

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATERIAUX

Année 2006

N° B.U. :

THESE DE DOCTORAT

*Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes*

Spécialité : AUTOMATIQUE, ROBOTIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

Présentée et soutenue publiquement par :

PIERRE-JEAN RIPERT

Mardi 24 octobre 2006
À l'École Centrale de Nantes

**MODELISATION ET IDENTIFICATION PARAMETRIQUE
DE L'EFFORT DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL
POUR LA DYNAMIQUE VEHICULE**

JURY

Rapporteurs :	Michel BASSET	Professeur à l'ESSAIM, Mulhouse
	Dominique MEIZEL	Professeur à l'ENSIL, Limoge
Examineurs :	Yves DELANNE	Directeur de recherche au LCPC, Nantes
	Maxime GAUTIER	Professeur à l'Université de Nantes, Nantes
	Wisama KHALIL	Professeur à l'ECN, Nantes
	Benoît PARMENTIER	Ingénieur à PSA Peugeot Citroën, Vélizy

Directeurs de thèse : Wisama Khalil et Maxime Gautier
Laboratoire : Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes
Co-encadrants : Benoît Parmentier
Entreprise : PSA Peugeot - Citroën

N° ED 0366-282

*« L'homme raisonnable s'adapte au monde ;
L'homme déraisonnable s'obstine à vouloir adapter le monde à lui-même.
Aussi tout progrès dépend de l'homme déraisonnable. »*

George-Bernard Shaw (Maximes pour Révolutionnaires)

*A mes grands-parents,
Puisse votre souvenir ne rien avoir de raisonnable.*

Résumé

La conception assistée par ordinateur permet d'améliorer significativement l'efficacité de la conception automobile. Néanmoins pour que la démarche soit efficace, il faut pouvoir garantir la corrélation essais/calculs : les modèles doivent être correctement paramétrés et leur comportement doit être réaliste afin de correspondre à la réalité. Etant donné les besoins des constructeurs en conception, les modèles pneumatiques doivent non seulement être identifiables et prédictifs mais permettre aussi de faire de la spécification en dynamique véhicule et être physiquement interprétables. Il n'existe actuellement pas de modèle permettant de satisfaire correctement toutes ces problématiques. La conception dynamique d'un véhicule pouvant s'interpréter comme la conception d'un système d'actionnement à quatre pneumatiques, la recherche d'un tel modèle est cruciale pour les constructeurs.

Les travaux de cette thèse portent sur l'amélioration de la corrélation essai/calcul du pneumatique. Deux axes d'améliorations sont prospectés : la méthodologie d'identification paramétrique et le modèle de pneumatique. La méthodologie d'identification paramétrique est dite « garantie » car elle est basée sur une démarche criticiste. Sur tout type d'excitation (sur banc d'essai ou véhicule), elle permet de caractériser de manière robuste aussi bien la structure que les paramètres du modèle. Le modèle de pneumatique se base sur le formalisme des robots articulés et sur la déformation vue par l'aire de contact. La mise en forme du modèle est réalisée de sorte à être compatible avec les modèles empiriques de spécification des efforts d'interaction pneumatique/sol. On obtient de cette manière un modèle paramétrique qui permet de décrire de manière réaliste et spécifiable le comportement du torseur d'effort appliqué à la base du pneumatique, en statique et en dynamique du premier ordre.

Cette méthodologie d'identification et ce modèle de pneumatique sont utilisés pour caractériser différents pneumatiques soumis au banc d'essais de PSA Peugeot Citroën. On identifie de cette manière les comportements observables pertinents. La démarche est illustrée sur les modèles d'effort latéral et du moment d'auto-alignement pour l'agrément de direction. Des mesures sur véhicule sont aussi utilisées pour identifier le modèle d'effort latéral afin de démontrer la validité de la méthode sur des sollicitations dynamiques réelles.

Abstract

Computer aided design improves dramatically car design efficiency. Nevertheless this process is efficient only if calculations agree with tests. It means that models must have the right parameters and realistic behaviours. Up to now tire models have not these qualities and they need to be improved. This improvement is a complex problem because car manufacturers need tire models to do dynamic specification. These models must have identifiable parameters with physical meaning and must be predictive. Find tire models having all these properties is an important challenge for car manufacturers because car design can be interpreted like the design of an actuator composed of four tires.

This work deals with improvement of tire correlation between real tests and simulations. Two ways are used: in one hand parametric identification methodology and in another hand tire model. Parametric identification methodology is said “guaranteed” because it is designed in a criticism way. Thus with all kind of excitations (from test bench or passenger car), structure model and parameters can be obtained robustly. Tire model is based on the robotic formalism and on empirical specification model of tire/ground interaction forces. The obtained model can be used to specify or to predict tyre static force behaviours and first order dynamics.

The developed parametric identification methodology and the tire model are combined to characterise few tires with the PSA Peugeot Citroën test bench. Pertinent and observable behaviours are so deduced. The methodology is applied to cornering force and self aligning torque models dedicated to steering handling. At the end the method is applied to real running car measurements to identify cornering force. It proves the validity of the method both for test bench data and for running car data.

Remerciements

Ce mémoire présente les travaux de thèse de doctorat réalisés dans le cadre d'une convention CIFRE entre la société PSA Peugeot Citroën et l'Institut de Recherches en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN).

Le doctorat est une école de l'autonomie et une grande partie est réalisée en solitaire. Aussi sans la confiance des aînés, il peut ne rien apporter ; et sans leur encadrement avisé, il peut conduire à la catastrophe. Je tiens donc à remercier ceux qui m'ont permis de mener ce travail dans d'excellentes conditions.

Monsieur Benoît Parmentier, mon encadrant industriel, ingénieur à PSA Peugeot Citroën pour la constance de son encadrement, ses nombreuses idées, la qualité de ses conseils, sa sympathie et pour avoir permis que ces travaux puissent converger vers des besoins industriels.

Messieurs Wisama Khalil et Maxime Gautier, mes encadrants académiques, respectivement professeur à l'Ecole Centrale de Nantes et professeur à l'Université de Nantes pour leur confiance, leur lyrisme scientifique et pour avoir assuré la qualité de ma démarche scientifique.

Monsieur Philippe Bodson, ingénieur à PSA Peugeot Citroën pour avoir fixé avec pragmatisme le cadre de cette thèse et avoir réuni les moyens qui lui ont permis d'exister.

Monsieur Laurent Di Valentin, ingénieur à PSA Peugeot Citroën pour ses grandes qualités de chef d'équipe et pour avoir aussi bien suivi et valorisé mon travail au sein de PSA Peugeot Citroën.

Monsieur Bruno Hazet, pour m'avoir accueilli dans son service à PSA Peugeot Citroën et pour avoir valorisé mon travail au sein de PSA Peugeot Citroën.

Monsieur Jean-François Lafay., directeur de l'IRCCyN, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe robotique.

REMERCIEMENTS

Monsieur Philippe Chevrel, professeur à l'Ecole des Mines de Nantes, pour m'avoir initié aux joies de la recherche lorsqu'il était mon enseignant et pour m'avoir permis de continuer dans cette voie en me dirigeant vers cette thèse.

Messieurs Michel Basset Dominique Meizel pour avoir accepté d'être mes rapporteurs, ainsi qu'à Yves Delanne pour sa participation au jury de soutenance.

Messieurs Alain Guilemond et Arnaud Porcheret ingénieurs chez PSA Peugeot Citroën pour m'avoir procuré les mesures sur banc et pour avoir partagé leurs connaissances sur le pneumatique.

Monsieur Paul Joubert, ingénieur à PSA Peugeot Citroën, pour toute la documentation qu'il m'a fournie.

Monsieur Jean Bitoun, ingénieur à AUSY, pour toutes les erreurs qu'il a pu débusquer dans mes codes et qui ne m'en a jamais tenu rigueur.

Mes parents, pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté au cours de ces longues études et pour le havre de repos qu'à toujours offert leur maison.

Mayeul, Florent, Thomas et Cyril pour l'intérêt et les réflexions qu'ils m'ont apportés à propos de mon travail lors de nos discussions dînatoires.

La majeure partie de ma famille et de mes amis dont le total désintéret aux problèmes de la dynamique multi-corps, du calcul ensembliste et de la régression robuste a été un garde fou précieux pour séparer ma vie professionnelle de ma vie privée. J'ai une attention toute particulière à l'égard de Stéphanie pour le soutien et le réconfort qu'elle m'a apportés.

Table des matières

Résumé	7
Abstract	8
Remerciements	9
Table des matières	11
Liste des figures	17
Liste des tableaux	21
Introduction	25
Chapitre 1 Algorithme d'identification garantie	33
1.1. Identification paramétrique, caractérisation structurelle	33
1.2. Eléments de réflexion sur la notion d'identification garantie	35
1.2.1. Notions relatives à l'identification	35
1.2.2. Cahier des charges d'une solution garantie.....	37
1.2.3. Stratégies d'élaboration d'une solution garantie.....	38
1.3. Méthodologie d'identification garantie	41
1.3.1. Algorithme général.....	42
1.3.2. Mise en forme.....	43
1.3.3. Conditionnement des mesures.....	44
1.3.4. Identification polynomiale robuste.....	45
1.3.5. Passage à une forme non linéaire	47
1.3.6. Exemple : Identification de la rigidité de dérive du pneumatique.	49

1.4. Moindres carrés linéaires robustes	53
1.4.1. Forme canonique du problème des moindres carrés linéaires.....	53
1.4.2. Réduction à une équation normale factorisée	54
1.4.3. Calcul des paramètres identifiables.....	57
1.4.4. Calcul de la solution paramétrique.....	58
1.4.5. Analyse de sensibilité.....	59
1.4.6. Exemples	61
1.5. Conclusion	63
Chapitre 2 Modélisation de l'effort de contact pneumatique/sol	65
2.1. Introduction	65
2.2. Structure du pneumatique	67
2.3. Modèle physique de l'effort de contact pneumatique/sol	68
2.3.1. Introduction	68
2.3.2. Repères	69
2.3.3. Modèle articulaire	71
2.3.4. Expression du modèle d'effort de contact pneumatique/sol	75
2.3.5. Modèle simplifié de l'effort d'interaction pneumatique/sol	88
2.4. Modèle empirique de l'effort d'interaction pneumatique/sol	101
2.4.1. Introduction	101
2.4.2. Spécifications des efforts d'interaction pneumatique/sol en dynamique véhicule	102
2.4.3. Modèle de Bakker-Pacejka dit modèle de la « Formule magique ».....	105
2.5. Conclusion	110
Chapitre 3 Identification du modèle d'effort de contact pneumatique/sol sur banc de mesure	111
3.1. Introduction	111
3.2. Conditions expérimentales	112
3.2.1. Description articulaire du banc d'essai	113
3.2.2. Perturbations	116

3.2.3. Procédures d'essais	123
3.2.4. Pneumatiques étudiés	127
3.3. Mise en forme du modèle d'effort de contact pneumatique/sol pour l'identification	128
3.3.1. Modèle linéaire par rapport aux paramètres de l'effort de contact pneumatique/sol	128
3.3.2. Procédure d'identification	138
3.4. Détermination de la structure du modèle de l'effort de contact juste nécessaire pour les essais de caractérisation en agrément de direction	143
3.4.1. Grandeurs d'entrées significatives	143
3.4.2. Flexibilités articulaires identifiables	147
3.4.3. Bilan sur le modèle d'effort de contact pneumatique/sol juste nécessaire pour l'agrément de direction.....	149
3.4.4. Indépendance de la rigidité de dérive de l'effort latéral par rapport au carrossage	150
3.4.5. Indépendance de l'effort latéral d'interaction pneumatique/sol par rapport à la vitesse.....	151
3.5. Résultats d'identification polynomiale sur les essais en agrément de direction	152
3.5.1. Modèles d'identification	152
3.5.2. Résultats d'identification.....	155
3.5.3. Modèle direct de simulation.....	159
3.5.4. Validation des résultats	160
3.5.5. Analyse des modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol identifiés	166
3.5.6. Identification de la rigidité de dérive de l'effort latéral sur les essais de caractérisation en sécurité active.....	173
3.6. Passage à la représentation de la Formule Magique	174
3.6.1. Algorithme de passage des paramètres polynomiaux aux paramètres de la formule magique	175
3.6.2. Paramétrages obtenus de la Formule Magique	179
3.7. Conclusion	185
 Chapitre 4 Identification du modèle d'effort de contact pneumatique/sol sur mesures embarquées	 187

4.1. Introduction	187
4.2. Modèle dynamique du véhicule	188
4.2.1. Modèle articulaire du véhicule	188
4.2.2. Modèle articulaire d'une liaison train	189
4.2.3. Modèle articulaire juste nécessaire pour l'identification des paramètres dynamiques du véhicule	191
4.3. Estimation des grandeurs géométriques et cinématiques de caisse	192
4.3.1. Estimation de la normale au sol	193
4.3.2. Estimation de la cinématique de caisse	193
4.3.3. Rejet du bruit de mesure par fenêtrage temporel	195
4.4. Identification de l'effort latéral sur mesures embarquées	195
4.4.1. Conditions expérimentales	195
4.4.2. Démarche d'identification.....	200
4.4.3. Résultats d'identification.....	202
4.5. Conclusion	207
Conclusion générale	209
Annexe A Solution au sens des « moindres carrés » d'un polynôme factorisé	213
A.1. Représentation linéaire fractionnaire (LFT)	213
A.1.1. Introduction	213
A.1.2. Propriétés.....	214
A.2. Calcul direct de l'enveloppe ensembliste extérieure	215
A.3. Solution au sens des moindres carrés d'un polynôme factorisé	215
Annexe B Formule magique	219
B.1. Grandeurs d'entrée	219
B.2. Principe de description	220
B.3. Effort longitudinal pur en régime permanent	221
B.4. Effort latéral pur en régime permanent :	222
B.5. Couple d'auto-alignement pur en régime permanent :	223

B.6. Couplages	224
B.6.1. Effort longitudinal couplé.....	224
B.6.2. Effort latéral couplé.....	224
B.7. Transitoires	225
B.7.1. Transitoire sur le glissement longitudinal :	225
B.7.2. Transitoire sur le glissement latéral :.....	225
 Annexe C Manipulation de modèles linéaires par rapport aux paramètres	 227
C.1. Opérations sur les modèles linéaires aux paramètres	227
C.1.1. Equivalence entre modèles linéaires par rapport aux paramètres.....	227
C.1.2. Produit de modèles linéaires par rapport aux paramètres.....	227
C.1.3. Somme de deux modèles linéaires par rapport aux paramètres.....	229
C.1.4. Matrices de modèles linéaires aux paramètres.	229
C.2. Manipulation de modèles polynomiaux	230
C.2.1. Dérivée d'un polynôme	230
C.2.2. Antécédent de l'extremum d'un polynôme	230
 Annexe D Moindres carrés par factorisation orthogonale	 231
D.1. Problème des moindres carrés linéaires	231
D.2. Réduction	232
D.2.1. Ellipsoïde et équation normale d'une solution au sens des moindres carrés.....	232
D.2.2. Equation normale factorisée.....	233
D.2.3. Moindres carrés pondérés.....	235
D.2.4. Moindres carrés pondérés par paquets	235
D.2.5. Moindres carrés pondérés itératifs par paquets	236
D.3. Paramètres identifiables	239
 Annexe E Eléments de la dynamique véhicule	 243
E.1. Solide caisse	243
E.2. Solides masses non suspendues	244
E.3. Solide roue	246

Annexe F Robotique articulaire	249
F.1. Description des systèmes à structure arborescente	249
F.2. Modèle géométrique direct	254
F.3. Modèle cinématique	255
F.4. Modèle dynamique	256
F.4.1. Paramètres inertiels standards.....	256
F.4.2. Propriétés de linéarité du modèle dynamique inverse	257
F.4.3. Calcul du modèle dynamique inverse	257
Annexe G Résultats d'identification des modèles linéaires par rapport aux paramètres	267
G.1. Résultats d'identification des modèles d'effort de contact	267
G.1.1. Modèle d'effort latéral.....	268
G.1.2. Modèles de moment d'autoalignement	275
G.2. Résultats d'identification de la compliance de ballant	282
G.2.1. Effort latéral	282
G.2.2. Moment d'autoalignement	283
Références	285

Liste des figures

figure 1 : Processus d'identification criticiste	36
figure 2 : Méthodologie d'identification garantie	42
figure 3 : Mise en forme	43
figure 4 : Conditionnement des mesures et estimation.....	44
figure 5 : Identification robuste de modèles polynomiaux factorisés.....	46
figure 6 : Identification robuste de modèles polynomiaux développés	47
figure 7 : Passage du paramétrage polynomial au paramétrage non linéaire	48
figure 8 : Modèles de rigidité de dérive ayant une relation avec la charge non linéaire, polynomial, linéaire	50
figure 9 : Identification de la rigidité de dérive : allure conforme / non conforme	51
figure 10 : Exemple régression robuste : Cas bruité.....	61
figure 11 : Exemple régression robuste : Cas dégénéré.....	61
figure 12 : Eléments structurels du pneumatique	67
figure 13 : Paramétrage DHM du contact pneumatique/sol	72
figure 14 : Paramétrage de l'aire de contact.....	89
figure 15 : Conventions de signe des entrées/sorties du modèle d'interaction pneumatique sol	97
figure 16 : Conicité et orientation de nappes.....	99
figure 17 : Cycle en V, périmètres du constructeur et du fournisseur.....	102
figure 18 : Rigidité de dérive selon la charge.....	103
figure 19 : Chasse selon la charge.....	103
figure 20 : Maximum d'effort latéral et dérive associée	104
figure 21 : Minimum du couple d'auto-alignement et dérive associé	104
figure 22 : Paramétrage de la formule magique antisymétrique.....	106
figure 23 : Normalisation effort latéral à carrossage nul	108
figure 24 : Normalisation moment d'auto-alignement à carrossage nul	108
figure 25 : Normalisation effort latéral à charge fixée à 4kN.....	108
figure 26 : Normalisation effort latéral à carrossage fixé à 5°	108
figure 27 : Banc de caractérisation pneumatique	113
figure 28 : Paramétrage DHM du banc de caractérisation pneumatique	116
figure 29 : Efforts et vitesses de rotation sur levé de roue en ligne droite	117
figure 30 : Effort latéral en roulage ligne droite.....	117
figure 31 : Déplacement tapis d'entraînement roue en l'air	119

figure 32 : Effort latéral, roue levée arrêtée	119
figure 33 : Effort latéral roue levée : modèles aérodynamiques.....	120
figure 34 : Effort latéral en roulage.....	121
figure 35 : Effet de la température sur l'effort latéral	122
figure 36 : Séquence ligne droite.....	124
figure 37 : Séquence échelons petite dérive	124
figure 38 : Séquence sinus de charge	125
figure 39 : Séquence sinus de dérive	125
figure 40 : Séquence profils moyenne dérive.....	126
figure 41 : Descriptif commercial des pneumatiques à caractériser	127
figure 42 : Zones utiles en dynamique véhicule sur la dérive pour l'effort longitudinal, l'effort latéral et le moment d'auto-alignement	141
figure 43 : Identification avec/sans déformation en torsion sur effort latéral (cas 40km/h et 80km/h, sinus de dérive 1° à 6Hz, charge 6kN, carrossage nul).	144
figure 44 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence créneaux petite dérive (charge à 4.5kN)	145
figure 45 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence de charge en sinus (charge nominale à 3kN, dérive à -1°).....	146
figure 46 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur séquence sinus de dérive (charge à 3kN, dérive à 6Hz, carrossage à -1.5°)	146
figure 47 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur séquence profils moyenne dérive (charge à 4.5kN)	146
figure 48 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence en ligne droite.....	147
figure 49 : Validation directe sur F_y , identification pneu b sur trajectoire 2.....	161
figure 50 : validation croisée sur F_y , identification pneu a sur trajectoire 2	161
figure 51 : Validation croisée sur F_y , identification pneu b sur trajectoire 1	161
figure 52 : Validation directe sur F_y , identification pneu a sur trajectoire 1.....	161
figure 53 : Validation directe sur M_z , identification pneu b sur trajectoire 2	161
figure 54 : Validation croisée sur M_z , identification pneu a sur trajectoire 2	161
figure 55 : Validation croisée sur M_z , identification pneu b sur trajectoire 1	162
figure 56 : Validation directe sur M_z , identification pneu a sur trajectoire 1.....	162
figure 57 : Résidu d'identification sur une séquence d'échelons à petite dérive.....	163
figure 58 : Résidu d'identification sur une séquence de charge en sinus	163
figure 59 : Résidu d'identification sur une séquence de dérive en sinus.....	164
figure 60 : Résidu d'identification sur une séquence de profils de moyenne dérive.....	164
figure 61 : Résidu d'identification sur une séquence d'échelons de petite dérive.....	164
figure 62 : Résidu d'identification sur une séquence de charge en sinus	165

figure 63 : Résidu d'identification sur une séquence de dérive en sinus.....	165
figure 64 : Résidu d'identification sur une séquence de profils de moyenne dérive.....	165
figure 65 : Rigidités de dérive identifiées sur l'effort latéral	167
figure 66 : Dunlop R16 : Réponse à une dérive pure	168
figure 67 : Michelin R15 : Réponse à une dérive pure.....	168
figure 68 : Michelin R16 : Réponse à une dérive pure.....	168
figure 69 : Michelin R17 : Réponse à une dérive pure.....	169
figure 70 : Dunlop R16 : Réponse à une torsion pure	169
figure 71 : Michelin R15 : Réponse à une torsion pure.....	170
figure 72 : Michelin R16 : Réponse à une torsion pure.....	170
figure 73 : Michelin R17 : Réponse à une torsion pure.....	170
figure 74 : Dunlop R16 : Réponse au carrossage	171
figure 75 : Michelin R15 : Réponse au carrossage.....	172
figure 76 : Michelin R16 : Réponse au carrossage.....	172
figure 77 : Michelin R17 : Réponse au carrossage.....	172
figure 78 : Comparatif des résultats d'identification des rigidités de dérive d'effort latéral.....	174
figure 79 : Réponses Dunlop R16 à $F_z=4.5\text{kN}$ et $\gamma=0$	180
figure 80 : Dunlop R16, grandeurs caractéristiques sur F_y	181
figure 81 : Dunlop R16, grandeurs caractéristiques sur M_z	181
figure 82 : Réponses Michelin R15 à $F_z=4.5\text{kN}$ et $\gamma=0$	182
figure 83 : Michelin R15, grandeurs caractéristiques sur F_y	182
figure 84 : Michelin R15, grandeurs caractéristiques sur M_z	182
figure 85 : Réponses Michelin R16 à $F_z=4.5\text{kN}$ et $\gamma=0$	183
figure 86 : Michelin R16, grandeurs caractéristiques sur F_y	184
figure 87 : Michelin R16, grandeurs caractéristiques sur M_z	184
figure 88 : Réponses Michelin R17 à $F_z=4.5\text{kN}$ et $\gamma=0$	185
figure 89 : Michelin R17, grandeurs caractéristiques sur F_y	185
figure 90 : Michelin R17, grandeurs caractéristiques sur M_z	185
figure 91 : Décomposition du véhicule en sous systèmes	189
figure 92 : Paramétrage DHM d'une liaison train	190
figure 93 : Dunlop SP 220E 195 65 R15.....	196
figure 94 : Peugeot 406	196
figure 95 : Trajectoire sinus volant, Epures des grandeurs d'entrée des pneumatiques	198
figure 96 : Trajectoire sinus, Grandeurs porte fusée, Modèle véhicule à 30ddl.....	199
figure 97 : Trajectoire sinus, Grandeurs porte fusée, Modèle véhicule à 12ddl.....	199
figure 98 : Trajectoire sinus, Grandeurs en base de roue	199

figure 99 : Trajectoire sinus, Valeurs initiales.....	199
figure 100 : Rigidité de dérive, modèle véhicule 30ddl	204
figure 101 : Rigidité de dérive, modèle véhicule 12ddl	204
figure 102 : Rigidité de carrossage, modèle véhicule 30ddl.....	205
figure 103 : Rigidité de carrossage, modèle véhicule 12ddl.....	205
figure 104 : Rigidité de torsion, modèle véhicule 30ddl	205
figure 105 : Rigidité de torsion, modèle véhicule 12ddl	205
figure 106 : Offset d'effort, modèle véhicule 30ddl.....	205
figure 107 : Offset d'effort, modèle véhicule 12ddl.....	205
figure 108 : Longueur de relaxation, modèle véhicule 30ddl.....	206
figure 109 : Longueur de relaxation, modèle véhicule 12ddl.....	206
figure 110 : Résidu d'identification, modèle véhicule 30ddl	206
figure 111 : Résidu d'identification, modèle véhicule 12ddl	206
figure 112 : Convention de signe des entrée de la formule magique	220
figure 113 : Convention de signe des entrée de la formule magique	221
figure 114 : Mouvements de la caisse par rapport au sol	244
figure 115 : Aérodynamisme de caisse.....	244
figure 116 : Voie	245
figure 117 : Angle de carrossage	245
figure 118 : Empattement.....	245
figure 119 : Angle d'enroulement	245
figure 120 : Débattement de suspension.....	245
figure 121 : Angle de pince	245
figure 122 : Systèmes de suspension, direction et freinage.....	246
figure 123 : Train avant.....	246
figure 124 : Barre anti-devers avant	246
figure 125 : Chaîne de transmission	247
figure 126 : Système de freinage.....	247
figure 127 : Les différentes structures de modélisation.....	250
figure 128 : Modélisation des structures arborescentes.....	250
figure 129 : Articulations DHM : rotoïde et prismatique	251
figure 130 : Paramètres géométriques pour un corps à plus de deux articulations.....	253
figure 131 : Bilan des efforts appliqués sur le corps Cj	258

Liste des tableaux

TABLEAU 1 : Paramétrage DHM de la liaison pneumatique/sol	73
TABLEAU 2 : Paramétrage dynamique de la liaison pneumatique/sol	74
TABLEAU 3 : Modes mesurés sur roue en l'air	84
TABLEAU 4 : Paramétrage DHM du banc de caractérisation pneumatique	115
TABLEAU 5 : Degrés a priori des polynômes du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol....	132
TABLEAU 6 : domaines utiles et nombre attendu de chaque grandeurs descriptives.....	141
TABLEAU 7 : Raideurs identifiées sur les séquences à petites dérives	148
TABLEAU 8 : Paramètres identifiables sur l'ensemble des modèles d'effort latéral.....	157
TABLEAU 9 : Paramètres identifiables sur l'ensemble des modèles de moment d'autoalignement ...	157
TABLEAU 10 : Degré juste nécessaires des polynômes des modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol.....	158
TABLEAU 11 : Raideurs de ballant identifiées.....	158
TABLEAU 12 : Identification de la raideur de ballant sur trajectoire 1	162
TABLEAU 13 : Identification de la raideur de ballant sur trajectoire 2	162
TABLEAU 14 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en torsion sur F_y ..	180
TABLEAU 15 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en torsion sur M_z .	180
TABLEAU 16 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en dérive sur F_y ...	180
TABLEAU 17 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en dérive sur M_z ..	180
TABLEAU 18 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en torsion sur F_y ..	181
TABLEAU 19 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en torsion sur M_z .	181
TABLEAU 20 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en dérive sur F_y ...	181
TABLEAU 21 : Michelin R15, coefficients formule magique du comportement en dérive sur M_z ..	181
TABLEAU 22 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en torsion sur F_y ..	183
TABLEAU 23 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en torsion sur M_z .	183
TABLEAU 24 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en dérive sur F_y ...	183
TABLEAU 25 : Michelin R16, coefficients formule magique du comportement en dérive sur M_z ..	183
TABLEAU 26 : Michelin R17, coefficients formule magique du comportement en torsion sur F_y ..	184
TABLEAU 27 : Michelin R17, coefficients formule magique du comportement en torsion sur M_z .	184
TABLEAU 28 : Michelin R17, coefficients formule magique du comportement en dérive sur F_y ...	184
TABLEAU 29 : Michelin R17, coefficients formule magique du comportement en dérive sur M_z ..	184
TABLEAU 30 : Paramétrage DHM d'une liaison train	190
TABLEAU 31 : Paramétrage DHM du solide caisse	191

TABLEAU 32 : Résultats d'identification du modèle d'effort latéral de contact pneumatique/sol avec modèle véhicule à 30ddl	203
TABLEAU 33 : Résultats d'identification du modèle d'effort latéral de contact pneumatique/sol avec modèle véhicule à 12ddl	204
TABLEAU 34 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Dunlop R16 gonflé à 2bars.....	269
TABLEAU 35 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Dunlop R16 gonflé à 2.5bars.....	269
TABLEAU 36 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Dunlop R16 gonflé à 3bars.....	270
TABLEAU 37 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R15 gonflé à 2bars.....	270
TABLEAU 38 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R15 gonflé à 2.5bars.....	271
TABLEAU 39 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R15 gonflé à 3bars.....	271
TABLEAU 40 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R16 gonflé à 2bars.....	272
TABLEAU 41 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R16 gonflé à 2.5bars.....	272
TABLEAU 42 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R16 gonflé à 3bars.....	273
TABLEAU 43 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R17 gonflé à 2bars.....	273
TABLEAU 44 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R17 gonflé à 2.5bars.....	274
TABLEAU 45 : Résultat d'identification du modèle d'effort latéral développé du Michelin R17 gonflé à 3bars.....	274
TABLEAU 46 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Dunlop R16 gonflé à 2bars.....	276
TABLEAU 47 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Dunlop R16 gonflé à 2.5bars.....	276
TABLEAU 48 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Dunlop R16 gonflé à 3bars.....	277
TABLEAU 49 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R15 gonflé à 2bars.....	277

TABLEAU 50 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R15 gonflé à 2.5bars.....	278
TABLEAU 51 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R15 gonflé à 3bars.....	278
TABLEAU 52 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R16 gonflé à 2bars.....	279
TABLEAU 53 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R16 gonflé à 2.5bars.....	279
TABLEAU 54 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R16 gonflé à 3bars.....	280
TABLEAU 55 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R17 gonflé à 2bars.....	280
TABLEAU 56 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R17 gonflé à 2.5bars.....	281
TABLEAU 57 : Résultat d'identification du modèle d'autoalignement développé du Michelin R17 gonflé à 3bars.....	281

Notations

Conventions d'écriture des torseurs d'effort et cinématique :

τ_i : torseur cinématique du repère i exprimé dans le repère i

F_i : torseur d'effort appliqué au solide i exprimé dans le repère i

Paramétrage de l'aire de contact :

χ : paramétrage angulaire de l'aire de contact

R_L : rayon de la roue non contrainte

L : longueur de l'aire de contact

w : largeur de l'aire de contact

Grandeurs d'entrées usuelles des modèles d'interaction pneumatique/sol

κ : taux de glissement longitudinal

δ : angle de dérive

$\bar{\varphi}$: courbure de trajectoire vue à l'aire de contact

φ : courbure de trajectoire vue au porte fusée

Déformation des pains de gomme dans l'aire de contact

κ' : déformation longitudinale vue par l'aire de contact

δ : déformation latérale vue par l'aire de contact

$\bar{\varphi}'$: déformation en torsion vue à l'aire de contact

φ' : déformation en pseudo torsion vue à l'aire de contact

Grandeurs relatives à la banche articulaire connectant le solide porte fusée au solide aire de contact

θ : angle de rotation de la roue par rapport au porte fusée

ω : vitesse de rotation de la roue par rapport au porte fusée

ϕ : angle de voilage de roue, formé par le plan de jante et l'axe de rotation de la roue

ξ : angle d'enroulement pneu

h : hauteur centre de roue

γ : angle de carrossage formé par le plan de jante et le plan sol

x : déplacement en avance de l'aire de contact

y : déplacement en ballant de l'aire de contact

β : angle de torsion de l'aire de contact

Grandeurs relatives au banc de caractérisation du pneumatique

x_T : déplacement longitudinal du tapis

V_T : vitesse d'entraînement du tapis

y_T : déplacement latéral du tapis

α_T : orientation du tapis

γ_{FT} : angle de carrossage formé par le bâti et le tapis d'entraînement

h_{FT} : hauteur de la roue par rapport au tapis

β_T : angle de braquage entre le bâti et la roue

Grandeurs relatives à la banche articulaire connectant le solide caisse au $i^{\text{ième}}$ solide porte fusée :

l_i : demi voie

L_i : empattement

z_i : débattement de suspension

β_i : angle de braquage

γ_i : angle de carrossage

γ_i : angle d'enroulement

Introduction

La fabrication d'un véhicule nécessite de nombreuses étapes depuis sa spécification jusqu'à sa commercialisation. Le processus de conception est complexe et soumis à de nombreuses contraintes qui évoluent constamment : attentes du marché, outils de production, technologies, normes, maintenance, budgets, délais... Les constructeurs se démarquent les uns des autres par leur capacité à répondre aux attentes du marché, leur réactivité, leur capacité à anticiper les changements de norme et par la réduction de leurs coûts de production et de conception.

Le prototypage numérique joue un rôle clé dans cette course à l'efficacité. La moindre réalisation physique coûte en effet extrêmement chère. Contrairement à des produits séries, le coût des outils de fabrication d'un prototype ne peut pas être répercuté sur la quantité. L'utilisation de la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et des modèles de calcul à éléments finis a permis de faire de grandes avancées dans ce domaine. En lieu et place de prototypes physiques, les ingénieurs travaillent sur des maquettes numériques du véhicule. Ces dernières permettent d'appréhender un grand nombre de problèmes qui vont du design à la compatibilité avec les lignes de production en passant par l'acoustique, la maintenance, la liaison au sol, etc. Une simple simulation permet d'appréhender l'effet d'une modification et s'avère beaucoup plus efficace et moins chère que la réalisation d'un prototype et son exploitation à l'aide d'une instrumentation et de campagnes de mesures.

Mais il existe nécessairement un écart entre une maquette numérique et le véhicule réel qu'elle représente. Cette différence est due à des hypothèses de modélisation invérifiables dans la réalité ou à des difficultés de modélisation. Il y a ainsi un écart inévitable entre le véhicule du monde des idées (la maquette numérique) et le véhicule du monde sensible (le prototype). Pour combler cet écart, le prototypage physique reste une nécessité. Le cycle de conception est ainsi jalonné d'étapes de corrélation entre prototypes physiques et maquettes numériques.

Dans le domaine de la dynamique véhicule, cette étape de corrélation se base en grande partie sur les modèles de synthèse et l'approche fonctionnelle. Contrairement au prototypage numérique, l'enjeu des modèles de synthèse n'est pas de concevoir un artefact du véhicule qui puisse être conçu sans nécessité d'un support physique. Il s'agit de construire des modèles

mesurables permettant de décrire des comportements sur une situation de vie donnée. Les modèles de synthèse permettent ainsi de faire des passerelles entre le monde des idées et le monde sensible.

Une composante particulièrement importante de l'approche fonctionnelle est la possibilité de faire de l'identification, c'est-à-dire aller du monde sensible vers le monde des idées plutôt que l'inverse. Au lieu de simuler différents modèles pour déterminer lequel correspond le mieux à l'observation, on déduit directement les paramètres par projection des mesures sur le modèle, ce qui s'avère plus sûr et moins fastidieux.

Mais la démarche d'identification est souvent basée sur des outils mathématiques complexes qui peuvent déboucher sur des résultats non physiques. On peut occulter ce problème en identifiant une multitude de modèles réduits bien maîtrisés sur des sollicitations très simples. Mais le comportement général n'étant pas toujours la somme des comportements de base, les résultats obtenus peuvent ne pas être corrects. Pour éviter ces deux écueils, l'identification ne doit pas être restreinte à un type de sollicitation et elle doit disposer d'indicateur de pertinence sur le résultat. Des méthodes d'identification des robots articulés réunissant ces qualités ont déjà été appliquées avec succès au véhicule. Ainsi dans [Venture 06], le formalisme des robots articulés est utilisé pour générer un modèle dynamique du véhicule linéaire par rapport aux paramètres. L'utilisation des moindres carrés linéaires robustes permet d'identifier les paramètres à partir des mesures issues d'un véhicule instrumenté.

Les travaux présentés dans ce mémoire généralisent cette technique à l'identification des modèles fonctionnels de liaison pneumatique/sol, modèles non linéaires par rapport aux paramètres. Le premier chapitre présente une méthodologie d'identification, basée sur une démarche criticiste, qui permet de faire de « l'identification garantie ». L'identification peut être faite sur tout type de trajectoire, ne nécessite pas de condition initiale et dispose d'indicateurs de confiance. Elle est à la fois structurelle et paramétrique, applicable à des modèles polynomiaux et généralisable à des modèles non linéaires tels que celui du pneumatique. Dans le cas non linéaire, l'identification est d'abord réalisée sur un modèle polynomial équivalent à la formulation non linéaire. On identifie ensuite les paramètres du modèle non linéaire à partir des coefficients polynomiaux obtenus. L'identification des paramètres du modèle non linéaire est ainsi restreinte aux comportements identifiables (comme pour l'identification polynomiale) et le modèle peut être simulé en dehors du

domaine d'identification sans risque de divergence (ce qui est nécessairement le cas avec un polynôme).

Le second chapitre présente un modèle fonctionnel du pneumatique. Ce modèle se base sur le formalisme des robots articulés pour décrire la liaison pneumatique/sol. On dispose ainsi d'une description complète des effets dynamiques induits par la rotation de roue, les flexibilités du pneumatique et de la jante ainsi que le voile de roue. On trouve de cette manière un modèle du premier ordre décrivant les mécanismes physiques de la longueur de relaxation et les interactions entre les composantes du torseur d'effort d'interaction pneumatique/sol. Les entrées du modèle d'effort d'interaction roue/sol et la structure de la matrice entrée/sortie sont obtenues à l'aide du concept de la déformation vue par l'aire de contact. On obtient ainsi des entrées physiques et moins restrictives que les grandeurs habituellement utilisées. Les opérateurs de la matrice entrée/sortie peuvent être définis à partir de la description semi empirique de Pacejka dont les liens avec la spécification en dynamique véhicule et le principe de similitude sont rappelés.

Le chapitre trois détaille l'application de l'algorithme d'identification garantie à l'identification du torseur d'effort pneumatique à partir de mesures réalisées sur banc (flat trac). L'algorithme est appliqué à différents pneus afin de faire de la caractérisation structurelle et déterminer les grandeurs d'entrée influentes parmi celles prévues par la littérature et le modèle développé au chapitre deux (dépendance en la vitesse du modèle statique, modèle physique de la longueur de relaxation, influence du carrossage, influence de la courbure de trajectoire...). Une fois le modèle juste nécessaire obtenu, les paramètres de la Formule Magique sont calculés à partir des coefficients polynomiaux identifiés.

Dans le chapitre quatre, l'algorithme est appliqué à des mesures embarquées issues d'une Peugeot 406 instrumentée. Le véhicule et les liaisons au sol sont décrits par un modèle articulaire à 58 degrés de liberté. Des estimateurs robustes des grandeurs cinématiques et géométriques utiles à l'identification du modèle de pneumatique sont présentés. L'identification du modèle d'effort latéral de contact pneumatique/sol est réalisée sur un essai afin de valider l'algorithme d'identification garantie appliqué des mesures embarquées.

Chapitre 1

Algorithme d'identification garantie

1.1. Identification paramétrique, caractérisation structurelle

Définir strictement l'identification est un problème délicat. Suivant les domaines scientifiques, elle n'est pas perçue et appliquée de la même manière. Les minéralogistes peuvent l'utiliser pour classer des cristaux, les mécaniciens pour mesurer les paramètres d'un modèle préalablement défini.

Pour le minéralogiste, l'identification consiste à analyser des qualités sensibles qui lui permettent d'infirmier ou d'affirmer des hypothèses structurelles sur ses cristaux. L'objectif étant de converger sur un modèle cristallin unique, représentatif de la classe recherchée. Dans ce cas, l'identification est une recherche de structure. Pour ce faire elle doit être menée avec une démarche qui relève du positivisme, c'est-à-dire qu'elle ne relève que de l'observation et de l'expérience.

Pour le mécanicien, la structure du modèle est déjà connue. Son objectif est de déterminer les valeurs paramétriques du modèle par analyse de son comportement. L'identification est alors menée dans le cadre de l'idéalisme, c'est-à-dire qu'on confère au modèle le même degré de réalité que le comportement du système réel.

De manière générale, on peut définir le processus d'identification comme la détermination ou la vérification de la représentation d'un objet par rapport à sa réalisation (comportement observé). On parlera de caractérisation structurelle lorsqu'on cherche à déterminer la nature d'un objet et d'identification paramétrique lorsqu'on cherche à le dimensionner. Par nature, la caractérisation structurelle nécessite de se placer dans un cadre positiviste, à l'opposé de l'identification paramétrique qui nécessite un cadre idéaliste.

Si on fait l'abus de désigner par un même terme deux approches si différentes, c'est parce que techniquement parlant, on ne sait faire que de l'identification paramétrique... En effet, dans le cas d'une caractérisation structurelle, il s'agit nécessairement de la première étape à réaliser.

C'est une analyse a posteriori du résultat qui permet de qualifier la structure du modèle (voir §1.2.1).

Cette obligation de devoir se placer dans un cadre idéaliste rend la démarche d'identification particulièrement délicate, qu'elle soit structurelle ou paramétrique. En pratique, le cadre idéaliste n'est jamais strictement respecté parce que :

- les hypothèses du modèle peuvent être restrictives et parfois incohérentes avec le système réel,
- le modèle peut être trop complexe par rapport à l'actionnement du système,
- la mesure peut contenir des informations exogènes à l'objet d'étude.

A titre d'exemple, prenons le cas d'un poulet. Il est inutile d'essayer de le décrire avec un modèle de poisson. Si on dispose d'un modèle d'oiseau, il est inutile de chercher à caractériser l'adaptation physiologique du poulet aux conditions de vol en haute altitude. Enfin la pesée d'un poulet mouillé sera toujours biaisée par une inconnue : le poids de l'eau dans les plumes.

Si cet exemple du poulet paraît simpliste, c'est parce que « l'objet poulet » est parfaitement connu de tous. C'est une volaille de basse cours et les plumes retiennent l'eau (mais la plume étant hydrophobe dans le cas d'une pluie battante, l'exemple n'est pas si simpliste ...). Pour des systèmes plus complexes, dont une grande partie de systèmes industriels, cette connaissance peut manquer. Les violations du cadre idéaliste sont alors beaucoup plus insidieuses et délicates à détecter. Ainsi dans le cas d'une caractérisation du pneumatique beaucoup de questions sont ouvertes et poser un cadre d'étude idéaliste devient une véritable problématique :

- Quelles sont les entrées influentes du pneumatique ?
- Les sculptures ont-elles un impact sur la dynamique véhicule ?
- Si le comportement change avec la vitesse est-ce parce le pneu travaille plus et s'échauffe ? Est-ce dû à l'augmentation des forces de Coriolis appliquées à la bande de roulement ?
- Comment solliciter un pneumatique sans l'user ?
- Comment évolue le comportement d'un pneu usé ? Peut-on le mesurer ?
-

Si on prend en compte tous ces phénomènes, on court le risque d'obtenir un modèle trop complexe et peu pertinent par rapport à ce qu'on souhaite décrire. Si à l'inverse, on les néglige tous, il risque d'être trop simple. Dans les deux cas, le résultat de l'identification est biaisé. Le modèle identifié n'est pas robuste et a une faible valeur prédictive.

Ainsi, du fait de son cadre idéaliste, le résultat issu d'une identification paramétrique est à considérer avec précaution. Afin d'éviter ces désagréments et offrir des garanties à la solution obtenue, est-il possible d'intégrer une démarche positiviste lors de l'identification paramétrique ?

Ce chapitre présente un algorithme spécialement mis au point pour répondre à ce type de problématique. En substance, l'identification est toujours faite dans un cadre idéaliste, mais le modèle est simplifié de sorte à avoir la complexité juste nécessaire pour rendre compte de l'expérience. De plus, le résultat offre la garantie d'être cohérent avec les concepts de base du modèle initial. La solution a ainsi un caractère positiviste.

1.2. Eléments de réflexion sur la notion d'identification garantie

1.2.1. Notions relatives à l'identification

Positivisme et idéalisme sont les versions modernes de l'empirisme et du rationalisme. L'un des plus grand représentant de l'empirisme fut John Locke (1632-1704). Ce courant considère que la faculté d'entendement est initialement une entité vierge qui nécessite l'apport d'informations du monde extérieur pour exister. Il s'oppose au rationalisme qui considère que l'être humain est intrinsèquement capable d'atteindre une certaine forme de connaissance (métaphysique, scientifique, éthique, ...) par le seule usage de la raison. Son adepte le plus éminent : René Descartes (1596-1650) a montré dans « Méditations métaphysiques » **[Descartes 41]** comment selon lui on peut accéder à la connaissance de l'existence de Dieu par la raison seule.

Ces deux courants de pensée ont été fédérés par le criticisme dont on attribue généralement la paternité à Emmanuel Kant (1724-1804). Le criticisme peut se résumer en 3 thèses **[Imago Mundi]** :

- la vérité est accessible à l'entendement ; mais au lieu de naître d'une prétendue conformité du jugement à un objet externe, elle naît de l'accord de nos représentations entre elles et de l'application possible des concepts aux phénomènes, unique objet de l'intuition empirique,
- toute connaissance suppose l'intervention d'une matière de provenance empirique et d'une forme ou concept fourni par l'entendement,
- la recherche d'absolu est inabordable.

Notre objectif étant de concilier idéalisme et positivisme, suivre la démarche du criticisme semble la voie la plus indiquée. D'un point de vue philosophique, on ne saurait donner un meilleur résultat d'identification que celui basé sur une méthodologie totalement criticiste. Un tel résultat peut être qualifié de « solution garantie ». La figure 1 illustre le processus d'identification criticiste.

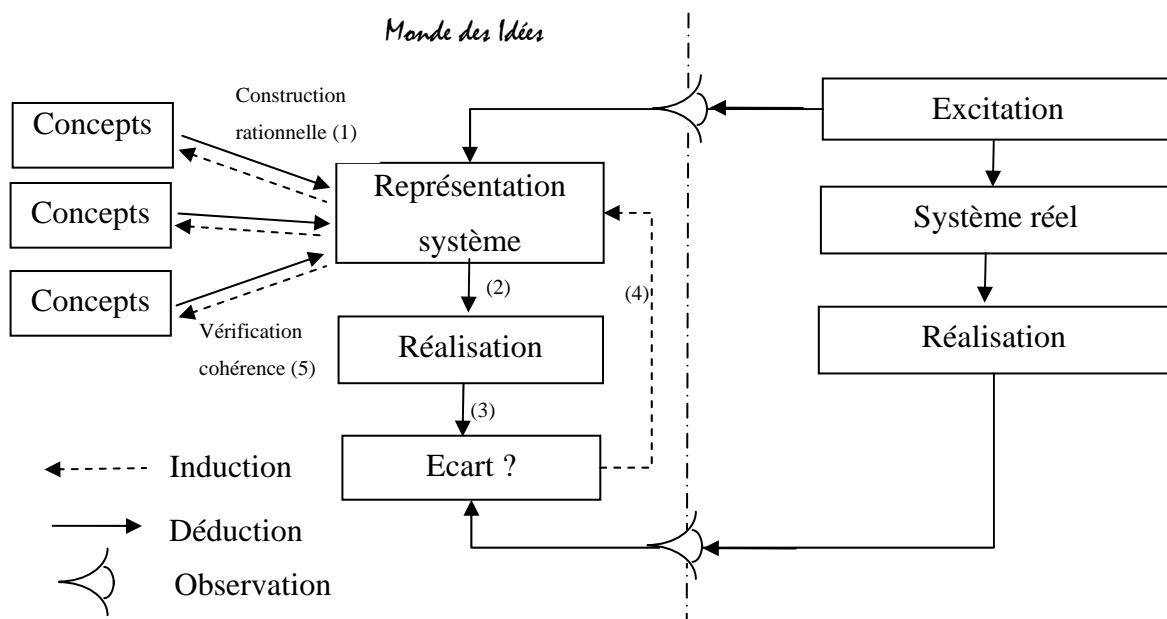


figure 1 : Processus d'identification criticiste

Suivant le contexte et notamment le niveau de représentativité du modèle utilisé, l'identification peut être appliquée dans une démarche idéaliste (identification paramétrique) ou positiviste (caractérisation structurelle). Dans les deux cas, l'identification doit comporter une première étape effectuée dans un cadre idéaliste. Cette contrainte est due au fait que son principal objet d'étude est la différence entre la réalisation du monde des idées et la réalisation du monde sensible (la réalisation est en effet le seul objet commun aux deux mondes, ce qui offre la possibilité d'une comparaison directe). Or pour qu'une réalisation existe dans le

monde des idées, il faut nécessairement un modèle pour la générer (de la même manière qu'il faut un système dans le monde sensible).

Ce modèle est issu d'une construction rationnelle de concepts (1). Ces concepts ayant une valeur réaliste, le modèle obtenu est sensé hériter de cette propriété. Sous cette hypothèse, il peut être utilisé pour obtenir une réalisation par déduction (2). La réalisation obtenue est comparée à celle observée dans le monde sensible (3). La comparaison peut s'appuyer sur les notions de mesure (distance moyenne, distance au pire cas) ou de consistance (inclusion de la réalisation observée dans la réalisation déduite associée aux erreurs d'observation et de modèle).

A partir de cette comparaison entre les réalisations, on peut réaliser une étude de sensibilité et modifier le modèle de sorte à en éliminer les parties non représentatives (4). Ce processus inductif est généralement purement mathématique. Il comporte alors le risque de déboucher sur un modèle simplifié incohérent avec les concepts initiaux. Il convient donc de s'assurer de la cohérence du modèle simplifié avec ces concepts (5). Dans [Ripert 03] et [Ripert 04] un formalisme des modèles physiques est défini afin de réaliser de la simplification automatique de modèles.

1.2.2. Cahier des charges d'une solution garantie

Etant donné le processus d'identification criticiste, la solution générée : la « solution garantie » doit vérifier les propriétés suivantes :

- **Consistance avec la richesse d'excitation**

Une partie modélisée du système, mais non excitée, doit être supprimée de l'identification.

- **Cohérence avec les concepts du modèle**

Le système identifié ne doit pas être en incohérence avec les concepts du modèle initial

- **Robustesse**

L'influence du bruit et de la dispersion de mesure est rejetée au mieux et diminue avec la quantité d'information.

- **Identifiabilité paramétrique**

Il faut disposer d'un indicateur de sensibilité sur chaque paramètre. Pour se faire, l'influence de l'erreur de modèle et des erreurs de mesures doit être projetée sur les paramètres sous forme d'une incertitude.

- **Positivisme**

En dehors du modèle initial, l'identification ne doit pas nécessiter d'hypothèses a priori.

Nous nous attachons dans la partie suivante à détailler les techniques mathématiques permettant de vérifier ces propriétés.

1.2.3. Stratégies d'élaboration d'une solution garantie

1.2.3.1. Consistance avec la richesse d'excitation

La consistance avec la richesse d'excitation peut être réalisée en faisant une analyse de sensibilité du modèle identifié. Si des paramètres n'influent pas la sortie du modèle, ils peuvent être supprimés de l'identification. L'acte de suppression de paramètres de l'identification revient à considérer qu'ils sont connus et fixés à une valeur a priori.

Dans le cas d'un système linéaire, la valeur a priori peut être systématiquement fixée à zéro, ce qui revient à simplifier le modèle au sous espace des paramètres identifiables. Une fois une solution obtenue dans ce sous espace, il est toujours possible de fixer d'autres valeurs a priori sans altérer la qualité de corrélation (voir §1.4.6).

Dans le cas d'un système non linéaire, cette valeur a priori est à fixer au cas par cas. Le choix d'une mauvaise valeur peut conduire à modéliser un domaine de fonctionnement incohérent avec le fonctionnement réel à caractériser.

1.2.3.2. Cohérence avec les hypothèses initiales

Le modèle initial est une construction rationnelle d'un ensemble de modèle de concepts et le modèle simplifié se doit d'être cohérent avec un sous ensemble de ces concepts. Un concept pouvant impliquer l'existence de plusieurs paramètres, la simplification d'un seul paramètre n'implique pas nécessairement la simplification d'un concept. Par contre une simplification

itérative de paramètres (s'il s'agit bien des moins sensibles), finit nécessairement par aboutir à un modèle cohérent avec un sous ensemble de concepts

La consistance du modèle identifié avec les concepts (ou hypothèses) de départ peut ainsi se baser sur un processus de simplification paramétrique, couplé à un processus de vérification des concepts initiaux. Si on constate l'incohérence du modèle identifié avec un des concepts, il suffit de continuer à le simplifier jusqu'à lever toutes les incohérences.

La vérification de la consistance du résultat avec les concepts initiaux peut être faite par une série de tests sur le modèle identifié de sorte à valider son comportement sur des cas simples. On peut réaliser par exemple une analyse variationnelle afin de vérifier que la cohérence des racines et des extrema sont bien dans les domaines attendus.

1.2.3.3. Robustesse

La robustesse est assurée par le choix du critère de comparaison entre réalisation sensible et réalisation déduite. Le critère choisi est la minimisation de la norme H_2 de la différence entre les deux réalisations. Cette quantité est proportionnelle à l'estimation de la variance d'observation sur la sortie. D'après la loi des grands nombres, cet estimateur de variance converge vers la variance réelle de l'erreur d'observation (idéalement le bruit du capteur) avec l'augmentation du nombre d'échantillons. Mathématiquement la minimisation de ce critère revient à résoudre une problématique des moindres carrés.

1.2.3.4. Identifiabilité paramétrique

L'identifiabilité paramétrique est obtenue par projection de l'écart entre les deux réalisations sur l'espace paramétrique. L'écart entre les deux réalisations est généralement appelé erreur. Il peut s'agir de l'erreur d'entrée si on considère des écarts sur les variables entrantes, de l'erreur de sortie si ce sont les variables de sortie (les entrées et les sorties du système étant définies à partir de la représentation d'état du système).

La projection d'erreur sur l'espace paramétrique consiste à calculer une erreur sur les paramètres qui soit cohérente avec l'erreur de prédiction du modèle.

Un paramètre associé à une erreur importante implique qu'il peut varier en restant cohérent avec l'erreur. Sa valeur nominale n'est donc pas accessible. Le paramètre n'est pas identifiable.

La projection des erreurs de prédiction sur les paramètres peut se faire par approche vraisemblable (approche au cas moyen) ou par approche consistante (approche au pire cas):

- L'approche vraisemblable associe à chaque paramètre une variable aléatoire suivant une loi gaussienne (définie par une moyenne et une variance).
- L'approche consistante associe à chaque paramètre une variable aléatoire suivant une loi de distribution uniforme (définie par un centre et un rayon).

L'approche vraisemblable repose sur le postulat qu'il existe une solution paramétrique nominale (solution idéale à laquelle on attache une existence réaliste). Cette solution est utilisée pour calculer l'erreur paramétrique. Dans le cas où la solution nominale n'existe pas, le résultat de l'approche vraisemblable risque d'être biaisé et qu'on ne puisse pas le détecter.

L'approche consistante à faire l'hypothèse que toutes les solutions sont réalistes. On élimine ensuite toutes celles qui ne permettent pas de retrouver le comportement mesuré. On obtient de cette manière l'ensemble des solutions admissibles. Cette approche est plus générale, mais les algorithmes de calculs actuels (basés sur l'analyse par intervalle) sont de complexité exponentielle au nombre de paramètres. Il existe bien des algorithmes de complexité polynomiale mais ces derniers génèrent une enveloppe extérieure des solutions admissibles. L'écart entre cette enveloppe et l'ensemble des solutions admissibles n'est pas mesurable et il est généralement si important que la solution obtenue n'est pas exploitable.

1.2.3.5. Positivisme

Une solution aux moindres carrés s'obtient par optimisation. Dans le cas d'un modèle non linéaire, l'optimisation est locale et calcul généralement une solution qui dépend des conditions initiales sur les paramètres. Cette information a priori va à l'encontre d'une démarche positiviste. A l'inverse, un modèle linéaire par rapport aux paramètres peut être identifié de manière unique, sans nécessité de conditions initiales.

1.2.3.6. Conclusion

L'utilisation d'un modèle linéaire par rapport aux paramètres semble être le plus indiqué pour faire de l'identification garantie. Contrairement à un modèle non linéaire, il peut être simplifié automatiquement et être identifié sans condition initiale. Le calcul d'erreur paramétrique par consistance serait idéal mais il pose trop de difficultés de mise en œuvre. On lui préfère donc une technique vraisemblable appliquée de manière itérative de sorte à ce quelle soit la plus robuste possible.

1.3. Méthodologie d'identification garantie

Cette partie présente les détails de fonctionnement de la méthodologie d'identification garantie utilisée dans la suite de ce mémoire. La présentation est faite avec une logique SADT (System Analysis and Design Technique) où chaque fonction est hiérarchisée en niveau de détails de plus en plus fins. Seuls les niveaux 0 et 1 (voir 2) sont présentés. Les autres niveaux n'ont pas de valeur générale car ils sont intimement liés aux choix techniques et aux modèles utilisés. Ils seront développés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

1.3.1. Algorithme général

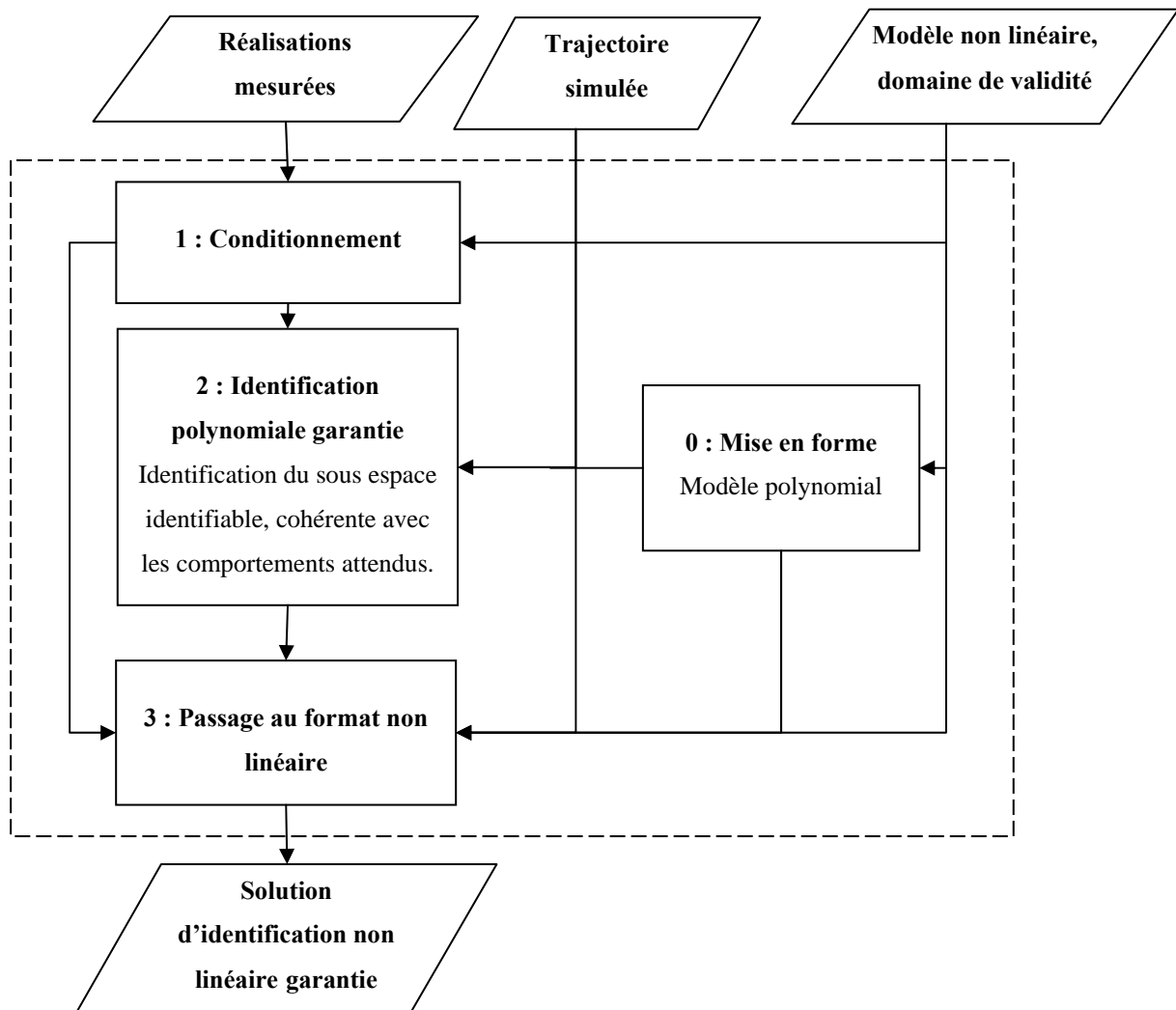


figure 2 : Méthodologie d'identification garantie

La méthodologie se décompose en trois étapes indépendantes auxquelles il faut ajouter une étape de prétraitement pour la mise en forme du modèle :

- 0- Mise en forme
- 1- Conditionnement
- 2- Identification polynomiale garantie
- 3- Passage à une forme non linéaire

Le rôle et le fonctionnement de ces étapes sont expliqués dans la suite.

1.3.2. Mise en forme

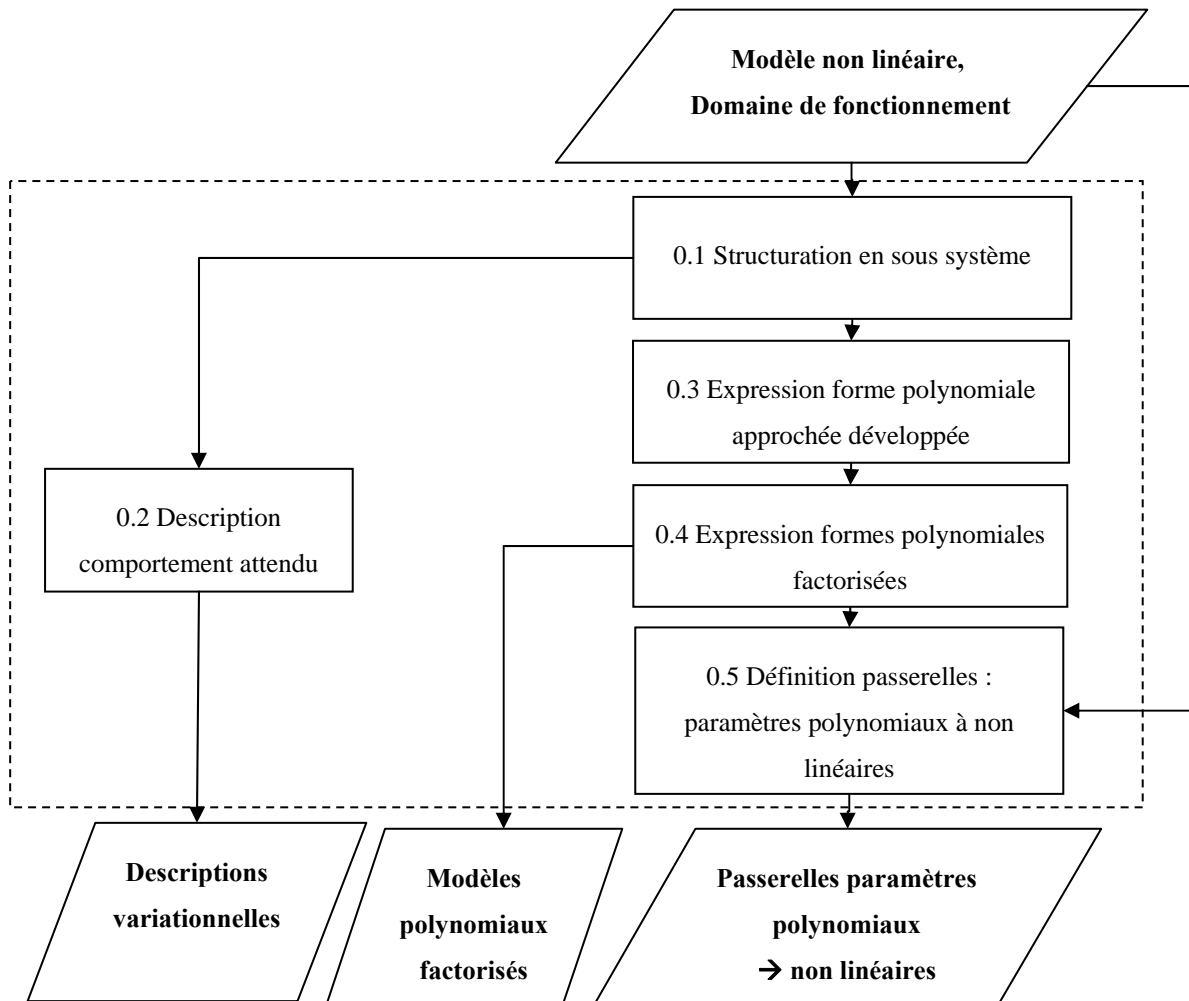


figure 3 : Mise en forme

L'étape de mise en forme consiste à préparer le modèle de connaissance initial pour pouvoir y appliquer l'algorithme d'identification garantie. Il faut pour cela :

- Ecrire un modèle polynomial équivalent au modèle non linéaire

Les opérations d'addition et de multiplication de modèles linéaires par rapport aux paramètres sont présentées en annexe C. Ces opérations permettent de construire un modèle macroscopique linéaire par rapport aux paramètres à partir de sous modèles linéaires par rapport aux paramètres (sous réserve que le modèle macroscopique soit une composition linéaire de ses sous modèles).

Une fois le modèle macroscopique linéaire par rapport aux paramètres identifié, certains paramètres des sous modèles sont considérés connus. Le modèle macroscopique linéaire par rapport aux paramètres est alors reconstruit avec cette nouvelle connaissance et

identifié itérativement jusqu'à ce que tous les paramètres des sous modèles soient déterminés.

- Définir des critères comportementaux.

Ces derniers permettent de vérifier que le comportement identifié a bien l'allure attendue sur des sollicitations simples et maîtrisées.

- Définir des algorithmes de changement de modèle

Ces algorithmes permettent de passer du résultat d'identification polynomial à un résultat d'identification du modèle non linéaire.

1.3.3. Conditionnement des mesures

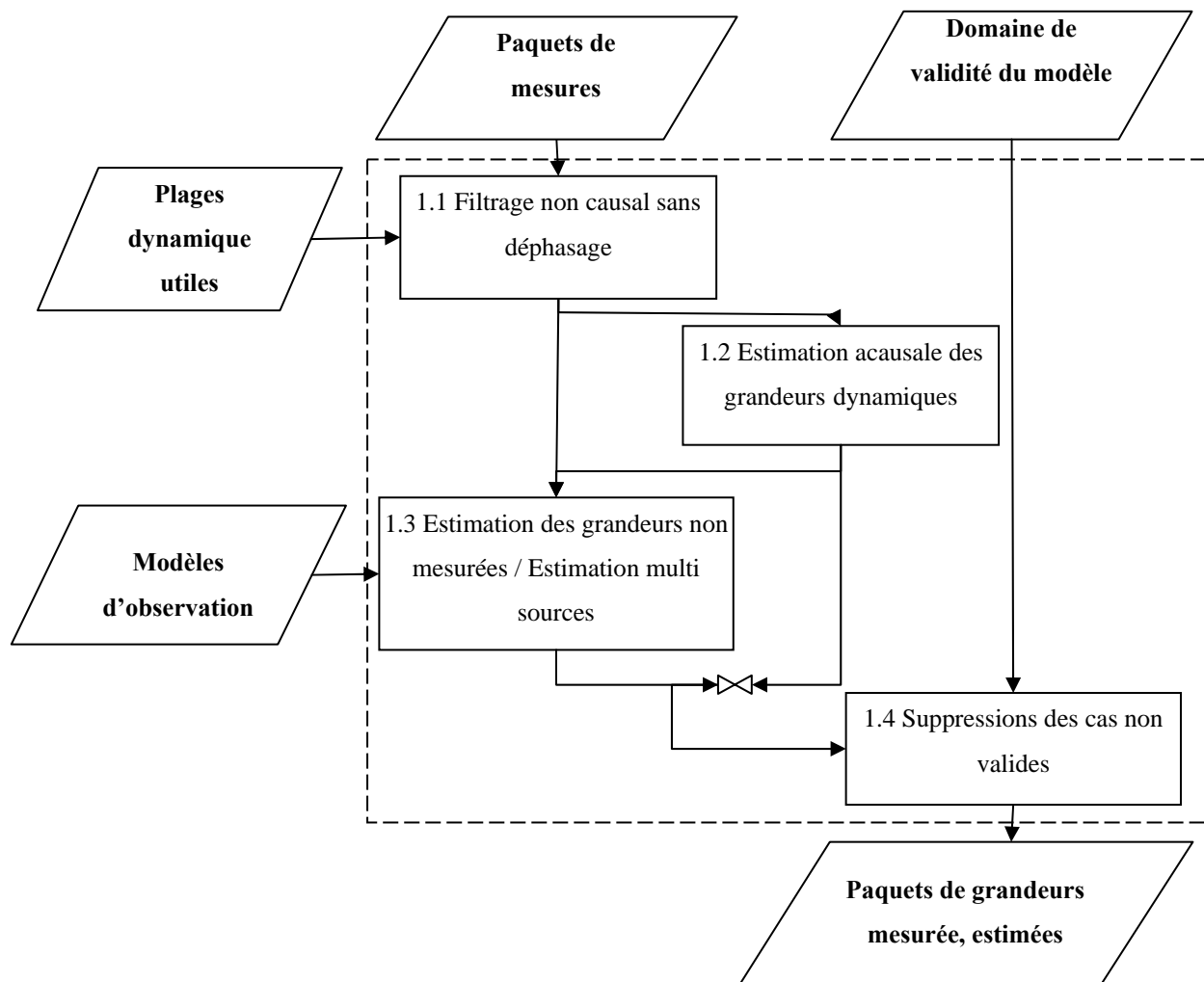


figure 4 : Conditionnement des mesures et estimation

Le conditionnement des mesures permet :

- de rejeter par le filtrage d'éventuelles perturbations,
- de s'assurer que les grandeurs d'entrée respectent les hypothèses du modèle,
- d'estimer les grandeurs manquantes,
- de minimiser l'erreur de mesure par l'utilisation d'observateurs et d'estimateurs,
- former des paquets de trajectoire suivant des critères définis par l'utilisateur (conditions d'essais, type de trajectoire, date...).

En pratique le filtrage non causal sans déphasage permet de rejeter d'éventuels bruits à haute fréquence sur le signal à traiter. Il peut être réalisé par un filtre de Butterworth appliqué en aller-retour (le filtre est appliqué une première fois dans le sens du temps puis une seconde fois à rebours). On peut aussi lui joindre un filtre médian de sorte à enlever les parasites dynamiquement non structurés de type « Dirac ». L'estimation des grandeurs dynamiques (dérivées et intégrales d'un signal) peut être faite par les méthodes des trapèzes et des différences centrées. Le lecteur trouvera plus de précisions sur ces techniques dans [Gautier 01a] et [Khalil 99].

1.3.4. Identification polynomiale robuste

L'identification polynomiale robuste permet de générer un polynôme minimal en paramètres, compatible avec les concepts de modélisation observables et la richesse d'excitation.

L'identification peut être menée de sorte à favoriser certains paquets des trajectoires mesurées. Par exemple ceux dont on sait qu'ils ont la plus faible erreur de modèle (moindres carrés pondérés), ceux qui sont les plus excitants pour les phénomènes à identifier, ceux pour lesquels les capteurs sont les mieux étalonnés...

En ajoutant aux trajectoires mesurées des trajectoires riches en excitation, obtenues par la simulation du modèle d'identification complet avec des paramètres a priori, on s'assure que la solution d'identification soit cohérente avec les mesures et tous les concepts de modélisation, même s'ils ne sont pas identifiables. L'utilisation de technique de pondération permet de fixer la confiance à accorder aux données a priori par rapport aux mesures. Le résultat d'identification correspond alors à un recalage des paramètres simulation sur les mesures. L'avantage est que le résultat n'est pas une forme réduite au comportement identifiable. La

solution a donc toujours le même niveau de complexité ce qui facilite sa réécriture dans une forme non linéaire.

Dans le cas d'un polynôme factorisé, l'identification polynomiale robuste est réalisée de manière séquentielle. La $k^{\text{ième}}$ étape d'identification nécessite les résultats de l'étape $k-1$ et est appliquée au $k^{\text{ième}}$ modèle polynomial défini lors de l'étape de mise en forme du modèle.

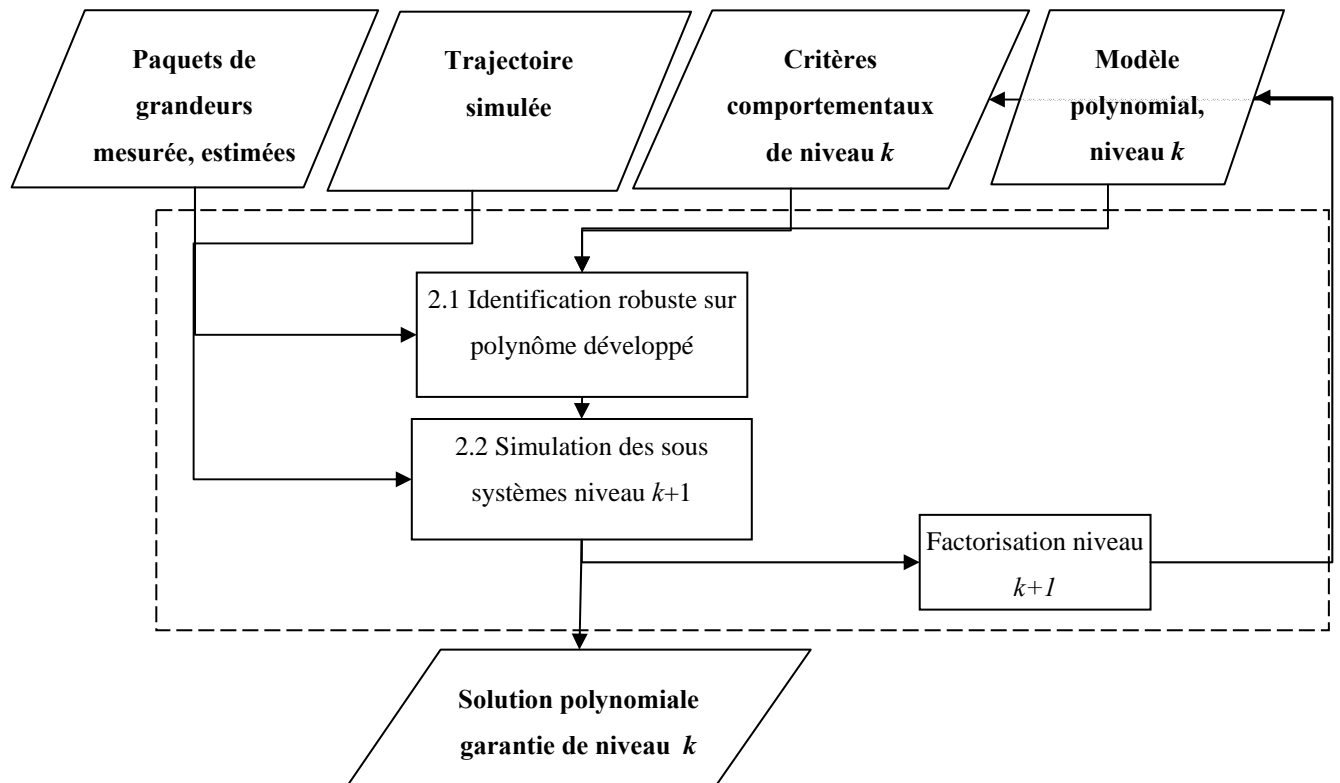


figure 5 : Identification robuste de modèles polynomiaux factorisés

L'identification robuste proprement dite est réalisée sur des polynômes développés. Les données d'entrées peuvent être de différentes sources (simulations et mesures notamment) et pondérées suivant la confiance accordée à la source. Le modèle est simplifié automatiquement suivant la sensibilité paramétrique de la solution ou son inconsistance avec les comportements attendus.

Les étapes d'agrégation, d'identification linéaire, d'analyse de sensibilité et de suppression de paramètre se basent sur les techniques des moindres carrés linéaires présentée dans la partie suivante §1.4 et dont les preuves sont fournies en annexe D. Les techniques d'analyse variationnelle sont décrites en annexe C.

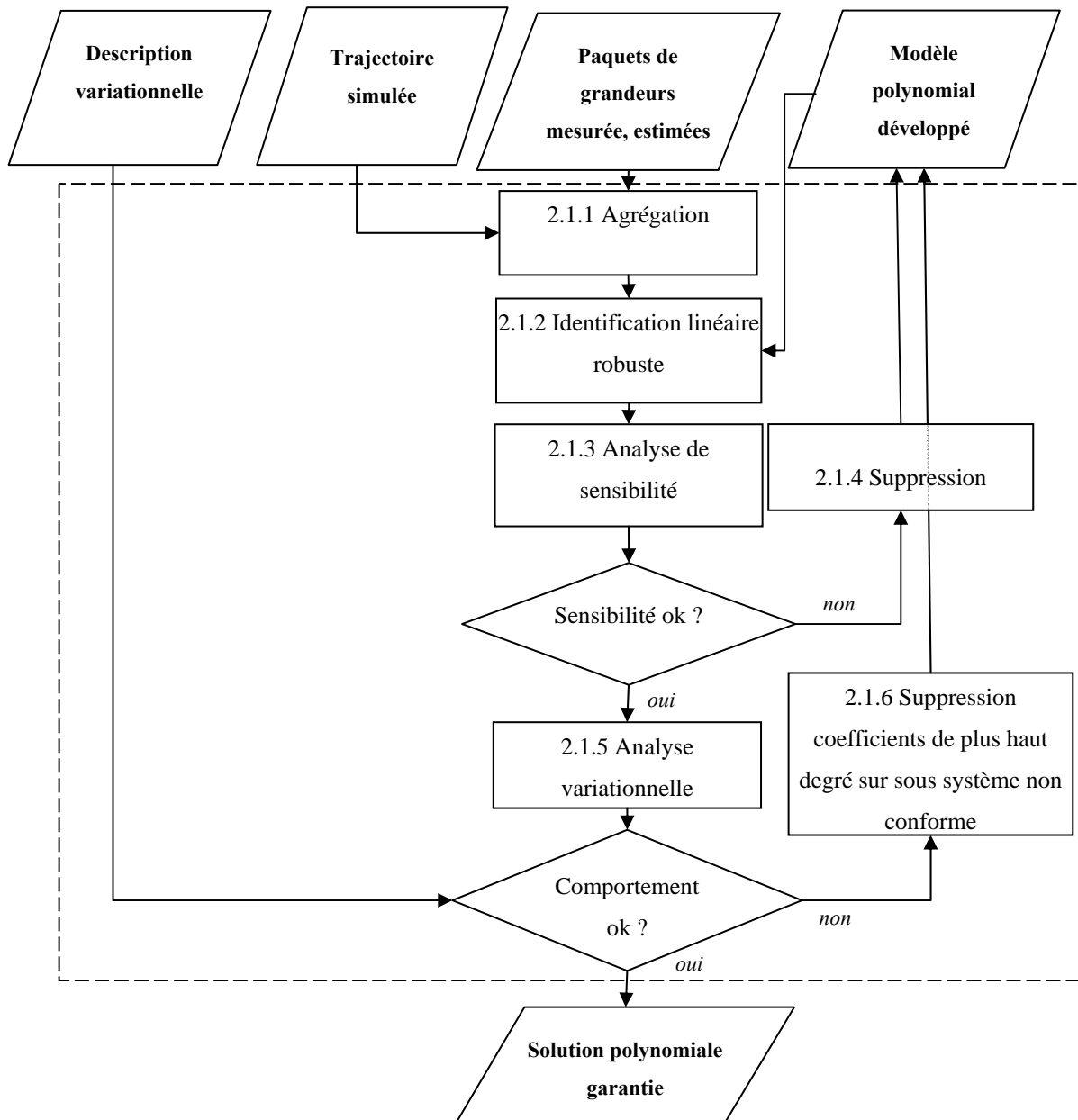


figure 6 : Identification robuste de modèles polynomiaux développés

1.3.5. Passage à une forme non linéaire

Le modèle polynomial n'est identifié que sur la partie identifiable, partie visible dans la réalisation. Pour mener l'étape de passage à une forme non linéaire, il faut disposer d'une structure non linéaire adaptée à la description de cette partie identifiable.

Une structure non linéaire offre le double avantage de nécessiter moins de paramètres et de converger vers des comportement réalistes lorsque le modèle est simulé hors du domaine d'identification (un polynôme diverge forcément si on s'éloigne du domaine d'identification).

Si on ne dispose que d'un modèle complet, on doit avoir la garantie que la richesse d'excitation soit suffisante pour l'exciter dans son ensemble : soit par la définition du protocole de mesure, soit par l'ajout de simulations du modèle d'identification avec des paramètres a priori (on fait alors du recalage de ces paramètres sur les mesures).

Si on ne souhaite pas agir sur les données d'identification, on peut agir sur le modèle lui-même en utilisant une bibliothèque de non linéarités, choisies suivant l'allure du modèle polynomial juste nécessaire identifié.

Dans tous les cas, on déduit de l'identification polynomiale un jeu de paramètres pour le modèle non linéaire. Ce résultat sert de condition initiale à un algorithme d'optimisation locale non linéaire appliqué à toutes les données d'identification. La méthode d'optimisation peut être basé sur la méthode de Newton (voir [Coleman96]).

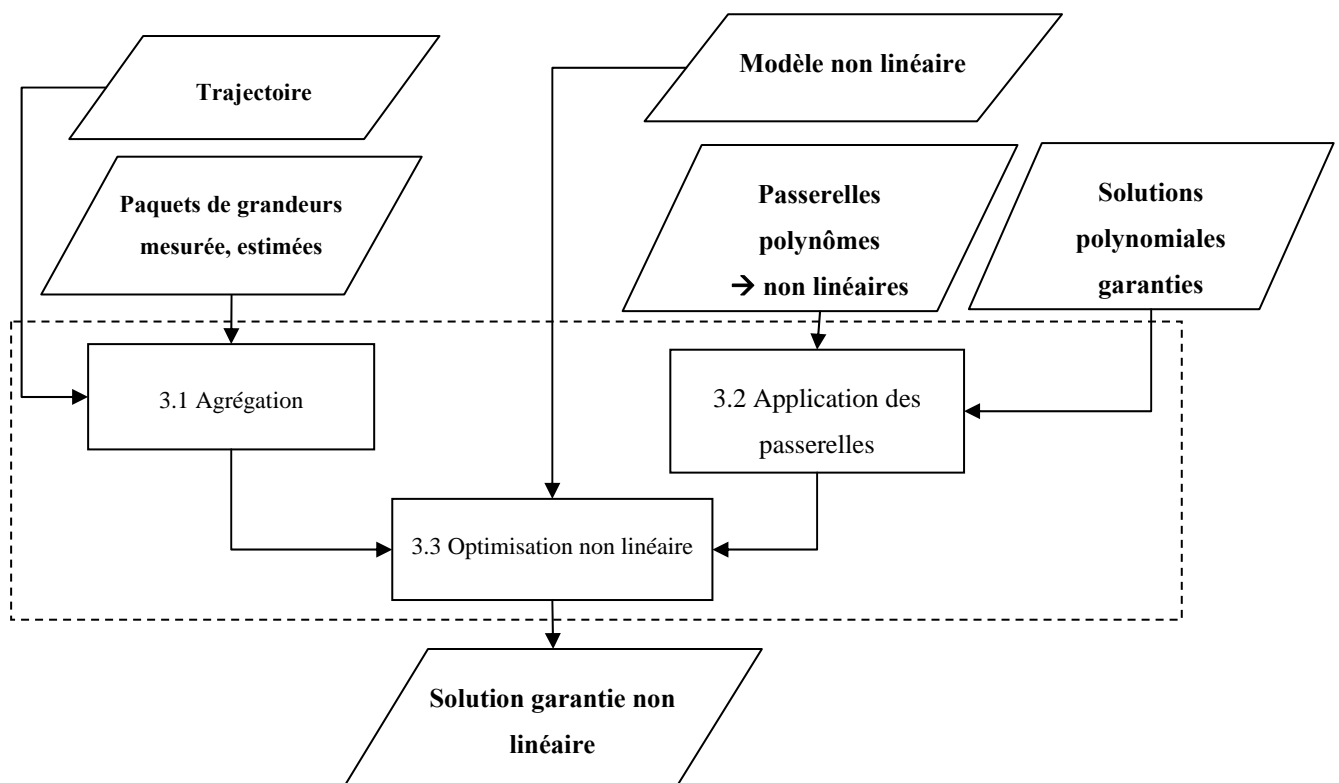


figure 7 : Passage du paramétrage polynomial au paramétrage non linéaire

1.3.6. Exemple : Identification de la rigidité de dérive du pneumatique.

1.3.6.1. Présentation du modèle

Pour une trajectoire stationnaire comportant différents cas de charge et de dérive (d'amplitude inférieure à 1°), le modèle d'effort latéral de l'interaction pneumatique/sol (voir chapitre 2 pour une définition de la dérive et pour des précisions sur les modèles de pneumatique) est linéaire et s'écrit :

$$F_y = K.\delta + c \quad (1-1)$$

Avec δ angle de dérive

c offset dépendant linéairement de la charge F_z :

$$c(F_z) = a_{12}.F_z + a_{13} \quad (1-2)$$

K rigidité de dérive dépendant linéairement non linéaire de la charge F_z :

$$K(F_z) = a_3.\sin\left(2.\arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right) \quad (1-3)$$

La formulation non linéaire de K permet d'avoir à l'origine une rigidité proportionnelle à la charge (avec un coefficient de proportionnalité de $2.a_3/a_4$). La rigidité atteint un maximum a_3 lorsque la charge atteint la valeur a_4 (voir figure 8).

1.3.6.2. 0- Mise en forme

1.3.6.2.1. Passage à une expression polynomiale

Sur le domaine d'excitation considéré (entre 0 et 8kN pour un pneu tourisme), la non linéarité de la rigidité de dérive peut être approximée par un polynôme de degré 3 :

$$K(F_z) \approx k_3.F_z^3 + k_2.F_z^2 + k_1.F_z \quad (1-4)$$

La figure 8 représente en trait bleu continu la rigidité non linéaire trait rouge pointillés la rigidité polynomiale associée. On peut remarquer que pour une capacité descriptive équivalente, la forme polynomiale nécessite plus de paramètres que la forme non linéaire.

La substitution de (1-4) et (1-2) dans (1-1) permet d'écrire l'ensemble de l'effort latéral sous forme polynomiale :

$$F_y = k_3.F_z^3.\delta + k_2.F_z^2.\delta + k_1.F_z.\delta + a_{12}.F_z + a_{13} \quad (1-5)$$

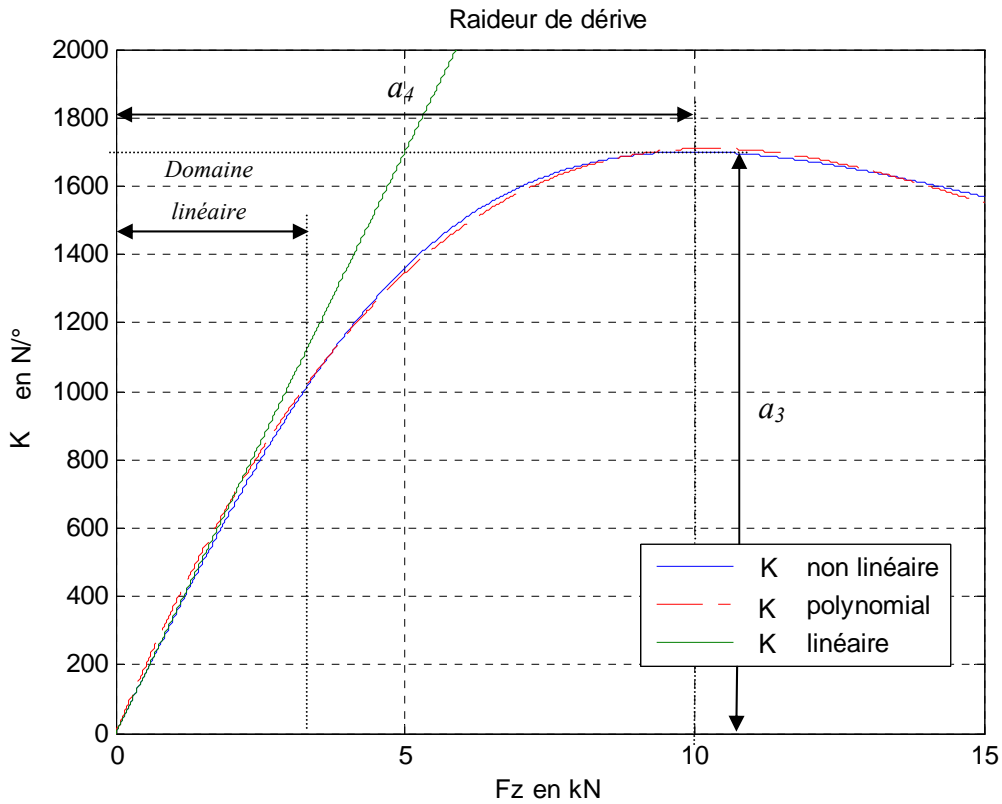


figure 8 : Modèles de rigidité de dérive ayant une relation avec la charge non linéaire, polynomial, linéaire

1.3.6.2.2. Objectivation des comportements attendus

La rigidité de dérive identifiée doit avoir une allure concave par rapport à la charge et ne doit s'annuler que pour une charge nulle. Le polynôme utilisé étant de degré 3, il peut violer cette contrainte pour mieux coller aux points de mesure si ces derniers ne sont pas assez nombreux (courbe en trait discontinu sur figure 9).

Une analyse variationnelle sur le domaine d'identification permet de vérifier la concavité de la rigidité identifiée. Il suffit de calculer la dérivée seconde de la rigidité de dérive en la charge et de s'assurer qu'elle est toujours négative sur le domaine d'étude.

Si ça n'est pas le cas, c'est qu'on n'a pas suffisamment d'informations pour une structure trop complexe. Il suffit de simplifier la structure à identifier pour trouver une solution moins précise mais cohérente avec le comportement attendu (courbe en trait pointillé sur figure 9).

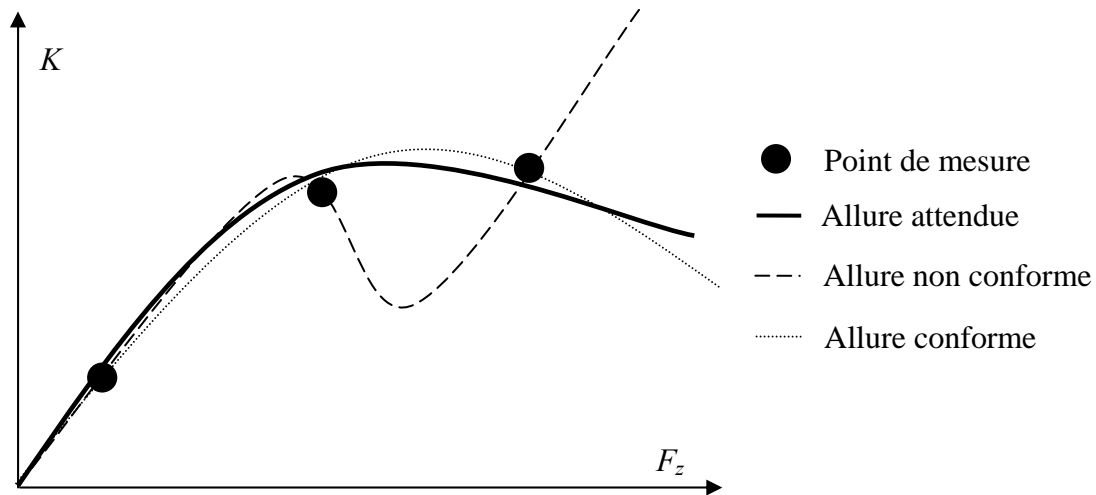


figure 9 : Identification de la rigidité de dérive : allure conforme / non conforme

1.3.6.3. 1- Conditionnement des mesures

La phase de conditionnement est paramétrée de sorte à ne retenir que les trajectoires répondant aux hypothèses de modélisation :

- variations de charge et de dérive uniquement,
- dérive comprise entre -1 et $+1^\circ$,
- états stationnaires (la dérivée temporelle de la dérive doit être au voisinage de 0).

1.3.6.4. 2- Identification polynomiale robuste

Cas 1 : charge suffisante pour exciter la non linéarité de la rigidité de dérive.

Tous les coefficients polynomiaux sont identifiés. Afin de garantir la cohérence du résultat avec l'existence d'un extremum sur la rigidité de dérive en la charge, on vérifie que sur le domaine d'excitation, la réponse du polynôme est concave. Si ça n'est pas le cas, le monôme de plus haut degré en la charge est supprimé de la rigidité de dérive.

Cas 2 : charge dans le domaine linéaire de la rigidité de dérive

La charge est faible. L'algorithme d'identification robuste retourne une solution sur la rigidité consistante avec un comportement à faible charge :

$$K(F_z) \approx 0.F_z^3 + 0.F_z^2 + k_1.F_z \quad (1-6)$$

1.3.6.5. 3- Passage à une forme non linéaire

Le modèle non linéaire est identifié à partir de simulation du modèle polynomial identifié sur les mesures expérimentales. Dans le cas du passage d'une forme polynomiale à une forme non linéaire de la rigidité de dérive, on utilise les relations trigonométriques qui permettent d'écrire (1-3) sous forme rationnelle :

$$K(F_z) = 2. \frac{a_3.a_4.F_z}{F_z^2 + a_4^2} \quad (1-7)$$

Cas 1 : charge suffisante pour exciter la non linéarité de la rigidité de dérive.

Tous les coefficients du polynôme sont identifiés et l'allure de la dérive est concave. Soit \tilde{K} la rigidité calculée par simulation du modèle polynomial identifié (1-4). Les valeurs de a_3 et a_4 peuvent être obtenues par résolution du système suivant obtenu à partir de (1-7) :

$$\begin{cases} \tilde{K}.F_z^2 = X_1.\tilde{K} + 2.X_2.F_z \\ a_4 = \sqrt{-X_1} \\ a_3 = \frac{X_2}{\sqrt{-X_1}} \end{cases} \quad (1-8)$$

La solution de (1-8) est ensuite utilisée comme condition initiale dans un algorithme d'optimisation non linéaire où l'équation non linéaire (1-3) est utilisée.

Cas 2 : charge dans le domaine linéaire de la rigidité de dérive

La rigidité de dérive est linéaire par rapport à la charge et correspond à la linéarisation de (1-7) à l'origine :

$$K(F_z) = 2 \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot F_z \quad (1-9)$$

Seul k_l est identifié et vaut : $k_l = 2 \cdot a_3 / a_4$. En fixant une valeur a priori sur a_3 ou a_4 , on peut accéder à la valeur de l'autre paramètre.

1.4. Moindres carrés linéaires robustes

Ce chapitre présente les techniques de calcul utilisées pour faire de l'identification robuste de modèles linéaires par rapport aux paramètres. Les justifications sont fournies en annexe D. Le lecteur trouvera dans la littérature des éclairages complémentaires sur ces techniques : [Kern 03], [Golub 96], [Lawson 74] pour les moindres carrés basés sur les factorisations QR, SVD et la troncature par filtrage spectral, [Van Huffel 91] pour les moindres carrés totaux, [Lesecq 02], [Gautier 01] pour les techniques d'analyse et les techniques itératives, [Gautier 90a], [Gautier 90b], [Gautier 91] pour la restriction aux paramètres identifiables.

1.4.1. Forme canonique du problème des moindres carrés linéaires

Le problème générique des moindres carrés linéaires est de la forme :

$$Y = W \cdot X + \rho \quad (1-10)$$

avec X : vecteur des paramètres ($p \times 1$)

Y : vecteur de sortie ($n \times 1$)

W : régresseur ($n \times p$)

ρ : résidu ($n \times 1$)

La solution au sens des moindres carrés \hat{X} , est celle permettant de minimiser la norme H2 du résidu : $\|\rho\|_2$:

$$\hat{X} = \arg \min_X (\|\rho\|_2) \quad (1-11)$$

On désigne par $\|\rho_{\min}\|_2$ la valeur minimale du résidu atteinte en \hat{X} .

1.4.2. Réduction à une équation normale factorisée

1.4.2.1. Equation normale

Après multiplication à gauche W^T , (1-10) s'écrit :

$$W^T . Y = (W^T W) . X + W^T \rho \quad (1-12)$$

Le vecteur du résidu minimum est orthogonal à W :

$$W^T \rho_{\min} = 0 \quad (1-13)$$

\hat{X} est donc la solution de l'équation suivante dite « équation normale » :

$$(W^T W) . \hat{X} = W^T . Y \quad (1-14)$$

L'équation normale permet ainsi de ramener la recherche de la solution au sens des moindres carrés \hat{X} à la résolution d'un système carré ($p \times p$).

Numériquement, le calcul du produit $W^T . W$ entraîne une perte de précision et doit être évité. On préfère donc utiliser l'équation normale factorisée dont le calcul est numériquement robuste.

1.4.2.2. Equation normale factorisée

L'équation normale factorisée relative à (1-10) s'écrit :

$$B = R_w \cdot X \quad (1-15)$$

avec R_w matrice triangulaire ($p \times p$)

B vecteur ($p \times 1$)

R_w et B sont définis de sorte à ce que la solution en X de (1-15) corresponde à la solution au sens des moindres carrés de (1-10).

Soit M matrice regroupant W et Y :

$$M = \begin{bmatrix} W & -Y \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

L'équation normale factorisée relative à (1-10) s'obtient par décomposition QR de M :

$$M = Q_m \cdot R_m \quad (1-17)$$

avec Q_m matrice pseudo orthogonale $n \times (p+1)$

R_m matrice triangulaire $(p+1) \times (p+1)$ aux éléments diagonaux positifs :

$$R_m = \begin{bmatrix} R_w & -B \\ 0 & \|\rho_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

1.4.2.3. Equation normale factorisée de systèmes pondérés

Soit un ensemble de k paquets de systèmes d'équations :

$$\{Y_i = W_i \cdot X + \rho_i\}_{1 \leq i \leq k} \quad (1-18)$$

où chaque paquet est associé à un poids P_i

avec W_i . matrice $n_i \times p$, Y_i . vecteur $n_i \times 1$, X . vecteur $p \times 1$.

On souhaite ramener (1-18) à une équation normale factorisée de la forme :

$$B_k = R_k \cdot X \quad (1-19)$$

avec B_k vecteur $p \times 1$

R_k matrice triangulaire $p \times p$

Les poids P_i peuvent être à la discrétion de l'utilisateur (voir §4.3.3 pour exemple).

Une technique intéressante est de définir les poids P_i comme l'inverse de l'écart type de l'erreur estimée sur chaque paquet. On pénalise de cette manière les paquets de mesures à forte erreur de modèle. Soit P_i un estimateur de l'inverse de l'écart type de sortie du $i^{\text{ième}}$ paquet :

$$P_i = \left(\frac{\|\rho(i)_{\min}\|_2}{\sqrt{n_i - p}} \right)^{-1} \quad (1-20)$$

Où $\|\rho(i)_{\min}\|_2$ est obtenu par la décomposition QR de la matrice : $M_i = [W_i \quad -Y_i]$.

Pour obtenir R_k et B_k , il suffit d'appliquer la réduction (1-15) à la matrice M pondérée :

$$M = \begin{bmatrix} P_1.W_1 & -P_1.Y_1 \\ P_2.W_2 & -P_2.Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_k.W_k & -P_k.Y_k \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

1.4.2.4. Calcul itératif d'une équation normale factorisée de systèmes pondérés

Le processus de réduction peut s'avérer très coûteux en mémoire lorsque la matrice M de l'équation (1-16) atteint de grandes dimensions. On peut alors saturer les capacités machines. Ce problème peut être résolu en appliquant une version itérative de la réduction.

Chaque $i^{\text{ième}}$ paquet de l'équation (1-18) est associé à une pondération P_i (unitaire si la méthode des moindres carrés ordinaires est appliquée, c'est à dire sans pondération) et à une matrice M_i sur laquelle on réalise une factorisation QR :

$$M_i = [W_i \quad -Y_i] \quad (1-22)$$

$$M_i = Q_i.R_i \quad (1-23)$$

La réduction itérative consiste à appliquer la récursion suivante :

$$\begin{cases} R_0 = \emptyset \\ M_j = \begin{bmatrix} R_{j-1} \\ R_j.P_j \end{bmatrix} \\ Q_j.R_j = M_j \end{cases} \quad (1-24)$$

1.4.3. Calcul des paramètres identifiables

Dans le cas d'un système dégénéré où la matrice W de (1-10) n'est pas de rang plein, il y a une infinité de solutions au sens des moindres carrés. Ces solutions dépendent de la valeur quelconque de certains paramètres dits non identifiables. Un choix possible consiste à annuler leur valeur de sorte à caractériser la solution au sens des moindres carrés de manière unique sur les paramètres identifiables.

Annuler les paramètres non identifiables revient à simplifier le modèle (1-10) en supprimant les colonnes de la matrice W relatives aux paramètres nuls, non identifiables. Le modèle obtenu est appelé « modèle minimal » car il dépend d'un nombre minimum de paramètres identifiables appelés aussi « paramètres minimaux ». Dans le cas du modèle minimal structurel, dont l'identifiabilité est uniquement liée aux équations du modèle, les paramètres minimaux sont appelés paramètres de base [Gautier 90].

Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution des moindres carrés soit restreinte aux paramètres identifiables est que la matrice R_w du système normalisé factorisé soit régulière (inversible). R_w étant triangulaire, il suffit qu'il n'y ait pas de coefficient nul sur sa diagonale. Numériquement la valeur nulle est définie à une tolérance près : ε . L'index I des paramètres identifiable est défini de la manière suivante :

$$I = \left\{ 1 \leq i \leq p \mid |R_{w\ ii}| > \varepsilon \right\} \quad (1-25)$$

Soit S la matrice de sélection des colonnes de W relatives à des paramètres identifiables. S est définie à partir de matrice identité $p \times p$ dont les colonnes indexées dans I sont supprimées.

Le système simplifié relatif à (1-10) s'écrit :

$$Y = W.X + \rho = W'.X' + \rho' \quad (1-26)$$

avec X' vecteur des paramètres identifiables $c \times 1$,

ρ' vecteur résidu du système simplifié $n \times 1$,

W' matrice du régresseur du modèle simplifié identifiable $n \times c$

$$W' = W.S \quad (1-27)$$

S matrice de sélection $p \times c$

L'équation normale factorisée relative au système simplifié (1-26) s'écrit :

$$B' = R'_w \cdot X' \quad (1-28)$$

avec R'_w matrice triangulaire inversible ($c \times c$)

B' vecteur $c \times 1$,

Soit M'_r la matrice :

$$M'_r = \begin{bmatrix} R'_w \cdot S & -B' \\ 0 & \|\rho_{\min}\|_2 \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

L'équation (1-28) s'obtient de l'équation (1-15) par décomposition QR de M'_r :

$$M'_r = Q'_m \cdot R'_m \quad (1-30)$$

avec Q'_m matrice orthogonale en colonnes $n \times (c+1)$

R'_m matrice triangulaire $(c+1) \times (c+1)$ à éléments diagonaux positifs vérifiant

le partitionnement :

$$R'_m = \begin{bmatrix} R'_w & -B' \\ 0 & \|\rho'_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

On a la relation entre les X' , vecteur des paramètres identifiables et X , vecteur des paramètres initiaux :

$$X' = (S^T \cdot R'_w \cdot S)^{-1} \cdot S^T \cdot R'_w \cdot X \quad (1-31)$$

1.4.4. Calcul de la solution paramétrique

1.4.4.1. Solution au sens des moindres carrés

Il suffit d'inverser le système (1-28) par une méthode de remontée pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (1-26) :

$$\hat{X}' = R'^{-1}_w \cdot B' \quad (1-32)$$

La direction de la projection de l'espace paramétrique W est fixée par le choix du vecteur de sortie Y . Pour que le résultat ne soit pas biaisé, il faut que le vecteur de sortie Y soit indépendant du régresseur W dans l'équation (1-10).

1.4.4.2. Solution au sens des moindres carrés totaux

La solution au sens des moindres carrés totaux [Van Huffel 91] passe par une décomposition en valeurs singulières de la matrice R'_m calculée en (1-30):

$$R'_m = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (1-33)$$

Avec Σ matrice diagonale $(p+1) \times (p+1)$ contenant les valeurs singulières de R , ordonnées de la plus grande à la plus petite.

U matrice de rotation $(p+1) \times (p+1)$

V matrice de rotation $(p+1) \times (p+1)$ partitionnée de la manière suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } V_{11} : p \times p, V_{12} : p \times 1, V_{21} : 1 \times p, V_{22} : 1 \times 1$$

La solution au sens des moindres carrés totaux vaut :

$$\hat{X}' = \frac{-V_{12}}{V_{22}} \quad (1-34)$$

La direction de la projection de l'espace paramétrique est fixée par la plus petite valeur singulière de R'_m . Cette technique est recommandée dans le cas où le vecteur de sortie Y n'est pas indépendant du régresseur W .

1.4.5. Analyse de sensibilité

On part du principe qu'il existe une solution \hat{X} à l'équation (1-15). On cherche à déterminer les paramètres ayant le moins d'influence sur la sortie afin de les supprimer.

1.4.5.1. Ecart type relatif

La matrice W est supposée déterministe et le vecteur des résidus ρ est considéré être une variable aléatoire additive indépendante de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$C_{\rho, \rho^T} = E(\rho' \cdot \rho'^T) = \sigma_\rho^2 \cdot I_n \quad (1-35)$$

avec E l'espérance mathématique,

σ_ρ^2 la variance d'erreur de sortie dont une estimation est donnée par :

$$\sigma_{\rho}^2 = \frac{\|\rho'\|_2^2}{n-p} \quad (1-36)$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur les paramètres vaut :

$$C_{XX'} = E\left((X' - \hat{X}')(X' - \hat{X}')^T\right) = (W'^T W')^{-1} \cdot \sigma_{\rho_{\min}}^2 \quad (1-37)$$

En utilisant la forme factorisée de W' il vient :

$$C_{XX'} = (R_w'^T R_w')^{-1} \cdot \frac{\|\rho_{\min}\|_2^2}{n-p} \quad (1-38)$$

On en déduit l'écart type sur les paramètres :

$$\sigma_{X'} = \sqrt{\text{diag}(C_{XX'})} \quad (1-39)$$

L'écart type relatif sur le $i^{\text{ième}}$ paramètre :

$$\sigma_{X'_i\%} = \frac{\sigma_{X'}}{|\hat{X}'_i|} \quad (1-40)$$

L'écart type relatif peut être interprété comme un rapport signal/bruit. S'il est supérieur à 1, l'intervalle de confiance à 68% : $[\hat{X} - \sigma_X \quad \hat{X} + \sigma_X]$ inclut la valeur nulle (sous hypothèse gaussienne). Le paramètre peut donc être fixé presque sûrement à la valeur nulle. En pratique, l'utilisateur peut fixer un seuil de rapport signal/bruit (suivant le bruit de sortie du système) permettant de qualifier le caractère identifiable ou non d'un paramètre.

1.4.5.2. Calcul des paramètres essentiels par indice de confiance

L'indice de confiance permet de classer les paramètres identifiables par ordre de confiance.

L'indice de confiance du $i^{\text{ième}}$ paramètre vaut :

$$IC_i = \frac{\min(\sigma_{X'_i\%})}{\sigma_{X'_i\%}} \quad (1-41)$$

On a nécessairement $0 < IC_i \leq 1$. Les paramètres ayant un indice de confiance proche de 1 sont les mieux identifiés. Ce sont les paramètres les plus significatifs dans le modèle pour expliquer ce qu'on cherche à caractériser dans la réalisation. A l'inverse, les paramètres dont

les indices de confiance sont très inférieurs à 1, sont très mal identifiés. Leur contribution dans la sortie Y est faible, de l'ordre de grandeur du résidu ρ .

Il est admis que négliger les paramètres ayant un indice de confiance inférieur à 0.1 ne fait pas augmenter significativement la norme du résidu minimal $\|\rho_{\min}\|_2$. Les paramètres ayant un indice de confiance supérieur à 0.1 sont donc paramètres les plus significatifs pour calculer la sortie Y . Ce sont les paramètres essentiels du modèle, compatibles avec la mesure Y [Gautier 90b].

1.4.6. Exemples

Les techniques de régression robuste sont appliquées à des simulations de lois affines bruitées.

Cas fortement bruité

$$y = a.x + b$$

$a=5$, $b=1$, x rampe de -20 à 2,

Bruit additif sur y

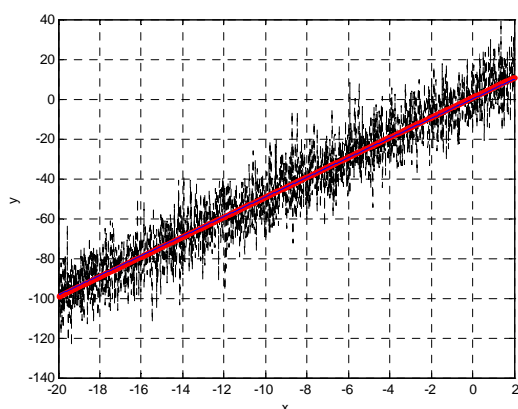


figure 10 : Exemple régression robuste :
Cas bruité

Cas dégénéré structurel

$$y = a.x + b.x$$

$a=5$, $b=1$, x rampe de -20 à 2,

Bruit additif sur y

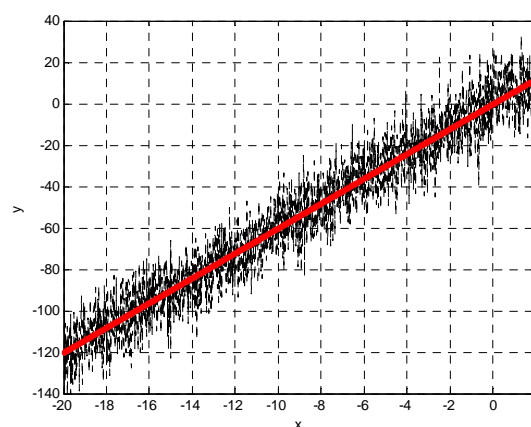


figure 11 : Exemple régression robuste :
Cas dégénéré

Ellipsoïde non dégénéré

Valeurs singulières de W : 100% et 5.2%

Ellipsoïde dégénéré

Valeurs singulières de W : 100% - 0%

Soit c le paramètre identifiable.

On obtient (1-31) :

$$c = a + b$$

Itération 1 (enveloppe) :

Identification de a et b

On identifie (1-32) et (1-41) :

$$a = 4.98 \text{ (IC à 100\%)}$$

$$b = 0.72 \text{ (IC à 1.3\%)}$$

Itération 1 (modèle enveloppe) :

Identification de c

On identifie (1-32):

$$c = 6.0146$$

D'après le critère IC, b peut être supprimé.

Soit c le nouveau paramètre identifiable.

On obtient (1-31) :

$$c = a - 0.0742 \times b$$

Itération 2

(modèle robuste juste identifiable)

Identification de c

On identifie (1-32) :

$$c = 4.9268.$$

Retour aux paramètres initiaux

(si connaissance a priori à disposition)

Hypothèse $b = 1$:

$$a = 5.0010$$

Hypothèse $a = 5$:

$$b = 0.9865$$

Retour aux paramètres initiaux

(si connaissance a priori à disposition)

Hypothèse $b = 1$:

$$a = 5.0146$$

1.5. Conclusion

La procédure d'identification présentée dans ce chapitre se base sur le criticisme et permet de déterminer la structure et d'identifier les paramètres d'un modèle. La solution retournée se calcule sans conditions initiales. Elle est robuste, consistante avec la richesse d'excitation et avec les concepts du modèle. Les techniques de moindres carrés §1.4 utilisées lors de cette thèse, ont été développées de sorte à traiter de manière robuste des volumes importants de données avec une faible complexité algorithmique.

L'identification est restreinte aux structures linéaires, car ce sont les seules structures simplifiables automatiquement, sans nécessiter d'hypothèses a priori. On peut néanmoins l'étendre aux modèles non linéaires dits à « non linéarités douces », approchables par une écriture polynomiale. A la charge de l'utilisateur d'écrire le modèle polynomial et les algorithmes permettant de calculer les paramètres du modèle non linéaire à partir des paramètres polynomiaux.

L'algorithme peut être appliqué dans un cadre optimiste ou idéaliste suivant le degré de confiance qu'on accorde au modèle qu'on cherche à identifier. Dans le cas où on cherche à concevoir un modèle, il peut être utilisé pour déterminer les phénomènes pertinents observables dans l'expérience. Il suffit pour cela de l'appliquer à un modèle d'enveloppe polynomial décrivant tous les phénomènes théoriques possibles avec une complexité élevée. Le modèle juste nécessaire est généré automatiquement.

Chapitre 2

Modélisation de l'effort de contact pneumatique/sol

2.1. Introduction

Du point de vue fonctionnel, on peut considérer un véhicule automobile comme un système d'actionnement agissant sur ses quatre contacts pneumatique/sol. Ce système doit être conçu de sorte à gérer un compromis fixé par un cahier des charges entre l'agrément, le confort, la sécurité active et l'usure. Une grande partie de ces propriétés dépend du pneumatique. Cela en fait un élément central de la conception automobile, conditionnant une grande partie de la conception du train. A ce titre, dans une logique d'optimisation du cycle de conception, il est nécessaire de pouvoir faire :

- une spécification du pneumatique au plus tôt,
- une intégration et une validation robuste sur le pneumatique,
- le renseignement de modèles réalistes par de simples spécifications,
- l'enrichissement des modèles de spécifications par les données obtenues lors de l'intégration.

L'ensemble de ces besoins peut être couvert par un modèle de pneumatique permettant de faire de la spécification à partir de critères liés à la dynamique du véhicule, de la prédiction pour les maquettes numériques du véhicule et de l'identification pour l'intégration. A ces caractéristiques, on peut ajouter une description physique permettant d'isoler et de dimensionner les paramètres physiques qui déterminent le comportement.

A l'heure actuelle aucun modèle ne répond de manière satisfaisante à ces quatre problématiques (spécification, identification, simulation et réalisme physique). Les modèles se répartissent en deux familles : les modèles physiques (utilisation de lois de frictions de Lugre dans [Canudas de Wit 03], de lois de frottement avec effet Stribeck dans [Gäfvert 05], du formalisme Bond Graph dans [Zin 02], du modèle brosse dans [Pacejka

02]) et les modèles empiriques (formule magique dans [Pacejka 02], principe de similitude dans [Radt 83] et [Radt 93], modèle neuronal dans [Palkovics 93]).

Les modèles physiques sont construits sur des concepts physiques et offrent un éclairage sur les mécanismes mis en jeu dans le pneumatique. Mais ils ne sont valables que dans le cadre d'hypothèses conceptuelles, souvent restrictives, et nécessitent généralement des grandeurs difficiles, voire impossibles, à mesurer (champ de pression dans l'aire de contact, zone d'adhérence, chasse pneumatique, températures...). Ce manque d'observabilité nuit aux caractères d'identification et de spécification du modèle.

A l'inverse, les modèles empiriques sont définis uniquement à partir de ce qui est mesurable et pertinent dans le cadre de la dynamique du véhicule. Ils sont conçus pour pouvoir être identifiés et spécifiés. Mais ce ne sont généralement que des descriptions macroscopiques fonctionnelles qui ne permettent pas d'expliquer les mécanismes physiques générant les différents phénomènes.

Dans un tel contexte, il semble intéressant de coupler les deux approches pour les utiliser de manière complémentaire. L'approche physique pour déterminer et structurer les phénomènes relatifs au contact pneumatique/sol et l'approche empirique pour décrire fonctionnement ces phénomènes.

Après présentation de la structure du pneumatique en première partie, un modèle physique du contact pneumatique/sol est développé. Ce modèle est développé dans le formalisme de la robotique articulaire. Il permet de décrire les différents degrés de liberté entre le porte fusée, la roue et l'aire de contact. On est alors en mesure de calculer les torseurs cinématique et d'effort appliqués à l'aire de contact en prenant en compte les effets inertiels de la roue et des flexibilités de l'ensemble roue+jante.

L'effort d'interaction pneumatique/sol a lieu au niveau de l'aire de contact. Les entrées de ce modèle d'effort et la structure de sa matrice entrée/sortie sont déterminées à l'aide du concept de déformation vue par l'aire de contact sous hypothèse d'adhérence totale.

Les opérateurs de la matrice entrée/sortie obtenue sont décrits par un modèle empirique présenté dans la dernière partie. Afin de bien cerner le domaine d'application des modèles empirique, un exemple de spécification du pneumatique pour le dimensionnement véhicule est d'abord indiqué. Le modèle empirique de Bakker Pacejka dit « formule magique » est

ensuite introduit (voir annexe B). Cette représentation repose sur le principe de similitude ce qui lui confère un aspect robuste et prédictif en regard d'autres représentations empiriques.

2.2. Structure du pneumatique

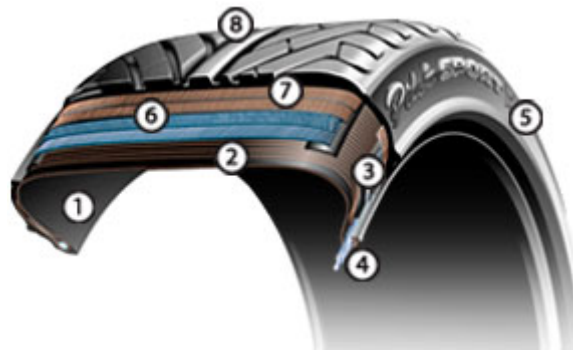


figure 12 : Eléments structurels du pneumatique

Le pneu est un composite, c'est-à-dire un assemblage solidaire de matériaux aux propriétés très diverses dont la confection est complexe. Il se compose des produits suivants [Michelin]:

- 1- Une feuille de caoutchouc synthétique étanche** faisant office de chambre à air.
- 2- Une nappe-carcasse** composée de minces câbles en fibres textiles disposés en arceaux droits et collés au caoutchouc. Ce sont ces câbles qui permettent au pneu de résister à la pression. Il y en a environ 1400, chacun pouvant résister à une force de 15 kg.
- 3- Un bourrage zone basse** permettant de transmettre les couples moteur et de freinage de la jante vers l'aire de contact pneumatique/sol.
- 4- Les tringles** servant à serrer le pneu sur la jante. Elles peuvent supporter jusqu'à 1800 kg sans risque de rupture.
- 5- Les flancs** en gomme souple protègent le pneu des chocs qui pourraient endommager la carcasse (ex : chocs de trottoir). Une gomme dure assure la liaison entre le pneu et la jante.
- 6- Les nappes-sommet**, composées de câbles en acier fins et résistants croisés obliquement et collés les uns sur les autres. Le croisement de leur fils avec ceux de la carcasse forme des

triangles indéformables. Dénommée triangulation, cette disposition assure la rigidité du sommet et ceinture tout le pneu. Leur rôle est multiple. Elles doivent en effet :

- être suffisamment rigides sur la circonférence pour ne pas s'étirer sous l'effet de la centrifugation, afin de maîtriser parfaitement le diamètre du pneu pour toutes les vitesses de rotation.
- être rigides dans le sens transversal pour résister aux efforts de dérive.
- avoir une compliance radiale permettant d'absorber les irrégularités du sol.

Ces propriétés sont assurées par des collages acier-gomme, techniquement délicats.

7- Les nappes de ceinture permettant de conserver un profil stable sous l'effet de la vitesse et de réduire les échauffements. Elles sont armées de câbles généralement en nylon, posés en fil unitaire ou en bandelette perpendiculaire à la nappe carcasse sur la circonférence afin de ne pas s'étirer sous l'effet de la centrifugation.

8- La bande de roulement posée par dessus les nappes sommet. C'est elle qui est en contact avec le sol. Elle doit donc pouvoir résister à des efforts très importants. Le mélange qui la constitue doit être adhérent sur tous types de sols, résister à l'usure, à l'abrasion et doit s'échauffer faiblement. De plus elle dispose de sculptures de sorte à drainer l'eau hors de la zone de contact sur sol mouillé.

La vulcanisation permet de solidariser l'ensemble.

2.3. Modèle physique de l'effort de contact pneumatique/sol

2.3.1. Introduction

Le torseur d'effort mesuré au centre roue est la somme des contributions de différents phénomènes :

- les efforts d'interaction aire de contact/sol,
- les effets inertiels de l'ensemble jante-pneumatique,
- les flexibilités de l'ensemble jante-pneumatique.

La modélisation de l'ensemble de ces phénomènes peut être réalisé à l'aide de la robotique articulatoire, via le formalisme DHM (Denavit Hartenberg Modifié) présenté en annexe F. La liaison entre les repères d'aire de contact et du porte fusée est décrite par une chaîne articulatoire sérielle à 7 degrés de liberté. Cette chaîne se décompose en trois parties. La première comporte deux articulations (dont une est bloquée) et permet de positionner la roue par rapport au porte fusée. La seconde a trois degrés de liberté et permet de positionner le repère pneumatique. C'est-à-dire le repère associé au point de contact, défini géométriquement par le plan du sol et le plan de roue. La dernière chaîne a trois degrés de liberté afin de représenter les mouvements dus à la flexibilité du pneumatique de l'aire de contact dans le plan sol.

La première partie présente cette description et l'exploite pour expliciter le torseur d'effort de contact dans le repère pneumatique. La démarche permet de prendre en compte les paramètres inertiels de la roue, les flexibilités du pneumatique et le voilage de roue. Les équations ont été générées à l'aide du logiciel Symoro+ [Khalil 97] et les modèles articulatoires ont été validés à l'aide de l'IHM de la robotic Toolbox [Corke 01].

Dans la seconde partie, un modèle physique de l'interaction pneumatique/sol est développé sous les hypothèses d'adhérence totale dans l'aire de contact, d'absence de flexibilité du pneumatique et d'une roue non voilée. Le modèle est construit sur la notion de déformation vue par l'aire de contact. On détermine ainsi le vecteur des entrées du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol ainsi que la structure de la matrice entrée/sortie du modèle. Cette démarche physique permet de retrouver les grandeurs d'entrées et les relations décrites dans les modèles empiriques.

2.3.2. Repères

2.3.2.1. Repère route : R_r

$R_r = (R, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r)$. Son origine est R : la projection du centre de gravité du véhicule sur le plan de la route. L'axe \mathbf{z}_r est normal au plan de la route, les axes \mathbf{x}_r et \mathbf{y}_r définissent ce plan de sorte à ce que \mathbf{x}_r soit suivant la direction longitudinale du véhicule. Dans la suite, le repère route servira principalement à paramétrer le plan de route : $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$.

2.3.2.2. Repère porte fusée : R_{pf}

$R_{pf} = (O, \mathbf{x}_{pf}, \mathbf{y}_{pf}, \mathbf{z}_{pf})$. Il s'agit du repère où sont réalisées les mesures cinématiques et dynamiques. Son origine est O , le centre de la roue. L'axe \mathbf{y}_{pf} est porté par l'axe de rotation de la roue. Les axes \mathbf{x}_{pf} et \mathbf{z}_{pf} sont dans le plan de la roue.

2.3.2.3. Repère centre roue : R_{cr}

$R_{cr} = (O, \mathbf{x}_{cr}, \mathbf{y}_{cr}, \mathbf{z}_{cr})$. Son origine est O , le centre de la roue. L'axe \mathbf{y}_{cr} est porté par l'axe de rotation de la roue et colinéaire à \mathbf{y}_{pf} . Les axes \mathbf{x}_{cr} et \mathbf{z}_{cr} sont dans le plan de roue et l'axe \mathbf{x}_{cr} est défini de sorte à être orthogonal à la normale au sol : \mathbf{z}_r . Les axes \mathbf{x}_{cr} et \mathbf{z}_{cr} forment l'angle $\hat{\xi}$ respectivement par rapport aux axes \mathbf{x}_{pf} et \mathbf{z}_{pf} .

2.3.2.4. Repère pneumatique : R_p

$R_p = (P, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$. L'axe \mathbf{x}_p est dans le plan de la roue et colinéaire par rapport à \mathbf{x}_{cr} , \mathbf{z}_p est normal au plan de la route et colinéaire avec \mathbf{z}_r . L'origine du repère est le point de contact sol-roue P , projection de O sur le plan du sol $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ suivant la direction du plan de roue : \mathbf{z}_{cr} . Les axes \mathbf{z}_p et \mathbf{y}_p forment l'angle de carrossage pneu γ respectivement par rapport aux axes \mathbf{z}_{cr} et \mathbf{y}_{cr} .

2.3.2.5. Repère aire de contact : R_{ac}

$R_{AC} = (S, \mathbf{x}_{AC}, \mathbf{y}_{AC}, \mathbf{z}_{AC})$. Il s'agit du repère attaché au corps formé par les éléments du pneu en contact avec le sol. L'axe \mathbf{z}_{AC} est colinéaire par rapport à la normale au sol : \mathbf{z}_r . Les axes \mathbf{x}_{AC} et \mathbf{y}_{AC} sont dans le plan de la route et forment l'angle de torsion du pneumatique : Δ_β respectivement par rapport aux axes \mathbf{x}_p et \mathbf{y}_p . L'origine S du repère est paramétrée dans R_p par rapport à P par l'abscisse Δ_x et l'ordonnée Δ_y .

2.3.2.6. Repère roue : R_w

$R_w = (O, \mathbf{x}_w, \mathbf{y}_w, \mathbf{z}_w)$. Il s'agit du repère tournant dans l'axe de rotation défini par le porte fusée. Son origine est O , le centre de la roue. L'axe \mathbf{y}_w est colinéaire par rapport à l'axe de

rotation de roue : y_{pf} . Les axes x_w et z_w forment l'angle de rotation de roue : θ respectivement par rapport aux axes x_{pf} et z_{pf} .

2.3.2.7. Repère roue voilée: R_{tw}

$R_{tw} = (O, x_{tw}, y_{tw}, z_{tw})$. Il s'agit du repère attaché au corps de la roue. L'axe z_{tw} est colinéaire par rapport à l'axe z_t . Les axes x_{tw} et y_{tw} forment l'angle de voilage : φ par rapport aux axes x_w et y_w respectivement.

2.3.3. Modèle articulaire

2.3.3.1. Paramétrage géométrique

Les degrés de liberté entre les différents repères, modélisés sous le formalisme DHM sont indiqués tableau 1 et représentés figure 13.

La liaison entre R_{pf} , repère du porte fusée et R_{tw} , repère lié à la roue voilée, est définie par une chaîne articulaire à 1 degré de liberté :

- le repère R_1 correspond au repère de roue R_w et définit l'articulation de rotation du pivot de roue,
- le repère R_2 est défini de sorte à placer l'articulation bloquée du voilage de roue, il est attaché au corps de roue et correspond au repère de roue voilée R_{tw}

La liaison entre R_{tw} , repère lié à la roue voilée et R_p , repère pneumatique est réalisée par une chaîne articulaire à 3 degrés de liberté :

- le repère R_3 est défini de sorte à placer l'articulation d'enroulement pneu,
- le repère R_4 est défini de sorte à placer l'articulation de hauteur pneu,
- le repère R_5 est défini de sorte à placer l'articulation de carrossage pneu,
- le repère R_6 est attaché au même corps que R_5 mais de sorte à correspondre au repère pneumatique R_p ,

La liaison entre R_p , repère pneumatique et R_{AC} , repère lié à l'aire de contact est réalisée par une chaîne articulatoire à 3 degrés de liberté :

- le repère R_7 est défini de sorte à placer l'articulation ballant pneu,
- le repère R_8 est défini de sorte à placer l'articulation d'avance pneu,
- le repère R_9 est défini de sorte à placer l'articulation de torsion pneu,
- le repère R_{10} est attaché comme R_{10} au corps d'aire de contact, mais de sorte à correspondre au repère pneumatique R_{AC} ,

Remarque : le repère centre de roue R_{cr} étant un intermédiaire de calcul, il n'est pas explicitement représenté. Mais il peut être déduit de R_1 :

$$R_1 = (O, \mathbf{x}_{cr}, -\mathbf{z}_{cr}, \mathbf{y}_{cr})$$

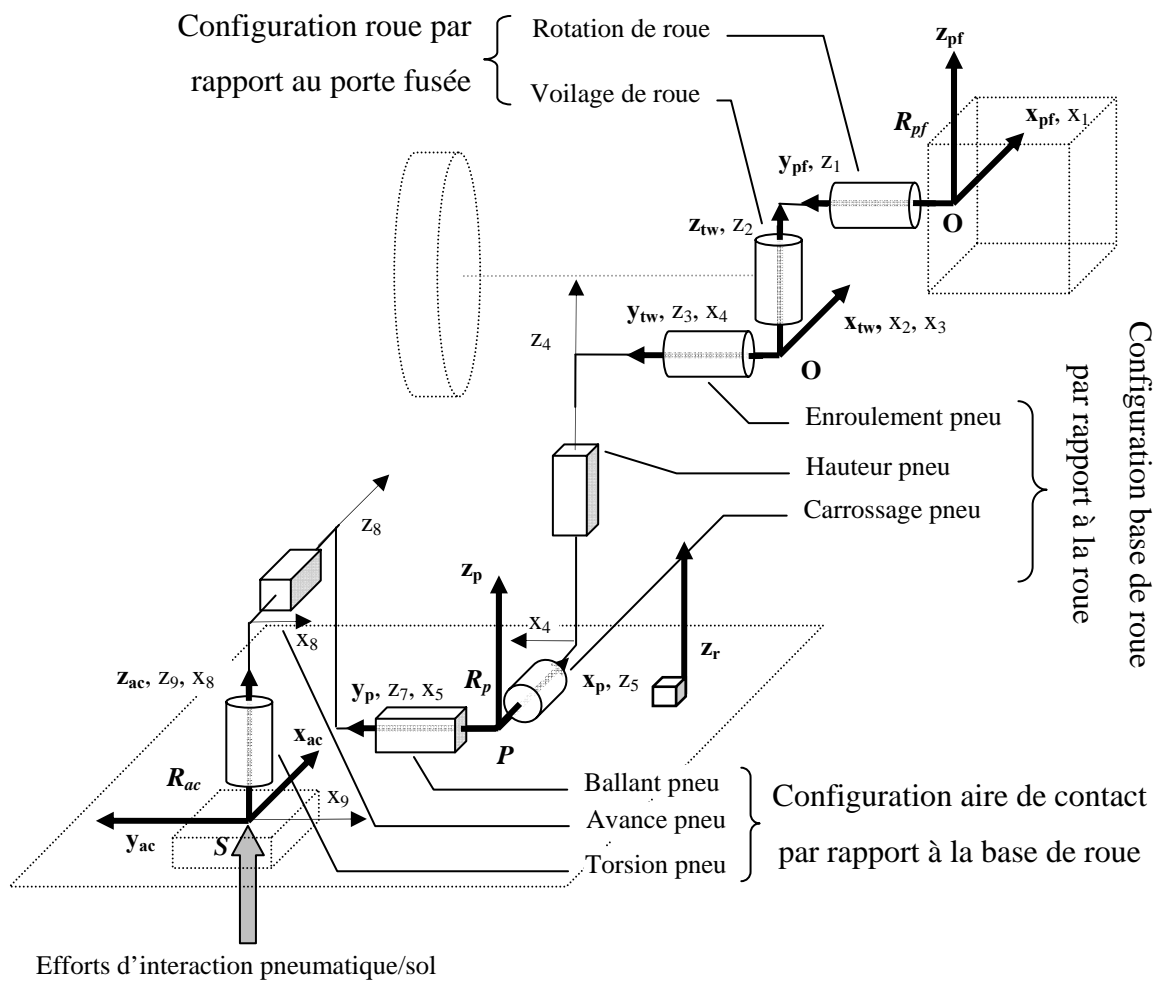


figure 13 : Paramétrage DHM du contact pneumatique/sol

	j	$a(j)$	α_j	γ_j	b_j	α_j	d_j	θ_j	r_j	
Mouvement de la	1	0	0	0	0	$-\pi/2$	0	θ	0	Rotation de roue
roue par rapport au										
porte fusée	2	1	2	0	0	$\pi/2$	0	ϕ	0	Voilage de roue
	3	2	0	0	0	$-\pi/2$	0	ξ	0	Enroulement pneu
Mouvement du repère	4	3	1	0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	h	Rayon pneu
de contact par	5	4	0	0	0	$\pi/2$	0	γ	0	Carrossage pneu
rapport à la roue	6	5	2	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	Articulation bloquée
Mouvement de l'aire	7	6	1	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	x	Ballant aire contact
de contact par	8	7	1	0	0	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	y	Avance aire contact
rapport au repère de	9	8	0	0	0	$\pi/2$	0	β	0	Torsion aire contact
contact	10	9	2	0	0	0	0	$\pi/2$	0	Articulation bloquée

TABLEAU 1 : PARAMETRAGE DHM DE LA LIAISON PNEUMATIQUE/SOL

2.3.3.2. Paramétrage dynamique

Le corps relatif aux repères R_9 et R_{10} (ou R_{AC}) correspond au corps de l'aire de contact formé par les éléments du pneu en contact avec le sol. Sa masse est M_{AC} et son inertie autour de l'axe de torsion : ZZ_{AC} . Ces paramètres inertiels correspondent aux inerties visibles depuis l'aire de contact des paramètres inertiels de la ceinture rigide formée par les nappes carcasses et les nappes sommets.

Le corps relatif au repère R_2 (ou R_{rw}) correspond au solide roue pour lequel on définit les paramètres inertiels : $(XX_{rw}, XY_{rw}, XZ_{rw}, YY_{rw}, YZ_{rw}, ZZ_{rw})$, les premiers moment d'inertie : $(MX_{rw}, MY_{rw}, MZ_{rw})$, et la masse : M_{rw} .

Les articulations d'enroulement et de braquage sont des articulations virtuelles permettant d'avoir suffisamment de degrés de liberté pour définir le repère pneumatique. L'articulation de voile de roue est fixe. Les autres articulations sont considérées physiques et attachées à des paramètres dynamiques. On désigne k_i paramètre de raideur, h_i paramètre d'amortissement, f_i paramètre de frottement sec, off_i offset d'effort articulaire (nécessaire sous hypothèse de raideur si la position articulaire nominale peut être non nulle).

Le paramétrage est le suivant:

- (h_{rot}, f_{rot}) pour rotation de roue
- (k_h, h_h, off_h) pour l'articulation de rayon pneu
- (k_γ, h_γ) pour l'articulation de carrossage pneu
- (K_y, h_y) pour l'articulation de ballant pneu
- (K_x, h_x) pour l'articulation d'avance pneu
- (K_β, h_β) pour l'articulation de torsion pneu

Le tableau 2 récapitule le paramétrage dynamique des corps du modèle articulaire.

j	XX	XY	XZ	YY	YZ	ZZ	MX	MY	MZ	M	k	h	fs	off
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h_{rot}	f_{rot}	0
2	XX_{tw}	XY_{tw}	XZ_{tw}	YY_{tw}	YZ_{tw}	ZZ_{tw}	MX_{tw}	MY_{tw}	MZ_{tw}	M_{tw}	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k_h	h_h	0	off_h
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k_γ	h_γ	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k_y	h_y	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k_x	h_x	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k_β	h_β	0	0
10	0	0	0	0	0	ZZ_{AC}	0	0	0	M_{AC}	0	0	0	0

TABLEAU 2 : PARAMETRAGE DYNAMIQUE DE LA LIAISON PNEUMATIQUE/SOL

2.3.3.3. Torseurs cinématiques et d'efforts du système

Les forces extérieures au système sont :

- le torseur des efforts d'interaction pneumatique/sol : F_{AC} qui est appliqué au repère d'aire de contact R_{AC} (ou R_{10}).
- le couple appliqué à la roue : Γ_{roue} .

Le mouvement du repère de mesure R_{pf} (ou R_0) par rapport au repère route R_r est décrit par le torseur cinématique : τ_{pf} , exprimé par défaut dans le repère R_{pf} .

F_{pf} correspond au torseur d'effort appliqué au solide porte fusée : R_{pf} exprimé par défaut dans le repère R_{pf} .

On désigne par F_p le torseur des efforts de contact pneumatique/sol qui correspond aux efforts appliqués au repère pneumatique R_p .

2.3.4. Expression du modèle d'effort de contact pneumatique/sol

2.3.4.1. Introduction

2.3.4.1.1. Problématique

Le torseur d'effort d'interaction pneumatique/sol est appliqué au solide aire de contact. Il dépend de la cinématique de ce solide ainsi et des variables articulaires du modèle de contact au sol :

$$F_{AC} = F_{pneu}(\tau_{AC}, q, \dot{q}) \quad (2-1)$$

avec F_{pneu} le modèle d'interaction pneumatique/sol,

τ_{AC} le torseur cinématique de l'aire de contact,

F_{AC} le torseur des efforts appliqués à l'aire de contact,

q et \dot{q} respectivement le vecteur des positions et des vitesses des variables articulaires.

Pour identifier le modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol il est nécessaire de disposer de toutes les grandeurs de l'équation (2-1). Certaines d'entre elles ne sont pas accessibles par des mesures conventionnelles. Il faut donc pouvoir les estimer à partir des mesures suivantes :

- torseur d'effort dans le repère du porte fusée F_{pf} ,
- torseur cinématique dans le repère du porte fusée τ_{pf} ,
- équation du plan de sol dans le repère du porte fusée $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)_{R_{pf}}$,
- angle de rotation de roue θ , angle de voile de roue ϕ .

Etant donné les mesures disponibles, on ne peut accéder qu'au torseur cinématique τ_p dans le repère pneumatique R_p et à l'effort de contact pneumatique/sol qui dépend du torseur d'effort de contact :

$$F_p = F_p(F_{AC}, q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (2-2)$$

Cette partie montre comment expliciter le modèle d'interaction pneumatique/sol F_{pneu} dans l'expression du modèle d'effort de contact (2-2).

2.3.4.1.2. Discussion sur les variables articulaires

Le vecteur q des positions articulaires est décomposé de la manière suivante :

$$q = [q_r \mid q_p \mid q_{AC}]^T \quad (2-3)$$

avec q_r vecteur des positions articulaires de la chaîne connectant le repère porte fusée au repère de roue voilé :

$$q_r = (\theta \quad \phi)^T \quad (2-4)$$

q_p vecteur des positions articulaires de la chaîne connectant le repère de roue voilé au repère pneumatique

$$q_p = (\xi \quad h \quad \gamma)^T \quad (2-5)$$

q_{AC} vecteur des positions articulaires de la chaîne connectant le repère pneumatique au repère d'aire de contact

$$q_{AC} = (y \quad x \quad \beta)^T \quad (2-6)$$

Les variables articulaires q_r sont considérées connues.

Les variables articulaires de q_p sont déterminées par l'allure de la roue par rapport au sol. Elles dépendent des contraintes géométriques imposées au système pour définir le repère d'aire de contact.

Les variables articulaires de q_{AC} représentent le mouvement plan de l'aire de contact sur le sol. Leur valeur dépend des efforts appliqués à l'aire de contact et de la flexibilité du pneumatique.

2.3.4.1.3. Procédure d'estimation

- 1- Les variables du vecteur q_p sont calculées par géométrie inverse connaissant l'expression du plan de sol dans le repère du porte fusée R_{pf} . L'action du voile de roue peut être prise en compte si on connaît l'angle de voilage et l'angle de rotation.
- 2- Une fois q_p déterminé, on est en mesure de calculer les matrices de transformation permettant de passer du repère R_{pf} au repère pneumatique R_p . Le torseur d'effort de contact qui correspond à l'effort appliqué au repère pneumatique F_p peut ainsi être explicité en fonction de F_{pf} .
- 3- Un bilan des efforts articulaires sur la chaîne sérielle connectant le repère pneumatique R_p au repère d'aire de contact R_{AC} est réalisé en utilisant F_p pour le calcul des efforts articulaires. Sous hypothèse statique, on obtient q_{AC} en fonction de F_p .
- 4- Peuvent alors être calculés
 - la relation entre F_p et F_{pneu} , le torseur des efforts d'interaction pneumatique chaussée.
 - le torseur cinématique vu par l'aire de contact : τ_{AC} .
- 5- Sous hypothèse d'avoir q_{AC} petits, on peut calculer le modèle d'interaction pneumatique/sol en fonction de τ_p et F_p , les torseurs cinématique et d'effort respectivement du repère pneumatique.

2.3.4.2. Estimation des positions articulaires relatives à la définition du contact pneumatique/sol

2.3.4.2.1. Estimation de la matrice de passage du repère pneumatique au repère de roue voilée

On considère que l'angle de roue θ et l'angle de voilage ϕ sont connus, ainsi que le paramétrage du plan du sol $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ exprimé dans le repère du porte fusée. Il correspond au couple suivant :

$$\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)_{R_{pf}} = \left((z_r)_{R_{pf}} \mid d_{R_{pf}} \right) \quad (2-7)$$

avec $(z_r)_{R_{pf}}$ l'expression de la normale au sol dans le repère du porte fusée,

$d_{R_{pf}}$ la distance entre le plan du sol et O , le centre du repère du porte fusée.

Soit ${}^{R_{rw}}R_{R_{pf}}$ la matrice de rotation exprimant le repère du porte fusée R_{pf} dans le repère de la roue voilée R_{rw} :

$${}^{R_{rw}}R_{R_{pf}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi).\cos(\theta) & \sin(\phi).\cos(\theta) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi).\sin(\theta) & \sin(\phi).\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

L'expression de la normale au sol dans le repère de la roue voilée vaut :

$$(\mathbf{z}_r)_{R_{rw}} = {}^{R_{rw}}R_{R_{pf}} \cdot (\mathbf{z}_r)_{R_{pf}} \quad (2-9)$$

L'expression de la normale au plan de jante de la roue voilée dans le repère de la roue voilée vaut :

$$(\mathbf{y}_{tw})_{R_{rw}} = (0 \ 1 \ 0)_{R_{rw}} \quad (2-10)$$

D'après la définition du repère pneumatique, le vecteur \mathbf{z}_p est confondu avec la normale au sol \mathbf{z}_r et le vecteur \mathbf{x}_p est orthogonal à la normale au plan de jante ainsi qu'à la normale au sol. On a donc :

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{y}_{tw} \wedge \mathbf{z}_r \quad (2-11)$$

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{z}_r \quad (2-12)$$

On déduit de (2-9), (2-10) et (2-11) l'expression de \mathbf{x}_p et \mathbf{z}_p dans le repère de la roue voilée :

$$(\mathbf{z}_p)_{R_{tw}} = {}^{R_{tw}}R_{R_{pf}} \cdot (\mathbf{z}_r)_{R_{pf}} \quad (2-13)$$

$$(\mathbf{x}_p)_{R_{tw}} = ((\mathbf{y}_{tw})_{R_{tw}} \wedge) \cdot {}^{R_{tw}}R_{R_{pf}} (\mathbf{z}_r)_{R_{pf}} \quad (2-14)$$

$$\text{avec } ((\mathbf{y}_{tw})_{R_{tw}} \wedge) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le centre P du repère pneumatique R_p est défini comme la projection de O sur le plan du sol. suivant l'axe z_{cr} dans le plan de roue. Or l'axe z_{cr} est défini orthogonal à \mathbf{x}_{cr} , colinéaire \mathbf{x}_p .

On en déduit la relation suivante :

$$OP^T (\mathbf{x}_p \ \mathbf{y}_{tw} \ \mathbf{z}_p) = (0 \ 0 \ d) \quad (2-15)$$

Le vecteur \mathbf{y}_p est défini de sorte à former un trièdre direct avec \mathbf{z}_p et \mathbf{x}_p .

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{z}_p \wedge \mathbf{x}_p \quad (2-16)$$

A l'aide de (2-10), (2-13), (2-14), (2-15) et (2-16) on est en mesure d'explicitier la matrice de passage du repère pneumatique au repère de la roue voilée :

$${}^{R_{tw}}T_{R_p} = \left(\begin{array}{c|c} {}^{R_{tw}}R_{R_p} & {}^{R_{tw}}P_{R_p} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2-17)$$

$$\text{avec } {}^{R_{tw}}R_{R_p} = (\mathbf{x}_p \ \mathbf{y}_p \ \mathbf{z}_p)_{R_{tw}} = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

$${}^{R_{tw}}P_{R_p} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & a_x \\ s_y & 1 & a_y \\ s_z & 0 & a_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

2.3.4.2.2. Estimation des variables articulaires par géométrie inverse

2.3.4.2.2.1. Cas général

La matrice de passage du repère pneumatique au repère de la roue voilée (2-17) est utilisée pour calculer les variables articulaires d'enroulement, de hauteur et de carrossage pneu par méthode géométrique inverse (méthode de Paul [Khalil 99]).

Enroulement pneu:

$$\xi = \arctan 2(s_z, -s_x) \quad (2-20)$$

Carrossage pneu :

$$\gamma = \arctan 2((n_z \cdot \cos(\xi) + n_x \cdot \sin(\xi)), (a_z \cdot \cos(\xi) + a_x \cdot \sin(\xi))) \quad (2-21)$$

Rayon sous charge :

$$h = P_z \cdot \cos(\xi) + P_x \cdot \sin(\xi) \quad (2-22)$$

2.3.4.2.2.2. Hypothèse d'un angle de voilage nul pour un angle de roue inconnu

Dans le cas où on ne connaît pas θ , l'angle de rotation de roue, (2-17) ne peut pas être explicitée et on ne peut pas accéder aux variables articulaires. Ce problème peut être résolu en posant l'hypothèse d'un angle de voilage nul.

Sous cette hypothèse, la rotation de la roue n'a pas d'influence géométrique sur les variables articulaires (enroulement mis à part). Ces dernières ne dépendent que de la situation du repère porte fusée par rapport au sol.

Dans le cas de la position articulaire en enroulement, on a la relation suivante :

$$\xi = -\theta + \hat{\xi} \quad (2-23)$$

avec $\hat{\xi}$: angle d'enroulement dû à la situation du repère porte fusée par rapport au sol.

Au lieu d'être appliquée à la matrice de transformation du repère pneumatique vers le repère de roue voilée, la méthode géométrique inverse est appliquée à la matrice de transformation du repère pneumatique vers le repère du porte fusée.

Le paramétrage du plan du sol $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ exprimé dans le repère du porte fusée contient l'information suffisante :

$$(a'_x, a'_y, a'_z)^T = (\mathbf{z}_r)_{R_{pf}} \quad (2-24)$$

On déduit de (2-24) les positions articulaires sous hypothèse d'un voile de jante nul :

$$\phi = 0 \quad (2-25)$$

Enroulement pneu:

$$\hat{\xi} = \arctan 2(a'_x, a'_z) \quad (2-26)$$

$$\xi = \hat{\xi} - \theta \quad (2-27)$$

Carrossage pneu :

$$\gamma = \arctan 2(-a'_y, (a'_z \cdot \cos(\xi) + a'_x \cdot \sin(\xi))) \quad (2-28)$$

Rayon sous charge :

$$h = \frac{d}{\cos(\gamma)} \quad (2-29)$$

2.3.4.3. Estimation du torseur d'effort en base de roue

Le torseur d'effort de contact pneumatique/sol F_p correspond au torseur d'effort appliqué au corps relatif au repère pneumatique R_p :

$$F_p = {}^{R_{pf}} \mathbb{T}_{R_p}^T (q_r, q_p) [F_{pf} + D_p (q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r, q_p, \dot{q}_p) X_p] \quad (2-30)$$

avec F_{pf} : torseur d'effort mesuré au porte fusée,

X_p : paramètres dynamiques des corps indicés 9, 11, 1, 2 et 3 dans le tableau 2:

$D_p (q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r, q_p, \dot{q}_p)$: matrice de projection des paramètres dynamiques X_p sur le torseur d'effort mesuré au porte fusée F_0 .

${}^{R_{pf}} \mathbb{T}_{R_p}^T (q_r, q_p)$: matrice de projection du torseur d'effort de R_{pf} dans R_p , calculée à l'aide (2-34). Sous hypothèse d'un angle de voilage de jante nul, elle vaut :

$${}^{R_{pf}} \mathbb{T}_{R_p}^T (q_p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_{\hat{\xi}} & 0 & -s_{\hat{\xi}} & & & \\ s_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} & c_{\gamma} & c_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} & & 0 & \\ s_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} & -s_{\gamma} & c_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} & & & \\ \hline 0 & h & 0 & c_{\hat{\xi}} & 0 & -s_{\hat{\xi}} \\ -h.c_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} & 0 & h.s_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} & s_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} & c_{\gamma} & c_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} \\ h.c_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} & 0 & -h.s_{\hat{\xi}}.s_{\gamma} & s_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} & -s_{\gamma} & c_{\hat{\xi}}.c_{\gamma} \end{array} \right) \quad (2-31)$$

avec $c_{\hat{\xi}} = \cos(\hat{\xi})$, $s_{\hat{\xi}} = \sin(\hat{\xi})$, $c_{\gamma} = \cos(\gamma)$, $s_{\gamma} = \sin(\gamma)$ avec $\hat{\xi}$ contribution dans l'enroulement de l'allure du repère du porte fusée et définie en (2-26).

*** Passage d'un torseur d'un repère à un autre à partir d'une matrice de transformation**

Soit la matrice de transformation du repère i vers le repère j ou exprimant le repère j dans le repère i :

$${}^i T_j = \left(\begin{array}{c|c} {}^i R_j & {}^i P_j \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2-32)$$

Le passage d'un torseur cinématique \mathcal{V}_j du repère j au repère i s'écrit :

$$\mathcal{V}_i = {}^i T_j \cdot \mathcal{V}_j \quad (2-33)$$

avec

$${}^i T_j = \left(\begin{array}{c|c} {}^i R_j & ({}^i P_j \wedge) {}^i R_j \\ \hline \mathbf{0} & {}^i R_j \end{array} \right) \quad (2-34)$$

avec ${}^i P_j \wedge$ matrice de produit vectoriel avec le vecteur ${}^i P_j = (x \ y \ z)$:

$${}^i P_j \wedge = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

La matrice de passage d'un torseur d'effort du repère j au repère i s'écrit :

$$\mathbb{F}_i = {}^j T_i^T \cdot \mathbb{F}_j \quad (2-36)$$

2.3.4.4. Estimation des positions articulaires relatives à la flexibilité du pneumatique

Etant donné le paramétrage dynamique indiqué tableau 2, un bilan dynamique sur les articulations de ballant, d'avance et de torsion pneu s'écrit sous la forme :

$${}^p J_p^T \cdot F_p = K_{AC} \cdot q_{AC} + h_{AC} \cdot \dot{q}_{AC} + I_{AC} \cdot \ddot{q}_{AC} \quad (2-37)$$

$$\text{avec } K_{AC} = \text{diag}(K_y \ K_x \ K_\beta)$$

$$h_{AC} = \text{diag}(h_y \ h_x \ h_\beta)$$

$$I_{AC} = \text{diag}(M_{AC} \ M_{AC} \ ZZ_{AC})$$

${}^p J_p$ Jacobien de projection du torseur d'effort de contact pneumatique/sol dans la base pneumatique R_p sur les articulations :

$${}^p J_p(q_{AC}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^T \quad (2-38)$$

On dispose de 3 équations découplées du 2^{ième} ordre ayant pour paramètres fondamentaux (*i* allant de 1 à 3) :

- un gain statique (en N/m ou N.m/rad): $G_{si} = K_{ACi}$
- une pulsation propre (en rad/s) : $\omega_{0i} = \sqrt{\frac{K_{ACi}}{I_{ACi}}}$
- un taux d'amortissement : $\lambda_i = \frac{h_{ACi}}{2\sqrt{K_{ACi} \cdot I_{ACi}}}$

La connaissance de ces trois informations est nécessaire pour déterminer les paramètres dynamiques de (2-37). Afin de donner une idée des ordres de grandeur de ces paramètres fondamentaux, le tableau 3 indique les valeurs mesurées sur un pneu en l'air (et donc hors charge). Le type de pneu et les conditions d'essai ne sont pas divulgués pour des raisons de confidentialité.

Mode	Freq. propre (Hz)	Amortissement (%)
Longitudinal / vertical	104.2	4.8
Latéral	55.7	1.4
Lacet / Carrossage	68.9	2.2
Enroulement	87.0	6.8

TABLEAU 3 : MODES MESURES SUR ROUE EN L' AIR

Etant donné les valeurs indiquées dans le tableau 3, le modèle du 2^{ième} ordre (2-37) peut se réduire à un gain statique dans le domaine dynamique considéré dans cette étude (0 à 15Hz) :

$${}^p J_p^T(q_{AC}) \cdot F_p = K_{AC} \cdot q_{AC} \quad (2-39)$$

La résolution de (2-39) permet d'obtenir l'expression de q_{AC} en fonction des éléments du torseur F_p :

$$F_p = (F_{xp} \quad F_{yp} \quad F_{zp} \mid F_{xp} \quad F_{yp} \quad M_{zp})^T \quad (2-40)$$

$$q_{AC} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_y^{-1} \cdot F_{yp} \\ K_x^{-1} \cdot F_{xp} \\ K_\beta^{-1} \cdot (M_{zp} + (K_x^{-1} - K_y^{-1}) \cdot F_{xp} \cdot F_{yp}) \end{pmatrix} \quad (2-41)$$

2.3.4.5. Expression des torseurs cinématique et d'effort du repère pneumatique

Sous hypothèse que le corps d'aire de contact a des paramètres inertiels négligeables, le torseur d'effort appliqué au repère pneumatique est la projection du torseur d'effort pneumatique/sol sur le repère pneumatique :

$$F_{AC} = {}^{R_p} \mathbb{T}_{R_{AC}}^T(q_{AC}) \cdot F_P \quad (2-42)$$

avec F_{AC} : torseur d'effort appliqué au repère d'aire de contact,

F_P : torseur d'effort appliqué au repère pneumatique,

${}^{R_{AC}} \mathbb{T}_{R_p}$ matrice 6x6 de passage d'un torseur cinématique de R_p à R_{AC}

Le torseur cinématique de l'aire de contact est la somme des contributions de la cinématique du repère pneumatique et de la cinématique des articulations entre les deux repères :

$$\tau_{AC} = {}^{R_{AC}} \mathbb{T}_{R_p}(q_{AC}) \left({}^p J_p(q_{AC}) \cdot \dot{q}_{AC} + \tau_p \right) \quad (2-43)$$

avec τ_{AC} : torseur cinématique du repère d'aire de contact,

τ_p : torseur cinématique du repère pneumatique :

$$\tau_p = {}^{R_p} \mathbb{T}_{R_{pf}}(q_p) \left({}^p J_p(q_p) \cdot \dot{q}_p + \tau_{pf} \right) \quad (2-44)$$

La matrice de passage d'un torseur cinématique de R_p à R_{AC} , ${}^{R_{AC}} \mathbb{T}_{R_p}$ s'écrit :

$${}^{R_{AC}} \mathbb{T}_{R_p} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c\beta & s\beta & 0 & 0 & 0 & -y.c\beta + x.s\beta \\ -s\beta & c\beta & 0 & 0 & 0 & -x.c\beta + y.s\beta \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \\ \hline & & & c\beta & s\beta & 0 \\ & 0 & & -s\beta & c\beta & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2-45)$$

où $c\beta = \cos(\beta)$ et $s\beta = \sin(\beta)$

τ_p : torseur cinématique du repère pneu :

$$\tau_p = {}^{R_p} \mathbb{T}_{R_0}(q_p) \left({}^p J_p(q_p) \cdot \dot{q}_p + \tau_{pf} \right) \quad (2-46)$$

2.3.4.6. Expression du modèle d'effort de contact pneumatique/sol dans le repère pneumatique

2.3.4.6.1. Construction du modèle

Le modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol F_{pneu} qui permet de calculer F_{AC} , le torseur d'effort appliqué à l'aire de contact, dépend du torseur cinématique du repère d'aire de contact : τ_{AC} :

$$F_{AC} = F_{pneu}(\tau_{AC}) \quad (2-47)$$

L'équation de τ_{AC} (2-43) est réécrite sous la forme suivante :

$$\tau_{AC} = \tau_p + \Delta\tau_{AC} \quad (2-48)$$

$$\text{avec } \Delta\tau_{AC} = {}^{R_{AC}}\mathbb{T}_{R_p}^T(q_{AC}) \cdot {}^p J_p(q_{AC}) \cdot \dot{q}_{AC} + \left({}^{R_{AC}}\mathbb{T}_{R_p}^T(q_{AC}) - I \right) \cdot \tau_p \quad (2-49)$$

Sous réserve d'avoir avec $\Delta\tau_{AC}$ petit, (2-47) s'écrit :

$$F_{AC} = F_{pneu}(\tau_p) + \frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \Delta\tau_{AC} \quad (2-50)$$

Sous hypothèse que $(K_x^{-1} - K_y^{-1}) \cdot F_{xp} \cdot F_{yp}$ soit une quantité négligeable, (2-41) permet d'exprimer les cinématiques des articulations d'avance, de ballant et torsion pneumatique linéairement par rapport à la dérivée temporelle du torseur d'effort appliqué au repère pneumatique :

$$\dot{q}_{AC} = K_{AC}^{-1} \cdot J_p^T \cdot \dot{F}_p \quad (2-51)$$

(2-42), (2-49) et (2-51) sont substituées dans (2-50) pour obtenir le modèle d'effort de contact dans le repère pneumatique :

$${}^{R_p}\mathbb{T}_{R_{AC}}^T \cdot F_p = F_{pneu}(\tau_p) + \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot \left({}^{R_{AC}}\mathbb{T}_{R_p}^T \cdot {}^p J_p \cdot K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T \cdot \dot{F}_p + \left({}^{R_{AC}}\mathbb{T}_{R_p}^T(q_{AC}) - I \right) \cdot \tau_p \right) \quad (2-52)$$

L'équation (2-52) est obtenue sous l'hypothèse de négliger les paramètres inertiels : h_y , h_x , h_β , M_{AC} et ZZ_{AC} .

$F_{pneu}(\tau_p)$ correspond au modèle d'interaction pneumatique chaussée. Si il est exprimé de sorte à être linéaire par rapport aux paramètres, l'équation (2-52) peut être utilisé pour identifier le modèle (voir §3.3.1), toutes ses grandeurs étant calculables : q_{AC} à partir de (2-41), F_p à partir de (2-30) et τ_p à partir de (2-46) .

2.3.4.6.2. Représentation d'état du modèle

Afin de faciliter l'analyse, (2-52) est exprimée sous forme d'état :

$$\begin{cases} E(q_{AC}) \cdot \dot{x} = A(q_{AC}) \cdot x + B(q_{AC}) \cdot \left[\frac{F_{pneu}(\tau_p)}{\tau_p} \right] \\ \begin{bmatrix} F_p \\ q_{AC} \end{bmatrix} = C(q_{AC}) \cdot x \end{cases} \quad (2-53)$$

Avec x vecteur d'état : $x = F_p$

A matrice d'état :

$$A(q_{AC}) = {}^{R_p} T_{RAC}^T \quad (2-54)$$

E : matrice des états implicites :

$$E(q_{AC}) = \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \left({}^{R_{AC}} T_{R_p} \cdot {}^p J_p \cdot K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T \right) \quad (2-55)$$

B matrice de commande :

$$B(q_{AC}) = \left[-I \mid - \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q_{AC}} \left({}^{R_{AC}} T_{R_p} \right) \right] \quad (2-56)$$

C matrice d'observation :

$$C(q_{AC}) = \begin{bmatrix} I \\ K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T(q_{AC}) \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

Il apparaît que la dynamique du système dépend des raideurs des articulations de la liaison pneumatique/sol. En effet, si ces raideurs sont infinies, $K_{AC}^{-1} = 0$, on a nécessairement $E(q_{AC}) = 0$.

2.3.5. Modèle simplifié de l'effort d'interaction pneumatique/sol

Cette partie présente un modèle physique du torseur d'effort généré par l'interaction pneumatique/sol : F_{pneu} . Le modèle ne prend pas en compte les flexibilités du modèle de contact pneumatique/sol, le voilage de roue et suppose une adhérence totale sur la zone de contact. Les influences du carrossage et du profil cylindrique du pneumatique sont pris en compte. La notion de déformation vue par l'aire de contact est utilisée pour construire le modèle. On détermine de cette manière les entrées physiques du modèle et la structure de sa matrice d'entrée sortie. Les résultats obtenus sont comparés avec les entrées habituellement utilisées afin de vérifier leur compatibilité.

Afin d'éviter les confusions dues à l'utilisation de la notion de points coïncidant, on utilise la notation suivante pour exprimer les torseurs : $\tau_{S \in R_{tw}/R_r}$ qui signifie « le torseur au point S qui appartient au repère R_{tw} par rapport au repère R_r . »

2.3.5.1. Représentation de l'aire de contact

On suppose dans cette partie que les articulations 8 – 9 – 10, relatives aux déformations élastiques du pneumatique dans le plan relatif au sol, sont bloquées. De cette manière, le repère d'aire de contact R_{ac} est confondu avec le repère pneumatique R_p et le torseur d'effort de contact F_p est identique au torseur d'interaction pneumatique/sol F_{ac} .

La roue est modélisée comme un cylindrique d'axe de révolution (O, \mathbf{y}_{pf}) , de rayon R_L et de largeur w .

Les éléments de surface de la roue : S sont localisés dans le repère R_{tw} attaché à la roue par le couple de coordonnées cylindriques :

$$S = S(\alpha, y) \quad (2-58)$$

avec α et y les coordonnées angulaire et latérale respectivement.

L'aire de contact est définie par l'intersection du plan sol et du plan de jante. On désigne par $h(y)$ la projection du point appartenant à l'axe de rotation (O, \mathbf{y}_{pf}) paramétré par y sur le plan de route $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ en suivant l'axe \mathbf{z}_{cr} . On note $h_0 = h(0)$.

On a la relation :

$$h(y) = h_0 + y \cdot \sin(\gamma) \quad (2-59)$$

Soit χ le paramétrage angulaire de l'aire de contact définie comme l'intersection de la roue avec le sol dans le repère de centre de roue. χ se déduit de h par la relation :

$$\chi(y) = \arccos\left(\frac{h(y)}{R_L}\right) \quad (2-60)$$

On note $\chi_0 = \chi(0)$.

Les éléments de surface $S(\alpha, y)$ de l'aire de contact vérifient la relation : $|\alpha + \theta| \leq \chi(y)$.

Soit L la longueur d'aire de contact. On a les relations suivantes avec h et χ :

$$L(y) = 2 \cdot R_L \cdot \sin(\chi(y)) \quad (2-61)$$

$$R_L^2 = h(y)^2 + \left(\frac{L(y)}{2}\right)^2 \quad (2-62)$$

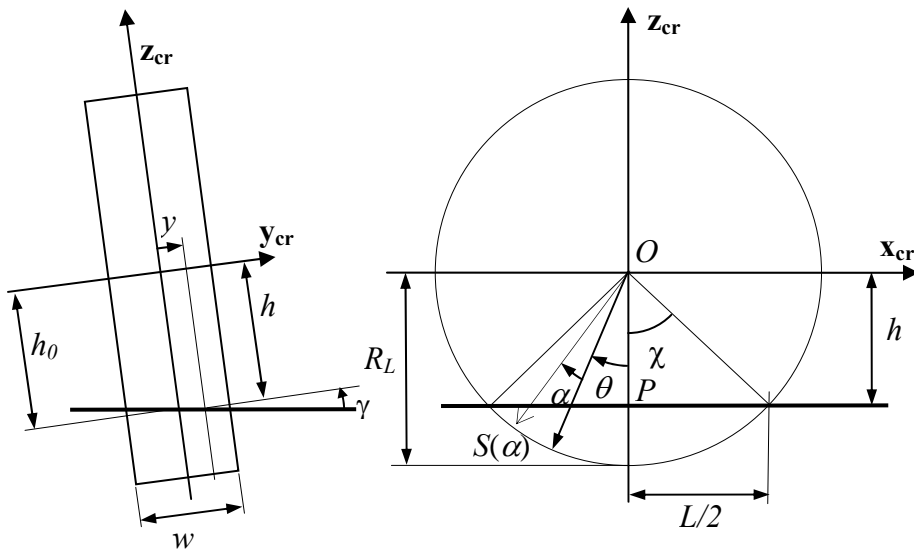


figure 14 : Paramétrage de l'aire de contact

2.3.5.2. Déformation vue par l'aire de contact

Le pneumatique a deux comportements distincts suivant la zone de l'aire de contact où on se situe :

- Dans la zone d'adhérence :

Dans cette zone, seul le comportement élastique est sollicité. Le pneumatique y est modélisable comme un élément de stockage, c'est-à-dire générant un effort dépendant de la déformation subie. On note D la déformation totale vue dans la zone d'adhérence.

- Hors de la zone d'adhérence (zone de glissement):

L'aire de contact a une limitation en élasticité, de sorte que le pneumatique a un caractère dissipatif en dehors de la zone d'adhérence. On l'y modélise comme un élément dissipatif générant un effort dépendant de la vitesse de glissement vue par l'ensemble de la zone de glissement.

Afin de distinguer ces deux comportements, il est nécessaire de calculer la zone d'adhérence. Pour cela il faut expliciter localement les contraintes de déformations afin de les comparer aux contraintes de pression (voir [Pacejka 02]). Après intégration spatiale, le résultat macroscopique obtenu est nécessairement une solution par morceau. Dans le souci de ne pas alourdir les résultats et de se retreindre à une analyse structurelle de l'interaction pneumatique/sol, on fait ici l'hypothèse d'adhérence sur toute l'aire de contact (physiquement acceptable dans le cadre de petits déplacements).

Soit $\tau_{S(\alpha,y) \in Rtw/Rr}$ le torseur cinématique de la roue par rapport au sol au point de la surface du pneumatique $S(\alpha, y)$. La déformation de cet élément dans l'aire de contact induite par cette cinématique vaut :

$$d_S(\alpha, y) = \int_{t-t_c(\alpha,y)}^t \tau_{S(\alpha,y) \in Rtw/Rr} \cdot dt \quad (2-63)$$

où $t_c(\alpha, y)$ est le temps passé par l'élément surfacique $S(\alpha, y)$ dans la zone d'adhérence.

Après intégration surfacique des déformations élémentaires on obtient la déformation élastique sur l'ensemble de l'aire de contact :

$$D = \int_{-w/2-\chi(y)}^{w/2-\chi(y)} \int d_S(\alpha, y) . d\alpha . dy \quad (2-64)$$

La loi de composition des vitesses permet d'écrire la cinématique de l'aire de contact par rapport au sol comme étant la composition des cinématiques de la roue par rapport au porte fusée et du porte fusée par rapport au sol :

$$\tau_{S(\alpha, y) \in R_w / R_r} = \tau_{S(\alpha, y) \in R_{tw} / R_{pf}} + \tau_{S(\alpha, y) \in R_{pf} / R_r} \quad (2-65)$$

Cette décomposition appliquée à (2-63) et (2-64) permet d'écrire la déformation vue par l'aire de contact comme la somme de deux déformations :

$$D = D_{Pf} + D_{Rw} \quad (2-66)$$

avec D_{Pf} : déformation due à la cinématique du porte fusée

$$D_{Pf} = \int_{-w/2-\chi(y)}^{w/2-\chi(y)} \int \int_{t-t_a(\alpha, y)}^t \tau_{S(\alpha, y) \in R_{pf} / R_r} . dt . d\alpha . dy \quad (2-67)$$

D_{Rw} : déformation due à la cinématique de rotation de roue :

$$D_{Rw} = \int_{-w/2-\chi(y)}^{w/2-\chi(y)} \int \int_{t-t_a(\alpha, y)}^t \tau_{S(\alpha, y) \in R_{tw} / R_{pf}} . dt . d\alpha . dy \quad (2-68)$$

L'expression de ces déformations développée dans la suite.

2.3.5.2.1. Déformation due à la cinématique du porte fusée

Par application de $M_{S(\alpha, y)P}$, opérateur de changement de point d'un torseur cinématique, on déduit du torseur cinématique du porte fusée exprimé en base de roue : $\tau_{P \in R_{pf} / R_r}$ l'ensemble des cinématiques des points appartenant à la surface du pneumatique: $\tau_{S(\alpha, y) \in R_{pf} / R_r}$.

$$\tau_{S(\alpha, y) \in R_{pf} / R_r} = M_{S(\alpha, y)P} . \tau_{P \in R_{pf} / R_r} \quad (2-69)$$

avec

$$\overrightarrow{PS(\alpha, y)} = (-R_L . \sin(\alpha) \quad y . \cos(\gamma) \quad R_L . (\cos(\chi_0) - \cos(\alpha)))_{R_r}^T \quad (2-70)$$

Opérateur de changement de point d'un torseur cinématique :

Soit $\overrightarrow{BA} = (x_{BA} \quad y_{BA} \quad z_{BA})^T$. L'opérateur de changement de point M_{BA} correspond à la matrice de passage d'un torseur cinématique associée à la matrice de transformation suivante :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} I & BA \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2-71)$$

Afin de pouvoir calculer le temps passé dans l'aire de contact par chacun des éléments, on fait l'hypothèse de stationnarité sur la vitesse de rotation de roue :

$$\theta = \omega.t \quad (2-72)$$

avec ω la vitesse de rotation de roue.

On a ainsi :

$$\begin{cases} t_c(\alpha, y) = \frac{\alpha + \chi(y)}{\omega}, & \text{si } \alpha \in [-\chi(y), \chi(y)] \\ t_c(\alpha, y) = 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2-73)$$

En étendant l'hypothèse de stationnarité au torseur cinématique du porte fusée, on explicite la déformation élastique élémentaire en fonction du temps (1-38) :

$$d_{Spf}(\alpha, y) = \tau_{S(\alpha, y) \in Rpf / Rr} \cdot t_c(\alpha, y) \quad (2-74)$$

Après substitution de (2-73) dans (2-74), on obtient la déformation élémentaire sans dépendance au temps :

$$d_{Spf}(\alpha, y) = \left(M_{S(\alpha, y)S} \right) \left(\frac{\alpha + \chi(y)}{\omega} \right) \cdot \tau_{S \in Rpf / Rr} \quad (2-75)$$

Après intégration surfacique et approximation au premier ordre de l'influence de la largeur, on obtient l'expression de la déformation en P due à la cinématique du porte fusée par rapport au sol :

$$D_{Ppf} = \frac{2 \cdot w \cdot \chi_0^2}{\omega} M_{S, P} \cdot \tau_{S \in Rpf / Rr} \quad (2-76)$$

avec PS_r le vecteur de chasse du pneumatique :

$$PS_r = \left(\begin{array}{c} -\frac{R_L}{\chi_0^2} \cdot (\sin(\chi_0) - \chi_0 \cdot \cos(\chi_0)) \\ \sin(\gamma) \cdot \frac{w^2}{6 \cdot \chi_0 \cdot R_L \cdot \sin(\chi_0)} \\ R_L \cdot \left(\cos(\chi_0) - \frac{\sin(\chi_0)}{\chi_0} \right) \end{array} \right)_{R_{cr}} \approx \left(\begin{array}{c} R_L \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \chi_0 + \frac{1}{30} \cdot \chi_0^3 \right) \\ \sin(\gamma) \cdot \frac{w^2}{6 \cdot \chi_0 \cdot R_L \cdot \sin(\chi_0)} \\ R_L \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \chi_0^2 + \frac{1}{30} \cdot \chi_0^4 \right) \end{array} \right)_{R_{cr}} \quad (2-77)$$

On retrouve la notion de chasse telle qu'elle peut apparaître avec un modèle brosse [Pacejka 02] :

- la composante longitudinale de la chasse vaut 1/6 de la longueur de l'aire de contact en zéro,
- la composante latérale de la chasse est proportionnelle au carrossage,
- la composante verticale de la chasse existe en théorie mais est négligeable.

2.3.5.2.2. Déformation due à la cinématique de roue

En régime stationnaire (2-72), le torseur cinématique $\tau_{S(\alpha,y) \in R_{tw}/R_{pf}}$ s'exprime dans le repère du porte fusée :

$$\tau_{S(\alpha,y) \in R_{w}/R_{pf}} = \omega \cdot \left(\begin{array}{c} -R_L \cdot \cos(\alpha + \omega t) \\ 0 \\ \frac{R_L \cdot \sin(\alpha + \omega t)}{0} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)_{R_{cr}} \quad (2-78)$$

Après intégration temporelle (2-63), on obtient le vecteur des déformations élémentaires :

$$d_{R_w}(\alpha, y) = \left(\begin{array}{c} -R_L \cdot (\sin(\chi(y)) + \sin(\alpha)) \\ 0 \\ \frac{R_L \cdot [\cos(\chi(y)) - \cos(\alpha)]}{0} \\ \alpha + \chi(y) \\ 0 \end{array} \right)_{R_{cr}} \quad (2-79)$$

Après intégration circonférentielle et sur la largeur ainsi qu'un développement au premier ordre, on obtient la déformation due à rotation de roue autour du porte fusée :

$$D_{Rw} = 2.w.\chi_0^2.(-R_r \quad 0 \quad e_r \mid 0 \quad 1 \quad 0)_{Rcr}^T \quad (2-80)$$

avec R_r rayon de roulement

$$R_r = \frac{R_L \cdot \sin(\chi_0)}{\chi_0} \approx R_L \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \chi_0^2 + \frac{1}{120} \chi_0^4\right) \quad (2-81)$$

e_r écrasement vertical

$$e_r = \frac{R_L}{\chi_0^2} \cdot (\cos(\chi_0) \cdot \chi_0 - \sin(\chi_0)) \approx R_L \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \chi_0 + \frac{1}{30} \cdot \chi_0^3\right) \quad (2-82)$$

On retrouve ici les notions de rayon de roulement et d'écrasement pneumatique. Il apparaît que pour χ_0 au voisinage de zéro le rayon de roulement est égal au rayon libre, l'écrasement suit la même évolution que la composante longitudinale de la chasse.

2.3.5.2.3. Déformation totale

En substituant (2-76) et (2-80) dans (2-66) et en reprenant les notations utilisées pour la cinématique d'aire de contact, la déformation totale du pneumatique s'écrit :

$$D = 2.w \cdot \left(\arccos\left(\frac{h_0}{R_L}\right) \right)^2 \left(M_{S_rP}(h_0, \gamma, R_L, w) \cdot \frac{\tau_{AC}}{\omega} + E(h_0, R_L) \right) \quad (2-83)$$

avec E vecteur invariant dépendant de l'allure de la roue par rapport au sol:

$$E = (-R_r(h_0, R_L) \quad 0 \quad e_r(h_0, R_L) \mid 0 \quad 1 \quad 0)_{Rcr}^T \quad (2-84)$$

On définit les formes développées

- du torseur cinématique du repère d'aire de contact :

$$\tau_{AC} = (V_x \quad V_y \quad V_z \mid \dot{\gamma} \quad \dot{\xi} \quad \dot{\beta})^T \quad (2-85)$$

- de la chasse pneumatique :

$$S_rP = (t_x \quad t_y \quad t_z)^T \quad (2-86)$$

La forme développée de (2-83) exprimée dans le repère d'aire de contact :

$$D = 2w \cdot \chi_0^2 \left[\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}_{R_p} + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}_{R_p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_r \\ \sin(\gamma) \cdot e_r \\ \cos(\gamma) \cdot e_r \\ 0 \\ \cos(\gamma) \\ -\sin(\gamma) \end{pmatrix} \right] \quad (2-87)$$

Sous les hypothèses :

- γ petit (vérifiée en pratique où le module du carrossage n'excède pas 5°),
- $t_z = 0$ (vérifiée à l'ordre 1 dans (2-77))
- $t_y = t'_y \cdot \gamma$ (vérifiée à l'ordre 1 dans (2-77))

La déformation vue par l'aire de contact s'écrit linéairement au vecteur d'entrée u :

$$D = M_D(\chi_0) u \quad (2-88)$$

Où $M_D(\chi_0)$ ne dépend que de la géométrie structurelle du pneumatique :

$$M_D(\chi_0) = 2w \cdot \chi_0^2 \cdot \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & t'_y & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & -t_x & 0 & 0 & e_r & 0 \\ & 0 & t_x & 0 & -t'_y & 0 & 0 & e_r \\ \hline 0 & & I_3 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2-89)$$

u : vecteur d'entrée, dont les composantes ont une dimension homogène à une longueur ou à un angle :

$$u = \left[\left(\frac{V_x}{\omega} - R_r \right) \quad \frac{V_y}{\omega} \quad \frac{V_z}{\omega} \quad \left| \quad \frac{\dot{\gamma}}{\omega} \quad \left(\frac{\dot{\xi}}{\omega} + 1 \right) \quad \left(\frac{\dot{\beta}}{\omega} - \gamma \right) \quad \left| \quad \frac{\gamma \cdot \dot{\gamma}}{\omega} \quad \frac{\gamma \cdot \dot{\beta}}{\omega} \quad \left| \quad \gamma \quad \left| \quad 1 \right. \right. \right] \quad (2-90)$$

2.3.5.3. Relation entre les déformations vue par l'aire de contact et les grandeurs d'entrée conventionnelle

Le vecteur d'entrée u est mis sous la forme :

$$u = \left[\kappa' \quad \delta' \quad \frac{V_z}{\omega} \quad \left| \quad \frac{\dot{\gamma}}{\omega} \quad \left(\frac{\dot{\xi}}{\omega} + 1 \right) \quad \overline{\varphi'} \quad \left| \quad \frac{\gamma \cdot \dot{\gamma}}{\omega} \quad \frac{\gamma \cdot \dot{\beta}}{\omega} \quad \left| \quad \gamma \quad \left| \quad 1 \right. \right. \right] \quad (2-91)$$

avec κ' déformation longitudinale vue par l'aire de contact (m) :

$$\kappa' = \frac{V_x}{\omega} - R_r \quad (2-92)$$

δ' déformation latérale vue par l'aire de contact (m):

$$\delta' = \frac{V_y}{\omega} \quad (2-93)$$

$\bar{\varphi}'$ déformation en torsion vue par l'aire de contact (rad):

$$\bar{\varphi}' = \varphi' - \gamma \quad (2-94)$$

avec φ' pseudo déformation en torsion vue par l'aire de contact (rad):

$$\varphi' = \frac{\dot{\beta}}{\omega} \quad (2-95)$$

Les grandeurs d'entrées conventionnelles utilisées pour le modèle d'interaction pneumatique/sol sont le glissement longitudinal, l'angle de dérive, le carrossage et la courbure de trajectoire. Ces grandeurs peuvent être définies suivant différentes conventions (voir [Pacejka 02] pour les normes SAE, ISO et leurs variantes). La convention présentée ci dessous est une des conventions utilisée par PSA Peugeot Citroën définie figure 15 :

- Taux de glissement longitudinal :

$$\kappa = \frac{R_r \cdot \omega}{V_x} - 1 \quad (2-96)$$

- Angle de dérive :

$$\delta = \arctan\left(\frac{-V_y}{V_x}\right) \quad (2-97)$$

- Courbure de trajectoire vue à l'aire de contact :

$$\bar{\varphi} = -\frac{\dot{\beta}}{V_x} + \frac{\sin(\gamma)}{R_r} \quad (2-98)$$

- Courbure de trajectoire vue au porte fusée:

$$\varphi = -\frac{\dot{\beta}}{V_x} \quad (2-99)$$

- Carrossage : γ

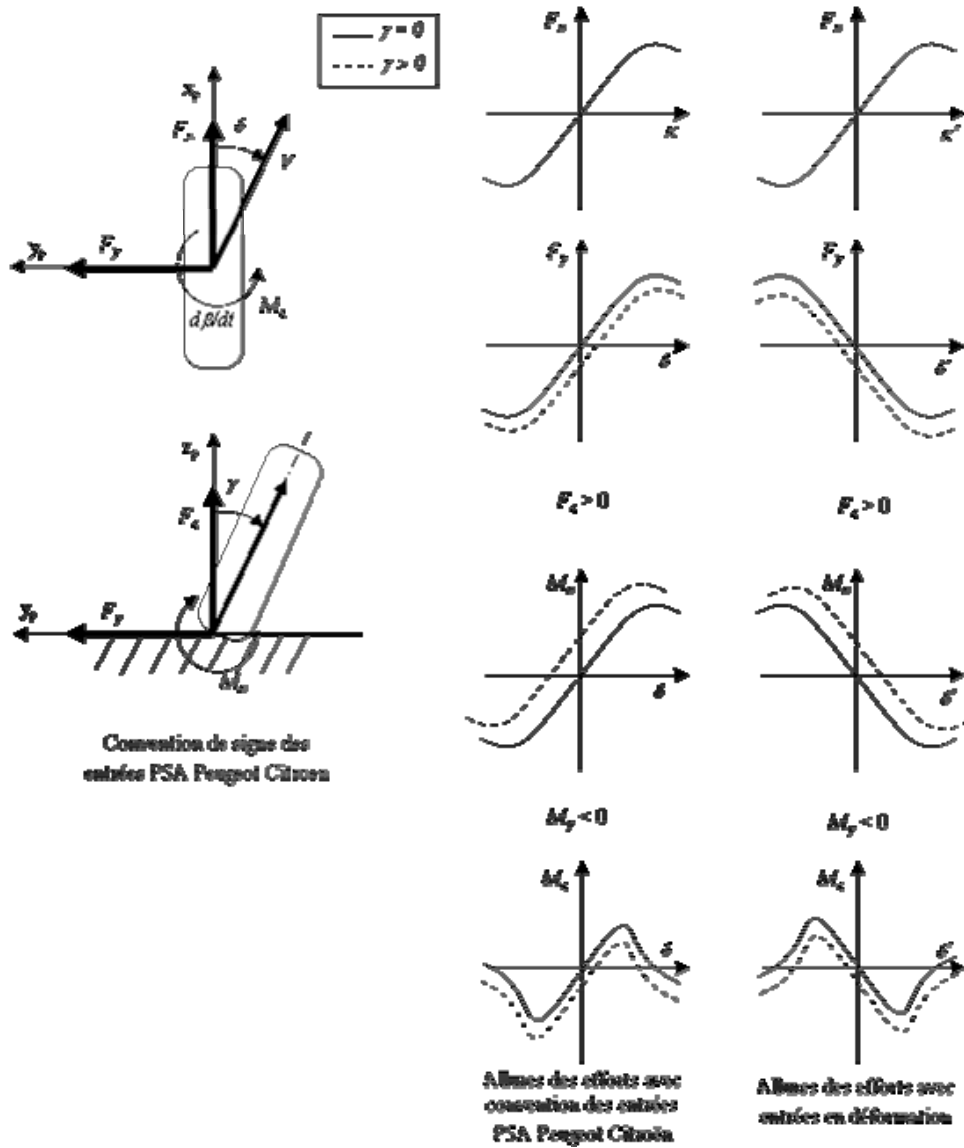


figure 15 : Conventions de signe des entrées/sorties du modèle d'interaction pneumatique sol

Il apparaît que la notion de déformation est compatible avec les grandeurs d'entrées usuelles sous hypothèse de vérifier l'absence de glissement longitudinal :

$$V_x = R_r \omega \quad (2-100)$$

On a les relations suivantes entre les grandeurs usuelles et les déformations :

- la déformation longitudinale en fonction du taux de glissement :

$$\kappa' = R_r \left(\frac{1}{\kappa + 1} - 1 \right) \quad (2-101)$$

- la déformation latérale en fonction de l'angle de dérive (sous hypothèse de glissement longitudinal nul) :

$$\delta' = -R_r \tan(\delta) \quad (2-102)$$

- la déformation en torsion en fonction de la courbure de trajectoire vue par le pneumatique (sous hypothèse de glissement longitudinal nul) :

$$\overline{\varphi}' = -R_r \cdot \overline{\varphi} \quad (2-103)$$

- la déformation en pseudo torsion en fonction de la courbure de trajectoire vue par le porte fusée (sous hypothèse de glissement longitudinal nul) :

$$\varphi' = -R_r \cdot \varphi \quad (2-104)$$

L'utilisation de φ' permet de séparer complètement la contribution du carrossage de celle de la vitesse de braquage vue par l'aire de contact. Cela permet de simplifier l'analyse fonctionnelle du modèle identifié en considérant l'entrée en carrossage indépendante des autres grandeurs d'entrées.

Dans ce mémoire, tous les résultats présentés sous forme de figure sont exprimés en fonction des grandeurs d'entrée habituelles respectant la convention de signe PSA Peugeot Citroën présentée figure 15.

2.3.5.4. Efforts d'orientation de nappes et de conicité

Le pneumatique peut avoir une légère conicité géométrique ou structurelle. Cette conicité introduit une projection de l'effort vertical sur l'effort latéral, ce qui produit un effort latéral constant.

L'empilement des nappes crée une asymétrie qui provoque un couple de torsion M_{zON} lorsque les nappes sont mises sous contrainte pour être mises à plat dans l'aire de contact. On notera que le signe de M_{zON} change avec le sens d'avance. [Lee 00] propose une méthode pour identifier la conicité et l'angle de nappe sur un véhicule roulant en ligne droite.

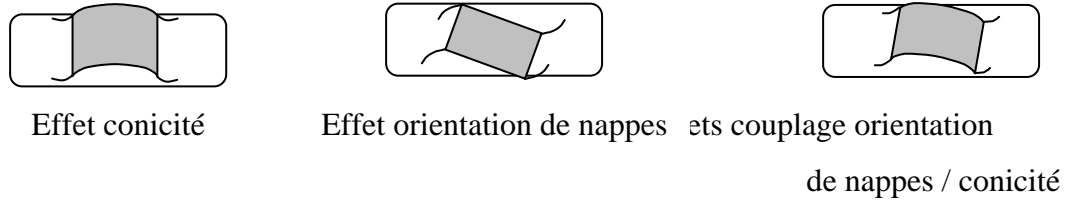


figure 16 : Conicité et orientation de nappes

2.3.5.5. Entrées et matrice entrées/sorties du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol

D'après l'expression du torseur de déplacement, c'est au point S_r que sont ramenés les déplacements et que doit être calculé le modèle d'effort. Exprimé au point P , ce dernier vaut donc :

$$F_{pneu} = M_{S_r, P}^T \cdot \Phi_{pneu}(D_{S_r}) + F_{off} \quad (2-105)$$

avec Φ_{pneu} opérateur de raideur appliqué au point S_r qui permet de générer le torseur d'effort pneumatique en fonction des déformations. Sous hypothèse que Φ_{pneu} soit diagonal :

$$\Phi_{pneu} = diag(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_\gamma, \Phi_\xi, \Phi_\beta) \quad (2-106)$$

F_{off} efforts statiques de conicité et d'orientation de nappe :

$$F_{off} = \left(0 \quad F_{yC} \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad M_{zON} \right)^T \quad (2-107)$$

Dans l'hypothèse où Φ_{pneu} est un opérateur diagonal linéaire, F_{pneu} peut être exprimé linéairement par rapport au vecteur d'entrée v :

$$F_{pneu} = M_{pneu} \cdot v(\tau_{AC}, \omega, \gamma, h_0) \quad (2-108)$$

avec :

$$M_{pneu} = 2w \cdot \chi_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_x \cdot t'_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_y & 0 & 0 & 0 & -t_x \cdot \Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_y \cdot e_r & F_{yC} \\ 0 & 0 & \Phi_z & 0 & t_x \cdot \Phi_z & 0 & 0 & 0 & -\Phi_z \cdot t'_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_z \cdot e_r \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_\gamma & 0 & 0 & 0 & -\Phi_z \cdot t'_y & 0 & -\Phi_z \cdot t_x \cdot t'_y & 0 & \Phi_z \cdot t_y'^2 & 0 & -t'_y \cdot \Phi_z \cdot e_r & 0 \\ 0 & 0 & t_x \cdot \Phi_z & 0 & \begin{bmatrix} \Phi_\xi \\ + t_x^2 \cdot \Phi_z \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & -\Phi_z \cdot t'_y \cdot t_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_x \cdot \Phi_z \cdot e_r \\ 0 & -t_x \cdot \Phi_y & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} \Phi_\beta + \\ t_x^2 \cdot \Phi_y \end{bmatrix} & \Phi_x \cdot t'_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_x \cdot t_y'^2 & -t_x \cdot \Phi_y \cdot e_r & M_{zON} \end{pmatrix} \quad (2-109)$$

$$(v)_{R_{ac}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} V_x - R_r & V_y & V_z & \dot{\gamma} & \dot{\xi} & +1 & \dot{\beta} & \gamma \cdot V_x & \gamma \cdot V_z & \gamma \cdot \dot{\gamma} & \gamma \cdot \dot{\xi} & \gamma \cdot \dot{\beta} & \gamma^2 \cdot \dot{\gamma} & \gamma^2 \cdot \dot{\beta} & \gamma & 1 \end{array} \right)_{R_{ac}}^T \quad (2-110)$$

Dans l'équation (2-52), il est nécessaire de connaître la Jacobienne du modèle d'effort en fonction du torseur cinématique vu par l'aire de contact. Cette dernière est calculée par la formule suivante :

$$\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} = \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tau_{AC}} \right)^T \quad (2-111)$$

Dans le cas où on se restreint aux efforts et aux vitesses longitudinal, latéral et au moment d'auto-alignement et à la vitesse de lacet, qui sont les composantes les plus importantes en dynamique du véhicule, (2-108) devient :

$$F_{pneu}(\tau_p) = 2w \cdot \chi_0^2 \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \Phi_x & 0 & 0 & 0 & \Phi_x \cdot t'_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_y & -t_x \cdot \Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_y \cdot e_r & F_{yC} & & & & & & \\ \hline 0 & -t_x \cdot \Phi_y & \begin{bmatrix} \Phi_\beta + \\ t_x^2 \cdot \Phi_y \end{bmatrix} & \Phi_x \cdot t'_y & 0 & \Phi_x \cdot t_y'^2 & -t_x \cdot \Phi_y \cdot e_r & M_{zON} & & & & & & & \end{array} \right) \circ v(\tau_p) \quad (2-112)$$

avec

$$v(\tau_p) = \left(\kappa' \quad \delta' \quad \varphi \quad \left| \frac{\gamma \cdot V_x}{\omega} = \pi_{(\gamma, V_x)} \quad \left| \frac{\gamma \cdot \dot{\beta}}{\omega} = \pi_{(\gamma, \dot{\beta})} \quad \left| \frac{\gamma^2 \cdot \dot{\beta}}{\omega} = \pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})} \quad \left| \gamma \quad \left| 1 \right. \right. \right. \right)^T \quad (2-113)$$

On a de plus :

$$\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial Fx_{pneu}}{\partial \kappa'} & 0 & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \pi_{(\gamma, \dot{\beta})}} \cdot \gamma & \\ 0 & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \varphi} & \\ \hline \gamma \cdot \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \pi_{(\gamma, V_x)}} & \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \delta'} & \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \varphi} + \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})}} \cdot \gamma^2 & \end{array} \right) \cdot \frac{1}{\omega} \quad (2-114)$$

(2-108) fournit les entrées du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol ainsi que la structure de la matrice d'entrées/sorties du modèle (utilisée pour construire le modèle d'identification §3.3.1). La description des opérateurs d'effort Φ_{Pneu} de la matrice d'entrées/sorties (2-112) est fournie par les formulations empiriques indiquées dans la partie suivante.

2.4. Modèle empirique de l'effort d'interaction pneumatique/sol

2.4.1. Introduction

Le modèle physique permet d'expliquer l'origine des comportements observés. Néanmoins sa construction rationnelle est conditionnée par des hypothèses restrictives. Elargir suffisamment ces hypothèses pour une solution générale conduit à un résultat trop complexe pour être interprétable ou simplement formalisable.

A l'inverse, les modèles empiriques permettent de caractériser simplement un comportement général mais sans offrir d'interprétation structurelle aux phénomènes. Dans cette partie, le modèle empirique de Pacejka est présenté. Ce modèle offre le double avantage de se baser sur le principe de similitude et de pouvoir être utilisés comme modèle de spécification et/ou modèle de comportement en dynamique véhicule [Milliken 95], [Halconruiy 95]. Un exemple de telles spécifications est d'abord donné. Le modèle est ensuite présenté ainsi que la manière d'y appliquer le principe de similitude.

2.4.2. Spécifications des efforts d'interaction pneumatique/sol en dynamique véhicule

Fonctionnellement, un véhicule peut se ramener à l'actionnement correct des quatre liaisons au sol supportant la caisse. La cinématique et la dynamique de ces liaisons dépendent de la conception des trains, de la suspension, des masses, des centrages et des inerties du véhicule. Les choix réalisés sont motivés par un cahier des charges spécifiant le comportement de la liaison au sol : usure / agrément / stabilité / précision...

La spécification de la liaison au sol est un prérequis pour la conception de la majeure partie d'un véhicule. Cette spécification est réalisée par le constructeur en utilisant des critères en dynamique véhicule. Il faut ensuite qu'elle soit traduite en contraintes sur un modèle fonctionnel de liaison pneumatique/sol. Ce modèle est utilisé par l'équipementier pour caractériser le pneumatique qu'il conçoit pour le constructeur. Ces différentes étapes de conception suivent le cycle en V présenté figure 17.

Ce paragraphe présente le type de spécifications pneumatiques faites par les constructeurs lors de la conception d'un véhicule. Toutes ces spécifications nécessitent d'être faites avec au moins 2 cas de charges différents qui sont généralement les cas de charge avant et arrière du véhicule.

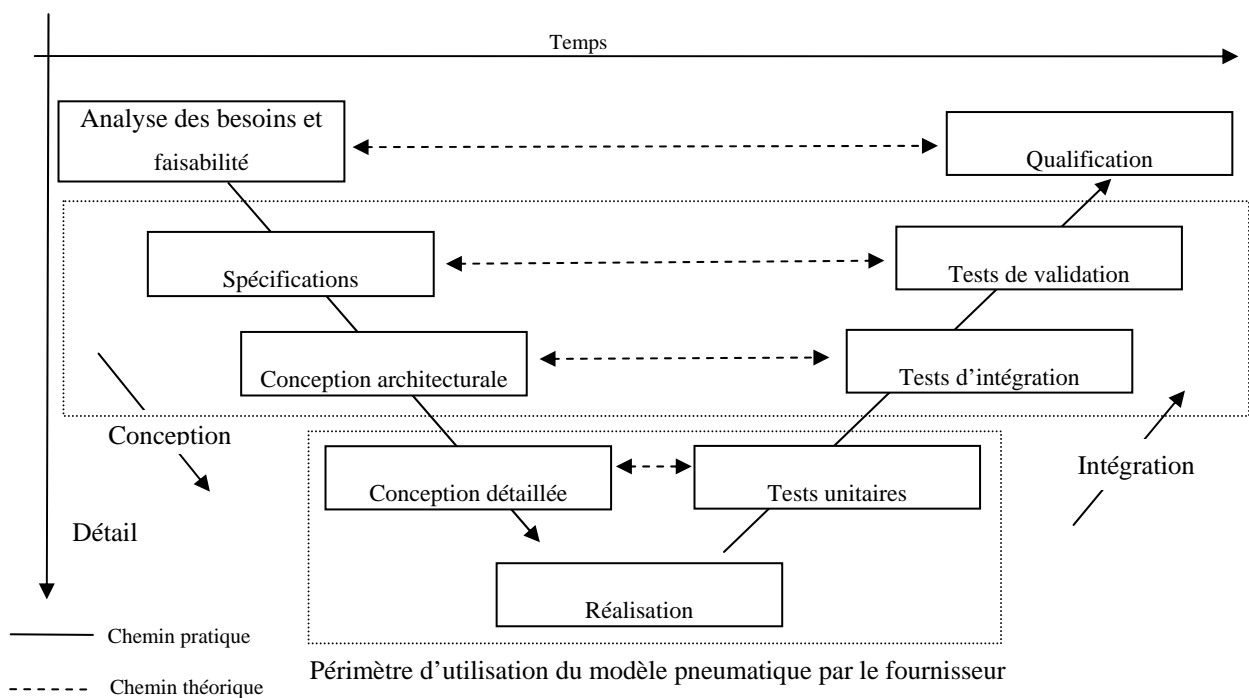


figure 17 : Cycle en V, périmètres du constructeur et du fournisseur

2.4.2.1. Spécification en effort latéral et en moment d'auto-alignement

2.4.2.1.1. Rigidité de dérive et chasse à l'origine

Sont spécifiés à dérive et carrossage nuls :

- une rigidité de dérive et une chasse pneumatique,
- une charge associée.

Il s'agit de la spécification la plus importante pour la dynamique véhicule. Ces rigidités interviennent en effet dans l'équilibre du véhicule en virage (via le taux de surbraquage) et paramètrent le comportement du véhicule en faibles virages, dans la zone linéaire de comportement du pneumatique.

La chasse est à interpréter comme le rapport entre les rigidités de dérive (à dérive nulle) pour M_z et pour F_y . C'est à dire qu'on ne prend pas en compte les effets des offsets sur M_z ou F_y .

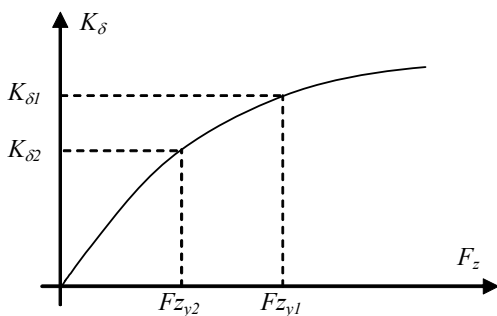


figure 18 : Rigidité de dérive selon la charge

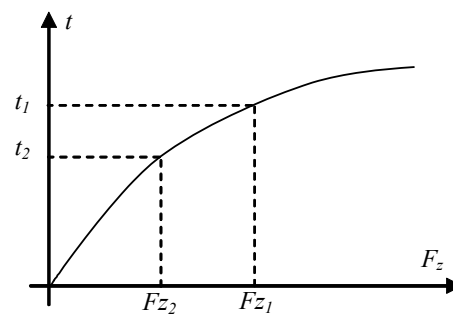


figure 19 : Chasse selon la charge

2.4.2.1.2. Adhérence transversale maximale et dérive associée

Sont spécifiés à carrossage nul les triplets :

- charge - effort transversal maximum - angle de dérive à l'effort maximum
- charge - moment auto-alignement minimum - angle de dérive au moment minimum.

Ces spécifications servent à caractériser le comportement du pneumatique en virage fort (0.8g d'accélération transversale par exemple). Elles indiquent quel effort transversal et quel couple le pneumatique doit pouvoir atteindre et à quels angles de dérive. Ces spécifications permettent de cerner les niveaux de saturation du pneumatique afin de pouvoir paramétrer le train pour les manœuvres extrêmes.

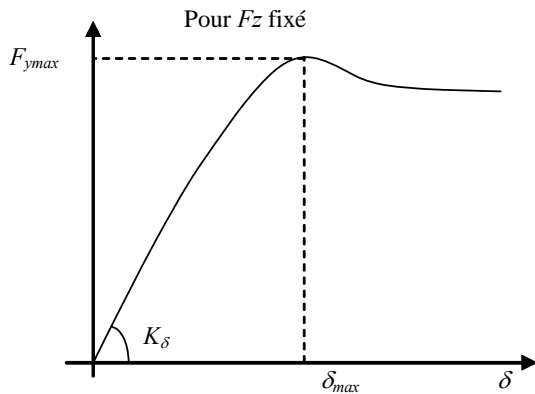


figure 20: Maximum d'effort latéral et dérive associée

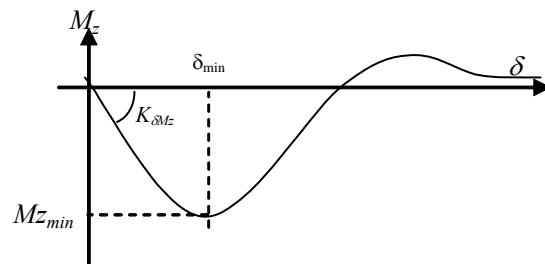


figure 21 : Minimum du couple d'auto-alignement et dérive associé

2.4.2.1.3. Rigidité de carrossage à l'origine

Sont spécifiés à dérive et carrossage nuls :

- rigidité de carrossage en effort latéral et en moment d'auto-alignement.
- Charge associée

On spécifie ainsi le comportement en carrossage du pneumatique. Quantitativement le carrossage est 10 fois moins important que la dérive (sur l'effort latéral, la rigidité de carrossage est de l'ordre de $-100\text{N}/^\circ$ contre $1500\text{N}/^\circ$ pour la rigidité de dérive). Il peut être mis à profit dans de nombreuses prestations :

- introduire une poussée supplémentaire dans les virages de sorte à éviter de saturer le pneumatique (à effort égal, une poussée de carrossage provoque moins de glissement et donc de saturation qu'une poussée de dérive, voir [Pacejka 02]),
- agir sur le couple de roulis,
- ajuster le tirage du véhicule.

2.4.2.1.4. Comportement à l'origine :

Sont spécifiés à dérive et carrossage nuls:

- un effort transversal et un moment d'auto-alignement
- une charge associée.

Ces spécifications permettent de définir la dissymétrie dans le comportement du pneumatique. Elles permettent de paramétrer le tirage : effort et couples constants appliqués au véhicule de sorte à compenser l'action gravitaire introduite par le dévers de chaussé.

2.4.3. Modèle de Bakker-Pacejka dit modèle de la « Formule magique »

Le professeur Pacejka a été le premier à appliquer le principe de similitude au pneumatique en 1958 [Pacejka 58] lors d'une étude réalisée au laboratoire d'aéronautique de Cornell. En 1987, en association avec le professeur Bakker, il a mis au point un modèle statique basé sur ce principe dans le cadre d'un partenariat entre l'université de Delft et Volvo ([Bakker 87]). Ce modèle permet une description fonctionnelle du pneumatique, compatible avec les besoins des constructeurs automobiles en dynamique véhicule.

Le principe de similitude, souvent utilisé en mécanique des fluides, permet de généraliser des résultats empiriques à un univers empirique similaire. Dans le cas du pneumatique, le principe de similitude permet en pratique de réduire le nombre de points de fonctionnement nécessaires à l'identification. En théorie, c'est un élément sur lequel on peut s'appuyer pour déterminer si le comportement d'un modèle pneumatique est physique ou non.

Après présentation de la macrostructure antisymétrique de la formule magique (il existe une forme symétrique non présentée ici, voir [Pacejka 02]), le principe de similitude tel qu'il est défini dans [Milliken 95] est appliqué.

2.4.3.1. Expression anti-symétrique de la formule magique

Le principe descriptif de la formule magique est le suivant : pour les grandeurs suivantes fixées constantes :

- charge,
- vitesse,
- pression,
- carrossage,

la réponse du pneumatique :

- au taux de glissement longitudinal sur l'effort longitudinal,
- en la dérive latérale sur l'effort latéral,
- en la dérive latérale sur le moment d'auto-alignement,

est antisymétrique et comporte les caractéristiques suivantes paramétrées par des macro coefficients :

- un centre de symétrie paramétré par le couple : (S_h, S_v)
- une pente à l'origine : K
- un extremum paramétré par le couple : (x_m, D)
- une asymptote : L

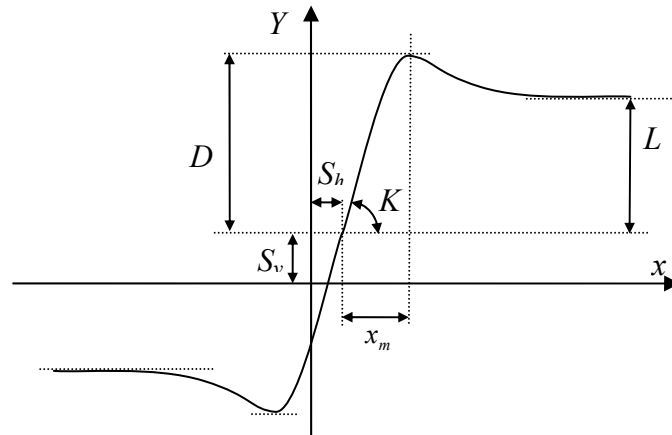


figure 22 : Paramétrage de la formule magique antisymétrique

La formule magique permet de décrire ce comportement antisymétrique :

$$Y = D \cdot \sin(C \cdot \arctan(\varphi)) + S_v \quad (2-115)$$

$$\varphi = (1 - E) \cdot B \cdot (x + S_h) + E \cdot \arctan(B \cdot (x + S_h))$$

avec C : facteur de forme :

$$C = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\frac{L}{D}\right) \quad (2-116)$$

B : facteur d'échelle :

$$B = \frac{K}{C \cdot D} \quad (2-117)$$

E : facteur de courbure :

$$E = \frac{B \cdot (x_m + S_h) - \tan(\pi / (2C))}{B \cdot (x_m + S_h) - \arctan(B \cdot (x_m + S_h))} \quad (2-118)$$

Suivant les composantes à caractériser on a les contraintes suivantes sur C :

- pour les efforts longitudinal et latéral : $1 < C < 2$. La courbe a ainsi un seul zéro et 2 extrema.
- Pour le moment d'auto-alignement : $2 < C < 3$. La courbe a ainsi 3 zéros et 4 extrema.

Le lecteur trouvera dans [Schuring 94] une étude complète de l'influence des macro-coefficients suivant leurs valeurs.

2.4.3.2. Principe de similitude

Dans la partie précédente, le comportement du pneumatique est caractérisé pour une charge, une vitesse, une pression et un carrossage constant. Si l'une de ces grandeurs change, les macro coefficients doivent être à nouveau identifiés. La similitude permet de réunir charge et carrossage dans une seule grandeur, de sorte à supprimer une grandeurs d'entrée du système à caractériser. Dans [Sharp 03], le principe de similitude est utilisé pour reconstruire des grandeurs non caractérisées lors de la mesure (modèle effort longitudinal à partir de la connaissance de l'effort latéral notamment).

La normalisation est réalisée en définissant les grandeurs adimensionnelles suivantes pour l'effort latéral et le moment d'auto-alignement :

$$\bar{X} = BCD_{F_y} \cdot \frac{\delta - S_{hF_y}}{D_{F_y}} \quad (2-119)$$

$$\bar{F}_y = \frac{F_y - S_{vF_y}}{D_{F_y}} \quad (2-120)$$

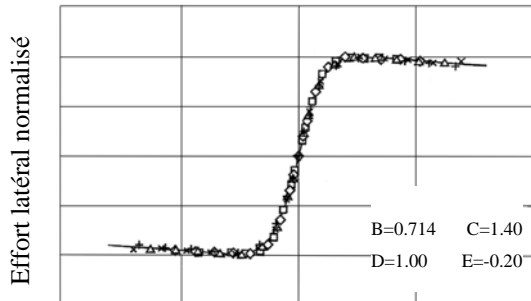
$$\bar{M}_z = \frac{M_z - S_{vM_z}}{D_t \cdot D_{F_y}} \quad (2-121)$$

avec D_t chasse à faible dérive :

$$D_t = \frac{BCD_{M_z}}{BCD_{F_y}} \quad (2-122)$$

Soient P_{F_y} et P_{M_z} les fonctions : $\bar{F}_y = P_{F_y}(\bar{X})$ et $\bar{M}_z = P_{M_z}(\bar{X})$. Elles n'ont pas de dépendance en la charge, au carrossage et à la dérive. Elles seront dénommées dans la suite : primitives de similitude. Les figures 22 à 25 issues de [Milliken 95] et [Radt 83] en donnent une illustration.

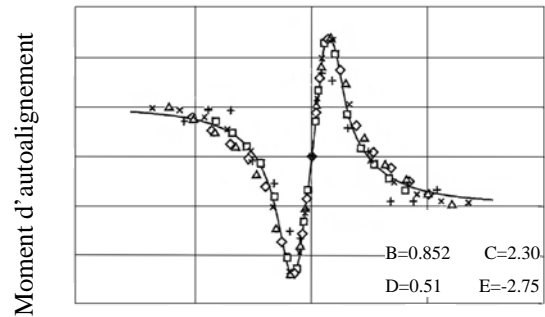
Les figures 22, 24, 25 montrent l'absence de sensibilité de la primitive d'effort latéral en la charge et au carrossage. La figure 21 illustre l'absence de sensibilité du moment d'auto-alignement aux variations de charge.



Angle de dérive normalisé

Charges : □ : 8.17 kN ◇ : 6.35 kN Δ : 4.54 kN
 × : 2.72 kN + : 0.91 kN

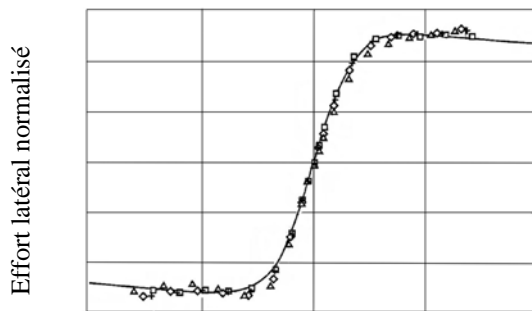
figure 23 : Normalisation effort latéral à carrossage nul



Angle de dérive normalisé

Charges : □ : 8.17 kN ◇ : 6.35 kN Δ : 4.54 kN
 × : 2.72 kN + : 0.91 kN

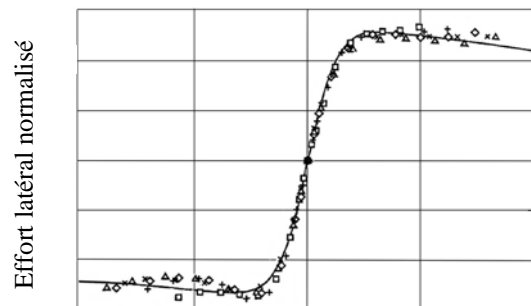
figure 24 : Normalisation moment d'auto-alignement à carrossage nul



Angle de dérive normalisé

Angles de carrossage : □ : 0° + : -2° ◇ : -6° Δ : -10°

figure 25 : Normalisation effort latéral à charge fixée à 4kN



Angle de dérive normalisé

Charges : □ : 8.17 kN ◇ : 6.35 kN Δ : 4.54 kN
 × : 2.72 kN + : 0.91 kN

figure 26 : Normalisation effort latéral à carrossage fixé à 5°

Si on substitue les valeurs adimensionnelles dans la formule magique, on obtient :

- La formulation de P_{F_y} :

$$\bar{F}_y = P_{F_y}(\bar{X}) = \sin \left(C_{F_y} \cdot \arctan \left[(1 - E_{F_y}) \left(\frac{\bar{X}}{C_{F_y}} \right) + E_{F_y} \cdot \arctan \left(\frac{\bar{X}}{C_{F_y}} \right) \right] \right) \quad (2-123)$$

- La formulation de P_{M_z}

$$\bar{M}_z = P_{M_z}(\bar{X}) = \sin \left(C_{M_z} \cdot \arctan \left[(1 - E_{M_z}) \left(\frac{\bar{X} + \bar{S}_{hM_z}}{C_{M_z}} \right) + E_{M_z} \cdot \arctan \left(\frac{\bar{X} + \bar{S}_{hM_z}}{C_{M_z}} \right) \right] \right) \quad (2-124)$$

On constate que les macro-coefficients C et E permettent de paramétrer directement l'allure de la primitive. Ces paramètres doivent donc être constants pour une vitesse et une pression donnée. Si on se réfère aux modèles des formules magiques indiquées en annexe B, cela revient à fixer à zéro les coefficients du macro-coefficient E autres que le coefficient constant (utilisé §3.6.1.1).

L'offset horizontal sur la primitive du moment d'auto-alignement \bar{S}_{hM_z} vient du fait que le moment d'auto-alignement et l'effort latéral peuvent s'annuler pour des valeurs de dérive différentes. On a :

$$\bar{S}_{hM_z} = \frac{D_{BCD_{F_y}}}{D_{F_y}} \cdot (S_{hF_y} - S_{hM_z}) \quad (2-125)$$

2.5. Conclusion

La description de la liaison au pneumatique/sol est un problème délicat car les grandeurs utiles sont celles relatives à l'aire de contact et ne sont pas accessibles par mesure directe. La robotique articulaire offre un cadre formel permettant de définir des estimateurs de ces grandeurs. Les influences de la dynamique de roue, de la déformation élastique de l'aire de contact et le voilage de roue peuvent être pris en compte.

La modélisation de flexibilité entre le centre roue et l'aire de contact permet d'obtenir la dynamique au premier ordre du système. Le modèle de liaison permet aussi de représenter les éventuels couplages statiques entre les composantes du torseur d'effort suivant les déformations que subit l'aire de contact.

Le modèle d'interaction pneumatique/sol est construit sur la notion de déformation, principe physique issu du Bond Graph. L'interaction y est surfacique, ce qui permet de prendre en compte finement l'influence du carrossage. Bien que le modèle soit développé sous l'hypothèse restrictive d'adhérence totale il conduit à des grandeurs d'entrée homogènes au taux de glissement longitudinal, à l'angle de dérive et à la courbure de trajectoire habituellement utilisées dans les modèles de pneumatique. Cela prouve que les intitulés et les unités de ces grandeurs sont trompeurs. Elles correspondent en fait à des déformations vues par l'aire de contact. Le modèle permet aussi de déterminer la structure de la matrice entrée/sortie du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol.

La description des éléments de cette matrice entrée/sortie est réalisée à l'aide de la représentation empirique de la « formule magique ». Cette représentation est adaptée à la spécification en dynamique véhicule. L'utilisation de ce modèle permet donc de s'assurer que les résultats d'identification sont exploitables par les constructeurs automobiles.

Chapitre 3

Identification du modèle d'effort de contact pneumatique/sol sur banc de mesure

3.1. Introduction

Ce chapitre présente l'application de la méthode d'identification garantie développée dans le premier chapitre au modèle d'effort de contact pneumatique/sol présenté dans le second chapitre. Les mesures sont réalisées sur plusieurs pneumatiques à l'aide d'un banc de caractérisation du pneumatique, appelé Flat Trac.

La première partie présente les conditions expérimentales : le modèle multicorps du banc d'essai, les perturbations de mesure, les protocoles d'excitation et les pneumatiques étudiés.

La seconde partie constitue l'étape de mise en forme du modèle d'effort de contact pneumatique/sol de sorte à y appliquer l'algorithme d'identification garantie. Seule les composantes d'effort longitudinal, d'effort latéral et du moment d'auto-alignement sont étudiées. Le modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol est exprimé sous forme polynomiale. Le modèle d'effort de contact pneumatique/sol est ainsi linéaire par rapport aux paramètres du modèle d'interaction et aux compliances articulaires.

La troisième partie présente les résultats obtenus par l'algorithme dans le cadre d'une démarche optimiste où on cherche à caractériser la structure du modèle juste nécessaire pour des essais de caractérisation en agrément de direction. On détermine ainsi les grandeurs d'entrées et les flexibilités articulaires les plus significatives. On démontre aussi l'indépendance de l'effort d'interaction à la vitesse et l'indépendance de la raideur de dérive de l'effort latéral au carrossage.

La quatrième partie présente les résultats obtenus sur les composantes d'effort latéral et du moment auto-alignement du torseur d'effort de contact pneumatique/sol. Le modèle

polynomial de l'effort de contact peut être utilisé pour faire de la simulation avec le modèle direct ou générer les réponses caractéristiques de l'effort d'interactions pneumatique/sol.

Dans la cinquième partie, les coefficients des polynômes identifiés sont convertis en paramètres de la formule magique. Comme pour l'identification polynomiale, le paramétrage non linéaire obtenu est minimal et restreint aux phénomènes identifiables. Mais contrairement à un modèle polynomial, la formule magique peut être simulé hors du domaine d'identification sans risque de divergence (ce qui est nécessairement le cas avec un modèle polynomial).

3.2. Conditions expérimentales

La caractérisation de l'effort de contact directement sur véhicule est délicate car beaucoup de facteurs sont difficilement maîtrisables : adhérence au sol, pression pneumatique, rodage, indépendances des entrées, etc. Pour accéder au comportement du pneumatique, il est beaucoup plus simple d'utiliser un banc de mesure. Le banc utilisé ici est appelé Flat Trac et permet de caractériser la réponse d'un pneumatique dans le domaine de la dynamique du véhicule sur route (inférieure à 15Hz).

La roue y est attachée à un bras articulé qui permet de la braquer, de la carrosser ou de l'écraser sur un tapis d'entraînement dont la vitesse de défilement est imposée. Un moteur peut être ajouté afin de créer un couple sur l'axe de rotation de la roue. On peut ainsi étudier le comportement en glissement longitudinal. Lorsque ce moteur n'est pas activé, la roue tourne librement, entraînée par le tapis (c'est le cas dans cette étude).

Les essais sont réalisés à pression régulée. Il n'y a donc pas de variation de la pression avec l'augmentation de la température lorsque le pneu travaille. Un film d'eau est injecté à haute pression sous le tapis d'entraînement au niveau de l'aire de contact. Ce film permet d'équilibrer la composante verticale des efforts de contact appliqués par le pneu sur le tapis d'entraînement et de refroidir la zone de contact. Pour compenser l'action des efforts latéraux, l'un des rouleaux entraînement du tapis est actionné autour d'un axe vertical afin de maintenir le tapis en position centrée sur les rouleaux.

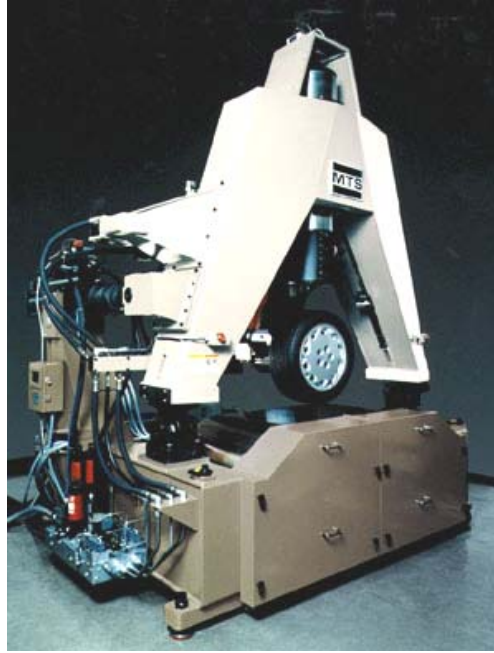


figure 27 : Banc de caractérisation pneumatique

3.2.1. Description articulaire du banc d'essai

Modèle DHM du banc Flat Trac :

- les repères R_0 et R_1 sont attachés au même corps correspondant au bâti du banc. Le repère R_0 est orienté de sorte à être confondu avec le repère du porte fusée lorsque que les variables articulaires du banc valent 0.
- le repère R_2 est défini de sorte à placer l'articulation de carrossage du banc,
- le repère R_3 est défini de sorte à placer l'articulation de hauteur du banc,
- le repère R_4 est défini de sorte à placer l'articulation de braquage du banc et à correspondre au repère porte fusée R_{pf} ,
- le repère R_5 est défini de sorte à placer l'articulation d'orientation du tapis d'entraînement,
- le repère R_6 est défini de sorte à placer l'articulation de déplacement latéral du tapis d'entraînement,
- le repère R_7 est défini de sorte à placer l'articulation d'avance du tapis latéral,
- le repère R_8 est attaché au même corps que R_7 mais de sorte à correspondre au repère route R_r , confondu avec R_{pf} lorsque toutes les articulations du banc valent 0.

Les articulations d'orientation et de déplacement latéral de tapis permettent de représenter l'action de l'asservissement en position du tapis d'entraînement. Par manque de mesures, ces articulations sont considérées bloquées dans la suite de l'étude.

La modélisation du montage de la roue sur le banc est réalisée en connectant par une articulation bloquée le corps 1 du modèle DHM de la roue (tableau 1) sur le corps 4 du modèle DHM du banc (tableau 4). Les repères du porte fusée R_{pf} des deux modèles sont ainsi confondus.

Les grandeurs suivantes sont mesurées :

- β_{FT} : angle de braquage de la flat trac,
- γ_{FT} : angle de carrossage de la flat Trac,
- h_{FT} : hauteur de la flat trac,
- V_T : vitesse d'entraînement du tapis,
- F_{pf} : torseur d'effort appliqué au repère du porte fusée,
- ω : vitesse de rotation de la roue.

La matrice de transformation permettant de passer du repère fixe au repère du porte fusée est la suivante :

$${}^{R_{pf}}T_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos(\beta_{FT}) & \sin(\beta_{FT}) \cdot \cos(\gamma_{FT}) & \sin(\beta_{FT}) \cdot \sin(\gamma_{FT}) & 0 \\ -\sin(\beta_{FT}) & \cos(\beta_{FT}) \cdot \cos(\gamma_{FT}) & \cos(\beta_{FT}) \cdot \sin(\gamma_{FT}) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma_{FT}) & \cos(\gamma_{FT}) & h_{FT} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3-1)$$

On déduit de cette matrice de transformation l'équation du plan du sol dans le repère du porte fusée :

$$\mathcal{P}(R, \mathbf{zr})_{R_{pf}} = \mathcal{P} \left(\left(\begin{array}{c} \sin(\beta_{FT}) \cdot \sin(\gamma_{FT}) \\ \cos(\beta_{FT}) \cdot \sin(\gamma_{FT}) \\ \cos(\gamma_{FT}) \end{array} \right)_{R_{pf}} \left| \begin{array}{c} h_{FT} \cdot \cos(\gamma_{FT}) \end{array} \right)_{R_{pf}} \quad (3-2)$$

En appliquant les équations (2-20), **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et (2-22) présentée au chapitre 2, on déduit de l'équation du plan du sol le vecteur des positions articulaires $q_p = (\xi, \gamma, h)$ correspondant à l'enroulement, au carrossage et à la hauteur pneu.

Dans le cas de petits déplacements (ce qui est le cas en pratique, les amplitudes en carrossage et en braquage flat trac n'excédant pas 15°) et d'un angle de voilage nul, on peut faire les approximations suivantes sur les positions articulaires du modèle de contact pneumatique/sol par rapport aux positions articulaire de la Flat Trac :

$$\phi = 0 \quad (3-3)$$

$$\hat{\xi} \approx 0 \quad (3-4)$$

$$\gamma \approx \gamma_{FT} \quad (3-5)$$

$$h \approx h_{FT} \quad (3-6)$$

La cinématique du repère du porte fusée par rapport au repère route : τ_{pf} correspond à la vitesse du repère 4 par rapport au repère 8 (exprimée dans le repère 4). Sous hypothèse de petits déplacements, on a directement :

$$\beta_{FT} \approx \delta \quad (3-7)$$

$$\varphi \approx -\frac{\dot{\delta}}{V_T} \quad (3-8)$$

j	$a(j)$	σ_j	γ_j	b_j	α_j	d_j	θ_j	r_j	
1	0	2	0	0	0	0	$\pi/2$	0	Articulation bloquée
2	1	0	0	0	$\pi/2$	0	γ_{FT}	0	Carrossage Flat Trac
3	2	1	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	h_{FT}	Hauteur Flat Trac
4	3	0	0	0	0	0	β_{FT}	0	Braquage Flat Trac
5	0	0	0	0	0	0	0	α_T	Orientation tapis
6	5	0	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	y_T	Déplacement latéral tapis
7	6	0	0	0	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	x_T	Avance tapis
8	7	0	0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	Articulation bloquée

TABLEAU 4 : PARAMETRAGE DHM DU BANC DE CARACTERISATION PNEUMATIQUE

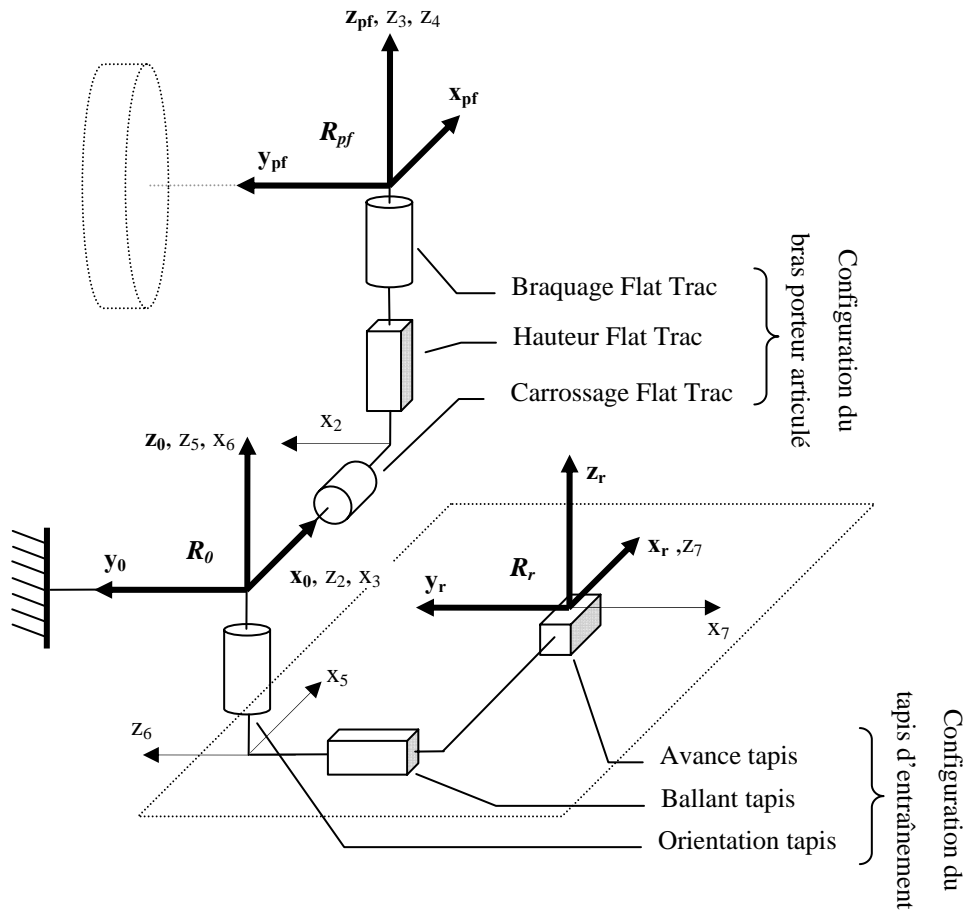


figure 28 : Paramétrage DHM du banc de caractérisation pneumatique

3.2.2. Perturbations

Les perturbations sur le banc de mesure sont de natures diverses. Recouvrant par définition tout ce qui est mal ou pas maîtrisé, il est difficile d'en faire une liste exhaustive. On peut néanmoins dresser 2 catégories :

- les phénomènes de la mécanique des solides (résonances, imperfections géométriques...)
- les phénomènes tribologiques dus à la nature élastomère du pneumatique (relaxation, effets thermiques, hystérésis...)

Ces phénomènes sont illustrés sur un essai simple qui consiste à un roulage en ligne droite à 80km/h à carrossage nul et à charge constante, suivi d'un levé de roue. Les mesures sont réalisées jusqu'à l'arrêt de cette dernière (voir figure 29).

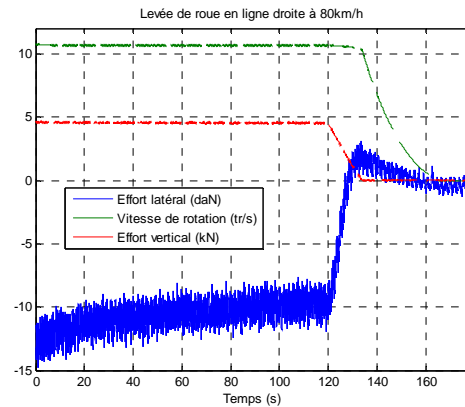


figure 29 : Efforts et vitesses de rotation sur levé de roue en ligne droite

3.2.2.1. Perturbations d'ordre mécanique

3.2.2.1.1. Non uniformité de roue

La roue a des défauts qui génèrent des perturbations d'effort périodiques sur le porte fusée à la fréquence de rotation de roue. On distingue 3 types de défaut :

- Non uniformité de la répartition de masse provoquant un balourd dynamique,
- Non uniformité géométrique : voilage,
- non uniformité plastique.

A une vitesse de 80km/h avec une roue de rayon de 0.3m, la fréquence de rotation de la roue est de 10.7Hz. On peut constater l'existence de cet harmonique figure 30 (où on trouve aussi l'harmonique du à la non uniformité du rouleau d'entraînement §3.2.2.1.2.2).

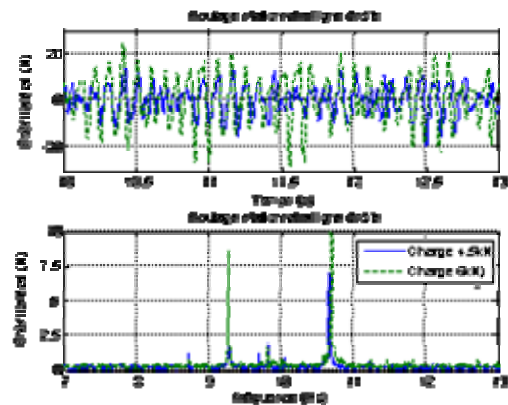


figure 30 : Effort latéral en roulage ligne droite

3.2.2.1.1.1. Non uniformité de la répartition de masse

Le centre de gravité de la roue n'est pas sur l'axe de rotation. L'amplitude de l'harmonique est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation de roue. Il doit être visible sur les composantes longitudinales et verticales du torseur d'effort.

3.2.2.1.1.2. Voilage de roue

Le plan de roue n'est pas parfaitement perpendiculaire à son axe de rotation. La normale au plan de jante forme un angle de voilage avec l'axe de rotation. Cette non uniformité a une influence de premier ordre sur les vitesses de lacet, de carrossage et de ballant du repère d'aire de contact où elle se manifeste comme une perturbation additive suivant une loi sinusoïdale en la rotation de roue et proportionnelle à l'angle de voilage. Cet harmonique est principalement visible sur l'effort latéral et le moment d'auto-alignement qui sont les grandeurs d'efforts les plus sensibles aux variations sur les articulations de torsion et de ballant.

3.2.2.1.1.3. Non uniformité plastique

La gomme et la carcasse n'ont pas des propriétés homogènes le long de la surface de roulement et des flancs. Au cours d'un tour de roue, les caractéristiques de l'aire de contact s'en trouvent modifiées.

3.2.2.1.2. *Guidage du tapis d'entraînement,*

Le déplacement du tapis d'entraînement se fait dans le plan de l'aire de contact et introduit une cinématique supplémentaire sur les variables articulaires de la branche élastique. Les déplacements parasites peuvent provenir de l'asservissement ou de l'imperfection de la mécanique d'entraînement.

3.2.2.1.2.1. Asservissement en déplacement latéral

Le tapis d'entraînement est soumis à des forces latérales très importantes. Pour équilibrer ces forces, l'orientation d'un rouleau est asservie de sorte à assurer le centrage du tapis sur les rouleaux d'appui. Cet asservissement provoque la rotation du tapis (et donc de l'aire de contact) autour de l'axe vertical ainsi que sa translation sur l'axe latéral.

3.2.2.1.2.2. Non homogénéité du rouleau d'entraînement

Le rouleau d'entraînement n'est pas homogène, il introduit une perturbation périodique à sa fréquence de rotation. Pour une vitesse de 22.225m/s et un périmètre de 2.39m, cette fréquence vaut 9.29Hz. On trouve cet harmonique dans la mesure du déplacement latéral du

tapis lorsque la roue est en l'air figure 31 ou dans la mesure de l'effort latéral en roulage ligne droite figure 30.

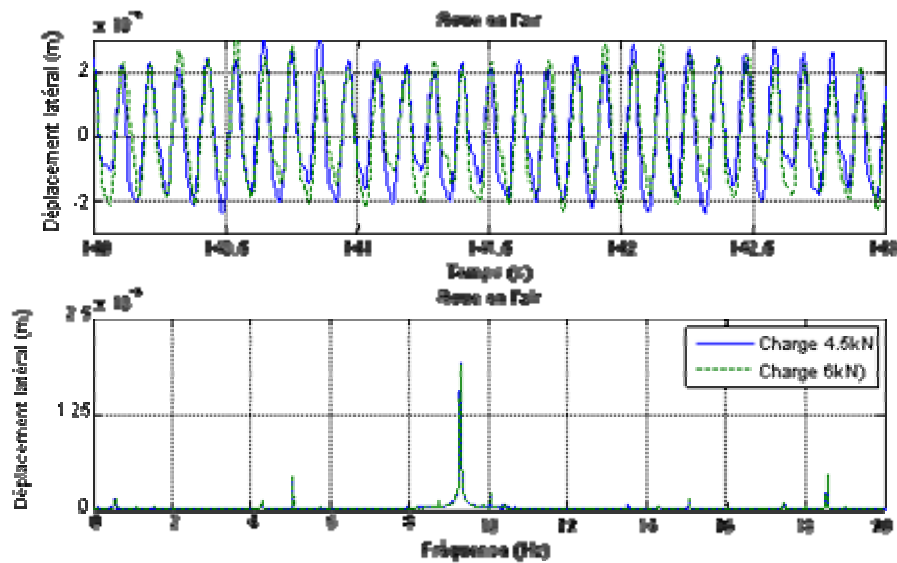


figure 31 : Déplacement tapis d'entraînement roue en l'air

3.2.2.1.2.3. Système hydraulique

Le film d'eau projeté à haute pression sur le tapis nécessite un compresseur dont le fonctionnement peut engendrer des vibrations de l'ensemble du banc.

3.2.2.1.3. Modes de banc

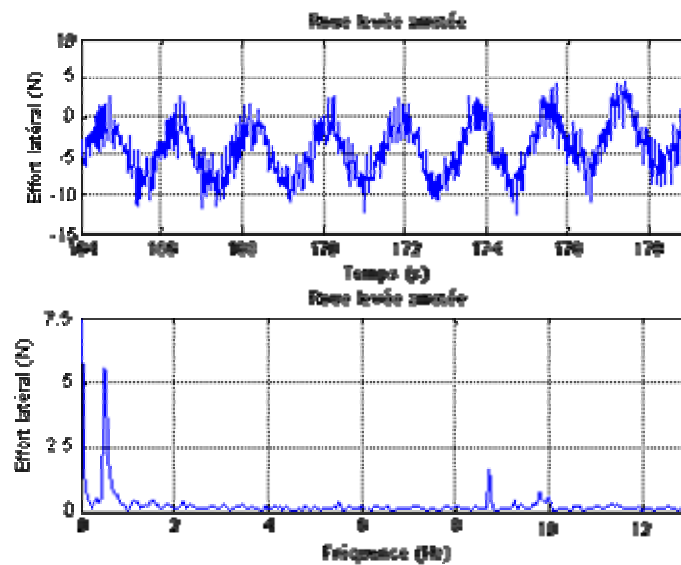


figure 32 : Effort latéral, roue levée arrêtée

3.2.2.1.3.1. Mode de suspension du massif

Le banc est posé sur un massif. Des études réalisées lors de l'installation du banc prédisent un mode de suspension de l'ensemble autour de 9Hz. Ce mode correspondrait à celui mesuré à 8.7Hz sur l'effort latéral mesuré roue en l'air arrêtée (figure 32).

3.2.2.1.3.2. Modes de la branche articulée

L'inertie vue par l'axe de carrossage est de l'ordre de 2000 kg.m² et il y a une distance importante entre l'actionneur de l'axe vertical et l'aire de contact. Si la raideur vue par l'axe de carrossage est de l'ordre de 22 kN.m/rad, cela peut expliquer le mode de vibration à 0.53Hz, observable sur la mesure de l'effort latéral, roue levée arrêtée, figure 32.

3.2.2.1.3.3. Effets aérodynamiques

L'ensemble roue, jante et pneumatique n'est pas parfaitement symétrique et est soumis à des effets aérodynamiques lorsque la roue se met en rotation. Ainsi, lorsque la roue tourne librement en l'air, on constate l'apparition d'un effort latéral, fortement linéaire par rapport à la vitesse de rotation. La figure 33 montre l'évolution de l'effort latéral lorsque la roue tourne librement en l'air jusqu'à s'arrêter. Le modèle d'effort aérodynamique est identifié sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire (effort proportionnel à la vitesse), d'un écoulement turbulent (effort proportionnel au carré de la vitesse) ou de l'association des deux types d'écoulement.

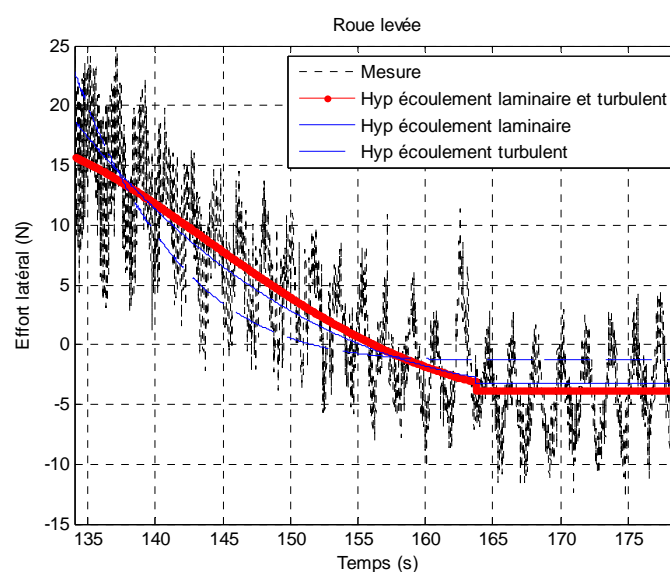


figure 33 : Effort latéral roue levée : modèles aérodynamiques

3.2.2.2. Evolution des propriétés de l'interaction pneumatique/sol

3.2.2.2.1. Effet Mullins

Le pneumatique est composé de caoutchouc. Il obéit donc aux lois des élastomères précontraints par une charge. Ces derniers ont un effet « mémoire » qui rend leur comportement hystérétique et induit une perte de rigidité après leur première charge. Cette perte de rigidité est due à un apport énergétique supplémentaire nécessaire à la destruction du réseau élastomère précontraint en charge. Elle est appelée effet Mullins et introduit une relation entre comportement du pneu et sa plus grande sollicitation antérieure.

3.2.2.2.2. Effet de relaxation

Comme l'effet Mullins, l'effet de relaxation est dû à une destruction des liaisons du réseau polymère au cours du temps lorsque ce dernier est contraint. Cet effet provoque une chute de l'amplitude de l'effort qui n'est pas limitée dans le temps. Cette chute est visible sur la mesure de l'effort latéral en roulage ligne droite figure 34.

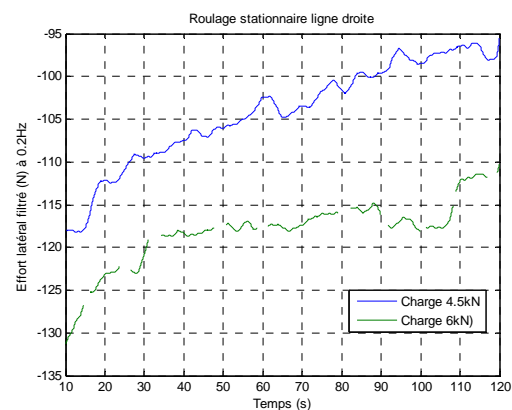


figure 34 : Effort latéral en roulage

3.2.2.2.3. Effet thermique

Suivant la température de la bande de roulement, la gomme s'assouplit, provoquant une diminution de la rigidité de dérive et altérant la valeur du maximum d'adhérence. Il y a ainsi une dépendance de l'effort par rapport à l'énergie dissipée dans la zone de contact pneumatique/sol. Les courbes de la figure 35, tirées de [Mizuno 03], montrent l'évolution de la température et de l'effort pneumatique pour des trajectoires générant un travail identique, mais sur des périodes différentes de sorte à agir sur l'énergie totale entrant dans le système.

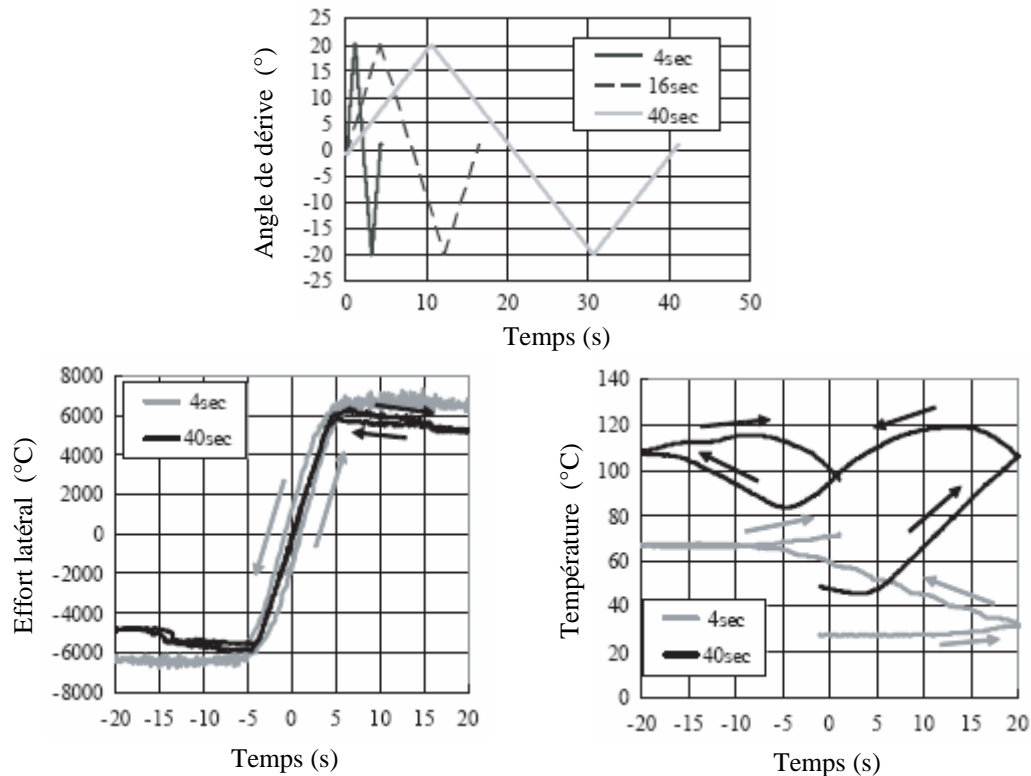


figure 35 : Effet de la température sur l'effort latéral

3.2.2.2.4. Usure

Un pneu usé et lisse n'a pas le même comportement qu'un pneu neuf. La diminution des sculptures influe sur l'asymétrie de la réponse du pneumatique et la disparition de gomme tend à rigidifier le pneu.

Il peut exister sur les pneus neufs un film d'oxyde formé lors du moulage (dépôt causé par la réaction chimique du sulfure et de l'oxyde de zinc sous haute pression et à température élevée). La présence de ce dépôt peut altérer le comportement du pneumatique.

3.2.2.2.5. Vieillessement

Sans rouler, un pneu peut évoluer par simple oxydation. Sa gomme a alors tendance à durcir et peut aller jusqu'à se craqueler. Le pneu devient ainsi plus raide.

3.2.3. Procédures d'essais

La définition d'un scénario d'excitation sur banc est un problème délicat. Pour que les caractérisations de différents pneumatiques puissent être comparables, il faut :

- définir un rodage qui les mette à des conditions comparables de température, d'usure et d'historique des sollicitations.
- définir des points de sollicitation qui ne fassent pas évoluer les caractéristiques obtenues lors du rodage, ce qui est particulièrement délicat pour de fortes sollicitations.

Il existe des procédures normalisées partagées par les constructeurs et les équipementiers dont la plus connue est la procédure TIME (voir [Van Oosten 03] pour un aperçu). Celles utilisées ici sont des procédures spécifiques à PSA Peugeot Citroën. On en distingue deux suivant le comportement qu'on cherche à caractériser :

- les essais de caractérisation en agrément de direction,
- les essais de caractérisation en sécurité active.

Ces caractérisations ont principalement pour objectif d'identifier le modèle d'effort latéral. Le glissement longitudinal y est quasi nul (la roue tourne librement). Seule la résistance au roulement est visible sur l'effort longitudinal.

3.2.3.1. Essais de caractérisation en agrément de direction

Ces essais sont définis de sorte à avoir le même niveau de sollicitation qu'un véhicule de tourisme utilisé en conditions normales. La sollicitation la plus haute en dérive correspond à la sollicitation de la roue avant extérieure lors d'un passage dans un rond point. (4° de dérive au plus).

Les séquences d'excitation suivantes sont menées à 3 cas de pression : 2 bars – 2.5 bars – 3 bars) et 4 vitesses : 40km/h – 80km/h – 120km/h – 160km/h.

3.2.3.1.1. Ligne droite

La dérive est nulle. Le pneumatique est soumis aux cas des états stationnaires de couplage charge : 3kN – 4.5kN – 6kN, carrossage $-1.5^\circ - 0^\circ - 1.5^\circ$. Cette séquence permet de déterminer les réponses en charge et en carrossage purs.

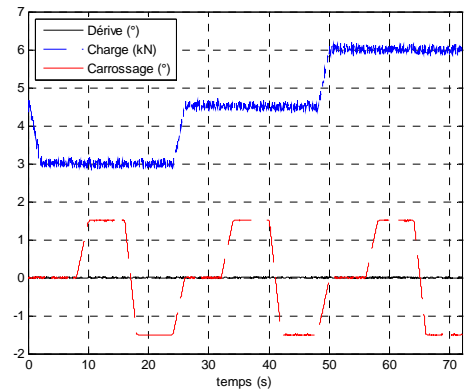


figure 36 :
Séquence ligne droite

3.2.3.1.2. Echelons de petite dérive

Sous des états stationnaires de couplage charge (1.5kN – 3kN – 4.5kN – 6kN), carrossage ($-1.5^\circ - 0^\circ - 1.5^\circ$), la dérive est excitée par des créneaux rapides d'amplitude $\pm 1^\circ$. Ce type de trajectoire permet de déterminer la rigidité de dérive du pneu sans risquer d'altérer son état thermique. On peut aussi y observer l'influence du carrossage sur la rigidité de dérive.

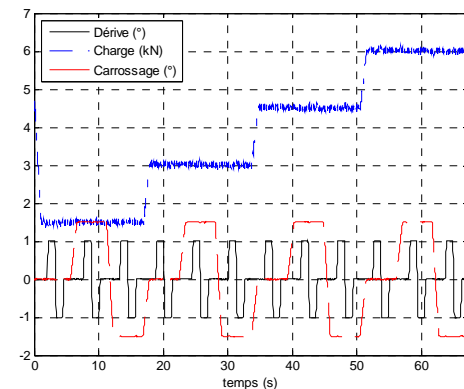


figure 37 :
Séquence échelons petite dérive

3.2.3.1.3. Sinus de charge

Le carrossage est nul. Sous des états stationnaires de dérive ($-1^\circ - 1^\circ$), la charge est excitée autour d'une charge nominale (3kN – 4.5kN) suivant un profil sinus d'amplitude $\pm 500\text{N}$ et de fréquences 3 et 6Hz. Cette excitation permet d'étudier la réponse dynamique du pneumatique par rapport à la charge.

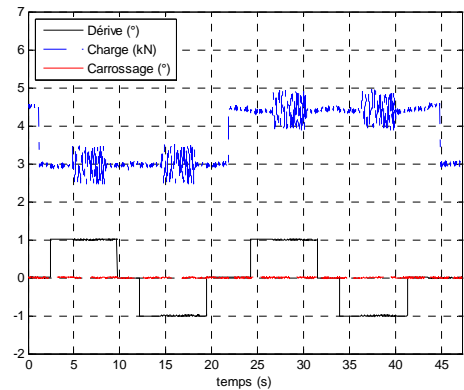


figure 38 :
Séquence sinus de charge

3.2.3.1.4. Sinus de dérive

Sous des états stationnaires de couplage charge (3kN – 4.5kN – 6kN), carrossage ($-1.5^\circ - 0^\circ - 1.5^\circ$), la dérive est excitée par des sinus centrés d'amplitude $\pm 1^\circ$, de fréquence 3, 4.5 et 6Hz. Cette séquence permet de caractériser :

- la rigidité de dérive,
- la rigidité de la déformation en torsion,
- les raideurs de ballant et de braquage.

On peut aussi y observer les couplages éventuels de ces grandeurs avec le carrossage.

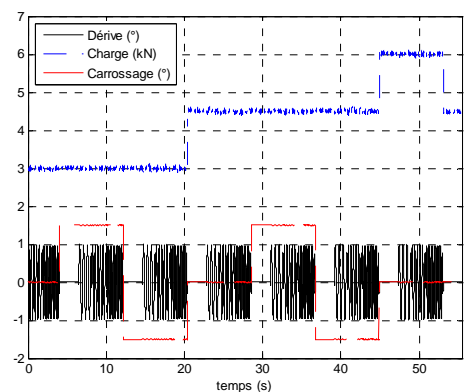


figure 39 :
Séquence sinus de dérive

3.2.3.1.5. Profils de moyenne dérive

Sous des états stationnaires de couplage charge (1.5kN – 3kN – 4.5kN – 6kN), carrossage (-1.5° – 0° – 1.5°), la dérive est excitée par un profil d'amplitude $\pm 4^\circ$ comportant des créneaux ainsi que des rampes montantes et descendantes. Des temps de repos sont intercalés après chaque excitation pour que la bande de roulement puisse revenir à un état stabilisé. Ce type de trajectoire permet d'observer le comportement dynamique du pneumatique sur un domaine non linéaire de dérive. L'amplitude de l'excitation en dérive est juste suffisante pour atteindre les extremums du moment d'auto-alignement.

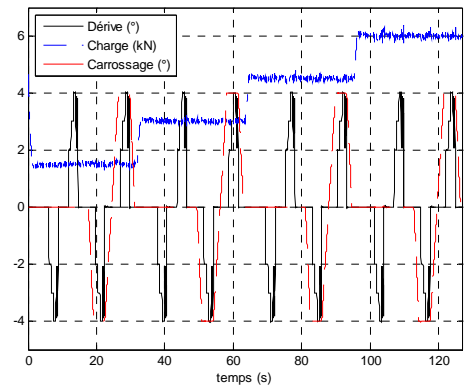


figure 40 :
Séquence profils moyenne dérive

3.2.3.2. Essais de caractérisation en sécurité active

La procédure d'essais pour la caractérisation en sécurité active permet d'exciter des points de fonctionnements limites, atteignables lors de situations d'urgence (évitement grande vitesse notamment allant jusqu'à 12° de dérive). Cette procédure n'est pas utilisée dans la suite. Les sollicitations y sont si importantes que le pneumatique évolue au fur et à mesure de la procédure (par effets thermique et d'usure). Son comportement ne peut donc pas être considéré invariant. Comme la trajectoire ne comporte pas de point de fonctionnement redondant, cette évolution comportementale ne peut être pas être quantifiée. Bien que la procédure soit classée confidentielle par PSA Peugeot Citroën, on peut révéler qu'elle est réalisée à vitesse constante (80km/h) et que les séquences suivantes sont jouées à 3 pressions (sous gonflage, gonflage nominal, sur gonflage):

3.2.3.2.1. Petits créneaux de dérive

Le pneumatique est excité par de petits créneaux de dérive, à carrossage nul et sous des états stationnaires de charge. Cette séquence permet de déterminer la réponse en charge pure et la rigidité de dérive.

3.2.3.2.2. Créneaux de carrossage

Le pneumatique est excité par des créneaux de carrossage, à dérive nulle et sous des états stationnaires de charge. Cette séquence permet de déterminer la réponse en carrossage pur.

3.2.3.2.3. Couplages en dérive/carrossage

Sous des états de charges stationnaires, le pneumatique est soumis à des couples de charges/carrossage de valeurs élevées. Le carrossage suit deux lois proportionnelles à la dérive. Leur coefficient de proportionnalité correspond à celui d'un train standard et d'un train à traverse rigide.

3.2.4. Pneumatiques étudiés



Dunlop 2000E

Pneu sport destiné aux véhicules hautes performances de milieu et haut de gamme



Michelin Energy 3

Pneu basse résistance au roulement destiné aux berlines citadines, compactes et familiales



Michelin Pilot Exalto

Pneu sport destiné aux automobiles à caractère sportif et ludique

figure 41 : Descriptif commercial des pneumatiques à caractériser

Afin de s'assurer de la robustesse et de la reproductibilité des résultats, les identifications sont réalisées sur quatre pneumatiques :

- Dunlop 2000E : 205 55 R16 91 V (Dunlop R16)
- Michelin Energy 3 : 195 65 R15 91 H (Michelin R15)
- Michelin Energy 3 : 205 55 R16 91 V (Michelin R16)
- Michelin Pilot Exalto : 205 50 R17 93 W (Michelin R17)

Ces pneumatiques ont été choisis de sorte à être suffisamment proches pour pouvoir être montés sur un même type de véhicule. Il s'agit donc d'un choix de monte qui pourrait correspondre à une phase d'intégration dans un projet où on cherche à déterminer le pneumatique le mieux adapté au véhicule à concevoir.

3.3. Mise en forme du modèle d'effort de contact pneumatique/sol pour l'identification

Dans cette partie, le modèle d'effort de contact pneumatique/sol présenté au chapitre 2 est explicité linéairement par rapport aux paramètres. Seules les composantes d'effort longitudinal, latéral et d'auto-alignement sont traitées en raison de leur importance primordiale pour l'étude de la dynamique véhicule.

Les critères de validation du modèle identifié et la manière de le modifier en cas d'incohérence avec les comportements attendus sont présentés ensuite.

3.3.1. Modèle linéaire par rapport aux paramètres de l'effort de contact pneumatique/sol

Le modèle d'effort de contact obtenu au chapitre 2 est restreint aux composantes d'effort longitudinal, d'effort latéral et de moment auto-alignement : F_{x_p} , F_{y_p} et M_{z_p} respectivement. De même le torseur cinématique du repère pneumatique est restreint aux vitesses longitudinale, latérale et de lacet : V_x , V_y et $\dot{\beta}$ respectivement.

Par abus de notation, les expressions utilisées sont les mêmes que dans (2-53) où les 6 composantes des torseurs sont manipulées. On a ainsi :

$$F_p = F_{pneu}(\tau_p, q_r, q_p, \dot{q}_r) + L_R(q_{AC}) \cdot \frac{\dot{F}_p}{\omega} + P_{F_p}(q_{AC}) \cdot F_p + P_{\tau_p}(q_{AC}) \cdot \tau_p \quad (3-9)$$

avec F_p vecteur 3×1 efforts dans le repère pneumatique :

$$F_p = (Fx_p \quad Fy_p \quad Mz_p)^T \quad (3-10)$$

$F_{pneu}(\tau_p, q_r, q_p, \dot{q}_r)$ vecteur 3×1 du modèle des efforts de l'interaction pneumatique/sol :

$$F_{pneu} = (Fx_{pneu} \quad Fy_{pneu} \quad Mz_{pneu})^T \quad (3-11)$$

τ_p vecteur 3×1 des cinématiques du repère pneumatique

$$\tau_p = (V_x \quad V_y \quad \dot{\beta})^T \quad (3-12)$$

$L_R(F_p)$ matrice 3×3 d'angle de relaxation

$$L_R(q_{AC}) = \omega \cdot \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot \left({}^{R_{AC}}T(q_{AC})_{R_p} \cdot {}^p J_p(q_{AC}) K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T(q_{AC}) \right) \quad (3-13)$$

P_{τ_p} matrice de couplage 3×3 des composantes cinématiques du repère pneumatique avec les efforts pneumatique

$$P_{\tau_p}(q_{AC}) = \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot (I_3 - {}^{R_{AC}}T(q_{AC})_{R_p}) \quad (3-14)$$

P_{F_p} matrice de couplage 3×3 entre les composantes du torseur d'effort pneumatique

$$P_{F_p}(q_{AC}) = {}^{R_p}T(q_{AC})_{R_{AC}}^T - I_3 \quad (3-15)$$

$q_{AC} = [x \quad y \quad \beta]^T$: vecteur des positions articulaires relatives au ballant, à l'avance et à la torsion pneumatique.

${}^p J_p(q_{AC})$, ${}^{R_p}T(q_{AC})_{R_{AC}}^T$ et ${}^{R_{AC}}T(q_{AC})_{R_p}$ sont des matrices 3×3 ne représentant que les composantes de translation longitudinal, de translation latéral et de rotation autour de l'axe vertical des torseurs.

Ce modèle peut être mis sous forme linéaire par rapport aux paramètres si on dispose de modèles linéaires par rapport aux paramètres pour : F_{pneu} et q_{AC} qui sont les seules inconnues du modèle.

La Jacobienne de F_{pneu} : $\partial F_{pneu}/\partial \tau_{AC}$ est définie par les dérivées partielles de F_{pneu} qui sont linéaires par rapport aux paramètres si F_{pneu} est linéaire par rapport aux paramètres (voir annexe C pour la dérivation d'un polynôme).

Sous hypothèses de petits déplacements, les éléments des matrices ${}^{R_p} \mathbb{T}_{RAC}^T(q_{AC})$ et ${}^p J_p^T(q_{AC})$ dépendent linéairement de q_{AC} . Si q_{AC} est associé à un modèle linéaire par rapport aux paramètres, les composantes des matrices ${}^{R_p} \mathbb{T}_{RAC}^T(q_{AC})$ et ${}^p J_p^T(q_{AC})$ le sont donc aussi.

Dans cette partie les modèles linéaires aux paramètres de F_{pneu} et q_{AC} sont d'abord définis. Ces modèles sont ensuite utilisés pour expliciter les matrices de modèles linéaires par rapport aux paramètres de $\partial F_{pneu}/\partial \tau_{AC}$, ${}^{R_p} \mathbb{T}_{RAC}^T(q_{AC})$ et ${}^p J_p^T(q_{AC})$.

L'utilisation des opérations d'addition et de multiplication des modèles linéaires par rapport aux paramètres (définies en annexe C) permet alors d'exprimer le modèle d'effort de contact pneumatique/sol de sorte à ce qu'il soit linéaire par rapport aux paramètres de F_{pneu} , modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol, ou aux paramètres de q_{AC} , modèle des positions articulaires relatives à la flexibilité du pneumatique dans le plan du sol.

3.3.1.1. Expressions linéaires par rapport aux paramètres terme à terme

3.3.1.1.1. Polynôme du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol : F_{pneu}

Chaque dépendance de la composante F de F_{pneu} (F pouvant correspondre à F_x , F_y , M_z) aux éléments du vecteur d'entrée du modèle d'interaction pneumatique/sol (2-113) est modélisée par un polynôme $P_{F,X}$ en la grandeur d'entrée X pouvant correspondre à une des grandeurs suivantes :

- déformation longitudinale : $\kappa' = V_x/\omega - R_r$
- déformation latérale : $\delta' = V_y/\omega$
- pseudo déformation en torsion : $\varphi' = \dot{\beta}/\omega$
- carrossage : γ

- offset : 1
- déformations dues à l'interaction avec le carrossage :

$$\pi_{(\gamma, V_x)} = \gamma \cdot V_x / \omega, \quad \pi_{(\gamma, \dot{\beta})} = \gamma \cdot \dot{\beta} / \omega \quad \text{et} \quad \pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})} = \gamma^2 \cdot \dot{\beta} / \omega$$

Ces dépendances sont considérées indépendantes et additives de sorte à avoir un modèle de la forme :

$$F_{x_{pneu}} = P_{F_x, \kappa'} + P_{F_x, \pi(\gamma, \dot{\beta})} + P_{F_x, \gamma} + P_{F_x, 1} \quad (3-16)$$

$$F_{y_{pneu}} = P_{F_y, \delta'} + P_{F_y, \phi'} + P_{F_y, \pi(\gamma, \dot{\beta})} + P_{F_y, \gamma} + P_{F_y, 1} \quad (3-17)$$

$$M_{z_{pneu}} = P_{M_z, \delta'} + P_{M_z, \phi'} + P_{M_z, \pi(\gamma, V_x)} + P_{M_z, \pi(\gamma^2, \dot{\beta})} + P_{M_z, \gamma} + P_{M_z, 1} \quad (3-18)$$

avec $P_{F, X}$ polynôme en la variable X s'annulant en $X = 0$:

$$P_{F, X} = c_{F, X, n_x} \cdot X^{n_x} + c_{F, X, n_x-1} \cdot X^{n_x-1} + \dots + c_{F, X, 2} \cdot X^2 + c_{F, X, 1} \cdot X \quad (3-19)$$

Le degré n_x de chaque polynôme $P_{F, X}$ polynôme est déterminé au cas par cas en fonction de l'allure des réponses expérimentales obtenues sur l'effort.

3.3.1.1.1.1. Degré des polynômes aux grandeurs d'entrées du modèle d'interaction pneumatique/sol

D'après les résultats obtenus en expérimentation, à charge constante, les polynômes $P_{F_x, \kappa'}$, $P_{F_y, \delta'}$, $P_{F_y, \phi'}$, $P_{M_z, \delta'}$ et $P_{M_z, \phi'}$ peuvent caractériser jusqu'à 7 grandeurs (les mêmes que celles représentée par la formule magique antisymétrique §2.4.3) : l'abscisse du minimum, l'ordonnée du minimum, l'abscisse du maximum, l'ordonnée du maximum, l'abscisse du centre d'anti-symétrie, l'ordonnée du centre d'anti-symétrie et la pente à l'origine. Il peut aussi y avoir des asymptotes horizontales, mais on considère que l'excitation n'est jamais suffisante pour aller dans ces domaines (§3.3.2.1.1.2).

Sous hypothèse que ces 7 grandeurs sont indépendantes, le degré des polynômes pour $P_{F_x, \kappa'}$, $P_{F_y, \delta'}$, $P_{F_y, \phi'}$, $P_{M_z, \delta'}$ et $P_{M_z, \phi'}$ est fixé à 7 afin qu'ils aient un nombre de coefficients identique à celui des grandeurs caractéristiques.

Le degré des autres polynômes est fixé arbitrairement. Le tableau 5 indique les degrés utilisés pour représenter les relations polynomiales entre chaque entrée et chaque composante d'effort étudiée.

	κ'	δ'	φ	$\pi_{(\gamma, V_x)}$	$\pi_{(\gamma, \dot{\beta})}$	$\pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})}$	γ	1
Fx_{pneu}	7	0	0	0	3	0	5	1
Fy_{pneu}	0	7	7	0	0	0	5	1
Mz_{pneu}	0	7	7	3	0	3	5	1

TABLEAU 5 : DEGRES A PRIORI DES POLYNOMES DU MODELE D'EFFORT D'INTERACTION PNEUMATIQUE/SOL

3.3.1.1.1.2. Dépendance en la charge

Une augmentation de la charge entraîne une augmentation du champ de pression dans la zone de contact et une modification de sa géométrie, ce qui modifie les propriétés de l'interaction pneumatique/sol. Afin de prendre en compte cette dépendance à la charge, chaque coefficient $c_{F,X,k}$ est modélisé par un polynôme en la charge F_z .

Dans le cas où l'aire de contact n'existe pas, cas $F_z = 0$, les entrées relatives à la déformation vue par l'aire de contact ne doivent pas avoir d'influence sur les sorties du modèle d'effort. Pour les polynômes pour $P_{Fx, \kappa'}$, $P_{Fx, \pi_{(\gamma, \dot{\beta})}}$, $P_{Fy, \delta'}$, $P_{Fy, \pi_{(\gamma, \dot{\beta})}}$, $P_{Fy, \varphi}$, $P_{Mz, \delta'}$, $P_{Mz, \varphi}$, $P_{Mz, \pi_{(\gamma, V_x)}}$ et $P_{Mz, \pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})}}$ les coefficients $c_{F,X,k}$ sont donc modélisés par un polynôme qui s'annule à charge nulle:

$$c_{F,X,k} = b_{F,X,k,3} \cdot F_z^3 + b_{F,X,k,2} \cdot F_z^2 + b_{F,X,k,1} \cdot F_z \quad (3-20)$$

Le degré 3 en la charge des coefficients $c_{F,X,k}$ est fixé pour pouvoir représenter une dépendance en la charge qui puisse être linéaire pour de petites charges et atteindre un extremum à une charge donnée. Il faut donc un polynôme à 3 coefficients pour représenter les 3 informations nécessaires : pente à l'origine, valeur de charge à l'extremum et valeur de l'extremum.

Le carrossage correspond à une articulation du modèle de contact pneumatique/sol qui est munie d'une raideur. La seule présence d'un carrossage peut donc générer un effort, avec ou sans charge. Les effets aérodynamique provoqué par rotation de la roue (§3.2.2.1.3.3) ou les offsets de mesure peuvent générer la présence d'un offset d'effort à charge nulle. Pour les polynômes $P_{Fx, \gamma}$, $P_{Fx, 1}$, $P_{Fy, \gamma}$, $P_{Fy, 1}$, $P_{Mz, \gamma}$ et $P_{Mz, 1}$, les coefficients $c_{F,X,k}$ sont donc modélisés par un polynôme pouvant ne pas s'annuler à charge nulle :

$$c_{F,X,k} = b_{F,X,k,3} \cdot F_z^3 + b_{F,X,k,2} \cdot F_z^2 + b_{F,X,k,1} \cdot F_z + b_{F,X,k,0} \quad (3-21)$$

3.3.1.1.1.3. Modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol linéaires par rapport aux paramètres

Chaque polynôme P_X peut s'écrire sous la forme :

$$P_{F,X} = \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=m_X}^3 X^i \cdot F_z^j \cdot b_{F,X,i,j} \quad (3-22)$$

avec n_X degré du polynôme, indiqué tableau 5, et m_X degré du plus petit monôme en la charge (m_X vaut 1 pour $P_{F_x,\kappa'}$, $P_{F_x,\pi(\gamma,\beta)}$, $P_{F_y,\delta'}$, $P_{F_y,\pi(\gamma,\beta)}$, $P_{F_y,\phi'}$, $P_{M_z,\delta'}$, $P_{M_z,\phi'}$, $P_{M_z,\pi(\gamma,\beta)}$, $P_{M_z,\pi(\gamma,\beta)}$ et 0 pour $P_{F_x,\gamma}$, $P_{F_x,1}$, $P_{F_y,\gamma}$, $P_{F_y,1}$, $P_{M_z,\gamma}$, $P_{M_z,1}$)

Par exemple, pour le polynôme $P_{F_y,\delta}$, on a :

$$\begin{aligned} P_{F_y,\delta'} = & \delta'^7 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\delta,7,3} + \delta'^7 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\delta,7,2} + \delta'^7 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\delta,7,1} \\ & + \delta'^6 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\delta,6,3} + \delta'^6 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\delta,6,2} + \delta'^6 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\delta,6,1} \\ & + \dots \\ & + \delta'^2 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\delta,2,3} + \delta'^2 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\delta,2,2} + \delta'^2 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\delta,2,1} \\ & + \delta' F_z^3 \cdot b_{F_y,\delta,1,3} + \delta' \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\delta,1,2} + \delta' \cdot F_z \cdot b_{F_y,\delta,1,1} \end{aligned} \quad (3-23)$$

Ou bien pour $P_{F_y,\gamma}$:

$$\begin{aligned} P_{F_y,\gamma} = & \gamma^5 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\gamma,5,3} + \gamma^5 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\gamma,5,2} + \gamma^5 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\gamma,5,1} + \gamma^5 \cdot b_{F_y,\gamma,5,0} \\ & + \gamma^4 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\gamma,4,3} + \gamma^4 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\gamma,4,2} + \gamma^4 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\gamma,4,1} + \gamma^4 \cdot b_{F_y,\gamma,4,0} \\ & + \gamma^3 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\gamma,3,3} + \gamma^3 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\gamma,3,2} + \gamma^3 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\gamma,3,1} + \gamma^3 \cdot b_{F_y,\gamma,3,0} \\ & + \gamma^2 \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\gamma,2,3} + \gamma^2 \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\gamma,2,2} + \gamma^2 \cdot F_z \cdot b_{F_y,\gamma,2,1} + \gamma^2 \cdot b_{F_y,\gamma,2,0} \\ & + \gamma \cdot F_z^3 \cdot b_{F_y,\gamma,1,3} + \gamma \cdot F_z^2 \cdot b_{F_y,\gamma,1,2} + \gamma \cdot F_z \cdot b_{F_y,\gamma,1,1} + \gamma \cdot b_{F_y,\gamma,1,0} \end{aligned} \quad (3-24)$$

Etant donné la forme de (3-22), chaque polynôme $P_{F,X}$ peut s'écrire sous forme linéaire par rapport aux paramètres :

$$P_{F,X} = W_{F,X} \cdot X_{F,X} \quad (3-25)$$

On en déduit l'expression linéaire par rapport aux paramètres des composantes longitudinale et latérale de l'effort ainsi que la composante verticale du moment d'interaction pneumatique/sol :

$$F_{x_{pneu}} = W_{F_x} \cdot X_{F_x} = \begin{bmatrix} W_{F_x, \kappa'} (F_z, \kappa')^T \\ W_{F_x, \pi(\gamma, \beta)} (F_z, \pi(\gamma, \beta))^T \\ W_{F_x, \gamma} (F_z, \gamma)^T \\ W_{F_x, 1} (F_z)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{F_x, \kappa'} \\ X_{F_x, \pi(\gamma, \beta)} \\ X_{F_x, \gamma} \\ X_{F_x, 1} \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$F_{y_{pneu}} = W_{F_y} \cdot X_{F_y} = \begin{bmatrix} W_{F_y, \delta'} (F_z, \delta')^T \\ W_{F_y, \phi'} (F_z, \phi')^T \\ W_{F_y, \gamma} (F_z, \gamma)^T \\ W_{F_y, 1} (F_z)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{F_y, \delta'} \\ X_{F_y, \phi'} \\ X_{F_y, \gamma} \\ X_{F_y, 1} \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

$$M_{z_{pneu}} = W_{M_z} \cdot X_{M_z} = \begin{bmatrix} W_{M_z, \delta'} (F_z, \delta')^T \\ W_{M_z, \phi'} (F_z, \phi')^T \\ W_{M_z, \pi(\gamma, \nu_x)} (F_z, \pi(\gamma, \nu_x))^T \\ W_{M_z, \pi(\gamma^2, \beta)} (F_z, \pi(\gamma^2, \beta))^T \\ W_{M_z, \gamma} (F_z, \gamma)^T \\ W_{M_z, 1} (F_z)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{M_z, \delta'} \\ X_{M_z, \phi'} \\ X_{M_z, \pi(\gamma, \nu_x)} \\ X_{M_z, \pi(\gamma^2, \beta)} \\ X_{M_z, \gamma} \\ X_{M_z, 1} \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

3.3.1.1.2. Polynôme des positions articulaires q_{AC}

L'équation (2-41) donne directement la position des articulations de ballant, d'avance et de torsion pneu avec une relation linéaire par rapport aux paramètres de compliance articulaire :

$$y = W_{q_y} \cdot X_{q_y} = F_{yP} \cdot K_y^{-1} \quad (3-29)$$

$$x = W_{q_x} \cdot X_{q_x} = F_{xP} \cdot K_x^{-1} \quad (3-30)$$

$$\beta = W_{q_\beta} \cdot X_{q_\beta} = \begin{bmatrix} M_{zP}^T \\ F_{xP}^T \cdot F_{yP}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_\beta^{-1} \\ K_\beta^{-1} \cdot (K_x^{-1} - K_y^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

Où K_y , K_x et K_β correspondent respectivement aux raideurs des articulations de ballant, d'avance et de torsion de la liaison au sol.

3.3.1.1.3. Polynôme de la Jacobienne du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol :
 $\partial F_{pneu}/\partial \tau_{AC}$

On rappelle l'équation (2-114) de la Jacobienne de l'effort d'interaction pneumatique/sol :

$$\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial Fx_{pneu}}{\partial \kappa'} & 0 & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \pi(\gamma, \beta)} \cdot \gamma & \\ 0 & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} & \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \varphi'} & \\ \hline \gamma \cdot \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \pi(\gamma, V_x)} & \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \delta'} & \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \varphi'} + \frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \pi(\gamma^2, \beta)} \cdot \gamma^2 & \end{array} \right) \cdot \frac{1}{\omega} \quad (3-32)$$

On déduit de (3-25), (3-26) et (3-27) sa forme linéaire par rapport aux paramètres :

$$\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\frac{\partial W_{Fx, \kappa'}}{\partial \kappa'} \right) \cdot X_{Fx, \kappa'} & 0 & \left(\frac{\partial W_{Fx, \pi(\gamma, \beta)}}{\partial \pi(\gamma, \beta)} \right) \cdot \gamma \cdot X_{Fx, \pi(\gamma, \beta)} & \\ 0 & \left(\frac{\partial W_{Fy, \delta'}}{\partial \delta'} \right) \cdot X_{Fy, \delta'} & \left(\frac{\partial W_{Fy, \varphi'}}{\partial \varphi'} \right) \cdot X_{Fy, \varphi'} & \\ \hline \left(\frac{\partial W_{Mz, \pi(\gamma, V_x)}}{\partial \pi(\gamma, V_x)} \right) \cdot \gamma \cdot X_{Mz, \pi(\gamma, V_x)} & \left(\frac{\partial W_{Mz, \delta'}}{\partial \delta'} \right) \cdot X_{Mz, \delta'} & \left(\frac{\partial W_{Mz, \varphi'}}{\partial \varphi'} \right) \cdot X_{Mz, \varphi'} & \left(\frac{\partial W_{Mz, \pi(\gamma^2, \beta)}}{\partial \pi(\gamma^2, \beta)} \right) \cdot \gamma^2 \cdot X_{Mz, \pi(\gamma^2, \beta)} \end{array} \right) \quad (3-33)$$

3.3.1.1.4. Polynôme de la matrice de passage d'un torseur cinématique du repère aire de contact au repère pneumatique

Sous hypothèse de petits déplacements, la matrice de passage des efforts du repère aire de contact au repère pneumatique (2-45) est linéaire aux composantes du vecteur des positions articulaire q_{AC} :

$${}^{R_p} T_{RAC}^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \beta & 0 \\ -\beta & 1 & 0 \\ -y & -x & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & W_{q\beta} \cdot X_{q\beta} & 0 \\ -W_{q\beta} \cdot X_{q\beta} & 1 & 0 \\ -W_{qy} \cdot X_{qy} & -W_{qx} \cdot X_{qx} & 1 \end{array} \right) \quad (3-34)$$

3.3.1.1.5. Polynôme de la Jacobienne entre les efforts articulaires Γ_{AC} et torseur d'effort au repère pneumatique

La Jacobienne permettant de faire le lien entre les efforts articulaires et le torseur d'effort pneumatique (2-38) est linéaire aux composantes du vecteur des positions articulaire q_{AC} :

$${}^p J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -y \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -W_{qy} \cdot X_{qy} \\ 1 & 0 & W_{qx} \cdot X_{qx} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

3.3.1.1.6. Contribution de l'angle de relaxation

En substituant (3-33), (3-34) et (3-35) dans (3-13), on obtient un modèle linéaire par rapport aux paramètres de la contribution dans l'effort de l'angle de relaxation :

$$\begin{bmatrix} W_{F_x,L} \cdot X_{F_x,L} \\ W_{F_y,L} \cdot X_{F_y,L} \\ W_{M_z,L} \cdot X_{M_z,L} \end{bmatrix} = L_R(q_{AC}) \cdot \frac{\dot{F}_p}{\omega} = \dot{F}_p \cdot \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot \left({}^{R_{AC}} \mathbb{T}(q_{AC})_{R_p} \cdot {}^p J_p(q_{AC}) K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T(q_{AC}) \right) \quad (3-36)$$

Cette expression linéaire par rapport aux paramètres est obtenue en appliquant les règles de multiplication et d'additions relatives aux modèles linéaires par rapport aux paramètres indiquées en annexe C. Le résultat n'est pas explicité afin de ne pas alourdir les résultats.

Néanmoins, étant donné l'expression de l'angle de relaxation, les composantes des vecteurs de paramètres $X_{F_x,L}$, $X_{F_y,L}$ et $X_{M_z,L}$ sont nécessairement des produits des composantes des vecteurs de paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol : X_{F_x} , X_{F_y} et X_{M_z} avec les composantes des vecteurs de paramètres des position articulaires q_{AC} : X_{qx} , X_{qy} et $X_{q\beta}$.

3.3.1.1.7. Contribution du torseur cinématique

En substituant (3-33) et (3-34) dans (3-14), on obtient un modèle linéaire par rapport aux paramètres de la contribution dans l'effort de la cinématique du repère pneumatique :

$$\begin{bmatrix} W_{Fx,P1} \cdot X_{Fx,P1} \\ W_{Fy,P1} \cdot X_{Fy,P1} \\ W_{Mz,P1} \cdot X_{Mz,P1} \end{bmatrix} = P_{\tau_p}(q_{AC}) \cdot \tau_p = \left(\frac{\partial F_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot (I - {}^{R_{AC}}\mathbb{T}(q_{AC})_{R_p}) \tau_p \quad (3-37)$$

Cette expression linéaire par rapport aux paramètres est obtenue en appliquant les règles de multiplication et d'additions relatives aux modèles linéaires par rapport aux paramètres indiquées en annexe C. Le résultat n'est pas explicité afin de ne pas alourdir les résultats.

Néanmoins, étant donné l'expression de l'angle de relaxation, les composantes des vecteurs de paramètres $X_{Fx,P1}$, $X_{Fy,P1}$ et $X_{Mz,P1}$ sont nécessairement des produits des composantes des vecteurs de paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol : X_{Fx} , X_{Fy} et X_{Mz} avec les composantes des vecteurs de paramètres des position articulaires q_{AC} : X_{qx} , X_{qy} et $X_{q\beta}$.

3.3.1.1.8. Contribution des autres composantes du torseur d'effort

En substituant (3-34) dans (3-15), on obtient un modèle linéaire par rapport aux paramètres de la contribution des autres composantes de l'effort de contact pneumatique/sol :

$$P_{F_p}(q_{AC}) \cdot F_p = \begin{bmatrix} W_{Fx,P2} \cdot X_{Fx,P2} \\ W_{Fy,P2} \cdot X_{Fy,P2} \\ W_{Mz,P2} \cdot X_{Mz,P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W_{q\beta} \otimes Fy_p) X_{q\beta} \\ -(W_{q\beta} \otimes Fx_p) X_{q\beta} \\ -(W_{qy} \otimes Fx_p) X_{qy} - (W_{qx} \otimes Fy_p) X_{qx} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$P_{F_p}(q_{AC}) \cdot F_p = {}^{R_p}\mathbb{T}(q_{AC})^T F_p - F_p \quad (3-39)$$

Cette expression est linéaire aux paramètres de compliance articulaire de q_{AC} .

3.3.1.2. Formulation finale

En utilisant les modèles linéaires par rapport aux paramètres obtenus, l'effort de contact pneumatique/sol (3-9) peut s'écrire :

$$Fx_p = \begin{bmatrix} W_{Fx}^T \\ W_{Fx,P2}^T \\ W_{Fx,L}^T \\ W_{Fx,P1}^T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{Fx} \\ X_{Fx,P2} \\ X_{Fx,L} \\ X_{Fx,P1} \end{bmatrix} \quad Fy_p = \begin{bmatrix} W_{Fy}^T \\ W_{Fy,P2}^T \\ W_{Fy,L}^T \\ W_{Fy,P1}^T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{Fy} \\ X_{Fy,P2} \\ X_{Fy,L} \\ X_{Fy,P1} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

(3-41)

$$Mz_p = \begin{bmatrix} W_{Mz}^T \\ W_{Mz,P2}^T \\ W_{Mz,L}^T \\ W_{Mz,P1}^T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{Mz} \\ X_{Mz,P2} \\ X_{Mz,L} \\ X_{Mz,P1} \end{bmatrix} \quad (3-42)$$

Les vecteurs paramétriques X_{Fx} , X_{Fy} , X_{Mz} correspondent directement aux vecteurs de paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol.

Les composantes des vecteurs $X_{Fx,P2}$, $X_{Fy,P2}$ et $X_{Mz,P2}$ ne dépendent que des compliances des articulations de ballant, d'avance et de torsion du modèle de contact pneumatique/sol.

Les composantes des autres vecteurs paramétriques correspondent à des produits entre les paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol et les paramètres de compliance articulaire.

3.3.2. Procédure d'identification

Si on souhaite identifier les raideurs articulaires, l'identification est réalisée en deux temps. On identifié d'abord sous hypothèse d'indépendance paramétrique des modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol, de longueur de relaxation et de couplage effort/vitesse. On déduit de cette identification les paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol.

La connaissance de ces paramètres est ensuite utilisée pour expliciter la dépendance de la longueur de relaxation et du couplage effort/vitesse à la Jacobienne de l'effort d'interaction pneumatique/sol. Cette dépendance est linéaire aux compliances articulaires qui peuvent alors être identifiées.

3.3.2.1. Identification du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol

Les équations (3-40), (3-41) et (3-42) sont résolues au sens des moindres carrés. Etant donné la structure du modèle, une partie des paramètres identifiés correspond directement aux paramètres du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol : X_{Fx} , X_{Fy} et X_{Mz} .

Le comportement du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol avec les paramètres identifiés est analysé afin de vérifier qu'il a bien le comportement attendu. Dans le cas contraire, le modèle est simplifié. Les critères d'analyse sont présentés dans la partie suivante.

3.3.2.1.1. Critères de validation des modèles identifiés d'effort d'interaction pneumatique/sol

3.3.2.1.1.1. Polynômes par rapport à la charge : $c_{F,X,k}$

Soit Fz_{min} et Fz_{max} les charges minimale et maximale de la trajectoire d'identification. Aucun des coefficients $c_{F,X,k}$ ne doit s'annuler sur ce domaine (un changement de signe sur un coefficient polynomial impliquant une discontinuité structurelle).

Si c'est le cas, c'est que l'information disponible est trop pauvre par rapport aux capacités descriptives du polynôme (la structure n'est donc pas univoque en regard du comportement à caractériser).

Il faut alors simplifier le polynôme :

- si la charge est fortement sollicitée, le polynôme $P_{F,X}$ auquel il est attaché doit être simplifié par suppression du monôme de plus haut degré en X .
- si la charge est très faiblement sollicitée (1 seul point de fonctionnement en charge notamment), l'ensemble des polynômes $c_{F,X,k}$ doit être simplifié par suppression du monôme de plus haut degré en F_z .

3.3.2.1.1.2. Polynômes en la dérive et au taux de glissement : $P_{F,\kappa'}$ et $P_{F,\delta'}$

Cette partie ne concerne que les polynômes relatifs à des relations entrées-sorties bien maîtrisées et pour lesquelles des données expérimentales sont disponibles : $P_{F_x,\kappa'}$, $P_{F_y,\delta'}$ et $P_{M_z,\delta'}$. Pour chacune de ces polynômes, il existe un modèle de la formule magique prévoyant l'existence :

- d'un offset vertical : S_v
- d'un offset horizontal : S_h
- d'une pente à l'origine : K
- d'un effort au maximum : D_{max}
- d'une dérive au maximum : X_{min}
- d'un effort au minimum : D_{min}
- d'une dérive au minimum : X_{min}
- d'une asymptote horizontale à $+\infty$: L_+
- d'une asymptote horizontale à $-\infty$: L_-

Le domaine asymptotique n'est pas utilisé car il correspond à des situations de vie extrêmes correspondant à des situations d'accidents qui sortent du cadre de cette étude. De plus c'est un domaine où l'excitation est extrêmement destructive pour le pneumatique. Il est donc délicat de considérer invariantes les propriétés d'un pneumatique excité dans ce domaine.

Le domaine utile à la dynamique du véhicule, présenté figure 42, recouvre les extremums et un petit peu au-delà (la perte d'adhérence avec l'augmentation de la dérive est une information utile pour détecter la dérive au maximum d'adhérence. Cette détection est particulièrement importante pour la dynamique des véhicules sportifs). Le tableau 6 indique les domaines de validité pour chaque grandeur descriptive.

Si on trouve davantage de grandeurs descriptives sur les domaines que le nombre maximum préconisé, le polynôme incriminé doit être simplifié par suppression du monôme de plus haut degré.

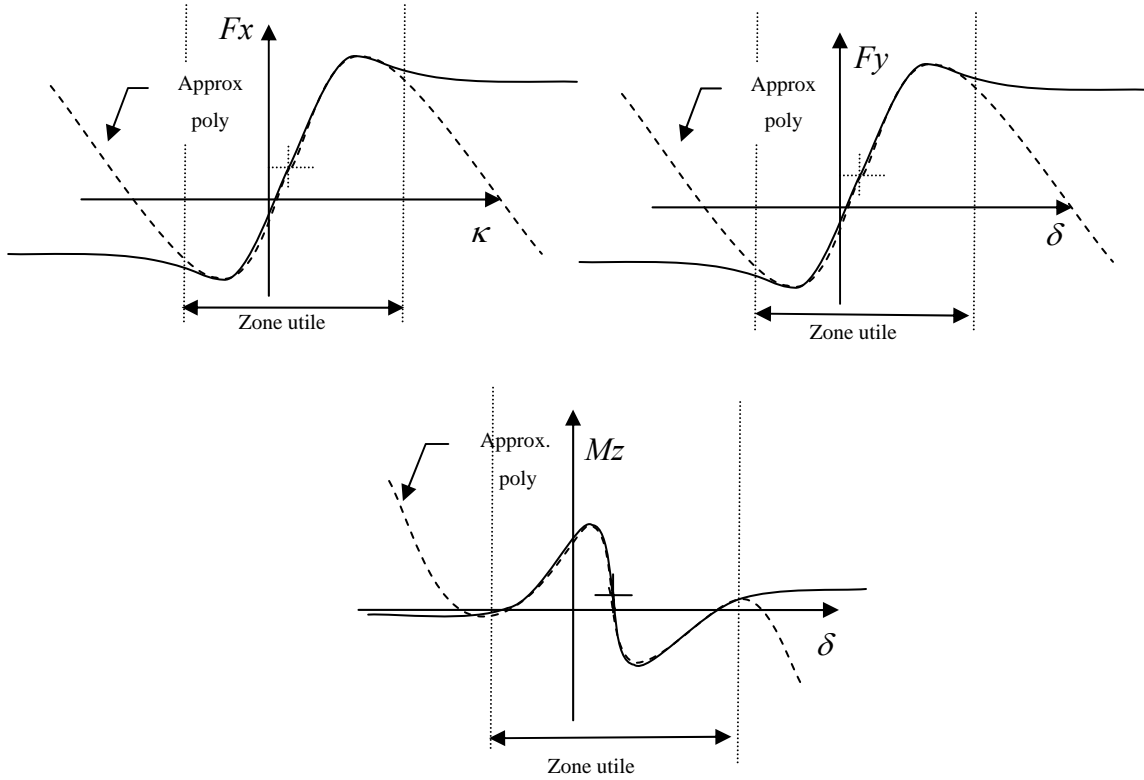


figure 42 : Zones utiles en dynamique véhicule sur la dérive pour l'effort longitudinal, l'effort latéral et le moment d'auto-alignement

	Grandeurs descriptives	Nombre max	Domaine	
F_y	Zéro	1	$\delta \in [-1,1]$	$\delta' \in [-5,5] \cdot 10^{-3}$
	Maximum	1	$\delta \in [6,12]$	$\delta' \in [3,6] \cdot 10^{-2}$
	Minimum	1	$\delta \in [-12,-6]$	$\delta' \in [-6,-3] \cdot 10^{-2}$
M_z	Zéro	1	$\delta \in [-1,1]$	$\delta' \in [-5,5] \cdot 10^{-3}$
	Maximum	1	$\delta \in [-6,0]$	$\delta' \in [-3,0] \cdot 10^{-2}$
	Minimum	1	$\delta \in [0,6]$	$\delta' \in [0,3] \cdot 10^{-2}$

TABEAU 6 : DOMAINES UTILES ET NOMBRE ATTENDU DE CHAQUE GRANDEURS DESCRIPTIVES

3.3.2.2. Identification des raideurs articulaires

Lorsque X_{Fx} , X_{Fy} et X_{Mz} sont déterminés. L'effort d'interaction pneumatique/sol F_{pneu} et sa Jacobienne $\partial F_{pneu}/\partial \tau_{AC}$ peuvent être calculés. On désigne respectivement par \hat{F}_{pneu} et $\partial \hat{F}_{pneu}/\partial \tau_{AC}$ les valeurs obtenues.

Les contributions de l'angle de relaxation et de la cinématique du repère pneumatique dans l'effort pneumatique dépendent de la Jacobienne de l'effort d'interaction pneumatique/sol.

Les modèles linéaires par rapport aux paramètres sont recalculés avec $\partial \hat{F}_{pneu}/\partial \tau_{AC}$:

$$\begin{bmatrix} W'_{Fx,L} \cdot X'_{Fx,L} \\ W'_{Fy,L} \cdot X'_{Fy,L} \\ W'_{Mz,L} \cdot X'_{Mz,L} \end{bmatrix} = L_R(q_{AC}) \cdot \frac{F_p}{\omega} = F_p \cdot \left(\frac{\partial \hat{F}_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot \left({}^{R_{AC}} \mathbb{T}(q_{AC})_{R_p} \cdot {}^p J_p(q_{AC}) K_{AC}^{-1} \cdot {}^p J_p^T(q_{AC}) \right) \quad (3-43)$$

$$\begin{bmatrix} W'_{Fx,P1} \cdot X'_{Fx,P1} \\ W'_{Fy,P1} \cdot X'_{Fy,P1} \\ W'_{Mz,P1} \cdot X'_{Mz,P1} \end{bmatrix} = P_{\tau_p}(q_{AC}) \cdot \tau_p = \left(\frac{\partial \hat{F}_{pneu}}{\partial \tau_{AC}} \right) \cdot (I - {}^{R_{AC}} \mathbb{T}(q_{AC})_{R_p}) \tau_p \quad (3-44)$$

Les composantes des vecteurs de paramètres de (3-43) et (3-44) ne dépendent que des compliances articulaires. L'effort de contact pneumatique/sol (3-9) peut s'écrire :

$$Fx_p - \hat{F}x_{pneu} = \begin{bmatrix} W_{Fx,P2}^T \\ W_{Fx,L}^{\prime T} \\ W_{Fx,P1}^{\prime T} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X'_{Fx,P2} \\ X'_{Fx,L} \\ X'_{Fx,P1} \end{bmatrix} \quad Fy_p - \hat{F}y_{pneu} = \begin{bmatrix} W_{Fy,P2}^T \\ W_{Fy,L}^{\prime T} \\ W_{Fy,P1}^{\prime T} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X'_{Fy,P2} \\ X'_{Fy,L} \\ X'_{Fy,P1} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

$$Mz_p - \hat{M}z_{pneu} = \begin{bmatrix} W_{Mz,P2}^T \\ W_{Mz,L}^{\prime T} \\ W_{Mz,P1}^{\prime T} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X'_{Mz,P2} \\ X'_{Mz,L} \\ X'_{Mz,P1} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

Les équations (3-45), (3-46) et (3-47) peuvent être résolues au sens des moindres carrés et les composantes des vecteurs de paramètres ne dépendent que des compliances articulaires. On en déduit donc les compliances des articulations de ballant, d'avance et de torsion pneu.

3.4. Détermination de la structure du modèle de l'effort de contact juste nécessaire pour les essais de caractérisation en agrément de direction

L'identification est réalisée à différentes vitesses dont la plus élevée est 160km/h, soit une fréquence de rotation de roue de l'ordre de 23Hz. Il s'agit du phénomène le plus haute fréquence qui puisse être décrit par le modèle. Afin de le prendre en compte, tous les signaux utilisés pour l'identification sont filtrés à 25Hz.

Seules les essais à petite dérive de la procédure d'agrément sont utilisées dans cette partie (descriptions des essais §3.2.3.1.1, §0, §0, §0). En effet dans ce domaine d'excitation, le travail du pneumatique est minime et son comportement est invariant (voir §0 pour le lien entre le travail et l'altération de la réponse du pneumatique). De plus, avec ce type d'excitation, des polynômes de degré 1 (3-19) sont suffisants pour décrire les relations entrées/sortie du modèle d'effort ce qui facilite l'analyse des résultats.

3.4.1. Grandeurs d'entrées significatives

D'après le modèle d'interaction pneumatique/sol (2-108), les grandeurs d'entrée sont :

- Déformation longitudinale : $\kappa' = V_x / \omega - R_r$
- Déformation latérale : $\delta' = V_y / \omega$
- Pseudo déformation en torsion : $\varphi' = \dot{\beta} / \omega$
- Carrossage : γ
- Offset : 1
- Déformations dues à l'interaction avec le carrossage :

$$\pi_{(\gamma, V_x)} = \gamma \cdot V_x / \omega, \quad \pi_{(\gamma, \dot{\beta})} = \gamma \cdot \dot{\beta} / \omega \quad \text{et} \quad \pi_{(\gamma^2, \dot{\beta})} = \gamma^2 \cdot \dot{\beta} / \omega$$

Le pneumatique est identifié à différentes vitesses. Pour chaque pneumatique et chaque cas de vitesse et de pression, les coefficients des polynômes $P_{F_x, \kappa'}$, $P_{F_x, \pi_{(\gamma, \dot{\beta})}}$, $P_{F_y, \pi_{(\gamma, \dot{\beta})}}$, $P_{M_z, \pi_{(\gamma, V_x)}}$,

$P_{Mz, \pi(\gamma^2, \beta)}$ et $P_{Fx, \gamma}$ ne sont pas identifiables. Il n'y a donc aucune influences des entrées

$\pi(\gamma, V_x)$, $\pi(\gamma, \beta)$, $\pi(\gamma^2, \beta)$ et κ' sur les sorties du modèle d'effort de contact.

Pour la procédure d'essais de caractérisation en agrément de direction, l'interaction des déformations avec la chasse latérale est donc négligeable ainsi que la déformation longitudinal (la roue n'étant pas motorisée ou freinée lors des essais, la déformation longitudinal n'est quasiment pas excitée). Les grandeurs d'entrée significatives sont la déformation latérale δ' , la déformation en torsion φ' , le carrossage γ et l'offset.

La contribution de la pseudo déformation en torsion φ' est significative, surtout à faible vitesse. D'après sa définition, φ' est inversement proportionnel à la vitesse. Son effet est donc plus important à basse vitesse C'est pourquoi cette grandeur est utilisée dans les modèles basse vitesse (inférieurs à 20km/h), dédiés à modéliser les manœuvres de parking (intégrale de Van Der Jagt). A vitesse élevée, φ' a une contribution importante sur les transitoires, de l'ordre de celle du carrossage (voir excitation sinus figure 46). Ne pas prendre en compte cette grandeur lors de l'identification ne permet pas de corrélérer correctement sur des dynamiques rapides, ce qui est illustré figure 43.

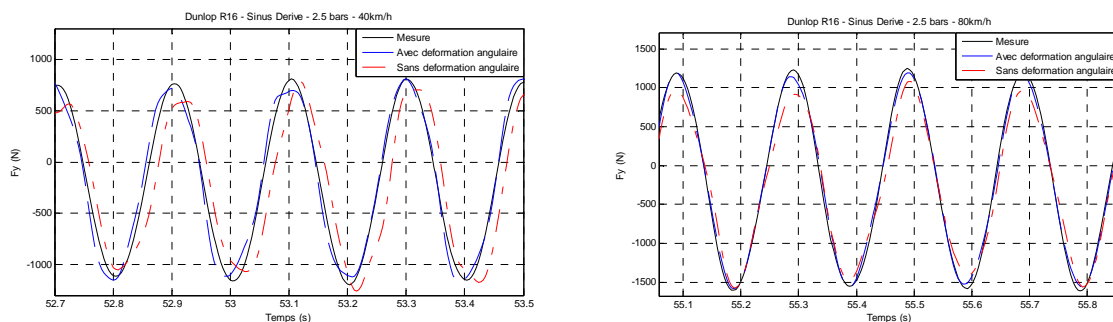


figure 43 : Identification avec/sans déformation en torsion sur effort latéral (cas 40km/h et 80km/h, sinus de dérive 1° à 6Hz, charge 6kN, carrossage nul).

Afin de quantifier, suivant le type de sollicitation, l'importance de chaque entrée significative les essais de caractérisation en agrément de direction, les polynômes relatifs à ces grandeurs dans les modèles d'effort latéral ((3-41), (3-27)) et du moment auto-alignement ((3-42) (3-28)) d'interaction pneumatique/sol sont simulés avec les valeurs identifiées sur différents essais. Les résultats des simulations sont indiqués de la figure 44 à la figure 48. La contribution des raideurs articulaires correspond à la somme des contributions de l'angle de

3.4 DETERMINATION DE LA STRUCTURE DU MODELE DE L'EFFORT DE CONTACT JUSTE NECESSAIRE POUR LES ESSAIS DE CARACTERISATION EN AGREMENT DE DIRECTION

relaxation, des couplages des efforts avec la cinématique du repère pneumatique et des couplages entre les composantes de l'effort de contact.

On constate que pour des points de fonctionnement stationnaires, les contributions significatives sont celles de la dérive, du carrossage et de l'offset (de la plus importante à la moins importante). Pour des transitoires en déformation latérale, les contributions des raideurs articulaires et de la déformation en torsion sont du même ordre de grandeur. Pour des transitoires en la charge, la contribution des raideurs articulaires est du même ordre de grandeur que les variations de la contribution de la dérive.

Les figures allant de la figure 44 à la figure 48 respectent le code couleur suivant :

- : contribution de la déformation latérale ($W_{Fy,\delta'} \cdot X_{Fy,\delta'}$ et $W_{Mz,\delta'} \cdot X_{Mz,\delta'}$)
- : contribution de la déformation en torsion ($W_{Fy,\varphi'} \cdot X_{Fy,\varphi'}$ et $W_{Mz,\varphi'} \cdot X_{Mz,\varphi'}$)
- : contribution du carrossage ($W_{Fy,\gamma} \cdot X_{Fy,\gamma}$ et $W_{Mz,\gamma} \cdot X_{Mz,\gamma}$)
- : contribution de l'offset ($W_{Fy,l\gamma} \cdot X_{Fy,l\gamma}$ et $W_{Mz,l\gamma} \cdot X_{Mz,l\gamma}$)
- : contribution des raideurs articulaires ($W_{Fy,P1} \cdot X_{Fy,P1} + W_{Fy,P2} \cdot X_{Fy,P2} + W_{Fy,L} \cdot X_{Fy,L}$ et $W_{Mz,P1} \cdot X_{Mz,P1} + W_{Mz,P2} \cdot X_{Mz,P2} + W_{Mz,L} \cdot X_{Mz,L}$)

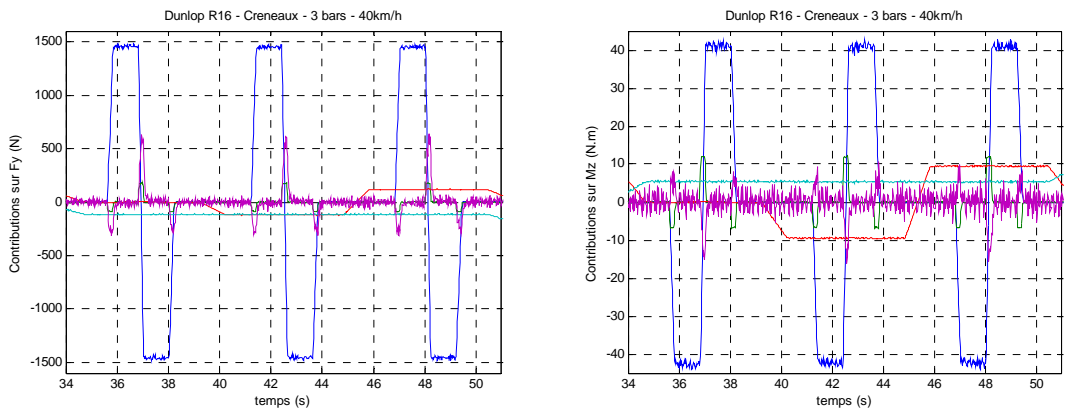


figure 44 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence créneaux petite dérive (charge à 4.5kN)

CHAPITRE 3 IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL SUR BANC DE MESURE

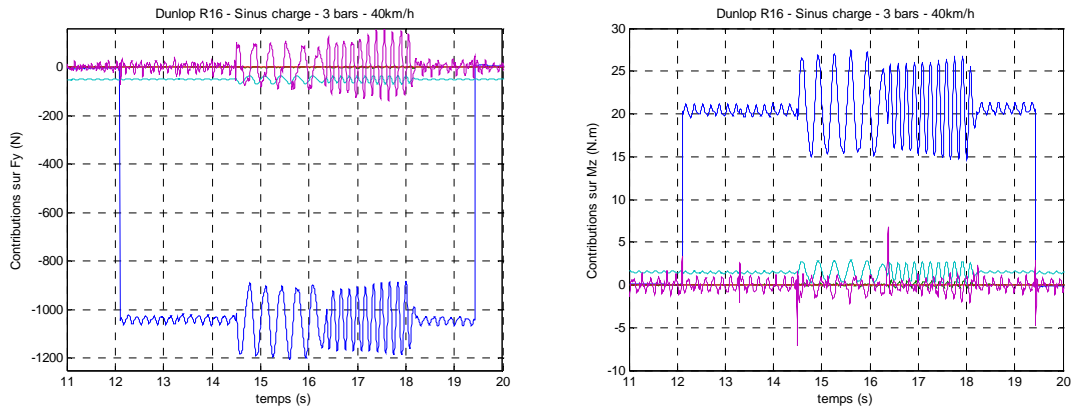


figure 45 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence de charge en sinus (charge nominale à 3kN, dérive à -1°)

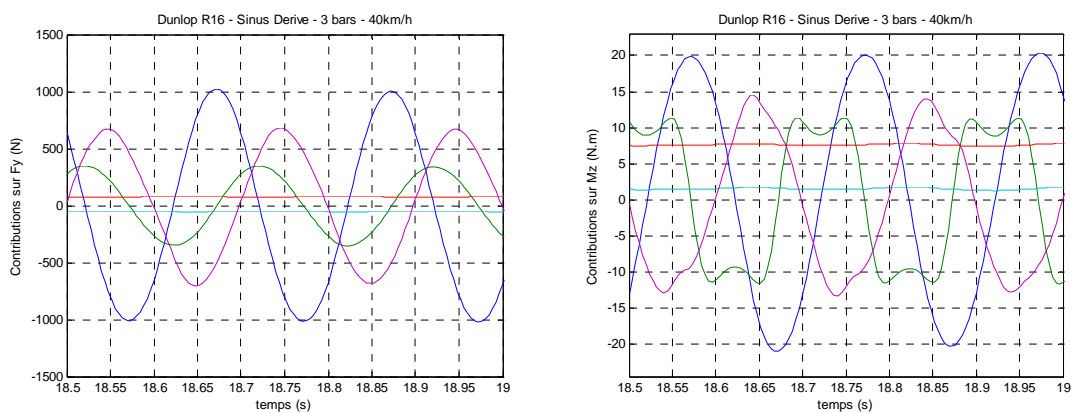


figure 46 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur séquence sinus de dérive (charge à 3kN, dérive à 6Hz, carrossage à -1.5°)

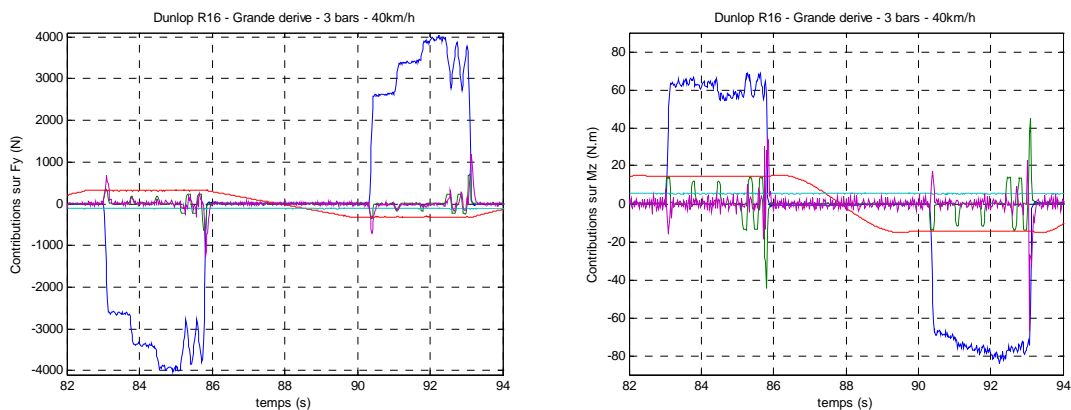


figure 47 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur séquence profils moyenne dérive (charge à 4.5kN)

3.4 DETERMINATION DE LA STRUCTURE DU MODELE DE L'EFFORT DE CONTACT JUSTE NECESSAIRE POUR LES ESSAIS DE CARACTERISATION EN AGREMENT DE DIRECTION

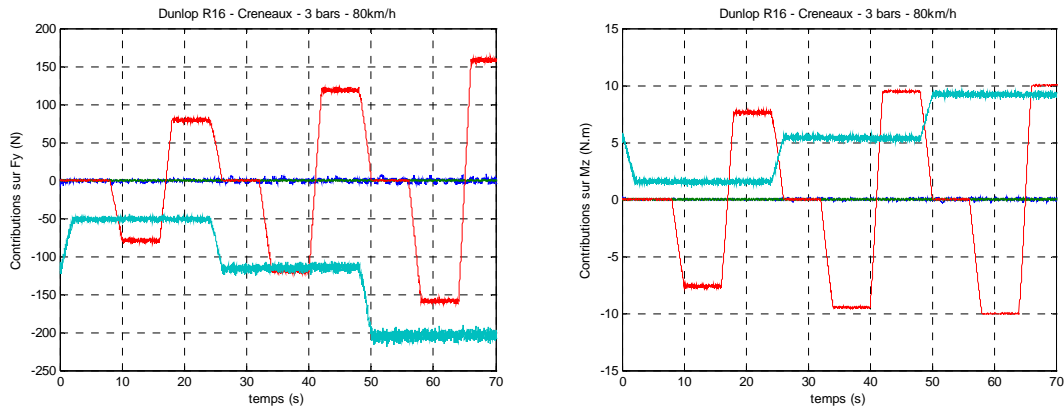


figure 48 : Contributions des grandeurs d'entrée significatives sur une séquence en ligne droite

3.4.2. Flexibilités articulaires identifiables

Les compliances articulaires sont identifiées, toutes vitesses confondues. L'identification est faite indépendamment sur chaque composante du torseur d'effort de contact. De cette manière on peut vérifier la cohérence des résultats entre eux.

Les résultats sont consignés dans le tableau 7. Les compliances y ont été inversées afin d'être exprimées en raideurs. L'écart type relatif associé à chaque compliance identifiée est indiqué entre parenthèse.

	Pres. (bars)	F_x		F_y		M_z	
		K_x (N.m ⁻¹)	K_{mz} (Nm.rad ⁻¹)	K_y (N.m ⁻¹)	K_{mz} (Nm.rad ⁻¹)	K_y (N.m ⁻¹)	K_{mz} (Nm.rad ⁻¹)
Dunlop R16	2	∞	12 945 (1.9%)	137 652 (0.062%)	5260 (0.49%)	164 708 (0.16%)	∞
	2.5	∞	12 897 (2.2%)	199 101 (0.083%)	7828 (0.59%)	191 788 (0.21%)	∞
	3	∞	15 463 (3.1%)	229 647 (0.092%)	6719 (0.6%)	218 560 (0.24%)	∞
Michelin R15	2	∞	∞	152 206 (0.063%)	∞	168 572 (0.15%)	∞
	2.5	∞	∞	154 876 (0.051%)	∞	195 891 (0.2%)	∞
	3	∞	∞	197 174 (0.066%)	∞	205 491 (0.22%)	∞
Michelin R16	2	∞	14 589 (2%)	134 563 (0.057%)	∞	165 334 (0.18%)	∞
	2.5	∞	15 625 (2.2%)	154 718 (0.056%)	∞	190 765 (0.2%)	∞
	3	∞	∞	172 590 (0.058%)	∞	207 686 (0.24%)	∞
Michelin R17 a	2	∞	13 719 (1.2%)	159 394 (0.057%)	∞	167 592 (0.15%)	∞
	2.5	∞	22 430 (2.1%)	186 631 (0.061%)	∞	179 131 (0.15%)	∞
	3	∞	14 841 (1.7%)	210 559 (0.072%)	∞	199 049 (0.19%)	∞

TABLEAU 7: RAIDEURS IDENTIFIEES SUR LES SEQUENCES A PETITES DERIVES

On constate que la raideur longitudinale n'est jamais identifiable sur les essais de caractérisation en agrément de direction. La monotonie par rapport à la pression de la raideur de torsion identifiée sur l'effort longitudinal n'est pas vérifiée sur tous les pneumatiques. Ce comportement ne semble pas physique. Etant donné le manque d'excitation en glissement longitudinal, le ratio signal/bruit sur l'effort longitudinal est très faible. Il y a donc un risque important que les résultats soient biaisés.

Seul le Dunlop a une raideur de torsion identifiable sur l'effort latéral. D'après les erreurs relatives indiquées, sa contribution est 6 fois moins importante que l'influence de la raideur de ballant sur la sortie.

La raideur de torsion n'est jamais identifiable sur le moment d'auto-alignement.

Les raideurs de ballant obtenues sur l'effort latéral et le moment d'auto-alignement sont du même ordre de grandeur et toujours proportionnelles à la pression. La différence entre les deux valeurs identifiées peut être due à un mauvais rejet des perturbations.

Il semble finalement que pour les essais en agrément de direction, seule la flexibilité de l'articulation en ballant pneu ait une influence significative sur l'effort de contact. Les articulations d'avance et de torsion pneu peuvent être considérées bloquées.

3.4.3. Bilan sur le modèle d'effort de contact pneumatique/sol juste nécessaire pour l'agrément de direction

L'étude structurelle a permis de déterminer que pour les essais de caractérisation en agrément de direction, les grandeurs d'entrée significatives du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol peuvent être réduites à : δ' , φ' , γ et à l'offset. De plus les articulations de ballant et de torsion pneu du modèle articulaire de contact pneumatique/sol peuvent être considérées bloquée. $(\tau_p, q_r, q_p, \dot{q}_r)$

Sous ces hypothèses, les modèles des composantes de l'effort de contact (3-9) sont décrits ci-dessous.

La composante longitudinale de l'effort de contact :

$$Fx_p = Fx_{pneu}(F_z) \quad (3-48)$$

La composante latérale de l'effort de contact :

$$Fy_p = Fy_{pneu}(\delta', \varphi', \gamma, F_z) + L_{Fy}(\delta', F_z) \cdot \frac{\dot{F}y_p}{\omega} \quad (3-49)$$

avec L_{Fy} l'angle de relaxation :

$$L_{Fy}(\delta', F_z) = \left(\frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (3-50)$$

La composante du moment auto-alignement de l'effort de contact :

$$Mz_p = Mz_{pneu}(\delta', \varphi', \gamma, F_z) + L_{Mz}(\delta', F_z) \cdot \frac{\dot{F}y_p}{\omega} - K_y^{-1} \cdot Fy_p \cdot Fx_p \quad (3-51)$$

avec L_{Mz} l'angle de relaxation :

$$L_{Mz}(\delta', F_z) = \left(\frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (3-52)$$

L'effort latéral et le moment auto-alignement ne dépendent que d'un seul état correspondant directement à l'effort latéral. Cet état est stable si on vérifie $\partial Fy_{pneu} / \partial \delta' < 0$ ou bien $\partial Fy_{pneu} / \partial \delta > 0$. Lorsque le maximum d'adhérence est dépassé, on a $\partial Fy_{pneu} / \partial \delta < 0$. Le modèle prévoit donc une instabilité.

En pratique, le mode de ballant est excité à 43Hz lorsqu'on dépasse le maximum de dérive sur l'effort latéral. Ce mode de ballant provient du système masse ressort constitué de la raideur de ballant (150kN/m) et de la masse libre de ceinture (2kg), considérée nulle dans cette étude. Il faudrait donc considérer que la masse de ceinture soit non nulle pour avoir des résultats de simulation réalistes pour des sollicitations allant au-delà du maximum d'adhérence.

3.4.4. Indépendance de la rigidité de dérive de l'effort latéral par rapport au carrossage

D'après la littérature (voir annexe B), la rigidité de dérive de l'effort latéral chute lorsqu'il y a du carrossage. Un couplage dérive/carrossage est ajouté au modèle d'effort latéral (3-49) afin de vérifier si ce phénomène est identifiable sur les essais de caractérisation en agrément de direction.

Le modèle d'effort latéral de contact avec influence du carrossage sur la raideur de dérive vaut :

$$Fy_p = Fy_{pneu} + L_R \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial Fy_p}{\partial t} \quad (3-53)$$

$$\text{avec } Fy_{pneu} = K_\delta \cdot \delta' + K_\varphi \cdot \varphi' + K_\gamma \cdot \gamma + S_v$$

$$K_\delta \text{ rigidité de dérive : } K_\delta = (P_{Fz1} \cdot \gamma^2 + P_{Fz2})$$

$$K_\varphi \text{ rigidité de courbure : } K_\varphi = P_{Fz3}$$

$$K_\gamma \text{ rigidité de carrossage : } K_\gamma = P'_{Fz4}$$

$$S_v \text{ offset d'effort latéral : } S_v = P'_{Fz5}$$

$$L_R \text{ angle de relaxation : } L_R = P_{Fz6} \cdot \gamma^2 + P_{Fz7}$$

P_{Fzi} et P'_{Fzi} polynômes en la charge :

$$P_{Fzi} = c_{Fzi-3} \cdot F_z^3 + c_{Fzi-3} \cdot F_z^2 + c_{Fzi-1} \cdot F_z$$

$$P'_{Fzi} = c_{Fzi-3} \cdot F_z^3 + c_{Fzi-3} \cdot F_z^2 + c_{Fzi-1} \cdot F_z + c_{Fzi-0} \cdot$$

Après identification de (3-53) sur l'ensemble des vitesses, il apparaît que pour tous les pneus et cas de pression, P_{Fz1} et P_{Fz6} sont supprimés. Le couplage dérive carrossage est donc négligeable sur les essais de caractérisation en agrément de direction.

NB : l'utilisation dans la rigidité de dérive d'une dépendance en γ ou $|\gamma|$ au lieu de γ^2 donne des résultats identiques.

3.4.5. Indépendance de l'effort latéral d'interaction pneumatique/sol par rapport à la vitesse

D'un point de vue mécanique, Les forces de Coriolis de rotation de roue génèrent des contraintes radiales sur la bande de roulement et peuvent agir de cette manière sur le champ de pression de l'aire de contact. On peut donc postuler que l'effort d'interaction pneumatique/sol dépend de la vitesse. Afin de vérifier si ce phénomène est identifiable sur les essais de caractérisation en agrément de direction, une dépendance à la vitesse de rotation de roue est ajoutée au modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol de (3-49).

Le modèle d'effort latéral de contact avec influence de la vitesse dans le modèle d'interaction pneumatique/sol vaut :

$$Fy_p = Fy_{pneu} + L_R \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial Fy_p}{\partial t} \quad (3-54)$$

$$\text{avec } Fy_{pneu} = K_\delta \cdot \delta' + K_\phi \cdot \phi' + K_\gamma \cdot \gamma + S_v$$

$$K_\delta \text{ rigidité de dérive : } K_\delta = P_{Fz1} \cdot \omega^2 + P_{Fz2} \cdot \omega + P_{Fz3}$$

$$K_\phi \text{ rigidité de courbure : } K_\phi = P_{Fz4}$$

$$K_\gamma \text{ rigidité de carrossage : } K_\gamma = P'_{Fz5}$$

$$S_v \text{ offset d'effort latéral : } S_v = P'_{Fz6} \cdot \omega^2 + P'_{Fz7} \cdot \omega + P'_{Fz8}$$

$$L_R \text{ angle de relaxation : } L_R = P_{Fz9} \cdot \omega^2 + P_{Fz10} \cdot \omega + P_{Fz11}$$

P_{Fzi} et P'_{Fzi} polynômes en la charge :

$$P_{Fzi} = c_{Fzi-3} \cdot F_z^3 + c_{Fzi-3} \cdot F_z^2 + c_{Fzi-1} \cdot F_z$$

$$P'_{Fzi} = c_{Fzi-3} \cdot F_z^3 + c_{Fzi-3} \cdot F_z^2 + c_{Fzi-1} \cdot F_z + c_{Fzi-0} \cdot$$

Le modèle (3-54) est identifié sur toutes les vitesses confondues (40km/h, 80km/h, 120km/h et 160km/h). Pour chaque pneu et chaque cas de pression, P_{Fz1} , P_{Fz2} , P_{Fz7} , P_{Fz6} , P_{Fz9} et P_{Fz10} ne sont pas identifiables. L'influence de la vitesse sur le modèle statique est donc négligeable sur les essais de caractérisation en agrément de direction.

3.5. Résultats d'identification polynomiale sur les essais en agrément de direction

3.5.1. Modèles d'identification

3.5.1.1. Modèle d'identification des paramètres de l'effort latéral d'interaction pneumatique/sol

L'expression linéaire par rapport aux paramètres du modèle d'effort latéral du contact pneumatique/sol (3-49) s'explique :

$$Fy_p = \left[W_{Fy,Fpneu} \mid W_{Fy,Ly} \right] \begin{bmatrix} X_{Fy,Fpneu} \\ X_{Fy,Ly} \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

avec $W_{Fy,Fpneu} \cdot X_{Fy,Fpneu}$ l'influence de l'effort latéral de l'interaction pneumatique/sol

$$W_{Fy,Fpneu} \cdot X_{Fy,Fpneu} = Fy_{pneu} = \left[W_{Fy,\delta} \quad W_{Fy,\phi} \quad W_{Fy,\gamma} \quad W_{Fy,1} \right] \begin{bmatrix} X_{Fy,\delta'} \\ X_{Fy,\phi'} \\ X_{Fy,\gamma} \\ X_{Fy,1} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

$$W_{Fy,\delta'}(F_z, \delta') \cdot X_{Fy,\delta'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \delta'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy,\delta',i,j} \quad (3-57)$$

$$W_{Fy,\phi'}(F_z, \phi') \cdot X_{Fy,\phi'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \phi'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy,\phi',i,j} \quad (3-58)$$

$$W_{Fy,\gamma}(F_z, \gamma) \cdot X_{Fy,\gamma} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^3 \gamma^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy,\gamma,i,j} \quad (3-59)$$

$$W_{Fy,1}(F_z) \cdot X_{y1} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^3 F_z^j \cdot b_{Fy,1,i,j} \quad (3-60)$$

$W_{Fy,Ly} \cdot X_{Fy,Ly}$ l'influence de la raideur de ballant sur l'effort latéral

$$W_{Fy,Ly}(F_z, \delta, \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Fy,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \left(\frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (3-61)$$

$$W_{Fy,Ly}(F_z, \delta', \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Fy,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 i \times \delta'^{i-1} \cdot F_z^j \cdot b_{Fy,Ly,i,j} \quad (3-62)$$

3.5.1.2. Modèle d'identification des paramètres du moment auto-alignement d'interaction pneumatique/sol

L'expression linéaire par rapport aux paramètres du modèle d'auto alignement du contact pneumatique/sol (3-49) s'explícite :

$$Mz_p = \left[W_{Mz,Fpneu} \quad W_{Mz,Pz2} \quad \middle| \quad W_{Mz,Ly} \right] \begin{bmatrix} X_{Mz,Fpneu} \\ X_{Mz,Pz2} \\ X_{Mz,Ly} \end{bmatrix} \quad (3-63)$$

avec $W_{Mz,Fpneu} \cdot X_{Mz,Fpneu}$ l'influence du moment auto-alignement de l'interaction pneumatique/sol

$$W_{Mz,Fpneu} \cdot X_{Mz,Fpneu} = Mz_{pneu} = \left[W_{Mz,\delta} \quad W_{Mz,\varphi} \quad W_{Mz,\gamma} \quad W_{Mz,1} \right] \begin{bmatrix} X_{Mz,\delta'} \\ X_{Mz,\varphi'} \\ X_{Mz,\gamma} \\ X_{Mz,1} \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

$$W_{Mz,\delta'}(F_z, \delta') \cdot X_{Mz,\delta'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \delta'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\delta',i,j} \quad (3-65)$$

$$W_{Mz,\varphi'}(F_z, \varphi') \cdot X_{Mz,\varphi'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \varphi'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\varphi',i,j} \quad (3-66)$$

$$W_{Mz,\gamma}(F_z, \gamma) \cdot X_{Mz,\gamma} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^3 \gamma^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\gamma,i,j} \quad (3-67)$$

$$W_{Mz,1}(F_z) \cdot X_{Mz,1} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^3 F_z^j \cdot b_{Mz,1,i,j} \quad (3-68)$$

$W_{Pz2} \cdot X_{Pz2}$ couplage du moment auto-alignement avec l'effort latéral

$$W_{Pz2} \cdot X_{Pz2} = (-Fy_p \cdot Fx_p) K_y^{-1} \quad (3-69)$$

$W_{Mz,Ly} \cdot X_{Mz,Ly}$ l'influence de la raideur de ballant sur le moment auto-alignement

$$W_{Mz,Ly}(F_z, \delta', \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Mz,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \left(\frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \delta'} \right) K_y^{-1} \quad (3-70)$$

$$W_{Mz,Ly}(F_z, \delta, \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Mz,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 i \times \delta'^{i-1} \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,Ly,i,j} \quad (3-71)$$

3.5.1.3. Modèles d'identification de la raideur de ballant

\hat{Fy}_{pneu} et \hat{Mz}_{pneu} correspondent à la simulation des modèles de l'effort latéral et du moment auto-alignement de l'interaction pneumatique/sol avec les vecteurs des paramètres identifiés $\hat{X}_{Fy, Fpneu}$ et $\hat{X}_{Mz, Fpneu}$ respectivement :

$$\hat{Fy}_{pneu} = W_{Fy, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Fy, Fpneu} \quad (3-72)$$

$$\hat{Mz}_{pneu} = W_{Mz, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Mz, Fpneu} \quad (3-73)$$

La dérivée de l'effort latéral et du moment auto-alignement de l'interaction pneumatique/sol par rapport à la déformation latérale :

$$\left(\frac{\partial \hat{Fy}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) = \left(\frac{\partial (W_{Fy, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Fy, Fpneu})}{\partial \delta'} \right) \quad (3-74)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{Mz}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) = \left(\frac{\partial (W_{Mz, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Mz, Fpneu})}{\partial \delta'} \right) \quad (3-75)$$

Les modèles d'identification linéaires par rapport à la raideur de ballant s'écrivent :

$$Fy_p - \hat{Fy}_{pneu} = \left(\left(\frac{\partial \hat{Fy}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot \frac{\dot{Fy}_p}{\omega} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (3-76)$$

$$Mz_p - \hat{Mz}_{pneu} = \left(\left(\frac{\partial \hat{Mz}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot \frac{\dot{Fy}_p}{\omega} - Fy_p \cdot Fx_p \right) \cdot K_y^{-1} \quad (3-77)$$

3.5.2. Résultats d'identification

Dans cette partie, l'algorithme d'identification est appliqué à tous les essais de caractérisation en agrément de direction, toutes vitesses confondues (40km/h, 80km/h, 120km/h et 160km/h). Pour chaque pneu et chaque cas de pression, les modèles d'effort latéral et du moment auto-alignement d'interaction pneumatique/sol sont identifiés, ainsi que la compliance de ballant.

3.5.2.1. Résultats d'identification du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol

Afin de ne pas alourdir cette partie, les résultats d'identifications de (3-55) et (3-63), modèles d'identification linéaire par rapport aux paramètres de l'effort pneumatique/sol, pour chaque pneumatique et chaque pression, ont été mis en annexe G.

A titre illustratif, des exemples de résultats d'identification de modèles polynomiaux (déduts des résultats indiqués en annexe G) sont indiqués ci-dessous :

- Effort latéral du Dunlop R16 gonflé à 2bars :

$$\begin{aligned} \hat{Fy}_{pneu} = & (760.8 \times F_z^3 - 8.39 \times 10^4 \times F_z) \delta' \\ & + 1.01 \times 10^8 \times F_z \cdot \delta_z'^3 - 2.248 \times 10^{10} \times F_z \cdot \delta_z'^5 \\ & + 1.009 \times 10^4 \times F_z \cdot \varphi' - 1115 \times F_z \cdot \gamma - 34.67 \cdot F_z \end{aligned} \quad (3-78)$$

- Effort latéral du Dunlop R16 gonflé à 2.5bars :

$$\begin{aligned} \hat{Fy}_{pneu} = & (1175 \times F_z^3 - 4214 \times F_z^2 - 7.256 \times 10^4 \times F_z) \delta' \\ & + (-7.675 \times 10^6 \times F_z^3 + 4.687 \times 10^7 \times F_z^2 + 7.229 \times 10^7 \times F_z) \delta_z'^3 \\ & + (1.403 \times 10^{10} \times F_z^3 - 9.844 \times 10^{10} \times F_z^2) \delta_z'^5 \\ & + 1.044 \times 10^4 \times F_z \cdot \varphi' - 3.682 \times 10^7 \times F_z \cdot \varphi_z'^3 + 2.466 \times 10^9 \times F_z^3 \cdot \varphi_z'^5 \\ & - 1043 \times F_z \cdot \gamma + 1.596 \times F_z^3 - 14.57 \times F_z^2 \end{aligned} \quad (3-79)$$

- Moment auto-alignement latéral du Dunlop R16 gonflé à 2bars :

$$\begin{aligned} \hat{Mz}_{pneu} = & (-96.85 \times F_z^3 + 1043 \times F_z^2) \delta' - 1995 \times F_z^2 \cdot \delta'^2 \\ & + (4.903 \times 10^5 \times F_z^3 - 3.924 \times 10^6 \times F_z^2) \delta_z'^3 \\ & + (-6.124 \times 10^8 \times F_z^3 + 4.632 \times 10^9 \times F_z^2) \delta_z'^5 \\ & + 283.2 \times F_z \cdot \varphi' + (16.81 \times F_z^2 - 132.6 \times F_z) \gamma + 3.788 \times F_z - 7.044 \end{aligned} \quad (3-80)$$

- Moment auto-alignement latéral du Dunlop R16 gonflé à 2.5 bars :

$$\begin{aligned} \hat{Mz}_{pneu} = & (-64.57 \times F_z^3 + 793.8 \times F_z^2) \delta' - 1366 \times F_z^2 \cdot \delta'^2 \\ & + (3.236 \times 10^5 \times F_z^3 - 2.874 \times 10^6 \times F_z^2) \delta_z'^3 \\ & + (-4.107 \times 10^8 \times F_z^3 + 3.453 \times 10^9 \times F_z^2) \delta_z'^5 \\ & + 640.8 \times F_z \cdot \varphi' + (-1.438 \times 10^5 \times F_z^3 - 1.813 \times 10^6 \times F_z) \varphi_z'^3 \\ & + 5.826 \times 10^8 \times F_z^3 \cdot \varphi_z'^5 \\ & + (13.51 \times F_z^2 - 140.9 \times F_z) \gamma + (-125.4 \times F_z^3 + 670.5 \times F_z^2) \gamma^2 \\ & + 7468 \times F_z \cdot \gamma^3 + (3.224 \times 10^4 \times F_z^3 - 1.809 \times 10^5 \times F_z^2) \gamma^4 \\ & + 3.286 \times F_z - 7.025 \end{aligned} \quad (3-81)$$

La plupart des identifications sont directement compatibles avec les concepts initiaux. Les identifications ayant nécessité une simplification pour pouvoir être en cohérence avec les comportements attendu sont :

- l'identification de l'effort latéral du Michelin R17 gonflé à 3bars,
- l'identification du moment auto-alignement du Michelin R16 gonflé à 3bars

La tableau 8 et la tableau 9 indiquent respectivement les coefficients du modèle d'effort latéral et du moment auto-alignement identifiables sur l'ensemble des pneumatiques et des pressions (la valeur 0 correspond aux coefficients jamais identifiables, la valeur 1 correspond aux coefficient identifiés sur au moins une des identifications). Il apparaît que les polynômes identifiés sont de degrés inférieurs à ceux prévu a priori, indiqués dans le tableau 5. Les degrés identifiés sont indiqués dans le tableau 10.

Para- mètre	$i \backslash j$	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	1	1	1	/
	2	1	1	0	/
	3	1	1	1	/
	4	0	0	0	/
	5	1	1	0	/
	6	0	0	0	/
	7	0	0	0	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0	0	1	/
	2	0	0	0	/
	3	0	1	1	/
	4	0	0	0	/
	5	1	0	0	/
	6	0	0	0	/
	7	0	0	0	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	1	1	1	1
	2	0	0	0	0
	3	0	1	0	0
	4	0	0	0	0
	5	0	1	0	0
$b_{Fy, 1, i, j}$	1	1	1	1	1
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	1	1	1	/
	1	0	0	0	/
	2	0	1	1	/
	3	0	0	0	/
	4	0	0	0	/
	5	0	0	0	/
	6	0	0	0	/

TABLEAU 8: PARAMETRES IDENTIFIABLES SUR L'ENSEMBLE DES MODELES D'EFFORT LATERAL

Para- mètre	$i \backslash j$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	1	1	1	/
	2	1	1	0	/
	3	1	1	0	/
	4	0	1	0	/
	5	1	1	0	/
	6	0	0	0	/
	7	0	0	0	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0	0	1	/
	2	0	0	1	/
	3	1	0	1	/
	4	0	0	0	/
	5	1	0	0	/
	6	0	0	0	/
	7	0	0	0	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	1	1	1	0
	2	1	1	1	1
	3	0	0	1	0
	4	1	1	0	1
	5	0	1	0	0
$b_{Mz, 1, i, j}$	1	1	1	1	1
$b_{Mz, p2, i, j}$	0	0	0	0	0
$b_{Mz, Lyi, j}$	0	1	1	1	/
	1	1	0	0	/
	2	1	0	0	/
	3	0	0	0	/
	4	0	1	0	/
	5	0	0	0	/
	6	0	1	0	/

TABLEAU 9: PARAMETRES IDENTIFIABLES SUR L'ENSEMBLE DES MODELES DE MOMENT D'AUTOALIGNELENT

On constate que la réponse de déformation en torsion sur l'effort latéral est toujours identifiée sur un polynôme dont les monômes sont de degré impair. Cela implique que le centre d'antisymétrie de la réponse est à une torsion nulle.

	κ'	δ'	φ'	γ	1
Fy_{pneu}	0	5	5	5	1
Mz_{pneu}	0	5	5	5	1

TABLEAU 10 : DEGRE JUSTE NECESSAIRES DES POLYNOMES DES MODELES D'EFFORT D'INTERACTION PNEUMATIQUE/SOL

3.5.2.2. Résultats d'identification du modèle de la raideur de ballant

Le tableau 11 indique les résultats d'identification des raideurs de ballant identifiées indépendamment sur l'effort latéral (3-76) et le moment d'auto-alignement (3-77). Il s'agit des valeurs correspondant aux compliances de ballant données dans l'annexe G.

Tous les résultats sont de l'ordre de grandeur attendu pour une raideur de ballant, entre 100kN.m^{-1} et 250kN.m^{-1} . Pour tous les pneumatiques, les raideurs augmentent avec la pression, ce qui est cohérent avec le sens physique.

Pneu	Pres. (bars)	K_y sur F_y (N.m^{-1})	K_y sur M_z (N.m^{-1})	Pneu	Pres. (bars)	K_y sur F_y (N.m^{-1})	K_y sur M_z (N.m^{-1})
Dunlop R16	2	157 375	171 510	Michelin R16	2	129 154	171 072
	2.5	183 822	174 808		2.5	149 214	173 386
	3	221 495	188 112		3	181 062	188 190
Michelin R15	2	146 167	174 175	Michelin R17 a	2	152 890	155 340
	2.5	169 578	188 278		2.5	179 716	168 818
	3	207 194	191 483		3	225 878	177 213

TABLEAU 11: RAIDEURS DE BALLANT IDENTIFIEES

Théoriquement, les raideurs de ballant identifiées sur les deux composantes : F_y et M_z devraient être identiques. Les moindres carrés pondérés (voir §1.4.2.3) peuvent être utilisés pour l'identifier simultanément sur les deux composantes.

En pratique, le moment d'auto-alignement M_z est beaucoup plus faible et plus bruité que l'effort latéral F_y . L'identification menée simultanément sur l'effort latéral et le moment

d'auto-alignement privilégié donc l'effort latéral. La réponse dynamique du moment d'auto-alignement s'en trouve altérée.

Pour avoir une bonne qualité de résultats sur le moment d'auto alignement, il est donc recommandé d'utiliser une valeur de raideur de ballant différente de celle de l'effort latéral en considérant que ce sont deux paramètres indépendants.

3.5.3. Modèle direct de simulation

A partir des composantes reconstruites du torseur d'effort d'interaction pneumatique/sol $\hat{F}x_{pneu}$, $\hat{F}y_{pneu}$, $\hat{M}z_{pneu}$, on calcule les composantes du torseur appliqué au repère pneumatique Fy_p et Fz_p .

En substituant (3-49) dans (3-51), on obtient une simplification du système d'état (2-53) retournant l'effort latéral et le moment auto-alignement appliqué au porte fusée en fonction l'effort latéral et du moment auto-alignement de l'interaction pneumatique chaussée :

$$\begin{cases} \dot{F}y_p = A.Fy_p + B.u \\ \dot{M}z_p = C.Fy_p + D.u \end{cases} \quad (3-82)$$

avec u vecteur d'entrée (effort vertical et moment auto-alignement de l'interaction pneumatique/sol), A matrice d'état, B matrice de commande, C matrice d'observation, D matrice de transmission directe

$$u = \begin{bmatrix} Fy_{pneu}(\delta', \phi', \gamma, F_z) \\ Mz_{pneu}(\delta', \phi', \gamma, F_z) \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

$$A = \omega.K_{Fy,y} \cdot \left(\frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} \right)^{-1} \quad (3-84)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\omega.K_{Fy,y} \cdot \left(\frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} \right)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

$$C = \frac{K_{Fy,y}}{K_{Mz,y}} \left(\frac{\partial \hat{F}y_{pneu}}{\partial \delta'} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{M}z_{pneu}}{\partial \delta'} \right) - K_{Mz,y}^{-1} \cdot \hat{F}x_{pneu} \quad (3-86)$$

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{K_{F_y,y}}{K_{M_z,y}} \left(\frac{\partial \hat{F}_{y_{pneu}}}{\partial \delta'} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{M}_{z_{pneu}}}{\partial \delta'} \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (3-87)$$

où $K_{F_y,y}$ et $K_{M_z,y}$ sont respectivement les valeurs de raideur de ballant identifiées sur l'effort latéral et le moment auto-alignement

3.5.4. Validation des résultats

3.5.4.1. Validation directe et validation croisée

Le même pneumatique Michelin Exalto a passé deux fois la procédure d'agrément de direction à 3 bars. Les figures 61 à 68 indiquent sur l'ensemble de la procédure les résidus (différence entre mesure et modèle identifié simulé) obtenus en validation directe (trajectoire de simulation identique à celle servant à l'identification) et en validation croisée (trajectoire de simulation différente de celle servant à l'identification) sur l'effort latéral F_y et le moment d'auto-alignement M_z . Les tables 12 et 13 donnent les valeurs identifiées de raideur de ballant.

On constate que le résidu n'évolue pas significativement entre les validations directes et croisées. Le résultat d'identification est donc robuste et caractérise un comportement reproductible.

Sur ces figures, l'ordre de grandeur du résidu peut paraître important (particulièrement sur le moment d'auto-alignement), mais c'est en grande partie dû à des bruits de mesure significatifs dans la dynamique de commande (§3.2.2.1.3.2). Les échelles de temps utilisées sur les figures allant de la figure 57 à la figure 64 permettent de se faire une meilleure idée du caractère aléatoire du résidu.

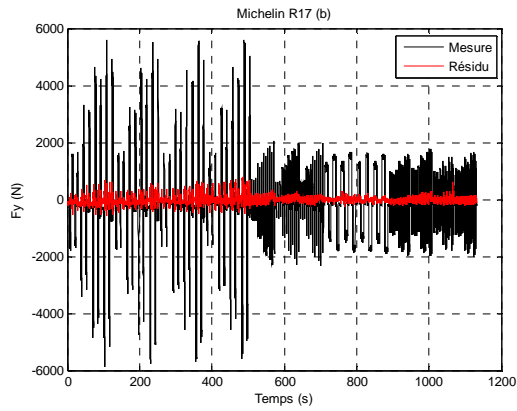


figure 49: Validation directe sur F_y ,
identification pneu b sur trajectoire 2

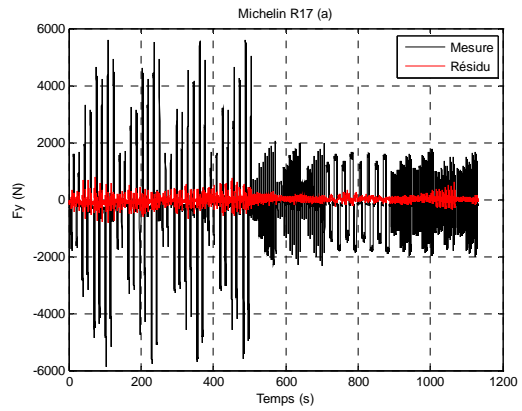


figure 50: validation croisée sur F_y ,
identification pneu a sur trajectoire 2

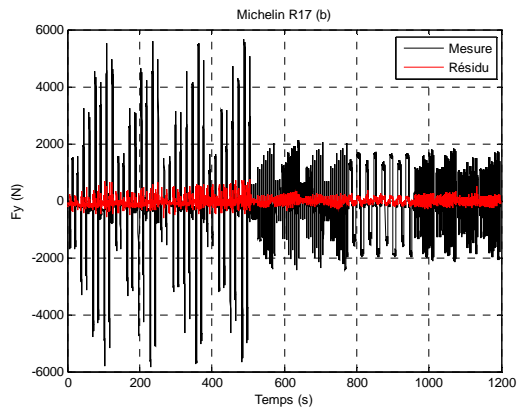


figure 51: Validation croisée sur F_y ,
identification pneu b sur trajectoire 1

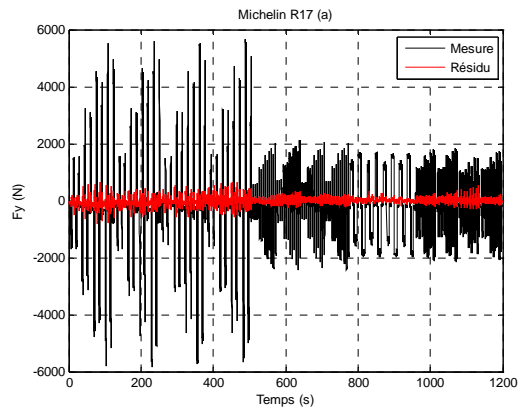


figure 52: Validation directe sur F_y ,
identification pneu a sur trajectoire 1

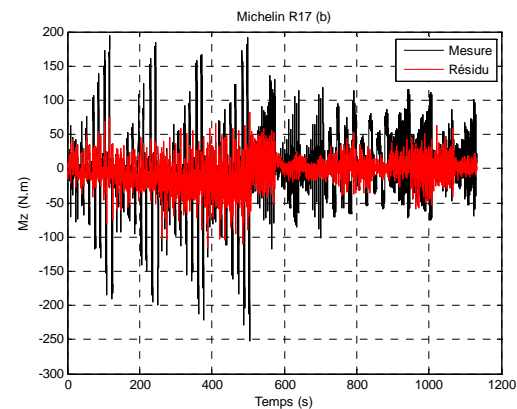


figure 53: Validation directe sur M_z ,
identification pneu b sur trajectoire 2

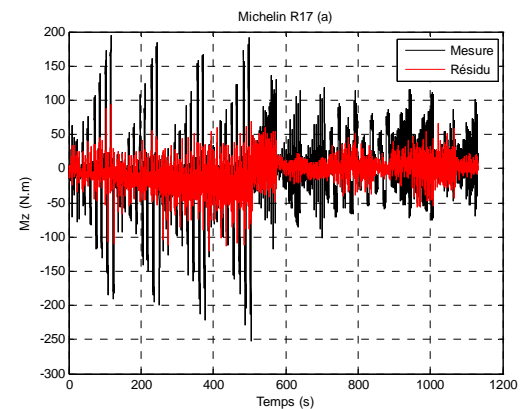


figure 54: Validation croisée sur M_z ,
identification pneu a sur trajectoire 2

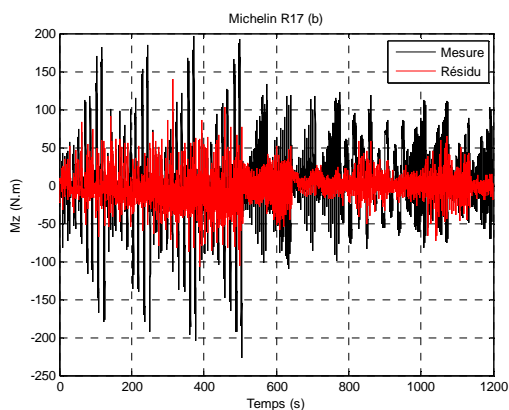


figure 55: Validation croisée sur M_z , identification pneu b sur trajectoire 1

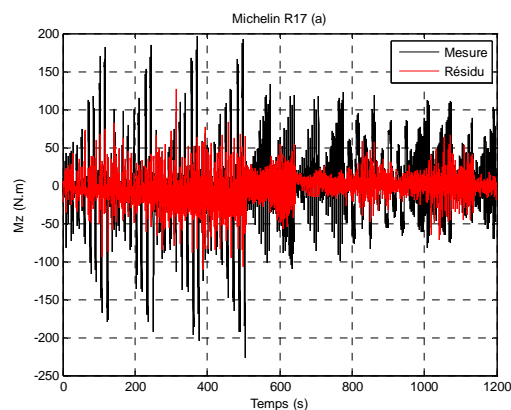


figure 56 : Validation directe sur M_z , identification pneu a sur trajectoire 1

Pneu	Pres. (bars)	K_y sur F_y ($N.m^{-1}$)	K_y sur M_z ($N.m^{-1}$)
Michelin R17 a	3	210 559	199 049
Michelin R17 b	3	206 079	191 340

TABLEAU 12: IDENTIFICATION DE LA RAIDEUR DE BALLANT SUR TRAJECTOIRE 1

Pneu	Pres. (bars)	K_y sur F_y ($N.m^{-1}$)	K_y sur M_z ($N.m^{-1}$)
Michelin R17 a	3	225 878	177 213
Michelin R17 b	3	205 980	171 330

TABLEAU 13: IDENTIFICATION DE LA RAIDEUR DE BALLANT SUR TRAJECTOIRE 2

3.5.4.2. Exemples de validation directe

Les résidus d'identification obtenus pour le Michelin R16 à 3 bars sont indiqués sur toutes les séquences de l'agrément de direction aux vitesses de 40km/h et 80km/h. L'utilisation des deux vitesses permet de voir la qualité de la prise en compte de la longueur de relaxation.

Les courbes allant de la figure 57 à la figure 64 représentent en rouge le résidu d'identification qui correspond à la différence entre la mesure, en noir, et la simulation du modèle, en bleu.

On constate que le résidu sur l'effort latéral est faible par rapport à la mesure. L'essai sur lequel il est le plus important est l'essai de sinus sur la dérive à 40km/h. Cet essai sollicite particulièrement les flexibilités articulaires du contact pneumatique/sol et il se peut que le

déphasage observé soit dû à l'hypothèse de blocage des articulations d'avance et de torsion pneu.

On retrouve le même problème sur le même essai avec le moment auto-alignement Le ratio signal/bruit est beaucoup plus faible sur le moment d'autoalignement que sur l'effort latéral.

3.5.4.2.1. Validation directe sur l'effort latéral

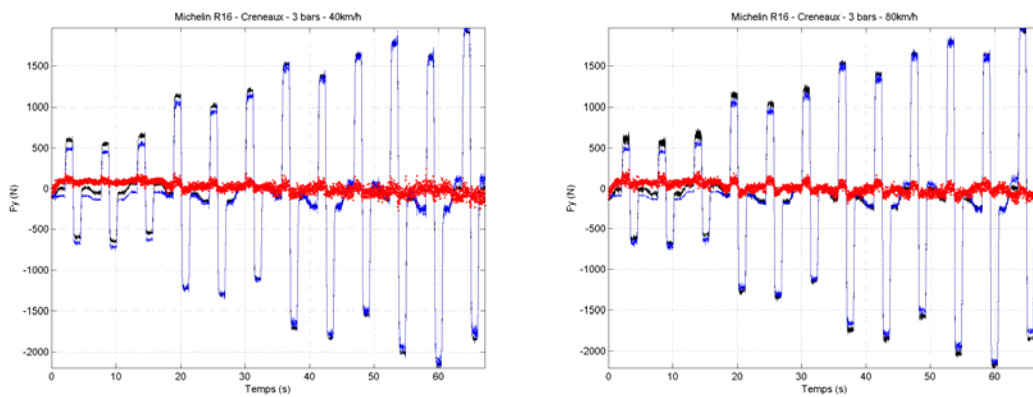


figure 57 : Résidu d'identification sur une séquence d'échelons à petite dérive

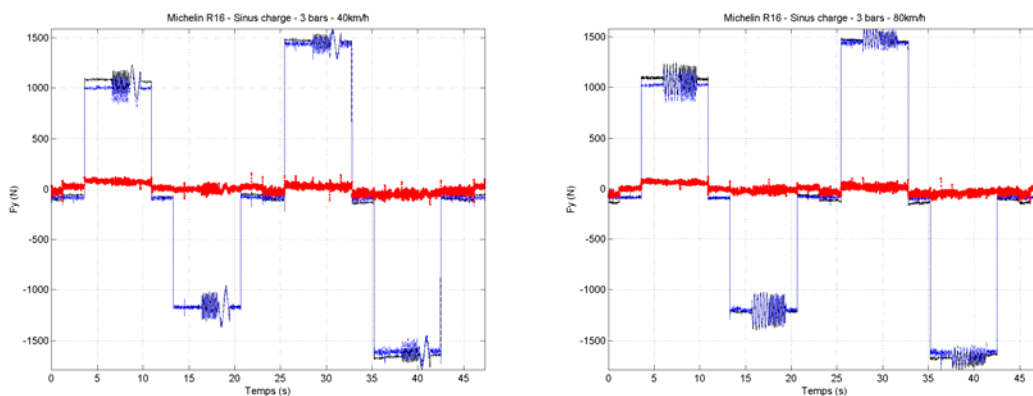


figure 58 : Résidu d'identification sur une séquence de charge en sinus

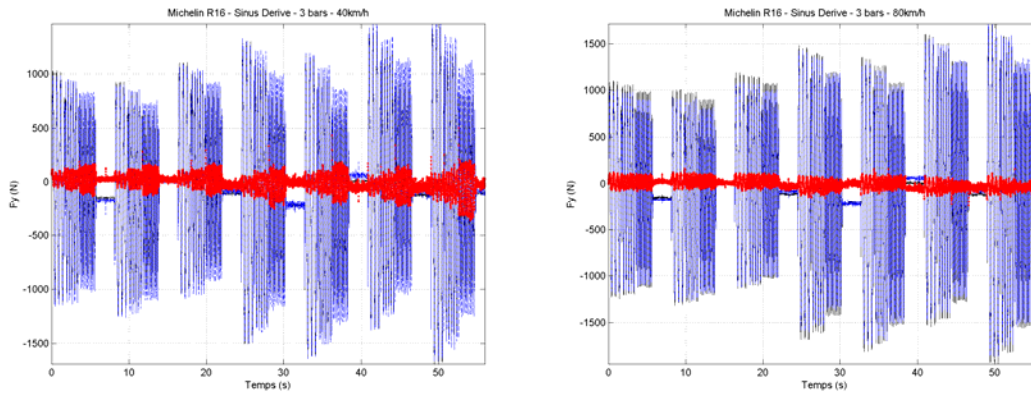


figure 59 : Résidu d'identification sur une séquence de dérive en sinus

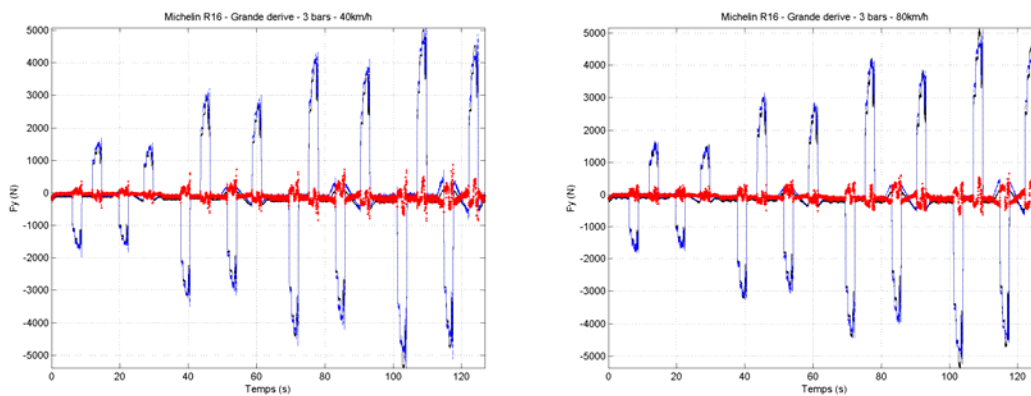


figure 60 : Résidu d'identification sur une séquence de profils de moyenne dérive

3.5.4.2.2. Validation directe sur le moment d'auto-alignement

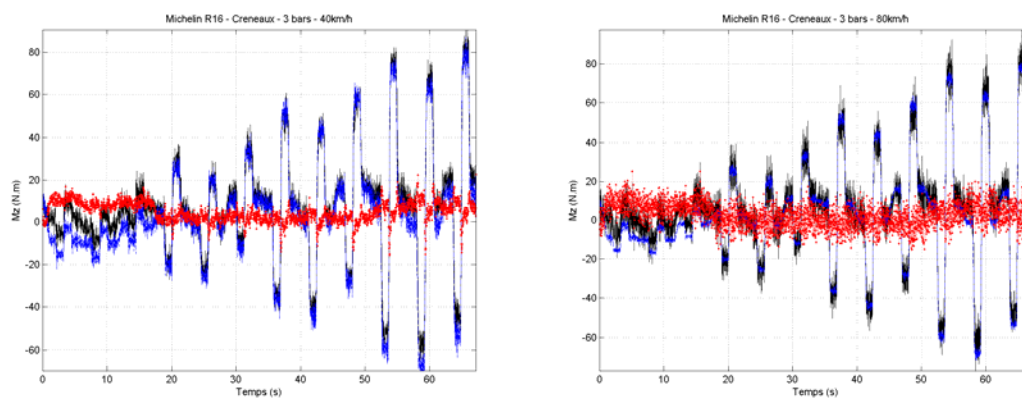


figure 61 : Résidu d'identification sur une séquence d'échelons de petite dérive

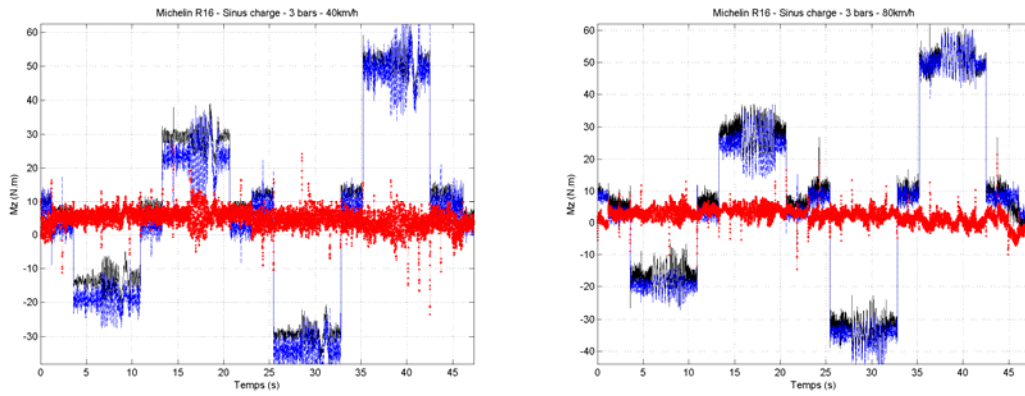


figure 62 : Résidu d'identification sur une séquence de charge en sinus

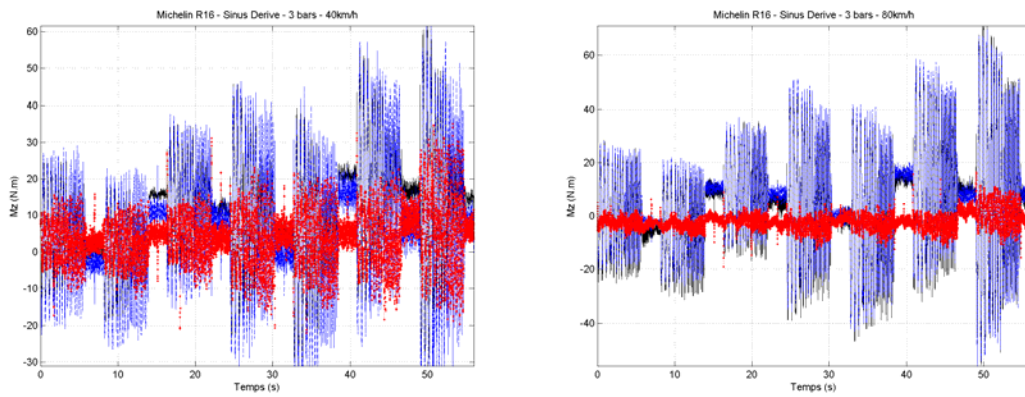


figure 63 : Résidu d'identification sur une séquence de dérive en sinus

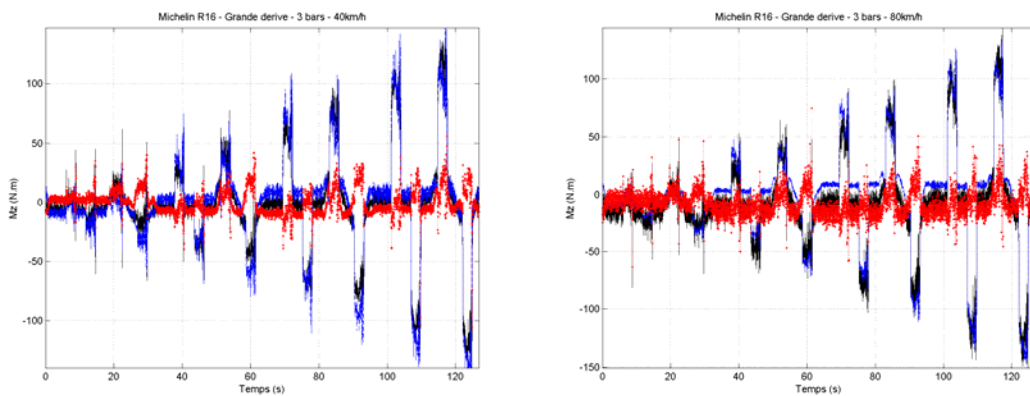


figure 64 : Résidu d'identification sur une séquence de profils de moyenne dérive

3.5.5. Analyse des modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol identifiés

3.5.5.1. Reconstruction des rigidités de dérive de l'effort latéral

La rigidité de dérive de l'effort latéral est défini de la manière suivante :

$$K = \frac{\partial F_{y \text{ pneu}}}{\partial \delta}(0) \quad (3-88)$$

Sur le modèle polynomial, elle se déduit directement du coefficient $c_{F_y, \delta, 1}$:

$$K(F_z) = c_{F_y, \delta, 1} = b_{F_y, \delta, 1, 3} \cdot F_z^3 + b_{F_y, \delta, 1, 2} \cdot F_z^2 + b_{F_y, \delta, 1, 1} \cdot F_z \quad (3-89)$$

Pour chaque pneumatique et chaque pression, une identification est réalisée sur l'ensemble des essais et une autre uniquement sur les essais à petite dérive. La rigidité de dérive doit être parfaitement identifiable sur les séquences à petite dérive. On doit donc obtenir les mêmes résultats sur les deux identifications. Afin de le vérifier, les rigidités de dérive identifiées sont reconstruites en fonction de la charge et présentées figure 65.

Le maximum en la charge des rigidités identifiées est toujours croissant avec la pression, ce qui est cohérent avec le sens physique (à part le cas du pneu Michelin R17 gonflé à 3bars et identifié sur toutes les séquences car il a du être simplifié pour pouvoir être mis en cohérence avec les hypothèses de modèle, voir annexe G).

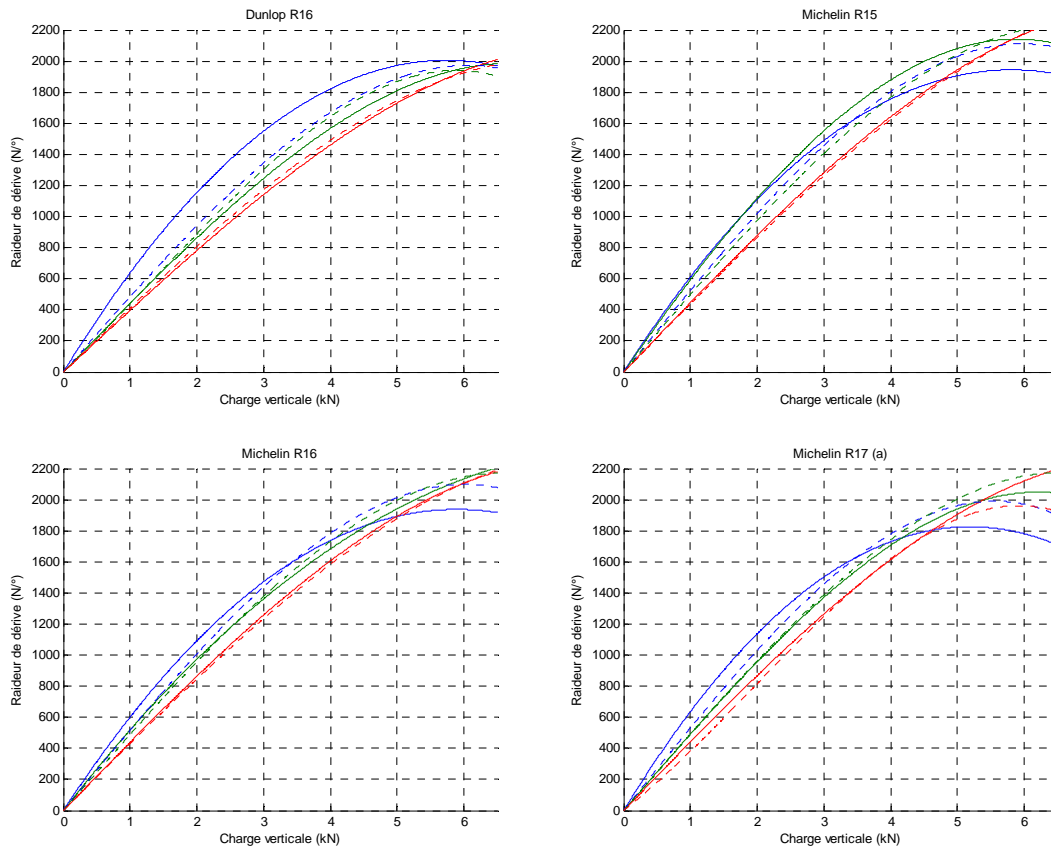
Pour certains pneumatiques et cas de pression, les rigidités identifiées sur toute trajectoire ou sur les essais à petite dérive sont différentes. Ce phénomène peut avoir différentes explications :

- Influence thermique

Les essais à moyenne dérive sollicitent d'avantage le pneumatique que les petites, ce qui peut échauffer la bande de roulement malgré l'ajout de séquence de roulage destinée à la refroidir. Les essais à grandes dérives sont réalisés successivement aux trois pressions (3bars, 2.5bars puis 2bars). Ce phénomène devrait donc être particulièrement visible sur le dernier essai à 2bars.

- Influence de l'effet Mullins

Avant les séquences à grande dérive, le pneumatique n'a jamais été soumis à un angle de dérive supérieur à 1°. Il se peut donc qu'il soit soumis à l'effet Mullins qui modifie le comportement au cours de l'essai.



_____ : identification sur séquences à petite dérive

..... : identification sur toutes les séquences

2 bars

2.5 bars

3 bars

figure 65 : Rigidités de dérive identifiées sur l'effort latéral

3.5.5.2. Reconstruction des réponses à une dérive

Ces résultats sont obtenus par simulation des équations linéaires par rapport aux paramètres (3-57) et (3-65) correspondant respectivement aux contributions de la déformation latérale sur l'effort latéral et le moment auto-alignement. La simulation est réalisée sur les cas de charge 3kN, 4.5kN et 6kN et la déformation latérale est une rampe allant de -18mm à 18mm (ce qui correspond à une rampe en dérive allant de -3.5° à 3.5°).

On constate que sur le domaine d'identification, les réponses en effort latéral et en couple d'auto-alignement ont bien l'allure antisymétrique attendue.

----- : charge à 3kN ____ : charge à 4.5kN -.-. : charge à 6kN
 2bars 2.5 bars 3 bars

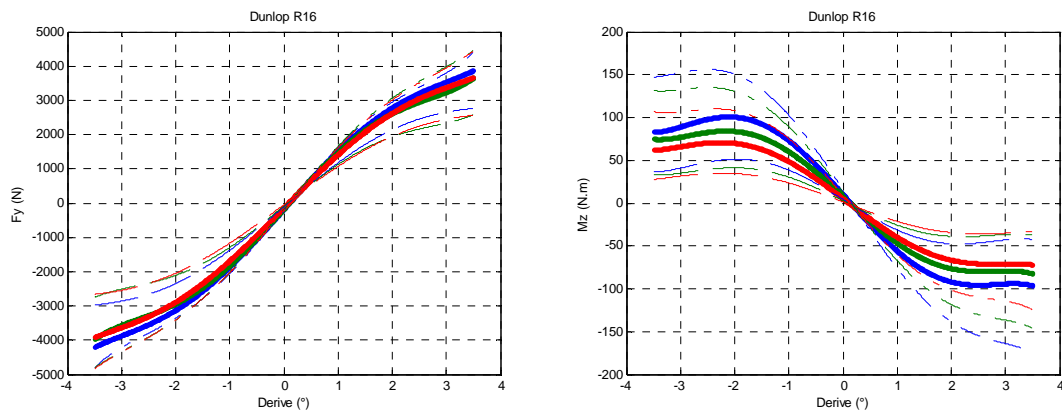


figure 66 : Dunlop R16 : Réponse à une dérive pure

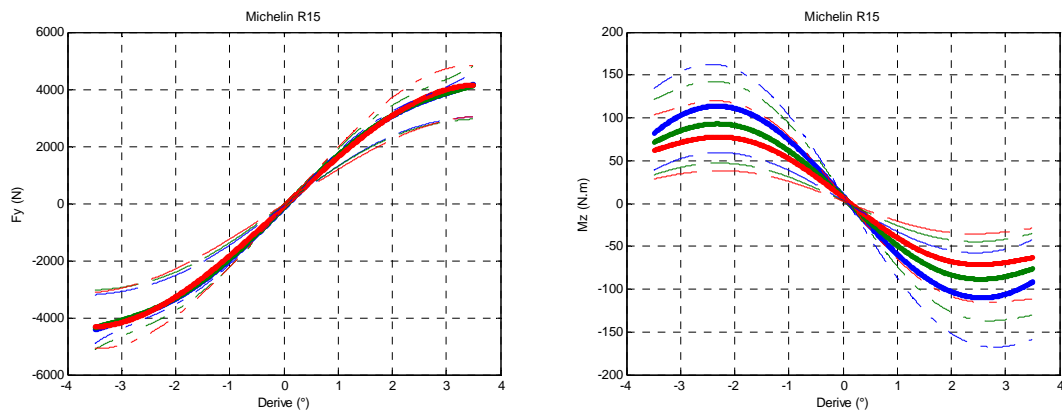


figure 67 : Michelin R15 : Réponse à une dérive pure

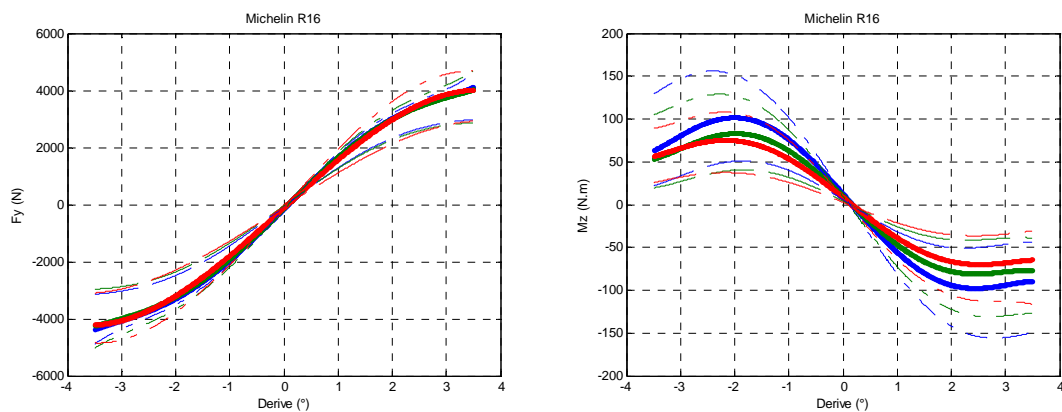


figure 68 : Michelin R16 : Réponse à une dérive pure

----- : charge à 3kN ____ : charge à 4.5kN -.-. : charge à 6kN
 2bars 2.5 bars 3 bars

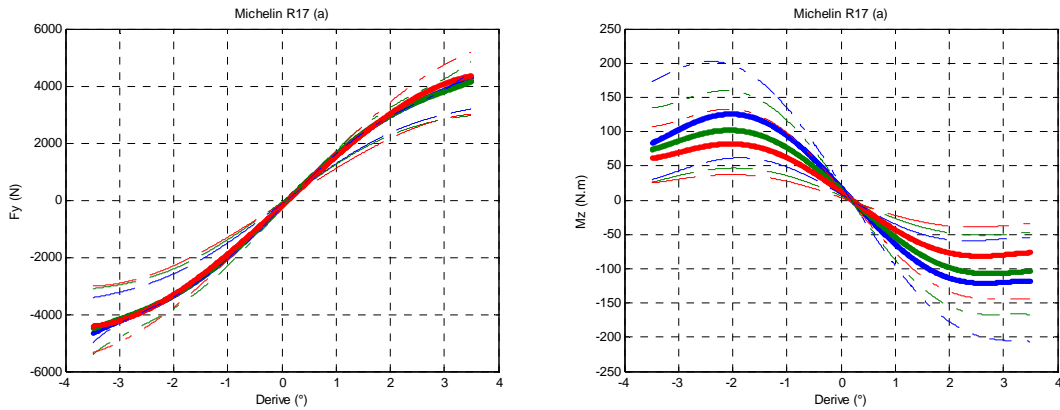


figure 69 : Michelin R17 : Réponse à une dérive pure

3.5.5.3. Reconstruction des réponses à une déformation en torsion

Ces résultats sont obtenus par simulation des équations linéaires par rapport aux paramètres (3-58) et (3-66) correspondant respectivement aux contributions de la déformation en torsion sur l'effort latéral et le moment auto-alignement. La simulation est réalisée sur les cas de charge 3kN, 4.5kN et 6kN et la déformation en torsion est une rampe allant de -0.85 à 0.85° .

Les réponses obtenues en torsion pure ont des profils et des comportements par rapport à la pression identiques sur tous les pneumatiques. Le résultat semble donc bien robuste et physique. Sur l'effort latéral, la réponse de torsion est globalement linéaire et se rigidifie avec la baisse de la pression. Sur le moment d'auto-alignement, elle a une allure antisymétrique et la valeur des extrema et de la rigidité à l'origine tend à augmenter avec la pression.

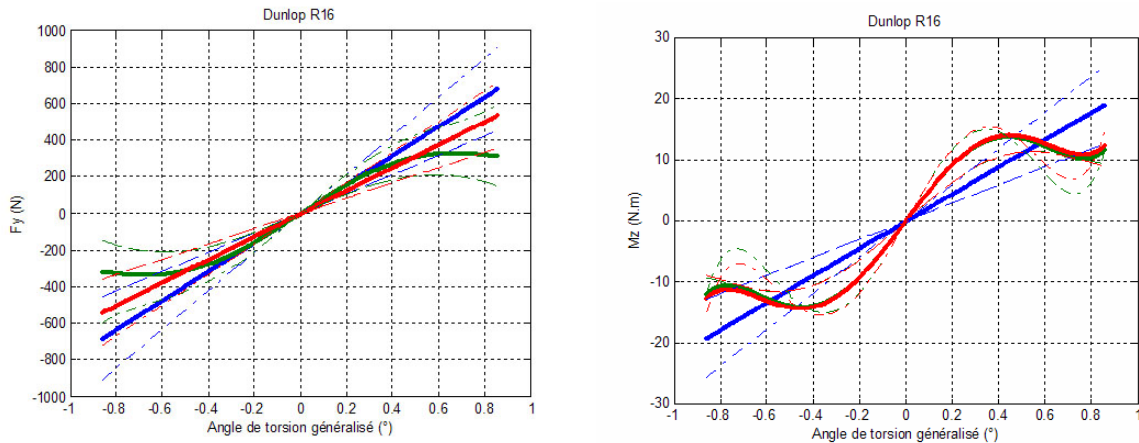


figure 70 : Dunlop R16 : Réponse à une torsion pure

----- : charge à 3kN ____ : charge à 4.5kN -.-. : charge à 6kN
 2bars 2.5 bars 3 bars

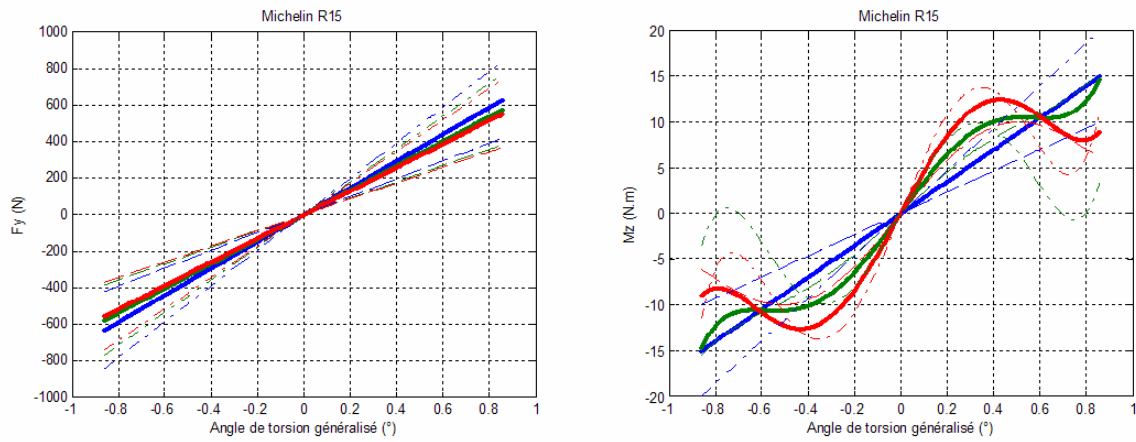


figure 71 : Michelin R15 : Réponse à une torsion pure

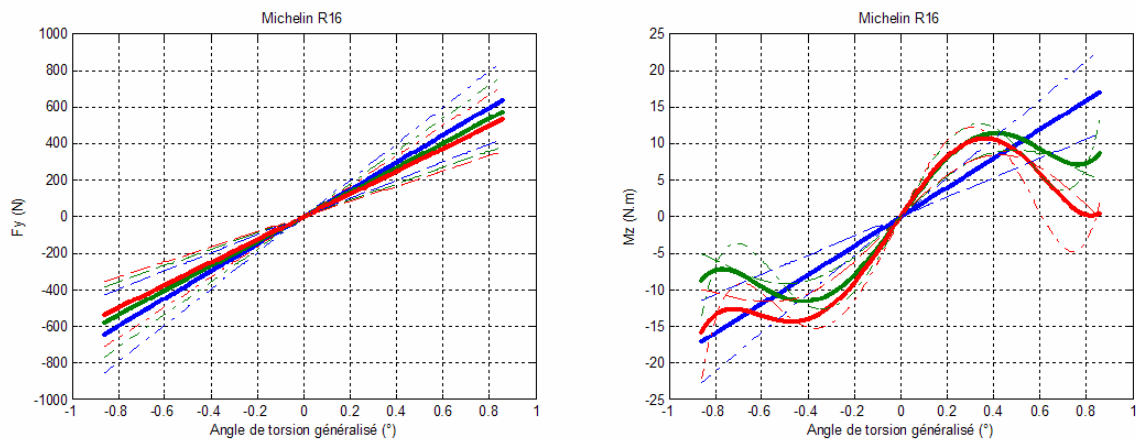


figure 72 : Michelin R16 : Réponse à une torsion pure

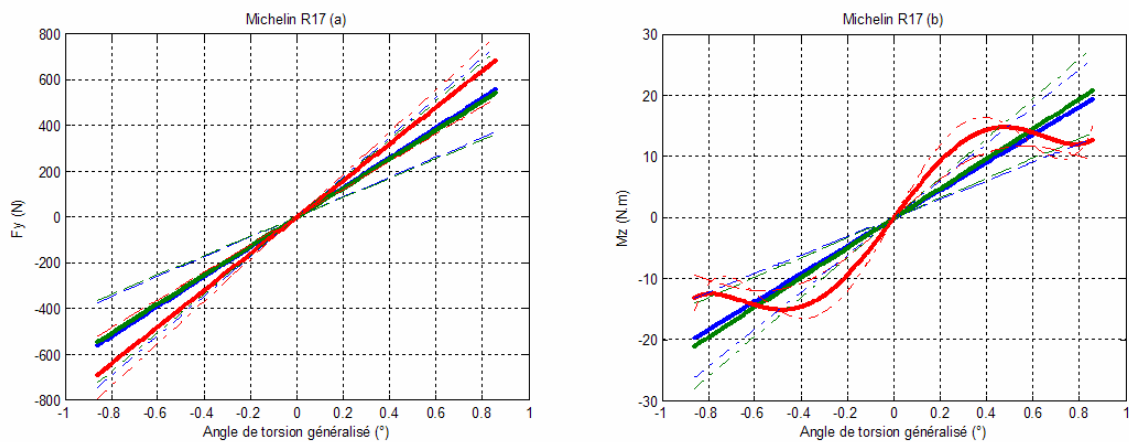


figure 73 : Michelin R17 : Réponse à une torsion pure

3.5.5.4. Reconstruction des réponses à un carrossage

Ces résultats sont obtenus par simulation des équations linéaires par rapport aux paramètres (3-59) et (3-67) correspondant respectivement aux contributions du carrossage sur l'effort latéral et le moment auto-alignement. La simulation est réalisée sur les cas de charge 3kN, 4.5kN et 6kN et le carrossage est une rampe allant de -3.5 à 3.5°.

Les réponses en carrossage pur ont des profils et des comportements par rapport à la pression identiques sur tous les pneumatiques. Le résultat semble donc bien robuste et physique. Sur l'effort latéral, la réponse est linéaire et généralement peu sensible à la pression. Sur le moment d'auto-alignement, la réponse comporte un maximum, mais pas de minimum dans la majorité des cas. Cette absence est sans doute due à un manque d'excitation en amplitude de dérive. On s'attend en effet à une réponse anti-symétrique comme dans la majorité des cas de réponses du pneumatique.

----- : charge à 3kN ____ : charge à 4.5kN -.-. : charge à 6kN
2bars 2.5 bars 3 bars

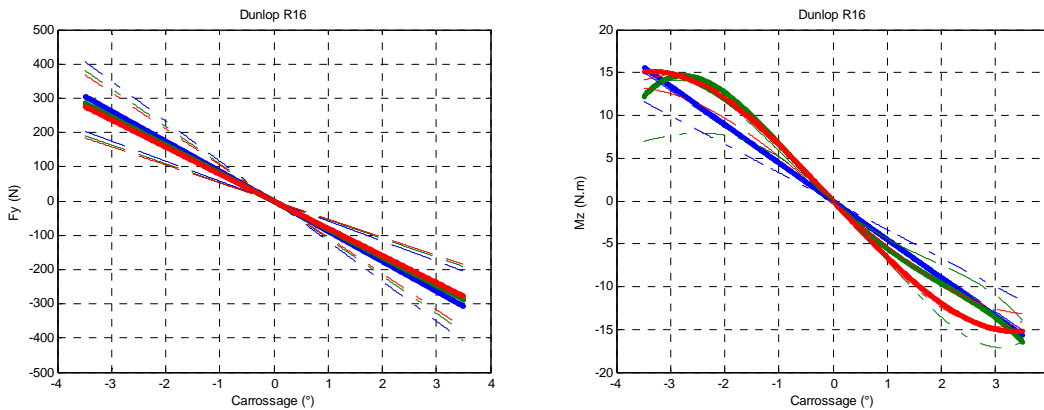


figure 74 : Dunlop R16 : Réponse au carrossage

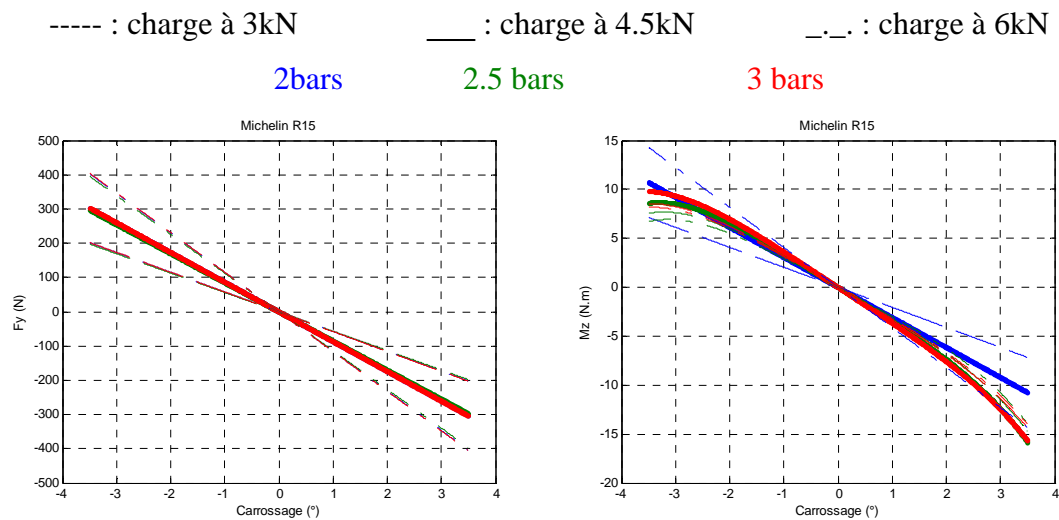


figure 75 : Michelin R15 : Réponse au carrossage

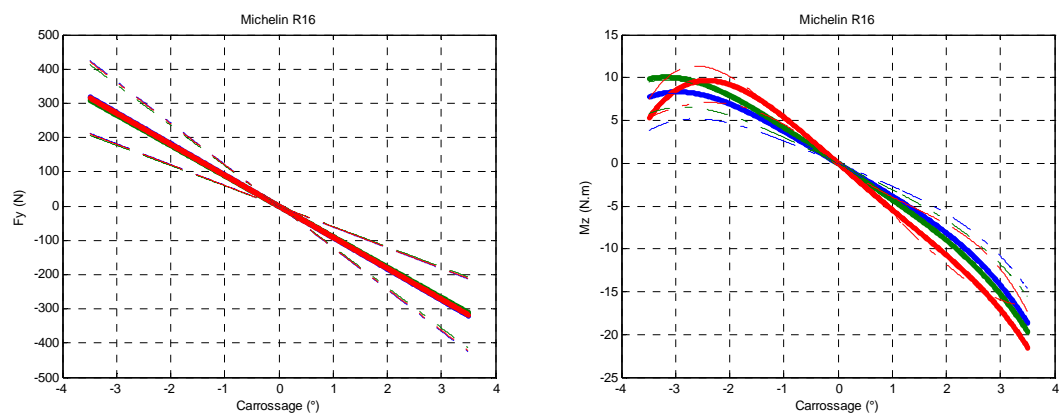


figure 76 : Michelin R16 : Réponse au carrossage

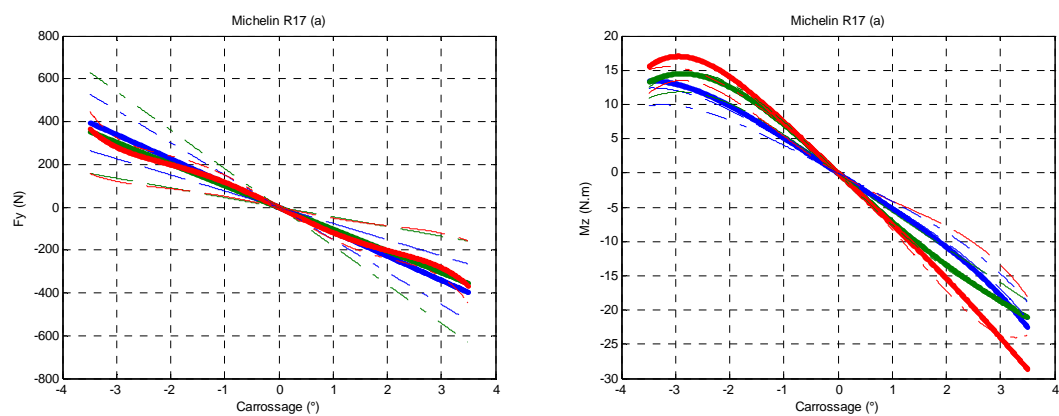


figure 77 : Michelin R17 : Réponse au carrossage

3.5.6. Identification de la rigidité de dérive de l'effort latéral sur les essais de caractérisation en sécurité active

L'algorithme d'identification est appliqué à la séquence à petite dérive de la procédure de sécurité active §3.2.3.2.1. PSA Peugeot Citroën dispose d'un outil d'identification spécifique pour cette séquence qui permet de renseigner les coefficients de la formule magique. Les résultats obtenus avec les deux méthodologies d'identification sont comparés à partir du calcul de la rigidité de dérive K de l'effort latéral identifiée. :

$$K = \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta}(0) \quad (3-90)$$

La rigidité de dérive dépend de la charge. La formule magique exprime cette dépendance par la relation :

$$K(F_z) = a_3 \cdot \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right) \quad (3-91)$$

Le modèle polynomial par la relation

$$K(F_z) = c_{Fy,\delta,1} = b_{Fy,\delta,1,3} \cdot F_z^3 + b_{Fy,\delta,1,2} \cdot F_z^2 + b_{Fy,\delta,1,1} \cdot F_z \quad (3-92)$$

Les rigidités de dérive obtenues par les deux algorithmes sont indiquées figure 78 : traits pleins pour l'algorithme proposé et traits pointillés pour l'algorithme de référence de PSA Peugeot Citroën.

On observe un écart relatif maximum de 5% entre les deux méthodes. L'algorithme d'identification proposé donne donc des résultats vraisemblables par rapport à ceux déjà existants.

On pourra noter que les rigidités sont inférieures à celles identifiées sur la procédure d'agrément de direction indiquées figure 65. La diminution est de l'ordre de 20% et est due au changement de l'état du pneumatique entre les deux procédures d'essais (voir §3.2.2.2).

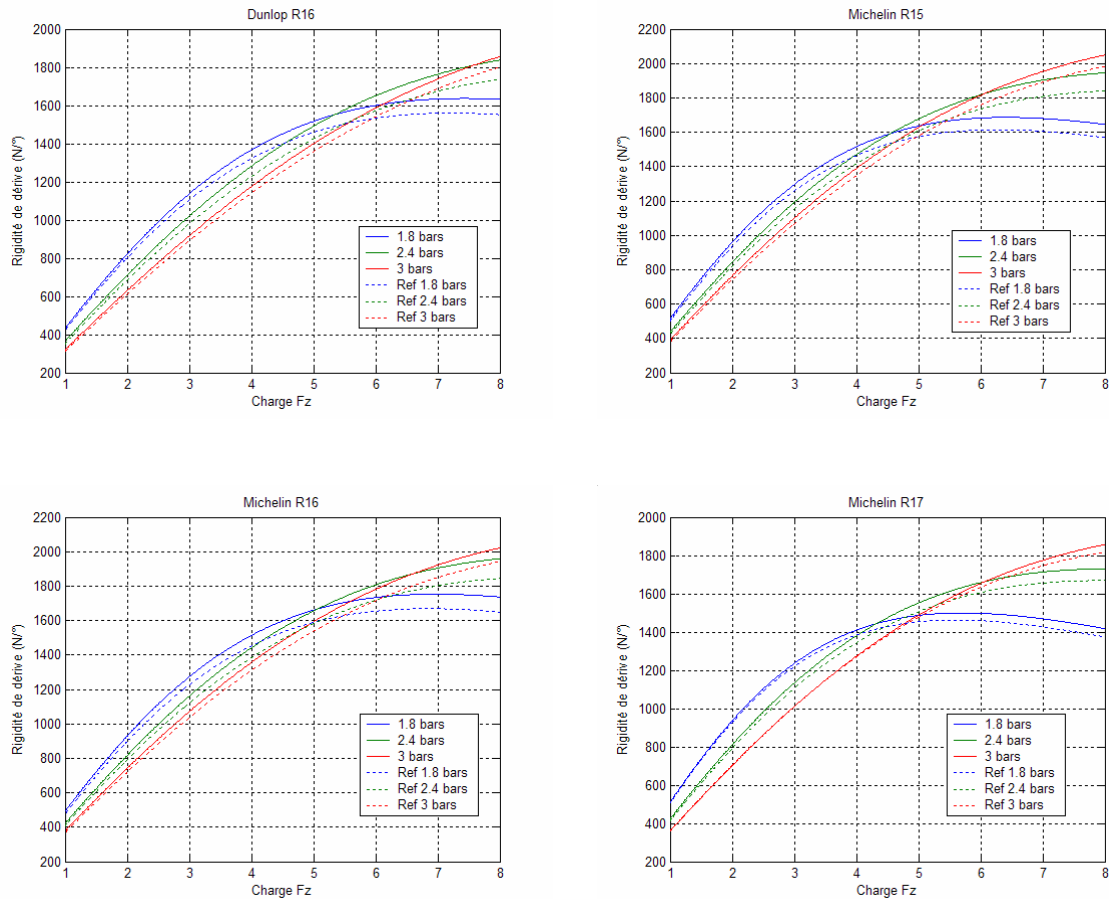


figure 78 : Comparatif des résultats d'identification des rigidités de dérive d'effort latéral

3.6. Passage à la représentation de la Formule Magique

Dans cette partie, les coefficients de la formule magique sont calculés à partir des coefficients polynomiaux identifiés. Seule les dépendances par rapport à la dérive et à la torsion de l'effort latéral et du moment d'auto-alignement sont traités. Les modèles non linéaires utilisés sont présentés en annexe :

- comportement en dérive de l'effort latéral : §B.4
- comportement en dérive du moment d'auto-alignement : §B.5
- comportement en torsion de l'effort latéral : §B.5
- comportement en torsion du moment d'auto-alignement : §B.5

Ces formulations sont simplifiées dans la partie suivante. Les dépendances par rapport aux grandeurs de carrossage et de charge pure sont décrites par une structure polynomiale dans le

macro-coefficient S_y . La méthode d'identification retournant déjà un modèle polynomial juste nécessaire adapté à cette description (pouvant être de degré incompatible avec celui prévu dans la formule magique), la recherche des paramètres de S_y n'est pas abordée.

3.6.1. Algorithme de passage des paramètres polynomiaux aux paramètres de la formule magique

Les modèles d'effort pneumatique (3-55) et (3-63) sont mis sous la forme suivante :

$$Y = [W_{NL}(x) \mid W_L(x)] \begin{bmatrix} X_{NL} \\ X_L \end{bmatrix} \quad (3-93)$$

avec Y effort latéral de contact Fy_p ou moment auto-alignement de contact Mz_p
 x vecteur des grandeurs du modèle d'effort de contact $F_z, \gamma, \delta', \varphi', \dot{F}y_p, Fx_p$

Le terme linéaire par rapport aux paramètres $W_{NL}(x).X_{NL}$ peut s'écrire sous forme d'une fonction non linéaire équivalente $f(x, X_f)$ qui correspond ici à la formule magique détaillée ci-après §3.6.1.1.

Etape 1

L'identification de (3-55) et (3-63) permet de déterminer les valeurs de X_{NL} et X_L au sens des moindres carrés. Soient \hat{X}_{NL} et \hat{X}_L ces valeurs. La première étape de passage consiste à déterminer le vecteur des paramètres \hat{X}_{f1} tel que :

$$f(x, \hat{X}_f) = W_{NL}(x). \hat{X}_{NL} \quad (3-94)$$

Les paragraphes ci-après §3.6.1.2, §3.6.1.3 et §3.6.1.4 présentent des algorithmes permettant de réaliser cette étape pour la formule magique.

Etape 2

Une fois que le vecteur \hat{X}_{f1} est déterminé, on peut l'utiliser avec \hat{X}_L comme condition initiale d'un algorithme d'optimisation non linéaire permettant de déterminer la solution paramétrique de la formule magique au sens des moindres carrés :

$$\left[\hat{X}_{f2} \quad \hat{X}_{L2} \right] = \arg \min_{X_f, X_L} \left(\| Y - f(x, X_f) - W_L(x).X_L \|_2 \right) \quad (3-95)$$

avec \hat{X}_{f2} paramètres de la formule magique identifiés au sens des moindres carrés.

3.6.1.1. Modèle non linéaire utilisé

Le modèle utilisé est le modèle de la formule magique indiqué en annexe B. Ce modèle est simplifié afin de respecter le principe de similitude sur toutes les composantes de l'effort, de séparer les contributions de la dérive et du carrossage et d'enlever les non linéarités inutiles dans les cas généraux :

- macro-coefficient E constant (afin de respecter le principe de similitude, §2.4.3.2) :
 - sur l'effort longitudinal : $b_7 = 0, b_6 = 0,$
 - sur l'effort latéral : $a_6 = 0,$
 - sur le moment d'auto-alignement $c_7 = 0, c_8 = 0, c_{10} = 0$
- contribution du carrossage indépendante de celle de la dérive (voir §0) :
 - sur l'effort latéral : $a_5 = 0, a_8 = 0,$
 - sur le moment d'auto-alignement $c_6 = 0, c_{11} = 0$
- rigidité de glissement polynomiale par rapport à la charge :
 - sur l'effort longitudinal : $b_5 = 0,$
 - sur le moment d'auto-alignement $c_5 = 0$
- macro-coefficient C fixé a priori (non identifiable car domaine asymptotique non atteint):
 - sur l'effort longitudinal : b_0 entre 1 et 2,
 - sur l'effort latéral : a_0 entre 1 et 2,
 - sur le moment d'auto-alignement : c_0 entre 2 et 3,
- facteurs d'échelle unitaires : $\forall x, \lambda_x = 1$

On passe ainsi de l'identification de 46 à 31 paramètres de pneumatiques. La qualité des résultats obtenus montre que ces hypothèses ne sont pas restrictives sur la trajectoire utilisée.

3.6.1.2. Identification des paramètres de la rigidité de dérive

Si le polynôme P_δ de l'effort latéral est connu, la rigidité de dérive à l'origine K peut directement être déduite de son monôme de degré 1 :

$$c_{\delta 1}(F_z) = \frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta}(0) = \frac{\partial P_\delta}{\partial \delta}(0) = K \quad (3-96)$$

Dans le cas de l'effort longitudinal et du moment d'auto-alignement, la rigidité de dérive est polynomiale en la charge (annexe B). On peut identifier son modèle en trouvant la solution au sens des moindres carrés de l'équation :

$$c_{\delta 1} = F_z^2 \cdot X_1 + F_z \cdot X_2 \quad (3-97)$$

Où le couple (X_1, X_2) correspond respectivement à (b_3, b_4) , et (c_3, c_4) .

Dans le cas de l'effort latéral, la rigidité de dérive K est non linéaire :

$$K = a_3 \sin\left(2 \cdot \arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right) \quad (3-98)$$

En appliquant les règles de transformations des compositions de fonctions trigonométriques, il vient :

$$K = 2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \frac{F_z}{F_z^2 + a_4^2} \quad (3-99)$$

En substituant (3-99) dans (3-96), on obtient un système linéaire permettant d'accéder aux valeurs des produits de a_3 et a_4 :

$$\begin{cases} c_{\delta 1} \cdot F_z^2 = [2 \cdot F_z & -c_{\delta 1}] \begin{bmatrix} a_3 \cdot a_4 \\ a_4^2 \end{bmatrix} \\ X_1 = a_3 \cdot a_4 \\ X_2 = a_4^2 \end{cases} \quad (3-100)$$

Comme le régresseur n'est pas indépendant du vecteur de sortie, ce système peut être résolu par les moindres carrés totaux (§1.4.4.2).

La solution des moindres carrés doit vérifier $X_2 > 0$. La positivité de X_2 implique en effet une allure de la rigidité de dérive concave par rapport à la charge. X_2 négatif implique une allure convexe et non physique.

Si X_2 est identifié négatif, c'est que l'extremum en charge n'a pas été atteint lors de l'identification et que seul le domaine linéaire par rapport par rapport à la charge est accessible. L'équation de la rigidité de dérive (3-98) devient alors :

$$BCD = 2 \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot F_z \quad (3-101)$$

Il s'agit de résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} c_{\delta 1} = F_z \cdot X_3 \\ X_3 = 2 \cdot \frac{a_3}{a_4} \end{cases} \quad (3-102)$$

La valeur de a_3 ne peut être obtenue qu'en fixant une valeur a priori sur a_4 et réciproquement.

3.6.1.3. Identification des paramètre de l'offset horizontal

Les valeurs de dérivées pour lesquelles les minima et les maxima de P_δ sont atteints sont désignée par $A_{\delta \max}$ et $A_{\delta \min}$ respectivement. Elles sont déduites des racines de la dérivée de P_δ en δ (voir annexe C). Pour chaque vecteur, seul l'élément réel de plus petit module et appartenant au domaine utile est conservé : X_{\min} et X_{\max} .

Dans le cas où il n'existe pas d'élément réel appartenant au domaine utile, il n'y a pas d'extremum identifié. La dérive est excitée dans un domaine linéaire et l'offset horizontal n'est pas identifiable.

L'offset horizontal est défini comme la moyenne arithmétique de X_{\min} et X_{\max} :

$$S_h = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2} \quad (3-103)$$

Pour l'effort longitudinal, l'effort latéral et le moment d'auto-alignement, S_h suit une loi affine en la charge :

$$S_h = X_1 \cdot F_z + X_2 \quad (3-104)$$

Où le couple (X_1, X_2) correspond respectivement à (b_9, b_{10}) , (a_9, a_{10}) et (c_{12}, c_{13}) .

3.6.1.4. Identification des paramètre de l'extremum d'effort

Le polynôme P_δ est simulé en X_{min} et X_{max} de sorte à obtenir les images du minimum et du maximum :

$$Y_{min} = P_\delta(X_{min}) \quad (3-105)$$

$$Y_{max} = P_\delta(X_{max}) \quad (3-106)$$

La valeur de pic D , est définie comme la moyenne arithmétique des modules de Y_{min} et Y_{max} :

$$D = \frac{|Y_{min}| + |Y_{max}|}{2} \quad (3-107)$$

Pour l'effort longitudinal, l'effort latéral et le moment d'auto-alignement, D suit une loi quadratique en la charge :

$$D = X_1 \cdot F_z^2 + X_2 \cdot F_z \quad (3-108)$$

Où le couple (X_1, X_2) correspond respectivement à (a_1, a_2) , (b_1, b_2) et (c_1, c_2) .

Au moins pour l'effort latéral, D doit être concave et positif. Le couple (a_1, a_2) doit donc vérifier : $a_1 < 0$ et $a_2 > 0$.

3.6.2. Paramétrages obtenus de la Formule Magique

Dans cette partie, les résultats paramétriques ont été modifiés de sorte à remplacer le déplacement latéral par l'angle de dérive défini avec la convention de signe PSA Peugeot Citroën présentée figure 15.

3.6.2.1. Dunlop R16

Les réponses du modèle non linéaire représentées figure 79 sont cohérentes avec la réponse du modèle polynomial en la dérive figure 66 et à la déformation en torsion figure 70. De même, la raideur de dérive sur le modèle non linéaire d'effort latéral figure 80 est identique à celui identifiée sur le modèle polynomial figure 65.

	2bars	2.5bars	3bars		2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.00000	2.50000	c0	2.50000	2.99999	2.99995
c1	0	7.20048	0	c1	0	-0.38505	-0.34623
c2	0	43.95414	0	c2	0	3.99988	3.94529
c3	0	0	0	c3	0	0	0
c4	174.04808	184.17892	137.31131	c4	5.22926	12.25626	12.05800
c7	0	0	0	c7	0	0	0
c8	0	0	0	c8	0	0	0
c9	0.01000	1.39234	0.01000	c9	0.01000	1.51042	1.55335
c12	0	0	0	c12	0	0	0
c13	0	0	0	c13	0	0	0

TABLEAU 14: MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR FY

TABLEAU 15 : MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR MZ

	2bars	2.5bars	3bars		2bars	2.5bars	3bars
a0	1.00000	1.00000	1.00000	c0	3.00000	2.99974	3.00000
a1	-24.94876	-3.00102e-012	-25.02127	c1	4.65113	3.99589	3.35430
a2	1372.64571	1214.86011	1347.00716	c2	0	0	0
a3	2001.68224	2050.97023	2253.55202	c3	-1.00151	-1.35359	-1.46971
a4	7.16132	8.04108	10.35878	c4	-11.57865	-7.15229	-4.25536
a7	0.55553	0.53917	0.53665	c7	0	0	0
a9	0	0	0	c8	0	0	0
a10	0	0	0	c9	1.27110	1.96291	1.47577
				c12	-0.00809	0.00577	0.01130
				c13	0	-0.06296	-0.10382

TABLEAU 16: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR FY

TABLEAU 17: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR MZ

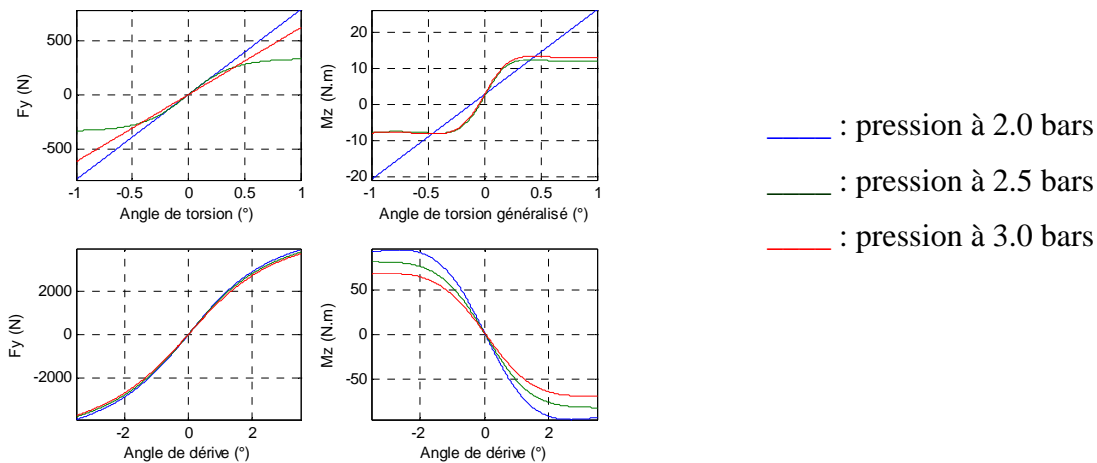


figure 79 : Réponses Dunlop R16

à $Fz=4.5kN$ et $\gamma=0$

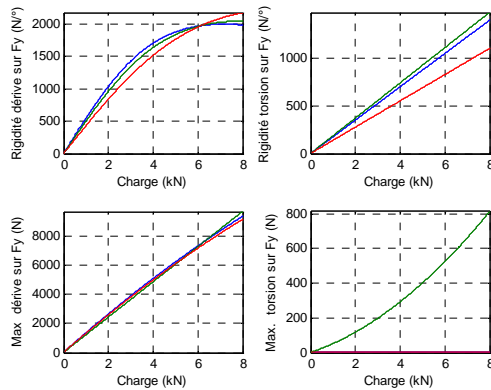


figure 80 : Dunlop R16, grandeurs caractéristiques sur Fy

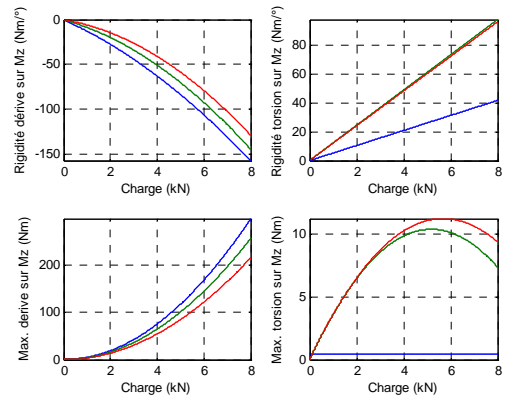


figure 81 : Dunlop R16, grandeurs caractéristiques sur Mz

3.6.2.2. Michelin R15

Les réponses du modèle non linéaire représentées figure 82 sont cohérentes avec la réponse du modèle polynomial en la dérive figure 67 et à la déformation en torsion figure 71. De même, la raideur de dérive sur le modèle non linéaire d'effort latéral figure 83 est identique à celui identifiée sur le modèle polynomial figure 65.

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.50000	2.50000
c1	0	0	0
c2	0	0	0
c3	0	0	0
c4	161.14381	146.30006	132.99873
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	0.01000	0.01000
c12	0	0	0
c13	0	0	0

TABLEAU 18: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR Fy

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.99934	3.00000
c1	0	-0.31182	-0.30250
c2	0	3.33916	3.44079
c3	0	0	0
c4	4.09516	10.02681	11.51794
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	1.38290	1.36401
c12	0	0	0
c13	0	0	0

TABLEAU 19: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR Mz

	2bars	2.5bars	3bars
a0	1.00000	1.00009	1.00000
a1	-56.16349	-42.23582	-65.46625
a2	1582.90063	1439.91540	1604.28788
a3	2131.54005	2433.92737	2810.57854
a4	6.94498	8.91694	11.74874
a7	0.54120	0.37193	0.51703
a9	0	0	0
a10	0	0	0

TABLEAU 20: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR Fy

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.00000	2.87352	2.16502
c1	5.45759	3.21337	2.88083
c2	17.18441	4.54047	2.61109
c3	-1.53981	-1.67959	-1.61177
c4	-9.09289	-5.69448	-3.88218
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	5.33502	-0.39095	-0.73480
c12	0.00123	0.01013	-0.00032
c13	-0.04667	-0.08189	-0.03351

TABLEAU 21: MICHELIN R15, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR Mz

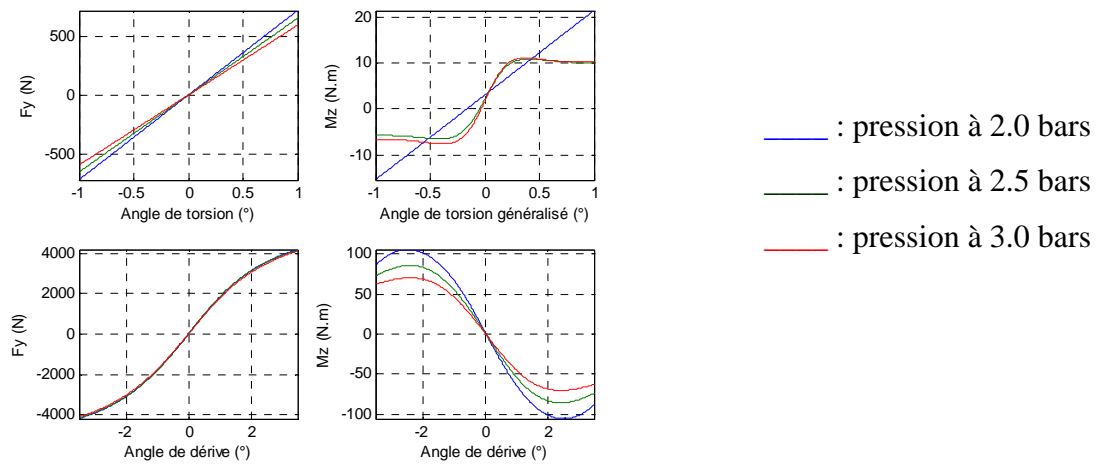


figure 82 : Réponses Michelin R15 à $F_z=4.5\text{kN}$ et $\gamma=0$

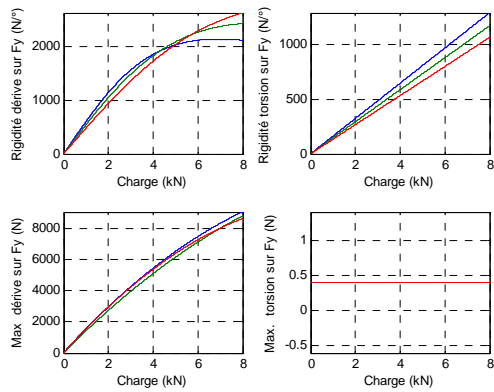


figure 83 : Michelin R15, grandeurs caractéristiques sur F_y

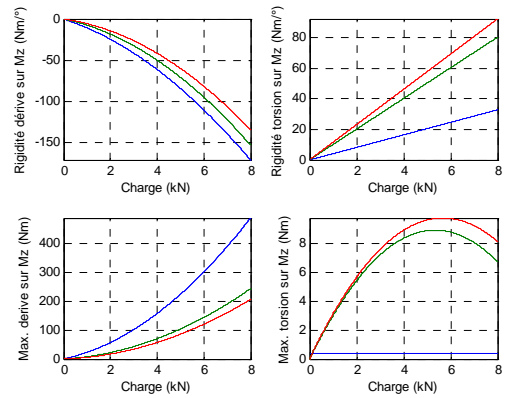


figure 84 : Michelin R15, grandeurs caractéristiques sur M_z

3.6.2.3. Michelin R16

Les réponses du modèle non linéaire représentées figure 85 sont cohérentes avec la réponse du modèle polynomial en la dérive figure 68 et à la déformation en torsion figure 72. De même, la raideur de dérive sur le modèle non linéaire d'effort latéral figure 86 est identique à celui identifiée sur le modèle polynomial figure 65.

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.50000	2.50000
c1	0	0	0
c2	0	0	0
c3	0	0	0
c4	162.68860	146.53205	128.82860
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	0.01000	0.01000
c12	0	0	0
c13	0	0	0

TABLEAU 22: MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR FY

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	3.00000	2.63618
c1	0	-0.31205	-0.28625
c2	0	3.47204	3.13863
c3	0	0	0
c4	4.55554	27.58897	10.76073
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	1.21628	1.34181
c12	0	0	0
c13	0	0	-0.04477

TABLEAU 23: MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR Mz

	2bars	2.5bars	3bars
a0	1.00000	1.00007	1.00000
a1	-59.07515	-42.34952	-66.79300
a2	1496.47592	1409.84911	1557.11153
a3	2194.36880	2359.81895	2648.01720
a4	7.42714	8.79264	11.20171
a7	0.36479	0.38954	0.50660
a9	0	0	0
a10	0	0	0

TABLEAU 24: MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR FY

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.00000	2.00000	2.00004
c1	4.37196	2.87705	2.51808
c2	15.24014	5.11613	4.02048
c3	-1.15469	-1.23033	-1.39584
c4	-10.87680	-7.26169	-4.74031
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	4.15701	-2.23611	-1.10846
c12	0.00064	-0.00016	-0.00050
c13	-0.05527	-0.06665	-0.05341

TABLEAU 25 : MICHELIN R16, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR Mz

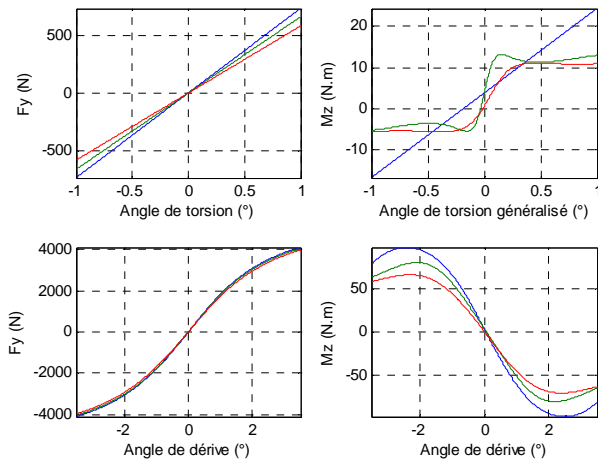


figure 85 : Réponses Michelin R16 à Fz=4.5kN et $\gamma=0$

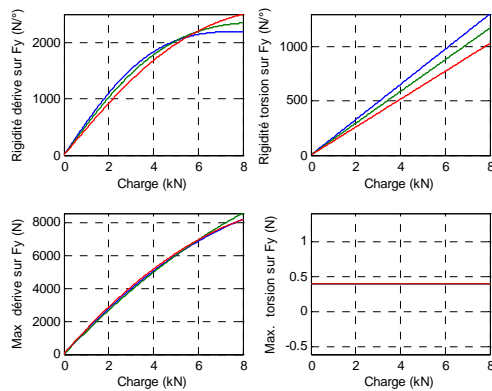


figure 86 : Michelin R16, grandeurs caractéristiques sur Fy

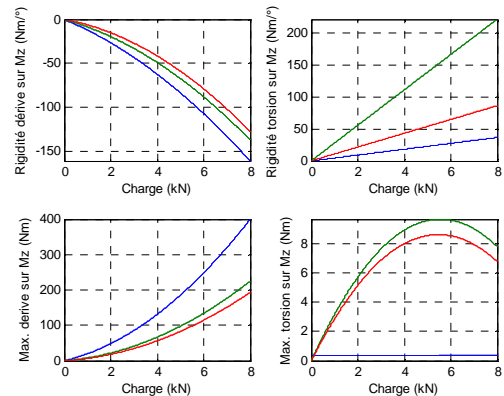


figure 87 : Michelin R16, grandeurs caractéristiques sur Mz

3.6.2.4. Michelin R17

Les réponses du modèle non linéaire représentées figure 88 sont cohérentes avec la réponse du modèle polynomial en la dérive figure 69 et à la déformation en torsion figure 73. De même, la raideur de dérive sur le modèle non linéaire d'effort latéral figure 89 est identique à celui identifiée sur le modèle polynomial figure 65.

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.50000	2.50000
c1	0	0	0
c2	0	0	0
c3	0	0	-14.47687
c4	144.40287	136.88151	256.18263
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	0.01000	0.01000
c12	0	0	0
c13	0	0	0

TABLEAU 26: MICHELIN R17, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR Fy

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.50000	2.99989	3.00000
c1	0	-0.23213	-0.27899
c2	0	3.31802	3.76229
c3	0	0	0
c4	5.42689	13.55754	13.79258
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	0.01000	1.54021	1.54794
c12	0	0	0
c13	0	0	0

TABLEAU 27: MICHELIN R17, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN TORSION SUR Mz

	2bars	2.5bars	3bars
a0	1.00000	1.00000	1.00000
a1	-40.97833	-0.00144	-1.59686e-007
a2	1573.00175	1395.07349	1440.33571
a3	2017.68256	2298.39364	2143.53804
a4	6.30197	8.46341	8.43579
a7	0.46590	0.53880	0.52040
a9	0	0	-0.00683
a10	0	0	0.00128

TABLEAU 28: MICHELIN R17, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR Fy

	2bars	2.5bars	3bars
c0	2.00000	2.01681	2.00002
c1	5.08174	4.46176	3.88869
c2	4.38258	1.82555	0.41769
c3	-1.61894	-2.48993	-2.31111
c4	-11.34945	-4.69773	-2.42497
c7	0	0	0
c8	0	0	0
c9	-2.07398	-1.11894	-1.19644
c12	0	0.00012	0
c13	-0.08728	-0.08461	-0.08284

TABLEAU 29 : MICHELIN R17, COEFFICIENTS FORMULE MAGIQUE DU COMPORTEMENT EN DERIVE SUR Mz

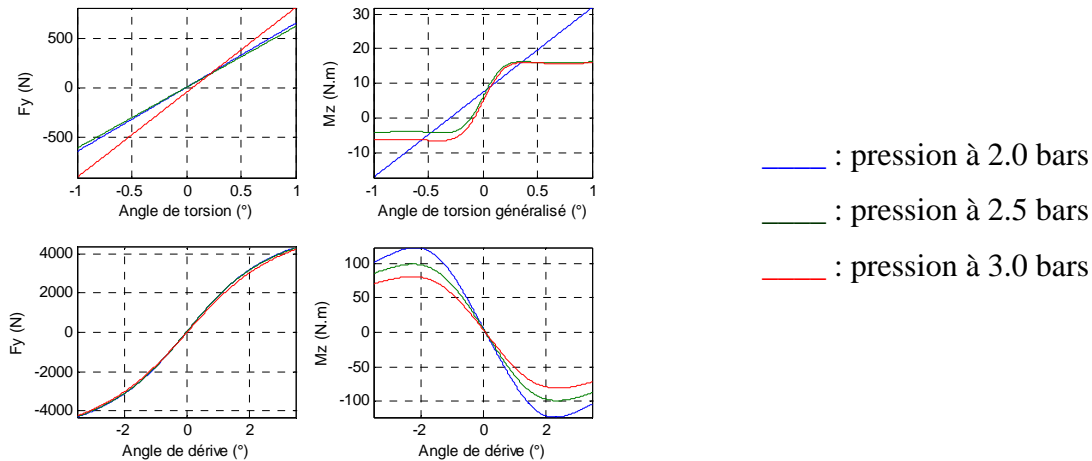


figure 88 : Réponses Michelin R17
à $F_z=4.5kN$ et $\gamma=0$

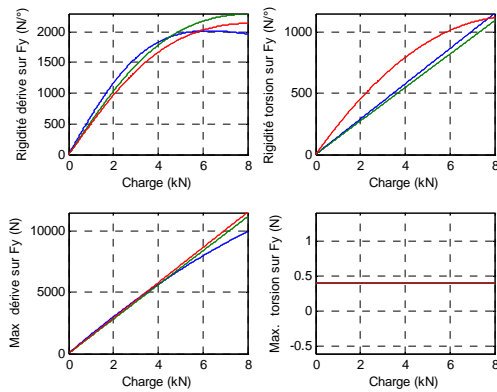


figure 89 : Michelin R17,
grandeurs caractéristiques sur F_y

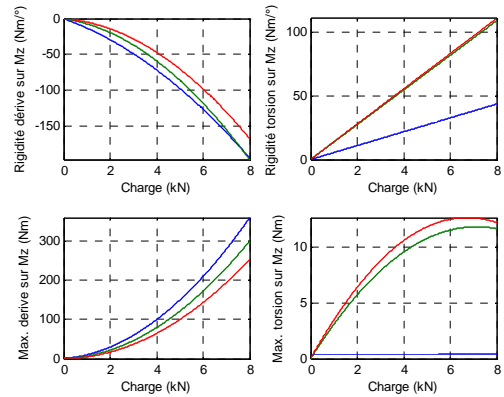


figure 90 : Michelin R17,
grandeurs caractéristiques sur M_z

3.7. Conclusion

Ce chapitre valide l'algorithme d'identification présenté au chapitre 1. La caractérisation structurelle est réalisée sur des essais de caractérisation en agrément de direction à petite dérive et sans excitation en glissement longitudinal.

La caractérisation structurelle permet de déterminer les entrées significatives dans celle prévue par la théorie de l'interaction pneumatique/sol développée au chapitre 2. Elle permet aussi de déterminer les articulations significatives dans l'effort de contact. Il apparaît ainsi que les articulations de torsion pneu et d'avance pneu peuvent être bloquées.

Pour assurer la corrélation des mesures avec la simulation des modèles identifiés, la raideur de ballant vue du moment d'auto-alignement peut être considérée indépendante de celle vue de l'effort latéral. Les modèles d'effort d'interaction pneumatique/sol n'ont pas de dépendance en la vitesse et peuvent être considérés comme une somme de contributions indépendantes provenant de la dérive, de la déformation en torsion, du carrossage et d'un offset en la charge.

Les résultats d'identification obtenus sur cette structure de modèle et des sollicitations plus importantes sont compatibles avec la représentation de la formule magique, habituellement utilisée dans l'industrie. Le nombre de paramètres utilisés dans la formule magique est restreint afin de garantir la représentativité physique et rester cohérent avec les résultats de la caractérisation structurelle. A ce titre, le résultat devrait être plus prédictifs que ceux obtenues avec d'autres méthodes d'identification sur le modèle complet.

La possibilité de faire de la caractérisation structurelle en même temps que l'identification paramétrique permet d'apporter une garantie de robustesse aux résultats. Ce qui n'est pas le cas dans les approches génétiques présentée dans [Cabrera 04] et [Vetturi 96], aux approches de recalage basées sur la logique floue [Bourdeau 02], aux méthodes d'optimisation non linéaire comme celles du logiciel MF-tools [Van Oosten 03] ou des logiciels équivalents [Takashi 00]. [Basset 05] présente un état de l'art de l'identification des paramètres de la formule magique).

Ce chapitre montre aussi les difficultés à identifier les caractéristiques d'un pneumatique, même en conditions expérimentales. Les perturbations y sont nombreuses et placer le pneumatique dans un état stable est très délicat. Une des contraintes les plus importante est la nécessité de définir des trajectoires simples où les paramètres à identifier sont directement quantifiables. Cela allonge la durée des procédures et augmente le risque de dégradation et de dérive thermique du pneumatique. La possibilité offerte par l'algorithme d'identifier avec des mesures réalisées sur tout type de trajectoire permet de lever cette contrainte et devrait permettre des avancées substantielles en caractérisation.

Chapitre 4

Identification du modèle d'effort de contact pneumatique/sol sur mesures embarquées

4.1. Introduction

Un banc de caractérisation pneumatique offre l'avantage de maîtriser les conditions de sollicitation du pneumatique, mais ces conditions ne correspondent pas exactement aux conditions réelles d'utilisation. Le pneu peut avoir un état différent (par le rodage, la thermique, l'absence de régulation de pression...) et être soumis à des types de sollicitations non observés sur le banc. Pour pouvoir observer ces écarts et y remédier, il convient d'être en mesure de caractériser le pneumatique à partir de mesures sur le véhicule.

Ce chapitre montre la manière dont le formalisme de la robotique articulaire peut être utilisé pour reconstruire les grandeurs géométriques, cinématiques et dynamiques de la liaison pneumatique/sol sur véhicule. Le modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol est ainsi identifié sur une trajectoire sinus volant à l'aide de mesures d'effort issues de roues dynamométriques.

Cette méthodologie est nécessaire pour réaliser de l'identification embarquée sans roues dynamométriques qui sont des instruments onéreux et délicat à mettre en oeuvre. Dans [Zami 02] elles sont remplacées par des jauges de contraintes ajoutées aux le système de suspension afin d'estimer le torseur d'effort appliqué au porte fusée. La méthode que nous proposons consiste à utiliser la robotique articulaire pour écrire le modèle dynamique inverse du véhicule [Venture 06] :

$$J_v \cdot F = W_v \cdot X_v \quad (4-1)$$

avec X_v vecteur des paramètres du véhicule,

F torseurs d'effort mesurés par les roues dynamométrique,

J_v matrice de projection des efforts mesurés au porte fusée sur le repère caisse

W_v matrice de projection des paramètres véhicule sur le repère caisse

Le modèle d'identification du modèle d'effort pneumatique peut se mettre sous une forme similaire (2-52):

$$F = W_p \cdot X_p \quad (4-2)$$

avec X_p vecteur des paramètres pneumatique,

W_p matrice de projection des paramètres pneumatique sur le repère porte fusée

En substituant (4-1) dans (4-2), il vient :

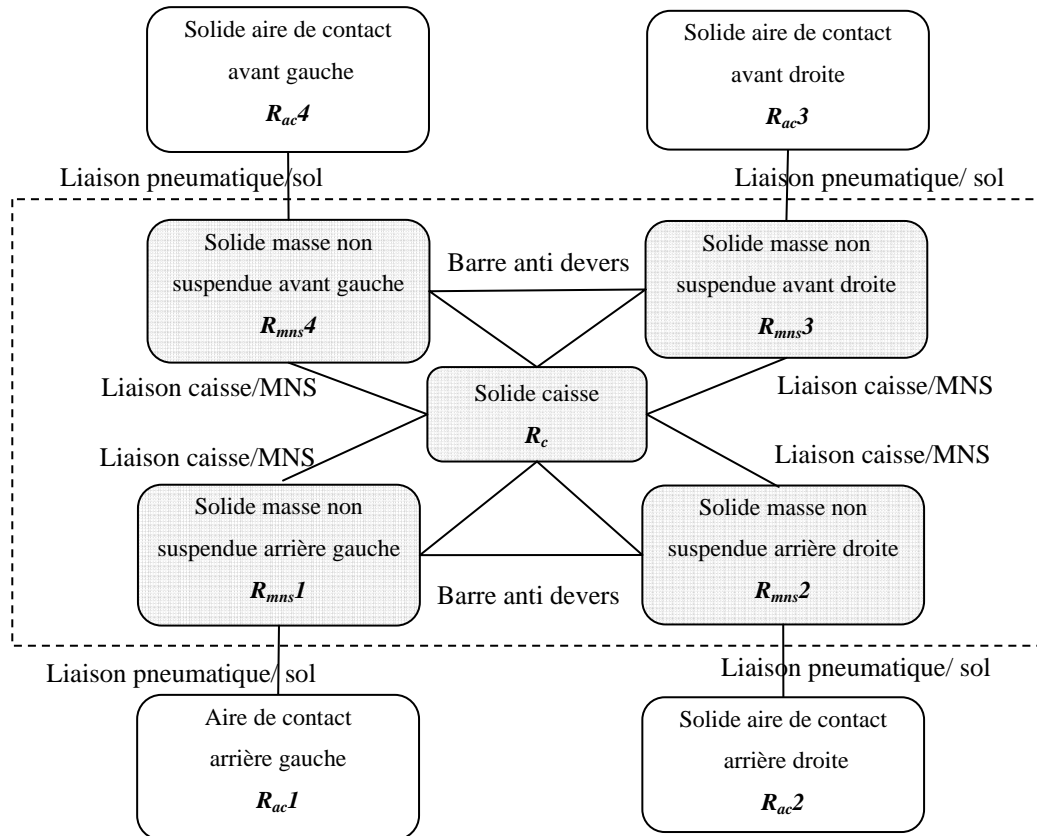
$$W_p \cdot X_p = J_v \cdot W_v \cdot X_v \quad (4-3)$$

(4-3) fait apparaître la possibilité d'identifier simultanément les paramètres du véhicule et du pneumatique sans mesure du torseur d'effort appliqué au porte fusée. Une voiture dont les paramètres auraient été préalablement identifiés pourrait aussi servir d'instrument de caractérisation du pneumatique. Dans les deux cas, les roues dynamométriques ne seraient pas nécessaires.

4.2. Modèle dynamique du véhicule

4.2.1. Modèle articulaire du véhicule

Le véhicule est modélisé comme une structure articulée arborescente comportant 4 branches attachées à un solide unique en mouvement dans l'espace : le solide caisse. Chacune des 4 branches relie la caisse au porte fusée via la chaîne articulaire à 6 degrés de liberté (ddl) indiquée tableau 30. Ces chaînes articulaires modélisent la géométrie du train. Des contraintes imposées par les barres anti roulis avant et arrière lient les mouvements des portes fusées avant arrière. Chacun des portes fusées est ensuite reliée à la chaussée via une chaîne articulaire à 7 degrés de liberté indiquée tableau 1 afin de représenter la liaison porte fusée - sol. Un schéma de l'ensemble est donné figure 91. Le modèle final a ainsi un total de 58 degrés de liberté (6 ddl sur le mouvement de caisse + 4×6 ddl sur le train + 4×7 ddl sur la liaison porte fusée/sol).



MNS : Masse Non Suspendue

figure 91 : Décomposition du véhicule en sous systèmes

4.2.2. Modèle articulaire d'une liaison train

Modèle DHM du banc Flat Trac :

- le repère R_1 est attaché au corps de caisse. Il correspond au repère dynamique R_c (axe x_c suivant l'axe longitudinal orienté le sens d'avance, y_c suivant l'axe de ballant orienté vers la gauche, z_c orienté suivant l'axe vertical orienté vers le haut)
- le repère R_2 est défini de sorte à placer l'articulation de demi voie,
- le repère R_3 est défini de sorte à placer l'articulation de demi empattement,
- le repère R_4 est défini de sorte à placer l'articulation de débattement de suspension
- le repère R_5 est défini de sorte à placer l'articulation de braquage,
- le repère R_6 est défini de sorte à placer l'articulation de carrossage caisse,
- le repère R_7 est défini de sorte à placer l'articulation d'enroulement caisse,
- le repère R_8 est attaché au même corps que R_7 mais de sorte à correspondre au repère du porte fusée R_{pf} .

La modélisation du montage de la roue sur le train est réalisée en connectant par une articulation bloquée le corps 1 du modèle DHM de la roue (tableau 1) sur le corps 8 du modèle DHM du train (tableau 30). Les repères du porte fusée R_{pf} des deux modèles sont ainsi confondus. La connexion des quatre trains sur la caisse est réalisée en connectant par une articulation bloquée le corps 2 de leur modèle DHM sur le corps 1 du modèle DHM de caisse tableau 31.

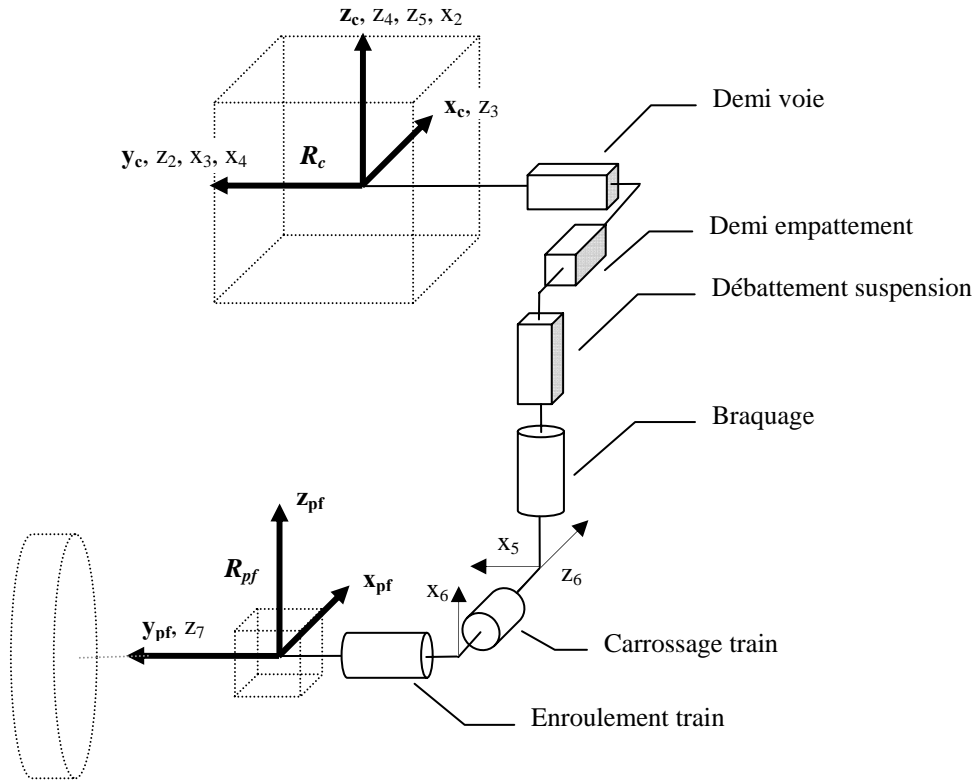


figure 92 : Paramétrage DHM d'une liaison train

j	$a(j)$	σ	γ_j	b_j	α	d_j	θ_j	r_j	
2	1	1	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	l_i	Demi voie
3	2	1	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	L_i	Empattement
4	3	1	0	0	$-\pi/2$	0	0	z_i	Débattement de suspension
5	4	0	0	0	0	0	β_i	0	Braquage
6	5	0	0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2+\gamma_i$	0	Carrossage caisse
7	6	0	0	0	$\pi/2$	0	$\pi/2+\zeta_i$	0	Enroulement caisse
8	7	2	0	0	$\pi/2$	0	0	0	Articulation bloquée

TABLEAU 30: PARAMETRAGE DHM D'UNE LIAISON TRAIN

$1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ *Articulation bloquée*

TABLEAU 31: PARAMETRAGE DHM DU SOLIDE CAISSE

4.2.3. Modèle articulaire juste nécessaire pour l'identification des paramètres dynamiques du véhicule

Dans [Venture 06], le système articulaire du véhicule identifié sur mesures embarquées a 30 degrés de liberté. Il prend en compte les 6 degrés de liberté de la caisse et les 4x6 degrés de liberté des masses non suspendues. L'instrumentation, le véhicule et la trajectoire d'identification sont les mêmes que ceux utilisés dans ce chapitre (voir §4.4.1.1, §0 et §4.4.1.3). Les grandeurs suivantes sont disponibles sur véhicule :

- le torseur cinématique de caisse est mesuré par centrale inertielle,
- les torseurs d'effort des 4 liaisons au sol sont mesurés par roues dynamométriques,
- les débattements de suspension sont mesurés par capteurs laser,
- les angles de carrossage, d'enroulement et de braquage ainsi que les variations d'empattement et de voie sont déduits de tables renseignées sur banc de mesure et ayant pour entrées le débattement de suspension et le déplacement de crémaillère.

Les équations d'identification dynamique correspondent sont construites à partir des 6 degrés de liberté du solide caisse (l'ajout des autres articulations au bilan dynamique nécessiterait des mesures supplémentaires d'efforts articulaires).

Dans ces conditions, il apparaît que les articulations rotoïdes de la liaison train n'ont pas une influence dynamique suffisante pour accéder aux paramètres inertiels des masses non suspendues liées à la rotation. Leur contribution géométrique intervient dans la remonté des efforts de liaison pneumatique/sol à la caisse et est quasiment négligeable car on reste toujours dans le domaine des petits angles. Dans ces conditions, seul l'angle de braquage avant a une contribution significative.

De même les variations sur les articulations prismatiques de demi voie et de demi empattement sont trop faibles pour être significatives. Par contre le débattement de suspension n'est pas négligeable. Il contient la dynamique du rebond de roue (autour de 12Hz) qui permet d'accéder théoriquement à la valeur des masses non suspendues.

Finalement avec les moyens d'instrumentation utilisés, un modèle à 12ddl est suffisant pour faire de l'identification des paramètres dynamiques du véhicule. Ce modèle se déduit du modèle initial à 30ddl en faisant les simplifications suivantes :

- Variations de demi voies nulles,
- Variations de demi empattement nulles,
- Angles de carrossage nuls,
- Angles d'enroulement nuls,
- Angles de braquage arrière (pince) nuls.

Dans ces conditions, les paramètres dynamiques suivants peuvent être identifiées :

- paramètres inertiels de caisse (masse, premiers moment, matrice inertie)
- paramètres aérodynamiques de caisse (coefficient de pénétration longitudinal)
- paramètres de suspension (raideur, offset d'effort, amortissements sec et visqueux)
- paramètres de masse non suspendues (masse)

4.3. Estimation des grandeurs géométriques et cinématiques de caisse

Pour le calcul des grandeurs d'entrée du pneumatique, il est nécessaire de connaître l'équation de la normale au sol dans le repère du porte fusée et le torseur cinématique du porte fusée §2.3.4.

Le chapitre 2 montre comment obtenir les entrées du pneumatique par la seule connaissance de la normale au sol et le torseur cinématique du repère de mesure. Cette partie montre comment les estimer de manière robuste sur véhicule à partir de 4 capteurs lasers placés aux 4 coins du véhicule. L'approche est non causale et basée sur l'estimation multi source. Elle ne nécessite pas de faire la synthèse d'un observateur dynamique. Les observateurs dynamiques des états d'un véhicule sont présentés dans [Stephant 04] : observateurs linéaires, de Luenberg, de Kalman ou à modes glissant. La technique des modes glissants est aussi abordée dans [El Hadri 01a], [El Hadri 01b] pour observer la dérive véhicule.

4.3.1. Estimation de la normale au sol

Les capteurs sont fixés dans le repère caisse R_g aux points C_i , i allant de 1 à 4 :

$$C_i = (x_{C_i} \quad y_{C_i} \quad z_{C_i})_{R_g}^T \quad (4-4)$$

Ces capteurs retournent la distance d_i . C'est la distance entre C_i et B_i avec B_i projection de C_i sur le plan sol : $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ en suivant la direction \mathbf{z}_g .

B_i étant la projection C_i suivant \mathbf{z}_g :

$$B_i = C_i - d_i \cdot \mathbf{z}_g \quad (4-5)$$

B_i appartenant par définition au plan sol, ses coordonnées cartésiennes vérifient nécessairement :

$$B_i^T \cdot \mathbf{z}_r = -R \quad (4-6)$$

Soit $\mathbf{z}_r = (a_x \quad a_y \quad a_z)_{R_g}^T$

A l'instant t , on a la contrainte suivante liant l'équation du sol et les mesures laser :

$$W(t) \cdot X(t) = 0 \quad (4-7)$$

Avec $X(t) = (a_x(t) \quad a_y(t) \quad a_z(t) \quad R(t))^T$

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_{C1} & y_{C1} & z_{C1} - d_1(t) & 1 \\ x_{C2} & y_{C2} & z_{C2} - d_2(t) & 1 \\ x_{C3} & y_{C3} & z_{C3} - d_3(t) & 1 \\ x_{C4} & y_{C4} & z_{C4} - d_4(t) & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un problème de moindres carrés totaux à résoudre à chaque instant t .

4.3.2. Estimation de la cinématique de caisse

Le torseur dynamique de la caisse par rapport au sol exprimé au point A : $\tau_{A \in Caisse/Sol}$ peut être exprimé à un autre point D_i par l'opérateur de changement de point d'un torseur cinématique $M_{B_i, A}$ (voir équation (2-71))

$$\tau_{B_i \in I/0} = M_{B_i, A} \cdot \tau_{A \in Caisse/Sol} \quad (4-8)$$

Au point D_i , différentes composantes du torseur sont mesurées. Soit y_i cette mesure et S_i la matrice de sélection des composantes concernées :

$$y_i = S_i \cdot \tau_{B_i \in I/0} \quad (4-9)$$

Les 4 lasers de mesure de hauteur permettent d'accéder à la vitesse de translation verticale en C_i . Pour i allant de 1 à 4, on pose $D_i = C_i$ et $S_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le correvit situé en C_5 permet de connaître les vitesses de translation latérale et longitudinale en B_5 : projection de C_5 sur le plan sol $\mathcal{P}(R, \mathbf{z}_r)$ en suivant la direction \mathbf{z}_g . On a donc :

$$B_5 = C_5 - d_5 \cdot \mathbf{z}_g \quad (4-10)$$

avec d_5 distance de projection :

$$d_5 = \frac{C_5^T \cdot \mathbf{z}_r + R}{\mathbf{z}_g^T \cdot \mathbf{z}_r} \quad (4-11)$$

On pose $D_5 = C_5$ et $S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La centrale inertielle permet de connaître l'ensemble du torseur cinématique en C_0 .

On pose $D_6 = C_0$ et $S_6 = I_6$.

On a finalement l'équation:

$$Y(t) = W(t) \cdot X(t) \quad (4-12)$$

$$\text{avec } Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_6(t) \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} S_1 \cdot M_{B_1 A}(t) \\ S_2 \cdot M_{B_2 A}(t) \\ \vdots \\ S_6 \cdot M_{B_6 A}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et } X(t) = \tau_{A \in I/0}$$

Cette contrainte peut être résolue à chaque instant t par la technique des moindres carrés ordinaires. Si la variance de mesure des différents capteurs : V_i (i allant de 1 à 6) est connue, (4-12) peut être résolue par les moindres carrés pondérés avec P vecteur de pondération :

$$P = \left[\sqrt{V_1^{-1}} \quad \sqrt{V_2^{-1}} \quad \dots \quad \sqrt{V_6^{-1}} \right] \quad (4-13)$$

4.3.3. Rejet du bruit de mesure par fenêtrage temporel

Pour améliorer la robustesse du résultat et être insensible au bruit de mesure, (4-7) et (4-12) peuvent être résolues en considérant différents échantillons temporels à la fois. La taille de la fenêtre de convolution temporelle doit être cohérente avec la dynamique de caisse. Cette dernière étant de l'ordre de 10Hz, on peut fixer sans risques la taille de la fenêtre à $T = 0.05s$.

Soit P cette fenêtre d'observation (fenêtre de Hamming ou de Blackman par exemple). On remplace $W(t)$ par $W'(t)$ et $Y(t)$ par $Y'(t)$ dans (4-7) et (4-12) :

$$W'(t) = \begin{bmatrix} W(t-T/2).P(-T/2) \\ \vdots \\ W(t).P(0) \\ \vdots \\ W(t+T/2).P(T/2) \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y(t-T/2).P(-T/2) \\ \vdots \\ Y(t).P(0) \\ \vdots \\ Y(t+T/2).P(T/2) \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

4.4. Identification de l'effort latéral sur mesures embarquées

4.4.1. Conditions expérimentales

4.4.1.1. Pneumatique et véhicule utilisé

Le pneumatique utilisé est un Dunlop SP220E 195 65 R15 à une pression de 2.3bars. Ce pneumatique est typé sportif de série basse avec une bonne adhérence et est destiné aux véhicules de moyens et haut de gamme. Il est conçu de sorte à assurer une bonne tenue de route et des réserves de sécurité élevées.



figure 93 : Dunlop SP 220E 195 65 R15



figure 94 : Peugeot 406

4.4.1.2. Instrumentation

L'instrumentation est la même que celle décrite dans [Venture 03] :

- mesures du carrossage et de la pince de chaque roue par des capteurs laser Zimmer 2400B,
- mesures du torseur d'effort de chaque roue par des roues dynamométriques Eagle,
- mesure de la hauteur sous caisse par 4 capteurs laser Zimmer RDS 650C/250
- mesure du débattement de chaque suspension,
- mesure de la position crémaillère,
- mesure des accélérations de translation et des cinématiques de rotation de la caisse par centrale inertielle.
- mesure des vitesses longitudinale et latérales par un capteur Datron Correvit.

Les variations de demi voies, de demi empattement et d'enroulement peuvent être déduites de tables renseignées sur banc de caractérisation du véhicule. Ces tables ont pour entrées le déplacement crémaillère et les débattements de suspension (la mesure de ces grandeurs est donc indispensable). On peut aussi en déduire les angles de carrossage et de braquage.

4.4.1.3. Trajectoire d'identification

4.4.1.3.1. Cahier des charges

La trajectoire d'identification doit vérifier les hypothèses du modèle d'interaction pneumatique/sol. A savoir :

- pas de glissement longitudinal (absence de freinage ou de démarrage brusque),
- pas de sollicitations trop importantes impliquant une dégradation thermique ou mécanique du pneu (pas d'essais spirales).

La seule trajectoire à notre disposition qui vérifie ces requis est la trajectoire sinus volant.

4.4.1.3.2. Trajectoire sinus volant

La trajectoire sinus volant consiste à appliquer un signal sinusoïdal au volant. L'essai est réalisé à vitesse constante et dure 60s. La fréquence du signal sinusoïdal commence à 0.2Hz et finit à 6Hz. Les figures 95 à 97 présentent l'évolution temporelle des grandeurs d'entrées utiles au modèle de pneumatique.

La cinématique du porte fusée est estimée à partir d'un modèle véhicule à 30ddl (§4.2.1), figure 96 et d'un autre à 12ddl (§4.2.3), figure 97. On constate que le modèle à 30ddl permet de représenter la dérive statique (via le pincement) et le carrossage initial.

Les épures présentées figure 95 permettent d'analyser les couplages entre les différentes grandeurs. On peut constater que :

- Les points de fonctionnement en la charge sont différents à l'avant et à l'arrière.
- Entre la droite et la gauche, les couplages carrossage/charge et dérive/charge sont de signes opposés.
- Pour les quatre roues, le couplage carrossage/dérive suit une loi de proportionnalité de signe de proportionnalité identique. Si on considère que les quatre roues sont identiques et qu'on cherche à identifier un modèle commun sans prise en compte des offsets, cela introduit un risque de confusion entre dérive et carrossage.

On peut voir sur les figures 83 et 84 que l'entrée en torsion des pneus avant est particulièrement visible à partir 50^{ième} seconde (où on dépasse les 5Hz de braquage volant).

La figure 99 indique la valeur des grandeurs pneumatiques en début d'essai lorsque le véhicule suit une ligne droite. Les offsets d'effort sur les roues gauches y sont positifs et négatifs sur les roues droites. Etant donné la pince et le carrossage statiques du train, visibles figure 96, cet offset devrait être négatif (parce que la rigidité de dérive est toujours positive et la rigidité de carrossage négative). Il y a donc une incompatibilité des offsets imputable à un problème d'étalonnage des roues dynamométriques.

Roue arrière gauche - Roue arrière droite - Roue avant gauche - Roue avant droite

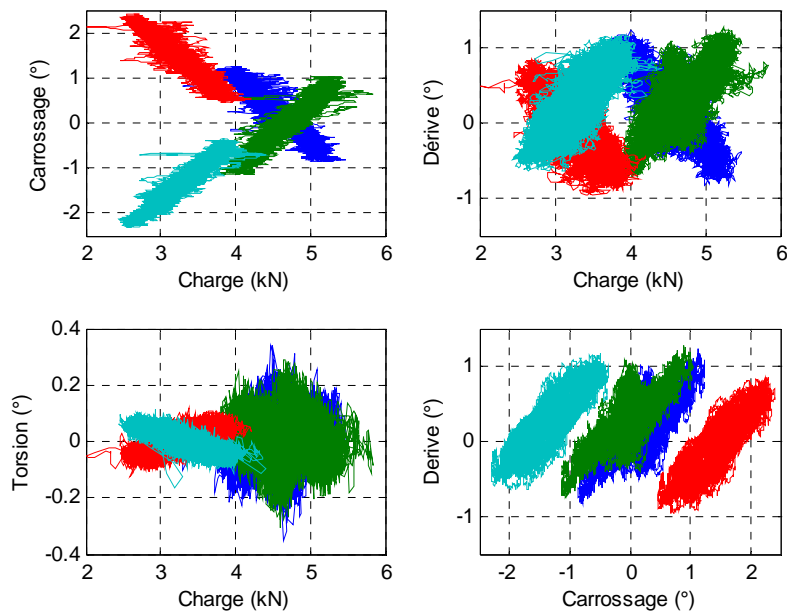


figure 95 : Trajectoire sinus volant,
Epures des grandeurs d'entrée des pneumatiques

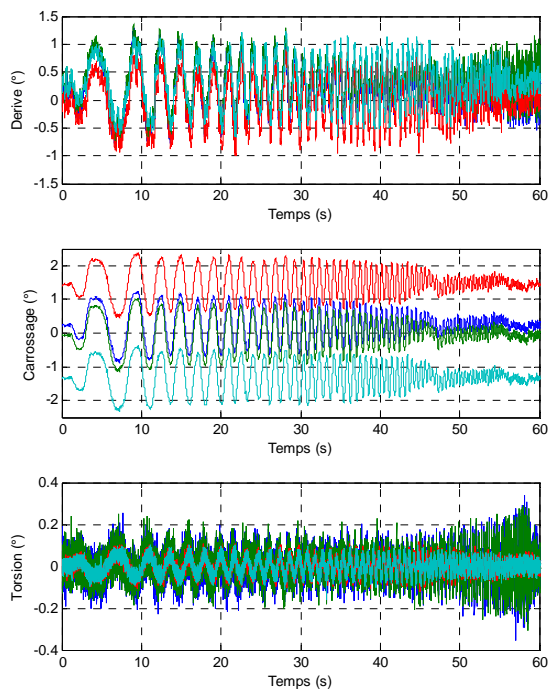


figure 96 : Trajectoire sinus,
Grandeurs porte fusée,
Modèle véhicule à 30ddl

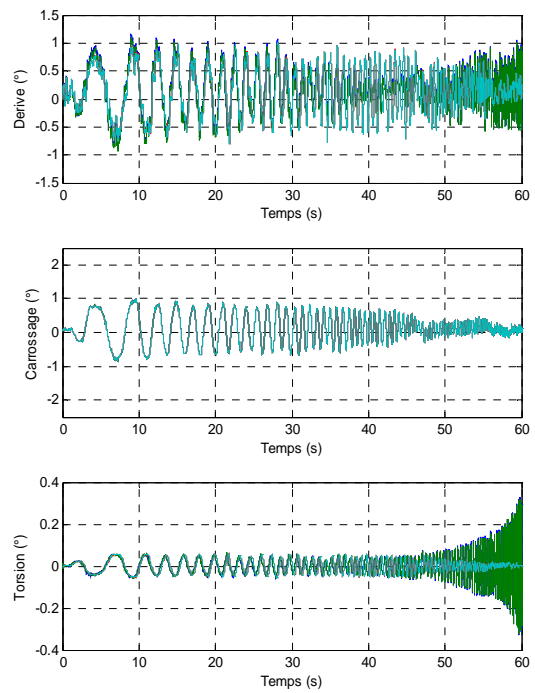


figure 97: Trajectoire sinus,
Grandeurs porte fusée,
Modèle véhicule à 12ddl

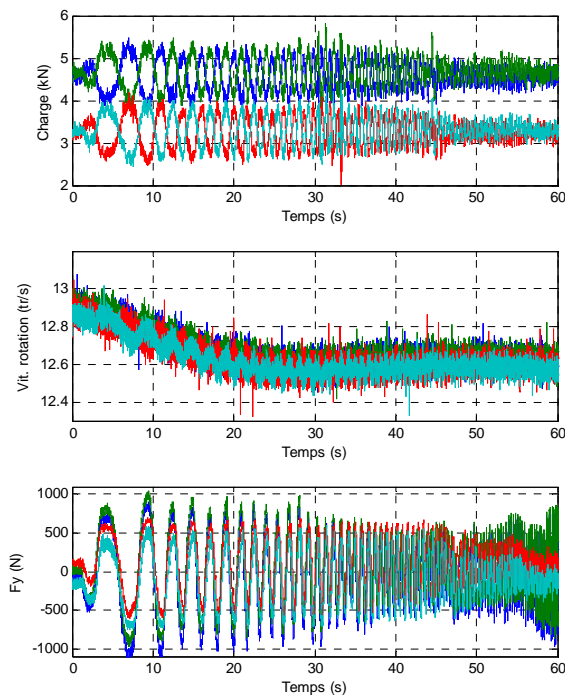


figure 98 : Trajectoire sinus,
Grandeurs en base de roue

Roue arrière gauche
Roue arrière droite
Roue avant gauche
Roue avant droite

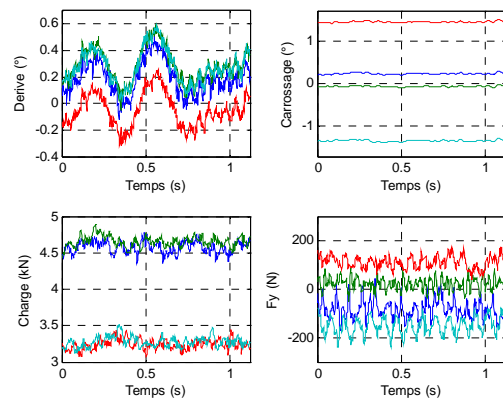


figure 99 : Trajectoire sinus,
Valeurs initiales

4.4.2. Démarche d'identification

4.4.2.1. Retrait des offsets

L'identification est réalisée sur des signaux sans offsets (sauf pour la charge). L'utilisation des roues dynamométriques nécessite en effet de recalibrer régulièrement les offsets (ces derniers variant au cours du temps) et il semble y avoir une erreur de recalage sur l'essai utilisé (voir §4.4.1.3.2).

Le retrait des offsets est compatible avec une démarche d'identification sans roues dynamométriques. En effet, si on utilise une simulation du modèle articulaire du véhicule à la place des mesures dynamométriques, seule la résultante des efforts d'interaction pneumatique/sol peut être obtenue. Or les offsets étant de signe opposés à droite et à gauche (et de module identique), leur contribution sur la résultante est nulle. Les offsets d'efforts ne pourraient donc pas être reconstruits par simulation du modèle dynamique du véhicule.

4.4.2.2. Retrait du carrossage de l'identification

Etant donné les lois d'évolution dérive/carrossage figure 95, si on retire les offsets, on ne peut différencier la dérive que sur des aspects transitoires. Il faut alors une parfaite synchronisation des mesures pour évaluer correctement les différences de phase entre les signaux. Notamment pour différencier :

- la dérive du carrossage
- la dérive de la torsion (notamment si la dynamique de braquage est inférieure à 5Hz)

Le système Correvit qui permet de mesurer la vitesse latérale de la caisse a un retard compris entre 8 ms et 512 ms suivant le niveau de filtrage effectué. Les conditions de réglages de l'essai étant inconnues, la valeur de ce retard n'est pas estimable. Les dérives en bases de roues ont donc un retard inconnu sur les autres signaux.

Ce retard peut s'avérer particulièrement gênant pour l'identification puisque la rigidité de carrossage est identifiée positive (voir la figure 102 et la figure 103) alors qu'elle devrait être négative. L'algorithme d'identification ne néglige pas automatiquement la rigidité de carrossage car il distingue bien une contribution structurée et significative de l'entrée en carrossage, mais cette contribution est biaisée par le retard de mesure. Elle n'est donc pas

physique. Si on filtre les mesures à 4Hz, la rigidité de torsion change aussi de signe mais elle est estimée correctement lorsqu'on prend en compte des dynamiques rapides.

La contribution du carrossage ne pouvant être discriminée correctement de celle de la dérive, elle est supposée nulle a priori.

4.4.2.3. Modèle articulaire du véhicule

Le modèle articulaire du véhicule à 30ddl et les estimateurs dynamiques présentés §4.3 sont utilisés pour estimer les grandeurs cinématiques d'entrée de la liaison pneumatique/sol.

Le modèle articulaire du véhicule doit normalement être plus complexe que le modèle juste nécessaire à l'identification des paramètres dynamiques du véhicule à 12ddl. On s'attend en effet aux influences articulaires suivantes sur la cinématique d'aire de contact :

- Carrossage : afin de modéliser le carrossage initial, situé entre 1 et 2 degrés.
- Pince : afin de modéliser la pince initiale, située entre 1 et 2 degrés.
- Voie : afin de prendre en compte la déformation élastocinématique du train.

Cette déformation engendrent une vitesse latérale supplémentaire du centre roue qui doit être prise en compte dans le calcul de la dérive (notamment dans le cas d'une caractérisation de la longueur de relaxation).

(NB : Dans la même logique, il faut ajouter les variations d'empattement dans le cas d'une étude des transitoires des efforts pneumatiques longitudinaux).

Dans le cas où les offsets sont retirés, beaucoup de ces influences deviennent négligeables (la pince et le carrossage initiales notamment sont supposés nuls). Il se peut donc que dans ce cas, un modèle simplifié soit suffisant pour faire l'identification. Afin de vérifier ce point, l'identification est réalisée à partir des grandeurs cinématiques issues des deux modèles : l'un à 30ddl (figure 96), l'autre à 12ddl (figure 97).

4.4.2.4. Modèle d'effort de contact

Sur trajectoire sinus, la dérive reste autour de 1° et il n'y a que deux cas de charge significatifs (roues avants et roues arrières) le modèle d'effort latéral de contact pneumatique/sol (3-49) est automatiquement simplifié en conséquence par l'algorithme d'identification. La structure de modèle obtenue est la suivante :

$$F_y = Fy_{pneu} + L_R \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial F_y}{\partial t} \quad (4-16)$$

avec $Fy_{pneu} = K_\delta \cdot \delta' + K_\phi \cdot \phi' + K_\gamma \cdot \gamma + S_v$

$$K_\delta \text{ rigidité de dérive : } K_\delta = c_{Fy,\delta,1}(F_z)$$

$$K_\phi \text{ rigidité de courbure : } K_\phi = c_{Fy,\phi,1}(F_z)$$

$$K_\gamma \text{ rigidité de carrossage : } K_\gamma = c_{Fy,\gamma,1}(F_z)$$

$$S_v \text{ offset d'effort latéral : } S_v = c_{Fy,1,1}(F_z)$$

$$L_R \text{ angle de relaxation : } L_R = c_{Fy,L,1}(F_z)$$

Il n'y a que deux cas de charge significatifs (un sur le train avant, un autre sur le train arrière). Par rapport aux essais réalisés sur banc de mesure qui comportent 4 cas de charge, l'excitation est moins riche. Pour compenser ce manque de richesse d'excitation, les polynômes en la charge sont simplifiés par rapport à ceux utilisés pour l'identification sur banc. Pour les polynômes $c_{Fy,\delta,1}(F_z)$ et $c_{Fy,L,1}(F_z)$, on pose :

$$c_{Fy,X,1} = b_{Fy,X,1,1} \cdot F_z^2 + b_{Fy,X,1,1} \cdot F_z + b_{Fy,X,1,0} \quad (4-17)$$

Pour les polynômes $c_{Fy,\phi,1}(F_z)$, $c_{Fy,\gamma,1}(F_z)$ et $c_{Fy,1,1}(F_z)$, on pose :

$$c_{Fy,X,1} = b_{Fy,X,1,1} \cdot F_z \quad (4-18)$$

4.4.3. Résultats d'identification

L'identification du modèle d'effort de contact est réalisée sur plusieurs pneumatiques en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés. Les regroupements suivants sont réalisés :

- identification sur les 4 pneumatiques,
- identification sur les 4 pneumatiques sous hypothèse d'un carrossage nul,
- identification sur les 2 pneumatiques avants sous hypothèse d'un carrossage nul,
- identification sur les 2 pneumatiques arrière sous hypothèse d'un carrossage nul.

Les paramètres identifiés avec le modèle à 30ddl du véhicule sont indiqués dans le tableau 32. Le tableau 33 fournit les résultats obtenus avec le modèle véhicule à 12ddl. Les paramètres ayant dû être supprimés pour que le comportement du modèle soit cohérent avec le comportement sont représentés par *.

Les rigidités en fonction de la charge sont reconstruites de figure 100 à la figure 109. Le résidu obtenu avec une même identification appliquée aux 4 pneumatiques est indiqué figure 110 pour le modèle véhicule à 30ddl et figure 111 le modèle véhicule à 12ddl.

Paramètres	Identification 4 contacts au sol $\gamma=0$	Identification 4 contacts au sol	Identification 2 contacts au sol avants, $\gamma=0$	Identification 2 contacts au sol arrières, $\gamma=0$
$b_{Fy,\delta',1,2}$	*	-13 572 (2.5%)	*	*
$b_{Fy,\delta',1,1}$	31 487 (0.9%)	124 220 (2.2%)	11937 (6.0%)	14 616 (3.0%)
$b_{Fy,\delta',1,0}$	51 998 (2.5%)	-153 950 (3.6%)	146 940 (2.3%)	89 561 (1.6%)
$b_{Fy,\phi',1,1}$	7 242.2 (1.5%)	4 481.5 (2.2%)	8 666 (1.7%)	*
$b_{Fy,\gamma,1,1}$	*	4 543.7 (0.5%)	*	*
$b_{Fy,1,1,1}$	0	0	0	0
$b_{Fy,L,1,2}$	0	0	0	0
$b_{Fy,L,1,1}$	-0.12737 (5.2%)	0	-0.13732 (6.7%)	-0.1292 (7.9%)
$b_{Fy,L,1,0}$	*	*	*	*

TABLEAU 32 : RESULTATS D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL AVEC MODELE VEHICULE A 30DDL

CHAPITRE 4 IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL SUR MESURES EMBARQUEES

Paramètres	Identification 4 contacts au sol $\gamma=0$	Identification 4 contacts au sol	Identification 2 contacts au sol avants	Identification 2 contacts au sol arrières
$b_{Fy,\delta',1,2}$	*	3067.1 (0.9%)	*	*
$b_{Fy,\delta',1,1}$	28 900 (1.2%)	0	15 002 (4.8%)	9 494.4 (4.1%)
$b_{Fy,\delta',1,0}$	74 468 (2.2%)	79 963 (0.5%)	141 390 (2.3%)	109 750 (1.2%)
$b_{Fy,\phi',1,1}$	16 648 (0.7%)	8 896.7 (1.4%)	17 411 (1%)	*
$b_{Fy,\gamma,1,1}$	*	4094.1 (0.5%)	*	*
$b_{Fy,1,1,1}$	0	-2.6637 (3.6%)	0	0
$b_{Fy,L,1,2}$	-0.034277 (4.2%)	0	0	0
$b_{Fy,L,1,1}$	0	0	-0.15535 (5.9%)	0
$b_{Fy,L,1,0}$	*	*	*	*

TABLEAU 33 : RESULTATS D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL AVEC MODELE VEHICULE A 12DDL

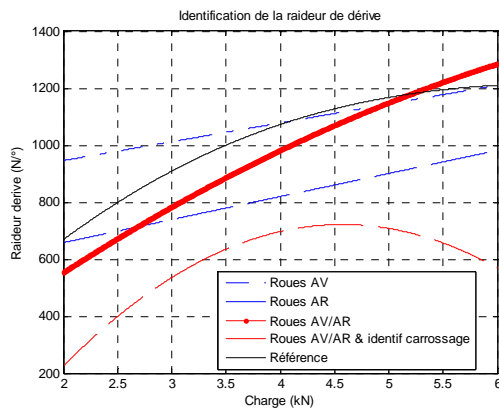


figure 100 : Rigidité de dérive, modèle véhicule 30ddl

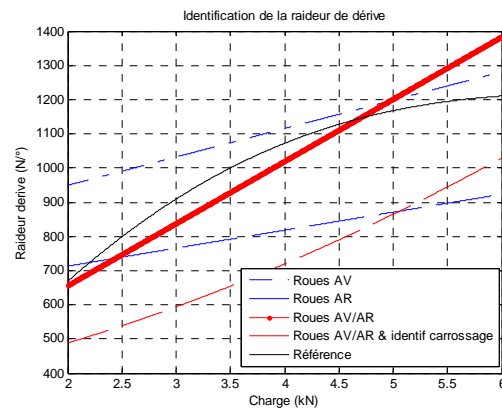


figure 101 : Rigidité de dérive, modèle véhicule 12ddl

4.4 IDENTIFICATION DE L'EFFORT LATERAL SUR MESURES EMBARQUEES

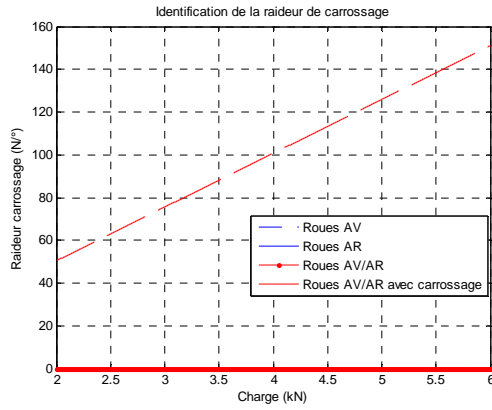


figure 102 : Rigidité de carrossage, modèle véhicule 30ddl

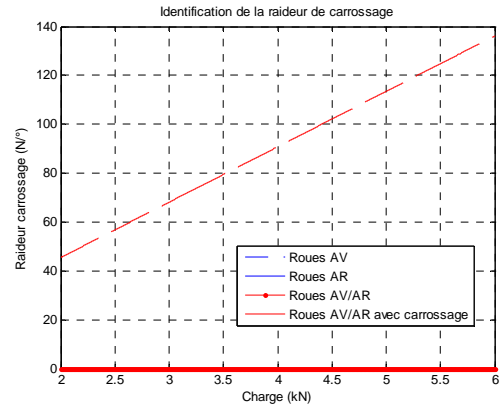


figure 103 : Rigidité de carrossage, modèle véhicule 12ddl

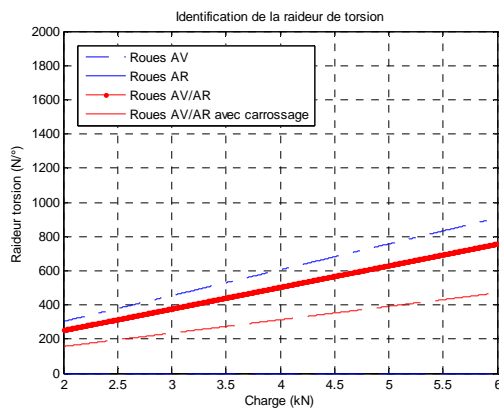


figure 104 : Rigidité de torsion, modèle véhicule 30ddl

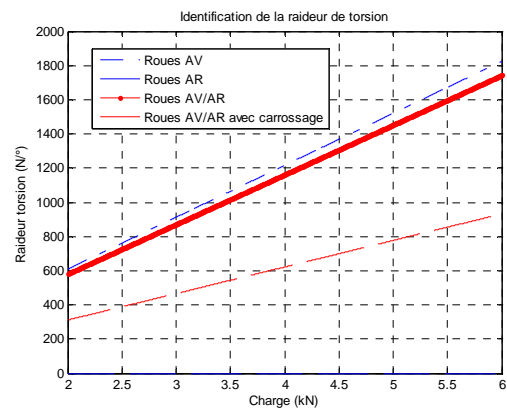


figure 105 : Rigidité de torsion, modèle véhicule 12ddl

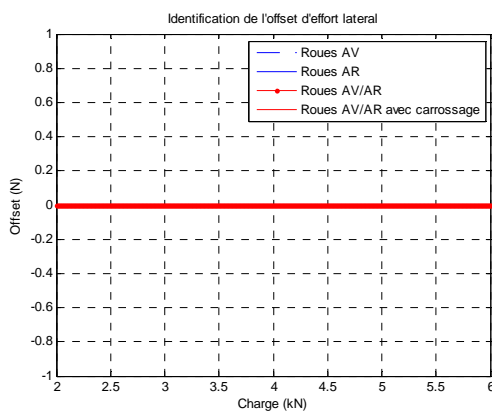


figure 106 : Offset d'effort, modèle véhicule 30ddl

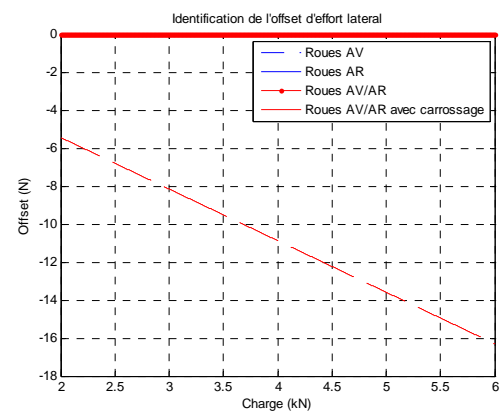


figure 107 : Offset d'effort, modèle véhicule 12ddl

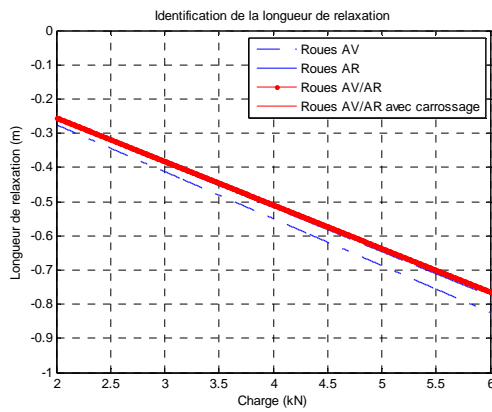


figure 108 : Longueur de relaxation, modèle véhicule 30ddl

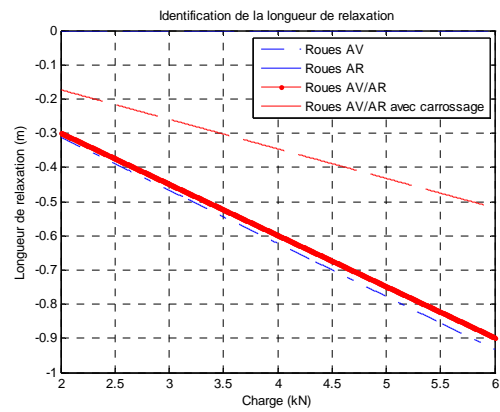


figure 109 : Longueur de relaxation, modèle véhicule 12ddl

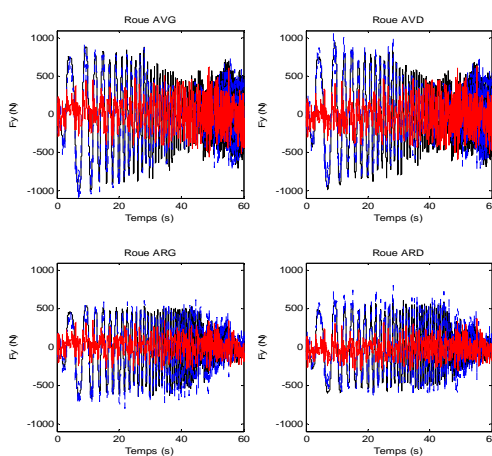


figure 110 : Résidu d'identification, modèle véhicule 30ddl

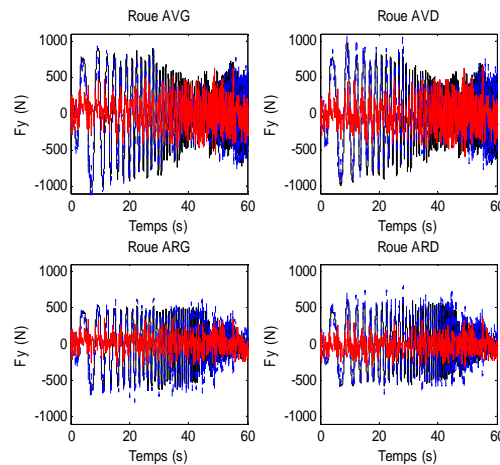


figure 111 : Résidu d'identification, modèle véhicule 12ddl

Quel que soit le modèle articulaire utilisé, la rigidité de dérive identifiée est globalement cohérente avec la rigidité a priori. Cette dernière a été obtenue par une mesure sur piste par un camion disposant d'une cinquième roue destinée à la caractérisation pneumatique. Le maximum de charge identifié sur les mesures embarquées est plus élevé, cela peut s'expliquer :

- par le manque de point de fonctionnement en charge,

La non linéarité de la rigidité de dérive peut être décrite par un polynôme d'ordre 3. Il faudrait donc au moins 3 points de fonctionnement distinct en charge pour une identification complète.

- par l'hypothèse d'un carrossage nul,

La rigidité de carrossage crée un effort opposé à celui de la dérive. Si on néglige le carrossage pour identifier une rigidité de dérive et qu'il y a un couplage dérive/carrossage, la rigidité de dérive identifiée est sous estimée.

- par évolution de l'état du pneumatique,

Il se peut que les conditions entre l'essai véhicule et la caractérisation sur 5^{ème} roue soient différentes et que le pneumatique n'ait plus les mêmes propriétés (voir l'évolution des rigidités entre la procédure d'agrément de direction figure 65 et la procédure sécurité active figure 78)

La longueur de relaxation respecte bien l'ordre de grandeur attendu de 0.5m.

Le comportement en carrossage ne peut pas être identifié à cause des déphasages entre les mesures qui font apparaître une rigidité positive plutôt que négative.

L'utilisation d'un modèle à 30ddl plutôt qu'à 12ddl permet :

- d'avoir une meilleure identification de la rigidité de torsion, cette dernière devant être de l'ordre de la moitié de la rigidité de dérive d'après les résultats obtenus sur banc,
- d'avoir une meilleure identification de la longueur de relaxation sur roues arrières en prenant en compte l'elasto-cinématique du train.

4.5. Conclusion

Les grandeurs d'entrées pneumatiques ont été estimées par un modèle articulaire à 30ddl et un autre modèle simplifié à 12ddl. Dans la mesure du possible les grandeurs utilisées en entrée de ces modèles sont reconstruites par des estimateurs multi sources et filtrées pour rejeter au mieux d'éventuelles perturbations.

Le modèle véhicule à 30ddl permet de représenter l'influence des trains sur les efforts statiques et la dynamique au premier ordre de la liaison au sol. Le modèle véhicule à 12ddl peut être identifié à l'aide de roues dynamométriques et permet de représenter que l'influence principale du train : le braquage.

Le modèle de pneumatique a été simplifié a priori pour pouvoir rejeter les biais de mesures (retards et biais sur les offsets). Ces biais sont en effet trop structurés pour pouvoir être rejetés automatiquement par l'algorithme robuste d'identification. Le carrossage et l'offset en la

charge sont ainsi supprimés de l'identification. Pour multiplier les points de fonctionnement, les 4 roues sont supposées avoir les mêmes paramètres. Sur un essai sinus, on identifie de cette manière : la rigidité de dérive, la rigidité de torsion et la longueur de relaxation.

L'utilisation du modèle véhicule à 30ddl permet d'avoir des résultats d'identification de meilleure qualité de celle du modèle à 12 ddl. Mais les ordres de grandeur obtenus par l'utilisation du modèle à 12ddl restent corrects (notamment sur la rigidité de dérive). En couplant les identifications des paramètres dynamiques du véhicule et du pneumatique, il pourrait donc être possible de faire une première caractérisation paramétrique avec la seule connaissance du torseur cinématique de caisse, des débattements de suspension et des angles de braquage. Les autres mesures, notamment celle des roues dynamométriques ne seraient pas nécessaires.

Conclusion générale

L'utilisation de modèles fonctionnels pour la synthèse dynamique est cruciale pour maîtriser la dérive entre le monde réel et le monde numérique de la CAO. Ces modèles sont restreints à la description de ce qui est observable et doivent pouvoir décrire la réalité tout en restant cohérent avec la vision organique du système (considéré comme un ensemble de composants). L'enjeu est d'une part de prédire l'influence des sous système dans le comportement observé et d'autre part de renseigner les sous systèmes à partir du comportement observé. Il s'agit donc de faire de la prédiction aussi bien que de l'identification. Ces deux aspects ont été abordés dans ce mémoire.

Une méthodologie d'identification garantie a été mise en place pour pouvoir faire de la caractérisation structurelle aussi bien que de l'identification paramétrique. Dans un premier temps l'utilisateur décrit son système à l'aide d'un modèle polynomial en prenant en compte un maximum de phénomènes. Ce modèle est ensuite identifié sur de multiples réalisations de sorte à obtenir le modèle juste nécessaire. Le modèle juste nécessaire ne comporte pas la description des phénomènes négligeables dans la mesure et représente les phénomènes significatifs de manière robuste. Une fois que l'utilisateur a une connaissance suffisante des phénomènes significatifs, il peut les décrire par une formulation non linéaire, comportant moins de paramètres que les polynômes et qui reste valable en dehors du domaine d'identification.

La méthodologie repose sur des algorithmes de calcul basés sur les techniques de factorisation matricielle. Ces algorithmes ont été développés de sorte à traiter rapidement des volumes de données importants avec une faible puissance de calcul.

Afin d'appliquer la méthode, un modèle dynamique du contact pneumatique/sol a été développé. Pour lui donner le plus pertinence physique possible, le modèle est conçu en cohérence avec le formalisme de la robotique articulaire et le concept de déformation vue par l'aire de contact. Le formalisme de la robotique permet de prendre en compte les effets inertiels et géométriques de la jante ainsi que la flexibilité articulaire de l'ensemble jante-pneu. L'utilisation de la notion de déformation vue par l'aire de contact permet d'obtenir les

entrées du modèle d'effort d'interaction pneumatique/sol ainsi que la structure de la matrice entrée/sortie du modèle. Le résultat est physique et s'avère compatible avec les grandeurs et les modèles empiriques habituellement utilisés en dynamique véhicule.

L'application de la méthodologie d'identification pour faire de la caractérisation structurelle a été validée. Après identification de plusieurs pneumatiques sur banc de mesure, un certain nombre de phénomènes prévus par le modèle apparaissent négligeables, notamment l'influence de la vitesse sur le modèle statique, l'influence du carrossage sur la raideur de dérive et les influences des raideurs de torsion et d'avance. On obtient ainsi une structure de modèles dynamiques de complexités juste nécessaires pour décrire l'effort latéral et le moment d'auto-alignement sur des essais de caractérisation en agrément de direction.

Les résultats d'identification paramétrique obtenus sur banc de mesure sont de qualité comparable (en terme de précision et d'interprétation du résultat) à ceux actuellement obtenus par les routines d'identification utilisées par PSA Peugeot Citroën. Mais ces dernières ne permettent pas de faire de la caractérisation structurelle et sont restreintes à une unique trajectoire d'excitation. La possibilité de faire de la caractérisation structurelle permet de réduire le nombre de paramètres du modèle non linéaire. On gagne ainsi en qualité d'interprétation, en robustesse et en prédiction.

L'algorithme pouvant être appliqué à tout type de trajectoire, il peut être utilisé pour faire de l'identification sur mesures embarquées. Une identification est ainsi réalisée à partir d'un essai sinus réalisé sur un véhicule instrumenté *Peugeot 406*. Une modélisation articulaire du véhicule permet d'estimer les grandeurs d'entrées nécessaires à l'identification. Deux niveaux de complexité sont testés afin de déterminer l'influence de la cinématique de train sur l'identification. Bien que la mesure soit biaisée par des retards et des problèmes d'offsets, les rigidités de dérive, de torsion et la longueur de relaxation sont identifiées correctement. La méthode permet donc de faire de l'identification sur mesures embarquées.

Couplée à l'identification des paramètres dynamique du véhicule [Venture 06], l'identification du modèle d'effort de contact pneumatique/sol permettrait de se passer de la mesure d'effort des roues dynamométriques, onéreuses et délicates à utiliser.

Une voie qui n'a pas été étudiée par manque de mesures est la possibilité offerte par l'algorithme de faire du recalage. C'est-à-dire modifier les paramètres d'un modèle, connus a priori, de sorte à ce que le comportement du modèle soit cohérent avec des mesures. Il serait

ainsi possible de recalibrer un modèle de pneumatique issu d'une base de données, à partir de mesures embarquées.

Avant d'explorer ces possibilités, une meilleure maîtrise des perturbations sur banc et véhicule est nécessaire. Les perturbations dynamiques du banc nuisent à la qualité de la caractérisation dynamique et celles du véhicule empêchent de caractériser correctement les lois de comportement en carrossage qui sont très proches de celles de la dérive.

L'identification du modèle de pneumatique reste encore à être généralisée à d'autres domaines : l'effort longitudinal et le couplage longitudinal/latéral notamment. La méthodologie de caractérisation structurelle peut être appliquée à ces domaines comme elle l'a été sur celui de l'effort latéral et du moment d'auto-alignement.

De plus la possibilité d'identifier sur tout type de trajectoire avec des points de fonctionnement redondants peut être utilisée pour mesurer l'éventuelle évolution du pneumatique au cours de l'essai. La mesure de cette évolution est en effet cruciale pour garantir l'invariance du comportement pneumatique. A terme, la modélisation de cette évolution assurerait la représentativité d'un modèle de pneumatique dans toutes les conditions d'utilisation.

Annexe A

Solution au sens des « moindres carrés » d'un polynôme factorisé

Cette annexe présente une méthodologie d'identification des polynômes factorisé basées sur :

- les ellipsoïdes solutions des problèmes de moindres carrés,
- les représentations linéaires fractionnaires LFT,
- l'analyse par intervalle.

L'utilisation d'ellipsoïde solution de problèmes de moindres carrés permet de garantir l'existence d'une solution et d'être robuste aux « outliers », ce que l'analyse par intervalle couplée à la propagation de contrainte ne permet pas d'obtenir [Jaulin 01]. L'utilisation des LFT [Magni 04] permet d'avoir un cadre algébrique pour la représentation des problèmes d'identification, d'utilisation plus simple que les représentations symboliques.

A.1. Représentation linéaire fractionnaire (LFT)

A.1.1. Introduction

Une représentation linéaire fractionnaire (LFT) (ou LFR [Magni 04]) permet de représenter de manière algébrique une fraction rationnelle.

Soit $f(x,p)$ un rapport de polynômes en x et p :

$$f(x,p) = \frac{N(x,p)}{D(x,p)} \tag{A-1}$$

où N et D sont des polynômes en x et p

En posant les variables implicites z et w , $f(x,p)$ peut s'écrire sous une forme linéaire fractionnaire :

$$\begin{cases} w = \Delta \cdot z \\ z = A \cdot w + B \\ f(x, p) = C \cdot w + D \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

$$\text{avec } \Delta = \text{diag}(I_{n_x} \cdot x \quad I_{n_p} \cdot p)$$

On note le système (A-2) :

$$f(x, p) = F_u \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \Delta(x, p) \right) \quad (\text{A-3})$$

A.1.2. Propriétés

A.1.2.1. Nilpotence et forme polynomiale

Si une LFT est définie telle que la matrice A soit nilpotente alors la forme $f(x,p)$ à laquelle elle est associée est une forme purement polynomiale.

A.1.2.2. Normalisation des inconnues

Dans le cas où la matrice Δ contient des valeur appartenant à un domaine $[\Delta]$, il existe une transformation de normalisation permettant d'écrire le système en fonction de Δ' dont toutes les variables sont comprises entre -1 et 1 :

$$F_u \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \Delta \right) = F_u \left(\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \Delta' \right) \quad (\text{A-4})$$

A.2. Calcul direct de l'enveloppe ensembliste extérieure

Soit la LFT normalisée :

$$M(\Delta) : \begin{cases} w = \Delta.z \\ z = A.w + B \\ y = C.w + D \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

avec $\Delta = \zeta(0, I)$

Si $|\rho(A)| < 1$ et $|\rho(A)| < 1$, on vérifie nécessairement les inclusions suivantes :

$$z \in \zeta\left(B, (I - |A|)^{-1}|A||B|\right) \quad (\text{A-6})$$

$$w \in \zeta\left(0, (I - |A|)^{-1}|B|\right) \quad (\text{A-7})$$

$$y \in \zeta\left(D, |C|(I - |A|)^{-1}|B|\right) \quad (\text{A-8})$$

A.3. Solution au sens des moindres carrés d'un polynôme factorisé

Soit $P(x, p)$ un polynôme factorisé qu'on cherche à identifier à partir de l'équation :

$$Y = P(x, p) \quad (\text{A-9})$$

Où les vecteur Y et x sont connus et p est le vecteur des paramètres à identifier.

La forme développée de (A-9) est linéaire par rapport aux paramètres et peut s'écrire :

$$P(x, p) = C(x).X(p) \quad (\text{A-10})$$

En appliquant les outils de régression robuste, on définit un ellipsoïde solution au problème des moindres carrés:

$$\|\rho\|_2^2 = (X_I - \hat{X}_I)^T \cdot Q \cdot (X_I - \hat{X}_I) + \|\rho_{\min}\|_2^2 \quad (\text{A-11})$$

avec X_I paramètres identifiables de $X(p) : X_I = M_I \cdot X(p)$

\hat{X}_I solution au sens des moindres carrés sur le sous espace identifiable

Q : quadratique inversible

$\|\rho_{\min}\|$: norme minimale d'erreur de sortie

$X(p)$ est un vecteur de polynôme en p . Il peut donc s'écrire sous forme d'une LFT :

$$X(p) = F_u \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \Delta(p) \right) \quad (\text{A-12})$$

avec A matrice nilpotente.

La quadratique Q est nécessairement symétrique définie strictement positive. Sa décomposition en valeur singulière vérifie donc :

$$Q = U^T \cdot \Sigma \cdot U \quad (\text{A-13})$$

avec U matrice de rotation et Σ matrice diagonale à valeurs strictement positives.

On pose :

$$X'_I = U \cdot X_I \quad (\text{A-14})$$

$$\hat{X}'_I = U \cdot \hat{X}_I \quad (\text{A-15})$$

La relation entre $X(p)$ et ces nouvelles variables s'écrit :

$$X'_I = U^T \cdot M_I \cdot X(p) \quad (\text{A-16})$$

L'erreur de sortie vaut :

$$\|\rho\|_2^2 = (X'_I - \hat{X}'_I)^T \cdot \Sigma \cdot (X'_I - \hat{X}'_I) + \|\rho_{\min}\|_2^2 \quad (\text{A-17})$$

X'_I est assimilable à une variable aléatoire centrée en \hat{X}'_I et d'écart type :

$$\sigma_{X'_I} = \text{diag} \left(\sqrt{\Sigma^{-1} \cdot \frac{\|\rho_{\min}\|_2^2}{n-p}} \right) \quad (\text{O-18})$$

Le vecteur intervalle $\zeta(\hat{X}'_I, \lambda.\sigma_x)$ permet de paramétrer de manière homogène l'intervalle de confiance sur tous les paramètres via le facteur de relaxation λ .

On cherche la plus petite valeur de λ permettant de satisfaire le problème de satisfaction de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \Delta = \text{diag}(I_{n_1} \cdot [p_1] & I_{n_2} \cdot [p_2] & \dots & I_{n_p} \cdot [p_p]) \\ w = \Delta \cdot z \\ z = A \cdot w + B \\ \zeta(\hat{X}'_I, \lambda.\sigma_x) \cap (U^T \cdot M_I \cdot C \cdot w + U^T \cdot M_I \cdot D) \neq \emptyset \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

Ce type de problème peut être pris en charge par des solveurs basés sur l'analyse par intervalle comme Realpaver [Granvilliers 03]. La structure linéaire permet d'utiliser des opérateurs ensemblistes de faible complexité (contracteur de Gauss-Seidel notamment) dont les performances peuvent être significativement améliorées par des préconditionneurs [Kearfott 91].

Les propriétés des LFT peuvent être utilisées pour modifier la base des variables implicites z et w et réduire le pessimisme de l'enveloppe extérieure §A.2 (voir [Beck 01a] pour le lien avec les séries et [Magni 04] pour les opérations de changement de base, de normalisations, de dérivations...). On peut aussi utiliser des outils de simplification dédiés comme MRedTool [Sivakumar 04] ou la LFR Toolbox [Magni 04] qui se basent sur les techniques présentées dans [Beck 01b]. On peut diminuer de cette manière la complexité du modèle en fonction des dimensions de l'espace paramétrique exploré.

Enfin, on peut remarquer que les contraintes sur w correspondent à la forme d'un problème de moindres carrés :

$$\begin{pmatrix} z - B \\ y - D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \cdot w \quad (\text{A-20})$$

Les techniques de régression robuste (§1.4) peuvent être utilisées pour fournir des indications sur les directions à prendre dans l'espace de recherche suivant le niveau de connaissance qu'on a sur z ou y .

Annexe B

Formule magique

Le modèle de la formule magique est régulièrement mis à jour par la société TNO (Nederlandse Organisatie voor Toegepast Natuurwetenschappelijk Onderzoek, c.a.d. l'organisation hollandaise pour la recherche scientifique appliquée). La version actuelle de la la MF-tyre est la version 6.2 et elle n'est pas consultable. La dernière version publique est le modèle MF-Tyre v5.0, disponible dans **[Pacejka 02]**.

La version utilisée dans ce mémoire est une version datant de 1991 (**[Bakker 89]**, **[Pacejka 91]**) pour laquelle PSA Peugeot Citroën dispose d'une base de donnée complète. Cette formulation ne comporte pas de na notion de chasse dans le moment d'auto-alignement, ce qui permet d'appliquer le principe de similitude. La notion de longueur de relaxation est représentée par une équation différentielle du premier ordre sur les entrées.

Les paramètres λ_i sont des facteurs d'échelle et permettent d'intégrer la chaussée dans le modèle d'interaction pneumatique/sol.

B.1. Grandeurs d'entrée

Entrées du modèle :

- Taux de glissement longitudinal :

$$\kappa = \frac{R_r \cdot \omega}{V_x} - 1 \quad (\text{B-1})$$

- Angle de dérive :

$$\delta = \arctan\left(\frac{-V_y}{V_x}\right) \quad (\text{B-1})$$

- Carrossage : γ
- Charge verticale : Fz

Les conventions de signe sont représentées figure 112.

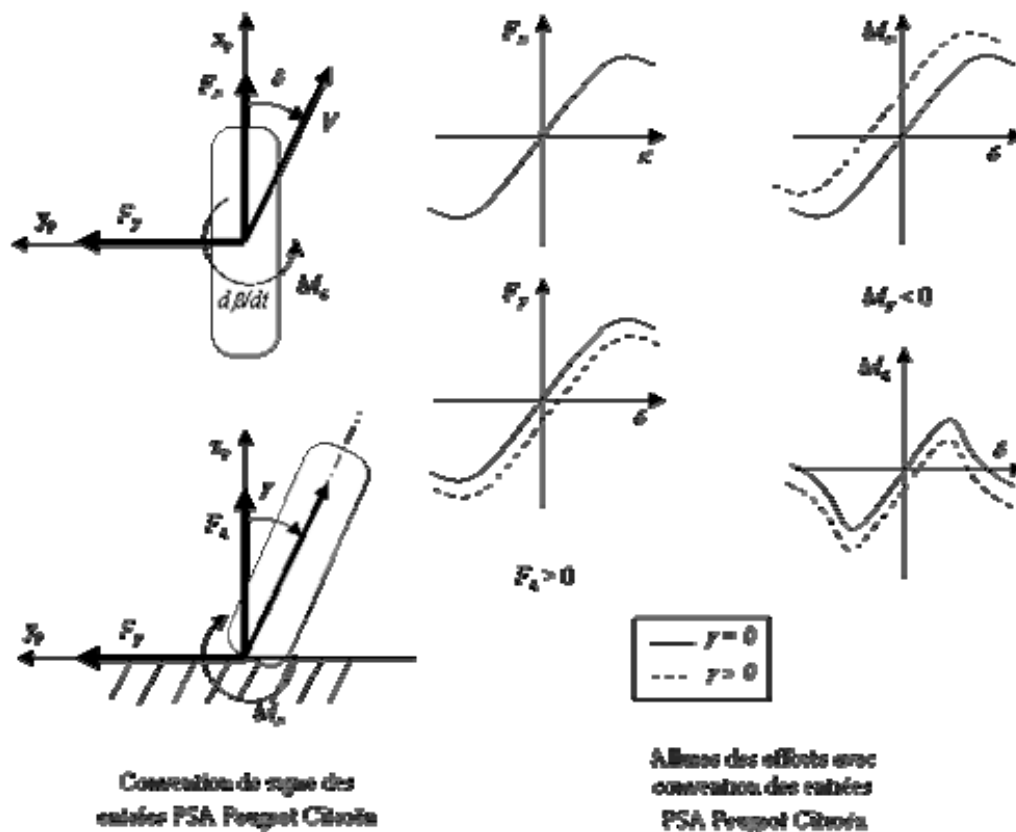


figure 112 : Convention de signe des entrées de la formule magique

B.2. Principe de description

La formule magique permet de paramétrer 6 macrocoefficients qui permettent de caractériser une réponse antisymétrique illustrée figure 113 :

- les macrocoefficients S_h et S_v correspondent respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée du centre d'antisymétrie,
- le macrocoefficient D correspond à la l'écart entre l'offset vertical et le maximum l'extremum,
- le macrocoefficient BCD correspond à la pente au centre d'antisymétrie,
- le macrocoefficient E permet de paramétrer l'ordonnée du maximum x_m ,
- le macrocoefficient C permet de paramétrer la valeur de l'asymptote horizontale L .

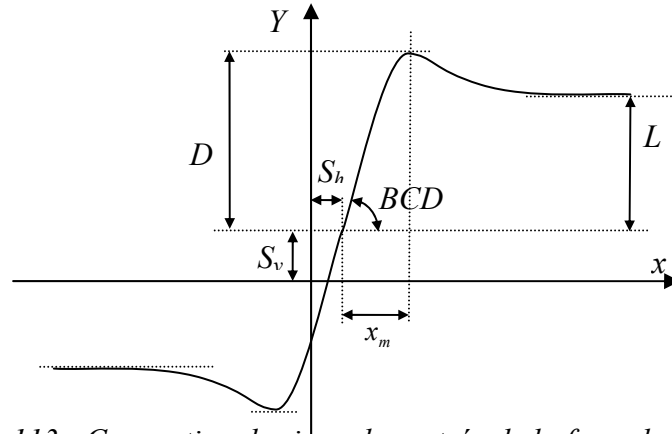


figure 113 : Convention de signe des entrées de la formule magique

B.3. Effort longitudinal pur en régime permanent

$$F_{x0}(\kappa, F_z) = D_x \cdot \sin(C_x \cdot \arctan(\varphi_x)) + S_{Vx} \quad (\text{B-1})$$

$$\varphi_x = B_x \cdot (1 - E_x) (\kappa + S_{Hx}) + E_x \arctan(B \cdot (\kappa + S_{Hx}))$$

Valeur de pic :

$$D_x(F_z) = (b_1 \cdot F_z^2 + b_2 \cdot F_z) \lambda_{\mu x} \quad (\text{B-2})$$

Facteur de forme :

$$C_x(F_z) = b_0 \cdot \lambda_{cx} \quad (\text{B-3})$$

Facteur d'échelle :

$$B_x(F_z) = \frac{BCD_x}{C_x \cdot D_x} \quad (\text{B-4})$$

Rigidité de glissement :

$$BCD_x(F_z) = (b_3 \cdot F_z^2 + b_4 \cdot F_z) e^{-b_5 \cdot F_z} \cdot \lambda_{Kx} \quad (\text{B-5})$$

Facteur de courbure :

$$E_x(F_z) = \min \left(\frac{(b_6 \cdot F_z^2 + b_7 \cdot F_z + b_8) \lambda_{Ex}}{1} \right) \quad (\text{B-6})$$

Offset horizontal :

$$S_{Hx}(F_z) = (b_9 \cdot F_z + b_{10}) \lambda_{Hx} \quad (\text{B-7})$$

Offset vertical :

$$S_{Vx}(F_z) = (b_{11} \cdot F_z + b_{12}) \lambda_{Vx} \cdot \lambda_{\mu x} \quad (\text{B-8})$$

B.4. Effort latéral pur en régime permanent :

$$F_y(\delta, F_z, \gamma) = D_y \cdot \sin(C_y \cdot \arctan(\varphi_y)) + S_{Vy} \quad (\text{B-9})$$

$$\varphi_y = B_y \cdot (1 - E_y) (\delta + S_{Hy}) + E_y \arctan(B_y \cdot (\delta + S_{Hy}))$$

Valeur de pic :

$$D_y(F_z) = (a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z) \lambda_{\mu y} \quad (\text{B-10})$$

Facteur de forme :

$$C_y(F_z) = a_0 \cdot \lambda_{cy} \quad (\text{B-11})$$

Facteur d'échelle :

$$B_y(F_z, \gamma) = \frac{BCD_y}{C_y \cdot D_y} \quad (\text{B-12})$$

Rigidité de glissement :

$$BCD_y(F_z, \gamma) = a_3 \cdot \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_z}{a_4}\right)\right) \cdot (1 - a_5 \cdot |\gamma|) \lambda_{Ky} \quad (\text{B-13})$$

Facteur de courbure :

$$E_y(F_z) = \min\left(\frac{(a_6 \cdot F_z + a_7) \lambda_{Ey}}{1}\right) \quad (\text{B-14})$$

Offset horizontal :

$$S_{Hy}(F_z) = (a_8 \cdot \gamma + a_9 \cdot F_z + a_{10}) \lambda_{Hy} \quad (\text{B-15})$$

Offset vertical :

$$S_{Vx}(F_z, \gamma) = (a_{12} \cdot F_z + a_{13} + (a_{112} \cdot F_z^2 + a_{111} \cdot F_z) \gamma) \lambda_{Vy} \cdot \lambda_{\mu y} \quad (\text{B-16})$$

B.5. Couple d'auto-alignement pur en régime permanent :

$$M_{z0}(\delta, F_z, \gamma) = D_z \cdot \sin(C_z \cdot \arctan(\varphi_z)) + S_{Vz} \quad (\text{B-17})$$

$$\varphi_z = B_z \cdot (1 - E_z) (\delta + S_{Hz}) + E_z \arctan(B_z \cdot (\delta + S_{Hz}))$$

Valeur de pic :

$$D_z(F_z) = (c_1 \cdot F_z^2 + c_2 \cdot F_z) \lambda_{\mu z} \quad (\text{B-18})$$

Facteur de forme :

$$C_z = c_0 \cdot \lambda_{cz} \quad (\text{B-19})$$

Facteur d'échelle :

$$B_z(F_z, \gamma) = \frac{BCD_z}{C_z \cdot D_z} \quad (\text{B-20})$$

Rigidité de glissement :

$$BCD_z(F_z, \gamma) = (c_3 \cdot F_z^2 + c_4 \cdot F_z) e^{-c_5 \cdot F_z} (1 - c_6 \cdot |\gamma|) \lambda_{Kz} \quad (\text{B-21})$$

Facteur de courbure :

$$E_z(F_z, \gamma) = (c_7 \cdot F_z^2 + c_8 \cdot F_z + c_9) (1 - c_{10} \cdot |\gamma|) \lambda_{Ez} \quad (\text{B-22})$$

Offset horizontal :

$$S_{Hz}(F_z, \gamma) = (c_{11} \cdot \gamma + c_{12} \cdot F_z + c_{13}) \lambda_{Hz} \quad (\text{B-23})$$

Offset vertical :

$$S_{Vx}(F_z, \gamma) = (c_{16} \cdot F_z + c_{17} + (c_{14} \cdot F_z^2 + c_{15} \cdot F_z) \gamma) \lambda_{Vz} \cdot \lambda_{\mu z} \quad (\text{B-24})$$

B.6. Couplages

B.6.1. Effort longitudinal couplé

$$F_x(\kappa, F_z, \delta) = G_x \cdot F_{x0} \quad (\text{B-25})$$

$$G_x(\kappa, \delta) = \frac{\cos(b_{m0} \cdot \arctan(BD \cdot (\delta - b_{m1})))}{\cos(b_{m0} \cdot \arctan(-BD \cdot b_{m1}))} \quad (\text{B-26})$$

$$BD(\kappa) = b_{m2} \cdot \cos(\arctan(b_{m3} \cdot \kappa)) \cdot \lambda_{X\alpha} \quad (\text{B-27})$$

B.6.2. Effort latéral couplé

$$F_y(\kappa, F_z, \delta, \gamma) = G_y \cdot F_{y0} + F_{yx} \quad (\text{B-28})$$

$$G_y(\kappa, \delta) = \frac{\cos(a_{m0} \cdot \arctan(BG \cdot (\kappa - a_{m1})))}{\cos(a_{m0} \cdot \arctan(-BG \cdot a_{m1}))} \quad (\text{B-29})$$

$$BG(\delta) = a_{m2} \cdot \cos(\arctan(a_{m3} \cdot (\delta - a_{m4}))) \cdot \lambda_{YK} \quad (\text{B-30})$$

$$F_{yx}(\kappa, F_z, \delta, \gamma) = a_{m5} \cdot F_z \cdot (\gamma - (a_{m6} \cdot F_z + a_{m7})) \cdot F_{xGliss} \cdot F_{xDel} \cdot \lambda_{VYK} \cdot \lambda_{\mu Y} \quad (\text{B-31})$$

$$F_{xGliss}(\kappa) = \sin(1.9 \cdot \arctan(a_{m8} \cdot \kappa)) \quad (\text{B-32})$$

$$F_{xDel}(\delta) = \cos(\arctan(a_{m9} \cdot \delta)) \quad (\text{B-33})$$

B.7. Transitoires

On pose : $V_r = R_r \cdot \omega$ $V_{SX} = V_x - R_r \cdot \omega$ $V_{SY} = V_y$

B.7.1. Transitoire sur le glissement longitudinal :

L'entrée κ est remplacée par :

$$\kappa' = \frac{u}{\text{sign}(V_r) \cdot \sigma'_X - u} \quad (\text{B-34})$$

Longueur de relaxation longitudinale :

$$\sigma'_X = \sigma_X \cdot \lambda_{\alpha X} \quad (\text{B-35})$$

Equation du transitoire longitudinal :

$$\sigma'_X \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + |V_r| \cdot u = -\sigma'_X \cdot V_{SX} \quad (\text{B-36})$$

B.7.2. Transitoire sur le glissement latéral :

L'entrée δ est remplacée par :

$$\delta' = \arctan \left(\frac{\frac{\sigma'_X}{\sigma'_Y} \cdot v}{v - \text{sign}(V_r) \cdot \sigma'_X} \right) \quad (\text{B-37})$$

Longueur de relaxation latérale :

$$\sigma'_Y = \sigma_Y \cdot \lambda_{\alpha Y} \quad (\text{B-38})$$

Equation du transitoire latéral :

$$\sigma'_Y \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + |V_r| \cdot v = -\sigma'_Y \cdot V_{SY} \quad (\text{B-39})$$

Annexe C

Manipulation de modèles linéaires par rapport aux paramètres

C.1. Opérations sur les modèles linéaires aux paramètres

C.1.1. Equivalence entre modèles linéaires par rapport aux paramètres

Soient $W_a.X_a$ et $W_b.X_b$ deux modèles linéaires par rapport aux paramètres de même dimension.

On vérifie l'égalité $W_a.X_a = W_b.X_b$ si et seulement si il existe deux matrices P et Q telles que :

$$W_b = W_a.P \quad (C-1)$$

$$X_b = Q.W_a \quad (C-2)$$

$$P.Q = I \quad (C-3)$$

C.1.2. Produit de modèles linéaires par rapport aux paramètres

C.1.2.1. Produit terme à terme de deux vecteurs

Soient A et B vecteurs ($n \times 1$) et ($n \times 1$) avec a_i et b_i leur $i^{\text{ème}}$ composante respective :

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n]^T \quad (C-4)$$

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad b_n]^T \quad (C-5)$$

Soit C le vecteur ($n \times 1$) résultant du produit terme à terme de A et B :

$$C = A \bullet B \quad (C-6)$$

$$C = [a_1.b_1 \quad a_2.b_2 \quad \cdots \quad a_{n-1}.b_{n-1} \quad a_n.b_n]^T \quad (C-7)$$

avec \bullet : produit scalaire.

C.1.2.2. Produit de convolution sur les colonnes d'une matrice

Soient A et B matrices ($n \times p_a$) et ($n \times p_b$) avec A_i et B_i leur $i^{\text{ème}}$ colonne respective :

$$A = [A_1 \quad A_1 \quad \cdots \quad A_{p_a-1} \quad A_{p_a}] \quad (C-8)$$

$$B = [B_1 \quad B_1 \quad \cdots \quad B_{p_b-1} \quad B_{p_b}] \quad (C-9)$$

Soit C la matrice ($n \times (p_a \times p_b)$) résultant du produit de convolution sur les colonnes de A et B :

$$C = A \otimes B \quad (C-10)$$

$$C = [A_1 \bullet B_1 \quad \cdots \quad A_1 \bullet B_{p_b} \mid A_2 \bullet B_1 \quad \cdots \quad A_2 \bullet B_{p_b} \mid \cdots \mid \cdots \mid A_{p_a} \bullet B_1 \quad \cdots \quad A_{p_a} \bullet B_{p_b}] \quad (C-11)$$

avec \bullet : produit terme à terme de deux vecteurs.

Le produit de convolution sur les colonnes d'une matrice n'est pas commutatif. On a :

$$A \otimes B = (B \otimes A).S \quad (C-12)$$

avec S matrice de permutation (les éléments de S valent 0 ou 1 et S est orthogonale).

C.1.2.3. Produit deux à deux de modèles linéaires par rapport aux paramètres

Soit $W_a.X_a$ et $W_b.X_b$ deux modèles linéaires par rapport aux paramètres. Leur produit est un modèle linéaire par rapport aux paramètres :

$$W_c.X_c = (W_a.X_a)(W_b.X_b) \quad (C-13)$$

avec W_c matrice ($n \times (p_a \times p_b)$)

$$W_c = W_a \otimes W_b \quad (C-14)$$

X_c vecteur ($(p_a \times p_b) \times 1$)

$$X_c = (X_a^T \otimes X_b^T)^T \quad (C-15)$$

avec \otimes : produit de convolution sur les colonnes d'une matrice.

\otimes est une loi de composition interne commutative munie de l'élément neutre 1.

Démonstration de la commutativité de \otimes :

$$(W_a.X_a)(W_b.X_b) = (W_a \otimes W_b)(X_a^T \otimes X_b^T)^T = (W_b \otimes W_a).S.S^T(X_b^T \otimes X_a^T)^T = (W_b.X_b)(W_a.X_a)$$

C.1.3. Somme de deux modèles linéaires par rapport aux paramètres

Soit $W_a.X_a$ et $W_b.X_b$ deux modèles linéaires par rapport aux paramètres. Leur somme est un modèle linéaire par rapport aux paramètres :

$$W_c.X_c = W_a.X_a + W_b.X_b \quad (C-16)$$

avec W_c matrice ($n \times (p_a + p_b)$)

$$W_c = [W_a \quad W_b] \quad (C-17)$$

X_c vecteur ($(p_a + p_b) \times 1$)

$$X_c = [X_a^T \quad X_b^T]^T \quad (C-18)$$

La somme de deux modèles linéaires par rapport aux paramètres vérifie :

- l'identité où l'élément neutre correspond à 0 ,
- l'inverse où $W_b.X_b$ l'inverse de $W_a.X_a$ est défini par : $W_b.X_b = -W_a.X_a$,
- l'associativité.
- la commutativité.

Démonstration inverse : $W_a.X_a - W_a.X_a = [W_a \quad -W_a] \begin{bmatrix} X_a \\ X_a \end{bmatrix} = W_a \cdot \left([I \quad -I] \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \right) . X_a = 0$

Démonstration commutativité : $W_a.X_a + W_b.X_b = [W_a \quad W_b] \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$

$$W_b.X_b + W_a.X_a = [W_b \quad W_a] \begin{bmatrix} X_b \\ X_a \end{bmatrix} = ([W_a \quad W_b] \cdot Q) \cdot \left(Q^{-1} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \right) \text{ avec } Q = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc $W_a.X_a + W_b.X_b = W_b.X_b + W_a.X_a$

C.1.4. Matrices de modèles linéaires aux paramètres.

L'ensemble des modèles linéaires aux paramètres noté \mathcal{WX} est un anneau commutatif muni de l'addition et de la multiplication. On peut donc l'associer à l'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathcal{WX})$ correspondant à l'ensemble des matrices ($m \times n$) à coefficients dans \mathcal{WX} .

C.2. Manipulation de modèles polynomiaux

C.2.1. Dérivée d'un polynôme

Soit le polynôme :

$$P_x = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i \quad (\text{C-19})$$

Où c_i est un vecteur colonne, n le degré du polynôme et x la grandeur d'entrée

Sa dérivé par rapport à x :

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) c_{i+1} \cdot x^i \quad (\text{C-20})$$

Sa dérivée d'ordre p :

$$\frac{\partial^p P_x}{\partial x^p} = \sum_{i=0}^{n-p} A_n^{n-p} \cdot c_{i+p} \cdot x^i \quad (\text{C-21})$$

avec

$$A_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (\text{C-22})$$

C.2.2. Antécédent de l'extremum d'un polynôme

Soit x_e le vecteur des antécédents des extremums. x_e est obtenu en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial P_x}{\partial x}(x_e) = 0 \quad (\text{C-23})$$

x_e est l'antécédent d'un maximum si :

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2}(x_e) \leq 0 \quad (\text{C-24})$$

x_e , est l'antécédent d'un minimum si :

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2}(x_e) \geq 0 \quad (\text{C-25})$$

Annexe D

Moindres carrés par factorisation orthogonale

Cette annexe est un bref récapitulatif et un prolongement des techniques des moindres carrés linéaires abordées dans [Kern 03], [Golub 96], [Lawson 74], [Van Huffel 91], [Gautier 90a], [Gautier 90b], [Gautier 91].

D.1. Problème des moindres carrés linéaires

Le problème générique des moindres carrés linéaires est de la forme :

$$Y = W.X + \rho \tag{D-1}$$

avec X : vecteur des paramètres ($p \times 1$)

Y : vecteur de sortie ($n \times 1$)

W : régresseur ($n \times p$)

ρ : résidu ($n \times 1$)

La solution au sens des moindres carrés : \hat{X} est celle permettant de minimiser la norme H2 du résidu $\|\rho\|_2$:

$$\hat{X} = \arg \min_X (\|\rho\|_2) \tag{D-2}$$

On désigne par $\|\rho_{\min}\|_2$ la valeur minimale du résidu en \hat{X} .

D.2. Réduction

D.2.1. Ellipsoïde et équation normale d'une solution au sens des moindres carrés

La fonction racine carrée étant monotone, la solution \hat{X} minimisant $\|\rho\|_2$ est la même que celle minimisant :

$$\|\rho\|_2^2 = \rho^T \cdot \rho \quad (\text{D-3})$$

En substituant (D-1) dans (D-3), on obtient l'équation d'une quadratique en X :

$$\|\rho\|_2^2 = Y^T \cdot Y - 2 \cdot X^T \cdot W^T \cdot Y + X^T \cdot W^T \cdot W \cdot X \quad (\text{D-4})$$

$W^T \cdot W$ est une matrice quadratique à valeurs propres positives : $W^T \cdot W \geq 0$. (D-4) correspond donc à l'équation d'un ellipsoïde.

La dérive seconde $\|\rho\|_2^2$ en tout X est donc nécessairement positive :

$$\frac{\partial^2 \|\rho\|_2^2}{\partial X^2}(X) = 2 \cdot W^T \cdot W \geq 0 \quad (\text{D-5})$$

Les extremums de $\|\rho\|_2^2$ sont donc nécessairement des minimums. Les valeurs de X pour lesquelles $\|\rho\|_2^2$ est extremum correspondent donc aux solutions au sens des moindres carrés définies dans (D-2) :

$$\frac{\partial \|\rho\|_2^2}{\partial X}(\hat{X}) = 0 \quad (\text{D-6})$$

En substituant (D-4) dans (D-6), on obtient :

$$W^T \cdot W \cdot \hat{X} = W^T \cdot Y \quad (\text{D-7})$$

(D-7) est dite équation normale de (D-1).

Dans le cas où la matrice $W^T \cdot W$ est singulière, la solution normale (D-7) a une infinité de solutions.

Dans le cas où la matrice $W^T.W$ est régulière (inversible), la solution normale (D-7) a une solution unique qui vaut :

$$\hat{X} = (W^T.W)^{-1}.W^T.Y \quad (D-8)$$

En substituant (D-8) dans (D-4), on obtient l'équation d'un ellipsoïde à centre:

$$\|\rho\|_2^2 = (X - \hat{X})^T.(W^T.W)(X - \hat{X}) + \|\rho_{\min}\|_2^2 \quad (D-9)$$

avec $\|\rho_{\min}\|_2$ norme minimale du résidu atteinte pour $X = \hat{X}$:

$$\|\rho_{\min}\|_2^2 = Y^T.[I - W.(W^T.W)^{-1}.W^T]Y \quad (D-10)$$

D.2.2. Equation normale factorisée

Le calcul numérique de l'équation normale à partir de la $W^T.W$ entraîne une perte de précision et doit être évité. La factorisation QR de W permet d'éviter ce problème en conduisant à l'équation normale factorisée suivante :

$$W = Q_w.R_w \quad (D-11)$$

Où Q_w est une matrice pseudo orthogonale $n \times p$: $Q_w^T.Q_w = I$

R_w est une matrice triangulaire $p \times p$

En substituant (D-11) **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** dans (D-7), il vient

$$R_w^T.(R_w.\hat{X} - B) = 0 \quad (D-12)$$

avec R_w matrice triangulaire ($p \times p$) ,

B vecteur ($p \times 1$)

$$B = Q_w^T.Y \quad (D-13)$$

La solution \hat{X} correspond à la solution au sens des moindres carrés de (D-1) peut donc être obtenue par résolution de l'équation normale factorisée :

$$B = R_w.\hat{X} \quad (D-14)$$

En appliquant successivement (D-11) et (D-14), le vecteur des résidus correspondant à la solution des moindres carrés vaut :

$$\rho_{\min} = Y - W.\hat{X} = Y - Q_w.R_w.\hat{X} = Y - Q_w.B \quad (D-15)$$

La norme du résidu correspondant à la solution des moindres carrés vaut donc:

$$\|\rho_{\min}\|_2^2 = (Y - Q_w \cdot B)^T (Y - Q_w \cdot B) = Y^T Y + B^T B - 2 \cdot Y^T Q_w \cdot B \quad (\text{D-16})$$

En appliquant (D-13), il vient :

$$\|\rho_{\min}\|_2^2 = Y^T Y - B^T B = \|Y\|_2^2 - \|B\|_2^2 \quad (\text{D-17})$$

Soit la matrice M et la décomposition QR associée :

$$M = [W \quad -Y] \quad (\text{D-18})$$

$$M = Q_m \cdot R_m \quad (\text{D-19})$$

avec M matrice $n \times (p+1)$

Q_m matrice orthogonale en colonnes $n \times (p+1)$

R_m matrice triangulaire $(p+1) \times (p+1)$ à éléments diagonaux positifs

La matrice R_m est partitionnée de la manière suivante :

$$R_m = \begin{bmatrix} R_w & -B \\ 0 & \|\rho_{\min}\|_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-20})$$

Démonstration : en substituant (D-11) et (D-13) dans (D-4) on obtient :

$$\|\rho\|_2^2 = X^T \cdot R_w^T \cdot R_w \cdot X - 2 \cdot X^T R_w^T \cdot B + \|\rho_{\min}\|_2^2 + B^T B \quad (\text{D-21})$$

En substituant la matrice M définie équation (D-18) dans (D-4) et en appliquant la factorisation (D-19), on a :

$$\|\rho\|_2^2 = \rho^T \cdot \rho = [X^T \quad 1] R_m^T \cdot R_m \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D-22})$$

Soit le partitionnement suivant de la matrice R_m :

$$R_m = \begin{bmatrix} R_{m11} & R_{m12} \\ 0 & R_{m22} \end{bmatrix} \quad (\text{D-23})$$

En substituant (D-23) dans (D-22) :

$$\|\rho\|_2^2 = X^T \cdot R_{m11}^T \cdot R_{m11} \cdot X - 2 \cdot X^T R_{m11}^T \cdot R_{m12}^T + R_{m22}^T \cdot R_{m22} + R_{m12}^T \cdot R_{m12} \quad (\text{D-24})$$

L'identification des termes de (D-24) sur ceux de (D-21) vérifie :

$$R_{m11} = R_w, R_{m12} = B \text{ et } R_{m22} = \|\rho_{\min}\|_2$$

D.2.3. Moindres carrés pondérés

Soit G une matrice de pondération $n \times n$ et système pondéré (D-1) pondéré par G :

$$Y_p = W_p + \rho_p \tag{D-25}$$

avec $Y_p = G.Y$, $W_p = G.W$ et $\rho_p = G.\rho$.

La solution au sens des moindres carrés de (D-25) vérifie :

$$\hat{X}_p = \arg \min_X \left(\|\rho_p\|_2^2 \right) = \arg \min_X \left(\rho^T \cdot (G^T \cdot G) \cdot \rho \right) \tag{D-26}$$

Les moindres carrés pondérés permettent donc de paramétrer le critère quadratique à minimiser.

D.2.4. Moindres carrés pondérés par paquets

Le système (D-1) est formé d'équations formant k sous systèmes :

$$\{Y_i = W_i \cdot X + \rho_i\}_{1 \leq i \leq k} \tag{D-27}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_k \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \tag{D-28}$$

avec Y_i et ρ_i vecteurs $n_i \times 1$, W_i matrice $n_i \times p$.

Chaque paquet i est associé à un poids P_i . On définit la matrice de pondération G :

$$G = \text{diag}(P_1 \cdot I_{n_1} \quad P_2 \cdot I_{n_2} \quad \dots \quad P_{k-1} \cdot I_{n_{k-1}} \quad P_k \cdot I_{n_k}) \tag{D-29}$$

Le système (D-28) pondéré par G vaut :

$$\begin{bmatrix} P_1 \cdot Y_1 \\ P_2 \cdot Y_2 \\ \vdots \\ P_k \cdot Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \cdot W_1 \\ P_2 \cdot W_2 \\ \vdots \\ P_k \cdot W_k \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} P_1 \cdot \rho_1 \\ P_2 \cdot \rho_2 \\ \vdots \\ P_k \cdot \rho_k \end{bmatrix} \quad (\text{D-30})$$

Sa solution au sens des moindres carrés vérifie :

$$\hat{X} = \arg \min_X \left(\sum_{i=1}^k P_i^2 \cdot \|\rho_i\|_2^2 \right) \quad (\text{D-31})$$

D.2.5. Moindres carrés pondérés itératifs par paquets

L'équation normale relative à (D-30) se déduit de la matrice \tilde{R}_k dont le partitionnement est indiqué à l'équation (D-20). La matrice \tilde{R}_k est obtenue à l'étape $j=k$ (k étant le nombre de paquets d'équations de (D-27)) de la récursion suivante :

$$\begin{cases} \tilde{R}_0 = \emptyset \\ M_j = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{j-1} \\ R_i \cdot P_i \end{bmatrix} \\ Q_j \cdot \tilde{R}_j = M_j \end{cases} \quad (\text{D-32})$$

avec P_i poids associé au $i^{\text{ième}}$ paquet de (D-27),

R_i matrice triangulaire $(p+1) \times (p+1)$ à élément diagonaux positifs est obtenue par la décomposition QR de la concaténation des matrices W_i et Y_i issues du $i^{\text{ième}}$ paquet de (D-27) :

$$Q_i \cdot R_i = [W_i \quad -Y_i] \quad (\text{D-33})$$

Démonstration : La démonstration est faite en deux temps. On démontre d'abord l'unicité de la factorisation QR. On peut alors prouver que l'équation normale obtenue par factorisation QR de la concaténation de deux paquets d'équations est la toujours la même, que les paquets aient été normalisé ou non par factorisation QR. Ce résultat appliqué de proche en proche est suffisant pour prouver qu'une factorisation itérative donne les mêmes résultats qu'une factorisation non itérative.

Proposition 1 : unicité de la décomposition QR

Soient Q_1, Q_2 matrices orthogonales $n \times p, n \times p$: $Q_1^T Q_1 = Q_2^T Q_2 = I_p$

R_1, R_2 matrices triangulaires supérieures $p \times p$ dont les éléments diagonaux sont strictement positifs.

M matrice $n \times p$ telle que :

$$M = Q_1 \cdot R_1 \tag{D-34}$$

$$M = Q_2 \cdot R_2 \tag{D-35}$$

On vérifie nécessairement $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$.

Démonstration 1

Par définition, les matrices R_1 et R_2 sont triangulaires n'ont pas d'élément diagonal nul. Elles sont donc inversibles par méthode de remontée. On déduit de (D-34) et (D-35) :

$$Q_2^T \cdot Q_1 = R_2 \cdot R_1^{-1} \tag{D-36}$$

Le produit de deux matrices orthogonales étant une matrice orthogonale, la matrice $Q_2^T \cdot Q_1$ est orthogonale.

L'inverse d'une matrice triangulaire aux éléments diagonaux positifs est une matrice triangulaire aux éléments diagonaux positifs. De plus, le produit de deux matrices triangulaires aux éléments diagonaux positifs est une matrice triangulaire aux éléments diagonaux positifs. La quantité $R_2 \cdot R_1^{-1}$ est donc une matrice triangulaire aux éléments diagonaux positifs.

L'équation (D-36) impose donc à $R_2 \cdot R_1^{-1}$ d'être une matrice triangulaire orthogonale. L'association de ces deux propriétés n'est possible que si cette matrice est diagonale avec des éléments diagonaux valant -1 ou +1. Puisque les éléments diagonaux de $R_2 \cdot R_1^{-1}$ sont positifs, on a nécessairement :

$$R_2 \cdot R_1^{-1} = I \quad (\text{D-37})$$

On a donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

Proposition 2 : équivalence entre factorisation directe et factorisation itérative

Soient M_1, M_2 matrices $n_1 \times p$, $n_2 \times p$ et leur factorisation QR :

$$Q_1 \cdot R_1 = M_1 \quad (\text{D-38})$$

$$Q_2 \cdot R_2 = M_2 \quad (\text{D-39})$$

M_T concaténation verticale de M_1 et M_2 et sa factorisation QR :

$$M_T = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = Q_T \cdot R_T \quad (\text{D-40})$$

M_{Ti} concaténation verticale de R_1 et R_2 issues de (D-38) et (D-39) et sa factorisation QR :

$$M_{Ti} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = Q_{Ti} \cdot R_{Ti} \quad (\text{D-41})$$

Si les matrices R_T et R_{Ti} sont triangulaires supérieures avec des éléments diagonaux strictement positifs, elles vérifient :

$$R_{Ti} = R_T \quad (\text{D-42})$$

Démonstration 2

En substituant (D-38) et (D-39) dans (D-40), on obtient :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T \cdot M_1 \\ Q_2^T \cdot M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-43})$$

D'après (D-41) :

$$R_{Ti} = Q_{Ti}^T \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-44})$$

En substituant (D-44) dans (D-43) :

$$R_{Ti} = \tilde{Q}_T^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-45})$$

$$\text{avec } \tilde{Q}_T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} Q_{Ti}$$

On déduit de (D-45):

$$M_T = \tilde{Q}_T \cdot R_{Ti} \quad (\text{D-46})$$

$$\tilde{Q}_T^T \tilde{Q}_T = Q_{Ti}^T \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix} Q_{Ti} = Q_{Ti}^T Q_{Ti} = I \quad (\text{D-47})$$

D'après l'équation (D-47), \tilde{Q}_T est une matrice orthogonale en colonnes et par définition, R_{Ti} (D-41) est une matrice triangulaire à éléments diagonaux strictement positifs. (D-46) est donc une factorisation QR de M . D'après la proposition 1, cette décomposition est unique. On a donc : $R_{Ti} = R_T$.

D.3. Paramètres identifiables

Dans le cas d'un système dégénéré où la matrice W de (D-1) n'est pas de rang plein, il y a une infinité de solutions au sens des moindres carrés. Ces solutions dépendent de la valeur quelconque de certains paramètres dits non identifiables. Un choix possible consiste à annuler leur valeur de sorte à caractériser la solution au sens des moindres carrés de manière unique sur les paramètres identifiables.

Annuler les paramètres non identifiables revient à simplifier le modèle (D-1) en supprimant les colonnes de la matrice W relatives aux paramètres nuls, non identifiables. Le modèle obtenu est appelé « modèle minimal » car il dépend d'un nombre minimum de paramètres identifiables appelés aussi « paramètres minimaux ». Dans le cas du modèle minimal structurel, dont l'identifiabilité est uniquement liée aux équations du modèle, les paramètres minimaux sont appelés paramètres de base [Gautier 90].

Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution des moindres carrés soit restreinte aux paramètres identifiables est que la matrice R_w du système normalisé factorisé soit régulière (inversible). R_w étant triangulaire, il suffit qu'il n'y ait pas de coefficient nul sur sa diagonale. Numériquement la valeur nulle est définie à une tolérance près : ε . L'index I des paramètres identifiable est défini de la manière suivante :

$$I = \left\{ 1 \leq i \leq p \mid |R_{w_{ii}}| > \varepsilon \right\} \quad (\text{0-48})$$

Soit S la matrice de sélection des colonnes de W relatives à des paramètres identifiables. S est définie à partir de matrice identité $p \times p$ dont les colonnes indexées dans I sont supprimées. Le système simplifié de rang plein relatif à (D-1) s'écrit :

$$Y = W.S.X' + \rho' \quad (\text{D-49})$$

Avec S matrice de sélection $p \times c$

X' vecteur des paramètres identifiables $c \times 1$,

ρ' vecteur résidu du système simplifié $n \times 1$ de norme minimale : $\|\rho'_{\min}\|_2$

Soit R'_S la matrice $(p+1) \times (c+1)$ correspondant à la matrice R_m de (D-20) à laquelle est appliquée la matrice de sélection S :

$$R'_S = \begin{bmatrix} R_w.S & -B \\ 0 & \|\rho'_{\min}\|_2 \end{bmatrix} \quad (\text{D-50})$$

avec R_w , B et $\|\rho'_{\min}\|_2$ grandeurs relatives à l'équation normale factorisée de (D-1)

(D-50) permet de calculer l'équation normale factorisée relative à (D-49) :

$$B' = R'_w.X' \quad (\text{D-51})$$

avec R'_w matrice triangulaire inversible ($c \times c$) et B' vecteur $c \times 1$ déduits de la factorisation QR de R'_S :

$$R'_S = Q'_m.R'_m \quad (\text{D-52})$$

avec Q'_m matrice orthogonale sur les colonnes $n \times (c+1)$

R'_m matrice triangulaire $(c+1) \times (c+1)$ à éléments diagonaux positifs vérifiant le partitionnement suivant :

$$R'_m = \begin{bmatrix} R'_w & -B' \\ 0 & \|\rho'_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

Démonstration

Soit : $E = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (D-50) peut s'écrire :

$$R'_S = R_m.E \quad (\text{D-53})$$

En substituant (D-50)(D-53) dans (D-52) :

$$R_m.E = Q'_m.R'_m \quad (\text{D-54})$$

En multipliant à gauche par Q_m :

$$Q_m \cdot R_m \cdot E = Q_m \cdot Q'_m \cdot R'_m \quad (D-55)$$

En appliquant (D-18)

$$[W \quad -Y] \cdot E = Q_m \cdot Q'_m \cdot R'_m \quad (D-56)$$

La matrice $Q_m \cdot Q'_m$ est le produit de deux matrices orthogonales, elle est donc orthogonale. Par définition dans (D-52), R'_m est une matrice triangulaire $(c+1) \times (c+1)$ à éléments diagonaux positifs. L'équation (D-56) correspond donc à la factorisation QR de la matrice $[W \cdot S \quad -Y]$. D'après l'équation (D-20), la matrice R obtenue par cette factorisation vérifie le partitionnement suivant :

$$\begin{bmatrix} R'_w & -B' \\ 0 & \|\rho'_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

Où R'_w , B' et $\|\rho'_{\min}\|_2$ sont relatifs à l'équation normale factorisée de (D-49)

On a la relation suivante entre X' , vecteur des paramètres identifiables et X , vecteur des paramètres initiaux :

$$X' = (S^T \cdot R_w \cdot S)^{-1} \cdot S^T \cdot R_w \cdot X \quad (D-57)$$

Démonstration :

Etant donnée la structure triangulaire de la matrice R_w de l'équation normale factorisée, supprimer la $i^{\text{ième}}$ colonne (ou paramètre) revient à supprimer la $i^{\text{ième}}$ ligne (ou équation). L'application de la matrice S aux sorties de l'équation normale s'écrit :

$$S^T B = S^T \cdot R_w \cdot X \quad (D-58)$$

L'équation (D-58) en fonction des paramètres identifiables X' :

$$S^T B = S^T \cdot R_w \cdot S \cdot X' \quad (D-59)$$

La substitution de (D-58) dans (D-59) permet d'obtenir la relation entre paramètres initiaux et paramètres identifiables :

$$X' = (S^T \cdot R_w \cdot S)^{-1} \cdot S^T \cdot R_w \cdot X \quad (D-60)$$

Annexe E

Eléments de la dynamique véhicule

La dynamique véhicule est l'étude du comportement véhicule dans la plage d'utilisation fonctionnelle. D'un point de vue dynamique, il s'agit du domaine statique et de celui des basses fréquences où sont réalisées les fonctions de guidage et d'agrément (de 0 à 15Hz). Les situations acoustiques, d'impact et de fatigue ne rentrent pas dans ce cadre.

Dans le domaine de la dynamique véhicule, la voiture peut être considérée comme un assemblage entre :

- la caisse,
- les quatre masses non suspendues,
- les quatre roues,
- le sol.

Ces derniers sont mis en interaction les uns des autres par les systèmes suivants :

- le système de suspension (schématiquement : 4 suspensions et 2 barres anti devers),
- les pneumatiques,
- le système de direction,
- les transmissions,
- le système de freinage.

[Brossard 96], [Halconruy 95], [Gillespie 92], [Milliken 95], fournissent des explications détaillées sur la dynamique véhicule.

E.1. Solide caisse

La caisse a 6 degrés de liberté par rapport au sol : avance, ballant, pompage, roulis, tangage, lacet. Elle est soumise aux 4 torseurs d'efforts issus des 4 masses non suspendues et aux efforts aérodynamiques.

Le véhicule est conçu de sorte à ce l'avance et le lacet soient commandables. Mais il y a nécessairement des interactions dynamiques avec les autres composantes (roulis en cas de virage, pompage sur sol bosselé, tangage en freinage, ballant en vent latéral...). L'art de concevoir un véhicule est de concilier :

- Sécurité active : commandabilité et stabilité en lacet, en avance
- Agrément : précision et rapidité de la commande
- Confort : rejet des perturbations

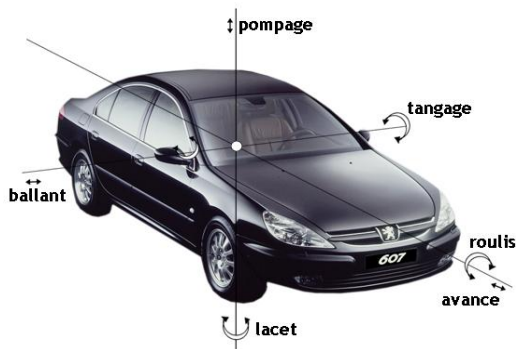


figure 114: Mouvements de la caisse par rapport au sol



figure 115 : Aérodynamisme de caisse

E.2. Solides masses non suspendues

La caisse est posée sur des masses non suspendues qui peuvent bouger par rapport à la caisse dans les 6 directions : variation de demi empattement, variation de demi voie, débattement de suspension, enroulement, carrossage, braquage (ou pince sur les roues arrières).

En pratique ces degrés de liberté ne sont pas indépendants les uns des autres. La conception du train les oblige à suivre des lois cinématiques qui dépendent :

- des débattements de suspension,
- de l'angle au volant,
- des efforts extérieurs (élastocinématique)

Par exemple, l'axe de braquage réel sur véhicule est incliné autour de l'axe latéral avec l'angle de chasse et autour de l'axe longitudinal par l'angle de pivot. Ainsi lorsqu'on tourne le volant, la roue prend à la fois de la pince, du carrossage et de l'enroulement. De même, la pince, le carrossage et l'enroulement changent suivant le débattement de suspension.

La cinématique des masses non suspendues couplée à celle des roues permet d'assurer la fonction guidage et de rejet des perturbations de la caisse. Elles sont soumises aux efforts de liaison avec la caisse et avec la roue.

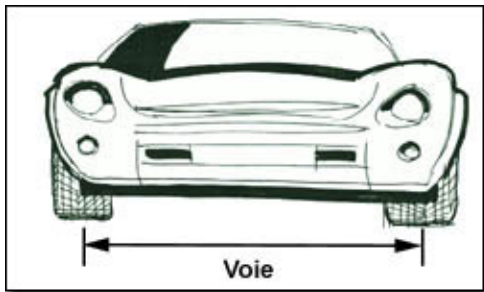


figure 116: Voie

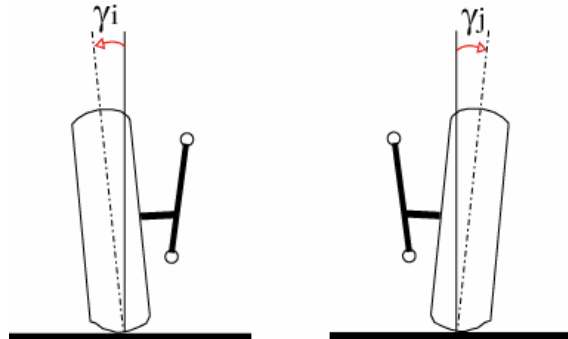


figure 117: Angle de carrossage

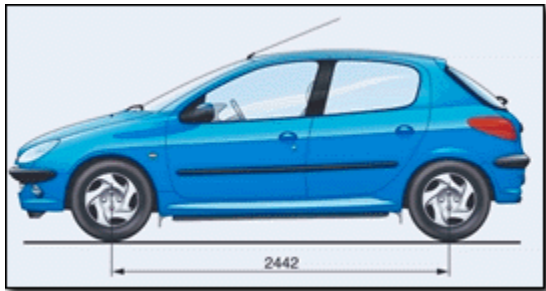


figure 118: Empattement

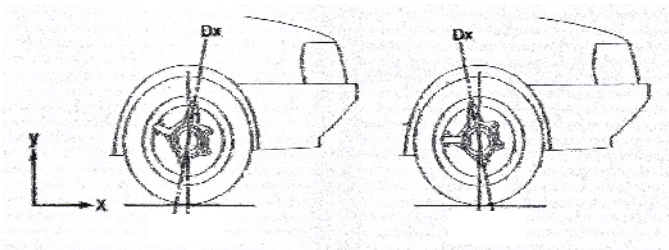


figure 119: Angle d'enroulement

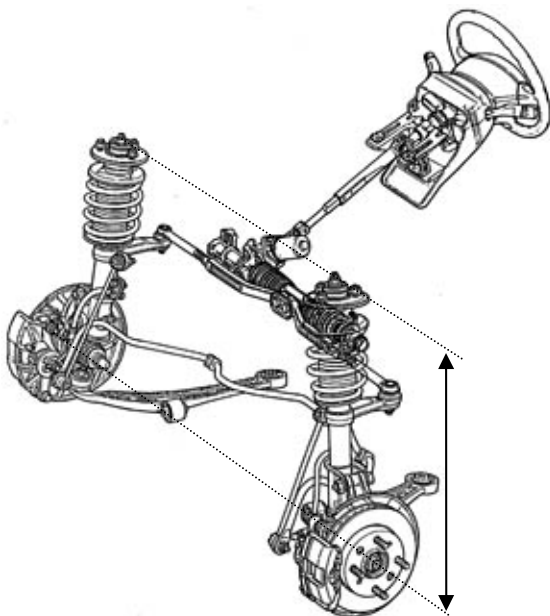


figure 120: Débattement de suspension

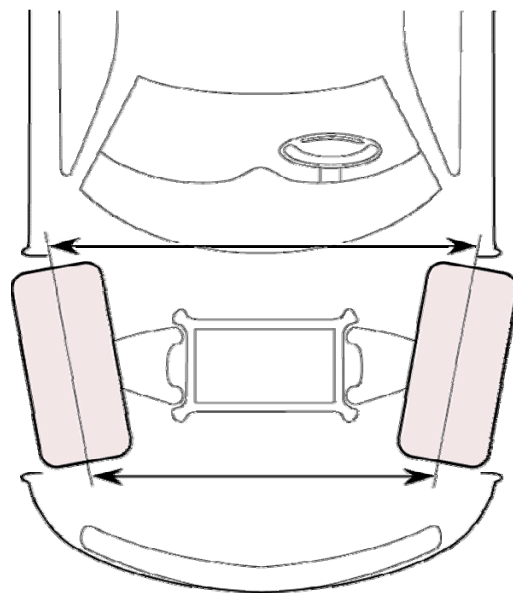


figure 121: Angle de pince

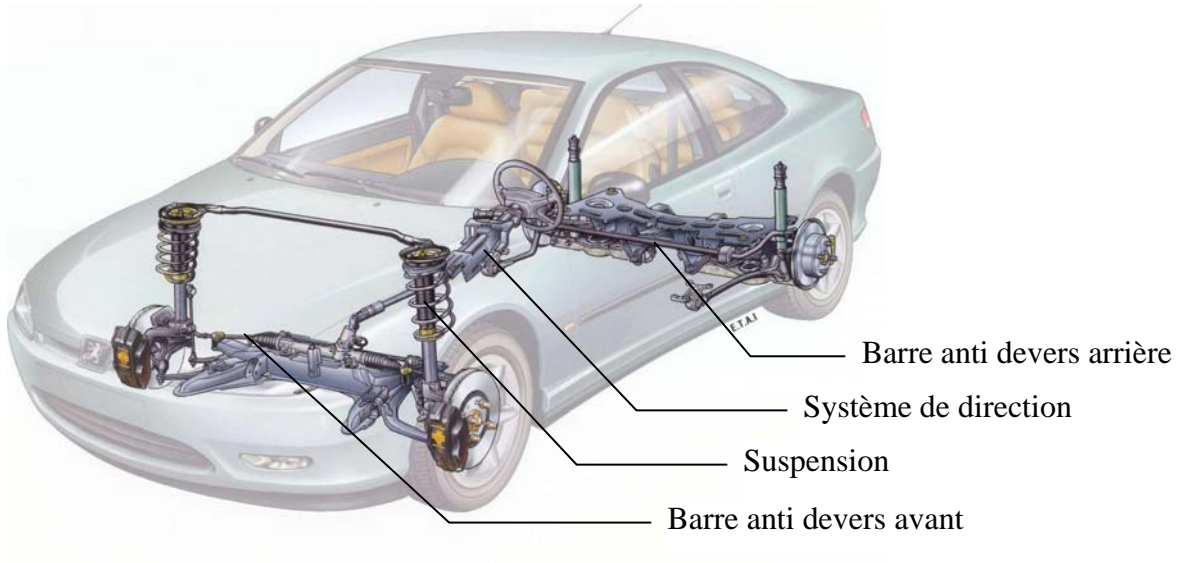


figure 122 : Systèmes de suspension, direction et freinage

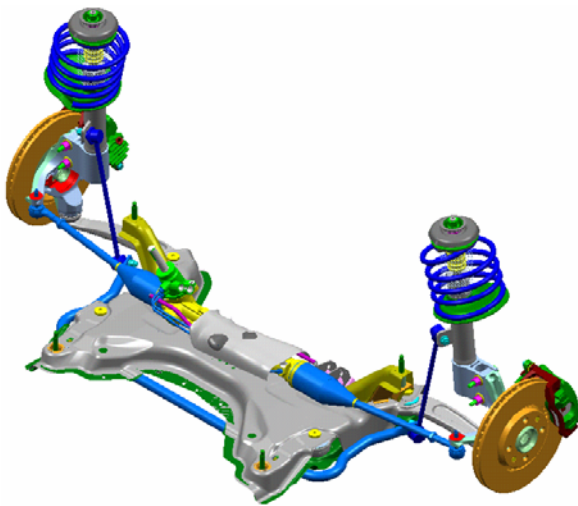


figure 123 : Train avant



figure 124 : Barre anti-devers avant

E.3. Solide roue

Les roues n'ont qu'un degré de liberté par rapport aux masses suspendues : la rotation autour de l'axe de roue. Elles permettent de faire la liaison à 6ddl entre l'aire de contact et les masses non suspendues (voir chapitre 2).

Les quatre roues assurent l'interaction pneumatique/sol via l'aire de contact. Elles sont soumises sur l'axe de rotation aux efforts de contact avec le sol et aux couples de traction/propulsion et/ou de freinage.

La roue est composée d'une jante et d'un pneumatique qui constitue le premier système guidage au sol :

- les sculptures du pneumatique permettent de drainer l'eau en dehors de l'aire de contact et d'assurer l'adhérence sur sol mouillé,
- la structure permet de générer les efforts de tirage,
- les raideurs de jante et de pneu couplées aux inerties assurent le filtrage des efforts

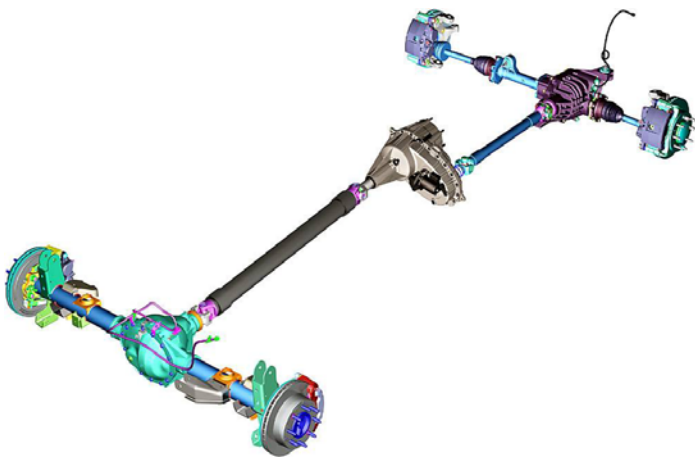


figure 125 : Chaîne de transmission

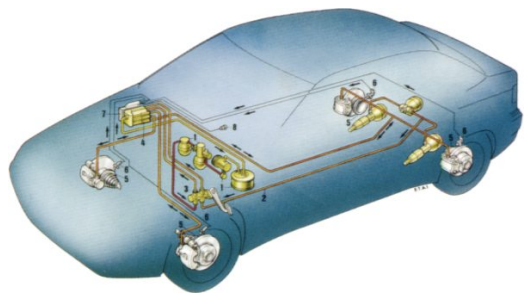


figure 126: Système de freinage

Annexe F

Robotique articulaire

Cette annexe présente le formalisme utilisé en robotique pour décrire les systèmes multi-corps arborescents et pour calculer de manière systématique les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. La première partie présente la modélisation géométrique, avec l'utilisation de la description systématique de *Denavit & Hartenberg* modifiée pour les systèmes arborescents (§F.1) puis les possibilités que ce formalisme offre dans les calculs des modèles géométriques et cinématiques sont développés en §0 et §0. Ces modèles dépendent des paramètres géométriques du système. Le modèle dynamique inverse est présenté §0. Ce dernier dépend non seulement des paramètres géométriques mais aussi des paramètres dynamiques du système : masse, matrice d'inertie, moment d'inertie. Il est possible d'écrire le modèle dynamique de façon linéaire par rapport à ces paramètres en vue de leur identification.

F.1. Description des systèmes à structure arborescente

Le formalisme de *Denavit & Hartenberg* modifiée (*DHM*) est couramment utilisé en robotique pour décrire des robots à chaîne simple, arborescente ou fermée [Khalil 99]. Elle est basée sur une approche multi-corps et une décomposition en éléments simples des degrés de liberté du système étudié.

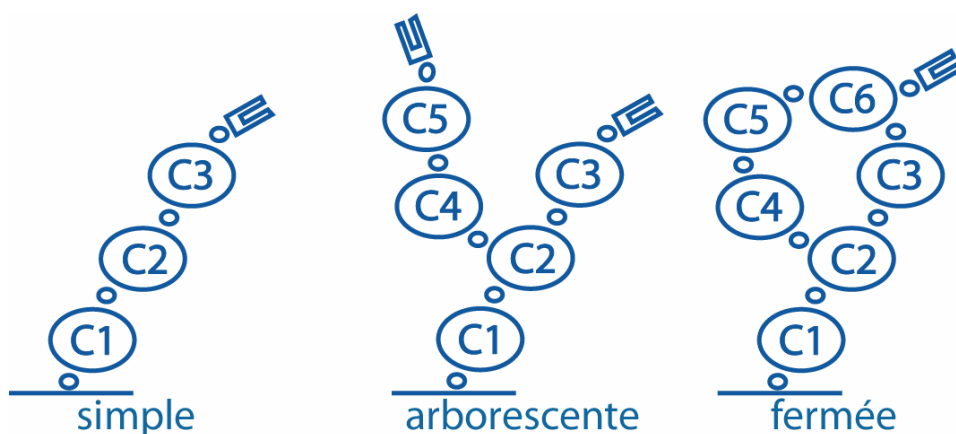


figure 127 : Les différentes structures de modélisation

La structure mécanique du système Σ étudié est constituée d'un ensemble de corps rigides (figure 127) assemblés entre eux par des liaisons mécaniques appelées articulations. Le système ainsi défini est composé de $n + 1$ corps rigides notés C_j , avec $j = 0, \dots, n$, reliés entre eux par n articulations. Le dernier corps de cette chaîne est appelé organe terminal et le premier corps : la base du système. Par convention les corps, ainsi que les articulations, sont numérotés de façon croissante lors du parcours d'une chaîne depuis la base C_0 , vers l'organe terminal C_n . Le corps C_j est articulé via l'articulation j , c'est à dire que l'articulation j relie le corps C_j et son antécédent, le corps $C_{a(j)}$, lors du parcours d'une chaîne depuis la base (figure 128). Le vecteur \mathbf{q} ($n \times 1$) désigne le vecteur des coordonnées généralisées associées au système Σ . Il est composé des n variables articulaires q_j pour $j = 1$ à n .

La modélisation de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de la morphologie des systèmes étudiés. C'est dans ce but que les conventions de *Denavit et Hartenberg Modifiées (DHM)* sont utilisées. Elles permettent une description homogène, avec un nombre minimum de paramètres géométriques, des architectures à chaîne simple ou complexe des systèmes mécaniques articulés [Khalil 86].

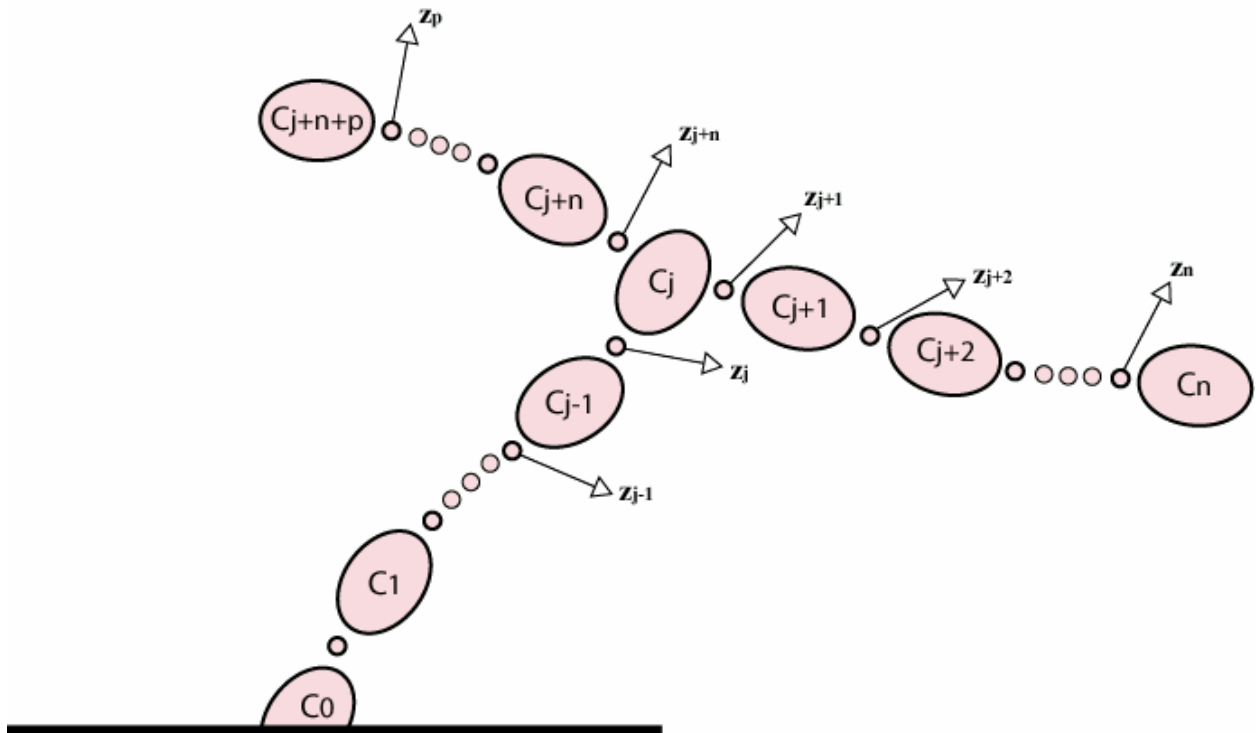


figure 128 : Modélisation des structures arborescentes

Dans cette description les articulations ne représentent qu'un seul degré de liberté. Elles peuvent être de deux types : prismatique ou rotoïde (figure 129). Leur association deux permet de définir toutes les articulations plus complexes. Par exemple :

- une rotule se modélise en associant trois rotoïdes d'axes concourants,
- un pivot glissant par une rotoïde et une prismatique de même axe,
- un corps libre évoluant dans l'espace par l'association de trois articulations prismatiques et de trois articulations rotoïdes.

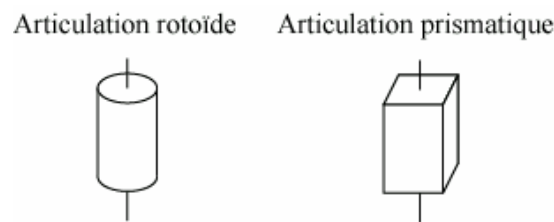


figure 129 : Articulations DHM : rotoïde et prismatique

Le corps C_j peut être soit réel, soit virtuel. Un corps est réel lorsqu'il a une représentation physique dans le système étudié. Il a alors une masse et une inertie. On désigne par n_R le nombre de corps réels. Un corps virtuel est un corps de la chaîne cinématique du système n'ayant pas d'existence physique dans la structure mécanique de celui-ci. Autrement dit ce corps ne possède ni masse, ni inertie propre. Il s'emploie dans deux cas de figure :

- la matérialisation d'un degré de liberté supplémentaire : modélisation des articulations complexes. Par exemple pour un pivot glissant entre deux corps, il est nécessaire d'utiliser un corps virtuel entre le pivot et la rotoïde qui servent à définir l'articulation.
- la définition d'un repère respectant des conventions d'orientation autres que celles imposées par le paramétrage de *DHM*.

Afin d'obtenir les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques du système, il faut définir un jeu de repères pour chacune des articulations. Soit R_j le repère associé au corps C_j . Il est défini par son origine O_j et une base orthonormée dont les axes sont notés $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_j)$.

Le corps C_j est le successeur du corps $C_{a(j)}$ et l'antécédent du corps $C_{s(j)}$. Le repère R_j est défini de la façon suivante :

- l'axe \mathbf{z}_j est porté par l'axe de l'articulation j ,
- l'axe \mathbf{x}_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes \mathbf{z}_j et l'un des $\mathbf{z}_{s(j)}$, et orienté arbitrairement.
- L'axe \mathbf{y}_j est pris de telle sorte que la base formée par $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_j)$ soit orthonormale directe.

En notant $i = a(j)$, l'indice du corps antécédent de C_j . L'axe \mathbf{u}_j est alors construit. Il est pris sur la perpendiculaire commune aux axes \mathbf{z}_i et \mathbf{z}_j . Le changement de repère entre R_i et R_j s'effectue à l'aide des six paramètres géométriques $b_j, \gamma_j, d_j, \alpha_j, r_j$ et θ_j définis par :

- b_j est la distance entre \mathbf{x}_i et \mathbf{u}_j le long de \mathbf{z}_i ,
- γ_j est l'angle entre \mathbf{x}_i et \mathbf{u}_j autour de \mathbf{z}_i ,
- α_j est l'angle entre les axes \mathbf{z}_i et \mathbf{z}_j correspondant à une rotation autour de l'axe \mathbf{u}_j ,
- d_j est la distance entre les axes \mathbf{z}_i et \mathbf{z}_j le long de l'axe \mathbf{u}_j ,
- θ_j est l'angle entre les axes \mathbf{u}_j et \mathbf{x}_j correspondant à une rotation autour de l'axe \mathbf{z}_j ,
- r_j est la distance entre les axes \mathbf{u}_j et \mathbf{x}_j le long de l'axe \mathbf{z}_j .

La matrice de transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ entre le repère R_i et le repère R_j s'écrit alors :

$${}^i\mathbf{T}_j = \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_j) \text{Trans}(\mathbf{z}, b_j) \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_j) \text{Trans}(\mathbf{x}, d_j) \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_j) \text{Trans}(\mathbf{z}, r_j) \quad (\text{F-1})$$

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j - C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F-2})$$

avec $Cx = \cos(x)$ et $Sx = \sin(x)$

Lorsque le corps i a un seul successeur C_j , l'axe \mathbf{x}_i est alors confondu avec \mathbf{u}_j et $b_j = 0$ et $\gamma_j = 0$. La matrice de transformation ${}^i\mathbf{T}_j$ est donnée par :

$${}^i\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F-3})$$

La variable articulaire q_j associée à l'articulation j est définie par :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \text{ avec } \bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j \quad (\text{F-4})$$

Où :

$\sigma_j = 0$ si l'articulation j est rotoïde,

$\sigma_j = 1$ si l'articulation j est prismatique.

Par convention, pour une articulation bloquée $\sigma = 2$. Dans ces conditions les repères R_i et R_j sont solidaires du même corps C_i .

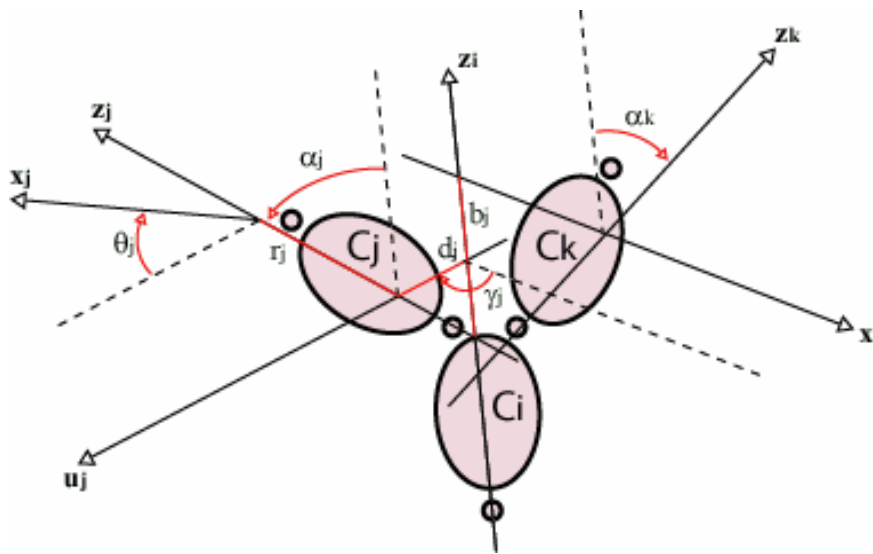


figure 130 : Paramètres géométriques pour un corps à plus de deux articulations

F.2. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique est la relation entre la position et l'orientation de l'organe terminal dans le repère de base R_0 et les coordonnées articulaires.

Le modèle géométrique direct (*MGD*) d'un système à chaîne arborescente est un ensemble de matrices de passage (autant que d'organes terminaux). Chaque matrice permet d'exprimer la situation d'un organe terminal dans l'espace cartésien en fonction des coordonnées articulaires.

La matrice de passage pour la branche de l'arborescence portant le corps terminal k est notée ${}^0\mathbf{T}_k$. C'est la composition des matrices de transformation exprimant la position du repère R_k dans le repère R_0 :

$${}^0\mathbf{T}_k = {}^0\mathbf{T}_1 \dots {}^{a(a(k))}\mathbf{T}_{a(k)} {}^{a(k)}\mathbf{T}_k \quad (\text{F-5})$$

Elle s'exprime alors par :

$${}^0\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{s}_k & {}^0\mathbf{n}_k & {}^0\mathbf{a}_k & {}^0\mathbf{P}_k \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{A}_k & {}^0\mathbf{P}_k \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{F-6})$$

Avec :

${}^0\mathbf{s}_k, {}^0\mathbf{n}_k, {}^0\mathbf{a}_k$ les vecteurs (3×1) des coordonnées des vecteurs unitaires $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ et \mathbf{z}_k dans le repère R_0

${}^0\mathbf{P}_k$ le vecteur (3×1) des coordonnées de l'origine O_k du repère R_k dans le repère R_0

${}^0\mathbf{A}_k$ la matrice (3×3) d'orientation du repère R_k dans le repère R_0

F.3. Modèle cinématique

Le modèle cinématique permet de décrire les vitesses opérationnelles (vitesses de translation et de rotation de l'organe terminal j dans l'espace cartésien), en fonction des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$. Il est noté :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{bmatrix} = \mathbf{J}_j(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{F-7})$$

Où

\mathbf{V}_j est le vecteur des vitesses de translation du point O_j

$\boldsymbol{\omega}_j$ est le vecteur des vitesses de rotation du corps C_j

$\mathbf{J}_j(\mathbf{q})$ est la matrice jacobienne de dimension $6 \times n$ du corps C_j

$\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des vitesses articulaires

le vecteur des coordonnées généralisées du corps C_j

La matrice jacobienne $\mathbf{J}_j(\mathbf{q})$ se calcule en fonction des éléments des matrices de transformation ${}^0\mathbf{T}_i$ pour $i = 1$ à n :

$$\mathbf{J}_j(\mathbf{q}) = [\mathbf{j}_1 \dots \mathbf{j}_{n-1} \mathbf{j}_n] \quad (\text{F-8})$$

Où :

\mathbf{j}_i est la colonne de dimensions (6×1) correspondant à la vitesse \dot{q}_i

Avec : $\mathbf{j}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$ lorsque l'articulation i est prismatique

$\mathbf{j}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \times \mathbf{L}_{i,j} \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$ lorsque l'articulation est rotoïde , avec $\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{O}_i\mathbf{O}_j$

$\mathbf{j}_i = \mathbf{0}_{6 \times 1}$ lorsque l'articulation i ne se trouve pas sur le chemin entre le corps C_0 est le corps C_j ou lorsque i représente un repère fixe

F.4. Modèle dynamique

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et/ou les forces) appliqués aux actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations articulaires. Les expressions des modèles dynamiques sont utilisées pour des applications telles que la simulation, le dimensionnement des actionneurs, l'identification des paramètres inertiels ou la commande. Plusieurs méthodes permettent de calculer le modèle dynamique inverse. Les plus utilisées sont celles de *Lagrange* (§F.4.3.1) et de *Newton-Euler* (§F.4.3.2).

F.4.1. Paramètres inertiels standards

F.4.1.1. Paramètres inertiels standard de solide

Le vecteur des paramètres inertiels standard relatif au corps réel C_j comprend les 10 composantes suivantes :

- les éléments de la matrice d'inertie \mathbf{J}_j du corps j dans le repère R_j :

$$[XX_j \ XY_j \ XZ_j \ YY_j \ YZ_j \ ZZ_j]$$

$$\text{avec : } \mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix}$$

- les premiers moments du corps j par rapport à l'origine O_j du repère R_j :

$$MS_j = [MX_j \ MY_j \ MZ_j]$$

- la masse du corps j : M_j

F.4.1.2. Paramètres inertiels standard de liaison

Le vecteur des paramètres inertiels standard relatif à liaison j (entre les corps C_j et $C_{a(j)}$) comprend sous hypothèses de lois linéaires les composantes suivantes :

- la raideur : k_i
- le coefficient d'amortissement (ou de frottement visqueux) : h_i (ou f_{vi}),
- le coefficient de frottement de Coulomb : f_{si}

F.4.1.3. Paramètres inertiels standard

Ce qui donne, pour le vecteur des paramètres standard de l'articulation j :

$$\mathbf{X}_S^j = [\mathbf{XX}_j \ \mathbf{XY}_j \ \mathbf{XZ}_j \ \mathbf{YY}_j \ \mathbf{YZ}_j \ \mathbf{ZZ}_j \ \mathbf{MX}_j \ \mathbf{MY}_j \ \mathbf{MZ}_j \ M_j \ k_j \ h_j \ f_{sj}] \quad (\text{F-9})$$

L'ensemble des paramètres dynamique du système :

$$\mathbf{X}_S^j = [\mathbf{X}_S^1 \ \mathbf{X}_S^2 \ \dots \ \mathbf{X}_S^{n-1} \ \mathbf{X}_S^n] \quad (\text{F-10})$$

F.4.2. Propriétés de linéarité du modèle dynamique inverse

L'énergie cinétique E et l'énergie potentielle U sont linéaires vis à vis des paramètres standard du système \mathbf{X}_s . Par conséquent, le lagrangien L et le modèle dynamique sont linéaires vis à vis de ces mêmes paramètres – cette propriété est aussi vraie en utilisant le formalisme de *Newton-Euler*. Il est alors possible d'exprimer le modèle dynamique sous la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{Np} \mathbf{D}_s^i X_{s,j} = \mathbf{D}_s \mathbf{X}_s \quad (\text{F-11})$$

avec :

\mathbf{D}_s la matrice ($n \times Np$) fonction de $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ et des paramètres géométriques

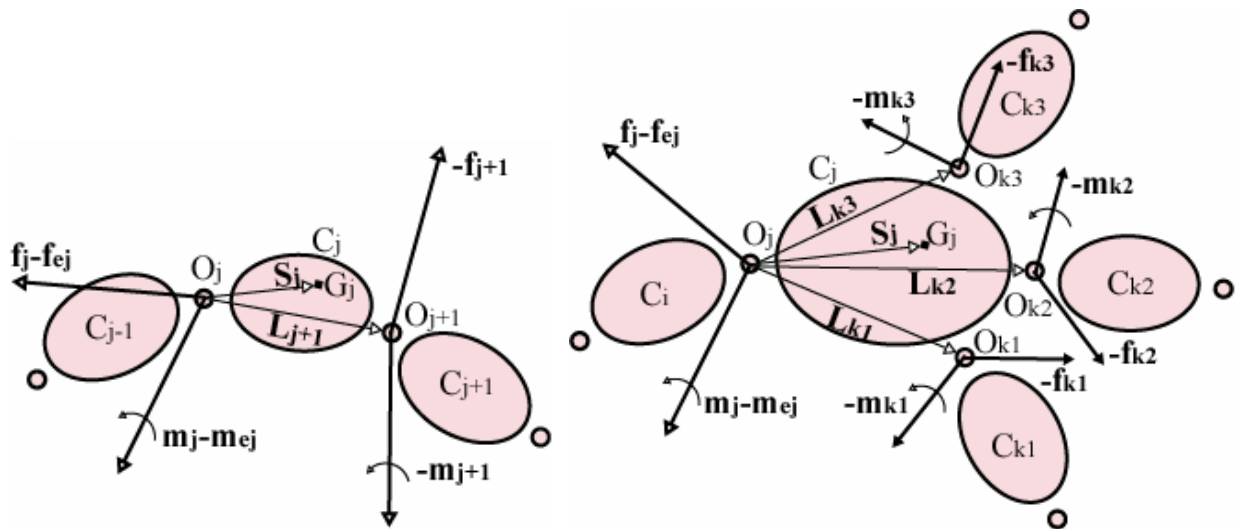
\mathbf{D}_s^j la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{D}

\mathbf{L} le vecteur des efforts articulaires et des efforts extérieurs : $\mathbf{L} = \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}$

\mathbf{X}_s défini ci-dessus

F.4.3. Calcul du modèle dynamique inverse

Il existe deux principaux formalismes pour exprimer un modèle dynamique. Le formalisme lagrangien et le formalisme eulérien. Le choix du formalisme à adopter dépend du système étudié et de l'utilisation qui doit être faite du modèle dynamique.



(a) Structure simple

(b) Structure arborescente

figure 131 : Bilan des efforts appliqués sur le corps C_j

F.4.3.1. Formalisme lagrangien

Dans le formalisme lagrangien, le mouvement du solide est décrit par la connaissance des positions successives occupées par chaque corps, c'est à dire en termes de coordonnées généralisées de la mécanique. Le modèle lagrangien d'un système rigide s'écrit formellement:

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}_D) = \mathbf{0} \quad (\text{F-12})$$

Avec :

\mathbf{q} le vecteur des coordonnées généralisées (articulaires)

$\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des vitesses articulaires

$\ddot{\mathbf{q}}$ le vecteur des accélérations articulaires

\mathbf{F}_D le vecteur des efforts appliqués sur le système

Le formalisme de *Lagrange* décrit les équations du mouvement en terme d'énergie et de travail. Cette méthode est moins performante en terme du nombre d'opérations (additions, multiplications) que la méthode de *Newton-Euler* cependant c'est une méthode très simple dans le cas d'un système avec peu de degrés de liberté.

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \text{ pour } i = 1 \dots n \quad (\text{F-13})$$

Avec :

L : le Lagrangien du système, tel que $L = E - U$

E : l'énergie cinétique totale du système

U : l'énergie potentielle totale du système

Γ_i l'effort d'actionnement appliqué sur l'articulation i

q_i la coordonnée articulaire associée à l'articulation i

F.4.3.1.1. Energie cinétique

Soit E_j est l'énergie cinétique de l'articulation j c'est-à-dire celle du corps C_j (E_{C_j}) et celle de l'articulation j (E_{L_j}).

$$E_j = E_{C_j} + E_{L_j} \quad (\text{F-14})$$

$$E_{C_j} = \frac{I}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_j^T \mathbf{V}_j + 2 \mathbf{M} \mathbf{S}_j^T (\mathbf{V}_j \times \boldsymbol{\omega}_j) \right) \quad (\text{F-15})$$

$$E_{L_j} = \frac{I}{2} \left(h_j \dot{q}_j^2 + h_j \cdot \text{sign}(\dot{q}_j^2) \right) \quad (\text{F-16})$$

Avec :

\mathbf{V}_{G_j} la vitesse du point G_j , centre de gravité du corps C_j dans le repère R_{G_j}

$\boldsymbol{\omega}_j$ le vecteur de rotation instantanée du corps j

M_j la masse du corps j

\mathbf{I}_{G_j} la matrice d'inertie du corps j par rapport au centre de gravité G_j dans un repère d'axes colinéaires par rapport à ceux de R_j .

$\mathbf{M} \mathbf{S}_j$ le vecteur des premiers moments d'inertie du corps C_j autour de O_j :

$$\mathbf{M} \mathbf{S}_j = M_j \mathbf{S}_j$$

\mathbf{S}_j les coordonnées de G_j dans R_j :

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{O}_j \mathbf{G}_j = [x_G \ y_G \ z_G]^T$$

\mathbf{J}_j la matrice d'inertie du corps C_j exprimée dans le repère R_j telle que :

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{I}_{G_j} - M_j \tilde{\mathbf{S}}_j \tilde{\mathbf{S}}_j$$

$\tilde{\mathbf{S}}_j$ la matrice antisymétrique définie par :

$$\tilde{\mathbf{S}}_j = \begin{bmatrix} 0 & -z_G & y_G \\ z_G & 0 & -x_G \\ -y_G & x_G & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{G_j} - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{S}_j$$

F.4.3.1.2. Energie potentielle

Soit U_j est l'énergie cinétique de l'articulation j c'est-à-dire celle du corps C_j (U_{C_j}) et celle de l'articulation j (U_{L_j}).

$$U_j = U_{C_j} + U_{L_j} \quad (\text{F-17})$$

$$U_{C_j} = -{}^0\mathbf{g}^T (M_j {}^0\mathbf{P}_j + {}^0\mathbf{A}_j {}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j) \quad (\text{F-18})$$

$$U_{L_j} = \frac{1}{2} k_j \cdot q_j^2 \quad (\text{F-19})$$

Avec :

${}^0\mathbf{A}_j$ la matrice d'orientation de R_j dans R_0

${}^0\mathbf{P}_j$ le vecteur de position de l'origine O_j de R_j dans R_0

${}^j\mathbf{S}_j$ le vecteur O_jG_j exprimé dans R_j

$\mathbf{L}_{0,j}$ le vecteur O_0O_j exprimé dans R_j

4.5.1.1.1. Expression du modèle dynamique inverse

Etant donné la forme des energies potentielle et cinétique, l'équation de *Lagrange* (F-13) s'écrit :

$$\mathbf{F} + \mathbf{Q} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}^e + \mathbf{\Gamma}^f + \mathbf{G} \quad (\text{F-20})$$

Avec

$\mathbf{A}(\mathbf{q})$ est la matrice d'inertie du système ($n \times n$), symétrique et positive.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ est un vecteur de dimension ($n \times 1$) représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges, tels que : $\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \partial E / \partial \mathbf{q}$

$\mathbf{G} = [G_1 \dots G_n]^T$: vecteur des couples/forces de gravité avec $\mathbf{G} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}$

$\mathbf{\Gamma}^e$ l'effort élastique articulaire

$\mathbf{\Gamma}^f$ l'effort de frottement articulaire

\mathbf{Q} est le vecteur des efforts généralisés associé aux efforts extérieurs appliqués sur le système

$$\mathbf{Q} = - \sum_j \mathbf{J}_j(\mathbf{q})^T \mathbb{F}_{ej} \quad (\text{F-21})$$

Avec :

$\mathbf{J}_j(\mathbf{q})$ la matrice jacobienne du repère j

\mathbb{F}_{ej} le torseur des efforts extérieurs appliqués par le corps j sur l'environnement. Il est défini par : $\mathbb{F}_{ej} = [\mathbf{f}_{ej} | \mathbf{m}_{ej}]$

\mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{G} , $\mathbf{\Gamma}^e$, $\mathbf{\Gamma}^f$ sont linéaires par rapport aux paramètres.

* L'obtention des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} se fait :

- en calculant l'énergie cinétique pour l'obtention de \mathbf{A}
- en utilisant le symbole de *Christophell* : $c_{i,jk}$ pour le calcul de \mathbf{C} , tel que:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \quad (\text{F-22})$$

$$c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right]$$

F.4.3.2. Le formalisme eulérien

Dans le formalisme eulérien le mouvement du solide est décrit par la connaissance instantanée de son torseur de vitesse $[\mathbf{V} | \boldsymbol{\omega}]$ sur la configuration courante $\Sigma(t)$ et ce, à chaque instant du mouvement. Dans ce cas, le modèle dynamique du solide matériel s'écrit alors :

$$f(\mathbf{V}, \dot{\mathbf{V}}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{F}_D) = \mathbf{0} \quad (\text{F-23})$$

Avec

\mathbf{V} composantes du torseur des vitesses sur le solide

\mathbf{F}_D efforts appliqués sur le solide

$\boldsymbol{\Phi}$ configuration du système, liée au champ de vitesse par des relations dites de reconstruction du type : $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = h(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{V})$.

Remarque : le modèle dynamique lagrangien peut être calculé en utilisant les équations de *Newton-Euler* en exprimant $\boldsymbol{\Phi}$, \mathbf{V} et $\dot{\mathbf{V}}$ en fonction de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$. [Luh 80], [Khalil 99] C'est la méthode la plus efficace pour le calculer grâce à sa formulation récurrente.

Les équations de *Newton-Euler* expriment le torseur dynamique en G_j (centre de gravité du corps j) des efforts extérieurs appliqués sur le corps j , y compris l'effet de la gravité:

$$\mathbf{F}_{Dj} = M_j \dot{\mathbf{V}}_{Gj} \quad (\text{F-24})$$

$$\mathbf{M}_{DGj} = \mathbf{I}_{Gj} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{I}_{Gj} \boldsymbol{\omega}_j) \quad (\text{F-25})$$

Avec :

\mathbf{F}_{Dj} le bilan total des forces appliquées sur le corps j

\mathbf{M}_{DG_j} le bilan total des couples appliqués sur le corps j au centre de gravité G_j

$\dot{\mathbf{V}}_{G_j}$ l'accélération du point G_j

$\boldsymbol{\omega}_j$ le vecteur de rotation instantanée du corps j

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ la dérivée par rapport au temps du vecteur de rotation instantanée du corps j

M_j la masse du corps j

\mathbf{I}_{G_j} la matrice d'inertie du corps j par rapport au centre de gravité G_j dans un repère d'axes colinéaires par rapport à ceux de R_j .

La méthode de *Luh, Walker et Paul* [Luh 80] permet de calculer le modèle dynamique grâce à une double récurrence : une récurrence avant, de la base du robot vers les organes terminaux permet de calculer successivement les vitesses et les accélérations des corps, puis leur torseur dynamique. Une récurrence arrière, permet d'effectuer le calcul vers la base et de calculer les couples des actionneurs en exprimant pour chaque corps le bilan des efforts. Cette méthode permet d'obtenir directement le modèle dynamique inverse. Les paramètres inertiels utilisés sont la masse M_j , le vecteur $\mathbf{S}_j = \mathbf{O}_j\mathbf{G}_j$ et la matrice d'inertie \mathbf{I}_{G_j} . Le modèle n'est pas linéaire par rapport aux paramètres inertiels. Cependant, en écrivant le torseur des efforts extérieurs en \mathbf{O}_j plutôt qu'en G_j et en utilisant les paramètres M_j , \mathbf{MS}_j et \mathbf{J}_j [Khalil 87], [Khosla 86] il est possible d'écrire le modèle dynamique de façon linéaire par rapport aux paramètres inertiels, comme par la méthode de *Lagrange* (F-20). Les équations de *Newton-Euler* (F-24) et (F-25) deviennent alors:

$$\mathbf{F}_{D_j} = M_j \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{MS}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j) \quad (\text{F-26})$$

$$\mathbf{M}_{D_j} = \mathbf{J}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j) + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j \quad (\text{F-27})$$

Avec :

\mathbf{MS}_j le premiers moments d'inertie du corps C_j autour de \mathbf{O}_j : soit $\mathbf{MS}_j = M_j \mathbf{S}_j$

\mathbf{J}_j la matrice d'inertie du corps C_j exprimée dans le repère R_j

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{G_j} - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{S}_j$$

$\boldsymbol{\omega}_j$ le vecteur de rotation instantanée du corps j

\mathbf{M}_{D_j} le bilan total des couples appliqués sur le corps j au point \mathbf{O}_j

F.4.3.2.1. Récurrence avant

La récurrence avant permet de calculer \mathbf{F}_{Dj} et \mathbf{M}_{Dj} à partir des relations F-26 et F-27. Pour cela il faut calculer $\boldsymbol{\omega}_j, \dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ et $\dot{\mathbf{V}}_j$. En notant i l'indice de l'antécédent du corps C_j , les formules de composition des vitesses donnent :

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad (\text{F-28})$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{i,j} + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad (\text{F-29})$$

Avec

\mathbf{a}_j = vecteur unitaire suivant l'axe \mathbf{z}_j .

$\mathbf{L}_{i,j}$ le vecteur reliant les origines des repères R_i et R_j : $\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{O}_i \mathbf{O}_j$ (Figure 2-5 (a))

σ_j le paramètre définissant le type de l'articulation j

En dérivant ces équations par rapport au temps il vient :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \quad (\text{F-30})$$

$$\dot{\mathbf{V}}_j = \dot{\mathbf{V}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{L}_{i,j} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{L}_{i,j})_j + \sigma_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \quad (\text{F-31})$$

Lorsque la base est fixe, la récurrence est initialisée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{V}}_0 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{F-32})$$

F.4.3.2.2. Récurrence arrière

Les équations de la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine \mathbf{O}_j . Un corps j peut avoir plusieurs successeurs $s(j)$. Ce qui donne :

$$\mathbf{F}_{Dj} = \mathbf{f}_j - \sum \mathbf{f}_{s(j)} + M_j \mathbf{g} - \mathbf{f}_{ej} \quad (\text{F-33})$$

$$\mathbf{M}_{Dj} = \mathbf{m}_j - \sum_{s(j)} \mathbf{m}_{s(j)} - \sum_{s(j)} \mathbf{L}_{s(j)} \times \mathbf{f}_{s(j)} + \mathbf{S}_j \times M_j \mathbf{g} - \mathbf{m}_{ej} \quad (\text{F-34})$$

Avec :

\mathbf{f}_j les forces appliquées par l'antécédent $a(j)$ sur le corps j

\mathbf{m}_j les couples appliqués par l'antécédent $a(j)$ sur le corps j

\mathbf{f}_{ej} les forces extérieures appliquées par le corps j sur l'environnement

\mathbf{m}_{ej} les couples extérieurs appliqués par le corps j sur l'environnement

Il est possible de faire intervenir l'effet de la gravité sans la prendre explicitement dans le bilan des efforts de chaque corps, pour cela il suffit de prendre :

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad (\text{F-35})$$

Les équations (F-33) et (F-34) s'écrivent alors :

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_{Dj} + \sum_{s(j)} \mathbf{f}_{s(j)} + \mathbf{f}_{ej} \quad (\text{F-36})$$

$$\mathbf{m}_j = \mathbf{M}_{Dj} + \sum_{s(j)} \mathbf{m}_{s(j)} + \sum_{s(j)} \mathbf{L}_{j,s(j)} \times \mathbf{f}_{s(j)} + \mathbf{m}_{ej} \quad (\text{F-37})$$

La récurrence est initialisée par les efforts :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{s(k)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{s(k)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{F-38})$$

avec k représentant un corps terminal sans successeur.

Les couples aux actionneurs Γ_j sont alors obtenus en projetant, suivant la nature de l'articulation j , les vecteurs \mathbf{f}_j ou \mathbf{m}_j sur l'axe du mouvement.

$$\Gamma_j = (\sigma_j \mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j \mathbf{m}_j)^T \mathbf{a}_j \quad (\text{F-39})$$

Avec : σ_j le paramètre définissant le type de l'articulation j

\mathbf{a}_j le vecteur unitaire suivant l'axe \mathbf{z}_j

Les termes \mathbf{f}_j et \mathbf{m}_j ne dépendent ainsi que des paramètres inertiels du corps j et du corps situé en aval, qui sont introduits par les termes $\mathbf{f}_{s(j)}$ et $\mathbf{m}_{s(j)}$ de la récurrence. (F-36) et (F-37).

F.4.3.2.3. Expression du modèle dynamique inverse

Les équations de *Newton-Euler* s'écrivent en projetant les équations précédentes sur le repère R_j pour $j = 1$ à n :

$$\begin{aligned} {}^j\boldsymbol{\omega}_i &= {}^j\mathbf{A}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \\ {}^j\boldsymbol{\omega}_j &= {}^j\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^i\mathbf{a}_j \\ {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j &= {}^j\mathbf{A}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \bar{\sigma}_j [\ddot{q}_j {}^i\mathbf{a}_j + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_j {}^i\mathbf{a}_j] \end{aligned} \quad (\text{F-40})$$

$$\begin{aligned} {}^j\dot{\mathbf{V}}_j &= {}^j\mathbf{A}_i ({}^i\dot{\mathbf{V}}_i + {}^i\mathbf{U}_i {}^i\mathbf{P}_j) + \sigma_j [\ddot{q}_j {}^i\mathbf{a}_j + 2 {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times \dot{q}_j {}^i\mathbf{a}_j] \\ {}^j\mathbf{F}_{Dj} &= M_j {}^j\dot{\mathbf{V}}_j + {}^j\mathbf{U}_j {}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j \\ {}^j\mathbf{M}_{Dj} &= {}^j\mathbf{J}_j {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^j\mathbf{J}_j {}^j\boldsymbol{\omega}_j) + {}^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j \times {}^j\dot{\mathbf{V}}_j \end{aligned} \quad (\text{F-41})$$

Avec :

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad \text{pour une base fixe}$$

$${}^j\mathbf{U}_j = {}^j\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j {}^j\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j$$

${}^j\mathbf{A}_i$ la matrice d'orientation de R_i dans R_j

${}^j\mathbf{P}_i$ le vecteur de position de l'origine O_i de R_i dans R_j

Les équations de la récurrence arrière s'écrivent alors $j = n$ à 1 :

$${}^j\mathbf{f}_j = {}^j\mathbf{F}_{Dj} + {}^j\mathbf{f}_{ej} + \sum_{s(j)} {}^j\mathbf{f}_{s(j)} \quad (\text{F-42})$$

$${}^i\mathbf{f}_j = {}^i\mathbf{A}_j {}^j\mathbf{f}_j$$

$${}^i\mathbf{m}_j = {}^i\mathbf{M}_{Dj} + {}^i\mathbf{m}_{ej} + \sum_{s(j)} \left({}^i\mathbf{A}_{s(j)} {}^{s(j)}\mathbf{m}_{s(j)} + {}^i\tilde{\mathbf{P}}_{s(j)} {}^j\mathbf{f}_{s(j)} \right) \quad (\text{F-43})$$

$$\Gamma_j = \left(\sigma_j {}^j\mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j {}^i\mathbf{m}_j \right)^T {}^i\mathbf{a}_j$$

$$\text{avec : } {}^i\mathbf{a}_j = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Dans le cas d'une articulation élastique ou avec frottement alors l'expression de Γ_j dans les équations précédentes devient :

$$\Gamma_j = \left(\sigma_j {}^j\mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j {}^i\mathbf{m}_j \right)^T {}^i\mathbf{a}_j + \Gamma_j^f + \Gamma_j^e \quad (\text{F-44})$$

Dans le cas d'une articulation bloquée : $\sigma = 2$, les termes multipliés par σ ou $\bar{\sigma}$ dans (F-43) et (F-44) sont éliminés, par exemple ${}^i\boldsymbol{\omega}_j = {}^i\boldsymbol{\omega}_i$, et le couple articulaire Γ_i n'est alors pas défini.

Annexe G

Résultats d'identification des modèles linéaires par rapport aux paramètres

G.1. Résultats d'identification des modèles d'effort de contact

Les tables fournies dans cette partie indiquent les coefficients des polynômes identifiés. Chaque coefficient identifié est associé à son écart type relatif.

Les coefficients considérés non identifiables ou non significatifs par l'algorithme d'identification linéaire valent 0.

Les coefficients mis à 0 de sorte à simplifier le modèle pour que son comportement soit cohérent avec le comportement attendu sont représenté par *.

Les coefficients qui ne sont pas représentés par le modèle d'identification initial sont représenté par /.

Les entrées du modèle d'interaction pneumatique sol identifié correspondent aux déformations vues par l'aire de contact. Pour que le modèle identifié soit cohérent avec les grandeurs d'entrées habituelles (dérive, taux de glissement, courbure de trajectoire), un changement de variable doit être réalisé (§2.3.5.3).

G.1.1. Modèle d'effort latéral

G.1.1.1. Formulation du modèle

$$Fy_p = \left[W_{Fy, Fpneu} \mid W_{Fy, Ly} \right] \begin{bmatrix} X_{Fy, Fpneu} \\ X_{Fy, Ly} \end{bmatrix} \quad (G-1)$$

avec $W_{Fy, Fpneu} \cdot X_{Fy, Fpneu}$ l'influence de l'effort latéral de l'interaction pneumatique/sol

$$W_{Fy, Fpneu} \cdot X_{Fy, Fpneu} = Fy_{pneu} = \left[W_{Fy, \delta} \quad W_{Fy, \phi} \quad W_{Fy, \gamma} \quad W_{Fy, 1} \right] \begin{bmatrix} X_{Fy, \delta'} \\ X_{Fy, \phi'} \\ X_{Fy, \gamma} \\ X_{Fy, 1} \end{bmatrix} \quad (G-2)$$

$$W_{Fy, \delta'}(F_z, \delta') \cdot X_{Fy, \delta'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \delta'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy, \delta', i, j} \quad (G-3)$$

$$W_{Fy, \phi'}(F_z, \phi') \cdot X_{Fy, \phi'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \phi'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy, \phi', i, j} \quad (G-4)$$

$$W_{Fy, \gamma}(F_z, \gamma) \cdot X_{Fy, \gamma} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^3 \gamma^i \cdot F_z^j \cdot b_{Fy, \gamma, i, j} \quad (G-5)$$

$$W_{Fy, 1}(F_z) \cdot X_{y1} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^3 F_z^j \cdot b_{Fy, 1, i, j} \quad (G-6)$$

$W_{Fy, Ly} \cdot X_{Fy, Ly}$ l'influence de la raideur de ballant sur l'effort latéral

$$W_{Fy, Ly}(F_z, \delta, \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Fy, Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \left(\frac{\partial Fy_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (G-7)$$

$$W_{Fy, Ly}(F_z, \delta', \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Fy, Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 i \times \delta'^{i-1} \cdot F_z^j \cdot b_{Fy, Ly, i, j} \quad (G-8)$$

G.1.1.2. Dunlop R16

Para- mètre	$i \backslash j$	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	760.8 (0.19%)	0 (0%)	-8.39e+4 (0.05%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	1.001e+8 (0.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-2.248e+10 (0.37%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	1.009e+4 (0.31%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1115 (0.3%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-34.67 (0.18%)	0 (0%)
	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.4069 (0.13%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/	

TABLEAU 34: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU DUNLOP R16 GONFLE A 2BARS

Para- mètre	$i \backslash j$	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	1175 (0.95%)	-4214 (2.3%)	-7.256e+4 (0.28%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-7.675e+6 (0.78%)	4.687e+7 (0.84%)	7.229e+7 (0.87%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	1.403e+10 (0.73%)	-9.844e+10 (0.57%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	1.044e+4 (0.43%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	-3.682e+7 (1.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	2.466e+9 (2.3%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1043 (0.23%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	1.596 (0.64%)	-14.57 (0.36%)	0 (0%)	0 (0%)
	0	0.002218 (1.6%)	0 (0%)	-0.3899 (0.24%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	909 (0.91%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/	

TABLEAU 35: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU DUNLOP R16 GONFLE A 2.5BARS

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	447.2 (0.26%)	0 (0%)	-7.122e+4 (0.047%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	7.68e+7 (0.21%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-1.457e+10 (0.45%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	7974 (0.36%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1008 (0.27%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	0 (0%)	-5.658 (0.19%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.2739 (0.16%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 36: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU DUNLOP R16 GONFLE A 3BARS

G.1.1.3. Michelin R15

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	847.9 (0.17%)	0 (0%)	-9.102e+4 (0.047%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	1.045e+8 (0.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-2.162e+10 (0.39%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	9347 (0.34%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1101 (0.32%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-25.59 (0.26%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.452 (0.11%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 37: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU MICHELIN R15 GONFLE A 2BARS

ANNEXE G RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES LINEAIRES PAR RAPPORT AUX
PARAMETRES

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	646.3 (0.2%)	0 (0%)	-8.635e+4 (0.045%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	9.865e+7 (0.19%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-1.826e+10 (0.41%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	8550 (0.35%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1080 (0.3%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, 1, i, j}$	1	0 (0%)	-4.399 (0.3%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.3896 (0.12%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 38: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU MICHELIN R15 GONFLE A 2.5BARS

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	368.8 (0.31%)	0 (0%)	-7.568e+4 (0.041%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	5.272e+7 (0.13%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	8224 (0.39%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1106 (0.29%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, 1, i, j}$	1	0 (0%)	-3.459 (0.38%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.3263 (0.14%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 39: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU MICHELIN R15 GONFLE A 3BARS

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

G.1.1.4. Michelin R16

Para- mètre	j $i \backslash$	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	827.3 (0.17%)	0 (0%)	-8.989e+4 (0.047%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	1.055e+8 (0.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-2.217e+10 (0.38%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	9485 (0.32%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1161 (0.3%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, 1, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-26.6 (0.25%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.5062 (0.1%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 40: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU MICHELIN R16 GONFLE A 2BARS

Para- mètre	j $i \backslash$	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	645.4 (0.2%)	0 (0%)	-8.472e+4 (0.045%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	9.868e+7 (0.19%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-1.893e+10 (0.4%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	8546 (0.34%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1130 (0.28%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, 1, i, j}$	1	0 (0%)	-5.084 (0.26%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.4322 (0.11%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 41: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU MICHELIN R16 GONFLE A 2.5BARS

ANNEXE G RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES LINEAIRES PAR RAPPORT AUX
PARAMETRES

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy,\delta',i,j}$	1	385.7 (0.3%)	0 (0%)	-7.42e+4 (0.042%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	5.17e+7 (0.14%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	7919 (0.4%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy,\gamma,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1152 (0.28%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy,l,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-85.39 (0.3%)
$b_{Fy,Lyi,j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.3624 (0.13%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 42: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU MICHELIN R16 GONFLE A 3BARS

G.1.1.5. Michelin R17

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Fy,\delta',i,j}$	1	996.8 (0.15%)	0 (0%)	-9.236e+4 (0.047%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	9.963e+7 (0.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-2.38e+10 (0.33%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	8275 (0.38%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy,\gamma,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-1444 (0.24%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy,l,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-37.96 (0.17%)	0 (0%)
$b_{Fy,Lyi,j}$	0	0.006193 (0.66%)	0 (0%)	-0.5652 (0.19%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 43: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE
DU MICHELIN R17 GONFLE A 2BARS

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

Para- mètre	j i	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	659.2 (0.22%)	0 (0%)	-8.539e+4 (0.05%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	9.73e+7 (0.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	-2.054e+10 (0.38%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	8050 (0.41%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	-287.1 (0.26%)	0 (0%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	0 (0%)	-7.712 (0.18%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0 (0%)	0 (0%)	-0.3611 (0.14%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 44: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU MICHELIN R17 GONFLE A 2.5BARS

Para- mètre	j i	3	2	1	0
$b_{Fy, \delta', i, j}$	1	1593 (0.78%)	-9257 (1.2%)	-5.801e+4 (0.42%)	/
	2	-6901 (2.2%)	4.976e+4 (1.7%)	0 (0%)	/
	3	-2.141e+6 (1.7%)	1.201e+7 (2.7%)	3.634e+7 (1.9%)	/
	4	*	*	*	/
	5	*	*	*	/
	6	*	*	*	/
	7	*	*	*	/
$b_{Fy, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	-904.1 (2.9%)	1.424e+4 (1.1%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	*	*	*	/
	4	*	*	*	/
	5	*	*	*	/
	6	*	*	*	/
	7	*	*	*	/
$b_{Fy, \gamma, i, j}$	1	180.5 (2.2%)	-2028 (2.2%)	4774 (3.2%)	-4055 (3.9%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	7.983e+4 (3%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	-1.72e+7 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Fy, l, i, j}$	1	1.133 (2.1%)	-11.58 (1.3%)	0 (0%)	-33.51 (2.6%)
$b_{Fy, Lyi, j}$	0	0.01674 (0.64%)	-0.1436 (0.44%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-250.6 (3%)	2087 (2%)	/
	3	*	*	*	/
	4	*	*	*	/
	5	*	*	*	/
	6	*	*	*	/

TABLEAU 45: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'EFFORT LATERAL DEVELOPPE DU MICHELIN R17 GONFLE A 3BARS

G.1.2. Modèles de moment d'autoalignement

G.1.2.1. Modèle d'identification

$$Mz_p = \left[W_{Mz,Fpneu} \quad W_{Mz,Pz2} \mid W_{Mz,Ly} \right] \begin{bmatrix} X_{Mz,Fpneu} \\ X_{Mz,Pz2} \\ X_{Mz,Ly} \end{bmatrix} \quad (G-9)$$

avec $W_{Mz,Fpneu} \cdot X_{Mz,Fpneu}$ l'influence du moment d'autoalignement de l'interaction pneumatique/sol

$$W_{Mz,Fpneu} \cdot X_{Mz,Fpneu} = Mz_{pneu} = \left[W_{Mz,\delta} \quad W_{Mz,\varphi} \quad W_{Mz,\gamma} \quad W_{Mz,1} \right] \begin{bmatrix} X_{Mz,\delta'} \\ X_{Mz,\varphi'} \\ X_{Mz,\gamma} \\ X_{Mz,1} \end{bmatrix} \quad (G-10)$$

$$W_{Mz,\delta'}(F_z, \delta') \cdot X_{Mz,\delta'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \delta'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\delta',i,j} \quad (G-11)$$

$$W_{Mz,\varphi'}(F_z, \varphi') \cdot X_{Mz,\varphi'} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 \varphi'^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\varphi',i,j} \quad (G-12)$$

$$W_{Mz,\gamma}(F_z, \gamma) \cdot X_{Mz,\gamma} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^3 \gamma^i \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,\gamma,i,j} \quad (G-13)$$

$$W_{Mz,1}(F_z) \cdot X_{Mz,1} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^3 F_z^j \cdot b_{Mz,1,i,j} \quad (G-14)$$

$W_{Pz2} \cdot X_{Pz2}$ couplage du moment d'autoalignement avec l'effort latéral

$$W_{Pz2} \cdot X_{Pz2} = (-Fy_p \cdot Fx_p) K_y^{-1} \quad (G-15)$$

$W_{Mz,Ly} \cdot X_{Mz,Ly}$ l'influence de la raideur de ballant sur le moment d'autoalignement

$$W_{Mz,Ly}(F_z, \delta', \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Mz,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \left(\frac{\partial Mz_{pneu}}{\partial \delta'} \right) K_y^{-1} \quad (G-16)$$

$$W_{Mz,Ly}(F_z, \delta, \dot{F}_y, \omega) \cdot X_{Mz,Ly} = \frac{\dot{F}_y}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 i \times \delta'^{i-1} \cdot F_z^j \cdot b_{Mz,Ly,i,j} \quad (G-17)$$

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

G.1.2.2. Dunlop R16

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-96.85 (0.46%)	1043 (0.21%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1995 (0.68%)	0 (0%)	/
	3	4.903e+5 (1.1%)	-3.924e+6 (0.74%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	-6.124e+8 (1.8%)	4.632e+9 (1.3%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	283.2 (0.82%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	16.81 (1.3%)	-132.6 (0.78%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	3.788 (0.45%)	-7.044 (0.97%)
$b_{Mz, P2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, Ly, i, j}$	0	0 (0%)	0.003024 (0.29%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	-1.735 (1.6%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 46: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU DUNLOP R16 GONFLE A 2BARS

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-64.57 (0.68%)	793.8 (0.27%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1366 (1.1%)	0 (0%)	/
	3	3.236e+5 (1.6%)	-2.874e+6 (0.95%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	-4.107e+8 (2.4%)	3.453e+9 (1.6%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	640.8 (0.68%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.438e+5 (1.8%)	0 (0%)	-1.813e+6 (2.4%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.826e+8 (1.6%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	13.51 (1.5%)	-140.9 (0.68%)	0 (0%)
	2	-125.4 (2.6%)	670.5 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	7468 (1.7%)	0 (0%)
	4	3.224e+4 (2.2%)	-1.809e+5 (2%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	3.286 (0.52%)	-7.025 (0.98%)
$b_{Mz, P2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, Ly, i, j}$	0	0.0001618 (2%)	0 (0%)	0.007545 (1.2%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 47: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU DUNLOP R16 GONFLE A 2.5BARS

ANNEXE G RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES LINEAIRES PAR RAPPORT AUX
PARAMETRES

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz,\delta',i,j}$	1	-37.94 (0.81%)	582.3 (0.26%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1227 (0.91%)	0 (0%)	/
	3	8.61e+4 (1.2%)	-1.424e+6 (0.45%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	1.05e+9 (0.81%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	642.5 (0.63%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.334e+5 (1.8%)	0 (0%)	-1.924e+6 (2.1%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.688e+8 (1.4%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\gamma,i,j}$	1	0 (0%)	11.12 (1.6%)	-136 (0.63%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	8281 (1.4%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz,l,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	2.545 (0.55%)	-6.09 (0.94%)
$b_{Mz,p2,i,j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz,l\gamma,i,j}$	1	0.00012 (2.4%)	0 (0%)	0.006105 (1.4%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 48: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU DUNLOP R16 GONFLE A 3BARS

G.1.2.3. Michelin R15

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz,\delta',i,j}$	1	-82.61 (0.45%)	983.5 (0.18%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1551 (0.92%)	0 (0%)	/
	3	1.852e+5 (0.69%)	-2.066e+6 (0.38%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	6.133e+8 (1.7%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	222.1 (1.1%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\gamma,i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	-39.04 (0.71%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz,l,i,j}$	1	0 (0%)	-0.7758 (1.6%)	9.133 (1.1%)	-16.89 (1.1%)
$b_{Mz,p2,i,j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz,l\gamma,i,j}$	0	0 (0%)	0.002974 (0.28%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	-4.037e+4 (1.2%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/	

TABLEAU 49: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU MICHELIN R15 GONFLE A 2BARS

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-51.77 (0.68%)	742.7 (0.23%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1093 (1.3%)	0 (0%)	/
	3	1.152e+5 (1.1%)	-1.639e+6 (0.45%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	7.642e+8 (1.3%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	446.4 (0.85%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.483e+5 (1.7%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	4.354e+8 (2.2%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	10.88 (2%)	-93.45 (1.1%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-2.582e+5 (1.8%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	2.704 (0.65%)	-5.034 (1.4%)
$b_{Mz, P2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, Ly, i, j}$	0	0 (0%)	0.00243 (0.35%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	-1.658 (1.7%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 50: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU MICHELIN R15 GONFLE A 2.5BARS

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-35.29 (0.99%)	586.9 (0.29%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-873.5 (1.6%)	0 (0%)	/
	3	7.856e+4 (1.5%)	-1.357e+6 (0.51%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	8.057e+8 (1.2%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	591.4 (0.76%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.249e+5 (2.1%)	0 (0%)	-2.002e+6 (2.2%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.475e+8 (1.7%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	10.75 (1.9%)	-94.73 (1%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-2.095e+5 (2.2%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	-0.561 (2%)	6.904 (1.3%)	-12.69 (1.3%)
$b_{Mz, P2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, Ly, i, j}$	0	0.0001789 (1.7%)	0 (0%)	0.005329 (1.6%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	-1.096 (2.5%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 51: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU MICHELIN R15 GONFLE A 3BARS

ANNEXE G RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES LINEAIRES PAR RAPPORT AUX
PARAMETRES

G.1.2.4. Michelin R16

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-99.48 (0.59%)	1067 (0.27%)	0 (0%)	/
	2	1014 (2.1%)	-7616 (1.6%)	0 (0%)	/
	3	4.974e+5 (1.4%)	-3.959e+6 (0.97%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	-6.004e+8 (2.4%)	4.315e+9 (1.8%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	253.1 (1.2%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	15.24 (1.9%)	-116.6 (1.2%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-3.914e+5 (1.7%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, \lambda, i, j}$	1	0 (0%)	-1.464 (1.1%)	15.32 (0.82%)	-27 (0.88%)
$b_{Mz, \rho 2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, \lambda y, i, j}$	0	0 (0%)	0.003061 (0.37%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	-3.81e+4 (1.7%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/	

TABLEAU 52: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU MICHELIN R16 GONFLE A 2BARS

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-66.95 (0.8%)	818.9 (0.32%)	0 (0%)	/
	2	821.3 (2.4%)	-6318 (1.7%)	0 (0%)	/
	3	3.358e+5 (1.9%)	-3.013e+6 (1.2%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	-4.24e+8 (3.1%)	3.441e+9 (2.1%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	561.5 (0.96%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.256e+5 (2.6%)	0 (0%)	-2.051e+6 (2.8%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.855e+8 (2.1%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	16.44 (1.6%)	-127.8 (1%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-3.513e+5 (1.7%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, \lambda, i, j}$	1	0 (0%)	-1.416 (1%)	14.35 (0.8%)	-25.97 (0.83%)
$b_{Mz, \rho 2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, \lambda y, i, j}$	0	0 (0%)	0.00256 (0.45%)	0 (0%)	/
	1	0.01399 (2.3%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	-1.59 (2.3%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/	

TABLEAU 53: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU MICHELIN R16 GONFLE A 2.5BARS

G.1 RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES D'EFFORT DE CONTACT

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	-43.61 (1%)	626.1 (0.34%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-1475 (1.2%)	0 (0%)	/
	3	9.64e+4 (1.5%)	-1.521e+6 (0.6%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	9.695e+8 (1.3%)	0 (0%)	/
	6	*	*	*	/
	7	*	*	*	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	608.4 (0.91%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	7446 (3.3%)	/
	3	-1.393e+5 (2.4%)	0 (0%)	-2.25e+6 (2.4%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	6.369e+8 (1.8%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	12.57 (2.1%)	-127.2 (0.96%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	-1590 (2.5%)	7291 (2.4%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	5854 (2.8%)	0 (0%)
	4	6484 (2.6%)	0 (0%)	0 (0%)	-1.208e+6 (1.9%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	-1.367 (1.1%)	13.98 (0.86%)	-26.77 (0.88%)
$b_{Mz, p2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, ly, i, j}$	0	0.0001726 (2.3%)	0 (0%)	0.004946 (2.3%)	/
	1	0.01181 (2.6%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	*	*	*	/
	6	*	*	*	/

TABLEAU 54: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU MICHELIN R16 GONFLE A 3BARS

G.1.2.5. Michelin R17

Para- mètre	$j \setminus i$	3	2	1	0
$b_{Mz, \delta', i, j}$	1	99 (0.57%)	1189 (0.24%)	0 (0%)	/
	2	1026 (2%)	-8871 (1.3%)	0 (0%)	/
	3	5.157e+5 (1.3%)	-4.308e+6 (0.82%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	-6.16e+8 (2.1%)	4.66e+9 (1.5%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \varphi', i, j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	313.4 (0.97%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz, \gamma, i, j}$	1	0 (0%)	17.7 (1.6%)	-145.3 (0.95%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-3.234e+5 (2%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz, l, i, j}$	1	0 (0%)	-0.9869 (1.6%)	13.6 (0.91%)	-23.27 (1%)
$b_{Mz, p2, i, j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz, ly, i, j}$	0	0 (0%)	0.00418 (0.26%)	0 (0%)	/
	1	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	-2.604 (1.2%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 55: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE DU MICHELIN R17 GONFLE A 2BARS

ANNEXE G RESULTATS D'IDENTIFICATION DES MODELES LINEAIRES PAR RAPPORT AUX
PARAMETRES

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz,\delta',i,j}$	1	-66.07 (1.2%)	1011 (0.66%)	-474.4 (3%)	/
	2	739.7 (2.5%)	-8581 (1.4%)	0 (0%)	/
	3	1.039e+5 (1.4%)	-2.003e+6 (0.44%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	4.176e+6 (3%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	1.409e+9 (0.81%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	601.5 (0.89%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.129e+5 (2.7%)	0 (0%)	-1.948e+6 (2.7%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.235e+8 (2.1%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\gamma,i,j}$	1	0 (0%)	12.02 (2.3%)	-146.5 (0.87%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	8001 (2.1%)	0 (0%)
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	-2.787e+5 (2.1%)
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz,l,i,j}$	1	0 (0%)	-0.8285 (1.8%)	11.84 (0.97%)	-21.56 (1%)
$b_{Mz,p2,i,j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz,Ly,i,j}$	0	0 (0%)	0.003092 (0.31%)	0 (0%)	/
	1	0.01017 (2.7%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	-1.006e+5 (2.2%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	1.921e+8 (3%)	0 (0%)	/

TABLEAU 56: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU MICHELIN R17 GONFLE A 2.5BARS

Para- mètre	j	3	2	1	0
$b_{Mz,\delta',i,j}$	1	-21.84 (1.9%)	591.6 (0.35%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	-3831 (1.4%)	0 (0%)	/
	3	6.261e+4 (2.2%)	-1.6e+6 (0.52%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	3.673e+6 (3.2%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	1.276e+9 (0.82%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\varphi',i,j}$	1	0 (0%)	0 (0%)	667.3 (0.81%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	-1.31e+5 (2.3%)	0 (0%)	-1.884e+6 (2.7%)	/
	4	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	5	5.482e+8 (1.9%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	7	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
$b_{Mz,\gamma,i,j}$	1	6.038 (1.1%)	-48.36 (0.7%)	0 (0%)	0 (0%)
	2	0 (0%)	0 (0%)	-1605 (2.5%)	7251 (2.4%)
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
	4	6424 (2.6%)	0 (0%)	0 (0%)	-1.061e+6 (2.1%)
	5	0 (0%)	2.387e+5 (2.6%)	0 (0%)	0 (0%)
$b_{Mz,l,i,j}$	1	-0.07822 (1.6%)	0 (0%)	8.886 (0.77%)	-20.71 (0.9%)
$b_{Mz,p2,i,j}$	0	/	/	/	0 (0%)
$b_{Mz,Ly,i,j}$	0	0.000188 (1.9%)	0 (0%)	0.007165 (1.4%)	/
	1	0.009099 (2.8%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	2	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	3	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	4	0 (0%)	-1.832e+4 (2.4%)	0 (0%)	/
	5	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/
	6	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	/

TABLEAU 57: RESULTAT D'IDENTIFICATION DU MODELE D'AUTOALIGNEMENT DEVELOPPE
DU MICHELIN R17 GONFLE A 3BARS

G.2. Résultats d'identification de la compliance de ballant

G.2.1. Effort latéral

G.2.1.1. Modèle d'identification

Soit $\hat{X}_{Fy, Fpneu}$ le vecteur des paramètres identifiés du modèle de l'effort latéral d'interaction pneumatique/sol. \hat{Fy}_{pneu} correspond à la simulation du modèle de l'effort latéral de l'interaction pneumatique/sol :

$$\hat{Fy}_{pneu} = W_{Fy, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Fy, Fpneu} \quad (G-18)$$

La dérivée de l'effort latéral de l'interaction pneumatique/sol par rapport à la déformation latérale :

$$\left(\frac{\partial \hat{Fy}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) = \frac{\partial (W_{Fy, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Fy, Fpneu})}{\partial \delta'} \quad (G-19)$$

Le modèle d'identification linéaire par rapport à la raideur de ballant s'écrit :

$$Fy_p - \hat{Fy}_{pneu} = \left(\left(\frac{\partial \hat{Fy}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot \frac{\dot{Fy}_p}{\omega} \right) \cdot K_y^{-1} \quad (G-20)$$

G.2.1.2. Résultats

Pression	2bars	2.5bars	3bars
Dunlop R16	6.354e-6 (0.1%)	5.44e-6 (0.091%)	4.515e-6 (0.13%)
Michelin R15	6.841e-6 (0.079%)	5.897e-6 (0.079%)	4.826e-6 (0.12%)
Michelin R16	7.743e-6 (0.073%)	6.702e-6 (0.076%)	5.523e-6 (0.12%)
Michelin R17	6.541e-6 (0.087%)	5.564e-6 (0.094%)	4.427e-6 (0.1%)

G.2.2. Moment d'autoalignement

G.2.2.1. Modèle d'identification

Soit $\hat{X}_{Mz, Fpneu}$ le vecteur des paramètres identifiés du modèle du moment d'autoalignement.

\hat{Mz}_{pneu} correspond à la simulation du modèle du moment d'autoalignement de l'interaction pneumatique/sol :

$$\hat{Mz}_{pneu} = W_{Mz, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Mz, Fpneu} \quad (G-21)$$

La dérivée du moment d'autoalignement de l'interaction pneumatique/sol par rapport à la déformation latérale :

$$\left(\frac{\partial \hat{Mz}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) = \left(\frac{\partial (W_{Mz, Fpneu} \cdot \hat{X}_{Mz, Fpneu})}{\partial \delta'} \right) \quad (G-22)$$

Le modèle d'identification linéaire par rapport à la raideur de ballant s'écrit :

$$Mz_p - \hat{Mz}_{pneu} = \left(\left(\frac{\partial \hat{Mz}_{pneu}}{\partial \delta'} \right) \cdot \frac{\dot{F}y_p}{\omega} - Fy_p \cdot Fx_p \right) \cdot K_y^{-1} \quad (G-23)$$

G.2.2.2. Résultats

Pression	2bars	2.5bars	3bars
Dunlop R16	5.831e-6 (0.23%)	5.721e-6 (0.23%)	5.316e-6 (0.26%)
Michelin R15	5.741e-6 (0.22%)	5.311e-6 (0.25%)	5.222e-6 (0.27%)
Michelin R16	5.845e-6 (0.32%)	5.767e-6 (0.31%)	5.314e-6 (0.37%)
Michelin R17	6.437e-6 (0.2%)	5.924e-6 (0.22%)	5.643e-6 (0.25%)

Références

[Bakker 87] E. BAKKER, L.Y. NYBORG, H. B. PACEJKA, Tyre modeling for use in vehicle dynamics studies, *SAE paper n°870421*, 1987.

[Bakker 89] E. BAKKER, L.LIDNER, H.B. PACEJKA, A new Tyre Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies, *SAE Paper 890087*, 1989.

[Bourdaud 02], N. BOURDAUD, *Recalage de modèle dynamique non linéaire par logique floue*, Rapport de stage chez Nexyad S.A., Ecole Centrale de Nantes

[Basset 05] M. Basset, B. Zami, G.L. Gissinger, P. Baggio, Problématique de l'identification de la liaison véhicule-sol, *Journée Nationale de Recherche en Robotique*, 2005

[Bayle 93] BAYLE PL., FORISSIER J. F., A new tyre model for vehicle dynamics simulations, *Automotive technology International*, 1993.

[Beck 99] BECK C., DOYLE J., A Necessary and Sufficient Minimality Condition for Uncertain Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, oct 1999.

[Beck 01a], BECK C., On Formal Power Series Representation for Uncertain Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, feb 2001.

[Beck 01b] BECK C., DOYLE J., GLOVER K., Model Reduction of Multi-dimensional and Uncertain Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, Feb 2001.

[Brossard 96] J.P. BROSSARD, P. CANDAU, L. MAIFFREDY, *Dynamique du véhicule, Modélisation des systèmes complexes*, Presses Polytechniques et Universitaires Normandes, 1996.

[Cabrera 04] Cabreba J.A., Ortiz A., Carabias E., Simon A., An Alternative Method to Determine the Magic Tyre Model Parameters Using Genetic Algorithms, *Vehicle System Dynamics*, Vol 41, No 2, pp109-127, 2004.

[**Canudas de Wit 03**], C. CANUDAS-DE-WIT, P. TSIOTRAS, E. VELENIS, M. BASSET, G. GISSINGER, Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction, *Vehicle System Dynamics*, Vol 39 N° 3, p189-226, 2003

[**Coleman 96**] COLEMAN, T.F. AND Y. LI, A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on Some of the Variables, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 6, Number 4, pp. 1040-1058, 1996.

[**Corke 01**] P. CORKE, Robotics Toolbox for Matlab Release 6, User manual, april 2001, <http://www.cat.csiro.au/cmst/staff/pic/robot>

[**Descarte 41**] RENE DESCARTES, *Méditations métaphysiques*, 1641, GF Flammarion, ed 1993.

[**Delanne 2004**] Y. DELANNE, *Application des methodes de traitement du signal et d'identification aux etudes de l'interaction vehicule/pneumatique/chaussée*, Habilitation à diriger les recherches, Université de Versailles.

[**El Hadri 01**] A. EL HADRI, J.C. CADIOU, G. BEURIER, N.K. M'SIRDI, Vehicle/road interaction and tyre lateral performance identification, *IEEE international workshop on Robot and Human interactive Communication*, 2001

[**El Hadri 01a**] A. EL HADRI, *Modélisation de véhicules, observation d'état et estimation des forces pneumatiques: application au contrôle longitudinal*, Thèse de doctorat. Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. 2001.

[**Gäfvert 05**] M. GÄFVERT, J. SVENDENIUS, A novel semi-empirical tyre model for combined slips, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 43, No 5, May 2005, p351-384.

[**Gautier 90a**] M. GAUTIER, *Contribution à la modélisation et à l'identification des robots*, Thèse d'état, Univesité de Nantes, 1990

[**Gautier 90b**] M. GAUTIER, W. KHALIL, Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. RA-6(3), 1990, p. 368-373.

[**Gautier 91**] M. GAUTIER, Numerical calculation of the base inertial parameters, *J. of Robotic Systems*, Vol. 8(4), August 1991, p. 485-506.

- [**Gautier 95**] M. GAUTIER, W. KHALIL, P. RESTREPO, Identification of the dynamic parameters of closed loop robots, *ICRA 95*, Nagoya 1995.
- [**Gautier 96**] M. GAUTIER, A unified approach for dynamic identification of robots, *CESA 96*. Nantes 1996.
- [**Gautier 01**] M. GAUTIER, W. KHALIL, *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*, IC2, *Identification des paramètres des robots*, Hermès, 2001, chapitre 4, sous la direction de E. Dombre.
- [**Gautier 01a**] M. GAUTIER, Elaboration d'un logiciel d'identification des paramètres dynamiques de robot, DYCARO : DYnamic CALibration of ROBots, Contrat ECN-CRITT Productique Pays de la Loire N°98001, Mars 2001, rapport final.
- [**Gautier 02**] M. GAUTIER ET PH. POIGNET, Identification en boucle fermée par modèle inverse des paramètres physiques de systèmes mécatroniques, *JESA, Journal Europeen Des Systemes Automatisés*, 2002.
- [**Gillespie 92**] T. GILLESPIE, *Fundamentals of vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE), 1992.
- [**Golub 96**] G. H. GOLUB, C. F. V. LOAN, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3ième edition, 1996.
- [**Granvilliers 03**] GRANVILLIERS L., Realpaver User's Manual - Solving Nonlinear Constraints by Interval Computations, Ed. 0.3 for Realpaver v. 0.3, 2003.
<http://www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/granvil/realpaver/>
- [**Gustafsson 93**] F. GUSTAFSSON, Slip based estimation of tire-road friction, *IEEE Transactions on control systems technology*, Linköping 1993
- [**Halconruiy 95**] T. HALCONRUIY, *Les liaisons au sol*, ETAI 1995
- [**Imago Mundi**] SERGE JODRA, Imago Mundi, Encyclopédie gratuite en ligne, 2006,
<http://www.Cosmovisions.com/>
- [**Jaulin 01**] JAULIN L., KIEFFER M., DIDRIT O., WALTER E., *Applied Interval Analysis*, Springer, 2001.

[Kearfott 91] KEARFOTT R. B., HU C., NOVOA M., A review of Preconditionners for the Interval Gauss-Seidel Method, *J. Interval Computations*, No. 1(1), 59-85, 1991.

[Kern 03] M. KERN, *Problèmes inverses*, Support de cours 2002-2003, Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci, <http://www-rocq.inria.fr/~kern/Teaching/ESILV/inverse.pdf>.

[Khalil 86] W. KHALIL, J.-F. KLEINFINGER, A new geometric notation for open and closed-loop robots, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, USA, April 1986, p. 1174-1180.

[Khalil 87b] W.KHALIL, J.-F. KLEINFINGER, Minimum operations and minimum parameters of the dynamic model of tree structure robots, *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-3(6), déc. 1987, p. 517-526.

[Khalil 90] W. KHALIL, F. BENNIS, M.GAUTIER, The use of the generalized links to determine the minimum inertial parameters of robots, *J. of Robotic Systems*, Vol. 7(2), 1990, p. 225-242.

[Khalil 97] W.KHALIL, D CREUSOT, SYMORO⁺: a system for the symbolic modelling of robots, *Robotica*, Vol. 15, 1997, p. 153-161.

[Khalil 99] W. KHALIL, E. DOMBRE, *Modélisation, identification et commande de robots*, 2^{ème} édition, Hermès, 1999

[Khalil 00] KHALIL W., GAUTIER M., Modeling of mechanical systems with lumped elasticity, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, avril 2000, p. 3965-3970

[Khosla 86] KHOSLA P., *Real-time control and identification of direct drive manipulators*, Ph. D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, 1986, p. 401-412.

[Lawson 74] C. L. LAWSON, R. J. HANSON, *Solving Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphie, 1995. Edition originale par Prentice Hall, 1974.

[Lee 00] LEE, JUNG-HWAN, Analysis of Tire Effect on the Simulation of Vehicle Straight Line Motion, *Vehicle System Dynamics*, 33, 2000.

[Leseq 02], S. LESECQ, A. BARRAUD, *Des moindres carrés au filtre de Kalman*, IC2, Outils d'analyse pour l'automatique, Chapitre 6, Hermes, sous la direction de A. Barraud, 2002

- [Luh 80], J.Y.S. LUH, M.W. WALKER, R.C.P. PAUL, On-line computational scheme for mechanical manipulators, *Trans. Of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol 102(2), 1980, p.69-76.
- [Magni 04] MAGNI J.F., Linear Fractional Representations with a Toolbox for Use with MATLAB, <http://www.cert.fr/dcsd/idco/perso/Magni/booksandtb.html#LFRT>, ONERA, 2004
- [Michelin] site web Michelin France, 2006 : <http://www.michelin.fr>
- [Milliken 95] MILLIKEN, W.F., AND MILLIKEN, D.L., *Race Car Vehicle Dynamics*, SAE 1995.
- [Mizuno 03] M. MIZUNO, Development of Tire Side Force Model Based on “Magic Formula” with the Influence of Tire Surface Temperature, *Special Issue: Modeling, Analysis and Control Methods for Improving Vehicle Dynamic Behavior*, Vol. 38, n°4 (2003)
- [Monnerie 04], F. MONNERIE, Documentation utilisateur PSApneu, document interne PSA Peugeot Citroën, 2004.
- [Pacejka 58] PACEJKA, H.B., Study of the lateral behaviour of an automobile moving upon a flat level road, Cornell Aeronautical Laboratory Report YC-857-F-23, 1958.
- [Pacejka 91] PACEJKA, BAKKER, The Magic Formula Tyre Model, *Proceedings 1st Tyre Colloquium*, Delft, October 1991, Supplement to Vehicle System Dynamics Vol.21, 1993
- [Pacejka 97] H.B. PACEJKA, I.J.M. BESSELINK, Magic formula tyre model with transient properties, *Vehicle dynamics supplement n°27*
- [Pacejka 02] H.B. PACEJKA, *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2002.
- [Paynter 61] PAYNTER, H. M., *Analysis and Design of Engineering Systems*, MIT Press, 1961.
- [Palkovics 93] PALKOVICS L., EL-GINDY M., Neural Network Representation of Tyre Characteristics: The NeuroTyre, *Int. J. Vehicle Des. 14*, pp 563-591, 1993.
- [Radt 83] RADT H.S., AND MILLIKEN, W.F., *Non-dimensionalizing Tyre Data for Vehicle Simulation*, Road Vehicle Handling, Institute of Mechanical Engineering, C133/83, 1983.

[Radt 93] HUGO S. RADT JR, DAVID A. GLEMMING, Normalization of tire force and moment data, *Tire science and technology TSTCA*. New York 93

[Ray 97], L. RAY, Nonlinear Tire Force Estimation and Road Friction Identification : Simulation and Experiments, *Automatica* Vol. 33, No 10 pp 1819-1833, 1997

[Ripert 03] PJ RIPERT, *Méthodologie de construction de modèles physiques juste nécessaires. Génération/simplification d'un modèle de chaîne de traction automobile*, Rapport DEA, Ecole des Mines de Nantes, tutelle P. Chevrel, 2003

[Ripert 04] RIPERT PJ, CHEVREL P., LEFEBVRE D., Physical simplification of MIMO linear models from elementary components manipulation, *2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, December 2004, pp1-6.

[Ripert 06] P-J RIPERT, W. KHALIL, M. GAUTIER, P. BODSON, Identification robuste de la "formule magique" pour la caractérisation du pneumatique, *IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatisme, CIFA 2006*, Bordeaux, France, 30-31mai et 1^{er} juin 2006.

[Sharp 03], R.S. SHARP, M. BETTELLA, Tyre Shear Force and Moment Descriptions by Normalisation of Parameters and the "Magic Formula", *Vehicle System Dynamics 2003*, Vol. 39, No 1, pp 27-56, 2003

[Schuring 94] D. SCHURING, W. PELZ, M. POTTINGER, The BNPS Model – An Automated Implementation of the "Magic Formula" concept, *Society of automotive engineers*, SP-1016, Feb 1994.

[Sivakumar 04] SIVAKUMAR S., BECK C., MRedTOOL – A Model Reductin Toolbox for MultiD Systems User's Guide, Jan 2004, <http://scowl.ge.uiuc.edu/~ssivakum/research.html>

[Stephant 01] J. STEPHAN, *Diagnostic dynamique du comportement d'un véhicule : contact roue-sol*, Mémoire de DEA, Université Technologique de Compiègne, 2001.

[Stephant 04] J. STEPHAN, *Contribution à l'étude et à la validation expérimentale d'observateurs appliqués à la dynamique du véhicule*, Thèse de doctorat. Université Technologique de Compiègne, Compiègne, 2004.

[Takashi 00], T. TAKAHASHI, M. HADA, M. MIZUNO, H. KUSUNOKI, K. KITAZAWA, The Modelling of Tire Force Characteristics of Passenger and Commercial Vehicles on Various

Road Surface, *Proceedings of AVEC 2000, 5th Int'l Symposium on Advanced Vehicle Control*, Ann Arbor, Michigan, 2000

[Umeno 02] T. UMENO, E. ONO, K. ASANO & AL, Estimation of tire-road friction using tire vibration model, *SAE 2002 2002-01-1183*

[Van Huffel 91] S. VAN HUFFEL, J. VANDEWALLE, *The Total Least Squares Problem : Computational Aspects and Analysis*, SIAM 1991, Frontiers in Applied Mathematics vol. 9.

[Van Oosten 93], J.J.M. VAN OOSTEN ET AL, Determination of Magic Formula Tire Model Parameters, in *Proceedings 1st International Colloquium on Tire Models for Vehicle Dynamics Analysis*, VSD, Editor. Swets & Zeitlinger B V: Amsterdam / Lisse. 1993

[Van Oosten 03], J.J.M. VAN OOSTEN, E. KUIPER, G. LEISTER, D. DODE, H. SCHINDLER, J. TISCHLEDER, S. KÖHNE, A new tyre model for TIME measurement data, document TNO, <http://vd.wt.tno.nl/delft-tyre/documents/>

[Venture 03] VENTURE G., *Identification des paramètres dynamiques d'une voiture*, Thèse de doctorat. IRCCyN. Nantes. 2003.

[Venture 06] G. VENTURE, P-J RIPERT, W. KHALIL, M. GAUTIER, P. BODSON, Modeling and Identification of Passenger Car Dynamics Using Robotics Formalism, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 7, No 3, September 2006.

[Vetturi 96] Vetturi D., Manzo L., Faglia R., Genetic Algorithm for Tyre Model Identification in *Automotive Dynamics Studies, 29th ISATA – International Symposium on Automotive Technology and Automation*, Florence, Italy, June 1996.

[Zami 02], B. ZAMI, M. BASSET, G.L. GISSINGER, P. ROMIEU, P. COUTANT, Estimation du torseur partiel de contact de l'interface Roue/Sol par la suspension d'un véhicule automobile, *CRESPIM*, Université de Haute Alsace, 2002

[Zin 02], A. ZIN, *Investigation de la modélisation des phénomènes de dérive du pneumatique de l'automobile dans le contexte de la représentation Bond Graph*, rapport DEA Automatique, LAI, tutelle : W. Marquis-Favre, 2002

MODELISATION ET IDENTIFICATION PARAMETRIQUE DE L'EFFORT DE CONTACT PNEUMATIQUE/SOL POUR LA DYNAMIQUE DU VEHICULE

Les travaux de cette thèse portent sur l'amélioration de la corrélation essai/calcul du pneumatique. Deux axes d'améliorations sont prospectés : la méthodologie d'identification paramétrique et le modèle de pneumatique. La méthodologie d'identification paramétrique est dite « garantie » car elle est basée sur une démarche critique. Sur tout type d'excitation (sur banc d'essai ou véhicule), elle permet de caractériser de manière robuste aussi bien la structure que les paramètres du modèle. Le modèle de pneumatique se base sur le formalisme des robots articulés et sur la déformation vue par l'aire de contact. La mise en forme du modèle est réalisée de sorte à être compatible avec les modèles empiriques de spécification des efforts d'interaction pneumatique/sol. On obtient de cette manière un modèle paramétrique qui permet de décrire de manière réaliste et spécifiable le comportement du torseur d'effort appliqué à la base du pneumatique, en statique et en dynamique du premier ordre.

Cette méthodologie d'identification et ce modèle de pneumatique sont utilisés pour caractériser différents pneumatiques soumis au banc d'essais de PSA Peugeot Citroën. On identifie de cette manière les comportements observables pertinents. La démarche est illustrée sur les modèles d'effort latéral et du moment d'auto-alignement pour l'agrément de direction. Des mesures sur véhicule sont aussi utilisées pour identifier le modèle d'effort latéral afin de démontrer la validité de la méthode sur des sollicitations dynamiques réelles.

Mots clés : Identification, Robotique, Pneumatique, Pacejka, Moindres carrés, Mesures véhicule, Contact au sol, Flat Trac

MODELISATION AND PARAMETERS ESTIMATION OF TIRE/GROUND CONTACT FORCES FOR PASSENGER CAR DYNAMICS

This work deals with improvement of tire correlation between real tests and simulations. Two ways are used: in one hand parametric identification methodology and in another hand tire model. Parametric identification methodology is said "guaranteed" because it is designed in a criticism way. Thus with all kind of excitations (from test bench or passenger car), structure model and parameters can be obtained robustly. Tire model is based on the robotic formalism and on empirical specification model of tire/ground interaction forces. The obtained model can be used to specify or to predict tyre static force behaviours and first order dynamics.

The developed parametric identification methodology and the tire model are combined to characterise few tires with the PSA Peugeot Citroën test bench. Pertinent and observable behaviours are so deduced. The methodology is applied to cornering force and self aligning torque models dedicated to steering handling. At the end the method is applied to real running car measurements to identify cornering force. It proves the validity of the method both for test bench data and for running car data.

Key words : Parameter estimation, Robotic, Tire, Pacejka, Least squares, car measurements, ground contact, Flat Trac