mathcal{R}(\Lambda^\pm)$  asymptote positive et  $\mathbf{b}^\pm$  mot de cordes de Reeb de  $\Lambda^\pm$  asymptotes négatives.

D'après les résultats de compacité, on sait qu'une suite de courbes holomorphes d'asymptotes  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d$  dans un des espaces de modules ci-dessus possède une sous-suite qui converge vers un bâtiment holomorphe approprié. Ceci implique que la

compactification de l'espace de modules est incluse dans la réunion disjoints des bâtiments holomorphes asymptotes à  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d$ . Maintenant, il faut montrer l'inclusion inverse. De façon standard cela se montre par des résultats de recollement. Le résultat principal correspondant dans le cadre de l'homologie de contact legendrienne pour des legendriennes dans  $P \times \mathbb{R}$  est démontré par Ekholm, Etnyre et Sullivan dans [EES07, proposition 4.6]. Ce résultat s'applique aussi plus généralement pour des bâtiments holomorphes à bord sur  $\Sigma$ , cobordisme qui n'est pas nécessairement un cylindre. En effet, les estimations nécessaires à la preuve du résultat de recollement sont locales : lorsque deux courbes se recollent au niveau d'une corde de Reeb, on réalise dans un premier temps un pré-recollement dans un petit voisinage de la corde en question, puis dans un second temps, on établit un certain nombre d'estimations analytiques dans ce voisinage sur la courbe pré-recollée, afin de trouver la courbe holomorphe qui est la courbe recollée cherchée. Une des propriétés de la courbe recollée est que son indice est égal à la somme des indices des courbes du bâtiment holomorphe dont elle est issue (voir par exemple [Ekh08, lemme B.6]).

### 4.3 Algèbre de Chekanov

Nous pouvons à présent définir à proprement parler l'homologie de contact legendrienne d'une sous-variété legendrienne  $\Lambda \subset (Y, \alpha)$ . Soit  $J$  une structure presque complexe sur  $\mathbb{R} \times Y$  compatible avec  $d(e^t \alpha)$ . Pour alléger les notations on n'indiquera plus systématiquement le “ $J$ ” dans les espaces de modules. Notons  $C(\Lambda)$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  engendré par les cordes de Reeb de  $\Lambda$ , et  $\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_i C(\Lambda)^{\otimes i}$  l'algèbre tensorielle de  $C(\Lambda)$ . Les cordes de Reeb sont munies d'un degré défini au paragraphe 4.1 qui induit un degré sur  $\mathcal{A}(\Lambda)$  : si  $\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m$  est un mot de cordes de Reeb alors  $|\mathbf{b}| = \sum_i |b_i|$ . Si  $a$  est une corde de Reeb de  $\Lambda$ , alors on définit :

$$\partial(a) = \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}| = |a| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$$

où  $a$  est une asymptote positive et les  $b_i$  sont des asymptotes négatives, et quand  $m = 0$  on pose  $\mathbf{b} = 1$ . On étend la différentielle à toute l'algèbre  $\mathcal{A}(\Lambda)$  par la règle de Leibniz  $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$  qui n'a pas de signe ici comme le corps de base est  $\mathbb{Z}_2$ . Remarquons que les espaces de modules impliqués dans la définition de la différentielle sont de dimension 0 par (4.2) et comme ils sont compacts alors la somme est bien finie. En effet, pour chaque mot de corde de Reeb  $\mathbf{b}$ ,  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}; \widetilde{J}_P)$  est un ensemble fini de points et la condition de corde-généricité sur  $\Lambda$  implique aussi qu'il n'y a qu'un nombre fini de cordes. Chekanov puis Ekholm, Etnyre et Sullivan ont montré le théorème suivant, qu'on énonce avec la version SFT de la définition de l'homologie de contact legendrienne :

**Théorème 7.** *Pour un choix générique de structure presque complexe  $J$ , on a :*

- $\partial^2 = 0$ ,
- *L'homologie de contact legendrienne  $LCH_*(\Lambda, J)$  est invariante par isotopie legendrienne de  $\Lambda$  et ne dépend pas du choix générique de structure presque complexe  $J$ .*

*Démonstration.* Nous montrons seulement ici la première partie du théorème, c'est-à-dire que  $\partial$  est une différentielle, car le raisonnement utilisé ici reviendra énormément dans le reste de la thèse. Si  $a$  est une corde de Reeb on peut calculer directement :

$$\partial \circ \partial(a) = \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}| = |a| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \cdot \partial(\mathbf{b})$$

Or par la règle de Leibniz on a

$$\partial(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m b_1 \cdots b_{i-1} \partial(b_i) b_{i+1} \cdots b_m$$

et pour tout  $1 \leq i \leq m$  :

$$\partial(b_i) = \sum_{p_i \geq 0} \sum_{\substack{\mathbf{c}^i = c_1^i \cdots c_{p_i}^i \\ |\mathbf{c}^i| = |b_i| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(b_i; \mathbf{c}^i) \cdot \mathbf{c}^i$$

En notant  $\mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i)$  le mot  $\mathbf{b}$  auquel on enlève la corde  $b_i$  qu'on remplace par le mot  $\mathbf{c}^i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial^2(a) &= \sum_{\substack{\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}| = |a| - 1}} \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{\mathbf{c}^i = c_1^i \cdots c_{p_i}^i \\ |\mathbf{c}^i| = |b_i| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(b_i; \mathbf{c}^i) \cdot \mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}| = |a| - 1}} \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{\mathbf{c}^i = c_1^i \cdots c_{p_i}^i \\ |\mathbf{c}^i| = |b_i| - 1}} \# (\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(b_i; \mathbf{c}^i)) \cdot \mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{b} = b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}| = |a| - 1}} \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{\mathbf{c}^i = c_1^i \cdots c_{p_i}^i \\ |\mathbf{c}^i| = |b_i| - 1}} \# \partial \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i)) \cdot \mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i) \end{aligned}$$

Or  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}_{\{b_i\}}(\mathbf{c}^i))$  est une variété de dimension 1 et d'après les résultats de type compacité de Gromov (voir par exemple l'article [BEH<sup>+</sup>03] de Bourgeois, Eliashberg, Hofer, Wysocki et Zehnder), elle se compactifie en ajoutant les courbes brisées obtenues en faisant dégénérer les courbes d'indice 2. Ces courbes brisées constituent le bord de la compactification notée  $\widetilde{\mathcal{M}}$  de la variété, et c'est exactement ce que compte  $\partial^2$ . Étant donné que le bord d'une variété de dimension 1 est composé d'un nombre pair de points, il s'en suit que le compte final dans  $\partial^2(a)$  vaut 0.  $\square$

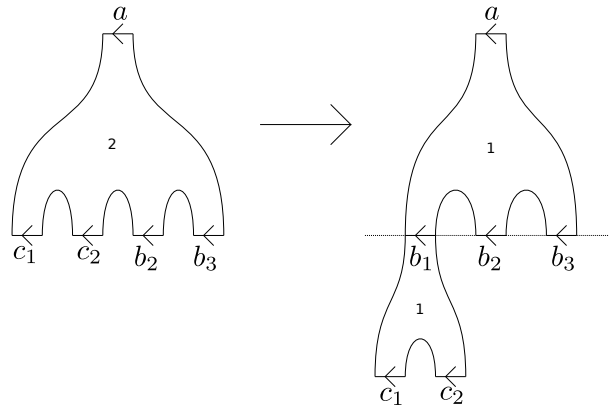


FIGURE 4.1 – Exemple de dégénérescence d’une courbe d’indice 2 dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; c_1, c_2, b_2, b_3)$ . La courbe brisée à droite contribue à  $\partial^2(a)$ .

Finissons ce paragraphe en donnant deux exemples de calcul de l’algèbre de Chekanov.

**Exemple 10.** Commençons par l’exemple le plus simple, nous allons calculer l’homologie de contact legendrienne du noeud trivial  $\Lambda_0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La projection lagrangienne de ce noeud est représenté sur la figure 2.1. Ce noeud ne possède qu’une seule corde de Reeb  $a$  et on a donc  $C(\Lambda_0) = \mathbb{Z}_2\langle a \rangle$ , avec  $|a| = 1 \in \mathbb{Z}$  car  $\text{rot}(\Lambda_0) = 0$ . Il reste à calculer  $\partial(a)$ . Il y a deux disques holomorphes à bord sur  $\Pi_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_0)$  qui ont seulement  $a$  comme asymptote et  $c$  est une asymptote positive. Ces disques correspondent aux deux composantes connexes compactes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_0)$ . On obtient alors  $\partial(a) = 1 + 1 = 0$  et donc  $LCH_i(\Lambda_0) = \mathbb{Z}_2$  pour tout  $i \geq 1$  où  $a^k$  est un générateur de  $LCH_k(\Lambda_0)$ .

**Exemple 11.** Regardons maintenant le cas du noeud de trèfle dans  $\mathbb{R}^3$  que nous notons  $\Lambda$  et dont la projection lagrangienne est représentée sur la figure 2.1 à droite. Encore une fois  $\text{rot}(\Lambda) = 0$  donc l’algèbre est graduée dans  $\mathbb{Z}$ . Il y a cinq cordes de Reeb qui ont pour degré  $|a_1| = |a_2| = 1$  et  $|b_1| = |b_2| = |b_3| = 0$ . On sait déjà que  $\partial(b_i) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$  car la différentielle est de degré  $-1$  et il n’y a pas de corde de degré  $-1$ . Maintenant, pour calculer  $\partial(a_1)$ , on cherche toutes les régions délimitées par  $\Pi_{\mathbb{R}^2}$  qui ont pour sommet  $a_1$  positif puis éventuellement d’autres sommets négatifs, et on fait de même pour calculer  $\partial(a_2)$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \partial(a_1) &= 1 + b_1 + b_3 + b_1b_2b_3 \\ \partial(a_2) &= 1 + b_1 + b_3 + b_3b_2b_1 \\ \partial(b_i) &= 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Ces exemples mettent en évidence la complexité de l’homologie de contact legendrienne. En effet, même pour le noeud le plus simple qu’on puisse imaginer, le noeud trivial, l’homologie est déjà de dimension infinie. Ainsi, même si l’homologie de

contact est un invariant par isotopie legendrienne, il peut être compliqué par exemple de le calculer et de déterminer si les homologies associées à deux legendriennes distinctes sont isomorphes ou non, surtout si elles sont de dimension infinie. Dans les sections 4.5 et 4.6, nous verrons comment on peut extraire de l'homologie de contact legendrienne des invariants plus calculables comme en particulier les homologies de contact legendrienne linéarisée et bilinéarisée.

## 4.4 Morphisme induit par un cobordisme

Avant de définir l'homologie linéarisée, nous allons nous intéresser au lien entre les homologies de contact legendriennes des bouts legendriens d'un cobordisme lagrangien exact. Soient  $\Sigma$  un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$ . Il existe un morphisme d'algèbres différentielles graduées  $\phi$  entre les algèbres de Chekanov  $(\mathcal{A}(\Lambda^+), \partial^+)$  et  $(\mathcal{A}(\Lambda^-), \partial^-)$ , qui a tout d'abord été suggéré par Chantraine dans [Cha10] dans le cas où  $\Sigma$  est une concordance lagrangienne, puis Ekholm, Honda et Kalmàn dans [EHK16] ont défini ce morphisme dans le cas où  $\Sigma$  est un cobordisme lagrangien exact quelconque. Le morphisme  $\phi$  est défini en comptant des courbes holomorphes à bord sur  $\Sigma$  de la façon suivante : si  $\gamma^+ \in \mathcal{R}(\Lambda^+)$ , alors

$$\phi(\gamma^+) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ \gamma_1^-, \dots, \gamma_m^- \in \mathcal{R}(\Lambda^-) \\ \gamma^- = \gamma_1^- \cdots \gamma_m^-}} \# \mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma^-) \cdot \gamma^-$$

et on étend  $\phi$  en un morphisme d'algèbre par  $\phi(\gamma_1^+ \gamma_2^+) = \phi(\gamma_1^+) \phi(\gamma_2^+)$ . Contrairement à la définition de l'homologie de contact legendrienne, il n'y a plus d'action de  $\mathbb{R}$  par translation car on compte des courbes dans un cobordisme quelconque et pas un cylindre trivial. Les espaces de modules impliqués dans la définition de  $\phi$  ici sont de dimension 0. Dans le cas où  $\Sigma$  est un cylindre trivial,  $\phi$  est l'identité.

**Théorème 8.** [EHK16, Théorème 1.2]  $\phi$  est un morphisme d'algèbres différentielles graduées :  $\phi \circ \partial^+ + \partial^- \circ \phi = 0$ .

*Démonstration.* On montre que  $\phi$  est un morphisme de DGA de la même façon que l'on montre que  $\partial$  est une différentielle. On étudie les dégénérescences de courbes dans des espaces de modules  $\mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma_1^-, \dots, \gamma_m^-)$  de dimension 1. Nous représentons sur la figure 4.2 les deux types différents de dégénérescences qu'on peut obtenir. Certaines dégénérescences contribuent à  $\phi \circ \partial^+$ , les autres à  $\partial^- \circ \phi$ .  $\square$

Le fait que  $\phi$  soit un morphisme de DGA implique qu'il induit un morphisme en homologie  $\Phi: LCH_*(\Lambda^+) \rightarrow LCH_*(\Lambda^-)$ .

Si  $\Lambda^- = \emptyset$ , alors  $\Sigma$  est un remplissage lagrangien et  $\phi: \mathcal{A}(\Lambda^+) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  satisfait  $\phi \circ \partial^+ = 0$ , où  $\mathbb{Z}_2$  est vu comme une DGA avec une différentielle nulle. Ce type de morphisme s'appelle une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^+)$ . Les augmentations associées à

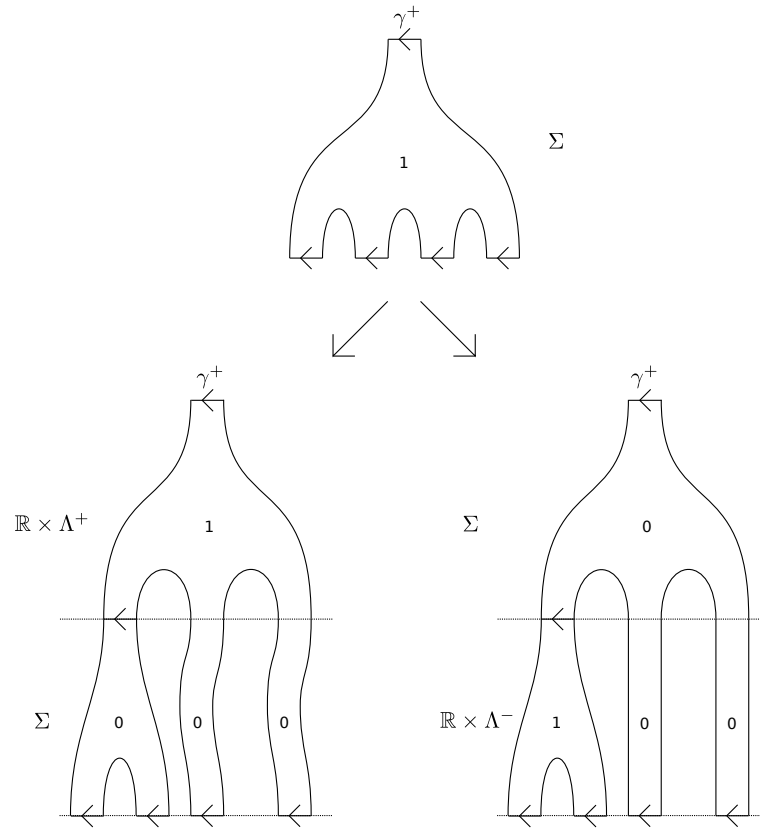


FIGURE 4.2 – Exemple de deux types de dégénérescences d’une courbe d’indice 1. À gauche : configurations brisées qui contribue à  $\phi \circ \partial^+(\gamma^+)$ , à droite : configuration brisée qui contribue à  $\partial^- \circ \phi(\gamma^+)$ .

une sous-variété legendrienne donnent beaucoup de nouvelles informations sur cette dernière et permettent notamment de définir l’homologie de contact legendrienne linéarisée.

## 4.5 Linéarisation

Soit  $\Lambda \subset Y$  une sous-variété legendrienne. Rappelons que l’algèbre de Chekanov associée à  $\Lambda$  est l’algèbre tensorielle  $\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_i C(\Lambda)^{\otimes i}$ . Selon cette décomposition la différentielle restreinte à l’espace vectoriel  $C(\Lambda)$  se réécrit  $\partial = \sum_{i \geq 0} \partial_i$ , où  $\partial_i = \text{pr}_i \circ \partial : C(\Lambda) \rightarrow C(\Lambda)^{\otimes i}$  avec  $\text{pr}_i$  la projection sur  $C(\Lambda)^{\otimes i}$ . Pour  $i = 0$ ,  $\partial_0$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}_2$ .

Si  $\partial_0 = 0$ , alors  $\partial^2 = 0$  implique que  $\partial_1^2 = 0$  et donc  $(C(\Lambda), \partial_1)$  est un complexe, avec une différentielle linéaire. L’homologie de ce complexe est de dimension finie, c’est l’homologie de contact legendrienne linéarisée de  $\Lambda$ .

Étant donné une sous-variété legendrienne quelconque, la condition  $\partial_0 = 0$  n'est pas toujours vérifiée, elle ne l'est pas par exemple pour le noeud de trèfle (voir exemple 11). Pour obtenir tout de même cette condition, on conjugue la différentielle  $\partial$  par un isomorphisme d'algèbres  $g_\varepsilon$  afin d'obtenir une nouvelle différentielle  $\partial^\varepsilon$  satisfaisant  $\partial_0^\varepsilon = 0$  et telle que les homologies des DGA  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial)$  et  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial^\varepsilon)$  soient isomorphes (Chekanov a en fait montré que ces algèbres ont le même *type stable* ce qui est encore plus fort, nous renvoyons à [Che02] pour la définition). L'isomorphisme par lequel on conjugue la différentielle est défini à partir d'une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ .

**Définition 16.** Une *augmentation* de  $(\mathcal{A}(\Lambda), \partial)$  (sur  $\mathbb{Z}_2$ ) est un morphisme d'algèbres différentielles graduées  $\varepsilon: \mathcal{A}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Autrement dit, c'est une application qui satisfait :

- $\varepsilon(a) = 0$  si  $|a| \neq 0$ ,
- $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$ ,
- $\varepsilon \circ \partial = 0$

Notons que  $\varepsilon$  est un morphisme d'algèbres unitaires donc en particulier il satisfait  $\varepsilon(1) = 1$ .

Les augmentations provenant de remplissages lagrangiens (fin de la section précédente) sont appelées *géométriques*.

**Remarque 9.** Il existe beaucoup de sous-variétés legendriennes qui ne possèdent pas d'augmentations. C'est le cas par exemple des sous-variétés *lâches* définies par Murphy dans [Mur].

Étant donné une augmentation  $\varepsilon$  de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , on définit le morphisme d'algèbres  $g_\varepsilon: \mathcal{A}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda)$  sur les cordes de Reeb par  $g_\varepsilon(a) = a + \varepsilon(a)$ . C'est un morphisme de DGA car  $\varepsilon \circ \partial = 0$ , et c'est même un isomorphisme d'inverse  $g_\varepsilon$  comme on est sur  $\mathbb{Z}_2$ . En notant  $\partial^\varepsilon = g_\varepsilon^{-1} \circ \partial \circ g_\varepsilon$  on peut vérifier que  $\partial_0^\varepsilon = 0$  et on a donc un complexe  $(C(\Lambda), \partial_1^\varepsilon)$  avec

$$\partial_1^\varepsilon(a) = \sum_{\substack{\mathbf{b}=b_1 \cdots b_m \\ |\mathbf{b}|=|a|-1}} \sum_{i=1}^m \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \cdot \varepsilon(\mathbf{b}_{\{b_i\}}(1)) \cdot b_i$$

L'homologie de ce complexe est l'*homologie de contact legendrienne de  $\Lambda$  linéarisée par  $\varepsilon$*  et elle est notée  $LCH_*^\varepsilon(\Lambda)$ .

**Théorème 9.** [Che02] L'ensemble  $\{LCH_*^\varepsilon(\Lambda) / \varepsilon\} / \sim$  des classes d'isomorphisme des homologies de contact legendriennes linéarisées est invariant par isotopie legendrienne de  $\Lambda$  et ne dépend pas d'un choix générique de structure presque complexe.

Cet invariant est plus calculable que l'homologie non linéarisée et a permis à Chekanov de donner un des premiers exemples de noeuds legendriens possédant les mêmes invariants classiques mais qui ne sont pourtant pas legendrien-isotopes. On peut encore une fois regarder comment se comporte l'homologie linéarisée dans les corbordismes. Soit  $\Lambda^- \prec_\Sigma \Lambda^+$  un cobordisme lagrangien exact et  $\phi: \mathcal{A}(\Lambda^+) \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda^-)$  le morphisme de DGA induit par  $\Sigma$ . Si  $\varepsilon^-$  est une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^-)$ , alors  $\varepsilon^+ := \varepsilon^- \circ \phi$  est une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^+)$ , en effet c'est un morphisme d'algèbres graduées de  $\mathcal{A}(\Lambda^+)$  vers  $\mathbb{Z}_2$  et

$$\varepsilon^+ \circ \partial^+ = \varepsilon^- \circ \phi \circ \partial^+ = \varepsilon^- \circ \partial^- \circ \phi = 0$$

où la deuxième égalité vient du fait que  $\phi$  est un morphisme de DGA et la dernière est vraie car  $\varepsilon^-$  est une augmentation. On peut linéariser  $\phi$  par  $\varepsilon^-$  pour obtenir  $\phi_{\varepsilon^-}: C(\Lambda^+) \rightarrow C(\Lambda^-)$  qui est une application linéaire définie sur  $C(\Lambda^+)$  par  $\phi_{\varepsilon^-} = (g_{\varepsilon^-}^{-1} \circ \phi \circ g_{\varepsilon^+})_1$  ou plus précisément :

$$\phi_{\varepsilon^-}(\gamma^+) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ \gamma_1^-, \dots, \gamma_m^- \in \mathcal{R}(\Lambda^-) \\ \gamma^- = \gamma_1^- \cdots \gamma_m^-}} \# \mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma^-) \cdot \varepsilon^-(\gamma_{\{\gamma_i^-\}}(1)) \cdot \gamma_i^-$$

On peut montrer que  $\phi_{\varepsilon^-}$  est un morphisme de complexes en utilisant la même méthode que pour montrer que  $\phi$  est un morphisme d'algèbres, et donc  $\phi_{\varepsilon^-}$  induit en homologie une application  $\Phi_{\varepsilon^-}: LCH_*^{\varepsilon^+}(\Lambda^+) \rightarrow LCH_*^{\varepsilon^-}(\Lambda^-)$

## 4.6 Une $A_\infty$ -catégorie : la catégorie d'augmentations

### 4.6.1 Cohomologie de contact legendrienne

La cohomologie de contact legendrienne linéarisée est définie de façon analogue à l'homologie, elle est intéressante à considérer car en particulier la différentielle correspond à l'opération d'ordre 1 d'une algèbre  $A_\infty$  qu'on peut associer à  $\Lambda$  et qui a été définie par Civan, Koprowski, Etnyre, Sabloff et Walker dans [CKE<sup>+</sup>11].

Soit  $C^*(\Lambda)$  l'espace vectoriel dual de  $C(\Lambda)$ , et pour simplifier les notations on note de la même façon les cordes de Reeb et leur dual, et la plupart du temps on notera donc  $C(\Lambda)$  au lieu de  $C^*(\Lambda)$ . Soit  $\varepsilon$  une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ . Le complexe de la cohomologie de contact legendrienne linéarisée est le complexe  $(C^*(\Lambda), \mu_\varepsilon^1)$  où si  $b \in C^*(\Lambda)$ , on a :

$$\mu_\varepsilon^1(b) = \sum_{a \in \mathcal{R}(\Lambda)} \sum_{\substack{\delta, \xi \\ |\delta| + |b| + |\xi| = |a| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \delta, b, \xi) \cdot \varepsilon(\delta) \varepsilon(\xi) \cdot a$$

où  $\delta$  et  $\xi$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda$ . L'application  $\mu_\varepsilon^1$  est en fait le dual de  $\partial_1^\varepsilon$  définie dans la section précédente. On note  $LCH_\varepsilon^*(\Lambda)$  l'homologie de ce complexe,

qui est la cohomologie de contact legendrienne de  $\Lambda$  linéarisée par  $\varepsilon$ . Tout comme pour l'homologie, l'ensemble des classes d'isomorphisme des cohomologies legendriennes linéarisées par les augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$  est un invariant par isotopie legendrienne et ne dépend pas d'un choix générique de structure presque complexe.

Ekhholm, Etnyre et Sabloff dans [EES09] ont montré que la cohomologie de contact legendrienne linéarisée de  $\Lambda$  est directement liée à l'homologie linéarisée et à l'homologie singulière de  $\Lambda$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  à travers une longue suite exacte de dualité :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(\Lambda) \rightarrow LCH_\varepsilon^{n-k-1}(\Lambda) \rightarrow LCH_k^\varepsilon(\Lambda) \rightarrow H_k(\Lambda) \rightarrow \cdots$$

où  $n$  est la dimension de  $\Lambda$ . D'autre part, si  $\varepsilon$  est une augmentation géométrique de  $\Lambda$  induite par un remplissage  $\emptyset \prec_\Sigma \Lambda$ , alors Ekhholm à montré dans [Ekh12], en utilisant la suite de dualité, que :

$$H_*(\Sigma) \simeq LCH_\varepsilon^{n-*}(\Lambda)$$

connu comme l'isomorphisme d'Ekhholm-Seidel. Ce résultat est un résultat d'obstruction à l'existence de remplissages lagrangiens pour une sous-variété legendrienne  $\Lambda$ . En dimension 3, si  $\Lambda$  est un noeud legendrien tel que pour toute augmentation  $\varepsilon$  de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ ,  $LCH_\varepsilon^*(\Lambda)$  n'est pas isomorphe à l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  d'une surface à bord, alors  $\Lambda$  n'est pas remplissable.

## 4.6.2 Une algèbre $A_\infty$

Pour obtenir une algèbre  $A_\infty$ , notons  $\mu_\varepsilon^i : C(\Lambda)^{\otimes i} \rightarrow C(\Lambda)$  le dual de l'application  $\partial_i^\varepsilon : C(\Lambda) \rightarrow C(\Lambda)^{\otimes i}$ . La relation  $(\partial^\varepsilon)^2 = 0$  s'exprime à l'aide des  $\partial_i$  par :

$$\sum_{m=1}^d \sum_{n=0}^{d-m} (\text{id}^{\otimes d-m-n} \otimes \partial_m^\varepsilon \otimes \text{id}^{\otimes n}) \circ \partial_{d-m+1}^\varepsilon = 0$$

pour tout  $d \geq 1$ . Le dual de cette relation est :

$$\sum_{m=1}^d \sum_{n=0}^{d-m} \mu_\varepsilon^{d-m+1} \circ (\text{id}^{\otimes d-m-n} \otimes \mu_\varepsilon^m \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0$$

qui correspond exactement à la relation  $A_\infty$  satisfaite par les opérations  $(\mu_\varepsilon^d)_d$  (voir 3.1). L'algèbre tensorielle  $\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_i C(\Lambda)^{\otimes i}$  munie des opérations  $(\mu_\varepsilon^i)_{i \geq 1}$  est donc une algèbre  $A_\infty$ . On peut donner une formule pour les opérations  $\mu_\varepsilon^d$  : si  $b_1, \dots, b_d$  sont des cordes de Reeb de  $\Lambda$  alors on a :

$$\mu_\varepsilon^d(b_d, \dots, b_1) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{R}(\Lambda) \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1} \\ \sum |\delta_i| + |b_i| = |a| - 1}} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \delta_1, b_1, \delta_2, \dots, b_d, \delta_{d+1}) \cdot \varepsilon(\delta_1 \dots \delta_{d+1}) \cdot a$$

où les  $\delta_i$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda$ .

On peut en fait aller plus loin et construire une catégorie  $A_\infty$  associée à une sous-variété legendrienne  $\Lambda$ , c'est la catégorie d'augmentations notée  $\text{Aug}_-(\Lambda)$ . Cette catégorie a été définie par Bourgeois et Chantraine dans [BC14].

### 4.6.3 La catégorie d'augmentations

#### Bilinéarisation

Le processus de linéarisation de la différentielle de Chekanov est puissant car il permet d'obtenir un invariant de sous-variétés legendriennes calculable. Cependant, lors de ce processus beaucoup d'information se perd, en particulier la différentielle linéarisée ne distingue plus la non-commutativité de la différentielle de Chekanov. Afin de garder en mémoire cette non-commutativité, l'idée est de linéariser la différentielle à l'aide non pas d'une seule augmentation mais de deux, c'est la bilinéarisation.

Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  deux augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ . La différentielle bilinéarisée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une application  $\partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} : C(\Lambda) \rightarrow C(\Lambda)$  définie de la façon suivante :

$$\partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(a) = \sum_{\substack{\mathbf{b}=b_1 \dots b_m \\ |\mathbf{b}|=|a|-1}} \sum_{i=1}^m \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \cdot \varepsilon_1(b_1 \dots b_{i-1}) \varepsilon_2(b_{i+1} \dots b_m) \cdot b_i$$

**Théorème 10** ([BC14]).

1. Pour toute paire d'augmentations  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $(C(\Lambda), \partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$  est un complexe (autrement dit  $(\partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^2 = 0$ ) et son homologie est l'homologie de contact legendrienne bilinéarisée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  notée  $LCH_*^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda)$ .
2. L'ensemble des classes d'isomorphismes  $\{LCH^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\Lambda) / (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\} / \sim$  est invariant par isotopie legendrienne de  $\Lambda$  et ne dépend pas d'un choix générique de structure presque complexe

Nous démontrerons le point 1 du théorème à la sous-section suivante et renvoyons à [BC14] pour la démonstration du point 2.

**Remarque 10.** La différentielle de Chekanov bilinéarisée par  $(\varepsilon, \varepsilon)$  est la différentielle linéarisée par  $\partial^\varepsilon$ .

Maintenant, si on considère  $d + 1$  augmentations  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1})$  de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ , on peut construire une opération

$$\partial^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}} : C(\Lambda) \rightarrow C(\Lambda)^{\otimes d}$$

définie par :

$$\begin{aligned} \partial^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}}(a) = \sum_{\substack{\mathbf{b}=b_1 \dots b_m \\ |\mathbf{b}|=|a|-1}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq m} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \mathbf{b}) \varepsilon_1(b_1 \dots b_{i_1-1}) \varepsilon_2(b_{i_1+1} \dots b_{i_2-1}) \\ \dots \varepsilon_{d+1}(b_{i_d+1} \dots b_m) \cdot b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_d} \end{aligned}$$

et donc un mot de cordes de Reeb  $\mathbf{b}$  dans  $\partial(a)$  contribue à  $\partial^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}}(a)$  seulement s'il est de longueur au moins  $d$ .

On peut considérer les opérations analogues en cohomologie, on note

$$\mu_{\varepsilon_{d+1}, \dots, \varepsilon_1}^d \quad (4.3)$$

le dual de  $\partial^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}}$  et dans le cas  $d = 1$ , le point 1 du théorème 10 implique que  $(\mu_{\varepsilon_2, \varepsilon_1}^1)^2 = 0$  et  $(C(\Lambda), \mu_{\varepsilon_2, \varepsilon_1}^1)$  est le complexe de la cohomologie de contact legendrienne de  $\Lambda$  bilinéarisée par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Plus généralement, on peut montrer que les opérations  $\mu_{\varepsilon_{d+1}, \dots, \varepsilon_1}^d$  satisfont la relation  $A_\infty$  en montrant qu'elles correspondent à des composantes de la différentielle linéarisée de la  $k$ -copie de  $\Lambda$ .

### Dans la $k$ -copie de $\Lambda$

Pour  $k \geq 1$  un entier, la  $k$ -copie de  $\Lambda$  notée  $\Lambda^{(k)}$  se construit de la façon suivante. Posons tout d'abord  $\Lambda_1 := \Lambda$ , et pour  $\varepsilon > 0$  petit on pose  $\widetilde{\Lambda}_j := \varphi_{j\varepsilon}^R(\Lambda)$  pour  $2 \leq j \leq k$ , où  $\varphi^R$  est le flot du champ de Reeb (qui est  $\partial_z$  ici). La sous-variété legendrienne obtenue  $\Lambda_1 \cup \widetilde{\Lambda}_2 \cup \dots \cup \widetilde{\Lambda}_k$  possède une infinité de cordes de Reeb, on la perturbe donc pour la rendre corde-générique. Pour cela, considérons  $f_j: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $2 \leq j \leq k$  des fonctions de Morse telles que les fonctions  $f_i - f_j$  soient aussi des fonctions de Morse. On identifie un petit voisinage tubulaire de  $\widetilde{\Lambda}_j$  à un voisinage de la 0-section dans  $J^1(\Lambda)$ , et on remplace  $\widetilde{\Lambda}_j$  par le 1-jet de la fonction  $f_j: j^1(f_j) = \{(q, d_q f_j, f_j(q)) / q \in \Lambda\} \subset J^1(\Lambda)$  qu'on note alors  $\Lambda_j \subset P \times \mathbb{R}$ . La  $k$ -copie  $\Lambda^{(k)}$  possède plusieurs types de cordes de Reeb :

1. les cordes pures qui sont les cordes des  $\Lambda_j$ , et il y a une bijection entre  $\mathcal{R}(\Lambda)$  et  $\mathcal{R}(\Lambda_j)$  pour tout  $2 \leq j \leq k$ , c'est-à-dire qu'à chaque corde de Reeb de  $\Lambda$  on peut associer une corde de Reeb de  $\Lambda_j$ .
2. les *cordes de Morse* qui sont des cordes mixtes issues de la perturbation par les fonctions  $f_j$ , ce sont donc des cordes qui correspondent aux points critiques des fonctions  $f_j$  et des fonctions  $f_i - f_j$ .
3. les *petites cordes mixtes* (pas de Morse) qui sont les cordes de  $\Lambda_i$  à  $\Lambda_j$  pour  $i > j$ , en bijection avec les cordes de  $\Lambda$ ,
4. les *longues cordes mixtes* (pas de Morse) qui sont les cordes de  $\Lambda_j$  à  $\Lambda_i$  pour  $i > j$  correspondant aussi bijectivement aux cordes de  $\Lambda$ ,

On note  $C^{i,j}$  le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel engendré par les cordes de Reeb de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_j$  qui correspondent à des cordes de  $\Lambda$  (donc pas des cordes de Morse), et on note  $C_M^{i,j}$  l'espace vectoriel engendré par les cordes de Morse de  $\Lambda_i$  à  $\Lambda_j$ . On a donc finalement la décomposition suivante :

$$C(\Lambda^{(k)}) = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} C^{i,i} \quad \bigoplus_{1 \leq j \neq i \leq k} C_M^{i,j} \quad \bigoplus_{1 \leq j < i \leq k} (C^{i,j} \oplus C^{j,i})$$

chaque terme de la somme correspondant dans l'ordre aux cordes pures, aux cordes de Morse, aux petites cordes mixtes et aux longues cordes mixtes. Pour une corde pure  $a \in \mathcal{R}(\Lambda)$ , on note  $a^{i,j}$  la corde de Reeb correspondante dans  $C^{i,j}$ . Enfin, on note  $\mathcal{A}(\Lambda^{(k)}) = \bigoplus_i C(\Lambda^{(k)})^{\otimes i}$  l'algèbre de Chekanov de  $\Lambda^{(k)}$  (algèbre tensorielle de  $C(\Lambda^{(k)})$ ) et  $\partial^{(k)}$  la différentielle associée définie à la section 4.3.

Soient  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  des augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ . On considère le morphisme d'algèbres  $\varepsilon^{(k)} : \mathcal{A}(\Lambda^{(k)}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  défini sur les cordes de Reeb par :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(k)}(a^{i,i}) &= \varepsilon_i(a) \\ \varepsilon^{(k)}(a^{i,j}) &= 0 \text{ pour } i \neq j \\ \varepsilon^{(k)}(c_M) &= 0 \text{ pour } c_M \text{ corde de Morse}\end{aligned}$$

**Lemme 2.**  $\varepsilon^{(k)}$  est une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^{(k)})$ .

*Démonstration.* Commençons tout d'abord par préciser que comme les perturbations de Morse sont petites pour former la  $k$ -copie, la différentielle de Chekanov de  $\mathcal{A}(\Lambda_i)$  est la même que celle sur  $\mathcal{A}(\Lambda)$  après identification des cordes de Reeb, et donc une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$  est aussi une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda_i)$  (voir [CDRGG15, proposition 2.7]). Maintenant pour montrer le lemme il faut vérifier que  $\varepsilon^{(k)} \circ \partial^{(k)} = 0$ . Pour  $i \neq j$ , chaque mot de cordes de Reeb dans  $\partial^{(k)}(a^{i,j})$  contient au moins une corde mixte donc  $\varepsilon^{(k)} \circ \partial^{(k)}(a^{i,j}) = 0$  car  $\varepsilon^{(k)}$  n'augmente pas les cordes mixtes, et il se passe la même chose pour les cordes de Morse. Puis, pour les cordes pures, soit  $\partial^{(k)}(a^{i,i})$  contient des cordes mixtes et on se retrouve dans le cas précédent, soit seulement des cordes pures de  $\Lambda_i$  et donc  $\varepsilon^{(k)} \circ \partial^{(k)}(a^{i,i}) = \varepsilon_i \circ \partial(a) = 0$  car  $\varepsilon_i$  est une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$ .  $\square$

Une fois que  $\mathcal{A}(\Lambda^{(k)})$  est munie d'une telle augmentation qu'on appelle augmentation *diagonale*, nous pouvons calculer l'homologie de contact legendrienne de  $\Lambda^{(k)}$  linéarisée par cette augmentation. Le complexe correspondant est  $(C(\Lambda^{(k)}), \partial_1^{\varepsilon^{(k)}})$  où  $\partial^{\varepsilon^{(k)}} = g_{\varepsilon^{(k)}}^{-1} \circ \partial^{(k)} \circ g_{\varepsilon^{(k)}} : C(\Lambda^{(k)}) \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda^{(k)})$  se décompose en une somme  $\partial^{\varepsilon^{(k)}} = \sum_i \partial_i^{\varepsilon^{(k)}}$  telle que  $\partial_i^{\varepsilon^{(k)}} : C(\Lambda^{(k)}) \rightarrow C(\Lambda^{(k)})^{\otimes i}$ . Comme à la section 4.6.2, le fait que  $(\partial^{\varepsilon^{(k)}})^2$  implique que pour tout  $d \geq 1$  :

$$\sum_{m=1}^d \sum_{n=0}^{d-m} (\text{id}^{\otimes d-m-n} \otimes \partial_m^{\varepsilon^{(k)}} \otimes \text{id}^{\otimes n}) \circ \partial_{d-m+1}^{\varepsilon^{(k)}} = 0 \quad (4.4)$$

Concentrons-nous sur la composante suivante de la différentielle restreinte à  $C^{k,1}$  :

$$\partial_{C^{k,1}}^{\varepsilon^{(k)}} : C^{k,1} \rightarrow \bigoplus_{\substack{d \geq 1 \\ 1 \leq i_2, \dots, i_{d-1} \leq k}} C^{k,i_d} \otimes C^{i_d, i_{d-1}} \otimes \dots \otimes C^{i_2, 1}$$

le terme de droite pour  $d = 1$  étant simplement  $C^{k,1}$  par convention. Cette composante de la différentielle se décompose en une somme

$$\partial_{C^{k,1}}^{\varepsilon^{(k)}} = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ 1 \leq i_2, \dots, i_d \leq k}} \partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_d}, \varepsilon_k} \quad (4.5)$$

Le dual de  $\partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_d}, \varepsilon_k}$  correspond alors à l'application  $\mu_{\varepsilon_k, \varepsilon_{i_d}, \dots, \varepsilon_{i_2}, \varepsilon_1}^d$  définie au paragraphe précédent (voir (4.3)).

**Remarque 11.** Au paragraphe (4.3), on a défini les  $\mu_{\varepsilon_k, \varepsilon_{i_d}, \dots, \varepsilon_{i_2}, \varepsilon_1}^d$  en comptant des courbes dans  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}(a; \delta_1, b_1, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_d}, b_d, \delta_k)$  et en augmentant les  $\delta_j$  par les augmentations  $\varepsilon_1, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_d}, \varepsilon_k$ . Il y a en fait une correspondance bijective entre ces courbes et les courbes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^{(k)}$  dont les asymptotes sont les cordes de  $\Lambda_k$  à  $\Lambda_1$ , de  $\Lambda_{i_2}$  à  $\Lambda_1, \dots$ , de  $\Lambda_{i_d}$  à  $\Lambda_{i_{d-1}}$  et de  $\Lambda_k$  à  $\Lambda_{i_d}$  qui correspondent bijectivement à  $a, b_1, \dots, b_d$ .

D'autre part, les cordes de Morse forment un sous-complexe de  $(C(\Lambda^{(k)}), \partial^{\varepsilon^{(k)}})$  car la différentielle diminue l'action (paragraphe 3.6.1) et comme les perturbations des legendriennes pour former la  $k$ -copie sont très petites, on peut supposer que les cordes de Morse sont les cordes de plus petite longueur (voir [BC14]). Ainsi,  $\partial^{\varepsilon^{(k)}}(C_M) \subset C_M$ , et donc la relation  $(\partial^{\varepsilon^{(k)}})^2$  implique que  $(\partial_{C^{k,1}}^{\varepsilon^{(k)}})^2$ , ce qui par la décomposition (4.5) donne que pour tout  $1 \leq i_2, \dots, i_d \leq k$  :

$$\sum_{m=1}^d \sum_{n=0}^{d-m} (\text{id}^{\otimes d-m-n} \otimes \partial^{\varepsilon_{i_{n+1}}, \dots, \varepsilon_{i_{m+n+1}}} \otimes \text{id}^{\otimes n}) \circ \partial^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i_{n+1}}, \varepsilon_{i_{m+n+1}}, \dots, \varepsilon_k} = 0 \quad (4.6)$$

Remarquons que dans le cas  $d = 1$ , on obtient  $\partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_k} \circ \partial^{\varepsilon_1, \varepsilon_k} = 0$  ce qui prouve le point 1 du théorème 10. Maintenant, en dualisant (4.6), on trouve que pour tout  $1 \leq i_2, \dots, i_d \leq k$  :

$$\sum_{m=1}^d \sum_{n=0}^{d-m} \mu_{\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_{i_{m+n+1}}, \varepsilon_{i_{n+1}}, \dots, \varepsilon_1}^{d-m+1} (\text{id}^{\otimes d-m-1} \otimes \mu_{\varepsilon_{i_{m+n+1}}, \dots, \varepsilon_{i_{n+1}}}^m \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0$$

qui correspond à la relation  $A_\infty$ .

**Remarque 12.** On peut remarquer que pour calculer les différentielles bilinéarisées il suffit de considérer la 2-copie de  $\Lambda$ . Et pour obtenir les relations  $A_\infty$  avec un nombre d'augmentations plus grand que  $k$ , il suffit de faire le même raisonnement en considérant autant de copies de  $\Lambda$  que d'augmentations.

### La catégorie $\text{Aug}_-(\Lambda)$

On peut maintenant définir la catégorie d'augmentations de  $\Lambda$ .

**Définition 17.** La catégorie d'augmentations  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda)$  associée à  $\Lambda$  est une catégorie  $A_\infty$  définie de la façon suivante :

- $\text{Ob}(\mathcal{A}ug_-(\Lambda))$  :  $\varepsilon$  augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda)$
- $\text{hom}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (C(\Lambda), \mu_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^1)$
- pour chaque  $d$ -uplet d'augmentations  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}$  les applications

$$\mu_{\varepsilon_{d+1}, \dots, \varepsilon_1}^d : \text{hom}(\varepsilon_d, \varepsilon_{d+1}) \otimes \dots \otimes \text{hom}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \text{hom}(\varepsilon_1, \varepsilon_{d+1})$$

définies par (4.3) sont les opérations  $A_\infty$  de la catégorie.

Cette catégorie par contre n'est pas unitaire, et donc on ne peut pas parler d'équivalence de catégorie. Toutefois, Bourgeois et Chantraine ont défini une notion de *pseudo-équivalence* pour les catégories  $A_\infty$  non unitaires, et à partir de cette relation ils montrent le théorème suivant :

**Théorème 11.** *Si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont legendrienne-isotopes, alors les catégories  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda)$  et  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda')$  sont pseudo-équivalentes.*

Il y a un autre moyen de calculer les produits de la catégorie  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda)$ . Pour calculer les  $\mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}}^d$ , on peut considérer la  $(d+1)$ -copie de  $\Lambda$  munie de l'augmentation  $\varepsilon^{(d+1)}$ , et compter des courbes holomorphes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^{(d+1)}$  avec  $d$  asymptotes mixtes  $\gamma_{2,1}, \gamma_{3,2}, \dots, \gamma_{d+1,d}$  telles que  $\gamma_{i,j}$  est une corde de Reeb de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_j$ , et des asymptotes qui sont des cordes pures (augmentées ensuite). Dans ce cas, comme pour l'autre façon de calculer la catégorie, on ne prend toujours pas en compte les cordes de Morse qui sont des cordes de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_j$  pour tout  $1 \leq i < j \leq d+1$ . Il existe un analogue de la catégorie  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda)$  pour  $\Lambda \in \mathcal{J}^1(\mathbb{R})$  appelée la catégorie  $\mathcal{A}ug_+(\Lambda)$ , dont les objets sont aussi les augmentations de  $\Lambda$  et les opérations  $A_\infty \mu^d$  sont définies en comptant des courbes holomorphes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^{(d+1)}$  mais cette fois-ci avec des asymptotes mixtes qui sont des cordes de  $\Lambda_i$  vers  $\Lambda_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq d+1$ . Cette catégorie a été définie par Ng, Rutherford, Shende, Sivek et Zehnder dans [NRS<sup>+</sup>]. La différence essentielle entre ces deux catégories est que dans la définition de  $\mathcal{A}ug_+(\Lambda)$  on prend en compte les cordes de Morse, et ceci implique que la catégorie  $\mathcal{A}ug_+(\Lambda)$  est unitaire.

### Foncteur induit par un cobordisme

À la section 4.4 on a vu que si  $\Sigma$  est un cobordisme de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda^+$  alors il induit un morphisme  $\phi : \mathcal{A}(\Lambda^+) \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda^-)$ . À partir de ce morphisme, on peut construire un  $A_\infty$ -foncteur  $\mathcal{G}_\Sigma : \mathcal{A}ug_-(\Lambda^-) \rightarrow \mathcal{A}ug_-(\Lambda^+)$ . Les différentes composantes de ce foncteur sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\Sigma^0 : \text{Ob}(\mathcal{A}ug_-(\Lambda^-)) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{A}ug_-(\Lambda^+)) \\ \varepsilon^- &\mapsto \varepsilon^+ := \varepsilon^- \circ \phi \end{aligned}$$

et pour tout  $(d + 1)$ -uplet d'augmentations  $(\varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_{d+1}^-)$  de  $\mathcal{A}(\Lambda^-)$ ,

$$\mathcal{G}_\Sigma^d: \text{hom}(\varepsilon_d^-, \varepsilon_{d+1}^-) \otimes \dots \otimes \text{hom}(\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-) \rightarrow \text{hom}(\varepsilon_1^+, \varepsilon_{d+1}^+)$$

est défini par

$$\mathcal{G}_\Sigma^d(b_d, \dots, b_1) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{R}(\Lambda^+) \\ |a| = \sum |b_i| \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1}}} \# \mathcal{M}_\Sigma(a; \delta_1, b_1, \delta_2, \dots, b_d, \delta_{d+1}) \cdot \varepsilon_1^-(\delta_1) \dots \varepsilon_{d+1}^-(\delta_{d+1}) \cdot a$$

où les  $\delta_i$  sont des mots de cordes pures de  $\Lambda$  (description du foncteur dans [BC14]).

## Homologie de Floer de cobordismes lagrangiens

Nous présentons dans ce chapitre une homologie de Floer développée par Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko dans [CDRGG] pour les cobordismes lagrangiens exacts.

Soient  $\Lambda_1^- \prec_{\Sigma_1} \Lambda_1^+$  et  $\Lambda_2^- \prec_{\Sigma_2} \Lambda_2^+$  deux cobordismes lagrangiens exacts transverses avec  $\Lambda_1^-, \Lambda_1^+, \Lambda_2^-, \Lambda_2^+$  des sous-variétés legendriennes dans  $Y = P \times \mathbb{R}$  telles que les algèbres de Chekanov  $\mathcal{A}(\Lambda_1^-)$  et  $\mathcal{A}(\Lambda_2^-)$  admettent des augmentations  $\varepsilon_1^-$  et  $\varepsilon_2^-$  respectivement. On note  $\varepsilon_i^+, i = 1, 2$ , l'augmentation induite par le cobordisme  $\Sigma_i$  sur  $\mathcal{A}(\Lambda_i^+)$ . L'homologie de Cthulhu est l'homologie d'un complexe associé à la paire de cobordismes  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  et noté  $\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ . Les générateurs de ce complexe sont les points d'intersection entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et les cordes de Reeb de  $\Lambda_2^-$  vers  $\Lambda_1^-$  et celles de  $\Lambda_2^+$  vers  $\Lambda_1^+$ , et la différentielle est définie en comptant des courbes holomorphes à bord sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et asymptotes à des points d'intersection et à des cordes de Reeb. On rappelle qu'on note  $C(\Lambda_1^\pm, \Lambda_2^\pm)$  le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel engendré par les cordes de Reeb de  $\Lambda_2^\pm$  à  $\Lambda_1^\pm$ , et on note  $CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel engendré par les points d'intersection entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

### 5.1 Espaces de modules, transversalité et recollement

Pour associer un degré aux asymptotes, on suppose tout d'abord que  $2c_1(P) = 0$  et que les classes de Maslov des lagrangiennes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont nulles, ce qui implique en particulier que les classes de Maslov de  $\Lambda_1^\pm$  et  $\Lambda_2^\pm$  sont nulles aussi. Le degré associé aux cordes de Reeb est le même que celui de l'homologie de contact legendrienne ;

c'est-à-dire que si  $c$  est une corde dans  $C(\Lambda_1^\pm, \Lambda_2^\pm)$ , alors

$$|c| = \nu_{\gamma_c}(c) - 1$$

Ensuite, étant donné la paire ordonnée de cobordismes  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , le degré d'un point d'intersection  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  est défini comme l'indice de Maslov d'un chemin de lagrangiennes graduées de  $(T_p \Sigma_1)^\#$  à  $(T_p \Sigma_2)^\#$  dans  $Gr^\#(T_p X, \omega_p)$ , le revêtement universel de la Grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de  $(T_p X, \omega_p)$  (voir [Sei08, section 11.j], [CDRGG]). D'après les hypothèses sur  $2c_1(P)$  et les classes de Maslov, le degré des asymptotes est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

Maintenant, nous allons voir que dans le cas où la structure presque complexe sur  $\mathbb{R} \times Y$  est régulière pour les espaces de modules de Cthulhu (section 3.5.1 du chapitre 3), on peut exprimer la dimension de ces espaces de modules (qui seront alors des variétés), à partir du degré des asymptotes des courbes. Soit  $u$  une courbe holomorphe dans un espace de module du type  $\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(x_0; x_1, \dots, x_d)$  tel que  $x_0$  est soit une corde de Reeb asymptote positive  $\gamma_0^+$ , soit un point d'intersection  $p_0$  dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  qui est un saut de  $\Sigma_2$  vers  $\Sigma_1$ . Les autres asymptotes  $x_1, \dots, x_d$  peuvent être des cordes de Reeb positives, des points d'intersection ou des cordes de Reeb négatives. On note  $\gamma_j^+$  pour  $1 \leq j \leq j^+$  les asymptotes de  $u$  qui sont des cordes de Reeb positives,  $\gamma_j^-$  les asymptotes de  $u$  qui sont des cordes de Reeb négatives et  $q_k$ ,  $1 \leq k \leq l$  les asymptotes de  $u$  qui sont des points d'intersection dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . On notera aussi  $q_k \in \{\Sigma_i \rightarrow \Sigma_j\}$  si  $q_k$  est un saut de  $\Sigma_i$  vers  $\Sigma_j$ . Si comme à la section 3.5.1 on note  $\tilde{D}_{(r,u),\delta} = K_r + D_{u,\delta} + \tau_u$  l'opérateur de Cauchy-Riemann linéarisé (3.3), on a le théorème suivant, découlant du théorème de Riemann-Roch ([MS12, appendice C]) et du calcul d'indices de Maslov (voir [Sei08],[CDRGG]) :

**Théorème 12.** *L'indice de l'opérateur de Fredholm  $\tilde{D}_{(r,u),\delta}$  est donné par :*

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\tilde{D}_{(r,u),\delta}) &= |p_0| + \sum_{k=1}^{j^+} |\gamma_j^+| - \sum_{q_k \in \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\}} n + 1 - |q_k| - \sum_{q_k \in \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\}} |q_k| \\ &\quad - \sum_{k=1}^{j^-} |\gamma_j^-| + (2 - n)j^+ + l - 2, \text{ si } x_0 = p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\tilde{D}_{(r,u),\delta}) &= |\gamma_0^+| + \sum_{k=1}^{j^+} |\gamma_j^+| - \sum_{q_k \in \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\}} n + 1 - |q_k| - \sum_{q_k \in \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\}} |q_k| \\ &\quad - \sum_{k=1}^{j^-} |\gamma_j^-| + (2 - n)j^+ + l, \text{ si } x_0 = \gamma_0^+ \end{aligned}$$

Ce théorème implique que si les structures presque complexes sont régulières pour la définition des espaces de modules de Cthulhu, alors ces espaces de modules sont des

variétés de dimension :

$$\begin{aligned}
 \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^+}(\gamma_{2,1}^+; \beta_1, \xi_{2,1}^+, \beta_2) &= |\gamma_{2,1}^+| + |\xi_{2,1}^+| - |\beta_1| - |\beta_2| - 1 \\
 \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2) &= |\gamma_{2,1}^-| - |\zeta_{2,1}^-| - |\delta_1| - |\delta_2| - 1 \\
 \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \gamma_{1,2}^-, \delta_2) &= |\gamma_{2,1}^-| + |\gamma_{1,2}^-| - |\delta_1| - |\delta_2| + 1 - n \\
 \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, q, \delta_2) &= |\gamma_{2,1}^+| - |q| - |\delta_1| - |\delta_2| + 1 \\
 \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2) &= |\gamma_{2,1}^+| - |\zeta_{2,1}^-| - |\delta_1| - |\delta_2| \\
 \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(x^+; \delta_1, q, \delta_2) &= |x^+| - |q| - |\delta_1| - |\delta_2| - 1 \\
 \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(x^+; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2) &= |x^+| - |\zeta_{2,1}^-| - |\delta_1| - |\delta_2| - 2
 \end{aligned}$$

Afin d'utiliser ces formules, il reste à obtenir des résultats de transversalité : on veut montrer qu'il existe un choix générique de structure presque complexe telle que les espaces de modules considérés sont bien des variétés.

1. *Espaces de modules d'homologie de contact legendrienne* : ce cas est traité à la section 4.2, les espaces de modules permettant de définir la différentielle de Chekanov sont transverses pour un choix générique de structures presque complexes cylindriques sur  $\mathbb{R} \times Y$  mais aussi pour un choix générique de structures presque complexes  $J_P \in \mathcal{J}_\pi^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$  telles que  $J_P$  satisfait la condition technique (A) (section 4.2). En fait, ces résultats de transversalité s'appliquent aussi pour les espaces de modules de bananes  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \gamma_{1,2}^-, \delta_2)$ .

2. *Espaces de modules  $\mathcal{M}_\Sigma(\gamma^+; \gamma_1^-, \dots, \gamma_d^-)$*  : ce cas est aussi traité à la section 4.2, ces espaces de modules sont transverses pour un choix générique de structures presque complexes dans  $\mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$ .

3. *Espaces de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, \zeta_{2,1}^-, \delta_2)$*  : Pour ces espaces là, il existe un choix générique de structures presque complexes régulières dans  $\mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  ([CDRGG]). Il est aussi possible de trouver un choix générique de structures presque complexes régulières dépendant du domaine. Rappelons que le domaine des courbes holomorphes ici est biholomorphe à la bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  et la structure presque complexe doit être invariante par translation le long du facteur réel, donc une structure presque complexe dépendant du domaine est la donnée d'un chemin  $[0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  ([CDRGG]).

4. *Espaces de modules de courbes à bord sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  dont au moins une asymptote est un point d'intersection* : Pour ces espaces là, il existe aussi un choix générique de structures presque complexes régulières dépendant du domaine.

Pour chacun des cas, les structures presque complexes régulières forment un ensemble qui est le complémentaire d'un ensemble maigre. Comme une intersection de complémentaires d'ensembles maigres est encore le complémentaire d'un ensemble maigre, les résultats de transversalité pour les espaces de modules peuvent être satisfaits simultanément. Ainsi, on peut trouver des structures presque complexes régulières

de la forme suivante : tout d’abord, soit  $T > 0$  un réel tel que  $\Sigma_i \setminus (\Sigma_i \cap [-T, T] \times Y)$  soient cylindriques pour  $i = 1, 2$ . Considérons des structures  $J^\pm \in \mathcal{J}^{cyl}(P \times \mathbb{R})$  régulières pour  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda^\pm}(\gamma^+; \gamma_1, \dots, \gamma_d)$  (espaces de modules d’homologie de contact legendrienne) ainsi que pour les espaces de modules de bananes, et telles que les  $J^\pm$  soient égales à une structure presque complexe  $\tilde{J}_P \in \mathcal{J}_\pi^{cyl}(P \times \mathbb{R})$  en dehors de  $\mathbb{R} \times K$  avec  $K \subset Y$  compact, régulière pour les espaces de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{cyl}(\gamma^+, \gamma_1^-, \dots, \gamma_d^-)$  de courbes à bord sur d’éventuelles parties cylindriques de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  dans  $[-T, T] \times Y$  (ces espaces de modules sont vides si les cobordismes n’ont aucun ”morceau“ cylindrique dans  $[-T, T] \times Y$ ). Maintenant, on peut donc trouver une structure presque complexe  $J_t: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_{J^-, J^+, T}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  dépendant du domaine qui soit régulière pour les espaces des types 3. et 4. ci-dessus.

**Remarque 13.** Le fait de trouver une structure presque complexe régulière simultanément pour tous les espaces de modules impliqués dans la définition du complexe de Cthulhu permet aussi d’assurer la transversalité des bâtiments holomorphes apparaissant comme dégénérescences des courbes dans ces espaces.

Supposons maintenant qu’on se donne une structure presque complexe régulière. Comme dans le cadre de l’homologie de contact legendrienne, étant donné un certain nombre d’asymptotes ordonnées  $x_0, \dots, x_d$ , on sait que la réunion de tous les bâtiments holomorphes ayant ces mêmes asymptotes est compacte, et c’est même une variété compacte à coins ([Sei08]). D’autre part, d’après la remarque 5, on a l’inclusion

$$\mathcal{M}_\Sigma(x_0; x_1, \dots, x_d) \subset \bigsqcup_{k^-, k^+} \mathcal{M}_\Sigma^{k^-|1|k^+}(x_0; x_1, \dots, x_d)$$

des espaces de modules dans l’ensemble des bâtiments holomorphes ayant les mêmes asymptotes. Dans le cadre de l’homologie de Cthulhu, il reste donc à comprendre pourquoi les variétés compactes que forment l’ensemble des bâtiments holomorphes pour un ensemble d’asymptotes données fournissent bien des compactifications des espaces de modules de courbes à bord sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  et ayant ces mêmes asymptotes. Pour cela, comme dans le cas de l’homologie de contact legendrienne, ce sont des résultats de recollement qui permettent de conclure. Pour les types de bâtiments holomorphes qui nous intéressent ici, deux composantes d’un bâtiment holomorphe peuvent éventuellement se recoller soit sur des points d’intersection dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , soit sur des cordes de Reeb. Tout d’abord, le recollement des bâtiments holomorphes à bord sur  $\mathbb{R} \times (\Lambda_1^\pm \cup \Lambda_2^\pm)$  se passe de la même façon que pour l’homologie de contact legendrienne (chapitre 4). Le recollement étant une opération locale, pour un bâtiment holomorphe de taille  $k^-|1|k^+$  on peut dans un premier temps recoller les composantes des niveaux supérieur et inférieur, puis dans un second temps recoller sur les points d’intersection un à un dans le niveau central. Ce recollement au niveau de point d’intersection est du type de celui fait par Floer pour l’homologie de Floer lagrangienne ([Flo88a]), qui généralise le recollement de trajectoires brisées de Morse au niveau de points critiques.

Finalement, encore une fois comme pour le cas de l'homologie de contact legendrienne, l'indice d'une courbe recollée  $u$  s'exprime en fonction des indices des composantes  $u_1, \dots, u_k$  du bâtiment holomorphe dont elle provient de la façon suivante :

$$\text{ind}(u) = \nu + \sum_{i=1}^k \text{ind}(u_i) \quad (5.1)$$

où  $\nu$  est le nombre de points d'intersection sur lesquels des composantes se recollent dans le niveau central du bâtiment holomorphe.

## 5.2 Complexe de Cthulhu

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour définir le complexe de Cthulhu. On a :

$$\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2) = C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)[2] \oplus CF(\Sigma_1, \Sigma_2) \oplus C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)[1]$$

où si  $|\gamma^+|$  est le degré d'une corde  $\gamma^+ \in C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$ , alors le degré de cette même corde vue dans  $C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)[2]$  est  $|\gamma^+| + 2$ , et de même si  $\gamma^- \in C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$  alors son degré dans  $C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)[1]$  est  $|\gamma^-| + 1$ . La différentielle sur ce complexe s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-} = \begin{pmatrix} d_{++} & d_{+0} & d_{+-} \\ 0 & d_{00} & d_{0-} \\ 0 & d_{-0} & d_{--} \end{pmatrix}$$

où chaque composante est définie par un compte modulo 2 de courbes holomorphes rigides de la façon suivante :

1. pour  $\xi_{2,1}^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_2^+, \Lambda_1^+)$ ,

$$d_{++}(\xi_{2,1}^+) = \sum_{\gamma_{2,1}^+} \sum_{\beta_1, \beta_2} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^+}(\gamma_{2,1}^+; \beta_1, \xi_{2,1}^+, \beta_2) \varepsilon_1^+(\beta_1) \varepsilon_2^+(\beta_2) \cdot \gamma_{2,1}^+$$

où on fait la somme sur  $\gamma_{2,1}^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_2^+, \Lambda_1^+)$  et  $\beta_i$  mots de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^+$  pour  $i = 1, 2$ . L'application  $d_{++}$  est en fait la restriction à  $C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  de la différentielle de la cohomologie de contact legendrienne de  $\Lambda_1^+ \cup \Lambda_2^+$  bilinéarisée par  $\varepsilon_1^+$  et  $\varepsilon_2^+$ .

2. pour  $\xi_{2,1}^- \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$ ,

$$\begin{aligned} d_{+-}(\xi_{2,1}^-) &= \sum_{\gamma_{2,1}^+} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, \xi_{2,1}^-, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \cdot \gamma_{2,1}^+ \\ d_{0-}(\xi_{2,1}^-) &= \sum_{x^+} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \mathcal{M}(x^+; \delta_1, \xi_{2,1}^-, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \cdot x^+ \\ d_{--}(\xi_{2,1}^-) &= \sum_{\gamma_{2,1}^-} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \xi_{2,1}^-, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \cdot \gamma_{2,1}^- \end{aligned}$$

3. pour  $q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  saut de  $\Sigma_1$  vers  $\Sigma_2$ , on a

$$\begin{aligned} d_{+0}(q) &= \sum_{\gamma_{2,1}^+} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}(\gamma_{2,1}^+; \delta_1, q, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \cdot \gamma_{2,1}^+ \\ d_{00}(q) &= \sum_{x^+} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \mathcal{M}(x^+; \delta_1, q, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \cdot x^+ \\ d_{-0}(q) &= b \circ \delta_{0-}^{\Sigma_{2,1}}(q) \\ &= \sum_{\gamma_{1,2}^-, \gamma_{2,1}^-} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# (\mathcal{M}_{\Sigma_{2,1}}(q; \delta_2', \gamma_{1,2}^-, \delta_1'') \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1', \gamma_{1,2}^-, \delta_2'')) \\ &\quad \cdot \varepsilon_1^-(\delta_1' \delta_1'') \varepsilon_2^-(\delta_2' \delta_2'') \cdot \gamma_{2,1}^- \end{aligned}$$

où  $\delta_{0-}^{\Sigma_{2,1}}$  est le dual de l'application  $d_{0-}^{\Sigma_{2,1}} : C(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-) \rightarrow CF(\Sigma_2, \Sigma_1)$  où on a inversé les étiquettes lagrangiennes, et  $b : C(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-) \rightarrow C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$  est l'application banane définie par

$$b(\gamma_{1,2}^-) = \sum_{\gamma_{2,1}^-} \sum_{\delta_1, \delta_2} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}(\gamma_{2,1}^-; \delta_1', \gamma_{1,2}^-, \delta_2'') \cdot \varepsilon_1^-(\delta_1' \delta_1'') \varepsilon_2^-(\delta_2' \delta_2'') \cdot \gamma_{2,1}^-$$

Sur la figure 5.1 on a représenté des exemples de courbes comptées par les composantes de la différentielle (sauf  $d_{++}$  qui compte des courbes du même type que  $d_{--}$  mais dans le bout positif).

**Remarque 14.** Les autres composantes de la différentielle sont nulles pour des raisons d'énergie. En effet, pour définir des applications  $d_{0+}$  et  $d_{-+}$  il faudrait compter des courbes holomorphes sans asymptotes positives, ce qui est impossible (voir section 3.6.1).

D'après les expressions des dimensions des espaces de modules en fonction du degré des asymptotes (12), on remarque qu'en considérant les degrés translétés de la définition du complexe de Cthulhu, les composantes de  $\mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-}$  sont toutes des applications de degré 1. Sans la translation des degrés, on peut calculer que  $d_{+0}$  est de degré  $-1$ ,  $d_{+-}$  et  $d_{-0}$  sont de degré 0,  $d_{++}$ ,  $d_{00}$  et  $d_{--}$  sont de degré 1 et  $d_{0-}$  est de degré 2.

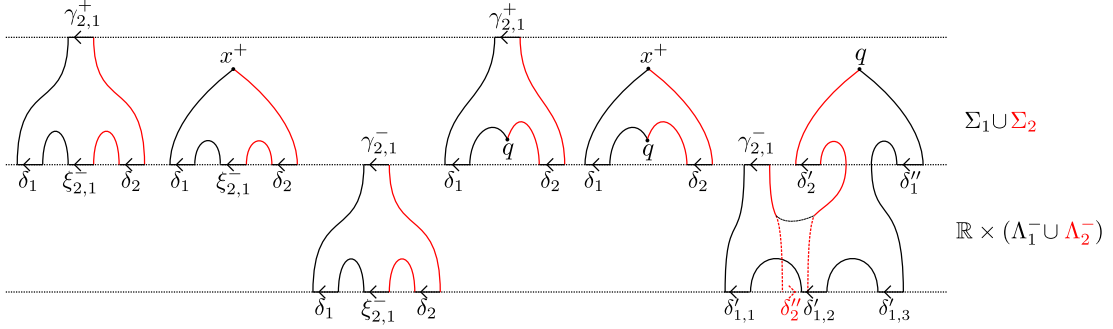


FIGURE 5.1 – Courbes contribuant de gauche à droite à  $d_{+-}(\xi_{2,1}^-)$ ,  $d_{0-}(\xi_{2,1}^-)$ ,  $d_{--}(\xi_{2,1}^-)$ ,  $d_{+0}(q)$ ,  $d_{00}(q)$  et  $d_{-0}(q)$ , avec  $\delta_i = \delta_i$  sont des mots de une corde pour  $i = 1, 2$  dans les cinq premiers cas et pour le dernier cas  $\delta'_2 = \delta'_2$ ,  $\delta''_2 = \delta''_2$ ,  $\delta'_1 = \delta'_{1,1}\delta'_{1,2}\delta'_{1,3}$  et  $\delta''_1 = \delta''_1$ .

**Théorème 13.**  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  est un complexe, autrement dit  $(\mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})^2 = 0$

Ce théorème se démontre en étudiant les dégénérescences de certaines courbes d'indice 1 à bord sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  et avec deux asymptotes mixtes. C'est exactement le même type de démonstration que nous utiliserons dans le chapitre suivant pour montrer la relation de produit.

Si on note  $\partial_{-\infty} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{0-} \\ d_{-0} & d_{--} \end{pmatrix}$  la sous-matrice de  $\mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-}$ , alors

$$0 = (\mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})^2 = \begin{pmatrix} d_{++}^2 & *_{+0} & *_{+-} \\ 0 & & \\ 0 & \partial_{-\infty}^2 & \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

où  $*_{+0} = d_{++}d_{+0} + d_{+0}d_{00} + d_{+-}d_{-0}$  et  $*_{+-} = d_{++}d_{+-} + d_{+0}d_{0-} + d_{+-}d_{--}$ , et donc  $(C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+), d_{++})$  est un sous-complexe du complexe de Cthulhu et

$$(CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) := CF(\Sigma_1, \Sigma_2) \oplus C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)[1], \partial_{-\infty})$$

est un complexe quotient du complexe de Cthulhu. La relation 5.2 implique aussi que  $d_{+0} + d_{+-} : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  est un morphisme de complexes et ainsi le complexe de Cthulhu est le cone de  $d_{+0} + d_{+-}$ . Montrer que  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2, \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  est bien un complexe ou que  $d_{+0} + d_{+-}$  est un morphisme de complexes sont des assertions équivalentes. À la section 6.3, nous montrerons ainsi que  $d_{+0} + d_{+-}$  est un morphisme de complexes.

### 5.3 Perturbations hamiltoniennes

Le complexe de Cthulhu est en fait acyclique. Ceci s'obtient en montrant qu'il est invariant par un certain type d'isotopies hamiltoniennes qui permettent de déplacer

le cobordisme dans la symplectisation. Le morphisme  $d_{+0} + d_{+-}$  est donc alors un quasi-isomorphisme.

### 5.3.1 Définition

Étant donné un cobordisme  $\Lambda^- \prec_{\Sigma} \Lambda^+$  dans  $(\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}, d(e^t \alpha))$ , nous allons considérer un type particulier d'isotopies hamiltoniennes par lesquelles on veut déformer  $\Sigma_1$ . Plus précisément, nous utilisons des hamiltoniens qui ne dépendent que de la variable  $t$  (variable réelle de symplectisation).

Soit  $H: \mathbb{R} \times P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltonien défini par  $H(t, p, z) = h(t)$ , où  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse dépendant seulement de la variable  $t$ . Le flot hamiltonien associé à  $H$  est par définition le flot du champ de vecteurs hamiltonien  $X_H$  défini par  $\iota_{X_H} d(e^t \alpha) = -dH$ . On peut calculer que  $X_H(t, p, z) = e^{-t} h'(t) \partial_z$  et donc le flot associé  $\Phi_H$  est défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_H^s: \mathbb{R} \times P \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times P \times \mathbb{R} \\ \Phi_H^s(t, p, z) &= (t, p, z + se^{-t} h'(t)) \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $\Sigma$  est un cobordisme lagrangien exact,  $\Phi_H^s(\Sigma)$  en est aussi un. En effet, si  $f_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  est la primitive de la forme  $e^t \alpha$  sur  $\Sigma$ , alors on a

$$\begin{aligned} e^t \alpha|_{(\Phi_H^s)^* \Sigma} &= (\Phi_H^s)^*(e^t(dz + \beta)) \\ &= e^t(d(z + se^{-t} h'(t)) + \beta)|_{\Sigma} \\ &= e^t(dz + se^{-t}(h'' - h')dt + \beta)|_{\Sigma} \\ &= e^t \alpha|_{\Sigma} + s(h'' - h')dt|_{\Sigma} \end{aligned}$$

D'où

$$f_{(\Phi_H^s)^* \Sigma}(t, p, z) = f_{\Sigma}(t, p, z) + s(h' - h)(t) \quad (5.3)$$

Ce type d'isotopie hamiltonienne sert à enrôler les bouts cylindriques des cobordismes. Dans les sections suivantes nous allons voir différents choix d'hamiltoniens permettant d'enrôler de différentes façons en fonction du type de résultat qu'on souhaite obtenir.

### 5.3.2 Acyclicité du complexe

Le premier résultat qu'on peut obtenir en déplaçant un cobordisme par une isotopie hamiltonienne comme ci-dessus est l'acyclicité du complexe de Cthulhu. Dans cette section nous rappelons brièvement comment obtenir ce résultat et renvoyons à [CDRGG] pour tous les détails. Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux cobordismes lagrangiens exacts transverses, et  $T > 0$  tel que  $\Sigma_i \setminus (\Sigma_i \cap [-T, T] \times Y)$  soient cylindriques pour  $i = 1, 2$ .

On considère pour tout  $N > 0$  une fonction  $\rho_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} \rho_N(t) = 1 \text{ pour } t \leq -2 - T - N \text{ et } t \geq 2 + T + N, \\ \rho_N(t) = 0 \text{ pour } t \in [-1 - T - N, 1 + T + N], \\ \rho'(t) \leq 0 \text{ pour } t \in [-2 - T - N, -1 - T - N], \\ \rho'(t) \geq 0 \text{ pour } t \in [1 + T + N, 2 + T + N] \end{cases}$$

et on définit alors un hamiltonien  $h_N$  sur  $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$  par  $h_N(t, p, z) = e^t \rho_N(t)$ . Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko obtiennent alors le résultat suivant (proposition 8.2 dans [CDRGG15]) :

**Proposition 3.** *Soit  $J \in \mathcal{J}_{J^-, J^+}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  une structure presque complexe régulière telle que  $J^\pm = \tilde{J}_P \in \mathcal{J}_\pi^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$ . Alors on peut identifier de façon canonique les complexes  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  et  $(\text{Cth}(\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1), \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  à condition que  $N, S > 0$  soient suffisamment grands.*

L'avantage de cette identification est que dans  $\text{Cth}(\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1), \Sigma_2)$ , les générateurs sont réduits aux points d'intersection dans  $\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1) \cap \Sigma_2$ . En effet, l'enroulement des bouts cylindriques "remplace" chaque corde de Reeb par un point d'intersection. Les points d'intersection obtenus après perturbation se trouvent dans les tranches  $[-2 - T - N, -1 - T - N] \times Y$  et  $[1 + T + N, 2 + T + N] \times Y$  de la symplectisation (voir figure 5.2).

**Remarque 15.** La raison pour laquelle on demande que  $N$  soit suffisamment grand est que cette proposition se prouve en considérant la concaténation de cobordismes. Si  $\Lambda^- \prec_V \Lambda$  et  $\Lambda \prec_W \Lambda^+$  sont deux cobordismes lagrangiens exacts tels que  $V \cap (-1, \infty) \times Y$  et  $W \cap (-\infty, 1) \times Y$  soient cylindriques, alors on peut construire le cobordisme lagrangien exact :

$$V \odot_N W = (V \cap (-\infty, 0) \times Y) \cup (\tau_N(W) \cap (0, \infty) \times Y)$$

Dans ce cobordisme, il y a une partie cylindrique qui n'est pas un bout positif ou négatif :  $V \odot_N W \cap ([-1, 1 + N] \times Y) = [-1, 1 + N] \times \Lambda$ . Si on considère deux concaténation  $V_1 \odot_N W_1$  et  $V_2 \odot_N W_2$ , alors pour  $N$  suffisamment grand la différentielle du complexe  $\text{Cth}(V_1 \odot_N W_1, V_2 \odot_N W_2)$  s'obtient en comptant des bâtiments holomorphes dont les différentes composantes sont soit dans les bouts cylindriques, soit des courbes à bords sur  $V_1 \cup V_2$ , soit des courbes à bord sur  $W_1 \cup W_2$ . D'autre part, pour  $N$  suffisamment grand les applications de transfert et co-transfert associées à la concaténation cobordismes sont des morphismes de complexes. La condition  $S$  suffisamment grand est nécessaire pour éliminer toutes les cordes de Reeb lors de l'enroulement des bouts cylindriques. Plus précisément, on veut  $S \geq 2 \max_c \ell(c)$  pour  $c \in \mathcal{R}(\Lambda_2^\pm, \Lambda_1^\pm)$ .

Maintenant, il est possible de montrer que le complexe  $\text{Cth}(\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1), \Sigma_2)$  est invariant par isotopie hamiltonienne à support compact en étudiant les différents types de

bifurcations apparaissant au cours de l'isotopie. Et avec ces deux résultats on peut montrer l'acyclicité du complexe de Cthulhu. En effet, tout d'abord on procède à l'identification des complexes  $Cth(\Sigma_1, \Sigma_2)$  et  $Cth(\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1), \Sigma_2)$  en utilisant une isotopie hamiltonienne qui enroule les bouts de  $\Sigma_1$ . Puis, par une isotopie hamiltonienne à support dans  $[-2 - T - N, 2 + T + N] \times Y$ , on déplace  $\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma_1)$  pour obtenir  $\Sigma'_1$  de telle sorte que  $Cth(\Sigma'_1, \Sigma_2)$  n'a pas de générateurs.

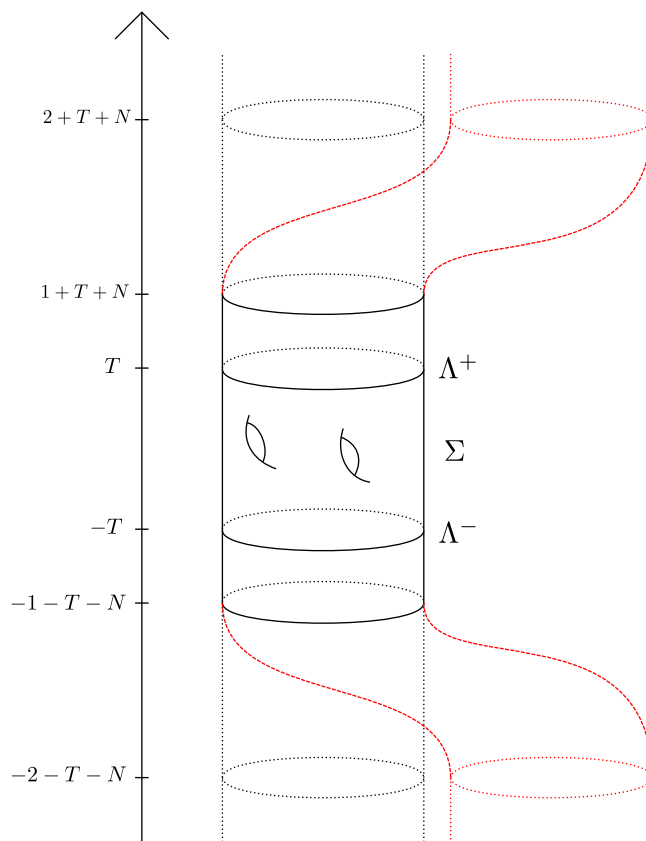


FIGURE 5.2 – Schéma représentant un cobordisme  $\Sigma$  et la déformation (en rouge) de ses bouts positifs et négatifs par l'isotopie hamiltonienne  $\Phi_{h_N}^{-S}$ . Le cobordisme  $\Sigma$  est cylindrique pour  $t \in (-\infty, -T) \cup (T, \infty)$  alors que  $\Phi_{h_N}^{-S}(\Sigma)$  est cylindrique pour  $t \in (-\infty, -2 - T - N) \cup (2 + T + N, \infty)$ .

### 5.3.3 Perturbation dirigée et perturbation en $V$

Les perturbations dirigées et perturbations en  $V$  sont deux autres types de perturbations hamiltoniennes définies de la manière suivante :

Soit  $T > 0$ , on définit des fonctions  $h_D, h_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$h_D(t) = \begin{cases} e^t & \text{pour } t \leq -T - 1 \\ A_1 & \text{pour } t \in [-T, T] \\ e^t - A_2 & \text{pour } t \geq T + 1 \\ h'_D(t) \geq 0 & \text{pour } t \in [-T - 1, -T] \cup [T, T + 1] \end{cases}$$

et

$$h_V(t) = \begin{cases} -e^t & \text{pour } t \leq -T - 1 \\ -B_1 & \text{pour } t \in [-T, T] \\ e^t - B_2 & \text{pour } t \geq T + 1 \\ h'_V(t) \leq 0 & \text{pour } t \in [-T - 1, -T] \\ h'_V(t) \geq 0 & \text{pour } t \in [T, T + 1] \end{cases}$$

où  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont des constantes positives. Comme à la section 5.3.1, on peut alors définir des hamiltoniens  $H_D$  et  $H_V$  sur  $\mathbb{R} \times P \times \mathbb{R}$  dépendant seulement de la variable  $t$  à partir de  $h_D$  et  $h_V$ . Soit  $\Sigma_1$  un cobordisme lagrangien exact et considérons  $\Phi_{H_D}^\epsilon(\Sigma_1)$  pour  $\epsilon > 0$  petit. Dans  $[-T, T] \times Y$ , les cobordismes  $\Sigma_1$  et  $\Phi_{H_D}^\epsilon(\Sigma_1)$  sont confondus, on note alors  $\Sigma_2$  la perturbation par une petite isotopie hamiltonienne à support compact de  $\Phi_{H_D}^\epsilon(\Sigma_1)$ . L'isotopie utilisée ici est à support compact dans  $[-T - \eta, T + \eta] \times Y$  avec  $0 < \eta \ll 1$  et pour  $t$  dans les intervalles  $[-T - \eta, -T + \eta]$  et  $[T - \eta, T + \eta]$ , elle est proportionnelle au flot de Reeb. Si l'isotopie est suffisamment petite, alors les points d'intersection de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont tous dans  $[-T, T] \times Y$  et d'après la formule (5.3), les fonctions associées à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  satisfont, pour  $t \in [-T, T]$ ,  $f_{\Sigma_2} = f_{\Sigma_1} - A_1\epsilon$ . Ainsi, tous les points d'intersection dans  $CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  sont d'action négative, on dit que la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  est *dirigée*.

De façon analogue, on peut considérer  $\Sigma_2$  une petite perturbation hamiltonienne à support compact de  $\Phi_{H_V}^\epsilon(\Sigma_1)$  et d'après la formule (5.3) on en déduit que tous les points d'intersection dans  $CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  sont d'action positive. On dit alors que la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  est une *V-paire*. Les perturbations précédentes sont telles qu'on a les résultats suivants :

**Proposition 4.** [CDRGG] Soit  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  une paire de cobordismes lagrangiens dirigée avec  $\Sigma_2$  une petite perturbation de  $\Phi_{H_D}^\epsilon(\Sigma_1)$  comme ci-dessus par une fonction de Morse  $f$  sur  $\Sigma_1$ , et considérons une structure presque complexe  $J$  sur  $\mathbb{R} \times Y$  dans  $\mathcal{J}_{J^-, J^+}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$  dépendant du domaine et telle que  $J^\pm$  soient dans  $\mathcal{J}_\pi^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$ . Supposons de plus que  $A(\Lambda_1^-)$  admette des augmentations  $\epsilon_1^-, \epsilon_2^-$  qui induisent des augmentations  $\epsilon_1^+$  et  $\epsilon_2^+$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_1^+)$ , alors :

1. Il y a des isomorphismes canoniques d'algèbres de Chekanov  $(\mathcal{A}(\Lambda_1^-), \partial_1^-) \simeq (\mathcal{A}(\Lambda_2^-), \partial_2^-)$  et  $(\mathcal{A}(\Lambda_1^+), \partial_1^+) \simeq (\mathcal{A}(\Lambda_2^+), \partial_2^+)$ , et donc en particulier  $\epsilon_1^\pm$  et  $\epsilon_2^\pm$  sont aussi des augmentations de  $\mathcal{A}(\Lambda_2^\pm)$ ,
2.  $LCH_{\epsilon_1^-, \epsilon_2^-}^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \simeq LCH_{\epsilon_1^-, \epsilon_2^-}^*(\Lambda_1^-)$ ,

3.  $LCH_{\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+}^*(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+) \simeq LCH_{\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+}^*(\Lambda_1^+)$ ,
4. Si  $J$  est régulière et induite par une métrique riemannienne  $g$  telle que  $(f, g)$  est une paire Morse-Smale dans un voisinage de  $\bar{\Sigma}_1$ , alors  $HF_*(\Sigma_1, \Sigma_2) \simeq H_{n+1-*}(\bar{\Sigma}_1, \partial_- \bar{\Sigma}_1; \mathbb{Z}_2)$ .

*Démonstration.* Pour le point 1, d'après les perturbations effectuées pour obtenir  $\Sigma_2$ ,  $\Lambda_2^\pm$  sont des translations de  $\Lambda_1^\pm$  de  $\varepsilon$  dans la direction du champ de Reeb  $\partial_z$  donc  $\Lambda_2^\pm$  est legendrien-isotope à  $\Lambda_1^\pm$  et alors le résultat découle de [EES05c, lemme 4.13].

Pour les points 2 et 3, les identifications des complexes d'homologie de contact legendrienne linéarisée sont faites dans [EES09] dans le cas d'une 2-copie où  $\Lambda_2$  est une "grande" translation de  $\Lambda_1$  dans la direction du champ de Reeb, grande signifiant que la coordonnée  $z$  pour tout point de  $\Lambda_2$  est strictement plus grande que celle pour tout point de  $\Lambda_1$ . Cependant, il est possible de procéder aux mêmes identifications dans le cas où  $\Lambda_2$  est une (perturbation d'une) translation de  $\Lambda_1$  de  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon < \min_{c \in \mathcal{R}(\Lambda_1)} \ell(c)$ . L'identification des complexes bilinéarisés est similaire.

Pour le point 4, voir [DR16b, Théorème 6.2] et [CDRGG, Théorème 10.5]. Remarquons que dans ce cas  $CF_*(\Sigma_1, \Sigma_2)$  est bien un complexe car pour tout  $q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , la relation  $(\partial_{-\infty})^2 = 0$  implique  $d_{00}^2(q) + d_{0-} \circ d_{-0}(q) = 0$ , or  $d_{0-} \circ d_{-0}(q) = 0$ . En effet, comme les points d'intersection sont tous d'action négative,  $d_{0-} = 0$  car sinon cela reviendrait à compter des courbes d'énergie négative. Le choix de la structure presque complexe induite par une métrique riemannienne  $g$  telle que  $(f, g)$  soit Morse-Smale permet d'identifier le complexe de Floer  $CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  au complexe de Morse de la fonction  $f$ . En utilisant le théorème de Weinstein, on identifie un voisinage de  $\Sigma_1$  avec un voisinage tubulaire de la section nulle  $\Sigma_1^0$  dans  $T^*\Sigma_1$  et alors pour  $\varepsilon$  assez petit  $\Sigma_2$  est dans le voisinage tubulaire de  $\Sigma_1^0$ . On identifie alors les points d'intersection dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  aux points critiques de  $\varepsilon f$ .  $\square$

Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition précédente, mais dans le cas où  $\Sigma_2$  est une petite perturbation de  $\Phi_{H_V}^\varepsilon(\Sigma_1)$ , les points 1 et 3 sont encore satisfaits et le point 4 devient  $HF_*(\Sigma_1, \Sigma_2) \simeq H_{n+1-*}(\bar{\Sigma}; \mathbb{Z}_2)$  avec les mêmes hypothèses sur  $J$ . En supposant de plus que  $\Lambda_1$  peut se déplacer horizontalement, le point 2 devient  $LCH_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-}^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \simeq LCH_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-}^*(\Lambda_1^-)$ . On peut encore une fois trouver une preuve de cette identification dans [EES09]. Elle repose sur l'acyclicité du sous-complexe engendré par les cordes mixtes (dont les cordes de Morse) de la 2-copie  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ .

## Structure produit

Pour définir le produit, nous considérons trois cobordismes lagrangiens exacts transverses  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  de  $\Lambda_i^-$  à  $\Lambda_i^+$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Nous allons ensuite compter des courbes holomorphes à bord sur les cobordismes, avec trois asymptotes mixtes et éventuellement des asymptotes vers des cordes pures dans le bout négatif.

### 6.1 Espaces de modules

Les espaces de modules nécessaires à la définition du produit sont décrits à la section 3.5.3. Rappelons que certains d'entre eux sont des espaces de modules de courbes à bord dans les bouts cylindriques négatifs des cobordismes :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3)$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3)$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3)$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2,3}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3)$$

Dans ce cas, toutes les asymptotes sont des cordes de Reeb et en particulier il y a trois asymptotes mixtes distinctes donc les arguments standards de transversalité impliquent que ces espaces de modules sont des variétés pour une structure presque complexe générique dans  $\mathcal{J}^{cyl}(\mathbb{R} \times Y)$ . En effet, s'il n'y avait pas d'asymptotes mixtes mais plusieurs asymptotes positives et négatives, alors la courbe pourrait être un revêtement multiple et alors il n'y aurait pas de point injectif (voir [EES05a], [AD10, chapitre 8], [MS12, chapitre 3]).

Pour les espaces de modules de courbes à bord dans une partie éventuellement non cylindrique des cobordismes, le même argument est encore valable dès qu'on a au moins une asymptote mixte qui est une corde de Reeb (voir [CDRGG]). Donc en particulier les espaces de modules suivants

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, x_2, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{3,1,2}}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{3,1,2}}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2) \\ & \mathcal{M}_{\Sigma_{2,3,1}}(x_1; \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) \end{aligned}$$

sont tous des variétés pour une structure presque complexe générique dans  $\mathcal{J}^{adm}(\mathbb{R} \times Y)$ . Les seuls espaces de modules qui peuvent éventuellement poser problème sont les espaces de la forme  $\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2,3}}(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$  où les asymptotes mixtes sont seulement des points d'intersection. En effet pour ce type de courbe rien ne dit qu'on peut trouver un point injectif. On utilise donc une structure presque complexe dépendant du domaine (voir section 3.4.2) comme fait par exemple Seidel ([Sei08]). Il montre qu'il est alors possible de perturber un peu la structure presque complexe pour la rendre régulière.

**Remarque 16.** Dans tout le chapitre, nous allons définir des applications en comptant la cardinalité d'espaces de modules. Ce compte s'effectuera toujours modulo 2. Et rappelons que nous notons  $\mathcal{M}^i(x_0; x_1, \dots, x_d)$  les espaces de modules de courbes d'indice  $i$ .

## 6.2 Définition du produit

### 6.2.1 Définition

Nous supposons à partir de maintenant que les algèbres de Chekanov  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  pour  $i = 1, 2, 3$ , admettent des augmentations qu'on note  $\varepsilon_i^-$ . On veut définir une application :

$$\mathfrak{m}_2 : CF_{-\infty}^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}^*(\Sigma_1, \Sigma_3)$$

avec  $m_2 = m^0 + m^-$ , où  $m^0$  est à valeurs dans  $CF^*(\Sigma_1, \Sigma_3)$  et  $m^-$  à valeurs dans  $C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-)$ . Nous allons la définir terme à terme, il y en a huit :

$$\begin{aligned}
m_{00}^0 &: CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF^*(\Sigma_1, \Sigma_3) \\
m_{00}^- &: CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-) \\
m_{0-}^0 &: CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow CF^*(\Sigma_1, \Sigma_3) \\
m_{0-}^- &: CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-) \\
m_{-0}^0 &: C^*(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes CF^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF^*(\Sigma_1, \Sigma_3) \\
m_{-0}^- &: C^*(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes CF^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-) \\
m_{--}^0 &: C^*(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow CF^*(\Sigma_1, \Sigma_3) \\
m_{--}^- &: C^*(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-)
\end{aligned}$$

On définit tout d'abord  $m^0$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
m_{00}^0(x_2, x_1) &= \sum_{x^+, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^0(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot x^+ \\
m_{0-}^0(x_2, \gamma_1) &= \sum_{x^+, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^0(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot x^+ \\
m_{-0}^0(\gamma_2, x_1) &= \sum_{x^+, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^0(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot x^+ \\
m_{--}^0(\gamma_2, \gamma_1) &= \sum_{x^+, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^0(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot x^+
\end{aligned}$$

où les quatre sommes sont sur  $x^+ \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3$  et pour chaque  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\delta_i$  est un mot de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$ . Nous définissons  $m^-$  comme étant une composée d'applications que nous introduisons donc maintenant. On rappelle qu'il y a une identification des complexes  $CF^{n+1-*}(\Sigma_b, \Sigma_a) = CF^*(\Sigma_a, \Sigma_b)$  et on note  $C_*(\Lambda_a^-, \Lambda_b^-)$  le dual de  $C^*(\Lambda_a^-, \Lambda_b^-)$ . On considère une application :

$$f^{(2)}: CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_3^-, \Lambda_1^-)$$

définie sur chaque paire de générateurs par

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(x_2, x_1) &= \sum_{\gamma_{1,3}, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\
f^{(2)}(x_2, \gamma_1) &= \sum_{\gamma_{1,3}, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\
f^{(2)}(\gamma_2, x_1) &= \sum_{\gamma_{1,3}, \delta_i} \#\mathcal{M}_{\Sigma_{231}}^0(x_1; \delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\
f^{(2)}(\gamma_2, \gamma_1) &= 0
\end{aligned}$$

où  $x_2 \in CF(\Sigma_2, \Sigma_3)$ ,  $x_1 \in CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $\gamma_2 \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_2^-)$  et  $\gamma_1 \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$ . Cette application généralise les applications :

$$\begin{aligned} \delta_{0^-}^{\Sigma_{21}} : CF_{n+1-*}(\Sigma_2, \Sigma_1) &= CF^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-) \\ \delta_{0^-}^{\Sigma_{32}} : CF_{n+1-*}(\Sigma_3, \Sigma_2) &= CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_3^-, \Lambda_2^-) \end{aligned}$$

au sens où  $f^{(2)}$  est une application analogue à  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{21}}$  et  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{32}}$  avec deux asymptotes mixtes négatives plutôt qu'une seule. On rappelle que  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{21}}$  est le dual de  $d_{0^-}^{\Sigma_{2,1}}$  :  $C^{*-2}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-) \rightarrow CF^*(\Sigma_2, \Sigma_1)$ , et de la même façon  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{32}}$  est le dual de  $d_{0^-}^{\Sigma_{3,2}}$ . Quand la paire de cobordismes lagrangiens est claire en fonction du contexte ou des asymptotes, on notera  $f^{(1)}$  les applications  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{21}}$  et  $\delta_{0^-}^{\Sigma_{32}}$  qu'on étend à  $CF_{-\infty}$  tout entier en posant que c'est l'identité sur les cordes de Reeb.

En notant  $\mathfrak{C}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-) = C^*(\Lambda_i, \Lambda_j) \oplus C_{n-1-*}(\Lambda_j^-, \Lambda_i^-)$ , on généralise ensuite l'application banane  $b$  rappelée à la section 5.2 par une application  $b^{(2)}$  :

$$b^{(2)} : \mathfrak{C}(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes \mathfrak{C}(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-)$$

prenant en entrées deux cordes mixtes plutôt qu'une seule. Une telle application compte donc des courbes holomorphes avec trois asymptotes mixtes. Pour des cordes  $\gamma_{i,j} \in \mathcal{R}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$  et des mots de cordes de Reeb  $\delta_i$  de  $\Lambda_i^-$ , l'application  $b^{(2)}$  est définie par :

$$\begin{aligned} b^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{1,2}) &= \sum_{\gamma_{3,1}, \delta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1} \\ b^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{2,1}) &= \sum_{\gamma_{3,1}, \delta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1} \\ b^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{1,2}) &= \sum_{\gamma_{3,1}, \delta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1} \\ b^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{2,1}) &= \sum_{\gamma_{3,1}, \delta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{3,2}, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1} \end{aligned}$$

Et remarquons que  $b^{(2)}$  restreinte à  $C^*(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$  correspond au produit (restreint à ce sous-complexe) dans la catégorie d'augmentations de l'entrelacs  $\Lambda_1^- \cup \Lambda_2^- \cup \Lambda_3^-$  muni de l'augmentation diagonale qu'on note  $\varepsilon_{1,2,3}^-$  définie à partir de  $\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-$  et  $\varepsilon_3^-$  (de la même façon qu'on a défini une augmentation de la  $k$ -copie de  $\Lambda$  à partir de  $k$  augmentations de  $\Lambda$  à la section 4.6.3). La figure 6.1 schématise les courbes holomorphes comptées par  $b^{(2)}$ . On peut alors définir la composante  $m^-$  du produit par :

$$m^-(a_2, a_1) = b \circ f^{(2)}(a_2, a_1) + b^{(2)}(f^{(1)}(a_2), f^{(1)}(a_1))$$

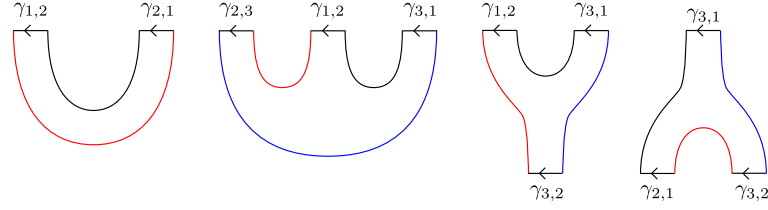


FIGURE 6.1 – Courbes contribuant à  $b(\gamma_{1,2})$ ,  $b^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{1,2})$ ,  $b^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{1,2})$  et  $b^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{2,1})$ .

où  $(a_2, a_1)$  est une paire d'asymptotes dans  $CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ . De façon plus précise, pour chaque type de paire d'asymptote, on a :

$$\begin{aligned} m_{00}^-(x_2, x_1) &= b \circ f^{(2)}(x_2, x_1) + b^{(2)}(\delta_{0-}^{\Sigma_{32}}(x_2), \delta_{0-}^{\Sigma_{21}}(x_1)) \\ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) &= b \circ f^{(2)}(x_2, \gamma_1) + b^{(2)}(\delta_{0-}^{\Sigma_{32}}(x_2), \gamma_1) \\ m_{-0}^-(\gamma_2, x_1) &= b \circ f^{(2)}(\gamma_2, x_1) + b^{(2)}(\gamma_2, \delta_{0-}^{\Sigma_{21}}(x_1)) \\ m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1) &= b^{(2)}(\gamma_2, \gamma_1) \end{aligned}$$

**Remarque 17.** Pour définir  $m^-$ , contrairement à  $m^0$ , on compte donc des configurations de courbes holomorphes à deux étages (dans le cas où au moins une des entrées est un point d'intersection), avec un étage composé d'une ou plusieurs courbes à bord dans la partie compacte des cobordismes, et un autre étage avec une courbe à bord dans la partie cylindrique négative. Ces configurations ressemblent à des bâtiments holomorphes mais n'en sont pas tout à fait car elles ont un ou des étages incomplets. En particulier la condition 3.(b) de la définition 15 n'est pas satisfaite, ce qui implique que de telles configurations sont rigides (on ne peut pas les recoller).

On introduit donc un nouveau type de configuration brisée :

**Définition 18.** On appellera *bâtiment holomorphe incomplet* un ensemble de courbes holomorphes obtenues à partir d'un bâtiment holomorphe (Définitions 14 et 15) auquel on a ôté une ou plusieurs courbes holomorphes, dans un ou plusieurs étages, de telle sorte que :

1. au moins une des courbes enlevées ne soit pas un cylindre trivial,
2. rajouter des cylindres triviaux ne soit pas suffisant pour obtenir un bâtiment holomorphe.

Lorsqu'on parlera de bâtiments holomorphes sans l'adjectif "incomplets", cela signifie qu'on se réfère à la définition 15 (ou 14 pour ceux à bord sur des cylindres), et il nous arrivera parfois de les qualifier de *complets*. Sur la figure 6.2, on a schématisé à gauche un exemple de courbes formant un bâtiment holomorphe incomplet, alors que la courbe à droite n'en forment pas un car en rajoutant un cylindre trivial  $\mathbb{R} \times \gamma$

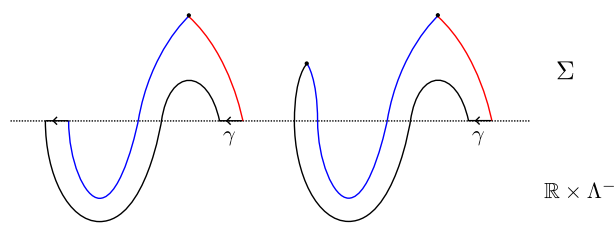


FIGURE 6.2 – À gauche : exemple de bâtiment holomorphe incomplet ; à droite : courbes qui ne forment pas un bâtiment holomorphe incomplet.

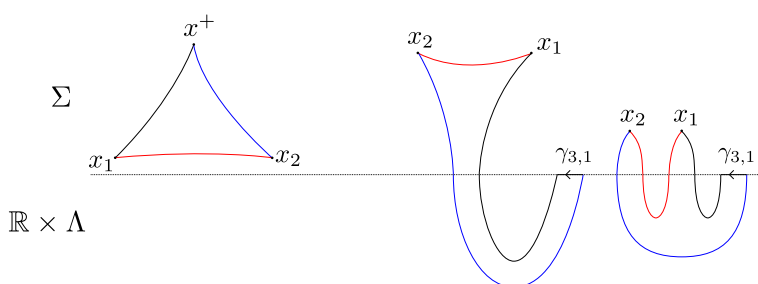


FIGURE 6.3 – À gauche : courbe contribuant à  $m_{00}^0(x_2, x_1)$ , à droite : courbes contribuant à  $m_{00}^-(x_2, x_1)$ .

dans la partie cylindrique négative on obtient un bâtiment holomorphe complet. L'application  $m^-$  compte donc des bâtiments holomorphes incomplets, et les figures 6.3, 6.4, 6.5 et 6.6 schématisent l'ensemble des types de courbes et bâtiments holomorphes incomplets que compte  $\mathfrak{m}_2$ .

**Théorème 14.** *Pour tout  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  cobordismes lagrangiens transverses de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$  pour  $i = 1, 2, 3$ , avec  $\Lambda_i^\pm$  des sous-variétés legendriennes dans  $Y$ , et pour toutes augmentations  $\varepsilon_i^-$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  pour  $i = 1, 2, 3$ , l'application*

$$\mathfrak{m}_2: CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_3)$$

satisfait

$$\partial_{-\infty} \circ \mathfrak{m}_2(-, -) + \mathfrak{m}_2(\partial_{-\infty}, -) + \mathfrak{m}_2(-, \partial_{-\infty}) = 0 \quad (6.1)$$

**Remarque 18.** Dans le cas où  $\Lambda_i^- = \emptyset$  pour tout  $i$  et que  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  sont de petites perturbations hamiltonniennes de  $\Sigma_1$  telles que les paires  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $(\Sigma_2, \Sigma_3)$  et  $(\Sigma_1, \Sigma_3)$  soient dirigées, le produit  $\mathfrak{m}_2$  ci-dessus retrouve le produit cup sur la cohomologie des remplissages. En effet rappelons en particulier que par le point 4 de la proposition 4 on a alors  $HF_*(\Sigma_1, \Sigma_2) \simeq H_{n+1-*}(\bar{\Sigma}_1, \partial_- \bar{\Sigma}_1) \simeq H^*(\bar{\Sigma}_1, \partial_+ \bar{\Sigma}_1)$ .

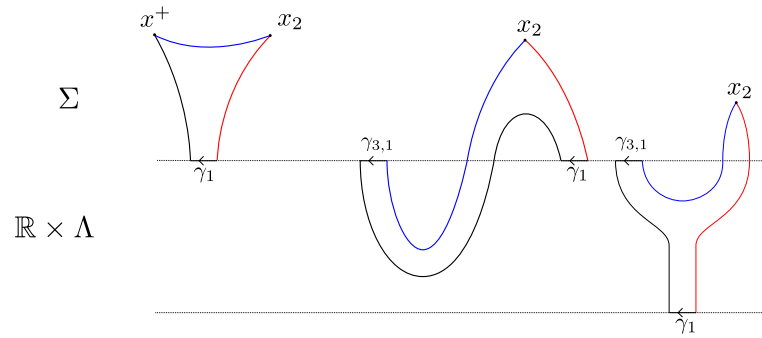


FIGURE 6.4 – À gauche : courbe contribuant à  $m_{0-}^0(x_2, \gamma_1)$ , à droite : courbes contribuant à  $m_{0-}^-(x_2, \gamma_1)$

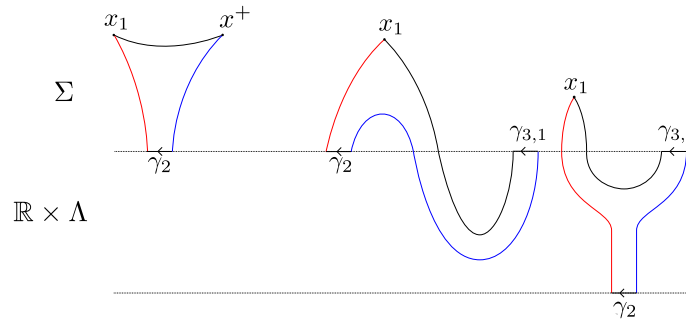


FIGURE 6.5 – À gauche : courbe contribuant à  $m_{-0}^0(\gamma_2, x_1)$ , à droite : courbes contribuant à  $m_{-0}^-(\gamma_2, x_1)$

### 6.2.2 Dégénérescences des courbes holomorphes.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que  $m_2$  satisfait bien la relation de produit (6.1). Pour cela, nous allons voir que la relation de produit est satisfaite quelle que soit la paire d'asymptotes choisies. On obtient donc 8 relations à vérifier qui sont les suivantes :

1. Pour la paire  $(x_2, x_1) \in CF(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  :

- $$m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1)) + m_{00}^0(d_{00}(x_2), x_1) + d_{00} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) + m_{0-}^0(x_2, d_{-0}(x_1)) + m_{-0}^0(d_{-0}(x_2), x_1) + d_{-0} \circ m_{00}^-(x_2, x_1) = 0 \quad (6.2)$$

- $$m_{00}^-(d_{00}(x_2), x_1) + m_{00}^-(x_2, d_{00}(x_1)) + m_{-0}^-(d_{-0}(x_2), x_1) + m_{-0}^-(x_2, d_{-0}(x_1)) + d_{-0} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) + d_{--} \circ m_{00}^-(x_2, x_1) = 0 \quad (6.3)$$

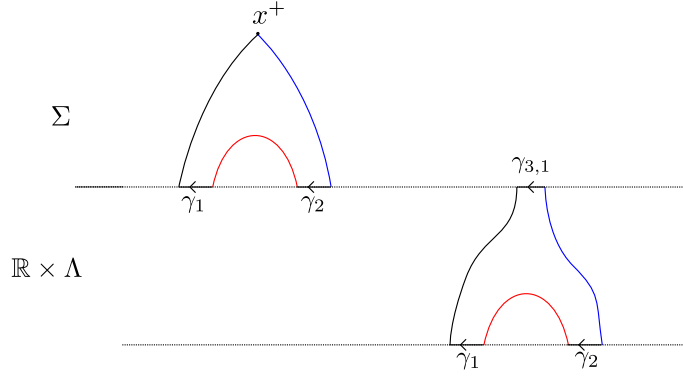


FIGURE 6.6 – À gauche : courbe contribuant à  $m_{--}^0(\gamma_2, \gamma_1)$ , à droite : courbe contribuant à  $m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1)$ .

2. Pour la paire  $(x_2, \gamma_1) \in CF(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$  :

- $m_{00}^0(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + m_{0-}^0(d_{00}(x_2), \gamma_1) + d_{00} \circ m_{0-}^0(x_2, \gamma_1)$   
 $+ m_{0-}^0(x_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^0(d_{-0}(x_2), \gamma_1) + d_{0-} \circ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) = 0$  (6.4)

- $m_{00}^-(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + m_{0-}^-(d_{00}(x_2), \gamma_1) + m_{0-}^-(x_2, d_{--}(\gamma_1))$   
 $+ m_{--}^-(d_{-0}(x_2), \gamma_1) + d_{-0} \circ m_{0-}^0(x_2, \gamma_1) + d_{--} \circ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) = 0$  (6.5)

3. Pour la paire  $(\gamma_2, x_1) \in C(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  :

- $m_{-0}^0(\gamma_2, d_{00}(x_1)) + m_{00}^0(d_{0-}(\gamma_2), x_1) + d_{00} \circ m_{-0}^0(\gamma_2, x_1)$   
 $+ m_{--}^0(\gamma_2, d_{-0}(x_1)) + m_{-0}^0(d_{--}(\gamma_2), x_1) + d_{0-} \circ m_{-0}^-(\gamma_2, x_1) = 0$  (6.6)

- $m_{-0}^-(\gamma_2, d_{00}(x_1)) + m_{00}^-(d_{0-}(\gamma_2), x_1) + m_{-0}^-(\gamma_2, d_{-0}(x_1))$   
 $+ m_{--}^-(d_{--}(\gamma_2), x_1) + d_{-0} \circ m_{-0}^0(\gamma_2, x_1) + d_{--} \circ m_{-0}^-(\gamma_2, x_1) = 0$  (6.7)

4. Pour la paire  $(\gamma_2, \gamma_1) \in C(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-) \otimes C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)$  :

- $m_{-0}^0(\gamma_2, d_{0-}(\gamma_1)) + m_{0-}^0(d_{0-}(\gamma_2), \gamma_1) + d_{00} \circ m_{--}^0(\gamma_2, \gamma_1)$   
 $+ m_{--}^0(\gamma_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^0(d_{--}(\gamma_2), \gamma_1) + d_{0-} \circ m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1) = 0$  (6.8)

- $m_{--}^-(\gamma_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^-(d_{--}(\gamma_2), \gamma_1) + d_{--} \circ m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1) = 0$  (6.9)

Pour obtenir ces relations, nous étudions le type de bâtiments holomorphes que comptent chaque terme apparaissant dans ces relations. Les composantes de ces bâtiments holomorphes sont des courbes rigides car la différentielle de Cthulhu et le produit sont définis en comptant des courbes holomorphes rigides, c'est-à-dire d'indice 0 si les courbes sont à bord sur des cobordismes non cylindriques et d'indice 1 si les courbes sont à bord sur des cylindres. Les résultats de compacité et recollement impliquent que ces courbes brisées sont en bijection avec les éléments du bord de la compactification des espaces de modules correspondants. Rappelons ici plusieurs propriétés que satisfont les bâtiments holomorphes que l'on va considérer :

1. chaque composante d'un bâtiment holomorphe doit avoir une asymptote positive pour des raisons d'énergie (section 3.6.1),
2. par régularité de la structure presque complexe, chaque composante a un indice de Fredholm non négatif,
3. la relation (5.1) doit être satisfaite : si  $u_1, \dots, u_k$  sont les composantes d'un tel bâtiment holomorphe, l'indice de la courbe recollée  $u$  est donné par  $\text{ind}(u) = \nu + \sum_i \text{ind}(u_i)$ .

Pour alléger un peu les notations par la suite, on ne réécrira pas toujours les étiquettes lagrangiennes pour les espaces de modules.

**RELATION (6.2) :** Le premier terme de cette relation est  $m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1))$ . Pour tout point d'intersection  $x^+ \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3$ , le terme  $\langle m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1)), x^+ \rangle$  est défini en comptant des bâtiments holomorphes composés de deux courbes d'indice 0 à bord sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ , qui se recollent au niveau d'un point d'intersection  $q$ . Une des courbes contribue à  $\langle d_{00}(x_1), q \rangle$  et l'autre contribue à  $\langle m_{00}^0(x_2, q), x^+ \rangle$  (voir figure 6.7 où les chiffres dans les courbes correspondent à l'indice de Fredholm de chaque courbe). En

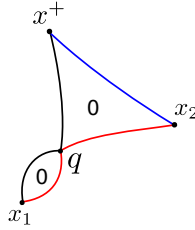


FIGURE 6.7 – Bâtiments holomorphes comptés par  $m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1))$ .

recollant ces deux courbes, on obtient une courbe d'indice 1 dans l'espace de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ . On en déduit que les bâtiments holomorphes que comptent  $m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1))$  sont des éléments du bord de la compactification de cet espace de modules. On peut de même vérifier qu'en fait chaque terme de la relation (6.2) est défini en comptant des bâtiments holomorphes qui en se recollant donnent des courbes dans  $\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ . On étudie donc toutes les dégénérescences de courbes dans cet espace de modules afin de déterminer tous les éléments du bord de la compactification de cet espace. Une courbe dans cet espace de modules peut se briser :

1. au niveau d'un point d'intersection dans  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , ou  $\Sigma_2 \cap \Sigma_3$ , ou  $\Sigma_3 \cap \Sigma_1$ ,
2. au niveau de corde(s) de Reeb en un bâtiment holomorphe à deux étages, un étage contenant des courbes d'indice 0 à bord sur la partie compacte des cobordismes, l'autre étage contenant une courbe d'indice 1 à bord sur  $\mathbb{R} \times (\Lambda_1^- \cup \Lambda_2^- \cup \Lambda_3^-)$ .

**Remarque 19.** Dans le deuxième cas, si la brisure a lieu au niveau d'une corde pure  $\gamma \in \mathcal{R}(\Lambda_i^-)$  pour un  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on l'appelle une  $\partial$ -brisure (voir figure 6.8). Algébriquement, une telle configuration brisée contribue à  $\partial^i(\gamma)$ , où  $\partial^i$  est la différentielle de l'homologie de contact legendrienne de  $\Lambda_i^-$ . Cependant, dans toutes les applications considérées qui sont définies par un compte d'espaces de modules, les cordes pures des  $\Lambda_i^-$  sont augmentées par les augmentations  $\varepsilon_i^-$ , et par définition d'une augmentation  $\varepsilon_i^- \circ \partial^i = 0$ , donc finalement la contribution des  $\partial$ -brisures est nulle. On note  $\bigcup \overline{\mathcal{M}}^\partial(x^+, \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$  la réunion de toutes les  $\partial$ -brisures obtenues comme dégénérescences de courbes dans  $\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ .

Le bord de la compactification de  $\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$  se décompose alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}^1_{\Sigma_{123}}(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^\partial(x^+, \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \\ &\quad \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \delta'_1 \delta''_1 = \delta_1, \delta'_2 \delta''_2 = \delta_2}} \mathcal{M}(x^+; \delta'_1, q, \delta''_2, x_2, \delta_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{12}}(q; \delta''_1, x_1, \delta'_2) \\ &\quad \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_2 \delta''_2 = \delta_2, \delta'_3 \delta''_3 = \delta_3}} \mathcal{M}(x^+; \delta_1, x_1, \delta'_2, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{23}}(q; \delta''_2, x_2, \delta'_3) \\ &\quad \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_1 \delta''_1 = \delta_1, \delta'_3 \delta''_3 = \delta_3}} \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta'_3) \\ &\quad \bigcup \mathcal{M}(x^+; \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta''_2, x_2, \delta_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{12}}(\xi_{2,1}; \delta''_1, \xi_{1,2}, \delta''_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{21}}(x_1; \delta'_2, \xi_{1,2}, \delta''_1) \\ &\quad \bigcup \mathcal{M}(x^+; \delta_1, x_1, \delta'_2, \xi_{3,2}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{23}}(\xi_{3,2}; \delta''_2, \xi_{2,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{32}}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta''_2) \\ &\quad \bigcup \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(\xi_{3,1}; \delta''_1, \xi_{1,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{1,3}, \delta''_1, x_1, \delta_2) \\ &\quad \bigcup \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{3,1}; \delta''_1, \xi_{1,2}, \delta''_2, \xi_{2,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{21}}(x_1; \delta'_2, \xi_{1,2}, \delta''_1) \\ &\quad \quad \quad \times \mathcal{M}_{\Sigma_{32}}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta''_2) \end{aligned}$$

où les  $\delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$  et où les quatre dernières réunions sont respectivement pour

- $\xi_{1,2} \in \mathcal{R}(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-), \xi_{2,1} \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-), \delta'_1 \delta''_1 \delta'''_1 = \delta_1, \delta'_2 \delta''_2 \delta'''_2 = \delta_2$
- $\xi_{3,1} \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_1^-), \xi_{1,3} \in \mathcal{R}(\Lambda_1^-, \Lambda_3^-), \delta'_1 \delta''_1 \delta'''_1 = \delta_1, \delta'_3 \delta''_3 \delta'''_3 = \delta_3$
- $\xi_{3,2} \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_2^-), \xi_{2,3} \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-), \delta'_2 \delta''_2 \delta'''_2 = \delta_2, \delta'_3 \delta''_3 \delta'''_3 = \delta_3$
- $\xi_{3,1} \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_1^-), \xi_{2,3} \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_3^-), \xi_{1,2} \in \mathcal{R}(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-),$   
et  $\delta'_2 \delta''_2 \delta'''_2 = \delta_2, \delta'_3 \delta''_3 \delta'''_3 = \delta_3$

La figure 6.9 schématise les différentes configurations possibles décrites ci-dessus, sans les  $\partial$ -brisures car on ne représente pas les cordes pures pour ne pas alourdir la

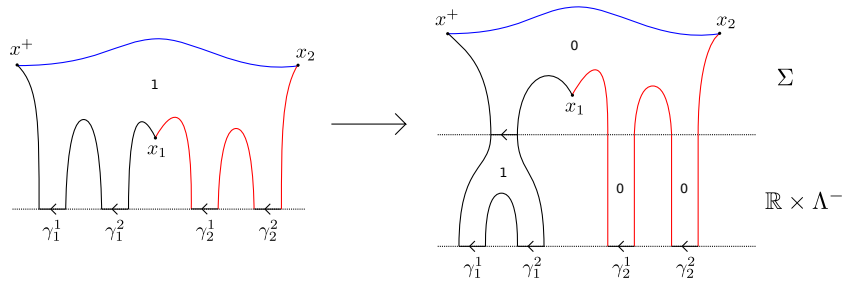


FIGURE 6.8 – Exemple de  $\partial$ -brisure d’une courbe dans  $\mathcal{M}^1(x^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ .

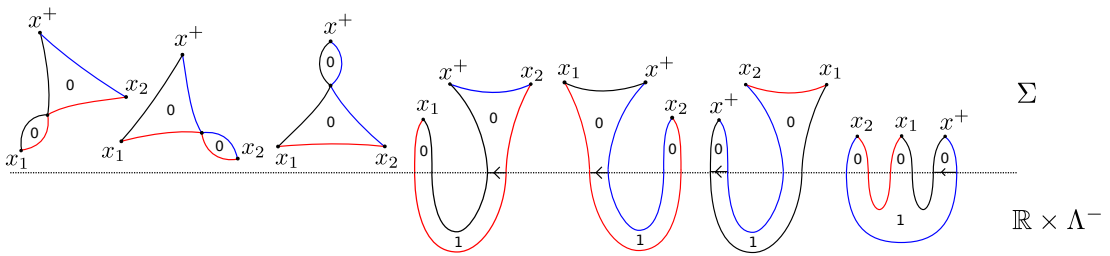


FIGURE 6.9 – Courbes apparaissant dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(x^+; \delta_1^-, x_1, \delta_2^-, x_2, \delta_3^-)$ .

figure. À partir de ces éléments dans le bord de la compactification, on peut retrouver la relation algébrique (6.2). En effet, le bord de la compactification de l’espace de modules de dimension 1 ci-dessus consiste en des courbes brisées dont les différentes composantes sont d’indice 0 (ou 1 si dans la partie cylindrique) et qui sont comptées par le produit ou la différentielle de Cthulhu. De plus, le bord d’une variété de dimension 1 est un ensemble de points, qui arrivent en nombre pair donc qui vaut 0 modulo 2. On trouve donc la relation (6.2) :

$$m_{00}^0(x_2, d_{00}(x_1)) + m_{00}^0(d_{00}(x_2), x_1) + d_{00} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) + m_{0-}^0(x_2, d_{-0}(x_1)) + m_{-0}^0(d_{-0}(x_2), x_1) + d_{0-} \circ m_{00}^-(x_2, x_1) = 0$$

où chaque terme correspond dans l’ordre à une courbe de la figure 6.9 sauf pour le dernier terme  $d_{0-} \circ m_{00}^-(x_2, x_1)$  qui compte deux types distincts de bâtiments holomorphes, les deux plus à droite de la figure 6.9.

**RELATION (6.3) :** Le premier terme de la relation (6.3) est  $m_{00}^-(d_{00}(x_2), x_1)$ . Pour toute corde  $\gamma_{3,1} \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_1^-)$ , le coefficient  $\langle m_{00}^-(d_{00}(x_2), x_1), \gamma_{3,1} \rangle$  est défini en comptant des bâtiments holomorphes incomplets de deux types différents comme on l’a vu à la section 6.2.1 pour la définition de  $m^-$ . Ces courbes sont représentées sur la figure 6.10. Ce sont des bâtiments holomorphes incomplets à deux niveaux dont le niveau central est un bâtiment holomorphe (complet) qui donc se recolle. Les courbes

dans le niveau central se recollent ainsi au niveau d'un point d'intersection pour obtenir des bâtiments holomorphes incomplets respectivement dans les produits suivants :

- $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda^-}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$
- $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda^-}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

Comme pour obtenir la relation précédente, nous allons donc étudier les dégénéres-

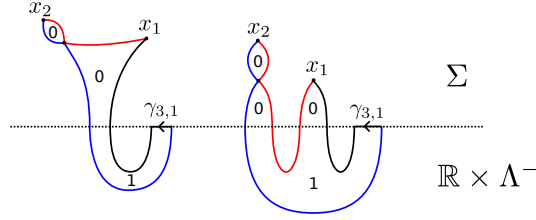


FIGURE 6.10 – Bâtiments holomorphes contribuant à  $\langle m_{00}^-(d_{00}(x_2), x_1), \gamma_{3,1} \rangle$ .

cences de courbes dans ces produits là. Cependant, ce ne sont pas les seuls produits à étudier. En effet, le second terme de la relation (6.3) est  $m_{00}^-(x_2, d_{00}(x_1))$ , et de façon analogue au premier terme, les bâtiments holomorphes incomplets contribuant au coefficient  $\langle m_{00}^-(x_2, d_{00}(x_1)), \gamma_{3,1} \rangle$  possèdent un niveau central qui se recolle pour obtenir des bâtiments holomorphes incomplets dans les produits suivants :

- $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$
- $\mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

Considérons maintenant le troisième terme de la relation 6.3 qui s'écrit comme la somme  $m_{-0}^-(d_{-0}(x_2), x_1) = b \circ f^{(2)}(d_{-0}(x_2), x_1) + b^{(2)}(d_{-0}(x_2), f^{(1)}(x_1))$ . Le premier terme de cette somme compte des bâtiments holomorphes incomplets de taille  $2|1|0$  tels que les deux étages supérieurs forment un bâtiment holomorphe de taille  $1|1|0$ . Le terme  $b^{(2)}(d_{-0}(x_2), f^{(1)}(x_1))$  compte aussi des bâtiments incomplets de taille  $2|1|0$  mais cette fois dont les deux étages inférieurs forment un bâtiment holomorphe de taille 2 à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^-$ . En recollant ces bâtiments holomorphes, on obtient des bâtiments incomplets dans les produits suivants (voir figure 6.11) :

- $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$
- $\mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

De façon analogue, le quatrième terme de la relation (6.3),  $m_{0-}^-(x_2, d_{-0}(x_1))$ , compte des bâtiments incomplets qui se recollent en des bâtiments incomplets dans des produits d'espaces de modules déjà évoqués qui sont :

- $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$
- $\mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

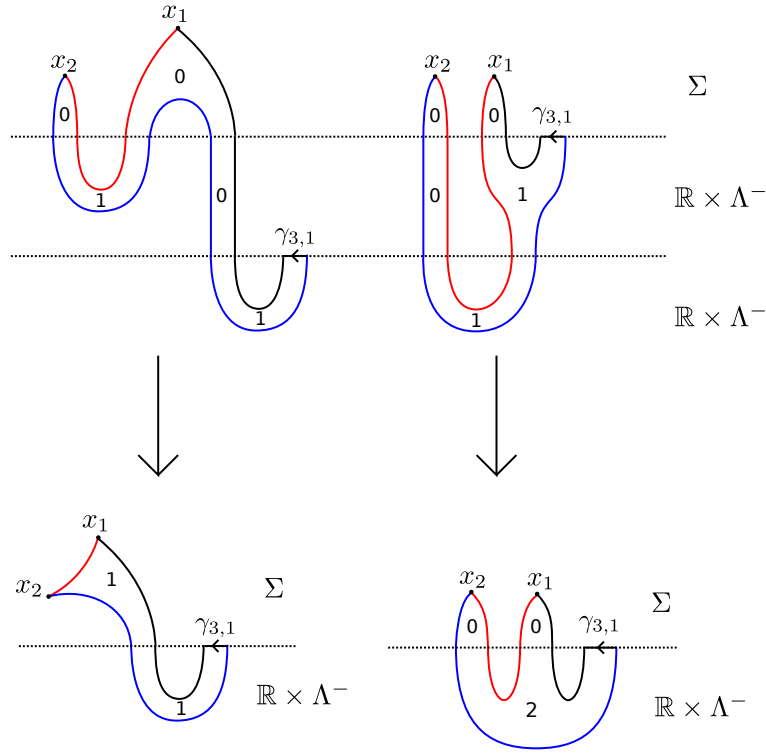


FIGURE 6.11 – Bâtiments holomorphes contribuant à  $\langle m_{-0}^-(d_{-0}(x_2), x_1), \gamma_{3,1} \rangle$  et leurs recollements.

Le cinquième terme est  $d_{-0} \circ m_{00}^0(x_2, x_1)$ . Le niveau central des bâtiments incomplets contribuant à ce terme est un bâtiment holomorphe complet composé de deux courbes qui se recollent au niveau d'un point d'intersection. Après recollement, on a des bâtiments incomplets dans  $\mathcal{M}_{\Sigma}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$ .

Enfin, le sixième et dernier terme de la relation,  $d_{--} \circ m_{00}^-(x_2, x_1)$ , compte des bâtiments incomplets de taille  $2|1|0$  de deux types, dont les deux étages inférieurs forment des bâtiments holomorphes complets à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^-$ . En recollant les étages complets des bâtiments, on obtient des bâtiments incomplets dans les produits :

- $\mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$
- $\mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

Finalement, d'après ce que nous venons de voir, pour obtenir la relation 6.3 il nous faut donc étudier le bord de la compactification de cinq types de produits d'espaces de

modules qui sont les suivants :

$$\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.10)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.11)$$

$$\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.12)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.13)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.14)$$

Dans ces produits, les espaces de modules de dimension 0 sont compacts, les espaces de dimension 1 de courbes à bord sur la partie cylindrique négative des cobordismes, une fois quotientés par l'action des translations, sont compacts. Par contre, les espaces de modules de courbes d'indice 1 à bord sur des parties non cylindriques des cobordismes (c'est le cas dès qu'une des asymptotes est un point d'intersection par exemple) ne sont pas compacts. De même, les espaces de modules de dimension 2 de courbes à bord dans les bouts cylindriques, même une fois quotientés par  $\mathbb{R}$  ne sont pas compacts non plus mais de dimension 1. Par les résultats de compacité et recollement, on sait que ces espaces de modules de courbes de dimension 1 se compactifient et que le bord des compactifications est en bijection avec les bâtiments holomorphes ayant les mêmes asymptotes et dont les composantes sont rigides. On décrit donc maintenant les espaces suivants :

1.  $\partial \overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2)$ ,
2.  $\partial \overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$ ,
3.  $\partial \overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2)$ ,
4.  $\partial \overline{\mathcal{M}}^1(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1)$ ,
5.  $\partial \overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$

ce qui permettra alors de décrire l'ensemble des courbes brisées apparaissant comme dégénérescences de bâtiments incomplets dans les produits (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) et (6.14), et donc le bord de la compactification de ces produits.

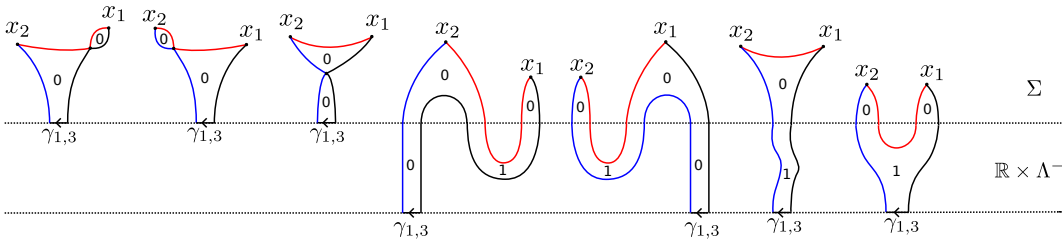


FIGURE 6.12 – Bâtiments holomorphes dans le bord de  $\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2)$ .

1.  $\overline{\partial\mathcal{M}^1}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2)$  : Les bâtiments holomorphes dans cet espace se décrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial\mathcal{M}^1}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}^\partial}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \delta'_1 \delta''_1, \delta'_2 \delta''_2}} \mathcal{M}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, x_1, \delta'_2) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_2 \delta''_2, \delta'_3 \delta''_3}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta'_2) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_1 \delta''_1, \delta'_3 \delta''_3}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, q, \delta''_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1) \\
&\bigcup_{\substack{\xi_{2,1}, \xi_{1,2} \\ \delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta'''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}; \delta''_1, \xi_{1,2}, \delta''_2) \times \mathcal{M}(x_1; \delta'_2, \xi_{1,2}, \delta'''_1) \\
&\bigcup_{\substack{\xi_{2,3}, \xi_{3,2} \\ \delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta'''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,3}; \delta''_3, \xi_{3,2}, \delta''_2) \times \mathcal{M}(x_1; \delta'_2, \xi_{3,2}, \delta'''_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) \\
&\bigcup_{\substack{\xi_{1,3} \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{1,3}, \delta''_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}(\xi_{1,3}; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1) \\
&\bigcup_{\substack{\xi_{2,3}, \xi_{1,2}, \delta'_1, \delta''_1 \\ \delta'_3, \delta''_3, \delta'_2, \delta''_2, \delta'''_2}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta'''_2) \times \mathcal{M}(x_1; \delta'_2, \xi_{1,2}, \delta''_1) \times \mathcal{M}(\xi_{2,3}, \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1, \xi_{1,2}, \delta'''_2)
\end{aligned}$$

Sur la figure 6.12 sont représentés les différents types de bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2)$ .

2.  $\overline{\partial\mathcal{M}^2}(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$  : les bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification d'un espace de modules de bananes sont de deux types :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial\mathcal{M}^2}(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}^\partial}(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \\
&\bigcup_{\xi_{3,1}, \xi'_i, \xi''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \xi'_1, \xi_{3,1}, \xi''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{3,1}; \xi''_1, \gamma_{1,3}, \xi'_3) \\
&\bigcup_{\xi_{1,3}, \xi'_i, \xi''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \xi'_1, \xi_{1,3}, \xi''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{1,3}; \xi'_3, \xi_{1,3}, \xi'_1)
\end{aligned}$$

avec  $\xi_{i,j} \in \mathcal{R}(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$ , et les  $\xi'_i, \xi''_i$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$  avec  $\xi'_i \xi''_i = \xi_i$ . La figure 6.13 schématise les bâtiments qui en se recollant donnent des bananes. Les points 1. et 2. permettent donc de connaître tous les types de courbes brisées dans

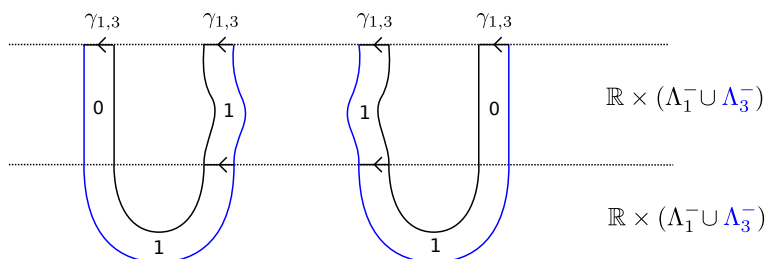


FIGURE 6.13 – Courbes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,3}, \delta_3)$ .

le bord de la compactification des produits (6.10) et (6.11). Sur la figure 6.14 on a illustré les bâtiments holomorphes incomplets correspondants, les sept premiers sont dans

$$\partial \overline{\mathcal{M}^1}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.15)$$

et les deux en bas à droite sont dans

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2) \times \partial \overline{\mathcal{M}^2}(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.16)$$

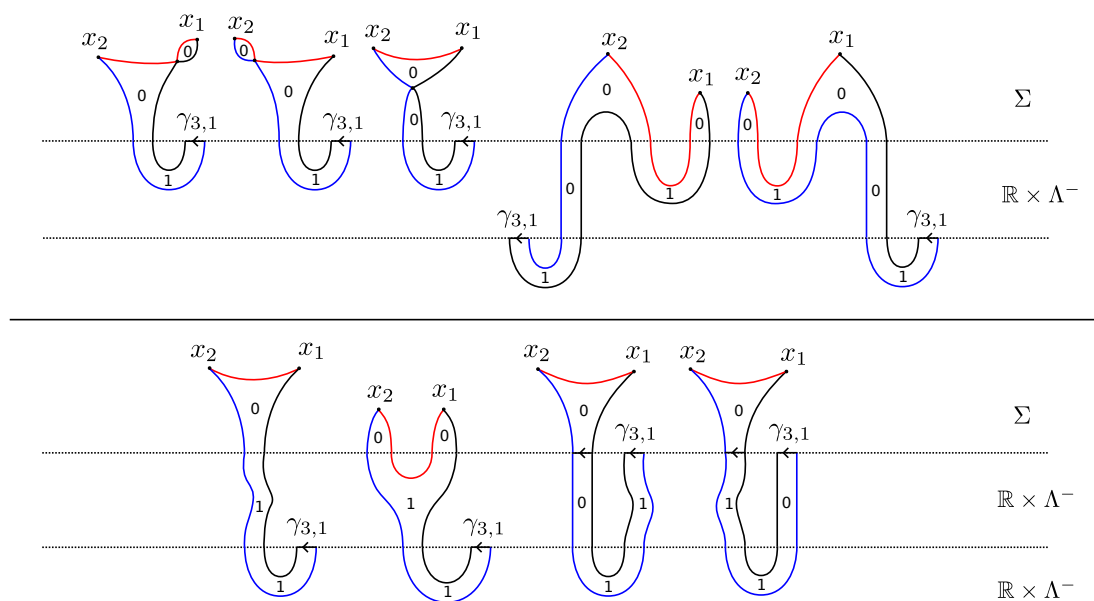


FIGURE 6.14 – Bâtiments holomorphes incomplets dans les produits (6.15) et (6.16).

**Remarque 20.** Dans le bas de la figure 6.14, deux des bâtiments incomplets se compensent : celui se trouvant le plus à gauche se compense avec celui qui est tout à droite.

Le premier apparaît en faisant dégénérer une courbe dans  $\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, x_1, \delta_2)$ , et le deuxième en faisant dégénérer une banane dans  $\mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$ . Ces deux bâtiments incomplets correspondent donc à des configurations géométriques différentes car l'un est dans le bord d'un certain produit d'espaces de modules (6.10), et l'autre dans le bord d'un autre produit d'espaces de modules (6.11). Toutefois, ce sont deux configurations qui diffèrent seulement d'un cylindre trivial  $\mathbb{R} \times \gamma_{3,1}$  donc algébriquement elles se compensent (sur  $\mathbb{Z}_2$ ), elles sont comptées par l'application  $b \circ \delta_{--} \circ f^{(2)}(x_2, x_1)$ , où  $\delta_{--}$  est le dual de  $d_{--}$ .

Afin de décrire l'ensemble des dégénérescences obtenues par une relation algébrique, nous introduisons une nouvelle application :

$$\Delta^{(2)} : \mathfrak{C}_{n-1-*}(\Lambda_3^-, \Lambda_2^-) \times \mathfrak{C}_{n-1-*}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_3^-, \Lambda_1^-)$$

définie sur les paires de générateurs par :

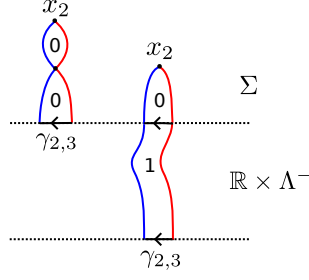
$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{1,2}) &= \sum_{\gamma_{1,3}} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{2,3}; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\ \Delta^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{2,1}) &= \sum_{\gamma_{1,3}} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{2,3}; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\ \Delta^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{1,2}) &= \sum_{\gamma_{1,3}} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{3,2}; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{1,3} \\ \Delta^{(2)}(\gamma_{3,2}, \gamma_{2,1}) &= 0 \end{aligned}$$

Le compte modulo 2 de l'ensemble des bâtiments holomorphes incomplets apparaissant dans les produits (6.15) et (6.16) vaut 0. D'autre part, ces courbes brisées contribuent aussi à des composées d'applications qu'on a déjà définies. On obtient alors la relation algébrique :

$$\begin{aligned} b \circ f^{(2)}(x_2, d_{00}(x_1)) + b \circ f^{(2)}(d_{00}(x_2), x_1) + d_{-0} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) \\ + b \circ f^{(2)}(x_2, d_{-0}(x_1)) + b \circ f^{(2)}(d_{-0}(x_2), x_1) + b \circ \Delta^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1)) \\ + d_{--} \circ b \circ f^{(2)}(x_2, x_1) = 0 \quad (6.17) \end{aligned}$$

3.  $\partial \overline{\mathcal{M}^1}(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2)$  : Les bâtiments holomorphes dans cet espace sont du type suivant (figure 6.15).

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}^1}(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}^1}^\partial(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \\ &\quad \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta_i', \delta_i''}} \mathcal{M}(x_2; \delta_3', q, \delta_2'') \times \mathcal{M}(q; \delta_3'', \gamma_{2,3}, \delta_2') \\ &\quad \bigcup_{\xi_{2,3}, \delta_i', \delta_i''} \mathcal{M}(x_2; \delta_3', \xi_{2,3}, \delta_2'') \times \mathcal{M}(\xi_{2,3}; \delta_3'', \gamma_{2,3}, \delta_2') \end{aligned}$$

FIGURE 6.15 – Bâtiments holomorphes dans  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2)$ .

4.  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1)$  : cet espace est exactement du même type que le précédent.
5.  $\partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$  : les dégénérescences de bananes généralisées sont décrites ci-dessous.

$$\begin{aligned} \partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^0(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \\ &\bigcup_{\xi_{1,2}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{1,2}, \zeta''_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{1,2}; \zeta'_2, \xi_{1,2}, \zeta''_1) \\ &\bigcup_{\xi_{2,3}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta'_2, \xi_{2,3}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{2,3}; \zeta'_3, \xi_{2,3}, \zeta''_2) \\ &\bigcup_{\xi_{3,1}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{3,1}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{3,1}; \zeta''_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta'_3) \\ &\bigcup_{\xi_{2,1}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{2,1}, \zeta''_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{1,2}; \zeta'_2, \xi_{2,1}, \zeta''_1) \\ &\bigcup_{\xi_{3,2}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{2,1}, \zeta'_2, \xi_{3,2}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{2,3}; \zeta'_3, \xi_{3,2}, \zeta''_2) \\ &\bigcup_{\xi_{1,3}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{1,3}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{1,3}; \zeta''_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta'_3) \end{aligned}$$

et les configurations brisées correspondantes sont représentées sur la figure 6.16. Par les points 3., 4. et 5., on connaît maintenant tous les types de bâtiments holomorphes incomplets dans le bord de la compactification des produits (6.12), (6.13) et (6.14), c'est-à-dire dans :

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \\ &\bigcup \mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \\ &\bigcup \mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \times \partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \end{aligned}$$

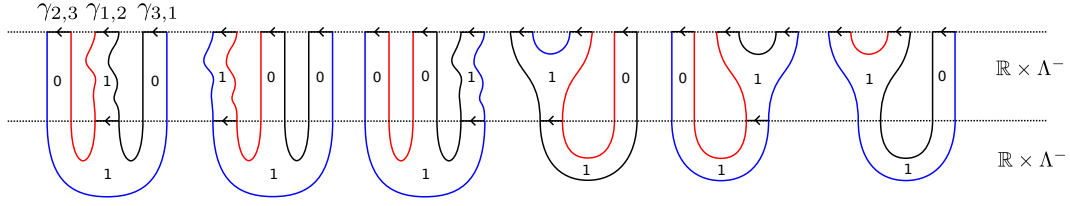


FIGURE 6.16 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{1,2}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3)$ .

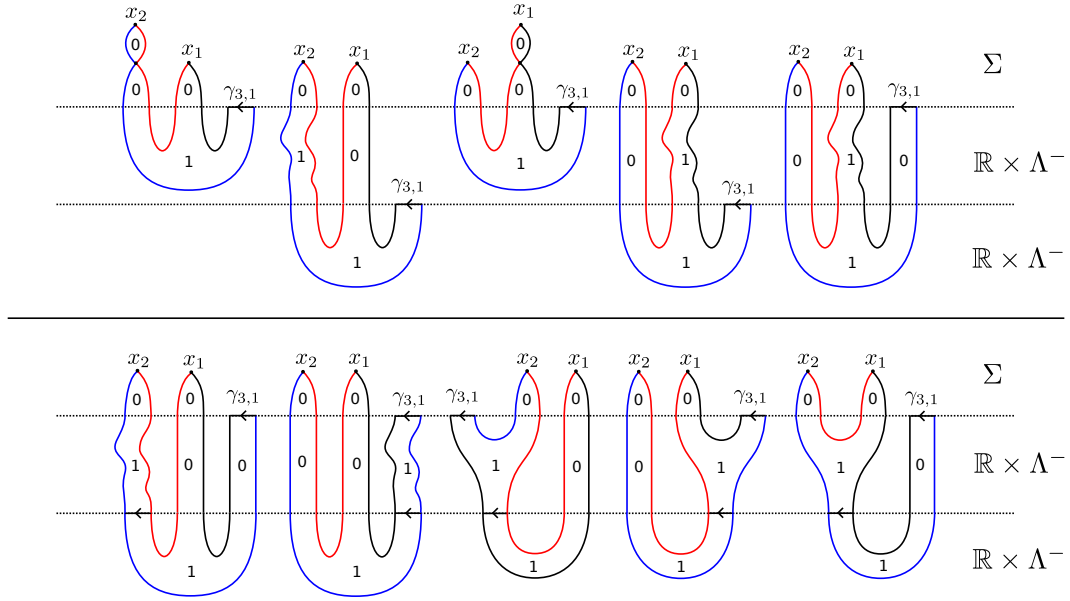


FIGURE 6.17 – Bâtiments holomorphes incomplets dans le bord de la compactification des produits (6.12), (6.13) et (6.14).

Ils sont représentés sur la figure 6.17 : les deux premiers sont dans le bord de la compactification de (6.12), les deux suivants dans le bord de la compactification de (6.13), et enfin les six autres dans le bord de la compactification de (6.14). Comme dans le cas précédent (Remarque 20), plusieurs bâtiments incomplets se compensent. Deux d’entre eux, qui diffèrent par un cylindre trivial au dessus de  $\gamma_{3,1}$  contribuent à  $b^{(2)}(\delta_{--} \circ f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1))$ , et deux autres, différant aussi d’un cylindre trivial au dessus de  $\gamma_{3,1}$  contribuent à  $b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), \delta_{--} \circ f^{(1)}(x_1))$ . On obtient donc cette fois-ci la relation :

$$\begin{aligned}
 & b^{(2)}(f^{(1)} \circ d_{00}(x_2), f^{(1)}(x_1)) + b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)} \circ d_{00}(x_1)) \\
 & + d_{--} \circ b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1)) + b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), d_{-0}(x_1)) + b^{(2)}(d_{-0}(x_2), f^{(1)}(x_1)) \\
 & \qquad \qquad \qquad + b \circ \Delta^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1)) = 0 \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

En regroupant les relations (6.17) et (6.18), on trouve enfin la relation (6.3) :

$$m_{00}^-(d_{00}(x_2), x_1) + m_{00}^-(x_2, d_{00}(x_1)) + m_{-0}^-(d_{-0}(x_2), x_1) \\ + m_{0-}^-(x_2, d_{-0}(x_1)) + d_{-0} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) + d_{--} \circ m_{00}^-(x_2, x_1) = 0$$

et le terme  $b \circ \Delta^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1))$  apparait deux fois (donc s'annule modulo 2) car il compte deux types de bâtiments holomorphes incomplets qui se compensent, l'un dans le bord de la compactification de (6.10) et l'autre dans le bord de la compactification de (6.14).

**RELATION (6.4) :** Cette relation est très analogue à la relation (6.2) sauf qu'une des trois asymptotes mixtes est une corde de Reeb. Chaque terme dans (6.4) compte des bâtiments holomorphes qui se recollent en des courbes d'indice 1 dans l'espace de modules  $\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ . Pour déterminer la relation, on étudie donc les courbes dans le bord de la compactification de cet espace de modules. On a :

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}_{\Sigma_{123}}^1(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3) = & \bigcup \overline{\mathcal{M}}^\partial(x^+, \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \\ & \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \delta'_1 \delta''_1 = \delta_1, \delta'_2 \delta''_2 = \delta_2}} \mathcal{M}(x^+; \delta'_1, q, \delta''_2, x_2, \delta_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{12}}(q; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ & \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_2 \delta''_2 = \delta_2, \delta'_3 \delta''_3 = \delta_3}} \mathcal{M}(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta'_2, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{23}}(q; \delta''_2, x_2, \delta'_3) \\ & \bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_1 \delta''_1 = \delta_1, \delta'_3 \delta''_3 = \delta_3}} \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta'_3) \\ & \bigcup \mathcal{M}(x^+; \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta''_2, x_2, \delta_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{12}}(\xi_{2,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ & \bigcup \mathcal{M}(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta'_2, \xi_{3,2}, \delta'''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{23}}(\xi_{3,2}; \delta''_2, \xi_{2,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{32}}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta'''_2) \\ & \bigcup \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta'''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(\xi_{3,1}; \delta''_1, \xi_{1,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{1,3}, \delta'''_1, \gamma_1, \delta_2) \\ & \bigcup \mathcal{M}_{\Sigma_{13}}(x^+; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta'''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{3,1}; \delta''_1, \gamma_{2,1}, \delta'_2, \xi_{2,3}, \delta''_3) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{32}}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta'''_2) \end{aligned}$$

Les différents types de courbes brisées sont représentés sur la figure 6.18. Chaque configuration contribue dans l'ordre (de gauche à droite) aux différents termes de la relation (6.4), on obtient donc bien :

$$m_{00}^0(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + m_{0-}^0(d_{00}(x_2), \gamma_1) + d_{00} \circ m_{0-}^0(x_2, \gamma_1) \\ + m_{0-}^0(x_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^0(d_{-0}(x_2), \gamma_1) + d_{0-} \circ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) = 0$$

**RELATION (6.5) :** Pour trouver la relation (6.5) on raisonne de la même manière que pour trouver la relation (6.3). Remarquons tout d'abord que dans cette relation, il y a

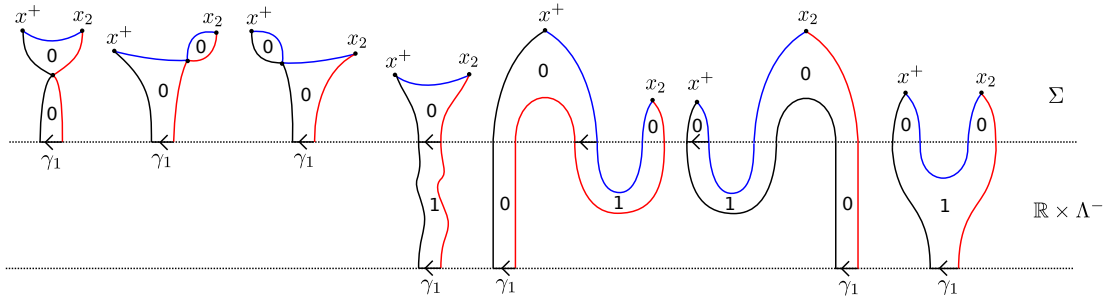


FIGURE 6.18 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}_\Sigma(x^+; \delta_1^-, \gamma_1, \delta_2^-, x_2, \delta_3^-)$ .

un terme qui s'annule. Plus précisément, par définition on a :

$$m_{00}^-(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) = b \circ f^{(2)}(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)} \circ d_{0-}(\gamma_1))$$

mais le terme  $b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)} \circ d_{0-}(\gamma_1))$  s'annule car une telle expression comporterait des bâtiments incomplets comme celui représenté sur la figure 6.19 mais ce n'est pas possible pour des raisons d'énergie. En effet, s'il existe une courbe  $u \in \mathcal{M}^0(q; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2)$  et une courbe  $v \in \mathcal{M}^0(q; \zeta_2, \gamma_{1,2}, \zeta_1)$ , alors les énergies (section 3.6.1) de ces courbes sont données par

$$\begin{aligned} E_{d(\chi^\alpha)}(u) &= a(q) - a(\gamma_{2,1}) - a(\delta_1) - a(\delta_2) \\ E_{d(\chi^\alpha)}(v) &= -a(q) - a(\gamma_{1,2}) - a(\zeta_1) - a(\zeta_2) \end{aligned}$$

Comme l'énergie d'une courbe holomorphe est toujours positive (ou nulle si la courbe est constante mais ce n'est pas le cas ici), l'existence de la courbe  $v$  implique que  $q$  est un point d'intersection d'action strictement négative, mais cela contredit l'existence de la courbe  $u$ . Donc une telle configuration de courbes n'arrive jamais.

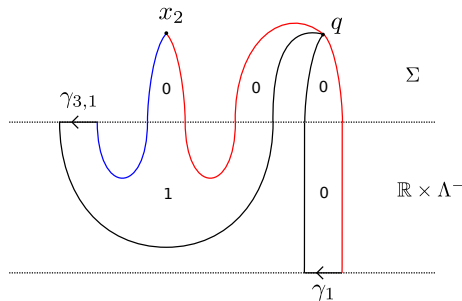


FIGURE 6.19 – Type de bâtiment holomorphe incomplet impossible.

Les autres termes de la relation (6.5) sont définis par des comptes de bâtiments holomorphes incomplets dont certains étages forment des bâtiments holomorphes complets qui se recollent. Après recollement, on obtient des bâtiments holomorphes incomplets dans les produits d'espaces de modules suivants :

$$\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.19)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.20)$$

$$\mathcal{M}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.21)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.22)$$

On cherche donc maintenant tous les éléments du bord de la compactification de ces produits. Encore une fois, les espaces de dimension 1 à bord sur des parties non cylindriques des cobordismes se compactifient ainsi que les espaces de modules de bananes et bananes généralisées de dimension 2. On a déjà calculé  $\partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)$  et  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2)$  car ces types de courbes brisées sont apparues pour trouver la relation (6.3). Il nous reste alors à étudier les espaces  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2)$  et  $\partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)$ . On a tout d'abord la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^\partial(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \\ &\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta_2, \gamma_1, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, q, \delta''_1, \gamma_1, \delta_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1) \\ &\bigcup_{\xi_{2,1}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\xi_{2,3}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{2,3}, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,3}; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\xi_{1,3}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(x_2; \delta'_3, \xi_{1,3}, \delta''_1, \gamma_1, \delta_2) \times \mathcal{M}(\xi_{1,3}; \delta''_3, \gamma_{1,3}, \delta'_1) \end{aligned}$$

Enfin, les bâtiments holomorphes obtenus comme dégénérescences de bananes géné-

ralisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^\partial(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \\
&\bigcup_{\xi_{2,1}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{2,1}, \zeta''_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}; \zeta''_1, \gamma_1, \zeta'_2) \\
&\bigcup_{\xi_{2,3}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta'_2, \xi_{2,3}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{2,3}; \zeta'_3, \xi_{2,3}, \zeta''_2) \\
&\bigcup_{\xi_{3,2}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta'_2, \xi_{3,2}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{2,3}; \zeta'_3, \xi_{3,2}, \zeta''_2) \\
&\bigcup_{\xi_{3,1}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{3,1}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\xi_{3,1}; \zeta''_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta'_3) \\
&\bigcup_{\xi_{1,3}, \zeta'_i, \zeta''_i} \mathcal{M}(\gamma_{3,1}; \zeta'_1, \xi_{1,3}, \zeta''_3) \times \mathcal{M}(\gamma_{2,3}; \zeta'_3, \xi_{1,3}, \zeta''_1, \gamma_1, \zeta_2)
\end{aligned}$$

et ces courbes brisées sont représentées sur la figure 6.20. Finalement on peut mainte-

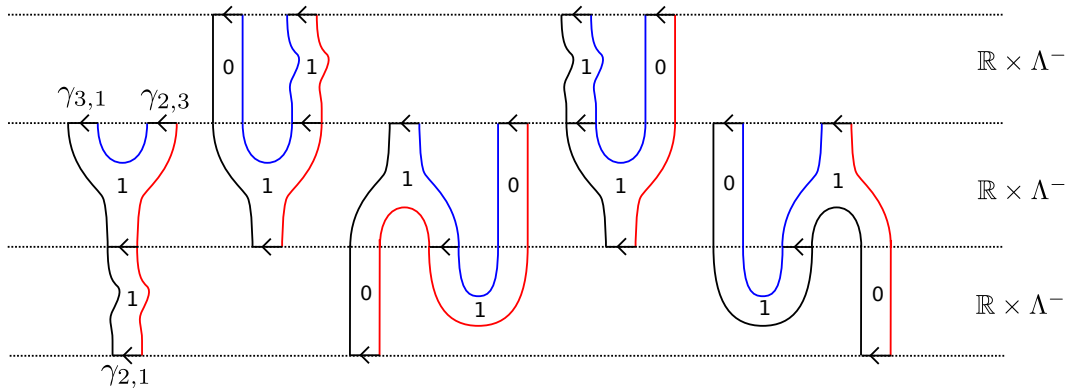


FIGURE 6.20 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_{2,1}, \delta_2, \gamma_{2,3}, \delta_3)$ .

nant décrire tous les bâtiments incomplets dans la compactification des produits 6.19, 6.20, 6.21 et 6.22, c'est-à-dire dans :

$$\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.23)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \times \partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3) \quad (6.24)$$

$$\partial\overline{\mathcal{M}}^1(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.25)$$

$$\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \partial\overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \quad (6.26)$$

Les différents types de bâtiments incomplets correspondants sont représentés sur la figure 6.21. La partie du haut de la figure correspond aux bâtiments incomplets dans 6.23

et 6.24, et pour alléger la figure on n'a pas dessiné les deux d'entre eux qui se compensent car différent d'un cylindre trivial au dessus de  $\gamma_{3,1}$ , la situation est analogue à celle rencontrée pour la relation 6.3 (voir Remarque 20). La partie du bas de la figure correspond aux bâtiments incomplets dans 6.25 et 6.26 (où on a de nouveau enlevé celles qui se compensent algébriquement). On remarque alors que deux autres Sagra-  
 das Familias se compensent, l'une étant dans 6.23 et l'autre dans 6.26. Ils contribuent tous deux algébriquement à  $b \circ \Delta^{(2)}(f^{(1)}(x_2), \gamma_1)$ . En observant maintenant toutes les opérations algébriques auxquelles contribuent chacun des bâtiments incomplets restants au bord de variétés de dimension 1, on trouve bien la relation (6.5) :

$$m_{00}^-(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + m_{0-}^-(d_{00}(x_2), \gamma_1) + m_{0-}^-(x_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^-(d_{-0}(x_2), \gamma_1) + d_{-0} \circ m_{0-}^0(x_2, \gamma_1) + d_{--} \circ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) = 0$$

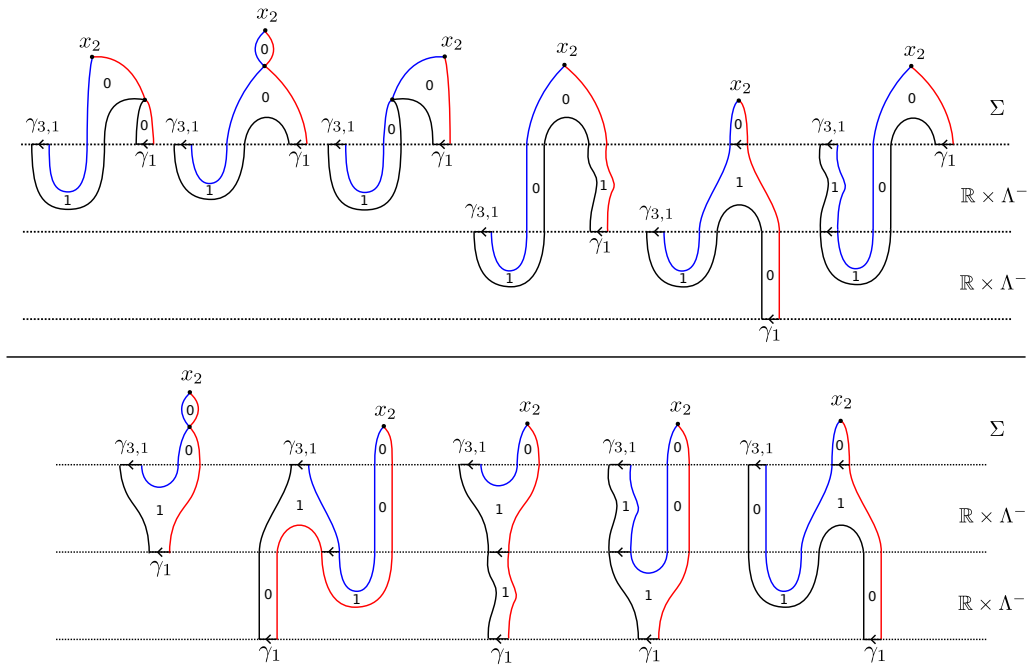


FIGURE 6.21 – Courbes brisées dans 6.23, 6.24, 6.25 et 6.26.

**RELATIONS (6.6) ET (6.7) :** Par symétrie, les relations (6.6) et (6.7) pour la paire d'asymptotes  $(\gamma_2, x_1)$  s'obtiennent exactement de la même façon que les relations (6.4) et (6.5) correspondant à la paire d'asymptotes  $(x_2, \gamma_1)$ .

**RELATION (6.8) :** Finalement, encore une fois comme pour les relations (6.2) et (6.4), chaque terme de la relation (6.8) correspond à un compte de bâtiments holomorphes qui se recollent en des courbes holomorphes dans  $\mathcal{M}^1(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$ . L'étude

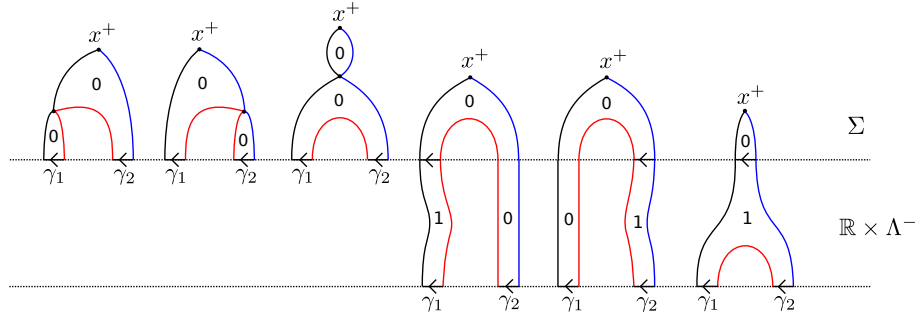


FIGURE 6.22 – Courbes brisées dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$ .

du bord de la compactification de cet espace de modules donne :

$$\begin{aligned}
\partial \overline{\mathcal{M}^1}(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}^0}(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}^0(x^+; \delta'_1, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}^0(q; \delta''_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta'_3) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}^0(x^+; \delta'_1, q, \delta''_2, \gamma_2, \delta_3) \times \mathcal{M}^0(q; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\
&\bigcup_{\substack{q \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \\ \delta'_i, \delta''_i}} \mathcal{M}^0(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta'_2, q, \delta''_3) \times \mathcal{M}^0(q; \delta''_2, \gamma_2, \delta'_3) \\
&\bigcup_{\xi_{3,1}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}^0(x^+; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta''_3) \times \mathcal{M}^0(\xi_{3,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta'_3) \\
&\bigcup_{\xi_{2,1}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}^0(x^+; \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta''_2, \gamma_2, \delta_3) \times \mathcal{M}^0(\xi_{2,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\
&\bigcup_{\xi_{3,2}, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}^0(x^+; \delta_1, \gamma_1, \delta'_2, \xi_{3,2}, \delta''_3) \times \mathcal{M}^0(\xi_{3,2}; \delta''_2, \gamma_2, \delta'_3)
\end{aligned}$$

Les différents types de bâtiments holomorphes correspondants sont représentés sur la figure 6.22.

**RELATIONS (6.9) :** Enfin, le produit de deux cordes de Reeb  $m^-_-$  est défini comme le produit dans la catégorie d'augmentations  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda_1^- \cup \Lambda_2^- \cup \Lambda_3^-)$ , et dans ce cas on rappelle que les différents types de brisures pour une famille de courbes dans

$\mathcal{M}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$  sont les suivantes (figure 6.23) :

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^0(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \\ &\bigcup \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \delta'_1, \xi_{3,1}, \delta''_3) \times \mathcal{M}^1(\xi_{3,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta'_3) \\ &\bigcup \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \delta'_1, \xi_{2,1}, \delta''_2, \gamma_2, \delta_3) \times \mathcal{M}^1(\xi_{2,1}; \delta''_1, \gamma_1, \delta'_2) \\ &\bigcup \mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta'_2, \xi_{3,2}, \delta''_3) \times \mathcal{M}^1(\xi_{3,2}; \delta''_2, \gamma_2, \delta'_3) \end{aligned}$$

d'où découle la relation (6.9) :

$$m_{--}^-(\gamma_2, d_{--}(\gamma_1)) + m_{--}^-(d_{--}(\gamma_2), \gamma_1) + d_{--} \circ m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1) = 0$$

qui correspond bien la relation  $A_\infty$  pour  $d = 2$  (voir (3.1)) dans  $\mathcal{A}ug_-(\Lambda_1^- \cup \Lambda_2^- \cup \Lambda_2^-)$  mais avec d'autres notations.

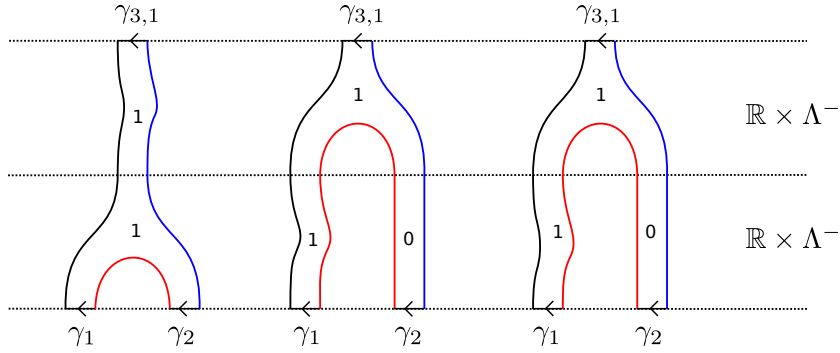


FIGURE 6.23 – Courbes brisées dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^2(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$

Une fois ces huit relations établies, vérifions qu'on obtient bien la relation de produit pour  $m_2$ . On rappelle que la différentielle sur  $CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_j)$  est une matrice  $\partial_{-\infty} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{-0} \\ d_{0-} & d_{--} \end{pmatrix}$  et alors en additionnant et regroupant les termes des équations (6.2) et (6.3), on trouve :

$$\begin{aligned} &(d_{00} + d_{-0})(m_{00}^0(x_2, x_1)) + (d_{--} + d_{0-})(m_{00}^-(x_2, x_1)) \\ &= (m^0 + m^-)(x_2, (d_{00} + d_{-0})(x_1)) + (m^0 + m^-)((d_{00} + d_{-0})(x_2), x_1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\partial_{-\infty} \circ m_2(x_2, x_1) = m_2(x_2, \partial_{-\infty}(x_1)) + m_2(\partial_{-\infty}(x_2), x_1)$$

De même, avec les équations (6.4) et (6.5), on a :

$$\partial_{-\infty} \circ \mathbf{m}_2(x_2, \gamma_1) = \mathbf{m}_2(\partial_{-\infty}(x_2), \gamma_1) + \mathbf{m}_2(x_2, \partial_{-\infty}(\gamma_1))$$

et avec (6.6) et (6.7) :

$$\partial_{-\infty} \circ \mathbf{m}_2(\gamma_2, x_1) = \mathbf{m}_2(\partial_{-\infty}(\gamma_2), x_1) + \mathbf{m}_2(\gamma_2, \partial_{-\infty}(x_1))$$

Enfin, en regroupant les équations (6.8) et (6.9) on trouve

$$\begin{aligned} d_{00} \circ m_{--}^0(\gamma_2, \gamma_1) + \partial_{-\infty} \circ m_{--}(\gamma_2, \gamma_1) & \quad (6.27) \\ = m^0(\partial_{-\infty}(\gamma_2), \gamma_1) + m^0(\gamma_2, \partial_{-\infty}(\gamma_1)) + m_{--}^-(d_{--}(\gamma_2), \gamma_1) + m_{--}^-(\gamma_2, d_{--}(\gamma_1)) \end{aligned}$$

de plus les termes  $d_{-0} \circ m_{--}^0(\gamma_2, \gamma_1)$ ,  $m_{-0}^-(\gamma_2, d_{-0}(\gamma_1))$  et  $m_{0-}^-(d_{-0}(\gamma_2), \gamma_1)$  sont nuls pour raisons d'énergie. Si on ajoute ces termes nuls à la relation (6.27) ci-dessus, on obtient :

$$\partial_{-\infty} \circ \mathbf{m}_2(\gamma_2, \gamma_1) = \mathbf{m}_2(\partial_{-\infty}(\gamma_2), \gamma_1) + \mathbf{m}_2(\gamma_2, \partial_{-\infty}(\gamma_1))$$

Et donc finalement on a bien montré que pour tout triplet de cobordismes lagrangiens exacts transverses  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , l'application  $\mathbf{m}_2 : CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_3)$  satisfait la relation (6.1).

Nous allons maintenant calculer le degré de  $\mathbf{m}_2$ . Sur le complexe  $CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_j) = CF(\Sigma_i, \Sigma_j) \oplus C(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)[1]$ , le produit  $\mathbf{m}_2$  est de degré 0. Ce degré se calcule à partir de l'expression de la dimension des espaces de modules qui servent à définir  $\mathbf{m}_2$ . Pour cela, on applique le théorème 12 aux espaces de modules correspondants. Commençons par calculer le degré de  $m^0$ . Tout d'abord,  $m_{00}^0(x_2, x_1)$  compte des courbes dans  $\mathcal{M}^0(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, x_1, \boldsymbol{\delta}_2, x_2, \boldsymbol{\delta}_3)$ , ce qui donne :

$$0 = \dim \mathcal{M}^0(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, x_1, \boldsymbol{\delta}_2, x_2, \boldsymbol{\delta}_3) = |x^+| - |x_1| - |x_2| - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i|$$

où le degré pour les cordes de Reeb est le degré sans compter le décalage de 1, c'est-à-dire que si  $\gamma \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$  alors le degré de  $\gamma$  dans  $C(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-)[1]$  est  $|\gamma| + 1$ . Donc les degrés des asymptotes satisfont la relation :

$$|x^+| = |x_1| + |x_2| + \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i|$$

et  $m_{00}^0$  est bien de degré 0. De même, on a :

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_1, \boldsymbol{\delta}_2, x_2, \boldsymbol{\delta}_3) &= |x^+| - |\gamma_1| - |x_2| - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| - 1 \\ \dim \mathcal{M}(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, x_1, \boldsymbol{\delta}_2, \gamma_2, \boldsymbol{\delta}_3) &= |x^+| - |x_1| - |\gamma_2| - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| - 1 \\ \dim \mathcal{M}(x^+; \boldsymbol{\delta}_1, \gamma_1, \boldsymbol{\delta}_2, \gamma_2, \boldsymbol{\delta}_3) &= |x^+| - |\gamma_1| - |\gamma_2| - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| - 2\end{aligned}$$

et encore une fois  $m_{0-}^0, m_{-0}^0$  et  $m_{--}^0$  comptent des courbes d'indice 0, d'où les degrés des asymptotes satisfont :

$$\begin{aligned}|x^+| &= (|\gamma_1| + 1) + |x_2| + \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| \\ |x^+| &= |x_1| + (|\gamma_2| + 1) + \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| \\ |x^+| &= (|\gamma_1| + 1) + (|\gamma_2| + 1) + \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i|\end{aligned}$$

et donc  $m^0$  est bien de degré 0. Calculons maintenant le degré de  $m^-$ . Rappelons qu'on a  $m_{00}^-(x_2, x_1) = b \circ f^{(2)}(x_2, x_1) + b^{(2)}(\delta_{0-}^{\Sigma_{3,2}}(x_2), \delta_{0-}^{\Sigma_{2,1}}(x_1))$  donc on vérifie séparément que  $b \circ f^{(2)}$  et  $b^{(2)}(\delta_{0-}^{\Sigma_{3,2}}, \delta_{0-}^{\Sigma_{2,1}})$  sont de degré 0. Commençons par  $b \circ f^{(2)}$ , on regarde la dimension des espaces de modules définissant cette application, et on note  $|\cdot|_{312}$  le degré des asymptotes calculé en considérant le choix d'étiquettes lagrangiennes  $(\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2)$ . Si on ne précise pas, c'est le choix  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  qu'on sous-entend. On a :

$$0 = \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \boldsymbol{\delta}_3, \gamma_{1,3}, \boldsymbol{\delta}_1, x_1, \boldsymbol{\delta}_2) = |x_2|_{312} - |\gamma_{1,3}|_{312} - |x_1|_{312} - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i|_{312} - 1$$

$$0 = \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda}^1(\gamma_{3,1}; \boldsymbol{\xi}_1, \gamma_{1,3}, \boldsymbol{\xi}_3) = |\gamma_{3,1}| + |\gamma_{1,3}| - \sum_i |\boldsymbol{\xi}_i| - n + 1$$

On rappelle que  $CF^*(\Sigma_2, \Sigma_3) = CF^{n+1-*}(\Sigma_3, \Sigma_2)$ , ce qui permet d'écrire :

$$0 = \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \boldsymbol{\delta}_3, \gamma_{1,3}, \boldsymbol{\delta}_1, x_1, \boldsymbol{\delta}_2) = (n + 1 - |x_2|) - |\gamma_{1,3}| - |x_1| - \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| - 1$$

puisque  $|\gamma_{1,3}|_{312} = |\gamma_{1,3}|$ ,  $|x_1|_{312} = |x_1|$ , et  $|\boldsymbol{\delta}_i|_{312} = |\boldsymbol{\delta}_i|$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Finalement on obtient les relations :

$$n - 1 - |\gamma_{1,3}| = |x_2| + |x_1| + \sum_i |\boldsymbol{\delta}_i| - 1 \quad (6.28)$$

$$|\gamma_{3,1}| = n - 1 - |\gamma_{1,3}| + \sum_i |\boldsymbol{\xi}_i| \quad (6.29)$$

et (6.28) montre en particulier que  $f^{(2)}$  est de degré  $-1$  et (6.29) que  $b$  est de degré  $0$ . La composition est donc de degré  $-1$  sans le décalage de degré pour les cordes de Reeb. Avec le décalage,  $b \circ f^{(2)}$  est de degré  $0$  car en combinant les relations (6.28) et (6.29), on trouve

$$(|\gamma_{3,1}| + 1) = |x_2| + |x_1| + \sum_i |\delta_i| + \sum_i |\xi_i|$$

Regardons maintenant l'application  $b^{(2)}(\delta_{0_-}^{\Sigma_{3,2}}, \delta_{0_-}^{\Sigma_{2,1}})$ . On rappelle que

$$b^{(2)}(\gamma_{2,3}, \gamma_{1,2}) = \sum_{\gamma_{3,1}, \zeta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) \varepsilon_1^-(\zeta_1) \varepsilon_2^-(\zeta_2) \varepsilon_3^-(\zeta_3) \cdot \gamma_{3,1}$$

et

$$0 = \dim \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) = |\gamma_{3,1}| + |\gamma_{1,2}| + |\gamma_{2,3}| - \sum_i |\zeta_i| - 2n + 3$$

d'où

$$|\gamma_{3,1}| = (n - 1 - |\gamma_{1,2}|) + (n - 1 - |\gamma_{2,3}|) + \sum_i |\zeta_i| - 1 \quad (6.30)$$

Puis,

$$\delta_{0_-}^{\Sigma_{2,1}}(x_1) = \sum_{\gamma_{1,2}, \beta_i} \# \mathcal{M}_{\Sigma_{21}}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) \varepsilon_1^-(\beta_1) \varepsilon_2^-(\beta_2) \cdot \gamma_{1,2}$$

et

$$0 = \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{21}}^0(x_1; \beta_2, \gamma_{1,2}, \beta_1) = |x_1|_{21} - |\gamma_{1,2}|_{21} - \sum_i |\beta_i|_{21} - 2$$

d'où  $(n + 1 - |x_1|) - |\gamma_{1,2}| - \sum_i |\beta_i| - 2 = 0$  et donc

$$n - 1 - |\gamma_{1,2}| = |x_1| + \sum_i |\beta_i| \quad (6.31)$$

De même pour l'espace de modules de courbes définissant  $\delta_{0_-}^{\Sigma_{3,2}}$ , on trouve :

$$n - 1 - |\gamma_{2,3}| = |x_2| + \sum_i |\delta_i| \quad (6.32)$$

En injectant les relations (6.31) et (6.32) dans (6.30), on obtient :

$$(|\gamma_{3,1}| + 1) = |x_1| + |x_2| + \sum_i |\beta_i| + \sum_i |\delta_i| + \sum_i |\zeta_i| \quad (6.33)$$

et donc  $b^{(2)}(\delta_{0-}^{\Sigma_{3,2}}, \delta_{0-}^{\Sigma_{2,1}})$  est de degré 0. Finalement, on a montré que  $m_{00}^-$  est de degré 0. Pour  $m_{0-}^-$ , rappelons qu'on a

$$\begin{aligned} m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) &= b \circ f^{(2)}(x_2, \gamma_1) + b^{(2)}(f^{(1)}(x_2), \gamma_1) \\ &= \sum_{\substack{\gamma_{1,3}, \gamma_{3,1} \\ \delta_i, \xi_i}} \#(\mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) \times \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \xi_1, \gamma_{1,3}, \xi_3)) \varepsilon^- \cdot \gamma_{3,1} \\ &\quad + \sum_{\substack{\gamma_{2,3}, \gamma_{3,1} \\ \delta_i, \zeta_i}} \#(\mathcal{M}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{2,3}, \delta_2) \times \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3)) \varepsilon^- \cdot \gamma_{3,1} \end{aligned}$$

avec  $f^{(1)}(x_2) = \delta_{0-}^{\Sigma_{3,2}}(x_2)$  dans ce cas, et où le “ $\varepsilon^-$ ” indique qu'on augmente les mots de cordes pures  $\delta_i$  et  $\xi_i$  avec les augmentations correspondantes. La dimension des espaces de modules s'exprime par :

$$0 = \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{312}}^0(x_2; \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1, \gamma_1, \delta_2) = |x_2|_{312} - |\gamma_{1,3}|_{312} - |\gamma_1|_{312} - \sum_i |\delta_i|_{312} - 2$$

et on a déjà vu pour les asymptotes de courbes dans les espaces de modules de bananes que  $n - 1 - |\gamma_{1,3}| = |\gamma_{3,1}| - \sum_i |\xi_i|$ , d'où

$$(|\gamma_{3,1}| + 1) = |x_2| + (|\gamma_1| + 1) + \sum_i |\delta_i| + \sum_i |\xi_i| \quad (6.34)$$

et donc  $b \circ f^{(2)}$  est de degré 0. De même, pour l'espace de modules définissant  $b^{(2)}$ , on a :

$$0 = \dim \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_1, \zeta_2, \gamma_{2,3}, \zeta_3) = |\gamma_{3,1}| + |\gamma_{2,3}| - |\gamma_1| - \sum_i |\zeta_i| + 1 - n$$

et en combinant cette relation avec la relation (6.32), on trouve

$$(|\gamma_{3,1}| + 1) = |x_2| + (|\gamma_1| + 1) + \sum_i |\zeta_i| + \sum_i |\delta_i|$$

ce qui donne que  $b^{(2)}(f^{(1)}, -)$  est de degré 0. De la même façon, on peut montrer que  $m_{-0}^-$  est de degré 0, en utilisant en plus les dimensions des espaces de modules suivants :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{\Sigma_{231}}^0(x_1; \delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) &= |x_1|_{231} - |\gamma_{1,3}|_{231} - |\gamma_2|_{231} - \sum_i |\delta_i|_{231} - 2 \\ &= n + 1 - |x_1| - |\gamma_{1,3}| - |\gamma_2| - \sum_i |\delta_i| - 2 \end{aligned}$$

$$\dim \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}; \zeta_1, \gamma_{1,2}, \zeta_2, \gamma_2, \zeta_3) = |\gamma_{3,1}| + |\gamma_{1,2}| - |\gamma_2| - \sum_i |\zeta_i| + 1 - n$$

Enfin, pour  $m_{--}^-$ , on rappelle qu'on a

$$m_{--}^-(\gamma_2, \gamma_1) = \sum_{\gamma_{3,1}, \delta_i} \# \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}^1(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1}$$

et

$$0 = \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{123}^-}^1(\gamma_{3,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) = |\gamma_{3,1}| - |\gamma_1| - |\gamma_2| - \sum_i |\delta_i| - 1$$

d'où

$$|\gamma_{3,1}| + 1 = (|\gamma_1| + 1) + (|\gamma_2| + 1) + \sum_i |\delta_i|$$

et donc  $m_{--}^-$  est bien de degré 0.

### 6.3 Un morphisme d'anneaux

Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux cobordismes lagrangiens exacts transverses de  $\Lambda_1^-$  à  $\Lambda_1^+$  et de  $\Lambda_2^-$  à  $\Lambda_2^+$  respectivement. On suppose toujours que les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  admettent des augmentations  $\varepsilon_i^-$  qui induisent des augmentations  $\varepsilon_i^+$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_i^+)$ ,  $i = 1, 2$ . Nous commençons cette section en rappelant que l'application  $d_{+0} + d_{+-} : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  (voir chapitre 5) est bien un morphisme de complexes.

Tout d'abord,  $(C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+), d_{++})$  est bien un complexe. En effet, en étudiant le bord de la compactification des espaces de modules  $\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^+}^2(\gamma^+; \beta_1, \xi_{2,1}^+, \beta_2)$ , on trouve que  $d_{++}^2 = 0$ . Ensuite,  $(CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2), \partial_{-\infty})$  est aussi un complexe car on a :

$$\partial_{-\infty}^2 = \begin{pmatrix} d_{00}^2 + d_{0-}d_{-0} & d_{00}d_{0-} + d_{0-}d_{--} \\ d_{-0}d_{00} + d_{--}d_{-0} & d_{-0}d_{0-} + d_{--}^2 \end{pmatrix}$$

et chaque terme s'annule car compte des bâtiments holomorphes complets ou incomplets dans le bord de la compactification d'espaces de modules de dimension 1, sauf le terme  $d_{-0}d_{0-}$  qui lui est nul pour des raisons d'énergie. Plus précisément, il faut étudier le bord de la compactification des espaces suivants :

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}^1(x; \delta_1, q, \delta_2) \tag{6.35}$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{1,2}}^1(x; \delta_1, \gamma_{2,1}^-, \delta_2) \tag{6.36}$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{2,1}}^1(q; \delta_2, \gamma_{1,2}^-, \delta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}^1(\gamma_{2,1}^-; \zeta_1, \gamma_{1,2}^-, \zeta_2) \tag{6.37}$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{2,1}}^0(q; \delta_2, \gamma_{1,2}^-, \delta_1) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}^-}^2(\gamma_{2,1}^-; \zeta_1, \gamma_{1,2}^-, \zeta_2) \tag{6.38}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R} \times \Lambda_{1,2}}^2(\gamma_{2,1}^-; \delta_1, \xi_{2,1}^-, \delta_2) \tag{6.39}$$

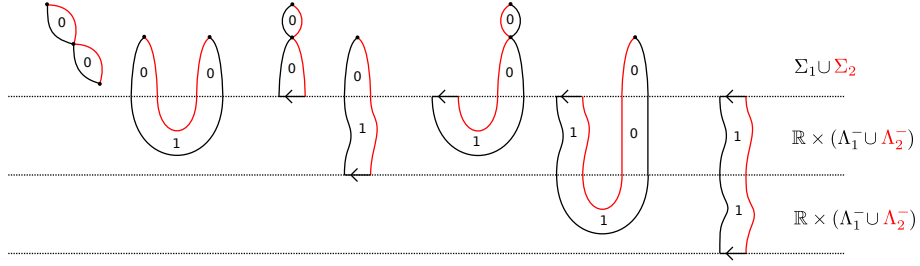


FIGURE 6.24 – Schématisation des courbes dans le bord des compactifications des espaces (6.35), (6.36), (6.37), (6.38) et (6.39).

Les courbes brisées correspondantes sont représentées sur la figure 6.24, sauf deux bâtiments incomplets qui se compensent, l'un dans le bord de (6.37), l'autre dans le bord de (6.38).

Maintenant, montrons que  $d_{+0} + d_{+-} : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  est un morphisme de complexes, en étudiant les dégénérescences de courbes dans les espaces de modules  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, x, \delta_2)$  et  $\mathcal{M}^0(\gamma^+; \delta_1, \gamma^-, \delta_2)$ , avec  $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  et  $\gamma^\pm \in C(\Lambda_1^\pm, \Lambda_2^\pm)$ . On a :

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}^1(\gamma^+; \delta_1, x, \delta_2) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^{1^0}(\gamma^+; \delta_1, x, \delta_2) \\ &\bigcup_{q, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, x, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\xi_{2,1}^+, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, \xi_{2,1}^+, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}^+; \delta''_1, x, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\substack{\xi_{2,1}^-, \xi_{1,2}^- \\ \delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i}} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, \xi_{2,1}^-, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}^-; \delta''_1, \xi_{1,2}^-, \delta''_2) \times \mathcal{M}_{\Sigma_{21}}(x; \delta'_2, \xi_{1,2}^-, \delta'''_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}^1(\gamma^+; \delta_1, \gamma^-, \delta_2) &= \bigcup \overline{\mathcal{M}}^{1^0}(\gamma^+; \delta_1, \gamma^-, \delta_2) \\ &\bigcup_{q, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, q, \delta''_2) \times \mathcal{M}(q; \delta''_1, \gamma^-, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\xi_{2,1}^+, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, \xi_{2,1}^+, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}^+; \delta''_1, \gamma^-, \delta'_2) \\ &\bigcup_{\xi_{2,1}^-, \delta'_i, \delta''_i} \mathcal{M}(\gamma^+; \delta'_1, \xi_{2,1}^-, \delta''_2) \times \mathcal{M}(\xi_{2,1}^-; \delta''_1, \gamma^-, \delta'_2) \end{aligned}$$

avec  $\delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i$  des mots de cordes pures satisfaisant  $\delta'_i \delta''_i = \delta_i$  et  $\delta'_i \delta''_i \delta'''_i = \delta_i$  en fonction des cas.

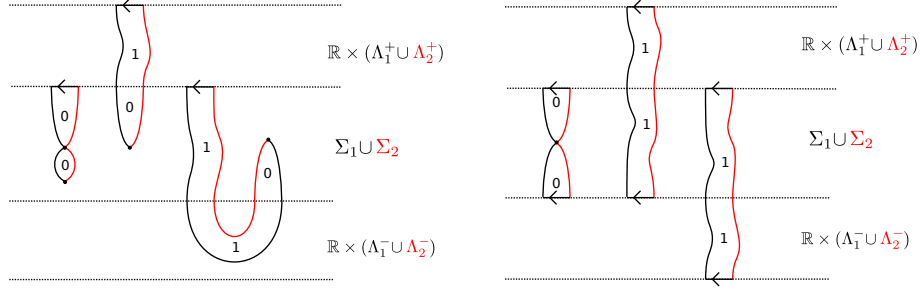


FIGURE 6.25 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, x, \delta_2)$  (à gauche) et de  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, \gamma^-, \delta_2)$  (à droite).

D'après les différentes possibilités de brisures pour les courbes dans les espaces de modules  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, x, \delta_2)$  et  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, \gamma^-, \delta_2)$ , on en déduit les relations suivantes :

- $d_{+0} \circ d_{00}(x) + d_{++} \circ d_{+0}(x) + d_{+-} \circ d_{-0}(x) = 0$
- $d_{+0} \circ d_{0-}(\gamma^-) + d_{++} \circ d_{+-}(\gamma^-) + d_{+-} \circ d_{--}(\gamma^-) = 0$

c'est-à-dire, en les additionnant :

$$(d_{+0} + d_{+-}) \circ \partial_{-\infty} + d_{++} \circ (d_{+0} + d_{+-}) = 0$$

d'où  $d_{+0} + d_{+-}$  est bien un morphisme de complexes. Rappelons que cela montre alors que  $(\text{Cth}(\Sigma_1, \Sigma_2), \mathfrak{d}_{\varepsilon_1^-, \varepsilon_2^-})$  est un complexe car c'est le cone de  $d_{+0} + d_{+-}$ . À partir de maintenant, nous noterons  $\mathcal{F}^1 := d_{+0} + d_{+-}$ . Comme on l'a déjà mentionné au chapitre 5, le fait que le complexe de Cthulhu soit acyclique implique que  $\mathcal{F}^1$  est un quasi-isomorphisme. Nous allons montrer que  $\mathcal{F}^1$  préserve plus de structures, autrement dit on a :

**Théorème 15.** *Pour tout  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  cobordismes lagrangiens exacts transverses de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$  et pour toutes augmentations  $\varepsilon_i^-$  de  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  pour  $i = 1, 2, 3$ , on a*

$$[\mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^1) = \mathcal{F}^1 \circ \mathfrak{m}_2]$$

c'est-à-dire que le morphisme  $\mathcal{F}^1$  préserve les structures produit en cohomologie.

Dans l'énoncé,  $\mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2$  est le produit dans la catégorie d'augmentation  $\text{Aug}_-(\Lambda_1^+ \cup \Lambda_2^+ \cup \Lambda_3^+)$  et  $\varepsilon_{1,2,3}^+$  l'augmentation diagonale définie à partir de  $\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^+$  et  $\varepsilon_3^+$ .

**Remarque 21.** Dans le cas où  $\Lambda_1^- = \emptyset$  et où  $\Sigma_2, \Sigma_3$  sont des petites perturbations hamiltoniennes de  $\Sigma_1$  telles que les paires  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $(\Sigma_2, \Sigma_3)$  et  $(\Sigma_1, \Sigma_3)$  soient dirigées, alors ce théorème dit que l'isomorphisme d'Ekholm-Seidel est un isomorphisme d'anneaux.

Montrons ce théorème. Considérons donc trois cobordismes  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  comme dans le théorème. On introduit les espaces de modules de courbes holomorphes à bord sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$  suivants (voir figure 6.26) :

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \quad (6.40)$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \quad (6.41)$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \quad (6.42)$$

$$\mathcal{M}_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \quad (6.43)$$

avec

- $\gamma_{3,1}^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_3^+, \Lambda_1^+)$ ,  $\gamma_1 \in \mathcal{R}(\Lambda_2^-, \Lambda_1^-)$  et  $\gamma_2 \in \mathcal{R}(\Lambda_3^-, \Lambda_2^-)$ ,
- $x_1 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ ,  $x_2 \in \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ ,
- les  $\delta_i$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$ , pour  $i = 1, 2, 3$

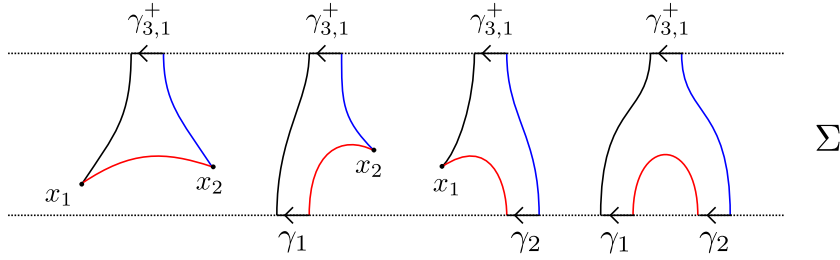


FIGURE 6.26 – Courbes dans des espaces de modules (6.40), (6.41), (6.42), et (6.43) respectivement.

On définit maintenant une nouvelle application sur  $CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  à partir de ces espaces de modules :

$$\mathcal{F}^2: CF_{-\infty}(\Sigma_2, \Sigma_3) \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^+, \Lambda_3^+)$$

définie sur chaque paire d'asymptotes par :

$$\mathcal{F}^2(x_2, x_1) = \sum_{\gamma_{3,1}^+, \delta_i} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1}^+$$

$$\mathcal{F}^2(x_2, \gamma_1) = \sum_{\gamma_{3,1}^+, \delta_i} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1}^+$$

$$\mathcal{F}^2(\gamma_2, x_1) = \sum_{\gamma_{3,1}^+, \delta_i} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1}^+$$

$$\mathcal{F}^2(\gamma_2, \gamma_1) = \sum_{\gamma_{3,1}^+, \delta_i} \# \mathcal{M}^0(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3) \varepsilon_1^-(\delta_1) \varepsilon_2^-(\delta_2) \varepsilon_3^-(\delta_3) \cdot \gamma_{3,1}^+$$

On étudie à nouveau les dégénérescences de courbes d'indice 1 dans les espaces de modules 6.40, 6.41, 6.42, et 6.43. On trouve donc un certain nombre de bâtiments holomorphes dont les composantes sont des courbes rigides. La figure 6.27 schématise les courbes brisées dans  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ .

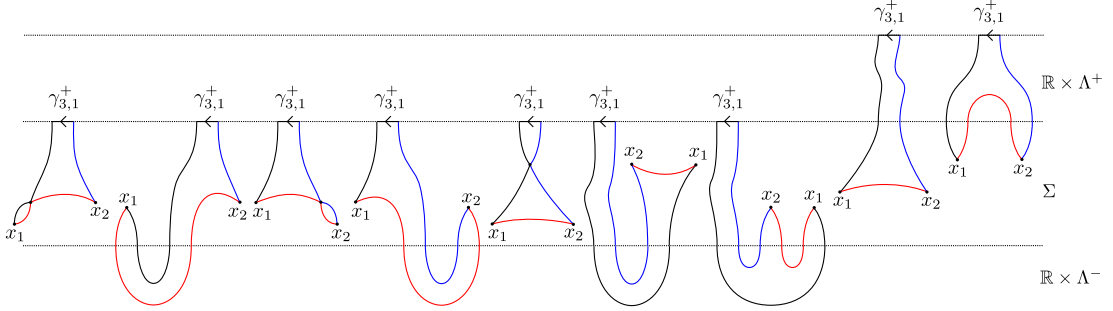


FIGURE 6.27 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, x_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ .

Cela implique que  $\mathcal{F}^2$  satisfait la relation :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^2(x_2, d_{00}(x_1)) + \mathcal{F}^2(x_2, d_{0-}(x_1)) + \mathcal{F}^2(d_{00}(x_2), x_1) + \mathcal{F}^2(d_{-0}(x_2), x_1) \\ & + d_{+0} \circ m_{00}^0(x_2, x_1) + d_{+-} \circ m_{00}^-(x_2, x_1) + d_{++} \circ \mathcal{F}^2(x_2, x_1) \\ & + \mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(d_{+0}(x_2), d_{+0}(x_1)) = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

De même, les bâtiments holomorphes dans  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$  sont schématisés sur la figure 6.28 on trouve que  $\mathcal{F}^2$  satisfait :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^2(x_2, d_{0-}(\gamma_1)) + \mathcal{F}^2(x_2, d_{--}(\gamma_1)) + \mathcal{F}^2(d_{00}(x_2), \gamma_1) + \mathcal{F}^2(d_{-0}(x_2), \gamma_1) \\ & + d_{+0} \circ m_{0-}^0(x_2, \gamma_1) + d_{+-} \circ m_{0-}^-(x_2, \gamma_1) + d_{++} \circ \mathcal{F}^2(x_2, \gamma_1) \\ & + \mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(d_{-0}(x_2), d_{+-}(\gamma_1)) = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

et la relation symétrique à celle-là pour la paire d'asymptotes  $(\gamma_2, x_1)$  est aussi vérifiée. Enfin, les bâtiments holomorphes dans  $\partial\overline{\mathcal{M}}^1_{\Sigma_{123}}(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$  sont représentés sur la figure 6.29 et on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^2(\gamma_2, d_{0-}(\gamma_1)) + \mathcal{F}^2(\gamma_2, d_{--}(\gamma_1)) + \mathcal{F}^2(d_{0-}(\gamma_2), \gamma_1) + \mathcal{F}^2(d_{--}(\gamma_2), \gamma_1) \\ & + d_{+0} \circ m_{0-}^0(\gamma_2, \gamma_1) + d_{+-} \circ m_{0-}^-(\gamma_2, \gamma_1) + d_{++} \circ \mathcal{F}^2(\gamma_2, \gamma_1) \\ & + \mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(d_{+-}(\gamma_2), d_{+-}(\gamma_1)) = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

Par les relations (6.44), (6.45) et (6.46) on en déduit que  $\mathcal{F}^2$  vérifie :

$$\mathcal{F}^2(-, \partial_{-\infty}) + \mathcal{F}^2(\partial_{-\infty}, -) + \mathcal{F}^1 \circ \mathfrak{m}_2 + d_{++} \circ \mathcal{F}^2 + \mu_{\varepsilon_3^+, \varepsilon_2^+, \varepsilon_1^+}^2(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^1) = 0$$

L'application induite par  $\mathcal{F}^1$  en homologie satisfait alors  $\mathcal{F}^1 \circ \mathfrak{m}_2 + \mu_{\varepsilon_{1,2,3}^+}^2(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^1) = 0$  et  $\mathcal{F}^1$  préserve donc bien le produit en cohomologie.

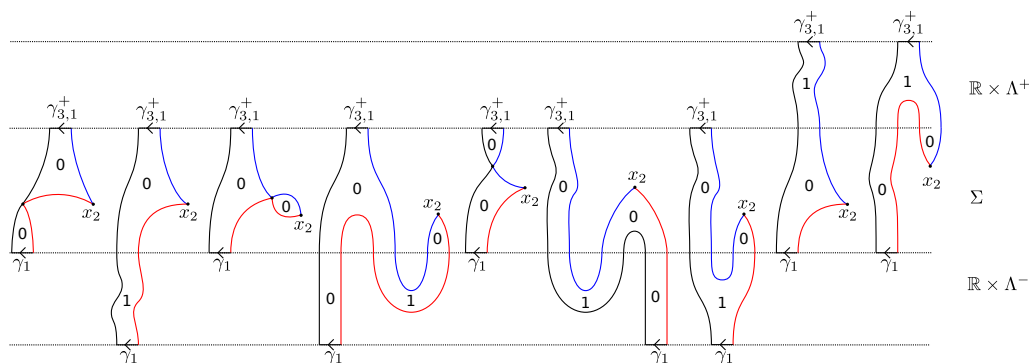


FIGURE 6.28 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, x_2, \delta_3)$ .

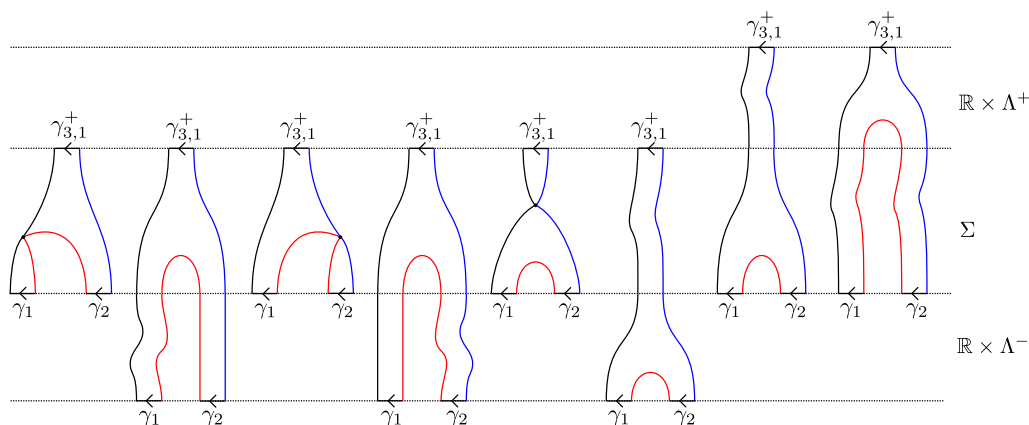
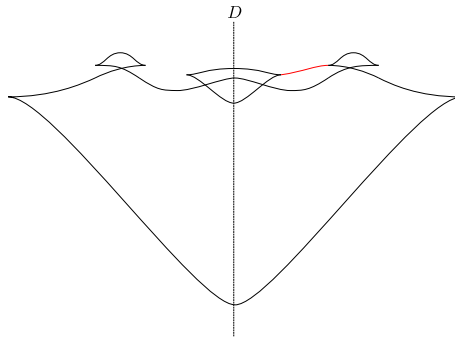
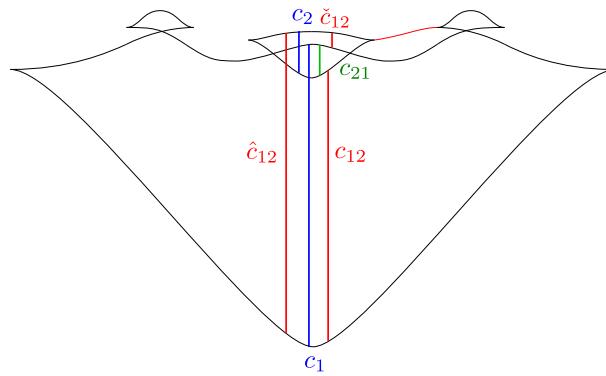


FIGURE 6.29 – Bâtiments holomorphes dans le bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(\gamma_{3,1}^+; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \delta_3)$ .

## 6.4 Un exemple

Nous donnons dans cette section un exemple de calcul simple du produit. Soit  $\Lambda_0$  la sphère de Whitney et  $\Lambda$  une sous-variété legendrienne construite de la façon suivante. Considérons un entrelacs de Hopf auquel on réalise deux mouvements de Reidemeister de type  $I$  sur une des composantes. On construit ensuite une sous-variété legendrienne de dimension 2 en faisant tourner l'entrelacs sur lui-même le long de l'axe de symétrie  $D$  (figure 6.30). On note  $\Lambda'$  cette sous-variété legendrienne obtenue. On réalise ensuite une chirurgie legendrienne d'indice 1 sur  $\Lambda'$  (voir [DR16a]) le long du disque (de dimension 0) schématisé en rouge sur la figure 6.30 pour obtenir  $\Lambda$ . Cette opération de chirurgie donne lieu à un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda'$  vers  $\Lambda$ . De plus,  $\Lambda'$  étant remplissable, il existe un cobordisme de  $\Lambda_0$  vers  $\Lambda'$ , et en concaténant ce dernier avec le cobordisme de  $\Lambda'$  vers  $\Lambda$  on trouve un cobordisme qu'on note  $\Sigma$  de  $\Lambda_0$  vers  $\Lambda$ .

FIGURE 6.30 – Schématisation de la sous-variété legendrienne  $\Lambda$ .FIGURE 6.31 – Schématisation des cordes de Reeb de  $\Lambda$ .

Les cordes de Reeb de  $\Lambda$  sont schématisées sur la figure 6.31. On note  $c$  la corde provenant de la chirurgie legendrienne, et on suppose que son action est plus petite que l'action des autres cordes. Le degré des cordes qu'on peut calculer par la formule (4.1) (chapitre 4) est donné par :

$$\begin{aligned} |c_1| &= |c_2| = |c_{12}| = 2 \\ |c_{21}| &= 1 \\ |\check{c}_{12}| &= 0 \\ |\hat{c}_{12}| &= 3 \\ |c| &= 1 \end{aligned}$$

La différentielle de l'homologie de contact legendrienne se calcule en comptant des arbres de Morse sur le front de la legendrienne (voir [Ekh07] et [DR11]). Elle est

donnée sur les générateurs par :

$$\begin{aligned}\partial c_1 &= c_{21} \check{c}_{12} + c \\ \partial c_2 &= \check{c}_{12} c_{21} + c \\ \partial \hat{c}_{12} &= c_{12} + c_2 \check{c}_{12} + \check{c}_{12} c_1\end{aligned}$$

et les autres termes sont nuls. L'algèbre de Chekanov  $\mathcal{A}(\Lambda)$  possède deux augmentations  $\varepsilon_i: \mathcal{A}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  pour  $i = 0, 1$  :  $\varepsilon_0$  est l'augmentation nulle et  $\varepsilon_1$  augmente seulement  $c_{12}$ . On peut calculer  $\mu_{\varepsilon_0}^1(c) = c_1 + c_2$  et  $\mu_{\varepsilon_0}^1(c_{12}) = \hat{c}_{12}$ , d'où la cohomologie legendrienne linéarisée par  $\varepsilon_0$  de  $\Lambda$  est de dimension 3, et plus particulièrement on a  $LCH_{\varepsilon_0}^0(\Lambda) = \mathbb{Z}_2\langle[\check{c}_{12}]\rangle$ ,  $LCH_{\varepsilon_0}^1(\Lambda) = \mathbb{Z}_2\langle[c_{21}]\rangle$ , et  $LCH_{\varepsilon_0}^2(\Lambda) = \mathbb{Z}_2\langle[c_1]\rangle$ , où on note entre crochets  $[\cdot]$  la classe de cohomologie des cordes. Le produit en cohomologie est alors :

$$\begin{aligned}\mu_{\varepsilon_0}^2([\check{c}_{12}], [c_{21}]) &= [c_1] \\ \mu_{\varepsilon_0}^2([c_{21}], [\check{c}_{12}]) &= [c_2] = [c_1]\end{aligned}$$

On peut vérifier que la cohomologie  $LCH_{\varepsilon_1}^*(\Lambda)$  est aussi de rang 3 et isomorphe à  $LCH_{\varepsilon_0}^*(\Lambda)$ . D'un autre côté,  $\mathcal{A}(\Lambda_0)$  est engendré par une seule corde de degré 2 qu'on note  $a$  et possède une unique augmentation  $\varepsilon$  qui est l'augmentation nulle. Pour des raisons de degré  $\mu_{\varepsilon}^1(a) = 0$  et donc la cohomologie de contact legendrienne de  $\Lambda_0$  est de rang 1 et concentrée en degré 2 :  $LCH_{\varepsilon}^2(\Lambda_0) = \mathbb{Z}_2\langle[a]\rangle$ . De plus, le produit dans  $LCH_{\varepsilon}^*(\Lambda_0)$  est nul. Toutefois, on a :

**Proposition 5.** *Il existe  $[x_1], [x_2] \in HF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  tels que  $[a] = \mathfrak{m}_2([x_1], [x_2])$ .*

*Démonstration.* Notons  $\Sigma_1 := \Sigma$  et  $\Lambda_1 := \Lambda$ , et considérons  $\Sigma_2$  une petite perturbation hamiltonienne de  $\Sigma_1$ , par un hamiltonien dépendant uniquement de la coordonnée de symplectisation et telle que la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  soit dirigée (voir section 5.3.3). Alors  $\Sigma_2$  est un cobordisme lagrangien de  $\Lambda'_0$ , une petite perturbation de  $\Lambda_0$  qui est encore une sphère de Whitney, vers une petite perturbation de  $\Lambda_1$ , qu'on note  $\Lambda_2$ . Si la perturbation est suffisamment petite, les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_1)$  et  $\mathcal{A}(\Lambda_2)$  s'identifient canoniquement et on appelle donc encore  $\varepsilon_0$  l'unique augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda_2)$ . De plus, il y a un isomorphisme canonique  $LCH_{\varepsilon_0}^*(\Lambda_1, \Lambda_2) \simeq LCH_{\varepsilon_0}^*(\Lambda_1)$  (proposition 4). Maintenant, on sait que l'application

$$d_{+0} + d_{+-} : HF_{-\infty}^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow LCH_{\varepsilon_0}^*(\Lambda_1, \Lambda_2) \quad (6.47)$$

est un isomorphisme, donc on peut trouver  $x_1, x_2 \in CF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  et  $\beta_1, \beta_2 \in C(\Lambda_0, \Lambda'_0)$  générateurs de l'homologie  $HF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  tels que

$$\begin{aligned}[c_{21}] &= [d_{+0}(x_1)] + [d_{+-}(\beta_1)] \\ [\check{c}_{12}] &= [d_{+0}(x_2)] + [d_{+-}(\beta_2)]\end{aligned}$$

et comme  $d_{+0}$  est de degré  $-1$  et  $d_{+-}$  est de degré  $0$ , alors cela implique que  $|x_1| = |c_{21}| + 1 = 2$ ,  $|x_2| = |\check{c}_{12}| + 1 = 1$  et  $|\beta_1| = |c_{21}| = 1$  et  $|\beta_2| = |\check{c}_{12}| = 0$ . Or, encore une fois si la perturbation est suffisamment petite, comme la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  est dirigée, on a aussi un isomorphisme canonique  $LCH_\varepsilon^*(\Lambda_0, \Lambda'_0) \simeq LCH_\varepsilon^*(\Lambda_0)$  d'où  $LCH_\varepsilon^*(\Lambda_0, \Lambda'_0)$  est de rang  $1$  et concentrée en degré  $2$ , et on note aussi  $a$  son unique générateur, qui correspond sous l'isomorphisme à l'unique corde de Reeb de  $\Lambda_0$ . Donc il n'existe pas d'éléments  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $C(\Lambda_0, \Lambda'_0)$  de degré  $1$  ou  $0$ . Comme (6.47) est un isomorphisme, cela implique donc l'existence des éléments  $x_1$  et  $x_2$  dans  $HF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  satisfaisant  $[c_{21}] = [d_{+0}(x_1)]$  et  $[\check{c}_{12}] = [d_{+0}(x_2)]$ . D'après le théorème 10.5 de [CDRGG], ces générateurs de  $HF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  qui sont aussi des générateurs de  $HF(\Sigma_1, \Sigma_2)$  (voir remarque 22) correspondent à des points critiques (ou combinaisons linéaires de points critiques) d'indice  $1$  et  $2$  respectivement, qui correspondent eux-mêmes à des générateurs de l'homologie relative  $H_*(\bar{\Sigma}_1, \partial_- \bar{\Sigma}_1)$ , de degré  $1$  et  $2$  respectivement (voir proposition 4). De plus, l'application  $d_{+-}$  envoie une classe fondamentale sur une classe fondamentale, on a donc  $d_{+-}([a]) = [c_1]$ , et comme  $[c_1] = \mu_{\varepsilon_0}^2([c_{21}], [\check{c}_{12}])$  et que l'application 6.47 est un isomorphisme d'anneaux, on trouve que  $[a]$  est un produit de points d'intersection,  $[a] = \mathfrak{m}_2([x_1], [x_2])$ .  $\square$

**Remarque 22.** Si  $x$  est un cycle non trivial dans  $HF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  alors :

1.  $\partial_{-\infty}(x) = 0$  ou autrement dit  $(d_{00} + d_{-0})(x) = 0$
2.  $\nexists q, \beta$  tels que  $x = d_{00}(q) + d_{-0}(\beta)$

La première condition implique que  $d_{00}(x) = 0$  et  $d_{-0}(x) = 0$  et la seconde condition se réécrit simplement : " $\nexists q$  tel que  $x = d_{00}(q)$ " car comme la paire  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  est dirigée, les points d'intersection sont tous d'action négative et donc  $d_{0-} = 0$  (voir section 5.3.3). D'où on a en particulier :

1.  $d_{00}(x) = 0$
2.  $\nexists q$  tel que  $x = d_{00}(q)$

ce qui implique que  $x$  est un cycle non trivial dans  $HF(\Sigma_1, \Sigma_2)$ .

## 6.5 Associativité du produit et structure $A_\infty$

Le but de cette partie est de montrer qu'on peut étendre le produit en une structure  $A_\infty$  sur des familles de cobordismes transverses. On cherche donc des opérations de tout ordre qui vont satisfaire la relation  $A_\infty$  (3.1). Pour toute paire de cobordismes lagrangiens exacts transverses  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , l'opération d'ordre  $1$  est la différentielle  $\partial_{-\infty}$  sur  $CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , on la note à présent  $\mathfrak{m}_1$ . L'opération d'ordre  $2$  est le produit  $\mathfrak{m}_2$  défini pour tout triplet de cobordismes transverses. Plus généralement, pour tout entier

$d \geq 3$  et pour tout  $(d + 1)$ -uplet de cobordismes transverses  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}$ , on va construire une application

$$\mathbf{m}_d: CF_{-\infty}(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \cdots \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_{d+1})$$

de telle sorte que l'ensemble des applications  $\{\mathbf{m}_d\}_{d \geq 1}$  satisfont pour tout  $d \geq 1$  la relation :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} \mathbf{m}_{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathbf{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0$$

Pour chaque entier  $d$ , on a  $\mathbf{m}_d = m_d^0 + m_d^-$  où  $m_d^0$  est à valeurs dans  $CF(\Sigma_1, \Sigma_{d+1})$  et  $m_d^-$  est à valeurs dans  $C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_{d+1}^-)$  et on va définir séparément ces deux composantes.

### 6.5.1 Définition des opérations

Soient  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}$ , pour  $d \geq 2$  des cobordismes lagrangiens transverses de  $\Lambda_i^-$  vers  $\Lambda_i^+$  pour  $i = 1, \dots, d + 1$  tels que les algèbres  $\mathcal{A}(\Lambda_i^-)$  admettent des augmentations  $\varepsilon_i^-$ . L'opération  $m_d^0$  est naturellement la généralisation de  $m_2^0$  et est ainsi définie en comptant des courbes holomorphes avec  $d + 1$  asymptotes mixtes et dont le bord est en partie sur des morceaux non cylindriques des cobordismes. On définit donc :

$$m_d^0: CF_{-\infty}^*(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \cdots \otimes CF_{-\infty}^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF^*(\Sigma_1, \Sigma_{d+1})$$

par

$$m_d^0(a_d, \dots, a_1) = \sum_{\substack{x^+ \in \Sigma_1 \cap \Sigma_{d+1} \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1}}} \#\mathcal{M}^0(x^+; \delta_1, a_1, \delta_2, \dots, a_d, \delta_{d+1}) \cdot \varepsilon^- \cdot x^+ \quad (6.48)$$

où les  $\delta_i$  sont des mots de cordes de Reeb des  $\Lambda_i^-$  et on rappelle que le terme “ $\varepsilon^-$ ” signifie qu'on augmente toutes ces cordes pures par les augmentations correspondantes. Autrement dit, il faudrait remplacer dans la formule  $\varepsilon^-$  par  $\varepsilon_1^-(\delta_1)\varepsilon_2^-(\delta_2) \cdots \varepsilon_{d+1}^-(\delta_{d+1})$ , ce que nous ne faisons pas par souci de lisibilité. D'autre part, le choix d'étiquettes lagrangiennes considéré pour les espaces de modules est  $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1})$ . Passons maintenant à la définition de  $m_d^-$ . Comme dans le cas  $d = 2$ , cette application va compter soit des courbes à bord sur  $\mathbb{R} \times \Lambda^-$  (si toutes les asymptotes sont des cordes de Reeb), soit des bâtiments holomorphes incomplets (si au moins une des asymptotes est un point d'intersection) et on va ainsi la définir comme une composée d'applications. Tout d'abord, soit

$$f^{(d)}: CF_{-\infty}(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \cdots \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_{d+1}^-, \Lambda_1^-)$$

définie de la façon suivante. Soit  $(a_d, \dots, a_1)$  un  $d$ -uplet d'asymptotes avec  $a_i \in CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_{i+1})$  pour tout  $i = 1, \dots, d + 1$  (par convention  $\Sigma_{d+2} := \Sigma_1$ ). Supposons que l'un des  $a_i$  au moins soit un point d'intersection, c'est-à-dire une asymptote

dans  $CF(\Sigma_i, \Sigma_{i+1})$ , et notons  $j$  l'indice le plus grand tel que  $a_j$  soit justement un tel point d'intersection. On pose alors :

$$f^{(d)}(a_d, \dots, a_1) = \sum_{\substack{\gamma_{1,d+1} \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1}}} \# \mathcal{M}_{\Sigma_{j+1, j+2, \dots, d+1, 1, \dots, j}}^0(a_j; \delta_{j+1}, a_{j+1}, \dots, \dots, a_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1, a_1, \dots, a_{j-1}, \delta_j) \cdot \varepsilon^- \cdot \gamma_{1,d+1}$$

Si le  $d$ -uplet d'asymptotes est maintenant un  $d$ -uplet de cordes de Reeb  $(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  avec  $\gamma_i \in C^*(\Lambda_i^-, \Lambda_{i+1}^-)$ , on pose  $f^{(d)}(\gamma_d, \dots, \gamma_1) = 0$ . Ces applications  $f^{(d)}$  sont les généralisations des applications  $f^{(1)}$  et  $f^{(2)}$  définies au paragraphe 6.2.1 qui correspondent respectivement aux applications d'ordre 1 et 2. Rappelons par contre que pour une corde de Reeb  $\gamma$ , on a  $f^{(1)}(\gamma) = \gamma$ . Nous allons maintenant de même généraliser les bananes  $b^{(1)} := b$  et  $b^{(2)}$  par des opérations de tout ordre. Pour des entiers  $j > i$ , rappelons qu'on note  $\mathfrak{C}^*(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-) = C_{n-1-*}(\Lambda_j^-, \Lambda_i^-) \oplus C^*(\Lambda_i^-, \Lambda_j^-)$ , et on définit alors pour  $d \geq 3$  :

$$b^{(d)} : \mathfrak{C}^*(\Lambda_d^-, \Lambda_{d+1}^-) \otimes \dots \otimes \mathfrak{C}^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_{d+1}^-)$$

par

$$b^{(d)}(\gamma_d, \dots, \gamma_1) = \sum_{\substack{\gamma_{d+1,1} \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1}}} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_{d+1,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \dots, \gamma_d, \delta_{d+1}) \cdot \varepsilon^- \cdot \gamma_{d+1,1}$$

où le choix d'étiquettes lagrangiennes est  $(\mathbb{R} \times \Lambda_1^-, \dots, \mathbb{R} \times \Lambda_{d+1}^-)$ . Remarquons que comme dans le cas  $d = 2$ , pour un  $d$ -uplet  $(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  de cordes  $\gamma_i \in C^*(\Lambda_i^-, \Lambda_{i+1}^-)$ , l'application  $b^{(d)}$  correspond à l'application  $\mu_{\varepsilon_{1,2,\dots,d+1}}^d$  dans la catégorie d'augmentation  $\text{Aug}_-(\Lambda_1^- \cup \dots \cup \Lambda_{d+1}^-)$ . Sur la figure 6.32 sont représentés des exemples de courbes que compte l'application banane.

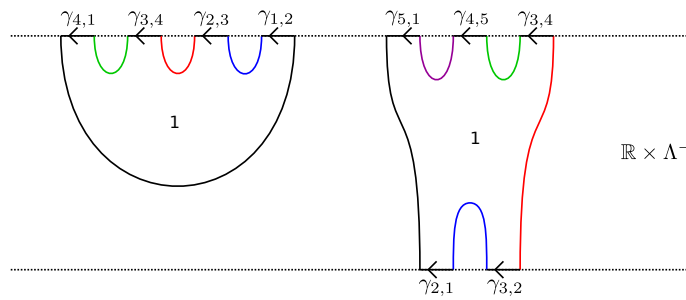


FIGURE 6.32 – A gauche une courbe contribuant à  $b^{(3)}(\gamma_{3,4}, \gamma_{2,3}, \gamma_{1,2})$ , à droite une courbe contribuant à  $b^{(4)}(\gamma_{4,5}, \gamma_{3,4}, \gamma_{3,2}, \gamma_{2,1})$ .

Enfin, pour tout  $d \geq 3$ , nous généralisons  $\Delta^{(1)} := \delta_{--}$  et  $\Delta^{(2)}$  (section 6.2.2) par :

$$\Delta^{(d)} : \mathfrak{C}^*(\Lambda_d^-, \Lambda_{d+1}^-) \otimes \dots \otimes \mathfrak{C}^*(\Lambda_1^-, \Lambda_2^-) \rightarrow C_{n-1-*}(\Lambda_{d+1}^-, \Lambda_1^-)$$

définie de la façon suivante. Soit  $(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  un  $d$ -uplet de cordes de Reeb, s'il existe un  $1 \leq i \leq d$  tel que  $\gamma_i \in C_{n-1-*}(\Lambda_{i+1}, \Lambda_i)$ , alors soit  $j$  l'indice le plus grand tel que  $\gamma_j \in C_{n-1-*}(\Lambda_{j+1}^-, \Lambda_j^-)$  alors on pose :

$$\Delta^{(d)}(\gamma_d, \dots, \gamma_1) = \sum_{\substack{\gamma_{1,d+1} \\ \delta_i}} \# \widetilde{\mathcal{M}}^1(\gamma_j; \delta_{j+1}, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1, \gamma_1, \dots \\ \dots, \gamma_{j-2}, \delta_{j-1}, \gamma_{j-1}, \delta_j) \cdot \varepsilon^- \cdot \gamma_{1,d+1}$$

où le choix d'étiquettes lagrangiennes est  $(\mathbb{R} \times \Lambda_{j+1}^-, \dots, \mathbb{R} \times \Lambda_{d+1}^-, \mathbb{R} \times \Lambda_1^-, \dots, \mathbb{R} \times \Lambda_j^-)$ . Maintenant, si  $(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  est un  $d$ -uplet de cordes  $\gamma_i \in C^*(\Lambda_i^-, \Lambda_{i+1}^-)$  on pose  $\Delta^{(d)}(\gamma_d, \dots, \gamma_1) = 0$ . On peut remarquer que les cordes de  $\Lambda_i^-$  à  $\Lambda_{i+1}^-$  qui sont des asymptotes de courbes dans les espaces de modules intervenant dans la définition de  $\Delta^{(d)}$  sont des asymptotes positives, alors que les cordes de  $\Lambda_{i+1}^-$  à  $\Lambda_i^-$  sont des asymptotes négatives. Cette opération n'intervient pas directement dans la définition des  $m_d$  mais apparaîtra lors de l'étude de bords d'espaces de modules. On a schématisé sur la figure 6.33 des exemples de courbes contribuant à  $f^{(d)}$  et  $\Delta^{(d)}$ .

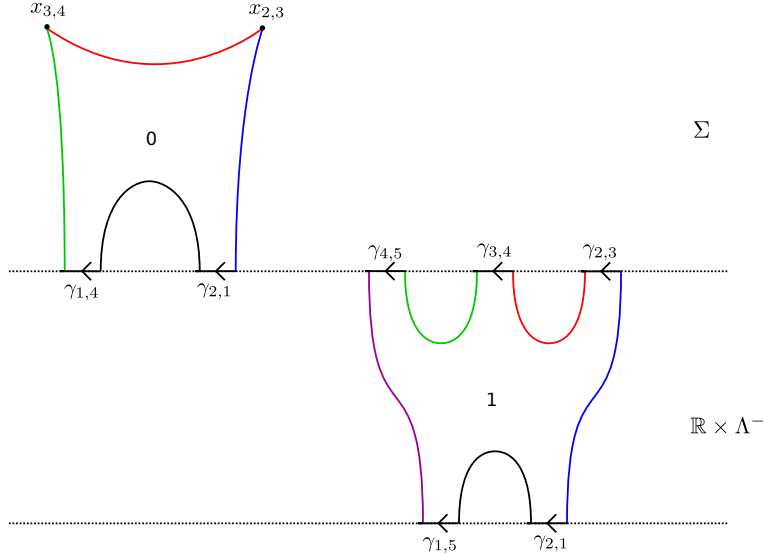


FIGURE 6.33 – À gauche : courbe contribuant à  $f^{(3)}(x_{3,4}, x_{2,3}, \gamma_{2,1})$  ; à droite : courbe contribuant à  $\Delta^{(4)}(\gamma_{4,5}, \gamma_{3,4}, \gamma_{2,3}, \gamma_{2,1})$ .

On peut finalement maintenant définir  $m_d^-$ , pour  $d \geq 3$ . On a

$$m_d^- : CF_{-\infty}^*(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \dots \otimes CF_{-\infty}^*(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_{d+1}^-)$$

défini sur les  $d$ -uplets de générateurs par

$$m_d^-(a_d, \dots, a_1) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ i_1 + \dots + i_j = d}} b^{(j)}(f^{(i_j)}(a_d, \dots, a_{d-i_j+1}), \dots, f^{(i_1)}(a_{i_1}, \dots, a_1)) \quad (6.49)$$

et on rappelle les conditions suivantes sur  $f$  dans la formule de  $m_d^-$  :

$$f^{(1)}(a_i) = a_i \quad \text{si} \quad a_i = \gamma_{i+1,i} \quad (6.50)$$

$$f^{(s)}(\gamma_{i+1,i}, \gamma_{i,i-1}, \dots, \gamma_{i-s+2,i-s+1}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 < s \leq i \quad (6.51)$$

Les formules (6.48) et (6.49) dans le cas  $d = 2$  correspondent bien au produit  $m_2$ . De plus, le théorème 12 s'applique à nouveau et on peut donc calculer que le degré de  $m_d$  est  $2 - d$ .

Sur la figure 6.34 sont représentés des exemples de courbes comptées par  $m^0$ , et sur les figures 6.35 et 6.36, des exemples de bâtiments holomorphes incomplets comptés par  $m^-$  pour différents types d'asymptotes. En fait, étant donné un  $d$ -uplet d'asymptotes  $(a_d, \dots, a_1)$ , l'application  $m_d^-$  compte toutes les configurations rigides possibles qui permettent d'associer à ces asymptotes une corde de Reeb  $\gamma_{d+1,1} \in C^*(\Lambda_1^-, \Lambda_{d+1}^-)$  positive. En effet :

1. si  $(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  est un  $d$ -uplet de cordes de Reeb, alors il y a un unique type de courbe holomorphe rigide qui a  $\gamma_{d+1,1}, \gamma_1, \dots, \gamma_d$  comme asymptotes : c'est le même type de courbes que celles que compte l'opération  $\mu_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}}^d(a_d, \dots, a_1)$  qui est égal à  $b^{(d)}(a_d, \dots, a_1) = b^{(d)}(f^{(1)}(a_d), \dots, f^{(1)}(a_1))$  où cette égalité est satisfaite par la convention (6.50). Ce dernier terme est dans l'expression de  $m_d^-(\gamma_d, \dots, \gamma_1)$  et c'est en fait le seul à être non nul par (6.51).
2. si  $(a_d, \dots, a_1)$  est un  $d$ -uplet d'asymptotes comprenant au moins un point d'intersection, pour associer à ce  $d$ -uplet une corde  $\gamma_{d+1,1}$ , on n'a pas d'autre choix que de compter des configurations à deux étages qui ne se recollent pas, autrement dit des bâtiments holomorphes incomplets. En effet, si une courbe holomorphe a une asymptote qui est un point d'intersection, alors le bord de cette courbe est en partie sur des morceaux non cylindriques des cobordismes. Mais, une courbe dont le bord n'est pas entièrement sur des cylindres ne peut pas admettre  $\gamma_{d+1,1}$  comme asymptote positive. Il est dans ce cas nécessaire d'ajouter une banane. On est donc amené à compter des bâtiments holomorphes incomplets de taille  $1|1|0$  dont les composantes sont rigides. Les asymptotes communes aux composantes du niveau inférieur et du niveau central sont des cordes qui ne sont pas dans les complexes de Floer  $CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_j)$  avec  $i > j$  (ce sont des asymptotes positives de la banane). Les différentes configurations possibles à compter s'obtiennent donc en partitionnant tout d'abord  $(a_d, \dots, a_1)$  en groupe d'asymptotes successives (il y a  $2^{d-1}$  façons de le faire). Pour chaque groupe du type  $(a_{s+k}, \dots, a_{s+1})$ , s'il y a au moins un point d'intersection alors ces asymptotes font partie d'une courbe d'indice 0 à bord sur les parties compactes des cobordismes, et qui a pour asymptotes  $\gamma_{s+1,s+k+1}, a_{s+1}, \dots, a_{s+k}$  dans cet ordre quand on parcourt le bord de la courbe dans le sens anti-horaire, avec  $\gamma_{s+1,s+k+1} \in C(\Lambda_{s+k+1}^-, \Lambda_{s+1}^-)$ . Ce type de courbe contribue à  $f^{(k)}(a_{s+k}, \dots, a_{s+1})$  par définition. En composant tout ces termes par la banane, on trouve les termes dans la

définition de  $m^-$ , en remarquant que si  $(a_{s+k}, \dots, a_{s+1})$  est un groupe de cordes de Reeb (des complexes de Floer  $CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_j)$  avec  $i > j$ ), alors ces cordes sont des asymptotes de la bananes.

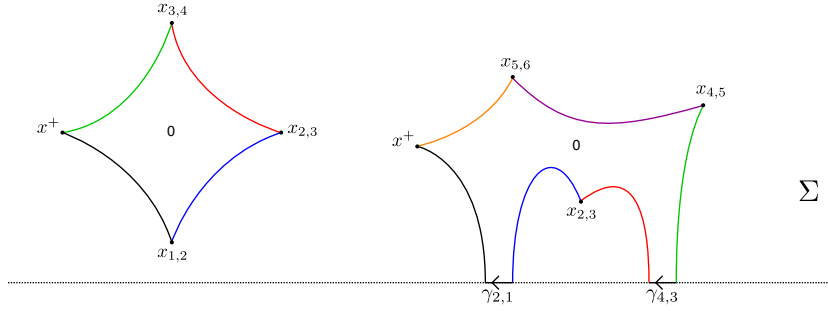


FIGURE 6.34 – A gauche : courbe contribuant à  $m_3^0(x_{3,4}, x_{2,3}, x_{1,2})$ , à droite : courbe contribuant à  $m_5^0(x_{5,6}, x_{4,5}, \gamma_{4,3}, x_{2,3}, \gamma_{2,1})$ .

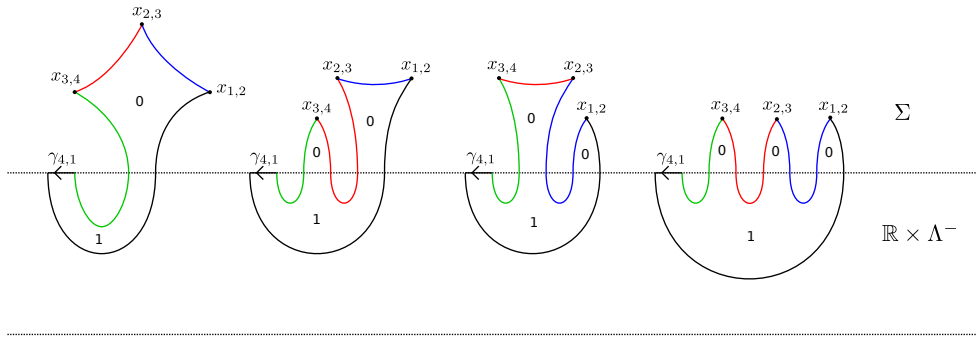


FIGURE 6.35 – Bâtiments holomorphes incomplets contribuant à  $m_3^-(x_{3,4}, x_{2,3}, x_{1,2})$ .

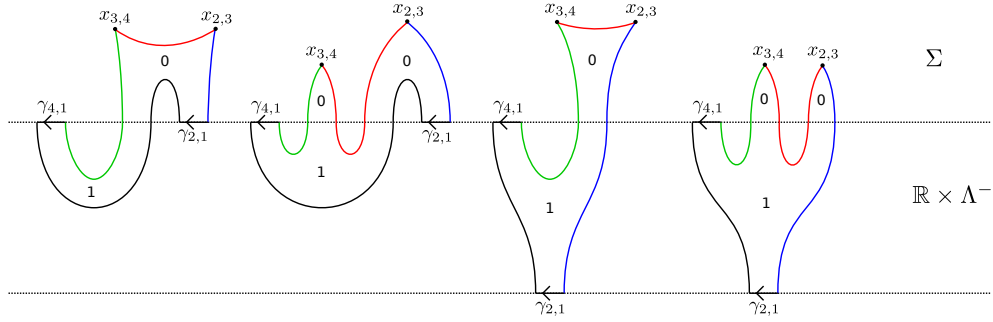
**Théorème 16.** Les opérations  $\{m_d\}_{d \geq 1}$  sont des opérations  $A_\infty$ , elles satisfont pour tout  $d \geq 1$  :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0 \tag{6.52}$$

**Corollaire 1.** L'application induite par  $m_2$  en homologie est associative.

*Démonstration.* L'associativité de  $m_2$  en homologie découle de la relation  $A_\infty$  pour  $d = 3$ .  $\square$

Pour montrer le théorème, il faut raisonner de la même façon que pour le produit  $m_2$  et étudier les dégénérescences de courbes holomorphes dans certains espaces de


 FIGURE 6.36 – Bâtiments holomorphes incomplets contribuant à  $m_3^-(x_{3,4}, x_{2,3}, \gamma_{2,1})$ .

modules. Nous voulons montrer que les applications  $m_d$  satisfont la relation 6.52 qu'on peut réécrire :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^0(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathbf{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^-(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathbf{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0$$

Nous allons montrer dans un premier temps que

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^0(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathbf{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0 \quad (6.53)$$

puis nous montrerons que

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^-(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes \mathbf{m}_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0 \quad (6.54)$$

### 6.5.2 Preuve de (6.53).

Pour montrer cette relation, il nous faut comprendre quels sont les différents bâtiments holomorphes qui contribuent aux termes dans cette somme. Pour un  $d$ -uplet d'asymptotes  $(a_d, \dots, a_1)$ , les termes de 6.53 sont tous de la forme

$$m_{d-j+1}^0(a_d, \dots, m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \quad (6.55)$$

ou

$$m_{d-j+1}^0(a_d, \dots, m_j^-(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \quad (6.56)$$

Les bâtiments holomorphes contribuant à 6.55 sont de taille  $0|1|0$  et le niveau central contient deux composantes qui peuvent se recoller sur un point d'intersection. La courbe recollée obtenue est dans l'espace de modules

$$\mathcal{M}^1(x^+; \delta_1, a_1, \delta_2, a_2, \dots, \delta_d, a_d, \delta_{d+1}) \quad (6.57)$$

D'autre part, tout bâtiment holomorphe contribuant à 6.56 est de taille  $1|1|0$  et ses composantes se recollent en une courbe d'indice 1 dans l'espace de module 6.57 à nouveau. En effet,  $m^-$  compte des bâtiments incomplets à deux niveaux dont la courbe à bord dans le bout cylindrique est une banane qui a pour sortie une corde positive  $\gamma_{n+j+1, n+1}$ . L'application  $m^0$  appliquée aux asymptotes restantes et à la corde  $\gamma_{n+j+1, n+1}$  compte ensuite une courbe holomorphe d'indice 0 dans le niveau central. Le bâtiment holomorphe incomplet contribuant à  $m^-$  se recolle à la courbe contribuant à  $m^0$  au niveau de la corde  $\gamma_{n+j+1, n+1}$  et on obtient alors une courbe d'indice 1 dans 6.57. Afin d'établir la relation 6.53, on étudie donc le bord de la compactification de l'espace de module 6.57. Considérons alors une courbe d'indice 1 dans cet espace de modules, avec on le rappelle  $a_i \in CF_{-\infty}(\Sigma_i, \Sigma_{i+1})$  et  $x^+ \in CF(\Sigma_1, \Sigma_{d+1})$ , et explicitons les différentes dégénérescences possibles d'une telle courbe. Étant donné un sous-ensemble de  $(a_d, \dots, a_1)$  de  $j$  asymptotes successives  $(a_{n+j}, \dots, a_{n+1})$ , si on "tend le cou" entre ces asymptotes et les autres, la courbe peut se briser sur :

1. un point d'intersection  $q \in CF(\Sigma_{n+1}, \Sigma_{n+j+1})$  et on obtient deux courbes d'indice 0 et d'asymptotes  $(q, a_{n+1}, \dots, a_{n+j})$  et  $(x^+, a_1, \dots, a_n, q, a_{n+j+1}, \dots, a_d)$  respectivement, dans cet ordre lorsque l'on parcourt le bord des courbes dans le sens anti-horaire. Un tel bâtiment holomorphe contribue donc au terme :

$$m_{d-j+1}^0(a_d, \dots, m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1)$$

2. deux cordes de Reeb  $\gamma_{n+j+1, n+1}$  et  $\gamma_{n+1, n+j+1}$ , si le cou tend vers les bouts négatifs des cobordismes (ce type de brisure apparaît si l'ensemble d'asymptotes  $(a_{n+j}, \dots, a_{n+1})$  contient au moins un point d'intersection). Dans ce cas, on obtient un bâtiment holomorphe à deux niveaux, avec une banane dans le niveau inférieur ayant pour entrée la corde  $\gamma_{n+1, n+j+1}$  et pour sortie  $\gamma_{n+j+1, n+1}$ . Un tel bâtiment holomorphe contribue au terme :

$$m_{d-j+1}^0(a_d, \dots, b^{(1)} \circ f^{(j)}(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1)$$

3. plusieurs cordes de Reeb du type  $\gamma_{i,k}$  avec  $i < k$  et une corde  $\gamma_{n+j+1, n+1}$ . Dans ce cas, on obtient un bâtiment holomorphe à deux niveaux, avec une banane dans le niveau inférieur telle que les cordes  $\gamma_{i,k}$  sont des asymptotes positives et la corde  $\gamma_{n+1, n+j+1}$  est la sortie. Le niveau central est composé de plusieurs courbes, l'une d'elle a comme asymptotes mixtes  $x^+, a_1, \dots, a_n, \gamma_{n+j+1, n+1}, a_{n+j+1}, \dots, a_d$  et est une courbe qui contribue à  $m^0$ , et les autres composantes ont chacune une asymptote commune avec la banane au niveau d'une corde  $\gamma_{i,k}$  et sont donc des

courbes comptées par les applications  $f^{(s)}$ . Ce type de configurations contribue donc à

$$m_{d-j+1}^0(a_d, \dots, \sum_{\substack{2 \leq s \leq j \\ i_1 + \dots + i_s = j}} b^{(s)}(f^{(i_s)}(a_{n+j}, \dots), \dots, f^{(i_1)}(\dots)), a_n, \dots, a_1)$$

En regroupant les termes comptés par les courbes brisées des points 1., 2. et 3., et ceci quel que soit le sous-ensemble d'asymptotes  $(a_{n+j}, \dots, a_{n+1})$ , on en déduit la relation 6.53.

### 6.5.3 Preuve de (6.54).

La somme dans l'expression de (6.54) appliqué à des asymptotes  $(a_d, \dots, a_1)$  se réécrit comme la somme de :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^-(a_d, \dots, a_{n+j+1}, m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \quad (6.58)$$

et

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} m_{d-j+1}^-(a_d, \dots, a_{n+j+1}, m_j^-(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \quad (6.59)$$

Regardons par exemple dans un premier temps le terme

$$b^{(1)} \circ f^{(d-j+1)}(a_d, \dots, m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1)$$

apparaissant dans l'expression 6.58. Si les asymptotes sont toutes des cordes de Reeb, alors ce terme est nul pour raisons d'énergie (voir preuve de la Relation (6.5) et figure 6.37). Si au moins une des asymptotes  $a_k$  est un point d'intersection, ce terme compte des bâtiments incomplets de taille  $1|1|0$  avec deux composantes dans le niveau central qui ont une asymptote commune au niveau d'un point d'intersection. Ces composantes se recollent et la courbe recollée est un bâtiment incomplet à deux étages dans le produit suivant (voir figure 6.37) :

$$\mathcal{M}^1(a_k; \delta_{k+1}, \dots, a_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1, a_1, \dots, \delta_k) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{d+1,1}; \xi_1, \gamma_{1,d+1}, \xi_{d+1})$$

Prenons un autre terme de 6.58, par exemple :

$$b^{(2)}(f^{(d-j+1)}(a_d, \dots, a_{n+j+1}), f^{(n+1)}(m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1))$$

Ce terme compte encore des bâtiments incomplets de taille  $1|1|0$  avec :

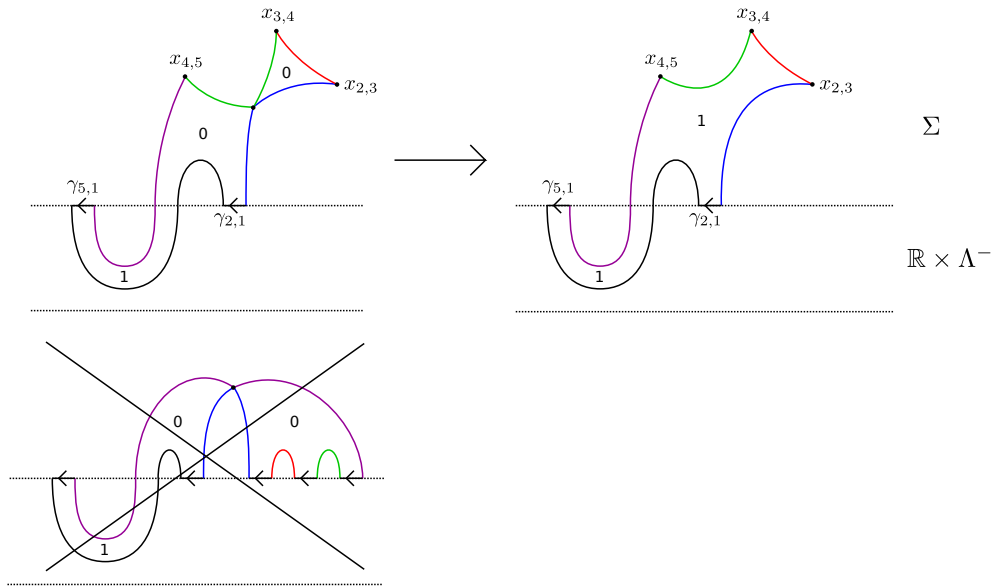


FIGURE 6.37 – En haut : exemple de bâtiment holomorphe incomplet contribuant à  $b^{(1)} \circ f^{(4)}(x_{4,5}, x_{3,4}, x_{2,3}, \gamma_{2,1})$  et courbe recollée associée. En bas : type de courbe qui ne peut pas apparaître pour raisons d'énergie.

1. si  $a_d, \dots, a_{n+j+1}$  sont toutes des cordes de Reeb : si  $n + j + 1 < d$ , alors  $f^{(d-j+1)}(a_d, \dots, a_{n+j+1}) = 0$  et si  $n + j + 1 = d$  alors  $f^{(1)}(a_d) = a_d$  et dans ce cas on a un bâtiment holomorphe incomplet avec deux composantes dans le niveau central qui ont comme asymptote commune un point d'intersection, et une banane dans le niveau inférieur qui a comme asymptotes mixtes la sortie de  $f^{(n+1)}$  qui est une corde  $\gamma_{1,d}$ , la corde  $a_d$  et une corde de sortie  $\gamma_{d+1,1}$ .
2. si  $a_d, \dots, a_{n+j+1}$  contient au moins un point d'intersection (supposons que c'est  $a_{n+j+1}$ , on fait ce choix pour simplifier l'écriture des espaces de modules ci-dessous), on a un bâtiment holomorphe incomplet avec trois composantes dans le niveau central dont deux ont une asymptote commune en un point d'intersection et l'autre a comme asymptotes mixtes  $a_d, \dots, a_{n+j+1}$  et une corde  $\gamma_{n+j+1,d+1}$ . Le niveau inférieur contient une banane d'asymptotes mixtes la sortie de  $f^{(n+1)}$ , la corde  $\gamma_{n+j+1,d+1}$  (sortie de  $f^{(d-j+1)}$ ) et comme sortie une corde  $\gamma_{d+1,1}$ .

Dans chacun des cas, comme précédemment pour des raisons d'énergie, les configurations brisées décrites ci-dessus n'ont de sens que si les asymptotes des courbes dans le niveau central ne sont pas que des cordes de Reeb (voir figure 6.37). Supposons donc par exemple que  $a_1$  soit un point d'intersection. Alors les deux courbes du niveau central qui ont une asymptote commune en un point d'intersection peuvent se recoller et après recollement la configuration brisée initiale devient un bâtiment holomorphe

incomplet dans :

$$\mathcal{M}^1(a_1; \delta_2, \dots, a_{d-1}, \delta_d, \gamma_{1,d}, \delta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{d+1,1}; \xi_1, \gamma_{1,d}, \xi_d, a_d, \xi_{d+1}) \quad (6.60)$$

pour le premier cas, et dans

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^1(a_1; \delta_2, \dots, a_{n+j}, \delta_{n+j+1}, \gamma_{1,n+j+1}, \delta_1) \\ & \quad \times \mathcal{M}^0(a_{n+j+1}; \zeta_{n+j+2}, \dots, a_d, \zeta_{d+1}, \gamma_{n+j+1,d+1}, \zeta_{n+j+1}) \\ & \quad \times \mathcal{M}^1(\gamma_{d+1,1}; \xi_1, \gamma_{1,n+j+1}, \xi_{n+j+1}, \gamma_{n+j+1,d+1}, \xi_{d+1}) \end{aligned} \quad (6.61)$$

pour le second cas. De façon générale, les termes dans 6.58 sont tous de la forme

$$b^{(j)}(f^{(i_j)} \otimes \dots \otimes f^{(i_s)}(\text{id}^{\otimes p} \otimes m_q^0 \otimes \text{id}^{\otimes r}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)})$$

avec  $p + q + r = i_s$ . Ainsi, de façon analogue aux deux cas particuliers que nous venons de voir, les bâtiments holomorphes qui contribuent à 6.58, se recollent en des bâtiments holomorphes dont les composantes sont une ou des courbes rigides dans le niveau central, une courbe non rigide (d'indice 1) dans le niveau central, et une banane rigide dans le niveau inférieur. Autrement dit, les termes dans 6.58 comptent des configurations brisées qui sont dans le bord de la compactification de produits du type de (6.60) ou (6.61). Nous allons donc étudier le bord de la compactification d'espaces de modules de courbes d'indice 1 dans le niveau central qui sont du type de celles qui servent à définir les applications  $f^{(d)}$ . Avant cela, regardons tout d'abord comment se recollent les configurations brisées que comptent les termes de 6.59. Un des termes apparaissant par exemple dans 6.59 est :

$$b^{(1)} \circ f^{(d-1)}(a_d, \dots, a_3, b^{(1)} \circ f^{(2)}(a_2, a_1))$$

où on suppose que  $a_1$  et  $a_3$  sont des points d'intersection sinon le terme vaut 0. Un tel terme compte des bâtiments holomorphes de taille  $1|1|0$  qui se recollent en des bâtiments holomorphes dans

$$\mathcal{M}^1(a_1; \delta_2, \dots, a_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1) \times \mathcal{M}^1(\gamma_{d+1,1}; \xi_1, \gamma_{1,d+1}, \xi_{d+1}) \quad (6.62)$$

(voir figure 6.38) où le premier type d'espace de modules est un espace de courbes d'indice 1 du même type que les courbes comptées par l'application  $f^{(d)}$  et le deuxième est un espace de modules de bananes rigides. Un autre terme apparaissant dans 6.59 est :

$$b^{(2)}(f^{(2)}(a_d, \dots, a_3), f^{(1)} \circ b^{(1)} \circ f^{(2)}(a_2, a_1)) = b^{(2)}(f^{(2)}(a_d, \dots, a_3), b^{(1)} \circ f^{(2)}(a_2, a_1))$$

où l'égalité est due à la convention 6.50. Les bâtiments holomorphes contribuant à ce terme sont de taille  $2|1|0$  (en supposant encore que  $a_1$  et  $a_3$  sont des points d'intersection par exemple), les deux niveaux inférieurs se recollent et on obtient un bâtiment incomplet dans :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^0(a_1; \delta_2, a_2, \delta_3, \gamma_{1,3}, \delta_1) \times \mathcal{M}^0(a_3; \xi_4, a_4, \dots, a_d, \xi_{d+1}, \gamma_{3,d+1}, \xi_3) \\ & \quad \times \mathcal{M}^2(\gamma_{d+1,1}; \zeta_1, \gamma_{1,3}, \zeta_3, \gamma_{3,d+1}, \zeta_{d+1}) \end{aligned} \quad (6.63)$$

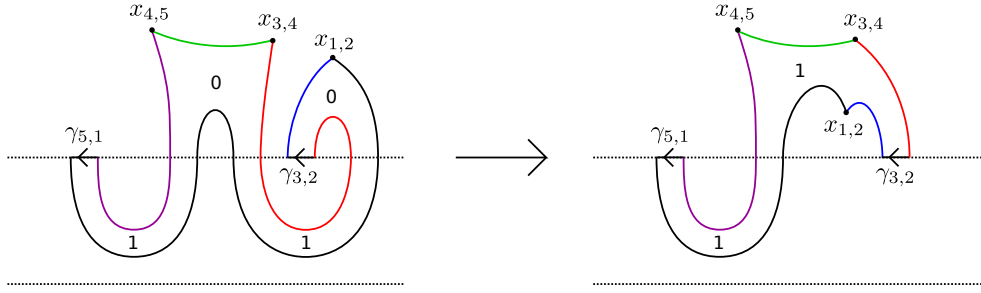


FIGURE 6.38 – Bâtiment holomorphe incomplet contribuant à  $b^{(1)} \circ f^{(3)}(x_{4,5}, x_{3,4}, b^{(1)} \circ f^{(2)}(\gamma_{3,2}, x_{1,2}))$  et la courbe recollée correspondante.

Les deux premiers espaces de modules sont rigides, ils sont comptés par les applications  $f^{(d)}$  alors que le troisième est un espace de bananes d'indice 2. De façon générale, tous les termes non nuls de 6.59 comptent des bâtiments holomorphes qui se recollent en des configurations dans des produits du type (6.62) ou (6.63). Cela amène alors à étudier le bord de la compactification d'espace de modules de dimension 1 de courbes du type de celles comptées par les  $f^{(d)}$  ainsi que le bord de la compactification d'espaces de bananes d'indice 2.

A)  $\partial \overline{\mathcal{M}}^1(a_k; \delta_{k+1}, \dots, a_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1, a_1, \dots, \delta_k)$  :

Considérons un  $d$ -uplet  $(a_d, \dots, a_1)$ , pour  $d \geq 3$  (on a déjà étudié les cas  $d = 1$  et  $d = 2$  dans la section 6.2.2) contenant au moins un point d'intersection (par exemple  $a_k$ ), et une courbe d'indice 1 dans  $\mathcal{M}^1(a_1; \delta_2, \dots, a_d, \delta_{d+1}, \gamma_{1,d+1}, \delta_1)$ . Si on tend le cou entre deux sous-ensembles d'asymptotes successives, la courbe peut se briser sur un point d'intersection (1) ou plusieurs cordes de Reeb (2), et dans ce deuxième cas, la courbe brisée obtenue est un bâtiment holomorphe à plusieurs niveaux. La corde  $\gamma_{1,d+1}$  correspondant à la sortie de  $f^{(d)}$  dans le cas d'espaces de modules de dimension 0 est une corde de Reeb qui dans un bâtiment holomorphe peut se trouver dans une courbe dans le niveau central ou dans un niveau inférieur (ce qui n'était pas le cas pour  $m^0$  car la sortie était un point d'intersection donc seulement dans une courbe dans le niveau central).

Donc, pour tout sous-ensemble d'asymptotes successives  $(a_{n+j}, \dots, a_{n+1})$ , on tend le cou entre ces asymptotes et les autres. La courbe peut se briser sur :

1. un point d'intersection, alors la courbe brisée est un bâtiment holomorphe de taille  $0|1|0$ , composé de deux courbes d'indice 0 dans le niveau central qui se recollent au niveau du point d'intersection. Pour des raisons d'indice il ne peut pas y avoir d'autres composantes. Ce type de bâtiments holomorphes contribuent à

$$f^{(d-j+1)}(a_d, \dots, m_j^0(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1)$$

2. plusieurs cordes de Reeb, et il faut à nouveau distinguer deux cas : supposons que dans la courbe brisée obtenue, la corde  $\gamma_{1,d+1}$  soit dans une composante du

niveau central. Alors cette courbe brisée est un bâtiment holomorphe de taille  $1|1|0$  avec un certain nombre de courbes d'indice 0 dans le niveau central et une banane d'indice 1 dans le niveau inférieur qui a pour sortie une corde  $\gamma_{n+j+1, n+1}$ . Cela revient à associer de toutes les façons possibles une corde  $\gamma_{n+j+1, n+1}$  aux asymptotes  $(a_{n+j}, \dots, a_{n+1})$ . Autrement dit, l'ensemble de ces configurations contribuent à :

$$f^{(d-j+1)}(a_d, \dots, m_k^-(a_{n+j}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1)$$

Supposons maintenant que dans la courbe brisée, la corde  $\gamma_{1, d+1}$  soit dans une composante du niveau inférieur. Alors on a encore un bâtiment holomorphe de taille  $1|1|0$ , avec une ou plusieurs composantes d'indice 0 dans le niveau central et une composante d'indice 1 dans le niveau inférieur qui est une courbe comptée par l'application  $\Delta$ . Chaque composante du niveau central est une courbe holomorphe avec des asymptotes des complexes de Floer et une asymptote qui est une corde de Reeb du type  $\gamma_{i, k}$  avec  $i < k$ . En effet, si la brisure avait lieu sur une corde d'un complexe, soit cela entrainerait l'apparition d'une banane, soit d'un étage dans le niveau inférieur, donc l'indice de la courbe recollée serait trop grand. Chacune de ces courbes est donc comptée par une application  $f$ . Finalement, tout ces types de bâtiments holomorphes contribuent à :

$$\Delta^{(s)}(f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes f^{(i_1)}) \text{ avec } i_s + \dots + i_1 = d$$

avec les conditions (6.50) et (6.51).

En regroupant toutes les possibilités de brisures, on trouve la relation :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} f^{(d-j+1)}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^0 \otimes \text{id}^{\otimes n}) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq d-1 \\ 0 \leq n \leq d-j}} f^{(d-j+1)}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^- \otimes \text{id}^{\otimes n}) \\ + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d}} \Delta^{(s)}(f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes f^{(i_1)}) = 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

toujours avec les conditions (6.50) et (6.51).

B)  $\partial \overline{\mathcal{M}}^2(\gamma_{d+1, 1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \dots, \gamma_d, \delta_{d+1}) :$

Étudions enfin les dégénérescences possibles de bananes d'indice 2. Considérons une telle courbe ayant pour asymptotes  $\gamma_{d+1, 1}, \gamma_1, \dots, \gamma_d$ , avec  $\gamma_i \in \mathfrak{C}^*(\Lambda_i^-, \Lambda_{i+1}^-)$ . Elle peut se briser en un bâtiment holomorphe, qui sera lui aussi entièrement contenu dans la partie cylindrique, donc en particulier chaque composante du bâtiment sera d'indice au moins 1. Ainsi, une courbe d'indice 2 peut seulement se briser en deux courbes d'indice 1, qui se recollent au niveau d'une corde de Reeb. Les dégénérescences ici sont exactement du même type que pour le cas  $d = 2$  mais avec plus d'asymptotes. Toutes les possibilités de brisures s'obtiennent alors de la façon suivante : on choisit un sous-ensemble  $(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1})$  d'asymptotes successives de la courbe puis on tend le cou entre ces asymptotes et les autres. La courbe peut se briser sur :

1. une corde de Reeb  $\gamma_{n+1,n+j+1}$  qui n'est pas dans le complexe. On obtient alors deux courbes dont la première a pour asymptotes  $\gamma_{n+1,n+j+1}, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+j}$  avec  $\gamma_{n+1,n+j+1}$  négative, ce type de courbe contribue donc à

$$\langle \Delta^{(j)}(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1}), \gamma_{n+1,n+j+1} \rangle$$

qui s'annule si  $(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1})$  est un  $j$ -uplet de cordes des complexes de Floer, par définition de  $\Delta$ , car on se retrouverait à compter une courbe sans asymptote positive. La seconde composante du bâtiment holomorphe à comme asymptotes les cordes  $\gamma_{d+1,1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1,n+j+1}, \gamma_{n+j+1}, \dots, \gamma_d$  avec  $\gamma_{n+1,n+j+1}$  positive. C'est une courbe qui contribue à

$$\langle b^{(d-j+1)}(\gamma_d, \dots, \gamma_{n+j+1}, \gamma_{n+1,n+j+1}, \gamma_n, \dots, \gamma_1), \gamma_{d+1,1} \rangle$$

Donc au final, les bâtiments holomorphes obtenus par ce type de brisure contribuent aux termes dans

$$b^{(d-j+1)}(\gamma_d, \dots, \Delta^{(j)}(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1}), \gamma_n, \dots, \gamma_1)$$

2. une corde de Reeb  $\gamma_{n+j+1,n+1}$  dans le complexe  $CF_{-\infty}(\Sigma_{n+1}, \Sigma_{n+j+1})$ , et on obtient encore un bâtiment holomorphe avec deux courbes qui ont respectivement les mêmes asymptotes que ci-dessus (avec  $\gamma_{n+j+1,n+1}$  à la place de  $\gamma_{n+1,n+j+1}$ ), mais où  $\gamma_{n+j+1,n+1}$  est positive dans la première courbe et négative dans la deuxième. Ce type de brisure arrive quel que soit le  $j$ -uplet  $(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1})$  choisi. Dans ce cas, ces deux courbes sont des bananes, les configurations brisées contribuent donc à

$$b^{(d-j+1)}(\gamma_d, \dots, b^{(j)}(\gamma_{n+j}, \dots, \gamma_{n+1}), \gamma_n, \dots, \gamma_1)$$

On a trouvé tous les types de bâtiments holomorphes dans le bord de l'espace de modules  $\mathcal{M}^2(\gamma_{d+1,1}; \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \dots, \gamma_d, \delta_{d+1})$ . On en déduit donc la relation suivante :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} b^{(d-j+1)}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes (b^{(j)} + \Delta^{(j)}) \otimes \text{id}^{\otimes n}) = 0 \quad (6.65)$$

En combinant les relations (6.64) et (6.65) obtenue, on peut déduire la relation suivante, où la somme des trois première lignes vaut 0 par (6.64) et la somme des deux dernières lignes vaut 0 par (6.65).

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d \\ 1 \leq k \leq s}} b^{(s)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes f^{(i_{k+1})} \otimes \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_k \\ 0 \leq n \leq i_k - j}} f^{(i_k - j + 1)} (\text{id}^{\otimes i_k - n - j} \otimes m_j^0 \otimes \text{id}^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d \\ 1 \leq k \leq s}} b^{(s)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_k - 1 \\ 0 \leq n \leq i_k - j}} f^{(i_k - j + 1)} (\text{id}^{\otimes i_k - n - j} \otimes m_j^- \otimes \text{id}^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d \\ 1 \leq k \leq s}} b^{(s)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes f^{(i_{k+1})} \otimes \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_k \\ n_1 + \dots + n_j = i_k}} \Delta^{(j)} (f^{(n_j)} \otimes \dots \otimes f^{(n_1)}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 0 \leq n \leq s - j}} b^{(s-j+1)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes b^{(j)} (f^{(i_{n+j})} \otimes \dots \otimes f^{(i_{n+1})}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 0 \leq n \leq s - j}} b^{(s-j+1)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes \Delta^{(j)} (f^{(i_{n+j})} \otimes \dots \otimes f^{(i_{n+1})}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] = 0
\end{aligned}$$

Les sommes dans les troisième et cinquième lignes se simplifient. En effet, dans la troisième ligne on fixe une partition de  $d$  puis on partitionne à nouveau une des parties. Dans la cinquième ligne, on fixe une partition de  $d$ , puis on regroupe des parties successives. On obtient alors finalement :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d \\ 1 \leq k \leq s}} b^{(s)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_k \\ 0 \leq n \leq i_k - j}} f^{(i_k - j + 1)} (\text{id}^{\otimes i_k - n - j} \otimes m_j^0 \otimes \text{id}^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d \\ 1 \leq k \leq s}} b^{(s)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes \sum_{\substack{1 \leq j \leq i_k - 1 \\ 0 \leq n \leq i_k - j}} f^{(i_k - j + 1)} (\text{id}^{\otimes i_k - n - j} \otimes m_j^- \otimes \text{id}^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] \\
& + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 0 \leq n \leq s - j}} b^{(s-j+1)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes b^{(j)} (f^{(i_{n+j})} \otimes \dots \otimes f^{(i_{n+1})}) \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right] = 0
\end{aligned}$$

La première somme correspond à

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d - j}} m_{d-j+1}^- (\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^0 \otimes \text{id}^{\otimes n})$$

et les deux dernières sommes à

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d - j}} m_{d-j+1}^- (\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^- \otimes \text{id}^{\otimes n})$$

car dans la seconde somme il manque les termes du type

$$b^{(s-j+1)} \left[ f^{(i_s)} \otimes \dots \otimes f^{(i_{n+j+1})} \otimes m_j^- \otimes \dots \otimes f^{(i_1)} \right]$$

mais justement ces termes là sont ceux de la troisième ligne, et donc la relation (6.54) est bien satisfaite, ce qui termine la preuve du théorème 16.

## 6.6 Foncteur $A_\infty$

Tout comme on a prolongé la différentielle et le produit sur  $CF_{-\infty}$  en une structure  $A_\infty$ , on peut prolonger  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$  en une famille d'applications  $\{\mathcal{F}^d\}_{d \geq 1}$  satisfaisant la relation de foncteur  $A_\infty$  qui, rappelons-le, est la suivante. Pour tout  $d \geq 1$  :

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 0 \leq n \leq d-j}} \mathcal{F}^{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j \otimes \text{id}^{\otimes n}) + \sum_{\substack{1 \leq s \leq d \\ i_1 + \dots + i_s = d}} m_s(\mathcal{F}^{i_s} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^{i_1}) = 0 \quad (6.66)$$

Les applications  $\mathcal{F}^d$  pour  $d \geq 3$  sont définies de manière analogue à  $\mathcal{F}^1$  et  $\mathcal{F}^2$ , la seule différence est qu'on compte des courbes qui ont plus d'asymptotes mixtes (voir figure 6.39). On définit donc

$$\mathcal{F}^d: CF_{-\infty}(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \dots \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C^*(\Lambda_1^+, \Lambda_{d+1}^+)$$

par

$$\mathcal{F}^d(a_d, \dots, a_1) = \sum_{\substack{\gamma^+ \in \mathcal{R}(\Lambda_{d+1}^+, \Lambda_1^+) \\ \delta_1, \dots, \delta_{d+1}}} \# \mathcal{M}_{\Sigma_1, 2, \dots, d+1}^0(\gamma^+; \delta_1, a_1, \dots, \delta_d, a_d, \delta_{d+1}) \cdot \varepsilon^- \cdot \gamma^+ \quad (6.67)$$

où les  $\delta_i$  sont des mots de cordes de Reeb de  $\Lambda_i^-$  et le terme  $\varepsilon^-$  signifie encore une fois que les  $\delta_i$  sont augmentées par les augmentations  $\varepsilon_i^-$ .

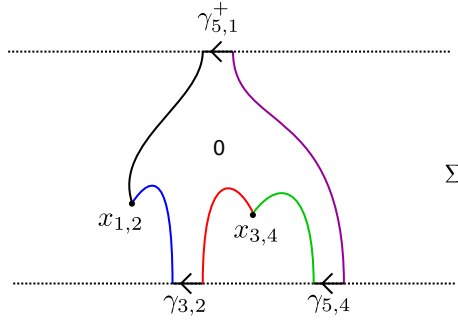
Pour montrer que la famille  $\{\mathcal{F}^d\}_{d \geq 1}$  satisfait la relation (6.66), on étudie les dégénérescences de courbes dans l'espace de modules  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, a_1, \dots, \delta_d, a_d, \delta_{d+1})$ . Une telle courbe d'indice 1 peut dégénérer et se briser :

1. en un bâtiment holomorphe de taille  $0|1|0$  tel que le niveau central contienne deux composantes d'indice 0 qui se recolle sur un point d'intersection. Ce sont donc des configurations brisées qui contribuent à

$$\langle \mathcal{F}^{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^0 \otimes \text{id}^{\otimes n}), \gamma^+ \rangle$$

2. en un bâtiment holomorphe de taille  $1|1|0$  avec éventuellement plusieurs composantes d'indice 0 dans le niveau central et une composante d'indice 1 dans le niveau inférieur (pour des raisons d'indice, ce niveau ne peut pas contenir d'autres composantes non triviales). Ces configurations contribuent à

$$\langle \mathcal{F}^{d-j+1}(\text{id}^{\otimes d-j-n} \otimes m_j^- \otimes \text{id}^{\otimes n}), \gamma^+ \rangle$$

FIGURE 6.39 – Courbe contribuant à  $\mathcal{F}^4(\gamma_{5,4}, x_{3,4}, \gamma_{3,2}, x_{1,2})$ .

3. en un bâtiment holomorphe de taille  $0|1|1$  avec à nouveau éventuellement plusieurs composantes d'indice 0 dans le niveau central et une composante d'indice 1 dans le niveau supérieur. Ces configurations contribuent enfin à

$$\langle \mu_{\varepsilon_{1,\dots,d+1}^+}^s(\mathcal{F}^{i_s} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}^{i_1}), \gamma^+ \rangle$$

La somme de ces contributions vaut 0 car correspond à l'ensemble des éléments du bord de la compactification de  $\mathcal{M}^1(\gamma^+; \delta_1, a_1, \dots, \delta_d, a_d, \delta_{d+1})$ . Ceci étant valable quel que soit  $\gamma^+ \in C(\Lambda_1^+, \Lambda_{d+1}^+)$ , on en déduit la relation (6.66).

## 6.7 Vers une catégorie $A_\infty$

Dans cette dernière section, nous considérons le cas d'objets non transverses afin de définir une catégorie  $A_\infty$  de cobordismes lagrangiens  $\mathcal{Fuk}_-(\Lambda)$  associés à une sous-variété legendrienne  $\Lambda \subset Y$ . Les objets de cette catégorie sont les triplets  $(\Sigma, \Lambda^-, \varepsilon^-)$  où  $\Lambda^- \subset Y$  est une sous-variété legendrienne,  $\varepsilon^-$  est une augmentation de  $\mathcal{A}(\Lambda^-)$ , et  $\Sigma$  est un cobordisme lagrangien exact de  $\Lambda^-$  vers  $\Lambda$ . Étant donné deux tels cobordismes  $(\Sigma_1, \Lambda_1^-, \varepsilon_1^-)$  et  $(\Sigma_2, \Lambda_2^-, \varepsilon_2^-)$ , ils ne sont pas transverses car en particulier ils ont le même bout positif. Il faut donc les perturber afin d'obtenir une paire de lagrangiennes transverses et de pouvoir ainsi calculer la différentielle  $m_1 : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  et l'application  $\mathcal{F}^1 : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  où  $\Lambda_1^+$  et  $\Lambda_2^+$  sont des perturbations de  $\Lambda$ . Le même problème se pose pour calculer les produits  $m_d$  et les applications  $\mathcal{F}^d$  pour un  $(d+1)$ -uplet de cobordismes non transverses deux à deux  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}$ .

Soient alors  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1}$  un tel  $(d+1)$ -uplet de cobordismes non transverses et soit  $T > 0$  tel que  $\Sigma_i \setminus [-T, T] \times Y \cap \Sigma_i$  soient cylindriques. Il est nécessaire de faire un choix de perturbations pour définir les opérations  $m_d$  et  $\mathcal{F}^d$ . On les perturbe de la façon suivante. Pour  $1 \leq i \leq d+1$ , et  $\epsilon > 0$  petit, notons  $\Sigma'_i := \Phi_{H_D}^{(i-1)\epsilon}(\Sigma_i)$  (voir section 5.3.3). Les cobordismes après perturbations sont donc transverses sauf éventuellement dans  $[-T, T] \times Y$ . On considère alors les lagrangiennes compactes  $\overline{\Sigma}'_1, \dots, \overline{\Sigma}'_{d+1}$  et on

leur associe des données de Floer et des données de perturbations comme le fait Seidel dans [Sei08]. Les opérations  $m_d$  et  $\mathcal{F}_d$  sur  $CF_{-\infty}(\Sigma_d, \Sigma_{d+1}) \otimes \cdots \otimes CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  compte alors des courbes holomorphes qui satisfont l'équation  $du(z) \circ j = J(z) \circ du(z)$  dans les bouts cylindriques et l'équation perturbée dans  $[-T, T] \times Y$ , c'est-à-dire des courbes holomorphes asymptotes à des trajectoires de flots hamiltoniens provenant des données de Floer associées à chaque paire de lagrangienne (voir [Sei08, équation (8.9)]).

Remarquons cependant que la catégorie  $\mathcal{Fuk}_-(\Lambda)$  construite de cette façon dépend des perturbations. Toutefois, remarquons aussi que le type de perturbations effectuées sur une famille  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{d+1} \in \text{Ob}(\mathcal{Fuk}(\Lambda))$  fait apparaître la  $(d+1)$ -copie de  $\Lambda$  dans chaque tranche  $\{t\} \times Y$  pour  $t > T$ . De plus, la catégorie d'augmentations ne dépend pas (à pseudo-équivalence près) du choix de perturbations sur la  $(d+1)$ -copie, ainsi la famille d'applications  $\{\mathcal{F}^d\}_{d \geq 0}$  définies par (6.67) pour  $d \geq 1$

$$\mathcal{F} : \mathcal{Fuk}_-(\Lambda) \rightarrow \mathcal{Aug}_-(\Lambda)$$

où l'opération  $\mathcal{F}^0$  sur les objets est donnée simplement par  $\mathcal{F}^0(\Sigma, \Lambda^-, \varepsilon^-) = \varepsilon^- \circ \Phi_\Sigma$ . Le foncteur  $\mathcal{F}$  est cohomologiquement plein et fidèle car pour tout  $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \text{Ob}(\mathcal{Fuk}_-(\Lambda))$ , l'opération  $\mathcal{F}^1 : CF_{-\infty}(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow C(\Lambda_1^+, \Lambda_2^+)$  est un isomorphisme en homologie. L'existence de ce foncteur cohomologiquement plein et fidèle  $\mathcal{F}$  peut laisser supposer que la catégorie  $\mathcal{Fuk}_-(\Lambda)$  ne va pas dépendre des perturbations, tout comme  $\mathcal{Aug}_-(\Lambda)$  n'en dépend pas à pseudo-équivalence près. Mais justement, comme pour  $\mathcal{Aug}_-(\Lambda)$ , la catégorie  $\mathcal{Fuk}_-(\Lambda)$  n'est pas unitaire donc on ne peut pas parler d'équivalence de catégorie. En supposant que le type de perturbations faites pour calculer la catégorie  $\mathcal{Aug}_+(\Lambda)$  puisse se généraliser en dimension plus grande que 3, on pourrait alors perturber les cobordismes non transverses de telle sorte à obtenir une catégorie  $\mathcal{Fuk}_+(\Lambda)$  unitaire et un foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{Fuk}_+(\Lambda) \rightarrow \mathcal{Aug}_+(\Lambda)$  qui serait une équivalence.

## Bibliographie

- [Abb14] C. Abbas. *An introduction to compactness results in symplectic field theory*. Springer, Heidelberg, 2014. 43, 46
- [AD10] M. Audin and M. Damian. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2010. 77
- [BC14] F. Bourgeois and B. Chantraine. Bilinearized Legendrian contact homology and the augmentation category. *J. Symplectic Geom.*, 12(3) :553–583, 2014. 12, 58, 59, 62, 64
- [BEH<sup>+</sup>03] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geom. Topol.*, 7 :799–888, 2003. 43, 44, 46, 52
- [CDRGG] B. Chantraine, G. Dimitroglou Rizell, P. Ghiggini, and R. Golovko. Floer theory for lagrangian cobordisms. arXiv :1511.09471[math.SG]. 12, 13, 22, 31, 37, 39, 44, 50, 65, 66, 67, 72, 75, 76, 78, 115
- [CDRGG15] B. Chantraine, G. Dimitroglou Rizell, P. Ghiggini, and R. Golovko. Floer homology and Lagrangian concordance. In *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014*, pages 76–113. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2015. 12, 22, 61, 73
- [Cha10] B. Chantraine. Lagrangian concordance of Legendrian knots. *Algebr. Geom. Topol.*, 10(1) :63–85, 2010. 11, 22, 23, 54
- [Cha15] B. Chantraine. Lagrangian concordance is not a symmetric relation. *Quantum Topol.*, 6(3) :451–474, 2015. 11, 12, 22, 23
- [Che02] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Invent. Math.*, 150(3) :441–483, 2002. 9, 47, 56
- [CKE<sup>+</sup>11] G. Civan, P. Koprowski, J. Etnyre, J. M. Sabloff, and A. Walker. Product structures for Legendrian contact homology. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 150(2) :291–311, 2011. 10, 57

- [CNS16] C. Cornwell, L. Ng, and S. Sivek. Obstructions to Lagrangian concordance. *Algebr. Geom. Topol.*, 16(2) :797–824, 2016. 12
- [DR11] Georgios Dimitroglou Rizell. Knotted legendrian surfaces with few reeb chords. 11, 02 2011. 113
- [DR16a] G. Dimitroglou Rizell. Legendrian ambient surgery and Legendrian contact homology. *J. Symplectic Geom.*, 14(3) :811–901, 2016. 50, 112
- [DR16b] G. Dimitroglou Rizell. Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of  $P \times \mathbb{R}$  and applications. *Quantum Topol.*, 7(1) :29–105, 2016. 10, 11, 49, 76
- [EES05a] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. The contact homology of Legendrian submanifolds in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . *J. Differential Geom.*, 71(2) :177–305, 2005. 9, 47, 77
- [EES05b] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . *J. Differential Geom.*, 71(1) :85–128, 2005. 21, 49
- [EES05c] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Orientations in Legendrian contact homology and exact Lagrangian immersions. *Internat. J. Math.*, 16(5) :453–532, 2005. 10, 76
- [EES07] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Legendrian contact homology in  $P \times \mathbb{R}$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(7) :3301–3335 (electronic), 2007. 9, 47, 50, 51
- [EES09] T. Ekholm, J. B. Etnyre, and J. M. Sabloff. A duality exact sequence for Legendrian contact homology. *Duke Math. J.*, 150(1) :1–75, 2009. 58, 76
- [EG98] Y. Eliashberg and M. Gromov. Lagrangian intersection theory : finite-dimensional approach. In *Geometry of differential equations*, volume 186 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 27–118. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. 11, 23
- [EGH00] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. Introduction to symplectic field theory. *Geom. Funct. Anal.*, (Special Volume, Part II) :560–673, 2000. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). 9, 49
- [EHK16] T. Ekholm, K. Honda, and T. Kálmán. Legendrian knots and exact Lagrangian cobordisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(11) :2627–2689, 2016. 11, 22, 50, 54

- [Ekh07] Tobias Ekhholm. Morse flow trees and legendrian contact homology in 1–jet spaces. *Geom. Topol.*, 11(2) :1083–1224, 2007. 113
- [Ekh08] T. Ekhholm. Rational symplectic field theory over  $\mathbb{Z}_2$  for exact Lagrangian cobordisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10(3) :641–704, 2008. 11, 22, 51
- [Ekh12] T. Ekhholm. Rational SFT, linearized Legendrian contact homology, and Lagrangian Floer cohomology. In *Perspectives in analysis, geometry, and topology*, volume 296 of *Progr. Math.*, pages 109–145. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. 22, 58
- [Eli98] Y. Eliashberg. Invariants in contact topology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 327–338, 1998. 9, 49
- [ENS02] J. B. Etnyre, L. L. Ng, and J. M. Sabloff. Invariants of Legendrian knots and coherent orientations. *J. Symplectic Geom.*, 1(2) :321–367, 2002. 10, 49
- [Etn] J. Etnyre. Legendrian and transversal knots. In *Handbook of knot theory*, pages 105–185. 21
- [Flo88a] A. Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom.*, 28(3) :513–547, 1988. 35, 46, 68
- [Flo88b] A. Floer. The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(6) :775–813, 1988. 35
- [FR11] D. Fuchs and D. Rutherford. Generating families and Legendrian contact homology in the standard contact space. *J. Topol.*, 4(1) :190–226, 2011. 12
- [Gei08] H. Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. 18
- [Gol13] R. Golovko. A note on Lagrangian cobordisms between Legendrian submanifolds of  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . *Pacific J. Math.*, 261(1) :101–116, 2013. 12, 23
- [Gro85] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985. 9, 43
- [Lod04] J-L. Loday. Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3) :267–278, 2004. 27

- [MS12] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2012. 33, 34, 66, 77
- [Mur] E. Murphy. Loose legendrian embeddings in high dimensional contact manifolds. 56
- [NRS<sup>+</sup>] L. Ng, D. Rutherford, V. Shende, S. Sivek, and E. Zaslow. Augmentations are sheaves. 11, 63
- [Pan17] Y. Pan. The augmentation category map induced by exact Lagrangian cobordisms. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(3) :1813–1870, 2017. 12
- [Rol76] D. Rolfsen. *Knots and links*. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976. Mathematics Lecture Series, No. 7. 23
- [Sei08] P. Seidel. *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. 29, 32, 33, 66, 68, 78, 132
- [ST13] J. M. Sabloff and L. Traynor. Obstructions to Lagrangian cobordisms between Legendrians via generating families. *Algebr. Geom. Topol.*, 13(5) :2733–2797, 2013. 12



# Thèse de Doctorat

Noémie LEGOUT

Structures produits sur l'homologie de Floer des cobordismes lagrangiens

Product structures in Floer theory for Lagrangian cobordisms

## Résumé

Dans cette thèse, nous construisons un produit sur le complexe de Floer associé à une paire de cobordismes lagrangiens, où ce complexe de Floer est un complexe quotient du complexe de Cthulhu défini par Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini et Golovko. Plus précisément, pour tout triplet de cobordismes lagrangiens exacts transverses dans la symplectisation d'une variété de contact, nous définissons une application  $m_2$  en comptant des courbes holomorphes rigides à bord sur les cobordismes et asymptotes à des points d'intersection et à des cordes de Reeb dans les bouts legendriens négatifs des cobordismes. En étudiant les dégénérescences de courbes holomorphes, on montre que  $m_2$  satisfait la relation de Leibniz sur les complexes de Floer associés.

Plus généralement, à tout  $(d + 1)$ -uplet de cobordismes lagrangiens transverses on associe une opération  $m_d$  définie aussi par un compte de courbes holomorphes. Nous montrons que l'ensemble des opérations  $(m_d)_{d \geq 1}$  forme une structure  $A_\infty$ .

Enfin, l'isomorphisme d'Ekholm-Seidel entre l'homologie de Floer des cobordismes et l'homologie de contact legendrienne des legendriennes dans les bouts positifs s'étend en un morphisme  $A_\infty$ .

## Mots clés

sous-variétés legendriennes, homologie de contact legendrienne, cobordismes lagrangiens, homologie de Floer, catégories  $A_\infty$ .

## Abstract

We construct a product on the Floer complex associated to a pair of Lagrangian cobordisms. This complex is a quotient complex of the Cthulhu complex defined by Chantraine, Dimitroglou-Rizell, Ghiggini and Golovko. More precisely, given three exact transverse Lagrangian cobordisms in the symplectization of a contact manifold, we define a map  $m_2$  by a count of rigid holomorphic curves with boundary on the cobordisms and asymptotic to intersection points and Reeb chords in the negative Legendrian ends of the cobordisms. By studying breakings of holomorphic curves, we prove that  $m_2$  satisfy the Leibniz rule on Floer complexes. More generally, to a  $(d + 1)$ -tuple of exact transverse Lagrangian cobordisms we associate a map  $m_d$  which is again defined by a count of holomorphic curves. We show that the maps  $(m_d)_{d \geq 1}$  are  $A_\infty$  composition maps. Finally, we extend the Ekholm-Seidel isomorphism between Floer homology of the cobordisms and Legendrian contact homology of the Legendrian positive ends to an  $A_\infty$ -morphism.

## Key Words

Legendrian submanifolds, Legendrian contact homology, Lagrangian cobordisms, Floer homology,  $A_\infty$ -categories.