

**Éléments de psychogénétique
pour l'analyse et la conception
de situations didactiques
en classe de mathématique
à l'école primaire**

**Application à la conception d'une séquence d'apprentissage
de la catégorisation à l'école maternelle**

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de l'Éducation
Spécialité : Didactique des Mathématiques

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Maurice DAHAN

Jury :

Rapporteur : M. Denis BUTLEN, Professeur, Université de Cergy-Pontoise

Rapporteur : M. Gérard VERGNAUD, Professeur, Directeur de Recherche
émérite au CNRS

Examineur : M. Magali HERSANT, Professeure, Université de Nantes

Examineur : Mme Christian ORANGE, Professeur, Université de Nantes

Directeur de thèse : M. Christian ORANGE

Professeur à l'Université de Nantes

ECOLE DOCTORALE : COGNITION, EDUCATION, INTERACTION

**Éléments de psychogénétique
pour l'analyse et la conception
de situations didactiques
en classe de mathématique
à l'école primaire**

**Application à la conception d'une séquence d'apprentissage
de la catégorisation à l'école maternelle**

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de l'Éducation
Spécialité : Didactique des Mathématiques

*Présentée
et soutenue publiquement par*
Maurice DAHAN

Jury :

Rapporteur : M. Denis BUTLEN, Professeur, Université de Cergy-
Pontoise

Rapporteur : M. Gérard VERGNAUD, Professeur, Directeur de Recherche
émérite au CNRS

Examinateur : M. Christian ORANGE, Professeur, Université de Nantes

Examinateur : Mme Magali HERSANT, Professeure, Université de Nantes

Directeur de Thèse : M. Christian ORANGE

Œuvrer au sein d'une institution telle qu'un Institut Universitaire de Formation des maîtres ne peut, par définition, conduire à une forme routinière de transmission des savoirs didactiques. Pour notre part, une réflexivité sur notre propre discours s'est trouvée là, comme par nécessité. C'est en cette équilibration, téléonomie irréversible dans notre fonction, que nous sommes redevables à l'institut. Nous nous sommes imposés une recherche que nous reconnaissons comme douloureuse : dès notre entrée dans l'étude de la didactique des mathématiques, il nous a semblé que nos capacités cognitives étaient bornées. En clair, nous comprenions difficilement nombre de concepts de la didactique mathématique. Nous nous en sommes d'ailleurs confiés à Michèle Artigue, au sortir d'un de nos cours parisiens, professeur au discours, là et ailleurs, d'une si grande qualité. Il est d'ailleurs vrai que ce travail de thèse s'est réellement trouvé conforté par plusieurs de ses libres et lumineuses questions. Et je l'en remercie pour cela. En d'autres termes, notre cerveau se refusait à comprendre que la signification des concepts, forgés par la didactique, échappe à une forme de normalisation, échappe à une sorte de contrôle de consistance. C'est ainsi que, par la force des choses, nous nous sommes orientés vers une conception structuraliste de la genèse des concepts. Une telle conception, de notre point de vue, ne se peut, sans certaines formes associées de contrôle de consistance. Nous nous sommes alors tournés vers les psychologues du développement que sont Jean Piaget et Lev Vygotski, constructivistes, ce qui est bien entendu, mais surtout structuralistes, ce qui est l'est beaucoup moins. Gérard Vergnaud nous a fait prendre conscience que les constructions des concepts en mathématiques sont celles de structures psychologiques. Et, c'est bien précisément pour ce lumineux et original ancrage, pour la didactique des mathématiques, que nous lui sommes définitivement redevables. Notre recherche se veut modestement une poursuite de ses travaux. Sans ceux de Michel Fabre et de Christian Orange sur la problématisation, sans doute, le concept de savoir apodictique aurait-il échappé à une focalisation pourtant incontournable dans notre vigilance épistémologique. En fait, l'apodictique devient, dans notre thèse, le nœud central de tout problème s'offrant à la cognition finalisée. Monsieur Christian Orange a bien voulu, d'autre part, être mon directeur de thèse. Sans doute lui a-t-il fallu être assez tolérant et je l'en remercie. Monsieur Denis Butlen a bien voulu être un des rapporteurs dans mon jury. J'en suis honoré. Nous lui devons, entre autres, d'avoir été concrètement confortés dans l'idée que tout élève est « enseignable », un élève en difficulté est aussi, et avant tout, un sujet épistémique. Magali Hersant a aussi accepté de faire partie de mon jury, et je lui en suis reconnaissant. Je n'oublie pas Gérard Colomb qui, il y a quelques années, m'a encouragé à transformer mes recherches personnelles en objet de thèse ; qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

Nous dirons que la genèse est un système relativement déterminé de transformations comportant une histoire et conduisant de façon continue d'un état A à un état B.



Toute genèse part d'une structure et aboutit à une structure.

Résumé

Dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants des écoles, nous nous sommes posés la question d'une ingénierie didactique épistémique. Précisément, pour nous, il s'est agi de définir, à la suite des travaux de Jean Piaget et de Gérard Vergnaud, un développement structural et épistémique des compétences à l'école primaire, et, ce faisant, d'élaborer une technologie de séquences didactiques ad hoc. Aussi, nous avons dû poser les bases d'une logique du développement des structures des schèmes ; à la condition de considérer que, relativement à une compétence donnée, un sujet élève est une structure cognitive autorégulée qui contraint les liaisons, au sein du couple schème-situation : tout développement d'une compétence mathématique impose, comme concept organisateur, un couple (R,S) où R est un couple de régulations inverses l'une de l'autre et S, un couple de schèmes réciproques. Nous avons dû plonger le concept de compétence dans un cadre linguistique, adaptant en cela les positions de Lev Vygotski qui associe étroitement développement des mots et développement conceptuel : tout développement d'une compétence mathématique peut être associé à celui d'une certaine formulation langagière dont le prédicat est un verbe d'action. Enfin, le concept d'obstacle épistémologique devient un cas particulier d'un concept que nous avons qualifié, en toute généralité, de cognitif. Nous avons choisi, comme modèle, la construction de la compétence «catégoriser à l'école maternelle». Nous avons pu confirmer qu'une médiation didactique, aux contraintes définies par la logique des schèmes, favorise un développement cognitif plus général que l'objectif initialement fixé.

Mots clés : compétence/ adaptation/ fonctions cognitives/ assimilation/ accommodation/ régulations/ schèmes/ schèmes fermés / situations perturbantes/ obstacles cognitifs/ réversibilité opératoire/ résultante cognitive.

Psychogenic elements for analysis and development of didactical situations in mathematics class in primary school.

Application to construct a sequence of categorization learning in nursery school

Abstract

In the framework of first time and continuous training for primary school teachers, I considered the question of epistemic didactical engineering. More precisely, starting from the works of Jean Piaget and Gerard Vergnaud, I focused on defining a structural and epistemic development of the competences of the pupils in primary school, and on the elaboration of a technology of ad hoc didactical sequences. So, I had to lay basis for the logic of the development of structures of schemes, taking into account that, for a given competence, a subject – pupil – is a self-regulated cognitive structure, which constitutes a constraint for the links in the couple scheme – situation : that is, any development of competence in mathematics requires as organizing concept a couple (R,S) in which R is a couple of regulations, inverse to each other, and S, a couple of reciprocal schemes. I had to take into account the context of linguistics to delineate the concept of competence after Lev Vygotski who tightly links the development of words to conceptual development. Any mathematical concept can be linked to a certain language formulation, which predicate is a verb of action. Last point is that the concept of epistemological obstacle becomes a special case of a concept that I qualified, in general, as “cognitive”. As a model, I chose the building of competence “to categorize in nursery- school”. I was able to confirm that a didactical mediation with constraints shaped by the logic of schemes induces a cognitive development beyond the initial goal that we had initially defined.

Keywords : competence/ adaptation / cognitive functions / assimilation/ accommodation/ regulations / schemes / closed schemes/ disturbing situations / cognitive obstacles/ operational reversibility/ cognitive resultant.

Discipline : Sciences de l'Éducation

Laboratoire : CREN
UFR : Lettres et Langages
Chemin de la Censive du Tertre
44312 Nantes

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	p. 13
--------------------	-------

Chapitre 1 : CADRES THEORIQUES - POSITION DU PROBLEME

1. Préliminaires	p. 37
1.1 Relativement à la formation de futurs enseignants.....	p. 32
1.2 Des concepts de la didactique entre formateurs et futurs enseignants.....	p. 38
2. La question technologique du développement scolaire	p. 39
2.1 Une technologie pour résoudre certaines tensions	p. 40
2.2 Mais une technologie pourrait être une nécessité plus fondamentale	p. 43
3. La question du développement intellectuel	p. 46
3.1 Précisions relatives au développement d'une connaissance mathématique donnée	p. 44
3.2 Obstacles épistémologiques et fonctionnement cognitif	p. 45
4. Les cadres théoriques	p. 46
4.1 L'apport piagétien	p. 48
4.1.1 Une transposition non naïve des concepts de Jean Piaget	p. 48
4.1.2 Une psychologie génétique réductrice	p. 49
4.2 L'apport Vygotskien	p. 49
4.2.1 Langage et développement	p. 49
4.2.2 Des situations seulement concrètes	p. 53
4.3 Des apports contradictoires	p. 55
4.3.1 Jean Piaget et le développement intellectuel	p. 55
4.3.2 Lev Vygotski et le développement intellectuel	p. 58
5. Une notion difficile à saisir : la prise de conscience	p. 60
5.1 Une notion ambiguë	p. 60
5.2 Mais une synthèse possible	p. 62
5.2.1 Des positions certes nuancées	p. 62
5.2.2 Un invariant fonctionnel : le langage.....	p. 63
5.2.3 Un invariant épistémique : le constructivisme.....	p. 64
5.2.4 Des limitations de nature cognitive	p. 66
6. Epilogue	p. 67
6.1 Quelques définitions	p. 67
6.2 Les cadres et outils théoriques explicites	p. 70
6.2.1 Le mot pour la médiation et le schème pour la structuration	p. 70
6.2.2 Un apprentissage par les compétences. Des situations didactiques au sein de la zone proximale de développement	p. 71
6.2.3 Le concept d'obstacle épistémologique et Jean Piaget	p. 73

Chapitre 2 : QUESTIONS POUR UNE PROBLÉMATIQUE. METHODOLOGIE

1. La question du sujet épistémique	p. 77
2. Interrogations concernant certains concepts en usage dans la didactique des mathématiques....	p. 80
2.1 La question de l'obstacle en général et épistémologique en particulier	p. 80
2.1.1 Le concept d'obstacle et le premier corps de questions	p. 80
2.1.2 L'obstacle épistémologique et le second corps de questions	p. 81
2.1.2.1 Le concept de situation problème	p. 81
2.1.2.2 La conception de situations didactiques	p. 82
3. Sujets et fonctionnements cognitifs : types de fonctionnement	p. 82
3.1 Celui des schèmes	p. 83
3.2 Celui des opérations psychiques supérieures	p. 83
3.3 Celui des régulations	p. 84
4. Mise à l'épreuve d'une technologie pour la conception de séquences didactiques, et finalisée par l'apprentissage d'une connaissance mathématique nouvelle à l'école élémentaire	p. 85
4.1 L'apprentissage de la catégorisation et du tri à l'école maternelle.....	p. 85
4.2 Un groupe de recherche.....	p. 86
4.3 Exploitation	p. 93

Chapitre 3 : ÉLÉMENTS D'ANALYSE COGNITIVE DU CONCEPT DE SITUATION-PROBLÈME

1. Situation-problème et cognition	p. 95
1.1 Définition	p. 95
1.2 Une logique du sens. La causalité cyclique	p. 96
2. La prise de conscience	p. 99
2.1 La question complexe et centrale de la prise de conscience	p. 99
2.1.1 Avec Jean Piaget et Lev Vygotski	p. 100
2.1.2 Avec d'autres psychologues	p. 107
2.1.3 Des difficultés opérationnelles	p. 108
2.2 Des conséquences pour la didactique des mathématiques	p. 112
2.3 Une classification des niveaux de la prise de conscience.....	p. 115
2.4 Le décalage entre la conscience et le langage, comme fonction de communication.....	p. 121
3. Conséquences didactiques	p. 123
3.1 Des formulations langagières contraignantes.....	p. 123
3.2 Le conflit sociocognitif, condition didactique suffisante de la prise de conscience ?	p. 122
4. Des questions fondamentales pour l'apprentissage	p. 126
4.1 Notre problématique nous conduit aux questions suivantes.....	p. 126
4.2 La possibilité didactique.....	p. 128

Chapitre 4 : ÉLÉMENTS DE PSYCHOGÉNÉTIQUE POUR L'ANALYSE ET LA CONCEPTION DE SITUATIONS DIDACTIQUES

1. Éléments d'analyse écologique et critique du concept de schème	p. 132
1.1 Une référence anglo-saxonne dans un cadre piagétien.....	p. 132
1.2 Une référence dans la didactique française et un cadre piagétien corrigé	p. 135
1.2.1 Une théorie des concepts	p. 135
1.2.2 La notion de schème	p. 136
1.2.3 Une organisation des connaissances	p. 137
1.2.4 Un découpage relatif des connaissances	p. 138
1.2.5 Le concept fondamental de schème explicité dans des cas particuliers.....	p. 140
1.2.6 Une classe de situations	p. 142
1.3 Le concept de schème : des difficultés d'opérationnalité.....	p. 147
1.3.1 Position du problème. Les processus fonctionnels : distinction entre le comment et le pourquoi.	p. 147
1.3.2 Vers une étude fine de l'activité des schèmes	p. 150
1.3.3 De l'importance des registres sémiotiques	p. 159
1.3.3.1 Une focalisation sur les signifiants mathématiques.....	p. 160
1.3.3.2 De l'importance de certains signifiants langagiers.....	p. 161
1.4 Une situation fondamentale de Guy Brousseau	p. 162
1.4.1 La situation et les différents niveaux d'analyse a priori	p. 162
1.4.2 Éléments de psychogenèse pour la construction du nombre.....	p. 173
1.4.2.1 Éléments d'épistémologie canonique	p. 173
1.4.2.2 Application de ce schéma au problème de dénombrement.....	p. 179
1.4.2.3 Compléments relatifs aux aspects linguistiques dans la structuration des compétences	p. 182
1.4.2.4 Conclusion.....	p. 186
1.5 De l'importance des formulations langagières dans la construction des réversibilités opératoires.....	p. 187
1.5.1 Un exemple approché théoriquement	p. 187
1.5.2 Des formes langagières comme invariants opératoires.....	p. 194
1.5.2.1 Des registres spécifiques	p. 194
1.5.2.2 Conclusion.....	p. 196
1.6 Remarques concernant l'analyse de l'activité dans les situations didactiques	p. 197
1.6.1 A la recherche de micro-variables	p. 197
1.6.2 Une réponse avec le concept de schème ?	p. 198
1.6.2.1 Des difficultés d'opérationnalité	p. 198
1.6.2.2 Des divergences d'interprétations qui s'expliquent.....	p. 199

1.6.3	Alors retrouver un fonctionnement transcendant celui des schèmes	p. 199
1.6.4	Une étude de cas	p. 204
1.6.4.1	La situation	p. 204
1.6.4.2	Des analyses a priori	p. 208
1.6.4.3	Eléments d'analyse cognitive et a priori de l'activité.....	p. 211
1.6.4.3.1	L'activité de régulation.....	p. 212
1.6.4.3.2	Analyse de la dimension épistémologique psychogénétique	p. 218
1.6.4.4	Les productions des élèves et quelques compléments d'analyse cognitive a posteriori.....	p. 228
1.7	Conclusion générale	p. 242
2.	Eléments de synthèse pour une conception de situations didactiques	p. 244
2.1	Précisions méthodologiques	p. 244
2.2	Structure cognitive	p. 245
2.3	Compétences	p. 248
2.3.1	Compétences et didactique à l'école primaire	p. 248
2.3.2	Compétence et performance	p. 254
2.3.3	Compétence dans un cadre linguistique.....	p. 256
2.3.3.1	Outils linguistiques.....	p. 256
2.3.3.2	Compétence et dénotation	p. 260
2.3.4	Compétence et cognition	p. 262
2.3.4.1	Vers une définition simplifiée du concept de schème	p. 262
2.3.4.2	Compétence et développement piagétien. Les différents types d'équilibration	p. 266
2.3.5	Résumé : composantes d'une compétence.....	p. 275
2.3.5.1	La performance	p. 275
2.3.5.2	Une réversibilité opératoire fondamentale	p. 277
2.3.5.3	Des formes langagières d'une compétence et la sémantisation des actions	p. 278
2.3.5.4	Précisions relatives au concept de l'inhibition	p. 291
2.3.5.5	Le concept de schème.....	p. 293
2.3.5.5.1	Un premier postulat et ses conséquences didactiques	p. 293
2.3.5.5.2	Des situations perturbantes	p. 296
2.3.5.5.3	Un deuxième postulat et ses conséquences didactiques.....	p. 297
2.3.5.5.4	Conséquence du postulat 1 : le principe d'inertie	p. 297
2.3.5.5.5	Un troisième postulat et ses conséquences didactiques	p. 298
2.3.5.5.6	Le concept d'obstacle	p. 302
2.4	Conclusion	p. 307
3.	Achèvement d'une construction technologique	p. 307
3.1	Structuration didactique	p. 308
3.2	Conditions de possibilité du développement des compétences	p. 310
3.2.1	La réversibilité opératoire	p. 310
3.2.1.1	Jean Piaget et la réversibilité opératoire	p. 312
3.2.1.2	Formalisation de la réversibilité opératoire	p. 313
3.2.1.3	Loi didactique fondamentale	p. 316
3.2.2	Le possible et le nécessaire	p. 320
3.2.2.1	Quelques considérations sur l'écologie des concepts	p. 320
3.2.2.2	Le possible	p. 322
3.2.2.3	Le nécessaire	p. 323
3.2.3	Le franchissement d'un obstacle	p. 327
3.2.3.1	Définition	p. 327
3.2.3.2	Définition du verbe comprendre.....	p. 328
3.2.3.2.1	Comprendre et la psychologie cognitive.....	p. 328
3.2.3.2.2	Conclusion : la compétence et le sens	p. 329
3.2.4	La zone proximale de développement	p. 331
3.2.4.1	Le concept de Lev Vygotski.....	p. 331
3.2.4.2	La zone de proche développement des compétences mathématiques, dans le cadre scolaire.....	p. 331
4.	Les éléments constitutifs d'une certaine technique pour le projet didactique	p. 332
4.1	Les éléments de l'analyse a priori	p. 335
4.2	Une séquence didactique formelle	p. 335
4.3.	Remarques finales	p. 336

Chapitre 5 : UN APPRENTISSAGE POUR L'ÉCOLE MATERNELLE : LA CATEGORISATION

1. Les différentes analyses.....	p. 340
1.1 La dimension épistémologique historique : Deh	p. 340
1.2 La dimension curriculaire.....	p. 344
1.3 La dimension épistémologique psychogénétique	p. 348
1.3.1 La genèse de la structure de catégorisation selon Jean Piaget	p. 348
1.3.2 Conclusion	p. 355
1.3.3 Définition des compétences des niveaux 1 et 2	p. 358
1.3.3.1 Niveau 1	p. 358
1.3.3.2 Niveau 2	p. 358
1.4 Des choix didactiques	p. 359
1.4.1 Un regard sur l'écologie du concept de la catégorisation dans l'enseignement, à l'école primaire	p. 359
1.4.1.1 Les instructions officielles.....	p. 359
1.4.1.2 L'approche de Britt-Marie Barth.....	p. 363
1.4.1.3 Les travaux de Sylvie Cèbe	p. 367
1.4.2 La stratégie didactique	p. 377
1.4.2.1 Préliminaires.....	p. 377
1.4.2.2 Le choix didactique	p. 377
2. Compléments	p. 380
2.1 Un test	p. 380
2.2 Sur certaines conditions de la recherche	p. 387
3. La séquence elle-même.....	p. 390
3.1 Précisions sur la nature des obstacles épistémologiques	p. 390
3.2 Construction initiale du schème S_{C^*f} Premières phases de la compréhension	p. 391
3.3 Début de la construction de la réversibilité opératoire ou de la construction du schème $S_{C^{**}f}$. Secondes phases de la compréhension	p. 399
3.4 Situations de consolidation du schème S_{C^*f}	p. 414
3.5 Des séances relatives à la construction du schème $S_{C^{**}f}$	p. 440
3.6 L'apprentissage	p. 449
3.7 Analyse complémentaire sur le processus canonique d'adaptation.....	p. 462
3.8 Evaluation du développement mental	p. 470
3.8.1 Préliminaires et apport théoriques	p. 470
3.8.2 Un pré-test	p. 478
3.8.3 Le post-test	p. 482
3.8.4 Les situations	p. 485
3.9 Le cas du tri comme évaluation de la résultante cognitive.....	p. 495
3.9.1 Définitions	p. 495
3.9.2 L'évaluation.....	p. 496
3.10 Evaluations non didactiques.....	p. 506

Chapitre 6 : CONCLUSIONS - PERSPECTIVES DE RECHERCHE

1. Les questions de notre problématique	p. 511
1.1 Une question de formation	p. 511
1.2 Un cadre cognitif.....	p. 512
1.3 La corrélation de deux épistémologies	p. 513
1.4 La consolidation d'un système	p. 513
1.5 Une approche linguistique du développement des compétences.....	p. 515
1.6 Une formulation cognitive dans l'analyse du développement des compétences	p. 515
1.7 La conception des situations didactiques	p. 516
2. Un apprentissage à l'école maternelle : la catégorisation	p. 517
2.1 Un groupe de recherche.....	p. 517
2.2 L'apprentissage et son évaluation	p. 518
3. Perspectives de recherche	p. 519
3.1 La construction de modèles didactiques.....	p. 519
3.2 Des évaluations cognitives spécifiques	p. 519

3.3	Des remédiations.....	p. 520
3.4	Genèse des structures logiques.....	p. 520
3.5	De l'action virtuelle comme action concrète.....	p. 520

ANNEXES	p. 521
----------------	-------	--------

BIBLIOGRAPHIE	p.529
----------------------	-------	-------

INTRODUCTION

La formation des maîtres, relative à l'enseignement des mathématiques, à l'école primaire, est soumise à des tensions multiples qui l'exposent à une critique permanente : la recherche en didactique des mathématiques, dont l'une des dimensions concerne l'expérimentation et le développement d'ingénieries, se trouve sur la sellette¹. Des décisions politiques qui peuvent sembler relever purement de l'idéologie, conduisent à des réorganisations institutionnelles. Les réformes se succèdent et la confiance dans le système éducatif s'effrite. Les programmes de mathématiques, fixant les objectifs et contenus des apprentissages, sont eux-mêmes l'objet de remaniements fréquents². On met régulièrement en cause les méthodes pédagogiques que ces programmes prônent pourtant³. Le statut culturel des mathématiques dans la société est souvent réinterrogé et redéfini de façons diverses. Ces tensions attisent des sentiments de déséquilibre au sein des formations d'enseignants : un paradigme pédagogique, lourdement mis en place, pouvant se trouver contesté, à différents niveaux de l'institution scolaire ; des contenus de formation et des concepts de la didactique pouvant être dénoncés comme non opérationnels. On retrouve en filigrane, dans les propos de René Macron, chef du bureau des écoles, certaines de ces tensions et, explicitement, un projet de régulation, lors du séminaire national de novembre 2007, patronné par la Direction Générale de l'Enseignement Scolaire. Il précise (fermement) quelques principes, à partir desquels vont se réécrire les programmes de juin 2008 :

- « *les programmes doivent s'articuler avec le socle commun de connaissances et de compétences ...* » ;⁴
- *ils doivent être lisibles par tous, comme l'est le texte de culture partagée que représente le socle commun, ils doivent en effet être accessibles aux enseignants comme aux parents ;*

¹ Michèle Artigue, présidente de l'ICMI. 'International Commission on Mathematical Instruction'. *Introduction au colloquium de didactique des mathématiques*. 18 Octobre 2007.

<http://www.ardm.asso.fr/rencontre/semin/s200710/Colloquium-Artigue.pdf>

² Pour les programmes de mathématique de l'école élémentaire, on peut, en particulier noter les bulletins officiels de 1995, 2002, 2007 et 2008.

³ Michèle Artigue. *Introduction au colloquium de didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁴ En référence à la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école du 23 avril 2005. L'article 9 de loi précise entre autres : *La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société*. Ce socle comprend entre autres compétences, la maîtrise des principaux éléments de mathématiques ; (constitutive de la 3^{ème} de 7 compétences). Ces connaissances et compétences sont précisées par décret, pris après avis du Haut Conseil de l'éducation. L'acquisition du socle commun par les élèves fait l'objet d'une évaluation qui est prise en compte dans la poursuite de la scolarité.

➤ *ils doivent respecter la liberté pédagogique. Celle-ci fait débat. La loi dispose qu'elle commence et s'arrête aux programmes, mais aussi à l'équipe de l'école. La liberté pédagogique n'est pas en effet une forme de liberté individuelle permettant à chacun de procéder comme il le souhaite* ».

Jean Pierre Kahane entrevoit une des explications sociologiques de ces tensions dans le couple 'rejet des mathématiques par une partie de l'opinion - utilité des mathématiques dans un grand nombre de pratiques humaines'⁵. Les premiers points de l'exposé de René Macron semblent, en partie, lui donner raison. Le premier point se veut connoter ce que culturellement, « *il n'est pas permis d'ignorer au 21^{ème} siècle* »⁶. Le deuxième point connote, entre autres, une banalisation des objets mathématiques, avec le risque d'une minoration de leur signification⁷. Jean Pierre Kahane note qu'il semble qu'une des façons immédiates de résoudre une telle tension est de soumettre le concept d'utilité au dogme de l'utilitarisme. Ce dernier « *semble économiser le temps et les forces des professeurs et des élèves* ». Mais il « *consiste à donner des recettes au lieu de contribuer à la formation de l'esprit* »⁸. On comprend alors que la liberté pédagogique, en risquant de s'arrêter à la lettre du programme, puisse conduire à une telle dérive. De plus, de façon récurrente, l'attente du futur enseignant de l'école primaire qui, spontanément, n'est pas, loin s'en faut, sensibilisé aux aspects didactiques et psychologiques de l'enseignement des mathématiques, est essentiellement d'ordre pragmatique. Il attend, le plus souvent, de sa formation, des réponses et non des questions. Ainsi, de futurs enseignants sont plutôt réticents à admettre que le savoir mathématique, à enseigner, n'est pas à transmettre selon un ordre immuable qui pourrait être décrit par le chemin : 'définitions – règles– exercices d'application – problèmes'⁹. Plus exactement, des enseignants, formés initialement dans les instituts de formation, admettent que des activités préparatoires peuvent servir de préalable d'entrée dans une certaine construction d'une connais-

⁵ Rapport au ministère de l'éducation nationale. *L'enseignement des sciences mathématiques*. Odile Jacob. 2002

⁶ La question, que René Macron propose de faire progresser aux animateurs du séminaire porte, en particulier, sur « *ce que nous pensons indispensable qu'un élève sache dans le domaine des mathématiques au sortir de l'école primaire et avant son entrée au collège* ».

⁷ Cette laïcisation des objets d'apprentissage n'est sans doute pas sans danger sur la construction à l'école de leur signification au profit d'objectifs plus accessibles comme leur routinisation à court terme.

⁸ Opus cité. Notons que l'on retrouve cette appréciation, exprimée sous différentes formes, allant jusqu'à la contestation, par de nombreux pédagogues et didacticiens des mathématiques, faisant suite au projet de programme d'avril 2008 qui s'incarnera finalement dans le programme officiel du 19 juin 2008.

⁹ Et des situations, conçues par eux, et même reprises à des auteurs comme les pédagogues de la série Ermel (équipe qui, sous la direction de Jacques Colomb, s'est inspirée du courant constructiviste récent dans la didactique des mathématiques dont quelques fondateurs, depuis les années 1970, se trouvent être Guy Brousseau, Régine Douady ou Gérard Vergnaud, pour construire tout un ensemble pédagogique, concernant l'enseignement primaire), peuvent rester sur le fond superficielles, car les attentes, relatives à l'activité de l'élève, sont aveuglées par une focalisation trop systématique sur des résolutions de tâches qui, précisément, peut ne servir que de prétexte pour poser ce « qu'il faut retenir ».

sance visée. Mais leur épistémologie de l'apprentissage des mathématiques reste proche d'une conception transmissive. Dès lors, « on dérouta les enseignants quand on leur suggère que leurs élèves en savent trop pour comprendre et que le problème n'est presque jamais de combler un vide mais plutôt de questionner des connaissances endormies »¹⁰. Il en résulte que les formations disciplinaires qui s'adossent aux acquis de la didactique sont suspectées, par une majorité de stagiaires, de ne pas répondre aux exigences de la pédagogie de « terrain ». Nombre d'entre-eux pourraient alors trouver un certain confort dans le texte suivant écrit en 1933¹¹.

« Il y a une éducation mathématique à faire à l'école primaire, et elle ne peut être faite qu'avec un livre où les notions sont réparties en un enchaînement logique et se tenant bien, en chapitres dépendant les uns des autres et formant un tout complet qui restera dans l'esprit de l'enfant ».

Donc, on trouvera dans un tel ouvrage :

1° des définitions et des règles qui doivent être apprises par cœur, bien entendu après qu'elles aient été expliquées et comprises ;

2° des exercices et problèmes sur chaque chapitre ;

3° une suite logique de notions divisées en chapitres délimités et suivant pas à pas les nouveaux programmes ».

Nous retrouvons dans ce texte trois des piliers étayant une pédagogie dite transmissive.

➤ Le savoir à enseigner est chronologiquement défini par la logique de l'enchaînement du savoir mathématique. La validité de cet enchaînement peut prendre la forme de définitions ou de règles qui apparaissent en tête d'un chapitre et ex abrupto.

➤ L'appareil cognitif d'un élève est implicitement ainsi fait que si le premier point est bien respecté, il retiendra forcément ce savoir avec plus de facilité. Cela pourrait reposer sur une scientificité occulte ou, plus explicitement, sur une conception innéiste et naturaliste des origines de la logique qui normalise la mise en texte mathématique : l'élève est a priori apte à recevoir un enseignement de cette science puisque la logique est née de la conscience de l'Homme sur sa propre activité mentale. L'entendement du petit homme que représente un élève est constitué de catégories, formes a priori de la connaissance. « *Même si le sujet ne découvre les connaissances ou n'en prend conscience qu'à l'occasion de l'expérience*¹² (ce qui permet un développement ontogénétique de durée variable), il ne l'en tire pas mais

¹⁰ Michel Fabre. *Bachelard éducateur*. PUF. 1995.

¹¹ Charles Plomion. *Arithmétique. Cours moyen*. Hatier. 1933.

¹² Qui se résume ici au discours de l'enseignant.

l'organise au moyen de telles structures jusque là virtuelles »¹³. Du point de vue ontogénétique, la connaissance apparaît donc, avant tout, comme le résultat d'un processus endogène. Cette disposition psychologique supposée peut justifier, à elle seule, la pédagogie où l'élève ne participe pas initialement à la construction de ses connaissances, puisque le contenant cérébral est déjà naturellement apte à recevoir les aliments culturels que constituent les objets mathématiques qui « s'enchaînent logiquement » (d'où l'importance du 3°).

➤ L'essentiel de la participation de l'élève, « table rase » dans cette construction « progressive » des connaissances, suppose un effort d'attention, l'arrêt de la pensée spontanée et désordonnée et la concentration intérieure. Il n'y a, en principe, pas d'obstacle à l'acquisition de connaissances nouvelles, puisque le discours de l'émetteur du savoir respecte « la clarté du discours mathématique ». Toute lacune ou erreur de l'élève est interprétée comme conséquence d'une volonté insuffisante, dans son effort d'attention ou de mémorisation.¹⁴

Des approches différentes peuvent poser, comme principe, la primauté de l'activité d'un sujet, dans une ontogenèse des connaissances, et renvoient à une formulation plus complexe d'un développement cognitif, stimulé par des situations didactiques. Ces situations objectives¹⁵, que l'on peut qualifier de milieux externes à l'élève, peuvent lui être aménagées sur des fondements épistémologiques bien différenciables. Hans Aebli¹⁶, qui en déduit une distinction entre « *une didactique traditionnelle* » et « *une didactique de l'école active* », nous en donne quelques analyses comparatives.

➤ La didactique traditionnelle se fonde sur une épistémologie sensualiste-empiriste. En d'autres termes, l'apprentissage va résulter du « *témoignage des sens* », dont dispose un élève, et qui vont lui permettre d'abstraire, d'exemples divers, un invariant conceptuel. John Stuart Mill « *affirme bien que l'esprit reçoit les notions (mathématiques, physiques, biologiques etc.) du dehors et qu'on ne les reçoit jamais que par voie de comparaison et d'abstraction* ». C'est donc, avec raison, que l'on a qualifié de « sensualiste-empiriste » « *une psychologie qui trouve l'origine de toutes les idées dans l'expérience sensible et qui n'attribue au sujet qu'un rôle insignifiant dans leur acquisition* ». Hans Aebli note que les notions sont alors produites « *sous la forme d'un simple exposé intuitif sans qu'un problème ait été posé au préalable* ». Nous ajoutons que, sans nier une forme d'activité d'un sujet sen-

¹³ Jean Piaget. *Biologie et connaissances*. Dans sa critique de l'apriorisme kantien. Pages 138-142. Gallimard. 1967.

¹⁴ Paul Mouy. *Logique*. Chapitre 1. *Logique et psychologie*. Hachette. 1944.

¹⁵ Objectives car non (encore) transformées par un élève (en attente d'agir).

¹⁶ *Didactique psychologique*. Delachaux et Niestlé. 1963

sible mais aussi supposé, a priori, capable d'abstraction, le milieu didactique¹⁷ se présente comme un milieu fermé¹⁸ puisque, lors de l'apprentissage, il n'est pas expérimentable et déformable par l'élève.

➤ La didactique de l'école active peut se définir comme un activisme orienté par le besoin.

Pour W.A.Lay, l'élément naturel de la vie psychique est la réaction d'ensemble qui consiste à recevoir des impressions du milieu et à réagir, en réponse, sur celui-ci. « *L'élève est inséré dans un milieu vivant qui agit sur lui et sur lequel il réagit* ». Les impressions du milieu sont réélaborees en expressions, produits de l'activité expérimentale du sujet. Mais, note Hans Aebli, « *cette conception singulière de l'expression s'explique par le fait que Lay n'est parvenu que très partiellement à reconnaître la nature active de la pensée* ». Nous ajoutons que si, comme Jean Piaget, W. A. Lay semble (en nous fondant sur ce qu'en dit Hans Aebli) donner toute son importance à l'activité motrice de l'enfant, dans l'intériorisation de certaines formes (qualitatives ou quantitatives), cette dernière ne nous apparaît pas comme une reconstruction, au plan de pensée, de la réalité perçue. Les structures mentales du sujet ont là une faculté essentiellement reproductive. Enfin, le milieu reste encore fermé, dès lors que cette exploration, de nature kinesthésiste, n'aboutit pas à des déformations anticipées de ce milieu, donc a fortiori, à la recherche de coordinations entre des actes et des observables d'un milieu modifié. Le milieu n'apparaît pas comme problématique et donc non stimulateur de rétroactions de la part du sujet.

Pour John Dewey, « *c'est l'action créatrice qui caractérise les rapports entre le sujet et le monde. La pensée est ainsi vue dans un contexte d'action. L'homme est incité à réfléchir lorsqu'en exerçant une activité, il rencontre une difficulté lorsqu'un doute ou une alternative surgit devant lui. Il analyse alors la situation, en recherche les causes et envisage les effets possibles de son action ou du phénomène qui se déroule devant ses yeux. Une fois l'acte de réflexion terminé, la validité des conclusions atteintes est encore corroborée par*

¹⁷ Guy Brousseau définit le milieu comme un système externe à l'élève, antagoniste de l'élève, dans la situation didactique. Guy Brousseau introduit des notions d'adidacticité que nous délaissions pour le moment. *Le contrat didactique. Le milieu*. Recherche en didactique des mathématiques. Vol.9(3). Pages 309-336. Edition la pensée sauvage. 1988. Mais, dans le processus d'adaptation (concept inspiré de la dialectique piagétienne), l'élève, initialement actif, se retrouve en position réflexive, devenant un élément de ce milieu, ses actes devenant eux-mêmes des observables. Il se retrouve, à la fois, synchroniquement face à un milieu externe et diachroniquement comme faisant parti du milieu précédent. Ce schéma est explicité par Claire Margolinas précisant une suite de milieux emboîtés. *Actes de l'université d'été de la Rochelle* de juillet 1998.

¹⁸ Nous qualifions d'ouvert, un milieu pouvant subir des transformations d'origines exogènes. Ainsi, Jean Piaget reconnaît-il, en ce sens, que sujet et monde réel sont tous deux des milieux ouverts. C'est une condition nécessaire pour que puisse s'activer les processus psychologiques résultant des interactions, au sein du système sujet-milieu.

*l'action... »*¹⁹. Claparède introduit, dans cette dynamique, une énergétique en termes de besoins et de satisfactions. « *Comme l'adulte, l'enfant est un être actif dont l'action, régie par la loi de l'intérêt ou du besoin, ne saurait donner son plein rendement si l'on ne fait pas appel aux mobiles autonomes de cette activité »*²⁰. Il y a continuité génétique entre l'action et la pensée : la pensée se construit dans une recherche active. John Dewey en infère des règles didactiques. Il définit une situation proche de ce que Guy Brousseau appellera situation didactique d'action²¹ puisque celle-ci suppose que l'élève y « *soit engagé, dans une activité continue à laquelle il s'intéresse pour elle-même, qu'un problème véritable surgisse dans cette situation, comme stimulus de la réflexion, qu'il dispose de l'information et fasse les observations nécessaires à la solution, que les solutions provisoires lui apparaissent et qu'il soit responsable de leur élaboration ordonnée, que la possibilité lui soit donnée de soumettre ses idées à l'épreuve de l'application, pour déterminer leur portée et découvrir lui-même leur validité »*²². Psychologiquement, la connaissance doit répondre à un besoin, à un problème né dans un contexte qui le rend nécessaire. Par ailleurs, tout en reconnaissant à John Dewey la profondeur de ses analyses, lorsqu'il définit la pensée comme un outil de l'action adaptatrice, Hans Aebli pense qu'il lui manque d'avoir perçu, en termes psychologiques²³, la nature opératoire de la pensée. Dès lors, si John Dewey nous incite à entendre le fonctionnement de la pensée comme une dénotation d'activités explicites et intériorisées car, finalement, la pensée devient une désignation d'actions²⁴ à exécuter ou déjà exécutées, cette dénotation peut nous sembler réduite, dans la mesure où, si l'activité concourt bien à l'accroissement des connaissances, elle ne nous apparaît pas comme favorisant parallèlement le développement de ce fonctionnement lui-même ; en d'autres termes, celui plus largement de l'intelligence, celle-ci « *désignant les formes supérieures d'organisation ou d'équilibre des structures cognitives »*²⁵, formes qui, justement, conditionnent les accroissements ultérieurs de connaissances.

Hans Aebli insiste sur cet aspect de structuration qui accompagne l'activité de la pensée. L'apriorisme d'Hans Aebli réside dans le caractère inné du processus d'assimilation, exprimant un des traits du naturalisme piagétien : le sujet cognitif est fondamentalement soumis à ce processus. « *Jean Piaget a en effet pu montrer que l'assimilation n'est pas seulement une*

¹⁹ *Didactique psychologique*. Chapitre II. *La didactique de l'école active*. Opus cité.

²⁰ Jean Piaget. *Psychologie et pédagogie*. Denoël. 1969.

²¹ Précisons toutefois qu'Hans Aebli n'y perçoit pas une allusion à un obstacle à franchir.

²² *Didactique psychologique*. Chapitre II. *La didactique de l'école active*. Opus cité.

²³ Plus précisément, de ne pouvoir postuler cette nature, à la suite de recherches de psychologie. John Dewey a véritablement postulé que « *la pensée, nos conceptions et nos idées sont des désignations d'opérations à exécuter ou déjà exécutées »* ; mais, dit Hans Aebli, à la suite de considérations purement philosophiques.

²⁴ C'est-à-dire, se représentant des observables de l'action, achevés ou anticipés et séparables les uns des autres.

²⁵ Jean Piaget. *La psychologie de l'intelligence*. Chapitre 1. Armand Colin. 1967

forme inférieure de la prise de contact entre le sujet et l'objet, mais qu'elle se retrouve à tout les niveaux du développement mental »²⁶. Il rappelle la thèse fondamentale de Jean Piaget, concernant le développement des connaissances : « *celles-ci ne procèdent ni de la seule expérience des objets, ni d'une programmation innée, préformée dans le sujet, mais de constructions successives avec élaboration constante de structures nouvelles* »²⁷. « *Seulement, de telles structures ne sont pas pour autant tirées des objets eux-mêmes, car elles se construisent au moyen d'éléments opératoires, abstraits des actions du sujet sur les objets et non pas de ceux-ci...* »²⁸. Un élément de ce structuralisme est donc la construction progressive des opérations²⁹. Celles-ci, sont la forme que prendront progressivement les actions, lorsque l'enfant a pu passer du plan de l'action à celui de la représentation. Les matières d'enseignement sont alors interprétées en termes d'opérations réversibles, propriétés qui caractérisent une forme aboutie de l'intériorisation des actions³⁰. La tâche du maître consiste à créer des situations telles que l'enfant puisse construire les opérations qu'il doit acquérir. « *Avant d'aborder le problème de la réalisation pratique d'une unité d'enseignement, le maître doit chercher quelles opérations sont à la base des notions qu'il se propose de faire acquérir aux élèves* »³¹.

La formation de la pensée devient synonyme de la construction d'opérations. La question que nous pourrions envisager est celle de l'application de ce principe, dans la réalisation de séquences didactiques visant l'introduction de notions mathématiques nouvelles. La question que nous pourrions entendre comme corrélatrice et, plus fortement, comme exprimant un réel homomorphisme entre le registre dans lequel va se développer une connaissance mathématique et le registre des schèmes associés à son intériorisa-

²⁶ *L'assimilation*. Chapitre VI

²⁷ Jean Piaget. *L'équilibration des structures cognitives*. Avant propos. PUF. 1975.

« *Les structures logico-mathématiques, par exemple, ne sont ni préformées à l'état de structures achevées, au sein du sujet, ni tirées des objets, mais supposent en leurs phases initiales toute une période d'action sur les objets et d'expérience, aux cours desquelles ceux-ci sont indispensables : Biologie et Connaissance*. Page 142.

Opus cité.

²⁸ Ibid.

²⁹ Jean Piaget pousse à son extrême (ce qui va lui être contesté ultérieurement par nombre de psychologues) cette notion d'opérations puisque, finalement, et pour lui, celles-ci deviennent, au terme de leur développement, éléments d'une structure d'un groupe logico-mathématique, soit concret soit formel, selon les deux stades que le psychologue a définis, relativement au développement général de l'intelligence et, tel qu'il l'a théorisé.

³⁰ « *Nous parlerons d'opérations réversibles pour désigner les activités pouvant être déroulées dans les deux sens et être annulées par une action de sens contraire* ». « *Une action de réunir est réversible si ce que l'on réunit peut être dissocié ; un déplacement est réversible si le mouvement AB peut s'inverser en un mouvement BA. On pourra dire, de même que l'hypothèse est une conduite réversible en ce sens que l'hypothèse peut être annulée, etc.* ». Jean Piaget. *Le problème neurologique de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*. Extrait des Archives de psychologie. Vol 32. Pages 241-258. 1949. Version électronique.

³¹ Hans Aebli. Chapitre VII. *La construction des opérations par la recherche de l'élève*. Nous reprendrons cet aspect, en le réinterprétant, lorsqu'il s'agira de concevoir nous-mêmes des situations didactiques. Opus cité

tion³², est celle de la possibilité d'un adressage explicite à ce dernier registre. La stratégie pédagogique, que nous propose Hans Aebli, est une sorte de réponse positive à cette question³³ : 1) « faire appel aux schèmes antérieurs et, à partir de ceux-ci, construire la nouvelle opération » ; 2) « la construction des opérations se fait au cours de la recherche et toute recherche part d'un problème »³⁴ ; 3) « un problème, ayant pour objet la mise en œuvre ou la découverte d'une opération, est toujours un projet d'action, réalisable par des manipulations effectives ... »³⁵. Le problème est un projet d'action pratique. Ce faisant, vont se construire des connaissances dont les utilisations pratiques répondent à des questions réciproques³⁶. Cette focalisation sur la construction d'opérations, de nature logico-mathématique spécifique, rend-t-elle suffisamment raison du caractère opératoire d'une connaissance ? N'est-elle pas restrictive ? N'y a-t-il pas lieu de lier, avant tout, ce caractère opératoire aux registres sémiotiques qui vont permettre l'expression d'une telle connaissance ? En fait, ce caractère opératoire n'est-il pas susceptible d'une définition plus générale qui tienne compte aussi du contexte linguistique dans lequel il se construit ? Nous notons, au contraire, que si Hans Aebli préconise de poser le problème avec le plus grand soin, il ne systématise pas les questions relatives aux formes langagières, en dehors de celles purement mathématiques, aussi bien concernant l'énoncé du problème que celles relatives à la formulation des solutions. Pourtant, lorsqu'il considère qu'une question ou un problème contiennent un schème anticipateur³⁷, il donne, comme exemples, des expressions linguistiques qui orientent nécessairement l'activité initiale d'un sujet³⁸. La psychologie de Lev Vygotski nous enseigne que mots et connaissances sont indissociables, l'approfondissement des uns accompagnant les développements des autres. Le langage n'est pas seulement ce qui favorise et socialise l'expression d'un développement potentiel comme l'affirme Jean Piaget, il peut précéder ce développement et le provoquer comme le soutient Lev Vygotski. Nous notons enfin, dans le cas de l'acquisition d'une notion mathématique nouvelle, que le terme de problème semble avoir, pour Hans Ae-

³² Il faut alors entendre une composante procédurale de cette connaissance puisque le schème en est une de ses formes opératoires.

³³ C'est ainsi que l'entend Hans Aebli, dans son « application de la didactique à la psychologie de Jean Piaget ». Opus cité.

³⁴ Chapitre VII. *La construction des opérations par la recherche de l'élève.*

³⁵ Chapitre VIII. *Le problème comme projet d'action.*

³⁶ Par exemple, la connaissance, action intériorisée, de la formule de l'aire d'un rectangle, $A = L \times l$, admet une composante qui, pratiquement, peut s'entendre comme une réciproque s'exprimant par la formule $L = A : l$.

³⁷ La question ou le problème « bien posés » « sous une forme schématique, anticipent l'opération à effectuer » qui, selon les cas, est soit déjà parvenue à une forme d'achèvement, soit est une forme initiale de cette activité qui doit conduire à la construction d'une nouvelle opération. Chapitre V. « Recherche problème et construction de problème ». Opus cité.

³⁸ Par exemple « qu'est-ce que ? », « est-ce plus ou moins ? », « combien ? » Chapitre V. *Recherche, problème et construction de l'opération.* Opus cité.

bli, une double dimension : d'une part, il oriente la recherche de l'élève vers un plan d'action pratique³⁹ et très général, et d'autre part, il peut se construire au cours d'une recherche collective qui oriente alors celle-ci vers l'opération à construire. « *Car la définition d'un problème équivaut souvent à la construction d'une notion nouvelle ou opération, tandis que son élaboration est plutôt une mise en œuvre des schèmes anticipés dans le problème* »⁴⁰. Toutefois, l'exposé de la partie expérimentale de sa didactique psychologique ne nous convainc pas de l'existence d'un tel processus de problématisation : si la question initiale est celle de la comparaison des rendements en herbe de deux champs rectangulaires, pourquoi donc le schème de la comparaison des périmètres n'est-il pas pertinent ?⁴¹ En d'autres termes, en quoi la formulation du problème nous assure que celle-ci ne va pas être anticipatrice de schèmes dangereux car, non pertinents en l'occurrence ? Un tel possible est donc ignoré. Ainsi, un processus de problématisation qui pourrait « passer » par l'élaboration d'un problème, et aussi modélisant le problème pratique, dans un cadre mathématique, n'est-il pas véritablement construit. Une approche de modélisation semble se retrouver, dans l'idée de quelques-uns des élèves d'Hans Aebli, qui orientent l'activité collective vers un pavage de l'une des surfaces, à l'aide des formes obtenues par le découpage exhaustif de l'autre surface. Mais l'apodicticité de la notion « de comparaison des surfaces »⁴² n'est pas construite, dans cette discussion collective⁴³. Rien n'indique alors qu'un nouveau schème soit là en construction. Aussi, un autre problème deviendrait celui de l'élaboration des outils devant servir cette comparaison et non de répondre prématurément par une procédure pratique de « découpage-pavage-carré » et dont la raison va rester ignorée de beaucoup. Notons, de même, que le passage de ce procédé qualitatif à la mesure de l'aire de chaque rectangle est une réponse sans que la question de sa nécessité soit posée, ni même de sa faisabilité. Ainsi, la didactique d'Hans Aebli souffre-t-elle, en l'occurrence et fondamentalement, de deux lacunes de nature épistémologique. Psychologiquement, l'aire est définissable comme une qualité d'une surface qui se rattache perceptivement à son étendue⁴⁴. L'évaluation des schèmes disponibles, auxquels il soumet ses élèves, ignore ceux dont ils peuvent disposer, pour construire le saut qualitatif que représente le pas-

³⁹ Le problème peut connoter « *une pratique sociale plausible* ».

⁴⁰ Chapitre IX. *Quelques remarques sur la recherche de l'élève...* Opus cité.

⁴¹ Comme le rapporte Hans Aebli. Il s'agirait de « *travailler* » les représentations initiales de ces élèves qui en font l'activation. En particulier, la question pourtant évidente de la relation entre le rendement en herbe d'un champ et celui d'une quantification d'une des grandeurs liées à cette surface n'est pas posée.

⁴² Expression impropre puisqu'il s'agirait de comparer l'une des caractéristiques de ces surfaces, à savoir leur étendue.

⁴³ Michel Fabre note, à ce propos, que pour Hans Aebli, la notion de surface semble aller de soi.

⁴⁴ C'est ce que considèrent à juste titre les auteurs de « *Cap Math* » dans leur introduction de la notion d'aire au CM1. *Le guide des activités*. Page 81. Hatier 2003.

sage de l'unidimensionnel au bidimensionnel⁴⁵. Des schèmes dangereux sont ignorés comme de possibles obstacles. Mathématiquement, il ne distingue pas surface et aire. La question de la mesure ne fait pas problème, une unité de mesure normalisée⁴⁶ s'impose « naturellement » dans la classe. Aussi, on doit comprendre que l'opération, correspondant au calcul de l'aire d'un rectangle, est la forme intériorisée du pavage, à l'aide de cette unité normalisée arbitrairement⁴⁷.

Avec la théorie des champs conceptuels, Gérard Vergnaud entend répondre à cette préoccupation de la relation entre activité de construction de connaissance et structuration des schèmes. « *Par rapport à une psychologie centrée sur les structures logiques comme celles de Piaget, la théorie des champs conceptuels apparaît plutôt comme une psychologie des concepts* »⁴⁸. Il analyse ainsi l'interconnexion des concepts mathématiques et de leurs développements psychogénétiques⁴⁹. Mais de tout concept en usage dans la didactique des mathématiques, nous devrions poser la question de sa valeur pragmatique dans la mesure où, s'il en est fait mention en formation, nous devrions envisager une telle valeur. Aussi, la référence systématique au concept de schème que se donne Gérard Vergnaud pour l'analyse de l'activité de sujet, est-elle suffisante, en l'état, pour que réciproquement cette référence serve de levier dans la conception des situations didactiques ? Notons que « *L'approche opératoires⁵⁰ et psychogénétique de la connaissance, c'est-à-dire l'approche qui considère que la connaissance se développe dans le temps, dans une interaction adaptative du sujet, avec des situations non encore maîtrisées* »⁵¹, ne lui a imposé ce concept que tardivement⁵². Le concept n'apparaît pas dans « *l'analyse de ces opérations de pensée qui représente l'analyse proprement cognitive de la tâche* » et en forme le noyau⁵³. Les notions d'invariants opératoires ou de règles d'action

⁴⁵ Nous rentrons ici dans cette rhétorique piagétienne qui se fonde sur la continuité des constructions de schèmes, comme la réaffirme pourtant Hans Aebli. « *Les principes de cet enseignement ont été inspirés par la psychologie de Jean Piaget...* »...« *Ayant reconnu ce développement comme une construction continue de systèmes d'opérations à partir de conduites plus primitives, le pédagogue....* ». Chapitre XIV. *Résultats et interprétations de l'expérience*.

⁴⁶ L'unité de mesure est représentée par un carré et non par un rectangle (rejeté pour des questions de commodité !) ou par un triangle. On peut noter une telle activité dans le livre des activités pour des CM2 de la collection Cap math. Page 127. Hatier. 2004.

⁴⁷ Elle le serait difficilement si les dimensions L et l étaient données dans un système non normé d'unités de mesure.

⁴⁸ Jean Brun. *Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. Dans vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Pages 67-83. La pensée sauvage. 1994.

⁴⁹ *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques*. Vol n° 2 (2). Pages 215-232. 1981.

⁵⁰ Ce dernier terme, récurrent dans le discours de Gérard Vergnaud, nous semble en certaines occurrences, ambigu. Nous le reprendrons, en lui associant une signification fondamentale.

⁵¹ Introduction dans le numéro de la revue de recherches en didactique des mathématiques consacré à *la didactique du concept de volume*. R D M. Vol n°4 (1). 1983

⁵² Articles des années 'fin 70, et début 80'.

⁵³ *La didactique du concept de volume*. Opus cité.

ou de calculs relationnels dont il fera trois des composantes principales du schème, se retrouvaient, certes, dans ces analyses initiales, focalisant l'attention sur l'organisation de l'activité du sujet, au sein de laquelle ils jouent un rôle fondamental, mais sans leur interprétation systématique, au sein d'une structure cognitive organisatrice de cette même activité⁵⁴. Mais cette systématisation a-t-elle vraiment apporté à l'analyse de l'activité ? Rend-elle vraiment compte de certaines causalités entre les faits observables ou explicables, comme probables voire nécessaires, dans le déroulement de cette activité ? Pierre Greco répétait que « *la référence au lexique piagétien théorique (« schème », « anticipation », « équilibration ») ne suffit pas à fournir l'analyse du processus examiné* ». Il considérait que cette observation ouvrait « *le débat sur décrire et expliquer* »⁵⁵. « *L'option n'est évidemment pas brutalement entre expliquer et décrire mais d'abord, à ses yeux, entre description et analyse* ». Et, pour ce qu'il en est de l'analyse de l'activité d'un sujet en situation de résoudre un problème ou d'exécuter une tâche, il s'agit de concevoir celle « *d'une structure cognitive, représentation assez « réaliste » des outils dont la pensée se sert pour organiser le réel* »⁵⁶, c'est-à-dire le comprendre. **Alors demeure la question de la nécessité du concept de schème lui-même et, antérieurement, de la définition nécessaire d'un outil reconnu comme un incontournable de la cognition.**

Guy Brousseau va reprendre un héritage constructiviste, en se référant initialement au fonctionnement piagétien de l'adaptation⁵⁷. Mais, précise le didacticien, il s'agit d'introduire dans le milieu des intentions didactiques⁵⁸. Lors de l'apprentissage, le primat est alors accordé à l'action de l'élève dans « *un milieu, dispositif qui justifie objectivement l'emploi de la connaissance* »⁵⁹ : Le sujet acquiert de la connaissance, en s'adaptant à des situations, conçues pour induire des feedbacks positifs ou négatifs, régulations relatives aux actes successifs que l'élève peut juger légitime de produire, avec, comme principe téléonomique, de progresser vers la solution d'un problème nouveau que la situation lui pose. Une connaissance nouvelle apparaît alors comme la solution optimale, « *production libre de l'élève dans ses rapports*

⁵⁴ Par exemple Gérard Vergnaud, et al. *Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel de l'élève*. Didactique des sciences et psychologie. N°45. Pages 7-15. Mai 1977.

⁵⁵ « *Ou sur les trompeuses sécurités de l'analyse de variance* ». *Structures et significations. Approche du développement cognitif*. Article. *Comment ça marche ? Réflexions préliminaires à quelques questions de méthodes et aux problèmes dits « fonctionnels »*. Pages 295-301. Edition de l'école des hautes études en sciences sociales. 1991.

⁵⁶ Ibid

⁵⁷ *Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques*. Chapitre 3. *Éléments pour une modélisation*. R.D.M. Volume 7(2). Pages 33-115. 1986.

⁵⁸ Ibid.

⁵⁹ Guy Brousseau. *Recherche en éducation mathématique. Quaderni di Ricerta in Didattita*. n°16. 2006

avec un milieu adidactique »⁶⁰. Le sens de cette connaissance se construisant dans la prise de conscience que l'élève a de ses propres régulations⁶¹.

Aussi bien pour Hans Aebli que pour Guy Brousseau, les connaissances à développer prennent fondamentalement une forme objective, en ceci qu'elles deviennent des réponses à des questions qui apparaissent comme des nécessités, au sein de processus problématiques qui leur sont spécifiques. On note explicitement ce principe transcendantal dans la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, dans le cadre d'un enseignement des mathématiques⁶². Jean Piaget le connote de même, à plusieurs reprises, et il justifie le progrès vers cette conscience de l'apodictique par le processus assimilateur lui-même, promu au rang d'instrument de la compréhension⁶³. Mais, précisément, pour Jean Piaget, la nécessité d'un nouveau palier de connaissance l'est au terme de son développement, puisque sa nature est avant tout d'être dans le potentiel de certains états antérieurs. C'est l'activité naturelle du processus d'assimilation qui, conduisant le sujet à « expérimenter le réel », lui fournit les occasions de son développement (connaissances spécifiques ou intelligence). Mais alors que Guy Brousseau cherche à aménager un milieu spécifique d'une connaissance donnée, en vue d'en obtenir l'émergence de sa nécessité, Hans Aebli néglige les approfondissements des dimensions épistémologiques, aussi bien relativement aux savoirs en jeu que relativement aux filiations des schèmes dans l'activité de construction de ces savoirs. Il se focalise sur un des aspects que prend cette nécessité, relativement à la connaissance opératoire, la réversibilité logico-mathématique reconnue comme objectif pédagogique explicite.

Les états d'un processus que l'on peut qualifier très généralement d'adaptation, relèvent de la logique interne de situations qui peuvent alors être conçues comme adidactiques. Selon les situations, ce paradigme, caractérisé par l'apodicticité des connaissances, prend des connotations diverses. En classe de mathématique, lorsqu'il exerce son droit de dévolution, l'élève peut parvenir à s'adapter à une situation qui lui pose un problème, parce que la connaissance visée devient l'outil nécessaire de cette adaptation. Elle s'impose à lui, au moins en acte⁶⁴. Mais le caractère épistémique de cette nécessité ne s'exerce pas sans une organisation didactique spécifique de laquelle elle va résulter⁶⁵. Plusieurs dimensions sont ainsi en jeu : inter-

⁶⁰ Guy Brousseau. *Théorie des situations didactiques*. Chapitre 1. *Le contrat didactique. Le milieu*. RDM. Vol 9 (3). Pages 309-336. 1988.

⁶¹ Guy Brousseau. *Ibid.*

⁶² *Ibid.*

⁶³ *La prise de conscience. Conclusions générales*. Puf. 1974.

⁶⁴ C'est dire avec plus ou moins « prise de conscience ».

⁶⁵ Les travaux de Christian Orange et de Michel Fabre relatifs à la problématisation, dans le cadre de l'enseignement des sciences, montrent aussi qu'il s'agit d'un principe qui apparaît comme un repère incontournable, dans cette dimension d'une didactique préoccupée de situations d'apprentissage sous la forme problème.

viennent, dans les situations d'action, des contraintes d'ordre matériel imposées par la nature même des objets de certains milieux⁶⁶ (didactiques) ; interviennent des contraintes d'ordres social et culturel que peut imposer le jeu coopératif, dans les situations de formulations ou les situations de validation (argumentations spécifiques de la situation). Pour Jean Piaget, comme pour Guy Brousseau, le langage joue, dans le processus d'élaboration et de socialisation des connaissances, un rôle vectoriel essentiel. En particulier, la mathématique est une théorie logique, les propositions mathématiques sont obtenues au sein d'un processus démonstratif (au moins une argumentation reconnue par la communauté « classe ») qui les donnent pour vraies⁶⁷. Le développement de la connaissance mathématique, même à un niveau primaire, n'échappe pas à un contrôle collectif de sa signification, dans un sens que rappelle Michel Fabre : « *elle constitue sa forme de possibilité logique* »⁶⁸ ; interviennent des contraintes relevant du cognitif, celles relatives aux connaissances ou conceptions antérieures de l'élève et aux réorganisations internes de celles-ci⁶⁹, et celles de la reconnaissance et de la prise en compte de l'altérité et des enjeux sociaux. « *Appelons manifestation, cette prise en charge subjective* »⁷⁰ de la situation ; interviennent des contraintes relatives à l'ergonomie, lorsque la connaissance à atteindre se constitue en réponse englobant des économies de natures cognitive ou culturelle⁷¹. **Pourtant, si ces contraintes effectuent, en quelque sorte, un tri dans les possibles, elles ne suffisent pas à rendre compte de l'apodicticité de l'un de ces possibles, ce qui pourrait répondre d'un principe transcendantal et concerner précisément une invariance, dans le développement cognitif des sujets.** Ainsi, nous noterons que, concernant les ingénieries de Guy Brousseau, la dimension relative à l'épistémologie génétique est l'objet d'une analyse minorée.

Michel Fabre rappelle que de John Dewey à Guy Brousseau, en passant par Hans Aebli, la notion de problème joue un rôle primordial, dans leurs propositions pédagogiques respectives⁷². Pour Gérard Vergnaud, un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situa-

⁶⁶ D'une façon générale, on peut dire que le milieu matériel est soumis à certaines régulations dont la causalité purement matérielle. Cette causalité délimite un champ de possibles pour ce milieu. Par exemple, dans la situation dite du puzzle de Guy Brousseau, le puzzle et les pièces fabriquées par les élèves sont de tels objets matériels mais, aussi, le registre sémiotique dans lequel s'exprime la tâche à résoudre.

⁶⁷ On peut retrouver une étude de ce type de connaissances mathématiques dans RDM : Vol 25(1). *L'expérience de la nécessité épistémique*. Groupe CESAME. Page 5-90. 2005

⁶⁸ *Situations- problèmes et savoir scolaire*. Chapitre 3. *Sens problème et vérité. Vers une logique du sens*. Puf. 1999.

⁶⁹ Des contraintes de cet ordre se retrouvent en fait dans toutes les situations puisqu'un des enjeux de ces situations est que l'élève y prenne conscience de son activité d'auto-construction.

⁷⁰ Michel Fabre. Ibid.

⁷¹ En fait, toutes ces contraintes finissent par ressortir du cognitif car, à un moment ou à un autre, un sujet doit en envisager la coordination. Il y réussit d'ailleurs ou il y échoue.

⁷² *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité.

tions-problèmes. Michel Fabre entreprend « *une réflexion épistémologique sur les tenants et aboutissants de ce que l'actualité pédagogique ou didactique nomme situation-problème* ». Nous retiendrons, en particulier, que deux dimensions duales y sont mises en exergue : l'une de nature psychogénétique, où joue fondamentalement la prise de conscience et l'autre de nature épistémologique où joue fondamentalement la spécificité d'un savoir à enseigner. Ces deux dimensions, concernant la genèse des connaissances, relèvent de deux épistémologies, la première révélant l'inertie de la raison pratique⁷³ de l'élève et la seconde pouvant révéler un obstacle de nature historique. En effet, « *il a, de plus, été montré que ces connaissances premières⁷⁴ pouvaient se constituer en obstacles, au sens Bachelardien du terme, même en mathématique* »⁷⁵. L'activité de la conscience devient, comme le soutient Jean Piaget, celle de la compréhension ; dès lors, un principe didactique : en se heurtant à cet obstacle repérable dans l'histoire des mathématiques, « *c'est l'élève lui-même qui doit prendre conscience de l'échec de son savoir antérieur* »⁷⁶. Mais ce qui coordonne la structuration des schèmes relève d'une logique propre, elle est de nature épistémique⁷⁷. Et de même, ce qui coordonne la structuration de la connaissance mathématique relève, en théorie, d'une logique propre et de nature épistémique. Un sujet avec, contre et dans une situation-problème⁷⁸ pourrait-il posséder la liberté d'échapper à l'une ou à l'autre ? En interprétant Jean Piaget, nous obtenons que ces deux logiques vont se construire l'une par l'autre, dans une interaction initiale (sujet-milieu), où joue le processus d'assimilation. Fondamentalement, cette interaction prend la forme de régulations spécifiques. On peut retrouver concrètement ces deux formes logiques en acte, en considérant, de la situation didactique, une description de son déroulement en cinq phases : « *1) action ou recherche individuelle ou en groupe ; 2) formulation ou exposition à la classe des résultats trouvés ; 3) validation ou « preuve » par les élèves du bien-fondé de leurs résultats ; 4) institutionnalisation des savoirs construits dans leur signification mathématique ; 5) puis exercices et évaluation* »⁷⁹. Dans ces cinq phases, les deux formes logiques sont en interaction. L'activité en dévolution produite dans les phases 1), 2) et 3) devrait produire l'expression d'interactions de types différents. La phase 4), mais également la phase 3), tout

⁷³ Au sens où, engagé à agir dans la situation, l'élève ne remet pas spontanément en cause le caractère d'objectivité qu'il attribue à ses connaissances antérieures

⁷⁴ Premières au sens de précédant d'autres connaissances « à la construction desquelles elles pourraient faire obstacle ».

⁷⁵ Guy Brousseau. *Education et didactique des mathématiques*. Communication au congrès d'Aguas Calientes, Mexico. Avril 2000. Version électronique.

⁷⁶ Michel Fabre. Chapitre 5, paragraphe : *la situation-problème*. Opus cité.

⁷⁷ Ceci dépend bien sûr de ce que l'on entend par structure. Nous en développerons une conception au chapitre 5.

⁷⁸ Ceci pour rappeler que l'élève devrait percevoir le milieu caractérisant la situation problème comme initialement allié, puis antagoniste.

⁷⁹ Michel Fabre. Chapitre 5. Paragraphe : *la situation-problème*. Opus cité.

en les relativisant par rapport au niveau considéré, redéfinissent, dans la classe, cette activité première, dans une téléologie contrainte par la seconde logique, téléologie qui n'apparaît explicite qu'au terme de la situation didactique. La phase 5) définissant une alimentation d'une structure nouvelle de schèmes, résultant de ces interactions. En fait, la définition de la situation-problème suppose le principe d'une liaison constructible par l'élève et fondamentalement conscientisable, entre certains éléments de ces deux logiques : la logique des schèmes suppose le processus d'assimilation naturel, ce qui va pousser l'élève à s'engager dans la situation sans le doute. Un élément explicite de la situation est l'expression d'une tâche à résoudre dont la réussite passe par le respect de la logique interne à un certain registre mathématique, et dans lequel peuvent se décrire tous les éléments mathématiques du problème. Cette logique est l'une des dimensions précisant un ensemble de validités, dans la situation de référence⁸⁰. L'échec peut provenir de l'inadéquation du schème d'assimilation activé et de cette logique ignorée du sujet. Ce qui semble possible au sujet n'est pas validé par la situation. La prise de conscience de l'échec devra donc être continuée par la recherche d'un équilibre entre une forme accommodée de ce schème et la situation⁸¹. C'est là, l'une des expressions de la logique des schèmes. **Si l'on accepte le principe que l'activité de la conscience est indissociable d'une forme supérieure de l'activité cognitive, puisqu'un sujet y engage, comme dit Lev Vygotski, son attention volontaire et logique, peut-on entendre la régulation de cette activité, sans tenir compte du niveau scolaire considéré et, par là même, du niveau de maturation de ces fonctions ? Ne prend-on pas, dès lors, le risque de voir se disperser le sens que la situation doit faire émerger, au gré des capacités différentes⁸².** La notion de sens pourrait se trouver questionnée ou plus précisément relativisée, dès lors que l'activité de la conscience dépendrait de ces dernières ; ce sens que Jean Piaget semble contraindre à respecter la logique des schèmes, même confrontée à l'aléatoire du réel, mais où le nécessaire finit par s'imposer dans l'univers des possibles ; ce sens que Michel Fabre laisse libre de se mouvoir dans l'univers des possibles, avec tous les risques d'échapper à la logique des propositions, avant de se retrouver aussi lié à une proposition nécessaire⁸³. Il semble qu'il faille choisir entre le sujet épistémique de Jean Piaget et le sujet « libre » de Michel Fabre. Mais il nous apparaît que le sujet épistémique n'emprisonne pas le sujet libre. Il en est l'ossature transcendante, il en définit toujours les limites au sens fini du terme mais aussi au sens

⁸⁰ Situation dans laquelle l'élève est actif.

⁸¹ Explicitement, cet équilibre s'exprimera par une certaine connaissance, objectif ou solution de la situation-problème.

⁸² Nous avons pu noter que cette désorientation, dans la quête du sens, conduisent, nombre de sujets, à se réfugier dans des assertions dominées par toutes sortes de manifestations.

⁸³ Ibid. *Double direction de la problématisation.*

d'une récursivité⁸⁴ non limitée de cette finitude. C'est justement ces limites qui, dans le champ des possibles, définissent l'émergence du nécessaire. Mais aussi et surtout, « *pour comprendre et analyser ce qui est singulier, il faut avoir une représentation correcte de l'universel* »⁸⁵. Il nous semble, en vérité, que ce choix repose en définitif sur des définitions préalables de la compréhension ou du sens, concepts indissociables, mais dont il peut sembler que les significations sont alors à entendre dans des cadres de natures distinguables⁸⁶.

Certaines orientations en didactique des mathématiques :

➤ reprendraient, de l'héritage piagétien, les ancrages biologiques que sont les mécanismes d'adaptation et d'organisation. Le premier postulat fondamental est que l'adaptation est la fonction naturelle du développement intellectuel et, en particulier, celle de l'acquisition des connaissances. Le second postulat fondamental est que ces connaissances sont autant de formes d'actions intériorisées, s'organisant selon une logique qui est celle de la construction des schèmes. « *la notion de schème rend compte de l'organisation des actions du sujet sous la forme de structures* »⁸⁷ ;

➤ reprendraient de l'épistémologie de Gaston Bachelard, les notions d'obstacles et de ruptures épistémologiques. Un obstacle épistémologique est constitué de connaissances ou de conceptions qui s'opposent à une assimilation normale d'une connaissance nouvelle. L'accommodation qui passe par des actions modifiées par le sujet suppose, précisément, une rupture avec ces conceptions ou connaissances anciennes⁸⁸ ;

➤ pourraient concevoir des situations qui posent un problème et « font construire », par l'élève lui-même, la connaissance nouvelle comme la solution du problème (au moins en acte). De telles situations peuvent prendre la forme de situations-problèmes⁸⁹, forme revendiquée par nombre de concepteurs de situations didactiques. Michel Fabre analyse, qu'effectivement, la situation-problème est généralement focalisée sur la résolution (d'un problème)⁹⁰. Avec Christian Orange, il s'est plutôt orienté depuis plusieurs années sur le principe de situations-problèmes dont l'enjeu est précisément « *une activité de problématisation*

⁸⁴ La récursivité exprime un processus stable dans son développement et qui, dans ce cas, à bien entendre Jean Piaget, n'aurait théoriquement pas de point d'arrêt.

⁸⁵ Jean François le Ny. *Comment l'esprit produit du sens. Introduction*. Odile Jacob. 2005

⁸⁶ Ce que nous proposerons au chapitre 4.

⁸⁷ Bertrand Troadec. *Psychologie du développement cognitif*. Armand Colin. 2003.

⁸⁸ Cette façon de parler, si elle peut convenir à une conception brousseauiste du processus d'adaptation, reste en contradiction avec l'interprétation que donnent certains analystes des positions de Jean Piaget, relativement au développement des connaissances. En majorité, ils voient, dans la théorie de l'épistémologue suisse, l'affirmation d'un développement de nature continue

⁸⁹ Concept sur lequel nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 3.

⁹⁰ Situations-problèmes et savoir scolaire. Chapitre 6. *La situation-problème et ses ambiguïtés*. Opus cité.

dans toutes ses phases et, en particulier, la construction même du problème qui, seule, peut lui conférer son véritable sens ». Le franchissement d'un obstacle est un état spécifique dans le processus de ces situations.

Mais les pratiques fortement constructivistes ne sont pas tenables de façon systématique, le temps de l'action que l'on donne aux élèves pour « construire leur connaissance » se faisant nécessairement au dépend du temps de « renforcement » de ces connaissances⁹¹. Dans la pratique, on assiste parfois au report de la phase d'institutionnalisation, faute de temps. Et d'aucuns pourraient y voir une des raisons du relatif échec des élèves qui, au sortir de l'école primaire, présentent statistiquement un fort taux de lacunes ou d'oublis⁹². De plus, comme l'a décrit Guy Brousseau, il se produit d'inévitables ruptures de contrat qui accompagnent tout processus didactique et, sans lesquelles, un apprentissage spécifique d'une certaine connaissance ne peut aller à son terme. « *La relation didactique doit continuer coûte que coûte* »⁹³. En particulier, la dévolution, envisagée comme un des actes d'un contrat d'adictivité⁹⁴, est soumise à des éclipses momentanées, tenues comme incontournables. Ce processus demande une grande maîtrise didactique. Les faits, explicités ci-dessus, peuvent conduire, comme nous le constatons souvent dans les classes, à un effet « pandore »⁹⁵, lorsque l'enseignant ne domine plus une situation qu'il a mise en place : le rendement peut s'avérer très faible et la reprise en main par l'enseignant, en fin de séance, sous la forme d'une institutionnalisation (malgré tout), peut finalement gommer ce qui aurait dû être une construction de sens, au profit d'une sorte de synthèse qui, pour beaucoup d'élèves, peut sembler imprévisible et arbitraire.

De plus, au niveau de la recherche, il reste surtout que les concepts d'obstacle⁹⁶ et de situation-problème⁹⁷ peuvent apparaître, encore, comme manquant de stabilité. **Des contradictions théoriques fortes demeurent comme l'opposition entre le naturalisme de Jean Piaget et l'épistémologie de Gaston Bachelard. Cette fragilité met à mal des formulations**

⁹¹ Ce renforcement est d'ailleurs, actuellement, l'objet d'évaluations, organisées au niveau national. (Fin CE1, fin du premier trimestre au CM2).

⁹² Relativement à des objectifs « fondamentaux » de connaissances, sensés être atteints à un certain niveau, on pourrait considérer que le taux de réussite (pourcentage d'items réussis par un élève) est satisfaisant lorsqu'il dépasse 63%, comme on peut l'interpréter dans les différents rapports concernant des évaluations nationales. En deçà, des remédiations spécifiques devraient être envisagées. Évaluations du Ministère de l'Éducation Nationale de janvier 2010 : « *Évaluation des acquis des élèves en français et en mathématiques* ». http://www.education.gouv.fr/evaluation_des_acquis/acad15/nantes.html.

⁹³ Guy Brousseau. *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage. 1998

⁹⁴ Situations dépouillées de l'expression explicite de l'intention d'enseigner.

⁹⁵ On peut entendre « de tout et n'importe quoi ». Non canalisées par un système de régulations, des subjectivités diverses peuvent s'y exprimer sans retenue.

⁹⁶ Certains auteurs, considérant, le concept d'obstacle épistémologique, fondamental dans la théorie des situations didactiques, avancent, plus fortement, un argument de non consistance. Voir par exemple Spagnolo Filippo et le postulat d'Eudoxe Archimède .1999.

⁹⁷ Michel Fabre fait une analyse des ambiguïtés persistantes qui accompagnent le concept de situation-problème. « *situations-problèmes et savoir scolaire* ». Chapitre 7. Opus cité

d'ingénierie didactique qui sont présentées à de futurs enseignants⁹⁸. Les processus d'intériorisation de l'action et de franchissement d'obstacle, comme étant à penser en lien avec des concepts organisateurs explicites de l'action didactique, restent difficiles à comprendre. En particulier, il est mal perçu par l'enseignant (stagiaire ou titulaire) «qu'une connaissance ancienne puisse faire obstacle à l'acquisition d'une connaissance nouvelle». Cette idée s'oppose, par exemple, à un principe implicite d'homomorphisme entre savoir enseigné et savoir appris qui fonde certaines pédagogies «transmissives», pédagogies dont on peut retrouver la résurgence dans nombre de situations didactiques⁹⁹. Elle heurte un sens pédagogique commun. Par exemple, « *les professeurs de sciences ne comprennent pas que les élèves ne comprennent pas. Ils imaginent que l'esprit commence comme une leçon....* »¹⁰⁰

Si, comme dans les écrits de Guy Brousseau, cette référence au constructivisme piagétien et, plus largement, au socioconstructivisme est affirmée, quant à ses aspects fonctionnels que sont l'assimilation, l'accommodation et les échanges langagiers intersubjectifs, nous verrons que, paradoxalement, l'ingénierie didactique, alors conçue, ne fait pas l'économie d'un a priori, relativement aux capacités métacognitives d'un sujet. Or la métacognition, dont l'une des fonctions est la conscience réflexive et dont l'une des expressions peut être langagière, relève bien d'un fonctionnement régulateur et organisateur¹⁰¹. Jean Piaget reproche justement à l'apriorisme de vouloir traduire un tel fonctionnement en structures d'emblée achevées, alors que celles-ci sont également l'objet d'une construction. Pourtant, comme nous l'analyserons, il fait de « la prise de conscience » un moteur « naturel » de l'adaptation. Mais il montre également que ce moteur n'est pas qualitativement (les objets cognitifs sur laquelle elle porte) ni quantitativement (extension des contextes possibles d'un tel fonctionnement) une fonction donnée, mais en progression, accompagnant un développement général du cognitif. **Nous pourrions alors estimer que certaines approches, qui se retrouvent dans la didactique des mathématiques, n'auraient pas vraiment pris en compte le structuralisme piagétien** qui veut que le développement intellectuel, dans son ensemble, et le développement des connaissances ne peuvent se définir l'un sans l'autre.

D'un autre point de vue, on pourrait juger aussi lacunaire une référence au structuralisme vygotkien qui veut que « *toutes les fonctions psychiques supérieures soient unies par*

⁹⁸ Par exemple, la mise en place d'une situation-problème, relativement à une connaissance donnée. D'ailleurs, l'expression situation-problème, désigne, pour beaucoup d'enseignants, une situation qui contient une tâche problématique à résoudre, et sans autre connotation à d'autres contraintes.

⁹⁹ Nous avons admis qu'une conception minimaliste du constructivisme, c'est-à-dire se définissant par la seule mise en action des élèves, renvoie à une forme d'impuissance qui finit souvent par faire sombrer la situation dans une pratique ostensive.

¹⁰⁰ Gaston Bachelard. *Formation de l'esprit scientifique*. Librairie Philosophique VRIN. 1999.

¹⁰¹ Comme toute fonction cognitive. Jean Piaget. *Biologie et connaissance. Conclusions*. Page 417. Opus cité

une caractéristique commune, ...celles d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe, comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques»¹⁰². **Les ingénieries didactiques ne devraient-elles pas intégrer le fait que les formes langagières, proposées dans les situations didactiques, engagent le sujet dans des représentations, alors en partie déterminées ?** De plus, les ingénieries didactiques ne devraient-elles pas considérer les décalages possibles, aussi bien synchroniques que diachroniques, entre les contenus de connaissances visées dans les apprentissages et les formes du développement cognitif dans son ensemble ?¹⁰³ Si la référence aux processus de nature fonctionnelle que sont l'assimilation et l'accommodation est explicite, dans la théorie didactique de Guy Brousseau, celle-ci ne délaissent-elles pas les modalités du structuralisme piagétien qui impose des formes nécessaires aux objets assimilables ? **Peut-on vraiment faire référence au fonctionnalisme en ne s'imposant pas le contrôle du structuralisme ?** La dévolution qui va s'exercer dans le processus de la phase didactique de l'action, même contrainte par des variables didactiques spécifiques de la situation, est-elle véritablement une condition suffisante pour que s'exerce ces régulations dont l'ensemble est l'expression, selon Jean Piaget, de l'auto - conservation d'un système cognitif ?

En achevant cette introduction, nous voudrions focaliser l'attention sur trois points qui ne sont vraisemblablement pas indépendants :

➤ Premièrement, sur les tensions qui s'immiscent dans les formations d'enseignants, aussi bien de natures exogènes qu'endogènes. Nous retenons, de ces tensions, celles qui seraient à corrélérer avec des obstacles importants, s'immisçant dans ces formations, et dont certaines composantes seraient à la fois dans les conceptions des étudiants ou stagiaires, mais aussi dans la complexité et l'équilibre des concepts didactiques à transposer là. Notons que, sur ce point, il s'agirait aussi d'entendre une épistémologie inconsciente qui organise pourtant les conceptions que peut avoir un formateur sur son propre discours. Et l'une des démarches possibles, pour obtenir une forme d'abréaction¹⁰⁴, est de **ne pas hésiter à questionner les concepts, de ne pas hésiter à poser autrement des questions relatives à**

¹⁰² Lev Vygotski. *Pensée et langage*. Page 151. Edition sociale. 1985.

¹⁰³ Certains de ces décalages synchroniques sont bien connus. Par exemple, la conservation des quantités discrètes comme le nombre précède largement, dans le temps, celle des quantités continues comme la masse ou le volume. Ce qui signifierait : 1) que les régulations relatives à ces conservations parviennent au même niveau de développement mais à des âges différents 2) qu'il faut encore un temps pour que les propriétés relatives à ces deux conservations soient considérées par un sujet comme isomorphes. Jean Piaget. *Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues*. Année psychologique. Vol 75. Pages 23-60. 1975.

¹⁰⁴ Pour reprendre, à propos de ce formateur, une terminologie bachelardienne.

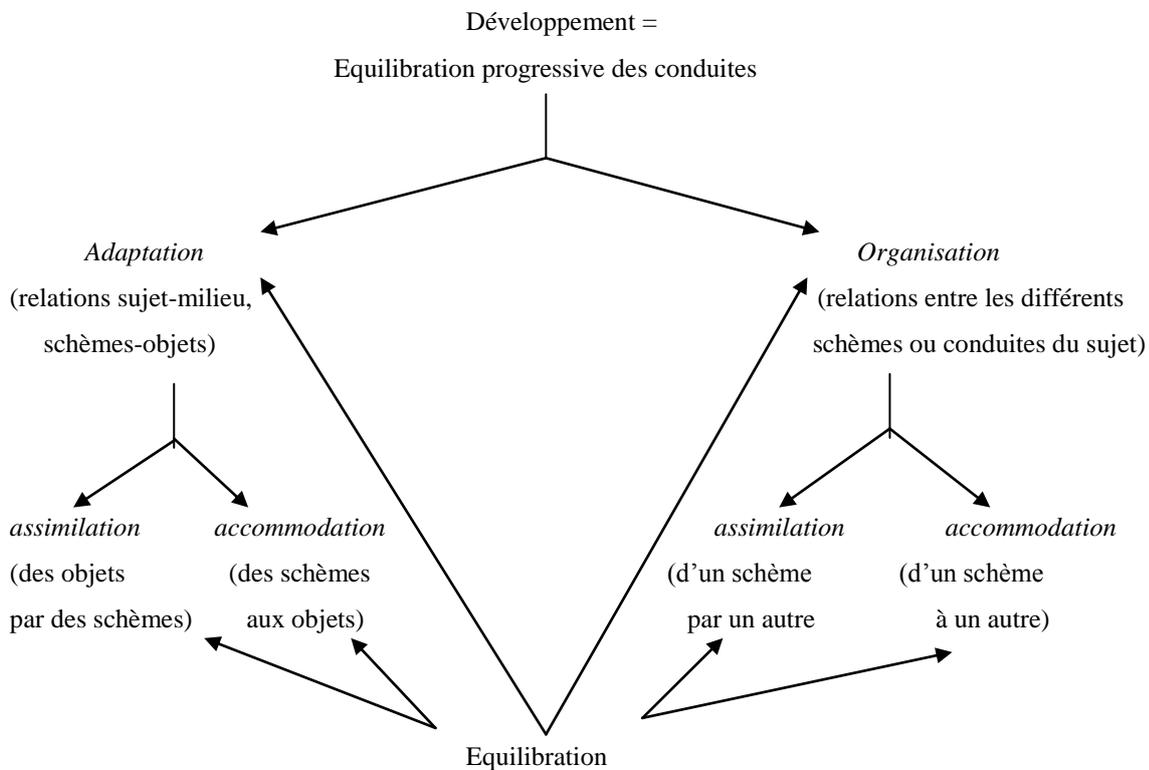
ceux des concepts qui peuvent nous être, jusque là, apparus comme transparents, c'est-à-dire, justement, comme non questionnables. Notre position est en cela piagétienne : il n'y a pas de concept a priori, il n'y a que des concepts construits. Pour nous, le concept de conscience ne peut échapper à la question.

➤ Deuxièmement, lorsque certaines orientations didactiques semblent trouver leur initialisation dans une référence constructiviste, en particulier piagétienne. Mais aussi bien, lorsque de telles orientations se veulent explicitement structuralistes, comme avec Hans Aebli, ou fonctionnalistes, comme avec Guy Brousseau, les ingénieries didactiques proposées ne tiennent pas véritablement compte des aspects sémiotiques et linguistiques particuliers qui accompagnent le développement des structures de schèmes. Ces formes sémiotiques, bien différenciables d'un symbolisme mathématique, sont occultées par une attention hâtée sur ce dernier, ce qui nous apparaît comme une représentation prématurée. Dans le milieu didactique, se retrouvent en relation des registres sémiotiques langagiers, non exclusivement mathématiques, et dont les traitements respectifs peuvent jouer, pour ou contre, le bon déroulement des apprentissages. **Nous postulons que, dans les situations didactiques, les registres sémiotiques, et en particulier linguistiques, sont des formes incontournables du sens de la connaissance mathématique à construire, un concept organisateur de l'action didactique étant le caractère structurant des formulations linguistiques.** Nous adaptons, en cela, le principe Vygotskien d'une liaison indéfectible entre le développement d'un concept et celui de la signification de certaines formulations langagières, spécifiques du concept ;

➤ Troisièmement, le point que nous avons évoqué est la différenciation envisageable entre approche fonctionnelle qui se focalise sur le processus des transformations du couple sujet-milieu, donc des schèmes assimilateurs eux-mêmes, quant à leurs contenus, et approche structurelle qui se focalise sur l'organisation de ces transformations et qui déterminent les conditions de possibilité des fonctions en jeu. Ces deux focalisations concernent respectivement les mécanismes d'adaptation et d'organisation. Il s'agit précisément d'exprimer que les fonctions d'assimilation et d'accommodation jouent effectivement à ces deux niveaux du processus de la psychogenèse des connaissances. Jean Piaget introduit le principe de l'équilibration qui a précisément pour but de définir la corrélation entre les deux mécanismes, d'une part, et entre les deux fonctions, d'autre part. **Mais ce principe devra nous apparaître comme une forme particulière d'un principe inhérent à toute structure cognitive : une nécessité transcendantale de conservation**¹⁰⁵.

¹⁰⁵ Principe sur lequel nous reviendrons et, fondamental, pour Jean Piaget.

Le schéma¹⁰⁶ suivant résume la dualité¹⁰⁷ des concepts en jeu. Nous l'avons complété en y « positionnant » le concept d'équilibration :



Notre thèse s'inscrit dans une démarche explicitement épistémologique : on peut, pour justifier une ingénierie didactique, faire appel à des références multiples, qui proviennent de la didactique, de la psychologie, de la sociologie, de la linguistique, de la philosophie, de différentes épistémologies et, bien sûr, des mathématiques. On peut alors faire le choix d'une reconstruction structurée de ces références multiples. En particulier, nous reconnaissons une structure dans la mesure où son utilisation « *met en évidence quelques caractères généraux et, apparemment nécessaires, qu'elle présente malgré leurs variétés* »¹⁰⁸. Cette approche, qui prend l'aspect d'une synthèse, représente donc, pour nous, un effort « *d'intelligibilité intrinsèque* »¹⁰⁹. Au moins, cet effort s'apparente-t-il à celui d'une recherche de consistance dans un ensemble aux références multiples. C'est une position que nous adoptons dans cette thèse.

Notre objectif est véritablement pragmatique : cette intelligibilité nous servira de fondement à l'élaboration d'une technologie de situations didactiques. Situations que nous défini-

¹⁰⁶ Marie Françoise Legendre Bergeron. *Lexique de la psychologie de Jean Piaget*. Gaétan Morin Editeur. 1980

¹⁰⁷ Au sens de comporter deux unités, deux éléments en relation constante.

¹⁰⁸ Jean Piaget. *Le structuralisme*. Puf 1970.

¹⁰⁹ Ibid.

rons comme moyens de développement des compétences d'élèves de l'école primaire et, ceci, en conformité avec les programmes officiels. « *L'acquisition des compétences est généralement pensée en termes de changement conceptuel* ». « *Et comment comprendre ce changement conceptuel : à la manière de Piaget ou à celle de Bachelard ?* »¹¹⁰. Notre choix se porte sur la manière de Jean Piaget. Lors, il ne s'agira certes pas de se référer à la notion de stade qui concerne les développements sur le long terme¹¹¹, mais, à ce que l'on pourrait préciser comme des microgenèses du développement de certaines compétences, sur le court terme. Le temps didactique de ces microgenèses est défini par ce que l'on peut entendre comme séquences didactiques à l'école primaire¹¹². Toutefois, nous envisagerons ce en quoi cette sorte de genèse, spécifique d'une connaissance donnée, peut entrer dans le processus d'un développement plus global de l'intelligence, au moins relativement à certains aspects.

Nous visons comme objectif de forger une technologie¹¹³, justifiant un certain type de situations didactiques, notre approche reprenant certains des outils des structuralismes piagétien aussi bien que vygotkien. Mais nous savons, désormais, qu'il faut prendre « *au sérieux l'idée d'obstacle* »¹¹⁴ et que celle-ci ressort d'une double épistémologie génétique. C'est dire que la recherche se doit de définir, d'une part, les deux dimensions relevant, l'une de l'épistémologie cognitive, l'autre de l'épistémologie des savoirs, et d'autre part, leur mise en corrélation à des fins didactiques.

Enfin, nous reprenons à notre compte les précautions oratoires de Michel Fabre : nous proposerons une gestion didactique de séquences pédagogiques qui ne peut être taxée de technicisme, dès lors que nous montrerons qu'« *elle prend au sérieux la question du sens* »¹¹⁵, dans une multiplicité de dimensions. Mais notre position est que l'une de ces dimensions relève de processus cognitifs naturels, donc en partie déterminés. En l'occurrence, notre outil théorique, en quoi il faut voir un concept fondamental, est celui de schème, ou plus exactement, de structure de schèmes dont certains fonctionnements sont prédéterminés par la cognition du sujet qui ne nous apparaît pas autrement que comme l'exercice d'une structure cognitive plus globale, mais, en nous focalisant sur une tutorisation possible de cet exercice, en milieu scolaire.

Dans le chapitre premier, nous précisons une position du problème et nos cadres théo-

¹¹⁰ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire. Introduction*. Opus cité.

¹¹¹ Sur lesquels nous n'aurons pas besoin de nous exprimer.

¹¹² Une suite structurée de séances s'échelonnant sur quelques semaines.

¹¹³ Nous définissons une technique comme un ensemble organisé d'outils matériels et cognitifs, utilisés dans le déroulement d'une activité particulière, et relatifs aux savoir-faire requis pour la représentation, la planification et l'exécution d'une tâche donnée.

¹¹⁴ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité

¹¹⁵ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité

riques.

Dans le chapitre deux, nous explicitons les questions de notre problématique et notre méthodologie.

Dans la chapitre trois, nous revenons sur une composante cognitive de la situation-problème, à savoir l'opération de prise de conscience.

Dans le chapitre quatre, nous formulons une approche développementale du concept fondamental de schème, en insistant sur la notion de registre linguistique. Nous y projetons de nous munir d'outils pour l'analyse et la conception de séquences didactiques, en classe de mathématique, à l'école primaire.

Dans le chapitre cinq, nous construisons des séquences didactiques déterminées par un apprentissage de la catégorisation pour les classes de l'école maternelle. Cet apprentissage fera l'objet d'une pratique effective dans plusieurs classes de l'école maternelle, de la petite section à la grande section. Dans ce même chapitre, nous préciserons certaines formes d'évaluation de cet apprentissage, ainsi que les résultats de cette évaluation.

Dans le chapitre six, nous évaluerons nos réponses aux questions constitutives de notre problématique, et en particulier, en ce qui concerne la valeur pragmatique de notre technologie. Nous proposerons là quelques pistes de recherches qui pourraient utilement contribuer à en tester l'opérationnalité.

Chapitre 1

POSITION DU PROBLÈME CADRES THÉORIQUES

1 Préliminaires

1.1 Relativement à la formation de futurs enseignants

L'enseignement d'une connaissance mathématique nouvelle, dans le milieu scolaire de l'école primaire, place l'enseignant dans des champs de contraintes de natures diverses et en interaction. Ceux, d'ordre institutionnel sont certainement pour lui parmi les plus explicités¹¹⁶. « *Si les programmes s'imposent à toute la communauté éducative, le choix des méthodes et des démarches restent intégralement de la responsabilité des enseignants* ». Mais « *afin d'apprécier les acquis de chaque élève aux deux premiers paliers du socle commun de connaissances et de compétences, des évaluations nationales au CE1 et CM2 seront mises en places* »¹¹⁷. Ainsi, le ressenti qui pourrait peser sur toute formation est que cette liberté est limitée par un devoir de productivité¹¹⁸. Et ce devoir pourrait alors limiter les formes pédagogiques auxquelles pourraient être sensibilisés les enseignants ou futurs enseignants. Ainsi, des programmes peuvent mettre en texte (officiel) les savoirs et savoir-faire à enseigner, leurs ordonnancements dans le temps et les connaissances et compétences minimales, relatives à ces savoirs et devant être acquises « par tous », au terme d'un certain cursus. Ces programmes sont d'ailleurs à considérer, par les acteurs de l'institution, comme incontournables. Des documents¹¹⁹ peuvent aider à l'explicitation de telles connaissances. Enfin, par des manuels divers¹²⁰, des auteurs peuvent proposer des séquences d'apprentissages spécifiques de la con-

¹¹⁶ Comme le définit Yves Chevallard, dans une approche anthropologique du didactique. Une personne X (un futur enseignant) se révèle être un bon sujet de l'institution I (l'institution scolaire), relativement à l'objet O institutionnel (la connaissance à enseigner), lorsque son rapport personnel R(X, O) est jugé conforme au rapport institutionnel R_I(O). *Concepts fondamentaux de la didactique. Perspectives apportées par une approche anthropologique*. RDM. Vol 12(1). Pages 73-112. 1992

¹¹⁷ Xavier Darcos. Ministre de l'éducation nationale jusqu'en 2009. Bulletin officiel de l'éducation nationale (BO). Numéro hors série. N°3 du 19 juin 2008.

¹¹⁸ Et la mesure de cette productivité l'est, finalement, dans le cadre d'une statistique quantitative dominant donc d'autres formes, comme les analyses qualitatives fines, c'est-à-dire spécifiques des domaines évalués.

¹¹⁹ Documents dits d'application (premier degré) ou d'accompagnement (second degré).

¹²⁰ Parmi ces derniers, il en est certainement dont les choix s'appuient sur des références explicitées d'ordre cognitif ou d'ordre épistémologique : on peut citer la collection « *j'apprends les maths* », sous la direction de Rémi Brissiaud et la collection « *Cap math* », sous la direction de Roland Charnay, associée à la collection ER-MEL « *apprentissages numériques* », conçue sous la direction de Jacques Colomb. Ces références sont, en l'occurrence, nettement différenciables. Mais, concernant les manuels en général, l'institution peut se borner à en dire l'existence, sans en définir l'emploi.

naissance visée. Mais cet « approfondissement », dans l'étude des assujettissements institutionnels, peut ignorer celle qui analyserait, selon des dimensions épistémologiques (cognitives et historiques), certains processus de transformation et de transmission des connaissances. Ainsi, relativement à de telles connaissances et, concernant ces dimensions¹²¹, le futur enseignant dispose, en fait, d'une formation contingente¹²².

1.2 Des concepts de la didactique entre formateurs et futurs enseignants

Outre l'analyse épistémologique de ces concepts, rendue obligée par notre questionnement, précisons ici ce qui motive notre recherche : un problème, à notre avis, pour un formateur, consommateur de concepts issus des recherches en didactique disciplinaire, est de pouvoir les transposer en des savoir-faire à enseigner dont l'une des composantes est, précisément, qu'enseignés, ils impliquent des compétences effectives du futur enseignant, c'est-à-dire des capacités à produire des actes contrôlés et efficaces, dans une activité pédagogique donnée. Ces concepts « *permettraient précisément de doter l'enseignant d'outils de compréhension et de régulation d'un processus de formation...* »¹²³, le sien comme celui de ses élèves. Le terme de consommateur est choisi à dessein, pour exprimer le fait qu'un tel formateur pourrait être le plus souvent un autodidacte pressé, ce qui tendrait à appauvrir le contrôle de l'institution sur les connaissances effectives d'un tel formateur, en matière de didactique disciplinaire et augmenterait le risque que de telles connaissances se restreignent à du déclaratif naïf¹²⁴ et, quoi qu'il en soit, mal opérant¹²⁵. Un travail de transposition est, ce par quoi, à notre avis, le formateur devient réflexif sur son propre discours et, pour ce qui relève de sa fonction, chercheur au sens technologique¹²⁶ du terme. Sans ce travail, il se peut, à notre avis, qu'il ne fasse

¹²¹ Nous faisons référence aux dynamiques de transformations, de tensions et d'interactions en jeu dans les relations élève \leftrightarrow savoir et élève \leftrightarrow enseignant, celles-ci étant non indépendantes des dynamiques en jeu dans les relations savoir \leftrightarrow savoir, comme les révèle l'analyse épistémologique et de celles de nature cognitive en jeu dans la relation élève \leftrightarrow élève, comme les révèlent l'analyse psychogénétique et l'analyse des relations intersubjectives. Nous n'abordons pas, dans cette thèse, la composante cognitive des interactions au sein de la relation savoir \leftrightarrow enseignant.

¹²² Dans les instituts de formation des maîtres, au sein d'un module disciplinaire de mathématique, les formulations et les analyses de ces dimensions seraient laissées à l'appréciation des formateurs. Des ambiguïtés pèseraient donc sur les contenus de ces modules disciplinaires.

¹²³ Michel Fabre. *Introduction*. Page 7. Opus cité.

¹²⁴ Au sens de l'exposé naïf d'une théorie, exposé qui ne pose pas en particulier la question de sa consistance, ce qui, pourtant, nous apparaît comme l'une des dimensions de la signification des concepts en questions.

¹²⁵ Tous les formateurs, tels qu'ils se trouvent opérer actuellement dans un institut de formation des maîtres n'ont pas eu une formation initiale en didactique des disciplines. Une formation peut être proposée à de tels formateurs (elle l'est véritablement), mais l'acceptation d'une telle offre relève du volontariat. Le rapport $R(X, O)$ est certes difficilement stabilisé, dès lors que le rapport $R_I(O)$ ne l'est pas lui-même, où O est un concept de la didactique des mathématiques et R un institut de formation des maîtres.

¹²⁶ Notre position est qu'il doit pouvoir obtenir, de ces concepts, des outils technologiques aidant à la justification de techniques d'enseignement qu'il présente en formation, son objectif restant avant tout pragmatique.

appréhender que des acceptions superficielles¹²⁷ des termes qu'il emploie ou, inversement, trop refermées sur des formulations abstraites. Autant dire que des concepts fondamentaux peuvent, en pratique, se trouver priver de dénotation et de leur compréhension opérationnelle de la part du futur enseignant¹²⁸, concepts dont certains pourraient jouer comme organisateurs de l'action didactique. Cette recherche de légitimité pourrait apparaître, pour le formateur, comme une composante pragmatique de son rapport institutionnel avec l'objet à enseigner. Encore faudrait-il que ce rapport soit suffisamment stable. Si, de plus, le savoir qu'il veut faire construire par des enseignants en situation de formation se fonde sur des références épistémologiques contradictoires¹²⁹, et aussi fondamentales que celles concernant la psychogenèse des connaissances de sujets élèves, il a, à notre avis, peu de chance d'obtenir une écoute qui, en retour, devrait produire des effets rationnels sur les pratiques de ces enseignants. Par exemple, Christian Orange reconnaissait-il que, concernant les apprentissages scientifiques, « beaucoup n'ont vu dans les obstacles qu'une explication des résistances à l'apprentissage, allant même parfois jusqu'à les confondre avec la notion vague de difficulté »¹³⁰. Ce que nous postulons être aussi un symptôme de cette instabilité épistémologique¹³¹.

2 La question technologique du développement scolaire

La problématique que nous abordons dans cette thèse trouve sa raison énergétique dans la question fondamentale et récurrente d'enseignants du premier degré, en situation de formation¹³² : « **Comment introduire telle connaissance mathématique ?** » Nous allons reprendre en particulier le postulat fondamental d'inspiration piagétienne et devenu classique en didactique des mathématiques : le développement scolaire résulte d'interactions entre un élève et un milieu problématique. Nous contraignons la construction de notre questionnement à demeurer dans le cadre d'un apprentissage par adaptation à un certain milieu, et dont le con-

¹²⁷ Dans le sens péjoratif d'une acception trop repliée sur des signifiants de ces concepts qu'ils sont sensés représenter.

¹²⁸ Une enquête effectuée auprès de maîtres des écoles stagiaires en fin de formation (juin), a pu montrer, en particulier, combien la notion d'obstacle est entendue de façon superficielle. En particulier, celle d'obstacle épistémologique est largement ignorée. Les formateurs questionnés assurant pourtant avoir 'travaillé' la notion.

¹²⁹ Et d'autant plus, si cette contradiction n'est pas, pour lui-même, un sujet de questionnement et d'analyse.

¹³⁰ *Apprentissages scientifiques et problématisation*. Science de l'Éducation pour l'ère nouvelle. Volume 35(1). Pages 25-42. 2002.

¹³¹ Comme nous l'analyserons au chapitre 4, on devra, à l'instar de Guy Brousseau, décliner différentes espèces d'obstacles selon la connaissance visée par l'apprentissage.

¹³² Formation initiale ou continue. Ajoutons que cette question reste tout aussi récurrente pour des enseignants non débutants et concernant certaines connaissances ou compétences. Il y a, au moins à cela, comme raison, la pression à laquelle les soumet la hiérarchie, consécutivement à certaines évaluations considérées comme non satisfaisantes. Ainsi, il peut être organisé, par cette hiérarchie, des animations pédagogiques dont les contenus sont définis par de telles questions.

cept central soit celui de schème¹³³.

2.1 Une technologie pour résoudre certaines tensions

On sait que la notion d'obstacle est largement effective dans le langage de nombre de formateurs. Si le concept est aussi peu stabilisé dans le monde du 'savoir savant'¹³⁴, comment s'opère pour eux le travail de transposition ? Il s'ensuit que la formation peut sembler parfois perdre de sa légitimité, précisément sur cet aspect qui voudrait plonger l'analyse (des tâches et des activités) dans un cadre cognitif. Et ceci se manifeste, comme nous avons pu le constater, par un déséquilibre en faveur d'une attention portée au discours du formateur de terrain,¹³⁵ au dépend de celle portée au discours du formateur «didacticien de la discipline ». Des observations, faites en formation continue, montrent que des enseignants expérimentés ont, du fonctionnement cognitif de l'élève en situation d'apprentissage, une approche simplifiée. Et son explicitation reste dépendante des conceptions qu'ils ont du fonctionnement du savoir mathématique¹³⁶. En particulier, l'activité cognitive de l'élève est le plus souvent absente des analyses a priori qu'ils font des tâches qu'ils proposent à celui-ci. Les échecs qu'ils constatent peuvent, à leurs yeux, remettre en cause les situations qu'ils ont proposées, mais non leur analyse de ces situations et encore moins leur méthode d'analyse. Pour eux, si les élèves ne sont pas adaptés à la situation, c'est que celle-ci est, d'un point de vue pédagogique, « mauvaise »¹³⁷. L'erreur leur apparaît le plus souvent à rechercher dans des lacunes, des oublis de connaissance, des manques d'organisation dans les choix stratégiques... Et pour reprendre autrement notre propos, citons une déclaration récente de Guy Brousseau : « *L'acception donnée aujourd'hui au terme « analyse de tâche » conduit à confondre la position du professeur et celle de l'élève, à confondre l'étude des actions et celle de leurs conditions, à rabattre l'étude des connaissances de ces élèves sur celle des connaissances qu'on veut leur enseigner. Elle conduit à utiliser les mêmes mots et surtout les mêmes modèles pour désigner les conditions, les situations, les intentions, les activités et les connaissances. ... réintroduire la confusion entre ces différents objets rend difficile la conception et l'étude de leurs relations réciproques et, lorsqu'elle n'empêche pas de les concevoir, elle contrarie leur expression. Il s'agit là d'une profonde régression qui conduit à rejeter cinquante ans de progrès aussi bien*

¹³³ Ce terme de connaissance devant être pris dans le sens large d'objets ou de comportements mathématiques dont une certaine maîtrise est précisée dans des objectifs de programme ; en particulier, dans cette thèse, pour des raisons que nous allons préciser, nous considérerons ce qui est défini comme des compétences.

¹³⁴ Précisément, celui où ce savoir se construit et s'évalue.

¹³⁵ PEMF : professeur des écoles maître formateur. CP : conseiller pédagogique.

¹³⁶ Ces conceptions sont très proches de celles que nous avons signalées en début de notre introduction.

¹³⁷ La critique porte aussi souvent sur le caractère prématuré de la situation (ce que, donc, ils n'avaient pas prévu) ; c'est-à-dire que le choix de certaines variables ou de valeurs de variables de la situation ne serait pas, selon eux, judicieux.

en didactique qu'en psychologie »¹³⁸.

« Créés en 1989, les IUFM¹³⁹, qui accueillent les futurs enseignants, n'ont jamais vraiment connu de répit dans la critique. En particulier, de la part des étudiants, qui dénoncent souvent une formation infantilisante, trop théorique et surtout très éloignée des réalités du terrain auxquelles ils seront confrontés lorsqu'ils se retrouveront devant les élèves. Aujourd'hui, de nombreuses voix s'élèvent pour dire que le renouvellement de près de la moitié du corps enseignant d'ici à la fin de la décennie est l'occasion rêvée de réformer ces centres de formation¹⁴⁰. Entre autres conséquences, un projet de formation des maîtres échouerait en partie, ces formations n'incluant pas l'émergence d'une forme de prise de conscience de la nécessité d'interactions, pourtant constructives, entre les conceptions des différents formateurs¹⁴¹. La reconnaissance de ces oppositions, pourtant largement reconnues (comme cela est explicitement exprimé parfois sous le terme de tension), ne s'expose alors pas, devant des stagiaires, comme initiatrice d'une véritable problématique¹⁴². En reprenant la terminologie de la théorie anthropologique, on pourrait noter, dans la formation des stagiaires, que leurs attentes semblent finalement être polarisées très fortement par les blocs pratico-techniques, identifiés aux savoir-faire au dépend des blocs technologico- théoriques, identifiés aux savoirs¹⁴³. Dès lors, une formation équilibrée de futurs enseignants ne devrait-elle pas inclure, au moins, une dimension technologique¹⁴⁴ ?

Mais une difficulté de nature épistémologique surgit d'emblée, comme en témoigne un « débat » précurseur entre George Glaeser et Guy Brousseau, relatif au concept d'obstacle

¹³⁸Tâches, situation, activité : Article électronique. <http://www.ssrnm.ch/spip1/IMG/pdf/tachebrousseau.pdf>. 2004.

Et la raison de cette régression n'est-elle pas épistémologique ? Si telle orientation de la recherche, dans la didactique, n'arrive pas à influencer véritablement les conceptions et les pratiques, n'est-ce pas aussi la conséquence de certaines instabilités méthodologiques initiales, au sein même de la recherche et, au moins, d'un manque d'une véritable recherche de didactique appliquée ?

¹³⁹ Instituts universitaires de formation des maîtres.

¹⁴⁰ Extrait d'un article « formation des professeurs un rapport qui accuse » de Marielle Court. 11 mars 2003. Figaro. Depuis sept 2010, les IUFM ont été déchargés d'une grande part de la responsabilité de la formation des maîtres des écoles stagiaires.

¹⁴¹ A ne pas confondre avec certaines formes de collaboration, comme des interventions en « binômes » de deux formateurs devant les stagiaires. Notons que nous constituerons, pour les besoins de cette thèse, un groupe hybride de recherche : formateur iufm et maîtres formateurs.

¹⁴² Et une telle opposition qui reste en suspens bien après la formation initiale pourrait produire des effets pervers comme ceux signalés par Guy Brousseau. Sans oublier que l'institution qui organise des évaluations sur fond de rentabilité (en rapport avec les investissements et les libertés pédagogiques) peut se trouver conforter dans la remise en question des pédagogies, émanations de certaines recherches en didactique, assimilées à « des idéologies qui ont sévi au sein des IUFM » et qui peuvent lui être présentées comme balbutiantes et non productives.

¹⁴³ Yves Chevallard définit, dans une approche anthropologique du didactique, les praxéologies [T, τ, θ, Θ], relatives à un type de tâches donné, au sein desquelles, il distingue deux blocs : [T, τ], bloc pratico-technique, un savoir-faire ; [θ, Θ] bloc technologico-théorique, un savoir. [T, τ, θ, Θ] a donc pour constituants un type de tâches T, une technique τ, une technologie θ et une théorie Θ. Leçon 1 : pages 91-100. U E de la Rochelle 1998.

¹⁴⁴ Explicitement et sans exclusion de telle ou telle orientation.

épistémologique¹⁴⁵ et toujours ouvert. Si tant est que certaines techniques de traitement des obstacles (repérage, rupture et franchissement) s'opérationnalisent, parfois, dans des situations-problèmes, approchées en formation, dans une institution comme un IUFM (dont certains acteurs sont « des personnes de terrains » comme des stagiaires, des PEIMF, des CPE et d'autres, ses formateurs disciplinaires), et sont, en l'occurrence, identifiées, il nous semble que, dans la didactique des mathématiques, elles soient toujours en attente de technologie. Nous définissons que « *la technologie est un discours rationnel sur la technique, discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches d'un type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu* »¹⁴⁶. Des stratégies, conçues à des fins pédagogiques, et tirant leur inspiration de la théorie des situations didactiques (ce à quoi, elle n'est certes pas réductible) pourraient, par exemple, s'identifier à certaines techniques stables. A notre connaissance, une telle stabilisation ne s'est pas opérée. Ainsi, dans sa conclusion au chapitre consacré à la « *situation-problème et au changement conceptuel* », Michel Fabre écrit : « *...même lorsqu'elle essaie de prendre en compte l'obstacle, la situation-problème se trouve prise dans les embarras théoriques et méthodologiques qui résultent d'un tiraillement entre les références piagétienes et bachelardiennes de la didactique* »¹⁴⁷. Si cet embarras est un fait, il ne peut pas ne pas apparaître dans certaines formations, à moins de l'ignorer avec toutes les conséquences qu'il risque de jouer contre ces formations.

Rappelons aussi ce que disait Michèle Artigue¹⁴⁸, à propos de la notion d'obstacle épistémologique, telle qu'importée par Guy Brousseau et, concernant certains ensembles de nombres, « *...l'analyse tend à se diluer dans la présentation de situations d'enseignement conçues pour « franchir » ces obstacles* ». Ce serait bien là, il nous semble, une façon de rendre compte d'un cas de chaînon manquant, entre un concept a priori¹⁴⁹ (celui des obstacles) et la conception de situations didactiques qui devraient produire un ensemble de faits, des observables, en parti déterminés par l'obstacle, lui-même repéré a priori. Il apparaît plutôt que, dans ces situations, la visibilité de ce qui résulte de l'obstacle (et, en particulier, sa dy-

¹⁴⁵ George Glaeser. *Réflexion préalable à une étude des obstacles*. Cahier 56. IMAG. Grenoble. 1984

¹⁴⁶ Yves Chevallard. Ibid. Ce qui est visé étant l'apprentissage d'un savoir donné, un obstacle épistémologique y étant identifié.

¹⁴⁷ Rappelons que dans sa signification fonctionnelle, une des dimensions de la situation-problème se définit comme un travail sur une connaissance obstacle. Une des caractéristiques de la situation-problème, telle que la définit Régine Douady, est l'existence et l'activation explicite et consciente par l'élève de cette connaissance. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. RDM Vol. 7.2. Pages 5-31. 1986

¹⁴⁸ *Épistémologie et didactique*. RDM Vol 10 (2.3). Pages 241-286. 1990

¹⁴⁹ L'obstacle en didactique, en effet, est défini métaphoriquement comme lié « causalement » à certaines conceptions. De plus, il n'est pas un observable direct dans une expérience. Au sens kantien, il est donc bien a priori.

namique de franchissement) reste finalement très réduite. Notre attention devrait concerner ce qui, dans la conception des situations didactiques, relève, très précisément, d'un obstacle repéré a priori et définissable, puis d'un obstacle travaillé, de son émergence à son franchissement.

D'autre part, il est apparu, à certains chercheurs, le besoin d'introduire une composante cognitive dans la description du milieu, objet fondamental de la théorie des situations¹⁵⁰. Il semblerait que ce soit avec l'intention de donner à l'analyse a posteriori de situations d'enseignement et, comme par nécessité, des éléments pour la prise en compte d'un sujet-élève moins épistémique et plus contingent du point de vue cognitif. Mais ces analyses n'ont pas été poursuivies d'une démarche systématisée¹⁵¹. Aussi, et à plus forte raison, les analyses a priori des situations d'enseignement restent, à notre connaissance, pauvres en composantes cognitives. Mais il nous semble que le développement d'une connaissance, en milieu scolaire ne peut être compris sans le corréler à un certain développement cognitif. Et, en amont de toutes les différenciations qui peuvent tenter de le personnaliser, il reste qu'il conserve là une dimension épistémique. **Nous postulons que, pour le type de tâche « introduire ou développer une connaissance mathématique, en classe de l'école primaire », une technologie joue comme une régulation sur la conception d'une situation didactique, au moins en ce qui concerne ses composantes cognitives. Et il faut alors entendre cette régulation comme un concept organisateur, pour un type donné de techniques.** En ce sens, une technologie nous paraît incontournable, pour donner un ensemble d'outils conceptuels cohérent et consistant, en vue de l'élaboration, des analyses a priori et des analyses a posteriori, d'un point de vue cognitif, pour des situations que l'enseignant va concevoir et proposer à ses élèves.

2.2 Mais une technologie pourrait être une nécessité plus fondamentale

En vérité, l'expérience montre que la question initiale¹⁵² présente un biais extrêmement tenace : elle attend une réponse technique, une proposition associée à une forme d'action immédiate. Il y a certes des raisons institutionnelles à cela, comme par exemple, le principe d'une formation par alternance, suivant de près une réussite à un concours ou pour des enseignants en fonction, la prise en compte de nouveaux programmes plus contraignants temporel-

¹⁵⁰ M.G.Perrin.Glorian : *Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu*. RDM. Volume 19(3). Pages 279-322. 1999.

¹⁵¹ Pour ce que nous en savons.

¹⁵² De l'introduction d'un objet mathématique nouveau.

lement¹⁵³. Mais que des acteurs se reconnaissent devoir agir dans l'urgence, n'implique pas l'occultation du fait que, pour eux, la question doit poser un problème et que cette sorte de biais fait partie du problème. Nous pressentons, en particulier, que le rejet d'une problématisation dont nous avons donné la question initiale est aussi étroitement associé à un obstacle de nature épistémologique. Nous pouvons supposer, en effet, son lien avec différentes conceptions majoritaires, comme celles relatives aux savoirs mathématiques ou aux fonctionnements cognitifs des sujets élèves. Ces conceptions peuvent s'inscrire dans le paradigme dont nous avons exprimé deux des piliers : au niveau du sujet, un innéisme cognitif, disposition suffisante pour l'apprentissage ; au niveau du savoir, un enchaînement logique¹⁵⁴ des connaissances mathématiques à apprendre. Ainsi, ce paradigme ferait obstacle aux paradigmes piagétien¹⁵⁵ et bachelardien¹⁵⁶. Il possède les caractères d'un obstacle épistémologique : profondément enraciné dans l'inconscient des enseignants pour des raisons qui pourraient tenir à l'expérience qu'ils ont de leur propre vécu d'élèves et, aussi, à la facilité qu'il octroie dans la mise en place des situations d'apprentissage. Ces conceptions approvisionnent largement un mode de raisonnement qui agit sur les représentations des situations d'apprentissage. En particulier, l'enseignant, en classe de mathématique, peut alors initialement se décharger sur le pouvoir de l'objet mathématique d'être « naturellement enseignable » et sur un fonctionnement inné de l'activité de conscience. Il y aurait certainement matière pour un apprentissage spécifique, concernant des enseignants stagiaires, et dont le développement pourrait se faire dans la cadre d'une problématisation. Or, plusieurs essais dans ce sens ont largement échoué, car les stagiaires ne disposaient que de peu d'appui leur permettant « *de développer des arguments sur le fonctionnement des prémodèles discutés, donc de faire ressortir des raisons* »¹⁵⁷. Ainsi, l'on retrouve largement partagées des conceptions du genre préformisme : les connaissances anciennes permettent logiquement d'acquérir les connaissances nouvelles, d'où les formes données à l'incontournable évaluation diagnostique, précédant l'acquisition d'une connaissance nouvelle et limitée le plus souvent à l'évaluation des routines. On peut recon-

¹⁵³ Il peut s'agir, comme dans les programmes mis en place en 2008, d'introduire des opérations arithmétiques à un niveau plus élémentaire que ceux précisés dans les programmes précédents de 2002.

¹⁵⁴ Encore que cette logique ne soit pas entendue au sens des règles de la logique mathématique mais au sens d'une chronologie naturalisée des objets à enseigner : la division s'enseigne en prenant appui sur la multiplication, la multiplication s'enseigne en prenant appui sur l'addition, la soustraction s'apprend après l'addition, d'où un enchaînement des objets qui se définit ontologiquement et naturellement et, non une construction de ces objets mathématiques, reconnus comme nécessaires au terme d'un problème posé.

¹⁵⁵ En particulier, pas de caractère héréditaire dans les structures logiques : s'il y a structures logiques, elles sont construites par le sujet.

¹⁵⁶ Ce dernier, contraire à un développement linéaire des connaissances et sans rupture.

¹⁵⁷ Comme dans le cas de ces élèves de seconde confrontés à la question de la croissance d'un plan de maïs. Christian Orange. *Apprentissages scientifiques et problématisation*. Opus cité.

naître une espèce pseudo constructiviste¹⁵⁸ : on fait manipuler des objets aux élèves, en leur livrant officieusement en situation, par des formes d'ostensions déguisées, les connaissances à acquérir. Une sorte d'institutionnalisation, de toute façon, vient résoudre le problème de toutes les constructions inachevées. On peut reconnaître, le plus souvent, une espèce de transmission pure : on montre un objet et on le « fait marcher » comme une connaissance. Il est là, sous entendu, que l'objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer. La question du « sens des connaissances », ainsi acquises, et qui aurait pu servir de levier pour développer les argumentations, se heurtent à l'impossibilité, pour les stagiaires, de concevoir cette notion en dehors de l'opérationnalité de ces connaissances, dans des exercices d'application. D'où, un cercle paradoxal, puisque c'est l'évaluation qui conduit à poser la question du sens, au moins pour ceux des élèves qui n'ont pas là obtenu la réussite¹⁵⁹. Et, à partir de ce point consensuel, le débat ne fait que s'éteindre. « *Si la référence explicative¹⁶⁰ où peut se construire le problème constitutif des savoirs visés par le maître n'est pas partagée par les élèves, ces savoirs ne leur seront jamais accessibles en tant que savoirs raisonnés* »¹⁶¹.

Même si l'on ne peut directement qualifier les savoir-faire didactiques d'objets scientifiques, nous reprenons de Christian Orange le principe qu'ils peuvent se poser en savoirs apodictiques dès lors, au moins, qu'ils se trouvent pris dans le champ d'un registre explicatif partagé.

Conclusion

Nous décidons alors de diriger notre travail vers la définition d'un cadre technologique qui pourrait s'avérer pertinent, pour explorer des formes possibles de situations didactiques.

Nous avançons le postulat que la question de la médiation, dans l'apprentissage d'une connaissance mathématique nouvelle, ne se pose pas uniquement dans son rapport avec une logique de programmation, résultante de la transposition d'une logique culturelle (dont l'organisation des savoirs mathématiques). La question pourrait orienter vers la compréh-

¹⁵⁸ Nous l'appelons pseudo-constructiviste car il est un avatar de ce que les enseignants et les auteurs de manuels, dans leur majorité, ont bien voulu entendre d'un apprentissage de type constructiviste. Guy Brousseau le décrit sous la dénomination de contrat d'apprentissage empiriste. Il conduit à des stratégies didactiques d'ostension. *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* de Saint Sauves d'Auvergne. *L'enseignant dans la théorie des situations didactique*. 1995.

¹⁵⁹ D'où la définition, implicite et applicable a priori, d'une notion manichéenne du sens d'une connaissance. Un élève qui réussit ses exercices a compris. Un élève qui ne les réussit pas n'a pas compris. Une autre difficulté réside dans le fait que l'enseignant dispose alors comme outil et, le plus souvent, d'un contrat de conditionnement qui lui permet d'obtenir, éventuellement en s'y reprenant plusieurs fois, de « bons résultats ». Ce qui veut dire un pourcentage de réussites « satisfaisant », de la part de ses élèves, dans des exercices de routine. Et il suffit, pour cela, qu'un tel objectif soit atteint sur le cours terme.

¹⁶⁰ « *Un problème se construit nécessairement dans un cadre explicatif donné*. Christian Orange. *Apprentissage scientifique et problématisation*. Opus cité.

¹⁶¹ Ibid. En transposant aux savoir-faire que sont les constructions des situations didactiques et les formes de médiation, dans la construction d'une connaissance par des élèves. Le maître étant ici incarné dans un formateur.

sion d'une forme de logique cognitive¹⁶², c'est-à-dire, vers l'existence de conditions psychogénétiques naturelles de l'apprentissage de la connaissance visée. Nous prenons cette question comme l'essence même de notre problématique. Les cadres théoriques de la psychologie cognitive du développement, sur lesquels nous revenons plus bas, et servant de références actuelles à la didactique des mathématiques, ne nous sont pas apparus comme une reprise, à des fins technologiques, pour justifier des techniques de conception de séquences didactiques et, surtout, pour servir de cadre explicatif exploitable par des enseignants. Au contraire, comme nous l'avons vu en introduction, Hans Aebli s'inspire directement de certains concepts de la psychologie de Jean Piaget dont, en particulier, celui de connaissance opératoire. Et nous avons pu noter que, ce faisant, il se trouve limité à une interprétation piagétienne de ce concept, car d'interprétation logico-mathématique. Or, il se trouve que notre propre interprétation en élargira la dénotation, au point d'offrir à un effort de rendre technologiques de tels concepts, une orientation moins polarisée et plus riche, sans doute, comme l'avait imaginée Pierre Greco.

3 La question du développement intellectuel

3.1 Précisions relatives au développement d'une connaissance mathématique donnée

Toutefois, la position de Lev Vygotski, est que tout développement local influence le développement intellectuel dans son ensemble car « *si dans le processus de l'apprentissage scolaire, l'enfant forme une structure, assimile une opération, non seulement, on lui ouvre, par là même, dans son développement, la possibilité de reproduire cette structure, mais on lui donne aussi de beaucoup plus grandes possibilités dans le domaine d'autres structures* »¹⁶³.

Nous n'aborderons pas une telle extension en toute généralité dans notre thèse, quoique nous devons supposer que le processus soit à l'œuvre dans différentes activités cognitives des élèves. Mais nous tenterons de préciser une forme accessible de ce développement transcendant. De plus, dans un cas particulier, nous définirons et évaluerons un tel développement¹⁶⁴.

¹⁶² Disons brièvement qu'une telle logique pourrait laisser espérer la production (de la part d'un enseignant) de prévisions concernant des comportements d'élèves, placés en situation d'apprentissage. Et, au point de vue pragmatique, de concevoir des situations didactiques, permettant d'accompagner ces comportements, relativement à l'acquisition d'une connaissance nouvelle. Nous vérifierons que cette logique peut être inspirée par l'épistémologie génétique de Jean Piaget, dans sa dimension structuraliste. Et nous approfondirons cette question dans le chapitre 4.

¹⁶³ *Langage et pensée*. Opus cité. Page 253.

¹⁶⁴ Chapitre 5. La catégorisation.

Et nous faisons l'hypothèse que les conditions psychogénétiques de l'apprentissage, en milieu scolaire, peuvent se retrouver dans le champ d'une épistémologie génétique. En particulier, c'est dans un cadre cognitif que nous envisagerions la notion d'obstacle et, celle-ci, non réduite à sa seule dimension épistémologique. Nous postulons, en effet, que s'il y a pérennité du caractère d'obstacle épistémologique (donc attaché à certaines conceptions historiquement repérables¹⁶⁵), et qui pourrait se retrouver en situation de conflit avec l'acquisition de certaines connaissances, en milieu scolaire¹⁶⁶, ce caractère peut se révéler dans une analyse psychogénétique de la connaissance. Obtenir le franchissement d'un tel obstacle demande qu'en aient été perçues, a priori, à la fois sa nature épistémologique historique mais aussi sa dimension cognitive fonctionnelle, aussi bien d'un point de vue général¹⁶⁷ que, plus particulièrement, spécifique d'un « savoir-enjeu ».

3.2 Obstacles épistémologiques et fonctionnement cognitif

Plus précisément, nous postulons que si des faits, attachés à l'histoire du développement de certaines connaissances des mathématiques, sont remarquables, dans ce sens qu'ils sont révélateurs d'obstacles épistémologiques historiquement reconnaissables, nous pouvons les considérer, dans une approche cognitiviste, comme des épiphénomènes d'obstacles de nature cognitive. C'est à une permanence fonctionnelle dans le développement cognitif de l'individu, indépendamment du contexte historique et du cadre disciplinaire, que nous attribuons cette résistance et cette résurgence possible dans le temps, des conceptions initiales des individus, confrontés à la résolution de tâches, dans des conditions psycholinguistiques sans doute très proches. Jean Piaget va même jusqu'à dire que la façon dont le sens d'un objet est acquis par un sujet dépend de ses mécanismes cognitifs et non de ce que le groupe social peut lui apporter¹⁶⁸. Il nous faut donc convenir que nous entendons cette indépendance comme résultant d'un principe transcendantal qui joue comme un invariant dans une phylogénèse structurale des concepts et, non à un niveau phénoménologique dont les aspects sensibles sont forcément dépendants des différentes interactions, de nature socioculturelle, auxquelles est soumis le développement phylogénétique des concepts, et qui peut alors prendre des formes contingentes¹⁶⁹. On peut donner comme principe a priori : la nécessité d'un mécanisme stable

¹⁶⁵ Tel que le définit Durroux : l'obstacle épistémologique bachelardien est repérable historiquement.

¹⁶⁶ Pour nous en restreindre à notre cadre.

¹⁶⁷ C'est-à-dire, jouant dans les mécanismes généraux de la cognition, finalisée par des tâches à résoudre.

¹⁶⁸ *Psychogenèse et histoire des sciences*. Opus cité. *Conclusions générales*. Toutefois, nous atténuerons finalement cette position en insistant sur l'importance de l'environnement linguistique dans lequel cet objet (mathématique) peut être présenté.

¹⁶⁹ C'est, autrement dit, la thèse défendue par Jean Piaget et Rolando Garcia dans *Psychogenèse et histoire des sciences*. Ils se résument dans leurs conclusions générales : « *Nous espérons que le présent ouvrage, ... montrant le rôle de la psychogenèse et ses convergences notables avec l'histoire de la pensée scientifique...* »

d'acquisition des connaissances. De ce point de vue, nous entendons donc cet aspect du développement psychique, tributaire d'un système d'invariants cognitifs et, non modifié par un système de valeurs culturelles. Déduisons alors que notre orientation sera bien relative aux aspects structuraux d'un développement épistémique et, non aux épiphénomènes que sont les connaissances d'un sujet, à un moment donné de son existence¹⁷⁰. Il s'agit bien de différencier « *les mécanismes de l'acquisition des connaissances qu'un sujet a, à sa disposition, d'une part, et d'autre part, la façon dont l'objet à assimiler est présenté à un tel sujet. La société peut modifier ce dernier mais non le premier. Le sens véritable attribué à l'objet, dans le contexte de ses relations avec d'autres objets, peut dépendre, dans une large mesure, de la façon dont la société modifie les relations entre l'objet et le sujet. Mais la façon dont ce sens est acquis dépend des mécanismes cognitifs du sujet et, non de ce que le groupe social peut apporter* »¹⁷¹. **Le concept d'obstacle (épistémologique en particulier) se trouve plongé dans une théorie cognitive du développement structural des connaissances.** Nous devrions ainsi donner une réponse possible à la question de Michèle Artigue : « *Une transposition didactique efficace de la notion d'obstacle épistémologique doit-elle forcément rester accrochée à l'histoire ?* »¹⁷².

4 Les cadres théoriques

Ainsi, notre démarche nous conduit-elle à interroger, en la matière, ce que peuvent nous proposer certains cognitivismes structuralistes¹⁷³. Ce faisant, nous pourrions préciser notre cadre théorique.

4.1 L'apport piagétien

4.1.1 Une transposition non naïve des concepts de Jean Piaget

Elle prend en charge le concept de régulation compensatrice, indispensable si nous voulons comprendre les interactions entre un sujet apprenant et un milieu perturbateur. Or, comme nous le vérifierons, ce concept, a une toute autre valeur technologique (pour travailler les situations d'enseignement) que les concepts d'assimilation et d'accommodation. Ceux-ci, dit Jean Piaget, « *ne préjugent pas des mécanismes structuraux en jeu, car ces deux notions*

¹⁷⁰ Construites dans une interaction entre le sujet et un milieu didactique à un instant donné. Avec Jean Piaget, on peut les retrouver dans les « phénotypes mentaux », ce qui exprime en particulier, en matière d'enseignement, leur contingence et leur tendance à la volatilité, contre laquelle peuvent jouer des renforcements spécifiques. *Psychologie et pédagogie*. Opus cité. Page 252

¹⁷¹ Jean Piaget et Rolando Garcia. *Psychogénèse et histoire des sciences*. Opus cité. Page 295

¹⁷² *Épistémologie et didactique*. Opus cité

¹⁷³ Et nous verrons (dans le chapitre 4) que notre objectif étant proprement pragmatique, les réponses que nous y trouverons ne seront pas directes mais construites à partir de ces points stratégiques ou les psychologues nous abandonnent, là où la didactique pose les questions différemment.

ne relèvent que de la description fonctionnelle »¹⁷⁴. Et leur seule évocation, qui rappelle le rôle (en se maintenant simplement à la description d'un mécanisme), que ces deux fonctions psychologiques jouent, dans le processus d'adaptation du sujet au milieu, ne suffit pas. En effet, si la notion d'adaptation entre bien dans un cadre descriptif concernant le processus de développement, elle n'est pas explicative de ce processus. Elle ne donne pas les conditions nécessaires à sa propre possibilité. Encore une fois, c'est en termes de principes transcendants qu'il faudra aller chercher de telles conditions. Jean Piaget énonce un principe assimilateur propre au schème, sur lequel nous reviendrons, et donnent des conditions nécessaires. **Pour expliquer les conditions de possibilité de l'équilibration (concept que l'on voit repris, dans la didactique des mathématiques), il faut faire appel aux différents processus de régulations.** « *Les régulations sont, du point de vue du sujet, des réactions à des perturbations* »¹⁷⁵. « *Le propre d'une régulation est, en tous les domaines, d'informer un système en action sur le résultat de ses actions et de les corriger en fonction des résultats obtenus* »¹⁷⁶. Nous nous appuyerons dans nos approches, fondamentalement, sur la notion d'un système soumis à des régulations spécifiques¹⁷⁷. Ce faisant, bien que la théorie de l'équilibration des structures cognitives soit l'un de nos cadres théoriques, et justement parce que Jean Piaget ne se préoccupe pas d'introduire, dans le mécanisme du développement intellectuel, des éléments structuraux et endogènes qui pourraient faire obstacle à un tel développement, **nous aurons à exprimer de nouveaux principes régulateurs¹⁷⁸ qui puissent rendre compte, en situation d'apprentissage, d'une phénoménologie paradoxale¹⁷⁹ de l'obstacle.**

4.1.2 Une psychologie génétique réductrice

De plus, des chercheurs et des pédagogues s'accordent pour penser que la psychologie génétique n'est pas une psychologie de l'apprentissage mais une psychologie du développement¹⁸⁰. Ils rappellent que « *l'objectif visé par Jean Piaget n'est pas de déterminer à travers quelles expériences personnelles différenciées ou quelles situations pédagogiques s'effectue le processus d'élaboration cognitive, ni de rechercher à quelles conditions l'enfant effectuerait*

¹⁷⁴ *Équilibration des structures cognitives*. Opus cité. Page 14

¹⁷⁵ *L'équilibration des structures cognitives*. Opus cité. Page 24.

¹⁷⁶ Jean Piaget. *Biologie et connaissances*. Opus cité. Page 164.

¹⁷⁷ Il s'agit, en effet, pour nous, d'aller avant tout retrouver des conditions locales de possibilités d'une équilibration possible.

¹⁷⁸ Certains de ceux-ci, comme on le rappellera au chapitre 4, peuvent, en fait, s'obtenir à partir de principes exprimés par Jean Piaget.

¹⁷⁹ Aspect que nous allons étudier ultérieurement.

¹⁸⁰ A commencer par Lev Vygotski qui critique fortement cette position piagétienne qui veut que « *l'apprentissage scolaire recueillerait les fruits de la maturation enfantine mais, en lui-même, il ne serait d'aucun intérêt pour le développement* ». *Pensée et langage*. Page 246. Ainsi « *l'apprentissage est conçu comme une utilisation purement externe des possibilités apparaissant dans le processus du développement* ». Page 248.

un apprentissage plus ou moins efficace »¹⁸¹ De ce fait, certains d'entre eux sont amenés à réduire l'apport de la théorie piagétienne au postulat du caractère fondateur de l'activité, à une évocation, sans plus d'analyse, des processus d'assimilation et d'accommodation, processus acceptés comme spontanés et naturels dans un milieu ad hoc. Il n'est alors pas étonnant qu'aux analyses des situations d'apprentissage qui sont proposées, échappent les modalités du caractère structurant de l'activité, modalités essentielles (à notre sens) permettant de comprendre un constructivisme d'inspiration piagétienne, applicable à la conception des situations didactiques¹⁸². De plus, outre les tiraillements épistémologiques signalés plus haut, une didactique, d'inspiration strictement piagétienne, pourrait s'accommoder d'une référence qui exclut, de son champ, l'analyse du développement scolaire, comme entretenant avec le développement intellectuel¹⁸³ une dialectique nécessaire et, dont la complexité devrait, au contraire, être explicitement prise en charge. Ainsi, certaines fonctions du discours comme les désignations, les énoncés de propositions, les développements articulés d'énoncés, les constructions de réflexivité, certaines des formes psycholinguistiques, sémiotiques, sémantiques ou logiques peuvent, en fait, ne pas être contraintes par une organisation médiatisée spécifique des objectifs didactiques¹⁸⁴. Pourtant, les opérations discursives se constituent en médiateurs explicites, car associés aux structurations des connaissances, dans le mécanisme de développement scolaire. **Le langage, reconnu par Jean Piaget comme catalyseur et normalisateur, dans le développement des connaissances, est aussi, vraisemblablement, constitutif de ces connaissances dans leur constructions premières.** Mais, comme nous l'analysons, dans certaines situations d'enseignement, on ne perçoit pas toujours, par exemple, une distinction consciente, de la part des différents protagonistes, entre ce qui, dans la langue, relève de la communication et ce qui relève de différents traitements linguistiques¹⁸⁵.

¹⁸¹ *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* Grande Section. 1990. Page 193. Hatier. Ermel.

¹⁸² C'est dire, construire des justifications au niveau technologique.

¹⁸³ C'est-à-dire de l'intelligence au sens de Jean Piaget ou des fonctions psychiques au sens de Lev Vygotski.

¹⁸⁴ Certainement, au contraire, Guy Brousseau a-t-il décrit théoriquement une telle organisation, avec les situations didactiques d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Nous pouvons estimer que le didacticien a défini ainsi des relations entre certaines situations et des buts discursifs spécifiques. Notons, qu'en privilégiant le choix de la dévolution, il postule l'apriori, chez l'élève, de compétences métalinguistiques qui assureraient un contrôle de certaines productions langagières (mathématiques et naturelles). Il précise toutefois que c'est là un défi, pour la didactique, que de construire un milieu favorisant l'exercice de ces compétences, particulièrement dans les situations de formulation. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

¹⁸⁵ Il y aurait lieu de s'interroger sur ce point. Notons simplement ici que la didactique n'ignore sans doute pas que les mots servant à définir une tâche (donc intervenant dans la représentation de la tâche) sont des indicateurs sémiotiques qui ne renvoient pas à la même réalité pour l'élève de l'école primaire et pour l'adulte enseignant. Pour le premier, le mot exprime une situation concrète (au plus un type de situations concrètes), situation qui en constitue son origine empirique et, aussi, qui en circonscrit la dénotation. Pour l'adulte, le mot peut aussi dénoter un concept ; au plus haut niveau d'abstraction, pouvoir penser le concept de façon purement formelle. Car « *chez l'enfant l'intelligence pratique domine encore largement l'intelligence gnostique...Le concept enfantin tient*

4.2 L'apport Vygotskien

4.2.1 Langage et développement

C'est en reprenant la thèse de Lev Vygotski que nous pourrions associer au constructivisme piagétien, la fonction structurante du langage, dans le développement intellectuel de l'élève et lier celui-ci, de façon indéfectible, au développement scolaire. C'est en effet, au niveau où nous plaçons notre étude, c'est-à-dire, l'école primaire, dans le développement de la signification des mots et de la proposition, que nous considérerons l'expression vivante du curriculum. Mais nous devons circonscrire l'apport Vygotskien en ceci qu'il considère avant tout l'apprentissage des concepts scientifiques, c'est-à-dire, formant système¹⁸⁶. C'est, dit Lev Vygotski, la prise de conscience, pour le sujet apprenant, de la nature systématique d'un ensemble de concepts scientifiques, qui favorise la prise de conscience de la nature de ses concepts spontanés (construit en dehors du système éducatif). « *Car, c'est seulement lorsqu'il est intégré dans un système que le concept peut devenir conscient et volontaire. Appliqués aux concepts, conscient et systématique sont synonymes, tout comme spontané, non conscient et non systématique sont trois mots différents pour désigner une seule et même chose, dans la nature des concepts enfantins* »¹⁸⁷. Or, comme nous le vérifions, le curriculum de l'école primaire, en définitif, se conjugue en termes de compétences. Un objet mathématique reste, à ce niveau d'éducation, au plus haut point d'abstraction, défini par un type de situations dont il doit apparaître un outil privilégié. Mais l'on sait qu'un concept se définit par autre chose que des situations qui lui donnent du sens et, de plus, toujours localement (restreint par le type de situations proposées à un élève, à un moment donné de sa scolarité).¹⁸⁸ Les connaissances

donc, en son point de départ, du schème sensori-moteur et reste dominé, pendant des années, par l'assimilation du réel au moi, plus que par des règles discursives de la pensée socialisée ». Jean Piaget. *Psychologie et pédagogie*. Opus cité.

Nos observations nous ont montré que beaucoup d'enseignants, dans les écoles maternelles, ont du mal à entendre cette distanciation entre un langage enfantin et un langage adulte dès lors que les mêmes mots sont employés par les uns et les autres. Nous avons, par exemple, proposé à des enseignants d'écoles maternelles, en situation de formation continue, l'analyse d'un discours d'un enfant de 3 ans et 7 mois : « Le tyrannosaure est un carnivore ». (Pourquoi ?). « Parce qu'il mange de la viande ». (Et le dimétronon, est-ce un carnivore ?). « Non ». (Pourquoi ?). « Parce qu'il mange de l'herbe ». Nous avons mis entre parenthèse notre intervention d'adulte. Les enseignants n'ont pas fait spontanément la différence entre une pensée concrète, celle de l'enfant et une pensée conceptuelle, celle de l'adulte. Il semble que pour eux, puisque les mots sont les mêmes, c'est que la pensée est la même ou en s'exprimant autrement, elle a la même profondeur sémantique.

¹⁸⁶ Un tel système a entre autres comme spécificité de réglementer la manipulation des concepts entre eux, en particulier, de définir leur rapport logique. A ce titre, et à un niveau plus avancé de certaines classes de lycée et de l'université, un tel système peut se passer de modèle, dans la mesure où la définition de quelques symboles primitifs, de règles de syntaxe, pour construire mots et phrases, et de règles de logique pour décider des valeurs des jugements, peut le décrire complètement. A fortiori, un tel système peut ignorer le monde des objets sensibles autres que les purs symboles.

¹⁸⁷ *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Page 244. Opus cité

¹⁸⁸ Aussi bien en considérant la différenciation introduite par Gottlob Frege entre référence ou dénotation et sens - ce qui relève d'une approche de type logique - qu'en considérant la définition que donne Gérard Vergnaud d'un

déclaratives, les liaisons logiques entre les objets mathématiques ne sont pas dans les objectifs explicites des programmes. Ainsi, et c'est un point fondamental, au sortir de l'école élémentaire, les connaissances mathématiques des élèves semblent se rapprocher davantage, dans leur fonction, et donc, dans leur potentiel de développement, des concepts quotidiens que des concepts scientifiques dont l'apprentissage peut, dans les degrés ultérieurs de l'éducation, être initialisé par « un plus haut niveau linguistique » comme à l'aide d'une définition¹⁸⁹. Les pédagogies qui privilégient le rôle de l'action sur le milieu (pédagogie d'inspiration piagétienne), dans la construction des connaissances, renforcent, vraisemblablement, cet aspect très sensualiste des connaissances de l'écolier. A ce niveau, les décontextualisations, comme on le vérifie dans les manuels, sont, en fait, des sortes de reprises des situations concrètes elles-mêmes. Les connaissances mathématiques des élèves sont, comme les concepts quotidiens, fortement saturées de concret et faibles en contenu abstrait¹⁹⁰. Au sortir de l'école élémentaire, la mémoire mathématique des élèves se décrit davantage en termes de schémas et de règles d'actions qu'en termes de concepts¹⁹¹. Un objet mathématique ne peut pas être finalement défini, comme peut l'être un concept, dans un cadre systématique. Dans de rares cas, en géométrie, certains objets semblent pouvoir être définissables, mais jamais dans le cadre numérique. Par exemple, il n'y a pas, pour l'élève de CM2¹⁹², de liaison logique reconnaissable entre les mots « carré » et « rectangle », même si les programmes fixent, au cycle des approfondissements, « *de passer progressivement d'une reconnaissance des objets, fondée sur la perception, à une étude davantage fondée sur le recours à des instruments de mesure ainsi que sur l'énoncé de quelques propriétés* »¹⁹³. A ce niveau, l'apprentissage ne permet pas aux mots « carré » et « rectangle » de renvoyer à des catégories et encore moins de percevoir une

concept C, sous la forme d'un triplet, dont les composantes sont, outre, l'ensemble des situations qui lui donnent du sens (S), mais aussi, l'ensemble des représentations sémiotiques qui interviennent lors de ses manipulations (S), et un nombre spécifiques d'invariants qui en définissent l'intention (I) : $C = (S, I, S)$ - ce qui relève d'une approche de type psychologique. Lev Vygotski considère une distinction proche de celle de Gottlob Frege, avec les notions de sens et de signification. Par cet aspect, il apparaît plus logicien que psychologue (relativement à un développement en contexte).

¹⁸⁹ En reprenant la distinction de Lev Vygotski.

¹⁹⁰ Ce faisant, nous reprenons les termes de lev Vygotski lui-même et relatifs à une distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques.

¹⁹¹ A la question, donnée en 2008 à 16 professeurs des écoles, enseignant au cycle 2 et au cycle 3, et leur demandant de définir une fraction, aucun n'a donné de définition générale du concept de fraction. On a pu distinguer quatre types de réponse : l'un, exprimant une description purement sémiotique du signe ; l'autre, renvoyant à la notion de partage (équitable n'étant pas toujours explicité), sans exprimer le résultat de ce partage ; le troisième, définissant la fraction comme le résultat de ce partage ; enfin, le quatrième, la définissant comme le résultat d'une division. Aucune des réponses ne considère la notion de fraction, en relation avec le programme, et sous une forme générale, en particulier dans son rapport avec le concept de nombre : la fraction, en tant que nombre mesure, étend le concept de mesure limitée à des valeurs entières.

¹⁹² Dernière année de l'école primaire avant la 6^{ème}, première année du secondaire.

¹⁹³ Programme de 2008. BO n°3 du 19 juin 2008.

inclusion de classes¹⁹⁴. Au sortir de l'école élémentaire, un élève va manipuler les objets mathématiques comme il manipule les concepts quotidiens, sans avoir à la conscience leur signification, c'est-à-dire, leur valeur logique¹⁹⁵. Celle-ci est en effet une fonction qui relie le mot à sa référence et aussi, plus généralement, une fonction qui « *place, dans un système déterminé de rapports de généralité* », le concept désigné, rapports de généralité « *qui représentent les liaisons les plus fondamentales, les plus naturelles et les plus importantes entre les concepts* »¹⁹⁶.

4.2.2 Des situations seulement concrètes

Pour l'élève, le niveau d'abstraction d'un objet mathématique coïncide avec celui d'un type de situations dont il est l'objet-outil immédiat. En ce sens, il reste contextualisé et lié, dans la mémoire, à des indicateurs sémiotiques (verbaux, syntaxiques, temporeux et autres) et dont l'ensemble (sémiotiquement structuré) tient lieu, à la fois de définition et d'anticipateur pour le déclenchement de l'exécution de certaines tâches. En d'autres termes, un simple changement d'indices sémiotiques peut laisser l'élève incapable d'accomplir une tâche de même type et dont pourtant l'outil immédiat demeure le même¹⁹⁷. Une explication, produite par Jean Piaget et Lev Vygotski, est le caractère non conscient des concepts manipulés par les écoliers¹⁹⁸. C'est ce caractère non conscient qui nous paraît expliquer que la compréhension d'une connaissance mathématique reste, à ce niveau, le plus souvent limitée par la structure sémiotique de l'énoncé d'une tâche. La forme la plus abstraite de la dimension outil que peut prendre, à ce niveau, une connaissance mathématique, ne renvoie pas davantage qu'à ce que l'on appelle type de tâche. Ainsi, par exemple, les positions des trois nombres entiers, dans l'écriture $a + b = c$, sont tellement dépendantes de leur correspondance concrète, dont en particulier la structure sémiotique de la situation dans laquelle celle-ci se trouve, que l'écolier ne peut pas spontanément anticiper leur déplacement¹⁹⁹. Les travaux de Gérard Vergnaud²⁰⁰ ont

¹⁹⁴ Il est remarquable de noter que des tests effectués sur ce thème et proposés à des adultes, futurs enseignants des écoles, montrent que de tels objets restent englués dans la gangue sensorielle qui les a vus naître. Pour la grande majorité de ces enseignants, les définitions des objets restent redondantes, à ce point qu'ils en sont amenés spontanément à nier certaines relations d'inclusion, de nature ensembliste, entre les concepts catégoriels.

¹⁹⁵ Un test, effectué sur un public de professeurs des écoles, formés, pendant un an, à la didactique des mathématiques et ayant acquis, l'année précédente, des contenus disciplinaires, a permis de vérifier que de tels concepts géométriques n'ont pas atteint chez eux leur signification logique. Il s'agissait de repérer dans une figure, peu complexe, les carrés, les rectangles et les losanges. Une majorité de production fait apparaître les propositions : un carré n'est pas un rectangle ; un carré n'est pas un losange.

¹⁹⁶ Lev Vygotski. *Pensée et langage*. Chapitre 5. *Etude expérimentale du développement des concepts*.

¹⁹⁷ Par exemple, des changements de syntaxe ou de temporalité dans les phrases énonçant les tâches à résoudre. Plus fondamentalement, une conversion « par synonymie » d'indicateurs linguistiques.

¹⁹⁸ Jean Piaget « *Jugement et raisonnement chez l'enfant* ». Delachaux et Niestlé. 1967. Lev Vygotski « *Pensée et langage* ». Opus cité

¹⁹⁹ L'anticipation de tels déplacements est le corollaire d'une liberté relative, à des interprétations sémantiques. Par exemple interpréter b comme un ajout ou comme un complément ou comme un état initial... Gérard Verg-

confirmé que la soustraction en tant que processus inverse de l'addition n'est pas naturellement disponible, pour des élèves ayant reçu un apprentissage correspondant à l'addition. Les éléments verbaux qui interviennent dans l'expression des situations, où l'addition est l'outil attendu, n'ont pas encore atteint, quelques années après l'apprentissage de l'opération au CP²⁰¹, un niveau d'abstraction suffisant pour que l'écopier puisse percevoir, implicitement, la soustraction comme opération inverse de la première²⁰². Ultérieurement, à un certain niveau de connaissance mathématique (que l'on aborde au collège), la soustraction apparaît comme une forme particulière de l'addition (on ajoute l'opposé, un gain peut être négatif, etc...). La soustraction, ainsi dénommée, résulte d'un changement de certains mots dans la définition de l'addition : il s'agit, plus précisément, de dire que l'on ajoute l'inverse pour définir une différence. A ce niveau, le concept d'addition tend à être une opération formelle, c'est-à-dire pouvant s'exprimer en dehors de situations concrètes. On sait, avec Jean Piaget, que même si les instruments de connaissance logico-mathématiques se développent entre 6 et 12 ans, ils demeurent limités car « *ils ont besoin, pour s'exercer adéquatement, du support d'objets ou de situations concrètes* »²⁰³. Et nous considérons que les schèmes opératoires, au niveau des opérations concrètes, et qui en sont les instruments, ne peuvent s'activer, sans certains indicateurs, eux-mêmes formes concrètes de certains registres sémiotiques, donnés à percevoir dans ces situations. Et les concepts mathématiques de l'enfant de l'école primaire, demeurent, comme ses concepts spontanés, en dehors d'un système. Ils peuvent être l'objet de manipulations concrètes, « *par le fait qu'il les maîtrise spontanément dans une situation déterminée, automatiquement, c'est-à-dire lorsque, par certaines de ses grandes structures, la situation l'incite à faire preuve de ces savoir-faire, mais qu'en dehors d'une structure déterminée, il ne sait pas faire ce qu'il fait involontairement, c'est-à-dire de manière volontaire, consciente et intentionnelle* »²⁰⁴.

Conclusion

Ainsi, nous postulons que si les situations didactiques peuvent servir de médiation dans

naud relate le cas de Charlotte qui extériorise en verbalisant un tel glissement sémantique réussi : En « passant » du « il lui reste 11 » au « je vais en garder 11 ». Elle décompose c donné en $11 + b$ au lieu de retrancher 11 à c, pour trouver b ». Revue française de pédagogie n° 96. *Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques*. Pages 79-86

²⁰⁰ « *Psychologie du développement cognitif et didactiques des mathématiques* », Grand N, n°38. Gérard Vergnaud est beaucoup plus explicite. Les exemples qu'il présente montrent bien la rétention des formes langagières qui limite le potentiel d'action de l'enfant, relativement à des situations différentes.

²⁰¹ Première année de l'école élémentaire.

²⁰² A ce niveau, il faut parler, avec Jean Piaget, d'abstraction empirique et de niveau opératoire concret car l'inversion d'une opération ne peut être conçue en dehors des situations concrètes elles-mêmes. On peut alors concevoir le calcul d'une différence comme le calcul dans une somme dite « à trou ».

²⁰³ Marie Françoise Legendre-Bergeron. *Lexique de la psychologie de Jean Piaget*. Opus cité.

²⁰⁴ Lev Vygotski. Opus cité. Page 264.

la conceptualisation, le résultat cognitif obtenu est bien de l'ordre de la généralisation du déjà là. Mais, nous entendons cela en termes d'extension de situations concrètes, étroitement dépendantes d'un certain registre sémiotique et en particulier linguistique, ce qui constitue une conceptualisation travaillant l'extension d'un schème et non la compréhension d'un concept²⁰⁵. **Ce travail d'extension de la référence du schème est alors indissociable d'un traitement spécifique au niveau de certains registres sémiotiques.** Notons que, concernant les concepts eux-mêmes, « *la généralisation signifie donc à la fois prise de conscience et systématisation* ». Mais aussi bien, comme nous le verrons, prise de conscience et systématisation devraient être entendues à des degrés divers.

4.3 Des apports contradictoires²⁰⁶

Pourtant, si nous voulons mener à terme un projet de construction d'une technologie de situations didactiques, nous devrions penser cette difficulté qu'il y aurait à se fonder sur des théories du développement dont les deux psychologues et les néo vygotskiens²⁰⁷ s'accordent à reconnaître les aspects contradictoires²⁰⁸ :

4.3.1 Jean Piaget et le développement intellectuel

Outre les constantes fonctionnelles et structurelles qui en définissent les formes nécessaires, le développement intellectuel s'opère selon un ordre (stades) invariant. Ce découpage temporel n'est pas contingent de facteurs exogènes comme les faits relevant de la culture dont le langage en particulier et les interactions sociales en général. Le rôle du langage n'est certes pas ignoré par l'épistémologue car « *il joue un rôle adjuvant indiscutable et constitue peut-être la condition nécessaire, quoique non suffisante, de l'achèvement de ces structures sous leurs formes généralisées* ». Mais, « *à tous les niveaux, le langage ambiant est assimilé sémiotiquement aux structures du sujet et, s'il contribue à modifier celles-ci, il n'en est pas moins subordonné à son interprétation* ». « *C'est pourquoi le langage, si important que soit son rôle dans l'élaboration des structures logiques, ne saurait être considéré, chez l'enfant normal, lui-même, comme facteur essentiel de formation* »²⁰⁹. Jérôme Bruner peut alors estimer que la théorie de Jean Piaget est celle de « l'orientation du développement » plutôt que

²⁰⁵ Lev Vygotski. Opus cité. Page 245.

²⁰⁶ Nous tenons à rappeler que notre analyse reste limitée (très peu exhaustive) au projet que poursuit cette thèse.

²⁰⁷ Comme Jérôme Bruner et ceux qui stigmatisent, concernant les travaux de Jean Piaget, sa dévaluation des apports socio – culturels, dans le développement des connaissances de l'enfant.

Ainsi, Piaget écrit-il : « *Le langage articulé, socialement transmis par éducation ne semble pas nécessaire à la formation des structures opératoires...* ».

²⁰⁸ Nous résumerons, ci-dessous, les grandes lignes de cette divergence.

²⁰⁹ Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La genèse des structures logiques élémentaire. Introduction*. Page 11. Delachaux et Niestlé. 1991

celle « des facteurs du développement »²¹⁰. Comme facteurs de développement, et en toute généralité, le primat est donné aux actions propres du sujet dont l'intériorisation est source de développement de l'esprit, sous des formes structurées, finalement descriptibles en termes logico-mathématiques de haut niveau²¹¹. A la question de la socialisation, comme condition du développement intellectuel, Jean Piaget répond de façon définitive mais, sans doute ambiguë : « *Dans ma perspective actuelle, elle ne se pose plus, comme autrefois pour moi, parce que la considération des opérations et de la décentration liée à la construction des structures opératoires en renouvelle les termes. Toute pensée logique est socialisée parce qu'elle implique la communication entre les individus* »²¹². Nous devrions comprendre donc que cette pensée logique, si elle prend forme dans la communication, n'en dépend pas dans sa construction intime. De même, l'éducation, en milieu scolaire, est considérée comme pourvoyeuse d'aliments aux schèmes d'assimilation, parvenus à un stade de développement donné. Mais l'adaptation à de nouvelles connaissances reste limitée, en un sens, à ce niveau de développement, celui des équilibres possibles. Précisons encore, qu'en suivant Jean Piaget, il faut entendre l'acquisition d'une connaissance nouvelle comme un état possible, en ce sens, qu'à toute structure de schèmes équilibrée est associé un certain potentiel d'accommodation. En d'autres termes, cet apprentissage est limité par une régulation qui définit les équilibres possibles entre l'assimilation et l'accommodation. « *Il importe donc fondamentalement, à l'école (nouvelle), de savoir quelle est la structure de pensée de l'enfant* »²¹³. Mais, l'analyse Lev Vygotski, le développement scolaire est ainsi réduit à accompagner le développement intellectuel de l'enfant²¹⁴. « *Pour Piaget, la connaissance est fabriquée et non découverte* »²¹⁵. Jean Piaget pourrait nier cette dichotomie, en ce sens que connaissance à fabriquer et connaissance à découvrir sont, finalement, une et même chose. La seconde est l'un des possibles, premières accommodations de schèmes disponibles, possibles qui se révèlent à un sujet dans une situation qui en motivent les émergences. L'ensemble de ces possibles définit une partie d'un certain potentiel de développement. Et la connaissance à fabriquer est une des formes

²¹⁰ In *L'esprit Piagétien. Hommage à Jean Piaget*. Sous la direction d'Olivier Houdé et de Claire Meljac. Chapitre XII. Jérôme Bruner. *Piaget et Vygotski. Célébrons la divergence*. PUF, 2000

²¹¹ Par haut niveau, nous entendons : au sens d'une théorie axiomatisée, comme le calcul des propositions ou la théorie des groupes, par exemple.

²¹² *Pensée et langage. Commentaire sur les remarques critiques de Vygotski*. Opus cité. Page 399. Nous voulons insister sur l'interprétation forte que nous en faisons : A tout moment de son existence, la pensée d'un sujet n'est socialisable, et nous devons entendre ceci jusqu'aux formes hautement normalisées de cette socialisation, comme le raisonnement mathématique, que lorsque le développement, atteint par le sujet, la rend ainsi potentiellement possible.

²¹³ Jean Piaget. *Psychologie et pédagogie*. Opus cité.

²¹⁴ *Pensée et langage*. Opus cité.

²¹⁵ Jérôme Bruner. Dans *l'esprit piagétien : célébrons la différence*. Opus cité.

nécessaires que prend l'un de ces possibles, seconde accommodation, pour être assimilable à de nouveaux schèmes. « Or, c'est précisément en cela que consiste le comportement : un ensemble de choix et d'actions sur le milieu, organisant de façon optimale les échanges. L'apprentissage ne fait nullement exception à cette définition, car en acquérant de nouveaux conditionnements et de nouvelles habitudes, l'être vivant assimile les signaux et organise des schèmes d'action qui s'imposent au milieu en même temps qu'il s'accommodent à lui »²¹⁶.

Conclusion

Certains travaux didactiques, s'inscrivant dans le cadre de l'épistémologie génétique de Jean Piaget, peuvent alors tomber sous la critique suivante :

- i- dénaturation du projet piagétien qui se voulait une théorie du développement et en aucun cas un projet pédagogique ;
- ii- réduction de l'apprentissage scolaire à une sorte de décalque du processus génétique. « La position « applicationniste » considère l'enseignement comme un terrain modifiable, au bon gré des avancées des sciences de l'enfant qui deviennent normatives pour l'enseignement »²¹⁷ ;
- iii- absence de toute analyse du savoir mathématique. Ces tentatives se caractérisent par des substitutions d'objets d'enseignement, en excluant le savoir. Par exemple, une certaine dimension opératoire de la connaissance à enseigner peut se substituer à une dénotation épistémologiquement plus complexe de celle-ci²¹⁸ ;
- iv- ne pas prendre en compte les effets de contexte dans le fonctionnement cognitif, « autrement dit l'analyse synchronique et diachronique des contextes construits à l'intérieur des espaces didactiques »²¹⁹.

Pour notre part, nous reprendrons certains des outils fondamentaux que Jean Piaget systématise dans son ouvrage sur l'équilibration des structures cognitives :

- i- en réduisant notre approche aux microgenèses de certaines compétences ;
- ii- en plaçant cette psychogenèse dans le cadre d'une partie de la psychologie cognitive se focalisant sur les activités finalisées, comme la résolution de problèmes spécifiques ;
- iii- en systématisant l'analyse bidimensionnelle d'une épistémologie génétique et historique, relatives à une compétence dont le développement est visé ;

²¹⁶ Jean Piaget. *Biologie et connaissance*. Chapitre 1. *Position du problème*. Opus cité.

²¹⁷ Jean Brun. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud*. Pages 67-83. La pensée sauvage. 1994

²¹⁸ On pourrait proposer cette critique pour l'approche d'Hans Aebli que nous avons rappelée en introduction.

²¹⁹ Graciela Ricco. Termes d'une critique que l'auteur adresse à l'un de ces travaux. *Psychologie cognitive et didactique des mathématiques, perspective critiques et différentes approches concernant la cognition scolaire. Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. 1995.

iv- en s'intéressant donc aux filiations et aux ruptures, lors de l'acquisition d'une compétence nouvelle, en milieu scolaire et d'un double point de vue structurel : relatif à la logique du développement mathématique et relatif à la logique du développement des schèmes. Dans tous les cas, l'effet de contexte, joué par certaines formes sémiotiques, servira explicitement de levier didactique.

Ce faisant, nous serons amené à développer davantage, et pour le didactique, certains concepts comme ceux de schèmes, de régulation et de réversibilité opératoire, trop restrictifs dans la théorie génétique de Jean Piaget. Et aussi, il nous est apparu, concepts encore inassimilés dans la didactique des mathématiques.

4.3.2 Lev Vygotski et le développement intellectuel

« *L'esprit sert d'intermédiaire entre le monde extérieur et l'expérience individuelle* »²²⁰. Le développement est celui de l'appropriation médiatisée des contenus culturels dans lesquels le langage est utilisé. C'est à l'éducation qu'il va appartenir d'organiser la médiation entre l'élève et la culture. Entre le concept quotidien²²¹ de l'enfant et le concept, tel qu'il est médiatisé à l'école, une dialectique complexe va aboutir à un développement corrélé de chacun d'eux, et dont l'indicateur sémiotique peut être le même mot qui désigne, respectivement, aussi bien l'un que l'autre. Ce développement peut se générer selon des stades définissables et repérables. Le médiateur fondamental de ce processus, entre le concept en son état initial et le concept en son état à enseigner²²², est donc le mot dont l'évolution est celle d'une généralisation croissante. De là, le développement possible des fonctions psychiques supérieures qui s'exprime par une élévation du niveau de conscience de ces concepts. Car, « *toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques* »²²³. Dans la formation d'un concept, ce signe est le mot qui sert de moyen de formation du concept et devient par la suite son symbole. La position de Lev Vygotski est alors clairement que « *seule l'étude de l'utilisation fonctionnelle du mot, de son développement, de ses diverses formes d'application, qualitativement différentes à chaque âge mais liées génétiquement les unes aux autres, peut fournir la clé permettant d'analyser la formation des concepts* ». Et de cette étude, nous pourrions retenir une continuité génétique

²²⁰ Jérôme Bruner. Opus cité.

²²¹ Entendant, par là, les concepts acquis en dehors du système scolaire.

²²² Entendons le concept, au sens de Gérard Vergnaud.

²²³ *Pensée et langage*. Chapitre 5. *Etude expérimentale du développement des concepts*. Opus cité.

dans la construction de la dénotation²²⁴ d'un mot, pour en faire, en didactique, un véritable concept organisateur.

Ainsi, le développement scolaire peut-il anticiper et aussi accompagner le développement intellectuel.

Conclusion

Des travaux, s'inscrivant dans le cadre de la psychologie génétique de Lev Vygotski²²⁵, peuvent tomber sous la critique suivante :

- i- ne pas prendre en compte une épistémologie spécifique des savoirs en jeu ;
- ii- concevoir les connaissances à acquérir, comme étant toujours associées à des concepts de nature catégorielle²²⁶ ;
- iii- négliger les processus transpositifs et institutionnels. Car la transposition des savoirs interpose entre les concepts quotidiens et les concepts scientifiques des artefacts qui supposeraient une reformulation de la double germination par le bas pour les premiers concepts et par le haut pour les seconds ;
- iv- ignorer la fonction opératoire de la connaissance en situation²²⁷.

Pour notre part, nous reprendrons certains des outils fondamentaux que Lev Vygotski explicite dans son ouvrage sur les rapports entre la pensée et le langage mais :

- i- en ne considérant pas, au niveau où nous posons notre ambition didactique, directement le développement de la signification d'un concept mais celui de sa référence. D'une connaissance, nous viserons l'une de ses composantes opérationnelle, une certaine compétence, à savoir le développement d'une forme d'action en situation ;
- ii- en prenant, comme point de départ, des objectifs et un ordre exprimé, tels qu'ils se trouvent précisés dans les curricula officiels, et en explicitant clairement une transposition ;
- iii- en liant le concept de zone proximale de développement à un ensemble de situations dont le type dépend explicitement de la compétence en jeu, compétence dont la composante cognitive est une certaine structure désignée comme un schème.

²²⁴ « Comme la relation qui unit une forme linguistique à une classe d'objets du monde ». George Mounin. Dictionnaire de linguistique. PUF. 2000

²²⁵ Ces derniers se rapportant également aux développements de nature pragmatique qu'à donnés Jérôme Bruner au principe de la médiation.

²²⁶ Ces deux premières critiques peuvent s'adresser, il nous semble, aux conceptions de Britt Marie Barth dans son apprentissage de l'abstraction (*L'Apprentissage de l'abstraction* RETZ. 1987) qui suivent en cela celles de Jérôme S. Bruner « *Savoir faire, savoir dire* ». PUF.1998

²²⁷ Pour ces deux dernières critiques, voir Graciela Ricco. Opus cité.

5 Une notion difficile à saisir : la prise de conscience²²⁸

5.1 Une notion ambiguë

Notons qu'aucun des deux psychologues ne nous renseignent véritablement sur les causes profondes qui engendrent la prise de conscience, nécessaire lors de la transformation psychique qui est le passage d'un niveau de développement à un niveau de développement supérieur. Ainsi, chez Jean Piaget, dit Jérôme Bruner : « *il m'est toujours apparu difficile de déterminer si la prise de conscience est une pré-condition ou un concomitant du progrès cognitif vers un niveau plus élevé* »²²⁹. De même « *la puissance productrice du travail intérieur, nous dit Vygotski, repose sur la conscience. Mais chez lui, le modus operandi n'en a jamais été vraiment explicité* »²³⁰. Et, dit Jean Piaget, concernant le caractère tardif de cette prise de conscience, Lev Vygotski ne fait que « *constater des faits sans les expliquer* »²³¹. Mais l'explication, par une capacité nouvelle de décentration, n'est pas plus satisfaisante que le simple constat de la loi de prise de conscience tardive qui n'intervient qu'au terme du développement d'une fonction. Car alors, la question se retourne vers le développement de la capacité de décentration comme, de même, vers celle du développement de la capacité de prise de conscience. Résultant l'une et l'autre d'une stimulation volontaire ou spontanée, ne sont-elles pas, en tant que fonctions psychiques supérieures, elles-mêmes en développement, durant la scolarité ? Car, « *la conscience se développe comme un tout, modifiant à chaque nouvelle étape toute sa structure interne et la liaison des parties* ». A l'âge des enfants de l'école primaire, la prise de conscience ne semble pas être pourtant une opération qui peut se rendre disponible par des stimulations d'origine exogène²³² qui en font un appel explicite, comme ceci peut l'être pour un sujet plus âgé. **Or, pour notre part, nous ne comprendrions pas comment la prise de conscience ne relèverait pas d'une compétence, ce qui suppose un certain développement de la fonction de conscience** dont vient de nous entretenir Lev Vygotski. En d'autres termes, une définition didactique, que nous prendrions comme pertinente, est que la prise de conscience est une forme active de la conscience au sens vygotkien du terme. Et que donc, la forme même de cette activité dépend d'autres contenus cognitifs disponibles et des objets auxquels elle peut s'appliquer, comme la mémoire de travail l'est de la mémoire à long terme. Mais le psychologue russe ne nous dit pas comment. Aussi, comme

²²⁸ Dans le chapitre suivant nous tenterons une analyse plus détaillée de cette notion.

²²⁹ Dans *L'esprit piagétien : célébrons la différence*. Opus cité.

²³⁰ Ibid.

²³¹ *Remarques sur les remarques critiques de Lev Vygotski concernant le langage et la pensée chez l'enfant...* Langage et pensée. Page 397. Opus cité.

²³² Opérations bien distinguables de la fonction de conscience elle-même.

nous l'avons déjà précisé, nous ne pensons pas, qu'au terme de l'instruction primaire²³³, l'élève soit parvenu à un niveau de conscience associé aux concepts étudiés et qui serait synonyme de maturité suffisante d'une certaine fonction psychique supérieure²³⁴, celle liée aux significations des concepts eux-mêmes ; et en particulier, connaître, de ces concepts, autres chose que leurs fonctionnalités concrètes²³⁵, dans des types de situations donnés. L'épistémologue affirme que « *les racines des opérations logiques sont plus profondes que les liaisons linguistiques* »²³⁶. Toutefois, chaque développement de concept pourrait s'accompagner de certaines formes de prises de conscience. Mais la question demeure de l'évaluation de ces formes, lors de la conception des situations didactiques.

Conclusion

Et la question du développement des fonctions psychiques supérieures n'est pas véritablement un objet de cette thèse²³⁷. Ainsi, pour ce qu'il en est de la conception des situations didactiques, la prise de conscience relèverait au moins d'un déclenchement implicite sur lequel la médiation ne pourrait jouer, à nos yeux, que de façon indirecte. En particulier, nous n'aurions pas à supposer, lors de la conception de nos situations didactiques, davantage, de la part de l'élève, qu'une aptitude à pouvoir agir dans un premier temps, dans un environnement sémiotiquement structuré²³⁸ et que possédant un certain niveau de prise de conscience, éventuellement évaluable a posteriori. C'est dire, au moins, qu'il peut être conscient d'un but à atteindre et des actions qu'il se fixe pour atteindre un tel but²³⁹. **Nous venons simplement d'argumenter pour justifier le fait que la définition de cette médiation ne contiendra pas, comme un point acquis, que l'élève dispose d'une opération cognitive, dite de prise de conscience, point qui se substituerait alors à d'autres éléments de cette médiation.** D'autre part, nous focaliserons notre travail sur les microgenèses cognitives qui accompagnent le développement d'une connaissance locale en mathématique. Nous allons alors considérer que les élèves, concernés par notre étude, en sont à la période de construction des opérations concrètes, durant ce stade où, précisément, les opérations portent directement sur des

²³³ Avant l'âge de 11- 12 ans. Sur ce point, on retrouve les deux psychologues.

²³⁴ Précisons : fonction psychique supérieure « *dont certaines caractéristiques distinctives fondamentales sont, précisément, l'intellectualisation et la maîtrise, c'est-à-dire la prise de conscience et l'intervention de la volonté* ». Lev Vygotski. Opus cité. *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Page 237.

²³⁵ Certaines situations qui lui donnent du sens mais, sans que soit perçue tout autant une unité conceptuelle autrement qu'incarnée. Jean Piaget a bien décrit le stade achevé de ce niveau de développement en l'appelant le stade des opérations concrètes.

²³⁶ *Pensée et langage*. Page 391.

²³⁷ Ce serait au contraire le cas, par exemple, si nous abordions directement la question du raisonnement mathématique.

²³⁸ Ce qui s'oppose à une certaine improvisation concernant cet environnement.

²³⁹ Au sens où la forme de son action est spontanément perçue, par lui, comme un des observables concrets, dans l'ensemble des éléments sémiotiques de la situation.

objets concrets ou bien sur leur(s) évocation(s) mentale(s). Il s'agira, pour nous, de circonscrire le développement d'une connaissance donnée à sa « dimension compétence » qui est celle de son opérationnalité dans des situations concrètes. Rappelons aussi, qu'à ce stade, l'enfant a atteint un certain niveau de langage qui lui permet d'avoir une pensée symbolique et donc de disposer de certaines capacités d'évocation et d'anticipation. La dimension sémiotique du langage suffit précisément à assurer la communication entre l'enseignant, proposant une tâche, et l'enfant, devant opérer concrètement avec des objets et à des niveaux divers d'anticipation.

5.2 Mais une synthèse possible

5.2.1 Des positions certes nuancées

César Coll²⁴⁰ pense difficile l'intégration, dans un même cadre explicatif, des positions de Lev Vygotski, concernant le processus de passage du plan interpsychologique au plan intrapsychologique du fonctionnement de la pensée, et celles de Jean Piaget, accordant la priorité, dans ce processus, aux mécanismes de régulation de nature interne²⁴¹. Pourtant, « *les apports de la théorie piagétienne à l'éducation scolaire, notamment pour ce qui concerne les mécanismes internes du fonctionnement de la pensée et du progrès cognitif des élèves, aux prises avec les contenus scolaires, continuent à être essentiels* »²⁴². Et, il faut bien reconnaître, pour ce qu'il en est de la position de Lev Vygotski, « *ses propres limitations, surtout pour ce qui concerne les mécanismes internes de la pensée, c'est-à-dire pour ce qui concerne le plan intra- psychologique* »²⁴³.

Ajoutons que César Coll considère ce qui précède comme une question ouverte, dès lors que, comme le précise Léontiev, « *les processus d'internalisation ne consistent pas à transférer une activité externe à un plan interne préexistant, un 'plan de la conscience' : ils sont les processus au moyen desquels ce plan est formé* »²⁴⁴. Mais sa position reste que, concernant les recherches sur les apprentissages scolaires, les efforts ne doivent pas viser une intégration des théories piagétienne et vygotkienne²⁴⁵.

²⁴⁰ Département de Psychologie du développement et de l'Éducation. Faculté de psychologie. Université de Barcelone.

²⁴¹ *Apprendre à l'école : perspectives piagésiennes et vygotkiennes*. Sous la direction Michel Brossard et de Jacques Fijalkow. Presses universitaire de Bordeaux. 2002. *La construction de la connaissance à l'école : condition d'une intégration théorique*. Pages 17-26. Rappelons en particulier les approches diamétralement opposées de Jean Piaget et de Lev Vygotski concernant le langage égocentrique.

²⁴² Ibid. Page 18.

²⁴³ Ibid. Page 18.

²⁴⁴ Ibid. page 19

²⁴⁵ Ibid. page 20

Mais, répond Samuel Joshua, « *on voit, en fait, qu'une description vygotkienne approfondie appelle la notion de schème, quel qu'en soit le contenu exact que l'on en retient en définitive. Ceci demeure d'ailleurs vrai, même si l'on privilégie une origine sociale de ces schèmes* »²⁴⁶. C'est fondamentalement la position que nous allons adopter dans cette thèse et que nous allons essayer de justifier, dans ce qui suit.

5.2.2 Un invariant fonctionnel : le langage

Les deux psychologues s'accordent toutefois sur une forme d'activité métacognitive qui accompagne tout développement des concepts : la prise de conscience.

Concernant la prise de conscience, Lev Vygotski va fonder une critique des conceptions de Jean Piaget en se référant à la lecture d'un ouvrage écrit en 1924²⁴⁷. Il conteste que « *la prise de conscience s'opère grâce à l'éviction des vestiges de l'égoïsme verbal par la pensée sociale (...) qu'elle soit apportée du dehors* »²⁴⁸. C'est pourtant reconnaître, dans les conceptions de Jean Piaget, une influence du plan interpsychologique sur le plan intrapsychologique, même si cela ne peut être entendu au sens vygotkien puisque, en particulier, Lev Vygotski considère le langage égoïste comme une première étape de la pensée socialisée. Mais, dans un ouvrage plus récent²⁴⁹, Jean Piaget montre que la prise de conscience relève elle-même d'un développement, lié toutefois à un invariant fonctionnel : le processus d'assimilation, lui-même promu au rang d'instrument de compréhension. Lev Vygotski énonce lui-même un invariant fonctionnel qui joue sur la structuration du développement psychique dans son ensemble : « *L'utilisation fonctionnelle du mot ou d'un autre signe, comme moyen de diriger activement l'attention, de différencier et de dégager les traits caractéristiques, de les abstraire et d'en faire une synthèse, est une partie fondamentale et indispensable du processus de la formation des concepts dans son ensemble. La formation du concept ou le fait qu'un mot acquiert une signification est le résultat d'une activité complexe (manipulation du mot ou du signe), à laquelle participe toutes les fonctions intellectuelles dans leur ensemble* »²⁵⁰, dont l'opération de prise de conscience. Mais, précise Lev Vygotski, l'enfant possède déjà le mot avant que celui-ci ne signifie un concept. Il l'utilise de façon pertinente dans sa communication avec l'adulte avant qu'il ne s'en serve aussi pour construire le concept lui-même. On pourrait accorder à cette approche d'être compatible avec celle (toute piagétienne, dans une interprétation possible) qui considère alors que le mot est au moins un objet

²⁴⁶ In *Apprendre à l'école : perspectives piagésiennes et vygotkiennes. Les obstacles épistémologiques et le cadre vygotkien*. Opus cité.

²⁴⁷ Il s'agit du Jugement et raisonnement chez l'enfant. Opus cité.

²⁴⁸ *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Opus cité. Page 236.

²⁴⁹ *La prise de conscience. Conclusions générales*. Page 265. PUF 1974.

²⁵⁰ Opus cité. *Etude expérimentale du développement des concepts*. Page 156.

concret²⁵¹ et que l'utilisation qu'en fait l'enfant lui-même, pouvant parfois entrer en conflit avec celle que l'adulte voudrait lui voir en faire, en situation d'apprentissage, est alors l'objet d'une rétroaction qui fait tendre le mot vers une signification orientée par celle du « mot adulte ». Certes, Jean Piaget nie, comme on l'a déjà vu, une influence déterminante²⁵² du langage, sur la possibilité proprement dite des connaissances. Mais il admet qu'il favorise les processus d'intériorisation. « *Prendre conscience d'une opération, c'est en effet la faire passer du plan de l'action sur celui du langage, c'est donc la réinventer en imagination pour pouvoir l'exprimer en mots* »²⁵³. Et, « *quand le système de communications de l'enfant avec son entourage social devient plus complexe et plus riche, et particulièrement, quand le langage devient le moyen de communication dominant, ce que nous pourrions appeler expérience directe des objets commence à être subordonnée, dans certaines situations, au système de signification que lui confère le milieu social* »²⁵⁴. Ainsi donc le langage, indéfectiblement, participe aussi bien de l'expérience initiale que de l'organisation des connaissances.

5.2.3 Un invariant épistémique : le constructivisme

En fait, le nœud incontournable, à partir duquel nous considérons une synthèse possible, est que, pour l'un et l'autre des deux psychologues, le développement intellectuel est de nature constructiviste et suppose certaines interactions. En particulier, le processus de développement des connaissances a toujours un caractère productif. D'où, une condition nécessaire fondamentale : la connaissance émerge et prend forme au cours d'une opération complexe visant à résoudre un problème. Le sujet dispose, pour s'engager dans la recherche des solutions, d'une tendance déterminante : représentation du but à atteindre et réglage (non nécessairement conscient) d'actions à produire. Pour Jean Piaget, si de l'interaction entre le sujet et l'objet-problème résulte une perturbation consciente, il peut y avoir enclenchement spontané d'un processus de développement²⁵⁵. Pour Lev Vygotski, si de l'interaction entre le sujet et l'objet-problème, résulte une communication verbale avec l'adulte, spécifique du problème, alors cette communication peut dynamiser un développement. Cette communication spécifique pourrait s'entendre comme accompagnant une prise de conscience relative à une pseudo-différenciation entre la compréhension et l'extension auxquels peut renvoyer un mot²⁵⁶. Et

²⁵¹ Initialement un complexe de sons.

²⁵² Au sens d'en être la cause,

²⁵³ *Jugements et raisonnement chez l'enfant*. Opus cité. *Résumé et conclusion*. Page 171.

²⁵⁴ *Psychogenèse et histoire des sciences*. Opus cité. Chapitre IX. *Sciences, psychogenèse et idéologie*.

²⁵⁵ Positif ou négatif pour l'organisme perturbé.

²⁵⁶ Nous parlons de pseudo différenciation, comme Lev Vygotski peut parler de pseudo-concept, pour exprimer qu'il y a là une orientation génétique et non un achèvement. L'enfant, sollicité, peut être amené à devoir s'exprimer autrement que par des exemples (concrets) tirés de l'extension mais non encore à donner au terme de cette communication une sorte de définition d'un concept. On y reconnaît que la difficulté de s'exprimer par

pour les deux psychologues, tout développement présent est fondé sur le développement passé, selon un processus dialectique²⁵⁷ et structural²⁵⁸. Que le développement scolaire, anticipant un développement psychique en tant que processus alors médiatisé, aide à la structuration de celui-ci, ou que le développement psychique, précédant le développement scolaire en soit la condition initiale, est plus une affaire de principe dans l'œuvre des deux chercheurs qu'une affaire véritablement démontrée (à notre connaissance) ou sans doute, même, pertinente. Si l'on ne limite pas le développement scolaire à un accroissement linéaire du contenu des connaissances, mais qu'il soit reconnu comme un accroissement relevant d'un type de causalité récursive²⁵⁹, jouant donc de façon complexe avec le développement psychique dans son ensemble, la question peut paraître difficile d'accès par manque d'un point d'appui initial et, quoiqu'il en soit, à reposer en d'autres termes. Cela sort éventuellement du cadre de la recherche en didactique. Au moins, il semble incontestable, comme le rapporte Lev Vygotski, que l'enseignement de certaines opérationnalités d'une connaissance, et développées dans le cadre scolaire, est une condition nécessaire à la prise de conscience ultérieure de celles-ci. Toute cette sorte d'enseignement favorise, à terme, le développement des fonctions psychiques supérieures²⁶⁰. Il nous semble également vrai, comme l'exprime toute l'œuvre de Jean Piaget, que la réceptivité à cet enseignement est conditionnée par un développement suffisant de ces mêmes fonctions psychiques supérieures, mais s'appliquant aux objets, de façon qualitativement différente.

Conclusion

En accord avec Lev Vygotski et Jean Piaget, nous devons admettre que le développement des fonctions cognitives supérieures n'est pas subordonné qu'à l'accroissement des connaissances, il a une logique de développement interne. Ainsi, nous adoptons comme proposition vraie que « *l'enfant acquiert certaines habiletés dans une discipline donnée avant d'apprendre à les utiliser consciemment et volontairement* ». Au point de vue de la didac-

définition persiste largement au-delà de l'enfance. Au terme de son développement, extension et compréhension d'un concept en sont deux expressions coordonnées. Lev Vygotski parle respectivement de référence et de signification. Dans son esprit, l'extension peut s'accommoder d'une pensée par complexes et donc s'accroître sur la base d'une compréhension fluctuante, alors que la compréhension nécessite une forme de pensée logique, c'est-à-dire capable d'une définition qui précise la situation du concept au sein d'un système de concepts.

²⁵⁷ Qui se construit selon un principe de causalité récursive.

²⁵⁸ Lev Vygotski l'énonce comme *la loi génétique supérieure*. Opus cité. Page 179.

²⁵⁹ Cette dernière est générative. Selon la causalité récursive, l'effet peut agir en retour sur la cause et devenir nécessaire à la production de l'organisation. La causalité récursive constitue une rupture avec le paradigme classique d'une causalité linéaire. Elle permet de concevoir tout phénomène d'organisation comme une suite de causalités enchevêtrées ou complexes, c'est-à-dire où les produits sont nécessaires à la causation du processus.

²⁶⁰ « *La pensée abstraite de l'enfant se forme lors de toutes les leçons et son développement ne se décompose nullement en processus séparés, correspondant aux différentes matières entre lesquelles se répartit l'apprentissage scolaire* ». Lev Vygotski. Opus cité. Pages 268-269.

tique, la conséquence est que le concept de conscience et plus précisément l'opération de prise de conscience, opération particulière dépendant du niveau de développement de toutes les opérations psychiques supérieures²⁶¹, dont celles de conceptualisation²⁶², doivent être relativisés en milieu scolaire²⁶³.

5.2.4 Des limitations de nature cognitive

Au niveau de l'école primaire²⁶⁴, **nous devons penser les apprentissages spécifiés en termes de développement de compétences**²⁶⁵ plutôt qu'en termes d'acquisition de connaissances²⁶⁶ nouvelles comme, par exemple, des concepts définissables : un tel développement conduit, en fait, à l'école et en mathématique, à l'élaboration de connaissances nouvelles mais suivant le principe restreint d'une genèse relative à une extension de leurs opérationnalités ; ce à partir de quoi elles tendent, sur le long terme²⁶⁷, à se constituer en concepts scientifiques²⁶⁸. Nous en demeurons effectivement à cette restriction. Car une connaissance, au niveau le plus haut, suppose un système suffisamment élaboré pour pouvoir être définie, de telle sorte qu'elle devienne un objet de ce système et dont le statut logique est alors l'une des dimensions accessibles à la conscience d'un sujet apprenant. Les deux psychologues considèrent d'ailleurs que même si l'élève peut agir avec efficacité, en maniant avec justesse certains concepts, aussi bien par l'usage qu'il en fait dans sa langue naturelle que dans un système sémiotique propre à une discipline donnée, il demeure, durant cette période, le plus souvent inconscient du sens de ses actes. Lorsqu'il se reconnaît dans un type de situation, il peut agir spontanément comme si les indicateurs de la situation suffisaient seuls à justifier ses actes ; c'est le cas, en particulier, lorsqu'il s'agit du maniement de certains objets mathématiques. Car, dit Jean Piaget, ce qui caractérise la pensée de l'enfant est cette absence de conscience « *des relations qu'il est capable d'utiliser de manière spontanée et automatique* »²⁶⁹. Et, précise Lev Vygotski, « *l'enfant témoigne d'une aptitude à toute une série d'opérations logiques lorsqu'elles apparaissent dans le cours de sa pensée propre, mais il s'avère incapable*

²⁶¹ Lev Vygotski. Opus cité. Page 269

²⁶² C'est-à-dire relier entre elles des significations. Jean Piaget. Opus cité. *La prise de conscience*. Page 271. *La conscience*. Page 50.

²⁶³ D'où une étude (succincte) sur la prise de conscience qui sera proposée au chapitre 3.

²⁶⁴ Avant l'âge charnière de 10 à 11 ans, fréquemment évoqué par les deux psychologues. Mais, s'agissant de compétences, nous considérerons le développement de celles-ci dès l'âge de 3 ans, dans les petites sections de l'école maternelle.

²⁶⁵ De ceux que l'enseignant peut définir comme des objectifs explicites.

²⁶⁶ Cette proposition dépend, bien sûr, de la façon dont on définit les unes et les autres. Mais nous faisons, des compétences, des composantes opérationnelles de connaissances.

²⁶⁷ Que nous rejetons au-delà de l'école élémentaire.

²⁶⁸ Selon un processus que Jean Piaget définit comme la tendance des schèmes à se constituer progressivement en concepts.

²⁶⁹ *Jugement et raisonnement*. Opus cité

d'effectuer des opérations analogues lorsqu'elles exigent une exécution non pas spontanée mais volontaire et intentionnelle ». ²⁷⁰

6 Épilogue

6.1 Quelques définitions

Pour l'introduction d'une notion mathématique nouvelle à l'école primaire, nous donnons, sous une forme simplifiée ²⁷¹, quelques définitions sur lesquelles, de certaines, nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 4.

- 1) *Objectif curriculaire* = développement d'une compétence : l'une des dimensions opérationnelles d'une connaissance.
- 2) *Compétence* = aptitude d'un sujet à effectuer une suite finie d'actes élémentaires dont l'ensemble se constitue en une référence d'un verbe exprimant une action : le mot qui précise une tâche à effectuer.
- 3) *Structure cognitive* = organisation mentale finalisée par la résolution d'une tâche donnée, structurée et fonctionnelle.
- 4) *Objectif cognitif* = développement structural d'un schème : une formulation langagière est l'élément sémiotique principal, composante externe et explicite associée à ce développement structural.
- 5) *Projet didactique* = suite finie de séances didactiques : séquence de situations didactiques reliées entre elles par une forme linguistique, spécifique d'un type de tâches à enseigner.
- 6) *Situation objective* = ensemble sémiotiquement structuré autour d'une expression verbale : un milieu matériel et cognitif comprenant des objets matériels et symboliques, un (des) sujet(s) inactif(s) et un sujet enseignant construisant ou ayant construit le milieu.
- 7) *Situation de référence* = ensemble d'interactions entre les éléments de la situation objective. Milieu et sujets y sont soumis à des transformations coordonnées selon certaines règles ²⁷².
- 8) *Concepts régulateurs des projets didactiques* =
 - i) Dimensions : culturelle ; curriculaire.

²⁷⁰ Et cette incapacité « *se prolonge jusqu'à onze-douze ans* ». Opus cité. Page 230.

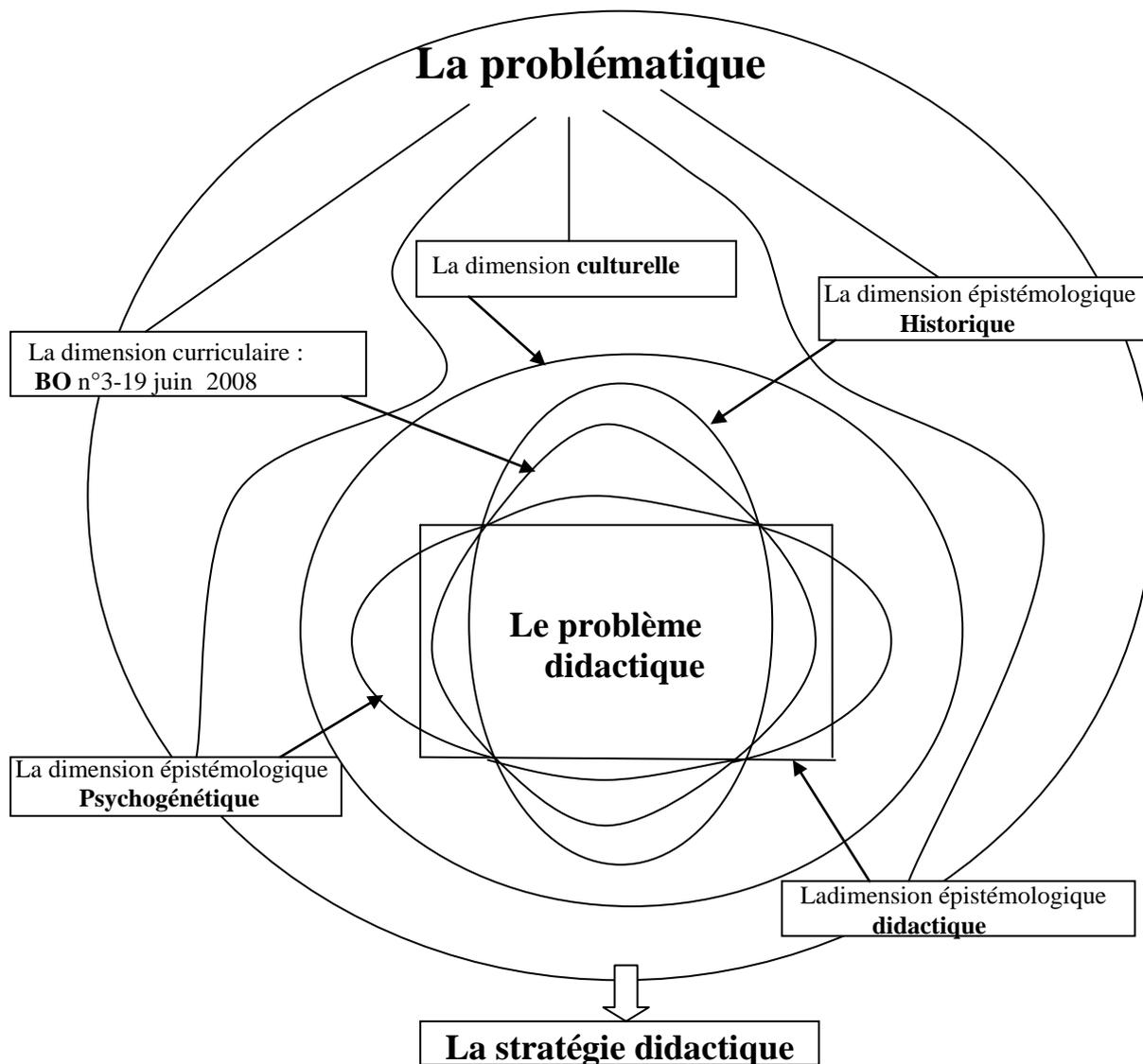
²⁷¹ Certaines d'entre-elles seront l'objet d'un plus large développement, dans le chapitre 4.

²⁷² Les définitions 5) 6) et 7) expriment en fait une interprétation de la structuration des milieux didactiques par Brousseau-Margolinas et que nous reprendrons plus précisément, dans le chapitre 4.

- ii) Dimensions épistémologiques :
 - a. développementales explicites : principes pédagogiques ;
 - b. développementales implicites : histoire et logique du savoir ; histoire et logique des schèmes.
- 9) *Concept organisateur cognitif* = développement déterminé par des mécanismes invariants d'une structure mentale auto régulée.
- 10) *Invariants cognitifs opératoires* = fonctions et opérations invariantes dans les processus relatifs à l'activité cognitive. On peut évoquer, en particulier, les fonctions : de conscience ; de mémoire ; d'assimilation ; d'accommodation ; de régulations entrant dans différentes équilibres. On peut évoquer, en particulier, les opérations : de prise de conscience (relatives à la fonction de conscience); d'exécution de tâches (relatives à la fonction assimilation) ; de compensation, de différenciation, d'intégration (relatives à la fonction accommodation) ; de contrôle divers (relatives à la fonction de régulation)...
- 11) *Concepts organisateurs de l'action didactique* =
 - i) Construction d'une compétence particulière.
 - ii) Prise en compte d'invariants épistémologiques :
 - a. constructivisme piagétien ou principe de l'intériorisation des actions ; constructivisme vygotkien ou principe de généralisation de la signification d'un verbe d'action ;
 - b. éléments constitutifs du savoir associé à la compétence, voire franchissement d'un obstacle épistémologique et déterminé par l'histoire de la connaissance en jeu ;
 - c. éléments psychogénétiques relatifs à un développement d'une structure de schèmes : composantes cognitives, spécifiques de la compétence ; formulations langagières, spécifiques de la compétence, construction d'une réversibilité opératoire.
- 12) *Problème didactique* = dans le cadre de cette thèse nous le réduisons à l'introduction d'une des composantes opérationnelles d'une connaissance en milieu scolaire. Il s'exprime alors dans le schéma suivant :

Un problème didactique

L'introduction d'une notion mathématique nouvelle à l'école primaire



Les traits de liaison signalent, qu'effectivement, des questions se posent concernant les dimensions et le problème. Elles imposent des contraintes spécifiques. Les flèches représentent symboliquement les régulations qui délimitent l'enveloppe d'un registre dans lequel les questions de la problématique vont se poser et construire le problème didactique. Notons pour la dimension culturelle : au sens large, la place des mathématiques et de leur enseignement dans notre société. Si elle englobe les autres dimensions, c'est pour exprimer qu'elle ne

doit être réduite au sens actuel du terme²⁷³ mais doit être élargie aux contextes de la genèse de la connaissance « enjeu » ; en particulier, la dimension curriculaire, qui en est une des expressions ponctuelles²⁷⁴ et les dimensions épistémologique historique et épistémologique cognitive qui en sont des expressions développementales. Mais dans notre thèse, nous n'abordons pas l'étude d'une telle dimension qui joue dans les valeurs des quatre autres dimensions.

Les définitions 5), 6), 7), 8) et 11) participent de l'épistémologie didactique.

Concernant la dimension curriculaire, notre référence se limite effectivement au dernier Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale fixant les « *horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire* »²⁷⁵. Toutefois, l'analyse pourrait ne pas ignorer que les contenus du curriculum sont aussi un héritage de ce qu'ils ont pu être à des époques antérieures, dans l'institution scolaire.

6.2 Les cadres et outils théoriques explicites

6.2.1 Le mot pour la médiation et le schème pour la structuration

Lev Vygotski nous conduit à reconnaître qu'un enjeu réel de l'apprentissage est la généralisation de la signification d'un mot. La clé de ce déroulement peut être trouvée explicitement dans une interprétation locale d'un constructivisme au sens piagétien. Avec le concept de généralisation de la signification du mot, Lev Vygotski nous donne le point d'appui concret de notre levier didactique. Car le mot est indissociable du schème en construction. Ce levier linguistique doit l'aider à s'élever lui-même²⁷⁶, c'est-à-dire à se généraliser. Si nous considérons que les régulations compensatrices²⁷⁷ doivent jouer naturellement leurs rôles, au sein des situations didactiques, nous devons médiatiser les processus en jeu par une suite ordonnée de telles situations et dont le fil d'Ariane est le mot. La focalisation de notre recherche, sur celle des conditions cognitives de l'acquisition d'une connaissance nouvelle, nous autorise à considérer que la loi de généralisation de la signification du mot et le principe d'une régulation cognitive s'appliquent l'une à l'autre : le processus fonctionnel qui conduit la généralisation des significations est celui des régulations compensatrices. Ce processus est activé puis conduit à son terme au sein de situations dont l'axe didactique est orienté par le processus de généralisation du mot²⁷⁸. Et, précisément, nous allons considérer que les micro-

²⁷³ En 2010, année où écrivons. Nous avons déjà noté, en particulier, le décret d'avril 2005 relatif au socle commun des connaissances et compétences dont la 3^{ème} concerne les mathématiques et la culture scientifique en général.

²⁷⁴ En se limitant aux seuls programmes en vigueur.

²⁷⁵ Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008.

²⁷⁶ Dans un sens que nous développerons au chapitre 4.

²⁷⁷ Compensations consistant à annuler les perturbations. Jean Piaget. *L'équilibration des structures cognitives*.

Opus cité.

²⁷⁸ L'intention didactique organisant la coordination des deux processus.

gènes²⁷⁹ des connaissances concernent un sujet épistémique. Les processus fonctionnels, intervenant lors de l'équilibration des structures cognitives en jeu et, tels que nous les décrit Jean Piaget, sont alors décisifs pour expliquer l'internalisation des situations conceptualisantes

6.2.2 Un apprentissage par les compétences. Des situations didactiques au sein de la zone proximale de développement

Des situations, conçues par l'enseignant comme des médiateurs spécifiques d'une connaissance, lors d'un apprentissage, apparaissent comme des structures sémiotiquement orientées et dont le noyau est le mot attaché à un savoir-faire.

Précisons :

Lev Vygotski et Jean Piaget développent deux concepts que, de notre point de vue, nous pouvons confondre. Pour dépasser la notion de développement actuel de l'enfant, c'est-à-dire ce qui, en lui, est parvenu à maturité, le psychologue russe définit une distance entre l'ensemble des problèmes qu'un enfant peut faire sans aide et ceux qu'il peut faire avec une aide de l'adulte²⁸⁰. Jean Piaget définit de son côté la notion de potentiel d'accommodation des schèmes d'assimilation. Il parle d'extension du milieu utile. D'une part, « *le seul fait d'avoir élaboré des instruments de connaissance intelligente, même si celle-ci n'a poursuivi au départ que des fins utilitaires, crée une nouvelle situation fonctionnelle* », puisque le trait caractéristique de l'assimilation est de chercher à fonctionner : « *d'où, des besoins cognitifs nouveaux de comprendre et d'inventer* »²⁸¹. D'autre part, il en définit les limites : « *Le caractère unique de l'intégration, propre aux évolutions cognitives, est de n'être pas seulement actuel (que nous interprétons comme une des caractéristiques du mécanisme d'adaptation : celui-ci acquiert un pouvoir de plus en plus autonome par rapport au milieu) mais d'intégrer l'ensemble des structures antérieures à titre de sous-systèmes de l'intégration actuelle* »²⁸². Cet invariant structural impose, ipso facto, des contraintes qui limitent temporairement les possibilités du

²⁷⁹ Pour exprimer le fait qu'il s'agit de considérer des compétences s'exprimant toujours relativement à un ensemble « type de situations concrètes » et dont l'extension est parfaitement déterminée : compter les éléments d'une collection (et non la connaissance « nombre ») ; calculer des sommes (et non la connaissance « addition ») ; mesurer la longueur entière d'un segment (et non mesurer la longueur fractionnaire d'un segment et non mesurer la longueur d'un segment) etc.

²⁸⁰ Opus cité. Pages 269-270. Aide qu'il faut entendre comme tout ce qui n'est pas une suggestion trop ostentatoire pour la résolution du problème. Cette remarque fait que le concept de Lev Vygotski importé en didactique reste peu maniable en l'état. D'ailleurs, les explications que donne l'auteur ne sont pas convaincantes. Il est en effet évident que la résolution d'une équation différentielle n'est pas dans la zone de proche développement d'un enfant de CM2, non pas seulement parce qu'elle ne l'est pas dans l'ordre de ses fonctions mentales mais avant tout parce qu'elle ne l'est pas dans l'ordre de ses connaissances mathématiques (à propos d'un exemple pris par Lev Vygotski. Page 271). La quantification que cherche à en préciser Lev Vygotski, nous paraît éventuellement pertinente, dans la cadre d'un protocole spécifique en psychologie mais pas, dans le cadre de la didactique.

²⁸¹ *Biologie et connaissances*. Opus cité. *Conclusions*. Page 401.

²⁸² *Ibid.* Pages 408-409.

système cognitif. Ainsi, à tous les niveaux de son développement, l'intelligence du système ouvert que constitue le sujet cognitif, possède un certain potentiel de développement²⁸³, mais potentiel limité. D'ailleurs, Jean Piaget parle de féconde instruction lorsqu'elle « *s'efforce de créer des situations qui, par elles-mêmes, ne sont « pas spontanées », mais qui provoquent une élaboration spontanée de la part de l'enfant, lorsque l'on a réussi à la fois à déclencher son intérêt et à poser les problèmes, sous une forme qui corresponde aux structures déjà construites par l'enfant lui-même* »²⁸⁴. Applicable au développement d'une connaissance particulière, nous définissons cela comme les normes de réaction d'une structure de schèmes. Ainsi, **nous interprétons (toujours en considérons un point de vue local) la zone de proche développement, comme devant être une zone potentielle de développement d'une structure de schèmes et dont la matérialité didactique est un ensemble connexe de situations devant favoriser le déplacement mental de l'élève à l'intérieur de cette zone**²⁸⁵. Concernant le développement de fonctions psychiques supérieures, nous entendrions celui-ci, en accord avec les deux psychologues, comme corrélatif de certaines prises de conscience du sujet apprenant, par des régulations, lors d'interactions avec des problèmes qui lui sont proposés dans le milieu scolaire. Par là, nous considérerions qu'un tel développement ne peut que suivre un niveau de structuration cognitive, déjà atteint comme pré-requis, dans l'ordre du logico-mathématique comme dans l'ordre du cognitif, c'est-à-dire en regard de deux épistémologies l'une historique, relative à la connaissance visée, l'autre psychogénétique, relative à l'organisation synchronique et diachronique du cognitif. Cette considération des deux ordres sera certainement l'un des points fortement attractifs qui orienteront la construction d'une technologie. Il s'agit bien de deux axes épistémologiques que devra suivre une analyse a priori d'un savoir, enjeu d'apprentissage ; deux axes dont les orientations, coordonnées par l'intention de l'enseignant(e), détermineront, comme résultante nécessaire, l'axe didactique. Nous interprétons l'un des aspects de la médiation, dans le cadre scolaire, comme une aide au développement de cette connaissance sous la contrainte de ces deux épistémologies ; ce que nous retrouvons, dans notre définition, avec les concepts organisateurs de l'action didactique.

Nous reprenons, pour l'organisation des situations didactiques, que l'enfant n'assimile pas les objets mathématiques purs présentés ex nihilo. Il assimile des situations dans les-

²⁸³ Si l'on veut parler de distance, on peut la définir comme celle qui sépare les deux structures, celle actuelle et celle à construire dans le cadre d'une médiation scolaire.

²⁸⁴ *Commentaire sur les remarques critiques de Vygotski...* Dans *Pensée et langage* (page 396). Certes, il ne s'agit pas encore, dans l'esprit de Jean Piaget, de considérer que cette élaboration est synonyme de développement. Il faut donc plutôt y entendre une forme d'assimilation potentielle car elle prolonge certaines constructions spontanées : en ces cas, on peut alors entendre au moins une « accélération du développement ».

²⁸⁵ Dans le chapitre 4, on explicitera cette notion de connexité des situations au sein d'une séquence didactique.

quelles cet objet joue comme une réponse à un problème qui se construit. Nous ne confondons donc pas avec ces situations pseudo-empiriques où l'objet est directement donné comme s'y appliquant. Plus précisément, pour les situations didactiques, nous reprenons de Jean Piaget et de Lev Vygotski que l'apprentissage est subordonné à un système de significations transmis par la langue, outil de communication dominant. Mais, il y a lieu de distinguer très précisément entre « parler » et « communiquer ». Nous avons appris, de nombreuses observations, faites dans les classes, que les enfants, issus de tous les milieux, semblent pouvoir exprimer, par la parole, des sentiments, des jugements et des besoins relativement sophistiqués. L'enseignant qui veut enseigner cherche à communiquer par la parole, et au sein de situations, conçues par lui, des objets à expérimenter. Mais tous les enfants n'entendent pas, dans les paroles de l'enseignant, autre chose qu'une indication à résoudre une tâche. **Tous les enfants n'imaginent pas, qu'au-delà de la résolution de la tâche, il y a quelque chose de plus à comprendre et que ce quelque chose est déjà contenu dans les paroles de l'enseignant. Ce que l'enfant doit apprendre, au sein des situations didactiques, en même temps qu'un certain nombre de signifiants qui vont se lier à un début de construction d'une référence, c'est que la parole, qui en fait partie, sert à communiquer, au sens de vouloir indiquer et aussi faire comprendre quelque chose de soi, soi dans une situation, par exemple mathématique, et que l'on doit faire précisément partager à autrui.** C'est pourquoi, nous concevons les séquences didactiques :

- 1) comme initialisées par des situations de mise à niveau de certaines normes telles qu'elles seront partagées par la classe et l'enseignant : en particulier de nature linguistique ;
- 2) comme une suite de situations dans laquelle l'enfant devrait prendre progressivement conscience du caractère intentionnel, dans l'énoncé, de certains mots, prise de conscience qui doit le conduire à doter ces mots d'une certaine intentionnalité ;
- 3) présentant, au moins à leur terme, des situations d'échanges linguistiques entre pairs ou entre l'élève et l'enseignant. Et dans ces échanges, le mot, alors développé, joue effectivement dans les constructions apophantiques.

6.2.3 Le concept d'obstacle épistémologique et Jean Piaget

Notre référence piagétienne, adaptée aux microgenèses cognitives,²⁸⁶ nous interdirait de penser, en termes de ruptures, de tels développements que les situations didactiques vont médiatiser²⁸⁷. Jean Piaget, rappelant les concepts d'obstacles épistémologiques et de ruptures

²⁸⁶ Comme nous les avons définies.

²⁸⁷ Telles que les définissent des positions didactiques qui intègrent l'épistémologie de Gaston Bachelard : celle de Guy Brousseau en didactique des mathématiques ou plus systématiquement celle de Christian Orange et Mi-

épistémologiques, forgés par Gaston Bachelard, précise que sa position est de reconnaître une continuité de certains des mécanismes, jouant dans la phylogénèse des connaissances, et une rupture d'un certain type, dans des changements de cadre épistémique. Mais, plus précisément, il note que le changement de cadre épistémique passe, non par la recherche de nouvelles réponses à des questions classiques, mais par la recherche de nouvelles questions qui permettent de formuler les problèmes de façon différente²⁸⁸. Dès lors que, dans le milieu scolaire, on ne puisse imaginer une remise en question de paradigmes sociaux, l'adaptation didactique de cette forme de rupture va concerner ce que Jean Piaget appelle paradigmes épistémiques²⁸⁹, et dont l'unité résulterait davantage de facteurs endogènes. Si nous en revenons à la didactique, nous pouvons considérer qu'il y a un certain type de rupture, chaque fois que l'on passe d'une forme, relative à une connaissance, à une autre forme relative à cette même connaissance, et que ce passage remet en cause une certaine conception cohérente du champ conceptuel²⁹⁰, en son état antérieur, et dans lequel elle est consciemment²⁹¹ manipulable par un sujet. Encore faut-il alors entendre un tel champ comme dépendant qualitativement de situations didactiques²⁹². Mais nous pouvons considérer que le développement psychogénétique de ce champ, comme l'entrée dans un autre champ, répondent de mé-

chel Fabre en didactique des sciences. Au moins, pourtant, Jean Piaget précise-t-il que dans certains cas il puisse y avoir échec dans les tentatives d'accommodation.

²⁸⁸ *Psychogénèse et histoire des sciences*. Pages 275 - 282. Opus cité. Un tel cadre se matérialise donc à la suite d'une rupture et par l'équilibre autour d'un paradigme comme, par exemple, du XVII^{ème} au début du XX^{ème} siècle, le mécanisme newtonien.

²⁸⁹ Jean Piaget distingue, pour son épistémologie des sciences, la notion de paradigme sociale : « *l'appareil conceptuel et l'ensemble des théories qui constituent la science acceptée à un moment historique donné* » et la notion de paradigme épistémique : « *manière naturelle de considérer la science, à une période donnée, pour tout individu qui s'ouvre à elle, sans imposition externe explicite* ». Opus cité. Pages 276-280.

²⁹⁰ Gérard Vergnaud définit précisément un champ conceptuel, comme un cadre possédant une certaine unité épistémique mais très générale : l'électricité, la mécanique classique, mais aussi de façon plus restreinte, le champ conceptuel de l'addition dans l'ensemble des entiers, le champ conceptuel de la multiplication dans l'ensemble des entiers...

²⁹¹ On ne peut entendre effectivement de changement conceptuel, relatif à une connaissance, si celle-ci en demeure à un exercice totalement inconscient, en ce qui concerne la composante associée à une certaine forme.

²⁹² Considérons un élève de classe préparatoire qui dispose du champ conceptuel du nombre entier. On y trouve en particulier des situations de comptage simples, associées à l'énumération des objets d'une collection donnée et des situations de type additive. La situation de comptage du nombre de carreaux d'un rectangle de 6 sur 7 qui peut lui être donnée pour la première fois relève bien du même champ conceptuel et pourtant, cette situation va être proposée pour introduire la multiplication dans l'ensemble des entiers via l'addition répétée. L'entrée dans le champ conceptuel de la multiplication s'y fait sans rupture car elle ne remet pas en question les procédures de comptage, en usage dans ce champ. En fait, pour l'enfant, il n'y a pas véritablement de changement de champ. Considérons alors la situation, donnée à l'élève, d'un engrenage de deux roues dentées, avec un rapport de 1 sur 6 et qu'on lui demande combien de tours fait la petite roue quand la grande roue fait 7 tours. Pour s'en sortir l'enfant est contraint d'inhiber ses schèmes de comptage et, s'il n'est pas en échec (d'accommodation), il devra exprimer le principe d'un comptage par paquets insécables de 6. L'entrée dans le champ conceptuel de la multiplication est associée à une rupture avec le champ numérique en son état actuel. L'addition répétée est la réponse nécessaire au problème posé.

canismes structurants et invariants²⁹³. « Ils se rapportent à l'assimilation des nouveautés aux structures précédentes et à l'accommodation de celles-ci à ce qu'il vient d'être découvert »²⁹⁴. C'est donc là exprimer une forme de continuité. A la condition : d'une part, de déterminer certains mots spécifiques de la connaissance en jeu et à différencier ; d'autre part, d'évaluer précisément l'alpha et l'oméga du développement cognitif concerné, à savoir ces points homomorphes de l'état initial du mot et de son état final, tels que va les définir le projet didactique ; enfin, que la structure initiale des schèmes contienne dans son potentiel un tel développement²⁹⁵. Ainsi, si l'on peut exprimer comme une discontinuité, le passage d'une structure de schème à la suivante, « il faut tenir compte du fait que les restructurations ne sont pas des sauts dans le vide : elles répondent à une logique interne mise en évidence au niveau psychogénétique »²⁹⁶. Cependant, il nous faudrait compléter cette focalisation, sur le développement structural, par quelques principes renforçant davantage celui de continuité, principes qui nous permettraient, en particulier, de lever le paradoxe d'un concept d'obstacle qui, en l'état actuel de sa compréhension, se présente autant comme facteur de résistance à l'acquisition, que comme facteur nécessaire à cette acquisition, sans que l'on sache vraiment pourquoi.

Le chapitre suivant fait l'exposé des questions de notre problématique et celui de notre méthodologie.

²⁹³ « Des mécanismes régulateurs du fonctionnement cognitifs ». Psychogénèse et histoire des sciences. Opus cité. Page 292

²⁹⁴ Ibid. Page 292.

²⁹⁵ On reviendra sur le concept d'accommodat qui précise le sens à donner à un tel potentiel, mais ce que nous avons déjà évoqué.

²⁹⁶ Psychogénèse et histoire des sciences. Opus cité. Page 295.

Chapitre 2

QUESTIONS POUR UNE PROBLÉMATIQUE MÉTHODOLOGIE

1 La question du sujet épistémique

« Du point de vue de l'épistémologie génétique, la notion de sujet épistémique, très abstraite, caractérise cette part du fonctionnement cognitif-commune à tous les sujets d'un certain niveau de développement-constitutive des notions au moyen desquelles la réalité est organisée, transformée ou expliquée. Il est le centre du fonctionnement cognitif ou plutôt le système cognitif dans sa totalité, abstraitement détaché des composantes non proprement cognitives de ce fonctionnement, telles que la capacité d'attention, la plus ou moins grande part d'activité consacrée à une tâche, etc. Pour le dire d'une autre manière, la notion de sujet épistémique est ce qui permet à Piaget d'éviter le piège du réductionnisme psychologique et de rendre compte de la genèse des notions scientifiques élémentaires et savantes, non pas à partir de facteurs psychologiques extra cognitifs, mais à partir de la connaissance elle-même, telle qu'elle est construite au sein du sujet individuel (ou d'un groupe de sujets)²⁹⁷.

Michel Fabre²⁹⁸ pose la question du sujet épistémique dont le développement intellectuel pourrait être pensé par le chercheur et 'travaillé', en milieu scolaire, du seul point de vue cognitif. Il rapporte le dualisme piagétien qui « renvoie l'aspect cognitif des conduites à leur structuration et l'aspect affectif à leur énergétique ». Il précise, en interprétant la position de Gaston Bachelard, qu'il n'y a pas d'un côté les structures intellectuelles et de l'autre, leur dynamisme affectif. Nous entendons ainsi, par avance, une critique certaine qui pourrait concerner la suite de notre travail : la réduction méthodologique à une structuration purement cognitive de nature universelle ne paraît pas adéquate, concernant l'étude du développement des connaissances d'un élève. Nous pensons pouvoir adopter une position différente mais non contradictoire pour les raisons suivantes :

- Le premier postulat de Jean Piaget, concernant le fonctionnement naturel des

²⁹⁷ Glossaire de J-J Ducret sur le site <http://fondation Jean Piaget>.

²⁹⁸ *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 166.

schèmes d'assimilation : « *Tout schème²⁹⁹ d'assimilation tend à s'alimenter, c'est-à-dire à s'incorporer les éléments extérieurs à lui et compatibles avec sa nature* »³⁰⁰. Ce pourquoi, nous comprenons également « *que toute représentation du monde est en même temps stabilisation du sujet* »³⁰¹ : de par sa nature, le fonctionnement du schème est lié à une forme implicite de motivation (besoin ou pulsion) du sujet qui agit sur son environnement en y trouvant une sorte de plaisir ; celui-ci pourrait résulter de la perception d'un équilibre correspondant plus fondamentalement à « un instinct de conservation » du système cognitif³⁰².

➤ Le second postulat de Jean Piaget, concernant le fonctionnement perturbé des schèmes d'assimilation : « *Tout schème d'assimilation est obligé de s'accommoder aux éléments qu'il assimile, c'est-à-dire de se modifier en fonction de leurs particularités...* »³⁰³. Ce pourquoi, nous comprenons également que « *le sujet tient à ses représentations* », que « *la remise en question est difficile* », et que « *tout dérangement épistémologique est aussi remaniement de soi* »³⁰⁴ : l'initialisation du processus d'accommodation semble effectivement ne pas pouvoir être conçue autrement que comme une perception mal vécue de la perturbation. La perturbation, au niveau cognitif, ne semble pas être indissociable d'une perturbation au niveau affectif.

➤ Ces deux postulats nous font adopter celui-ci : dans le cadre d'une situation d'apprentissage en mathématique, des facteurs relatifs à la motivation et à l'affectif entrent pleinement dans le mécanisme du développement cognitif. Plus précisément, il n'est pas exclu que la motivation et l'affectivité jouent comme des conditions nécessaires et implicites de possibilités du mécanisme d'adaptation. « *Il n'existe donc, aucune conduite, si intellectuelle soit-elle, qui ne comporte, à titre de mobile, des facteurs affectifs ; mais réciproquement, il ne saurait y avoir d'états affectifs sans intervention de perceptions ou de compréhensions qui en constituent la structure cognitive. La conduite est donc une, même si les structures n'expliquent pas son énergétique et, si réciproquement, celle-ci ne rend pas compte de celles-*

²⁹⁹ Nous donnons du concept de schème une définition, suffisante pour lors, mais nous nous en proposons une étude systématique au chapitre 4. Un schème est une structure cognitive, outil dans l'assimilation des situations d'un type donné. Le sujet qui dispose d'une telle structure mentale est capable d'agir de façon systématique dans des situations qui se reconnaissent par le fait que certains de leurs éléments sont perçus comme présentant une forme d'invariance d'une situation à l'autre. L'action est ainsi transposable, généralisable ou différenciable d'une situation à l'autre. L'action conserve elle-même, une certaine forme invariante. Le schème est l'instrument de l'assimilation d'un objet. Il est la forme opératoire de la connaissance. Jean Piaget. *Biologie et connaissance. Position du problème*. Chapitre 1. Gallimard. 1967.

³⁰⁰ *Equilibration des structures cognitives*. Opus cité. Page 13.

³⁰¹ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 167.

³⁰² Nous exprimerons autrement cette sorte d'instinct dans le chapitre 4.

³⁰³ Opus cité. Ibid. Page 13.

³⁰⁴ Michel Fabre. Ibid. Page 167.

là : *les deux aspects affectif et cognitif sont à la fois inséparables et irréductibles* »³⁰⁵.

➤ Mais, en l'occurrence, notre recherche, relative aux situations didactiques, en classe de mathématique, se veut aller dans le sens d'une modération des différences interindividuelles : *« mixte de différences innées, de force et contenus des motivations, de préférences, d'appétences et d'aversion, de goûts et de dégoûts, de traces effectives laissées dans le psychisme des individus par les événements de diverses sortes qu'ils ont vécus... »*³⁰⁶. Si nous voulons proposer une technologie de certaines situations didactiques, nous devons imposer à la forme verbale de la médiation (et en particulier dans sa forme orale) de prévenir un niveau immodéré des désordres psychoaffectifs ; c'est dire, de diminuer, au maximum, la part non directement cognitive du psychisme alerté. Par exemple, nous savons, qu'avec les jeunes enfants, cet objectif demande que, dans une activité précédant des tâches qui leur sont proposées, ils puissent se repaître de certains plaisirs, comportements que justement il s'agit de ne pas voir parasiter le travail d'apprentissage qui doit suivre³⁰⁷. D'autre part, lorsqu'un groupe d'élèves est engagé solidairement dans une activité de résolution de problèmes, il reconnaît qu'il a, au sein du groupe, une certaine responsabilité. Cette reconnaissance, que l'on peut qualifier de compétence sociale, ne saurait être analysée en dissociant le couple cognitif-affectif³⁰⁸. *Le sujet épistémique est ainsi, en un sens, inclus dans le sujet psychologique (ou dans un groupe de sujets en interaction), dont il constitue une partie ; mais d'un autre côté, il le dépasse puisque la psychologie des sujets individuels n'a, en droit, rien à voir dans la construction des connaissances (y compris préscolaires). Dans les faits, il est bien évident que les facteurs psychologiques non cognitifs ou non épistémiques interviennent. Une personne intéressée par un certain champ cognitif aura tendance à être plus active par rapport à celui-ci, et donc à construire davantage de notions associées à ce champ. Mais, si l'on s'intéresse à la construction de ces notions et non pas à la psychologie de l'individu, alors, la seule chose qui importe, c'est l'ensemble des notions préalablement acquises par celui-ci, ainsi que les mécanismes cognitifs généraux qui engendrent une nouvelle notion et qui, dans l'hypothèse de l'épistémologie génétique, sont communs à tous les sujets de connaissance*³⁰⁹.

³⁰⁵ Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La psychologie de l'enfant*. PUF 1973.

³⁰⁶ Jean François Le Ny. Opus cité. Page 69.

³⁰⁷ Certains collègues des classes de maternelles mettent effectivement en place, et systématiquement, des situations dites d'appropriation du matériel : ils laissent jouer les petits avec le matériel qui doit servir ultérieurement à des manipulations spécifiques. Il s'agit donc là d'invariants opératoires de l'action didactique.

³⁰⁸ On peut vérifier que de nombreuses situations didactiques peuvent intégrer, explicitement, un tel fonctionnement où la recherche collective de résolution d'un problème trouve son énergétique dans un enjeu socialement défini.

³⁰⁹ Glossaire de J-J Ducret sur le site <http://fondation.jean-piaget.org>.

Conclusion

De même que la psychologie peut distinguer, dans une certaine mesure, psychologie cognitive et psychologie clinique³¹⁰, nous adoptons, pour l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, le point de vue d'une didactique cognitive centrée sur un mécanisme ontogénétique mais épistémique d'acquisition des connaissances, laissant une didactique « de type clinique » s'intéresser aux problèmes de différenciations et de remédiations. Toutefois, nous ne pensons pas ainsi entendre nous détourner de la considération du sujet individuel et de son histoire propre, dans la mesure où notre recherche concevra l'initialisation d'une séquence d'apprentissage jusqu'en ce point minimal³¹¹ où nous retrouverons, majoritairement, les sujets à niveau égal, relativement aux schèmes convoqués initialement. Et, à partir de là, tenir fermement l'orientation didactique vers l'objectif visé, en s'imposant en particulier, et surtout, des formes langagières susceptibles de maintenir motivation et affectivité à des niveaux bas, ces niveaux étant par contre nécessaires, puisqu'ils seront en fait associés à des formes linguistiques perturbantes et introduites dans le milieu didactique³¹².

2 Interrogations concernant certains concepts en usage dans la didactique des mathématiques

2.1 La question de l'obstacle en général et épistémologique en particulier

Notre introduction a laissé entrevoir l'instabilité de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques avec, comme conséquence majeure, la difficulté, pour un formateur d'enseignants, d'avoir lui-même un rapport stable avec cet objet, et donc de ne pas pouvoir s'en servir comme un des outils crédibles, dans la construction de certaines des compétences de futurs enseignants.

2.1.1 Le concept d'obstacle et le premier corps de questions

Q1 : Peut-on construire, dans le cadre d'une théorie des schèmes, un concept d'obstacle qui soit suffisamment explicatif de certains des comportements d'élèves en situation d'apprentissage des mathématiques, comportements localement inadaptés mais normaux ?³¹³

³¹⁰ Jean François Le Ny. *Comment l'esprit produit du sens*. Page 70

³¹¹ En deçà, certaines évaluations et remédiations sont normalement à envisager.

³¹² Dans une séquence d'enseignement, conçue pour cette thèse, nous noterons, en particulier, l'importance de certaines composantes phoniques présentes dans le discours de l'enseignant.

³¹³ Nous définissons le normal comme ce qui est déterminé par certains facteurs identifiables, cette détermination donnant au normal et, dès lors qu'elle est mesurable, une valeur statistique élevée.

Nous postulons que l'efficacité d'un concept en didactique des mathématiques est au moins de posséder un double caractère de scientificité : la valeur explicative et la valeur prédictive. Notre réponse se focalisera donc sur la recherche d'un concept d'obstacle qui devrait répondre de contraintes que nous définirons de manière explicite pour que ce concept nous apparaisse scientifiquement fondé. En l'occurrence, nous chercherons donc à répondre à la question suivante :

Q2 : Ce concept d'obstacle possède-t-il le caractère de prédictibilité ?

2.1.2 L'obstacle épistémologique et le second corps de questions

2.1.2.1 Le concept de situation-problème

A la suite des travaux initiaux de Régine Douady et de Guy Brousseau, des ingénieries spécifiques peuvent être conçues³¹⁴. Des concepts, comme 'la situation-problème'³¹⁵, dont l'un des éléments constitutif est la gestion d'un obstacle, reconnu comme spécifique d'une certaine connaissance, sont utilisés³¹⁶ et interrogés régulièrement à l'intérieur comme à l'extérieur de la didactique des mathématiques³¹⁷. La situation-problème est précisément invoquée comme une ingénierie possible, lors de l'introduction d'une connaissance mathématique nouvelle (savoir, savoir-faire, méthode, raisonnement...) et associée au concept organisateur du constructivisme (voire socioconstructiviste), l'apprentissage³¹⁸ devant de plus s'y heurter, explicitement, à un obstacle. Dans le chapitre suivant, nous nous interrogeons aussi sur certains constituants cognitifs de ce concept.

Nous faisons comme seconde l'hypothèse : si l'analyse a priori des situations didactiques circonscrit bien la nature de l'obstacle, la médiation peut aider à un développement de la connaissance qui réponde d'un développement cognitif épistémique. D'où la question :

Q3 : Peut-on construire un concept d'obstacle ayant une valeur pragmatique efficace dans la formation d'enseignant ?

Nous allons considérer que cette question concerne des analyses constitutives de la conception de situations didactiques. Car nous devons, bien sûr, entendre cette valeur pragmatique comme relative à la conception des situations didactiques elles-mêmes. Ce qui va con-

³¹⁴ Pour ne parler que des précurseurs. Donc, depuis les années 1980. Avec les concepts des situations didactiques d'action, de formulation et de validation et le concept de changement de cadres. Voir RDM vol 7(2) 1986.

³¹⁵ Ainsi, la situation du puzzle de Guy Brousseau qui fait principe, étant largement reprise pour représenter le concept. On peut retrouver une description détaillée de celle-ci dans un cours de master d'Annie Bessot : « *Une introduction à la théorie de situations didactiques* ». Les cahiers du laboratoire de Leibniz. N°91. 2003.

³¹⁶ A partir des travaux de Guy Brousseau (1981), de Régine Douady (1984) et des propositions de Philippe Meirieu (1987).

³¹⁷ Une analyse systématique, est faite par Michel Fabre dans *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Troisième partie.

³¹⁸ Roland Charnay. Michel Mante. Hatier Concours PE1. PE2. Mathématique. Tome 1. Page 40.

cerner les questions suivantes.

2.1.2.2 La conception de situations didactiques

Notre troisième hypothèse est que si l'obstacle est bien identifié, il est possible de choisir une situation qui le franchisse ; hypothèse que nous devons questionner sous la forme suivante :

Q4 : Peut-on alors concevoir des situations didactiques travaillant explicitement ces obstacles, repérés a priori, en vue d'obtenir des adaptations idoines ?

Question qui va prendre la forme plus forte suivante :

Q'4 : Peut-on systématiser la construction de séquences didactiques, relativement à l'introduction d'une notion mathématique nouvelle, qui prenne alors explicitement, comme l'un de ses concepts organisateurs, le franchissement d'un ou plusieurs obstacles spécifiques ?

Et, il nous faudra répondre à la question suivante :

Q''4 : En particulier, dans quelle position se retrouve la médiation dans le déroulement de la situation ?

L'étude de ces questions sera faite dans le chapitre 4, chapitre des développements conceptuels de notre thèse et, plus précisément, d'une construction d'un cadre consistant³¹⁹ pour la conception de situations didactiques, relatives à l'introduction d'une notion nouvelle, en classe de mathématique de l'école primaire.

On pourra alors considérer que l'ensemble des réponses aux questions précédentes va se constituer en une technologie de séquences didactiques, visant le développement d'une compétence mathématique à l'école primaire. Son achèvement sera une définition d'une séquence formelle d'un tel apprentissage. Il nous faudra alors en concevoir un modèle. Ce qui sera fait au chapitre 5.

3 Sujets et fonctionnements cognitifs : types de fonctionnement

Pour un sujet écolier, nous définissons le cognitif comme l'ensemble des fonctionnements mentaux orientés par des activités finalisées. Dans l'enseignement, celles-ci sont essen-

³¹⁹ A tout moment de la construction, cette question de la consistance devrait se reposer. Nous ne l'envisagerons pourtant pas ; d'autant plus, que les méthodes d'évaluation de la consistance d'une théorie didactique ne sont pas définies, à l'heure actuelle. A notre connaissance, la question n'est pas véritablement posée. Mais nous lui substituons, ce qui n'est certes pas suffisant, un principe de cohérence selon lequel un concept, nouvellement défini, l'est, comme par déduction de ceux qui l'ont précédé dans la construction.

tiellement des résolutions de tâches, exprimées sous la forme d'exercices ou de problèmes et aussi, des réponses à des injonctions scolaires particulières comme apprendre une leçon, répondre à une question... L'activité cognitive peut être définie par l'exercice de certaines compétences : activer ou inhiber certains schèmes, construire des représentations, produire des inférences, construire des schémas d'action, orienter l'attention, contrôler certains pas d'un processus, mémoriser, prendre conscience, communiquer... Une telle réduction nous conduit à désigner un sujet par élève ou par structure cognitive (ou système cognitif), selon que nous voulons connoter de ce sujet, sa position institutionnelle ou son activité cognitive, activité prédéfinie par un certain type de tâches. Nous distinguons trois types de fonctionnement :

3.1 Celui des schèmes

Directement engagés dans la finalisation de l'activité, ils sont les plus directement responsables de la forme que va prendre la résolution d'une tâche et, plus généralement, la réponse à un certain stimulus déclencheur. Cette résolution ou cette réponse sont constitutives d'une activité cognitive que l'on peut définir comme l'ensemble des exercices coordonnés de certains schèmes activés.

3.2 Celui des opérations psychiques supérieures³²⁰

Elles jouent systématiquement pour (avant, pendant et après...) l'activation de schèmes spécifiques, entrant dans la résolution de certaines tâches³²¹ : constructions de représentations d'une situation, constructions d'inférences, activités de conscience, attentions logiques, actions relatives à la mémoire, comme la recherche ou la mise en mémoire (de travail ou à long terme) de connaissances, verbalisation pour communiquer³²²... Nous ne confondons pas ici les opérations et les processus, comme suite de valeurs construites par ces opérations. Nous assimilons le passage d'une valeur à la suivante comme relevant d'un fonctionnement de schèmes spécifiques. Ainsi, comme exemples, nous ne confondons pas la construction complexe d'une représentation et la représentation elle-même, nous ne confondons pas la forme générale d'un raisonnement (par induction, par déduction, heuristique, par planification...) et les étapes de ce raisonnement qui relèvent également de schèmes spécifiques, nous ne confondons pas l'activité de la conscience avec ses différents états qui dépendent, de même, de

³²⁰ Nous parlerons de fonctions pour des outils cognitifs disponibles et définis par certaines opérations spécifiques.

³²¹ Nous prenons définitivement le mot tâche au sens large car, même une réponse à un simple stimulus peut être considérée comme l'exercice d'une compétence particulière.

³²² Nous venons d'évoquer des fonctions de traitement de situations matérielles ou symboliques, de traitement de représentations, de conscience, d'attention, de mémoire, fonction méta discursive de communication... La mise en fonctionnement résulte de la présence perçue de certains éléments internes ou externes à un système cognitif (celui concerné par une certaine tâche). Ces éléments sont indicateurs pour l'activation d'opérations spécifiques de ces fonctions.

l'existence de schèmes spécifiques³²³.... Nous reprenons cette distinction, en cela (d'un autre point de vue), de la position de Lev Vygotski qui rappelle que les fonctions sont elles-mêmes en développement et que cela nécessite tout au moins le déroulement spontané, en de nombreuses occurrences de processus fonctionnels non conscients, comme l'exercice des opérations. Aussi bien la fiabilité de ces opérations que leur généralité sont des constructions progressives dans un temps plus ou moins long. Par exemple, l'étudiant qui raisonne correctement dans un problème de géométrie n'est pas forcément conscient qu'il met en œuvre un fonctionnement répondant de certaines nécessités épistémiques. Une utilisation consciente d'invariants opératoires, dans l'activité, n'implique pas une compétence à formuler explicitement certains concepts organisateurs dans le raisonnement en géométrie. Une telle activité relève, en fait, d'un fonctionnement spontané des schèmes de raisonnement et repose sur des concepts ou théorèmes en acte. En particulier, l'étudiant peut ne pas avoir conscience de la possibilité de raisonnements différents de celui qu'il produit. Ainsi, l'évaluation de la compétence « raisonner dans un problème de géométrie », pourrait se définir à deux niveaux différents, l'ordre fonctionnel transcendant l'ordre opérationnel.

3.3 Celui des régulations³²⁴

Elles jouent sur l'activation des schèmes et de ces fonctionnements, mais aussi rétroactivement sur leurs modalités d'application ; premier type : évaluation de la situation qui oriente vers une certaine représentation de la situation, activation ou inhibition de telles ou telles fonctions et aussi de tels ou tels schèmes. Second type : évaluation de solutions et modification ou renforcement qualitatifs ou quantitatifs des éléments cognitifs précédents en vue de la reconstruction éventuelle d'une autre représentation et de la reprise d'actions entrant dans la résolution. Par définition, les régulations sont donc aussi des opérations cognitives. Un cas particulier important concerne la production de jugements apodictiques. **Il nous faut distinguer l'activité cognitive qui s'oriente vers l'expression d'un jugement qui peut survenir lorsque certaines conditions perçues de la situation la rendent schématiquement inévitable³²⁵, ce qui relève, en quelque sorte, d'une cognition de « l'espèce exécutive », de l'activité cognitive de bas niveau³²⁶ qui joue alors dans la nécessité d'une telle production, ce qui relève en quelque sorte d'une cognition de l'espèce législative. Sur ce point,**

³²³ Toutes ces confusions que l'on peut reconnaître, dans le discours commun, relève d'un procédé métonymique, le plus souvent inconscient. Celui-ci peut faire alors obstacle à la compréhension d'un développement de l'intelligence en termes de fonctions psychiques distinguables des contenus de connaissances elles-mêmes.

³²⁴ On peut considérer, en toute généralité, la fonction de régulation.

³²⁵ Comme l'ont montré Guy Brousseau en mathématique, ou Christian Orange et Michel Fabre en science, un débat peut orienter vers la construction d'un tel schéma.

³²⁶ Nous reprenons une terminologie du langage informatique.

on retrouve un « apodictisme » de deux ordres. Car, dans l'activité de bas niveau, il s'agit de l'exercice d'un régulateur, ou ensemble structuré de régulations. Et la nécessité s'exprime par une régulation de régulations qui ressort de l'activité d'une organisation invariante d'un système autorégulé. Et dans l'activité de plus haut niveau, il s'agit de l'exercice de ces régulations elles-mêmes. Et la nécessité s'exprime par une tendance à l'équilibration d'une certaine structure de schèmes, ce qui ressort de l'activité de régulations spécifiques³²⁷. D'une façon générale, Jean Piaget associe de tels processus à une abstraction réfléchissante. Celle-ci comporte « deux moments indissociables : un réfléchissement de ce qui est emprunté, au sens d'une projection sur un palier supérieur de ce qui est emprunté au palier précédent et une réflexion au sens d'une reconstruction ou réorganisation cognitives (plus ou moins consciente ou non) de ce qui a été transféré. Il faut simplement exprimer que cette abstraction ne se borne pas à utiliser une succession de paliers hiérarchiques dont la formation lui serait étrangère : c'est elle qui les engendre par interaction alternée de réfléchissements et de réflexions, mais précisément en liaison si intime avec l'affinement des régulations, qu'il s'agit d'un seul et même mécanisme d'ensemble »³²⁸.

4 Mise à l'épreuve d'une technologie pour la conception de séquences didactiques, et finalisée par l'apprentissage d'une connaissance mathématique nouvelle à l'école primaire

4.1 L'apprentissage de la catégorisation et du tri à l'école maternelle³²⁹

Notre choix est guidé par l'importance fonctionnelle de la compétence en jeu. En effet, celle-ci va pouvoir jouer dans de nombreuses tâches que l'on peut proposer à des élèves de l'école maternelle et par la suite. « *Les représentations que nous communiquons par le langage portent essentiellement sur des objets, des propriétés et des actions. Les objets sont le support des propriétés... La notion de propriété est donc fondamentale (en particulier) pour décrire ce qu'est la signification d'un mot* »³³⁰. Les propriétés conduisent à construire des catégories d'objets qui se constituent en concepts particuliers³³¹. D'autre part, nous observons que certains pédagogues, lorsqu'ils l'envisagent, ne font pas eux-mêmes une analyse assez pertinente de la catégorisation, d'un point de vue épistémologique (dans les deux dimensions, selon notre différenciation). Aussi, « *nous avons fait l'hypothèse que, si la prévention de*

³²⁷ Mais nous verrons, dans le chapitre 4, que ces deux niveaux jouent dialectiquement.

³²⁸ *Équilibration des structures cognitives*. Chapitre 1. *Position du problème*. Opus cité

³²⁹ Chapitre 5

³³⁰ Jean François Richard. *Les activités mentales*. Chapitre 2. *Les formes de représentations*. Page 25. Armand Colin. 2005

³³¹ Jean François Richard parle de catégorie naturelle. Ibid. Page 35

l'échec scolaire peut et doit prendre des formes variées pour répondre à la multiplicité des causes, elle doit contribuer, en bout de course, à améliorer la qualité du fonctionnement cognitif et son autorégulation. En choisissant cette orientation, nous nous inscrivons dans la logique des instructions officielles française qui enjoignent à l'école maternelle de préparer aux apprentissages fondamentaux en cherchant à développer des compétences transversales dont on espère qu'une fois acquises, elles s'appliqueraient dans les différentes disciplines : concepts fondamentaux (comparaisons, classification, sériation, dénombrement)... »³³². Ainsi, le caractère naturellement transversal de telles compétences devrait nous fournir un point d'appui pour des évaluations ne se limitant pas aux structures des schèmes en jeu dans l'exercice de ces compétences, mais aussi, concernant des régulations spécifiques dont le fonctionnement peut concerner d'autres activités que celles associées à ces seules structures. Il s'agirait bien de définir des évaluations relatives à deux ordres de compétence et sur lesquels nous venons d'insister (sous 3.3).

Nous avons, comme objectif, la conception de séquences didactiques visant un tel apprentissage. La conception de ces séquences sera justifiée par les éléments de notre construction technologique. Nous envisageons aussi de rendre ces séquences actualisables dans les pratiques d'enseignants de l'école maternelle.

4.2 Un groupe de recherche

Remarque préliminaire : une question d'éthique donc de méthodologie.

Nous ne considérerons pas que les élèves sont des sujets d'expérimentations. C'est le contrat initial qui va nous engager vis-à-vis de nos collègues de l'école primaire qui ont accepté de collaborer à notre entreprise : les élèves doivent avoir, par là même, reçu un enseignement qui corresponde, d'une part à des conceptions que peuvent accepter ces collègues, et, d'autre part aux programmes sur lesquels, eux et nous-mêmes, nous aurons trouvé une interprétation commune. Nous nous placerons sous la contrainte de cette exigence qui pèsera donc sur les formes que devraient prendre une part de notre recherche et aussi nos corpus de données.

Ainsi d'une part, nous avons à trouver des enseignants volontaires pour intégrer un groupe que nous leur présenterons comme un groupe de recherche sur un enseignement de compétences logique, à l'école maternelle. D'autre part, la spécificité des connaissances en

³³² Article de Sylvie Cèbe. IUFM d'Aix-Marseille. Centre de recherche en psychologie de la connaissance. Université de Provence. <http://www.amares.org/revue/00/pdf/These1.pdf>

Nous noterons, au chapitre 4, dans une étude consacrée à une situation de Guy Brousseau, le caractère fondamental de la catégorisation dans la construction du nombre.

jeu, et assez méconnues des enseignants de l'école primaire, nécessitera d'apporter aux sujets du groupe certains outils conceptuels.

Si la conception des séquences didactiques sera discutée au sein du groupe, nous n'interviendrons pas dans leur classe en ce qui concerne l'exécution des séances constitutives de ces séquences. Notre accord, avec les enseignants, sera de considérer que les séquences ne devront pas se limiter à n'être qu'expérimentales mais pourraient servir leur propre programmation dans divers apprentissages. Par exemple, pour les enfants de petites sections et de moyenne section, l'apprentissage à la catégorisation pourrait favoriser celui du nombre ou celui de la reconnaissance phonologique... Pour les élèves de moyenne et de grande section, l'apprentissage à la catégorisation et au tri pourrait favoriser la construction du nombre ou de la reconnaissance syllabique et donc de l'écriture... Ainsi, les enseignants pourront-ils trouver là, une double motivation : élaboration, en groupe, de séquences relatives à un sujet qui initialement peut leur paraître « flou », et approche pragmatique pour une programmation effective d'un enseignement dans leurs classes. Ceci restera sous-jacent à notre objectif personnel et répondra à une sorte de nécessité relative à la pérennité du groupe mais, sans que, dans cette thèse, nous considérions de façon méthodique l'émergence de cette motivation, ce qui serait l'objectif d'une autre recherche.

Nous prévoyons une première période de plusieurs mois, partie d'une année scolaire, au cours de laquelle les enseignants du groupe devront se familiariser avec le sujet et se construire certaines compétences, relatives à la construction de séances spécifiques. Durant cette période, il ne nous sera pas possible de maîtriser tous les paramètres chronologiques et linguistiques de la mise en œuvre³³³. Par exemple, nous aurons initialement plusieurs enseignantes de l'école maternelle. Mais toutes ne pourront³³⁴ maintenir une progressivité cohérente entre ce que nous concevons dans des séances de travail et les prévisions de mise en œuvre des séances construites³³⁵. Par exemple encore, certaines enseignantes prendront, dans les échanges discursifs avec leurs élèves, des libertés qui biaiseront les performances de ces élèves, dans certaines classes. Toutefois, la nature des médiations, telles que nous les entendons, nous permettra de construire un corpus suffisant pour évaluer et analyser les performances des élèves, à l'issue de chaque séance, relativement à certaines classes.

³³³ Ce que nous ne pourrions découvrir que progressivement.

³³⁴ Pour des raisons multiples, touchant leurs activités professionnelles, et sur lesquelles nous n'aurons pas de prise.

³³⁵ Pour les autres, les décalages deviendront difficilement gérables au sein du groupe.

Nous programmons donc, pour une seconde période, partie du premier semestre (de septembre à janvier) de l'année scolaire suivante, la reconstitution d'un groupe pour lequel nous allons rechercher une homogénéité, dans le sens d'une élimination a priori des difficultés rencontrées l'année précédente. Ainsi, il deviendra concevable de maintenir une rigueur, à la fois dans la chronogenèse des séances et, de la part des enseignants, le respect systématique des variables des situations didactiques, en particulier variables linguistiques. Et, dans ces conditions, il sera alors possible de rendre négligeable ce qui, la première année, est venu parasiter la dimension protocolaire de ces situations. Nous pourrons ainsi construire un corpus systématique relatif à toutes les classes concernées.

L'activité du groupe possède quelques caractéristiques de ce que Christian Orange définit comme celle d'un groupe de recherche (si nous nous considérons comme occupant nous-mêmes la position de chercheur), et ayant pour objectif la conception de situations forcées³³⁶ :

- elles sont « construites au sein du groupe comportant un chercheur en didactique et des enseignants experts » ;
- ce sont des situations d'enseignement ;
- elles sont organisées en séquences et définies par des objectifs pédagogiques. Les objectifs pédagogiques incluent ceux que l'on se fixe habituellement et /ou institutionnellement pour la classe³³⁷ ;
- les sujets du groupe connaissent ou finissent par connaître³³⁸ certains éléments d'un cadre théorique dont il est tenu compte³³⁹ ;
- les enseignants participent à l'analyse a priori et à la conception des situations de la séquences. En particulier, leur expertise leur permet d'obtenir la régulation de certaines propositions du chercheur, en fonction de la spécificité du groupe d'élèves dont ils ont la responsabilité (formulations langagières, gestion de la classe : élèves considérés individuellement ou en groupe ou en classe entière, matériel et manipulations envisageables) ;

³³⁶ *Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier d'enseignants*. Revue de la Recherche en éducation. Pages 73-85. Hors série n°2 Octobre 2010.

³³⁷ Nous verrons que cela peut rendre nécessaire, de la part des enseignants, une lecture différente du texte des programmes et telle qu'ils l'auraient pu faire antérieurement.

³³⁸ En l'occurrence, certains outils n'ont été explicités qu'en des moments où une telle explicitation a paru nécessaire au groupe.

³³⁹ Nous n'avons pas, pour de multiples raisons, également envisagé de présenter celui-ci autrement que sous une forme vulgarisée mais, quoique suffisante, pour servir à nos besoins d'opérationnalité. D'une part, parce que ce cadre, compte tenu de sa nature, a relevé lui-même d'une construction progressive et, d'autre part, parce que les enseignants n'étaient pas a priori demandeurs d'un apport élargissant trop les besoins relatifs à notre construction de séquences, leur priorité restant avant tout d'enseigner.

➤ après chaque séance, un débriefing est fait. En particulier, il y est analysé un certain corpus. Il est suivi de la préparation de la séance suivante qui tient compte d'un niveau de l'apprentissage considéré comme atteint.

Il n'est pas, dans l'objectif de cette thèse, de rendre compte des détails des interactions au sein des groupes, séance par séance. En particulier, en ce qui concerne les briefings et débriefings. Le premier groupe a eu, dans notre méthodologie, pour vocation de construire des acteurs enseignants suffisamment compétents en ce qui concerne certains concepts relatifs à la catégorisation et pour les médiations dont ils assumeront la charge dans leur classe. De telles médiations devront relever finalement d'une technique, telle que nous l'aurons justifiée technologiquement. C'est ce dernier point que nous avons fixé comme l'un des objectifs de notre thèse dans le chapitre précédent. La double compétence des enseignants va nous permettre de ne pas interférer durant la seconde période (en dehors de certains filmages) dans leur séquence didactique et dont ils vont organiser librement le déroulement, entre septembre et janvier. Notre corpus se construira ainsi dans des conditions véritablement écologiques.

Nous précisons, dans ce qui suit, une description de l'histoire effective de ces deux groupes :

➤ constitution en 2007-2008 du groupe ayant pour objectif la conception de séquences didactiques. Nous collaborerons de façon constante, parmi les enseignantes, avec trois d'entre elles : deux maîtresses formatrices³⁴⁰ des écoles et enseignante en école maternelle dont une enseignante intervenant dans les classes de petites sections (enfants de 2 et 3 ans) et une enseignante intervenant dans une classe de moyenne section et de grande section (enfants de 4 ans et 5 ans). La troisième n'est pas maîtresse formatrice et intervient dans une classe de moyenne et de grande section, dans un établissement classé ZEP³⁴¹ ;

➤ réunions de ce groupe sur 9 séances de septembre 2007 à juin 2008 ;

➤ nous avons décidé de ne pas exposer d'emblée le détail des séances constitutives d'une séquence d'apprentissage à la catégorisation, ni même a priori le contenu des séances ; notre objectif étant que les enseignantes participent activement à la découverte de la nécessité de certains outils linguistiques³⁴², et conçoivent librement d'autres séances, en particulier, celles qui concernent certaines situations intermédiaires dites de consolidation. De plus, nous

³⁴⁰ Enseignantes titulaires d'un certificat d'aptitude à la formation et susceptibles d'intervenir dans les formations d'enseignants et le suivi des enseignants stagiaires. Le groupe comprend en fait, quatre maîtresses, mais seules les trois maîtresses évoquées là, sont véritablement représentatives des acteurs ayant joué dans notre recherche.

³⁴¹ Zone d'éducation prioritaire, justifiant le bénéfice de certains moyens matériels ou humains supplémentaires, alloués aux établissements.

³⁴² Ce qui, comme nous le démontrerons dans le chapitre 4, est l'un des points fondamentaux de cet apprentissage.

avons gardé pour nous les différentes analyses a priori, en particulier en ce qui concerne certains obstacles prévisibles et les possibles que notre étude théorique permettait de concevoir. Nous avons préféré que l'analyse a posteriori, produite alors en groupe, participe sur ces éléments à une prise de conscience réflexive. Nous pouvions alors faire référence au pouvoir explicatif du concept de schème et à quelques développements s'y rapportant ;

➤ séance 1 (septembre) : analyse du curriculum et apports théoriques de psychologie cognitive, relatifs aux notions de représentations et de logique, concernant la catégorisation, le tri et la sériation³⁴³ ;

➤ séance 2 (octobre) : conception d'une situation test. Il s'agissait d'une part de retrouver certains résultats piagétiens relatifs à la compétence de catégorisation chez de jeunes enfants³⁴⁴ et, d'autre part, de justifier, a posteriori, la nécessité de formulations langagières spécifiques lors des séances d'apprentissage à la catégorisation ;

➤ séance 3 (novembre) : analyse des productions dans la situation test et conclusions. Nous avons conçu une première situation relative à l'apprentissage de la catégorisation. Nous avons opté pour une entrée individualisée ; chaque enseignant devant se retrouver « en tête à tête » avec un élève et en notant systématiquement les résultats obtenus aux tâches proposées dans la situation. Le recueil de ces données terminales concernera uniquement la résolution de la tâche et non la totalité de l'activité observée : il s'agissait de rendre compte d'un succès ou d'un échec et donc des possibilités concernant les situations pouvant suivre dans la séquence, en particulier ce qui concerne l'introduction dans le milieu d'une formulation langagière spécifique de la catégorisation³⁴⁵ ;

➤ séance 4 (décembre) : analyse des productions dans la première situation et conclusions. Nous avons analysé des situations proposées dans le manuel de Sylvie Cèbe : « *catégo. Apprendre à catégoriser* »³⁴⁶. Il s'agissait de comparer notre approche et celle de Sylvie Cèbe qui, en la matière, est reconnue par certaines enseignantes comme une référence. En particulier, nous avons comme objectif de focaliser l'attention sur les échanges langagiers proposés dans le manuel. Nous avons alors fixé une formulation langagière systématique dans l'énoncé des tâches. Mais nous avons maintenu encore nettement une différenciation selon le niveau des élèves, quant au matériel manipulé et à la formulation langagière. Toutefois, en ce

³⁴³ Des raisons théoriques et psychologiques permettraient, en effet, de prolonger l'apprentissage de la catégorisation par celui du tri et de la sériation. Mais nous ne rendrons pas compte de cela en ce qui concerne la sériation. Toutefois, le curriculum relatif à l'école maternelle engage à des tâches qui connotent la sériation. C'est pourquoi nous avons tenu, à la demande des maîtresses, à « faire le point » sur ce thème.

³⁴⁴ Nous expliciterons ces études dans le chapitre 5.

³⁴⁵ Et que nous préciserons dans le chapitre 5.

³⁴⁶ Nous expliciterons cette analyse dans le chapitre 5.

qui concerne les petites sections, l'évolution attendue jusqu'à janvier était que les formulations langagières soient les mêmes que pour les moyennes et grandes sections. Enfin, nous avons procédé à la réécriture de situations du type précédent ;

➤ séance 5 (février) : analyse des productions dans les situations précédentes et conclusions. Nous avons conçu deux situations se définissant pour l'une, comme du même type que la précédente et pour l'autre, comme « sa situation réciproque »³⁴⁷, en conservant une entrée individualisée. Nous avons filmé quelques cas, pour favoriser des analyses des activités observées et sans les sélectionner initialement. Il s'agissait directement, pour ce qui nous concerne, de confronter ces analyses avec notre analyse a priori de la situation. Mais nous avons aussi comme objectif de rendre conscientes les enseignantes de certains faits de nature psycholinguistiques, qui s'ils avaient été affirmés a priori et, par nous-mêmes, eussent pu les perturber et au moins leur apparaître, tels quels, comme arbitraires. A posteriori et comme effet positif, nous avons pu obtenir, une fois les faits reconnus, « une meilleur écoute » quant à quelques contraintes relatives à certaines variables des situations à construire ;

➤ séance 6 (mars) : analyse des productions dans la situation précédente ; en particulier, analyse des activités des élèves. Il s'agissait surtout d'explicitier les possibles et les obstacles tels qu'ils se sont manifestés dans l'activité des élèves et des enseignantes. Pour notre part, l'objectif était d'évaluer certains jugements de l'analyse a priori. Nous avons proposé une analyse réflexive de la situation par les deux enseignantes qui ont été filmées. Ces dernières ont consécutivement conçu des situations relatives à la consolidation de situations directes et réciproques. Notre intervention s'est limitée à induire des régulations pour que les propositions des deux enseignantes restent compatibles avec notre conception, quant à la continuité interne d'une séquence possible. Rappelons que nous n'avons jamais précisé l'alpha et l'oméga de la séquence, d'un point de vue de l'analyse cognitive. Nous avons tenu, dans une certaine mesure, à faire apparaître comme nécessaire une chronologie des situations mais progressivement. C'est ce qui s'est produit pour les dernières ;

➤ séance 7 (avril) : analyse des productions dans les situations précédentes. Etude des possibles dans la poursuite de la séquence. Les aspects purement logiques des tâches proposées apparaissant comme bien circonscrits, des questions de nature cognitives ont été abordées, en particulier celles de l'évaluation des apprentissages. Nous avons déterminé deux pistes : utiliser ces derniers de façon transversale et systématique. Par exemple, aussi bien pour la construction des nombres, que pour des reconnaissances orales ou écrites de mots

³⁴⁷ Dans un sens que nous redéfinirons dans le chapitre 4.

(phonologiques) ou que pour des activités en salle d'éveil... Cette première piste l'a été à l'initiative des enseignants et a permis des observations significatives. Pour notre part, nous avons analysé ces propositions comme des activités d'évaluation des acquis d'un premier niveau³⁴⁸ ;

➤ séance 8 (mai) : analyse des productions dans les situations précédentes ; apport systématisé relatif aux analyses cognitives des différentes séances de la séquence d'apprentissage à la catégorisation : le concept de schème permet de comprendre la structuration cognitive d'une telle séquence, sous une forme générale et non restreinte au seul apprentissage qui a concentré notre activité, cette année. Nous avons alors proposé une autre piste en relation avec notre propre recherche : une évaluation, non directement des compétences acquises pour la catégorisation, mais de ce que nous appellerons résultante cognitive et qui concerne un développement cognitif plus général³⁴⁹. Nous avons alors conçu des situations orientées en vue d'une telle évaluation ;

➤ séance 9 (juin) : analyse des productions dans les situations précédentes ; conclusions ; conception d'autres situations du type précédent ;

➤ concernant ce groupe, nous avons filmé la première séance relative aux premières situations mises en œuvre par une enseignante de petite section et une enseignante de moyenne section ;

➤ reconstitution d'un groupe en 2008-2009, composé des deux enseignantes, maîtresses formatrices précédentes et d'un enseignant, maître formateur intervenant dans une classe de grande section. Nous n'avons pas eu besoin de reproduire pour ce dernier collaborateur une entreprise de construction comme cela a pu se faire l'année précédente. Au moins, connaissait-il suffisamment d'éléments de logique pour comprendre la nécessité de certaines formulations langagières. De plus, les enseignantes du premier groupe, décidant d'intégrer définitivement les séquences proposées dans leur organisation du curriculum, exprimeront une demande de reformulation et de consolidation des apports « théoriques initiaux », un tel besoin ne leur étant pas antérieurement apparu de façon aussi insistante. Précisons aussi que, lors de cette deuxième année, tous les participants accepteront de respecter scrupuleusement les protocoles définis pour les différentes séances, la séquence étant désormais formellement et définitivement construite ;

➤ le groupe a travaillé de septembre à mai, chacun des trois enseignants respectant son propre rythme, sachant, toutefois, que les séquences relatives à l'apprentissage de la caté-

³⁴⁸ Comme défini sous 3.3

³⁴⁹ Ce qui sera explicité au chapitre 4. Et qui concerne le second niveau, comme défini sous 3.3

gorisation devaient s'être déroulées entièrement d'ici le mois de janvier. Pour chaque séance, l'enseignant a construit un recueil des productions individuelles que nous avons soumis à certaines analyses ;

➤ nous avons, de plus, filmé la totalité de la séquence dans une classe de grande section (entre 4 et 5 séances, dans celle du maître formateur). Pour les autres classes, les enseignantes ont recueilli toutes les productions des élèves avec lesquels elles ont pu travailler ;

➤ dès février, nous avons conçu des séquences relatives à l'apprentissage du tri. Pour ces dernières, les enseignants ont recueilli les productions individuelles de certains de leurs élèves. Mais les situations de tri se dérouleront à des périodes différentes selon les enseignants, la volonté de certains d'entre eux étant de continuer la consolidation et l'exploitation, dans divers domaines, des compétences acquises dans la catégorisation. Nous n'avons pas, sauf pour quelques cas que nous relaterons dans le chapitre 4, recueilli un corpus spécifique, relativement à ces différentes entreprises, notre objectif personnel de recherche pouvant alors se satisfaire du corpus déjà élaboré.

4.3 Exploitation

L'analyse des données, obtenues à partir des enseignements, et aussi, concernant des évaluations systématiques d'une résultante cognitive,³⁵⁰ nous permettra de tirer des conclusions quant à l'efficacité de notre construction technologique. Ce qui sera fait au chapitre 6

Enfin, l'ensemble de notre thèse nous aura conduit à concevoir, dans ce même chapitre, quelques perspectives de recherche, aussi bien en restant dans le strict cadre de notre construction proprement dite, qu'en en élargissant la portée

³⁵⁰ Termes qui seront précisément définis au chapitre 4.

Chapitre 3

ÉLÉMENTS D'ANALYSE COGNITIVE DU CONCEPT DE SITUATION-PROBLÈME

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons particulièrement au concept de situation-problème. En nous en proposant quelques éléments d'analyse, nous voudrions en préciser les limites opérationnelles, dans un apprentissage à l'école primaire. Nous allons alors inévitablement retrouver un concept fondamental que nous ne voulons pas considérer comme transparent³⁵¹ et sur lequel nous allons focaliser assez longuement notre attention. Il s'agit de la notion, finalement controversée, de la fonction de conscience ou plus précisément de l'opération de prise de conscience.

1 Situation-problème et cognition

1.1 Définition

Ce qui définit la dynamique d'une situation-problème et qui la construit comme une suite de faits liés (des actions, des observables sur les objets et les actions, des activités mentales, des discours...), dans le cadre d'un projet de conceptualisation, c'est que :

- i. l'élève puisse s'y engager et s'y engage avec ses propres connaissances ;
- ii. ces connaissances soient inadaptées à la situation. « *La situation-problème définit toujours quelque chose comme un piège ou encore une situation critique* »³⁵² ;
- iii. ces connaissances, sources d'échecs, soient de celles qui, précisément, ont été reconnues a priori, et par l'enseignant, comme pouvant faire obstacle à la résolution du problème ;
- iv. la situation, synonyme de milieu³⁵³, possède ses propres régulations qui soient perçues par le système cognitif et induisent chez lui des feedbacks spécifiques et dont certains soient négatifs³⁵⁴ ;
- v. si les variables (didactiques) de la situation ont été « bien choisies » (dont son « organisation psychosociologique »³⁵⁵), un processus d'adaptation puisse s'exprimer par une rup-

³⁵¹ An sens où les auteurs qui en est font l'appel, semble le penser comme « allant de soi ».

³⁵² Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 91.

³⁵³ Guy Brousseau : une situation est un milieu. Nous reprendrons ce terme, plus systématiquement, dans le chapitre 4, ainsi qu'une structuration des milieux, définie par Claire Margolinas.

³⁵⁴ Donc, visant à modifier certaines déterminations entre les actions et des états observables du milieu. Il y a là une référence explicite à la théorie de l'équilibration de Jean Piaget.

ture³⁵⁶ avec des conceptions productrices d'échecs et par un nouvel équilibre d'un système de connaissances (dont fait partie la connaissance visée) ; système adaptable à la situation, à un certain niveau, et qui permette à l'élève de réussir finalement la tâche qui lui est proposée dans la situation ;

vi. le problème et sa connaissance-solution puissent s'exprimer dans plusieurs cadres³⁵⁷.

1.2 Une logique du sens. La causalité cyclique

Le projet de conceptualisation réfère à une sorte de logique du sens, notion non vraiment définie mais qui semblerait, au moins, se poser en opposition radicale à une démarche qui privilégierait une simple transmission des connaissances, ordonnée selon une cohérence, elle-même transposée de celle de la mise en texte du savoir mathématique enseignable. Dans ce dernier cas, la logique évoquée est celle du savoir constitué ; le *prima* est accordé au développement des significations qui sont « *ce qui rend la proposition susceptible de vérité ou de fausseté, sa forme de possibilité logique* »³⁵⁸. A un certain niveau (par exemple, le niveau universitaire), cette cohérence est celle des règles de la stricte rationalité d'un texte mathématique³⁵⁹ qui va des définitions aux théorèmes³⁶⁰. Un objet mathématique apparaît à l'étudiant « drapé » dans « *ses trois dimensions : la référence (ou encore la dénotation, l'indication), la signification (sa valeur logique) et la manifestation (ou l'expression)* »³⁶¹. Le sens d'une proposition (pour le sujet apprenant) est la résultante de ces trois dimensions. La subjectivité de l'étudiant est réduite à sa capacité de « suivre » un discours de l'enseignant plus ou moins facilement³⁶². Une autre logique trouverait son expression dans le postulat que l'interactivité entre le sujet apprenant et un certain milieu³⁶³ est le fondement dynamique pour la compréhension et l'apprentissage. Ainsi, au moins, l'apprenant serait-il sensé déconstruire et construire ses connaissances, dans le respect des règles qui sont celles de son adaptation possible

³⁵⁵ Nous y incluons donc les niveaux de dévolution (partiels, totaux...), les paramètres : recherche individuelle ou en groupe ; les modalités d'action ; les modalités de formulation ; les modalités de validation.

³⁵⁶ Ce qui réfère à une pédagogie psychanalytique, d'inspiration bachelardienne.

³⁵⁷ On retrouve dans le tome 1 de Hatier (2003) « *concours de professeur des écoles - mathématique* », une définition analogue du concept de situation-problème. (Roland Charnay. Michel Mante).

³⁵⁸ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 61. Nous ne nous privons pas du terme de proposition, tant il est vrai que la connaissance, en jeu dans la situation-problème, est affirmation de quelque chose, au moins, d'être la solution du problème.

³⁵⁹ C'est la signification fregéenne de la proposition qui autorise son entrée dans une théorie en évolution, l'institutionnalise ipso facto, comme savoir, et l'impose, sous cette forme, comme la connaissance de l'étudiant.

³⁶⁰ Les axiomes sont, comme les théorèmes, des propositions tenues pour vraies, moyennant des définitions.

³⁶¹ Comme les rappelle Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 59. Notons que la manifestation peut alors se réduire à une satisfaction corrélée à une capacité de contrôle du bon développement des dimensions précédentes et, que l'on peut qualifier de 'démarche rigoureuse'.

³⁶² En fait, il peut arriver qu'il ne suive plus, « étant décroché ».

³⁶³ Aussi bien, milieu matériel que milieu symbolique.

(c'est-à-dire potentielle³⁶⁴) aux choses du monde. Dite ainsi, cette logique serait donc vue « du côté du sujet apprenant ». En l'entendant comme une logique du sens, celle-ci relèverait d'un mécanisme transcendantal qui ordonnerait l'activité même de compréhension. **Nous entendrions alors le sens comme l'expression d'une quête, c'est dire, non comme une des expressions de la connaissance achevée mais comme le vécu de la dynamique de compréhension elle-même**³⁶⁵. Michel Fabre formule les conditions d'accès à une telle logique organisatrice de la construction d'une certaine connaissance : la genèse du sens fait entrer le sujet apprenant dans un « *champ transcendantal véritablement génétique* »³⁶⁶, lorsque la question initiale qui fait problème se trouve dépouillée de ce qu'il rappelle comme étant les dimensions non indépendantes de référence(dénotation), de signification(valeur) et de manifestation(affectivité)³⁶⁷. Ainsi, le sens³⁶⁸ apparaît comme une quatrième dimension non «repliée sur l'une quelconque des dimensions précédentes». Le sens serait aussi « à partir de quoi l'objet peut se construire »³⁶⁹. Étant acquis ce point d'accord, il peut y avoir divergence sur les mécanismes régulateurs de cette dynamique du sens. Pour notre part, nous entendrions l'une des régulations en jeu, au sens piagétien, car le sens est alors aussi en dehors de quoi l'objet ne peut pas se construire. **Le sens est donc cette compétence d'un système régulateur qui en délimite l'exercice.** «*Les structures de connaissances deviennent nécessaires mais au terme de leur développement, sans l'être dès le début...* »³⁷⁰ : si un sujet réussit à comprendre un objet, comme sa connaissance nouvelle, c'est que celle-ci est rendue nécessaire au terme d'un développement dont les possibilités sont déjà en germe dans les schèmes et les concepts du sujet³⁷¹. Si une situation-problème anticipe des représentations alimentées par des schèmes, induit l'utilisation de concepts, la production d'inférences et la construction de schémas d'actions, la quête du sens s'exprime dans le travail sur les représentations et fondamentalement sur les représentations initiales. Par là, les schèmes et les concepts, voire les modes d'inférence, se trouvent ipso facto réinterrogés. Mais notre référence au structuralisme piagétien nous ferait sortir du paradigme de la rupture : nous avançons que, pour parler du

³⁶⁴ Ce potentiel est défini par ce que Jean Piaget précise comme des normes de réaction des schèmes.

³⁶⁵ Dans le chapitre 4, nous reviendrons sur ce concept de sens en en radicalisant une approche naturaliste.

³⁶⁶ *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 64.

³⁶⁷ Nous reprenons à notre compte cette analyse en précisant toutefois que Michel Fabre ne s'inscrit pas dans le paradigme d'un développement continu et naturaliste des connaissances.

³⁶⁸ D'un objet mathématique : définition, théorème, algorithme, situation...

³⁶⁹ Michel Fabre dit 'proposition' mais nous reprenons sa phrase en l'étendant aux objets mathématiques susceptibles d'une construction explicite dans une situation didactique.

³⁷⁰ Jean Piaget. *L'épistémologie génétique*. Page 66. PUF. 1990. En particulier, Jean Piaget est opposé à toute forme d'innéisme, en dehors d'un certain substrat organique qui en est le pré-requis biologique.

³⁷¹ Nous reprendrons, dans le chapitre 4, cet aspect fondamental, et pourtant souvent relevé négligemment, dans la théorie de l'équilibration des structures cognitives de Jean Piaget.

sens, transcendant l'interaction d'un système apprenant et d'un certain milieu, la logique qui en régit la dynamique et qui doit produire compréhension³⁷² et apprentissage, doit être entendue dans l'acception forte d'un système consistant de régulations ; c'est-à-dire un système de régulations anticipant un développement intellectuel à partir d'un point donné, système non contradictoire et lui-même en développement. **En rappelant que cette non contradiction est justement un des enjeux dans le développement, et ce par quoi s'exprime la conservation d'un système autorégulateur.** C'est là l'invariant qui formate toute construction du sens. Cette consistance et ce développement sont décrits par ce que Jean Piaget appelle la logique des schèmes puisque les régulations sont les fonctions qui jouent dans la coordination des systèmes de schèmes et dans leur réorganisation. C'est dans cette invariance fonctionnelle qu'il faudrait voir une continuité incontournable dans la psychogenèse des connaissances. Cette invariance peut donc être définie pour le système cognitif comme un concept organisateur³⁷³. On peut toutefois penser que cette logique est elle-même, et relativement à certaines régulations³⁷⁴, un construit ontogénétique³⁷⁵ puisque, sans des objets matériels dont les réactions anticipent certaines rétroactions et des objets mentaux (dont les schèmes) qui permettent l'interaction entre le sujet et ces objets, la notion même de régulation n'a pas de signification. Précisément, comme toute fonction, une régulation prend tout son sens par son exercice. « *La formation des connaissances est donc l'histoire d'une organisation progressive...l'explication s'oriente nécessairement vers la recherche de mécanismes d'équilibration et d'autorégulation* ». La description des phénomènes (formes d'actions, modifications des objets, modifications du cognitif : développement des connaissances ; développement de fonctions intellectuelles) qui résultent de l'interaction, relève de ce que Jean Piaget appelle une causalité cyclique³⁷⁶. Elle définit une logique qui est le propre du fonctionnement des systèmes autorégulateurs : nous comprenons qu'une activité S1 d'une structure cognitive ne détermine un état T1 du régulateur, qu'au terme d'un certain développement. Le régulateur, en un état T0, stimulé par certains indicateurs, est potentiellement à l'origine de réponses possibles. Ce qui constitue une activité S0 d'une structure cognitive. L'interaction, entre un certain milieu qui dispose de ces indices et le système, conduit à une sorte de sélection d'un ou plusieurs de ces possibles, reconnus alors comme nécessaires ; ce qui constitue une activité S1. Mais cette reconnaissance s'accompagne d'une réorganisation structurale du système de

³⁷² Etymologiquement : de « prendre avec ».

³⁷³ Formellement, elle est l'analogie d'un axiome, comme en logique formelle.

³⁷⁴ C'est-à-dire, en se plaçant en aval des régulations, purement biologiques.

³⁷⁵ Précision qui rend crédible l'hypothèse d'un développement inégal puisque dépendant d'une expérience contingente du sujet.

³⁷⁶ *Biologie et connaissance*. Opus cité. Page 155.

telle sorte que S0 puisse se trouver transformée en S1, ce qui signifie une nouvelle structure de schèmes et un nouvel état T1 du régulateur A ce stade, et sans autre interaction avec un nouveau milieu, il n'est pas abusif de dire que S1 détermine T1, ce qui est le cas, lors d'un fonctionnement normal du système cognitif³⁷⁷.

Rappelons que nos conceptions restent toujours relatives à une connaissance donnée, celle visée par une situation didactique. En d'autres termes, le système de régulations dont il est question dans ce processus, concerne bien une structure de schèmes, spécifique d'une des formes opératoires de cette connaissance ; et même si, suivant en cela Jean Piaget, nous donnerons de certaines de ces régulations des définitions assez générales. En particulier, pour un sujet, sa connaissance serait toujours perçue comme étant objective, car conçue selon des processus endogènes, sur lesquels sa subjectivité n'aurait pas de prise. « *Il ne nous semble pas, dit Louis Couturat, que le mot connaître s'emploie jamais en un sens purement subjectif : il paraît au contraire impliquer toujours le rapport du sujet à l'objet, sinon même une certaine subordination du premier au second* »³⁷⁸. Et nous admettons, dans ce qui se dit là, non un simple choix d'ordre sémantique mais l'expression globale d'une réalité objective, puisque nous avons entendu que l'appropriation par un sujet d'une connaissance nouvelle est soumise à un processus naturel invariant.

Mais un postulat fondamental sur lequel repose tout cet édifice conceptuel est la prise de conscience par le sujet qui a agi, en y engageant une certaine connaissance, de l'inadaptation de cette dernière à la situation. C'est, rappelle Michel Fabre, l'une des trois dimensions obligées de la situation-problème³⁷⁹ et qui alors s'interroge : « *Mais cet enseignement par les choses est-il possible toujours et partout ?* »³⁸⁰.

2 La prise de conscience

2.1 La question complexe et centrale de la prise de conscience

Le problème posé : c'est que le parcours cognitif du sujet, entre l'instant des premières représentations³⁸¹ de la situation et la compréhension³⁸² d'une connaissance nouvelle, apparaît

³⁷⁷ Nous ferons, dans le chapitre 4, une reprise plus théorique de ce processus.

³⁷⁸ André Lalande. *Vocabulaire technique et critique de philosophie*. PUF. 1999.

³⁷⁹ Michel Fabre. *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Opus cité. Page 92.

³⁸⁰ Ibid. Page 91.

³⁸¹ « *Les représentations sont des constructions circonstanciées faites dans un contexte particulier et à des fins spécifiques* » ; dans une situation donnée et pour faire face aux exigences de la tâche en cours. Les « *représentations prennent en compte l'ensemble des éléments de la situation et de la tâche* ». Jean François Richard. *Les activités mentales. Introduction*. Opus cité.

³⁸² Au sens étymologique du terme : intégration correcte d'une nouvelle connaissance aux connaissances préexistantes d'un individu. « *Dictionnaire fondamental de la psychologie* ». Larousse. 2002.

hautement complexe. Il faut en effet entendre 'la prise de conscience par le système cognitif', comme décomposable en :

- prise de conscience de l'échec. En général, un décalage par rapport à un certain résultat attendu ; ce qui est inféré à partir d'observables internes à la situation matérielle ;
- prise de conscience de ses actes par leurs attributs pertinents ; ce que Jean Piaget appelle « *les observables constatés par le sujet sur ses propres actions* »³⁸³ ;
- prise de conscience d'un type de relations, déterminantes entre ce qui est acte et conséquence de l'acte³⁸⁴ ; premières coordinations inférentielles entre les observables relatifs aux actes et les observables relatifs aux objets. Comme l'a vérifié Jean Piaget, il peut y avoir réussite par des ajustements progressifs des actes mais sans que la situation devienne causalement claire pour le système. Inversement, le système ne reconnaît pas toujours sa responsabilité dans l'échec et peut chercher à l'attribuer à tout autre élément de la situation ;
- prise de conscience du statut de l'acte à l'intérieur de ses représentations de la situation. C'est certainement l'instant crucial puisque, pour le système, il s'agira de prendre conscience d'une forme de causalité (conscientisée) entre la représentation de la situation et l'activité elle-même ;
- prise de conscience de la nature des modifications à apporter à ses représentations initiales et (ou) aux premières inférences, pour achever les coordinations inférentielles et atteindre un réel niveau de conceptualisation ; niveau de causalité entre les observables sur les actions et ceux sur les objets. La forme de l'action devient, à ce niveau, une nécessité.

« Précisons qu'un observable est ce que l'expérience permet de constater par une simple lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes, tandis qu'une coordination comporte des inférences nécessaires et dépasse ainsi la frontière des observables »³⁸⁵.

2.1.1 Avec Jean Piaget et Lev Vygotski

Jean Piaget a bien montré, dans le cas des actions matérielles³⁸⁶, que « *la mise en relation complète des observables sur l'objet et sur l'action* », et la « *coordination inférentielle, rendant à la fois possible cette mise en relation et la lecture objective des observables* »³⁸⁷, apparaissent progressivement et complètement en un stade ultime entre 9 ans et 13 ans, celui de la conceptualisation d'une notion sous-jacente. Nous entendons alors que, dans le cas d'activités plus directement spéculatives, cette lente progression dans les capacités de prise de

³⁸³ *Équilibration des structures cognitives*. Chapitre II. *Le fonctionnement de l'équilibration et les étapes de la compensation*. Opus cité.

³⁸⁴ Jean Piaget. Ibid.

³⁸⁵ Jean Piaget. Ibid.

³⁸⁶ De celles qui dépendent obligatoirement de la causalité physique.

³⁸⁷ Jean Piaget. Ibid.

conscience est également à admettre en général³⁸⁸. Cela, dit dans le cadre de cet apprentissage qui privilégie les situations « passant » par des manipulations effectives d'objets physiques, nous ramènerait bien aux analyses piagétienne des cas relevant initialement d'actions concrètes. Enfin, rappelons qu'à l'école primaire, en dehors des exercices de renforcement purement techniques, tout énoncé qui contient l'expression d'une tâche à résoudre se fait en référence à des situations concrètes³⁸⁹. Cette référence nous autoriserait à penser que ces situations deviennent elles-mêmes l'équivalent intériorisé des situations purement matérielles³⁹⁰. Ainsi, relativement aux fonctionnements des connaissances, et en acceptant une forme générale du développement des régulations cognitives, il faudrait entendre les activités de celles-ci comme prolongeant, sous une forme intériorisée, celles d'un système de régulations concernant initialement les actions sur le monde physique. L'analyse des programmes de mathématiques de l'école primaire conduit à interpréter les objectifs à atteindre comme étant de l'ordre des savoir-faire. « La mise en apprentissages » de ceux-ci conduit les élèves à se construire des compétences dont la forme la plus générale peut concerner un ensemble de situations d'un type donné³⁹¹. En particulier, il n'y pas fixé, dans les objectifs des programmes, la connaissance des définitions des objets manipulés et encore moins leur construction au sein d'un système. Ce type de connaissances non déclaratives ne place pas les concepts mathématiques dans leur relation logique avec d'autres concepts mathématiques. A l'école primaire, la connaissance de l'élève se rabat sur sa dimension opérationnelle³⁹². En fait, le niveau de développement scolaire, atteint en fin de l'école primaire, et fixé par le programme national, concerne ce que Jean Piaget décrit comme le stade des opérations concrètes : l'élève peut parvenir à structurer adéquatement les données d'un problème mais toujours dans le cadre de situations concrètes ou de représentations sémiotiques de ces situations concrètes. Dans l'activité, les premiers schèmes à invoquer sont clairement des schèmes d'action.

Le passage du non conscient³⁹³ au conscient s'exprime par des reconstructions. « *La*

³⁸⁸ Le « re-travail » sur les représentations ne relève pas, loin de là, de la seule intelligence pratique, sur laquelle se concentre exclusivement Jean Piaget dans son ouvrage sur « *la prise de conscience* ». Sur ce dernier point, il faut considérer, comme un cas particulier, celui de l'expérience de sériation pour laquelle il reste difficile d'établir une chronologie tranchée entre les premières coordinations et la conceptualisation.

³⁸⁹ Les fichiers de manuel scolaire présentent toujours des petites histoires, le plus souvent illustrées, pour « favoriser l'entrée de l'élève dans la tâche ».

³⁹⁰ A un certain niveau de traitement cognitif.

³⁹¹ Le BO n°3 du 19 juin 2008 est, sur ce point, très explicite, en déclinant systématiquement les compétences attendues en fin de cycle. Voir aussi le groupe de compétences, numéroté 3 (concernant, entre autres, les principaux éléments de mathématiques) dans le décret de juillet 2006 et qui institue un socle commun de connaissances et de compétences.

³⁹² Au sens où la définit Gérard Vergnaud, c'est à dire s'exprimant avant tout par un ensemble de capacités mesurables lors d'activités explicites.

³⁹³ Jean Piaget emploie le terme d'inconscient.

prise de conscience d'un schème d'action transforme celui-ci en un concept, cette prise de conscience consistant essentiellement en une conceptualisation »³⁹⁴. Ainsi, nécessairement, 'les prises de conscience' apparaissent alors comme relevant de fonctionnements psychiques supérieurs : fonctions d'objectivation à plusieurs niveaux³⁹⁵. Les prises de conscience se coordonneraient, dans un même projet, avec des opérations déjà efficaces. Le système, en se démarquant de lui-même³⁹⁶, relativise sa position puis, par abstraction et dans une sorte d'abréaction³⁹⁷, modifie les formes anciennes de ses connaissances. Le système aurait compris, il pourrait maintenant apprendre. Mais, rappelle Lev Vygotski, les fonctions psychiques supérieures sont elles-mêmes en développement, au cours de l'apprentissage en milieu scolaire. « *La loi générale du développement est que la prise de conscience n'est propre qu'au stade supérieur du développement d'une fonction* ». Elle apparaît tard. « *Elle doit être nécessairement précédée d'un stade où le fonctionnement d'une forme donnée d'activité de la conscience est non conscient et involontaire* »³⁹⁸. « *L'enfant devient conscient de ses concepts spontanés relativement tard ; la capacité de les définir verbalement, de faire des opérations avec eux, à volonté, apparaît longtemps après l'acquisition du concept. Il possède le concept (c'est-à-dire qu'il connaît l'objet auquel le concept renvoie) mais n'est pas conscient de son propre acte de pensée* »³⁹⁹. Encore faut-il transposer, pour notre analyse, de ces propos de Lev Vygotski, les termes 'concepts spontanés' comme synonymes de 'connaissances procédurales' pouvant s'appliquer à un type d'objet ou de situation donnée et, justement, n'étant pas susceptibles de déclarations exprimant un concept dans une forme s'apparentant à une compréhension. Et de même, pour Jean Piaget, « *le mécanisme de la prise de conscience apparaît, en tous ses aspects, comme un processus de conceptualisation reconstruisant puis dépassant, au plan de la sémiotisation et de la représentation, ce qui était acquis à celui des schèmes d'action* »⁴⁰⁰. Pour Lev Vygotski, comme pour Jean Piaget, la signification des connaissances de l'enfant de l'école primaire n'est pas, dans sa valeur logique, mais dans sa valeur pragmatique. On peut bien parler de signification dès lors que le pragmatisme définit, pour l'élève, et au moins en acte, un cadre régulé par certaines normes, normes qui en définissent les valeurs

³⁹⁴ Jean Piaget. *La prise de conscience*. Opus cité. Page 261.

³⁹⁵ A noter que Jean Piaget émet l'hypothèse d'une forme de prise de conscience initiale, associée aux régulations automatiques et visant la seule réussite de l'action propre du sujet.

³⁹⁶ Jean Piaget parle de décentration sans expliquer la genèse d'une telle capacité.

³⁹⁷ Terme, on le sait non adéquat, relativement aux conceptions de Jean Piaget, mais non avec un certain paradigme didactique actuel associé, entre autres, aux travaux de Guy Brousseau (depuis les années quatre-vingts).

³⁹⁸ En fait Lev Vygotski associe, dans le développement, des facultés de 'prise de conscience' et de 'maîtrise', cette dernière signifiant l'intervention de la volonté. *Pensée et Langage*. Chapitre 6. *Étude du développement des concepts scientifiques durant l'enfance*. Opus cité.

³⁹⁹ Ibid.

⁴⁰⁰ *La Prise de conscience*. Opus cité. Page 271.

⁴⁰¹. La conceptualisation demande une maturation d'une fonction de conscience de plusieurs années. Concernant l'enseignement à l'école primaire, il nous faudrait alors concevoir plusieurs niveaux de conscience, exprimant des niveaux de développement et, au moins, une faculté de contrôle de la conscience, elle-même en développement ; puisque, concernant les concepts, Lev Vygotski pense, en accord avec Jean Piaget, que jusqu'à onze-douze ans, l'enfant est incapable de prendre conscience de sa propre pensée. En particulier, qu'il est incapable d'établir intentionnellement et volontairement une liaison causale. Dans une explicitation de la dévolution d'une situation adidactique, pour un élève de l'école maternelle, Guy Brousseau suppose pourtant, dans l'étape de la « *dévolution d'une responsabilité et d'une causalité* », que « *pour accepter la responsabilité de ce qui lui arrive, l'élève doit considérer ce qu'il fait comme un choix parmi diverses possibilités puis, envisager une relation de causalité entre les décisions qu'il a prises et leur résultat* »⁴⁰². Mais comment imaginer en lui cette pensée qui relierait causalement, en un surprenant raccourci, l'échec de ses actes à des conceptions inadaptées et, d'autant plus, que celles-ci le font agir en toute spontanéité ? **La causalité, invoquée ici, est associée à une forme de nécessité logique de second ordre**⁴⁰³. **Ce serait de cette nécessité dont l'élève doit prendre conscience : renier son acte implique de renier le choix de cet acte. La raison du système conscient devrait lui faire apparaître l'implication elle-même comme objet nécessaire !** Justement, n'est-ce pas l'inverse qui se produit, lorsque le système tente de réparer ce qu'il considère comme des maladresses dans ses actes⁴⁰⁴, plutôt de remettre en question cette spontanéité⁴⁰⁵. Celle-ci est le véritable concept organisateur dans l'activité d'un système, esclave de ses connaissances narcissiques⁴⁰⁶, données en théorèmes, dans cette non conscience⁴⁰⁷ où se meut sa cognition ? Enfin, Lev Vygotski affirme, avec force, que « *pour prendre conscience, il faut posséder ce dont on doit*

⁴⁰¹ Ce système de valeurs, que l'on qualifie là de pragmatiques, est un sujet d'étude d'un intérêt certain, dans la mesure où il peut faire obstacle à d'autres significations, régulées dans un autre cadre ; par exemple, par un système de valeurs logiques, éthiques ou encore esthétiques.

⁴⁰² *Fondement et méthode de la didactique*. RDM Vol 7(2).1986.

⁴⁰³ Comme nous le verrons dans le chapitre 4.

⁴⁰⁴ Cette sorte de « refus de voir » relève de ce que Jean Piaget appelle une prise de conscience déformée. *La prise de conscience*. Opus cité. Page 29.

⁴⁰⁵ On pourrait qualifier ceci de déterminisme de bonne foi.

⁴⁰⁶ Voir par exemple : un élève de CP, confronté à l'énumération des carrés d'un quadrillage de 15 sur 3 et qui échoue en appliquant la procédure du comptage systématique, un, deux, trois, ... ne remet pas en question sa procédure (dangereuse) mais la fiabilité de son comptage. Ainsi, il reprendra l'application de celle-ci sans autre forme de critique. A plus forte raison, il « n'inventera » pas la procédure de l'application répétée d'un même opérateur (+15+15+15). C'est pourtant un espoir qui semble être partagé, par une majorité d'auteurs de manuels, lorsque la découverte de la procédure n'y relève pas finalement de l'ostension.

⁴⁰⁷ A l'instar de Jean François le Ny, nous préférons le terme de non conscient à celui d'inconscient qui connote trop le concept freudien de refoulement ; ce qui ne correspondrait pas en général au statut de ces conceptions qui jouent dans les schèmes d'action du sujet et, en attente de parvenir à sa conscience.

prendre conscience »⁴⁰⁸.

L'explication, déclare Jean Piaget, « *commence lorsque l'on comprend qu'un sujet centré sur ses propres actions, n'a aucune raison de prendre conscience d'autre chose que de leurs résultats, tandis qu'une situation de décentration, dans laquelle une action est comparée à d'autres possibles et, surtout, à celles d'autres sujets, conduit à une prise de conscience du « comment » et à l'opération* »⁴⁰⁹. Jean Piaget définit alors l'activité de la conscience comme un traitement contrôlé des significations⁴¹⁰ ; car « *tout état de conscience ou tout terme ou élément conscient présentent en effet une signification, affective (valeur en tant que désirabilité, en tant que correspondant ou non au besoin momentané, etc.) ou cognitive (sensation ou cognition concept, etc., en tant que se rapportant à « quelque chose »), et probablement toujours, les deux à la fois* ». « *D'autre part, la notion de signification ne comporte de sens plein que relativement à une conscience* »⁴¹¹. Enfin, c'est parce que « *l'activité de la conscience consiste à conférer et à relier des significations* », qu'une activité cognitive cohérente du système, confronté au piège de la situation-problème, peut être postulée. Jean Piaget en arrive à cette définition circulaire de la compréhension : « *conscience = signification = compréhension consciente* »⁴¹² ; circulaire, car si conscience = signification, le travail sur les significations demande une phase préalable de compréhension consciente ; En fait, un regard sur l'acte même de compréhension⁴¹³-celui qui fait que l'on comprend ce que l'on croit comprendre-c'est dire, une activité de la conscience d'un niveau élevé et ne se suffisant pas de sortes d'automatismes initiaux ! On retrouve d'ailleurs cette circularité lorsque Jean Piaget fait référence aux lois d'Edouard Claparède dont, la première dite « *loi de prise de conscience* » : « *plus nous nous servons d'une relation, moins nous en prenons conscience. Ou encore : nous ne prenons conscience que dans la mesure de notre désadaptation* »⁴¹⁴. Mais ce n'est là qu'une loi fonctionnelle. Elle précise bien que le fonctionnement de l'organisation des conduites reste non conscient aussi longtemps qu'il est efficace, « qu'il assure sa fonction ». Elle introduit l'insuffisance ou l'échec du fonctionnement comme condition nécessaire initiale d'un certain processus d'adaptation. Mais alors, comment s'opère effectivement la prise de

⁴⁰⁸ Opus cité. Page 236.

⁴⁰⁹ Jean Piaget. *Pensée et langage. Commentaire sur les remarques critiques de Vygotski*. Page 396.

⁴¹⁰ Un tel traitement n'étant pas entendu ici, comme la mise en relation d'une certaine forme perçue à renvoyer à un signifié, comme on peut l'entendre en linguistique « *mais uniquement en tant que l'implication en jeu qui relie deux significations et les enrichit par le fait même* ». La linguistique pourrait parler, là, de valeurs. Précisions données par Jean Piaget dans « *réussir et comprendre*. Note page 240.

⁴¹¹ « *L'homme à la découverte de lui-même* ». *La conscience*. Version électronique réalisée par la fondation Jean Piaget. Page 50. 1967

⁴¹² Et « *il n'y a pas d'autre compréhension que consciente* ». Ibid. Page 51.

⁴¹³ On retrouve ici des accents qui pourraient renvoyer à l'épistémologie bachelardienne.

⁴¹⁴ *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Opus cité. Page 171.

conscience se demande Jean Piaget ? Il introduit une seconde loi d'Edouard Claparède, dite « loi du décalage » : « Prendre conscience d'une opération, c'est en effet la faire passer du plan de l'action à celui du langage ». Mais alors, quelles sont les conditions génétiques de ce changement de plan ? Et le plan linguistique (très précisément une certaine dimension spécifique de ce plan) n'est-il pas lui-même un pré requis pour prendre conscience de l'opération ? Enfin, la construction d'une représentation qui conviendrait pour devenir verbalisable ne s'appuie-t-elle pas sur une des formes achevées de la prise de conscience de cette opération, objet du discours ? Il semble que cette seconde loi ait aussi une valeur seulement descriptive. Ainsi, Lev Vygotski ne reconnaît pas la valeur explicative de cette loi. Même si Jean Piaget parle d'une sorte de conscience en acte, une conscience élémentaire dont peut déjà s'accompagner l'activité sensori-motrice qui, permettant la rectification des erreurs, peut être source de réussite, au sens strict du terme. On peut donc réussir « sans comprendre ». Pour Jean Piaget, le contenu de la conscience s'accompagne et, même, se confond avec le verbalisable⁴¹⁵ : ce qui se comprend est verbalisable.

Interaction avec l'objet et action intériorisée puis verbalisée, interaction avec autrui et verbalisme intériorisé, dans les deux cas, fonctions discursives et fonction de conscience sont reconnues comme indissociables. Sa puissance sémiotique intérieure, reconnue là, sa puissance productrice reconnue ici, dans les deux cas, la verbalisation est l'expression de l'activité de conscience. Nous comprenons que Lev Vygotski voit, dans le langage social, le moteur génétique, nécessaire et suffisant de la conscientisation donc de la conceptualisation. Rappelons que Jean Piaget ne lui concède, dans le processus génétique de conceptualisation, qu'une fonction d'adjuvant nécessaire et non suffisant qui facilite l'expression socialisée de la pensée elle-même et, ainsi, l'activité de la conscience. Mais, chez Lev Vygotski comme chez Jean Piaget « *le modus operandi n'en a jamais été vraiment explicité* » déclare Jérôme S. Bruner⁴¹⁶. En fait, et c'est ce qui confirme bien la difficulté de l'explication de la prise de conscience, l'un comme l'autre font appel à un postulat comme principe génétique naturel. Pour Jean Piaget, il permet de dépasser les analyses d'Edouard Claparède sur les relations entre la désadaptation et la prise de conscience, puisqu'applicable même quand il n'y a pas échec dans l'atteinte du but initial de l'action : c'est le processus assimilateur qui est l'instrument de la compréhension⁴¹⁷. Pour Lev Vygotski, le mot (qui est le signifiant verbal du concept adulte, par exemple à enseigner) a le pouvoir de provoquer la double germination du concept sponta-

⁴¹⁵ Réussir et comprendre. Conclusions générales. Opus cité.

⁴¹⁶ Piaget et Vygotski, célébrons la différence Dans *L'esprit Piagétien*. Page 244. Opus cité.

⁴¹⁷ La prise de conscience. Conclusions générales. Opus cité.

né et du concept adulte l'un vers l'autre. Le mot, pour le second, est ce que l'action est pour le premier. Et Lev Vygotski analyse différemment de Jean Piaget l'importance du problème à résoudre : « *Dans le processus de compréhension réciproque, un complexe déterminé de sons acquiert une signification déterminée. Par conséquent, il se transforme en mot ou en concept* ». Pour le premier, les observables auxquels va s'appliquer le processus de compréhension sont les objets et les actions. Pour le second, les observables sont les mots et les constructions verbales. On peut enfin noter que Jean Piaget ne dissocie donc pas manifestation et signification et, plus précisément, fait apparaître l'inadaptation perçue (perturbante), comme un des moteurs indissociables de la prise de conscience. Mais, Lev Vygotski ne retient pas ce principe naturaliste qui ferait apparaître l'inadaptation et le besoin comme suffisant à la prise de conscience⁴¹⁸. « *L'absence de besoin entraîne l'absence de prise de conscience* » certes, mais on « *n'explique pas comment l'apparition du besoin a le pouvoir magique de déclencher la prise de conscience* »⁴¹⁹. On retrouve bien, dans cette polémique, des focalisations sur des prises de conscience de natures différentes⁴²⁰. Celles-ci, pour s'exercer, requièrent, au moins, une structure cognitive spécifique des concepts⁴²¹ non conscients dont l'enfant dispose pour agir. On ne peut, de plus, ignorer la réalité des décalages « verticaux » qui fait que la fonction (de conscience) est l'objet d'un niveau de développement bien postérieur à celui des concepts qu'elle est amenée à manipuler. Cette réalité renforce la thèse que la capacité de 'prise de conscience' et les formes de son activité restent vraisemblablement dépendantes du contexte.

En fait, il nous apparaît que Jean Piaget et, dans une moindre mesure, Lev Vygotski ne distinguent pas, suffisamment, prise de conscience et fonction de conscience. Il nous semble qu'il y aurait lieu de faire cette distinction : car la prise de conscience est l'expression finale d'un processus de régulation ou rétroaction anticipée par une perturbation spécifique⁴²², alors que l'activité de conscience est, en toute généralité, un fonctionnement opérant différemment selon les contenus et, dont l'efficacité dépend d'un certain niveau de développement. Nous avons noté ainsi que cette activité peut s'entendre à différents niveaux et, pour des opérations distinguables. L'activité peut ainsi achopper sur une opération pour laquelle le système cognitif devient incompetent.

⁴¹⁸ *Pensée et langage*. Page 233. Opus cité

⁴¹⁹ Ibid. Page 235.

⁴²⁰ Comme nous avons commencé par le dire.

⁴²¹ Des sortes de concepts en acte dont parle Gérard Vergnaud, dans sa théorie des champs conceptuels, et déjà organisés logiquement.

⁴²² Un retour aussi bien de feedbacks positifs que négatifs. C'est ce qu'écrit explicitement et en substance, Jean Piaget lui-même.

Notons donc que parmi les activités de la conscience qui devraient complexifier de façon considérable la conception des situations-problèmes, il faut bien voir celles qui consistent à relier les significations, activités qui accompagnent tout travail sur les représentations ; plus particulièrement, celles produisant entre les significations des relations d'implication, désignées par Jean Piaget comme « *implications signifiantes* »⁴²³. Car « *le propre des états de conscience est d'en impliquer toujours d'autres puisque une signification est toujours solidaire de bien d'autres en un système d'ensemble* »⁴²⁴. Cette progression dans l'activité de conscience, initialisée par les difficultés de l'action (éventuellement non réussie), Jean Piaget la fait donc « *résulter du processus assimilateur lui-même. S'assigner un but face à l'objet, c'est déjà assimiler celui-ci à un schème pratique et, dans la mesure où le but et le résultat de l'acte donnent prise à la conscience, tout en demeurant généralisable en actions, le schème devient concept et l'assimilation devient représentative, c'est-à-dire susceptible d'évocation en extension. Dès lors, sitôt que les situations distinctes sont comparées entre elles, les problèmes surgissent inévitablement... Il n'est alors aucune raison pour que le mécanisme de prise de conscience de l'objet ne se prolonge pas en prise de conscience de l'action* »⁴²⁵. Seulement, l'épistémologue décrit là un processus génétique de la conscience en développement sur plusieurs années. Peut-on penser la réalité d'un tel processus dans une séquence, et sur quelques semaines ? Jean Piaget admet explicitement des degrés de conscience.

2.1.2 Avec d'autres psychologues

Jean François le Ny dénonce l'ambiguïté du concept de conscience. En fait, précise-t-il, on ne peut parler que de qualification de certaines représentations : « *'conscient' ou 'non conscient' sont alors des désignations simples pour une propriété qui s'applique à des représentations ou, mieux, à des états momentanés d'une représentation* ». « *Avec cette signification, le mot « conscience » utilisé comme un nom, ne désigne rien d'autre que cette propriété et non, on ne sait, quelle mystérieuse entité ou instance du psychisme* »⁴²⁶.

Jeannerod note « *que la prise de conscience n'est pas un phénomène spontané mais qu'elle est soumise à des contraintes temporelles. (...) L'absence de conscience de certains processus représente un gain de temps et l'aspect inconscient de certaines opérations pourrait être déterminé par la nécessité d'une exécution rapide. En second lieu, le cerveau peut fonctionner de manière inconsciente pour des tâches complexes : résolution de problèmes, activité de pensée, voire créativité (...). Aussi, peut-on avancer que la conscience ne peut être*

⁴²³ *La conscience*. Page 52. Opus cité.

⁴²⁴ Ibid. Comme activité consciente, il faut envisager là, une forme de raisonnement volontaire et régulé.

⁴²⁵ *La prise de conscience*. Pages 264-265. Opus cité.

⁴²⁶ Jean -François le Ny. « *Comment l'esprit produit du sens* ». Page 60. Opus cité.

considérée comme une étape nécessaire de certaines opérations »⁴²⁷ de conceptualisation. Il est vrai que le type d'activité évoquée là semble l'être dans le cas d'une réussite relativement à une attente explicite d'un système cognitif. Ainsi, dans le cas où la recherche consciente d'une résolution de problème se heurte à l'échec, il n'est pas rare, comme le rapporte de nombreux chercheurs, que cette résolution apparaisse spontanément (ou plus précisément relativement à un point d'achoppement de cette résolution)⁴²⁸, et dans des circonstances les plus inattendues.

Pour Jérôme S. Bruner, les représentations sont constitutives des aspects sémiotiques des situations dont il s'agit d'interpréter les relations pertinentes. « *L'activité de l'élève implique une relation entre moyens et buts représentés par des systèmes de signes* ». « *Les systèmes de signes disponibles pour l'enfant, et en particulier le langage, sont essentiels pour la prise de conscience* »⁴²⁹.

2.1.3 Des difficultés opérationnelles

Jérôme S. Bruner exprimait l'absence de *modus operandi* de la prise de conscience dans les travaux de Jean Piaget et de Lev Vygotski. La décentration est la réponse que donne Jean Piaget : celle-ci est une régulation compensatrice dont l'expression cognitive est la prise de conscience de l'action propre et de ses résultats. « *Le sujet passe de l'égoцентризм (centration sur l'activité propre) à la décentration (alternance de centrations sur l'activité propre et sur les effets produits dans le milieu) et de la décentration à l'objectivation de ses relations avec les objets et le milieu sur lequel il agit* ». « *Le sujet passe de l'égoцентризм de la pensée (centration sur les intérêts et le point de vue propre ainsi que sur la perception subjective des choses) à une décentration croissante (capacité d'envisager alternativement plusieurs aspects d'un problème ou plusieurs points de vue différents)* »⁴³⁰. Mais, outre qu'il faut reconnaître là que ces propos ne relèvent que du descriptif et donc tombent effectivement sous la critique brunerienne, il faut au moins entendre cette capacité de décentration comme elle-même sujette

⁴²⁷ *L'homme cognitif*. Sous la direction d'Annick Weil-Barraï. *Conscience et inconscient*. PUF. 1994.

⁴²⁸ En cet instant fugace où l'on sait bien que l'on a compris, aussi clairement que lorsque des paupières en s'entrouvrant laisse enfin voir un objet pénétrer dans la conscience. Tout chercheur a pu faire cette expérience lumineuse et fragile lors d'un de ses réveils matinaux et féconds. Et l'on voit bien alors que la découverte passe aussi par un travail non conscient de l'appareil cognitif. Un exemple célèbre est celui de René Descartes qui eut, dit-il, le 10 novembre 1619, trois rêves qu'il nous décrit. Le lendemain, écrit-il, « *j'ai commencé à comprendre les fondements de l'invention admirable* ». On peut comprendre, à la lecture de sa biographie par Adrien Baillet, et confirmée par celle de Michelle Beyssade, que René Descartes prend alors conscience des préceptes logiques qu'il décide dorénavant d'observer et qui se trouveront explicités dans le discours de la méthode. Raymond Poincaré, comme le rapporte Eric Temple Bell, croit, dans la création mathématique, à des illuminations soudaines, signe manifeste d'un long travail antérieur 'subconscient'. Il était d'ailleurs connu pour des « eurékas » qui ont pu paraître incongrus à d'autres, dans certaines situations.

⁴²⁹ *Savoir faire, savoir dire. Le développement de l'enfant*. Page 284. PUF. 1998.

⁴³⁰ *Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget*. Marie Françoise Legendre Bergeron.

à développement, toute régulation cognitive n'étant pas innée, car participant et relevant de façon cyclique du développement intellectuel dans son ensemble.

Il est remarquable que l'expression « prendre conscience » revient génériquement, sous la plume de nombreux auteurs de manuels, dans l'écriture des objectifs d'apprentissage (pour ne pas dire tous) : il s'agit presque toujours de prendre conscience de quelque chose. Si l'on se demande a priori : « pourquoi telle ingénierie didactique aura de l'efficacité, en quoi répond-elle à la construction du sens? », la réponse contient invariablement : « l'élève va prendre conscience de ». **La prise de conscience paraît se substituer à l'objet d'apprentissage lui-même. En fait, sa référence incontournée peut occulter la complexité du processus intellectuel accompagnant généralement la construction d'une connaissance nouvelle. Et l'usage du concept de prise de conscience peut dispenser le concepteur des séquences pédagogiques d'approfondir les aspects structuraux du milieu didactique et, à plus forte raison, ceux concernant les structurations cognitives en jeu. Il s'y substitue le principe d'une sorte de naturalité de la prise de conscience avec le risque que l'analyse négligent les conditions spécifiques de ses possibilités**⁴³¹. Un exemple patent de ce postulat de naturalité de la prise de conscience se retrouve dans le cas de ce que Guy Brousseau désigne par contrat empirique⁴³² : le contact de l'élève avec plusieurs exemples présentant une apparence commune s'accompagne toujours d'une théorisation immédiate de cette apparence. Sans parler de la pauvreté de ce procédé, quant à la construction d'une situation qui devrait rester une référence relativement à une nouvelle connaissance, il suppose une disponibilité universelle de la fonction d'induction. Les auteurs d'une telle pédagogie supposent donc implicitement que l'élève prend conscience de cette ressemblance : ce qui se donne à voir est forcément vu et réfléchi au plan de la pensée. Ainsi, rien ne s'oppose, dans la foule, à ce que la dite apparence soit conceptualisée et formalisée, c'est-à-dire de plus, abstraite de tout contexte. Encore une fois, rappelons que cette capacité à percevoir les ressemblances n'est pas la chose du monde la mieux partagée, et ceci jusqu'à l'âge adulte. Guy Brousseau reconnaissait la complexité du processus génétique de l'apprentissage dans une telle situation. Et nous pensons qu'en conséquence, la forme réelle que prend le savoir appris pourrait relever de l'aléatoire et donc d'une forme inégalitaire de transmission du savoir. Au moins, une surmédiation de l'enseignant devient-elle alors inévitable pour sauver apparemment la relation didactique avec le plus grand nombre.

⁴³¹ Car, comme on l'a vu, cette recherche devrait toujours être spécifique d'une connaissance visée par l'apprentissage, ce qui devrait la rendre d'autant plus incontournable.

⁴³² Qu'adoptent en majorité les manuels scolaires proposés aux enseignants des écoles.

Le modèle des milieux emboîtés⁴³³, développé par Guy Brousseau puis perfectionné par Claire Margolinas⁴³⁴ peut rendre justice à cette nécessité de concevoir l'élève comme capable de s'observer lui-même, comme sujet ayant agi, donc comme sujet qui pourrait agir autrement. Et ceci est bien en accord avec le postulat piagétien d'une capacité de décentration qui serait très tôt disponible chez l'enfant⁴³⁵. Mais, comme l'a montré le psychologue, il peut y avoir des décalages « horizontaux », « *qui suggèrent l'existence d'une hiérarchie de difficulté objective, c'est-à-dire inhérente à divers contenus de connaissance et non pas subjective, c'est-à-dire liée à des caractéristiques individuelles, telles que la familiarité plus ou moins grande du sujet avec la tâche* »⁴³⁶. Ainsi, comment la situation-problème pourrait-elle garder sa cohérence face aux inévitables ruptures de contrat⁴³⁷ qui en émietteraient la vertu fondamentale, celle de provoquer l'accommodation des schèmes anciens d'assimilation, selon un processus que l'on voudrait dévolu à la situation elle-même ? Guy Brousseau relève bien la difficulté qu'il y a de ne pas connaître « *les conditions à la fois nécessaires, minimales pour donner le maximum de sens à l'activité de l'élève, et néanmoins suffisante pour lui permettre de satisfaire son contrat. On ne connaît pas d'épistémologie génétique effective qui permettrait l'économie de ces négociations* »⁴³⁸, de sorte que l'élève et le maître sont souvent réduits (inconsciemment bien sûr) à des expédients »⁴³⁹. **La possibilité d'une telle adaptation par la « prise de conscience de ses actes »⁴⁴⁰ par l'élève, c'est ce qui justifie la dévolution, c'est ce qui justifie la situation adidactique⁴⁴¹. Mais la logique des schèmes devrait imposer, en fait, une négociation explicite.**

⁴³³ Nous le reprenons dans le chapitre 4. Milieux et situations sont donnés comme synonymes. Dans des situations d'action, un élève métacognitif est alors observateur de la situation dans laquelle se sont déroulées ses actions antérieures. D'où la notion de milieu emboîtés.

⁴³⁴ Université d'été de 1995. Opus cité.

⁴³⁵ Celle-ci se développerait entre 1 an et 6-7 ans et donc en englobant l'âge d'un élève de l'école maternelle.

⁴³⁶ *Lexique de psychologie du développement de Jean Piaget*. Marie Françoise Legendre Bergeron.

⁴³⁷ Dans l'esprit de Guy Brousseau, la notion de rupture de contrat exprime une des dimensions dynamiques de l'interaction didactique. Dans cette dynamique, le contrat, par ruptures successives, tend vers une forme d'équilibre. Précisément, nous notons que, dans ce processus de rupture, la forme 'situation-problème' tend à se déstructurer.

⁴³⁸ Négociations de contrats qui peuvent aboutir à des effets « Topaze », des effets Jourdain, un usage abusif de l'analogie, le glissement métacognitif...

⁴³⁹ *Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité

⁴⁴⁰ Au sens défini plus haut.

⁴⁴¹ « *Il s'agit de faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible* ». Guy Brousseau. *Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

Rappelons que le concept de situation-problème est un avatar de celui de situation adidactique ; cette dernière contenant « *la dévolution du bon problème* ».

La situation-problème suppose donc la métacognition⁴⁴². Il ne s'agirait pas seulement de repenser ses actes mais bien de repenser la raison de ses actes. Mais la capacité métacognitive, est-elle une donnée du psychisme enfantin ou se construit-elle aussi par différenciation, à la suite de multiples expériences douloureuses parce pleines de remises en question ? Peut-on raisonnablement penser que des injonctions comme « réfléchis » ou « repense à » peuvent suffire à stimuler une activité que l'on peut qualifier de métacognitive ? Sur ce point, Guy Brousseau affiche une certaine cohérence « en lissant » le caractère complexe de l'évolution des connaissances : *« Vouloir expliquer ces évolutions uniquement par les interactions effectives avec le milieu, serait certainement une erreur car très tôt, les enfants peuvent intérioriser les situations qui les intéressent »* et *« opérer » avec leurs représentations « internes », des expériences mentales très importantes. Ils règlent ainsi, aussi bien les problèmes d'assimilation (augmentation des schèmes déjà acquis par l'agrégation de faits nouveaux) ou d'accommodation (réorganisation des schèmes pour appréhender des questions nouvelles ou pour résoudre des contradictions »*⁴⁴³. Ce que nuance Jean Piaget car, *« en fait, sur le terrain des schèmes cognitifs, y compris sensori-moteur, [...] l'hérédité et la maturation se bornent à déterminer les zones des impossibilités ou des possibilités d'acquisition. Mais celles-ci exigent en plus une actualisation qui comporte elle-même des apports extérieurs, dûs au milieu, et une organisation interne progressive relevant de l'autorégulation »*⁴⁴⁴.

Conclusion

Ainsi donc, en excluant l'idée que les fonctions métacognitives mobilisées par cet élève, plongé dans la situation adidactique d'apprentissage⁴⁴⁵, tiennent leur existence plus ou moins directement d'une programmation héréditaire ou d'une maturation épistémique, leur niveau de développement, parce que non évalué (ou non directement évaluable), fait peser, dans celle-ci, une forte contingence sur les processus. Revendiquer la consistance du concept de situation-problème ne supposerait-il pas alors ce surprenant rapprochement épistémologique : la rupture bachelardienne présuppose la continuité piagétienne⁴⁴⁶ ? C'est à dire, sans un état d'achèvement naturel et suffisant de certaines fonctions métacognitives, le travail sur les représentations ne peut s'opérer. Mais surtout, la psychanalyse bache-

⁴⁴² Ensemble qui regroupe au moins une partie des activités cognitives portant sur la cognition et contribue à la régulation et au contrôle de son fonctionnement. Il faut donc la considérer comme produisant des pensées de second ordre. « *Vocabulaire de sciences cognitives* ». Olivier Houdé et al. PUF.1998.

⁴⁴³ *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁴⁴⁴ *L'épistémologie génétique*. Opus cité.

⁴⁴⁵ *Le contrat didactique. Le milieu*. Opus cité. Pour la structuration du milieu didactique et la différenciation en situation adidactique d'action et situation adidactique d'apprentissage.

⁴⁴⁶ D'un point de vue pragmatique, ceci conduit à penser que le concept de situation-problème, tel quel, n'est véritablement applicable qu'à un niveau au moins 'post élémentaire'.

lardienne et le développement piagétien ne pourraient aller l'un sans l'autre. Sans en contraindre sa définition à tenir compte de certaines limites cognitives, le concept de situation-problème peut-il rester consistant ? **L'obtention d'une définition générale du concept de situation-problème, rendue impossible par la complexité des processus cognitifs en jeu, nous conduirait finalement à en élargir la compréhension. Ce qui aurait pour conséquence la considération d'une stratégie didactique le plus dépouillée possible et aussi une redéfinition du concept d'obstacle dans une dimension cognitive épistémique.**

2.2 Des conséquences pour la didactique des mathématiques

Il n'est, bien sûr, pas question de rejeter la réalité d'une opération cognitive⁴⁴⁷ que l'on peut bien appeler « prise de conscience ». Mais, concernant les apprentissages mathématiques de l'école primaire, nous postulons que la médiation didactique devrait et pourrait s'immiscer dans le processus intime et naturel d'une élaboration cognitive et, pour ce qui nous intéresse, en actualisant les potentialités de certains schèmes. Si l'élève doit relativiser l'opérationnalité de ses schèmes, ceci doit passer par la relativisation de son propre langage. **Notre position, dans cette thèse, est que, s'il y a prise de conscience de ses actes par l'élève, celle-ci passe avant tout par une confrontation entre son propre langage et celui de son tuteur. C'est déjà là que se manifestent les premiers conflits.** Nous postulons, en particulier, que dans sa conception, une telle médiation didactique doit faire l'économie de l'attente d'une supposée prise de conscience autonome de la part du sujet apprenant. Mais, comme nous venons de le dire, la perturbation voulue du système cognitif est à définir en relation avec des formes langagières spécifiques de l'objectif à atteindre.

Les épistémologies génétiques de Jean Piaget et de Lev Vygotski nous permettraient de penser qu'un développement scolaire médiatisé par une forme 'problème', et ne travaillant pourtant que sur des connaissances localisées, favoriserait des développements structuraux du psychisme qui transcendent les structures schématiques spécifiques de ces connaissances, enjeux d'apprentissages explicites⁴⁴⁸. Certes, à la condition toutefois de chercher à faire coïncider le chemin intime de l'ontogenèse, que nous pourrions penser de nature piagétienne⁴⁴⁹, et le chemin tracé par la médiation didactique qui serait balisé par le développement des significations des mots, comme l'a indiqué Lev Vygotski. **Nous retenons donc que le concept scolaire, enjeu d'apprentissage, ne peut être « caché » dans la seule situation**

⁴⁴⁷ A plusieurs niveaux : automatique ou cyclique comme lors d'un fonctionnement métacognitif.

⁴⁴⁸ Il faudrait alors sans doute envisager un enseignement systématique sous une forme « situation-problème » et, dans les formations d'enseignants, en y construisant une structure formelle.

⁴⁴⁹ Il s'agit des processus des régulations compensatrices qui conduisent aux accommodations réciproques ou aux différenciations et intégrations de certains schèmes d'assimilation.

dévolue à l'élève. C'est avant tout dans le langage omniprésent de l'adulte que se situe, avec force, le concept. Le mot devrait nous apparaître comme l'indice essentiel qui accompagne la restructuration des schèmes, dans les situations didactiques. Et nous pourrions alors postuler que le développement des fonctions psychiques supérieures suppose la systématisation de certaines pratiques pédagogiques, comme l'usage d'une forme 'situation-problème', pour l'introduction de connaissances nouvelles, mais dont la gestion ne peut être pensée indépendamment du niveau où se situe l'enseignement.

Nous retenons donc que le concept de « conscience » ne signifie pas une entité achevée et isolable, comme pourrait l'entendre une psychologie philosophique, donc une fonction définissable et pouvant s'appliquer de façon générale à des objets dont elle doit saisir une certaine forme ; c'est dire aussi que son fonctionnement dépend des représentations elles-mêmes⁴⁵⁰ et donc, des conditions exogènes de ces représentations, dont certaines modalités de l'interaction sociale. *« On peut presque aller jusqu'à dire que la « prise » de conscience représente autre chose et davantage qu'une « prise », c'est-à-dire qu'une incorporation à un domaine donné d'avance avec tous ses caractères et qui serait « la conscience » : il s'agit en réalité d'une construction véritable, qui consiste à élaborer, non pas « la » conscience considérée comme un tout, mais des différents niveaux en tant que système plus ou moins intégré »*⁴⁵¹. Dans ce sens, *« le fait conscient ne peut être considéré comme différent du fait qu'il est conscient »*⁴⁵². Et rien ne permet d'affirmer que son niveau de développement intellectuel est tel, pour un enfant quelconque, qu'il puisse connaître les faits différemment de leur perception ; en particulier, par une conscience dite réfléchie. Au contraire, notre expérience pédagogique montre, sur ce point, une importante inégalité qui perdure longtemps⁴⁵³. Car ses racines, fortement socioculturelles, seraient principalement de nature linguistique. **Une pédagogie qui se donne le postulat 'd'une prise de conscience toujours possible' et surtout réfléchie, peut nous apparaître comme profondément inégalitaire. En didactique, une expression aussi largement répandue que « l'enfant va prendre conscience de », nous semble vide de sens et clairement se substituer à une définition plus 'pertinente' de la**

⁴⁵⁰ Et l'on ne peut exprimer de généralités concernant le développement (chez un sujet donné) des fonctions supérieures qui prennent pour argument les représentations quelles qu'elles soient : La psychologie cognitive parle de décalages horizontaux largement constatés par l'expérience : une même opération s'appliquant à des contenus distincts donnera des résultats de valeurs inégaux.

⁴⁵¹ Jean Piaget. *La prise de conscience*. Opus cité.

⁴⁵² Expression extraite de l'article sur la conscience du *vocabulaire critique et technique de la philosophie*. André Lalande.

⁴⁵³ En prenant et, parmi d'autres, le cas générique de 'la prise de conscience de la ressemblance', on voit, dans le monde des adultes, une profonde inégalité : à partir de ce point, on peut inférer que la capacité de conceptualisation est loin d'être la chose du monde la mieux partagée.

médiation, en particulier, et surtout relativement au langage.

Il nous apparaît alors, comme incontournable, que les discours et dans le milieu scolaire, soient non seulement initialisés par la médiation de l'adulte mais aussi que celle-ci doit, elle-même, être fortement structurée, en ce qui concerne son expression linguistique. Il se pose donc la question essentielle de la définition de la structure didactique sous-jacente. Ces questions, pourtant fondamentales dans la perspective d'un apprentissage constructiviste ou explicitement socioconstructiviste, pourraient ne pas focaliser une attention spécifique dans l'ingénierie didactique en mathématiques, pour se décharger sur une supposée entité fonctionnelle dite de conscience. En particulier, cette ingénierie doit fondamentalement tenir compte du fait que « *la participation à certaines interactions sociales nécessite des compétences initiales pour qu'elle puisse être source de progrès individuels* »⁴⁵⁴. Aussi, donc, se posent les questions de la définition et de l'évaluation de ces compétences⁴⁵⁵. Et cette évaluation doit tenir compte du fait que le sujet épistémique est souvent confronté à des difficultés spécifiques du savoir à enseigner, et dont certaines explications peuvent être trouvées dans le concept d'obstacle, un obstacle résolument cognitif.

Si, l'on considère comme un invariant la complémentarité indéfectible entre le geste et la parole, **il y aurait lieu de penser que le langage est bien cet outil qui, constitutif de la pensée, comme une action intériorisée, joue dans la stimulation de la prise de conscience et même dans son organisation. En définitive, les conditions et formes de la prise de conscience dépendent spécifiquement de la nature des interactions verbales**⁴⁵⁶. Ainsi, le langage et la fonction de conscience doivent entretenir dans leur développement scolaire une réciprocité indéfectible et définissable dans l'analyse a priori.

Nous rappelons, avec Lev Vygotski, qu'« *il est impossible de voir les forces motrices du développement intellectuel de l'enfant dans la faillite et la banqueroute de sa pensée* »⁴⁵⁷ qui se produisent à l'âge scolaire. Et, en ce qui concerne notre étude, nous admettrons que cela vaut en amont pour le développement des connaissances et de la fonction de conscience elle-même. Car, « *le développement consiste précisément en une prise de conscience progressive des concepts et de la pensée propre* »⁴⁵⁸. La prise de conscience relève elle-même d'un mécanisme psychique supérieur, c'est-à-dire donc en développement tout au long de la scolarité.

⁴⁵⁴ Willem Doise, Gabriel Mugny *Psychologie sociale et développement cognitif*. Page 40. Opus cité. Question sur laquelle nous reviendrons plus loin.

⁴⁵⁵ Que nous éviterons de confondre avec leurs correspondants qui s'expriment en termes de savoirs mathématiques et sur lesquels l'attention de l'enseignant se concentre le plus souvent exclusivement, lors d'évaluations dites diagnostiques.

⁴⁵⁶ Ce qui constitue un début de réponse à la question didactique des conditions de prise de conscience.

⁴⁵⁷ Lev Vygotski. *Pensée et langage*. Page 234. Opus cité.

⁴⁵⁸ Ibid. Page 235.

Car « *la conscience se développe comme un tout, modifiant à chaque étape toute sa structure interne et la liaison de ses parties, et non comme la somme des modifications partielles intervenant dans le développement de chaque partie isolée* »⁴⁵⁹. On retrouve, pour une telle fonction, une structuration analogue à celle des constructions des schèmes. D'où

2.3 Une classification des niveaux de la prise de conscience

Le concept didactique de la prise de conscience ne peut rester univoque. Comme les expériences de l'enseignement nous le montrent, fonctionnellement, et dans une approche développementale, il aurait alors lieu de considérer la conscience aux différents niveaux suivants⁴⁶⁰ :

➤ Conscience en acte qui positionne ou repositionne l'acte pour atteindre la réussite. A ce niveau, la verbalisation si elle a lieu, peut ne relever que du langage égocentrique.

Il est remarquable que si un sujet est engagé à revenir verbalement sur une description de son activité, même au sortir d'une tâche réussie, il peut se retrouver tout ou partiellement en échec.

➤ Conscience réfléchie. Ce qui ne correspond pas totalement au réfléchissement piagétien : conduite à la conscience réflexive ce qui ne l'était pas encore. Puisque, on peut comprendre, dans cette dernière acception, que la conscience réflexive concerne davantage un sujet agissant, conscience qui est associée à la compréhension d'une situation en cours de transformation (« *recherche des mécanismes internes de l'action : reconnaissance des moyens employés, raisons de leur choix ou de leur modification en cours de route...* »⁴⁶¹). La conscience réfléchie, au sens où nous l'entendons, concerne davantage un réfléchissement sur l'activité, mais en dehors de cette même activité. Toutefois, la distinction n'est qu'apparente, dans la mesure où le réfléchissement piagétien est toujours relatif à un acte déjà observable dont un acte achevé, accompagné d'une verbalisation ou non. La conscience réfléchie, au sens que nous retenons, est donc bien relative à des actes, mais portant plus généralement sur l'activité, telle qu'elle s'est développée dans une situation désormais éteinte, et non restreinte à telle ou telle dernière action, entrant comme élément de cette activité. De plus, nous ne revenons pas ici explicitement sur ce que Jean Piaget définit comme une réflexivité, à savoir une réorganisation sur un palier supérieur de ce qui avait été réfléchi sur un palier inférieur. Il s'agit seulement de définir des niveaux distinguables, en notant que dans une même situation,

⁴⁵⁹ Ibid. Page 238.

⁴⁶⁰ La classification que nous proposons ci-dessous et qui sans doute demanderait à être encore affinée, résulte d'une induction à partir d'observations récurrentes et telles que nous avons pu les faire au sein de situations d'apprentissage à tous les niveaux, de la petite section à l'université.

⁴⁶¹ *La prise de Conscience. Conclusions générales.* Opus cité

des prises de conscience de niveaux différents peuvent ou non s'activer et, concernant un même système cognitif. De plus, lorsque nous parlons de verbalisation, nous voulons dire par là, une forme observable et, tout aussi bien, une forme non observable directement mais, inférée par un observateur. Car, un écolier (et même un adulte) peut très bien posséder, en pensée, une verbalisation plus complète. Mais sa construction du concept de la langue en tant qu'objet de communication socialisée et donc, sa compétence à communiquer, peuvent être en décalage. En d'autres termes, il peut conserver en lui un discours qui, au plan de sa pensée, relève d'une nécessité mais, au plan de la communication de cette pensée verbale, n'en relève pas. Et cela concerne, il nous est apparu, deux développements de nature bien distinguables, ce que l'on pourrait considérer comme un fait de très grande importance dans l'apprentissage.

Précisons donc nos distinctions concernant la conscience réfléchie :

1. Permet de revenir de façon partielle ou totale sur certains indicateurs sémiotiques spécifiques d'un schème d'action. Peut se restreindre encore à la seule considération des observables les plus prégnants de sa propre activité mais sans logique sous-jacente. L'expression prend la forme d'une mise en relation sans explicitation de nature causale ou implicite entre une partie d'un énoncé, la plus prégnante pour le sujet, et une partie la plus mémorable de son activité et qui peut d'ailleurs se restreindre à la solution trouvée.

2. Permet de revenir verbalement sur l'activité par une description qui ne contient aucune analyse exhaustive : l'élève revit en mémoire l'exercice ordonné du schème en explicitant tout ou partie de l'ensemble des états du processus. Toutefois, l'expression peut laisser apparaître une sorte de maîtrise de ce processus, au sens d'une connaissance en acte d'un ordonnancement anticipé. Cela peut parfois laisser supposer un début de causalité plus abstraite entre les indicateurs, reconnus comme tels dans la situation, et une activité dont la forme globale devient une nécessité. Mais, dans le cas où la résolution d'une tâche proposée se réduit à un algorithme, il ya lieu toutefois d'atténuer ce possible.

3. Permet de revenir verbalement sur le pourquoi de l'activité. L'élève explicite les indices anticipateurs du schème, en particulier sémiotiques, et produit une forme d'inférence qui traduit le caractère nécessaire de ce schème. Ce niveau de réfléchissement explicite le fonctionnement d'une régulation qui oriente l'attention logique en vue de donner au schème tous les éléments dont il a besoin pour une activation réussie dans une situation donnée. Toutefois, lors de cette explicitation, les anticipateurs d'un tel schème et qui servent en acte d'arguments à une régulation de sélection, ne sont pas abstraits de leur contexte. Le schème n'a pas atteint le niveau concept. En particulier, la situation ne saurait manquer de certains de

ces indicateurs. L'inférence exprime la reconnaissance en acte de conditions reconnues comme justifiant causalement une certaine activité.

4. Permet de revenir verbalement sur le schème en tant que concept. Ce niveau de réflexion est celui d'un régulateur ou ensemble structuré de régulations. Il oriente l'attention logique à reconnaître dans la situation certains éléments qui font rechercher en mémoire un certain type. Ce niveau de réflexion explicite le fonctionnement du régulateur lui-même. Par exemple, le système reconnaît un type de situations qui anticipe une certaine régulation, type associé à des invariants opératoires fondamentaux. De plus, les indicateurs sémiotiques sont des valeurs particulières de variables reconnues comme des constantes de ce type. On peut estimer qu'à ce niveau, l'absence de certains indicateurs peut conduire après inférence à la nécessité de leur construction.

On note souvent que les enseignants ne font pas bien la différence entre les niveaux 2 et 3. Il s'ensuit que les évaluations se préoccupent davantage du sommatif que du formatif⁴⁶². Comme nous le verrons au chapitre 5 et, dans un cas particulier, il est possible de proposer une évaluation de tels niveaux dont une évaluation que nous pourrions définir comme formative, puisque concernant une activité dépassant le seul exercice d'une structure spécifique de schèmes.

Nous devrions entendre ces niveaux comme des stades, avec de nombreux décalages, dans le développement de la fonction de conscience⁴⁶³. Dans sa chronogenèse, une telle fonction ne peut atteindre un niveau que si le niveau inférieur est suffisamment construit⁴⁶⁴. De ce point de vue, un tel développement est parallèlement associé à celui du développement de la compétence linguistique. En effet, la représentation qu'un sujet se donne des signifiants, en particulier linguistiques, et qu'il manipule devant un interlocuteur, ce qu'il peut dire de cette représentation elle-même, dépendent du niveau de conceptualisation atteint par les objets

⁴⁶² Un modèle d'évaluation de la formation souvent utilisé est le modèle à 4 niveaux de Donald Kirkpatrick, un chercheur américain. Précisons seulement :

- évaluation sommative : évaluation ayant pour but de sanctionner (positivement ou négativement) une activité d'apprentissage afin de comptabiliser ce résultat en vue d'un classement, d'une sélection, d'une certification ou d'une validation ;

- évaluation formative : elle permet à l'apprenant, au cours ou au terme d'une phase d'apprentissage, de repérer ses progrès, d'identifier ses points forts, mais aussi de comprendre ses propres difficultés et d'y remédier en connaissance de cause.

Encyclopédie en ligne : wikipédia.

⁴⁶³ Il ne nous semble pas être en contradiction avec Jean François le Ny. Car, évoquer une fonction de conscience n'est pas supposer une entité permanente dans le psychisme mais plutôt un ensemble d'opérations plus ou moins développées et qui s'activent selon les circonstances.

⁴⁶⁴ On peut considérer que nous opérons là un rapprochement explicite entre des thèses de Lev Vygotski et de Jean Piaget. D'ailleurs, étant donné que les développements de connaissances et le développement intellectuel dans son ensemble s'appuient les uns sur les autres, dans une chronogenèse sans fin, on pourrait penser que les fonctions psychiques supérieures comme celle de conscience répondent, dans leur développement, d'une logique qui serait celle de la logique des schèmes.

auxquels renvoient les signifiants⁴⁶⁵. Et, inversement, le niveau de conceptualisation atteint, relativement à des objets dont l'élève manipule certains signifiants, dépend de sa capacité à dire quelque chose avec ces signifiants ; lorsque le discours porte sur la désignation d'objets (fonction référentielle) ou la constitution d'énoncés complets (fonction apophantique) ou le raisonnement (expansion discursive). Par exemple, au stade de la conscience en acte ou de la conscience réfléchie 1, un sujet peut ne pas distinguer le signifiant du signifié, de la même façon qu'il ne peut pas toujours se décentrer par rapport au moi qui parle. « *Le critère de verbalisation n'est pas seulement indicateur de 'la conscience', mais plus précisément d'une conscience au second degré : le terme de conscience réfléchie signifie que nous avons conscience de ce dont nous avons conscience, c'est d'ailleurs ce qui nous permet de formuler le contenu de la conscience au premier degré⁴⁶⁶, qui jusqu'alors était muette, anté-prédicative, non positionnelle, dans l'oubli du moi* »⁴⁶⁷. Nous entendons alors l'activité de la conscience comme un processus complexe tel que :

- un état de niveau $i+1$ demande que l'état de niveau i soit réalisé ment⁴⁶⁸, même si, pour l'observateur, un niveau inférieur n'est pas explicitement observable, c'est-à-dire non associé à une verbalisation ;
- en ce sens, le niveau i peut « jouer », pour le niveau $i+1$, le rôle d'une conscience en acte ;
- des décalages entre les niveaux d'abstraction des objets du discours et les capacités discursives elles-mêmes (en général celles-ci restent en deçà, à moins que le sujet parle pour dire quelque chose de rien) font qu'un niveau $i+1$ peut être instable et, sur certains aspects, le discours peut se retrouver au niveau i .

On peut tirer de la première loi d'Edouard Claparède et de nombreuses expériences faites auprès de lycéens, d'étudiants et d'enseignants⁴⁶⁹ que plus un sujet est expert à un niveau i , ce qui se traduit par des pensées et des actes de plus en plus automatisés, et plus il lui est difficile de verbaliser ce niveau. Il semble que sa conscientisation soit là de niveau inférieur. « *Le décalage entre la réussite en acte et l'incapacité de sa verbalisation est une donnée constante des études de terrain* »⁴⁷⁰. Par exemple, la plupart du temps, si l'on demande à un élève qui a l'habitude de réussir ses exercices de mathématique avec une grande facilité d'expliquer sa résolution, il répond invariablement par une relecture du texte écrit. Spontané-

⁴⁶⁵ Voir en particulier, la capacité à s'exprimer dans des cadres différents.

⁴⁶⁶ La conscience en acte.

⁴⁶⁷ Pierre Vermersch. *Conscience directe et conscience réfléchies*. Version électronique. Novembre 2001.

⁴⁶⁸ Un niveau infra étant posé comme étant celui de la conscience en acte.

⁴⁶⁹ Et comme le confirment les recherches des psychologues.

⁴⁷⁰ Pierre Vermersch. Opus cité.

ment, il ne se lance pas dans le pourquoi 'il a fait comme il a fait' et, d'ailleurs, il en est le plus souvent incapable, même après fortes sollicitations. Encore moins est-il capable d'expliciter cette part de l'heuristique qui l'a amené à comprendre le lien logique entre le pourquoi⁴⁷¹ de l'acte (le pourquoi de la résolution) et le comment son attention a pu le conduire à retrouver, en mémoire, quitte à les compléter, les outils qui nécessairement répondent à son objectif. Ce point est d'ailleurs crucial dans l'enseignement, car de nombreux élèves, en moins grande réussite, ne comprennent pas comment le bon élève a pu penser à se fabriquer des objets non directement donnés dans l'énoncé d'un exercice⁴⁷². « Cette saisie réflexive ne va pas de soi, elle est en rupture avec le courant naturel de l'activité »⁴⁷³.

Un exemple

Donnons un modèle pour notre classification de l'exercice de la prise de conscience réfléchie.

Considérons une situation classique dite « de partage équitable » et, proposée à des élèves qui disposent du schème de la division euclidienne. On se propose l'énoncé suivant :

« Je voudrais partager équitablement 21 billes entre 4 personnes. Combien de billes me resterait-il ? »⁴⁷⁴.

On se place dans la situation d'un élève qui produit la bonne réponse (1) à l'aide de l'algorithme de la division euclidienne.

Précisons alors les niveaux possibles :

- niveau de la conscience en acte.

L'indicateur « partager équitablement » anticipe l'exercice du schème de la division euclidienne. La question importe peu. Un algorithme de la division euclidienne (celui qui a été appris) est mis en place et parfois psalmodié. L'algorithme « est la solution ». Par rapport à la question posée, le schème est d'ailleurs redondant. Et souvent, dans la réponse de l'élève, on voit aussi apparaître le nombre de billes (5) attribuées à chaque personne ;

- niveau 0 de la conscience réfléchie.

Question relative à la démarche : « Comment as-tu fait ? ». Nous pourrions noter comme réponse minimale : « j'ai fait la division ». A la question : « Pourquoi as-tu fais la division ? », on pourrait obtenir comme réponse : « pour partager ».

⁴⁷¹ En mathématique, ce pourquoi contient, le plus souvent, une propriété ou un théorème qui justifie l'action de résolution.

⁴⁷² On retrouve cette mémoire bien faite dans l'expression de Lev Vygotski : « mémoire logique ». Cette heuristique concerne en effet la relation d'ordre (non totale) qui exprime des liens logiques entre des propriétés p ou q comme dans les expressions : « il suffit de p pour avoir q » ou « il faut q pour avoir p ».

⁴⁷³ Pierre Vermersch. Opus cité.

⁴⁷⁴ Remarque : l'énoncé ne dit pas qu'il faut donner le plus possible de billes à chaque personne. Ce qui est donc un implicite. Nous négligerons ce point classique, dans ce qui suit.

➤ niveau 1 de la conscience réfléchie.

Question relative à la démarche : « Comment as-tu fait ? ». La question se voit invariablement associée à une réponse verbale de type descriptif de la résolution elle-même : « j'ai écrit la division et j'ai fait 4 fois 4 et c'était trop petit alors j'ai fait 5 fois 4 et après il est resté une bille ». L'élève escamote donc systématiquement de son discours ce qui fait signe pour le schème dans l'énoncé et renvoie de façon canonique à la résolution. D'ailleurs, pour l'élève, la réponse à la question : « Pourquoi as-tu fait la division ? », on pourrait obtenir comme réponse « parce que c'est comme ça qu'il faut faire ». On peut supposer que « le parce que » exprime une causalité implicite : la division euclidienne est l'outil dans une situation de partage équitable. On peut également retrouver dans la réponse de l'élève une redondance.

➤ niveau 2 de la conscience réfléchie.

« Comment as-tu fait ? ». « Il fallait partager les 21 billes en 4. Alors j'ai divisé 21 par 4 et j'ai trouvé qu'il reste 1 bille ». L'élève explicite les indices sémiotiques « "partager, 21 et 4 », anticipateurs du schème de la division euclidienne. En ce sens, la situation proposée est bien un élément d'une extension associée au schème. Il est remarquable de noter que le mot équitablement est généralement escamoté dans la réponse alors qu'en théorie, c'est lui qui valide (entre autre) la division euclidienne. C'est un des aspects observables qui différencie ce niveau du suivant. On retrouve cette même lacune chez des adultes stagiaires et même enseignants chevronnés tant que la question ne les incite pas à être plus réflexifs. On peut remarquer, à ce niveau, une production d'inférence qui ne fait pas partie, à proprement parlé, du schème lui-même et suppose donc l'existence d'une fonction de tri des schèmes mémorisés, tri qui s'opère par régulation selon la compétence à exercer⁴⁷⁵ ; la classe correspondante est ici « partager m objets en n parts égales ». Notons pourtant, qu'à ce niveau, la question du pourquoi ne peut conduire à une réponse différente de la précédente ; le sujet n'ayant pas encore abstrait chaque situation particulière au niveau d'un type, la question risque alors de ne produire que des réponses déviées car se heurtant alors à une incompréhension ;

➤ niveau 3 de la conscience réfléchie.

Il est difficile, quel que soit le public (en dehors d'un certain public « savant »), de trouver une question concernant le pourquoi et qui ne nous ramène pas systématiquement au niveau 2. La question est relative à la pertinence de l'outil 'division euclidienne'. Ce niveau serait pourtant indispensable concernant un enseignant, car il lui donnerait de véritables outils concernant l'apprentissage d'une notion, comme la division euclidienne, et, également, con-

⁴⁷⁵ Nous reviendrons dans le chapitre 4 sur cette notion de régulation comme une opération de tri.

cernant des remédiations éventuelles⁴⁷⁶. D'un point de vue cognitif, on se situe au niveau conceptuel, celui de la division euclidienne. L'opérationnalité du concept est associée à l'ensemble des schèmes dont celui du partage équitable n'est qu'un exemplaire. Chacun de ces schèmes peut être activé par une régulation ou par une autre. Mais nous verrons, dans le chapitre 4, qu'en fait, l'ensemble de ces schèmes peut être considéré comme relevant d'une seule structure. On peut alors parler du schème de la division euclidienne, un concept, comme le définit Jean Piaget. Un tel concept est associé à des invariants opératoires dont l'un est dit « propriété archimédienne »⁴⁷⁷ et l'autre, « relation de bon ordre ». Il s'agit bien de produire des inférences qui justifient la pertinence du concept. Nous avons pu noter qu'une infime minorité d'enseignants avait des compétences relatives à ce niveau. Notons alors la question difficile qui serait « pourquoi la division euclidienne est-elle un outil efficace dans ce type de situation ? ».

2.4 Le décalage entre la conscience et le langage, comme fonction de communication

Nous devons tenir compte, s'agissant de stades de développement d'une fonction, des décalages horizontaux qui expriment, qu'à un niveau de développement donné, une fonction peut être opérationnelle ou ne pas l'être selon le contexte, et ceci vaut pour la fonction de verbalisation. Il y a lieu aussi de considérer les décalages verticaux qui expriment qu'une fonction peut avoir atteint un certain niveau de développement, dans un certain cadre, et un niveau de développement inférieur dans un autre cadre. En fait, il semble que de tels décalages proviennent d'une coordination avec certaines autres fonctions qui ont ou n'ont pas atteint un niveau de développement suffisant. Par exemple, les fonctions méta discursives de communication, de traitement de représentations cognitives, ou d'objectivations de représentations virtuelles⁴⁷⁸ peuvent être plus ou moins efficaces selon ces cadres.

Des propos précédents, nous concluons que « *Le critère de verbalisation est dissymétrique. Sa présence est un bon indicateur de la 'conscience', son absence témoigne simplement de l'absence de verbalisation* »⁴⁷⁹. « *L'absence de verbalisation ne signifie pas avec certitude l'absence de conscience, mais l'absence de réflexion. L'absence de verbalisation d'un vécu peut indiquer que la personne n'a pas, ou ne sait pas, toute seule, opérer le*

⁴⁷⁶ La pédagogie définit par remédiation la mise en place de situations qui renvoient un élève à tout ou partie d'une reconstruction d'une connaissance, reconnue comme mal maîtrisée.

⁴⁷⁷ « Si $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nb > a$ » et « toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément ». ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ privé de 0). Il est remarquable que parmi les possibles procédures qu'a produites un élève de CE1, lors des premières activités de résolution de tâches « de partage équitables », il a pu utiliser, en acte, ces deux théorèmes.

⁴⁷⁸ Raymond Duval. *Sémiosis et pensée humaine*. Chapitre II. *Les fonctions discursives d'une langue*. Opus cité.

⁴⁷⁹ Pierre Vermersch. Opus cité.

réfléchissement de son vécu »⁴⁸⁰. Mais moins fortement, nous envisageons un décalage entre une compétence relative à ce réfléchissement et une compétence relative à un fonctionnement discursif et qui se servirait de la verbalisation. Nous comprenons que, malgré leur solidarité structurale, les fonctions métacognitives et les fonctions méta discursives sont sujettes à des développements nécessairement décalés d'une façon générale car, elles le sont en particulier selon les cadres.

Si l'activité collective de la classe qui peut être qualifiée, pour ce qui nous intéresse, de travail en coopération pouvant prendre la forme d'échanges verbaux, et semble apporter, chez certains, le fruit de l'adhésion et de l'apparente compréhension, nous devons tirer de l'analyse de Lev Vygotski que ce peut être là, dans de nombreux cas, qu'illusion. Avant donc de faire dévolution à l'enfant d'une situation visant à une prise de conscience réfléchie et ré-exprimable, il y aurait lieu de mesurer le niveau de développement de celle-ci ou alors, de concevoir des situations d'apprentissage qui font l'économie de cette référence non maîtrisable. Rappelons que, dans la mesure où notre démarche s'inscrit systématiquement dans le paradigme cognitiviste⁴⁸¹, il s'agirait là, pédagogiquement parlant, d'une position inédite⁴⁸² et paradoxale. Une conséquence de cette position serait en effet de se focaliser sur la gestion des comportements des élèves, tout au moins dans les premières séances d'une séquence pédagogique. Cette approche ne serait pas sans rappeler certaines formes de conditionnement. Nous verrons, dans une étude de cas⁴⁸³, qu'effectivement, **lorsqu'il s'agit de penser les fondements cognitifs d'une connaissance nouvelle, ceux-ci sont définissables en termes de schèmes à construire. Cette construction initiale repose sur des indices sémiotiques imposés systématiquement, et le plus souvent de nature linguistique. Ces indices, qui entrent dans la signification de la connaissance, seront parmi les éléments qui conditionnent l'activation des schèmes. Certains de ces indices participent finalement, à des degrés divers⁴⁸⁴, d'une anticipation de cette activation, puis se constituent alors en éléments de la compréhension d'une forme contextualisée, que prend initialement la connaissance nouvelle. Ils en deviennent des indicateurs.** Ils relèvent de ce qu'on peut appeler des apprentissages implicites, objets d'une activité cognitive qui suppose précisément une

⁴⁸⁰ Ibid.

⁴⁸¹ Qui postule que l'apprentissage consiste en une modification des connaissances et non seulement des comportements.

⁴⁸² Dans la mesure où la conception des situations ferait une économie apparente du possible de 'la prise de conscience', en situation didactique. Ce qui n'est pas dans notre propos, bien au contraire, puisque nous voudrions définir les conditions mêmes de cette prise de conscience, dans le but de n'en pas demeurer à la contingence.

⁴⁸³ Chapitre 5 sur la catégorisation et le tri.

⁴⁸⁴ Ce que nous préciserons dans le chapitre 4.

conscience en acte. Nous retenons ainsi, lors de ces constructions initiales, que la prise de conscience⁴⁸⁵ n'implique pas la capacité d'un travail explicité sur les représentations, car le critère de verbalisation est maximaliste⁴⁸⁶.

3 Conséquences didactiques

3.1 Des formulations langagières contraignantes

S'agissant d'enfants de l'école primaire et, considérant que la prise de conscience constitue elle-même une conduite, c'est-à-dire relevant d'un ensemble de schèmes en voie de structuration, notre attitude didactique sera de rechercher une véritable progressivité dans la construction d'une compétence en suivant un chemin qui prend ses origines dans un fonctionnement épistémique.. **Ainsi, nous nous devons de déterminer les conditions didactiques de ces stimulations. Dans le cadre de la médiation, nous circoncirons finalement l'activité initiale de conscience à résulter de l'observation d'indices sémiotiques systématiques, comme certaines formulations langagières, en ayant pour objectif de contraindre le sujet à la tâche désignée.** Cette activité langagière, en respectant une structuration spécifique de l'objectif à atteindre, pourrait devenir un sésame pour cette activité cognitive qui est celle d'une conceptualisation implicite. Cette conception pourrait sembler se démarquer d'autres paradigmes didactiques, dans la mesure où elle n'autorise, initialement, dans les conduites de l'élève qui vont se succéder, que peu de degrés de liberté. Nous considérons en effet :

- que la construction de la connaissance opératoire, signifie une structuration spécifique de schèmes ;
- que cette construction est associée à un ensemble structuré de régulations, transcendant les schèmes eux-mêmes et dont l'expression prend des formes invariantes ;
- que la connaissance, en tant que produit d'une conceptualisation est, dans tout le processus de son élaboration, contrainte et comme tirée par l'expression langagière de l'adulte ;
- que la liberté de l'élève, en tant que système individuel, pourra s'exprimer par les inférences qu'il est finalement capable de faire (ou non, s'il y a eu échec de l'apprentissage), à partir du moment où cette connaissance est considérée comme acquise, mais au terme de la séquence didactique. Nous devrions concevoir dans notre travail les modalités d'un type

⁴⁸⁵ Celle qui au minimum concerne les observables de l'action.

⁴⁸⁶ Par exemple, par une formulation du sujet qui s'expliquerait sur un tel travail.

d'évaluation de ces inférences, tout au moins dans le cas que nous aurons développé, ce dont nous rendrons compte dans le chapitre 4, en théorie et dans le chapitre 5, dans une étude.

3.2 Le conflit sociocognitif, condition didactique suffisante de la prise de conscience ?

Certes, on peut concevoir dans l'affectivité du sujet, étonné et déçu, les racines de la première intention et, certes, l'affect peut être considéré comme prémisse nécessaire à « la prise de conscience » et, même comme facteur stimulant la recherche intentionnelle de l'acte réussi. L'affect peut être déclenché par le conflit sociocognitif entre pairs ou entre l'enseignant et l'élève : ce conflit «*qui fait coexister dans une même situation et en même temps deux centrations⁴⁸⁷ opposées, ne peut pas être nié (par l'élève) aussi facilement qu'un conflit résultant d'oscillations entre centrations individuelles provisoires et successives* »⁴⁸⁸.

Mais, la simple apparition de propositions contraires, au sein du groupe classe, ne peut suffire à leur intériorisation en conflit cognitif : sans une structuration spécifique (de l'objectif didactique) du groupe des protagonistes⁴⁸⁹, et comme l'ont montré les travaux de Willem Doise et Gabriel Mugny, il pourrait y avoir altération du processus d'élaboration collective des coordinations⁴⁹⁰. Une structure hiérarchique⁴⁹¹ tendrait inévitablement à se substituer à celle initialement prévue. Et l'on pourrait voir alors le maître intervenir trop fortement dans le groupe pour relancer la communication « dans le bon sens », à moins qu'il ne laisse ce groupe, aller, jusqu'au terme de la séance, vers la vacuité. Guy Brousseau décrit à ce propos « *le paradoxe de la dévolution des situations* » : « *si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir* ». « *Si l'élève refuse toute information du maître alors il n'apprend rien* »⁴⁹².

Le niveau d'intensité du conflit est aussi l'une des variables délicates à maîtriser : comme toute stimulation, trop faible, elle risque de ne pas être perçue par le sujet ; trop forte, elle peut engendrer chez lui une forme de paralysie qui le conduit à l'abandon de sa tâche. On voit souvent, dans les classes, certains élèves (qui peuvent être des lycéens) renoncer à poursuivre une discussion lorsque l'opposition qu'ils perçoivent leur paraît trop forte et surtout lorsque celle-ci provient de l'enseignant.

⁴⁸⁷ Utilisation d'un schème cognitif non encore inséré dans une structure de schèmes où se retrouvent cette centration et une centration différente (voire opposée) qui vient la contredire.

⁴⁸⁸ Willem Doise et Gabriel Mugny. *Psychologie sociale et développement cognitif*. Page 42. Armand Colin. 1997.

⁴⁸⁹ Il s'agit de préciser des variables comme les rôles respectifs des protagonistes, leurs positions physiques dans la classe aux moments de l'interaction et surtout les formes discursives autorisées et (ou) encouragées. Ces variables seraient constitutives d'un contrat local explicite.

⁴⁹⁰ Ibid. Page 72.

⁴⁹¹ Un élève ou un groupe ou finalement le maître imposant sa solution avec pour preuve peu signifiante que celle-ci résout bien le problème posé.

⁴⁹² *Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

De plus, « *ni le travail collectif, ni le travail individuel ne devraient déboucher sur un progrès cognitif, les pré-requis cognitifs manquants* »⁴⁹³.

Le langage, parce qu'il implique l'objectivation et la communication intentionnelle, en particulier dans les situations de formulation et les situations de validation⁴⁹⁴, semble témoigner d'une pensée verbale spécifique de ce qui peut être défini comme une des expressions internes de l'activité de conscience. Cette forme d'expression est alors, comme l'indique Raymond Duval, inséparable de l'apparaître de quelque chose à la conscience⁴⁹⁵. Mais l'affectivité et la verbalisation du conflit, nécessaires pour enclencher un processus de construction, n'apportent rien aux compétences intellectuelles qui doivent s'exercer par la suite : l'élève qui finit par réussir, dispose-t-il nécessairement de compétences argumentatives ? Jean Piaget a bien montré que l'enfant peut réussir sans comprendre ; c'est dire, sans que la conceptualisation rejoigne le niveau de l'action car, « *toute prise de conscience consistant en une conceptualisation qui conduit ainsi de l'action (performance matérielle) à l'explication (relations jugées vraies)* »⁴⁹⁶. L'intersubjectivité, orientée par le jeu coopératif et qui s'exprime à travers des formes discursives, peut produire une synergie propre à maintenir la conscience en éveil. Mais les fonctions de communication et d'objectivation n'impliquent pas cette troisième fonction méta-discursive qui est celle du traitement des représentations cognitives⁴⁹⁷. Les opérations, relatives à celle-ci et, concernant les situations mathématiques, ne peuvent se suffire de la prise de conscience de jugements ou d'actes différents. Elles exigent des formes spécifiques d'argumentation qui transcendent les situations. En d'autres termes, l'interaction de tutelle doit déterminer la part, véritablement dévolue à l'élève, qui concerne cet aspect du discours mathématique. Certes, d'une façon générale, c'est bien dans la communication verbale que sera perçue par le sujet la contradiction. Mais nous voyons que, chez les jeunes élèves, cette contradiction peut déjà relever de la signification incarnée⁴⁹⁸ par les complexes

⁴⁹³ *Psychologie sociale et développement cognitif*. Opus cité. Page 55.

Nous avons pu assister à certaines séances dont l'absence de résultats tangibles est explicable par les deux éléments présentés ci-dessus. Nous retenons ceux-ci comme des faits à l'appui d'une position didactique que nous développerons dans le chapitre 4.

⁴⁹⁴ Situations adidactiques qui 'suivent' les situations adidactiques d'action et telles qu'elles sont définies par Guy Brousseau. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁴⁹⁵ *Sémiosis et pensée humaine*. Chapitre 1. *Registre de représentation, compréhension et apprentissage*. Peter Lang, 1995.

⁴⁹⁶ *Réussir et comprendre*. Page 49. Opus cité.

⁴⁹⁷ Nous pouvons retrouver une typologie concernant les fonctions métadiscursives dans Raymond Duval : « *Sémiosis et pensée humaine* ». Chapitre II. *Les fonctions discursives d'une langue*. Peter Lang, 1995

⁴⁹⁸ An sens où l'enfant entend dans un mot, essentiel pour la compréhension de l'énoncé de la tâche, une autre signification que son enseignant. La conséquence en est que, selon toute apparence, l'enfant semble vouloir modifier la tâche elle-même pour un autre profit.

de sons que constituent les mots prononcés eux-mêmes⁴⁹⁹. Nous voyons aussi, très souvent, qu'un conflit sociocognitif repose en fait sur des ambiguïtés illocutoires : l'enseignant ou un pair demandent quelque chose et l'élève comprend autre chose, non parce qu'il ne connaît pas certains mots de la demande mais parce qu'il en entend un autre but. Mais l'enseignant ou le pair ne le perçoivent pas toujours. Il y a là un véritable obstacle : un premier conflit sociocognitif trouvant véritablement ainsi son origine dans la stricte sémiotique. Bien sûr, c'est dans l'activité de l'élève qu'il va se révéler, aussi bien à l'enseignant⁵⁰⁰ qu'à l'élève. Ainsi, si dans la formulation ou la validation des solutions : description, explication, raisonnement..., un conflit sociocognitif se révèle, il est possible que la contradiction soit déjà, en dehors de ces opérations discursives, mais en amont, relative à la forme même des objets linguistiques manipulés.

Une conclusion

Il s'ensuit que, le plus souvent, l'on ne puisse concevoir une restructuration d'un ensemble de schèmes, en vue de l'élaboration d'une connaissance nouvelle, sans que celle-ci soit indéfectiblement associée à une restructuration de nature linguistique, les deux processus ne pouvant s'entendre l'un sans l'autre : le geste, expression d'un schème, et la parole qui en font communication sont indissociables.

Nous postulons, pour l'élaboration d'une technologie des situations didactiques, que le sens interne du schème équilibré réside dans l'achèvement d'une conversion entre deux registres d'expression : le geste et la parole. La complexité d'une telle construction suppose une médiation forte et, en particulier, la gestion d'un conflit sociocognitif, au moins au sein du couple enseignant-élève, et non dévolue strictement au couple élève-élève.

4 Des questions fondamentales pour l'apprentissage

4.1 Notre problématique nous conduit aux questions suivantes⁵⁰¹.

1) Celle du sens et si l'on comprend bien Jean Piaget, la question redondante de la compréhension. C'est que les didactiques admettent explicitement que prise de conscience et construction de sens vont de pair. « *On admet assez généralement que la compréhension a*

⁴⁹⁹ Nous en aurons un exemple au chapitre 5.

⁵⁰⁰ Concernant l'enseignant, sauf si celui-ci l'a détecté dans une analyse a priori.

⁵⁰¹ Dans le cadre de cette thèse, elles ne feront pas l'objet d'une étude approfondie mais exigeront une réponse raisonnable, visant à rendre cohérent le projet de la construction, précisée dans la chapitre précédent et développée dans le chapitre 4.

pour aboutissement l'élaboration d'une représentation sémantique transitoire »⁵⁰². Or, une logique du sens, de celle dont on imagine qu'elle impulse et régleme le processus de la situation-problème, suppose évidemment son contrôle par des structures de régulations cognitives. La logique du sens pourrait alors être conçue comme la logique des régulations cognitives ; se posera alors la définition de certaines de ces régulations qui jouent dans le processus d'apprentissage⁵⁰³.

2) Celle concernant les conditions et formes cognitives qui interviennent dans l'acquisition d'une connaissance mathématique nouvelle. La description d'un processus de restructuration des schèmes, concernés par une telle acquisition, et s'inscrivant dans un paradigme structuraliste, pourrait faciliter, selon un principe d'homologie à définir, la conception de situations didactiques qui pourraient convenir.

3) Celle de la détermination des points de convergence possibles entre les développements psychogénétiques et historiques relatifs à cette connaissance. Il s'agirait de considérer les deux dimensions fondamentales dans la conception des situations didactiques, à savoir la dimension cognitive et la dimension épistémologique relatives au développement de la connaissance en jeu. Et nous devrions interroger la corrélation de ces deux dimensions⁵⁰⁴. Dans un sens, le concept d'obstacle épistémologique apporte un certain éclairage. Mais il ne nous semble pas que, plus généralement, la didactique des mathématiques considère systématiquement, dans le développement historique des connaissances, son aspect cognitif. On pourrait penser pourtant que celui-ci apporte un éclairage, tout aussi systématique, pour la conception des situations didactiques. Dans certains cas, le développement historique d'un concept pourrait être révélateur d'une forme possible de développement ontogénétique relativement à ce concept.

4) Celle qui interroge la nature fonctionnelle de l'obstacle, au sein de l'interaction entre deux structures régulées, celle d'un système cognitif et celle d'un milieu didactique⁵⁰⁵ ? Ce qui suppose aussi de définir de telles structures de régulation. D'un point de vue théorique, le concept d'obstacle lui-même se placerait alors au niveau d'une définition transcendantale.

⁵⁰² « *Dictionnaire fondamental de psychologie* ». Larousse. 2002.

⁵⁰³ Dans notre travail, qui s'inscrit dans le cadre d'une recherche en éducation, nous nous limiterons aux définitions de ces régulations qui nous semblent jouer dans le processus d'apprentissage d'une connaissance nouvelle.

⁵⁰⁴ Il y aurait lieu de considérer de plus la dimension curriculaire. Mais celle-ci se situera pour nous, en quelque sorte, en amont du couple des dimensions précédentes ; puisque, une fois explicitée, nous nous l'imposerons comme une orientation obligée par l'institution. Il est d'ailleurs à remarquer que cette contrainte institutionnelle peut peser fortement sur le choix d'un processus didactique. Nous retrouverons cela dans une étude de cas explicite.

⁵⁰⁵ En nous restreignant, bien sûr, au cas des situations mathématiques qui permettent des définitions spécifiques.

5) Celle de l'adaptation du concept de zone proximal de développement forgé par Lev Vygotski et non opérationnel en l'état⁵⁰⁶. En effet, pour confronter l'élève à des problèmes dits de rupture, la médiation devrait le conduire à achever le développement de certains problèmes dits normaux⁵⁰⁷. Dans notre approche, cette position se fonde sur une interprétation cognitive explicite. A la condition, d'une part, de ne pas vouloir faire de la connaissance visée un objectif frontal. A la condition, d'autre part, de considérer que ce sont bien des conceptions associées à des schèmes d'action spécifiques qu'il s'agit de faire évoluer, c'est-à-dire de reconstruire, en focalisant le problème sur une opération qui donne du sens à une compétence spécifique. Au niveau où nous nous plaçons⁵⁰⁸, cette composante d'une certaine connaissance, sous sa forme institutionnalisée, deviendrait alors la désignation formelle (parfois négociable, dans la classe) d'une action, elle-même déjà intériorisée.

4.2 La possibilité didactique

La question, donnée comme initiale de notre problématique, est celle de la possibilité d'une construction de séquences fondamentales d'apprentissage, suites de situations dont la cohérence didactique se fonde sur des concepts forgés dans les études pointées ci-dessus, et dont les caractéristiques essentielles sont précisées par les assertions suivantes :⁵⁰⁹

➤ le développement des connaissances est celui des compétences. C'est l'opérationnalité d'une connaissance qui fonde cette connaissance. C'est dire, sa nécessité dans un type donné d'action. Le postulat fondamental étant : « *Toute connaissance est liée à une action et connaître un objet ou un événement, c'est les utiliser en les assimilant à des schèmes d'action* »⁵¹⁰ ;

➤ le développement des compétences est celui des différenciations de structures de schèmes d'assimilation et des intégrations⁵¹¹ en de nouvelles structures de schèmes ;

➤ le niveau supérieur de développement d'une compétence est celui d'un type de situations dont elle est l'outil opératoire central⁵¹² ;

⁵⁰⁶ « Ce concept demeure un énoncé métaphorique qui prétend relier le niveau actuel de fonctionnement d'un sujet avec ses acquisitions dues à l'assistance d'autrui » Gracila Ricco. *Acte de la VIIIème Ecole d'été de didactique* de 1995. Opus cité.

⁵⁰⁷ Nous reprenons cette différenciation de Michel Fabre et de Christian Orange qui la reprennent eux-mêmes de Khun. « *Construction des problèmes et franchissement d'obstacles* » Aster n°24. Opus cité.

⁵⁰⁸ Celui de l'école primaire.

⁵⁰⁹ Il faut entendre le terme 'fondamentale' à la fois comme une référence à l'expression de Guy Brousseau 'situation fondamentale' (ensemble de situations adidactiques « *caractéristiques d'une connaissance donnée* » (*Fondement et méthode de la didactique des mathématiques* Opus cité) et une restriction dans la compréhension de celle-ci, puisqu'il s'agit d'une première construction du sens de cette connaissance et, non d'épuiser, par un jeu de variables didactiques, la dénotation de celle-ci.

⁵¹⁰ Jean Piaget. *Biologie et connaissances*. Pages 14-15. Opus cité.

⁵¹¹ Termes définis par Jean Piaget. C'est l'un des aspects fondamentaux qui, dans les processus d'apprentissage devraient guider la conception de situations didactiques.

➤ le développement des connaissances prend toujours la forme du développement de la signification de mots spécifiques. Et donc, les aspects sémiotiques d'une situation, dont essentiellement ceux relatifs aux langages naturels et mathématiques, sont les vecteurs privilégiés de la médiation didactique ;

➤ la compréhension relève de deux situations distinctes et complémentaires, liées au processus de réversibilité tel que le définit Jean Piaget⁵¹³ ;

➤ les obstacles au déroulement naturel des séquences sont ceux qui s'opposent naturellement aux processus de différenciation et d'intégration ; la médiation consiste à construire des séances qui stimulent les capacités naturelles relatives à ces processus, en vue de provoquer les développements intellectuels attendus ;

➤ les situations se construisent autour de différenciations et d'intégrations corrélatives et liées à des obstacles spécifiques⁵¹⁴ repérés a priori. Une séquence fondamentale peut comporter en fait plusieurs situations ;

➤ la situation (problème) concerne précisément ce que nous appellerons le caractère opératoire de la connaissance visée. Elle a pour vocation profonde d'assurer qu'un processus de reconstruction de schèmes, spécifiques de la connaissance visée, est à l'œuvre à l'intérieur du processus didactique lui-même.

Ces questions seront étudiées dans le chapitre 4. Il s'agira de définir certains éléments d'un cadre technologique.

⁵¹² Toujours en nous restreignant au niveau de l'école primaire.

⁵¹³ Nous pensons pouvoir dire que cette conception n'est pas partagée, au sein de la recherche en didactique ; d'autant qu'il nous semble, en particulier dans le concept de situation-problème, que la référence à une logique sous-jacente du sens ne différencie pas explicitement deux moments, dans l'activité compréhension. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 4.

⁵¹⁴ De la connaissance visée.

Chapitre 4

ÉLÉMENTS DE PSYCHOGÉNÉTIQUE POUR L'ANALYSE ET LA CONCEPTION DE SITUATIONS DIDACTIQUES

Il convient d'opposer, dès l'abord, les structures variables définissant les formes ou états successifs d'équilibre, et un certain fonctionnement constant, assurant le passage de n'importe quel état au niveau suivant⁵¹⁵.

Ce chapitre a pour vocation de préciser définitivement un système de concepts, c'est dire, liés entre eux par des propositions de type logiques⁵¹⁶. Le gain en sera, comme on le notera, l'expression d'une technologie des situations didactiques, visant le développement, en milieu scolaire, de compétences mathématiques, et dans un paradigme cognitif. Rappelons que le concept de schème est l'unité cognitive centrale de ce paradigme où l'on trouvera, incontournable, le concept d'obstacle tout au long de notre exposé.

Pour ce faire, on se propose une démarche classique d'analyse et synthèse : une première partie sera donc une constitution d'objets cognitifs qui nous sont apparus nécessaires dans deux analyses assez approfondies⁵¹⁷, respectivement sous 1.4 et sous 1.6.4. Une seconde partie, partitionnée en un paragraphe 2 et un paragraphe 3 aura donc comme objectif fondamental de replacer les concepts principaux de l'analyse dans un système de déductions, et qui les rendent donc, de ce point de vue, solidaires. Il n'est donc pas étonnant que nous nous y munissions de postulats et que donc, par exemple, des concepts comme ceux d'obstacles, de zone proximale de développement, de compréhension et de sens, en milieu didactique, obtiennent là des définitions comme déduites. La partie 3, en particulier, se propose de fournir à notre technologie une formalisation d'une réversibilité opératoire en milieu didactique, sous 3.2.1, et dans un cadre psycholinguistique. Il s'agit là d'exprimer ce que nous pensons être parmi les germes d'une réversibilité opératoire de haut niveau et mise en exergue par Jean Piaget, à savoir de caractère logico-mathématique.

Le dernier paragraphe, numéroté 4, offre la présentation, sous une forme synoptique, des éléments qui contribuent à définir le projet didactique puis finalement à alimenter une

⁵¹⁵ Jean Piaget. *Six leçons de psychologie*. Denoël. 1991

⁵¹⁶ Pour autant que nous y soyons parvenus.

⁵¹⁷ On ne peut jamais être sûr qu'elles le soient suffisamment.

séquence ad hoc. Le tableau lui-même est à rapprocher du schéma se trouvant dans le chapitre 1 dans lequel se trouve précisées des questions épistémologiques entrant dans une problématique construite autour du problème : introduire une notion mathématique nouvelle à l'école primaire.

1 Éléments d'analyse écologique et critique du concept de schème

1.1 Une référence anglo-saxonne dans un cadre piagétien

« *Thus, an educator who is attempting to teach new conceptual material, as in mathematics, is in effect trying to produce cognitive development* »⁵¹⁸. Les chercheurs américains envisagent de reprendre à leur compte les concepts piagétiens d'équilibration et d'abstraction réfléchissante. Pour deux cas particuliers, ils expliquent : « *We will analyse the construction of the concept of induction and compacness according to this comprehensive model of equilibration* »⁵¹⁹. Ils reprennent le principe d'un apprentissage qui ne se suffit pas d'une construction fidèle à un développement de nature strictement logico-mathématique, c'est-à-dire à la seule signification, dans le cadre d'une certaine théorie mathématique des concepts. Mais qu'il faut, de ceux-ci, en construire une décomposition génétique. Leur postulat est que les niveaux de transition, définis par Jean Piaget, sont pertinents pour orienter une telle construction. Ces niveaux se définissent comme des phases ordonnées chronologiquement, explicitant un progrès systématique de la prise de conscience et conduisant, pour une connaissance donnée, de la simple manipulation d'un objet (mathématique), sans coordination entre cette manipulation et les transformations causées à l'objet, à la conceptualisation complète qui se caractérise par une connaissance explicite des interactions entre les actions du sujet et les transformations de l'objet : elle peut être alors être verbalisable, comme une connaissance déclarative, et intégrée à un certain système de concepts. Il ne s'agit donc pas directement des stades généraux piagétiens : stades sensori-moteur, stade des opérations concrètes et stade des opérations formelles, relatifs au développement général de l'intelligence. Il s'agit de phases qui se caractérisent par des « *cognitive behaviors* », relativement à une connaissance (mathématique) donnée, phases dites aussi « *conduites α , β et γ* », face à des perturbations d'une assimilation normale et, reconnues systématiques, dans divers exemples, par Jean Piaget. Elles sont respectivement : une absence de rétroaction et d'anticipation qui seraient nécessaires

⁵¹⁸ Ed. Dubinski and Philip Lewin. *Reflective abstraction and mathematic education*. The journal of mathematical behavior. N°5. Pages 55-92. 1986. « Ainsi, un éducateur qui essaie d'enseigner un nouveau concept, comme en mathématique, obtient comme résultat de produire un développement cognitif »

⁵¹⁹ « Nous analyserons la construction des concepts d'induction et de compacité en relation avec ce modèle complet de l'équilibration » : cas particulier de la construction du raisonnement par récurrence et du concept d'espace compact.

pour intégrer les perturbations extérieures. Dans ce cas, soit les perturbations sont négligées, soit l'assimilation deviendra déformante ; la possibilité de processus rétroactifs permettant les remaniements partiels ou les réorganisations plus complètes ... Les perturbations ne sont pas ignorées. A cette démarche correspondent alors déjà, naturellement, des possibilités d'anticipations ; la généralisation de ces anticipations et rétroactions, sous la forme de compositions opératoires directes et inverses⁵²⁰. Relativement à tel ou tel concept, et en exploitant un questionnement ciblé destiné à des étudiants ayant, de ce concept, reçu un enseignement, ils se donnent comme possible une évaluation et une description (présentable sous la forme d'un graphe) de cette décomposition génétique. Pour ce faire, ils convertissent les phases α , β et γ , en niveaux (I, II et III), niveaux encapsulés, en ce sens qu'un niveau définit d'une part, ce que l'étudiant maîtrise, ce qu'il ne maîtrise pas encore et, d'autre part, ce qui est nécessaire qu'il maîtrise pour atteindre le niveau suivant. Par exemple : « *At the level II, the subject could give a coherent explanation of the concept, including its formal definition, was able to explain various statements about it, and also could discuss some variation of definition. The subject could not, however, apply the concept to specific situations in order to make a proof or test for a property* »⁵²¹. Nous retenons que les chercheurs engagent alors les pédagogues à faire l'évaluation initiale de ces « états cognitifs », avant de s'engager dans l'apprentissage d'un nouveau concept. Ils expriment leur espoir (« *our hope* ») qu'une telle évaluation permette effectivement de dégager un profil génétique épistémique, relatif à tel ou tel concept mathématique. Ce faisant, de tels niveaux sont exprimables en des termes mathématiques. Et les chercheurs tiennent à préciser qu'au fond, on retrouve une décomposition qui apparaît logique d'un strict point de vue mathématique.

Nous analysons pourtant que la méthode, pour obtenir la décomposition, fait l'impasse d'une des difficultés que nous avons reconnue comme récurrente, en didactique des mathématiques : une analyse, en dimensions distinguables, des processus cognitifs et historiques⁵²² des développements des concepts mathématiques. Finalement, on se retrouve avec un graphe de pré-requis définissables en termes d'objets mathématiques : un état cognitif est défini par un état du savoir mathématique. Par exemple : « *Once an aliment is recognized as*

⁵²⁰ *Equilibration des structures cognitives*. Première partie. §13. *Les étapes de la compensation*. Opus cité.

⁵²¹ « Au niveau II, le sujet pourrait donner des explications cohérentes du concept, incluant sa définition formelle, serait capable d'expliquer plusieurs formes de celui-ci et, aussi, pourrait discuter de variations de la définition. Le sujet ne pourrait pas cependant appliquer le concept à des situations spécifiques, dans le but de produire une preuve ou un test relatif à une propriété ».

⁵²² Nous entendons le terme historique au sens large, c'est-à-dire jusqu'à la forme du concept acceptée comme telle par la communauté savante actuelle, pour ce que nous pourrions en connaître.

disequilibrating, the success of re-equilibration will depend, at least in part, on how adequate already cognitive structure are to accommodate the aliment... For instance, if a student's existing system of mathematical structures includes quantification of logical propositions and a strong notion of function, then it may be possible to construct the concept on continuity ».⁵²³

Comme ils l'expriment implicitement ci-dessus, il y aurait bien un parallélisme de deux développements⁵²⁴. Ils se posent bien la question initiale de l'intériorisation d'une certaine forme d'action⁵²⁵, en particulier, une définition de cette forme d'action : « *Recent work has suggested the possibility that on these difficulties can be overcome and appropriate reflective abstractions induced through computer experiences* »⁵²⁶. Mais ils délaissent, dans leur interprétation, d'une part ce qui ressort précisément des schèmes incriminés par l'inadaptation, ce qui fait défaut dans le schème lui-même, et, d'autre part, l'épistémologie historique (par exemple au sens bachelardien) des concepts dont ils considèrent « la décomposition génétique », localisée à un cadre mathématique achevé. Aussi, leur approche ignore, dans l'évaluation des processus et des niveaux cognitifs, la spécificité de ces fonctions qui opèrent sur les schèmes, de ces fonctions qui façonnent des conceptions en contexte et de ces fonctions qui permettent la réalisation de potentiels d'évolution des schèmes dans l'activité⁵²⁷. Ces fonctions, Jean Piaget les nomment régulations. Les processus qu'elles engendrent sont le « comment de l'équilibration et des rééquilibrations »⁵²⁸. **En fait, il nous manque là, ce qui concerne la dynamique de ces constructions structurelles que constituent l'organisation et la réorganisation des schèmes.** D'autre part, la question de ce qui, dans la médiation, pourrait conve-

⁵²³ C'est nous qui soulignons. « Une fois qu'un objet est reconnu comme perturbant, le succès de la rééquilibration dépend, au moins en partie, de la manière dont une pré-structure cognitive accommode cet objet. Par exemple, si la structure mathématique dont dispose un étudiant inclut la logique quantifiée des propositions et une solide notion de fonction, alors il devient possible de construire le concept de continuité ».

⁵²⁴ Nous avons désigné ce parallélisme par le terme d'homéomorphisme qui nous semble être une caractéristique de certains développements scolaires et cognitifs des concepts mathématiques.

⁵²⁵ Nous pensons que ce problème non résolu à l'heure actuelle (et au moins non posé sous cette forme) est central pour les enseignements post primaires, dès lors que l'on veut y prolonger les principes piagétiens d'intériorisation et d'abstraction réfléchissante. Comme nous allons le réaffirmer, le principe d'un apprentissage, par intériorisation de l'action, est certes plus facilement concevable au niveau de l'école primaire. Mais les activités initiales sur des objets mentaux pourraient aussi relever d'une certaine forme d'action à intérioriser.

⁵²⁶ Des travaux récents ont suggéré la possibilité que certaines de ces difficultés puissent être dépassées et, qu'une abstraction réflexive pertinente puisse être initialisée par des expériences informatiques.

⁵²⁷ Un des buts du paragraphe suivant est d'en proposer des définitions afin d'en saisir leurs formes opérationnelles spécifiques.

⁵²⁸ *Equilibration des structures cognitives*. Chapitre premier. Paragraphe 4. *Les régulations*. Nous prendrons une définition du concept de régulation, limitée au fonctionnel, mais là, élargie : fonction organisatrice de certaines opérations cognitives. Nous les considérons comme des schèmes de niveau supérieur. Une régulation est associée à des invariants opératoires que l'on peut appeler des concepts organisateurs. On peut considérer : les fonctions anticipatrices, définies par des opérations de sélection de schèmes spécifiques ; les fonctions mnésiques, définies par des opérations de mise en mémoire à long terme ou de conservation en mémoire de travail ; les fonctions de contrôle, définies par des opérations de contrôle de certaines activités ; la fonction d'assimilation, définie par les exercices de structures de schèmes d'assimilation ; la fonction d'accommodation définie par des opérations d'organisation des structures cognitives, dont la compensation....

nir au déclenchement « d'une posture réflexive », en particulier une problématisation à partir des difficultés rencontrées, n'est pas réellement explicitée. **Surtout, ils font alors l'impasse de la question des obstacles, spécifiques à la fois du savoir à enseigner et du fonctionnement cognitif.** Cependant, nous pouvons retenir le principe d'une décomposition génétique dans l'apprentissage d'un concept, décomposition dont les nœuds seront pour nous définis par des compétences.

1.2 Une référence dans la didactique française et un cadre piagétien corrigé

Nous allons, avec Gérard Vergnaud, militant pour une approche plus psychologique des développements des concepts, retrouver, pourtant paradoxalement, une forme tout aussi mathématisée de la décomposition génétique de ces concepts à enseigner.

1.2.1 Une théorie des concepts

Gérard Vergnaud développe, avec la théorie des champs conceptuels, une théorie psychologique des concepts. « *Un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion* »⁵²⁹. Le psychologue reproche, en particulier, à Jean Piaget de « *s'être intéressé davantage aux structures pouvant caractériser un stade donné de développement qu'à l'évolution adaptative des connaissances, dans une situation ou un ensemble de situations où elles sont fonctionnelles* »⁵³⁰. Auparavant, Gérard Vergnaud avait une autre terminologie, puisque la notion de situation vient ici se substituer à celle d'espace de problèmes ou même celle de situation-problème⁵³¹. Et là, l'expression de plusieurs obstacles⁵³², ce que propose le psychologue et qui réfère bien à certaines considérations de l'espèce cognitive, dans l'analyse a priori de cet espace de problèmes, pouvait sembler encore trop focaliser l'attention sur certaines résolutions de tâches. En effet, il s'agissait de les considérer a priori comme rendant difficile voire impossible la réalisation de ces tâches, durant un certain temps, en deçà duquel un développement cognitif n'est pas encore parvenu à une certaine maturité. « *La psychologie génétique nous apprend en effet que les connaissances se développent lentement ; cela est vrai pour les contenus de connaissances comme pour les instruments logiques de la pensée* »⁵³³. Ainsi, une analyse de cet espace de problèmes, à partir des performances des élèves, placés en situation de résoudre certains d'entre-eux, pouvait-

⁵²⁹ *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*. Article dans la revue *Grand N*, n°38. Pages 21-40. 1986

⁵³⁰ *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁵³¹ *Ibid.*

⁵³² Qu'il qualifie parfois de saut qualitatif ou d'obstacles épistémologiques. *Ibid.*

⁵³³ *Ibid.*

elle, pour lors, se passer de notions plus fines comme celles de schèmes. La complexité psychogénétique trouvait alors à s'expliquer suffisamment par la complexité de cet espace de problèmes, définissables en des termes mathématiques⁵³⁴. Finalement, Gérard Vergnaud va distinguer, avec la psychologie ergonomique, les notions de tâche et d'activité. « *Ce qui veut dire que ce qui va définir la situation de travail (de l'élève, pour nous) ne se ramène pas aux modalités de la prescription, mais inclut aussi certaines dimensions objectives de la situation qui vont orienter l'activité* »⁵³⁵. **L'une de ces dimensions objectives est le fonctionnement de schèmes spécifiques ; et, pour ce qui nous préoccupe dans cette thèse, cette activité mentale d'un élève, spécifique d'une tâche donnée, activité dont l'analyse a priori devrait, à notre sens, entrer pleinement dans la conception de situations didactiques.**

1.2.2 La notion de schème

La notion de schème qui est l'objet principal de ce chapitre ne peut être comprise que relativement à une situation dont un problème (ou une tâche) n'est qu'un des éléments. « *Le couple schème/situation est donc le couple théorique fondamental pour penser l'apprentissage* »⁵³⁶. Ce que nous entendons, d'essentiel dans cette assertion, est que la conception de situations d'apprentissage doit intégrer des formes de causalité explicites qui supposent ou confirment une logique dont relève la dynamique structurale des schèmes⁵³⁷. Cette dynamique doit donc ses déterminations à d'autres facteurs que les seules représentations (initiales ou construites par inférence) d'une tâche spécialisée, représentations dont certaines composantes peuvent être analysées comme des conceptions rationnelles, comme des conceptions obstacles mais aussi comme des conceptions lacunaires, voire même incohérentes : l'état initial des schèmes n'est qu'un élément dans l'analyse d'une activité possible. Ainsi, si la forme stabilisée que peut prendre une production transitoire d'un système, au cours de cette activité, initialement finalisée par une certaine tâche, va nous apparaître comme un état dans un processus fonctionnel objectif, nous entendons qu'une fonction ne peut être comprise à la seule considération de ces états. C'est cette confusion métonymique qui peut rendre difficile, en particulier, l'extraction du concept d'obstacle de sa gangue substantialiste, et aussi, plus généralement, l'analyse a priori des orientations possibles de cette activité. Ainsi, comme nous le verrons plus bas, sur un exemple, l'analyse rétrospective de l'activité d'un système cognitif, après cessation de cette activité, peut alors prendre des orientations très dis-

⁵³⁴ On peut évaluer cette observation dans l'article « *structures additives et complexité psychogénétique*. Revue française de pédagogie. N°36. 1976.

⁵³⁵ *La didactique professionnelle*. Revue française de pédagogie n°154. Pages 145-198. 2006.

⁵³⁶ *La didactique professionnelle*. Opus cité.

⁵³⁷ En d'autres termes, et comme le prouvent les travaux de Jean Piaget, cette causalité est un invariant, relativement au processus général de structuration des schèmes.

tinctes.

1.2.3 Une organisation des connaissances

L'une des idées fondatrices du concept du champ conceptuel est que, pour comprendre le développement et l'organisation des connaissances des élèves, on ne peut se contenter d'une référence au développement et à l'organisation des savoirs mathématiques correspondants ; par conséquent, se cantonner à ce que l'on pourrait appeler la structure logique d'une tâche⁵³⁸ quand, par celle-ci, passe une construction de ces connaissances. Cette dernière référence, seule, pourrait autoriser l'analyse et l'apprentissage d'un concept mathématique en situation scolaire, à isoler ce concept des conditions psychogénétiques de son développement. Ainsi, la connaissance pourrait là se suffire d'une initialisation, par une forme discursive et prédicative. Mais, ce faisant, la démarche pédagogique aurait pour conséquence de sous-estimer la complexité psychogénétique de certains savoirs. L'autre idée forte, à l'origine de la conception de Gérard Vergnaud et inspirée par Jean Piaget, est que la cognition devient conceptualisation dans l'action. Et, plus particulièrement, la forme opérationnelle de la connaissance est génétiquement première⁵³⁹ et c'est elle qui permet de comprendre comment l'action est organisée et comment se construisent les compétences. Ainsi, un concept mathématique ne peut se ramener à sa seule définition, extraite (à des transpositions près⁵⁴⁰) du texte constitué du savoir mathématique. La psychogenèse d'un concept va inclure, dans la compréhension de ce concept, les conditions de son émergence, le champ de ses applications, et aussi les formes sémiotiques qui accompagnent l'ensemble de ses manipulations : Gérard Vergnaud⁵⁴¹ définit ainsi un concept comme un triplet (S, I, S) : avec S, l'ensemble des situations qui donnent son sens au concept (la référence) ; I, l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ; S, l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) Dans les situations didactiques, l'action est la source de la formation des concepts dont les formes initiales sont donc toujours fortement

⁵³⁸ Elle est un objet, dans l'organisation mathématique, et les manipulations qui sont finalisées par sa résolution, obéissent à certaines normes dont la rationalité mathématique, telle qu'elle peut être entendue à un niveau donné.

⁵³⁹ La connaissance naît dans et pour l'action.

⁵⁴⁰ Les savoirs mathématiques sont le plus souvent produits en dehors de l'école et subissent une série d'adaptations avant d'y pénétrer et d'y être enseignés. La théorie de la transposition didactique (notion reprise et développée par Yves Chevallard, pour la didactique des mathématiques) permet de distinguer les savoirs produits par le savant, les savoirs à enseigner qui sont définis par l'institution scolaire, les savoirs enseignés par le professeur et enfin les savoirs appris par les élèves. A tous ces niveaux, le concept est susceptible de ce qui peut tenir lieu de définition (descriptive, procédurale ou prédicative) et reconnue comme mathématique par le sujet des différentes institutions savantes et scolaires (en un sens large, si l'on veut inclure, dans cette affirmation, tous les élèves scolarisés).

⁵⁴¹ *La théorie des champs conceptuels*. Revue de didactique des mathématiques. Vol 10 (2.3). Pages 134-169. 1990.

contextualisées et le plus souvent, au niveau élémentaire, saturées de concret. En conséquence, il convient de ne pas confondre la logique des enchaînements du savoir mathématique, même circonscrite à une structure mathématique simple, avec la logique des enchaînements des connaissances compréhensibles et retenues par les élèves. L'approche de Gérard Vergnaud consiste à montrer, par exemple, qu'une relation mathématique comme $a+b=c$, peut être la même image homomorphe de situations qui diffèrent pourtant fortement quant à leur composantes psycholinguistiques. Nous donnons ce terme en relation avec le postulat suivant : les conduites langagières s'insèrent dans une catégorie plus large que sont les activités cognitives finalisées. « *Les conduites langagières s'articulent avec l'ensemble des autres conduites d'un sujet aux prises avec son environnement* »⁵⁴². Si l'on ramène cet environnement à une situation didactique, celle-ci ne peut s'analyser ou se construire sans les éléments linguistiques explicites, qui joueront sur la forme des connaissances mises en mémoire par un système, plongé dans cette situation. Ainsi, réciproquement, la nature (en particulier pertinente ou non, efficace ou non...) que l'activité de ces mêmes connaissances prendra, se fera indéfectiblement, en relation avec certains types langagiers, à l'origine de sa stimulation, et qui influenceront, en particulier, les représentations initiales des situations. **Dès lors, un élève va devoir, durant sa scolarité, s'adapter à de telles situations qui lui apparaissent véritablement nouvelles, au moins, dans leurs dimensions langagières, alors que pourtant, leurs représentations symboliques sont mathématiquement équivalentes.** Ainsi, la théorie « *permet de repérer et d'étudier les filiations et les ruptures entre les connaissances, du point de vue de leur contenu conceptuel* »⁵⁴³ et, en particulier, concernant certains ensembles de signifiants.

1.2.4 Un découpage relatif des connaissances

Toutefois, comme le fait remarquer Janine Rogalski, il apparaît que le découpage des connaissances mathématiques en champs conceptuels (dont Gérard Vergnaud précise qu'ils ne sont pas disjoints), est à concevoir différemment selon le niveau scolaire considéré⁵⁴⁴. Il est vrai que le concept de champ conceptuel veut rendre compte de deux aspects de la psychogénèse des concepts : le premier « *qui se mesure en années et qui permet d'établir des hiérarchies dans la complexité des problèmes et des concepts mathématiques* »⁵⁴⁵ ; le second, qui « *concerne l'évolution des conceptions et des pratiques d'un sujet ou d'un groupe de sujets*

⁵⁴² Maurice Reuchlin. *Psychologie. La psycholinguistique*. Pages 295-306. PUF. 1977

⁵⁴³ *La théorie des champs conceptuels*. Opus cité.

⁵⁴⁴ *Quelques éléments de la théorie piagétienne et didactique des mathématiques*. Cahier de didactique des mathématiques. N°2. IREM. 1983. Alors que Gérard Vergnaud voit, dans les champs conceptuels, des extensions plus importantes.

⁵⁴⁵ Il s'ensuit les études que nous livre Gérard Vergnaud sur les structures additives et multiplicatives.

face à une situation nouvelle »⁵⁴⁶. Mais il est tout aussi vrai que les conditions logico-mathématiques d'apprentissage ne sont pas les mêmes pour un élève de l'école élémentaire et pour un étudiant de l'université. Les situations, les aspects sémiotiques et les invariants fondamentaux, c'est dire ces ensembles qui accompagnent toute construction de concept, en font différemment les conceptions. Si l'on peut penser qu'il existe, entre le concept forgé à l'école élémentaire et le concept forgé à l'université, une forme de compatibilité⁵⁴⁷, on peut reconnaître toutefois et souvent une sorte d'ignorance entre les deux champs, comme si l'étudiant apprenait un concept complètement nouveau. Par exemple, dans le champ conceptuel de la mesure, à l'école élémentaire, il est un invariant opératoire, celui de l'additivité finie :

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\text{mesure}(A \cup B) = \text{mesure}(A) + \text{mesure}(B)$.

Dans le champ conceptuel de la mesure, à l'université, on trouve comme invariant opératoire l'axiome de σ -additivité :

$(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ étant des ensembles mesurables, quel que soit $i \in \mathbf{N}$,

si $A_i \cap A_j = \emptyset$ quel que soit $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$,

alors $\text{mesure}(\bigcup_{(i=1..n)} A_i) = \sum_{(i=1..n)} \text{mesure}(A_i)$.

De plus, un ensemble non vide peut être de mesure nulle (« ensembles négligeables ») !

Cette mesure est définie sur une tribu⁵⁴⁸ dont les éléments sont des ensembles qui ne connotent pas nécessairement des objets de l'espace réel. En fait, la construction de la théorie de la mesure peut se poser axiomatiquement, au point qu'elle ne se réfère pas à des situations connues de l'élève, comme la mesure des quantités discrètes ou celle des longueurs ou celle des surfaces ou celle des volumes ; dans le cursus scolaire-universitaire, la psychogenèse du champ conceptuel de la mesure abstraite ne s'appuie pas sur celle du champ des différentes mesures concrètes. D'ailleurs, il faut même considérer là plusieurs champs, celui relatif au nombre, et celui relatif aux grandeurs mesurables dites physiques. Ce n'est, qu'a posteriori, que certains étudiants ou des enseignants (de lycée ou collège) peuvent s'aviser de la relation entre les concepts des différents champs, et comprendre alors la mesure abstraite, comme un concept unitaire qui unifie les différents champs. L'analyse psychogénétique du champ conceptuel de la mesure ne peut invoquer, sur ce point particulier, de rupture, ni même de saut

⁵⁴⁶ *Didactique et acquisition du concept de volume. Introduction*. RDM. Volume 4(1). 1983.

⁵⁴⁷ Au moins, en mathématique, le savoir universitaire ne vient-il pas contredire un savoir plus élémentaire. Ce qui est une façon naïve d'exprimer cette compatibilité.

⁵⁴⁸ Une tribu est la donnée d'un ensemble E et d'un ensemble de parties de E qui possèdent, du point de vue des opérations ensemblistes, les bonnes propriétés : suffisantes pour les prendre comme argument d'une mesure alors opérationnelle.

qualitatif, puisque c'est l'analyse mathématique du concept de mesure qui permet de retrouver certaines situations concrètes de ce champ⁵⁴⁹.

1.2.5 Le concept fondamental de schème explicité dans des cas particuliers

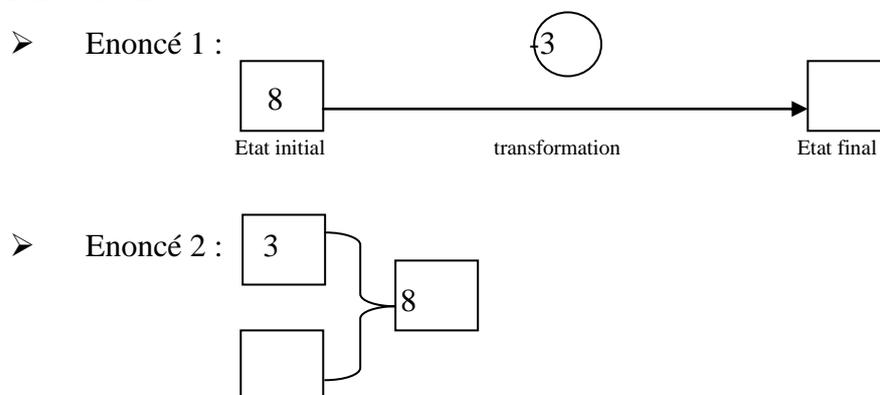
Des exemples avec Gérard Vergnaud.

Revenons, pour illustrer ce qui précède, mais aussi pour aborder des points critiques, à des exemples traités par Gérard Vergnaud.

On considère les trois énoncés⁵⁵⁰ suivants et qui 'relèvent du champ conceptuel de l'addition' :

- Énoncé 1 : Jean avait 8 bonbons ; il en a mangé 3. Combien a-t-il de bonbons maintenant ?
- Énoncé 2 : Il y a 8 enfants à table pour l'anniversaire de Dorothée. 3 sont des filles. Combien de garçons y a-t-il ?
- Énoncé 3 : Stéphanie vient de gagner 3 billes en jouant avec Suzanne. Elle en a maintenant 8. Combien avait-elle de billes avant de jouer ?

Gérard Vergnaud exprime l'idée, que nous partageons, qu'un élève, en apprentissage initial de la soustraction⁵⁵¹, ne peut pas « passer », aisément, (nous dirons de lui-même) de l'énoncé 1 à l'énoncé 2. Et le didacticien va, pour argumenter son propos, produire les représentations suivantes :



Gérard Vergnaud veut expliciter l'idée que si, comme ça l'est dans la majorité des cas, l'apprentissage initial de la soustraction, par un élève, est associé à des situations dont l'argument principal est l'expression d'un retrait ou d'une perte ou d'une diminution, il y aura

⁵⁴⁹ Ce qu'expriment d'une façon plus générale Jean Piaget et Rolando Garcia avec les niveaux intra (mesure concrète d'une grandeur particulière), inter (extension de la mesure concrète à la notion de grandeurs mesurables et équations aux dimensions qui expriment des relations entre ces grandeurs) et trans (avec la théorie de la mesure abstraite et des ensembles mesurables).

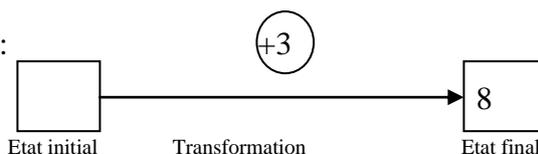
⁵⁵⁰ Les deux premiers énoncés sont repris de l'article : « *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques* ». Le troisième énoncé est repris, en en modifiant les données numériques, de l'article paru dans la revue du CREN : Recherche en éducation n°4. *Représentation et activité : deux concepts étroitement associés*. Octobre 2007.

⁵⁵¹ Actuellement, au premier trimestre d'une classe de Cours Préparatoire, si l'on respecte les programmes de juin 2008.

un obstacle, pour l'élève, à reconnaître, dans l'énoncé 2, une situation relevant de la soustraction ; et bien que les résolutions mathématiques des deux exercices soient les mêmes. Il renforce cette idée, par une métaphore graphique, qui donne à préjuger de la structure associée de la représentation cognitive, dans chacun des deux cas : l'enfant se trouve confronté, dans le deuxième énoncé, à un état mental différent de celui produit dans le premier cas, et qui ne lui apparaît pas immédiatement réductible.⁵⁵² Si l'apprentissage se contente d'un simple forcing pour faire cohabiter en sa mémoire les deux situations, en fait, l'élève va faire « appel », pour chaque cas, à des schèmes différents et présentant une certaine indépendance (sur des périodes variables, selon les cas). Si l'on considère l'aspect développemental, associé à un certain type d'apprentissage, il y a là un problème majeur, puisqu'en mémoire de l'élève, vont perdurer deux aspects considérés comme distincts cognitivement, alors qu'ils relèvent d'un même invariant conceptuel : symbolisé par une relation de type a-b.

Considérons le troisième énoncé apprécié comme plus difficile⁵⁵³ et pour lequel nous proposons une analyse calquée sur celle que Gérard Vergnaud produit dans un autre cas.

La représentation graphique qui lui correspond :



La solution mathématique est encore ici : $8-3$. Il faut retrancher les billes gagnées ! Cela repose sur un théorème en acte⁵⁵⁴ : si une augmentation fait passer de l'état initial à l'état final alors une diminution fait passer de l'état final à l'état initial. « Il existe un petit obstacle épistémologique⁵⁵⁵ » à cette règle, car la soustraction est d'abord associée à une perte et non à un gain. Aussi retrouve-t-on, chez certains élèves, des tentatives par tâtonnement (du genre $3+3$ puis... enfin $5+3$). Nous ajoutons avoir noté, dans la majorité des cas de ce type, que les élèves produisent alors comme réponse, $5+3=8$, et qu'interrogés sur la forme de leur réponse, certains de ceux-ci expliquent alors : « elle avait 5 billes et elle a gagné 3 billes, elle a maintenant

⁵⁵² Ce qui n'empêche pas certains élèves de résoudre facilement la tâche proposée, par exemple par une addition à trou. On retrouve ici cette distinction entre analyse de l'activité et analyse de la tâche ; la seconde peut noter que la tâche est résolue et que la méthode utilisée est celle d'une addition à trou. Mais la première envisage de plus que le schème activé relève de l'addition que l'on peut qualifier de « recherche d'un complément » et non du concept logique des classes disjointes ($A \cup A' = B$ donc $A' = B-A$) et, dans ce dernier cas, que ce que l'on cherche s'obtient par l'opération inverse de l'addition.

⁵⁵³ Une étude, exposée par Gérard Vergnaud dans la revue française de pédagogie (n°36 pages 28-43. 1976 *Structures additives et complexité génétique*), montre que le rapport des nombres de réussite entre les énoncés de type 1 et ceux de type 3 peuvent être de 1/3, en CP, et encore seulement de 2/3, pour une classe de CE1, classes où l'on pouvait rencontrer véritablement les premiers apprentissages explicites de l'addition et de la soustraction.

⁵⁵⁴ Un théorème en acte est selon Gérard Vergnaud un théorème tenu pour vrai, dans l'action, par certains sujets. Il est, relativement au schème opérant, un invariant opératoire.

⁵⁵⁵ Selon les termes de Gérard Vergnaud.

8 billes ». Cette explication permet de rendre compte que les schèmes activés dans la résolution sont relatifs à l'addition et qu'il n'y a pas eu, par rapport à cet état de compétence, de véritable conceptualisation nouvelle, mais plutôt de renforcement de ces schèmes. « *D'autres enfants refusent le problème purement et simplement : ils ne peuvent pas puiser dans leurs ressources des schèmes qui leur permettraient de donner du sens à cette situation* »⁵⁵⁶.

1.2.6 Une classe de situations

« *Une situation donnée ne met pas en œuvre général toutes les propriétés d'un même concept. Si l'on veut faire rencontrer aux élèves toutes ces propriétés, il faut nécessairement faire référence à une diversité de classe de problèmes* »⁵⁵⁷. Mais la question demeure de cette organisation pédagogique qui, à partir d'une situation fondamentale, ferait jouer certaines variables didactiques pour que, chaque catégorie trouve sa place dans une même structure, qui alors définirait la soustraction dans l'ensemble des entiers⁵⁵⁸. En termes psychogénétiques, à l'achèvement d'un certain développement, le schème de la soustraction serait alors considéré comme un concept⁵⁵⁹, dès lors que ce même schème renverrait à une certaine extension, constituée par un ensemble de toutes les situations qui donnent du sens à ce même concept (sa référence). En ce qui concerne précisément la soustraction, il faut entendre aussi que sa compréhension l'associe à l'opération d'addition au sein d'une même structure de groupe (sa signification). Ajoutons que, concernant ce même champ conceptuel, Gérard Vergnaud identifie six grandes catégories dont nous n'avons donné, ci-dessus, des exemples, que relativement à deux d'entre elles. On peut noter ci-dessous les représentations schématiques qu'en

⁵⁵⁶ En invoquant un effet de contrat, on trouve aussi des élèves qui produisent la solution $8+3$. La règle à invoquer pour ce contrat est : « il faut répondre ». Elle permet de court-circuiter une réelle attention sur l'énoncé en n'y retenant que le signifiant « gagner » qui active le schème de l'addition. Mais nous nous exprimons là de façon purement descriptive.

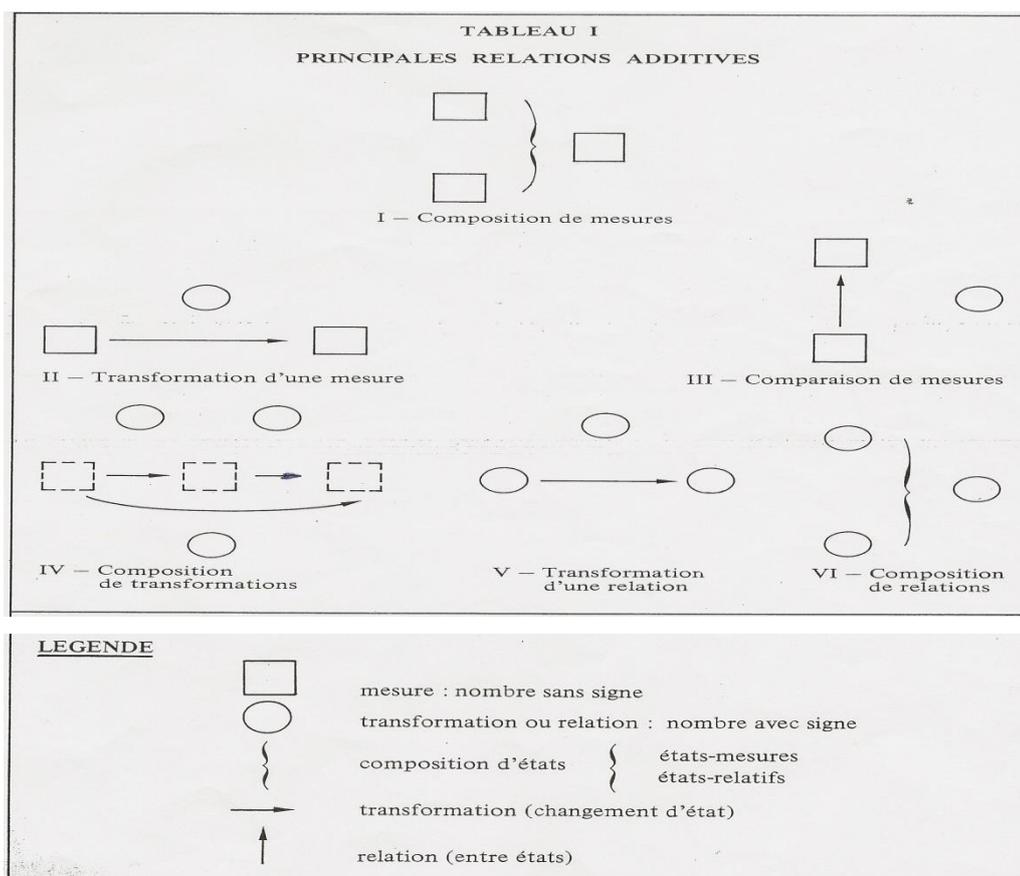
⁵⁵⁷ Gérard Vergnaud. *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁵⁵⁸ C'est le postulat de Guy Brousseau que de considérer que pour chaque concept mathématique, il existe de telles situations. « *Chaque connaissance peut se caractériser par une(ou des) situation(s) adidactique(s) qui en préserve(nt) le sens et que nous appellerons « situation fondamentale ».* Mais l'élève ne peut pas résoudre, d'emblée, n'importe quelle situation adidactique. Le maître lui en ménage donc qui sont à sa portée. Ces situations adidactiques, aménagées à des fins didactiques, déterminent la connaissance enseignée, à un moment donné, et le sens particulier que cette connaissance va prendre, du fait des restrictions et des déformations apportées à la situation fondamentale». *Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁵⁵⁹ **Un schème tend à devenir un concept. Nous reprenons cette appréciation de Jean Piaget bien que nous considérons que schème et concept sont deux termes relevant de paradigmes différents. En reprenant alors une terminologie de Lev Vygotski, schèmes et concepts ont pour nous des germinations opposées. C'est le schème qui construit le concept « par le bas », c'est-à-dire par un accroissement de situations vécutées, alors que le concept, qui existe déjà dans le cadre d'un système connu du médiateur, va lui apparaître comme un construit apportant, « par le haut », une dénotation compatible avec ses propres référents.**

⁴¹ On vérifie que les énoncés 1, 2 et 3 relèvent respectivement des catégories II, I et II. Comme relation, on peut citer, par exemple, celle de la comparaison de deux nombres.

donne le didacticien⁵⁶⁰.



Ainsi, l'émiettement du concept de l'addition (au sens large d'une structure de groupe⁵⁶¹, ce qu'il atteint concrètement dans les programmes de collège) se trouve-t-il fortement probable, dès lors que la pédagogie ne prend pas en compte cet aspect discontinu de sa genèse, en milieu scolaire.

Le programme de mathématique, pour l'enseignement élémentaire de 1970⁵⁶², proposait, dans ses commentaires, une réponse par l'apprentissage initial de propriétés, concernant la structure additive de l'ensemble des entiers naturels :

- l'addition est introduite, décontextualisée, à partir de la relation :

$$\text{Cardinal}(A \cup B) = \text{Cardinal}(A) + \text{Cardinal}(B) \text{ (1)};$$
- l'associativité dans le calcul des sommes⁵⁶³ ;

⁵⁶⁰ *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*. Opus cité.

⁵⁶¹ Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble, $*$ une opération qui est associative, possède un élément neutre et telle que tout élément de G admet un inverse. C'est donc le cas du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ des entiers relatifs.

⁵⁶² *Programme et enseignement des mathématiques à l'enseignement élémentaire*. Journal officiel du 6 janvier 1970. Il va orienter l'enseignement des mathématiques à se placer dans la cadre des mathématiques dites modernes : la théorie des ensembles.

⁵⁶³ On notera un vocabulaire spécifique qui distingue somme et addition, opération qui à un couple d'entiers associe leur somme.

- la soustraction est associée au calcul de Cardinal (A) connaissant Cardinal ($A \cup B$) et Cardinal (B) ⁽²⁾
- dès le CE1 « des égalités comme $8+7=15$ et $15-8=7$ ont même signification » ;
- la relation de comparaison par la recherche d'une correspondance injective et non surjective. ⁵⁶⁴(3).

Et certains aspects de la structure ($\mathbf{Z}, +$), \mathbf{Z} , ensemble des entiers relatifs, et un groupe ⁵⁶⁵ ($\mathbf{Z}, +$), opérant sur l'ensemble \mathbf{N} .

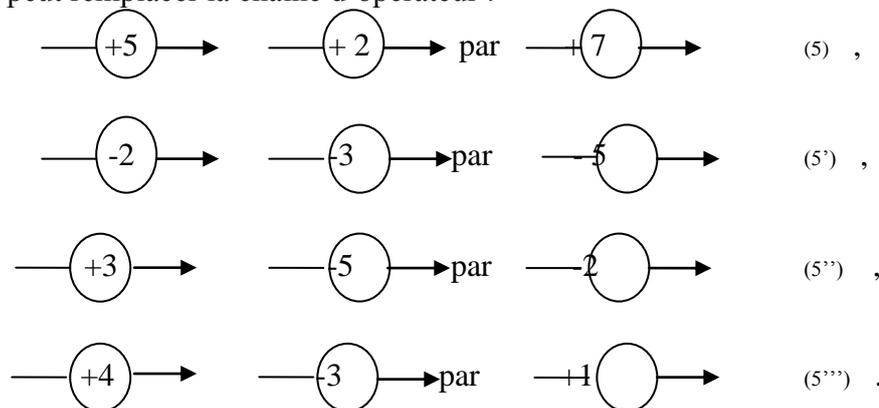
Dans une approche décontextualisée, introduction :

- de la notion d'opérateur additif $\text{---}+4 \bigcirc \text{---} \rightarrow$ (4) ;

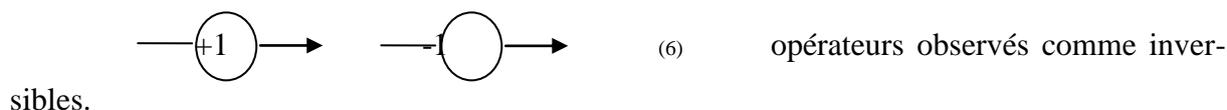
- de la notion d'opérateur soustractif $\text{---}4 \bigcirc \text{---} \rightarrow$ (4') ;

- des chaînes d'opérateurs « additionner... », « soustraire... » :

On peut remplacer la chaîne d'opérateur :



Et aussi



Ainsi, la compétence de cet élève des années 1970 devait être, le plus tôt possible, de reconnaître, en chaque situation, le schéma théorique (de (1) à (6)) qui peut lui être substitué et qui est effectivement associé à une représentation graphique. On peut établir les correspondances suivantes entre les deux registres :

⁵⁶⁴ Cardinal (A) < cardinal (B) signifie que l'on peut associer biunivoquement tous les éléments de A à certains éléments de B, mais non à tous.

⁵⁶⁵ Certaines propriétés de ce groupe sont explicitées par les schémas ci-dessous.

Catégories de Gérard Vergnaud et vocabulaire associé.	Schématisations dans le programme de 1970 et vocabulaire associé.
I	(1) et (2)
II	(4) et (4')
III	(3) et (4) et (4')
IV	(5) et (5') et (5'') et (5''') et (6)
V	(5) et (5') et (5'') et (5''') et (6)
VI	(5) et (5') et (5'') et (5''') et (6)
Mesure, états Transformation Compositions de transformations Comparaison de mesures Relations	Cardinal, nombre Opérateur Chaînes d'opérateurs Comparaison de cardinaux Comparaisons

Notons ci-dessous quelques remarques :

➤ Concernant ce champ des structures additives, la description exhaustive en catégories de situations qu'en donne Gérard Vergnaud l'est, dans un langage qui relève d'un registre homomorphe à celui explicité dans les programmes de 1970 ; Mais son registre se veut insister sur ces états mentaux qui pourraient se constituer, dans les représentations des problèmes que peuvent se construire les systèmes, selon les énoncés. Les contenus langagiers de ces énoncés sont à l'origine de plusieurs différenciations possibles. Pour lui :

- Le nombre va apparaître à l'élève comme l'expression d'une mesure concrète et, dans un cas particulier, comme celle de la pluralité d'un ensemble. Cette pluralité est une composante statique de cet ensemble : mais il ne s'agit pas, à cours terme, de reconnaître un nombre comme un cardinal, expression abstraite de tous les ensembles équipotents.

- Les transformations sont appréhendées à travers leurs dimensions temporelles et significatives (ce qui justifie qu'elles soient signées⁵⁶⁶) : et même, concrètement, il faut un temps pour qu'elles opèrent. Il peut y avoir entre elles une certaine chronologie perçue et conservée dans les représentations. Mais il ne s'agit pas, en particulier, d'en connaître,

⁵⁶⁶ Par exemple pour Jean Piaget, le nombre relatif exprime une action, un changement et non une simple « qualité statique ».

à court terme⁵⁶⁷, les lois de composition.

- Les situations-problèmes, proposées aux élèves, peuvent être les objets de traitements symboliques, dès lors qu'elles apparaissent comme des représentations linguistiques de situations concrètes et naturelles ; en particulier, il ne s'agit pas de privilégier, à court terme, la manipulation des nombres et des opérations, abstraite de tout contexte.

- Nous pensons que c'est cette évocation possible de la situation concrète qui peut permettre à un élève de maintenir plus facilement, en mémoire de travail, une représentation efficace du problème posé. Toutefois, Gérard Vergnaud propose, quand cela est possible, d'avoir recours à des diagrammes. L'intérêt de cette représentation serait, selon lui, d'autant plus réelle que les registres utilisés seraient proches d'un homomorphisme⁵⁶⁸. Un tel homomorphisme permet alors de « rendre compte de la nature des opérations de la pensée », relativement au champ étudié, et une reformulation possible des régulations anticipatrices des bons schèmes. Ces diagrammes sont donc des représentations d'invariants opératoires. On pourrait concevoir que, réciproquement, une telle représentation se substitue à la rétention en mémoire de travail d'une représentation plus coûteuse, d'autant plus efficacement que cet homomorphisme est proche d'un isomorphisme.

- Au contraire, les programmes de 1970 encouragent à accélérer la mise en forme abstraite de la taxonomie des types de situations. « *L'étude des nombres naturels comprend celle des deux opérations fondamentales, l'addition et la soustraction, qui donne à l'ensemble de ces nombres sa structure algébrique propre* ». L'exercice ou le renforcement de l'apprentissage va du générique au particulier et non du particulier au particulier.

Conclusions

Pour Gérard Vergnaud, des concepts mathématiques comme ceux associés aux structures hiérarchisées $((\mathbf{N}, +), (\mathbf{N}, <))$ et $((\mathbf{Z}, +), (\mathbf{Z}, <))$ vont se construire, selon un processus accompagnant essentiellement un accroissement de leur extension, c'est-à-dire de l'ensemble des situations qui leur donne du sens⁵⁶⁹. Ce processus génétique est celui qui va dans le sens d'une synthèse, puisque l'aboutissement, à long terme, est que les concepts puissent s'exprimer à l'aide de leur compréhension.

Aussi, cette construction est l'expression d'une réorganisation d'une structure de schèmes, laquelle est initialisée par des situations-problèmes, dès lors que la structure de ni-

⁵⁶⁷ Au stade des opérations concrètes.

⁵⁶⁸ *L'enfant la mathématique et la réalité. La notion d'homomorphisme et le rôle des représentations*. Pages 199-215. Opus cité

⁵⁶⁹ En nous rapprochant de la distinction fregéenne, la situation où chaque concept est en jeu est une occurrence de ce même concept dont une forme prédicative peut exprimer la dénotation. In *Ecrits logiques et philosophiques. Sens et dénotation*, (pp. 102-126), Paris: Seuil, 1971.

veau antérieur était inadaptée à la situation, et que l'adaptation des schèmes, à cette nouvelle situation, a réussi.

La théorie des champs conceptuels nous propose :

- le principe d'une taxonomie possible des situations-problèmes, et donc un repérage des filiations ou des ruptures éventuelles entre ces situations, ceci, relativement à un concept donné ;

- l'analyse des contenus des schèmes à l'œuvre dans la genèse de l'extension d'un concept. Celle-ci peut permettre de rendre compte, de façon explicite, des déterminants qui entrent dans l'explication des filiations ou des ruptures possibles. En effet, c'est dans l'activation effective de ces éléments que se situe l'efficacité⁵⁷⁰ des schèmes, aussi bien dans leur pouvoir d'assimilation que dans leur difficulté d'adaptation, voire dans leur mort. Gérard Vergnaud donne une liste de ces contenus⁵⁷¹, sur lesquels nous reviendrons plus en détail :

- les buts, les sous-buts, les anticipations,
- les règles d'actions, de prises d'information et de contrôle,
- les invariants opératoires : concepts en actes, théorèmes en acte,
- les inférences.

1.3 Le concept de schème : des difficultés d'opérationnalité

« La notion de schème, que l'on trouve déjà chez Kant et chez Bergson, est l'une des plus importantes de la conception piagétienne des activités psychologiques. Elle est riche de significations que les esquisses de définition proposées en divers ouvrages de l'œuvre de Piaget n'expriment pas complètement »⁵⁷².

1.3.1 Position du problème. les processus fonctionnels : distinction entre le comment et le pourquoi

Notons tout d'abord la définition des schèmes qu'en donne Gérard Vergnaud : « Un schème est une totalité dynamique fonctionnelle qui organise le déroulement dans le temps et dans l'espace des gestes instrumentaux d'un sujet⁵⁷³. Plus précisément, c'est une organisation de l'activité pour une classe définie de situations. L'invariance caractérise l'organisation et non l'activité ; il permet de traiter la contingence et la nouveauté, ce qui ne serait pas le cas

⁵⁷⁰ Qui produit un effet, qui est à l'origine d'une chose.

⁵⁷¹ La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant. Cahier du laboratoire de Leibniz n°53. Pages 3-19. 2002.

⁵⁷² Jean Jacques Ducret. Glossaire mis en ligne. www.fondation.jeanpiaget.ch/fjp/œuvre/index

⁵⁷³ Gérard Vergnaud, qui vient d'évoquer Jean Piaget et le développement de l'enfant au stade sensori-moteur, semble ici faire un lapsus puisqu'il dit là « bébé » et non sujet. Nous nous sommes permis de rectifier. Plus loin il parle d'enfants et d'individus.

s'il s'agissait d'un stéréotype. S'adressant à une classe de situations, c'est un universel »⁵⁷⁴.

Pourtant, une telle approche du fonctionnement des schèmes, même si Gérard Vergnaud en définit des composantes (les quatre précisées ci-dessus), nous semble davantage relever du registre descriptif que du registre explicatif et perdre de fait un certain pouvoir prédictif de l'activité⁵⁷⁵. Ce potentiel, réellement explicité deviendrait pourtant un balisage véritablement pragmatique pour l'analyse et surtout la conception des situations didactiques. **Pour Gérard Vergnaud, le schème est l'entité cognitive explicative, entrant dans la dynamique de l'extension des champs conceptuels. Mais il nous manque, de cette dynamique, les formulations qui permettent d'en comprendre les processus fonctionnels, du double point de vue du comment et du pourquoi.**

Le **comment** concerne l'activation initiale d'un schème, son fonctionnement normal qui est celui de l'assimilation, et l'accommodation éventuelle de ce schème d'assimilation à une situation nouvelle. Les composantes semblent bien enrichir une réponse en ce sens, mais on ne sait pas comment véritablement, elles peuvent s'articuler dans le déroulement de l'action. Surtout, qu'est-ce qui en commande l'opérationnalité ? Gérard Vergnaud attribue aux schèmes une certaine plasticité en ce qui concerne l'activité. Ainsi, il semble donner aux schèmes une forme de liberté sur les modulations possibles de leur activité. Ne faut-il pas sortir du schème pour comprendre ces différentes formes de son activité ? Il faudrait alors entendre l'existence de régulations, celles-ci devenant entre autres actives, lors des phases d'anticipation, de contrôle, de prise d'information ou d'inférence et, d'une façon générale, d'accommodation. Un moment critique fondamental serait bien associé à une perturbation. *« Si l'on définit une perturbation comme ce qui fait obstacle à une assimilation » normale, « toutes les régulations sont, du point de vue du sujet, des réactions à des perturbations »⁵⁷⁶.* Et, si une situation nouvelle en vient à perturber le fonctionnement des schèmes, acquis par deux sujets également performants, dans des situations normales⁵⁷⁷, c'est bien un développement autre qui peut faire entre eux deux la différence, dans des situations anormales : il nous apparaît que celui-ci concerne un système de régulations. **Un schème donné ne serait qu'un des éléments d'une structure cognitive régulée.**

⁵⁷⁴ *La Conceptualisation, clé de voûte des rapports entre pratique et théorie.* Article paru sur le site : eduscol.education.fr

⁵⁷⁵ Explicatif et prédictif semblent des attributs entrant dans la valeur d'un concept scientifique.

⁵⁷⁶ *Équilibration des structures cognitives. Position du problème.* Opus cité. Il faut bien entendre, de plus, une définition plus générale du concept de régulation, dès lors que celui-ci devra aussi rendre compte de certains fonctionnements normaux dans l'activité cognitive ; comme, par exemple, les prises d'informations pour la construction d'une représentation.

⁵⁷⁷ Routinières pour le schème.

Le pourquoi concerne une structure cognitive et la conservation de son organisation fonctionnelle. Sans le renforcement du caractère explicatif, par cette structure cognitive, le schème semble conserver une forme ontologique qui le rend inaccessible à la logique de son essence. Et, en particulier, la façon qu'il a, dans certaines conditions, de se constituer en obstacle, ne posséderait pas d'autre explication que tautologique. Est-ce pour cette raison que le concept de schème « a du mal à passer » comme le rappelle Gérard Vergnaud lui-même ? Par exemple, on peut reconnaître qu'il y aura « *un petit obstacle épistémologique* », pour passer de l'énoncé 1 aux énoncés 2 ou 3, car la soustraction pour l'enfant est d'abord associée à une perte et, non à la recherche d'un complément (énoncé 2) ou à l'inversion d'une transformation opérant positivement (énoncé 3). Mais, demeurent les questions : pourquoi précisément y a-t-il obstacle ? Pourquoi beaucoup d'élèves à qui les problèmes de type 2 ou 3 sont dévolus, pour la première fois, vont-ils échouer, sans une médiation spécifique ? Pourquoi le schème initial de la soustraction (associé à une perte) a-t-il spontanément si peu de pouvoir accommodant ? Pourquoi pouvons-nous noter, aux deux extrêmes, l'abandon des uns, relativement aux problèmes 2 ou 3 et, à l'opposé, la réussite de quelques-uns à ces mêmes problèmes ? Existe-t-il une explication qui, paradoxalement, pourrait unifier les réponses attendues ? Une réponse, qui relève encore du simple descriptif, est que les pouvoirs d'accommodation des uns et des autres diffèrent en l'occurrence. Certains pourraient trouver aussi, dans ce cas, à évoquer des zones proximales de développement différentes⁵⁷⁸. Mais alors quel sens fonctionnel peut-on donner à l'expression : « pouvoir d'accommodation » ? Et de même, quel forme opérationnel peut-t-on se donner de la ZPD⁵⁷⁹ ? Dans cette perspective, on peut reprendre de Gérard Vergnaud une définition, en quatre composantes, qu'il donne de la compétence et, sous la forme de relations⁵⁸⁰ :

- A est plus compétent que B, s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire ;
- A est plus compétent que B, s'il s'y prend d'une meilleure manière ;
- A est plus compétent que B, s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives, qui lui permet d'adapter sa conduite aux différents cas de figure qui peuvent se présenter ;
- A est plus compétent que B, s'il est moins démuné devant une situation nouvelle.

Il faut entendre cette définition, en un sens différentiel, où A et B désignent deux sujets

⁵⁷⁸ Zone proximale de développement : notion conçue par Lev Vygotski et, sur laquelle, nous revenons plus loin.

⁵⁷⁹ Nous dirons tout aussi bien zone de proche développement. Mais nous verrons que l'expression, la plus suggestive, est finalement zone potentielle de développement.

⁵⁸⁰ *La conceptualisation, clé de voûte des rapports entre pratique et théorie*. EDUCOL.education.fr/cid46598.

différents et, en un sens développemental, où A et B désignent le même sujet, respectivement aux instants t' et t avec $t < t'$.

Pour nous rapprocher de réponses aux questions que nous avons posées, il convient déjà de traduire cette définition à l'aide du concept de schème :

- un schème A est plus efficace qu'un autre schème B, si le schème A peut assimiler une situation, alors que le schème B ne le peut pas ;
- un schème A est plus efficace qu'un autre schème B, si le schème A permet de résoudre une tâche de façon plus économique. Cette économie dépend du cas d'espèce et peut recouvrir les notions de rapidité, de fiabilité, ou de moindre coût, concernant un programme d'exécution... ;
- un schème A est plus efficace qu'un autre schème B, si son extension est plus grande, c'est-à-dire si la classe de situations qu'il peut assimiler est plus grande ;
- un schème A est plus efficace qu'un autre schème B, s'il possède un pouvoir d'accommodation plus grand.

Mais nous considérons qu'il s'agit, là encore, de nous exprimer que d'une façon purement descriptive. Il convient donc d'affiner notre approche du fonctionnement des schèmes.

1.3.2 Vers une étude fine de l'activité des schèmes

Revenons alors au cas concret des énoncés d'arithmétique précédents, pour illustrer ces définitions. Les analyses que nous allons présenter, en les reprenant dans le même ordre, laisseront voir, sous une forme particulière, notre approche, relativement aux fonctionnements des schèmes.

Supposons donc que deux sujets aient reçu un même apprentissage initial, relativement à la soustraction et qui a conduit à la construction d'un schème, dans une situation du type dont relève l'énoncé 1⁵⁸¹. L'un des cas suivants permet de distinguer l'élève A et l'élève B⁵⁸² :

- C'est que, pour A, une telle construction est stabilisée alors que, pour B, non. Pour A, l'énoncé conduit à une telle représentation, qu'elle autorise, sans hésitation, comme forme d'action, la résolution 8-3. Pour B, disons simplement ici qu'il ne sait pas encore répondre correctement : le schème de la soustraction ou, plus précisément, celui associé à cette situation n'est pas construit ou, plutôt, dans l'hypothèse où l'on se place, pas assez consolidé.
- C'est que pour A et B, une telle construction est stabilisée et conduit à une repré-

⁵⁸¹ Par exemple, la situation initiale est définie par une perte de mesure donnée. Il s'agit de mesurer un état final connaissant un état initial

⁵⁸² On pourrait, bien sûr illustrer, cette distinction différemment.

sentation efficace⁵⁸³, mais que les outils de la résolution diffèrent. Par exemple, pour calculer $8-3$, le premier élève, soit reconnaît un cas simple et sait énoncer sans plus de réflexion que $8-3=5$, soit va rechercher, dans un répertoire additif, $5+3=8$, et donne alors, la solution cherchée 5. Le second élève va utiliser une procédure de sur-comptage « 3 et 1, 4, 4 et 1, 5, 5 et 1, 6, 6 et 1, 7, 7 et 1, 8 ». Il est clair que cette recherche de solution est moins économique⁵⁸⁴. Nous montrerons que, de façon générale, le système cognitif A est aussi passé antérieurement, dans sa construction du schème de la soustraction, par cette résolution. Mais un certain renforcement ou un changement, résultant de variations didactiques⁵⁸⁵, lors de l'apprentissage, l'ont conduit à abandonner ce recours systématique à un sur comptage.

➤ C'est que pour A, la situation donnée est devenue un cas particulier d'une situation-type. L'organisation de la conduite de A est invariante, pour une classe de situations. Les indices sémiotiques comme les mots perte, diminution, retrait, recul... sont les mots, clés indicateurs, de l'activation d'un même schème. On peut considérer que la représentation se construit sur un mode plus décontextualisé que dans le cas d'une situation particulière : les mesures de l'état initial et de la transformation, les occurrences linguistiques, relatives aux mots clés, la forme de la question, sa position dans l'énoncé (au début ou à la fin) deviennent des variables secondaires d'une situation générique. Il y a, bien sûr, d'autres variables comme un prénom, une évocation de jeu, de billes ou de cases... qui sont alors rejetées, comme non pertinentes, dans la construction d'une représentation de la situation. C'est, à juste titre, que, d'un point de vue descriptif, et sans la chronogenèse des faits cognitifs, on peut exprimer une telle situation à l'aide du diagramme de Gérard Vergnaud. Pour B, la situation initiale reste prégnante, quant à ses aspects secondaires et non pertinents. Les situations dont relève le schème n'apparaissent pas encore comme faisant partie d'une même extension.

➤ Nous devons considérer que les trois points précédents concernent le type auquel se rattache l'énoncé 1. Dès lors que l'élève se retrouve, sans aide, face à l'énoncé 3⁵⁸⁶, il ne dispose pas, dans l'énoncé, des indices sémiotiques qui aboutissent initialement à l'activation du schème de la soustraction. Un élève B peut renoncer purement et simplement car, par exemple, il ne peut stabiliser une représentation efficace : celui de l'addition activée par l'indice sémiotique gagné : gagné 3 billes, c'est ajouter 3 billes ! Mais à quoi ? Car, justement, il ne dispose pas de renseignement sur cette variable qu'est la valeur initiale. Un élève B' peut vouloir continuer, coûte que coûte, et poursuivre par une addition des nombres 8 et

⁵⁸³ De la situation, associée à cet énoncé.

⁵⁸⁴ En didactique, il arrive que l'on parle de technique moins experte.

⁵⁸⁵ Changement de valeur d'une variable didactique, comme la mesure de l'état initial.

⁵⁸⁶ On rappelle que sont donnés l'état final et la transformation et qu'il faut trouver l'état initial.

3⁵⁸⁷. Un élève A est aussi démuni initialement que l'élève B. En effet, le schème activé est pour lui aussi celui d'une addition. Le point fondamental, que nous allons développer dans le paragraphe 2 de ce chapitre, est que ce même schème possède des potentiels d'accommodation et, que ces potentiels, aussi bien le système A que le système B, pourraient en disposer. Il s'agit d'un même patrimoine génétique initial. Toutefois, un développement de l'intelligence⁵⁸⁸, différent de l'élève A et de l'élève B, et qui ne concerne pas exclusivement cette compétence locale, associée au schème de l'addition, va alors jouer sous une forme que nous précisons plus loin. **Le système cognitif A dispose d'autres compétences qui vont lui permettre de transformer l'énoncé, dans un sens qui va assouvir les besoins de son schème initialement activé.** En d'autres termes, il va forcer l'énoncé à s'appliquer à sa représentation. Il va résoudre, avant l'heure, un problème d'algèbre : « j'ai des billes, si je gagne 3 billes, c'est que j'en ajoute 3 et je trouve 8. Qu'est-ce qu'il faut bien ajouter à 3 pour retrouver 8⁵⁸⁹ ? ». En fait, ce nouvel énoncé prend la forme synonyme de l'énoncé 2. Et justement, cet énoncé 2 peut lui-même être transformé en « il y a 8 enfants, si j'enlève les trois filles, il reste les garçons. Combien y a-t-il de garçons ? ». Ce qui permet de se ramener à une situation de type 1 et donc de se servir du schème initial de la soustraction. En d'autres termes, l'élève A s'est construit une complétion (quasi algébrique) de son schème de l'addition qui devient efficace, dans certaines situations de type soustractif.

Nous devons insister sur les points suivants, mais différemment, car ils précisent le niveau d'intelligence atteint par l'élève A :

- L'activité cognitive s'est traduite par une sortie d'un certain schème de l'addition, initialement activé, car l'énoncé ne suffisait pas à son alimentation directe.
- L'activité cognitive, concernant la partie constructive de la compétence, a consisté à construire, à l'aide d'inférences, les éléments manquants à cette alimentation et à l'activité du bon schème : « ce qu'on me demande, c'est ce qu'il faut ajouter à 3 ». Et « ce qu'on me demande et 3 forme 8 ». Gérard Vergnaud parle, à juste titre, de glissement de sens qui va

⁵⁸⁷ L'analyse psychologique de ce cas pourrait d'ailleurs se poursuivre et présenter un intérêt propre car même si cet élève B' dispose d'un bon schème relativement aux situations additives (par exemple au niveau du 3^{ème} point précédent), des effets de contrat (il faut donner une solution) l'amènent à rejeter une représentation pourtant pertinente au profit d'un élan contraignant vers l'expression d'une solution forcée.

⁵⁸⁸ Développement que l'on peut préciser en l'occurrence, comme on le proposera plus loin.

⁵⁸⁹ On noterait, ici, le théorème en acte de « la commutativité de l'addition ». Encore une fois, cette activation virtuelle d'une situation connue, pour assimiler une situation nouvelle, mais liée conceptuellement, est tout à fait générale, comme nous allons le théoriser dans le second paragraphe, relatif à la conception des situations didactiques.

entraîner « la régression par des procédures de niveau inférieur »⁵⁹⁰. Il présente ce glissement cognitif, comme une facilité que la pensée de cet élève s'octroie, facilité que l'on peut alors interpréter comme un obstacle à l'apprentissage d'une compétence nouvelle, dans des situations qu'il faudra reconnaître comme « des situations de type soustractif »⁵⁹¹. Mais nous montrerons qu'une telle activité est, en fait, normale et incontournable, dans un processus de conceptualisation.

➤ Précisons encore cette activité de l'élève A : il utilise le potentiel du schème de l'addition, pour le rendre opérant dans des situations de type soustractif qu'il ne reconnaît pas spontanément comme telles. Ainsi, d'abord, il ne reconnaît pas initialement une situation de type soustractif (énoncé 3). Puis l'indice sémiotique « gagné » provoque une activation du schème de l'addition. Par inférence, il est conduit à transformer l'énoncé 3 en énoncé du type dont relève l'énoncé 1, associé, pour ce type, au schème équilibré de la soustraction. Mais pourquoi ce système cognitif peut-il, pour l'énoncé 2, transformer une représentation statique en une représentation « à transformation »⁵⁹², comme dans le cas de l'énoncé 1 ? Nous devons alors rappeler que le schème de la soustraction, dont dispose ce système, s'est initialement construit à l'aide du sur-comptage, ce qui relève d'une procédure additive canonique,⁵⁹³ et qui est une procédure à états successifs et récursifs : un ajout de 1 au dernier entier prononcé⁵⁹⁴. Accessoirement, nous exprimons cela en disant que le schème de la soustraction est dans le potentiel de développement du schème de l'addition⁵⁹⁵. Et nous devons noter que ce potentiel permet d'accéder, par régression⁵⁹⁶, à la résolution de l'exercice 2, puis de l'exercice 3. **Nous exprimerons que la réalisation de ce potentiel n'est pas le fait du schème lui-même, mais de fonctions régulatrices dont le développement a atteint, concernant le système A, un certain niveau, ce qui n'est pas le cas pour le système B.** Même si l'élève A et

⁵⁹⁰ *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.* Opus cité. Ce que l'on pourrait dire ainsi, dès lors que l'élève a effectivement reçu un apprentissage relatif à « des situations de types soustractifs ».

Jean Piaget peut invoquer une assimilation déformante lorsque le sujet interprète autrement le résultat de son action. Ce qui sera forcément le cas de l'élève A puisque sa conception de la réussite sera celle d'une maîtrise d'une situation de type strictement additive.

⁵⁹¹ En fait, Gérard Vergnaud considère des énoncés plus complexes dont l'enjeu est la construction de la composition des transformations (deux gains successifs ou deux pertes successives ou un gain puis une perte...)

⁵⁹² Selon la typologie de Gérard Vergnaud.

⁵⁹³ Dans les apprentissages, c'est ce type de procédure, dite personnelle, qui normalement émerge, avant que soit institutionnalisée une formulation conduisant à aller vers le schème de la soustraction.

⁵⁹⁴ Récursivité définie par la relation de récurrence : le suivant de n est $n + 1$.

⁵⁹⁵ Rappelons ce fait remarquable, qu'en terme d'opérations formelles, les mathématiques poseront définitivement que les opérations d'additions et de soustraction sont inverses l'une de l'autre. Il y a donc là une compatibilité entre l'épistémologie cognitive et l'épistémologie historique.

⁵⁹⁶ Ce qui est une façon de rendre compte, a posteriori, d'une forme de continuité, dans la construction de nouvelles structures de schèmes, puisque le système A va réussir, dans la situation de l'énoncé 3, en revenant à une procédure primitive de résolution, dans la situation de l'exercice 2, moyennant une reformulation langagière.

l'élève B sont passés par les mêmes étapes, relativement à la construction du schème de l'addition et du schème de la soustraction (celui qui permet de résoudre l'exercice 1), ils ont un développement différent de certaines régulations⁵⁹⁷, pour des raisons multiples, dont l'une pourrait être associée à des compétences linguistiques de valeurs inégales⁵⁹⁸. De ce point de vue, l'élève A semble parvenir à la réussite parce justement, il opère des manipulations de nature linguistique. Il « joue » avec le mot « gagné » (énoncé 3) pour aller vers le mot « ajouter » et avec l'expression « enlever 3 filles » (pour l'énoncé 2), comme synonyme de l'expression « perdre 3 billes ». L'élève B ne semble pas disposer, lui, de la capacité de telles conversions linguistiques. « Sa langue » reste, en l'occurrence, engluée dans un contexte étroit. Nous avons pu constater, dans des classes d'établissement dits ZEP⁵⁹⁹, la surprise des élèves devant de telles conversions dont fait usage l'enseignant. Et souvent, ils le questionnent, en demandant si eux, ils en avaient le droit. Nous tirerons, de l'intrigue, telle que nous l'avons développée ci-dessus, des conséquences, quant à la conception de situations didactiques, en vue de l'apprentissage de notions nouvelles à l'école primaire⁶⁰⁰.

➤ Gérard Vergnaud va interpréter autrement l'activité de l'élève A :

- Il pense que le schème principal, concerné par la situation (énoncé 3), devrait permettre l'apparition de « la solution canonique », 8-3. Pour lui, l'élève A a recourt à « un autre schème », puisqu'il cherche à résoudre une addition à trou (éventuellement en faisant des essais), stratégie que l'on peut formaliser par l'égalité $x+3 = 8$ ⁶⁰¹. Et nous venons de reconnaître, en accord avec le psychologue, cette forme d'activité, dans notre propre analyse. En ce sens strict, il faudrait entendre que l'accommodation à de nouvelles « situations de type soustractif », concerne, très précisément, le schème de l'addition. Toutefois, nous avons, de plus, retrouvé une construction spécifique, aboutissant à une accommodation du schème initial de la soustraction. Sans cela, n'y a-t-il pas contradiction à considérer que « *si la connaissance est adaptation, ce sont les schèmes qui s'adaptent, et ils s'adaptent à des situa-*

⁵⁹⁷ Nous allons, dans les lignes qui suivent, exprimer la notion de résultante cognitive, d'intensité spécifique, et accompagnant la construction d'une connaissance nouvelle.

⁵⁹⁸ Il nous faut en tirer une conséquence didactique majeure : la conception d'une situation d'apprentissage doit initialement se faire dans un cadre linguistique le plus dépouillé possible. Et encore, comme nous l'avons constaté, à l'issue de l'exécution d'une séquence, concernant l'apprentissage de la mesure fraction, il conviendrait de faire une évaluation systématique des éléments constituant cette « pauvreté linguistique ».

⁵⁹⁹ L'éducation nationale qualifie certains établissements, comme relevant d'une Zone d'Education Prioritaire. Des moyens particuliers sont sensés être mis à la disposition de tels établissements pour combler certaines formes de difficultés scolaires.

⁶⁰⁰ Le cas extrême et qui nous semble conforter notre position est que, des enfants, issues de classes dites défavorisées, peuvent faire aussi bien que des enfants de classes dites favorisées, dans des épreuves non verbales, mais pas aux épreuves mobilisant le langage où leurs performances sont systématiquement et significativement inférieures. Travaux rapportés par Michel Fayol dans un article en ligne. *Acquisition et mise en œuvre de la numération*. <http://www.wpsy.univ-bpclermont.fr/lapsco/dispoetudiants/FayolArith2000.pdf>

⁶⁰¹ Nous ne disons pas équation, pour ne pas connoter, véritablement, le cadre algébrique.

tions »⁶⁰². Notre approche, dans l'analyse de l'activité du système A, est donc autre. Pour nous, il s'agit du même schème de la soustraction, que le système A va compléter.

- Alors, pour cette même analyse de l'activité du système A, Gérard Vergnaud fait appel au théorème en acte de l'inversion d'un gain en une perte : « si une augmentation fait passer de l'état initial à l'état final alors, une diminution fait passer de l'état final à l'état initial ». Ce qui semble l'un des traits de la notion de théorème en acte de Gérard Vergnaud est que celui-ci n'a pas été l'objet d'un apprentissage implicite, en milieu didactique. « *C'est une proposition tenue pour vraie dans l'activité* »⁶⁰³. Notre analyse, qui renforce cette position, nous a fait entrevoir que ce n'est pas un théorème en acte, outil disponible en quelque sorte, et qui a permis au système A de se sortir de l'inadaptation, mais que « ce théorème en acte » a été l'objet fabriqué par le système A, justement, pour accommoder le schème d'assimilation d'une situation additive dont il disposait initialement. De plus, même si l'élève a été réellement conscient de son activité d'inférence, le contenu de cette conscience ne nous apparaît pas vraiment exprimable à l'aide du théorème en acte. Ce dernier nous apparaît comme ce qui a été un sous-but, un construit par nécessité. Fondamentalement, il ne se donne pas comme une composante déjà disponible dans un schème, c'est-à-dire l'un de ses invariants opératoires. La situation initiale d'apprentissage de l'addition contient celle de la soustraction, l'une et l'autre se constituant finalement en opérations réversibles⁶⁰⁴. Plus généralement, notre interprétation de l'adaptation des schèmes en situation, n'est donc pas un abandon des schèmes inefficaces mais une réorganisation de ces mêmes schèmes, suivant en cela aussi bien Jean Piaget que Gérard Vergnaud. Nous en tirerons des conséquences sur un aspect fondamental, concernant ces situations didactiques dont la vocation est la construction d'une compétence nouvelle. Car, dans notre conception, obtenue en interprétant la théorie opératoire de Jean Piaget⁶⁰⁵, ce n'est pas à l'élève de prendre seul en charge la construction de cette dualité des schèmes de l'addition et de la soustraction.

➤ En fait, ces différentes interprétations de l'activité de l'élève devraient aussi reposer sur une évaluation des schèmes dont dispose cet élève, pour agir dans des situations normales, situations de type additives et situations associées à l'énoncé 1, dès lors que cette situation a été proposée pour un apprentissage initial de la soustraction. **Nous insisterons,**

⁶⁰² Gérard Vergnaud. *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*. Opus cité

⁶⁰³ Gérard Vergnaud. *Représentation et activité : deux concepts étroitement associés*. Revue du CREN : Recherche en éducation n°4. Octobre 2007.

⁶⁰⁴ Dans ce cas particulier, on parlera avec la mathématique d'opérations inverses. « Dans $(\mathbf{Z}, +)$, retrancher un élément, c'est ajouter l'opposé ». D'où le processus de neutralisation :

Pour $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z}$, $a + (b) + (-b) = a + 0 = a$

⁶⁰⁵ On retrouvera aussi cette interprétation dans les écrits d'Hans Aebli.

dans le paragraphe suivant, sur le principe que ces schèmes, concernant un sujet épistémique, sont ce que les situations didactiques en ont fait. Sur ce point, situations d'apprentissages et sujets épistémiques seraient en interaction de façon objective. Or, précisément dans le cas de la construction en milieu didactique du schème de l'addition, le théorème en acte de Gérard Vergnaud fait ou ne fait pas, implicitement, partie indéfectible d'une telle construction. La question didactique dont nous renvoyons la réponse dans le paragraphe suivant est celle de la pertinence de la construction d'une telle séance, qui pourrait ne viser initialement qu'à faire « rentrer l'appareil cognitif » d'un sujet dans le champ conceptuel de l'addition, en se limitant à des situations de type strictement additive⁶⁰⁶. L'équipe ERMEL, sous la direction de Jacques Colomb, fait le choix d'une introduction simultanée de l'addition et de la soustraction. « *Les problèmes faisant intervenir l'addition et la soustraction portent sur les mêmes situations* »⁶⁰⁷. Mais la seule raison cognitive évoquée est « *d'éviter aux élèves de penser que tout problème se résout par une addition* ». Les auteurs n'évoquent donc pas le caractère opératoire de la connaissance « addition », au sens où nous l'avons rappelé avec Hans Aebli. La plupart des autres auteurs de manuels introduisent ces deux opérations, en deux moments de l'année nettement séparés⁶⁰⁸. Il semble que cette position relève d'un héritage de la pédagogie traditionnelle qui veut que la construction de l'opération de soustraction sera d'autant « plus facile » que celle de l'addition sera consolidée. La soustraction est considérée là comme un prolongement logique de l'addition et non, comme une autre forme d'un même concept algébrique et, surtout, comme un autre aspect d'un même système de schèmes « additif-soustractif ». En analysant alors ceux des exercices visant cette consolidation⁶⁰⁹, il apparaît alors une confusion entre ce que l'on peut appeler le sens de l'opération d'addition et la mémorisation d'un répertoire opératoire.

Si, à juste titre, la réalité d'une psychogenèse des connaissances ainsi établie, nous fait rejeter l'illusion d'une continuité génétique, justifiée par celle du savoir mathématique constitué, nous retrouvons difficilement, dans les analyses de Gérard Vergnaud, les outils qui permettraient d'accompagner cette psychogenèse, en milieu didactique. « *Se pose alors le problème d'extension du schème à une classe plus large : on peut parler alors de délocalisation, de généralisation, de transfert, de décontextualisation. On ne peut imaginer qu'un tel proces-*

⁶⁰⁶ Ce qui est le cas de nombreux manuels.

⁶⁰⁷ Cap Math, CP. Guide de l'enseignant. Hatier 2005.

⁶⁰⁸ C'est le cas de Rémi Brissiaud et al. *J'apprends les maths avec Picbille*. CP. Retz. 2008.

⁶⁰⁹ Et, étant donnée leur pauvreté situationnelle.

*sus intervienne sans que soient reconnues par le sujet des analogies et parentés (ressemblances sur certains sujets, différences sur d'autres) entre la classe des situations sur laquelle le schème était déjà opératoire⁶¹⁰, pour le sujet, et les situations nouvelles à acquérir. **La reconnaissance d'invariants est donc la clé de la généralisation du schème** »⁶¹¹. Mais encore une fois, la question demeure, pour la médiation, de l'évaluation de cette compétence qui rend capable de reconnaître la nécessité d'invariants opératoires nouveaux et d'en tirer des conséquences⁶¹². Il n'y a rien d'évident à la considérer comme un apriori, dans le développement de l'extension d'un schème quelconque. Mais au contraire, nous devrions penser qu'elle est elle-même en développement et, son niveau de fonctionnement est, en chaque cas, suffisant ou non. Nous devons à Lev Vygotski d'entendre une telle fonction comme relevant d'un fonctionnement transcendant les schèmes eux-mêmes, fonctionnement qui se caractérise par le caractère conscient et volontaire de l'activité. « *Le développement du concept quotidien doit atteindre un certain niveau pour que de manière générale, l'enfant puisse assimiler un concept scientifique et en prendre conscience. L'enfant doit être parvenu, dans ses concepts spontanés, jusqu'au seuil au-delà duquel, d'une manière générale, la prise de conscience devient possible* »⁶¹³. Nous devons à Jean Piaget de la reconnaître comme une fonction de régulation⁶¹⁴, dès lors qu'elle ne doit son opérationnalité, dans la mesure de son développement, qu'à des perturbations auxquelles est soumise l'assimilation des schèmes disponibles. Quelle situation didactique mettre en œuvre pour qu'une connaissance, opérationnelle pour une classe de situations, puisse le devenir pour une autre classe et, ce faisant, accroître son*

⁶¹⁰ Il nous semble que Gérard Vergnaud utilise là ce terme de façon inadaptée, en le substituant au terme opérationnel. Cela est assez gênant, dès lors que pour Jean Piaget comme pour nous-mêmes, un schème est fonctionnellement opérationnel et tend structurellement à être opératoire. C'est justement ces deux aspects qui se retrouvent, aussi bien dans l'assimilation que dans l'accommodation. **D'autre part, c'est le caractère opérationnel d'un schème qui peut lui permettre à terme d'être opératoire et de se trouver plongé dans une structure de schèmes plus complexe, possédant des propriétés stables dont celles de la réversibilité. Et c'est ce caractère opératoire qui va lui permettre d'être de plus en plus opérationnel. On note donc là une dialectique qu'il est important de souligner car elle exprime un des éléments entrant dans la causalité cyclique des restructurations schématiques.**

⁶¹¹ Gérard Vergnaud. *La théorie des champs conceptuels*. Opus cité.

⁶¹² Et l'on voit, dans la citation précédente, combien le processus qui accompagne son expression est complexe : délocalisation, généralisation, transfert, décontextualisation, reconnaissance d'analogies ou de différences !

⁶¹³ Lev Vygotski. *Pensée et langage. Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Opus cité. Nous avons déjà proposé de considérer, qu'au niveau de l'école primaire, les schèmes dont dispose un élève, à chaque moment de sa scolarité, soient assimilables aux concepts quotidiens définis par Lev Vygotski. Comme les concepts spontanés (construits en dehors de l'école), ils nous apparaissent comme « *gorgés de contenus empiriques* », et ont le plus souvent un caractère non conscient et involontaire. Aussi, nous substituons au terme de concept, le terme de schème qui, à tout moment de son développement scolaire, possède de telles caractéristiques, comme le souligne Jean Piaget.

⁶¹⁴ L'opérationnalité de la fonction de régulation prend la forme d'opérations diverses dont, en particulier, l'anticipation des schèmes, à partir d'indicateurs explicites et la compensation, à partir d'une perturbation perçue.

caractère opératoire ? Le programme de 1970, sur l'enseignement mathématiques⁶¹⁵, avaient apporté la réponse des mathématiques dites modernes. Il y était réaffirmé que les concepts fondamentaux sont abstraits par nature. « *Mais que, par exemple, concernant la notion de nombre naturel, l'enfant sera appelé à manipuler effectivement et individuellement des collections d'objets distincts /.../. Les manipulations seront nombreuses et variées, non pour créer des automatismes, mais pour que leur variété permette à l'élève, en exerçant sa réflexion sur ce qu'il fait, de reconnaître des analogies, en dépit des différences, de dégager peu à peu, de manière d'abord intuitive et confuse, puis de plus en plus consciente et claire, une notion abstraite et générale, celle du nombre naturel* »⁶¹⁶. Si l'on définit, comme une compétence, la capacité de spécifier par un nombre une certaine pluralité d'objets, reconnus au préalable comme des unités équivalentes et distinctes, le schème qui va être initialement construit, en suivant les recommandations de ce programme, correspond à la mise en correspondance biunivoque⁶¹⁷. En se coordonnant à d'autres schèmes, dont l'un contient le concept en acte de la transitivité de cette correspondance, il s'agit bien de la construction de cet invariant opératoire qu'est celui de la cardinalité⁶¹⁸. Il semble qu'il y ait une parenté avec les propos de Gérard Vergnaud. La différence fondamentale est que, pour le néo piagétien, un concept se construit d'abord par un accroissement de sa référence, un ensemble de situations qui lui donne du sens. La compréhension du concept⁶¹⁹ n'est pas un objectif explicite dans la psychogénèse, mais une construction implicite, progressive et lente en milieu didactique. En fait, les programmes de 1970 considèrent comme postulat que l'enfant de la classe préparatoire peut atteindre, en quelques séances, une conscience de niveau 3⁶²⁰, relativement au concept de nombre. Mais, dans tous les cas, on peut exprimer un certain apprentissage à l'aide du concept de schème. Nous avons entendu de Jean Piaget et de Gérard Vergnaud que le schème est

⁶¹⁵ Arrêté du 2 janvier 1970.

⁶¹⁶ Et ceci est bien exprimé comme un des objectifs de la classe préparatoire, dans les programmes de 1970. Hans Aebli (*Didactique psychologique*), à l'instar de Jean Piaget, analyse là une pédagogie dite sensualiste-empiriste. L'enfant va dégager des situations multiples, une invariance pour aller vers le concept. « *Son trait caractéristique est d'offrir des données sensibles à la perception et à l'observation des élèves* ». « *L'esprit de l'enfant est une table rase sur lequel s'impriment les impressions laissées par les sens* ». Puis, une faculté naturelle d'abstraction, conduit à ne retenir que l'essence, transcendant l'accidentel !

⁶¹⁷ On fait correspondre, terme à terme, les éléments de deux ensembles.

⁶¹⁸ Un théorème en acte : le nombre est ce qui est de commun dans la quantité de plusieurs collections, indépendamment de la nature et de la disposition des objets qui les constituent. D'ailleurs, il n'existe pas, dans l'enseignement non universitaire de définition explicite du nombre entier. Cette définition d'ailleurs inutile, sauf dans le cas d'une approche bourbakiste, serait de dire que la relation « être en relation biunivoque » est collectivisante, en ce sens qu'elle permet d'affirmer l'existence d'un certain ensemble appelé cardinal, cardinal qui, dans le cas fini, est ce que l'on appelle un entier. On comprend bien que l'utilisation d'un entier, pour dénombrer, repose toujours sur un théorème en acte et, concernant l'entier lui-même, sur un concept en acte.

⁶¹⁹ Sa dénotation et aussi sa forme prédicative.

⁶²⁰ Il n'est pas dit, dans ces programmes, si cette conscience doit forcément être associée à un verbalisme explicite et stable.

d'une part opérationnel et, d'autre part, opératoire⁶²¹. A moins qu'un schème ne meurt, car sans capacité d'adaptation, mais nous avons vu, dans le chapitre précédent, que le recours à cette occurrence semble peu pertinente en mathématique⁶²², comment alors peuvent se construire ces deux fonctionnalités, en milieu didactique ?

1.3.3 De l'importance des registres sémiotiques

La définition que donne Gérard Vergnaud du concept, dans la théorie de champs conceptuels, nous fait tirer, comme conséquence, le principe qu'il ne faut pas entendre les connaissances, indépendamment des formes sémiotiques qui font partie du sens que ce même sujet peut leur attribuer, objectivement pour lui. C'est ce que nous avons appelé, en particulier, des formes psycholinguistiques, lorsque ces formes sémiotiques sont de nature linguistiques. Il faut d'ailleurs insister sur le fait que cette relation de dépendance à un complexe de sons, comme le dit Lev Vygotski, ou à d'autres formes sémiotiques, suit vraisemblablement un développement au sens vygotkien, c'est-à-dire que de telles formes sont des attributs de l'objet qu'elles désignent, attributs tout aussi physiques que d'autres attributs. Par exemple, dans les petites classes de l'école primaire, le mot carré, avec la perception phonologique qui lui correspond, et qui peut désigner une figure tracée sur un tableau, est une propriété de cette figure, au même titre que l'égalité des longueurs de ses côtés, ou même la couleur du dessin de ce carré. Cette caractéristique n'est pas toujours visible dans le dialogue entre une maîtresse et un enfant, car ce niveau de dénotation (qui n'en est donc pas une) suffit, par exemple, pour donner à la maîtresse la bonne forme demandée et choisie dans une collection d'autres formes. A ce niveau, la communication repose sur une illusion. Dans une certaine mesure, l'efficacité de celle-ci reposerait là, davantage sur une sémiotique de la désignation que sur celle de la signification. *« En conversant avec l'entourage\...\, il sera conduit à un échange toujours plus grand de vérités obligatoires\...\, Seulement, il ne faut pas exagérer, ni confondre les capacités d'assimilation propres à la pensée intuitive avec ce qu'elles deviendront*

⁶²¹ Nous entendons opérationnel, comme ce qui est prêt à entrer en activité, à réaliser parfaitement une opération. Nous entendons opératoire, comme ce qui sert à effectuer des opérations logiques (réversibles), de bas niveau (celui des schèmes) ou de haut niveau (celui des opérations ou relations mathématiques). Mais aussi à former des liaisons psycholinguistiques entre des schèmes et des formulations langagières (à un bas niveau) et entre concepts et noms propres (à un haut niveau).

⁶²² Il n'est que voir les théorèmes en actes que donnent Gérard Vergnaud, comme invariants opératoires, composants conceptuels des schèmes et qui ne sont pas faux pour une certaine classe de situations, mais qui peuvent l'être pour une autre classe de situations, sans que se construise une forme d'aménagement. Toutefois, cet aménagement ne s'accompagne pas d'un rejet d'une proposition devenue fausse. Il n'est pas à exclure, toutefois, qu'un élève ait pu se construire certains schèmes qui n'ont pas de domaine de validité en mathématique. Par exemple celui qui correspond à la résolution de l'équation $3x=0$ et qui produit la solution $x = -3$. Nous considérons qu'il y a schème au moins pour deux raisons : 1) cette équation est élément d'un type : la solution fautive est systématique, 2) on sait que ce schème est associé structurellement à celui qui correspond à l'équation $3 + x = 0$. Il y a donc théorème en acte qui définit ces deux équations comme équivalentes, dès lors que des indices sémiotiques sont les mêmes et en nombre suffisant.

*au niveau opératoire. ... La pensée intuitive, dominant jusqu'à la petite enfance (7 ans), est caractérisée par un déséquilibre non encore réduit, entre l'assimilation et l'accommodation. Un rapport intuitif résulte toujours d'une centration de la pensée, en fonction de l'activité propre, par opposition au groupement de tous les rapports en jeu : ainsi, l'équivalence entre deux séries d'objets n'est admise que, relativement à l'action de les faire correspondre, et se perd, sitôt cette action remplacée par une autre. Par le fait même que la pensée intuitive est, à chaque instant, centrée sur un rapport donné, elle est phénoméniste et n'atteint du réel que son apparence perceptive »*⁶²³. Mais, pour la didactique, la connaissance de cet aspect, permet de reconnaître un obstacle épistémologique, dans la construction des concepts catégoriels, comme le Carré, et la hiérarchisation des concepts. Pour l'enfant, la désignation est bijective, « un mot-un objet perçu ». Par exemple le mot « rond » s'apparente à une qualité de l'objet présentement perçu. Elle ne l'est pas potentiellement, à cet instant, celle d'autres objets non encore perçus⁶²⁴. Dans le chapitre 6, nous revisiterons, en les approfondissant, certaines conséquences de cet obstacle. Et, c'est d'ailleurs, en insistant sur la forme des énoncés qui peuvent être successivement proposés à des élèves, que Gérard Vergnaud explicite la nature de certaines ruptures. Ces formes d'énoncés lui donnent l'occasion d'élaborer « *une méthode, pour analyser une classe de situations, en identifiant les concepts à mobiliser, pour résoudre les problèmes présents dans cette classe* »⁶²⁵.

1.3.3.1 Une focalisation sur les signifiants mathématiques

A la fin d'un paragraphe consacré à la notion de nombre naturel en classe préparatoire, il est dit, dans les programmes de 1970 que « *l'on insistera sur le sens des expressions autant que, plus que, moins que* ». Mais nous comprenons que ces locutions adverbiales sont des désignations de relations qui servent la communication dans certaines situations, plus qu'elles ne participent à la construction de schèmes spécifiques, relatifs aux compétences associées aux trois relations de comparaison. On sait que Jean Piaget ne faisait pas du langage un médiateur incontournable dans la construction des schèmes. D'une façon générale, cette construction serait peu sensible aux poids des situations, comme à l'importance des médiations effectuées par autrui. Dans sa théorie des champs conceptuels, Gérard Vergnaud insiste, au contraire, sur les formes sémiotiques de ces situations, dans lesquelles se construisent les

⁶²³ Jean Piaget. *La psychologie de l'intelligence. Les facteurs sociaux du développement*. Chapitre 6. Armand Colin. 1947. Ainsi par exemple, l'objet carré n'est, dans un premier temps, qu'un complexe de sons associé à une certaine forme.

⁶²⁴ Nous ne confondons pas, dans cette proposition, la reconnaissance de la forme (ronde) et la désignation de cette forme. Comme nous pourrions le vérifier, dans le chapitre 5, la « conscience de la désignation verbale » n'est certes pas synchrone d'un certain percept de l'objet.

⁶²⁵ Pierre Pastré : *l'analyse du travail en situation professionnelle*. Opus cité.

schèmes : « *L'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation* »⁶²⁶. Mais, étonnamment, lorsqu'il analyse les types de situations, relatives, par exemple, aux structures additives, il décharge, d'une analyse explicite, certains aspects linguistiques de l'énoncé : il va droit à la sémantique de ces énoncés, ce qui lui permet de les classer et de les schématiser dans un cadre mathématique. Il précise d'ailleurs que « *l'une des gageures que doit tenir le psychologue, qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques, est d'établir des classifications, décrire des procédures, formuler des connaissances et actes, analyser des structures et la fonction des énonciations et des représentations symboliques, dans des termes qui aient un sens mathématique* »⁶²⁷.

1.3.3.2 De l'importance de certains signifiants langagiers

Ce faisant, il n'explicite pas un travail direct sur les mots de la langue naturelle, avant tout, complexes de sons ou de lettres pris séparément, les syntaxes ou les temporalités ou la structure générale de l'énoncé⁶²⁸. Comme le fait aussi ailleurs Raymond Duval, il s'intéresse davantage à « *l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement* »⁶²⁹. Or, sa définition pragmatique d'un concept fait appel à l'ensemble des schèmes, mis en œuvre par des sujets, dans des situations de référence. Comme on le rappellera, dans le paragraphe 2, l'activation d'un schème reste associée à un verbe d'action qui entre dans la détermination et la spécialisation de l'efficacité de ce schème. Aussi, dans ce chapitre, nous voudrions insister sur cette relation qui intervient entre certaines formes linguistiques, dans des énoncés de tâches (destinées soit à un apprentissage initial, soit à l'évaluation de cet apprentissage, soit au renforcement de cet apprentissage) et, la nature des schèmes activés ou inhibés⁶³⁰, dans l'activité du sujet. Nous insisterons donc sur le rôle fondamental qu'elles jouent, dans la construction des schèmes eux-mêmes. Pour nous, certains de ces éléments linguistiques peuvent alors se constituer comme des objectifs externes et explicites de l'apprentissage et, liés à des schèmes qui, eux, sont les objectifs internes et implicites de cet apprentissage. C'est cette forme de corrélation, dont nous postulons qu'elle peut jouer aussi dans les filiations ou les ruptures, lors du développement de certaines connaissances des sujets apprenants. Nous pouvons noter, en suivant ce point de vue, que l'on peut analyser alors différemment l'activité d'un sujet, selon que cette « histoire linguistique du schème » est consi-

⁶²⁶ « *Mots, énoncés, symboles et signes* ». La théorie des champs conceptuels. Opus cité.

⁶²⁷ Ibid.

⁶²⁸ Tout en ayant là une rigueur cohérente avec un apprentissage en développement.

⁶²⁹ *Sémiosis et pensée humaine*. Page 145.

⁶³⁰ Nous reviendrons précisément sur ce que l'on peut entendre par « schèmes inhibés ».

dérée par l'analyse ou non, et dans la mesure où cette histoire peut ou non être connue.

Entendant bien que la thèse, sous-jacente à la théorie des champs conceptuels, est qu'une bonne mise en scène didactique s'appuie nécessairement sur la connaissance de la difficulté relative des tâches scolaires, dont certains obstacles, nous entendons de plus que ces difficultés ou obstacles peuvent relever de la signification et de la dénotation de certains verbes d'action, propres au sujet élève, à un moment donné de son histoire scolaire.⁶³¹

1.4 Une situation fondamentale de Guy Brousseau

En analysant une situation proposée par Guy Brousseau, nous allons progressivement construire certains des outils de l'analyse cognitive.

1.4.1 La situation et les différents niveaux d'analyse a priori

Evoquons donc une situation⁶³² que Guy Brousseau qualifie de fondamentale⁶³³, pour le dénombrement, et qui pourrait se présenter à des enfants de 3 ans à 7 ans, en l'adaptant selon ces âges :

« Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher des pinceaux dans la pièce voisine. Quand tu reviendras, tu devras en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Tu devras porter tous les pinceaux en un seul coup. Si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas et reviendras pour essayer à nouveau. Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots ».

Nous voulons systématiser les deux types d'analyse suivants⁶³⁴ : **analyse logique de la tâche ; analyse cognitive de l'activité.**

➤ Analyse logique de la tâche.

- La résolution de la tâche prescrite passe par la réalisation d'une équipotence (...un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau).

⁶³¹ Par exemple, en mathématique, on pourra décrire ce que l'on entend par mesure d'une grandeur, en didactique psychologique comme dit Hans Aebli, on s'orientera sur la dénotation du verbe mesurer.

⁶³² *Éducation didactique des mathématiques*. Communication au congrès d'Agua Calientes, Mexico. http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/62/60/PDF/Mexico_2000_HAL.pdf Version électronique

⁶³³ Guy Brousseau affirme : « Cette situation semble présenter un caractère fondamental parce que toutes les situations de comptage peuvent en être déduites, en faisant varier ses variables cognitives (nature, mobilité des objets, circonstances, tailles des ensembles) ».

Cours donné à l'université de Montréal. Version électronique.

http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf. Juin 1997.

⁶³⁴ Ici et ultérieurement.

- La réalisation de cette équipotence peut être obtenue à l'aide de différents registres sémiotiques⁶³⁵ : le premier registre est celui des petits pots, le dernier registre est celui des pincesaux et un registre fondamental à construire qui doit servir de transition (dessins, série disponible comme une succession de notes chantées ou série associée à la comptine numérique...).

- Mise en correspondance biunivoque de l'ensemble des petits pots avec un ensemble de transition (un ensemble de signes dessinés ou un ensemble de doigts pour les petites collections ou les éléments ordonnés de la série choisie...).

- Mise en correspondance biunivoque de l'ensemble de transition avec une partie de l'ensemble des pincesaux.

- Récupération de cette partie et distribution de ses éléments, également dans chaque petit pot ; en fait un pinceau par petit pot.

- Dans le cas où la collection de petits pots est « grande » ou si l'on impose, comme contrainte, la non utilisation d'un registre graphique, l'outil « série numérique » est utilisé : pour dénombrer la collection des petits pots ; pour compter une collection de pincesaux de telle sorte que, réciproquement, le résultat du dénombrement de cette collection de pincesaux égale celui de la collection de petits pots.

➤ Analyse cognitive de l'activité.

- Constructions de représentations « finalisées par la tâche et les décisions à prendre »⁶³⁶.

- Construction d'une représentation initiale⁶³⁷. Elle est constituée :

- d'un schéma, activé par le rapprochement⁶³⁸ entre l'objet « pinceau » et l'objet « peinture », contenu dans le petit pot. Un élément, constitutif du schéma et qui s'impose dans la représentation, est l'action « peindre ». Ce qui permettra de faciliter la mémorisation à venir du « un pinceau pour un petit pot » (qui contient déjà des peintures). L'énoncé : « Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher des pin-

⁶³⁵ Nous choisissons ici l'expression « registres sémiotiques » et non celle de « registres de représentations sémiotiques », réservée à des systèmes de représentations possédant des propriétés particulières et sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 5.

⁶³⁶ Jean-François Richard. *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Première partie. *Connaissances et représentations*. Armand Colin. 1990.

⁶³⁷ *Les représentations constituent l'ensemble des informations prises en compte pour les traitements ultérieurs. Elles sont le résultat d'interprétations, d'une part, des éléments de la situation et, d'autre part, de la situation dans son ensemble*. Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 1. *Quel modèle pour le fonctionnement cognitif ?* Armand Colin. 2005.

⁶³⁸ « Un schéma est une forme de connaissance qui porte tout son sens en lui-même : il se suffit. Cela tient à ce que le schéma définit, non pas des propriétés intrinsèques des objets, mais des contextes dans lesquels se rencontrent des objets et des actions, des contextes qui sont assez fréquents pour être stabilisés dans la mémoire ». Jean-François Richard. Opus cité (2005). Chapitre 2. *Les formes de représentations*.

ceux dans la pièce voisine » est donc inducteur de ce schéma. Notons que, dans un tel schéma, on peut retrouver, dans certains cas, un nombre pléthorique de pinceaux ;

- de schèmes anticipés, pertinents ou pas. Ces schèmes s'imposent spontanément à l'élève, en raison de la prégnance de certains mots de l'énoncé. Ils peuvent occulter le reste de l'énoncé mais, quoiqu'il en soit de leur activation effective, ils devraient rester momentanément en « standby ». Ils sont activés par l'énoncé « Tu dois aller chercher des pinceaux dans la pièce voisine »⁶³⁹. Remarquons, comme possible, que certains élèves occultent les autres indices en dehors de ce strict énoncé.

▪ Construction d'une représentation complète de la situation. Elle est constituée :

- d'anticipations d'activités motrices : « se déplacer dans la pièce voisine », « prendre des pinceaux », « rapporter les pinceaux », « mettre les pinceaux dans les petits pots » ;

- d'inhibitions des schèmes anticipés correspondants. En effet, la prégnance du schéma précédent et le caractère spécifique des schèmes relatifs au sensori-moteur - leur activation peut ne se suffire que des indicateurs langagiers ci-dessus - devraient, s'il est tenu compte du reste de l'énoncé, rendre nécessaire l'inhibition des schèmes anticipés ;

- d'inférences : les indications concernant l'erreur possible : « si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas et reviendras » et de même, l'autorisation d'une nouvelle tentative : « pour essayer de nouveaux », peuvent connoter, a priori, et pour certains élèves, un point important, concernant leur activité et ceci, initialement pour les plus attentifs ou ultérieurement pour d'autres, après quelques échecs : l'ordre des schèmes initialement activés, à la suite d'une première représentation est à inhiber, ce qui peut être interprété comme une inférence en acte. De plus, l'énoncé de la tâche présente une contrainte fondamentale qu'il convient d'intégrer à la représentation première : il s'agit d'une production d'une inférence « ayant pour finalité la compréhension »⁶⁴⁰ et devant produire une nécessité : si « un pinceau pour un pot et un pot pour un pinceau », ce qui est une reformulation de l'énoncé : « en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau », alors la collection donnée de pots et la col-

⁶³⁹ Comme nous le verrons plus bas, il s'agit là, pour nous, de nous exprimer de façon provisoire, dans la mesure où nous précisons que de telles activations ne sont jamais en relation directe avec certains indices de la situation mais sont des formes, produits de régulations spécifiques.

⁶⁴⁰ Jean-François Richard. Opus cité. (1990).

lection rapportée des pinceaux se correspondent « unité par unité ». L'inférence s'exprime alors par la proposition suivante : « les deux collections sont équipotentes ».

- Construction d'une représentation complète d'actions⁶⁴¹.

Possible 1 :

- représentation initiale : premiers schèmes⁶⁴² activés et coordonnés : « se déplacer dans la pièce voisine », « prendre des pinceaux », « rapporter des pinceaux » ;
- certains élèves obéiront à l'organisation de ces schèmes sans se préoccuper de la suite de l'énoncé de la tâche. Il y aura échec de la tentative correspondante.

Possible 2 :

- représentation complète de la situation ;
- **ce que l'on peut appeler la solution cognitive du problème⁶⁴³, posé par la situation fondamentale, est la nécessité d'une mise en mémoire et consciente donc volontaire de la collection des petits pots et, plus précisément, d'une de ses qualités ; concrètement, pour définir l'action, d'une mesure de cette qualité.** Cette recherche volontaire d'une telle qualité peut être inférée par une représentation de l'énoncé : « porter tous les pinceaux en un seul coup » et « aller chercher ... dans la pièce voisine ». La nécessité est exprimée par la déduction : si « je ne vois plus les pots » alors « je dois mémoriser quelque chose » ;
- la représentation complète de la situation devient un des prémisses de l'inférence : la nécessité de coordonner les schèmes initiaux (spontanés) à un autre schème : précisément celui du dénombrement. Nous ne pouvons pas affirmer que cette inférence soit le résultat d'une activité consciente. Au contraire, nous pensons qu'elle pourrait être l'expression de l'activation de plusieurs régulations, en retour de la perturbation apportée aux schèmes initiaux ; perturbation dont la perception passe par celle d'un échec initial, pour les uns, ou par une lecture attentive de la suite de l'énoncé, pour les autres. Une première régulation conduit à ce que certains analystes pourraient appeler « prise de conscience ». Nous l'avons précisée comme étant une conscience en acte⁶⁴⁴. Une autre régulation conduit précisément à la sélection du schème du dénombrement ;

⁶⁴¹ Quant aux possibles qui suivent, nous ne cherchons pas ici l'exhaustivité, comme nous la rechercherons davantage, dans plusieurs cas expérimentaux (chapitre 5).

⁶⁴² Nous ne considérons pas ici les schèmes spécifiques, relatifs à la construction de la représentation elle-même. Nous exprimerons le principe qu'il s'agit là de schèmes de second ordre que l'on nommera régulation.

⁶⁴³ On voit bien ici ce qui peut distinguer une analyse de tâche, d'une analyse de l'activité. D'ailleurs, un enfant, à qui peut être suggérée la solution du comptage pourra dire : je n'y avais pas pensé. En d'autres termes, comptage et mémorisation ne relevaient pas automatiquement de schèmes coordonnés.

⁶⁴⁴ Forme minimale de la conscience. Voir Chapitre 3. Paragraphe 2.3

- notons que l'énoncé « Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots » est comme, nous allons le préciser ci-dessous, inducteur, pour le schème de comptage qui est l'un des schèmes du dénombrement ;

- sous sa forme métonymique donc, la mise en mémoire peut s'exprimer à l'aide d'un nombre naturel (le devrait pour des collections de cardinal assez grand), nombre obtenu par comptage⁶⁴⁵.

▪ Les performances proprement dites dans le cas du possible 2 :

- activation du schème du dénombrement pour dénombrer la collection des petits pots ;

- activation, dans la mémoire à court terme, du dernier mot-nombre obtenu par dénombrement : la quotité de la collection des petits pots ;

- activation du schème de déplacement dans la pièce voisine ;

- activation du schème réciproque du dénombrement : construire une collection de pincesaux dont le compte est mémorisé ;

- activation du schème de retour dans la salle des « petits pots » ;

- activation du schème de la distribution « un par un » ;

- activation de régulations de contrôle de l'activité et de validité de la situation finale. Notons que le contrôle de l'activité peut s'opérer dès les premiers actes.

• Compléments relatifs à l'analyse cognitive de l'activité.

▪ Pour des enfants d'école maternelle, les phrases comme « tu devras en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau », « Tu devras porter tous les pincesaux en un seul coup », seront difficiles à analyser. En d'autres termes, le schème « d'association biunivoque » devrait être construit dans une séance préalable. Quoiqu'il en soit, la résolution de la tâche exige l'activation d'un schème visant la production d'une « image mentale » du résultat de l'action.

▪ La seconde phrase est ambiguë : pour le prescripteur, elle signifie que l'opération de mise en correspondance biunivoque doit être anticipée dans sa globalité et non par une approche injection-surjection (un retour avec « pas assez de pincesaux » ou un retour avec « trop de pincesaux »). Or, dans son acception quotidienne⁶⁴⁶, « en un seul coup » signifie en « une seule fois », du point de vue de la qualité du transport et non du point de vue de la

⁶⁴⁵ Il est essentiel de constater que Guy Brousseau considère « cette mesure comme moyen de solution de cette situation ». Ibid. En d'autres termes, la solution n'est pas définie sous sa forme cognitive, à savoir une activation spécifique et rendue nécessaire de la mémoire de travail, ce qui peut véritablement définir une compétence nouvelle, mais sous une forme métonymique et mathématique, à savoir le nombre-mesure.

⁶⁴⁶ Sans doute pour la majorité des enfants.

quantité transportée. Là encore, il conviendrait de construire, dans une séance préalable, un schème spécifique associé à la sémantique attendu de l'expression « en un seul coup ». **Il s'agirait véritablement de considérer, plus généralement, la construction d'un « pareil quantitatif ».** Nous avons noté par ailleurs, que le « pareil quantitatif » est un construit plus tardif que « le pareil qualitatif » et que ce second fait d'autant plus obstacle au premier, qu'en réalité, ce dernier en est un cas particulier⁶⁴⁷. Il semble alors que Guy Brousseau envisage, comme on peut le retrouver d'ailleurs chez d'autres chercheurs ou pédagogues (voir Rémi Brissiaud), la pertinence d'un invariant cognitif que l'on pourrait appeler « principe d'économie », principe en acte et moteur d'une inférence, consistant à corréliser l'échec à une prise de conscience d'une procédure peu économique : le dénombrement est précisément ce que le sujet cognitif va se proposer comme procédure la plus économique. Nous ne considérons pas ce postulat comme une évidence⁶⁴⁸. Nous exprimons la position didactique que, l'objectif de la situation étant la construction d'une compétence dont la structure de schème contiendra celle du dénombrement, il est inutile que l'absence de schèmes plus primitifs (de ceux dont nous pensons leur construction antérieure pertinente) soit cause d'erreurs non directement liées à l'objectif fondamental. Un second argument milite en faveur de cette position : si l'enseignant est contraint d'intervenir dans la situation pour expliquer l'énoncé de la tâche, il court le risque d'y introduire soit des heuristiques personnelles, soit plus fortement des éléments de résolution⁶⁴⁹.

- L'attention de l'élève est portée sur le risque de l'échec : « si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas ». Mais aussi sur une modalité autorisant une possible réussite : « et reviendras pour essayer de nouveau ». Une signification particulière peut s'attacher pour l'élève à ces précisions : ce sont les termes d'un contrat : 1) la tâche est faisable, 2) l'erreur est possible, 3) l'élève doit pouvoir finir par réussir. Nous pensons qu'elle joue en faveur de la découverte, comme peut jouer une motivation, c'est-à-dire, en particulier, au profit d'une fidélité à poursuivre une certaine activité.

⁶⁴⁷ Le nombre comme le rappelle Jean Piaget est une qualité particulière. La position constructiviste fait du « pareil quantitatif » une accommodation du « pareil qualitatif » aux situations de dénombrement plus compliquées. Notons que ce « pareil qualitatif » est opérationnel dans la situation étudiée pour des quantités de petits pots inférieures ou égale à 4, puisque le schème de la perception des formes peut ici suffire globalement dans le « subitizing ». C'est là que doit jouer la variable didactique du nombre de petits pots.

⁶⁴⁸ Ce qui ne veut pas dire qu'un principe d'économie cognitive ou principe de moindre action ne puisse pas s'avérer pertinent (jouer effectivement), dans certain cas, en faveur de la découverte de solutions.

⁶⁴⁹ D'autre part, il est possible que certains élèves (avantagés culturellement) disposent de certaines de ces compétences pré requises. Nous militons, lors de nos animations pédagogiques, pour que la conception de situations d'apprentissage impose une recherche, permettant de définir des conditions qui tendent à doter les élèves des mêmes chances de réussite, avant d'être placés dans la même situation.

▪ Les actions fondamentales :

➤ Nous ne comprenons pas comment un élève, en situation de dévolution complète, peut se construire un registre sémiotique intermédiaire pertinent et qui sera volontairement véhiculé dans une mémoire de travail. Cette mise en mémoire consciente et volontaire a contre elle, une mise en mémoire inconsciente associée à des schèmes perceptifs, mais certes, devenue inopérante pour des collections trop « grandes ». On peut supposer que cette activation de la mémoire, associée aux perceptions, est de nature différente de celle associée aux objets sémantiques. Cette mise en mémoire consciente n'a pas d'indicateur linguistique, comme « il faut que tu retiennes... », ou « il faut trouver un moyen de te souvenir ... ». Pour les enfants de petites et de moyennes sections, nous estimons qu'il y a un obstacle difficilement franchissable, sans un renforcement de la médiation⁶⁵⁰. On peut lire, dans nombre de manuels, relativement à l'objectif de la situation fondamentale, l'expression : « le nombre pour mémoriser ». Ce qui est une forme de méconnaissance de cet aspect concernant la « construction d'une mémoire spécifique ». Puisque, avant de construire « ce nombre messenger », à mémoriser, il faut s'interroger sur cette fonction de la mémoire qui justement serait disponible ou non. On pourrait se retrouver là, avec une pétition de principe, dès lors que la mémoire de travail ne se distinguerait pas des objets qui la constituent, étant, selon certaines théories, partagées par Jean François le Ny (et nous-mêmes), une partie opportunément activée de la mémoire à long terme⁶⁵¹.

➤ Poursuivons l'analyse d'une activité possible.

1) Pour résoudre la tâche, l'enfant doit utiliser les mots-nombres de la comptine numérique (le registre sémiotique intermédiaire), afin de mémoriser le dénombrement de la collection des petits pots. C'est ce à quoi engage la phrase « Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots ». De ce fait, la précision, apportée par la phrase précédente, devrait activer nécessairement une procédure de comptage⁶⁵² dont il faut au moins considérer, à ce stade, que l'élève à qui est proposée la situation, en a la compétence⁶⁵³. Mais ce qu'il reste à construire, de fondamental par l'élève, est que la comptine nu-

⁶⁵⁰ Au moins pour les collections dépassant la compétence du « subitizing » et pour des collections non figurales de plus de 5 éléments.

⁶⁵¹ *Comment l'esprit produit du sens*. Pages 92-96. Opus cité.

⁶⁵² Pourtant Guy Brousseau considère que le concept de comptage n'apparaît pas dans l'énoncé. C'est manifestement contestable, concernant le schème du comptage lui-même, dont l'un des mots inducteurs est précisément « compter » et qui se trouve dans l'énoncé. Opus cité.

⁶⁵³ « *La situation précédente est proposée à des enfants en cours d'apprentissage classique qui savent déjà compter, en ce sens résoudre le problème de l'émetteur et celui du récepteur, mais qui n'ont pas encore la maîtrise du dénombrement* ». (Mexico). Opus cité. L'émetteur est l'élève qui envoie une demande concernant ce qu'il considère comme étant le nombre de pinces à rapporter et le récepteur est l'élève qui rapporte de la pièce voisine les pinces, en nombre qu'il aura interprété dans la demande de l'émetteur.

mérique est effectivement le registre sémiotique intermédiaire, utile puis nécessaire à la résolution de la tâche. Nous avons déjà rappelé que le schème initial, correspondant à l'action de compter, se définit précisément par l'usage de la comptine numérique : l'exercice de la compétence « compter » se restreint à réciter correctement la série des mots-nombres, jusqu'à un certain test d'arrêt.

2) En fait, on peut penser que l'élève, (au moins à partir de la moyenne section) à qui est proposée la situation, pourrait répondre à une question du type : « combien y-a-t-il de ... ?⁶⁵⁴ Il a donc comme compétence du dénombrement : la collection est donnée, il faut en faire le compte. Un des enjeux de la situation est donc la compétence réciproque : construire une collection, son compte étant donné. Compétence directe et compétence réciproque vont constituer la compétence « dénombrer ». Dénombrer est la compétence visée par la situation⁶⁵⁵.

➤ Rappelons les invariants constitutifs de l'activité du schème du dénombrement, dans le sens direct :

- 1) énumération des objets de la collection : repérage un à un des objets et exhaustif par pointage (activités motrices diverses possibles) ;
- 2) énonciation de la comptine numérique, en commençant par le mot-nombre un et en respectant l'ordre ;
- 3) synchronisation de l'énumération et de l'énonciation : construction d'une suite de couples selon la récurrence : le couple $(o(1), 1)$ est le premier couple si $o(1)$ est le premier objet pointé ; couple $(o(n), n)$ a pour successeur le couple $(o(n+1), n+1)$ si l'objet $o(n+1)$ est l'objet pointé immédiatement après le pointage de l'objet $o(n)$, ce qui constitue la réalisation d'une première équipotence ;
- 4) récupération du dernier mot-nombre prononcé de l'énumération-comptage.

➤ Précisons certains invariants opératoires, associés au schème du dénombrement :

- 1) les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre à chaque comptage ;
- 2) la désignation des éléments comptés n'est interprétée que du seul point de vue qu'ils se constituent en entités distinctes et en unités, pour le comptage (perception de la

⁶⁵⁴ Voir les activités rituelles qui consistent par exemple à « compter les absents ou le nombre d'élèves qui mangent à la cantine... »

⁶⁵⁵ Cet aspect de la réciprocity de deux compétences constitutives d'une même compétence, autrement définissable, est fondamental. Son étude va constituer une étape essentielle dans la construction de notre technologie.

monade) ;

3) l'ordre dans lequel les éléments sont énumérés n'affecte pas le résultat du comptage ;

4) un compte est signifié par le dernier mot-nombre prononcé. Notons que le concept de conservation des quantités n'est pas un invariant, nécessaire à la résolution de la tâche⁶⁵⁶.

➤ Le nombre cardinal est le même pour la collection des pinceaux à apporter, inférence rendue possible par le schème percept de la représentation initiale. Nous noterions le théorème en acte suivant : « une fois la tâche réalisée, si je compte les petits pots et si je compte les pinceaux, alors je trouve le même mot-nombre ». Mais un tel théorème pourrait supposer le concept de la conservation des quantités, puisque la collection des pinceaux prend alors des formes différentes⁶⁵⁷. Ce nombre cardinal a pour signifiant un mot-nombre, associé à une énumération de pinceaux et, dont il exprime le point d'arrêt. Précisons là que **cet aspect de la réciprocité de deux schèmes est fondamental, car il se retrouve, de façon très générale, pour toute opération, résultat d'une action intériorisée : la seconde opération étant la réciproque de l'opération première et dont, par réfléchissement, elle en reconstruit une compréhension nouvelle**. Nous avons, dans la suite de ce chapitre, précisément pour objectif de construire le cadre de cette structuration cognitive fondamentale.

➤ Rappelons, avec Lev Vygotski, que nous ne comprenons pas comment la perception de l'échec aurait le pouvoir de provoquer une prise de conscience logique⁶⁵⁸, condition incontournable pour que des feedbacks agissent dans le sens d'une modification efficiente de l'action ; en particulier donc, la mise en mémoire consciente et volontaire d'un objet d'un registre intermédiaire. Car il est vrai que les feedbacks sont les produits de régulations qui sont constitutives d'un développement général de l'intelligence. Ces régulations qui ont un potentiel d'action très général auront atteint, elles-mêmes, un niveau de développement suffisant ou non. On pourrait même envisager le cas d'une assimilation déformante : en fait, l'enfant peut : 1) compter la collection réelle de petits pots ; 2) compter la collection virtuelle des pinceaux en place dans les petits pots ; 3) compter une collection de pinceaux à rapporter. L'enfant se construit un autre outil de résolution de la tâche : « le comptage et le compte doivent être conservés » :

⁶⁵⁶ Nous devons aussi insister sur le point que ce concept est loin d'être un acquis pour les élèves, en fin d'école maternelle. Il l'est bien davantage pour des élèves de l'école préparatoire.

⁶⁵⁷ Même placés devant une équitopence, perceptivement possible de deux collections, des enfants de 5 ans ou 6 ans comptent séparément les deux collections, pour répondre aux questions : « Combien de petits pots ? Combien de pinceaux » ? Réciproquement, on imagine difficilement qu'ils puissent, à l'occasion, construire ce théorème qui pourrait être l'objectif d'une autre situation.

⁶⁵⁸ C'est-à-dire s'orientant vers une analyse cohérente des raisons de l'échec.

1) → 2), 2) → 3), 3) → 1)⁶⁵⁹.

Il peut ainsi réussir sans comprendre. Il n'a pas construit de relation fondamentale entre l'ordinal et le cardinal mais celle de la conservation du comptage, dans un usage qui ne nécessite pas la notion de mesure. Ainsi, Guy Brousseau explicite-t-il lui-même un moment possible et observé de la situation⁶⁶⁰ :

L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.

- « *Ah, il en reste trois !* »
- « *Tu as réussi ?* »
- « *Non parce qu'il m'en reste trois !* »
- « *Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois* ».

Les autres élèves lui suggèrent :

- « *Compte ! Compte !* »

L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient.

Le fait de compter les pots ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent de l'aider :

- « *Non ! Non ! Tu dois compter les pinceaux* »

L'enfant part, compte tous les pinceaux, en prend quelques-uns et revient.

On note, dans le début de l'activité de cet élève, que les schèmes premiers ne font pas partie d'une représentation exhaustive de la situation : ces schèmes sont activés sans autre contrôle que leur bonne exécution. Notre analyse nous en a fait prévoir un tel possible.

Conclusion

Lorsque l'enfant, dans la pièce voisine, compte tous les pinceaux, c'est bien le schème du comptage qui opère correctement : celui-ci est exhaustif, c'est l'un de ses invariants opératoires ; il s'agit de compter tous les pinceaux disponibles. On note que l'élève s'engage dans une procédure de comptage que Guy Brousseau qualifie de savoir culturel, par opposition avec le comptage, comme connaissance d'un moyen de résoudre la situation fondamentale.

Nous analyserons, dans une optique constructiviste, que le schème quotidien de comptage, qui accompagne une procédure automatisée de sériation, à l'aide de la comptine numérique, devra se différencier dans cette situation. Le point focal d'un apprentissage serait que le nième nombre de la comptine numérique apparaisse aussi comme le cardinal de l'ensemble

⁶⁵⁹ Mais nous pensons que sans des incitations plus ostensibles, le système cognitif n'y serait pas conduit.

⁶⁶⁰ Et qui lui a été rapporté. Opus cité.

des mots-nombres prononcés⁶⁶¹, et réciproquement.

En fait, que peut-on attendre de la situation fondamentale de Guy Brousseau ? Un système cognitif dispose initialement de la compétence de comptage dans le sens suivant : une collection étant donnée, il peut en dire le compte, à l'aide de la comptine numérique. La situation a pour vocation de construire une extension de la dénotation du verbe compter puisque, réciproquement : un compte étant donné, il s'agit de construire une collection dont une des qualités est d'avoir ce compte. Le point essentiel est que la première dénotation doit faire obstacle à une telle extension. On comprend bien le choix de cette situation, considérée alors, à juste titre, comme fondamentale. Mais, nous avons vu qu'une telle construction n'est possible que si le système dispose d'un schème de l'équipotence. En fait, l'invariant opératoire est celui de la cardinalité, dont le sens est donné par cinq collections distinguables⁶⁶² : celle des pots ; celle des pinceaux, virtuellement dans les pots ; celle des mot-nombres, prononcés une première fois ; celles des mots-nombres, prononcés une seconde fois ; celle des pinceaux rapportés.

Mais, comme nous l'avons fait remarquer, un double (ou triple) comptage, même arrêté par des incitations diverses, concernant celui des pinceaux à rapporter, peut autoriser la réussite, sans qu'une compréhension de ce qui vient d'être dit soit certaine⁶⁶³. Pierre Gréco rappelle, en particulier, que « *la quantité comptée est conservée, avant la quantité non comptée* »⁶⁶⁴. Il peut y avoir, du théorème en acte, et comme seule construction, un transfert purement sémiotique : la conservation d'une litanie. Il peut y avoir effectivement une coordination des actions-essais et des observables-échecs qui finit par faire prendre conscience, en acte, que « le bon comptage des pinceaux est entre le ni trop loin et le ni trop court ». Mais le système n'aura pas encore compris pourquoi, il obtient finalement le bon compte de pinceaux à rapporter. Nous pouvons faire ce genre d'analyse, comme nous l'autorise Jean Piaget, en nous inspirant des exemples qu'il donne dans son ouvrage : *Réussir et comprendre*. De plus, nous pensons que, dans ces conditions, un état déstructurant de son schème de comptage peut s'être produit, dès lors qu'il n'aura pas compris pourquoi compter, ça n'a pas été de tout compter et, cela, sans plus d'équilibration positive.

⁶⁶¹ En fait, la mathématique des ensembles peut dériver ceci de la construction canonique d'un entier, en tant qu'ordinal : $n+1 = n \cup \{n\}$. (Ce qui est déduit de la définition d'un ordinal due à John Von Neumann). $n = n-1 \cup \{n-1\}$ d'où cardinal (n) = cardinal (n-1) + 1. Et donc cardinal de {un, deux trois,, dernier mot-nombre} = dernier mot-nombre.

⁶⁶² Nous prenons sens, comme le fait Frege, à distinguer donc de la dénotation de ce cardinal.

⁶⁶³ Au moins, que compter, ce n'est pas forcément tout compter ! Au plus, que compter ce n'est pas uniquement que compter, mais aussi dénombrer ; ce qui est un concept à construire.

⁶⁶⁴ *Quantité et quotité. Nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles. Structures numériques élémentaires*. Paris. Puf. 1962. Pages 1-70.

Nous retenons que le schème du dénombrement, associé à la comptine numérique, ne possède pas, à lui seul, le concept de cardinalité dans sa zone proximale de développement ; même si l'usage didactique et, fondamentalement linguistique, font que les situations de dénombrement et mesure de cardinalité, ne sont jamais dissociées. La racine commune qui les rend indissociables, dans un tel usage, est le mot 'combien' (ou l'expression 'compte combien'), anticipateur du schème de comptage, comme nous avons pu l'analyser antérieurement, et qui fonde, à l'école, l'illusion d'un début de compréhension de la coordination entre le concept d'ordinal et le concept de cardinal. Et nous déduisons, de notre analyse, que la situation fondamentale de Guy Brousseau ne permettra pas davantage une telle réalisation. C'est ce point précis, sur lequel nous focalisons maintenant notre attention, pour analyser la nature de cet obstacle⁶⁶⁵, associé ici aux possibles, dans la zone proximale de développement du schème de comptage.

1.4.2 Éléments de psychogénèse pour la construction du nombre

Nous exprimons précisément la nécessité didactique que le schème du comptage, devenu fiable avant celui de la mesure de cardinalité, doit se trouver plongé (et non détruit) dans une structure de schème plus générale, structure définissant la coordination entre le schème du dénombrement et le schème de la mesure de cardinalité. Mais, comme nous allons le vérifier, il convient alors de considérer une autre structure de schème : celle de l'équipotence, forme généralisant le schème de comparaison binaire.

1.4.2.1 Éléments d'épistémologie canonique

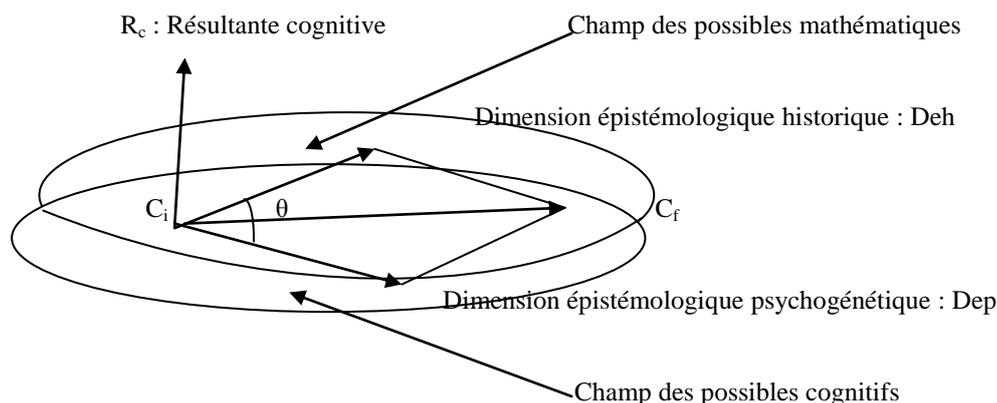
L'ensemble des analyses qui précèdent nous conduisent aux points qui vont nous permettre d'avancer, dans la construction de notre technologie, pour la conception des situations didactiques.

Nous postulons que le concept d'obstacle, pertinent en didactique des mathématiques, doit se construire à partir des deux concepts régulateurs de l'action didactique et que nous avons définis au chapitre 1. La corrélation, découverte entre ces deux dimensions, devient un concept organisateur de la conception des situations didactiques.

Proposons-nous, tout d'abord, un schéma général rendant compte des dimensions en jeu. Nous optons pour ce schéma qui a, il nous semble, l'avantage de ne pas les dissocier dans l'analyse et de les présenter sous leur aspect dynamique⁶⁶⁶.

⁶⁶⁵ En aval donc d'un possible obstacle cognitif, concernant la mémorisation volontaire, dont nous avons dit qu'un jeune sujet en a la compétence ou non.

⁶⁶⁶ D'où une représentation vectorielle.



C_i est l'état initial de la compétence, définissable mathématiquement et cognitivement.

C_f est l'état final de la compétence, définissable mathématiquement et cognitivement. Elle est obtenue par la médiation d'une séquence didactique. Elle est alors la forme nécessaire de la compétence attendue. Elle est l'une des formes nécessaires pouvant résulter des interactions entre les deux champs épistémologiques.

Deh est la dimension épistémologique historique. Elle définit le développement mathématique attendu de la compétence. Elle peut dévoiler ou non un obstacle de nature épistémologique. Sa transposition, en milieu scolaire, relève de la logique mathématique, dans les limites des compétences et des connaissances, définissables à un niveau donné de la scolarité d'un élève, sujet de l'institution⁶⁶⁷ ; donc en particulier de C_i . Elle définit une des orientations développementales de la connaissance mathématique, dans un champ de possibles, et dans le cadre institutionnel⁶⁶⁸. Ce qui donne à cette logique une forme transitoire, objet d'un contrat local et tacite⁶⁶⁹. Un tel champ est ici représenté par une ellipse.

Dep est la dimension épistémologique psychogénétique. Elle définit le développement cognitif attendu de la compétence C_i . Nous noterons qu'elle dévoile toujours un obstacle de

⁶⁶⁷ Ce qui ne veut pas dire autre chose que la transposition du savoir, par un milieu noosphérique (milieu où l'on pense), a produit un ordre gérable des connaissances à enseigner, en ne tenant compte (en dehors de certains principes idéologiques) que des concepts institutionnels, comme la filière, spécifique d'un certain cursus (école, collège, lycée, filière scientifique, littéraire..., et le niveau de la classe (CP, 5^{ème}, première...). Ce qui n'exclut pas les discontinuités, même en ce qui concerne strictement les connaissances mathématiques (voir, par exemple le concept de fraction de l'école élémentaire et celui de la classe de 6^{ème}).

⁶⁶⁸ Il faut donc entendre C_i , comme définissable mathématiquement et en référence au curriculum. On pourrait définir une norme du vecteur C_i Deh, comme la distance entre deux objets mathématiques, c'est-à-dire le nombre d'objets mathématiques nouveaux à formuler pour construire C_f , à partir de C_i . Par exemple, C_i étant la compétence de comptage de type additive et C_f , la compétence de comptage de type multiplicative, l'objet à formuler est celui d'une sommation répétée d'un même nombre entier. La norme est ici égale à un. Dans le cas de l'agrandissement d'une figure mathématique, comme « le puzzle de la situation fondamentale de Guy Brousseau », l'objet mathématique est une fonction linéaire exprimée par deux types de calculs possibles. En deçà d'un certain niveau de collège (qui peut introduire explicitement la notion de fonction linéaire), on voit que la norme du vecteur serait ici égale à deux.

⁶⁶⁹ Enseignants et élèves font, en quelque sorte, confiance, dans une décomposition génétique de la connaissance qui se donne, comme une injonction, dans le curriculum. On sait, avec quelle violence, ce contrat est unilatéralement rompu, en classe de 4^{ème} et dans une première année d'université.

nature cognitive que nous préciserons dans le paragraphe 2 suivant. Sa définition est ici formatée par la nature du savoir à enseigner, mais ne se confond pas avec celui-ci. Cette dimension est l'une de l'espace défini par la zone potentielle de développement autour de C_i ⁶⁷⁰. Cet espace peut aussi être redéfini comme un champ des possibles dont Dep est l'une des orientations. On en a donné, de même, une représentation elliptique.

Notons que ces deux dimensions devraient être fortement corrélées, comme l'expriment aussi bien les classifications de Gérard Vergnaud que, plus généralement, les rapprochements considérés par Jean Piaget et Rolando Garcia⁶⁷¹. Et, précisément, l'apprentissage en milieu scolaire a, pour nous, un objectif de reconstruire cette corrélation entre deux développements, l'un, relatif à la connaissance mathématique (plus précisément à sa forme transposée), l'autre, relatif aux passages d'un état génétique à ses successeurs possibles. Une connaissance mathématique nouvelle qui peut se donner, comme outil de signification, la logique mathématique, devrait là, s'accompagner, pour un élève, d'un rôle actif : « *c'est la démarche consistant à situer tout évènement réel entre un ensemble de possibles et une nécessité conçue comme le seul possible actualisable* »⁶⁷².

Les possibles sont des productions potentielles de schèmes activés, en réponse aux stimulations, contenues dans une situation. La connaissance nouvelle ne peut être conçue, en raison, que si elle est dans le potentiel des schèmes d'assimilations, initialement disponibles. Au niveau où nous nous plaçons, cette connaissance s'exprime par l'une des ces composantes pragmatiques, à savoir l'une des compétences associées⁶⁷³. Et nous entendons que cette activité raisonnable relève de la logique des schèmes, c'est-à-dire des différentes fonctions qui définissent le processus d'adaptation et de ses différentes régulations.

Le triplet $(\theta, C_i \text{ Deh}, C_i \text{ Dep})$ rend compte d'une mesure de l'obstacle didactique⁶⁷⁴. Notre métaphore est que, lorsque l'angle θ est quasi nul, « le passage de C_i à C_f » s'effectue

⁶⁷⁰ On pourrait définir une norme du vecteur $C_i \text{ Dep}$, comme la distance entre les deux structures de schèmes, correspondant respectivement à C_i et à C_f . Cette distance peut être mesurable par le nombre de fois qu'une structure doit se modifier. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, le sens à donner à de telles modifications : par inclusions, par produits, par plongements structuraux. Elle est aussi une mesure de l'obstacle de nature cognitive.

⁶⁷¹ *Psychogénèse et histoire des sciences* Opus cité. *Conclusion*.

⁶⁷² Ibid

⁶⁷³ A un autre niveau, on peut noter que plusieurs technologies et donc, plusieurs techniques, découlent génétiquement, au moins d'une même connaissance fondamentale. Au niveau de l'école élémentaire, l'intention didactique se focalise plus directement sur l'acquisition d'une certaine technique, dont la systématisation aboutit à la consolidation d'une compétence, donc à l'équilibration d'une structure de schèmes spécifique.

⁶⁷⁴ Mais cette définition de l'obstacle didactique, si nous voulons bien lui reconnaître une valeur théorique a, au point où nous en sommes de notre construction, par contre, une faible valeur pratique. Elle concerne bien l'écart entre un développement ponctuel et historique d'une connaissance, et les moyens cognitifs d'un système qui doit s'approprier un tel développement. Mais pour beaucoup de didacticiens, il demeure souvent délicat de différencier les évaluations des états historiquement antérieurs de cette connaissance, et celui du système cognitif qui se les a déjà appropriés (et comme nous en avons déjà fait la remarque au début de ce chapitre).

sans trop de résistance. La mesure de l'obstacle donne une valeur faible. Il s'agit d'un développement de la compétence qui ne s'accompagne pas de perturbation perçue ou d'une perturbation, facilement compensée par une extension de la compétence C_i . La régulation cognitive consiste en un renforcement de la structure des schèmes associée à C_i , et en un développement, au niveau de son extension constituée de situations assimilables. La tâche proposée à l'élève peut s'apparenter, pour lui, à un problème normal (ou une exécution de tâches presque routinières), même s'il ne sait pas le résoudre sans aide. Par exemple, le schème du dénombrement additif, dont l'extension va s'étendre à des situations de type multiplicatives⁶⁷⁵, ou encore, l'extension d'un répertoire multiplicatif.

Notre schéma rend compte de deux développements, l'un concernant la connaissance proprement dite : le vecteur C_i C_f , à considérer explicitement dans l'action didactique, et l'autre, le développement de l'intelligence⁶⁷⁶ : la résultante cognitive, R_c . Nous entendons cette position, dans les écrits de Jean Piaget et de Lev Vygotski, que le développement des fonctions psychiques supérieures est consubstantiel de problèmes dont la résolution intègre la perception de l'écart entre des conceptions initiales et des conceptions à développer lors d'apprentissages spécifiques⁶⁷⁷. R_c devient, sur un terme plus ou moins long, une référence pour certaines fonctions psychiques supérieures et donc contribue à leur développement. Dans le paragraphe 2, nous expliciterons cette forme de développement de deux ordres, retrouvant en cela, la position de Lev Vygotski. Dans notre représentation, il est une certaine projection sur l'espace engendré par un ensemble de vecteurs $\{C_i \text{ Deh} \wedge C_i \text{ Dep}, X_i\}$ (où X_i désignent d'autres vecteurs cognitifs), ce qui permet aussi d'exprimer que l'intensité de la résultante cognitive est une fonction de la mesure de l'obstacle didactique⁶⁷⁸. Mais sa dimension, plus largement, dépend aussi de l'ensemble des capacités de l'appareil cognitif dont dispose le sujet. Toutefois, nous pouvons envisager, et nous le ferons, certaines évaluations de cette projection.

⁶⁷⁵ On sait qu'initialement, une situation dite multiplicative est une reformulation d'une situation additive particulière.

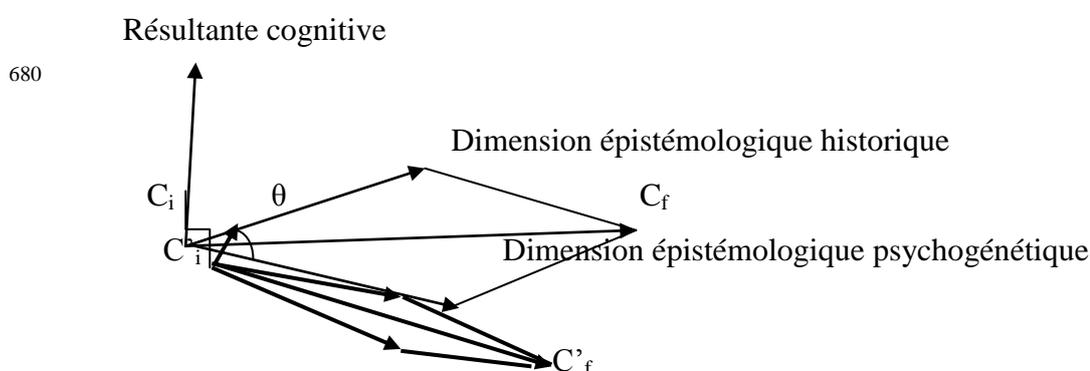
⁶⁷⁶ Terme sans doute vague mais, par lequel, nous voulons exprimer un apprentissage qui ne se limite pas à celui d'une nouvelle procédure, associée à la compétence C_f , mais le développement d'une compétence cognitive transversale comme, par exemple, une capacité de conceptualisation plus grande ou, comme nous le verrons plus loin, une capacité à produire des inférences relatives au nouveau schème construit, sans que cette inférence fasse partie du schème lui-même. Nous avons aussi donné précédemment, comme exemple, l'opération de prise de conscience d'un potentiel de mémorisation volontaire.

⁶⁷⁷ Et de ce fait, on pourrait exprimer une mesure effective d'un obstacle en considérant une norme du produit vectoriel $C_i \text{ Deh} \wedge C_i \text{ Dep}$. Toutefois, nous ne développons pas, au point de notre construction, une définition vraiment pragmatique de la mesure de l'angle θ .

⁶⁷⁸ D'où notre choix d'une écriture en produit vectoriel. Ce point nous paraît un postulat, affirmé explicitement par les didacticiens, au moins, en ce qui concerne ce qu'il est communément exprimé comme le sens de la connaissance acquise. Mais nous le généralisons là très certainement.

Nous savons que les formes de connaissances, retenues par un sujet, dépendent des choix didactiques : ceux-ci peuvent gommer le problème, dont les éléments qui font obstacles, par des pratiques ostensives ou, dans des situations qui ne posent pas le bon problème. En réalité, il y a une perte importante de la norme épistémologique de la compétence visée, et une rupture possible, dans la structure des schèmes. De plus alors, le développement de la compétence acquise s'accompagne d'une résultante cognitive très faible. Le schéma initial (en traits fins) est alors dévié (nouveau schéma en traits épais), comme on peut le considérer en général, lorsque l'analyse a priori de l'une ou de l'autre des deux dimensions est tronquée⁶⁷⁹.

Le schéma initial va se trouver dévié :



Nous voulons exprimer là, que la compétence acquise C'_f est différente de la compétence à acquérir C_f . Elle peut présenter les mêmes aspects externes comme des signifiants et une certaine opérationnalité, dans des exercices de routine, mais elle ne se place pas dans une position qui la rende dépendante structurellement de C_i , au sens de la logique des schèmes. Nombre de chercheurs qui ont évalué les connaissances des élèves ont pu constater le caractère émiété de celles-ci, ce qui exprime à notre sens, l'absence de structuration logique de ces connaissances, d'un point de vue psychogénétique⁶⁸¹.

⁶⁷⁹ Par exemple, lorsque l'enseignant méconnaît l'enjeu épistémologique, comme un travail sur un obstacle, repéré dans l'histoire de la connaissance, ou un obstacle, repéré dans la psychogénèse du champ conceptuel, dans lequel doit se développer cette connaissance.

⁶⁸⁰ Nous laissons implicites les champs définis ci-dessus.

⁶⁸¹ Notons par exemple : l'une des composantes de la compétence C_i consiste en l'utilisation de la sériation des nombres entiers associée au concept en acte : quel que soit i , $(n+i+1) - (n+i)$ est une constante, l'unité de mesure des nombres entiers. C_f est la compétence du placement des nombres entiers sur une droite (au programme de la classe de CE1 dans les programmes de juin 2008). Il s'agit donc de considérer deux registres sémiotiques isomorphes de la structure additive des nombres entiers ; en particulier, que la monade est représentée par un intervalle de longueur constante. La mesure du segment [OM] est le nombre de fois qu'il contient cette représentation de la monade ; ce qui est l'une des composantes de la compétence C_i . Le problème à résoudre est précisément celui de la construction de C_f à partir de C_i . Or, précisément, la caractérisation de C_i est gommée, lorsque les enseignants associent prématurément les nombres entiers à des points de la droite et, respectant alors, pour des raisons non justifiées pour les élèves, l'équidistance des points. Selon les apparences, le registre géométrique est

Lorsque l'angle θ est plus grand, le passage de C_i à C_f , s'effectue avec une résistance plus importante. Il s'agit d'un développement de la compétence qui s'accompagne de perturbations perçues par le couple enseignant-système cognitif élève et la régulation cognitive consiste en une différenciation des schèmes et en un développement d'une extension dont les éléments sont, comme on le précisera, un ensemble de situations : la compétence se trouve différenciée et peut alors s'appliquer à un nombre plus grand de situations. Le paramétrage d'un niveau de dévolution peut jouer sur le niveau de participation consciente⁶⁸² de l'élève, dans la compréhension d'une telle adaptation de la compétence initiale.

1.4.2.2 Application de ce schéma au problème de dénombrement

Dans notre exemple, nous avons vu que le schème de C_f , « utiliser le nombre pour mesurer », ne se trouve pas dans la zone proximale de développement du schème de C_i (compter pour dénombrer), au sens de la logique naturel des schèmes. Au contraire, Guy Brousseau pense que la situation est fondamentale car « elle permet de définir le nombre mesure comme connaissance, c'est-à-dire comme moyen de solution de cette situation »⁶⁸³. Certes, nous semble t-il, mais si on se limite à une analyse logique de la tâche⁶⁸⁴. Or, l'analyse a priori de l'activité du système cognitif suggère que, d'une part, sa conscience le porte à considérer une activation spécifique de la mémoire de travail, le schème perceptif ne suffisant plus, d'autre part, que le système peut réussir selon les apparences : par assimilation déformante, il comprend autrement la connaissance-outil. Précisément, si la question lui est posé de la raison pour laquelle il a rapporté x pinceaux, il peut répondre : parce qu'il y a x petits pots. Mais, on ne peut encore certifier une construction de nombre cardinal et qui de plus, se conserve.

Il faut donc que l'enfant dispose d'autres compétences C_{1i} et C_{2i} (voir ci-dessous) qui, en se coordonnant avec C_{0i} , (la compétence 'compter') vont permettre de construire la compétence C_f , qui est l'objectif visé dans la situation de Guy Brousseau.

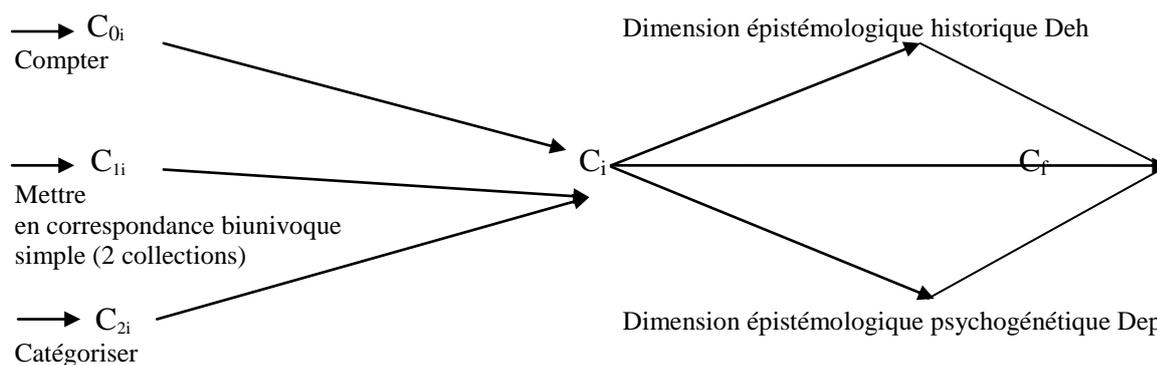
Nous en faisons une description ci-dessous.

le même mais, il s'agit d'un sens totalement différent et, en fait, d'un autre registre. L'utilisation d'un tel registre déformé relève d'une compétence C_f . Celle-ci se construit donc à partir d'une compétence hypothétique C_i associée au concept : la mesure du segment [OM] est la différence entre l'abscisse du point M et l'abscisse de O, cette dernière étant 0. Les élèves ne pourront pas comprendre aisément, pourquoi la mesure d'un segment, à l'aide d'une règle graduée, doit « passer par la mise en correspondance d'une extrémité d'un segment avec le 0 de la règle graduée ». Nous pourrions contrôler ultérieurement l'oubli rapide, par ces mêmes élèves, de la notion fondamentale d'unité de mesure, image, dans la conversion, de la monade. Notons que la compétence C_f est précisément la capacité à convertir le registre numérique en registre géométrique et réciproquement.

⁶⁸² Avec sur ce point, comme on nous l'avons évoqué dans le chapitre 3 (sous 2.3), une certaine graduation délicate à envisager.

⁶⁸³ Rappelons que le nombre-mesure est une mesure de cardinalité.

⁶⁸⁴ Il est vrai que Guy Brousseau introduit la possibilité d'un ensemble de variables didactiques dont le jeu conduit nécessairement à la connaissance-solution. Mais nous n'en avons pas, en l'occurrence, le détail.



C_f est la compétence à construire dans la situation de Guy Brousseau : mesure de la quantité à l'aide du nombre. **La performance de mesure cardinale est anticipée par l'adverbe 'combien'**. L'invariant opératoire est le nombre comme mesure cardinale⁶⁸⁵.

C_{0i} est la compétence « compter », associée au schème du comptage à l'aide de la comptine numérique. C'est une composante pragmatique du concept de nombre ordinal, au sens restreint d'objet défini dans un ensemble discret et totalement ordonné. **C_i , la performance de dénombrement est anticipée par le verbe 'compter'** (dans une situation présentant un certain ensemble d'objets) et qui doit se retrouver dans la prescription d'une tâche de comptage. Au niveau où nous nous situons, et comme nous l'avons analysé, le schème de dénombrement de C_i est associé à une mise en correspondance biunivoque en acte, que l'on peut désigner comme un concept organisateur de l'activité de dénombrement.

C_{1i} est la compétence de mise en correspondance biunivoque de deux ou plusieurs collections, réelle ou simulée mais exprimable. Particulièrement, **cette compétence a été associée à la construction de l'expression adverbiale 'autant que'**. Ainsi, lorsqu'il se donnera une caractéristique pertinente de la collection de petits pots, le système mettra en correspondance biunivoque l'ensemble des petits pots et un ensemble de mots-nombres. Réciproquement, il ira reconnaître que, dans un ensemble de pinceaux, il n'y en pas 'autant que' dans l'ensemble de ces mots-nombres. Notons que, comme nous le généraliserons dans le paragraphe 2, on distingue ainsi deux compétences réciproques.

La coordination de la compétence directe ('mettre autant que'), composante de C_{1i} et du schème de comptage C_{0i} , (utilisation ordonnée de la suite de mots-nombres) entre dans l'équilibre du schème de dénombrement C_i .

C_{2i} est la compétence de catégorisation⁶⁸⁶. Nous considérons la composante directe de cette compétence : construire une catégorie extraite d'un ensemble E , un prédicat étant donné. Par exemple : une inférence peut conduire le sujet à concevoir une catégorie de n collections

⁶⁸⁵ Rappelons encore une fois que cette expression exprime le fait que la connaissance en acte espérée, et concernée par la situation fondamentale, est celle du nombre-mesure et non celle de du nombre-quotité.

⁶⁸⁶ A laquelle sera totalement consacré le chapitre 5.

qui ont autant d'éléments qu'une collection donnée. Les trois collections : 1) celle donnée des p petits pots ; 2) celle de la bonne suite commençante de mots-nombres (les p premiers, s'il y a p petits pots) ; 3) celle des pinceaux à rapporter (toute partie de p pinceaux extraites de la collection de pinceaux disponibles), relèvent de la même catégorie : l'ensemble des n collections homogènes⁶⁸⁷, pouvant être mise en correspondance biunivoque avec l'une d'entre elles donnée (celle des petits pots).

Il est à noter que le prédicat joue effectivement, au sens logique du terme, et permettra l'acte fondamental, attendu dans la construction de la compétence C_f , à savoir, l'inhibition du comptage exhaustif de la collection des pinceaux disponibles, en surnombre dans la pièce voisine : le prédicat, appliqué à la collection disponible des pinceaux, donne la proposition vraie : « il n'y a pas de pinceaux autant que... »⁶⁸⁸. Il sert à exprimer, réciproquement, la compréhension de l'ensemble (ici restreint à trois éléments, 'collections' de p objets).

L'ensemble des compétences initiales précédentes rend potentiellement le système capable d'« utiliser la comptine numérique pour vérifier ou construire une mise en correspondance biunivoque réelle ou virtuelle⁶⁸⁹ de plusieurs collections ». Elle ne nécessite pas, elle-même, que la mémoire de travail joue le rôle fondamental que nous avons précisé précédemment. Ni même, surtout, d'avoir disponible la notion de cardinal (ou de nombre mesure). Comme nous l'avons déjà rappelé, elle suppose le théorème en acte de la correspondance biunivoque multiple, en d'autre terme, de la transitivité de la relation d'équipotence. Notons que **le schème de la catégorisation a permis la construction d'une signification de l'adverbe autant**, signification associée à l'actualisation du théorème de transitivité. La mémoire de travail, après inférence, doit donc, en fait, retenir une reprise de l'activation du schème C_i , ce en quoi est transformé le prédicat 'avoir autant que'. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, que l'on peut considérer une des composantes de C_f comme une compétence réciproque de C_i , selon un processus qui sera décrit. Son exercice pourrait être anticipé par une question du type : « y-a-t-il, dans ces boîtes, autant de marrons que dans ce sachet ? », les objets du milieu étant non déplaçables ; mais, ce qui pourrait conduire à l'exercice se suffisant d'une simple coordination de C_i et de C_{2i} . Alors que la prescription : « mets dans chaque boîte, autant de marrons que dans cette boîte qui en a 15 » (une réserve suffisante de marrons étant donnée), devrait conduire à l'exercice de cette composante de C_f .

⁶⁸⁷ Les objets y sont de même espèce.

⁶⁸⁸ Explicitement, un enfant qui a réussi sa tâche devra pouvoir répondre à la question : pourquoi n'as-tu pas rapporté tous les pinceaux ?

⁶⁸⁹ Ce qui exprime l'intériorisation de l'acte physique de mise en correspondance terme à terme.

Rappelons que la situation fondamentale, proposée par Guy Brousseau, et de laquelle nous sommes partis contenait à la fois les exercices de C_i , de C_{1i} et de la prise de conscience d'une certaine compétence, relative à la mise en mémoire de travail. Sur ce dernier point, nous avons analysé au chapitre précédent, qu'en tant que fonction psychique supérieure, la prise de conscience n'est sans doute pas une compétence également partagée ; et en particulier, celle de la mise en mémoire volontaire, même après la production de la bonne inférence : « il faut rapporter des pinceaux autant que des petits pots ».

Nous avons défini la construction de C_f comme celle d'une certaine coordination de compétences : la compétence de dénombrement, C_i ; la compétence de catégorisation, C_{2i} ; la compétence mise en relation biunivoque, C_{1i} ; la mise en mémoire de travail de la quotité ; **la compétence de l'inhibition du comptage exhaustif de la collection des pinceaux disponibles. Ce dernier point est fondamental car il signifie que le système devra construire une différenciation de la compétence du schème du comptage : compter la totalité pour dire le compte ou compter une partie pour prendre le compte que l'on veut.** Mais l'intégration de ces deux compétences en une seule, qui, à terme, signifie une généralisation du concept de comptage, ne peut être assurée, tant que l'enfant n'aura pas répondu à la question de savoir pourquoi il n'a pas compté tous les pinceaux de la pièce voisine : la réponse attendue étant que le nombre de pinceaux à compter doit être autant que la collection des petits pots⁶⁹⁰. Alors seulement, nous pourrions penser : qu'il a construit une composante pragmatique du nombre : le nombre pour mémoriser ; que sa mémoire de travail a joué là son rôle de façon consciente ; enfin, et surtout, qu'il a assimilé ce nombre au seul dernier nombre ordinal de la comptine numérique : ce qui, compte tenu de C_{2i} , est une des composantes cognitives, entrant dans la construction du nombre cardinal.

Précisément, la dimension Deh s'exprime dans ce qui est désormais un théorème de la théorie des ensembles : tout ordinal fini est un cardinal⁶⁹¹.

Nous pouvons compléter notre schéma, en notant certaines dimensions explicitables de la résultante cognitive R_c : elles concerneraient les régulations relatives à la mémoire de travail, et celles relative à l'inhibition, l'une et l'autre pouvant être considérées comme relevant d'une activité de la conscience.

⁶⁹⁰ Et non seulement qu'il y avait « trop de pinceaux ».

⁶⁹¹ Jean louis Krivine. *Théorie axiomatique des ensembles*. Chapitre II. *Ordinaux. Cardinaux*. PUF. 1972.

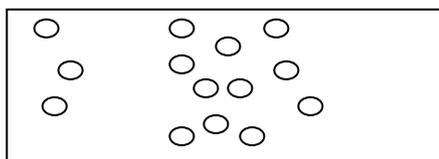
1.4.2.3 Compléments relatifs aux aspects linguistiques dans la structuration des compétences

Nous présentons, ci-dessous, des considérations qui concernent une construction exhaustive du nombre⁶⁹². Et donc, qui ne se limitent pas à la compétence C_f , définie précédemment.

Un élément important de la démarche didactique est que les mots, anticipateurs des schèmes, et entrant dans la définition des deux compétences, relatives à l'utilisation ordinale et cardinale des nombres, soient bien initialement distingués. Le contraire est de nature à renforcer un obstacle. Par exemple, comme nous l'avons noté dans la situation précédente, le mot 'compter' fait obstacle à l'utilisation de la comptine numérique, dans une signification autre que celle acquise dans le monde quotidien. Mais les habitudes culturelles font que l'enfant qui entre à l'école maternelle, possède un schème de comptage anticipé par une liaison forte entre les mots 'compter' et 'combien'. L'enseignant qui se trouve en charge de faire évoluer ce concept quotidien, n'est pas toujours conscient que l'obstacle réside effectivement dans cette liaison anticipatrice⁶⁹³. La résistance de l'obstacle va se manifester dans de nombreuses circonstances bien connues⁶⁹⁴.

Prenons l'exemple suivant :

Un élève, en début de classe préparatoire, doit répondre à la question : « combien de pastilles se trouvent dans le rectangle ? »



Nous rapportons les faits suivants :

- La plupart des enfants comptent les pastilles, « en chantant la comptine numérique » : « un, deux, trois, quatre...quatorze ».
- Aucun enfant n'utilise le sur-comptage, alors qu'il possède la compétence dite du subitizing⁶⁹⁵ qui lui permet d'évaluer, sans comptage, le paquet de trois pastilles. Ainsi, le

⁶⁹² Et déjà largement expérimentée, dans les classes de certaines écoles maternelles

⁶⁹³ Et bien que la difficulté soit bien connue des enseignants.

⁶⁹⁴ Montre à madame que tu sais compter : « un, deux, trois, ...dix.... ». Combien de doigts vois-tu ? « Un, deux, trois... ».

⁶⁹⁵ « Le terme « subitizing » désigne le dénombrement rapide, exact et assuré de la numérosité d'une collection, présentée pendant une durée assez brève. Il s'agit de l'aperception globale d'une quantité, sans recours au comptage ». Michel Fayol. *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problème*. Delachaux et Niestlé. 1990

schème du « subitizing » ne semble pas être un constituant naturel du schème plus complexe de dénombrement. Si l'on s'intéresse à l'organisation structurale des schèmes, on peut noter là une forme de discontinuité. A moins que l'on considère que la compétence de dénombrement résulte finalement de la coordination de deux structures schématiques qui vont se construire séparément, et qui devraient se coordonner dans une situation fondamentale : on peut les qualifier succinctement d'ordinales et de cardinales, cas particuliers de ce que Jean Piaget et Anna Szeminska appellent sériation et classification. La fusion de ces deux opérations, appliquées « *en une seule totalité opératoire, constituée, sans plus, la série des nombres entiers, finis indissociablement cardinaux et ordinaux* »⁶⁹⁶.

- Les enseignants reconnaissent que la pratique « dangereuse »⁶⁹⁷ du recomptage perdure longtemps après les premiers apprentissages de l'addition.

- Ainsi, le dénombrement est-il longtemps attiré vers le bas par le schème du comptage, associé à la comptine numérique, et fait obstacle à l'acquisition d'une procédure plus experte.

- Il se trouve que tous les rituels qui sont associés à l'usage de la comptine numérique sont initialisés par une prescription, où l'indice sémiotique invariant est le mot « combien ». L'autre indice sémiotique, presque toujours associé à cet adverbe est donc le verbe « compter », au point que « dire combien » ou « compter » sont synonymes dans le schème initial du dénombrement. D'ailleurs, pour dire combien⁶⁹⁸, il faut compter et compter bien : la performance, associée au schème et anticipée par le mot « combien » est celle du comptage à l'aide de la comptine numérique. La structure de schème, ainsi construite, est indissociable du schème de la traduction mentale du complexe de sons « combien ». Ce schème s'est alors coordonné à celui de l'expression orale de la comptine numérique et à celui de la synchronisation motrice, entre le pointage et le mot-nombre de la comptine.

- Finalement, pourquoi donc l'enfant va-t-il plus tard recompter, comme réponse à certaines questions, alors que l'on voudrait par exemple qu'il surcompte ? **En fait, lorsqu'on lui demande de dire combien il y a de marrons dans une collection, il ne se préoccupe pas de la collection dans son ensemble, il compte les objets un par un, sans que le résultat apparaisse comme une des qualités de cette collection. Il a bien compté n marrons mais il n'a pas perçu qu'il s'agit là d'un caractère global de la collection : n n'est pas un**

⁶⁹⁶ *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé. Avant propos.1967

⁶⁹⁷ Dangereuse, parce que, tout aussi bien, elle fait obstacle à la construction de pratiques plus expertes et elle conduit, inévitablement, à des erreurs de comptage, lorsque la collection à dénombrer est « grande » ou pose des difficultés d'énumération, de par sa disposition.

⁶⁹⁸ Etymologiquement : « comme bien »

des descriptifs de cette collection mais celui du comptage lui-même, présentement anticipé par le mot combien.

- Et même, si on lui dit, en les déplaçant de côté, qu'il y a déjà là 3 marrons (on lui laisse donc les derniers à surcompter), il va négliger l'information et se met à recompter parce qu'il a entendu le même mot : 'combien'.

- Le nombre de la comptine numérique n'est pas une quantité, mais un nom situé à la bonne place dans l'opération de « comptage ». Une telle opération n'est pas un réel dénombrement mais une opération phonologique, culturellement acceptée, et reconnue pour donner la réponse attendue. La comptine sert donc à retrouver le nom qu'il faut donner pour cette « bonne » réponse.

D'où notre postulat : organiser deux apprentissages parallèles du nombre. Une exigence de nature linguistique doit contraindre l'enseignant à 'sortir' le mot « combien » des situations de comptage⁶⁹⁹.

Deux objets vont coexister, dans l'apprentissage du nombre :

- le nombre, mot de la comptine numérique, associée au verbe 'compter' ;
- le nombre, mesure d'une quantité, associée à la locution adverbiale « autant que »

et à l'adverbe « combien ».

Les primitives linguistiques, pour l'apprentissage du nombre (éléments sémiotiques anticipateurs) seront :

- autant que⁷⁰⁰ ;
- combien⁷⁰¹ ;
- compter⁷⁰² ;
- les énoncés complets ou structures linguistiques primaires, associées au schème de la mesure cardinale :

- « Il y a des marrons autant que combien ? »,
- « Il y a des marrons autant que 7 ». 7 se substituant très précisément à

l'adverbe combien, il s'agit là d'une opération de conversion sémiotique, respectueuse de morphisme. Ajoutons que cette opération de conversion se coordonne au schème de la perception de la monade qui, limitée à sa seule activation, serait associée à la performance linguistique : « il y a des marrons autant que 'des un marrons' ».

⁶⁹⁹ Et ce n'est pas chose facile, tant les pratiques des enseignants sont ancrées dans une habitude contraire.

⁷⁰⁰ Ultérieurement le même nombre.

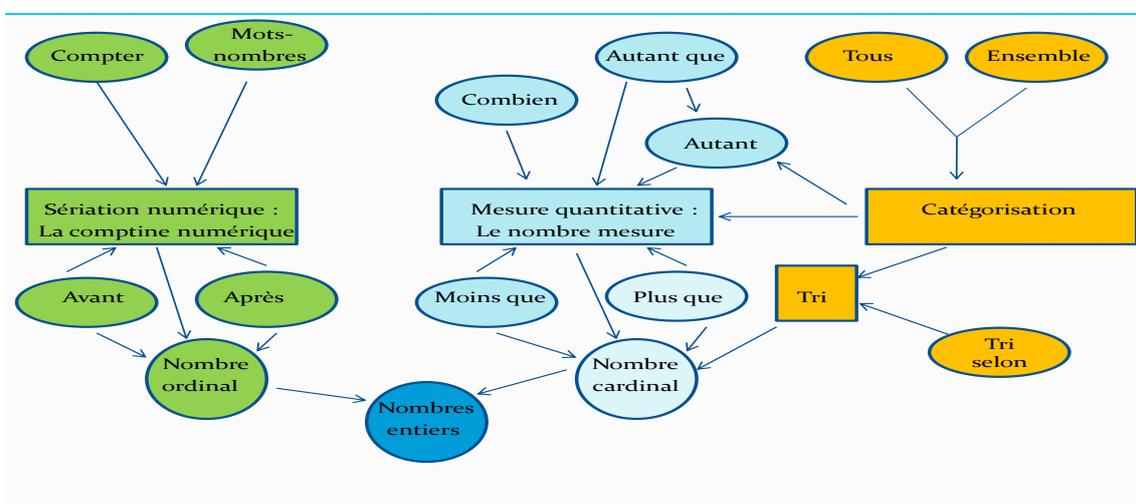
⁷⁰¹ Autant que et combien : adverbes de quantité.

Autant que = aussi tant que ; terme de comparaison binaire.

Combien = comme bien ; comparaison (comme), du point de vue de la quantité (un bien particulier).

⁷⁰² Réservé aux situations associées à l'usage de la comptine numérique.

Nous présentons, ci-dessous, un graphe de l'apprentissage du nombre qui reprécise donc, entre autres, que des compétences comme compter, mesurer (à l'aide d'un nombre) ou catégoriser sont indissociables de certains mots qui servent d'indicateurs, dans l'activation des schèmes correspondants. Il nous semble que c'est là un apport original que de **lier de façon systématique les apprentissages de concepts nouveaux et, plus précisément, le développement des compétences, à des formulations langagières spécifiques**. Nous nous retrouvons ici, avec ce qu'Ed Dubinski et Philip Levin pourraient définir comme une décomposition génétique du concept de nombre. Mais notre décomposition est véritablement structurelle en ce qui concerne la psychogenèse des compétences. De plus, nous notons que le nombre résulte bien finalement d'une coordination entre des schèmes relatifs à l'ordination, et ceux relatifs à la classification ; ce que Jean Piaget a précisé comme une coordination entre la sériation et l'inclusion des classes. Et il faut bien entendre, dans ces conceptions, ce que la théorie des ensembles a concentré dans le théorème suivant : tout ordinal est un cardinal⁷⁰³. A ce point, nous retrouvons effectivement ce que nous avons défini comme un concept organisateur de l'action didactique : la construction d'une corrélation entre les dimensions historique et psychologique, Deh et Dep.



Une décomposition génétique de la construction du nombre

Nous reconnaissons les trois séquences, correspondant à la construction de trois structures de schèmes, respectivement relatives à l'utilisation de la comptine numérique, élément de C_{0i} (séquence de gauche), à la catégorisation relevant de la compétence C_{2i} (séquence de droite), autorisant la construction du nombre cardinal, construction où l'on retrouve C_{1i} (associé à la locution adverbiale 'autant que') et qui est explicitée par la séquence centrale. Rappe-

⁷⁰³ Précisons qu'une définition comme $n+1 = n \cup \{n\}$ conduit à la chaîne des inclusions $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \dots \subset n+1$, quel que soit n

lons que la construction de C_f résulte, entre autres, de la coordination de trois compétences C_{0i} , C_{1i} et C_{2i} . Il est à noter que la construction du nombre cardinal (dans ce qu'il en est proposé là) impose la construction de la compétence « trier ».

Nous montrerons, dans le paragraphe 1.5, le sens psychogénétique à entendre, dans l'utilisation des primitives linguistiques de la séquence centrale.

1.4.2.4 Conclusion

A l'instar des chercheurs américains et de Gérard Vergnaud, nous nous donnons comme premier objectif de définir une décomposition génétique des concepts à enseigner. Mais, nous nous différencions de ces derniers, en **corrélant le développement scolaire de ces concepts à des indicateurs langagiers spécifiques**. Par cet aspect, et c'est ce que nous avons voulu montrer, une psychogenèse des compétences, à acquérir dans le milieu scolaire, exige une conception des situations didactiques plus fortement médiatisée que dans le cas des situations fondamentales. L'usage de la langue première, dans l'expression des énoncés de tâche, comme le réel en général, est source de trop nombreuses contingences, pour que la médiation didactique n'en recherche pas une maîtrise initiale.

Notre second objectif est alors de produire une analyse a priori de ces situations, afin d'en déduire des séquences que l'on peut bien qualifier de fondamentales, dès lors que certaines de leur séances sont de véritables situations-problèmes, présentant certains obstacles spécifiques, et que nous faisons intervenir des variables, que l'on peut aussi bien considérer comme didactiques, dès lors que leurs variations s'accompagnent nécessairement d'une variation de l'activité cognitive. Mais il importe que ces situations restent limitées à un espace de problèmes, dont Lev Vygotski a approché le principe, par le concept de zone proximale de développement, et que nous pourrions réinterpréter, comme une zone potentielle d'une structure de schèmes, en ce sens, qu'il ne nous intéresse de définir ce concept, que relativement à une compétence, enjeu d'un apprentissage en milieu scolaire.

L'activation des schèmes disponibles, et la construction de schèmes nouveaux, sont donc, en particulier, dépendantes d'éléments sémiotiques et surtout langagiers. Ceux-ci en anticipent la pertinence, ce pourquoi on peut alors dire d'eux, qu'ils en sont les indicateurs sémiotiques principaux. On en déduit que toute médiation, visant le développement de ces compétences, se construit en respectant un certain protocole qui précise cette médiation, en lien avec ces formes sémiotiques.

En suivant donc Gérard Vergnaud, à travers ses écrits, nous n'avons pas trouvé que son regard focalise explicitement sur le registre psycholinguistique. Pourtant, son approche semble ne pas analyser (certes non pas ignorer) plus systématiquement l'étude des détermina-

tions qui jouent entre certaines formes linguistiques (comme les mots manger, gagner, perdre, les temporalités de l'énoncé dont il est le plus souvent respectueux...) et l'activation de schèmes spécifiques. Le psychologue signale pourtant un cas particulier, dans la confusion qui peut accompagner l'apprentissage des mathématiques, entre les signifiants et les signifiés⁷⁰⁴. Mais nous retenons comme postulat qu'un schème reste lié, entre autres, à certaines formes linguistiques qui agissent comme des invariants opératoires⁷⁰⁵. Aussi, cette liaison constitue, en fait, un véritable levier didactique. Nous illustrons, ci-dessous, les premiers éléments d'une construction formelle qui se justifie par le postulat précédent. Nous définissons une construction formelle comme une suite de situations dont la structure langagière utilise un petit nombre de mots invariables⁷⁰⁶, assemblés selon une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles, également invariables. On peut qualifier cette structure langagière de bas niveau et, ainsi, certains mots ou expressions comme des primitives. Nous noterons que ces primitives sont de véritables enjeux d'apprentissage. Toutefois, l'usage exclusif de ces principes rendrait les textes finalement incompréhensibles. Dès lors, la suite des situations pourra présenter, au niveau du langage, un certain nombre de formes linguistiques abrégées qui vont alléger les énoncés⁷⁰⁷. Mais l'important serait que de telles abréviations soient négociées, lors de l'apprentissage. Malheureusement, et nous pensons qu'il y a là une source d'échecs pour beaucoup d'enfants, l'enseignant supposant souvent qu'ils disposent naturellement de tels critères de substitutions langagières⁷⁰⁸.

1.5 De l'importance des formulations langagières dans la construction des réversibilités opératoires

Nous voulons montrer comment des réversibilités opératoires logico-mathématiques, et reconnus comme des achèvements par Jean Piaget, peuvent se trouver explicitement initialisées dans un langage de bas niveau.

1.5.1 Un exemple approché théoriquement

Et pour ce faire, nous présentons, ci-dessous, ce que l'on peut considérer comme une ri-

⁷⁰⁴ Par exemple pour un élève de CM2, la notion de proportionnalité peut se confondre avec la perception d'un tableau présentant deux suites de nombres. Cette sorte de percept est fortement prégnante, comme on peut le constater avec des élèves de lycée qui agissent de façon pertinente ou non, en pensant à une situation de proportionnalité, lorsque l'on leur présente de tels tableaux. Nous avons pu constater que le choix de la lettre t au lieu de la lettre x perturbe durablement des élèves « faibles en mathématique », lors de la résolution d'équations ! D'autres, plus nombreux, ressentent une sorte de gêne à accepter qu'une solution d'équation puisse s'exprimer sous la forme $3 = x$ plutôt que $x = 3$...

⁷⁰⁵ Nous préciserons ultérieurement comment.

⁷⁰⁶ Ils sont l'objet d'une construction explicite. Leur définition est associée à la construction d'un schème spécifique.

⁷⁰⁷ Ce que nous ne présentons pas ici.

⁷⁰⁸ On peut le penser, en observant la liberté que prend l'enseignant avec de telles substitutions langagières.

gueur dans la conservation de l'intégrité d'un certain registre langagier, lors d'un moment initial.

Les situations suivantes présentent une séquence d'apprentissage, relative à l'addition et à l'école maternelle.

La séquence peut être proposée à des élèves de grande section, en situation d'apprentissage de l'addition⁷⁰⁹. On précise-ci-dessous des schèmes désignés par α , β , γ et δ .

α - On dispose n billes sur une table et n bouchons sur une autre table. L'enfant est capable de produire le jugement :

« Il y a des billes **autant que** des bouchons »⁷¹⁰.

On suppose que les élèves disposent d'un schème associé au dénombrement de petites quantités (inférieures à 10), et actif, au moins, dans la situation⁷¹¹ :

β - On dispose n billes sur une table. On présente comme énoncé : « **combien autant que** de billes sur la table ? » L'enfant est capable de produire le jugement :

« Il y a des billes **autant que** n ».

Il est déjà supposé acquis le théorème en acte de la symétrie de la relation d'équivalence « autant que » ; puisque le respect du traitement de substitution, dans le registre linguistique, donnerait : « il y a n autant que des billes ». En effet, dans le jugement n se substitue véritablement à l'adverbe de quantité combien.

Notons que cette formulation est déjà une forme abrégée (donc reconstruite ainsi lors d'un apprentissage antérieur), de celle directement associée à la coordination avec le schème de la correspondance biunivoque, entre deux collections équipotentes. Ce dernier schème α , actif dans la première situation n'était pas là associé à la compétence du dénombrement. Et, dans la limite d'un schème plus primitif, la formulation pure serait : « il y a des billes autant que *des 1* » ! Jean Piaget a montré très précisément que le passage de ce schème initial, associé par les enfants (et par leur enseignant) à la comptine numérique, au schème actif dans la seconde situation, nécessite, en fait, le stade de la conservation des quantités : il s'agit bien de reconnaître le nombre, indépendamment de ses multiples formes, à commencer par l'unité. « *Un nombre n'est intelligible que dans la mesure où il demeure identique à lui-même, quelle que soit la disposition des unités dont il est composé. C'est ce que l'on a appelé l'invariance du nombre* »⁷¹². Et pour ce faire, il faut qu'une telle compétence se fonde sur un schème plus

⁷⁰⁹ Comme nous allons le voir, on ne dissocie pas, dans une telle séquence, l'apprentissage de l'addition et de la soustraction.

⁷¹⁰ On retrouve la compétence C_{1i} (évoquée sous 1.4).

⁷¹¹ En dehors des aspects sensori-moteurs. Mais à ce niveau, les objets sont dessinés ou manipulables.

⁷¹² Jean Piaget. *La genèse du nombre chez l'enfant*. Chapitre 1. Opus cité.

profond : la perception en acte de la conservation de la monade⁷¹³. En terme didactique, et pour les enfants de petites sections de l'école maternelle, il s'agirait bien d'évaluer la disponibilité de ce schème. Le plus important est, en l'occurrence, de négocier avec l'enfant les mots qui permettent l'objectivation de ce schème. Ce qui signifie, en particulier, que les éléments de notre construction se situent en aval d'un début de construction formelle du nombre à l'école maternelle⁷¹⁴.

γ - On suppose maintenant que les élèves disposent d'un schème associé à la comparaison des petites quantités (inférieures à 10) et, précisé par la situation suivante :

On donne n billes à Pierre et m images à Aline ($m > n$),

« Qui a **plus que** l'autre ? »

« Aline a **plus que** Pierre »

« m est **plus que** n ».

« Qui a **moins que** l'autre ? »

« Pierre a **moins que** Aline »

« n est **moins que** m »⁷¹⁵.

δ - On suppose que ce schème est associé structurellement aux précédents, c'est-à-dire potentiellement activable dans la situation prolongée.

« Combien **autant que**, Aline a (de) **plus que** Pierre ? »⁷¹⁶

« Aline a **autant que** ($m-n$)⁷¹⁷ (de) **plus que** Pierre ». ⁷¹⁸

« Combien **autant que** Pierre a (de) **moins qu'**Aline ? »

« Pierre a **autant que** ($m-n$) (de) **moins qu'**Aline ».

⁷¹³ Les enseignants, que l'on rencontre, lors des animations pédagogiques, ignorent souvent que pour l'enfant le mot 'deux' dans les expressions 'deux pingouins' ou 'deux ours', n'a pas la même signification car pour cet enfant le mot 'un' dans les expressions un pingouin ou un ours ne dénote pas la monade.

⁷¹⁴ Voir C_f sous 1.4.

⁷¹⁵ Génétiquement, on devrait dire n a moins que m .

⁷¹⁶ Les locutions adverbiales « **de plus** » et « **de moins** » peuvent déjà avoir été introduites dans un schème précédent. On note une simplification du registre sémiotique initial, puisque la construction de ce schème devrait être initialisé par la phrase : Combien **autant que**, Aline a **de plus que autant que** Pierre ? L'hétérogénéité du contexte sociale (le groupe classe) peut demander au médiateur d'entamer des négociations, avec ses élèves, pour faire accepter ce que l'on peut appeler des abréviations, dans le registre sémiotique formel. Mais de telles abréviations devraient être en principe l'objet de définitions explicites. Remarquons qu'en mathématique, cette opération est heureusement chose courante et est effectivement l'objet de définitions explicites. On y écrit couramment des phrases du type : notons $f(x)$, l'image de Comme le rappelle Nicolas Bourbaki, l'usage d'une sémiotique formelle pure conduirait à des difficultés typographiques (et nous ajoutons de mémorisation) insupportables.

⁷¹⁷ Compté d'une façon ou d'une autre par les enfants, mais non noté à l'aide du symbole '-'

⁷¹⁸ Et de même que précédemment dit, ceci correspond à : $m-n$ billes est **autant que**, Aline a **de plus que autant que** Pierre.

Remarques essentielles

➤ Nous voulons insister sur notre conception que les schèmes ne sont pas définissables, sans des indices sémiotiques spécifiques, et qui se trouvent exprimés dans les alinéas précédents. L'évolution des formes langagières, associées à ces schèmes et, initialement brutes, ne se ferait qu'à la suite d'un apprentissage explicite. Ces formes langagières-mots, expressions, syntaxes de la question et syntaxe de la réponse-sont des termes de registres sémiotiques associés, de façon indéfectible, aux schèmes. Dans le cadre d'une représentation pragmatique des conceptions vygotkiennes, ce sont de tels indices qui serviront de leviers dans la conceptualisation et, donc, dans la restructuration de ces schèmes ; en particulier, lorsqu'il va s'agir de faire passer le nombre d'une conception ontologique⁷¹⁹ à une conception spacieuse⁷²⁰ qui va se développer dans et par la construction des structures opératoires, à commencer par l'opération d'addition, indissociable de l'opération inverse, la soustraction.

➤ Nous induirons des thèses de Jean Piaget et expliciterons dans ce chapitre, qu'un schème opératoire doit toujours être composé de termes réversibles. Par exemple, il faut entendre que le second schème (actif dans la situation β) de notre construction formelle et, dont nous allons nous resservir, doit être utilisable dans la situation suivante : « pose sur la table des billes **autant que** n ». Nous reprendrons systématiquement ce concept de schèmes réciproques (cas particulier de la réversibilité), associés à une même expression langagière.

➤ Les schèmes définis ci-dessus sont, selon les programmes de l'école primaire⁷²¹, les premiers qui concernent la construction du nombre entier. Le schème γ , en exercice dans la situation de comparaison peut ne pas concerner initialement l'ordre mais la comparaison des cardinaux (égaux ou différents d'une certaine façon). Mais il correspond, dans un isomorphisme, avec l'ordinalité du nombre⁷²².

➤ Le schème α , en exercice dans la première situation, concerne le concept de cardinal, l'aspect quantitatif du nombre. Le concept quotidien du nombre se caractérise par son caractère concret et isolé. Il n'existe pas, en dehors de ce qu'il est sensé mesurer, et il n'est pas calculable à partir d'autres nombres. Ainsi, l'école a pour charge d'en faire une classe

⁷¹⁹ Le schème β , tant qu'il demeure isolé, est la forme causale de cette conception. Les enseignants qui construisent des petites situations, où un seul cardinal est observable, renforcent donc cette conception qui devient alors un véritable obstacle didactique, puisqu'il va s'agir de la dépasser. Même sans faire référence à une conceptualisation formelle du nombre, comme on la trouve dans l'axiomatique de Peano ou de Newman, **le concept de nombre n'est pas concevable sans celui des nombres qui lui sont inférieurs.**

⁷²⁰ L'espèce manipulée ne peut être définie en elle-même, mais par les manipulations dont elle devient un argument.

⁷²¹ BO n°3 du 19 juin 2008.

⁷²² En termes d'inclusion : $n \leq m$ signifie $n \subseteq m$

d'équivalence (un cardinal), dans la catégorie des ensembles⁷²³ (construction d'un schème α généralisé) puis, plus tard, de le rendre calculable, c'est-à-dire décomposable en une somme de plusieurs entiers.

➤ Le schème δ , est une structure fondée sur une coordination des schèmes précédents et, comme on le voit, cette organisation coordinatrice est obtenue corrélativement à l'apprentissage d'une expression nouvelle, « **de plus que** » (et son expression inverse « **de moins que** »). Ce schème est le fondement de l'apprentissage des deux opérations, l'addition et son inverse : la soustraction.

Nous présentons, ci-dessous, la construction du schème de cette opération, à partir de ces schèmes disponibles.

Situation : entre guillemets, on présente les phases de l'enseignant, telles qu'elles devraient être acceptées par les élèves, au fur et à mesure du développement de la situation.

« Pierre a **autant que** 4 billes *et* Aline a **autant que** 9 jetons »⁷²⁴

Remarque : cognitivement, le connecteur binaire « *et* » est incontournable, car aussi bien en tant que concept quotidien, qu'en tant que concept scientifique, il permet l'expression de deux jugements, considérés au même niveau de signification logique : la phrase est entendue comme vraie, si et seulement si, les deux propositions indépendantes le sont simultanément. Il faut alors noter que, contrairement au connecteur logique « *ou* », cette acception du connecteur logique « *et* », est proche de sa conception quotidienne. Pourtant, dans un énoncé du type : « j'ai 3 billes dans la main droite *et* j'ai 5 billes dans la main gauche. Combien de billes ai-je en tout ? ». L'enfant est encouragé, abusivement, à entendre le « *et* » comme correspondant sémiotiquement au « plus » de l'addition logique puisque, ce « plus » lui sera substitué linguistiquement dans un énoncé du type : « j'ai 3 billes dans la main droite *plus* 5 billes dans la main gauche ». On voit là qu'il y un déplacement de sens, qui peut paraître mineur, mais révèle la coexistence possible et arbitraire de deux sens irréductibles et, la source d'ambiguïté, au sein de la communication, entre l'enseignant et l'élève. Si l'on considère l'importance de ces indices, dans la planification des actions, on peut admettre que de telles confusions sémiotiques peuvent être source d'échecs et, d'autant plus cachées, que la situation est plus complexe⁷²⁵. Notons enfin la différence avec un énoncé du type : « Tu peux prendre des billes dans ma main droite *ou* tu peux prendre des billes dans ma main gauche. Dans l'une

⁷²³ Comme on le considère depuis Georg Gustav Cantor et surtout Gottlob Frege. Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques* ». Opus cité. Ce qui suppose le schème de la catégorisation (voir C_{2i}, sous 1.4)

⁷²⁴ A ce niveau, il faut considérer que les objets sont physiquement présents, les schèmes décrits plus hauts étant indissociables de ce type d'indices sémiotiques.

⁷²⁵ Ce qui n'est certes pas le cas ici.

il y a trois billes, dans l'autre, il y a 5 billes. Combien de billes peux-tu prendre au maximum ? ». Le connecteur *ou* correspond bien au *plus* de l'addition logique.

Suite de la situation :

1. « Qui a **plus que** l'autre ? ». Aline a **plus que** Pierre.
2. « **Combien autant que** Aline a **de plus que** Pierre ? »
3. « Aline a **autant que 5 de plus que** Pierre » oui
4. « Aline a **autant que 5 de plus que autant que** Pierre »⁷²⁶ oui
5. « Aline a **autant que 5 de plus que 4** » oui
6. « Aline a **autant que 5 plus 4** » oui
7. « 9 est **autant que 5 plus 4** » oui

Ou en reprenant 1. 2. 3 puis :

- 4'. « Aline a **autant que 5 de plus que autant que** Pierre » oui
- 5'. « Aline a **autant que Pierre de plus que autant que 5** » oui
- 6'. « Aline a **autant que 4 de plus que 5** » oui
- 7'. « Aline a **autant que 4 plus 5** » oui
- 8'. « 9 est **autant que 4 plus 5** » oui

Remarques

➤ On peut noter que la construction sémiotique spécifique de l'addition commence à la ligne 6 (7'). Il y a un changement dans le registre sémiotique, véritable saut informationnel⁷²⁷, apporté par le médiateur : le syntagme « **de plus que** » terme d'une relation binaire dissymétrique étant remplacée par le monème « **plus** » terme de l'opération binaire d'addition commutative.

➤ Notre but, en l'occurrence, n'est pas de préciser pourquoi le schème, dont l'indice sémiotique principal est le syntagme « **de plus que** », a le potentiel de rendre possible une structure de schèmes dont il est l'un des constituants. Mais on peut noter la volonté exprimée ici de modifier le registre linguistique de façon la plus minimale possible⁷²⁸. En pratique, le type de situations qui peut désormais alimenter une telle structure de schèmes est défini par la

⁷²⁶ Ici, on a besoin de retrouver la « pureté de la sémiotique initiale ».

⁷²⁷ L'enfant ne peut prévoir où l'enseignant veut l'amener.

⁷²⁸ C'est ce que nous appellerons une négociation sémiotique avec l'élève.

situation canonique suivante⁷²⁹ :

« Paul a n trucs et a m machins. Combien d'objets a-t-il en tout ? »

Situation qui peut se différencier

« Paul a m trucs de plus que n machins. Combien d'objets a-t-il en tout ? ».

Décrivons la situation réciproque⁷³⁰ :

« Pierre a **autant que** 4 billes et Aline a **autant que** 9 jetons »⁷³¹

1. « Qui a **moins que** l'autre » « Pierre a **moins que** Aline »
2. « **Combien autant que** Pierre a **de moins que** Aline ?
3. « Pierre a **autant que 5 de moins que** Aline » oui
4. « Pierre a **autant que 5 de moins que autant que** Aline » oui
5. « Pierre a **autant que 5 de moins que 9** » oui
6. « Pierre a **autant que 9 moins 5** » oui
7. « 4 est **autant que 9 moins 5** » oui

Remarques

➤ On peut noter la correspondance sémiotique entre les deux discours, issus de la même situation initiale. Ceci correspond à la construction psycholinguistique de la réversibilité des deux opérations d'addition et de soustraction. Mais à ce niveau non opératoire, l'enfant est amené à n'en percevoir que certains éléments réciproques comme les syntagmes « **de plus que** » et « **de moins que** », préparant donc la réciprocité des termes « **plus** » et « **moins** »⁷³². Ce qui n'est pas encore l'inversion proprement dite des deux opérations qui, pour être complète au sens formel, demande l'existence de l'élément neutre, c'est-à-dire le zéro. Nous pouvons noter qu'en deçà de cet acquis, cette inversion prend la forme concrète d'une réciprocité homomorphe de celle des expressions « plus » et « moins », elles-mêmes construites à partir de la réciprocité des expressions « de plus que » et « de moins que ». **Nous pouvons ainsi retenir que toutes constructions mathématiques nouvelles sont celles d'opérations réciproques sur certains registres langagiers.** Et, à ce niveau des apprentissages fondamentaux,

⁷²⁹ Bien sûr, un tout autre travail consiste à négocier et à définir une simplification du registre sémiotique. En mathématique, il est courant de faire appel à de telles simplifications que l'on appelle des abréviations. Un registre initial est toujours très formel, et son respect rigoureux est cause de trop de lourdeurs, d'où la définition de telles abréviations. C'est le cas des nombres entiers, objets d'une construction normative très complexe dans la mathématique formelle et qui, comme on le sait, sont désignés simplement à l'aide de chiffres qui sont, en fait, autant de symboles abrégiateurs.

⁷³⁰ En faisant les mêmes remarques que pour la situation précédente et concernant la simplification du registre sémiotique.

⁷³¹ Rappelons qu'à ce niveau, il faut considérer que les objets sont physiquement présents, les schèmes décrits plus hauts étant indissociables de ces indices sémiotiques.

⁷³² Formellement, en classe de CP, l'**unicité de la situation initiale permet de comprendre que les égalités : $9 = 4+5$ et $4 = 9-5$ sont des écritures équivalentes.**

le premier de ces registres est celui de la langue naturelle qui en contient les potentialités.

➤ On peut noter que la construction sémiotique de la soustraction commence à la ligne 6 avec l'introduction du terme spécifique « moins ». Mais il s'y trouve une sorte de rupture obligée, par rapport au discours précédent, la soustraction étant non commutative. Les deux discours perdent, en ce point, leur dualité, pour la retrouver dans les deux dernières lignes. Encore une fois, nous devons penser que cette rupture est à négocier avec l'élève. On pourra toutefois, ultérieurement, retrouver cette dualité, en exprimant que la réciprocité initiale se transforme en inversion. S'il y a conservation de cette dualité, il faut la voir, de façon très générale, dans celle d'une réversibilité qui tend, en l'occurrence, à devenir formelle : la structure de groupe $(\mathbf{Z}, +)$.

➤ En pratique, le type de situations qui peut désormais alimenter une telle nouvelle structure de schèmes est défini par les deux situations, tout aussi canoniques suivantes :

« Paul a n trucs et a de plus m machins. Combien d'objets a-t-il en tout ? » ;

« Paul a p objets et a de moins m machins. Combien de trucs a-t-il en tout ? ».

1.5.2 Des formes langagières comme invariants opératoires

En fait, comment considérer, dans la structuration cognitive, les formes langagières dont nous avons donné, ci-dessus, un exemple de décomposition génétique ?

1.5.2.1 Des registres spécifiques

Nous avons donné un exemple d'utilisation d'un registre sémiotique qui possède les caractéristiques très générales suivantes :

➤ ses termes (mots, relations, formes grammaticales : syntaxiques, connections logiques) sont les indices sémiotiques de schèmes spécifiques ;

➤ tout terme fondamental possède sa forme duale, ce qui est l'expression d'un schème applicable à des opérations réversibles. **Il faut alors considérer que les deux situations qui ne se distinguent que par la question initialement posée, relèvent finalement du même schème, ce qui définit son caractère opératoire ;**

➤ les transformations, internes à un registre, correspondent à des réorganisations des structures de schèmes. Ainsi, le schème (appelons le «schème de l'addition»), construit ci-dessus, suppose ce que Jean Piaget appelle une accommodation réciproque de deux schèmes précédents ; celui de la comparaison et celui de la mesure d'une quantité. La situation proposée est nouvelle pour le sujet. Aucun des schèmes précédents ne peut l'assimiler séparément. Il faut donc, qu'entre ces schèmes, il y ait une coordination. Mais, en cela, **la médiation didactique renvoie à un traitement spécifique du registre linguistique, traitement, dont**

nous postulons qu'il correspond à une construction homomorphe d'une structuration de schèmes ;

« Les schèmes comportent beaucoup d'invariants opératoires implicites : concepts en actes et théorèmes en actes. Il est intéressant cependant d'analyser comment l'activité langagière, qui accompagne la pensée, contribue à la planification et au contrôle de l'action, et à la conceptualisation *hic et nunc* d'une situation, c'est-à-dire à l'extraction des invariants pertinents »⁷³³. Pourtant, comme nous l'avons estimé, dans une acception très piagétienne, Gérard Vergnaud pense que la conceptualisation trouve bien ses sources et ses critères, dans la représentation du réel, mais pas fondamentalement dans les mots qui contribuent à accompagner le processus de conceptualisation. Ainsi, il analyse le langage, comme accompagnant de façon externe le fonctionnement des schèmes, comme révélateur de l'utilisation de tel ou tel invariant opératoire mais non, pour certaines expressions, comme constitutives du schème lui-même, contrairement donc aux concepts et théorèmes en actes. Par exemple, lorsqu'il décrit des structures additives, en vue d'en préciser leur complexité psychogénétique, c'est-à-dire leur compréhension progressive par des élèves de l'école primaire à la fin du collège, il le fait, par un usage d'une terminologie presque exclusivement mathématique et d'un registre graphique⁷³⁴. Mais celui-ci ne masque-t-il pas, en retour, les contraintes sur l'apprentissage, exercées par les formes linguistiques, initialement utilisées dans certaines situations. Certes, s'il s'agit, en chaque cas, de préciser mathématiquement tel concept en acte ou tel théorème en acte ou telle relation en acte, il paraît difficile de s'exprimer autrement. Mais à tout prendre, il faudrait alors considérer, comme une propriété remarquable de l'activité mathématique du sujet⁷³⁵, que celle-ci puisse être, relativement à certaines de ses composantes, l'objet d'une description en terme d'homomorphisme : cette activité peut être représentée dans le registre mathématique. Un exemple récurrent, dans les écrits de Gérard Vergnaud, concerne le schème du calcul du cardinal⁷³⁶ de la réunion de deux ensembles finis et disjoints. Celui-ci est associé au théorème en acte : $\text{Cardinal}(A \cup B) = \text{Cardinal}(A) + \text{Cardinal}(B)$. Or, cette proposition (qui exprime de plus un homomorphisme interne au registre de la théorie des ensembles), concentre une grande partie de l'activité des schèmes qui se coordonnent, pour résoudre la tâche : « cardinal (AUB) ». Il faut donc considérer le schème de la cardinalité d'un ensemble fini, le schème de base de l'addition, qui s'exprime par le théorème en acte et aussi, le schème

⁷³³ Gérard Vergnaud. *Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques*. Opus cité

⁷³⁴ *Structures additives et complexité psychogénétique*. Opus cité. Il n'y est pas la question du concept de champ conceptuel.

⁷³⁵ Nous parlons de cette activité cognitive et non visible directement, c'est-à-dire l'activité sous-jacente des schèmes.

⁷³⁶ Nombre d'éléments.

de l'énonciation des cardinaux. Tous ces schèmes peuvent, à leur tour, être analysés. Par exemple, le schème de la cardinalité s'exprime, entre autres, dans une coordination entre le schème du comptage à l'aide de la comptine numérique et le schème du geste (ou de la visée) de pointage des objets à dénombrer, lequel contient l'anticipation de son exhaustivité⁷³⁷. La description d'une résolution de tâche, par l'activité des schèmes activés, lors de cette résolution, va expliciter certains « invariants opératoires »⁷³⁸, et donc donner à voir des corrélations entre les deux dimensions épistémologiques que nous avons mises en exergue, dans le chapitre 2 (historique et psychogénétique) et, dont nous avons explicité les caractéristiques dans le chapitre précédent. Il semble donc bien qu'un homomorphisme structurel puisse être envisagé, entre la psychogenèse d'une compétence qui peut être exprimée dans un registre relevant d'une logique des schèmes, et le développement d'une certaine connaissance mathématique qui, elle-même, peut être exprimée dans un registre relevant du langage mathématique. C'est ainsi que nous comprenons les formes prises par le discours de Gérard Vergnaud, lors de l'analyse psychogénétique de certaines structures mathématiques. Nous posons cependant la question de la légitimité d'un tel postulat. Surtout, nous notons le danger qu'il y aurait alors à confondre les deux registres, comme cela se fait dans une pédagogie dite transmissive, car le langage de haut niveau, comme celui du registre mathématique, n'est pas isomorphe au langage de bas niveau dont relève le traitement des schèmes. C'est ce que précisent Jean Piaget, en rappelant l'origine concrète des concepts qui tendent à devenir formels, mais ne le sont pas initialement. Et aussi, Lev Vygotski, en notant le lien qui unit les concepts scientifiques et les concepts quotidiens dans leur germination respective et opposée.

1.5.2.2 Conclusion

Nous avons voulu montrer, suivant en cela Gérard Vergnaud, le rôle actif des registres sémiotiques dans les apprentissages. Mais nous avons insisté sur le sens dans lequel nous pensons entendre leur utilisation : **nous considèrerons que certains signes, mots ou énoncés sont, selon les cas, des indices sémiotiques, constitutifs des schèmes, au sens où ils les anticipent. Ils sont, de ce point de vue, des invariants opératoires d'une certaine activité cognitive. Précisément, nous entendrons ces derniers, pour des schèmes de forme supérieure : des régulations spécifiques dont le rôle fonctionnel est la sélection d'un schème pertinent, en lien avec ces indicateurs sémiotiques.** En revenant à une conception plus vi-

⁷³⁷ C'est la recherche d'une correspondance biunivoque. Et de plus, nous avons montré qu'il s'actualise là des invariants opératoires, relatifs à la catégorisation (sous 1.4.2.2).

⁷³⁸ *Concepts en acte et théorèmes en acte : les invariants opératoires forment la partie la plus directement épistémique du schème, celle qui a, pour fonction, d'identifier et de reconnaître les objets, leurs propriétés, leurs relations et leurs transformations.* Gérard Vergnaud. Recherche en éducation, n°4. Opus cité. Certes, et nous définissons alors pour ce faire, une fonction de régulation.

goureusement vygotkienne du rôle structurant du langage dans la conceptualisation, nous l'utiliserons en vue de la construction des schèmes, au point que certaines formes linguistiques entreront dans la définition même d'un concept, quand le schème atteindra un niveau d'abstraction suffisant. Rappelons toutefois : si l'on comprend bien que celles-ci puissent être conçues comme relevant d'un langage de bas niveau, car proches du fonctionnement des schèmes, dont elles constituent des indices sémiotiques anticipateurs, ce qui peut faire initialement leur force dans les apprentissages, il s'avère que certaines d'entre elles sont finalement difficilement maniables, voire trop éloignées d'un usage déjà consacré. Certes, et l'objectif de l'enseignant serait, à terme, de leur substituer, si nécessaire, des termes beaucoup plus maniables mais efficaces, et en particulier, dans un registre proche du symbolisme mathématique. Mais, nous considérerons qu'une fois introduites dans la communication avec l'enfant, ces formes langagières initiales doivent être respectées, sous peine de véritables ruptures cognitives⁷³⁹. Leur changement, sous une forme abrégée et plus symbolique, doit se rapprocher, autant que faire se peut, d'une renégociation explicite. Et, nous pensons que ce qui vient de se dire peut être aussi considéré comme un moment d'une perturbation didactique voulue, dans l'assimilation normale des schèmes ; leurs accommodations consistant précisément aussi dans ces changements de registres sémiotiques.

1.6 Remarques concernant l'analyse de l'activité dans les situations didactiques

1.6.1 A la recherche de micro-variables

Retenons quelques éléments d'un exposé succinct que fait Aline Robert, de certains concepts forgés par Guy Brousseau : les outils, situations fondamentale et milieux de la TSD⁷⁴⁰, conduisent à des analyses globales des situations didactiques. La référence, au sens mathématique (pragmatique) de la notion, à faire construire par l'élève, sert d'outil fondamental à la conception du milieu. La conception aura comme objectif, d'introduire la connaissance visée comme un outil, auquel les élèves auront nécessairement recours, et aussi, de gommer la présence de l'enseignant durant cette phase d'élaboration. L'analyse de situation ordinaire portera, en particulier, sur la présence ou non de la connaissance mathématique visée dans ce milieu, et mesurera le niveau de dévolution, dans le déroulement de l'activité. Mais cette référence à la théorie donne à l'analyse des formes globales qui focalisent le regard sur des macro-variables, plus proches d'une analyse de tâche, que celle d'une activité. « *Chronologie et analyse fine du discours nous semblent souvent absentes des analyses du milieu où la situa-*

⁷³⁹ Cette rupture se manifestant lors de l'utilisation peu valide de certains de ces termes comme des écritures du type $3+5=8+2=10$ ou des inversions dans l'écriture des fractions. Un cas particulier important est donc celui de l'introduction prématurée du symbolisme mathématique.

⁷⁴⁰ Théorie des Situations Didactiques.

*tion est analysée d'emblée dans sa globalité. Les notions de tâches et d'activités n'apparaissent pas explicitement dans la Théorie des Situations Didactiques »*⁷⁴¹.

1.6.2 Une réponse avec le concept de schème ?

1.6.2.1 Des difficultés d'opérationnalité

Le schème est l'unité cognitive minimale permettant de décrire l'activité d'un sujet en situation de résolution de tâche⁷⁴². Il constitue l'unité d'analyse la plus fine dont nous pouvons aborder le développement. La référence au concept de schème est une constante dans les travaux de didactique se rapportant explicitement au constructivisme piagétien. Elle l'est encore fortement dans les travaux de la didactique professionnelle. Pourtant, il semble que le concept reste d'un usage malaisé pour le chercheur en didactique. Par voie de conséquence, il l'est pour le formateur et, finalement il devient une référence pauvre dans une formation de futurs enseignants. Gérard Vergnaud constate que le concept a du mal à « passer », et cela, en dépit de l'influence que les chercheurs concernés disent reconnaître aux travaux du psychologue didacticien. On trouvera avec peine, dans les analyses des activités des élèves (et des enseignants), proposées dans l'ouvrage « *la classe de mathématique : activités des élèves et pratiques des enseignants* »⁷⁴³, des formulations explicites relevant d'un cadre de la psychologie cognitive et, en particulier, de l'épistémologie génétique. Pourtant, Janine Rogalski consacre deux chapitres, en annexe de l'ouvrage, pour une « *mise en regard des théories de Piaget et de Vygotski sur le développement et l'apprentissage* », d'une part, et pour rappeler « *l'apport complémentaire du cadre théorique de G.Vergnaud, sur le développement et l'apprentissage, en relation avec l'enseignement des mathématiques* », d'autre part. Et, il est vrai qu'Aline Robert reconnaît, au début de ce recueil de contributions qui « *s'inscrivent dans le cadre très général des théories de l'activité et du développement* », certaines des « *difficultés qui se présentent lors de ces emprunts, étant liées d'abord à celles de définir des schèmes et à intégrer la notion de compétence. « **La traduction de la construction des connaissances mathématiques comme acquisition de schèmes ou de compétences est peu retenue, jusqu'à présent ..., vu les difficultés à cerner « la taille » de ce qui est à exhiber** »*⁷⁴⁴.

⁷⁴¹ *La classe de mathématique. Activité des élèves et pratiques des enseignants*. Partie 0. Chapitre 1. Edition Octarès. 2008.

⁷⁴² En deçà, il s'agirait, il nous semble, de faire des investigations dans l'activité neuronale et les connections synaptiques spécifiques ; ce qui relève des neurosciences.

⁷⁴³ Opus cité.

⁷⁴⁴ *La classe de mathématique : activités des élèves et pratiques des enseignants* Opus cité. Partie 1. Chapitre 1.

1.6.2.2 Des divergences d'interprétations qui s'expliquent

L'extension d'une compétence à une classe de situations plus grande est celle d'une réorganisation, selon des processus repérables, d'une structure de schèmes. En nous limitant à des aspects descriptifs, ces processus sont ceux de l'assimilation et de l'accommodation des schèmes. Mais, à se maintenir à ce niveau, l'analyse de l'activité de l'élève, en situation de résolution de tâches, peut diverger sur des points essentiels, comme la description des schèmes possibles, dans le cas de certaines performances en apparence pourtant proches, et donc de la définition même de certains invariants opératoires.

Nous avons en effet noté, dans une « confrontation » entre une analyse de Gérard Vergnaud et la nôtre, qu'une certaine activité de l'élève pouvait recevoir plusieurs interprétations, quant à la nature et au fonctionnement des schèmes évoqués ; au point, rappelons-le, qu'un invariant opératoire a pu, dans une première analyse, apparaître comme un outil disponible en acte, et dans une seconde analyse, apparaître comme l'objet, objectif d'une construction en acte. D'ailleurs, le terme de schème peut apparaître impropre, dès lors qu'un geste mathématique qui intervient dans l'activité du sujet relève, en fait d'une structure complexe de schèmes qui se sont coordonnés ou, s'il y a apprentissage, qui interviennent dans un processus de coordination, aboutissant à une nouvelle structure, ainsi que nous en avons donné un exemple précédemment. Or, l'histoire de cette structuration, si elle n'est pas connue d'un observateur de l'activité, ne devient alors, a posteriori, qu'un possible parmi d'autres. Nous pensons, en conséquence, que des indices sémiotiques, associés à la construction de certains schèmes, peuvent entraîner l'activation de toute une structure de schèmes dont ils sont des indicateurs ; structure qui, dans l'activité, peut s'avérer pourtant non pertinente, relativement à la tâche prescrite. Les raisons de cette non pertinence, échappant alors à tous observateurs de l'activité.

1.6.3 Alors retrouver un fonctionnement transcendant celui des schèmes

L'analyse explicative du fonctionnement et de la réorganisation des schèmes doit nous conduire à considérer un fonctionnement hors des schèmes eux-mêmes et lié et à un développement plus général de l'appareil cognitif. En particulier, la finalité de cette réorganisation qui accompagne le processus général de l'adaptation, ainsi que les états du processus, relèvent d'un développement cognitif qui se manifeste par certaines formes de régulation, comme la recherche de certains équilibres à maintenir ou à rétablir, ce qui, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, répond d'un même principe de conservation. Or, certaines de ces régulations interviennent aussi dans le traitement de problèmes normaux, au sens où ces derniers relèvent d'une certaine routine ou, dit autrement, contribuent au renforcement positif d'une

structure de schèmes déjà équilibrée. Ces régulations ont pour fonction la sélection de l'une de ces structures, en prenant pour arguments certaines formulations langagières. On peut comprendre que ces dernières peuvent être définies (parmi d'autres éventuellement) comme des indicateurs sémiotiques anticipateurs d'une certaine forme de l'activité.

Nous présentons ci-dessous certains cas significatifs d'une occultation du concept de régulation.

Du point de vue fonctionnel, rappelle Jean Brun, « *l'épistémologie génétique plaçait le schème au centre du processus d'adaptation des structures cognitives. La théorie des champs conceptuels précise la fonctionnalité des schèmes, pour le processus des transformations des connaissances, à travers des situations centrées sur des concepts* »⁷⁴⁵. Et l'auteur note, comme exemple, la conception de séquences didactiques sur le concept de volume, en classe de cinquième, conçues et réalisées par Gérard Vergnaud, au sein d'une équipe de huit collaborateurs. Dans l'introduction qu'il fait de ce travail⁷⁴⁶, Gérard Vergnaud précise, comme décisive, une analyse des tâches, c'est-à-dire « *des opérations nécessaires au traitement de la situation et à la solution du problème posé* ». « *Ces opérations impliquent des opérations de pensées qui sont nécessairement reliées aux caractéristiques conceptuelles de la situation. L'analyse de ces opérations de pensée, qui représentent l'analyse proprement cognitive de la tâche, forme le noyau de l'analyse de tâche* ». Mais on ne retrouve pas, pour les analyses a priori des séquences, le concept de schème comme point d'appui fondamental. Certains obstacles comme « *une conception unidimensionnelle* »⁷⁴⁷ du volume qui s'opposent à une « *conception trilinéaire* »⁷⁴⁸ sont analysés comme des difficultés qu'il convient de travailler au, sein de séquences spécifiques, et mathématiquement bien balisées⁷⁴⁹. Mais, on ne trouve pas que de telles organisations didactiques prennent en considération le fonctionnement des schèmes eux-mêmes, fonctionnement manifestant le fait que de telles entités cognitives se posent à la fois en obstacles et en point d'appui, lors des changements des conceptions. D'ailleurs, une détermination fine des schèmes en jeu n'est pas entreprise. Ainsi, l'aspect logico-mathématique des opérations didactiques proposées, nous semblent bien régler leur organisation, c'est ce qu'apporte effectivement l'analyse du concept dans un champ conceptuel reconstruit à des fins didactiques, davantage qu'une attention à une filiation psychogénétique,

⁷⁴⁵ *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques.* Opus cité

⁷⁴⁶ Didactique et acquisition du concept de volume. Opus cité

⁷⁴⁷ Volume obtenu par pavage à l'aide d'un volume unité.

⁷⁴⁸ Formulation du volume comme produit de trois dimensions indépendantes.

⁷⁴⁹ L'obstacle précédent est d'ailleurs celui qui focalise le plus l'analyse. RDM (1983). Conclusion de l'article : *représentation du volume et arithmétisation. Entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans.* Pages 27-70.

qui ferait vouloir des opérations didactiques plus directement sur les schèmes eux-mêmes, à moins de confondre celles-ci avec celles-là. **Or, comme nous le préciserons, assimilation et accommodation relèvent de mécanismes transcendant le fonctionnement des schèmes eux-mêmes. Une des formes actives de ces mécanismes consiste en certaines régulations.**

Un schème est de même type logique qu'un algorithme⁷⁵⁰. Seule la modélisation de l'activité cognitive de l'élève, en terme d'invariants opératoires, met en évidence la cohérence de cette activité. Par exemple, « *le bon fonctionnement du schème de résolution des équations repose ainsi sur un ensemble limité d'invariants opératoires, propres au champ conceptuel de la résolution des équations et du calcul algébrique* »⁷⁵¹. Certes, mais il nous faut alors prendre garde de rabattre le fonctionnement du schème sur celui de l'algorithme mathématique qui en deviendrait l'unique descripteur. Et même, sur celui d'un ensemble d'invariants opératoires, tout aussi réduits à leur expression mathématique. Le modèle cognitiviste de l'exercice d'un schème opérationnel reposerait sur les seuls invariants opératoires. De même, l'erreur est là, analysée comme une violation d'un de ces invariants opératoires et (ou) au non contrôle de sa bonne application. Le concept de schème se trouverait alors réduit à n'être qu'une simple notion, confinée à un arrière plan virtuel et commode, pour une communication teintée de cognitivisme des théorèmes et concepts mathématiques ou para mathématiques⁷⁵², opérant durant l'exercice du schème. Il nous semble, que les contrôles dont il est question dans une communication de A Cortès, ne doivent pas être considérés comme spécifiques du schème, mais d'abord comme un processus fonctionnel beaucoup plus général, et qui concerne la validité pour toute activité de schèmes quels qu'ils soient. De telles régulations (voire par exemple aboutissant à une rectification d'une erreur de raisonnement) ressortent d'un développement, transcendant celui des schèmes eux-mêmes, et donc dépendant toujours du niveau de développement d'un sujet particulier. Ainsi, l'auteur considèrent-il, comme des invariants opératoires, le contrôle de validité d'une transformation algébrique ou le choix de l'opération arithmétique prioritaire⁷⁵³. On ne peut ignorer les phénomènes de décalage qui peuvent faire que des régulations de contrôle jouent ou ne jouent pas selon les situations. Mais la psychologie cognitive, comme nous le rappelons plus bas, différencie nettement les deux niveaux de fonctionnement.

Dans une communication, Jean Brun considèrent que certaines erreurs systématiques de

⁷⁵⁰ A l'efficacité près, c'est-à-dire, sûr d'aboutir en un nombre fini de pas.

⁷⁵¹ A Cortès *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Communications. *Invariants opératoires dans la résolution des équations*. Pages 210-217. Opus cité

⁷⁵² Concepts qui ne sont pas l'objet d'un apprentissage explicite mais qui n'en sont pas moins opérationnalisables.

⁷⁵³ La didactique professionnelle nous informe que peut-être là, il s'agirait de parler de concepts organisateurs.

sujets en résolution de tâches, présentent un caractère régulé, « *du fait qu'elles résultent d'anticipations et d'inférences* »⁷⁵⁴ faites par le sujet⁷⁵⁵. De la sorte, on pourrait penser qu'un schème est associé à un champ de possibles, reconnu par certains comme des erreurs (au moins par des observateurs avertis). « *Il s'agit alors de comprendre les erreurs (certaines tout au moins) comme des formes provisoires de ce schème en construction. Elles sont des réalisations psychologiques encore inadaptées à l'algorithme, mais fruits de compromis entre diverses connaissances qu'un schème achevé coordonnerait* ». On pourrait même admettre à l'inverse, qu'un sujet particulier offre une grande fiabilité dans la résolution de tâches d'un type donné, mais que sa capacité à s'autoréguler reste faible. Dans les deux cas, on peut parler de régulations dangereuses⁷⁵⁶. On peut faire allusion là, non seulement à une régulation spécifique, mais à un ensemble structuré de régulations : le régulateur dont dispose à un moment donné de son développement un certain sujet.

Conclusion

Nous retenons le fait que certaines analyses a priori fournissent des résolutions possibles de tâches, mais sans se rapprocher véritablement des activités cognitives sous-jacentes. D'ailleurs, la distinction entre résolution, qui au moins se compose d'heuristiques et solution⁷⁵⁷ n'est pas toujours explicite⁷⁵⁸. Il nous semble que l'élève cognitif est réductible à un mathématicien plus ou moins « bon », économe de ses actes, mais déterminé par le milieu ouvert, transformable selon un processus implicite, échappant à l'analyse fine et, pour lequel, l'attention de l'observateur se focalise sur un état initial, le couple connaissance-obstacle, des états intermédiaires, les couples connaissances-échecs et enfin, un état final, le couple connaissance-succès. Précisons toutefois qu'une telle focalisation peut se multiplier, lorsqu'un découpage de la tâche à résoudre décompose cette dernière en sous-tâches. Il en est ainsi lorsque ces sous-tâches consistent en l'application d'un invariant opératoire spécifique. Mais on

⁷⁵⁴ Jean Brun et al. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Communications. *Erreurs systématiques et schèmes algorithmes*. Pages 203-209. Opus cité

⁷⁵⁵ Par exemple, l'auteur rappelle que les travaux de Brown et Van Lehn (1978, 1980) rendent compte (entre autres) « *de la production d'erreurs répondant à des circonstances particulières, où le sujet se trouvant dans une impasse-du fait des règles qu'il utilise-effectue une réparation (« repair theory »), afin de poursuivre sa tâche* ». On note, en particulier, qu'il peut s'agir là d'assimilation déformante. Nous pourrions y considérer aussi, une coordination avec un schème de contrat : « *l'élève finalise ses opérations sur l'obtention impérieuse d'un résultat : sa solution est souvent d'avoir pu mener jusqu'au bout ses calculs* ».

⁷⁵⁶ Terme que nous avons déjà repris à Juan Leon-Pascual Leone, à propos des schèmes.

⁷⁵⁷ Nous appellerons résolution d'une tâche, l'ensemble de l'activité, mise en œuvre. Elle inclut donc un texte ou une gestuelle ordonnancés, explicites pour un lecteur ou un observateur. Elle peut inclure des heuristiques ou des inférences, explicites ou non, mises en texte ou oralisées, donc éventuellement des redondances (c'est souvent le cas dans des productions d'élèves ou d'étudiants). Elle inclut finalement la solution qui est l'expression de son achèvement. Disant ceci, nous ne disons rien de sa validité dans le cadre où elle se trouve traitée.

⁷⁵⁸ Les analyses qui sont produites, concernant la situation principe « du puzzle » de Guy Brousseau, n'échappent pas à cette règle. Voir par exemple Annie Bessot. *Une introduction à la théorie des situations didactiques*. Les cahiers du laboratoire Leibniz. N°91. Octobre 2003.

ne retrouve donc pas de chronologies ou d'analyses fines du discours et, plus généralement de celles relatives au cognitif. Dans la conclusion qu'elle tire, à l'issue des expérimentations, portant sur l'acquisition du concept de volume, au début de l'enseignement secondaire, Janine Rogalski⁷⁵⁹ confronte des résultats, obtenus en « pré-test » et en « post-test ». L'auteure rend compte des réussites et échecs, relativement à six tâches qui concernent des aspects quantitatifs du volume, et fait là le choix de ne pas présenter d'analyse concernant la question : « *Peux-tu expliquer ce que c'est que pour toi le volume ?* »⁷⁶⁰. Nous ne trouvons pas d'ailleurs, dans le « pré-test », de questions concernant des conceptions relatives aux notions de mesure, d'unité de mesure, de surface et de longueur. Or, en particulier, le schème est indissociable d'indices sémiotiques, comme certaines formes langagières ou autres objets, présents dans le milieu. Son exercice peut ainsi se trouver déterminé par certains de ces indices. Nous distinguons indices et indicateurs : tout ce qui fait signe dans un milieu, perceptible par un sujet, et qui peut être une part de lui-même, est un indice (matériel, symbolique, iconique, linguistique, gestuel, percept, pensée...). Il peut se révéler un élément, prégnant pour certains sujets, et polarisant leur activité dans un certain sens. Nous désignerons par indicateurs, ces indices dont la prise en compte, dans la résolution de la tâche, est un passage reconnu comme obligé par l'exécutant de la tâche. Cette reconnaissance est une opération de régulation qui rend alors nécessaire l'exercice d'un certain schème. Mais un tel indicateur n'est pas forcément pertinent, dans la résolution de la tâche, c'est dire que, bien que présent dans le milieu, à dessein, ou relevant d'une production spontanée ou construit par inférence, il est non nécessaire pour cette résolution ; c'est dire aussi, dont la prise en compte peut parfois conduire à des résolutions erronées. On comprend alors pourquoi une grande part de l'analyse de l'activité cognitive de l'élève, peut être, en fait, ignorée⁷⁶¹. On pourrait trouver là, une interprétation possible de cet aveu d'impuissance, de certains chercheurs, comme Aline Robert, à rendre opérant le concept de schème, dans leurs analyses des activités des élèves et des enseignants. Ainsi, du point de vue didactique, l'analyse va se focaliser sur ces activités possibles (analyse a priori) et sur celles effectives (analyse a posteriori) descriptibles, en des termes

⁷⁵⁹ *Didactique et acquisition du concept de volume. Conclusions.* Opus cité. Pages 121-127.

⁷⁶⁰ Par exemple, le signifiant, « volume » renvoie-t-il à un à un attribut de type qualitatif ou de type quantitatif ? Est-il relatif au milieu, comme l'espace occupé, ou a-t-il un caractère intrinsèque, indépendamment du milieu ? Considère-t-on un contenant ou un contenu ? ...On retrouve une critique analogue à celle que l'on avait déjà noté, dans le travail didactique d'Hans Aebli.

⁷⁶¹ Par exemple, si des élèves de collège sont confrontés à 'un triangle, traversé par une droite parallèle à un de ces côtés', il est certain, qu'indépendamment de la tâche qui va être prescrite, des schèmes, relatifs au théorème de Thalès, seront activés et, pour certains élèves, effectivement associés à une performance explicitée et éventuellement non pertinente.

mathématiques et non cognitifs⁷⁶². Et c'est d'ailleurs bien des analyses de nature descriptive que se fixent certains auteurs. Si l'analyse a posteriori révèle d'autres possibles qui pouvaient avoir échappé à l'analyse a priori, nous ne trouverons pas, sur ce point, la question du pourquoi d'une telle forme de décalage⁷⁶³. « *L'analyse a priori d'un énoncé consiste donc à se demander, compte tenu du programme, de la place des exercices, dans ce qu'a fait le professeur, quelle utilisation de leurs connaissances précises, nouvelles et anciennes, les élèves vont avoir à faire, en travaillant sur cet énoncé* ». ⁷⁶⁴**Or, l'exercice d'un schème ne peut se comprendre, sans un ensemble de fonctions de qualités inégales qui jouent sur sa régulation, de son initialisation à son déroulement. Et ce que les élèves vont avoir à faire ne peut se comprendre sans ce qu'ils sont capable de faire, avec des moyens cognitifs de valeurs inégales. Il s'agit bien de vouloir distinguer entre analyse logique d'une tâche et analyse cognitive de l'activité, lors de la résolution de la tâche.**

1.6.4 Une étude de cas

Nous allons illustrer notre propos dans l'étude de cas qui suit.

1.6.4.1 La situation

Nous présentons une situation⁷⁶⁵ qui a été proposée à des élèves de plusieurs classes de CP, en décembre 2006, et considérée par leur enseignants comme un problème pour chercher.

Nous privilégions notre attention, relativement à deux de ces classes.

Les enseignants concernés faisaient partie d'un groupe IREM⁷⁶⁶ dont les recherches portaient sur les « problèmes pour chercher à l'école élémentaires ».

Nous désignerons par C.G et V.P, les deux enseignants, responsables de ces classes.

Nous désignons par situation objective⁷⁶⁷, l'ensemble des observables précédant la recherche par les élèves eux-mêmes.

Description des situations objectives.

Classe de C.G

➤ Énoncé écrit au tableau.

⁷⁶² Nous n'évoquons pas là les orientations récentes et influencées par la didactique professionnelle, relatives à l'analyse de l'activité et beaucoup moins restrictives de ce que nous disons.

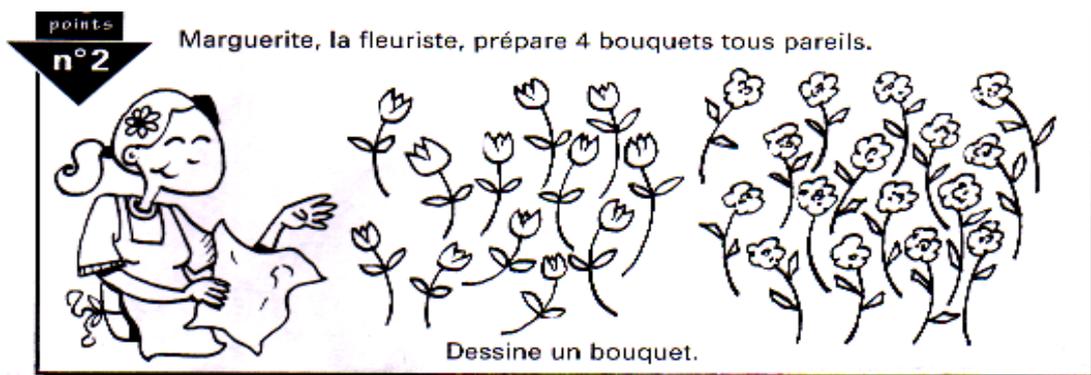
⁷⁶³ Ce qui n'est certes pas une forme d'oubli, mais un choix délibéré des auteurs, de se concentrer sur « *le travail réel, offre déclinée en termes d'activités possibles, pour les élèves, reliées à leurs apprentissages, et d'activités en classe pour les enseignants, reliées à leurs pratiques* ». Partie 0. Chapitre 1. Opus cité.

⁷⁶⁴ Ibid.

⁷⁶⁵ Extraite de Défi math, CP, 2001, Retz.

⁷⁶⁶ Institut de Recherche En Mathématique. Groupe constitué de professeurs des écoles, maîtres formateurs, conseillers pédagogiques et formateurs de l'IUFM des pays de la Loire.

⁷⁶⁷ Il s'agit pour nous d'une désignation provisoire. Une définition didactique de la situation objective sera proposée ultérieurement.



➤ Les élèves vont disposer d'un temps estimé « comme raisonnable » par l'enseignant : ils doivent tous avoir le temps de produire une réponse.

➤ L'enseignant, C.G lit l'énoncé et va faire porter l'attention des élèves sur la prescription finale.

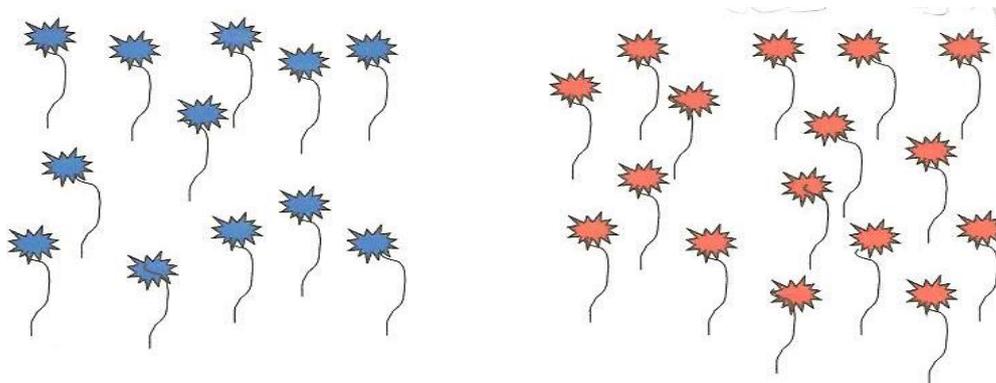
1. C.G : « *Qu'est-ce que vous en pensez ?* » ... « *Ça vous pose..., Y-a pas de question ? Qu'est-ce qu'on va faire alors ? Que va-t-on faire ?* »
2. Un élève : « *On va prendre 4 bouquets* »
3. C.G : « *Oh, je sais pas. Mais surtout qu'est-ce qu'on va faire, qu'est-ce que l'on demande de faire ?* »
4. Un élève : « *De faire un bouquet* »
5. C.G : « *Ah, de faire un bouquet* »
6. Des élèves : « *Non ! de faire 4 bouquets* »
7. C.G : « *De faire 4 bouquets. La fleuriste veut faire 4 bouquets tous pareils. D'accord ? Dessine un bouquet. Dessine un bouquet ! Qu'est-ce que on va faire, on va faire 4 bouquets, mais qu'est-ce que on te demande de faire ?* »
8. Un élève : « *Qu'ils soient tous pareils* »
9. C.G : « *Quatre bouquets pareils. Mais qu'est-ce on demande de faire au final ? Quel est le résultat que je veux moi ?* »
10. Un élève : « *D'entourer* »
11. C.G : « *Quel est le résultat que je veux ?* »
12. Un élève : « *de faire 4 pareils* »
13. C.G : « *Il est marqué là* », en montrant l'emplacement où est écrite la prescription. *La dernière phrase que je dis* »
14. Un élève : inaudible
15. C.G : « *Oui, qu'est-ce que je veux, dessiner, dessiner...* »
16. Un élève : « *Un bouquet* »

17. C.G : « *Un bouquet ! D'accord ! Donc ce que je vais faire, je vais vous donner la feuille avec les fleurs. Je vous donne la feuille avec les fleurs de la fleuriste (une reproduction de l'énoncé). Elle doit en faire 4 bouquets. Je vais vous donner une deuxième feuille où vous allez pouvoir faire vos recherches. Vous allez faire vos recherches ensemble, vous travaillez à deux. D'accord ? Et une troisième feuille, tout à l'heure qui va permettre de donner le résultat. Donc de dessiner un bouquet* ».

➤ C.G distribue ces trois feuilles et les élèves se mettent au travail.

Classe de V.P

➤ Énoncé représenté au tableau



La fleuriste veut faire 4 bouquets tous pareils.
Dessine les 4 bouquets.

➤ 12 « fleurs cartonnées » bleues et 16 « fleurs cartonnées » rouges sont collées au tableau.

➤ Les élèves vont disposer d'un temps estimé « comme raisonnable » par l'enseignant : ils doivent tous avoir le temps de produire une réponse.

➤ V.P lit et fait lire l'énoncé, mais va rechercher avec ses élèves une explication concernant le mot pareil :

1. V.P : « *Qu'est-ce qui commence à lire ?* »
2. Un élève : « *Euh...* »
3. V.P : « *Aurélié* »
4. Les élèves déchiffrent l'énoncé à plusieurs et de façon discontinue.
5. La maîtresse relit lentement l'énoncé. Puis en montrant les collages représentant des fleurs.
6. V.P : « *Qu'est-ce que je vous ais mis là ?* »
7. Des élèves : « *des fleurs* »

8. V.P : « *Oui, deux couleurs de fleurs, bleue et rouge* »
9. V.P : « *Qu'est-ce que ça veut dire des bouquets tous pareils ?* »
10. Aurélie : « *Je prends bleu et je prends bleu et tous les autres bouquets, et bien, je dois les faire pareils* »
11. V.P : « *Ah, tu crois, je ne comprends pas bien. Dans un bouquet, tu mets quoi ?* »
12. Aurélie : « *Les bleues et dans un autre paquet, les rouges* ».
13. V.P : « *Ah, tu crois que ça va aller, est-ce qu'ils seront tous pareils si tu fais ça ? Valentin !* »
14. Valentin : « *On en met une bleue avec une rouge* »
15. V.P : « *Alors, ça veut dire quoi, si les bouquets sont tous pareils ? Ça veut dire quoi ? Rémi !* »
16. Rémi : « *Que, avec une fleur bleue, une fleur rouge ...un autre avec une fleur bleue, une fleur rouge* »
17. V.P : « *Alors tu parles de quoi quand tu dis une ?* »
18. Rémi : « *Des fleurs* »
19. V.P : « *Si je fais des bouquets avec des fleurs jaunes par exemple, alors, il ne faut pas qu'il y ait des fleurs jaunes par exemple !* ».
20. Un élève : « *Oui* »
21. V.P : « *Alors on aura que des fleurs bleues ou des fleurs rouges* »
22. Élèves Inaudibles
23. V.P : « *Et pourquoi est-ce que elle a dit 'tous pareils', les 4 bouquets doivent être tous pareils ?* »
24. Élèves Pas de réponses.
25. V.P : « *Alors qu'est-ce que ça veut dire que les quatre bouquets doivent être tous pareils ? Comment vous allez faire pour qu'ils soient tous pareils ? Valentin !* »
26. Valentin : « *On fait un, et tu fais les autres, tous pareils* ».
27. V.P : « *Alors, j'en fais un et j'essaie de faire les autres pareils* ».
28. Élèves Pas de réponse.
29. V.P : « *Qu'est-ce qu'il va falloir faire, pour qu'ils soient tous pareils ? Qu'est-ce qui va être important de faire ? Pauline !* ».
30. Pauline : « *Il faut les faire pareils* »
31. V.P : « *Alors oui, ça veut dire quoi pareils ?* ».

32. Pauline : « *Il faut qu'ils soient pareils* ».

33. V.P : « *Bon, et bien moi je pense qu'on va essayer de vous laisser faire. Et on verra après si on a bien compris le mot 'tous pareils'. D'accord ? Et je crois que je vais vous laisser travailler et ensuite on reparlera de ces mots 'tous pareils'. D'accord ? J'ai envie que vous cherchiez un petit peu. J'ai pas envie de vous le dire pour le moment et ensuite, on en reparlera. On va essayer de voir pourquoi ils sont tous pareils et pourquoi ils ne sont pas tous pareils. D'accord ?*».

➤ La maîtresse précise l'organisation de cette activité :

- groupe de deux ;
- distribution des deux feuilles, une blanche et une verte. Chaque groupe dispose d'une feuille blanche, pour dessiner la réponse dans un cadre, sous une reproduction de l'énoncé, et d'une feuille verte pour chercher. Certains élèves la nomment feuille d'essais. La maîtresse acquiesce, elle servira pour la recherche. Puis les élèves se mettent en activité.

1.6.4.2 Des analyses a priori

« *Une analyse a priori* » a été produite par les quatre enseignants et « *fondée sur des aspects qui leur ont paru prégnants* »⁷⁶⁸.

Cette analyse ne distingue pas les deux classes et s'est construite avant les interventions initiales de chacun des enseignants, dans leur classe respective, et que nous venons de présenter. Nous la reproduisons sans modification.

➤ Analyse de l'énoncé :

- situation de référence concrète ;
- énoncé court ne surchargeant pas la mémoire de travail ;
- un support iconique -le dessin de toutes les fleurs- facilite l'appropriation de l'énoncé ;
- le dessin d'un bouquet ne permet pas d'évaluer, dans tous les cas, la justesse de la résolution.

➤ Anticipation de ce qui pourrait faire difficulté :

1. âges des élèves, en décembre et janvier, qui pourraient s'avérer un handicap « dans une situation d'autonomie » ;

⁷⁶⁸ Selon les termes utilisés. Nous ne proposons pas, nous-mêmes, d'analyse particulière, car tel n'est pas notre objectif.

2. les rôles respectifs de la feuille de recherche et de la feuille de résultats, mal interprétés ;
3. problème de la compréhension du mot pareil : pareil pouvant signifier, qu'au sein de chaque bouquet, il y ait autant de fleurs bleues que de fleurs rouges ;
4. compréhension de la consigne : confusion entre quatre bouquets ou bouquets de quatre fleurs. Dans le second cas, « on ne s'intéresse pas à la recherche de la valeur d'une part mais à celle du nombre de parts »⁷⁶⁹ ;
5. partage équitable : rien n'indique, dans l'énoncé, que toutes les fleurs doivent être utilisées, ou bien, ce qui revient au même, de dire qu'il ne doit pas rester de fleurs dans ce contexte : des élèves peuvent proposer des bouquets d'une fleur, ce qui est une réponse possible ;
6. relativement à la composition d'un bouquet, peut-il être composé de fleurs bleues ou de fleurs rouges ?
7. connaissances numériques des élèves, en cette période de l'année, non encore bien équilibrées ;
8. il est noté que les auteurs de cette situation donnent, en fin de l'ouvrage, le dessin d'un bouquet de 7 fleurs, présentant une composition de 3 fleurs bleues et de 4 fleurs rouges, ce qui épuise la totalité des fleurs disponibles ;
 - Analyse logique de la tâche, produite par le groupe :
 - connotation avec la notion « de partage équitable » : les élèves devraient considérer les nombres de fleurs, respectivement bleues ou rouges, pour dessiner les quatre bouquets ;
 - il s'agit de dessiner quatre bouquets présentant tous le même nombre de fleurs bleues et le même nombre de fleurs rouges. Cela, sans dépasser les nombres respectifs des fleurs bleues et des fleurs rouges disponibles.

Nos remarques sur cette analyse a priori

- Nous devons bien interpréter l'analyse logique de la tâche ainsi : dessiner quatre bouquets. Chaque bouquet doit contenir autant de fleurs rouges. Chaque bouquet doit contenir autant de fleurs bleues. Le nombre de fleurs rouges utilisées est inférieur ou égal à 16. Le nombre de fleurs bleues utilisées est inférieur ou égal à 12.

⁷⁶⁹ La connotation est ici une situation relevant de la division euclidienne : un nombre de fleurs étant donné, il s'agit d'opérer un partage. Dans l'une des situations, on donne le nombre de parts (il s'agit de calculer la valeur d'une part), dans l'autre des situations, on donne la valeur d'une part (il s'agit de déterminer le nombre de parts). Sans doute, l'enseignant qui a proposé cette analyse pense-t-il 'au partage de 12 en 4 parts égales et au partage de 16 en 4 parts égales'.

➤ Les participants de ce groupe n'ont pas été conduits, dans leur analyse, à en inférer, dans le détail, des productions possibles.

➤ En dehors des points 1, 2 et 6, le groupe s'est focalisé sur une analyse du problème d'un point de vue quantitatif.

➤ Éléments d'analyse a priori

Il s'ensuit, en interprétant ce qui précède, que les productions attendues comme possibles peuvent être définies ainsi :

(1) **cas 0** : les représentations respectives sur la feuille de recherche et sur la feuille de réponse ne diffèrent pas sur le fond⁷⁷⁰ (en raison de la difficulté 2) ;

(2) **cas 1** : purement artistique (en raison éventuelle de la difficulté 1) : 'on fait un ou plusieurs beaux bouquets' (éventuellement 4). Dans un tel cas, les élèves du groupe peuvent dessiner 'des formes de bouquets bicolores' ;

(3) **cas 2** : dessin de quatre bouquets bicolores, « tous pareils », avec des nombres de fleurs bleues et de fleurs rouges inégaux, au sein de chaque bouquet ;

▪ **cas 2'** : les nombres respectifs des fleurs rouges et bleues n'excédant pas plus de 16 et 12 (en raison de la difficulté 5),

▪ **cas 2''** : les nombres respectifs des fleurs rouges et bleues égalant 16 et 12,

▪ **cas 2'''** : les nombres respectifs des fleurs rouges et bleues, excédant, soit le nombre 16 soit le nombre 12, soit les deux (difficulté éventuelle 7⁷⁷¹) ;

(4) **cas 3** : dessin de quatre bouquets bicolores, « tous pareils », avec autant de fleurs bleues que de fleurs rouges, dans chaque bouquet (en raison de la difficulté 3) ;

▪ **cas 3'** : les nombres respectifs des fleurs rouges et des fleurs bleues, utilisées étant respectivement inférieurs à 16 et à 12 (en raison de la difficulté 5),

▪ **cas 3''** : les nombres respectifs des fleurs rouges et bleues excédant soit les nombres 16 soit le nombre 12, soit les deux (difficulté éventuelle 7⁷⁷²) ;

(5) **cas 4** : une production d'un seul bouquet de 4 fleurs (en raison de la difficulté 4) et monocolore (en raison de la difficulté 6) ;

(6) **cas 5** : une production d'un seul bouquet de 4 fleurs (en raison de la difficulté 4) et bicolore :

⁷⁷⁰ Sur la forme, il y aura forcément une différence, due à la transcription.

⁷⁷¹ La difficulté pourrait être de nature moins spécifique et relever, plus généralement, d'une représentation incomplète de la tâche.

⁷⁷² La difficulté pourrait être de nature moins spécifique et relever, plus généralement, d'une représentation incomplète de la tâche.

- **cas 5'** : les mêmes nombres de fleurs bleues et de fleurs rouges,
 - **cas 5''** : des nombres différents de fleurs bleues et de fleurs rouges ;
- (7) **Cas 6** : dessin de quatre bouquets de quatre fleurs (difficultés cumulées) :
- **cas 6'** : les quatre bouquets sont monocolores et ont la même couleur,
 - **cas 6''** : les quatre bouquets sont monocolores et n'ont pas la même couleur.

1.6.4.3 Éléments d'analyse cognitive et a priori de l'activité

Nous rappelons qu'un indice est tout objet, explicitement observable ou implicitement observable, contenu dans la situation objective, pour le système cognitif de l'élève. Nous ne retenons ici, comme indices, que ceux des objets dont il nous semble, a priori, qu'ils peuvent orienter les performances possibles, et donc devenir des indicateurs de l'activité.

Nous notons les indices explicites suivants :

- les mots ou groupe de mots⁷⁷³ : la fleuriste, veut faire, bouquets, 4, tous, pareils, dessine, les 4 bouquets ;
- les représentations des fleurs de deux types bien distingués, par leur emplacement et par leur couleur mais non par leur forme ;
- enfin les couleurs rouge et bleue de ces fleurs, accentuant la séparation en deux groupes distincts.

Nous notons également les indices implicites suivants :

- les deux nombres, 12 et 16 ;
- l'association du nombre 16 à celui de la collection de fleurs rouges ;
- l'association du nombre 12 à celui de la collection de fleurs bleues ;
- l'énoncé dans sa globalité ;
- le contrat en cours dans la classe et relatif à ce genre d'activité ;
- la feuille d'énoncé réponse ;
- la feuille de brouillon ;
- le sens attribué à cette feuille ;
- le travail « en groupe de deux » ;
- dans la classe de la maîtresse V.P, 'la discussion autour du mot pareil'. L'échange préliminaire, construit dans la classe de C.G, nous semble pouvoir être retenu comme 'un non indice', dans la mesure où rien n'y indique qu'il contribue à orienter la recherche des élèves autrement que, sans ce préliminaire, ils l'eussent fait. Nous n'avons pas noté dans ce sens, lors

⁷⁷³Déchiffrables pour des élèves de CP en décembre et lus dans une phase préliminaire, sous le contrôle de l'enseignant.

de l'échange, décrit ci-dessus, un apport supplémentaire par rapport à l'énoncé brut. Pourtant, on doit interpréter le propos de C.G comme une forme de rappel à une règle de contrat : la question est un point focal de l'activité.

Nous nous plaçons en aval de l'activation d'un certain nombre de schèmes associés, d'une part à la perception purement physique des mots et à la compétence de les différencier, d'autre part et enfin à la compétence de donner du sens à chacun de ces indices sémiotiques, au moins séparément. Nous exprimons donc le postulat que pour des élèves de classe préparatoire, chacun de ces indices peut être retrouvé dans une référence personnelle dont doivent disposer de tels élèves⁷⁷⁴.

Nous présentons, ci-dessous, une organisation de l'activité des schèmes et des régulations, dans le cas d'une résolution, conduisant à une solution acceptable.

Nous nous proposons aussi de présenter des outils de l'analyse cognitive de la tâche.

1.6.4.3.1 L'activité des régulations

On peut définir le concept de régulation, dans une acception piagétienne, qui nous paraît la plus générale possible, dans la mesure où déjà, le milieu objectif, dans lequel est plongé l'élève, possède, pour lui, une forme initialement 'chaotique', ce qui définit une perturbation initiale d'un équilibre antérieur. Une rééquilibration va consister, entre autres, à se construire un ordre dans une situation d'action. Mais cette rééquilibration n'est pas un acquis immédiat, concernant une résolution globale de la tâche. L'activité cognitive, finalisée par la résolution de la tâche, contient l'opérationnalisation de plusieurs formes de la fonction de régulation. Il nous semble pouvoir dire que toute régulation peut être entendue comme une opération qui initialise l'établissement (ou le rétablissement) d'un certain ordre discret et dont les nœuds sont définissables comme des réponses à de nouvelles perturbations, perçues dans la cours de l'activité. En particulier, la prise en compte, nécessairement non globale mais progressive et à ordonnancer de certains des indices de l'énoncé, est à l'origine de telles perturbations. Il nous semble ainsi pouvoir dire, qu'à toutes les étapes de son activité, le sujet va activer des régulations qui visent, en définitive, à construire une continuité cognitive, définie par un ordre spécifique, relativement à diverses normes, celles-ci dépendantes à la fois de la situation et des structures cognitives activées.

Nous précisons une double forme opérationnelle de la fonction de régulation : opérations qui a pour objet la sélection des tâches à accomplir et opérations qui régulent leur ordonnancement dans le temps. Nous distinguons donc la fonction de régulation, des différentes

⁷⁷⁴ Ce que l'on peut dire : connoter quelque chose. Ce postulat, repose, avant tout sur les avis des enseignants concernés et qui vont « dans le même sens ».

opérations de régulation qui en sont l'expression⁷⁷⁵. En effet, la résolution de la tâche suppose la stabilisation d'une représentation de cette tâche qui nécessite plusieurs opérations

- une régulation de sélection dans l'énoncé de certains indices qui, ainsi privilégiés, deviennent des indicateurs pour ;
- une autre régulation⁷⁷⁶ qui opère alors une sélection des schèmes pertinents⁷⁷⁷ ;
- une autre régulation qui anticipe le but (la solution) à atteindre ;
- et donc, une autre régulation qui évalue la suffisance des schèmes anticipés ;
- et, en cas d'évaluation positive⁷⁷⁸, une autre régulation qui anticipe la suite des performances associées à ces schèmes ;
- une autre régulation, assurant le contrôle du respect de cet ordonnancement ;
- enfin, et éventuellement, une dernière régulation qui peut prendre la forme d'une vérification de la validité de la solution proposée.

Les tableaux suivants résument les activités cognitives, précisées ci-dessus et définies comme activités cognitives finalisées par la tâche.

Le premier tableau concerne les schèmes, outils distinguables et activés lors de la résolution de la tâche. Ce tableau n'est pas à considérer comme révélant un ordre chronologique de ces activations. En effet, selon les systèmes cognitifs, certains indices peuvent se révéler plus prégnants que d'autres et, donc impliquer éventuellement des activations spontanées différentes, dans l'ordre d'intensité de cette prégnance. A la limite, certains de ces indices peuvent ne rien connoter spontanément, pour certains systèmes, et être ignorés initialement, mais se découvrir à leur attention, à la suite d'heuristiques ou d'une inférence, ou tout simplement de décision d'une action non anticipée à un instant plus tôt⁷⁷⁹. Nous pouvons dire que ce tableau décrit un processus dynamique, initialisé par certains indicateurs sémiotiques, et finalisé par la production d'un certain schéma⁷⁸⁰.

⁷⁷⁵ Jean François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 7. *Le contrôle de l'activité*. Opus cité.

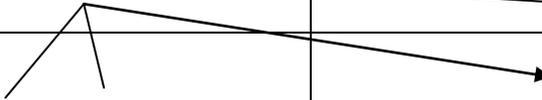
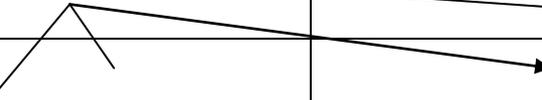
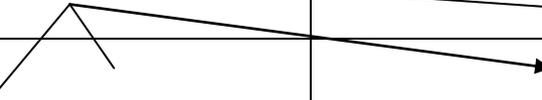
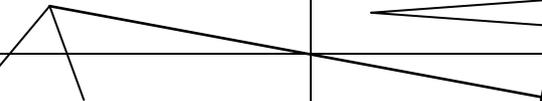
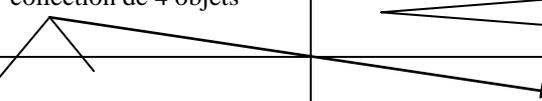
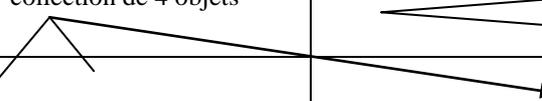
⁷⁷⁶ Rappelons que Hans Aebli parle là de schème anticipateur donc, que nous retrouvons sous la formulation d'une régulation spécifique.

⁷⁷⁷ Notons que cela peut être dit quelle que soit la qualité de la résolution : selon les sujets, cette sélection peut se focaliser différemment.

⁷⁷⁸ Sinon une autre régulation, visant la complétion qui conviendrait.

⁷⁷⁹ Opus cité. Effectivement, Jean François Richard décrit de telles productions pragmatiques qui entrent dans la finalisation d'une représentation.

⁷⁸⁰ Rappelons : un schéma est une connaissance sur une situation et un certains nombre d'événements associés. Cette notion emprunte à la fois à la notion de stéréotype utilisée en psychologie sociale et à la notion de schème de Jean Piaget. « *Le schéma permet de voir un ensemble d'actions comme un mode de réalisation d'un événement plus général...* ». « *Le schéma est alors pris comme une hypothèse candidate pour interpréter les actions, à ce niveau plus particulier et en constituer un résumé* ». Jean François Richard. *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions. Première partie : connaissances et représentations. Comprendre : construire une représentation*. Opus cité.

Schémas ⁷⁸¹	Indicateurs	Performances	Régulations ou sélections des schémas
	dessine	→	Sélection d'un schéma
Produire un schéma ⁷⁸² associé à une activité rituelle du dessin			
	Fleur (iste) bouquet	→	Produire un certain percept spécifique
Focaliser le schéma sur le percept d'un bouquet			
	Feurs dessinées rouges et bleues	→	Sélectionner le matériel nécessaire
Préparer le matériel approprié			
	feutres, ou crayons de (couleurs rouge et bleue)		
	4, écrit, lu et oralisé « quatre »	→	Sélectionner le schème pertinent
Constituer mentalement une collection de 4 objets			
		Représentation mentale de 4 bouquets	

⁷⁸¹ Nous disons schéma pour tous les éléments de cette colonne, dès lors qu'il y a bien une performance implicite ou explicite à accomplir. Les différents traits, sous la dénomination des compétences, expriment des possibles dans les performances associées. Mais les régulations, entrant dans la construction d'une représentation de la situation, imposent une forme nécessaire à ces possibles, ce qui aboutit à la sélection de certains d'entre eux ; par conséquent, produire un schéma ou un percept pertinent, un matériel ad hoc, une cristallisation de la solution.

⁷⁸² « Un schéma porte tout son sens en lui-même. Cela tient à ce que le schéma définit, non pas des propriétés intrinsèques des objets, mais des contextes sur lesquels se rencontrent les objets et les actions, des contextes qui sont assez fréquents pour être stabilisés en mémoire ». Opus cité. Première partie : connaissances et représentations. Comprendre : construire une représentation. Jean-François Richard. Opus cité.

Ce tableau est complété par le deuxième tableau, mais séparé de lui, afin de mettre en évidence le point majeur de cette activité, à savoir une incertitude relative à l'enveloppe du champ des possibles. C'est cette incertitude qui devrait entrer causalement dans la multiplication de certains possibles⁷⁸³. Nous la précisons, en explicitant un obstacle de nature cognitive.

Nous supposons désormais le cas d'un système possédant une aptitude suffisante à l'organisation de la mémoire de travail, au fur et à mesure que des régulations spécifiques en initient des allocations.

Schème	Indicateur	Performance	Régulation
	pareils (tous)		Sélection d'un schème d'identification
Construire deux ou plusieurs objets présentant un caractère identique.			
		Production ⁷⁸⁴ de 4 bouquets présentant un caractère identique.	

Le troisième tableau concerne la construction d'une représentation de l'ordonnement, dans l'exécution des performances associées aux schèmes, définis dans le tableau précédent. Cet ordonnancement est le résultat de régulations, visant à produire une relation opérationnelle, entre le but à atteindre et l'ensemble des schèmes activés, plus ou moins spontanément. Mais on peut considérer, qu'une fois l'énoncé du problème dévoilé, toutes les activités cognitives, décrites dans ces deux tableaux, concourent à la construction d'une représentation opérationnelle, en vue d'atteindre l'accomplissement de la tâche. C'est pourquoi, il serait vain de vouloir établir une chronologie entre les différentes régulations qui peuvent s'appeler les unes ou les autres, dans un ordre qui dépend du sujet lui-même⁷⁸⁵. En particulier, la production d'un schéma⁷⁸⁶ contient implicitement, au moins un début d'ordre

⁷⁸³ Nous y revenons plus loin dans une analyse plus détaillée. Rappelons qu'une insuffisance, au niveau de la mémoire de travail, peut déjà expliquer diverses productions observées.

⁷⁸⁴ Au moins mentalement.

⁷⁸⁵ Par exemple, les indices implicites peuvent jouer ou non.

⁷⁸⁶ Que ce soit « manger dans un restaurant » ou « dessiner quelque chose, en disposant d'un certain matériel », il y a un ordre chronologique au sein de chacune des macros actions qui sont ainsi étiquetées. Jean-François Richard les appelle : « schémas d'action ». « Les schémas d'action ont une structure qui est, au moins, en partie hiérarchique ». Ibid.

dans la suite des performances à accomplir. Elle peut appeler des régulations, comme par exemple l'apport d'informations manquantes dans ce schéma⁷⁸⁷. C'est sur ce point, en particulier, que l'on peut distinguer une analyse cognitive de tâche, a posteriori, et une analyse de l'activité, cette dernière pouvant prendre un certain nombre de détours, avant de reproduire un schéma complet d'action, et qui dépendent donc aussi des sujets eux-mêmes. En fait, le concept d'analyse de l'activité vient se substituer complètement à celui d'analyse cognitive a posteriori de la tâche⁷⁸⁸. Par exemple, l'activité d'un sujet peut se révéler différente selon que sa mémoire de travail aura besoin ou non d'être rafraîchie, par une relecture de l'énoncé. Un élève qui aura plus de facilité de mémorisation et, dans notre cas, aussi plus de facilité de déchiffrement, pourra se constituer une représentation qui présente une forme déjà assez opérationnelle, pour se lancer dans l'exécution de la tâche avec une certaine assurance. Au contraire, il peut être construit, par d'autres, un besoin conscient d'une recherche d'informations complémentaires qui, se trouvant dans l'énoncé, avaient échappé à une première lecture. D'où des retours possibles sur des actions déjà achevées et des rectifications ou même des redondances.

Schémes	Indicateurs	Performances	Régulations ⁷⁸⁹
	L'énoncé complet, en particulier avec le but à atteindre ⁷⁹⁰		Produire des heuristiques ou des inférences
Produire telle heuristique ; Conduire une inférence spécifique de la situation			
		Construction des conditions nécessaires	
	Conditions nécessaires. Etats de la conscience relatifs aux moyens disponibles		Sélection des schèmes pertinents et inhibition de schèmes non pertinents

⁷⁸⁷ Par exemple, dessiner oui, mais quoi ? Et comment ? Cette régulation dépend donc d'heuristiques ou d'inférences

⁷⁸⁸ Par contre, nous livrons plus bas ce que nous appelons une analyse cognitive a priori de la tâche.

⁷⁸⁹ Ce type de régulations concerne l'activité proprement dite, puisqu'elles aboutissent à la sélection des tâches et à leur ordonnancement dans le temps. Elles constituent ce que Jean-François Richard appelle régulations de l'activité. Troisième partie Opus cité. (1990).

⁷⁹⁰ Nous nous plaçons en aval d'une régulation qui concerne la mise en mémoire de travail de certains contenus et, volontairement. Mais nous reviendrons sur cet aspect incontournable et fondamental.

Schémes	Indicateurs	Performances	Régulations
Construire une représentation ou schéma complet de la situation ⁷⁹¹			
		Anticiper certaines actions explicites et spécifiques de la tâche à accomplir	
	Indicateur implicite : schéma de la situation, éléments du contrat, (comme une obligation d'agir...)		Ordonnancement d'une suite d'actions
Construire une représentation ou schéma complet d'actions			
		Anticipation complétée d'une suite ordonnée d'actions explicites et, spécifiques de la tâche à accomplir.	
	Indicateur implicite : schéma complet d'actions, éléments du contrat, (comme une obligation d'agir...)		Appeler le lancement de l'activité explicite
Exécuter le programme d'action			
		Activité explicite et rationalisée	
	Travail en coopération, Exécution observable des actions .Performances observables.		Contrôler l'activité ⁷⁹²

⁷⁹¹ Jean-François Richard différencie schéma d'action et schéma de situation, ce dernier, dont nous reprenons le signifiant à notre compte, ne recelant pas la totalité des actions, telles qu'elles seront finalisées sous une forme suffisante, par la tâche à accomplir. *Comprendre raisonner, trouver des solutions*. Opus cité.

⁷⁹² « Nous parlerons de contrôle pour désigner la fonction qui consiste à mettre en œuvre les moyens de réalisation de la tâche et à veiller à son bon déroulement ». Troisième partie. *Régulation de l'activité*. Jean-François Richard. Opus cité

Schémes	Indicateurs	Performances	Régulations
Contrôler l'adéquation de la performance et du schème activé			
		Contrôles explicites	
	Solution explicite : le dessins des 4 bouquets		Contrôle de la validité de la solution trouvée
Produire une procédure du contrôle de validité			
		Contrôler la validité de la solution	

D'une part, nous allons, dans ce qui suit, tenter de vérifier que cette situation peut répondre de certaines analyses, proches de celles d'apprentissage, et dont nous avons précisé des composantes générales.

D'autre part, nous pensons une telle architecture cognitive pertinente dans tous les cas, que la tâche à résoudre par un sujet aboutisse à une réussite ou non. En particulier, les sujets retireront, des indices sémiotiques, des indications subjectives et dès lors, les activités des uns ou des autres montreront des divergences. En particulier encore, les régulations en jeu auront atteint, selon les sujets, des niveaux de développement différents⁷⁹³. En particulier enfin, les différentes anticipations des productions de schèmes spécifiques peuvent relever d'activations, plus ou moins conscientes, et donc s'avérer plus ou moins stables, au niveau de la représentation ou du schéma complet d'actions. Mais dans tous les cas, l'activité cognitive conduira à un tel schéma, activité, certes, plus ou moins chaotique.

1.6.4.3.2 Analyse de la dimension épistémologique psychogénétique⁷⁹⁴

Nous orientons notre analyse selon deux composantes : l'une relevant de considérations épistémiques, donc exprimant des aspects transposables dans d'autres situations, sans plus de

⁷⁹³ Comme on l'a exprimé plus haut sur un exemple.

⁷⁹⁴ Quant à l'analyse d'une dimension épistémologique historique, elle pourrait avoir sa raison d'être, si l'on considère de ce point de vue les deux obstacles que l'on va définir ci-dessous. Mais il s'agirait de remonter à une antiquité, dans l'histoire humaine, dont nous ne disposons pas de beaucoup d'éléments.

conditions, l'autre relevant d'aspects plus spécifiques de la situation présente, transposables, mais alors en supposant que certaines conditions initiales soient réunies.

Nous devons entendre cette analyse de deux manières différentes :

➤ Soit sa compréhension, par celui qui la produit, lui permet de faire effectivement des prévisions, quant aux activités possibles des élèves, et à leur production finale ; ce serait normalement un des objectifs de cette analyse qui entre comme une des composantes de l'analyse a priori. Il s'agirait donc de rendre compte de formes possibles, mais en prenant le risque de vouloir en extraire des formes nécessaires. En d'autres termes, cette analyse conduirait aussi à des questions du type : pourquoi un élève ne pourrait-il pas faire autrement ?

➤ Soit, les productions sont des observables, pour l'analyse a posteriori, et viennent apporter des éléments relativement à la composante cognitive de l'activité. Il s'agirait donc de rendre compte d'une forme de nécessité (ou de plusieurs) mais au terme de son (leur) développement(s), comme le dit Jean Piaget. En d'autres termes, il s'agirait de considérer des questions du type : pourquoi, tel élève a pu ne pas faire autrement ?

Explicitement, nous avons opté pour une présentation qui tendrait à montrer qu'une analyse de cette dimension de l'épistémologie psychogénétique pourrait conduire à expliquer ce qui, autrement, semblerait relever de la contingence⁷⁹⁵.

Nous focalisons notre analyse sur la notion d'obstacle cognitif.

- Un premier obstacle qui devrait conditionner l'activité des élèves est la mémorisation⁷⁹⁶ de l'énoncé⁷⁹⁷ et que l'on doit considérer à deux points de vue.

D'une part, précisément, ils ont des difficultés, à cette période précoce de l'année, à déchiffrer un énoncé sans une aide de leur enseignant, leur attention étant, de plus, fortement subordonnée à cette lecture initiale⁷⁹⁸. « *La notion de ressources limitées est inhérente à la*

⁷⁹⁵ « Un évènement futur est contingent si toutes choses étant ce qu'elles sont, ce fait futur peut se produire ou ne pas se produire ; autrement dit, si sa réalisation ou sa non réalisation sont également compossibles à cet état présent des choses ». André Lalande. *Vocabulaire technique et critique de philosophie*. (1999).

Par exemple, dans le cas 1, il suffirait de dire que, dans le groupe concerné, ils n'ont pas été attentifs ou ils n'ont pas écoutés ou, dans d'autres cas, ils n'ont pas pensé à compter les fleurs. Ainsi, on peut rester sur l'impression que ces erreurs restent localisées et associées à des éléments imprévisibles, dans cette situation, mais que dans d'autres circonstances, elles n'y apparaîtraient pas. Par exemple aussi, l'enseignant pourrait invoquer le faible niveau de son groupe ou, un travail 'mal fait' par le collègue qui a en charge la classe du niveau précédent. Nous avons déjà rapporté que certains enseignants, lorsque les résultats escomptés dans une situation d'apprentissage sont 'décevants', remettent en cause cette situation de façon globale et, pour des raisons exogènes, la requalifient de non pertinente, relativement au groupe classe dont ils ont la charge.

⁷⁹⁶ Dans la mémoire de travail, qualifiée parfois de mémoire opérationnelle, ce qui convient très bien dans le cas d'activités finalisées par une certaine tâche.

⁷⁹⁷ Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, la forme disponible de certaines fonctions psychiques supérieures, n'est pas un sujet d'analyse rendu systématique par les analyses a priori.

⁷⁹⁸ Lecture 'mot à mot', peu linéaire car arythmique et avec plusieurs retours que l'on peut reconnaître comme 'fortement consommateurs d'énergie'.

mémoire de travail »⁷⁹⁹. En d'autres termes, la gestion de la mémoire peut constituer un obstacle à la construction d'un schéma complet de la situation. La lecture de l'énoncé, peu automatisée à ce niveau, et l'attention qui doit simultanément y être portée, imposent une double tâche. Et il faut considérer que la tâche de lecture, secondaire par rapport à celle de l'attention logique qui devrait être portée à l'énoncé, est consommatrice de trop de ressources. La performance qui va découler de ce que le système a retenu et a compris de l'énoncé doit s'en trouver détériorée. Par conséquent :

- la mémorisation nécessaire de l'énoncé peut ne pas être stabilisée, à la suite cette lecture⁸⁰⁰ ;
- la relecture, à des fins de compréhension, reste peu probable⁸⁰¹ ;
- les productions des élèves peuvent alors refléter une représentation ne prenant en considération qu'une partie des indicateurs, voire surestimant en ce sens certains indices.

D'autre part, cette activité, concernant la mémoire de travail, est initialisée par une régulation qui en commande des allocations⁸⁰². Cette fonction intellectuelle ne devrait pas avoir atteint, chez tous les élèves, un développement suffisant pour être opérationnelle. Donc :

- il peut y avoir un obstacle à ce qu'une attention logique⁸⁰³, portée à cet énoncé, s'opère consciemment, et même en acte ;

- il y a là une deuxième raison pour que les productions se trouvent ne refléter qu'une partie de l'énoncé : il est donc possible de retrouver des productions du type cas 1 (un gros bouquet bicolore) et des types, cas 4 ou cas 5 (un bouquet de 4 fleurs) ;

- pour la même raison, **il peut y avoir surdétermination de certains indices sémiotiques qui deviennent alors des attracteurs de la représentation**. Nous définissons ainsi des indices qui deviennent des indicateurs, autour desquels s'organise de façon exagérée la représentation en construction. Il peut y avoir plusieurs raisons à cette assimilation déformante de l'énoncé. Une mémorisation partielle, comme nous l'avons définie, mais aussi certains traits qui relèvent de l'affectif et qui font porter l'intérêt sur certains points plutôt que d'autres. Précisément, les activités de comptage et de calculs sont très présentes et

⁷⁹⁹ Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 7. *Le contrôle de l'activité. Les fonctions exécutives*. Opus cité

⁸⁰⁰ Ce qui peut être aussi l'expression d'une surcharge cognitive pour certains sujets

⁸⁰¹ Soit, en raison de la pénibilité anticipée par l'enfant d'une telle relecture, soit que cette forme de contrôle initiale ne relève pas d'un schème déjà suffisamment développé.

⁸⁰² Activation spécifique de la relation d'une mémoire à long terme et la mémoire opérationnelle.

⁸⁰³ Lev Vygotski associe précisément ces deux fonctions intellectuelles que sont l'attention logique et la mémoire volontaire. Nous pouvons ici distinguer, mais sans dissocier : une attention logique portée à l'énoncé pour en mémoriser volontairement les éléments pertinents.

nouvelles dans cette classe de CP. Au dire de leur enseignant, les enfants aiment 'ça'. Ils 'aiment manier les nombres'.

Toutefois, il faut distinguer les deux classes quant à l'activité préparatoires : dans la classe de la maîtresse V. P, un questionnement insistant, sur le sens à donner au mot pareil, a incidemment provoqué une certaine attention sur des indicateurs comme une pluralité de bouquets à dessiner (9, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27), le nombre de bouquets à dessiner (23, 25) et sur la donnée des deux couleurs (8, 21). Il est possible que cet échange ait participé à l'élaboration d'une représentation de la situation, en mémoire de travail, sans qu'il ait eu à en inférer⁸⁰⁴ la nécessité fonctionnelle, en particulier, pour ceux qui ont participé réellement à la discussion. Sur ce point, cette construction médiante n'aurait pas été effective dans le cas d'un sujet qui ne serait pas « entré dans la discussion ». Et nous voulons penser ceci, encore une fois, comme une différenciation, lors du développement de cette régulation qui définit, pour un élève, sa position au sein d'un échange inter-discursif. Il y a une inégalité entre les systèmes, relativement à la conscience qu'ils peuvent avoir de cet aspect constructif, auxquels participent les échanges verbaux⁸⁰⁵. Dans la classe de V.P, si le cas 1 n'est donc pas à exclure (surdétermination de l'indice dessine), nous prévoyons, comme peu probables, les cas 4 ou 5 ou 6. Alors que dans la classe du maître C.G, nous en prévoyons une plus grande probabilité **Ainsi, le contrôle de la validité par un système cognitif de la solution proposée, peut-il se confondre avec le contrôle de l'activité, dès lors que cette solution ne sera pas confrontée avec les contraintes d'un énoncé exhaustif**⁸⁰⁶. Quoique, pour de nombreux élèves⁸⁰⁷, cet aspect inversé de la résolution qui, sous sa forme logique, signifie une réciproque, n'est pas chose facilement acquise, et justifie, en vérité, un apprentissage sur le très long terme. En toute logique, il n'est pas toujours admissible de penser systématiquement que le schéma complet d'une situation est une expression isomorphe d'un énoncé. En général, dans les cas qui produisent une solution acceptable, un tel schéma peut être considéré comme nécessaire, tout au plus. Un système se construit, le plus souvent, un schéma complet d'actions, sur le fondement d'un théorème en acte, dont la conséquence est une croyance objective en un tel

⁸⁰⁴ Nous noterons à plusieurs reprises que des inférences peuvent se produire en acte.

⁸⁰⁵ Notons que dans la classe de V.P, effectivement, nous avons noté, au moins pour l'un des binômes, une absence totale, relativement à cette discussion collective. Mais d'une façon générale, relativement à forme d'inattention, nous rencontrons de nombreux élèves adultes, qui ont une conception de la langue témoignant d'un déséquilibre, au sein des fonctions métadiscursives : les fonctions de traitement de représentations cognitives et d'objectivation de représentations virtuelles, étant largement sous-développées par rapport à celle de communication.

⁸⁰⁶ Notons encore une fois la distinction entre 'le comment on fait' et 'le pourquoi, on fait ainsi'.

⁸⁰⁷ Jusqu'à l'université. On rencontre, en effet durablement dans les raisonnements, cette difficulté à ne pas confondre une implication et une équivalence : un énoncé implique (seulement) une solution. Mais la réciproque resterait en toute logique, à vérifier

isomorphisme. Ainsi, pour lui, sa solution ne peut être autrement. Il y a là d'ailleurs, autre chose qu'une simple insuffisance logique, mais un véritable obstacle cognitif qui se définit comme une forme de centration qui fait donc obstacle à la décentration : en l'occurrence, avoir un regard critique sur sa solution, c'est aussi une forme de remise en question de son activité, et qui donc, pourrait être autre, ou tout au moins à compléter. Le contrôle de l'adéquation avec un énoncé se dilue dans l'activité et s'efface devant la production d'une solution. Il est d'ailleurs remarquable que, la plupart du temps, le schème activé qui s'exprime dans le discours de l'enseignant, sorte de bilan collectif qu'il négocie, est celui relatif à un contrôle de validité⁸⁰⁸, parfois restreint à la solution. Son questionnement veut conduire l'élève lui-même à ce type de contrôle. Mais pour les raisons que nous venons de dire, l'élève ne comprend pas où l'enseignant veut en venir et, sa façon le plus souvent nonchalante de répondre, exprime peut-être le ressenti de redondance pour une telle activité.

Nous donnons ci-dessous une transcription d'un extrait de cette activité filmée dans les deux classes.

Dans la classe de V.P :

V.P : « *Allez, on arrête* »

Elle dessine un tableau présentant quatre compartiments et, sans doute, interroge-t-elle Clémence.

Clémence : « *on met 2 bleues* ».

V.P : « *Deux bleues* ».

En affichant 2 fleurs bleues au tableau

Clémence. « *Et 1 rouge au milieu* ».

V.P : « *Et 1 rouge au milieu* ».

En affichant une fleur rouge entre les deux fleurs bleues.

« *On fait ça, ça c'est un bouquet ? Et là j'ai fini le travail ? Clémence !* ».

Clémence : « *Euh oui* ».

V.P : « *Et on te demandait de dessiner combien de bouquets ? Alors là j'en ai dessiné combien ?* ».

Clémence : « *Un* ».

⁸⁰⁸ Notons qu'un tel schème est appelé par une régulation. Et l'activité de la maîtresse pourrait laisser accroire qu'elle est davantage une forme intériorisée d'une contrainte, relative au fonctionnement de la classe, que d'une contrainte de nature logique. En quelques sorte, une règle d'un contrat qui dit que la correction d'un exercice, c'est vérifier, a posteriori, que la solution est valide. L'activité de résolution elle-même, n'est donc pas l'objet d'une telle recherche de validation.

V.P : « Vous, vous en avez dessiné 4 ».

Matthieu : « Oui ».

V.P : « Alors qu'est-ce qu'il faut que je fasse ? »

Matthieu : « Tu rajoutes 3 autres sur les 4 ».

V.P : « Je rajoute 3 autres bouquets. Il sera comment ce bouquet la ? ». En montrant un deuxième compartiment.

Matthieu : « Pareil que l'autre ».

V.P : « Pareil que l'autre. Pareil ! C'est pas un mot que l'on a déjà entendu tout à l'heure ? Eh bien attend, il va falloir que tu m'expliques, Matthieu comment je vais faire pour qu'il soit pareil. Alors, comment je vais faire ? ».

Matthieu : « Il faut 2 bleues et 1 rouge au milieu ».

V.P affiche le deuxième bouquet.

« 2 bleues et 1 rouge au milieu et là, il est pareil ?

Puis elle ajoute une fleur bleue supplémentaire.

« Et si je fais ça, est-ce qu'il est pareil ? ».

Un élève : « Non ».

V.P : « Non, pourquoi ? ».

Clémence : « Parce là, parce que là il y en a 4 et l'autre il en a 3 ».

V.P : « Parce que là il y en a 4 et là je n'en ai que 3. Alors quand on disait tous pareils, ça voulait dire quoi ? Quand je vous dis 4 et 3 ça veut dire quoi, C'est quoi 4 et 3 ? ».

Valentin : « Des chiffres »

V.P : « Des nombres. Alors, pour qu'ils soient tous pareils ? »

Valentin : « Qu'ils aient le même nombre ».

V.P : « Ah, qu'ils aient le même nombre, le même nombre de quoi Sarah ? Pour qu'ils soient tous pareils, il m'a dit : faut qu'ils aient le même nombre, mais le même nombre de quoi ? ».

Un élève : « De fleurs ».

.....

En fait, la maîtresse poursuit un double objectif : elle reconstruit sous le contrôle de la classe les quatre bouquets du binôme « Clémence-Matthieu », ce qui semble se substituer pour elle à une validation de type activité réciproque⁸⁰⁹ ; elle veut aussi amener les élèves à

⁸⁰⁹ Qui pourrait être initialisée par la question ? Alors que peut-on dire de la solution de Matthieu et de Clémence ?

reconnaître, a posteriori, un élément quantitatif, dans la compréhension du mot pareil. Ce qui constitue le noyau le plus important de son propre schéma d'action : un concept organisateur dans la situation de référence que nous venons de relater. Mais nous n'analyserons pas cet aspect qui ressort de l'activité de l'enseignant, ce qui n'est pas l'un des objectifs directs de cette étude.

Dans la classe de C.G

C.G : « *Bien moi je vais vous présenter quelques résultats* »

Et il affiche quatre productions au tableau.

« *Et on va essayer d'en parler en semble.... .Bien. Est-ce que Sylvie et Alaïa veulent venir présenter rapidement leur travail*⁸¹⁰. *Alaïa, tu viens vite, tu viens nous montrer ce que vous avez trouvé* ».

Alaïa hésite.

C.G : « *Alors qu'est-ce que vous avez trouvé, c'est quoi votre bouquet ?* ».

Alaïa ne dit rien.

C.G, en désignant la solution du groupe Alaïa.

« *Qu'est-ce que vous pensez de ça ? Combien elle a mis de bouquets ?* ».

Un élève : « *deux* ».

C.G : « *Elle a mis 2 bouquets. Elle a mis 2 bouquets. J'avais demandé de dessiner combien ?* ».

Un élève : « *Un bouquet* ».

C.G : « *Un, un bouquet !* »

Pour une autre production⁸¹¹, le groupe se déplaçant vers le tableau.

C.G : « *Alors c'est quoi que vous m'avez fait ? Vous avez dessiné un bouquet, c'est ça ? Tu peux nous le décrire, parce que je crois que les enfants, ils ne voient pas là bas. Qu'est-ce qu'il y a dans votre bouquet* ».

A tour de rôle,

« *Là y en a 4, là y en a 4 aussi, là y en a 4 et là, y en a 4* ».

C.G : « *Ah et j'avais demandé de dessiner combien de bouquets ? Vous m'avez dessiné les 4 bouquets, c'est ça ? Et j'avais demandé de dessiner combien de bouquets ?* »

En montrant l'écriture du « un » au tableau.

⁸¹⁰ Deux bouquets de 4 fleurs : 4 fleurs bleues pour l'un et 4 fleurs rouges pour le second.

⁸¹¹ Quatre assemblages de 4 fleurs.

Un élève : « *Un !* »

C.G : « *J'avais demandé de dessiner un bouquet ! Là, il y a un problème au niveau de la consigne* »

Puis il considère une autre production⁸¹² qu'il va valoriser, après avoir passé rapidement sur une troisième production.

C.G : « *Comment est-ce qu'on pourrait... Tiens, si je prends cette solution là ? La solution d'Aurélien et Constantin. Ils m'ont dit... vous avez fait 4 bouquets. Tiens les voilà, on peut regarder sur leur feuille de recherche. Regardez, voilà les 4 bouquets qu'ils ont faits. Vous les voyez, ils ont bien fait 4 bouquets. Il remontre la feuille de réponse. En voilà un des bouquets. Comment est-ce que l'on pourrait vérifier qu'ils ne se sont pas trompés ? Oui, Constantin !* ».

Constantin : « *On n'a fait qu'un bouquet* ».

C.G : « *Oui* ».

Constantin : « *On a fait quatre bouquets et ils sont tous pareils* ».

C.G, en pointant du geste Constantin.

« *Ils ont fait quatre bouquets et ils sont tous pareils. Ça, c'est une bonne chose. Est-ce que là, par exemple, j'ai quatre bouquets tous pareils ?* »

Il montre une production de huit bouquets de quatre fleurs, quatre bouquets rouges et quatre bouquets bleus.

Une élève « *Oui* »

C.G : « *Ils sont vraiment tous pareils ? Qu'est-ce qu'ils ont de différents ?* ».

Un élève : « *Y-en a des plus gros* ».

CG, en hochant la tête.

« *Y-en a des plus gros !* ».

Une élève : « *Il est bleu et rouge, c'est pas pareil* ».

C.G : « *Ah ! Tiens Léonie, ils m'ont fait des bouquets bleus et puis ils m'ont fait des bouquets rouges. Est-ce que les bouquets bleus, c'est pareil que les bouquets rouges ?* ».

Les élèves : « *Non* ».

Une élève : « *Nous aussi, on a fait ça* ».

Ce qui concerne une des productions affichées.

C.G : « *Vous aussi, vous aussi, vous avez fait des bouquets rouges et des bouquets bleus ? Je crois que, ici aussi, chez Tancred, vous avez fait des bouquets*

⁸¹² Un bouquet de 2 fleurs bleues encadrant 1 fleur rouge.

bleus et des bouquets rouges. Et là, chez Alaïa et Syveline, je vois des bouquets bleus et des bouquets rouges ».

Il revient à la production mise en valeur.

« Et qu'est-ce qu'ils ont fait eux, est-ce qu'ils ont fait des bouquets bleus et des bouquets rouges ? »

Un élève : *« Non, il y a du bleu dans les bouquets ».*

C.G : *« Du bleu et puis... du rouge. Ils ont pris des fleurs bleues et puis des fleurs rouges et puis ils les ont assemblés pour faire des bouquets. Ils ont réussi à faire quatre bouquets pareils ».*

Puis il clôt la séance.

Le maître reprendra cette situation avec des jetons. Les élèves les manipuleront au lieu de les dessiner.

On note bien, dans cette activité collective, une recherche de validation argumentée, relative aux productions. Et ceci l'est bien, au sens d'une démarche réciproque de la construction des solutions. Elle est guidée par un schéma d'action explicite de la part du maître avec comme concept organisateur la confrontation de la solution avec la question qui clôt l'énoncé. Remarquons qu'il n'insiste pas sur l'aspect quantitatif du problème. Et sur ce point, la « ressemblance » des quatre bouquets reste un implicite. De même ici, nous n'affinons pas davantage cette analyse qui ressort de l'activité du maître.

- Un second obstacle concerne l'indice « pareil », en supposant qu'il devienne pour des élèves, un indicateur explicite, c'est-à-dire, qu'en tant qu'indice, il ne soit pas tout simplement ignoré. Et c'est sur ce point que nous allons retrouver un obstacle normal et résistant⁸¹³ que renferme cette situation.

- Pour les membres du groupe, comme pour les concepteurs de l'exercice, ce terme connote une identification de nature quantitative et leurs analyses n'échappent pas à cette connotation. Comme le montre la discussion entreprise par V.P⁸¹⁴, pour les enfants de sa classe, ce terme renvoie à une conception plus quotidienne⁸¹⁵ de l'identification. Celle-ci est de nature qualitative (10, 12, 14, 16)⁸¹⁶. Et cette conception va faire obstacle à une représentation quantitative des compositions florales. Nous avons déjà rappelé, dans d'autres termes que dans la psychogénèse, la ressemblance qualitative est un

⁸¹³ Cet obstacle possède bien les attributs d'un obstacle épistémologique. Au contraire, l'émergence du précédent reste contingente de la formulation de la situation objective.

⁸¹⁴ Qui voulait donc attirer l'attention des élèves sur cet aspect

⁸¹⁵ Au sens des concepts quotidiens de Lev Vygotski.

⁸¹⁶ Ma maman est pareille que la tienne (elle a la même couleur de cheveux).

passage obligé pour atteindre la ressemblance quantitative. C'est par « une différenciation de la qualité que se construit la quantité ».

▪ Nous pouvons donc prévoir dans la classe de V.P que les productions de quatre bouquets dont nous avons dit qu'on peut les attendre en majorité, traduisent une forte prégnance des identifications de nature qualitative entre les bouquets :

- respect des couleurs, qui ont été explicitées dans la discussion initiale ;

- respect de la disposition des fleurs dessinées dans chaque bouquet (par exemple une fleur rouge entre deux fleurs bleues) ;

- respect de la proportion florale (chaque bouquet présente bien les mêmes nombres respectifs de fleurs bleues et de fleurs rouges) ;

- utilisation d'un petit nombre de fleurs par bouquet⁸¹⁷. Au-delà d'un petit nombre, l'identification de la qualité devient difficilement contrôlable à l'aide des seuls schèmes de la perception. La forme même de l'énoncé, qui ne fixe pas une contrainte d'exhaustivité (il faut utiliser toutes les fleurs), ne conduit pas à la nécessité d'une quantification au sein de leur représentation, c'est-à-dire à l'exercice d'une composante différenciée du schème de la comparaison, aboutissant à la construction d'un « pareil » quantitatif.

▪ Nous pouvons donc prévoir, dans la classe de C.G, une plus grande « dispersion » des productions, traduisant aussi des identifications de nature qualitative entre les bouquets, mais de façon moins prononcée, une discussion préalable sur le mot « pareil » n'ayant pas jouée en faveur d'une focalisation sur cet indice ; donc, en particulier, peu de fleurs par bouquet. Nous devrions noter un plus grand nombre de productions ne respectant pas la limite des quantités disponibles, en raison d'une surdétermination de l'indicateur 4. Nous pourrions l'expliquer principalement par l'absence de la régulation, initialisant la construction d'un schéma complet de la situation. Un tel schéma est un construit empirique se suffisant d'une lecture fragmentaire de l'énoncé. Inversement, une régulation a bien pu être activée et initialiser un schéma forcé et non complet de la situation. Le système a pris en compte la totalité de l'énoncé mais n'en a pas compris tous les éléments.⁸¹⁸

▪ Compte tenu des discussions qui ont précédées, dans les deux classes, les mises en recherche des élèves, nous avons rejeté, pour la majorité des possibles, une connotation quantitative du mot pareil. Mais il ne peut être exclu que, dans une classe, de façon

⁸¹⁷ Toutefois plus d'une fleur en raison d'une mémorisation prototypique du format d'un bouquet : il ne peut y avoir une seule fleur dans un bouquet !

⁸¹⁸ Ce qui exprime à la fois un schéma ne respectant pas certains homomorphismes avec l'énoncé et l'exagération, dans ce schéma, de l'indicateur 4.

directe ou non, une telle connotation se trouve aussi disponible. Cela dépend donc de l'environnement mathématique dans lequel se trouvent les élèves de cette classe ; en particulier, si le numérique est, à ce moment de l'année, plus fortement prégnant. Ainsi, cette hypothèse nous conduit à penser alors que dans une telle classe, des possibles, en majorité, devraient être porteurs d'une telle connotation. Ainsi, les productions des élèves pourraient, dans cette classe, relever en majorité des cas 2 ou 3.

Précisons que dans la classe de C.G, et après distribution de jetons (lors de la séance suivante), quatre élèves disposant chacun de 4 jetons rouges et de 3 jetons bleus, tous les élèves refuseront de reconnaître que les quatre bouquets sont « pareils ». Il est à noter que le maître leur imposera le contraire, sans comprendre que leur position exprime la résistance de l'obstacle « du pareil qualitatif » (au sein de chaque bouquet).

1.6.4.4 Les productions des élèves et quelques compléments d'analyse cognitive a posteriori

Classe de la maîtresse V.P.

Nous considérons tous les groupes ; soit 6. Rappelons qu'il s'agit de binôme.

Productions observées⁸¹⁹ :

Cas 0	Cas 1	Cas 2'	Cas 2''	Cas 3'
Recherche apparente sur la feuille de brouillon ⁸²⁰	Deux gros bouquets bicolores	4 bouquets tous pareils : '1 rouge, et 2 bleues'	4 bouquets tous pareils : '3 rouges et 4 bleues'	4 bouquets : '2 rouges et 2 bleues'
4/6	1/6	1/6	1/6	3/6

Analyse complémentaire

➤ Précisons que nous donnerons des activités, au sein de chaque binôme, des analyses de teneur inégale : un volontaire du groupe IREM a filmé certains observables, sans consigne particulière, car les enseignants de ce groupe se sont vraisemblablement, et c'est ce que montre leur analyse a priori, focalisé sur la tâche d'un point de vue logico-mathématique, en particulier sur les productions finales qu'ils se sont proposés d'analyser.

⁸¹⁹ On pourra se référer « aux possibles », sous 1.6.4.2.

⁸²⁰ Nous parlerons ici de recherche, lorsque la feuille, prévue à cet effet, témoigne de premières tentatives et, que la feuille de réponse n'est pas une simple transcription de cette première production. Ce qui modifie là, la définition initiale de ce cas 0.

➤ Nous notons, tout d'abord, que les élèves n'ont pas repris, dans leurs réponses, des questions de la maîtresse, l'indice quantitatif explicite, à savoir le nombre 4(23 et 25). Mais l'analyse des productions montre que, sur ce point, cet indicateur est précocement à l'origine d'une activation d'un schème spécifique.

➤ Description et analyse de certains cas.

• **cas 0 et 1** : ce groupe produit un seul gros bouquet, en forme de soleil, sur sa feuille de recherche et 2 gros bouquets, sur la feuille de réponse, présentant les caractéristiques suivantes :

- 'à peu près de mêmes taille' ;
- de même forme 'en soleil' ;
- trois couronnes circulaires respectant l'ordre : bleue, rouge, bleue ;
- deux fleurs au centre ;
- les nombres de fleurs dessinées excèdent les nombres de fleurs disponibles

Moins attentifs à la discussion, engagée entre la maîtresse et leurs camarades (au moins pour l'un des deux élèves du binôme), comme nous avons pu le constater, ils ont construit leur représentation et ne reprenant comme indicateurs que les indices dessine, bouquets, fleur, rouge, bleue, pareil.

La composition des deux bouquets, malgré leur complexité, confirme **le maintien d'un contrôle anticipé du caractère d'identification, de nature qualitative, dénoté par le mot pareil**. Mais, ayant opté pour un grand nombre de fleurs, ils n'ont pu assurer une identification de nature quantitative, c'est-à-dire, pour eux, de façon purement perceptive et qualitative. On peut toutefois noter que pour les couronnes analogues, les nombres de fleurs sont assez proches, ce qui reflète la persistance de cette forme de contrôle visuel dans la représentation.

La maîtresse est intervenue pour rappeler qu'il fallait 4 bouquets, mais ils n'ont pas eu le temps d'en dessiner plus de deux.

• **cas 2'** : ce groupe dessine, sur les deux feuilles, 4 bouquets de trois fleurs présentant les caractéristiques suivantes :

- deux fleurs bleues encadrant une fleur rouge ;
- sur la feuille de recherche, toutes les fleurs ont une tige et sont sans feuille. Elles ont toutes, la forme approximative d'un petit disque ;
- sur la feuille de réponse, toutes les fleurs ont une tige avec deux feuilles de même forme. Les fleurs font toutes apparaître des pétales de mêmes nombres et de formes proches ;

La maîtresse vient les voir et interroge :

V.P : « *Dites-moi comment vous avez fait ?* »

Mathieu : « *On a pris 2 fleurs bleues et on a mis 1 fleur rouge* ».

La maîtresse s'en va.

Lors d'un compte rendu collectif, Clémence, l'une des deux élèves du binôme, précise : « *On a pris 2 fleurs bleues et 1 fleur rouge au milieu* ».

Nous pouvons penser, pour ce groupe, que tous les éléments de leur production se sont construits, sous **le contrôle d'une régulation, visant à maintenir, en représentation, des connotations qualitatives, auxquelles renvoie le mot « pareil » et, quantitative, incidemment**⁸²¹. En particulier, ils introduisent, dans leur schéma complet d'actions, une contrainte relative à la disposition des fleurs au sein de chaque bouquet (au milieu).

- **cas 0 et 3'** : groupe de Valentin et de Charlotte et, pour lequel, nous disposons d'un suivi de l'activité plus important.

- Valentin est l'un de ceux ayant participé le plus à la discussion.
- Nous assistons à une collaboration entre ces deux élèves et de type

symétrique :

- durant toute l'activité, Valentin « s'occupera du bleu » et Charlotte « s'occupera du rouge » ;
- Valentin dénombre les fleurs bleues et Charlotte dénombre les fleurs rouges, tous les deux, en les cochant. Il semble que Valentin ait dénombré 14 fleurs bleues, au lieu de 12 et Charlotte, 15 fleurs rouges, au lieu de 16.

On pourrait supposer qu'ils aient l'intention d'utiliser toutes les fleurs. Ils ne trouvent certainement pas les mêmes nombres, après vérifications respectives, et cet aspect contradictoire pourrait être à l'origine d'une inhibition de cette anticipation, si on admet que la contrainte d'être pareils, pour les bouquets, implique pour eux, les mêmes nombres respectivement de fleurs bleues et de fleurs rouges, dans chaque bouquet, ce qu'effectivement ils se sont finalement imposés.

On pourrait aussi bien supposer qu'il s'agit d'un effet de contrat : ils comptent, car se présentent à eux deux collections ou l'aspect monade est, de plus, rendu bien explicite.

- Ils commencent à dessiner, sur la feuille verte (de recherche), le début d'un bouquet, chacun de leur côté, avant que Charlotte n'interrompe ce démarrage, en propo-

⁸²¹ Rappelons que pour des petits nombres, 'l'apparence quantitative' peut très bien s'exprimer par le qualitatif, contrôlé perceptivement

sant « *on fait ensemble* ».

- Ils retournent la feuille verte.
- Ils décident de recompter les fleurs, Valentin les bleues et Charlotte les rouges. Mais, ressentant des difficultés (ou ne retrouvant pas le nombre de 15 ?), elle demande à Valentin de les recompter. Il s'acquitte de cette tâche, trouve 14, Charlotte semble vouloir reprendre ce comptage et abandonne.

- Ils collaborent alors au dessin de bouquets et, dans un ordre immuable, Charlotte puis Valentin : premier bouquet, une fleur rouge puis une fleur bleue, une fleur rouge puis une fleur bleue. Ce bouquet se présente alors avec 2 fleurs rouges et, à gauche de celles-ci, 2 fleurs bleues. Ils poursuivent avec un deuxième bouquet, 2 fleurs rouges et 2 fleurs bleues à gauche de celles-ci (après que Charlotte ait gommé une tige rouge qu'elle avait dessinée, dans le bouquet précédent). Valentin entreprend de cocher les fleurs bleues déjà utilisées, 2 par 2. Charlotte ne coche pas systématiquement « les fleurs rouges utilisées ». Ils terminent le dessin de 5 bouquets. Et Valentin coche en une fois 6 autres fleurs bleues.

La maîtresse survient et Charlotte lui dit qu'ils n'ont pas fini.

V.P : « *Pourquoi dis-tu que vous n'avez pas fini ?* ».

Charlotte : « *Parce que Valentin... il n'en reste plus que 2* ».

V.P : « *Valentin, il lui en reste plus que 2, de quoi ?* ».

Valentin : inaudible.

V.P : « *Ah deux fleurs bleues et vous vouliez finir. C'est-à-dire. Ça veut dire quoi, vous vouliez finir ?* »

Valentin : inaudible en montrant les deux dernières fleurs non encore cochées.

V.P : « *Vous vouliez finir quoi, ma grande ? parce que là vous n'avez pas fini ?* »

Valentin montre les deux dernières fleurs bleues non cochées.

V.P : « *Eh bien vous avez fait combien de bouquets ?* »

Charlotte : « *Quatre* ».

V.P : « *Non ! Et il fallait en faire combien ?* ».

Elle montre le chiffre 4, écrit sur la feuille d'énoncé.

Charlotte : « *Quatre* ».

Elle veut encore exprimer le nombre de fleurs d'un bouquet que Valentin est en train de compter sous les yeux de la maîtresse.

V.P : « *Eh bien alors ?* ». « *Ah, vous avez été emporté dans votre élan !* ».

Valentin désigne alors le cinquième bouquet en tentant de le gommer (difficilement).

V.P : « *Eh bien vous le barrez, c'est pas grave !* ».

Elle prend un crayon et le barre.

« *Barrez-le !* ». « *Qu'est-ce qu'il falloir faire, par contre, pour les fleurs ?* »

Silence

V.P : « *Ah ! A vous de voir* »

V.P s'en va.

▪ Valentin et Charlotte entreprennent alors de gommer des repères qu'ils ont faits sur les fleurs de la feuille d'énoncé, mais, sans coordination. Ils gomment quelques repères, abandonnent et reproduisent, sur la « feuille-réponse », les 4 bouquets restants de la feuille de recherche.

Il est remarquable de noter qu'ils ont tenu, à la faveur du contrôle de validité, initialisé par la maîtresse, à rendre cohérent leur réponse finale avec ce qui aurait dû être l'état (dans leur esprit) de leur recherche.

V.P revient voir ces élèves.

« *...Ils sont tous pareils ?* »... « *Est-ce qu'ils sont tous pareils Valentin ?* »

Valentin : « *Oui* »

V.P : « *Oui, pourquoi ?* »

Valentin, en montrant un bouquet puis un deuxième bouquet :

« *Parce que y a 2 bleues et 2 rouges, là y-a 2 bleues et 2 rouges ...* »

V.P, l'interrompant,

« *Ah, ils sont tous pareils, parce qu'il y a 2 rouges et 2 bleues* »

Elle s'en va.

L'activité des ces deux élèves montrent que l'indice « 4 bouquets » s'est transformé en l'indicateur « 4 fleurs ». Toutefois, ce glissement sémantique ne rend pas impossible un prolongement cohérent de l'activité. Ainsi, l'énoncé complet ne joue pas comme une nécessité, dans la construction d'une représentation opérationnelle. De plus, on peut comprendre, après l'intervention de la maîtresse, que leur dénombrement initial concerne une anticipation à prévoir le nombre de bouquets à dessiner.

On note aussi la surdétermination concernant la qualification de 'pareil' :

- les bouquets se présentent comme ayant autant de fleurs bleues que de fleurs rouges ;
- disposition interne à chaque bouquet, invariante : 2 fleurs bleues dessinées à gauche de 2 fleurs rouges ;
- huit fleurs sans tige et à pétales très ressemblantes. Rappelons que Charlotte a tenu à effacer une tige qu'elle a jugée non utile.

Nous pouvons penser que cette surdétermination de la qualité, au dépend de la quantité a contribué à une focalisation définitive sur la composition interne à chaque bouquet : cette surdétermination a eu un tel « effet attracteur » que **l'indice 4 est devenu un indicateur qualitatif pour chacun des bouquets**. Davantage, cet effort a pu jouer sur le respect d'une égalité entre les nombres de fleurs bleues et de fleurs rouges, au sein de chaque bouquet. Cette hypothèse peut être envisagée, en se souvenant de la forme de collaboration qui s'est instituée, au sein de ce binôme (partage des couleurs, alternance des dessins des fleurs et, une par une).

Ces deux systèmes avaient intégré, dans leur schéma complet d'actions, l'anticipation et le contrôle de l'utilisation de la totalité des fleurs disponibles ; le test d'arrêt étant le nombre des fleurs bleues, ce qui aurait dû conduire à 6 bouquets de 4 fleurs. Mais l'intervention de la maîtresse, concernant le nombre des bouquets, a entraîné l'abandon de cette contrainte, qu'ils se sont fixée (et même le rejet explicite par la tentative de gommage). Finalement, leur production est celle des 4 bouquets restants (sur les cinq).

- **Cas 0 et 3'** : groupe de deux élèves n'ayant pas participé à la discussion. Mais Sabri a semblé plus attentif que sa partenaire Sonia. Nous donnons ci-dessous quelques observations :

- Sabri a dessiné, dans sa 'zone de feuille de recherche' (les deux élèves se sont partagés la feuille de recherche), 4 bouquets de fleurs, composés chacun de 2 fleurs rouges et de 2 fleurs bleues. Pour 3 d'entre eux, les fleurs bleues encadrent les 2 fleurs rouges. Quant au quatrième bouquet, sa disposition pourrait indiquer une légère perte, au niveau du schéma d'action, puisque la disposition des autres n'y est pas conservée.
- Sonia a dessiné, sur 'sa zone de feuille de recherche', 10 graphismes et en a barrés six (les plus proches des bords de la feuille) qui n'ont pas l'apparence de bouquets. Les quatre derniers graphismes (plus éloignés des bords de la feuille), représentent des bouquets de quatre fleurs, deux rouges et deux bleues. Ils présentent une disposition irrégulière : 2 fleurs rouges encadrant 2 fleurs bleues ; 2 fleurs bleues encadrant 2 fleurs rouges ; 2

fleurs rouges encadrant 2 fleurs bleues ; une fleur rouge, une fleur bleue, une fleur rouge, une fleur bleue. Mais il nous semble que ces bouquets sont obtenus à la suite d'une imitation partielle de la production de Sabri. Cette production ne serait donc pas le résultat d'une représentation propre. Ce qui pourrait expliquer le pourquoi de l'irrégularité qui irait contre une prévision d'une observance stricte de la qualification, pour ces bouquets d'être 'pareils'.

- L'enseignante (E) qui filme intervient.

E : « *Alors vous voulez bien m'expliquer votre travail. Ça a l'air bien hein ?* »

Sabri : « *On a pris 4 bouquets, on a mis 2 bleues dans chaque bouquet et 2 rouges dans chaque bouquet* ».

E : « *D'accord, pourquoi vous avez fait ça ?* »

Sabri : En montrant les fleurs de l'énoncé,

« *On a pris 2 d'ici, 2 d'ici* ».

En montrant les fleurs bleues de l'énoncé,

« *Ici y en avait 4 et 4 et 4* ».

E : « *Quand est-ce que vous vous êtes arrêtés ?* »

Pas de réponse

E : « *Pourquoi est-ce que vous n'avez pas mis plus de fleurs dans chaque bouquet ?* »

Sabri : « *Parce que, on voulait les faire comme ça* ».

Finalement, la solution se présente comme une reproduction de celle de Sabri, mais avec rectification concernant le quatrième bouquet qui retrouve la régularité qualitative des trois autres ;

On peut reprendre la plupart des analyses faites, concernant le groupe précédent. **On retrouve la surdétermination concernant la qualification de 'pareil' :**

- les bouquets se présentent comme ayant autant de fleurs bleues que de fleurs rouges ;
- disposition, interne à chaque bouquet, invariante : 2 fleurs bleues encadrant 2 fleurs rouges ;

L'indice 4 est devenu un indicateur qualitatif pour chacun des bouquets.

Cet effort organisateur a pu jouer sur le respect d'une égalité entre les nombres de fleurs bleues et de fleurs rouges, au sein de chaque bouquet.

- **cas 0 + 3'** : groupe de deux élèves n'ayant pas participé à la discussion. Aucun d'eux n'y a semblé vraiment attentif. Nous rendons compte des observations à notre dis-

position.

- Plusieurs graphismes bien distincts se retrouvent sur le feuille de recherche : trois pots de fleurs contenant chacun 1 fleur bleue et une 1 fleur rouge.
- Abandon vraisemblable de cette orientation.
- Puis, en dessous, une tentative brouillonne de 4 bouquets ou plus (?) : l'un avec sept fleurs en alternant les couleurs ; un deuxième de trois fleurs, deux rouges encadrant une bleue ; un autre bouquet, présentant deux fleurs de couleurs différentes ; un autre de même composition que le deuxième puis deux tiges sans fleur.
- Abandon semble t-il de cette recherche. On observe alors une maison, présentant 4 compartiments, à l'intérieur desquels se trouve un bouquet : une tige et à, son extrémité supérieure, 4 ronds disposés comme aux quatre coins d'un carré, 2 rouges et 2 bleus, de couleurs alternées et disposés de manière identique, relativement aux 4 compartiments.
- C'est cette dernière production qu'ils reproduiront sur la feuille 'solution'.
- La maîtresse intervient.

V.P : « *Tu m'expliques* »

Une élève : en montrant une fleur :

«Là, c'est une fleur, la fleur bleue, elle a deux bleues ».

En montrant une autre fleur, dans le même compartiment :

«La fleur rouge, elle a deux rouges ».

En montrant une autre fleur, dans un autre compartiment

« Et là, elle a... »

V.P, l'interrompant,

«Elle a quoi, deux quoi bleues et deux quoi rouges ? ».

L'élève : « *Ben, elle a deux pétales* ».

V.P : « *Ah bon !* »

La maîtresse s'en va.

Il semble que cette élève assimile chaque compartiment à un groupement de 2 fleurs et les ronds, à des pétales. On en infère, qu'après avoir, semble-t-il, eu une représentation initiale pertinente qui pouvait conduire au schéma d'action : dessiner quatre bouquets (en pots) de 2 fleurs, une fleur rouge et une fleur bleue, **les représentations suivantes de la situation sont restées instables, pour finalement conduire à une assimilation surdéterminant l'indice 4. Cette surdétermination peut alors être entendue comme un critère organisateur de leur**

activité. On pourrait ainsi supposer que l'abandon soit dû à une remise en question de la composition de chaque bouquet, « la qualité 4 » y étant absente. En fait, il semble que l'on puisse considérer leur recherche comme des essais peu anticipés, mais focalisés par cette sur-détermination qui définit de fait un contrôle du résultat des actions, ce qui leur permet finalement d'aboutir.

On peut encore reprendre la plupart des analyses faites, concernant le groupe précédent.

On retrouve bien la surdétermination concernant la qualification de 'pareil' :

- les bouquets se présentent comme ayant autant de fleurs bleues que de fleurs rouges aussi bien dans la représentation initiale que dans la représentation finalement retenue ;
- disposition, interne à chaque bouquet, invariante : dans chaque compartiment, deux fleurs, un pétale rouge, en haut à gauche, un pétale bleu, en haut à droite, un pétale rouge en bas à droite et un pétale bleu en bas à gauche ;

L'indice 4 est finalement devenu un indicateur qualitatif pour chacun des bouquets. L'assimilation est là déformante, dès lors que l'indicateur '4 pétales' s'est substitué à l'indicateur '4 fleurs'.

Cet effort organisateur a pu jouer sur le respect d'une égalité entre les nombres de fleurs bleues et de fleurs rouges, au sein de chaque bouquet.

- **cas 0 + 2''** : Rémi a participé à la discussion et a, en particulier, exprimé explicitement la procédure consistant à construire les bouquets fleur par fleur, en respectant un modus operandi. Sarah n'a pas participé à la discussion mais a semblé attentive. Nous restituons, ci-dessous, les observations en notre possession.

- Quand la maîtresse intervient, auprès de ce groupe, on peut constater le dessin de deux bouquets sur la feuille de recherche et, déjà, leur reproduction sur la feuille de réponse. Pour chaque bouquet, 3 fleurs rouges et 3 fleurs bleues, couleurs alternées et, dans le même ordre.

Question de la maîtresse inaudible.

Rémi, en montrant les 16 fleurs rouges :

« Six fleurs, trois là et trois là ». Il veut dire que, pour les deux bouquets dessinés, il a déjà utilisé six fleurs rouges.

« Trois et encore trois. On a pris trois, dans un bouquet et dans un bouquets ». Il veut dire que, pour les deux bouquets dessinés, il a déjà utilisé trois fleurs rouges pour l'un et trois fleurs rouges pour l'autre.

V.P : « *Oui d'accord !* ».

Rémi : « *Ça fait six !* ».

V.P : « *Elles sont où ces fleurs, montre moi* ».

Rémi montre les fleurs rouges dans un bouquet déjà dessiné.

V.P : « *Et pour les bleues, comment t-a fait pour les bleues ?* ».

Rémi : « *On les a toutes prises les bleues* ». « *Et là, y en a plus* ». Il montre les fleurs bleues de l'énoncé,

- Sur la feuille d'énoncé, toutes les fleurs bleues sont barrées par un petit trait. On comprend alors que, dans ce groupe, un élément du schéma d'action est l'utilisation de toutes les fleurs. D'autre part, Rémi avait annoncé comme mode opératoire, une alternance des couleurs dans le dessin des fleurs, au sein de chaque bouquet. Ainsi, leur production, en cours, devrait s'achever par le dessin de 4 bouquets présentant 3 (ou 4) fleurs rouges et 3 fleurs bleues en alternant les couleurs.

La maîtresse V.P s'en va.

- Les deux élèves de ce binôme recomptent les fleurs rouges (Sarah ne les a pas « barrées » systématiquement) et revoient leur feuille de recherche. Ils rajoutent à leurs deux bouquets, dessinés sur la feuille-recherche, une fleur rouge en respectant l'alternance des couleurs. Compte tenu du style (de la feuille-réponse), il semble que ce soit le fait de Sarah. Apparemment, et dans un style différent, Rémi dessine sur cette même feuille deux bouquets de 7 fleurs, 4 rouges d'un côté et 3 bleues à droite, rompant avec l'ordre initial des couleurs. On se retrouve donc sur la feuille de recherche avec quatre bouquets de sept fleurs, quatre rouges et trois bleues, bouquets deux à deux 'pareils'.

- Rémi va reprendre la feuille de réponse, en gommant les deux bouquets initialement dessinés et, en reproduisant 4 bouquets identiques à tous points de vue, 'clonage' de ses derniers bouquets : 4 fleurs rouges puis du même côté à droite, 3 fleurs bleues.

Selon toute vraisemblance donc, Rémi et Sarah auraient, à un moment de leur activité, anticipé le nombre de fleurs bleues utilisées, en optimisant, afin qu'il n'en reste plus de disponible. Mais le fait qu'ils n'aient pas anticipé cette optimisation au même moment pour les fleurs rouges peut permettre d'en douter. En fait, une observation attentive, de leurs deux premiers bouquets de la feuille de recherche, montre qu'ils ont suivi la procédure annoncée par Rémi, dans la discussion initiale. Ils ont construit deux bouquets, en respectant l'ordre qualitatif: une fleur bleue avec une fleur rouge, pour un bouquet, une fleur bleue avec

une fleur rouge, pour un second bouquet, et ainsi, jusqu'à avoir obtenu deux bouquets identiques composés de trois fleurs bleues et de trois fleurs rouges alternées. On ne sait si cette procédure a été régulée par la considération du nombre de fleurs bleues après chaque pas de cette procédure, ou si, après l'utilisation de trois fleurs par bouquet, ils décident de compter les fleurs bleues disponibles et les fleurs bleues utilisées. Ils se seraient alors rendus compte de l'égalité des deux nombres l'un anticipé (en tenant compte de quatre bouquets du même type) et l'autre, le nombre de fleurs bleues disponibles, soit 12. La discussion, avec la maîtresse, qui va focaliser sur les nombres de fleurs utilisés, et sur le constat qu'il y a plus de fleurs rouges, et que toutes les bleues ont été utilisées, semble avoir été à l'origine d'une inférence : « ce que j'ai fait avec les bleus, je peux le faire avec les rouges », ce qu'effectivement, ils tentent et réussissent. Ainsi le ' pareil qualitatif ', mais sans cette fois de surdétermination de l'indicateur 4, se transforme, de proche en proche, et pour une part, 'en pareil quantitatif'.

Dans la discussion collective, la maîtresse demandera si quelqu'un a pris toutes les fleurs et, Rémi annoncera qu'ils l'ont fait.

Peut-on penser que Rémi et Sarah ont, dans leur représentation d'un schéma complet d'action, apporté une connotation quantitative au qualificatif 'pareil ? La procédure de Rémi montre que non. **Le quantitatif n'est pas anticipé. La qualitatif est resté fortement prégnant** jusqu'à l'intervention de la maîtresse puisque les bouquets avaient une composition qui, en leur sein, exprimait une 'identification' entre les fleurs bleues et les fleurs rouges (nombres et alternance). L'abandon d'une double égalité numérique, au sein d'un même bouquet, et entre les bouquets, pourrait être une conséquence de l'exercice d'une compétence, visant à construire une identification de nature quantitative. Elle ne correspond pourtant, pas encore, chez Rémi, à un schème différencié dans la compétence : produire un exemple d'identification qualitative. En effet, la dissymétrie, au sein d'un même bouquet, a été obtenue en raison de la construction d'un indicateur improvisé : utiliser toutes les fleurs rouges et cela sans plus d'anticipation.

Conclusions

Nous retiendrons que, dans cette classe, cinq groupes sur les six ont des productions, sur les feuilles-réponses, qui peuvent être considérées comme valides, propositions vraies en vertu de leur forme.

Mais nous avons bien montré que si, pour ces productions, les distributions numériques sont bien conformes à ce jugement de validité, cela l'a été incidemment et, à la faveur de l'expression d'un obstacle : une conception qualitative de la relation d'identification, s'exprimant à l'aide du prédicat 'pareil'. Concernant la majorité des systèmes cognitifs des six

groupes, on ne peut nier une anticipation, relative à la construction d'une identification de nature qualitative. Pourtant, même celle-ci en reste à un niveau empirique, au sens où le contrôle en demeure au perceptif avec ses limites internes et externes⁸²². Rémi semble faire exception, puisque le schème de l'identification prend une forme moins empirique. Son système cognitif anticipe, comme on l'a vu, qu'une certaine sériation donnera le résultat qualitatif escompté.

Classe de la classe de C.G.

Nous considérons tous les groupes ; soit 6. Rappelons qu'il s'agit de binôme.

Productions observées⁸²³ :

Cas 0	Cas 1	Cas 2'	Cas 6'	Cas 6''	Cas x
Recherche apparente sur la feuille de brouillon	Dessins de diverses formes	4 bouquets : 'une fleur rouge et deux fleurs bleues'	4 bouquets de 4 fleurs, 'monocolores et identiques'	4 bouquets de 4 fleurs : 'monocolores et non identiques'	1 bouquet de '4 fleurs et d'une même couleur'
6/6 ⁸²⁴	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6

Dans cette classe, le maître n'est pas intervenu de façon explicite dans l'activité des binômes. Nous ne disposons donc pas d'observation explicite, concernant l'activité, au sein de certains groupes.

Analyse complémentaire. :

- **cas 0** : les six feuilles « de recherche » ne font pas apparaître véritablement de recherche mais des productions directes de réponses qui seront reprises plus ou moins fidèlement sur la feuille de réponse.

- **cas 1**: dans ce cas, on trouve sur la feuille de recherche des graphismes divers : ronds, carrés, triangles, losanges rassemblés ainsi par catégories de 4 éléments. Il est fait usage de 4 couleurs. Finalement, la production retenue est un alignement de 4 triangles alignés et de couleur noire.

Nous pouvons retenir, pour ce groupe, une représentation de la situation construite sur la base des indices : « dessine » et « 4 », ce dernier surdéterminé, et qui deviennent, pour eux les seuls indicateurs pertinents. Leur choix de formes géométriques peut être à corrélérer avec le

⁸²² Internes au niveau de l'image mentale et, externes au niveau du contrôle visuel.

⁸²³ On pourra se reporter « aux possibles » de notre analyse a priori, sous 1.6.4.2.

⁸²⁴ Contrairement à la classe précédente, nous revenons à notre définition du cas 0.

souvenir qu'ils ont eu d'une activité de dessin⁸²⁵ de telles formes.

- **cas 2'** : la feuille de recherche présente effectivement le dessin de 4 bouquets de 2 fleurs bleues encadrant 1 fleur rouge et dont ils reproduiront un exemplaire. Pour les 4 bouquets, le style reste constant. Notons que c'est cette production qui a été valorisée par le maître. Elle est d'ailleurs la seule solution pouvant être considérée comme correcte parmi celle obtenue dans la classe.

Pour ce groupe, nous pourrions envisager une analyse analogue à celle produite, relativement au 'cas 0+2' de la classe de VP.

- **cas 6'** : pour deux groupes, on retrouve la démarche analogue suivante : chaque élève⁸²⁶ dessine sur la feuille de recherche, en même temps ou l'un après l'autre quatre bouquets de quatre fleurs et monocolores.

Pour l'un des groupes, la feuille de réponse est la reproduction d'un bouquet de quatre fleurs, au crayon noir.

Pour l'autre groupe, par contre, l'activité est allée jusqu'à son terme, puisque chaque élève a reproduit sur la feuille-réponse, son bouquet : un bouquet de 4 fleurs bleues pour l'un et un bouquet de 4 fleurs rouges pour l'autre. Notons que, lors du passage au tableau, ils n'ont pas su expliquer cela et le maître a invalidé leur réponse.

Nous observons donc, pour ce groupe, **une surdétermination de l'indice « 4 »**. Le changement de style, dans le dessin des fleurs et pour chaque élève du groupe, montre que l'indice 'pareils' n'a en fait pas été pris en compte dans une recherche exhaustive de la qualité. Rappelons aussi que nous considérons que **l'indice « quatre », sur déterminé, s'est doublé dans la représentation ;**

- **cas 6''** : la feuille réponse présente un bouquet de quatre fleurs rouges. La feuille de recherche présente 4 bouquets de fleurs vraisemblablement dessinés dans cet ordre : un premier de 4 fleurs bleues alignées (une cinquième a été effacée), un second de 4 fleurs rouges alignées, deux bouquets de 4 fleurs, l'un rouge et l'autre bleu. On peut noter qu'ils ont effacé, au sein de chacun de ces derniers bouquets, une cinquième fleur. Il peut être difficile de comprendre l'abandon de la première tentative, mais un des élèves du groupe a expliqué (au tableau) qu'ils avaient dessiné quatre bouquets. On retrouve cette difficulté à distinguer le nombre de bouquets et le nombre de fleurs par bouquet. Il devient alors vraisemblable qu'une régulation de contrôle argumentée par l'indicateur 4 ait joué dans la production des premiers

⁸²⁵ Il est vraisemblable qu'il s'agisse de l'orientation d'un des membres du groupe et que l'autre aura suivi.

⁸²⁶ Comme le montrent les différences de style.

graphismes, dont le nombre est ramené à quatre, régulation, dans ce cas, mal orientée donc. une autre régulation a joué, pour donner, dans les deux derniers dessins, « la forme bouquet ».

On note également, dans ce cas, une surdétermination de l'indicateur quatre. Il est vraisemblable que l'indice pareil ait eu à souffrir (les quatre bouquets monocolores n'ont pas la même couleur : il y en a 2 bleus et 2 rouges) de cette surdétermination qui a dû focaliser l'attention, lors même de la lecture de l'énoncé ;

- **cas x** : non prévu, mais qui se rapproche du cas 4, dans la mesure où sur la feuille de recherche, on note qu'un élève a dessiné un bouquet de quatre fleurs (pétales jaunes et cœur bleu) et l'autre élève a dessiné deux bouquets monocolores, de quatre fleurs rouges. La feuille de réponse est un bouquet de quatre fleurs dessinées au crayon noir.

Les seuls indices pris, comme indicateurs, sont, pour le premier élève, « dessine » et « quatre » et pour le second élève, « dessine », « quatre » et « la couleur rouge ». Mais il est possible que l'indice « pareil » ait joué comme indicateur, pour construire deux bouquets rouges de quatre fleurs. Dans ce cas, d'une part, il y a glissement complet de l'indice « quatre » qui ne qualifie que la quantité de fleurs par bouquet et, d'autre part, mais de façon liée, l'indice « pareils », étant pris en considération pour qualifier les bouquets, ne met en relation que deux bouquets, dans la représentation de la situation. Nous devons d'ailleurs préciser que le terme pareil peut être associé à une relation de comparaison binaire, ce qui est à envisager ici, et aussi à un prédicat, qui alors permet d'étendre une évaluation de la ressemblance, à plus de deux éléments, ce qui donc n'est pas à envisager ici. Ainsi, le schéma d'action se réduit-il à dessiner un bouquet de quatre fleurs, pour l'un et à dessiner deux bouquets de quatre fleurs rouges pour l'autre.

Conclusion

Nous concentrons cette conclusion sur les phénomènes relatifs aux obstacles signalés ci-dessus. Nous retrouvons que :

➤ Le premier obstacle, concernant la mémorisation, s'est manifesté mais de façon inégale :

- Dans sa classe, la maîtresse, V.P a fait participer ses élèves au déchiffrement de l'énoncé. D'autre part, elle a initialisé une focalisation sur l'indice « pareil » qui, ainsi, est devenu un indicateur opérationnel, car plus aisément mémorisé, dans la construction des représentations.

- Dans sa classe, C.G a fait le choix d'éviter toute exégèse de l'énoncé, en dehors de la prescription elle-même. Cette focalisation, externe au corps de l'énoncé lui-même, n'a pas pu en faciliter la mémorisation. Il semble, au contraire, que celle-ci soit passée au se-

cond plan, occultée par une centration sur la forme de réalisation finale. Dans cette seconde classe, on observe une plus grande dispersion des productions et l'obtention d'une seule solution, apparemment correcte, sur les six.

➤ Le second obstacle, que nous rappelons comme s'opposant à une « conception de nature quantitative », quant à la composition numérique des bouquets, se manifeste dans toutes les productions :

- On le retrouve surdéterminé dans toutes les productions de la classe de V.P, jusqu'au style adopté dans le dessin des fleurs. Dans sa classe, on obtient apparemment cinq solutions correctes sur les six. Mais nous avons vu que les identifications, de nature qualitative, peuvent n'être qu'illusion, pour des observations réduites aux seules analyses logiques de tâches.

- Dans la classe de C.G, il s'exprime par plusieurs qualités, au sein d'une même recherche : formes et quatre (cas 1) ; couleur et composition (cas 2') ; quatre et couleurs (entre bouquets) (cas 6'') ; quatre et couleurs (entre bouquets) et couleurs (au sein d'un bouquet) (cas 6' et x).

- Rappelons que, dans notre analyse, le nombre « quatre » qui détermine la quantité de fleurs dessinées dans un bouquet, n'est vraisemblablement pas à considérer dans un sens quantitatif mais dans un sens qualitatif. Il est d'ailleurs remarquable de noter que les cinq productions incorrectes, pour différentes raisons, représentent des bouquets de quatre fleurs, alors que la seule production correcte présente elle, un bouquet de 3 fleurs. Nous n'en déduisons pas que « quatre » entre comme un des attributs de l'indice « pareil », de façon permanente, pour tous les systèmes cognitifs. Mais, dans la classe de C.G, il indique nettement un glissement de sens qui a vraisemblablement perturbé des représentations plus pertinentes de la situation. Dans la classe de V.P, et concernant trois productions correctes sur cinq, un tel glissement de sens n'est pas entré en conflit avec une acception multiple de l'indice « pareil », une régulation de contrôle de l'activité ne mettant pas en évidence de contradiction.

1.7 Conclusion générale

Nous avons pu vérifier les potentialités, pour l'analyse de situations didactiques, de certains concepts importés de l'épistémologie génétique. Rappelons, en particulier, le concept de schème dont nous allons vouloir une compréhension suffisamment dépouillée pour le faire accéder, il nous semble, à l'opérationnalité. Pour l'analyse, le schème apparaît bien comme l'unité de plus bas niveau, relative au fonctionnement d'un système cognitif. Mais le schème ne peut se définir sans les opérations dont il devient un argument, selon les tâches qui se pré-

sentent aux systèmes. Et, c'est le concept de régulation, dont nous avons fait une fonction à entendre à un niveau supérieur et dont l'une des opérations est précisément la sélection d'un schème qu'il peut paraître pertinent au système d'activer, certains indices sémiotiques, présents dans une situation didactique, étant considérés comme des indicateurs pour une telle action. L'emprunt que nous avons fait à la psychologie du développement de Lev Vygotski est que l'indicateur central, pris en compte par une telle régulation, est une forme langagière spécifique ; une telle forme langagière devant, dès lors, être considérée comme un invariant opératoire associé à un type de tâche donnée. Mais qui dit forme langagière dit obstacle particulier, comme nous l'a bien montré Gaston Bachelard. Et c'est d'ailleurs, dernière des mots que nous avons pu débusquer quelque unes de ces inerties cognitives.

Notons que l'apport assez considérable d'un paradigme résolument cognitif consiste à pouvoir séparer nettement ce que nous avons appelé analyse logique de tâche et analyse cognitive a priori de l'activité. Nous nous en sommes convaincus, dès lors que nous avons analysé que les chercheurs qui se sont orientés vers un tel paradigme n'avaient pas vraiment réussi à obtenir une décomposition génétique des concepts mathématiques, justement, autrement que dans un formalisme mathématique. Notre intuition initiale a été que les concepts de schème et de régulation permettaient de soustraire les graphes des développements de compétences, en milieu scolaire, à un formalisme purement mathématique. On peut donc, à juste titre, invoquer là une véritable logique : la logique des schèmes. Il se trouve alors qu'une telle orientation permet nombre de prédictions, relatives à l'activité des systèmes cognitifs.

Comme nous l'avons précisé, en préambule de ce chapitre, cette première partie a mis en lumière le caractère nécessaire de certains outils de nature cognitive. Il appartient à une seconde partie d'en vérifier le caractère suffisant. Ce qui ne pourra être obtenu qu'en les insérant dans un système qui en repositionnera la signification logique. C'est ce que nous nous proposons dans ce qui suit.

2 Éléments de synthèse pour une conception de situations didactiques

2.1 Précisions méthodologiques

Rappelons que nous voulons restreindre notre propos à l'apprentissage ou au développement de certaines compétences mathématiques, à l'école primaire.

La conception de séquences didactiques relève d'une synthèse. En particulier, Il s'agit de reprendre certains outils de l'analyse et de les préciser en vue de les intégrer dans un système de concepts. Nous pensons qu'ils seront alors efficaces pour organiser la conception de situations didactiques. Aussi, nous pensons que pour une telle synthèse, il s'agit :

- de se doter d'une représentation du fonctionnement cognitif en situation et, suffisamment fine, pour en inférer une forme de maîtrise didactique des interactions, entre ces deux milieux que sont un système cognitif et un milieu matériel et symbolique ;
- de poser des conditions nécessaires de la compréhension en mathématique, ce que nous analysons comme étant au moins des conditions de convergence entre les deux fonctionnements mathématiques et cognitifs ;
- de théoriser la nature des obstacles à cette compréhension ;
- ce faisant, de construire un cadre conceptuel équilibré et consistant⁸²⁷ ; en particulier, un lexique relatif aux concepts adaptés, pour la didactique, de la psychologie du développement et de la psychologie cognitive⁸²⁸. Il s'agit pour nous, non pas d'entreprendre une étude approfondie de certains de ces concepts, mais de nous en imposer des définitions⁸²⁹, en vue de nous les rendre opérationnels et, ce faisant, de maintenir un contrôle de consistance de l'ensemble d'un cadre ainsi construit. C'est ce dernier point qui en contraint aussi les formulations. Notons de même que, nous voulons en vérifier la compatibilité⁸³⁰ avec ce que, par ailleurs, nous retrouvons à leur propos, dans quelques ouvrages d'auteurs dont il est « reconnu »

⁸²⁷ Il est vrai qu'il n'est pas, dans notre propos, de soumettre à une analyse spécifique ce cadre, une fois constitué, afin d'en évaluer la consistance. Remarquons que cet aspect des théories didactiques est certainement assez négligé. Nous nous contenterons, dans les limites de cette thèse, de soumettre notre construction à une évaluation pragmatique. On peut d'ailleurs penser que ce type d'évaluation est un bon outil pour révéler d'éventuelles contradictions internes au cadre conceptuel.

⁸²⁸ Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà explicité certains éléments d'une telle adaptation.

⁸²⁹ Une définition est, dans notre approche, le contraire d'un apriori. Elle est un achèvement, au sens d'une formulation nécessaire. Prises séparément, ce qui n'aurait pas de sens, certaines de ces définitions ne pourraient pas sembler échapper à une certaine connotation subjective. Mais, rappelons-le, elles ne valent, qu'à la condition de se voir insérer dans un cadre conceptuel dont la construction obéit à ce que, pour les concepts, on définit comme un réseau sémantique.

⁸³⁰ Nous définissons ici le terme de compatibilité : un objet O1 d'un cadre T1 est compatible avec un objet O2 d'un cadre T2, lorsqu'O1 peut se signifier dans le cadre T2 et que la signification d'O1 dans T2 et la signification d'O2 dans T2 sont non contradictoires. Par exemple, nous avons proposé, des concepts de schème et de régulation, des définitions compatibles avec celles que nous ont données Jean-François Richard et Jean Piaget. Du concept de prise de conscience, nous avons pu proposer une définition compatible avec les conceptions de Jean Piaget, de Jean-François Richard, de Jean François le Ny et de Pierre Vermersch.

une certaine autorité, en une des disciplines dont nous nous proposons d'opérer certains nomadismes conceptuels⁸³¹.

2.2 Structure cognitive

➤ **Une structure** se définit comme la donnée d'un ensemble d'objets, d'un nombre fini de relations entre ces objets et d'opérations internes ou externes sur ces objets et sur ces relations. Ces relations et opérations peuvent être de type statique, c'est-à-dire exprimer des forces permanentes de cohésion entre certains de ces éléments ou dynamique⁸³², c'est-à-dire, pouvoir s'activer dans certaines circonstances, en respectant des règles de fonctionnement. Celles-ci sont les propriétés de ces relations et de ces opérations. Par exemple, un nombre entier⁸³³ est une structure, un corps mathématique ordonné est une structure, un ensemble ordonné est une structure. Un élément d'une structure peut être lui-même une structure. Par exemple encore, un ensemble de schèmes coordonnés est une structure. Au sein de cette structure, on retrouve d'autres structures de schèmes, comme éléments distinguables, entre lesquels existent des relations permanentes issues de coordinations antérieures⁸³⁴. L'exercice de la structure principale, dite de niveau hiérarchique le plus élevé, exprime une dynamique opérationnelle et régulée qui coordonne les exercices (activations ou inhibitions) des sous-structures. Une telle régulation fonctionne alors comme un opérateur⁸³⁵.

➤ Les structures pouvant⁸³⁶ être dynamiques⁸³⁷, on peut, dans le cas de ces dernières, parler de leur activation ou de leur activité. Nous désignerons par fonctionnement cette activité elle-même⁸³⁸. Dans le cas de structures cognitives, on parlera de **fonctions cognitives**. Nous distinguerons fonctions et processus fonctionnels, ces derniers étant des successions d'états que peuvent produire des fonctions, lorsqu'elles s'appliquent à des objets particuliers. Certains de ces états peuvent se constituer en **opérations**, définissant elles-mêmes des proces-

⁸³¹ Nous reprenons à notre compte et, pour un ensemble de concepts, l'avertissement de Christian Orange : « *On ne peut rester, comme c'est parfois le cas, à la convocation d'un vague paradigme constructiviste qui mêle, sans discussion, des considérations psychologiques dont la compatibilité n'est pas toujours assurée* ». *Apprentissages scientifiques et problématisation*. Opus cité.

⁸³² Jean Piaget. *Biologie et connaissances*. Chapitre V. § 10. *Fonctions et structures*. Opus cité.

⁸³³ Un nombre entier n est l'ensemble des entiers qui lui sont inférieurs. On peut y définir la relation d'ordre « inférieur ou égale » qui décrit entre eux des relations fixes et, les opérations binaires $+$ (a, b) modulo n et $-$ (a+n, b) modulo n .

⁸³⁴ On peut les définir comme des forces de liaison.

⁸³⁵ Nous admettons qu'une telle description est forcément réductrice car elle ne rend pas compte du caractère fondamentalement systémique d'une telle structure.

⁸³⁶ Par exemple, un ensemble ordonné.

⁸³⁷ Un corps mathématique est une structure dynamique. Une structure cognitive est une structure dynamique.

⁸³⁸ Jean Piaget. *Biologie et connaissances*. Chapitre V. § 10. *Fonctions et structures*. Opus cité.

sus à états séparables⁸³⁹.

➤ **Le fait essentiel du point de vue du fonctionnement d'une structure est sa continuité absolue. Cette continuité qui caractérise l'organisation de la structure, en tant que fonctionnement, se poursuit à titre de condition nécessaire de toute transformation.**

➤ « *Le premier caractère de cette fonction d'organisation est donc d'être une fonction de conservation* ». « *Le fait essentiel est qu'il y a, de façon continue, activités et transformations et que la conservation est donc celle d'un invariant, à travers des covariations et des transformations* »⁸⁴⁰. « *Le second caractère de la fonction d'organisation est donc l'interaction des parties différenciées* »⁸⁴¹. « *Le fait fondamental est que le contenu d'une telle organisation se renouvelle sans cesse par reconstruction* »⁸⁴². « *Cela signifie que la conservation du tout est la conservation d'une forme et non pas de son contenu et que les processus en comportent une alimentation en énergies, de sources extérieures au système. Autrement dit, la fonction et l'organisation consistent à conserver la forme d'un système d'interaction au travers d'un flux continu de transformations, dont le contenu se renouvelle sans cesse par échanges avec le dehors* »⁸⁴³.

Tout acte de l'intelligence suppose, au préalable, la continuité et la conservation d'un certain fonctionnement. Dans tous les domaines, **les fonctions cognitives constituent des invariants nécessaires au fonctionnement des structures**⁸⁴⁴, mais sans en considérer un caractère inné, étant elles-mêmes en développement. Leurs activités présentent, d'une part, un aspect productif qui concerne l'activité des schèmes eux-mêmes et, d'autre part, un aspect constructif qui concerne le plongement des schèmes dans des structures de schèmes, mais qui peut aussi concerner leur propre développement, au moins au sens d'un renforcement.

Leurs activités sont finalisées par un problème⁸⁴⁵ **à résoudre et se matérialisent dans les actions d'un sujet.** Notons que de telle actions sont de natures diverses car, aussi bien externes, donc observables par un observateur externe, à la condition que cela entre dans son champ d'observation, qu'internes, donc non observables directement par un observateur

⁸³⁹ Par exemple, concernant le langage, on peut parler des fonctions discursives comme la fonction référentielle, la fonction apophantique, la fonction d'expansion discursive ou la fonction de réflexivité discursive. Relativement à la fonction d'expansion discursive, on peut parler des opérations de récit, de description, d'explication ou de raisonnement. Une opération de raisonnement se définit comme une suite, logiquement articulée, de propositions.

⁸⁴⁰ *Biologie et connaissances*. Chapitre V. § 10. *Fonctions et structures* Opus cité.

⁸⁴¹ Ibid.

⁸⁴² Ibid.

⁸⁴³ Ibid.

⁸⁴⁴ Opus cité. *Biologie et connaissances*. Chapitre V. § 11. *Fonctions et structures*. Opus cité.

⁸⁴⁵ Au sens large d'un but à atteindre. Jean-François Richard les dénomme activités mentales ; en aval des activités sensorielles et en amont des activités motrices.

externe. De même, pour les systèmes cognitifs qui les produisent, ces derniers étant susceptibles d'être des observateurs, de telles actions peuvent être ou n'être pas observées⁸⁴⁶.

➤ **Un milieu est une structure.** Il est dit ouvert lorsqu'il peut être différenciable d'une autre structure et, avec laquelle, il peut entrer en interaction et subir des transformations résultant des ces interactions.

➤ **Une structure cognitive** est un milieu ouvert. L'autre milieu ouvert avec lequel elle doit interagir peut être défini, très généralement, comme **une situation objective**⁸⁴⁷, aménagée dans ce but. Nous comprenons **une situation didactique** comme un milieu fermé⁸⁴⁸, à l'intérieur duquel deux autres milieux ouverts, un élève épistémique et cognitif et un autre milieu, matériel, symbolique et (ou) cognitif⁸⁴⁹, et aménagé antérieurement par un enseignant, interagissent.

Nous définissons l'apprentissage comme le développement de certaines structures cognitives d'un sujet épistémique. L'objet de notre travail concerne donc plus particulièrement un tel développement

Concernant ce sujet épistémique, nous l'assimilons à un ensemble de structures cognitives, ordonné non totalement, et « *dont la permanence est assurée par le truchement du mouvement d'échange des composants, réalisé en vertu de ses conditions de système* »⁸⁵⁰. Nous pourrions alors nommer un tel sujet, **système cognitif**. A tout moment de son développement, le système cognitif lui-même, peut être défini comme l'ensemble des structures maximales pour cet ordre.

Nous prenons donc le sujet épistémique à l'école primaire et au **stade des opérations concrètes**⁸⁵¹. « *Le qualificatif de concret rend compte du fait que les opérations dont on parle portent directement sur les objets concrets ou bien sur leurs représentations* »⁸⁵². Rappelons

⁸⁴⁶ Des nécessités, inhérentes à la situation, peuvent amener le sujet à faire usage de certaines connaissances, d'une part, non anticipées et, d'autre part, dont l'exercice peut demeurer inconscient. On peut mettre au rang de telles connaissances, des concepts en acte ou des théorèmes en acte. Mais, Lev Vygotski a caractérisé une grande part de l'activité de l'enfant (non encore adolescent) comme spontanée et non consciente.

⁸⁴⁷ Nous ne distinguons pas ici situation didactique (que nous prenons au sens large) de situation adidactique, qui peut en faire partie ou non. En didactique des mathématiques, milieu et situation peuvent se retrouver synonymes.

⁸⁴⁸ L'enveloppe de ce milieu peut être considérée comme la classe refermée sur elle-même, le temps de vie de la situation didactique.

⁸⁴⁹ Dans ce milieu, on peut retrouver éventuellement des élèves ou l'enseignant lui-même, autant de sujets cognitifs.

⁸⁵⁰ *Biologie et connaissances*. Page 181. Opus cité.

⁸⁵¹ Précisons que nous ne reconnaissons pas là un découpage, en terme de grandes catégories de la connaissance, mais en terme de connaissances, localisées dans un domaine des mathématiques assez restreint, comme celui du calcul numérique élémentaire ou des formes initiales de la géométrie plane. D'autre part, les caractéristiques, que nous prenons comme générales, sont soumises à des restrictions, dues aux décalages bien connus, selon les sujets d'apprentissage et les contextes de leur apprentissage.

⁸⁵² Bertrand Troadec. *Psychologie du développement cognitif*. Armand colin. 1998.

que ce stade se caractérise en particulier par des formes d'achèvements structuraux, ce qui précise leur caractère opératoire⁸⁵³, ou dit autrement, certaines de leurs caractéristiques logiques, comme la réversibilité⁸⁵⁴

Un autre trait caractéristique de ce stade est que le sujet dispose de la représentation symbolique. « *Le sujet, en intériorisant ses actions, grâce à la représentation, en vient à développer de nouveaux instruments de connaissances logiques et mathématiques* »⁸⁵⁵. « *Le langage et la fonction sémiotique permettent, non seulement l'évocation, mais aussi la communication* »⁸⁵⁶. « *La décentration ne porte plus seulement sur un univers physique, mais aussi et de façon indissociable sur un univers interindividuel ou social* »⁸⁵⁷. Un tel sujet devient capable d'opérer sur ses représentations⁸⁵⁸ et de faire communication, dans une certaine limite, de quelques-unes d'entre-elles.

2.3 Compétences

Il s'agit maintenant de construire une définition du concept de compétence qui ne soit pas inféodée qu'à sa seule formulation mathématique. C'est dire, qu'une définition d'un treillis de compétences mathématiques, en construction à l'école primaire, ne se réduira pas à l'écriture d'un graphe dont les éléments sont les seuls objets mathématiques.

2.3.1 Compétences et didactique à l'école primaire

➤ Nous aurons tendance à appeler **connaissances**, les instruments cognitifs d'entrée et de sortie, à chaque pas d'un processus d'interaction⁸⁵⁹. Ils sont spécifiques de la situation didactique⁸⁶⁰. Rappelons que nous entendons, pour un système cognitif, que de telles connaissances revêtent toujours un caractère objectif. En ce sens, qu'à l'instant où elles deviennent instruments dans l'interaction, un tel système ne ressent pas, pour autant qu'il soit conscient

⁸⁵³ Concernant ce terme, on pourra se reporter à 2.3.5.2.

⁸⁵⁴ Idem.

⁸⁵⁵ Marie-Françoise Legendre Bergeron. *Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget*. Page 9. Gaëtan Morin. 1980. Reconnaisant cela pour des enfants de 2 ans à 12 ans, le postulat de notre recherche est que le développement scolaire contribue à précéder, sur certains aspects, le développement piagétien, mais dans une période de temps, définie précisément par l'âge d'un élève de l'école primaire ; comme les opérations de catégorisation ou de tri ou de sériations ou de dénombrements...

⁸⁵⁶ Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La psychologie de l'enfant*. Chapitre III. *La fonction Sémiotique ou symbolique*. Puf. 1973.

⁸⁵⁷ Ibid.

⁸⁵⁸ La psychologie cognitive parle de représentations calculables.

⁸⁵⁹ Dès lors que l'on peut découper l'activité du sujet en étapes distinguables.

⁸⁶⁰ André Rouchier. *Connaissances et savoirs dans le système didactique*. RDM. Volume 16(2). Pages 177-196. 1996. La Pensée Sauvage.

de leur activité, de doute particulier quant à leur validité⁸⁶¹. Si donc, l'on considère qu'une connaissance est affirmation de quelque chose, elle peut se décomposer selon plusieurs dimensions, comme peut l'être un jugement en général. Comme le rappelle Michel Fabre, on peut alors distinguer la référence ou sa valeur de vérité⁸⁶², la signification ou sa possibilité logique, et la manifestation ou sa représentation, et aussi, une dimension que l'on peut considérer comme résultante des trois autres, mais considérée dans l'espace des structures mentales du système cognitif, à savoir le sens. C'est dire que toutes ces dimensions dépendent du niveau de développement du système lui-même, et sont donc susceptibles d'être qualifiées par un observateur, aussi bien d'objectives, quant à leurs organisations, que de subjectives quant à leurs fonctionnements, spécifiques pour un système cognitif donné.

Toutefois, **la signification⁸⁶³, si nous l'entendons dans son sens strict et donc devrait, à terme, se manifester sous forme déclarative⁸⁶⁴, par exemple une définition⁸⁶⁵, n'est pas un concept pertinent au niveau de l'école primaire, dans la mesure où ce sont les aspects procéduraux qui y sont donnés en objectifs, et précisément sous le terme de compétences**. Certes, comme le dit Michel Fabre, la signification peut être paraphrasée. Ainsi, à tous les niveaux de son développement scolaire, une connaissance est l'objet d'une définition au moins implicite⁸⁶⁶.

Mais en mathématique, une définition, en particulier, suppose toujours une méta-

⁸⁶¹ Un élève ou un étudiant qui, comme cela arrive souvent dit « je ne suis pas sûr » ou « je vais peut-être dire une bêtise » et qui donne, tout de même, une réponse, n'exprime pas, à notre avis, un doute sur la validité de la connaissance qu'il met en jeu, mais sur les façons dont cette réponse risque d'être reçue, dans la situation présente, par ses interlocuteurs. Très souvent, d'ailleurs, il laisse à l'autorité de l'enseignant le contrôle de cette validité.

⁸⁶² Gottlob Frege. *Ecrits logiques et philosophique. Sens et dénotation*. Seuil. 1971. Nous retenons provisoirement cette acception, dès lors qu'elle ne sera pas en contradiction avec la fonction de référence qui relève de l'interprétation ou de l'expression d'un modèle, pour cette connaissance. L'existence d'un tel modèle caractérisant la vérité pragmatique de cette affirmation.

⁸⁶³ Ce terme ne renvoie donc pas à une acception du cadre de la psychologie cognitive « *qui en fait une représentation transitoire construite par un sujet « compreneur », à l'issue de son activité de compréhension d'une phrase ou d'un texte* » (Dictionnaire fondamental de la psychologie), mais à une acception dite parfois fregéenne de sa possibilité logique.

⁸⁶⁴ La distinction entre connaissances déclaratives et connaissances procédurales ne nous paraît d'ailleurs pas claire, dès lors que, faire une déclaration sur un objet, comme une définition, relève bien aussi d'une certaine compétence, donc du procédural. Nous aurions tendance à n'utiliser le terme de déclaratif que pour qualifier un mode d'exercice d'une certaine compétence.

⁸⁶⁵ Sur ce point, « *toutes les tentatives pour donner à ce terme une délimitation précise n'ont jamais débouché sur un consensus* ». George Mounin. Dictionnaire de linguistique. Opus cité.

⁸⁶⁶ Nous pourrions considérer qu'un enfant de l'école maternelle qui affirme d'un objet que c'est un carré, possède, relativement à la 'connaissance-carré', une définition implicite, qui lui permette de replacer sa désignation, dans un réseau d'autres désignations des figures géométriques. A ce stade, certes, la signification, même si elle ne s'y réduit pas, semble se confondre avec la référence, puisqu'elle est affirmation de ce qui est, et n'est pas autre.

activité⁸⁶⁷ implicite ou explicite (plus systématiquement à un niveau supérieur) qui conduit à reconnaître l'existence et l'unicité du concept signifié dans la déclaration. D'une façon générale, la signification reste donc indissociable d'une forme déclarative de la connaissance, ce qui suppose de plus une méta-connaissance du bien formé de cette sémiotisation, dans le cadre mathématique correspondant, par exemple des règles de syntaxe. Pour l'enfant de l'école primaire, « le mot est ici non pas le signe d'un certain sens⁸⁶⁸, auquel il est lié dans l'acte de pensée, mais le signe d'une chose donnée par les sens, liée associativement à une autre perçue par les sens »⁸⁶⁹. « **Le concept, surtout chez l'enfant, est lié à la perception et à l'élaboration du matériel sensible qui lui donne naissance ; le matériel sensible et le mot sont les éléments indispensables du processus de formation des concepts** ». « Le mot, détaché de ce matériel, traduit tout le processus de définition du concept, sur un plan purement verbal qui n'est pas caractéristique de l'enfant »⁸⁷⁰.

Mais, « la pensée conceptuelle, détachée de tous les éléments intuitifs, pose aux enfants des exigences qui (à l'exception de cas peu nombreux) semblent dépasser leurs capacités intellectuelles, avant la douzième année »⁸⁷¹.

Ainsi, l'on peut comprendre que le développement d'une connaissance mathématique, à l'école primaire, reste polarisée par sa dimension de référence et que, nous associerons au développement d'une compétence.

➤ « Progressivement, le concept de compétence, tout en prenant des chemins différents, a acquis une autonomie, certaine dans le champ de l'éducation. Il se développe aujourd'hui indépendamment des autres disciplines »⁸⁷².

Les textes officiels font l'usage d'une terminologie, à la fois ambiguë et qui pourrait apparaître pernicieuse⁸⁷³. « Les programmes nationaux de l'école primaire définissent, pour chaque domaine d'enseignement, les connaissances et compétences à atteindre dans le cadre des cycles »⁸⁷⁴. Mais le résumé des acquisitions, en fin d'école maternelle et en fin de cycles,

⁸⁶⁷ Ce qui fait l'objet de lemmes préalables ou d'axiomes ou d'une branche des mathématiques, comme la méta-mathématique. Remarquons qu'au niveau du collège et du lycée, de nombreuses telles définitions peuvent ne pas faire l'objet d'une recherche de justifications, qui concernent les fondements d'un nouveau cadre mathématique.

⁸⁶⁸ Nous reprenons ce terme de l'auteur.

⁸⁶⁹ Lev Vygotski. Opus cité. Chapitre 3. *Etude expérimentale du développement des concepts*.

⁸⁷⁰ Ibid. Page 147

⁸⁷¹ Ibid. Page 146.

⁸⁷² Philippe Jonnaert. *Compétence et socio constructivisme. Un cadre théorique*. Chapitre 1. *Compétence, performance et qualification*. De Boeck université.

⁸⁷³ L'interprétation des programmes pourrait mener à des pédagogies organisées autour de l'apprentissage d'algorithmes ou de conduites stéréotypées. En termes plus généraux, cette interprétation pourrait se substituer à une autre définition de la compétence ; ce qui pourrait connoter des fondements béhavioristes.

⁸⁷⁴ Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2006.

est strictement décliné en compétences⁸⁷⁵. Notons, en particulier, que des expressions comme « connaître les nombres entiers » ou « connaître les techniques opératoires » signifieraient, pour un élève, d'avoir entendu parler de l'existence de ces objets, de les avoir utilisés, dans un certain contexte, après les avoir éventuellement construits. Mais l'impératif « connais les nombres entiers » ne renvoie à aucune action particulière. On ne peut alors entendre là l'expression d'un objectif, qui soit une connaissance, dans une de ses composantes opérationnelles explicites. Par contre, on pourrait entendre que les expressions « utiliser les techniques opératoires » ou « nommer les nombres entiers » renvoient à des exécutions de procédures observables, dans des situations spécifiques. Mais les situations, au sein desquelles on devrait faire de telles observations, ne sont pas toujours explicitées dans les programmes⁸⁷⁶. Ces derniers listent des compétences virtuelles, dès lors qu'elles le sont indépendamment des situations dans lesquelles elles pourraient s'exercer. Un programme, basé sur des compétences effectives, pourrait (devrait) définir des situations et des classes de situations, plutôt que des référentiels de compétences virtuelles⁸⁷⁷.

D'entrée de jeu, nous pouvons établir que, dans un cadre socioconstructiviste, les compétences ne peuvent se définir qu'en fonction de situations⁸⁷⁸ ; et nous précisons, de situations didactiques. Philippe Jonnaert définit une architecture en cascade, relative à l'exercice des compétences :

- niveau de la situation : le sujet est confronté à une situation qu'il doit traiter de façon efficace ;
- niveau de la compétence : le sujet va mettre en œuvre une série de ressources qu'il va ajuster, tout au long de son traitement de la situation ;
- niveau des capacités : parmi ces ressources, le sujet va mobiliser une ou plusieurs capacités et les articuler entre elles et aux autres ressources, pour traiter la situation à l'aide d'un réseau opératoire de ressources ;
- niveaux des habilités : les capacités retenues activent à leur tour une série d'éléments, dont les habilités qui mettent en œuvre des contenus disciplinaires ;

⁸⁷⁵ B O. Pages 16, 20 et 27. Opus cité

⁸⁷⁶ Notons toutefois que, dans une déclinaison plus détaillée des programmes, on peut retrouver, mais rarement, des explicitations qui précisent en terme de situations, les champs d'applications de certains objets à construire. Par exemple, le partage et le codage d'une mesure, pour les fractions ou le partage et le groupement, pour la division ou le pourcentage et la conversion, pour la proportionnalité. On peut entendre qu'il s'agisse surtout de délimiter le champ conceptuel de la connaissance à un niveau donné.

⁸⁷⁷ Philippe Jonnaert. Opus cité. Chapitre 1. *Compétence, performance et qualification*.

⁸⁷⁸ Philippe Jonnaert. Opus cité. Chapitre 4. *Un cadre de référence socioconstructiviste pour les compétences*.

- niveau des contenus disciplinaires : des contenus disciplinaires vont alimenter les habilités et les capacités et, faciliter ou inhiber la compétence mise en œuvre⁸⁷⁹.

Dans un souci de signification, on peut alors comprendre et résumer :

- situation à traiter de façon efficace par une certaine compétence ;
- compétence qui s'exprime par la mobilisation d'un ensemble de ressources, ensemble optimisé durant le traitement ;
- parmi ces ressources, certaines, dites capacités ou ensemble de ressources spécifiques, vont s'articuler en réseau opérationnel⁸⁸⁰ ;
- ces capacités se définissent comme l'activation d'habilités dont l'exercice est celui de certains contenus disciplinaires ;
- contenus disciplinaires, alimentant habilités et capacités, jouant dans l'exercice ou l'inhibition de la compétence.

Pour en revenir à une description plus fonctionnaliste, il semble que l'on puisse définir :

- une fonction : le traitement d'une situation ;
- une opération⁸⁸¹ : une compétence dont certains arguments sont des ressources ;
- une opération de niveau supérieur : une régulation de sélection ; car l'exercice de la compétence peut s'accompagner d'ajustements ;
- une opération de niveau supérieur : une régulation d'organisation, aboutissant à donner comme produit, un ensemble de ressources spécifiques dites capacités, et organisées opérationnellement ;
- des structures : ces capacités, dont certains constituants sont des habilités ;
- des organisations schématiques : ces habilités, spécifiques d'une activité efficace ;
- des objets disponibles : contenus disciplinaires et outils dans l'exercice de ces habilités, mais également outils d'optimisation, dans l'exercice de la compétence.

Conclusions

Nous observons ainsi la grande complexité du concept de compétence, pour Philippe Jonnaert. Il nous donne à voir, pour appréhender le concept, une multiplicité de termes dont

⁸⁷⁹ Opus cité. Chapitre 3. *L'architecture d'une compétence*

⁸⁸⁰ Nous reformulons ainsi le terme opératoire qui a, dans l'épistémologie génétique, une dénotation bien circonscrite.

⁸⁸¹ Dans une structure, une opération définit toujours un ensemble invariant de processus spécifiques qui conduisent à la production d'un certain état, c. Il ne faut donc pas confondre une opération O, avec l'un de ces arguments qui est un produit c : par exemple, O (a, b, c) est en fait une proposition vraie ou fausse, a et b étant les arguments libres et, c l'argument lié.

on ne sait pas, hormis les contenus disciplinaires, s'ils possèdent par ailleurs une définition propre et, dans un cadre donné. Ainsi, nous restons dubitatif, quant à la complétude et à la consistance d'une telle architecture.

Nous pourrions sans doute reconnaître, dans les capacités, des structures de schèmes opératoires, dans les habilités, des schèmes coordonnés au sein de ces structures et, dans les contenus disciplinaires, des invariants opératoires associés à ces schèmes. De plus, les deux régulations peuvent être entendues, l'une, comme participant à la construction d'une représentation de la situation et l'autre, comme participant à la construction d'un schéma complet d'actions. Nous avons, par contre, des difficultés à associer, dans une même architecture, les notions d'efficacité et d'inhibition : si la compétence est reconnue comme un outil de traitement efficace, comment expliquer qu'elle puisse être finalement inhibée ? Mais, dans une optique développementale, nous pourrions aussi penser qu'une telle compétence soit objectivement considérée, par le système cognitif, comme adaptée à la situation et que, finalement, elle soit reconnue comme ne l'étant pas ; d'où une activation suivie d'une inhibition.

Posons-nous pourtant les questions suivantes :

- Les concepts de situations et de compétences sont là liés de façon générique. Nous en avons interprété qu'une compétence est ce qui peut traiter efficacement une situation. Mais en quoi donc une certaine compétence est effectivement un traitement efficace d'une situation ? En particulier, qu'est-ce qui, dans la situation, est initialement stimulateur de son activation ? Il semble, dans la description qu'en donne Philippe Jonnaert, que ce qui peut en orienter la pertinence est un ensemble de régulations mais, en aval de cette activation. Nous pourrions interpréter cela comme une contradiction.

- Une situation est toujours initialement un milieu externe à la structure cognitive qui va être concernée par son traitement. Qu'est ce qui alors met en interaction milieu et structure cognitive ? En d'autres termes, qu'est-ce qui rend conscient le système cognitif qu'il doit là agir d'une certaine façon ?

- La compétence mobilise-t-elle, à cette fin d'efficacité, un ensemble d'outils cognitifs disponibles, comme des structures équilibrées ou, de telles structures se reconstituent-elles opportunément, dans chaque situation ? Comment expliquer, dans cette dernière hypothèse, qu'une compétence puisse être inhibée, alors qu'elle mobilise des ressources soumises à certains contrôles ? Quelle signification cognitive donner à ce dernier terme ? A quoi alors le système cognitif reconnaît-il une erreur d'initialisation ?

- Une compétence semble inclure plusieurs opérations : sélection ; ajustement ; organisation de ressources ou de capacités spécifiques ; inhibition. L'efficacité des

capacités suppose des habilités ou aptitudes à utiliser des contenus disciplinaires ad hoc. Quels fonctionnements invoquer, pour l'activation de telles opérations et utilisations et, à quel niveau ?

- Finalement, quelle définition de la compétence adopter, si ce n'est ni une organisation d'habilités, ni un ensemble de capacités, ni un ensemble de ressources, termes eux-mêmes en attente de définitions et, d'ailleurs, souvent pris comme synonymes ?

Nous ne pouvons alors partager, pour obtenir une définition du concept de compétence, une telle diversité de notions dont nous ne percevons pas leur insertion dans un réseau de significations⁸⁸².

2.3.2 Compétence et performance

➤ Philippe Jonnaert considère que le concept de situation rend caduque, dans cette décomposition d'une compétence, la pertinence du concept dual de performance, en usage dans la psychologie du développement. Dans ce dernier cadre, une compétence est toujours présente dans le psychisme. Elle est inférée à partir des comportements. Réciproquement, elle exprime un certain potentiel qui peut servir à modéliser, a priori, les comportements de sujets en situation de résolution de problèmes. Ce qui est observable est donc la performance, vue comme l'actualisation en comportements d'une compétence⁸⁸³. Mais, retient Philippe Jonnaert, si les décalages observés par le psychologue entre la compétence, définie a priori, et les performances observées, sont considérés comme constitutifs du développement⁸⁸⁴, un des objectifs de l'enseignant est de chercher à les atténuer, donc à produire des situations qui rétablissent une certaine normalité. La situation, étant au cœur de l'action des élèves, elle participe à la construction des compétences tout autant qu'elle les évalue. Elle suppose un contexte physique et social dont on peut pronostiquer les implications. La compétence, dans cette perspective, ne peut être prédite et différenciée de la performance⁸⁸⁵.

Pour notre part, nous ne voyons pas de contradiction⁸⁸⁶, entre le fait que ce qui est observable d'une compétence est une performance dont on peut prévoir des formes invariantes, et aussi, qu'une situation puisse mettre en défaut certaines structures de schèmes activées ; et donc modifier, de leur activité, un déroulement considéré comme normal. Précisément, dans

⁸⁸² Par exemple Michel Fayol et al définissent certains habilités comme des "théorèmes en actes" (Vergnaud - 1985), comme des actions qui sont d'abord déployées à l'extérieur ou intériorisées et ultérieurement formalisées sous forme de concepts. « *Acquisition et mise en œuvre de la numération pour des enfants de 2 à 9 ans* »

⁸⁸³ Bertrand Troadec. *Psychologie du développement cognitif*. Armand Colin.

⁸⁸⁴ Décalages intra-individuels (pour un même sujet, sensible au contexte même relativement à une tâche du même type), et interindividuels (entre des sujets considérés comme de même niveau et réalisant la même tâche).

⁸⁸⁵ Chapitre 1. *Compétence, performance, qualification*. Opus cité.

⁸⁸⁶ Ce qui semble en accord avec les positions de Gérard Vergnaud.

la cadre d'une théorie du développement scolaire, un des objectifs peut être aussi bien une aide à la routinisation de cette compétence, donc à la reproduction d'une certaine performance, qu'une tentative de perturbation des schèmes activés. Dans ce cas, on ne peut considérer que l'enseignant se fixe là un objectif de normalité ou alors il faudrait entendre ce terme dans plusieurs acceptions.

➤ Et il est vrai que la didactique professionnelle pourrait nous conduire à entendre la performance comme un sous-ensemble de l'activité. Ainsi, si nous ne connotons pas la notion d'efficacité à ce qu'un observateur a pu considérer comme évaluable objectivement, a priori ou a posteriori, mais nous la connotons plutôt à ce qu'un système cognitif peut lui accorder subjectivement, pour s'engager dans le traitement d'une situation d'un type donné, on voit alors la possibilité de rendre compte du concept de performance, comme un espace probable d'observables et non comme une simple actualisation en comportements d'une compétence. Dans le cadre de ce travail, nous n'évaluerions pas la compétence, en tant que sujet-enseignant, extérieur au sujet-élève, positivement ou négativement. Par principe, une compétence est en développement, elle permet au sujet d'assimiler une situation ou non, et dans ce dernier cas, on ne peut parler que de son potentiel à s'exercer et à évoluer. Ainsi, pris dans ce sens large, nous tenons à considérer **la performance comme une composante explicite de la compétence, relativement à son exercice le plus fortement probable, c'est dire sans autre perturbation extérieure**. Mais nous venons de voir que dans une approche développementale, si nous considérons le cas d'une situation perturbante, on pourrait parler de performances possibles. C'est cette dernière approche que nous privilégierons dans nos analyses. Pour lors, nous ne voyons pas autrement une description simplifiée⁸⁸⁷ de la compétence que, comme l'ensemble de ses composantes non indépendantes, l'une d'entre elles étant une structure de schèmes dont nous avons entrevu qu'elle peut rendre compte, dans une large mesure de la performance observée. Toutefois, il est vrai que l'activité en situation est un complexe de telles performances. « *La compétence ne peut se définir par la liste exhaustive de toutes les compétences élémentaires qui sont nécessaires pour chaque classe de situations* »⁸⁸⁸. Il est donc normal, lorsque l'on s'intéresse à une telle complexité, que l'on considère, relativement à un type de tâches, le couple plus pertinent, compétence-activité⁸⁸⁹. Notre thèse étant orientée par les microgenèses fortement médiatisées de compétences, il nous est apparu possible

⁸⁸⁷ Nous ne pouvons substituer une description à une réelle définition, sans occulter l'aspect développemental.

⁸⁸⁸ Gérard Vergnaud. « *La conceptualisation, clé de voute des rapports entre pratique et théorie* ». Octobre 2002

⁸⁸⁹ Mis en valeur par la didactique professionnelle. « *L'idée sous-jacente est que l'activité débordé toujours la tâche : le travail effectif ne se réduit jamais à l'application pure et simple d'une prescription, il y a en lui une dimension créative* ». Pierre Pastré. *Analyse du travail et formation. Recherche en éducation*. N°4. Pages 23-28. Nous prenons cela aussi bien pour ce qui concerne l'activité de l'élève.

d'entendre celles-ci, dans un sens élémentaire, et donc de pouvoir conserver, dans notre approche, le couple compétence-performance. **Puisqu'il s'agit surtout du développement d'une compétence spécifique, la résolution d'une tâche, proposée à notre élève, conduit bien aussi à entendre là, une activité créatrice mais, en sous-entendant alors la performance, comme un ensemble de possibles.**

2.3.3 Compétence dans un cadre linguistique

« Les fonctions discursives ne peuvent pas être séparées des fonctions cognitives. C'est au plan discursif, à celui dépendant d'une intentionnalité énonciatrice..., que la langue apparaît comme un registre de représentation »⁸⁹⁰. Notre approche du concept de compétence est inséparable du fait que son exercice, ce que l'on peut y associer dans l'activité d'un sujet, agissant pour l'exécution d'un tâche, est consécutif d'une certaine intentionnalité. **Nous avons, comme préalable, corrélé le développement d'une compétence au traitement d'un registre de représentation sémiotique** et, au niveau que nous considérons, essentiellement de nature linguistique (chapitre 1 sous 4.2).

Nous devons donc préciser les relations entre le concept de compétence et certains concepts de la linguistique.

2.3.3.1 Outils linguistiques

Ainsi, avant de pouvoir stabiliser le concept de compétence, dans l'intérêt de notre propos, nous devons préciser quelques termes que l'on retrouve assez bien en linguistique.

Concernant l'organisation fonctionnelle d'une structure cognitive⁸⁹¹, nous posons deux axiomes :

Axiome de compréhension : il existe une fonction d de dénotation.

La dénotation est la fonction d, qui associe à une forme langagière⁸⁹² F, une classe parmi les objets du monde⁸⁹³. Si cette classe ne possède qu'un seul objet on peut dire que la forme langagière est propre⁸⁹⁴.

L'ensemble des objets du monde, qui sont ainsi associés à cette même forme linguistique, en est le dénoté d(F).

⁸⁹⁰ Raymond Duval. *Sémiosis et pensée humaine. Introduction*. Peter Lang. 1995

⁸⁹¹ Structure que nous devons considérer, plongé dans un système cognitif.

⁸⁹² Cette forme langagière est ici à considérer comme relevant de plusieurs registres sémiotiques ; en général, celui d'une certain cadre mathématique et celui de la langue courante, comme c'en est l'usage dans les classes de la maternelle à la terminale. Cette approche linguistique de la dénotation nous paraît préférable, car plus générale et plus opérationnelle dans une perspective développementale, qu'une approche logique de la fonction, restreinte aux concepts ou aux propositions, par exemple celle de Gottlob Frege.

⁸⁹³ Nous reprenons ici, en partie, la définition que donne Jacques Roggero dans le dictionnaire de linguistique, publié sous la direction de Georges Mounin. « La dénotation est donc cet aspect du sens qui implique que l'on sorte de la langue en elle-même pour la relier au monde ».

⁸⁹⁴ Comme un nom propre, ou l'expression « mon père », pour un enfant.

Parler de relation fonctionnelle exprime l'unicité du dénoté à un instant donné de l'existence d'un système cognitif. Mais, l'objectif d'un apprentissage peut justement être, qu'à un instant ultérieur, ce dénoté possède une extension plus grande, voire même, n'englobe pas strictement le dénoté antérieur, le système ayant reconnu certaines contradictions conceptuelles⁸⁹⁵. En ce sens, le concept de dénotation doit être entendu dans une conception développementale.

Propriété :

- **Elle est catégorisante** puisqu'elle permet la construction potentielle d'une catégorie, parmi les objets du monde.

- **Elle est aussi pseudo-catégorisante.** A tout moment de son développement, la collection d'objets peut être une réunion dynamique et temporaire de maillons isolés, en une chaîne unique, obtenue par le transfert de significations d'un maillon de la chaîne à un autre. Ce transfert s'effectue sur la base de liaisons objectives, dues à l'expérience concrète et multiple, située sur le plan de la pensée concrète et empirique, et non sur celui de la pensée abstraite et logique. La dénotation, ainsi opérante, présente la même apparence extérieure et verbale pour des systèmes cognitifs distincts et, en particulier, pour un adulte et un élève, mais diffère de « l'intérieur » par sa forme en complexes⁸⁹⁶. Par exemple aussi, l'enfant peut constituer effectivement un ensemble d'objets, à partir d'un représentant, sorte de prototype, mais la causalité dynamique se fonde alors sur une pensée par complexes et « non logique ». Il constitue ainsi ce que l'on peut appeler des pseudo-dénotations. Les pseudo-dénotations « *ne constituent pas l'apanage de l'enfant. Dans la vie de tous les jours, notre pensée opère souvent par pseudo-dénotation* »⁸⁹⁷.

- **Elle est en développement.** A un moment donné de son développement, c'est l'expérience d'un sujet et son imagination créatrice qui délimitent l'extension de la classe.

- **Elle est hiérarchisante** puisque des formes linguistiques emboîtées renvoient à des classes incluses. Plus généralement, une forme langagière implique une autre

⁸⁹⁵ Pour ne pas dire dénotationnelles.

⁸⁹⁶ La notion de prototype ne renvoie pas là à celle de typicalité que rappelle Jean-François Richard, à propos des catégories naturelles, dans lesquelles un objet joue un rôle privilégié. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 2. *Les formes de représentations*. Armand Colin. 2005. Toutefois, on ne peut ignorer un tel effet de typicalité, pour ce qui concerne la fonction de référence, dont il va être question plus bas.

⁸⁹⁷ Ibid. Nous avons remplacé le mot concept par celui de dénotation ; formulation plus appropriée aux situations d'apprentissage et, plus générale aussi, dès lors que l'on considère de ce concept sa classe subsumée, c'est dire aussi un ensemble d'objets en contexte.

forme langagière lorsqu'il y a inclusion⁸⁹⁸ du premier dénoté dans le second. Par exemple, l'expression « carrés jaunes sur la table » dénote une classe incluse dans celle que dénote la classe « carrés jaunes ». Par exemple aussi, l'expression « poser une tasse sur une table » dénote une classe incluse dans le dénoté de la forme langagière « poser une tasse »⁸⁹⁹ etc.

En particulier, deux formes linguistiques sont synonymes lorsque leur dénoté sont égaux⁹⁰⁰. Par exemple, « calculer $a+b$ avec a et b quelconques dans \mathbf{N} » et « calculer la somme de deux entiers naturels quelconques ». Encore que cela dépende de l'expérience linguistique du sujet. Aussi, nous ne confondons pas cette définition de la synonymie, avec la notion de dénotation identique de Gottlob Frege, car les expressions « calculer $6+4$ » et « calculer $7+3$ » auraient, pour le logicien, une dénotation identique, exprimée par la relation d'égalité $6+4 = 7+3$ alors que, pour un élève de l'école primaire, $6+4$ ou $7+3$ dénotent un ensemble de situations dans lesquelles on retrouve un calcul d'une somme et des écritures du type « $a + b =$ » où a, b sont donnés .

- La fonction de dénotation, définie sur l'ensemble des formes langagières possibles, n'est pas, par définition, inversible. Toutefois, elle tend à l'être, dans le sens suivant : la synonymie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes langagières. A une classe de formes langagières synonymes, on peut ainsi faire correspondre un même ensemble d'objets du monde et alors réciproquement. A un tel niveau de développement, cette classe de formes langagières sous-entend un concept. **La dénotation peut être considérée comme opératoire puisque, modulo la relation de synonymie, elle est réversible.**

Axiome de choix : il existe une fonction r de référence

La référence est la fonction r , qui associe à une forme langagière F , un objet du monde⁹⁰¹.

Cet objet est un modèle de la forme langagière. C'est ce que, plus haut, nous avons appelé interprétation de la forme langagière.

Nous précisons ci-dessous, **quelques propriétés de la fonction r** :

⁸⁹⁸ Terme qu'il ne faudra pas réduire, comme on le verra, à sa définition ensembliste.

⁸⁹⁹ Il faut sans doute dire cela d'un point de vue strictement logique et, concernant un sujet cognitif, au moins logiquement en acte.

⁹⁰⁰ Gottlob Frege. Opus cité. *Sens et dénotation*. Page 104.

⁹⁰¹ Il est vrai, que dans une approche moins linguistique, nous aurions préféré le terme de représentation. Nous aurions repris cette fois une définition de Louis Vax. (*Lexique de logique*. Puf. 1982). Car une expression langagière ou un ensemble d'expressions langagières sont susceptibles d'une évaluation véritablement logique, c'est dire, une recherche de représentation. Toutefois, nous conservons ce sens logique au représentant, donc à un produit de la fonction de référence.

- La référence et la dénotation sont théoriquement liées par la relation $r(F) \in d(F)$, où F est une forme langagière ; ce qui suppose que le système cognitif ne soit pas contradictoire. Nous désignerons par représentant de F , l'objet $r(F)$. Nous pouvons entendre, avec Gottlob Frege, que $r(F)$ donne, pour le système cognitif, un sens à la forme langagière⁹⁰². Ce sens est alors proche d'une caractéristique propositionnelle, à savoir que **r est une fonction de sémantisation qui rend susceptible la forme langagière d'une certaine vérité**. Notons que ce sens dépend donc de la forme langagière, qui peut être donnée à une synonymie près, et d'une régulation de choix qui oriente, en situation, le processus fonctionnel de référence, sur tel ou tel objet du dénoté $d(F)$. Il a, pour Frege, une valeur objective⁹⁰³, c'est-à-dire socialement partagée par une certaine communauté linguistique. De ce point de vue, le sens a pour nous une valeur subjective puisque les mêmes formes langagières, pour un système cognitif que l'on doit considérer en apprentissage, renvoient rarement à des modèles normalisés. Mais, en accord avec le logicien, et dans le cadre d'une construction scolaire des fonctions r et d , on peut admettre que ce sens est partagé par une certaine communauté, constituée par exemple d'un «groupe classe ». Et, d'un tout autre point de vue, nous gardons, pour notre sujet épistémique, cette objectivité, dès lors que le représentant s'impose à lui, ce qui concerne l'aspect organisationnel de son activité cognitive.

- **La référence est opératoire**. D'une part, la fonction r est inversible et la fonction inverse associe à un objet du monde une forme langagière. D'autre part, cette réversibilité opératoire résulte d'une intériorisation de la relation de référence⁹⁰⁴. On notera que la construction progressive de la réversibilité opératoire de la dénotation suppose, en acte, celle de la fonction de référence. Nous précisons encore que si la fonction de référence est un invariant cognitif, l'opération elle-même n'est pas une constante, puisque, dans le cours de son développement, un système cognitif peut associer, en situation, et à une même forme langagière et, pour diverses raisons (contextes différemment perçus, pertinences autres, caprices, interlocuteurs spécifiques...), un autre objet du monde. Réciproquement, à un même objet du monde, le sujet peut faire correspondre (il a le choix entre) plusieurs formulations langagières F possibles. Mais par définition, il n'en choisit qu'une seule et ce choix est, en contexte, cons-

⁹⁰² *Sens et dénotation*. Page 105. Opus cité.

⁹⁰³ *Sens et dénotation*. Page 106. Opus cité.

⁹⁰⁴ Comme nous le préciserons dans le paragraphe concernant plus particulièrement les compétences et, comme nous en donnerons un exemple dans le chapitre suivant.

tant. Toutefois quel que soit le contexte, **l'opération est contrainte par le concept organisateur** : $r(F) \in d(F)$ ⁹⁰⁵.

- **Elle peut être prototypée**, lorsque les éléments de la classe que le sujet peut retrouver dans sa mémoire à long terme, s'organisent autour de l'un de ces objets, qui est alors privilégié en tant que représentant⁹⁰⁶.

Frege considère que cet objet est la représentation subjective⁹⁰⁷. Nous reprenons cet aspect de la représentation, dès lors qu'une activité plus ou moins consciente du sujet apporte à cet objet des colorations qui relèvent de son histoire, de ses sentiments, de ses inférences, de ses capacités à verbaliser et qui, surtout, sont dépendantes du contexte, comme certaines formes de questionnements. Le système peut aussi, dans le cours de son activité, changer de représentant⁹⁰⁸. Mais nous maintenons aussi, à propos de cet objet, auquel le sujet associe la forme langagière et qui peut se transformer dans les différentes représentations, une objectivité que lui attribue Jean Piaget lorsque, quoi qu'il en soit, de telles représentations résultent de fonctionnements constants de structures cognitives⁹⁰⁹ dont dispose, a priori, le sujet. De plus, même si, dans le cours d'une activité d'apprentissage, il y a transformation de celles-ci, ça l'est en vertu d'opérations qui échappent à la subjectivité, parce que résultant de processus invariants.

2.3.3.2 Compétence et dénotation

➤ Le lieu d'exercice d'une compétence est celui d'une situation. **Une compétence suppose une forme langagière centrée sur un verbe d'action**. Cette forme langagière est une caractéristique de la compétence. **Le dénoté d'une telle forme langagière est un ensemble de situations** que l'on peut ainsi qualifier d'action⁹¹⁰. Pour ces situations, nous retenons, d'une part, que celles-ci peuvent être des situations initialement objectives (matérielles et symboliques)⁹¹¹ et, d'autre part, correspondent, historiquement, à des situations transformées, au sein desquelles le système, en s'y engageant, et relativement à un

⁹⁰⁵ C'est ainsi que dans le langage courant, on rencontre fréquemment l'expression « par exemple... », suivie d'un certain objet choisi ou d'une certaine expression langagière choisie.

⁹⁰⁶ Ceci dit sans parler de pseudo-dénotation. Il s'agit de considérer l'histoire de la dénotation propre au sujet et qui influence durablement sa représentation spontanée. Par exemple, la forme langagière « est égale à » qui est dénotée par une classe d'objets du type $a=b$, où le signe $=$ ne renvoie pas lui-même à une relation symétrique. Par exemple encore, la forme langagière « dessiner un carré » renvoie à une classe de situations, dans lesquelles on retrouve la forme carré, dans une position prototypique.

⁹⁰⁷ Opus cité. Page 106.

⁹⁰⁸ Ce qui n'est pas contradictoire avec la propriété de la fonction de référence d'être opératoire puisqu'il ne faut pas confondre la fonction et l'opération.

⁹⁰⁹ *La genèse des structures logiques élémentaires. Introduction*. Page 12. Delachaux et Niestlé. 1991.

⁹¹⁰ Nous verrons, dans le paragraphe 3, que la didactique des mathématiques les qualifie de situation de référence.

⁹¹¹ Une telle situation peut-être complètement « mentalisée », comme par exemple la conduite d'un raisonnement, les prémisses de ce raisonnement étant constituées d'hypothèses mémorisées.

but à atteindre, a mémorisé certaines coordinations entre différents observables sur l'action et sur les objets. **Cette mémorisation est ce que l'on peut appeler un schème d'action.** Nous dirons que deux situations sont équivalentes lorsqu'elles appartiennent au même dénoté. Notons que cette équivalence est un fait cognitif, dès lors que pour ces deux situations, ce sera un même schème qui sera activé. Ce qui ne veut pas dire qu'un tel schème n'ait pas à se coordonner, dans l'activité, à d'autres schèmes, pour tenir compte de la spécificité de la situation objective.

➤ En fait, une action connote deux composantes⁹¹² : l'une déclarative, « elle décrit un changement de l'état du monde »⁹¹³ ; l'autre procédurale, « elle décrit un procès qui est à la fois un déroulement et un mode de réalisation du résultat »⁹¹⁴. Nous plaçons la première composante, comme constitutive des représentations de situations d'un type donné, et la seconde composante, comme constitutive des schémas d'actions, dont ceux considérés dans le procès. Selon son niveau de développement, relatif à la compétence de prise de conscience, mais aussi selon le contexte, un élève peut être capable ou non de produire une forme langagière concernant l'une ou l'autre de ces connaissances. Mais au niveau où nous nous plaçons (celui de l'école primaire), une telle possibilité se rencontre le plus souvent relativement à la composante procédurale et peut, d'ailleurs, se réduire à la production d'une description d'un algorithme de résolution.

➤ Remarquons que le verbe qui désigne l'action est ou n'est pas explicité dans la forme langagière F_c . Par exemple, les formes langagières « combien de » et « compte le nombre de » sont synonymes, pour un élève de grande section, « combien » sous-entendant « dire combien ». C'est ce en quoi, l'expression, dénoté d'une compétence (nous éloignant ainsi de l'usage linguistique), va nous paraître préférable. On peut parler, sans ambiguïté, du **dénoté de la compétence qui est donc l'ensemble des situations pour lesquelles cette compétence est nécessaire et efficace**⁹¹⁵.

On peut alors préciser que, lorsque le développement de la compétence C_f suppose le développement d'une compétence C_i , cela équivaut à ce que le dénoté de C_i soit inclus ou plongé dans le dénoté de C_f , ce qui équivaut encore à ce que la forme langagière caractéristique de C_i implique la forme langagière caractéristique de C_f . Nous avons noté une rela-

⁹¹² Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 2. *Les formes de représentations*. § : *Les représentations des actions*. Opus cité.

⁹¹³ Par exemple, un élève pourrait dire « si je vois $35 + 24$ ça veut dire que je dois trouver le résultat ».

⁹¹⁴ Par exemple, pour calculer $35 + 24$, on note la procédure suivante : $30 + 20 + 5 + 4$, $50 + 9$, 59 .

⁹¹⁵ Par exemple, l'énoncé : « compte les billes mises dans ce panier » et l'énoncé : « combien de billes sont mises dans ce panier ? » relèvent de deux situations différentes mais de la même compétence : « compter un nombre d'objets ». Bien sûr, d'autres compétences sont en jeu et, différemment selon les situations, même dans les cas simples que nous venons de donner.

tion de synonymie entre formes langagières, qui équivaut donc à des dénotés égaux, au sens ensembliste du terme.

La structure d'un dénoté résulte des différentes équilibres qui jalonnent le développement de la compétence. Jean Piaget définit trois sortes d'équilibration qui semblent bien correspondre aux différentes situations didactiques que l'on peut concevoir, comme balisant le développement d'une compétence à l'école primaire⁹¹⁶.

2.3.4 Compétence et cognition

2.3.4.1 Vers une définition simplifiée du concept de schème

Philippe Jonnaert substitue, le terme de capacité à celui de schèmes⁹¹⁷. Il note, pour cela, les similitudes entre les attributs⁹¹⁸ d'une capacité, au sens de Meirieu, et ceux de schème opératoire⁹¹⁹, au sens de Jean Piaget et de Gérard Vergnaud. La capacité admet, entre autres caractéristiques, d'être une structure cognitive stabilisée constitutive d'une ou plusieurs compétences⁹²⁰. En particulier, le terme de capacité ne connotera pas spontanément, dans l'esprit d'un locuteur, une structure cognitive dont les aspects fonctionnels seraient bien définis. Nous pensons que cette substitution ferait courir le risque de la polysémie et, de la « non consistance » de l'ensemble des concepts que nous tentons de nous donner pour l'heure. De plus, le terme de capacité est d'un usage assez fréquent⁹²¹, ce qui n'est pas le cas du terme de schème, et ce qui, en quelque sorte, pourrait le protéger d'une dispersion sémantique. D'autre part, comme l'a bien exprimé Gérard Vergnaud, invariants opératoires et organisation de l'activité se correspondent de façon homomorphe, et ceci dynamiquement, dans le cours de l'activité du sujet. Nous ne pourrions donc pas, sans autre analyse, en dire autant des contenus disciplinaires. Nous analysons de plus, que 'capacité' et 'schème' seraient des concepts appartenant à deux cadres différents : le premier focaliserait davantage sur une organisation des comportements ou performances, et donc relèverait du cadre plus général de la psychologie du comportement ; le second focaliserait davantage sur une organisation des représentations ou de constructions de schémas d'actions, et donc relèverait du cadre plus général de la psychologie cognitive. Enfin, il nous est apparu que ce cadre cognitif rendrait plus aisément compte des décalages observés dans les performances, relativement à des situations d'un même type⁹²².

⁹¹⁶ On en proposera donc une adaptation sous 2.3.4.2.

⁹¹⁷ Opus cité. Et il est vrai que nous retrouvons notre conversion lexicale précédente.

⁹¹⁸ Caractère stable, constitutifs de la compétence, transférabilité dans plusieurs situations, dimension « opératoire ». Chapitre 3. Page 50.

⁹¹⁹ Encore une fois, en donnant ce terme comme synonyme d'opérationnalité(donc abusivement).

⁹²⁰ Ibid.

⁹²¹ Par exemple, Bertrand Troadec définit la compétence comme une capacité, dans un domaine donné, à produire une conduite donnée. Opus cité. *Glossaire*.

⁹²² Ce que l'on a pu observer dans nos analyses du paragraphe 1.

➤ **La composante cognitive minimale d'une compétence est un schème d'action** : le schème est une structure cognitive⁹²³. Elle se constitue en unité cognitive, activable⁹²⁴ dès que des conditions explicites se présentent dans une situation, en particulier la reconnaissance de certaines formes sémiotiques. Elle est la forme invariante et organisée, dans l'activité cognitive, pour un certain dénoté. « *Nous appellerons schème d'action, ce qui, dans une action, est ainsi transposable, généralisable ou différenciable d'une situation à la suivante, autrement dit ce qu'il y a de commun aux diverses répétitions ou applications de la même action* »⁹²⁵. Le schème est donc la forme implicite que prend la compétence, dans son exercice. En tant que structure cognitive, un schème est à considérer comme un milieu ouvert, en ce sens que des interactions avec d'autres milieux, peuvent, dans certaines circonstances, conduire à une modification en partie de sa structure⁹²⁶. C'est pourquoi, nous devons entendre, dans la définition de Jean Piaget, aussi bien une continuité dans la structure présente d'un schème (transposition), qu'une continuité dans son potentiel de transformation, soit par une coordination avec d'autres structures de schèmes (généralisation), soit par intégration dans une structure de schèmes de niveau hiérarchique supérieur (différenciation).

➤ Ainsi, Comme le rappelle Gérard Vergnaud, si la représentation, « *organise l'action, la conduite et plus généralement l'activité, tout en étant elle-même le produit de l'action et de l'activité* », « *c'est le concept de schème qui exprime le mieux cette idée* »⁹²⁷. Cette représentation est comme un flux de la conscience⁹²⁸ et partiellement organisée par les schèmes, au moins, lorsque l'activité cognitive est finalisée par une certaine tâche. **Les concepts organisateurs de l'activité doivent leur efficence à certains schèmes**. Enfin, les activités langagières et symboliques sont elles-mêmes « engendrées » par d'autres schèmes⁹²⁹. S'intéressant aux schèmes, en tant que totalités dynamiques fonctionnelles, le psychologue en vient alors (presque naturellement) à leur attribuer « quatre composantes déclinables »⁹³⁰ :

⁹²³ C'est, dans le paragraphe suivant, que nous préciserons certains éléments de cette structure.

⁹²⁴ La question d'une entité cognitive spécifique et qui serait disponible, en bloc, dans la mémoire à long terme, relève de la recherche en psychologie cognitive et donc sort de notre cadre d'étude.

⁹²⁵ Jean Piaget. *Biologie et connaissance. Position du problème*. Gallimard. 1967.

⁹²⁶ Nous verrons dans quel sens il nous faudra entendre cela.

⁹²⁷ *Représentation et activité : deux concepts étroitement associés*. Revue. Recherche en éducation. N°4. Octobre 2007.

⁹²⁸ Ibid. Phénomène psychologique permanent qui accompagne la vie selon Gérard Vergnaud.

⁹²⁹ Ibid.

⁹³⁰ *Recherche en éducation*. Opus cité.

- les buts et les sous-buts que se donne l'élève, et les anticipations qui jalonnent son activité ;
- les règles d'action, de prise d'information et de contrôle qui engendrent cette activité, au fur et à mesure ;
- les invariants opératoires, c'est-à-dire les concepts et les théorèmes en actes qui permettent de prendre et de sélectionner l'information pertinente et de la traiter ;
- les possibilités d'inférence enfin, qui sont nombreuses dans toute activité même relativement familière.

Il semble indiscutable, tout au moins dans le cadre d'activités cognitives finalisées, que l'activation d'un schème soit étroitement associée à la perception d'un but et d'une anticipation globale, c'est-à-dire d'une mise en relation avec la prescription contenue dans l'énoncé d'une tâche, et le besoin d'identifier des moyens pour y parvenir⁹³¹.

Or, considérons la tâche exprimée par l'énoncé suivant : résoudre l'équation :

$$36x+60 = 130 + x$$

Comme le dit Gérard Vergnaud, le schème est du même type logique qu'un algorithme, ce que nous retenons. Il nous semble comprendre cela en notant qu'un élève qui peut s'acquitter de la tâche précédente, peut produire une suite ordonnée d'équations équivalentes et dont la dernière est $x = 2$. De plus, un tel processus peut effectivement être anticipé. Mais :

- Il est possible que pour l'une de ces équations, et avant le passage à la suivante, notre élève ressente le besoin de vérifier le résultat de son calcul $130-60$, et de rectifier éventuellement une erreur⁹³². Il est vraisemblable que pour l'équation $3x+5=11$, il ne se livre pas à un tel contrôle. Devons-nous penser alors que le schème impliqué dans la résolution d'une équation de la forme $ax+b=cx + d$, change de structure, un contrôle, présent dans un cas, ne se produisant pas dans l'autre cas ?

- L'anticipation globale de la stratégie (la résolution par une succession d'équations) relève-t-elle d'une intention explicite de la part du système cognitif ? Dans le cas d'un type de tâches aussi peu problématique, nous ne le pensons pas.

⁹³¹ Mais on ne peut ignorer une activation spontanée de schèmes, qui semble faire l'impasse d'une forme consciente de telles anticipations. Jean Piaget parle aussi de schèmes réflexes et instinctifs. *Biologie et connaissance. Position du problème*. Opus cité.

⁹³² Mais l'expérience montre qu'un tel contrôle intermédiaire est minoritaire et que, même le contrôle final, qui serait de substituer le nombre 2 aux occurrences de x , dans l'équation initiale, se raréfie, en élevant le niveau des classes.

- Nous avons vu que la construction d'un schéma complet d'actions en « passe bien par ces composantes ». Mais nous en avons divisé l'élaboration fonctionnelle, en faisant appel à d'autres schèmes que sont les régulations. **Suivant en cela la psychologie cognitive, il nous est apparu possible d'affiner ainsi notre analyse de l'activité, aussi bien a priori qu'a posteriori. Car il se trouve que les régulations interviennent comme des schèmes de second ordre, les véritables organisateurs de l'activité, les schèmes du premier ordre⁹³³ étant de simples exécutants. Enfin, le concept de régulation, sur lequel nous allons encore revenir, peut rendre compte des développements distincts d'un sujet à l'autre, alors que ceux-ci pourraient sembler pouvoir disposer, a priori, des mêmes compétences algorithmiques⁹³⁴. En particulier, un sujet cognitif peut être ou non capable de produire certaines inférences qui seraient, en l'occurrence, pertinentes.**

➤ De son côté Jean-François Richard analyse que le schème n'est pas une connaissance déclarative. Il s'applique de lui-même : il n'a pas besoin d'un traitement spécifique pour s'appliquer aux situations⁹³⁵. Il nous semble que l'activité d'un schème suppose, dans l'approche de Gérard Vergnaud, certaines formes de connaissances déclaratives, aussi bien au niveau de l'anticipation (composante 1) que des inférences (composante 4). Aussi, nous ne nous imposons pas que de telles connaissances entrent comme des composantes d'un schème. Il existe bien, comme nous allons le préciser plus bas, une forme déclarative associée au schème : elle exprime un changement d'état du monde⁹³⁶, celui des informations initiales à celui d'un but à atteindre ; Mais, aussi bien, celle-ci n'est pas à proprement parler constituante du schème. Il est vrai que l'expression « calculer la somme $x+27$ » devrait conduire inévitablement à s'interroger sur la valeur de x . Ce en quoi une forme déclarative de l'action, en tant que connaissance, est indissociable de l'action elle-même. Ce qui semble aussi vouloir exprimer le fait que toute action suppose au préalable un regard conscient sur les pré-requis indispensables à l'action, ce qui donc relève d'une certaine anticipation. On se retrouve avec une forme de démarche heuristique qui se rattache à une déclaration sur l'action : « Que vaut x » car pour agir, « j'ai besoin de x ». Il est vrai que Gérard

⁹³³ Comme celui intervenant dans la résolution de l'équation précédente.

⁹³⁴ Voir une analyse que nous avons produite plus haut sous 1.3.1.1.

⁹³⁵ Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 6. *Les raisonnements pour l'action : la résolution de problèmes*

⁹³⁶ Jean-François Richard. *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Opus cité. Première partie. 2. *Les formes de connaissances*.

Par exemple : calculer la somme $27+32$. L'état initial est $27 + 32$ et l'état final est 61 . Mais nous pouvons généraliser ceci à un énoncé d'exercice moins dépouillé.

Vergnaud, ne veut pas confondre schème et algorithme⁹³⁷. Mais à proprement parler du schème, nous allons le considérer comme un module encapsulé, par le fait même que « le schème s'applique de lui-même ». En effet, un savoir général et applicable à une variété de situations, requiert un certain traitement, pour prendre en compte les particularités de la situation. Les opérations d'inférence, comme le choix de telle action, dans le cas d'une situation particulière, les opérations d'évaluation, relatives aux pré-requis, pour que puisse s'accomplir l'action, les opérations de contrôle du bon déroulement de l'action (composante 2), au sein du processus, ne sont pas propres à chaque schème. Il n'y a pas de raison de les intégrer aux schèmes et de les rendre solidaires de ceux-ci, en toute généralité⁹³⁸. D'une certaine façon, l'intégrité du schème est protégée, lors de ses exercices normaux. C'est sans doute ce qui en facilite l'accès et l'utilisation par le système. Quant à la composante 3, relative aux invariants opératoires, et qui est fondamentale, aussi bien pour Jean Piaget (au niveau macro-génétique de la définition des stades) que pour Gérard Vergnaud (au niveau de l'utilisation ou de la micro genèse des connaissances), elle est incontournable pour décrire le fonctionnement des schèmes. En ce sens, ils sont effectivement des composants des schèmes. Mais, encore une fois, et dans les deux approches, **il est évident que les invariants opératoires ont une vocation transversale, et ne sont donc pas spécifiques de tels ou tels schèmes, et encore moins de telles ou telles situations**. Notons aussi, que pour un observateur, ils peuvent être induits de l'activité d'un système, mais que leur rôle effectif, comme nous l'avons déjà vu, peut être, par contre, plus délicat d'accès. **Il nous semble que ces invariants finissent par jouer comme des connaissances, que des régulations activent localement ou non.**

➤ Enfin, et d'un point de vue théorique il est à craindre qu'une compréhension « trop grande » d'un concept réduise jusqu'à la vacuité son extension ; et ceci d'expliquer, éventuellement, son quasi anonymat dans les analyses des activités.

2.3.4.2 Compétence et développement piagétien. Les différents types d'équilibration.

➤ Nous allons entendre une régulation, dans son sens le plus général, comme **une réaction du système cognitif à une perturbation**⁹³⁹. Ce terme de perturbation peut-être en effet accepté, dès lors que toute activité d'une structure cognitive peut apparaître comme une réponse à une stimulation qui vient modifier une certaine neutralité de

⁹³⁷ Ni même schème et conduite que nous appelons ci-dessous, performance.

⁹³⁸ Jean François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Ibid.

⁹³⁹ Définition fonctionnelle donc.

l'environnement et, corrélativement, un certain repos de cette structure. Nous admettons là que le besoin d'alimentation d'un schème S_{ci} , comme le décrit Jean Piaget⁹⁴⁰, ne signifie pas une recherche permanente, « en aveugle », mais résulte, au moins, d'une stimulation externe qui active alors un besoin spécifique, celui de l'exercice de cette structure, dans une situation qui lui est reconnue comme assimilable par le système cognitif. Cette opération est donc une régulation de sélection, un des états possibles d'une fonction de régulation.

➤ Jean Piaget⁹⁴¹ décrit le fonctionnement canonique du schème, ⁹⁴²comme une forme d'équilibration entre l'assimilation de certains objets à ce schème d'action, et l'accommodation de ces derniers aux objets⁹⁴³. C'est en cela qu'il définit l'adaptation, elle-même en développement. Mais, même lorsque cette accommodation est réussie, nous admettons que le réel présentant toujours une part d'aléatoire, ou au moins de nouveauté, et le système cognitif étant dégradable au cours du temps, la réussite dépend encore d'une régulation qui se définit comme la conservation mutuelle des deux fonctions que sont l'assimilation et l'accommodation⁹⁴⁴. Cette conservation mutuelle est l'une des caractéristiques du fonctionnement du schème lui-même.

➤ Nous définissons, dans ce qui suit, **trois types d'équilibration** qui seront suffisants pour rendre compte du développement des compétences dans un cadre scolaire.

Nous devons supposer l'existence d'un schème S_{ci} , a priori efficace, pour un certain dénoté d_i , ce qui correspond à une compétence C_i , car il faut bien supposer un état initial du système cognitif.

- **Type 1 : il y a d'abord une extension normale du dénoté, lorsque certains paramètres secondaires d'une nouvelle situation ne se présentent dans aucune des situations de d_i** ; comme dans le cas d'un changement de contexte, d'objets à manipuler, ou virtuels ou aussi, dans le cas de substitutions synonymiques, dans le registre linguistique ou le registre purement mathématique⁹⁴⁵. Une telle perturbation stimule une régulation compensatrice, sous la forme d'un renforcement de schème (ou feedback positif), c'est-à-dire une extension de son efficacité à **un nouveau dénoté d_f , incluant le dénoté d_i** . Par exemple, lorsque dans d_i , toutes les situations conduisent à décomposer x tel que $x < 20$,

⁹⁴⁰ *Six études de psychologie. Le développement mental de l'enfant.* Opus cité.

⁹⁴¹ *Équilibration des structures cognitives. Position du problème.* Opus cité.

⁹⁴² Ibid. Celui-ci résulte d'un postulat de l'interaction fondamentale de départ entre le sujet et les objets du monde. Postulat 1 que nous expliciterons plus bas.

⁹⁴³ Ibid.

⁹⁴⁴ *Équilibration des structures cognitives.* Ibid.

⁹⁴⁵ « Il arrive constamment qu'un schème A ne trouve pas ses aliments ordinaires A' , mais puisse s'accommoder à des termes A'' , de caractères voisins ». Ibid

en somme de deux entiers, et que la situation nouvelle exige une décomposition de $x < 20$ en somme de plusieurs entiers. On voit que la compétence C_f , à développer, s'exprime comme la répétition de la compétence C_i , sans modification structurale du schème S_{ci} , mais en y adjoignant un nouvel invariant opératoire, le théorème en acte de l'associativité de l'addition dans \mathbf{N} .

Précisons alors que la forme langagière F_{ci} (décomposer un nombre entier en somme de deux entiers) dont le dénoté est d_i implique la forme langagière F_{cf} (décomposer un nombre entier en somme de plusieurs entiers) dont le dénoté est d_f . Mais l'inclusion $d_i \subset d_f$ n'est pas un acquis simultané de cette dernière implication. Toutes deux sont des réalités logiques et qui, pour le sujet, sont dans son potentiel cognitif, mais à des niveaux différents. Il y a nécessairement deux décalages : structurellement, C_f peut être une compétence construite après traitement de la situation perturbante, mais c'est à la suite de nombreuses expériences, en situations scolaires, que l'exercice de C_f devient efficace dans un ensemble d_f ; concernant l'aspect langagier, il faut donc entendre la prise de conscience par le sujet que sa capacité à agir dans les situations de d_f implique sa capacité à agir dans les situations de d_i ou que, les situations de d_i sont bien des cas particuliers de situations de d_f . Et cela relève encore d'un autre développement (psychique supérieur comme dit Lev Vygotski) puisqu'il s'agit de comprendre qu'une forme langagière F_{cf} est plus générale qu'une forme langagière F_{ci} . L'inclusion des dénotés ne se lit pas directement dans la forme linguistique, mais résulte aussi de la réalité logique de la connaissance en jeu⁹⁴⁶. Par exemple, considérons une situation, définie par la tâche⁹⁴⁷ : trouver les transformations géométriques laissant invariant un rectangle, donné dans le plan ; ce qui va correspondre à une compétence C_i . On comprend que ces transformations géométriques laissent également invariant un carré donné⁹⁴⁸. On peut définir la tâche : trouver les transformations géométriques laissant invariant un carré, donné dans le plan ; ce qui va correspondre à une compétence C_f . On voit bien ici que :

- la construction de la compétence C_f suppose la compétence C_i ;
- l'inclusion des dénotés n'est pas un acquis résultant immédiatement

de la construction de la compétence C_f , mais une construction spécifique qui suppose le théorème : un carré est un rectangle⁹⁴⁹.

⁹⁴⁶ Par exemple ici, si on peut décomposer tout entier en somme de trois entiers, alors on peut décomposer tout entiers en somme de deux entiers, en utilisant un théorème d'associativité : $n = a+b+c$ signifie $n = (a+b) + c$.

⁹⁴⁷ Entre autres éléments matériels ou symboliques.

⁹⁴⁸ En transposant les éléments matériels ou symboliques de la situation du rectangle.

⁹⁴⁹ Notons donc que ce théorème exprime une inclusion qui a une apparence inversée !

Notons aussi qu'**une telle extension du dénoté ne s'accompagne pas toujours d'une modification nécessaire du registre mathématique antérieur**, utile à l'exercice de la compétence C_i , à l'introduction de signes abrégiateurs près ou d'un développement interne à ce registre. Par exemple, une extension du répertoire multiplicatif qui s'exprime par une augmentation des facteurs possibles d'un produit de deux nombres. Par exemple aussi, une addition réitérée, avec l'introduction d'une abréviation sous la forme du signe de la multiplication⁹⁵⁰. Mais, dans l'exemple de la décomposition d'un nombre entier, l'introduction de parenthèses est bien une création sémiotique nécessaire, puisqu'elle s'associe au théorème de l'associativité. De même, concernant les transformations géométriques, il s'agit d'inventer des rotations avec désignations spécifiques. **Il semble bien que, dans tous les cas, on soit conduit à un traitement interne à un même registre déjà disponible.**

Toutefois encore, l'acquisition d'une compétence dans une situation didactique, ne signifie pas une telle construction potentielle de l'inclusion des dénotés, dès lors que la conception de cette situation n'envisage pas les médiations spécifiques, c'est-à-dire propres à ce que cette acquisition soit un véritable développement au sens de la logique des schèmes. C'est là que nous noterons les cas d'émiettement des compétences et des capacités d'un sujet et donc des sources de contradictions mathématiques. Et nous pourrions en dire tout autant pour les deux types qui suivent.

- **Type 2 : il y a ensuite une complexification du dénoté, lorsque plusieurs schèmes d'assimilation, en tant que structures indépendantes, doivent se coordonner pour se constituer en une certaine structure cognitive.** Des tâches plus complexes et nouvelles pour lui sont proposées à un système. La fonction d'accommodation joue, comme le dit Jean Piaget, de façon réciproque⁹⁵¹ dans le sens, où lors du fonctionnement du nouveau schème, une sous-structure devient l'un des objets d'assimilation d'une autre sous-structure : une première sous-structure, nécessaire au niveau de la structure d'ensemble, est fonctionnellement, un objet nécessaire à l'activation d'une autre sous-structure. Ainsi, chaque sous-structure correspond précisément à l'une des accommodations successives suivantes : $A (A') \rightarrow B ; B (B') \rightarrow C \dots$ où l'objet A' alimente le schème A ce qui rend suffisant et par accommodation l'activation du schème B qui peut alors s'alimenter de l'objet B' , ce qui rend suffisant l'activation du schème $C \dots$ Il faut entendre que le dénoté de cette structure doit sa complexification initiale, à une situation que nous

⁹⁵⁰ Qui ne ferait jouer que la définition canonique $nm_+ = nm + n$ où m_+ est le successeur de m .

⁹⁵¹ *Équilibration des structures cognitives*. Ibid.

pouvons appeler de compréhension, et dont l'un des enjeux cognitifs a été précisément une équilibration par accommodation (dite réciproque) des sous-structures, les unes aux autres.

Précisons que chacun des schèmes initiaux conservent une certaine indépendance, dans la mesure où leur seule activation suffit, lors de l'exécution de situations plus élémentaires. Ainsi, le schème (complexe) correspond à une tâche complexe, décomposable en sous-tâches. C'est évidemment le cas de toutes tâches. Donc, ce qui vient d'être évoqué, correspond à un accroissement d'un développement de compétence, sous une forme systématique. Par exemple, le calcul du nombre $(3+5) \times 12$ peut être décomposé selon l'algorithme suivant $S1 (3+5) \rightarrow 8$; $S2 (8 \times 12) \rightarrow 96$. En fait, un tel schème S, joue ici de façon complexe, comme une application $(S1, S2)$ d'argument $((a \oplus b), ((a+b) \otimes c))$, ce qui précisément définit le processus relatif à l'exercice du schème S, d'argument $((a+b) \times c)$. Notons alors l'invariant opératoire I_1 de « la priorité du calcul entre parenthèses sur celui du produit ». Mais remarquons qu'un autre invariant opératoire I_2 , comme, « la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition », pourrait réguler le calcul selon l'algorithme suivant : $S2 (3 \times 12) \rightarrow 36$ et $S2 (5 \times 12) \rightarrow 60$; $S1 (36+60) \rightarrow 96$. On peut alors invoquer une application $(S2, S2, S1)$ d'argument $((a \otimes c), (b \otimes c), ((a \times b) \oplus (b \times c)))$ ce qui, précisément, définit le processus relatif au schème S' d'argument $((a+b) \times c)$.

Précisons encore que le dénoté correspondant à cette dernière compétence, est bien tel que celle-ci peut être vue comme un développement des compétences, relatives à des calculs moins complexes et là, coordonnées (on a bien un développement de C_f qui suppose celui de chacune d'elles). Toutefois, **ce dénoté ne peut pas être considéré comme une extension de chacun des dénotés initiaux, au sens inclusif du terme, ce qui nous différencie du type précédent. Il doit être formulé comme un produit cartésien des dénotés**, chacune des composantes d'un tel produit, étant isomorphe à une projection, sur un ensemble de situations, et telle que, certaines variables sont constantes pour les autres. Par exemple, cela correspond très bien aux situations de calculs où $c=1$ ou, plus généralement, c est constant. En fait, le schème joue ici de façon particulière, comme, par exemple, l'application S'' d'argument $((a+b) \times 7)$ et définie par l'application $(S1, S'2)$, d'argument $((a \oplus b), ((a+b) \otimes 7))$, où $S'2$ est activé dans l'ensemble des situations qui nécessitent le calcul d'un produit dont l'un des facteurs est la constante 7^{952} . Remarquons que le concept organisateur de $S'2$, peut être défini comme « la table de multiplication par 7 ».

Notons, dans ce type, **la création nécessaire d'éléments sémiotiques nouveaux et**

⁹⁵² Sans insister davantage précisons que cela signifie que $(\mathbf{Z}, +)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z} \times 7, +)$.

d'un registre mathématique, qui est lui-même une extension coordonnée des registres mathématiques, propres aux sous-systèmes. Par exemple, pour les calculs précédents, on peut considérer que la coordination des registres, propres aux deux monoïdes additif et multiplicatif, permet d'obtenir un registre opérationnel propre à la structure d'anneau⁹⁵³.

- **Type 3 : il y a enfin une extension du dénoté, par ce que Jean Piaget appelle un équilibre progressif de la différenciation et de l'intégration.** « Cette troisième forme d'équilibre ne se confond pas avec la précédente, puisqu'elle ajoute une hiérarchie (structurale) aux simple rapports entre collatéraux »⁹⁵⁴ (entre schèmes).

Nous voulons insister sur cette dernière forme car, c'est à son endroit que se joue essentiellement la notion d'obstacle envisagée dans les didactiques, et l'ambiguïté du couple rupture-continuité. De plus, d'un point de vue didactique, les situations à concevoir sont bien plus délicates. Mais pour lors, retenons pour notre propos, de ces trois formes d'équilibrations (en les simplifiant certes), que ceux des aspects communs qui nous paraissent les plus directement exploitables pour la conception de séquences d'apprentissage : **lors de tout développement d'une compétence, une situation présente une perturbation qui concerne l'élément central de la forme langagière, à savoir le verbe d'action lui-même.** Dans les cas correspondant aux équilibrations des types 1 et 2, il s'opère une généralisation de la compréhension de ce verbe. Par exemple : « calculer une somme en utilisant le seul répertoire additif » se généralise à « calculer une somme en utilisant outre ce répertoire, certaines décompositions comme dans les calculs réfléchis » (type 1) ; « calculer une somme dans $(\mathbb{N}; +)$ » se généralise à « calculer une somme dans $(\mathbb{N}, +, x)$ » (type 2). **Dans ce troisième type, c'est la compréhension même du concept, exprimé par le verbe d'action qui est en jeu.** Les objets assimilables par le schème se présentent initialement au système cognitif, comme non différents de ceux habituellement assimilables. La forme langagière dont le verbe d'action est le noyau semble inchangée pour le système, mais les objets sont non assimilables. **On se heurte, à ce moment crucial, où la compétence se trouve contestée en son cœur même, celui du verbe d'action**⁹⁵⁵.

Précisons : psychologiquement, le dénoté peut être considéré comme l'extension dont la forme langagière exprime la compréhension. Mais, plus fortement, pour l'enfant, la

⁹⁵³ Les structures $(\mathbb{Z}, +)$ et (\mathbb{Z}, x) sont des monoïdes, c'est-à-dire qu'elles possèdent une opération interne et associative. $(\mathbb{Z}, +, x)$ est un anneau.

⁹⁵⁴ *Équilibration des structures cognitives*. Ibid. Nous avons amplifié le propos entre les parenthèses.

⁹⁵⁵ Dans ce qui suit, il faut entendre le verbe comme une partie de la forme langagière : un prédicat, le verbe lui-même associé à un objet. Par exemple : démonstrer que (le triangle est rectangle) ou compter (le nombre d'objets qui) ou agrandir (la figure) ou mesurer (la longueur du segment) et à une synonymie près, comme définie plus haut...

forme langagière est un attribut de ce dénoté et souvent même celui d'une simple représentation⁹⁵⁶. La dénotation, « *surtout chez l'enfant, est liée à la perception et à l'élaboration du matériel sensible qui lui donne naissance ; le matériel sensible et le mot sont les éléments indispensables du processus de formation des dénotés, et le mot, détaché de ce matériel, traduit tout le processus de définition du dénoté, sur un plan purement verbal, qui n'est pas caractéristique de l'enfant* »⁹⁵⁷.

Nous comprenons que la signification de la forme langagière se confond, le plus souvent, pour l'enfant, avec une paraphrase d'un de ses représentants. Le verbe d'action ne renvoie pas, à ce stade, à un concept mais à une conception. Il reste encapsulé dans quelques formes langagières et sa dénotation ne peut que renvoyer à l'ensemble des situations (voire à un représentant) déjà expérimenté. Or, dans cette situation nouvelle qui se présente, ce milieu antagoniste, comme dit Guy Brousseau, si l'enjeu est bien un développement de compétence, celui-ci en passe, et pour reprendre notre point de vue, par une remise en question de la dénotation elle-même. Car cette liaison fonctionnelle entre une forme langagière et un dénoté n'est pas un invariant dans le temps. Elle est elle-même en développement. Cette dénotation est soumise, comme toute fonction, à un contrôle de certaines régulations qui en régissent cette liaison :

- Si nous la considérons comme un processus fonctionnel, coordonné avec l'assimilation des formes langagières par ces régulations, nous retrouvons sur ce point, la première référence fondamentale pour la didactique, Jean Piaget ; lorsqu'il entend que les régulations sont elles-mêmes en développement⁹⁵⁸. Il précise alors un développement plus général du système cognitif, un développement du second ordre, un développement de l'intelligence. Et nous retenons, en particulier, les régulations qui jouent dans les assimilations normales. Notons que Jean Piaget se refuse à invoquer une régulation, dans le cas de la répétition de la même action⁹⁵⁹. Il est vrai que ce terme renvoie chez lui à un effet plus spécifique, une équilibration ou rééquilibration aboutissant, pour le système, à un progrès développemental⁹⁶⁰. Mais nous conservons le principe que, dans cette forme de perturbation, on puisse considérer l'exercice d'une régulation initiale, pour deux raisons.

⁹⁵⁶ « Pendant longtemps, le mot est pour l'enfant plus une propriété qu'un symbole de la chose : il maîtrise la structure externe : le mot est la chose ». Lev Vygotski. Opus cité. Chapitre 3. *Le problème du développement du langage dans la théorie de W.Stern.*

⁹⁵⁷ Lev Vygotski. Opus cité. Chapitre 5. *Etude expérimentale du développement des concepts.* Là encore, nous avons remplacé le terme de concept par celui de dénoté; plus général et plus fondamental, car avec ce terme, on touche du même coup, à la façon dont peut évoluer, pour un système, la sémantisation de la langue.

⁹⁵⁸ *Équilibration des structures cognitives. Position du problème.* Opus cité.

⁹⁵⁹ *Équilibration des structures cognitives. Position du problème.* Opus cité.

⁹⁶⁰ Son épistémologie génétique concerne le long terme.

D'une part, Jean Piaget explicite le fait que des régulations de régulations puissent intervenir. Il y a donc hiérarchie des régulations : « *régulations simples, régulations de régulations etc., jusqu'à des autorégulations avec auto-organisation susceptibles de se modifier et d'enrichir leur programme initial...* »⁹⁶¹. Mais, d'autre part, c'est précisément l'indice que les régulations, comme n'importe quel schème, peuvent être mises en échec, dans certaines situations. S'il n'y a pas abandon du système ou mort d'un de ses organes, il faut alors entendre la sauvegarde et la restructuration de cet organe, comme s'accompagnant d'une restructuration des régulations qui en contrôle le fonctionnement. Cette restructuration, c'est ce qui explique des régulations de niveau supérieur.

- Si nous considérons alors que la régulation est une fonction psychique supérieure, nous retrouvons, sur ce point, la deuxième référence fondamentale pour la didactique, Lev Vygotski ; lorsqu'il entend que « *toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe, comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques* »⁹⁶². Nous retrouvons là, explicitement, la relation au sein du couple, verbe d'action-dénotation et que nous considérons comme fondamentale pour la conception des situations didactiques.

- Si nous considérons les caractères à la fois empiriques et psychoaffectifs de la dénotation, nous retrouvons la troisième référence fondamentale pour la didactique, Gaston Bachelard ; lorsqu'il entend, par obstacles épistémologiques, « *des causes d'inertie* », « *des causes de stagnation et même de régression* »⁹⁶³. La dénotation joue ici d'ailleurs, de façon explicite, avec les deux obstacles que sont l'expérience première et le verbal. Le sujet reste esclave de rétroactions produisant ce que la psychologie appelle « *interférence proactive ou effet négatif d'un apprentissage sur un apprentissage postérieur* »⁹⁶⁴.

Les équilibrations de types précédents ne suffisent pas, les objets présentent un attribut que le sujet ne peut apercevoir sans aide. Le sujet tente vainement l'activation du même schème, en se livrant éventuellement à diverses réparations : comme cela a pu être vérifié, dans le chapitre sur les obstacles, certaines formulations « réparatrices » ont pu conduire à des impasses ou à des erreurs. Mais, rappelons le, nous n'envisagerons pas de

⁹⁶¹ *Équilibrations des structures cognitives. Position du problème.* Opus cité.

⁹⁶² *Pensée et langage. Étude expérimentale du développement des concepts.* Chapitre 5. Opus cité.

⁹⁶³ *La formation de l'esprit scientifique.* Opus cité. Chapitre premier. *La notion d'obstacle épistémologique.*

⁹⁶⁴ *Dictionnaire fondamentale de la psychologie.* Larousse. 2002.

rupture au sens bachelardien du terme, car toujours, la construction d'une compétence s'appuiera sur la ou les compétences inefficaces, et finalement n'aboutira pas à l'abandon des schèmes inadaptés, mais à leur particularisation⁹⁶⁵, dans une nouvelle structure de schèmes.

Mais précisément, cela n'a plus rien à voir avec une extension inclusive de dénoté. Il s'agit d'investir la signification du verbe. En d'autres termes, la situation nouvelle, et qui va servir de référence, introduit à une redéfinition de verbe lui-même. La compréhension concerne, parallèlement à une intériorisation de certaines actions, celle de formes langagières⁹⁶⁶. Il y a donc, pour le système cognitif, un changement de paradigme⁹⁶⁷, puisque l'accommodation ne concerne pas la seule situation dans laquelle le système agit, mais de façon indissociable, les formes langagières qui anticipent la nature des actions. Le système doit questionner la situation autrement et, en particulier, relativement à sa langue, les fonctions référentielles et apophantiques.

En ce qui concerne le registre logico-mathématique, il se crée un registre nouveau, aussi bien, concernant des symboles utilisés que des traitements internes à ce nouveau registre. Par exemple, nous avons rappelé, dans le chapitre sur les obstacles, le cas de la situation introuvable « pour inventer le produit des nombres relatifs ». La question du produit de deux nombres entiers doit se poser différemment. Il n'y a pas d'extension, au sens inclusif du terme, de l'ensemble des situations relatives au produit des nombres entiers naturels, à celui de l'ensemble des situations relatives au produit des nombres entiers relatifs. Un tel produit est à redéfinir avec une signification autre. Et, **fondamentalement, le résultat est un plongement de structures.** On connaît ce principe comme un considérable moteur de la création d'objets nouveaux en mathématique. Par exemple, dans sa signification fonctionnelle, un nombre entier naturel apparaît comme un nombre relatif particulier⁹⁶⁸. D'un point de vue structural et développemental, la structure $(\mathbf{N}, +, \times, <)$ est isomorphe à une sous-structure de $(\mathbf{Z}, +, \times, <)$. Nous pouvons préciser que la construction de $(\mathbf{Z}, +, <)$ « à partir de $(\mathbf{N}, +, <)$ » relève d'un équilibre de type 2, car la

⁹⁶⁵ Dans un sens fondamentalement différent de celui résultant d'un simple plongement.

⁹⁶⁶ Nous développons d'ailleurs, pour toutes les propositions didactiques que nous faisons, dans le cours de notre activité professionnelle, le principe inaliénable d'un objectif langagier spécifique.

⁹⁶⁷ Comme le fait remarquer Jean Piaget, ce terme est d'acception bien fluctuante. Mais on peut entendre par là, un ensemble d'expériences, de croyances et de valeurs qui influencent la façon dont un individu perçoit la réalité et réagit à cette perception. Ce système de représentations lui permet de définir l'environnement, de communiquer à propos de cet environnement, voire d'essayer de le comprendre ou de le prévoir. Définition reprise, en partie, dans wikipédia, « l'encyclopédie » en ligne.

⁹⁶⁸ Pour beaucoup d'ailleurs, si l'utilisation fonctionnelle, dans les calculs, des écritures $(+5)$ et (5) peuvent se substituer l'une à l'autre, il semble oublié que ces deux écritures connotent des appartenances structurales distinctes, et donc relèvent de sens différents.

différence de deux nombres relatifs peut, moyennant une réécriture de registre, se construire « à partir de situations concernant la différence de deux nombres entiers naturels »⁹⁶⁹. Alors que la construction de $(\mathbf{Z}, x, <)$ à partir de $(\mathbf{N}, +, x, <)$ (et non seulement à partir de $(\mathbf{N}, +, <)$) relève d'un équilibre de type 3, car le produit de deux nombre relatifs négatifs ne peut se construire « à partir de situations relevant du produit de deux nombres entiers naturels ». Le sens du calcul du produit de deux nombres est reconstruit⁹⁷⁰. Dit autrement, la compétence C_i : « calculer un produit de deux entiers naturels » est alors développée en la compétence C_f : « calculer un produit de deux entiers relatifs » mais avec plongement structural.

2.3.5 Résumé : composantes d'une compétence

Si nous n'avons pas véritablement défini le concept de compétence, nous devons le considérer ainsi par la donnée de ses attributs qui en précise l'exercice.

2.3.5.1 La performance

➤ C'est la composante observable⁹⁷¹ de l'activité du sujet, dans l'exercice de sa compétence. Une telle performance peut être mentale-physique, comme la production d'un geste, d'un dessin, d'un texte de résolution de problème, d'un calcul écrit, d'une formulation verbale etc. ou, être purement mentale, comme une lecture silencieuse, le développement d'une réflexion, d'une activité heuristique ou d'un raisonnement etc. Elle est donc la forme explicite ou implicite, en partie observable, que prend la compétence dans son exercice. Dans le cas d'une activité purement mentale, cette explicitation peut être, pour le système, une certaine prise de conscience d'un état de la résolution d'une tâche, verbalisée ou non. Produire mentalement et volontairement une inférence dans la conduite d'un raisonnement est, par exemple, une telle activité.

➤ La performance conserve des limites supérieures, dans le sens où, comme nous l'avons vu, elle est restreinte à un champ de possibles. L'activité d'un système cognitif relève aussi, en partie, d'une composante constructive à tous les niveaux du système : développement en situation non didactique de compétences⁹⁷², restructurations de dénotés consé-

⁹⁶⁹ Comme nous l'avons vu sous 1.2.5 et que nous ne présentons pas ici.

⁹⁷⁰ Nous avons, dans une autre étude, sur la construction des nombres rationnels, pu vérifier que la mesure de longueur d'un segment, une unité de longueur étant donnée, lorsque cette mesure n'est plus entière mais fractionnaire, s'accompagne en fait d'une redéfinition du verbe « mesurer ». C'est en reprenant la conception de Simon Stevin, que l'on est conduit à une telle redéfinition.

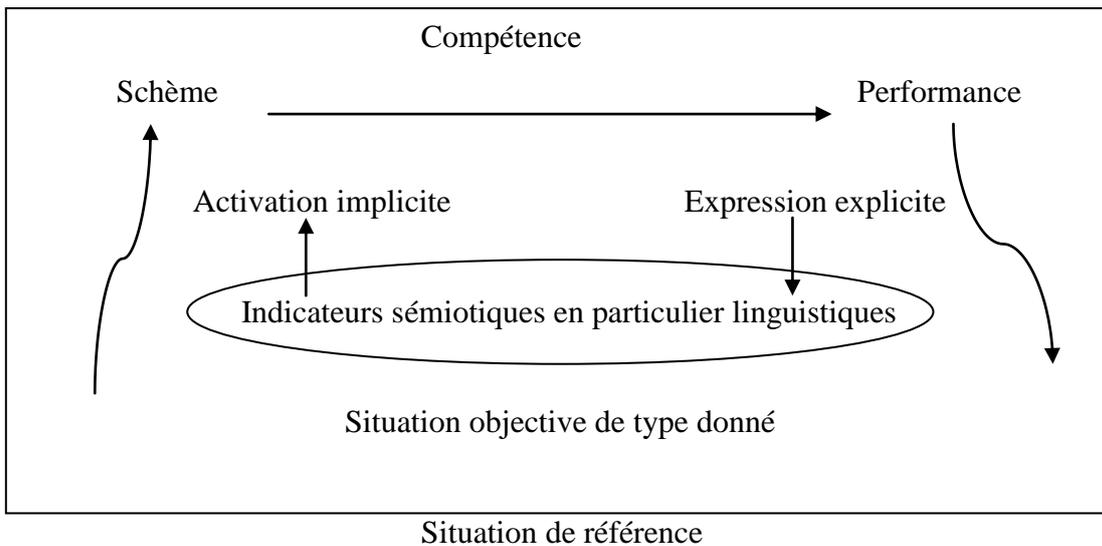
⁹⁷¹ Observable, mais non forcément observée, aussi bien par le sujet qui n'en est pas forcément conscient, dans sa totalité, que par un tiers, qui dispose d'un point de vue qui normalise sa perception.

⁹⁷² Classiquement dans le cas des équilibrations de type 1. La situation étant non didactique dans le sens où n'est pas visée une acquisition nouvelle.

cutives à de nouvelles expériences⁹⁷³, en situations didactiques, réorganisation du régulateur (considéré en ses composants comme l'ensemble des régulations) ; D'où une modification éventuelle de ce champs des possibles et une distinction à entendre entre la performance et l'activité, en ce qui concerne le travail du système cognitif.

➤ Schématisation.

La représentation suivante schématise la décomposition du concept de compétence : Elle en exclut les processus régulateurs, à la fois anticipateurs de son exercice que régulateurs durant cet exercice.



Rappelons que ce schéma ne suppose pas une sorte de correspondance biunivoque entre le schème et la performance, comme ensemble de possibles. Une telle correspondance associe le schème à une suite d'actions, élément commun de toutes les situations de référence. Mais à la question « qu'est-ce que calculer une somme ? », un élève pourra répondre « par exemple, c'est quand il faut faire $27 + 34$ » ou ce même élève pourra dire « c'est quand Pierre gagne trois billes et après il gagne 12 billes, alors il faut dire combien il en a gagné en tout ». L'action, une fois reconnus des indicateurs spécifiques, s'exprime systématiquement par le calcul de « $a + b$ ». Mais les représentations que le système cognitif se donne de la situation objective peuvent en fait différer d'un système à l'autre ou, relativement à un même système, dans le temps. C'est ce que, reprenant cela de la didactique professionnelle, on peut considérer comme une composante productive de l'activité⁹⁷⁴.

⁹⁷³ Idem.

⁹⁷⁴ Pierre Pastré, Patrick Mayen, Gérard Vergnaud. *La didactique professionnelle*. Revue Française de pédagogie. N°154. Pages 145-198.

Ainsi, la notion de performance est donc plus générale que celle d'action spécifique, elle englobe une part de l'activité qui passe par des adaptations diverses et qui dépend donc du contexte, dont en particulier, la situation objective.

➤ Précisons qu'une compétence ne peut être considérée qu'à un instant donné de son développement. Un schème peut se restructurer lors des processus de différenciation et d'intégration⁹⁷⁵. En particulier, mais fondamentalement, les mêmes indices sémiotiques peuvent évoluer quant à leur sens, au fur et à mesure de l'extension d'un dénoté. Ce qui signifie un accroissement du champ de la compétence. D'autre part, une performance l'étant toujours dans un contexte, il y a facilitation ou au contraire perturbation dans l'exercice de cette compétence. Ainsi, pour une même compétence, et à un niveau donné de son développement, cet exercice ne se présente pas toujours sous une forme stéréotypée⁹⁷⁶.

2.3.5.2 Une réversibilité opératoire fondamentale

➤ Nous allons reprendre de ce schéma, l'expression d'une réversibilité fondamentale : « le geste et la parole ». Nous devons préciser là, ce qui devrait nous apparaître comme l'une des dimensions d'une connaissance procédurale. Entendons que, fondamentalement, toute compétence peut se définir comme la mise en correspondance « d'une parole et d'un geste » et ceci, indépendamment d'autres contextes matériels : le schème, lorsque sa construction est achevée, peut s'activer dans les deux directions réversibles : le procédural ou l'action elle-même et un certain déclaratif, qui est une expression verbale, associée au résultat de l'action. Par exemple, l'énoncé : « mets sur la table, 15 crayons » conduit, d'une part, à l'action dont le résultat est une collection de 15 crayons, mis sur la table et, d'autre part, à la possibilité de l'expression verbale d'une partie de l'activité : « je mets, sur la table, 15 crayons ». Et dans une autre situation, l'énoncé : « combien de crayons ai-je mis sur la table ? », conduit à l'action dont le résultat est la phrase « sur la table j'ai mis 15 crayons ». C'est le schème du comptage⁹⁷⁷ qui est considéré dans ces deux situations. On donne le nombre (n) et le verbe d'action : « mettre n objet », soit une forme langagière, il faut construire la collection. Inversement, on donne la collection, soit le geste fait, il faut construire la forme langagière. La compétence est le comptage, la parole « mettre le nombre ». Le schème est donc la forme intériorisée de la correspondance réversible entre

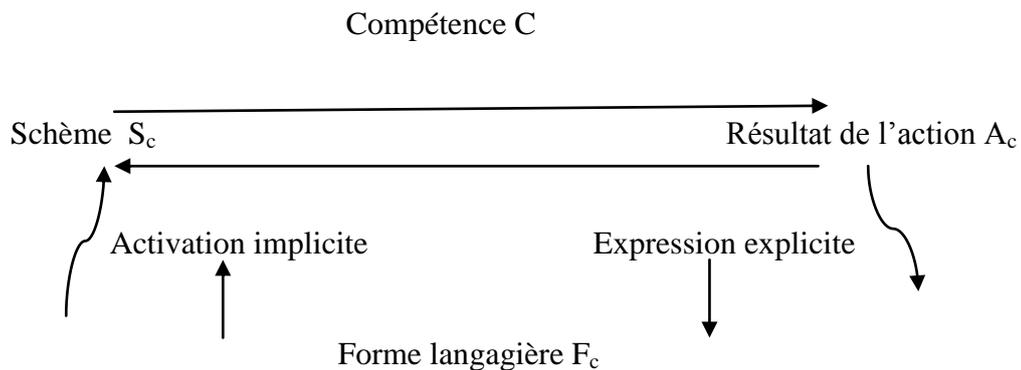
⁹⁷⁵ Voir ci-dessous.

⁹⁷⁶ Nous ne parlons pas ici des décalages possibles, relatifs à une compétence qui serait définie en terme de catégorie comme la conservation, le raisonnement... Notre acception de la compétence est toujours associée à un verbe d'action, celle-ci, en référence à un ensemble de situations toujours restreint. Par exemple, conserver le nombre, raisonner en géométrie plane...

⁹⁷⁷ Coordonné aux schèmes moteurs.

un mot (ou une forme langagière) et une action spécifique. Notons, dans notre exemple, la correspondance psycholinguistique exprimant la réversibilité : « 15 (crayons) est ce que je devais mettre sur la table, quand j'ai mis 15 (crayons) sur la table »⁹⁷⁸. Et aussi « 15 (crayons) est ce que je mets sur la table, quand 15 (crayons) est ce que je devais mettre sur la table »⁹⁷⁹. C'est un aspect que nous avons montré comme une dimension de la composante procédurale du nombre, en tant que connaissance. Nous allons le généraliser à toute connaissance, en fin de chapitre.

En se focalisant sur ce qui, dans la performance, est le résultat final de l'exercice d'une compétence, on obtient alors un schéma simplifié mais constitutif du précédent :



D'un point de vue pédagogique, ce schéma n'est pas à négliger puisqu'il représente le point d'appui systématique que nous concevons pour la conception des séquences didactiques, visant le développement des compétences mathématiques opératoires à l'école primaire.

➤ Concernant les apprentissages, il convient alors d'entendre que si le développement d'une compétence suppose le développement d'un schéma, un tel développement dépasse l'action simple qui s'associe de façon homomorphe au schéma, puisqu'il s'opère toujours dans le contexte d'une situation référentielle, dont les éléments matériels ou langagiers obligent à des adaptations spécifiques, ce qui peut faciliter ou, au contraire, faire obstacle, par exemple, à l'acquisition du sens de la connaissance en jeu, dont en particulier la réversibilité que nous venons d'évoquer.

2.3.5.3 Des formes langagières d'une compétence et la sémantisation des actions

Appelons **schème anticipateur**, la régulation (ou régulation anticipatrice) qui, à une forme langagière, associe le schéma d'action sélectionné. Conformément à un certain usage (à commencer par Jean Piaget lui-même), mais, par abus de langage, nous désigne-

⁹⁷⁸ Notons que cette phrase pourrait correspondre à la question classique: qu'est-ce-que je t'avais demandé ?

⁹⁷⁹ Notons que cette phrase pourrait correspondre à la question classique: qu'est-ce-que tu dois faire ?

rons le schème par ce verbe d'action (particularisé ou non) ou par l'action elle-même. Nous pouvons reprendre de même ce mot ou une de ses flexions pour une situation, afin d'en désigner le type. Nous utiliserons toujours au mode infinitif ces formes, pour la désignation des compétences.

Exemples : On pourra dire « le schème du partage » et « la compétence, partager », ou « le schème du partage équitable » et « la compétence, partager équitablement » ou « le schème d'utilisation d'une division euclidienne » ou « la compétence, utiliser une division euclidienne ». Précisons que le schème du partage renvoie à un dénoté plus général que celui du partage équitable et, dans ce dernier cas, sans supposer davantage que la reconnaissance, par le système, d'une situation (de référence, donc indissociable d'une action spécifique) de partage équitable. Pour la structure de schème activée, une certaine opération de division euclidienne est un invariant opératoire, mais d'un point de vue purement algorithmique. Alors que le schème d'utilisation d'une division euclidienne exprimera, dans notre langue, la forme la plus générale d'un schème associé à l'invariant opératoire de la division euclidienne ; la régulation anticipatrice, sélectionnant un tel schème, non plus seulement parce que les indicateurs sémiotiques conduisent et, sans inférence, à l'algorithme de la division euclidienne, mais parce que ces indicateurs sémiotiques conduisent au choix de l'opération de division euclidienne, en tant qu'invariant opératoire, pour un type de situations. Un tel type de situations pourra être celui de partage équitable. Dans cette acception, d'invariant opératoire, la division euclidienne est alors un concept organisateur de l'activité. Toutefois, au niveau de l'école primaire, et comme nous l'avons rappelé, il semble convenir de ne considérer un tel niveau d'abstraction, qu'empirique, c'est dire, non encore comme exprimant un concept⁹⁸⁰.

Précisons davantage ce que nous entendons par **forme langagière associée à une compétence**.

Considérons que certains mots sont des indicateurs sémiotiques de nature langagière. C'est un point central dans notre thèse. Nous allons reprendre quelques uns des aspects de ce que l'on peut entendre, comme un réseau sémantique de l'action.

L'indicateur sémiotique principal est un verbe d'action explicite ou non ; exemples : compter, dénombrer, calculer, résoudre, utiliser, décrire...

Comme nous pouvons le comprendre, ces verbes seuls ont un dénoté de la plus

⁹⁸⁰ Niveau des opérations formelles. A ce niveau, on peut entendre la possibilité d'une signification du concept de division euclidienne, c'est-à-dire de sa construction formelle ; En particulier de sa liaison logique et reconnue avec certains théorèmes en acte.

grande extension possible. Un sujet qui pourrait donner une définition la plus générale d'un tel mot exprimerait un concept a priori, puisqu'il sous-entendrait toutes les situations du monde des possibles de ce verbe d'action, sans en avoir eu l'expérience. Concernant donc notre approche du concept de compétence, nous devons considérer que de tels verbes sont des prédicats dans des expressions⁹⁸¹ comme :

- compter la collection des ;
- dire combien de (synonyme de : dire le nombre) ;
- calculer la somme $a + b$;
- résoudre des problèmes ;
- utiliser des fractions ;
- décrire un solide.

Et de même dans des expressions comme⁹⁸² :

- compter la collection des images ;
- dire combien il y a d'absents ;
- calculer en ligne des sommes ;
- résoudre des problèmes simples, en une opération ;
- utiliser des fractions, dans des cas simples de partage ;
- utiliser une fraction, pour exprimer la part de quatre amis, lorsqu'ils se partagent équitablement 7 euros ;
- décrire un cube.

En pratique, à l'école primaire, les formes langagières prennent corps dans un énoncé complet, et prescrivant une action effective⁹⁸³ :

- calculer la somme $27+34$;
- résoudre le problème : « Pierre a joué aux billes. Il a gagné une première fois 27 billes et une seconde fois 34 billes. Combien a-t-il gagné de billes en tout ? ».

Mais aussi :

- « Pierre a des billes. Dans un sac, il en a 27 et, dans un autre sac, il en a 34. Combien a-t-il de billes en tout ? ».

Ces deux énoncés peuvent supposer la compétence : « résoudre des problèmes simples en une opération d'addition ». En d'autres termes, les situations dans lesquelles se trouvent proposés ces énoncés appartiennent au dénoté de la forme langagière « résoudre

⁹⁸¹ Qui expriment des types de tâches.

⁹⁸² C'est à ce niveau d'emboîtement langagier que s'arrête le texte du programme officiel. BO. Opus cité

⁹⁸³ Qui spécifient des tâches à effectuer

des problèmes simples en une opération d'addition ». Et il faut tout aussi bien supposer que la compétence, mise en jeu, est un des développements de la compétence « dénombrer à l'aide d'une somme ». Les deux énoncés précédents concernent tout aussi bien la compétence « dénombrer ». Les situations dans lesquelles se trouve proposé les deux énoncés appartiennent au dénoté de la forme langagière « combien de » (implicitement 'dire combien').

On note bien que l'on peut concevoir un treillis de compétences, associé de façon isomorphe à un treillis de formes langagières⁹⁸⁴. Nous devons en conclure que **le développement des compétences, dans le cadre scolaire, est indissociable d'un développement isomorphe de formes langagières.**

Si l'on considère l'action, comme composante d'une compétence, on peut dire qu'une forme langagière comme « calculer en ligne $27 + 34$ » est sa forme déclarative explicite. Elle anticipe un résultat. « *Elle exprime un changement de l'état du monde* »⁹⁸⁵. Si l'on demande à un élève de CP ce qu'il est en train de faire, il pourrait dire « je calcule en ligne la somme $27 + 34$ ». Si plus tard on lui demande d'où vient le nombre 61, il pourrait dire « c'est de $27 + 34$ »⁹⁸⁶, en pensant « c'est le calcul en ligne de $27 + 34$ ». Ainsi, cette forme langagière est tout aussi bien une anticipation de la composante procédurale de l'action. Plus précisément, elle anticipe la nature des schèmes activés dans la procédure. Nous pouvons postuler cela, d'autant plus que le schème est une forme intériorisée d'une action pouvant être anticipée verbalement, et non d'une description verbale de la procédure⁹⁸⁷, laquelle relève d'un autre schème.

Nous devons considérer que le dénoté, d'une des expressions langagières précédentes, est un ensemble de situations d'actions, comme par exemple la situation de référence, dont la situation objective contient l'énoncé : « Pierre a joué aux billes. Il a gagné une première fois 27 billes et une seconde fois 34 billes. Combien a-t-il gagné de billes en tout ? ». A un niveau plus élémentaire de l'apprentissage, une situation objective peut comporter un énoncé comme « Pierre a joué aux billes. Il a gagné une première fois 3 billes et une seconde fois 7 billes. Combien a-t-il gagné de billes en tout ? » Énoncé qui

⁹⁸⁴ Nous ne poursuivons pas ici cette idée. Mais le contraire aurait pour objectif de concevoir un ordonnancement possible des compétences, par champs conceptuels, et associés, de façon isomorphe, à un ordonnancement de champs langagiers. On retrouve alors explicitement une construction psychologique des connaissances, comme pensée par Gérard Vergnaud. Mais notre approche est indéniablement psycholinguistique.

⁹⁸⁵ Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre 2. *Les formes de représentations*. 2005. Armand Colin.

⁹⁸⁶ D'ailleurs, il dira moins naturellement : « $27+34=61$ »

⁹⁸⁷ Jean-François Richard attribue, comme nous l'avons déjà dit, effectivement, deux composantes aux connaissances sur l'action, procédurales et déclaratives. Opus cité. Chapitre 2. *Les formes de représentations*.

peut être accompagné de deux boîtes, contenant respectivement 3 billes et 7 billes. Nous avons déjà exprimé le principe que les connaissances d'un élève de l'école primaire restent contextualisées, tout en tendant à la généralisation, ce qui s'exprime par des compétences. Or, c'est par le biais d'une extension des situations, qui entrent dans le champ d'efficacité de cette compétence, que s'opère cette généralisation. Le levier de cette généralisation resterait, au niveau de l'école primaire (mais il nous semble à tout âge), celui des formes langagières et de la fonction de dénotation.

De plus, l'approche sémantique sur les actions est définie par la définition suivante : « un x est une sorte de y si on peut faire sur un x tout ce que l'on peut faire sur un y . Il y a des buts et des procédures qui sont plus généraux que d'autres, en ce sens qu'on peut les appliquer à un plus grand nombre d'objets »⁹⁸⁸. Cette définition, qui exprime ce que l'on peut entendre d'une généralisation, nous paraît acceptable pour les trois types d'équilibrations explicitées plus haut ; mais, dès lors que les objets x et y sont des situations objectives. Par exemple, une situation de « mesure de longueur d'un segment de mesure entière » est un cas particulier des situations de « mesure de longueur d'un segment de mesure fractionnaire ». Et ceci, non parce qu'un entier est une « sorte de fraction », ce qui ramènerait la signification de la phrase précédente à une simple inclusion mathématique⁹⁸⁹, mais parce que si le sujet est compétent dans les situations des mesures fractionnaires, il doit l'être dans les situations des mesure entières. Nous avons vu que de telles généralisations, sauf dans le cas des équilibrations de type 1, il n'est pas question d'inclusion simple de dénotés⁹⁹⁰.

Nous devons alors comprendre cette sémantisation, dans deux dimensions.

- L'une, explicite, qui semble correspondre à la hiérarchisation des actions, telle que nous l'a décrite Jean-François Richard. On peut la qualifier de **dimension cognitive structurale**. Donnons l'exemple suivant : les formes langagières : « calculer en ligne la somme $27+34$ », « calculer en ligne des sommes », « calculer des sommes », « calculer dans $(\mathbf{N}, +, \times)$ », ont des dénotés qui forment « une suite croissante » : nous pouvons considérer une telle extension associée à des équilibrations de type 2 ou de type 1⁹⁹¹. Et il y a bien, à termes, une extension de dénotés. Les deux analyses épistémologiques conjointes

⁹⁸⁸ Ibid. *Le point de vue sémantique sur les actions*.

⁹⁸⁹ Et d'ailleurs, « on ne peut pas faire sur un entier tout ce que l'on peut faire sur une fraction, par exemple l'inverser.

⁹⁹⁰ Et de plus, comme nous l'avons dit, le type d'équilibration peut dépendre d'un choix didactique.

⁹⁹¹ En nous limitant à des opérations dans \mathbf{N} .

Bien qu'il ne s'agisse pas de nier l'existence possible de difficultés⁹⁹², on note bien sur cet exemple, qui relève d'équilibration de type 2⁹⁹³, la correspondance isomorphe entre les deux analyses⁹⁹⁴.

Le cas des équilibrations de type 3 est bien plus complexe. Et, non seulement parce que, comme dans toute tâche nouvelle pour le système, les deux équilibres précédents sont également en jeu. Toutefois, nous allons focaliser notre attention sur une description fonctionnelle commune à toutes les situations. Ce faisant, nous nous donnerons un outil qui permettra d'analyser plus finement les correspondances entre les deux dimensions épistémologiques.

- Et c'est la seconde dimension qui correspond à la sémantisation des actions, à savoir **la dimension cognitive fonctionnelle**.

Pour ce faire, nous avons besoin de définir un développement canonique d'une compétence dans sa composante cognitive, à savoir une structure de schèmes.

Nous proposons donc une description canonique, d'un processus d'adaptation local, et inspirée de ce que nous retenons, pour la didactique, des formulations de Jean Piaget⁹⁹⁵, concernant le jeu des régulations⁹⁹⁶, en le complétant par des éléments de nature sémiotique. Nous l'entendons applicable à des microgénèses de compétences, c'est-à-dire à des constructions de schèmes relatifs à des types donnés de tâches. Nous faisons l'hypothèse que cette description pourrait être celle d'un développement diachronique et fonctionnel de l'état d'une compétence d'un certain palier à ce qu'elle devient à un palier supérieur⁹⁹⁷.

Nous schématisons dans ce qui suit les étapes d'une équilibration d'un point de vue fonctionnel.

⁹⁹² Nous rencontrons fréquemment des étudiants (peu nombreux) qui n'arrivent pas comprendre l'invariant opératoire : $\text{Cardinal } ax(bUd\dots) = \text{Cardinal } axb + \text{Cardinal } axd + \dots$

⁹⁹³ Coordination de schèmes de l'addition et de schèmes de la multiplication.

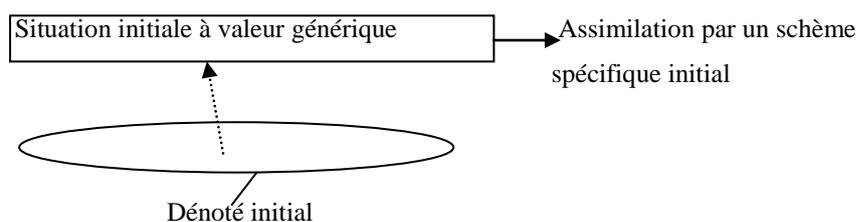
⁹⁹⁴ C'est aussi ce que met en évidence Gérard Vergnaud, dans ses analyses des structures additives ou multiplicatives.

⁹⁹⁵ Inspirée et non calquée dans la mesure où : 1) Jean Piaget n'a pas donné aux indicateurs sémiotiques, comme ceux véhiculés par le langage, un rôle explicite dans la construction des schèmes ; 2) le concept d'inhibition serait plutôt évacué par Jean Piaget, au profit d'un développement naturel, selon des phases bien précises.

⁹⁹⁶ *Équilibration des structures cognitives*. Opus cité.

⁹⁹⁷ Ce qui est à mettre en relation avec la question que l'on trouve posée à Jean Piaget par Pierre Gréco dans le chapitre *statut épistémologique des concepts psychologiques chez Piaget. Structures et significations*. Edition de l'école des hautes études en sciences sociales. 1991. « *Y-a-t-il pour chaque type de tâche, pour chaque situation-problème, une équilibration progressive aboutissant à un palier structuré, pour le domaine considéré* ».

1 Etat initial de la compétence : C_i ; dénoté de type unique, $d(Fc_i)$



Assimilation normale par le schème disponible et activé par des indicateurs sémiotiques qui font type⁹⁹⁸ :

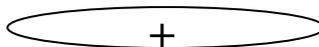
- i. indicateurs sémiotiques spécifiques dont Fc_i ;
- ii. assimilation de ces indicateurs par une régulation relative à la sélection du schème pertinent ;
- iii. activation du schème sélectionné. Cette activation est la forme autorisée, par une fonction de régulation, que prend l'activité cognitive

Jean-François Richard la définit comme *une fonction de régulation et de contrôle de l'activité*⁹⁹⁹. Mais nous entendons et précisons plus loin que, comme tout fonctionnement de régulation, celui-ci répond du maintien d'une certaine forme d'équilibre. Ce qui est une façon d'étendre la notion de perturbation, dont il est question maintenant.

2 Variation dans la situation de type unique : Situation nouvelle
Perturbation dans la situation¹⁰⁰⁰ :

- i. mêmes indicateurs sémiotiques dont Fc_i ;
- ii. schème spécifique initial activé par ces indicateurs ;
- iii. empêchement d'une assimilation normale = perturbation ;
- iv. états différenciés et antinomiques de la réalité observée¹⁰⁰¹ :

➤ Dénoté unique ou monde des affirmations,



➤ Situation nouvelle ou monde des négations.



⁹⁹⁸ Nous postulons que ceci est une façon de parler, car nous ne pensons pas qu'un tel schème soit sujet à des activations aussi spontanées. Il faut qu'antérieurement, une fonction de régulation lance une opération de sélection, relative au choix du schème pertinent. C'est l'objet de la fonction décrite en ii.

⁹⁹⁹ *Les activités mentales*. Opus cité. 1990.

¹⁰⁰⁰ Cette phase, organisée par une ingénierie didactique spécifique, relève de ce que Jean Piaget appelle les déséquilibres nécessaires, sources du progrès, « ils constituent le moteur de recherche ». *Equilibration des structures cognitives*. Opus cité. Position du problème. §3. *Les raisons des déséquilibres et de leur fréquence initiale*.

¹⁰⁰¹ C'est un aspect fondamental pour Jean Piaget : « l'équilibration de chacune des structures considérées comporte en outre une certaine correspondance... entre les affirmations et les négations ». *Equilibration des structures cognitives*. Opus cité. Position du problème. §2. *Les trois formes d'équilibration et la correspondance des négations et des affirmations*.

Remarques

Comme l'a étudié Jean Piaget, un enfant perçoit ou ne perçoit pas la perturbation. Ainsi, il peut se limiter à une assimilation normale et se retrouver dans l'erreur, sans en prendre conscience. Il peut alors répéter la même action « avec l'espoir illusoire de mieux réussir »¹⁰⁰². On peut évoquer une rétroaction en boucle, lorsque le résultat de l'action ne fait que provoquer l'activation des mêmes régulations¹⁰⁰³.

Une autre forme de rétroaction, que Jean Piaget n'envisage pas comme une régulation, est celle qui commande un abandon de l'action. Nous l'envisageons autrement, dès lors qu'une telle réaction peut être, pour un système, un moyen de s'auto-conserver. La conservation étant caractéristique des régulations. Toutefois, la spécificité de la situation didactique, qui n'est donc plus une situation naturelle, sera de l'obliger, au moins, à observer son erreur. Celle-ci devient un observable, résultant de sa propre action. L'objet-situation présente deux observables non compatibles : les indicateurs anticipateurs d'une activation de certains schèmes d'assimilation, indicateurs sur lesquels se centre initialement et exclusivement notre système¹⁰⁰⁴, et les résultats de l'action sur cette situation, interprétés comme un échec¹⁰⁰⁵. C'est le niveau de la perturbation, perçue et subie, sans plus¹⁰⁰⁶. L'observation de l'élève se limite à l'état initial de la situation et l'état final, sur lequel il se reconnaît une certaine responsabilité. La situation peut lui apparaître comme irrationnelle, puisque non assimilable¹⁰⁰⁷.

3 Régulation 1 : Différenciation de la dénotation du schème

Première phase de la compréhension :

- i. observations spécifiques : les mêmes indicateurs sémiotiques (dont F_{c_i}) peuvent renvoyer à des références opposées¹⁰⁰⁸ : une situation nouvelle ou occurrence négative de la réalité, a la caractéristique de ne pas être directement assimilable ;
- ii. mise en standby du schème initial ou régulation produisant l'inhibition du schème initial ;
- iii. schème spécifique : attention logique portée à d'autres indicateurs.

Remarques

Nous pouvons noter ici qu'une activité d'adaptation à une situation nouvelle, c'est dire

¹⁰⁰² *Equilibration des structures cognitives*. Opus cité. *Position du problème*.

¹⁰⁰³ On peut, par exemple, noter cela, lorsque mis devant la preuve de son échec de calcul, un élève reprend exactement la même procédure sans se poser davantage de question relativement à cette procédure.

¹⁰⁰⁴ Niveau ii.

¹⁰⁰⁵ Niveau iii

¹⁰⁰⁶ Niveau iv.

¹⁰⁰⁷ Nous verrons un enfant la qualifier de magique.

¹⁰⁰⁸ Cette opposition doit être prise, au sens élargie des situations qui sont en dehors des assimilations habituelles du schème disponible, mais qui finiront par ne relever que de lui, moyennant un accroissement de son extension.

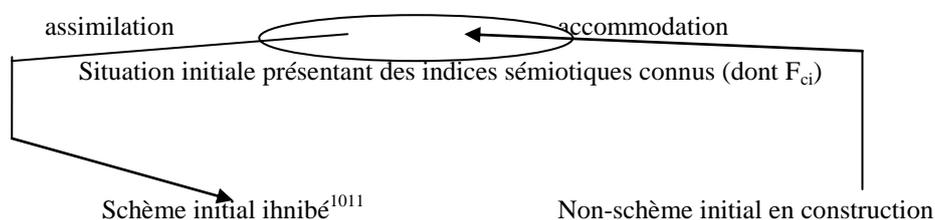
aussi dans un contexte bien particulier, s'accompagne par le jeu des régulations, d'une adaptation d'un schème relatif à une fonction psychique supérieure, celle de l'attention orientée par la volonté propre : de passive, lors de la perception des indices sémiotique initiaux, cette forme d'attention automatique doit se voir plonger dans une forme d'attention, élargie à l'ensemble des indicateurs sémiotiques que présente la situation, et qui, jusqu'ici, étaient négligés¹⁰⁰⁹. Nous noterons, de plus, que c'est là une part fondamentale de la médiation didactique que de forcer l'élève à cette forme d'attention.

C'est ici le niveau, noté par Jean Piaget, comme celui véritablement des premières coordinations inférentielles. Si l'attention logique se porte sur d'autres indicateurs, c'est qu'une coordination s'est faite entre les observables de l'action et ceux de la situation. Précisément, l'enfant comprend une certaine causalité entre sa centration sur les seuls indicateurs sémiotiques spécifiques et la forme prise par son action. La décentration est précisément, ici, l'attention portée à d'autres indices sémiotiques. Toutefois, cette compréhension peut ne pas aller jusqu'au rejet de l'exclusivité de la première centration. On peut parler d'équilibre instable, dans la mesure où l'activité de l'élève oscille entre une propension à en demeurer à cette première centration, et celle où son attention lui rappelle de tenir compte des autres indices de la situation. Ce qui manque encore, à ce niveau, c'est la compréhension de cette solidarité entre les différents indices sémiotiques qui font l'unité de la situation¹⁰¹⁰.

4 Régulation 2 : Résolution de la tâche se présentant dans la référence négative

Deuxième phase de la compréhension :

- i. coordination des observations et des actions en retour ;
- ii. accommodation : nouveau schème, forme distincte du schème initial ;
- iii. coexistence de deux schèmes, non systématisés, mais liés par des indications initiales communes, en particulier langagières.



¹⁰⁰⁹ Cette analyse va se trouver confortée par une séquence didactique que nous avons mise en place, pour les besoins de cette thèse, et que nous présenterons dans le chapitre 5.

¹⁰¹⁰ C'est ainsi que parfois, des réponses d'élèves à des questions de l'enseignant qui pensait pourtant « avoir avancé », peuvent lui apparaître comme des régressions ou « du n'importe quoi », ce qui se produit lorsque l'élève oscille entre les deux mondes.

¹⁰¹¹ Voir ci-dessous.

Remarque

La solidarité de l'ensemble des indicateurs sémiotiques est prise en compte par un développement des coordinations inférentielles. Le système développe un schème correspondant à la compétence d'agir dans la situation nouvelle. Mais sa référence demeure dichotomique. Les situations peuvent ne pas apparaître comme relevant d'un type unique¹⁰¹².

5 Régulation 3 : Intégration des deux schèmes dans une structure unique

Troisième phase de la compréhension :

- i. coordination des schèmes opposés psychologiquement ;
- ii. nouveau schème : modification de la dénotation ;
- iii. indicateurs sémiotiques davantage signifiants dont F_c ;
- iv. jeu possible entre l'activation et l'inhibition.

Remarques

C'est le niveau de la synthèse de deux compétences opérationnelles et solidaires. Nous n'évoquons pas là, dans notre schéma, la spécificité de la médiation didactique qui devrait favoriser la construction d'un tel niveau d'opérationnalité¹⁰¹³. La complexité des processus cognitifs en jeu demande une analyse et un formalisme spécifiques, afin d'en saisir l'intimité.

En adaptant une terminologie de Jean Piaget, on peut parler 'de compétence plus et de compétence moins' ; le schème, correspondant à la première, étant activé dans le cas des situations initiales, le schème, correspondant à la seconde, étant activé dans le cas des situations nouvelles, mais après inhibition du schème précédent.

*« A en revenir à la question essentielle des affirmations et des négations, on constate que les régulations jouent un rôle important à cet égard, bien que le sujet n'en prenne pas toujours conscience »*¹⁰¹⁴.

Ces régulations engendrent, selon Jean Piaget, un ensemble de compensations dites régulatrices. Nous reprenons ce terme qui est l'expression du jeu des régulations aboutissant donc à l'équilibration des structures cognitives nouvelles. Les compensations sont en quelque sorte les organes des régulations constructives, visant les rééquilibrations.

¹⁰¹² Par exemple dire combien, pour un élève de CP en début d'année, peut produire deux actions associées à des dénotations différentes : on compte un par un (toujours pour les petits nombres) ; On compte en additionnant des paquets (par exemple, pour des collections plus importantes). Mais dans ce cas, tous les enfants, comme nous avons pu l'observer, n'ont pas compris qu'en comptant un par un les éléments de la collection importante, et sans se tromper, on doit retrouver le même nombre. Une contradiction peut ne pas leur apparaître. Remarquons que cette psychogenèse est assez générale et peut se décliner en de nombreux exemples. L'histoire des mathématiques montre bien que les mathématiciens ont pu travailler dans des structures opératoires distinctes, avant d'en reconnaître leur unité structurelle. Voir par exemple, l'histoire des nombres et les concepts de groupes, d'anneaux ou de corps.

¹⁰¹³ Et dont ne précisons là rien de plus.

¹⁰¹⁴ *L'équilibration des structures cognitives*. Opus cité. *Position du problème*. §4. *Les régulations*.

Les régulations expriment donc suffisamment, à nos yeux (pour la didactique), le caractère causal et dynamique des restructurations des schèmes¹⁰¹⁵.

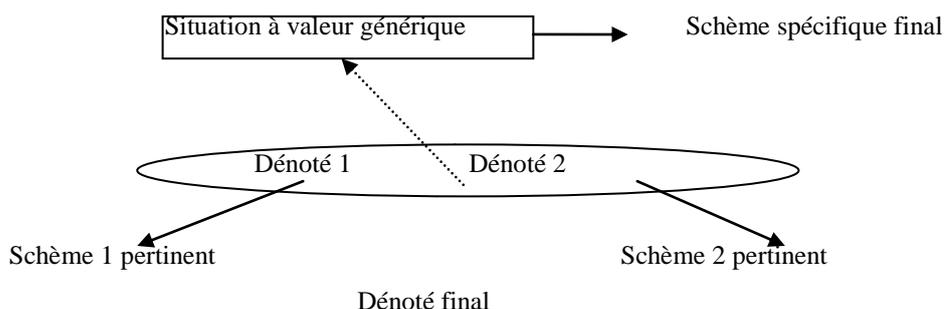
A ce point, il faut entendre que si un nouvel organe, une nouvelle structure de schèmes s'est bien construite, elle reste en l'état volatile et que sa mémorisation définitive ne s'opérera qu'avec des renforcements positifs multiples. C'est ce que nous définissons comme l'apprentissage.

6 Apprentissage : exercices de la compétence élargie

Renforcement de la nouvelle structure :

- i. jeu systématique concernant l'activation et l'inhibition du schème initial à partir de la forme langagière F_{cf} ;
- ii. activation du schème 2 ;
- iii. renforcement du schème final.

7 Etat final de la compétence : C_f ; dénoté de type unique $d(F_{cf})$



Sémantiquement, F_{cf} prend une valeur plus générale que F_{ci} , au sens que nous avons donné des relations possibles entre $d(F_{ci})$ et $d(F_{cf})$.

Remarques didactiques

Nous postulons que ce processus structurant peut être mis en acte, au sein d'un système cognitif, sans autre forme de prise de conscience que concernant l'attention logique et imposée à l'énoncé de la tâche, par la pression voulue de la médiation¹⁰¹⁶ ; à la condition toutefois que les situations didactiques soient conçues dans le respect de cette chronogenèse régulée, c'est dire, construite autour de formes langagières spécifiques, et dont l'enseignant se fixe explicitement une généralisation. Nous rappelons ainsi que l'enseignant n'envisagera pas de

¹⁰¹⁵ Jean Piaget a voulu précisément, à l'aide du concept de compensation, rendre compte de l'intégration en une seule structure « de la réversibilité finale de certaines opérations », « résultat nécessaire des constructions psychologiques » et ce que nous n'abordons pas ici particulièrement.

L'équilibration des structures cognitives. Position du problème. §5. *Les compensations.* Opus cité.

¹⁰¹⁶ Ce qui n'exclut pas des formes de prise de conscience d'un certain niveau. Mais nous voulons exprimer que la définition de ce niveau n'a pas à être évoquée dans la conception de la médiation.

rejet du schème initial, mais son plongement dans une structure élargie ou de niveau plus élevé, le terme de plongement devant être pris différemment, selon les types d'équilibration¹⁰¹⁷.

En fait, si nous entendons un processus complexe, relatif au couple activation-inhibition, processus dont une des finalités est la construction des représentations de situations et de schémas d'actions, nous retrouvons que les trois premières composantes de schème, proposées par Gérard Vergnaud, se trouvent ainsi être des modalités dans cette activité. En particulier, on peut alors comprendre que les productions d'inférences spécifiques sont, elles-mêmes, des produits externes des schèmes finalement non inhibés.

Le schème, associé à une dénotation, possède par le jeu des activations et des inhibitions, une efficacité dans l'une ou l'autre des situations proposées à un sujet. C'est en ce jeu entre les activations et les inhibitions, organisé par une régulation spécifique, que l'on peut retrouver une organisation invariante de la conduite, pour toute une classe (le dénoté) de situations données. Il y a là une sorte d'ajustement progressif qui n'est donc pas un acquis immédiat.

Au niveau de l'école primaire, il semble que nous devions entendre une lente progression vers l'équilibration et s'accompagnant d'un processus d'abstractions dites empiriques, au sens où celles-ci ne portent que sur les objets et les propriétés des objets physiques. Par exemple, c'est le cas de situations relevant d'une simple addition, quasi¹⁰¹⁸ homomorphe d'une manipulation sur des objets physiques. L'abstraction empirique peut toutefois porter sur les propriétés que les opérations du sujet introduisent sur les objets. Par exemple, c'est le cas de situations relevant de l'exécution d'une division euclidienne et qui comportent la coordination de plusieurs opérations, coordination entre des observables sur des actions et des observables sur la situation. Cette coordination conduit à un déplacement du plan de l'action, où certains homomorphismes sont des faits d'expériences empiriques, au plan des opérations, avec perte de ces homomorphismes simples, le schème résultant, et en voie d'équilibration, n'étant plus qu'indirectement la forme intériorisée de ces coordinations. Rappelons qu'au niveau empirique, un élève peut construire (par exemple) un partage équitable par l'exercice (au moins) coordonné de certains schèmes : « le schème du calcul de sommes par réitération du même opérateur (le diviseur) » ; « le schème de calcul d'une différence à partir du dividende » ; « le schème de la comparaison de deux nombres (entre un reste et un diviseur » . Ce faisant, l'activation de tels schèmes relève d'un plan d'action, à partir d'une représentation, au

¹⁰¹⁷ Ce dont ne rend pas compte le dernier schéma.

¹⁰¹⁸ Car pour des raisons didactiques ou subjectives, il peut y avoir déformations mineures de relations d'homomorphisme entre les différents registres « manipulés ».

sein de laquelle des régulations inférentielles introduisent les invariants opératoires que sont : la relation de bon ordre, « tout sous-ensemble de \mathbf{N} admet un plus petit élément » ; la propriété d'Eudoxe-Archimède, « tout entier peut être dépassé par un multiple d'un entier non nul ». Toute cette activité peut être coordonnée à des actions effectives sur des objets physiques. Mais la relation canonique « $a = bxq + r$ et $0 \leq r < b$ », est une synthèse sémiotisée de la forme nécessaire que prend finalement la connaissance. En d'autres termes, cette relation est une forme abstraite de l'ensemble des actions produites par l'exercice de certains schèmes d'action. On obtient donc une sémiotisation, dans le cadre arithmétique, de la représentation en un schéma complet d'actions de la situation de partage, et ne rendant plus compte explicitement du développement de cette représentation. Notons que sa réelle compréhension résultera d'une abstraction réfléchissante, car portant sur les actions même du sujet ainsi déjà abstraites empiriquement et non plus seulement sur les effets de ces actions sur les objets. Ce type d'abstraction n'est pas un acquis systématique à un certain stade¹⁰¹⁹.

2.3.5.4 Précisions relatives au concept de l'inhibition

Nous pensons que, étant donnée son histoire, l'activation du schème 2 devra toujours être précédée d'une inhibition du schème 1. Ce schème peut être considéré comme un schème dangereux, dès lors que, dans certaines situations, il peut ne pas être inhibé alors qu'il devrait l'être. Précisons qu'un **schème dangereux** (Pascual-Leone préfère l'expression « schème déroutant ») « est un schème dont la condition déclenchante (*De*) correspond à un aspect prégnant de la situation, d'où son activation immédiate par un opérateur F ¹⁰²⁰, et dont la condition effective (*Ef*) est une réponse erronée »¹⁰²¹. Nous reprenons cette notion d'opérateur en lui substituant le terme particulier de régulation, mais en lui assignant, en l'occurrence, un objectif analogue. Reprenons ce que nous entendons alors par ce concept d'inhibition :

Olivier Houdé avance ce concept qui entre comme un élément dans la mise « en cause de la chronologie trop rigide des stades de Piaget et des mécanismes qui font passer d'un stade à l'autre »¹⁰²² ; mise en cause par laquelle il rejoint d'autres psychologues « post piagétiens ». Ses expériences l'ont amené à affirmer que se développer, c'est apprendre à inhiber certaines connaissances, à certains moments. Et il est vrai que la notion des stades chrono-

¹⁰¹⁹ Nous remarquons, en effet, que réciproquement, des étudiants à qui la division euclidienne est directement enseignée sous cette forme, ne perçoivent pas l'importance de la relation $r < b$, alors que celle-ci correspond sémiotiquement à l'intériorisation d'une régulation de contrôle qui évalue la possibilité de continuer le partage et en fixe un test d'arrêt.

¹⁰²⁰ *F* est un opérateur qui assure une pré-assimilation des données qui consiste à activer des schèmes (tout schème a une condition déclenchante et une condition effective : *De*, *Ef*) dont les conditions *De* correspondent aux aspects prégnants de la situation ». Voir note ci-dessous.

¹⁰²¹ Olivier Houdé. *Rationalité, développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse*. Chapitre 1. *Cadre théorique*. Puf. 1995.

¹⁰²² Olivier Houdé. *10 Leçons de psychologie et pédagogie*. Leçon 8. Puf. 2006

giques de Jean Piaget semble exclure une telle conclusion¹⁰²³. Par exemple, si l'on considère deux rangées de jetons de longueurs inégales et que l'on doive décider laquelle présente plus de jetons, il devrait s'opérer une inhibition du schème perceptif qui associe le plus grand nombre à la rangée la plus longue. Jean Piaget avait simplement précisé, qu'avant le stade des opérations concrètes¹⁰²⁴, l'enfant se trompe, mais que, parvenu à ce stade, il ne se trompe plus.

Nous évaluons que tel quel, ce concept d'inhibition suppose la rémanence des stratégies dangereuses ou moins économiques. Même si cet apprentissage « à inhiber »¹⁰²⁵, devenant de plus en plus performant, les schèmes dangereux peuvent ne pas affleurer à la conscience. L'expérience d'Olivier Houdé, concernant le test de « la rangée de jetons », pourrait nous en convaincre. Il nous semble comprendre, en effet, qu'inhiber, c'est d'abord activer. D'autre part, nous avons souvent pu noter qu'un élève, compétent à un certain niveau, lorsqu'il se trouve dans une situation relevant de ce niveau, mais trop compliquée de par certaines de ses variables, peut « régresser » et revenir à un schème, qu'en situation moins compliquée, il eût inhibé. Cela nous semble donc indiquer la conservation des schèmes dangereux¹⁰²⁶. Même si la fonction d'inhibition est relative au développement général de l'intelligence et s'applique ou non dans tel ou tel cas, nous devons entendre que le développement suppose un apprentissage implicite à l'inhibition de certaines connaissances, à certains moments¹⁰²⁷. C'est alors l'une des composantes de la résultante cognitive R_c . Nous notons que, dans des situations de comptage, lorsqu'il s'agit de petites quantités, ce sont plutôt des stratégies expertes qu'il nous semble devoir inhiber, et cela plus consciemment que des stratégies, comme le subitizing, ou une reconnaissance visuelle de dispositions connues, lorsque ces dernières s'avèrent non pertinentes. Remarquons aussi que l'habitation au calcul mental, en milieu scolaire, lorsqu'il ne se réduit pas à un répertoire de résultats connus, mais correspond à un fonctionnement dispo-

¹⁰²³ Il n'est pas pertinent dans cette thèse de juger davantage de cela mais nous ne notons pas, dans les textes de Jean Piaget que nous avons lus, une affirmation qui nierait cela.

¹⁰²⁴ Leur mise en place vers 7-8 ans.

¹⁰²⁵) Comme le dit Olivier Houdé.

¹⁰²⁶ Considérons l'énoncé suivant : « J'ai 182 crayons à livrer. Et dans ma réserve, je dispose de boîtes de 20 crayons. Combien de boîtes dois-je ouvrir ? ». 1) Nous considérons cet élève de CM1 qui se trouve compétent dans des situations de type additif. La première fois que s'est présentée à lui la situation des crayons, il a essayé d'additionner les nombres 182 et 20. Un schème additif s'est trouvé activé, au moins en raison de l'indicateur sémiotique combien et des deux indices numériques. 2) Puis, il a appris à reconnaître là, une situation de type multiplicatif. Il est, par la suite, devenu compétent pour ce type de situation. 3) A ce même élève, s'est présentée la situation suivante : J'ai 3272 glaces et 227 gâteaux à livrer. Les glaces sont conditionnées en paquets de 100 et les gâteaux sont conditionnés en paquets de 10. Combien de paquets de glaces et de paquets de gâteaux dois-je ouvrir ? Nous avons observé quatre élèves (dits en difficulté) répondant au profil 1) et 2). Les quatre élèves ont additionné 3272 et 227. Notons au passage l'indice sémiotique « et », dont nous avons déjà signalé la dangerosité, et qui a joué là, comme un indicateur.

¹⁰²⁷ Olivier Houdé. *10 Leçons de psychologie et pédagogie*. Page 189. Opus cité.

nible de calcul, est précisément un apprentissage à l'inhibition des calculs posés (mentalement ou non).

2.3.5.5 Le concept de schème¹⁰²⁸

Nous allons maintenant considérer, plus en détail, la composante cognitive d'une compétence.

2.3.5.5.1 Un premier postulat et ses conséquences didactiques¹⁰²⁹

POSTULAT 1

Le système cognitif est une structure autorégulée et ouverte, dont l'organisation fonctionnelle est définie par un ensemble de schèmes¹⁰³⁰, de relations entre ces schèmes et d'opérations sur ces schèmes.

Explicitation.

➤ **L'autorégulation** d'un tel système est une loi de totalité structurale : une telle loi impose « une norme extrêmement contraignante » à l'égard des régulations partielles : se soumettre à la conservation du tout¹⁰³¹.

➤ **L'ouverture** se définit comme l'ensemble des échanges avec un milieu¹⁰³², lui-même ouvert et soumis à certaines lois. Des modifications de schèmes peuvent alors se produire, selon un processus fonctionnel complexe appelé adaptation. Un tel processus, s'il peut modifier qualitativement les éléments du système, ne l'affecte que dans des normes a priori qui le maintiennent, en tant que structure autorégulée. Nous avons rappelé, en introduction, ce principe traduisant une forme d'équilibre entre l'organisation et l'adaptation et que Jean Piaget définit comme une condition de la survie du système. Or, c'est précisément en cela que consiste le comportement : un ensemble de choix et d'actions sur le milieu, organisant de façon optimale les échanges. Le fonctionnement du système cognitif consiste à assurer le développement de ces échanges actifs, sous la forme de modifications du milieu. Et réciproquement, les lois du milieu deviennent des connaissances nécessaires au système, au terme de tels

¹⁰²⁸ Remarque : tous les postulats qui suivent n'ont pas vocation à se constituer en objets de la psychologie cognitive, ce qui ne relève pas de notre compétence. Ils ont vocation à se constituer, au sein d'un système technologique cohérent pour la didactique. Ils prennent une forme contrainte par notre projet didactique. D'autre part, nous restons, relativement à cette approche du concept de schème, dans le cadre du développement des compétences.

¹⁰²⁹ Nous appelons postulat ce que, par abduction, nous inférons d'un ensemble de faits didactiques.

¹⁰³⁰ Nous ne nous intéressons qu'aux schèmes d'action.

¹⁰³¹ Jean Piaget. *Équilibrations des structures cognitives*. Position du problème. §4. Opus cité.

« A moins (pour le système) d'être entraîné à une dislocation générale ».

¹⁰³² Jean Piaget. *Biologie et connaissance*. Chapitre IV. §11. *Fonctions et structures de l'organisation*. Opus cité.

échanges. L'apprentissage ne fait nullement exception à cette définition¹⁰³³.

➤ **Les relations** sont essentiellement des coordinations spécifiques des schèmes au sein de schèmes plus complexes¹⁰³⁴.

➤ **Les opérations** sont des régulations ou schèmes, dits de second ordre, considérées de plusieurs variables, et dont les arguments sont des indicateurs sémiotiques (matériels ou symboliques) et des schèmes. En ce sens, on peut envisager une première dichotomie, en notant les régulations visant à conserver un état, et celles qui interviennent dans le cheminement vers un état non encore atteint¹⁰³⁵. On peut définir ainsi, d'une part les régulations comme des opérations de conservation, de sélection, de productions spécifiques, de contrôle et, d'autre part, celles entrant dans le fonctionnement de l'adaptation. La conservation, la sélection, le contrôle ou la production jouent dans les processus d'activation et de fonctionnement des schèmes spécifiques. Un cas d'une régulation par sélection qui nous importe particulièrement, est celui de la reconnaissance d'une forme langagière (ou éventuellement d'autres indices sémiotiques) qui conduit à l'activation du schème propre à l'exercice de la compétence associée. Nous considérons l'inhibition comme une régulation, elle-même activée par une régulation de contrôle. S'agissant de l'adaptation, Jean Piaget considère une seconde dichotomie au sein des régulations. Les unes portent sur les rapports du système avec les objets auxquels il doit s'adapter, et cela relève des trois types d'équilibrations. Les autres, dont l'activité provient de ce que les équilibrations des types 2 et 3, ne peuvent être considérées comme achevées, que lorsque les relations à construire entre schèmes se trouvent stabilisées, et donnent au système des outils systématiques d'assimilations nouvelles, dans toutes les situations relevant du même dénoté, moyennant des équilibrations de type 1. Il faut un temps (parfois plusieurs années), donc une activité renouvelée de ces régulations spécifiques, voire un développement de ces dernières pour que soient achevées les équilibrations¹⁰³⁶. Dans l'apprentissage, on peut entendre cela comme un temps pour qu'une certaine notion (complexe) soit consolidée. Nous avons nous-mêmes distingué entre les phases de compréhension et la phase, sans doute longue, de l'apprentissage.

➤ **Les interactions** avec le milieu sont régulées par deux fonctions dépendantes

¹⁰³³ Jean Piaget. *Biologie et connaissance*. Chapitre premier. *Position du problème*. §3. *Hypothèses directrice sur les relations entre les fonctions cognitives et l'organisation vitale*. Opus cité.

¹⁰³⁴ Voir, par exemple, les équilibres de type 2.

¹⁰³⁵ Ce qui pourrait correspondre aux homéostasies et aux homéorhésies. Jean Piaget. *Équilibrations des structures cognitives*. Opus cité. Ibid.

¹⁰³⁶ *Équilibrations des structures cognitives*. Opus cité. Ibid.

l'une de l'autre¹⁰³⁷ : elles se constituent en constantes fonctionnelles de l'adaptation du système cognitif autorégulé :

- **L'assimilation** : tout schème peut s'activer dans une situation particulière d'un dénoté, image d'une certaine forme langagière. Cette activité, dite d'assimilation de la situation à une structure préalable de schème, est activée par une **régulation anticipatrice**, opération qui établit une relation entre les indicateurs sémiotiques de la situation et le schème pertinent. Précisément, et d'un point de vue didactique, cette assimilation contribue à un apprentissage spécifique relatif à une certaine connaissance, c'est-à-dire au renforcement d'une compétence. Ce faisant aussi, la multiplication des situations assimilables contribue à transformer un tel schème en une sorte de composante d'un concept, dès lors que se dégage progressivement d'un dénoté la prise de conscience d'un système d'invariants opératoires¹⁰³⁸ qui définissent, en compréhension, la relation du schème avec un ensemble de situations.

- **L'accommodation** : lorsqu'une situation présente des particularités propres, une certaine régulation dite compensatrice contraint le schème d'assimilation à s'accommoder à cette situation qu'il tente de s'assimiler. **Cette accommodation est régulée par des normes de réaction du schème activé qui en définissent les futurs possibles.** La forme finale du schème modifié, soit par son nouveau potentiel d'assimilation, soit par ses relations avec d'autres schèmes, soit par son plongement dans une structure de niveau supérieur¹⁰³⁹, s'intègre au système, sans en modifier l'organisation fonctionnelle. Cette contrainte, qui donne forme à l'intégration, est ce que nous avons appelé, en introduction, comme étant une équilibration entre l'assimilation du schème à la situation, dans ce qu'elle a d'indicateurs pertinents, et son accommodation à la situation, dans ce qu'elle a d'indices nouveaux, à reconsidérer aussi comme des indicateurs pertinents.

Conséquence didactique fondamentale : les situations d'apprentissage qui, si elles se ne conforment pas à cette sorte de conservation fonctionnelle, lors de la restructura-

¹⁰³⁷ Nous avons déjà rapportée dans le chapitre 2 (sous 1), ces deux fonctions exprimées comme postulats dans le chapitre premier de l'équilibration des structures cognitives. Jean Piaget les précise comme « *les deux pôles fonctionnels, opposés l'un à l'autre de toute adaptation* ». *Biologie et connaissance*. Opus cité. Chapitre IV. §12. *Fonctions et structure de l'adaptation*.

¹⁰³⁸ Jean Piaget appelle d'ailleurs « *schème d'action* », ce qui dans une action est ainsi transposable et généralisable d'une situation à la suivante, autrement dit ce qu'il y a de commun aux diverses répétitions ou applications de la même action ». *Biologie et connaissance*. Chapitre premier. *Position du problème*. §1 *questions préalables*. Opus cité.

Par exemple, si le schème de la division euclidienne peut s'appliquer invariablement aux situations de partage équitable puis aux situations de mesure de grandeurs d'une quantité, une unité de grandeur de même nature étant donnée, on peut reconnaître finalement que l'ensemble de toutes ces situations sont des situations de « division euclidienne », dont l'invariant opératoire est précisément l'opération qui associe au couple de nombres (a, b), le couple de nombres (q, r), défini par la relation $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

¹⁰³⁹ Voir les types d'équilibre ci-dessus (sous 2.3.4.2)

tion des schèmes, aboutissent à ce que les analystes en didactique considèrent comme un émiettement des connaissances des élèves¹⁰⁴⁰. Nous pouvons alors comprendre ce qui se passe dans de tels cas, puisque ces mêmes élèves sont tout même capables de faire certains exercices, tant que l'on ne s'écarte pas trop des situations prototypiques : nous postulons que le système autorise pourtant des constructions locales et selon ce même processus d'adaptation¹⁰⁴¹. C'est dire, que cette construction est une sorte d'originalité qui peut trouver un équilibre des types 1 ou 2, non pas, par équilibration du bon schème initial, mais par celle d'un schème hybride et instable, construit par le système comme point d'appui¹⁰⁴². Cette construction est ce par quoi, avec Jean Piaget, nous pouvons parfois reconnaître une assimilation déformante¹⁰⁴³. En pratique, notre sujet se construit un outil selon les normes de construction du système cognitif, mais l'usage d'un tel outil, est soit complètement impossible (dans les cas les plus périlleux), soit très localement opérationnel¹⁰⁴⁴. Notons que si la compétence à construire relève d'une équilibration du type 3, c'est toujours dans des équilibrations du type 1 ou 2 que se produira cette compétence illusoire. C'est le cas, par exemple, lorsque la dimension épistémologique historique (Deh) n'est pas analysée convenablement par l'enseignant¹⁰⁴⁵.

2.3.5.5.2 Des situations perturbantes

Appelons **situation perturbante**¹⁰⁴⁶ \mathfrak{S}_c pour un schème S_c (on parlera de schème perturbé), une situation pour laquelle un schème anticipateur active S_c . Si l'on excepte les situations qui conduisent soit à la mort du schème, c'est-à-dire à l'abandon définitif par le système d'une activation ultérieure de ce schème, et les situations fortement perturbantes, c'est-à-dire qui conduisent à l'abandon de la tâche prescrite¹⁰⁴⁷, **nous distinguons trois types de situations perturbantes** : celles qui conduisent respectivement aux équilibrations de type 1 ou de type 2 ou de type 3. Nous désignerons de telles situations par situations perturbantes de type 1 ou de

¹⁰⁴⁰ On retrouve chez, certains analystes, des termes comme « contradictoire » ou « incohérent ou « pas logique »...

¹⁰⁴¹ Ce qui ne met donc pas en péril sa survie, à court terme.

¹⁰⁴² Il semble que ce soit chose aisée, dès lors que justement, la prise en compte des indicateurs pertinents est partielle ou que ceux-ci sont mal interprétés, ce qui permet de passer d'un dénoté à un autre, comme l'autorise la pseudo-dénotation.

¹⁰⁴³ Nous en avons donné, plus haut, un exemple possible. (Sous 1.4)

¹⁰⁴⁴ On peut trouver des exemples classiques, relatifs aux calculs dans les nombres décimaux. Mais en fait, à tous les niveaux et, relativement à tous les objets des mathématiques. Ce genre de schèmes, parce qu'il ne se relie pas à des structures plus logiques, finit par s'étioler dans le temps. Comme le montrent les taux importants d'échecs, lors des évaluations et relativement à certains thèmes.

¹⁰⁴⁵ On retrouve ce phénomène, dans la construction de la division euclidienne ou des fractions, de façon quasi systématique. Ces deux objets sont susceptibles d'une étude épistémologique dont les aspects sont le plus souvent méconnus des enseignants.

¹⁰⁴⁶ Il s'agit de se placer du point de vue du « système-élève ».

¹⁰⁴⁷ Situations qui ne présenteraient donc pas d'intérêt didactique.

type 2 ou de type 3. En chaque cas, le sujet est le siège de représentations, « *constructions circonstancielle faites dans ce contexte particulier à des fins spécifiques, élaborées dans une situation donnée et pour faire face aux exigences en cours* »¹⁰⁴⁸. Occasionnelles et précaires par nature, elles ne devraient pas être confondues avec ce que l'on appelle des conceptions ou représentations que l'on pourrait penser stabilisées, elles, dans la mémoire à long terme. Nous verrons que, concernant l'apprentissage, la reconnaissance a priori d'un ces types, est constitutive des analyses épistémologiques de Deh et de Dep, mais aussi d'un choix didactique.

2.3.5.5.3 Un deuxième postulat et ses conséquences didactiques

POSTULAT 2

2.1 : tout schème d'assimilation S_c s'active dans une situation qui présente la forme langagière F_c . « *Ce postulat se borne à assigner un moteur de recherche, donc à considérer comme nécessaire une activité du sujet, mais il n'implique pas, par lui-même, la construction de nouveautés* »¹⁰⁴⁹.

2.2 : tout schème d'assimilation activé est obligé de s'accommoder à la situation qu'il tente d'assimiler, c'est-à-dire de se modifier en fonction des particularités de la situation¹⁰⁵⁰.

Conséquence : les accommodations définissent les équilibrations des types 1 ou 2 ou 3.

2.3.5.5.4 Conséquence du postulat 1 : le principe d'inertie

PRINCIPE D'INERTIE

Un schème S_c perturbé, est soit sujet à des équilibrations de type 1, soit ne peut atteindre spontanément les équilibres de type 2 ou de type 3.

Ce qui caractérise, en effet, l'organisation fonctionnelle du système est sa conservation¹⁰⁵¹. Et même en ses parties (schèmes, régulations), il faut des conditions optimales pour que certaines activations ou changements plus profonds s'opèrent, ceux-ci devant être, en quelque sorte, contrôlés par le système, comme compatibles avec sa structure fonctionnelle. La totalité qui se conserve est de nature relationnelle, et la transformation d'un de ses composants s'accompagne, nécessairement, d'une recombinaison plus complexe, et elle-même régu-

¹⁰⁴⁸ Jean-François Richard et al. *Traité de psychologie cognitive 2. Le traitement de l'information symbolique*. Chapitre 2. *Connaissances et représentations*. Dunod. 1990

¹⁰⁴⁹ Jean Piaget. *Équilibrations des structures cognitives*. Chapitre premier. *Position du problème*.

¹⁰⁵⁰ Ibid.

¹⁰⁵¹ Jean Piaget. *Biologie et connaissance*. Chapitre iv. § 11. *Fonctions et structures de l'organisation*. Opus cité.

lée.

Conséquence didactique

L'apprentissage en tire comme conséquence que la conception de séquences didactiques en passe par la recherche de conditions optimales. Mais, comme nous avons noté le lien indéfectible entre une forme langagière F_c et un schème S_c , nous analysons, a priori, que ces conditions optimales se manifestent nécessairement dans une organisation discursive et structurée, au sein de la situation de référence, à charge, pour l'enseignant, d'introduire et de maintenir le discours dans le champ de ces observables pertinents pour le système cognitif. La définition de ces conditions optimales est donc absolument dépendante d'un registre de représentation linguistique, mais aussi, et fondamentalement, contrainte par un autre principe que nous précisons ci-dessous.

2.3.5.5 Un troisième postulat et ses conséquences didactiques

POSTULAT 3 : PRINCIPE D'HOMÉOMORPHISME

Il est possible, pour un système cognitif, en milieu scolaire, d'avoir un développement de ses compétences mathématiques, homéomorphe à un certain développement cognitif.

Explicitation

➤ Nous disons que deux structures sont homéomorphes si elles sont isomorphes et que les composants (schèmes, relations et opérations) qui se correspondent sont également connexes. L'homéomorphisme représente donc un isomorphisme entre un certain ordre de construction des objets mathématiques et un ordre possible de construction des compétences. Dans un traitement cognitif (par exemple une suite d'activation de schèmes) ou mathématique (par exemple le développement d'une démonstration), deux objets sont connexes s'ils se succèdent dans le traitement selon un ordre nécessaire. Il faut donc entendre cet ordre au sens d'un graphe orienté. Ces ordres sont donc définis par les règles logico-mathématiques¹⁰⁵² et par les règles de la logique de la construction des schèmes.

➤ **L'application didactique du postulat d'homéomorphisme peut conduire à la conception d'une chronogénèse de l'apprentissage mathématique qui se coordonne explicitement à une construction de certaines structures de schèmes.**

¹⁰⁵² On retrouve là ce qu'Ed Dubinski et Philip Lewin ont analysé, comme une décomposition génétique des concepts.

On comprend ainsi davantage pourquoi Gérard Vergnaud considère, comme constitutifs des schèmes, des invariants qu'il n'exprime pas autrement qu'en des termes mathématiques. Il pourrait s'ensuivre une réelle difficulté pour distinguer les deux logiques développementales, ou, dit autrement, les deux décompositions génétiques ; d'où, la propension à faire pencher, dans les analyses et la conception des situations, la balance du côté des dimensions épistémologiques historiques, en laissant sous-jacente et seulement évoquée, une réalité cognitive qui relève du fonctionnement d'un système, fonctionnement qui répond lui-même d'invariants : en particulier les invariants fonctionnels, expressions d'une logique des schèmes, que sont les régulations, et dont dépend largement la forme de la connaissance acquise.

➤ Exemple : considérons le développement vers la compétence C_f : « mesurer une longueur à l'aide d'un nombre en écriture décimale ». Un des points essentiels, relevés par Guillermina Waldegg¹⁰⁵³, est que l'écriture décimale, telle que l'a systématisée Simon Stevin, prolonge naturellement le système décimal de position, en vigueur pour les entiers. Une des conceptions initiales et minimales du champ conceptuel des nombres décimaux, est donc bien qu'il prolonge sémiotiquement celui des nombres entiers. De plus, le dénoté de la formulation langagière « mesurer une longueur à l'aide d'un nombre entier », doit se trouver plongé dans le dénoté de la formulation langagière « mesurer une longueur à l'aide d'un nombre décimal ». Nous retrouvons précisé là, et respectivement, les deux points extrêmes de nos graphes génétiques et homéomorphes : nombres entiers comme mesure entière \rightarrow mesure décimale¹⁰⁵⁴. Mais la plupart des auteurs de manuels introduisent la notation décimale, comme une écriture abrégée et arbitraire d'une somme de fractions décimales¹⁰⁵⁵. Ils proposent donc un registre de représentation sémiotique, celui de l'ensemble des nombres décimaux, comme isomorphe à celui des fractions décimales. Et pour ces auteurs, ce n'est alors, qu'après coup, que l'analyse de cette nouvelle notation en confirme le fait fondamental : le registre des nombres décimaux est isomorphe à un possible développemental du registre des nombres entiers. Une telle construction arbitraire consomme donc une rupture, dans la connexité sémiotique¹⁰⁵⁶. Pour explici-

¹⁰⁵³ « L'introduction d'une vraie fraction décimale dont la notation s'appuie clairement sur le caractère décimal du système numérique, enrichissant sensiblement les opérations numériques de base, est en définitive une contribution de Stevin. Celui-ci a compris que le concept de nombre joue un rôle central dans l'établissement de la notation décimale ». Guillermina Waldegg (Mexique). *L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin*. Article mis en ligne : <http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Waldegg.pdf>

¹⁰⁵⁴ On sait que des points intermédiaires, dans ces graphes, correspondent aux mesures fractionnaires.

¹⁰⁵⁵ Et c'est là une tradition didactique, au moins française.

¹⁰⁵⁶ Nous rappelons que toute équilibration des types 2 et 3, s'accompagne de créations sémiotiques qui ne devraient rien avoir d'arbitraire.

ter cette rupture, on note alors qu'elle renonce¹⁰⁵⁷ :

- à reprendre systématiquement une situation de mesure qui questionnerait la possibilité d'une écriture nouvelle de cette mesure, déjà somme de fractions décimales, contexte connue pour l'utilisation de telles fractions, et relevant par exemple de la compétence « mesurer une longueur à l'aide d'une somme de fractions décimales » (C_{1i}). Ce renoncement va conduire à substituer à C_f , la compétence « noter une somme de fractions décimales en écriture décimale » ;

- à l'introduction de l'écriture décimale, comme sémiotisation d'une forme intériorisée d'une action spécifique, action rendue possible par la compétence « écrire un cardinal fini dans le système décimal de position » (C_{0i}). C_f n'est donc pas un développement de C_i : « mesurer une longueur à l'aide d'un nombre entier » ;

- à faire construire, par principe de nécessité, une séparation de l'écriture à l'aide d'un signe spécifique (ici la virgule). Alors qu'elle apparaît le plus souvent comme un séparateur non construit entre deux nombres entiers. L'écriture de la virgule n'est donc pas le signe, rendu nécessaire, d'une certaine action intériorisée ;

- à faire apparaître le registre décimal comme un système de signifiants d'éléments d'un ensemble, que l'on peut qualifier de nombres selon un principe de continuité :

- a. comme les entiers, ils permettent la mesure des grandeurs en reprenant la même unité,

- b. la structure de l'ensemble des mesures entières (opérations, relation de comparaison et le registre sémiotique associé à cette structure) est plongée dans la structure des mesures décimales (opérations, relation de comparaison et le registre sémiotique associé à cette structure).

Analyse complémentaire

➤ On stigmatise là cette analyse épistémologique historique (Deh), réduite à une forme isolée d'une transmission mathématique, comme nous en avons signalé le risque : une simple conversion de registre sémiotique, déconnectée de ses liaisons psychogénétiques.

➤ Les trois premiers points précédents relèvent de l'analyse de la dimension épistémologique psychologique (Dep), puisqu'ils permettent de définir C_i et son développement C_f . Le quatrième point est un résumé « psycho-historique » des précédents. Mais il concerne le long terme et le développement d'une compétence plus formelle. Toutefois, la propriété a. est

¹⁰⁵⁷ Sans analyser davantage qu'une telle approche arbitraire concourt à l'existence des mauvaises conceptions, bien connues, relatives aux nombres décimaux.

bien constitutive de C_f , et représente le franchissement d'un véritable obstacle épistémologique, comme on va le rappeler ci-après. La propriété b. est constitutive d'une compétence, qui ne peut être considérée qu'au stade des opérations formelles, et qui « fait » de $(\mathbf{N}, +, \times, <)$, une sous-structure abstraite de $(\mathbf{D}, +, \times, <)$.

➤ La conception de Simon Stevin ne se résume pas dans cette seule « invention » sémiotique. Aussi, concernant la dimension épistémologique historique, Deh, nous allons insister brièvement sur deux points :

- L'héritage aristotélien : « *Le principal obstacle auquel Stevin doit faire face, lors de l'introduction de sa notation décimale, est un concept de nombre excluant aussi bien l'unité que les fractions de l'unité. Il s'agit du concept grec de nombre, encore en vigueur dans les démarches théoriques du XVIe siècle* ». « *Cette conception limite le domaine numérique grec, par nécessité logique, à celui des nombres naturels (les nombres utilisés pour compter). Le zéro et les expressions fractionnaires en sont exclus* »¹⁰⁵⁸.

- « *On considérait qu'une grandeur est une quantité qui peut être divisée indéfiniment sans perdre son essence ; dans ce dernier cas, la division n'est pas bornée, ce qui veut dire qu'il n'existe pas d'unité « naturelle » de mesure de telles grandeurs. Les nombres et les grandeurs constituent des classes disjointes et indépendantes et, par conséquent, leurs études respectives sont différentes et irréductibles* »¹⁰⁵⁹.

A partir de la pratique de la mesure, Simon Stevin identifie les propriétés communes aux nombres et aux grandeurs, et propose un concept unifié de nombre¹⁰⁶⁰.

Conclusion sur une conception de séquence didactique.

On conçoit bien, dans les analyses de Deh et de Dep, qu'un homéomorphisme entre les deux développements, cognitif et mathématique, est concevable dès lors que :

➤ la situation objective se construit comme une situation de mesure (par exemple de surface. L'élève (de CM1 ou de CM2) dispose dans la situation d'une unité de mesure d'aire, d'une aire à mesurer et de sa compétence, C_{li} ;

➤ une seconde situation objective se construit comme une recherche d'une nouvelle écriture de la mesure, en respectant la règle de la numération décimale de position. L'important est bien de concevoir cette situation, comme conduite, dans la situation de référence par le respect des règles de l'écriture décimale de position. Le système dispose, dans la situation, de la mesure, sous la forme d'une somme de fractions décimales, et de sa compé-

¹⁰⁵⁸ Guillermina Waldegg (Mexique). *L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin*. Article cité

¹⁰⁵⁹ Ibid

¹⁰⁶⁰ Ibid

tence C_{0i} . C'est l'intériorisation des actions visant la nouvelle écriture, dans le respect de ces règles, qui conduit au développement de C_i vers C_f ¹⁰⁶¹.

Représentons dans un tableau l'homéomorphisme :

Développement cognitif	Développement mathématique.
C_{1i} C_{0i}	« mesure fractionnaire décimale » « écriture des entiers »
Obstacle non perçu par l'élève mais franchi ¹⁰⁶²	Obstacle épistémologique perçu par l'enseignant
C_f : coordination de C_{1i} et de C_{0i} plus a	« mesure en écriture décimale » : forme nécessaire

Alors que nous avons noté précédemment pour une majorité d'auteurs :

Développement cognitif	Développement mathématique.
C_{1i}	« mesure fractionnaire décimale »
C_f sans a	« mesure en écriture décimale » par conversion arbitraire
Obstacle non perçu par l'élève et non franchi	Obstacle épistémologique non perçu par l'enseignant :
C_{0i} coordonnée à C_f et non constitutif de C_f . Le « théorème » a est d'existence contingente.	« mesure en écriture dite décimale » : forme non nécessaire mais reconnaissable a posteriori

Comme on le voit :

- la « construction de C_f » est fragmentée (il y a perte de connexité). Le « théorème » a, qui caractérise le franchissement d'un obstacle, et implicitement associé à la construction du nouveau schème, n'est donc pas un théorème actualisable qui permettrait de préparer ultérieurement le théorème de plongement, exprimé par le « théorème » b ;
- les écritures décimales sont, dans une autre conception, une forme synthétique du concept de nombre, reconstruit par Simon Stevin, et intériorisé à partir des actions, dans la situation de référence, englobant la seconde situation objective. Le choix des auteurs de proposer d'emblée la conversion, entre deux registres de représentations sémiotiques, conduit à vider la situation de référence, relative à la construction du « théorème » a.

2.3.5.5.6 Le concept d'obstacle

- **Définition** : par abus de langage, nous appellerons **inertie d'un schème S_c** , ce qu'exprime le principe d'inertie.

¹⁰⁶¹ Nous avons effectivement conçu, à la demande de stagiaires enseignants, une telle situation qu'ils ont adaptée à leur classe.

¹⁰⁶² Notons que cet obstacle a pu être envisagé, ou réellement franchi antérieurement, lors de construction des fractions, au cours de laquelle, précisément, l'unité de mesure a été « rompue ». Nous allons, ci-dessous, donner notre position relativement à cet obstacle.

Conséquence du POSTULAT 1 : le principe d'inertie définit le fonctionnement du système comme faisant obstacle au développement d'une compétence.

- **Définition** : nous appellerons **obstacle cognitif** O_c , l'inertie du schème S_c .
- **Définition** : nous appellerons **obstacle épistémologique** O_{ce} , l'inertie du schème S_c , dans les équilibrations de type 3¹⁰⁶³.

Sur notre exemple, nous pouvons préciser le point suivant : nous avons pu noter que pour l'extension du concept des mesures de grandeurs, Simon Stevin s'est heurté à l'obstacle épistémologique O_{ce} de la conception aristotélicienne de la mesure des grandeurs continues. Notons S_{ci} le schème de la mesure entière des grandeurs, schème construit donc, en milieu scolaire et sans référence au paradigme aristotélicien. L'obstacle O_{ce} s'oppose à la conception que ces nombres entiers désignent autre chose que la représentation qui en est faite, par exemple à l'aide de segment. En d'autres termes, si un segment quelconque représente une certaine grandeur continue, il est non mesurable puisqu'il n'existe pas d'unité de mesure dans ce cas. On peut alors considérer la forme scolaire de l'obstacle O_{ce} que nous noterons O_{cie} . Cet obstacle s'oppose donc à l'expression d'une division décimale de l'unité, et dans un registre prolongeant celui de la numération décimale de position, en usage pour les quantités entières. Sans médiation spécifique, tout système se serait lui-même heurté à la forme scolaire de cet obstacle. Or, on peut concevoir une médiation du développement entre C_i , de composante S_{ci} , et C_f telle que, du point de vue cognitif, un tel obstacle peut être franchi sans difficulté (non contourné comme dans les propositions majoritaires), en ce sens que S_{cf} apparaît comme une extension naturalisée de S_{ci} , dans la seconde situation de référence. Ainsi, la médiation didactique, peut aider à la construction de $(D, +)$ et, selon le principe de continuité, la division de l'unité s'y retrouve par nécessité, mais au terme d'une construction achevée d'une certaine construction sémiotique¹⁰⁶⁴.

Les équilibrations de type 2 ne sont pas associées historiquement à des points d'arrêt ou de remise en cause des fondements dans l'histoire des mathématiques, ce qui peut être le cas, relativement aux équilibrations de type 3. Ainsi, la mesure de l'obstacle, dans le cas des équilibrations de type 3, pourrait être plus grande que dans le cas des équilibrations de type 2. Toutefois, nous ne tenons pas la réciproque pour vraie, dès lors que pour un apprentissage, l'enjeu se situe tout aussi bien au niveau du langage, et que la dénotation se trouve remise en question, par le fait même qu'un schème, pourtant activé, une fois qu'une formulation langa-

¹⁰⁶³ Une formulation naïve étant donc: un obstacle épistémologique est un schème ou une compétence ou une connaissance.

¹⁰⁶⁴ Précisons que la rupture de l'unité a pu être posée dans la construction des fractions. Mais certainement pas dans toutes les approches didactiques.

gière F_c a été reconnue comme cause déterminante de cette activation, se trouve finalement inadapté (production d'erreurs ou échecs). **Ainsi, un obstacle cognitif tient sa résistance, aussi bien du savoir en jeu, et historiquement repérable, que des formulations langagières, dont les significations sont à concevoir elles-mêmes en développement, développement pour un système, indissociable de nouveautés référentielles**¹⁰⁶⁵. Ce qui implique que la résistance d'un obstacle dépend aussi du choix, par la médiation didactique, de la situation objective. Mais la médiation didactique peut aussi changer, comme nous l'avons vu dans certains cas, la nature d'un obstacle, ce qui nous semble relever d'une particularité de l'apprentissage des mathématiques.

➤ Prenons un autre exemple.

- Supposons qu'un système, en début d'année de CP, ait la compétence (C_{0i}) de dénombrer une collection d'objets, et associée au schème S_{c0i} « du comptage un par un », la forme langagière F_{c0i} étant « compter le nombre de... ».

- Donnons-nous comme compétence C_f , « compter le nombre de... », et associée au schème S_{cf} du « comptage par addition réitérée ». La forme langagière F_{cf} est donc la même. Mais finalement, les deux formes langagières ne seront pas, par définition, synonymes.

- Classiquement, on peut proposer aux systèmes la situation objective qui contient, comme objets matériels, deux rectangles quadrillés, l'un de dimensions « 5x3 », un autre de dimensions « 7x9 » et l'énoncé, « pour chacun des deux rectangles, combien y a-t-il de carrés ? »¹⁰⁶⁶.

- Outre C_{0i} , notre système cognitif dispose de la compétence C_{1i} , « calculer une somme de plusieurs entiers »¹⁰⁶⁷. Dans la situation de référence, tous les systèmes agissent par activation du schème S_{c0i} . Si pour le premier rectangle, on n'enregistre que peu d'erreurs, pour le second, la plupart des systèmes se trompent. Rien ne vient remettre en question le schème S_{c0i} , sinon l'invalidation par l'enseignant du résultat du comptage.

- La médiation didactique s'organise alors, pour que finalement les systèmes, dans le second cas, effectuent le calcul : $7+7+7+7+7+7+7+7+7$. Si nous analysons cette situation, telle que souvent nous l'avons observée, nous retenons une équilibration de type 2, puis-

¹⁰⁶⁵ Rappelons que nous définissons la possibilité logique d'une formulation langagière comme l'existence d'une représentation, image de la formulation par la fonction de référence. Ainsi, un tel développement signifie une nouvelle situation de référence et un accroissement du dénoté de la formulation langagière.

¹⁰⁶⁶ Rappelons que la question qui fixe comme tâche un dénombrement, contient, de façon synonyme, dans la pédagogie traditionnelle, le prédicat « compte » ou le prédicat « combien »

¹⁰⁶⁷ Nous supposons que le dénoté d'une telle compétence contient la situation « du dénombrement de la réunion de plusieurs ensembles disjoints », et associée aux invariants opératoires, relatifs à la somme des mesures d'ensembles disjoints et au théorème de l'associativité de l'addition.

qu'elle consiste en la coordination des compétences C_{0i} et C_{1i} , et que le « découpage » est presque toujours montré et non découvert : l'obstacle O_{c0i} n'étant « franchi » qu'à l'aide de plusieurs ostensifs¹⁰⁶⁸, introduits par l'enseignant (ou le manuel).

- Les aspects importants sont que :
 - ce que les systèmes intériorisent n'est pas une nouvelle façon de compter, et n'est donc pas une re-signification implicite du verbe d'action « compter »,
 - pour une collection « en vrac », la fonction de référence conduit à la situation dans laquelle, « on compte un par un », alors que pour les grands rectangles, la fonction de référence conduit à la situation, dans laquelle on doit compter par lignes ou par colonnes, parce que sinon, « on se trompe ». Notons que ces colonnes ou ces lignes sont déjà des résultats partiels d'un comptage un par un. A ce stade, les exercices d'applications conduiront inévitablement à renforcer un équilibre de type 2.

- Supposons que pour ce même système, en CP, on propose plutôt l'énoncé suivant : « dans un engrenage, lorsqu'une grande roue fait un tour, une petite roue fait 7 tours (on peut concevoir un mécanisme effectivement « manipulable », avec compteur et commandes de la rotation de l'une ou de l'autre des deux roues). Combien de tours fait la grande roue quand la petite roue fait 63 tours ? ».

- Par la régulation anticipatrice, la forme langagière « combien de » conduit à l'activation de S_{c0i} . Quoiqu'il arrive, l'activité va contenir l'inhibition de ce schème, sans intervention de l'enseignant puisque S_{c0i} est inadapté. Il s'ensuit que ce qui est remis en question est la dénotation du verbe « compter » car on ne peut pas imputer au schème S_{c0i} les erreurs (en cas de mauvaises représentations) ou les échecs (abandons ou demandes d'aide...). C'est exactement le problème posé par cette situation, car celle-ci n'est pas assimilable par S_{c0i} , (contrairement à celle des rectangles).

- Ainsi, l'activité du système va se retourner sur la compréhension du mot compter. Nous n'analysons pas davantage cette activité qui devrait conduire à un oubli momentané de la question, au profit d'une réflexion sur le mécanisme, et avec expérimentation, virtuelle ou physique. La réponse attendue proviendra d'une intériorisation de l'action et d'une restructuration du dénoté du verbe « compter ». Notons que l'activité du système, dans la situation de référence, n'est pas la construction directe du schème S_{cf} . En fait, cette construction concerne un schème $S_{c'f}$, réciproque de S_{cf} ,¹⁰⁶⁹ dans la mesure où l'exercice de $S_{c'f}$ suppose l'activation virtuelle de S_{cf} , et ici, une bonne part de sa construction. Cet aspect fon-

¹⁰⁶⁸ Donc coordination aussi avec certains schèmes perceptifs.

¹⁰⁶⁹ Il concerne en fait une opération de division.

damental de l'activité cognitive constructive, et qui concerne le concept de la réversibilité opératoire, sera développé, sous une forme systématique, dans le paragraphe 3. Nous définissons l'équilibre obtenu comme de type 3, et l'obstacle franchi, comme épistémologique, dès lors que l'on retrouve, dans ce cas, une remise en question d'un fonctionnement cognitif transcendant, à savoir la dénotation elle-même.

➤ **Propriétés des obstacles :**

- par définition, la phénoménologie d'un obstacle O_c a pour corrélation l'étude de la dénotation ;

- le principe d'inertie définit l'obstacle comme normal et systématique, car consubstantiel du système, en tant que structure conservant son organisation. En conséquence, un schème S_C ne peut s'assimiler une situation perturbante de types 2 ou 3, sans une médiation spécifique ;

- le principe d'inertie et le postulat 2.1 expliquent la production de représentations inadaptées, dans le cas de situations perturbantes de type 2 ou de type 3. En particulier, un schème S_c , est systématiquement activé, « à partir » d'une certaine forme langagière F_C , dans une certaine classe de situations. L'activité du schème S_C peut alors conduire le système à l'échec (sous diverses formes) ou à la production d'erreurs ;

- le principe d'inertie explique les lenteurs et les décalages relatifs aux accommodations, dans les cas des équilibrations de type 2 ou de type 3. En conséquence, l'obstacle peut, un temps, se manifester par des faits de récurrence ou de résistance ;

- d'après le postulat 2.2, si le contexte est favorable, le franchissement d'un obstacle épistémologique s'accompagne toujours d'une restructuration cognitive. En particulier, le dénoté d'une même forme langagière prend lui même la forme d'une nouvelle structure¹⁰⁷⁰ ;

- de plus et, d'après le postulat 1, cette restructuration ne concerne pas seulement un schème, mais également certaines régulations. Nous avons défini les régulations comme des opérations dont les schèmes sont certains des arguments. En ce sens, on peut attendre des équilibrations en chaînes : une équilibration de type 2 ou de type 3 concernant les schèmes, peut s'accompagner d'une équilibration de type 1, au niveau de certaines régulations. Et l'on peut envisager, à terme, une restructuration d'un ensemble de fonctions dont la déno-

¹⁰⁷⁰ C'est ce qui fait que, compétence nouvelle C_f et compétence ancienne C_i ne nous apparaissent pas « comme concurrentes, sur le domaine ancien », mais verrons à terme, leur exercice régulé, en particulier, par une régulation inhibitrice.

tation est un élément¹⁰⁷¹.

Conséquence didactique : ainsi, et concernant les compétences mathématiques, cette restructuration qui, au niveau des schèmes, est au moins, comme nous l'avons vu, de nature psycholinguistique, peut s'accompagner d'une équilibration concernant la fonction de dénotation. C'est essentiellement ce type de restructurations que l'on devrait, en principe, retrouver dans les situations de référence. Des représentations, qui donnent lieu à des productions langagières ou à des actions, sont alors des observables pour l'enseignant qui devrait alors chercher à les réguler.

2.4 Conclusion

Les développements précédents apportent, à notre sens, des réponses aux questions Q1 et Q2 : nous avons proposé un concept généralisé d'obstacle au développement de compétences mathématiques, en milieu scolaire et primaire. Nous l'avons ancré dans un paradigme cognitif, en particulier nous avons focalisé notre construction sur le caractère psycholinguistique de tout développement de compétence, développement associé à celui de la fonction de dénotation. **La définition d'un obstacle repose fondamentalement sur le principe d'inertie d'un système cognitif, principe explicatif donc, puisqu'il permet de retrouver les caractéristiques connues des obstacles.** Mais, sa définition locale repose, tout aussi fondamentalement, sur l'épistémologie historique des savoirs en jeu. L'analyse conjointe des deux épistémologies psychologique et historique apporte, à ce concept, les éléments de compréhension de ce qui peut faire obstacle, dans les situations d'apprentissage ; à la condition de ne pas oublier que les mots de la langue, en particulier, ceux contenus dans des énoncés de tâches, ont aussi une histoire, et que là, se trouvent également des composantes des obstacles à l'apprentissage¹⁰⁷². **Moyennant cette proposition, nous pensons que le concept présente véritablement un caractère de prédictibilité ; ce en quoi il possède une véritable valeur pragmatique.** Nous avons répondu ainsi, en partie, à la question Q3. Relativement à cette dernière forme d'évaluation du concept, il nous faut donc envisager maintenant la conception des situations didactiques, justifiée par une technologie explicite et achevée.

3 Achèvement d'une construction technologique

En d'autres termes, nous pouvons maintenant envisager les questions Q4, Q'4 et Q''4 qui concernent notre problème central : la conception de séquences didactiques, visant l'acquisition d'une compétence mathématique nouvelle. Cette acquisition suppose, comme

¹⁰⁷¹ Il nous semble, qu'à ce niveau, on se trouve connoter l'épistémologie bachelardienne.

¹⁰⁷² Comme nous en avons donné plusieurs exemples. Sous 2.

nous l'avons vu, des conditions optimales de possibilité dont nous allons résumer les principales.

3.1 Structuration didactique

La distinction entre situation objective et situation de référence est importante, car elle connote que, d'une part une certaine régulation fait que le sujet prend objectivement possession de la situation dont il est lui-même une des composantes, et d'autre part, qu'il y a un second temps, au cours duquel se construit une compréhension de certaines de ces coordinations nécessaires et suffisantes pour atteindre le but initialement fixé dans la situation objective. A l'instar de Guy Brousseau¹⁰⁷³, Claire Margolinas a produit une structuration des situations d'apprentissage, en situations emboîtées, et dite structuration du milieu¹⁰⁷⁴. Toutefois, comme l'a montré Guy Brousseau, l'apprentissage, proprement dit, relève d'une autre situation « emboîtant » les précédentes¹⁰⁷⁵. De plus, une telle situation d'apprentissage peut se décliner en situation didactique d'action (ce que nous reprenons), une situation didactique de formulation et une situation didactique de validation¹⁰⁷⁶. Pour notre propos, nous pouvons considérer que formulation et validation relèvent de compétences spécifiques et donc entrent dans la catégorie plus large de l'action. **Nous retenons d'une part la situation objective qui est ce dont un élève prend conscience en premier lieu et sans autre finalité, et d'autre part, la situation de référence, qui est celle de la construction en acte, donc au moins implicite, d'un développement de la compétence.** Nous ne représentons pas la position de l'enseignant, dans la description qui va suivre¹⁰⁷⁷.

Exemple

➤ Nous avons présenté¹⁰⁷⁸, à des groupes d'élèves de maternelle (grande section), un milieu matériel composé d'objets hétéroclites, certains percés d'un trou, et d'autres non. Le milieu présentait aussi l'énoncé oral de tâche suivant : « mets dans ce panier tous les objets pouvant servir à faire un collier ». Se trouve ainsi définie la situation objective, en y rappelant que lui est constitutif un élève dit objectif, et disposant de certaines compétences.

Les élèves de certains groupes ont mis dans le panier tous les objets percés. L'activité des systèmes peut être décrite succinctement, comme la construction d'une représentation finalisée de la situation, d'un schéma complet d'actions et de l'action de construction d'une

¹⁰⁷³ *Le contrat didactique, le milieu*. RDM. Volume 9 (3). Pages 309-336. 1990.

¹⁰⁷⁴ *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. Actes de l'université d'été de la Rochelle. Juillet 1998

¹⁰⁷⁵ Situation d'institutionnalisation que nous n'évoquerons pas dans cette thèse.

¹⁰⁷⁶ Ou situations adidactiques, en chaque cas.

¹⁰⁷⁷ Ce dont, par contre, rend compte la construction de Claire Margolinas. *Les débats de didactique des mathématiques*. Edition. La pensée sauvage. Pages 89-102. 1995.

¹⁰⁷⁸ Après apprentissage, et sur lequel nous reviendrons, dans le chapitre suivant.

collection. Cette situation d'action est désignée comme situation de référence. **Une certaine structure de schèmes, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant, constitue l'invariant cognitif de la compétence en exercice dans cette situation de référence.**

➤ A partir de ce point, il est envisageable de faire formuler par les élèves, un certain prédicat. Le milieu matériel est alors la situation de référence précédente et l'énoncé oral suivant : « Qu'as tu fait ? ». Se trouve alors définie une nouvelle situation objective, en y précisant que lui est constitutif un élève dit objectif, et disposant de certaines compétences, dont celle de s'observer dans la situation précédente. Dans la situation de référence, une activité dite réflexive est construite, et il est envisageable de penser que la réponse des systèmes se limite, le plus souvent, comme nous l'avons déjà signalé dans notre analyse du concept didactique de conscience, à : « On a mis ensemble tous les objets qui peuvent servir à faire un collier ».

➤ A partir de ce point, on peut concevoir comme milieu matériel la situation de formulation précédente et l'énoncé oral suivant : « Pourquoi peuvent-ils servir à faire un collier ? ». Se trouve alors définie une nouvelle situation objective, en y précisant que lui est constitutif un élève dit objectif, et disposant de certaines compétences, dont celle de s'observer dans les situations précédentes. Dans la situation de référence, d'une activité de réflexivité, on attend une forme de validation : une réponse possible, et qui exprime le prédicat que se sont construits les systèmes, est, « parce qu'ils ont tous des trous ».

➤ A partir de ce point, il est envisageable de demander aux élèves une validation plus argumentée. On peut poursuivre par des questionnements qui chercheront à faire produire un véritable raisonnement, et que les systèmes ont conservé jusqu'ici implicite¹⁰⁷⁹. Le milieu matériel est alors chaque fois la situation de référence précédente, l'énoncé oral suivant : « Pourquoi est tu sûr que tu as bien choisi tous les objets qui peuvent servir à faire un collier ? » ou une autre énoncé visant le même but et un nouvel élève objectif.

➤ Il est précisé là, qu'en dehors de la situation objective initiale, un des états de ce processus croissant, peut être considéré par le système cognitif, comme une situation objective emboîtée dans l'état suivant, à ceci près, qu'avant de revêtir cette forme statique (stabilisée devrions-nous dire), elle résulte d'une construction dans la situation de référence.

Les situations, dans lesquelles l'élève a engagé une réponse, sont bien des situations d'action. Il avait pour tâche de répondre à la question posée, ce qui est une forme d'action.

¹⁰⁷⁹ Et qui correspond au développement : « Un collier est une ficelle sur laquelle on enfle des objets. Il est nécessaire que l'objet ait un trou. C'est suffisant pour pouvoir faire le collier. Donc tous les objets qui peuvent servir à faire un collier sont tous les objets qui ont un trou ». Notons que la ficelle n'est pas un des objets du milieu matériel initial.

Des schèmes, dont certaines régulations, ont bien été activés, pour s'adapter aux spécificités de la communication voulue par l'enseignant, et en particulier, à la suite des questions enchaînées. On voit, sur cet exemple, les sens que l'on peut accorder au concept d'action, dans un cadre scolaire.

Nous notons que, dans cette suite croissante de situations, un objectif sous-jacent est une évaluation du niveau de prise de conscience des systèmes cognitifs, relativement à la compétence engagée dans chaque situation. On peut donc prévoir qu'elle atteint toujours un maximum¹⁰⁸⁰. Ce maximum est ce qui définit les limites de la compétence « comprendre », pour un système donné. **Ces précisions nous conduisent à définir une situation de compréhension, dès lors qu'une situation de référence lui est constitutive.**

Nous pouvons résumer, par un schéma, la nature canonique d'une situation didactique qui modifie, sans doute, la structuration de Guy Brousseau : nous différencions situations de compréhension et situations d'apprentissage, car nous distinguons trois moments : le premier concerne le début de la construction d'un schème, dans la situation de référence, mais uniquement régulée en fonction des observables sur les objets externes et leurs modifications, consécutives aux actions du sujet, et sans plus d'anticipation. Une pré-structure de schèmes, avec assimilation déformante ou non, est constitutive de l'activité du système. La conscience peut ne s'exprimer là qu'en acte ; le second concerne celui d'un début d'accommodation (réussie) des structures anciennes du sujet à la situation de référence. Le système ne peut pas y formuler encore toutes les inférences qui ont permis une coordination entre les observables dans la situation de référence. Mais il faut y admettre, à la fois de telles inférences, et des anticipations rétroactives, visant la réussite dans le but à atteindre. De plus, comme nous l'avons vu, dans l'exemple précédent, cette situation de compréhension peut être déclinée en situation de formulation et situation de validation. Ainsi, un certain niveau de prise de conscience peut alors y être explicité, voire favorisé. D'autre part, un tel fonctionnement fait appel à des régulations qui ne sont pas spécifiques du schème lui-même concerné par cette construction. Mais il donne au sujet des possibilités d'y gagner une forme mémorisée, et plus ou moins consciente, de certains éléments d'une connaissance ; jusqu'ici, le dénoté associé à la forme langagière fondamentale de la compétence développée, peut ne se trouver réduit qu'à un type de situations de référence. **Le troisième moment est donc celui qui, s'échelonnant dans le temps, concerne le renforcement de ce nouvel organe qu'est le schème construit. Il s'agit**

¹⁰⁸⁰ Il est remarquable de noter la difficulté voire l'impossibilité d'obtenir, relativement à la production d'heuristiques, une prise de conscience des systèmes cognitifs. Ainsi, dans le cas qui nous a servi d'exemple, on ne peut obtenir l'expression de conditions nécessaires.

de favoriser une extension du dénoté, le jeu des assimilations-accommodations-inhibitions, relevant d'équilibrations du premier type¹⁰⁸¹. C'est ce qui nous appelons situation d'apprentissage.

Nous noterons que nous n'envisageons pas, de façon explicite, de contraindre une situation à être adidactique. En effet, notre approche privilégie, au contraire, une médiation forte de l'enseignant. Toutefois, on ne saurait, même dans ce cas, écarter le principe que des moments, dans l'activité des systèmes, soient associés à une complète dévolution. C'est ce qu'exprime la formulation : « enseignant agissant ou non ».

Dans le tableau, présenté ci-dessous, il faut y entendre qu'une ligne « est la situation désignée aussi bien par sa dernière cellule (désignation statique) que par la première cellule de la ligne du dessus (désignation dynamique) ». Précisément, une situation d'un certain niveau est constitutive d'une situation de niveau immédiatement supérieure.

Situation d'apprentissage	Enseignant	Structure (S _{Cf})	Structure de schèmes opératoire et disponible	Situation didactique
Situation de compréhension	Enseignant agissant	Système apprenant	Renforcement de la structure spécifique de schèmes	Situation d'apprentissage
Situations de référence	Enseignant agissant ou non	Système comprenant	Équilibration d'une structure spécifique de schèmes	Situation de compréhension
Situation objective spécifique	Enseignant agissant ou non	Système agissant	Représentations finalisées →	Situation de référence
Milieu matériel	Enseignant objectif	Élève objectif (S _{Ci})	Représentation non finalisée →	Situation objective

Le tableau suffit à définir ce que l'on peut appeler situation didactique.

3.2 Conditions de possibilité du développement des compétences

Il s'agit de définir des contraintes imposées à la médiation didactique.

3.2.1 La réversibilité opératoire

Après avoir repris le concept de Jean Piaget, nous allons préciser et théoriser ce que nous pensons être parmi les germes cognitifs, au niveau empirique, de ce qui deviendront des inversions et des réciprocités logiques, au niveau formel.

¹⁰⁸¹ Nous préciserons qu'il s'agit d'une activité didactique, dite de complétion du schème S_c.

3.2.1.1 Jean Piaget et la réversibilité opératoire

« Le passage de la renversabilité à la réversibilité se traduit par l'apparition d'un jugement de conservation exprimant précisément le fait que, dès lors, le sujet conçoit la deuxième action comme l'inverse (ou la réciproque) de la première, et non pas seulement comme permettant de retrouver l'état antérieur du système »¹⁰⁸². Ainsi, un enfant de l'école maternelle peut très bien constater, et même anticiper, qu'après avoir gagné trois billes puis perdu trois billes, il ne lui en reste finalement plus. Mais ce constat final ou cette inférence peuvent n'être que d'ordre expérimental et, en particulier, non anticipés de façon systématique. Il en sera autrement, lorsque plus tard, il pourra expliciter la composition de deux opérateurs et le cas général de leur neutralisation

Dans la conception de Jean Piaget, **la réversibilité opératoire** :

- traduit toujours une coordination acquise entre deux aspects d'une même réalité ;
- peut être l'expression d'un couple d'opérations inverses l'une de l'autre, le produit algébrique de ces deux opérations étant alors l'opération neutre. « *Les structures de l'intelligence sont formées par la coordination d'opérations, c'est-à-dire d'actions intériorisées composables et réversibles* »¹⁰⁸³.

Exemples :

- l'opération unaire et involutive de la négation « non »¹⁰⁸⁴, définie sur un ensemble de propositions et qui remonte aux formes les plus primitives de la conduite¹⁰⁸⁵,
- les opérations externes, définies sur les entiers : quel que soit l'entier a , $(+3).a$ et $(-3).a$ avec $(-3).((+3).a) = (0).a$,
- de nombreux exemples en mathématiques,
- peut être l'expression de la réciprocité de deux relations, un certain produit logique s'exprimant comme une relation d'équivalence.

Exemples¹⁰⁸⁶ :

- La compréhension qui est l'expression d'une propriété commune à tous les objets d'une catégorie et l'extension qui s'exprime (au moins potentiellement) par l'ensemble des objets de la catégorie et considérés isolément, peuvent définir des relations réciproques. Si

¹⁰⁸² Jean Piaget. *Études d'épistémologie génétique*, volume 2, p. 45. Puf 1957.

¹⁰⁸³ Par opérations, on peut entendre une transformation n-aire qui opère sur des objets d'un ensemble E (son domaine de définition) et « les fait passer » d'un état initial à un état final, un ensemble d'objets de E ou non.

¹⁰⁸⁴ Non (non(p)) = p

¹⁰⁸⁵ Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La psychologie de l'enfant*. Chapitre V. *Le pré-adolescent et les opérations propositionnelles*. Puf.1973.

¹⁰⁸⁶ Nous avons voulu ne pas reprendre les exemples piagétiens 'de hauts niveaux' (par exemple les propositions $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ sont réciproques) pour nous rapprocher d'une cognition plus primitive.

l'on veut être un minimum explicite : soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. Considérons $D(E)$, un ensemble de définitions d_B qui caractérisent chaque partie B de E . Considérons $P'(E)$ l'ensemble des extensions obtenues à partir des parties de E . Désignons par c et e , respectivement, des relations de compréhension et d'extension dans les sens suivants : $d_A c d_B$ signifie que d_A implique d_B ; $A' e B'$ signifie que l'énumération A' de l'extension de A est comprise dans l'énumération B' de l'extension B .

On a bien : $d_A c d_B \Rightarrow A' e B'$ et $A' e B' \Rightarrow d_A c d_B$ (et : produit logique). D'où l'équivalence $d_A c d_B \Leftrightarrow A' e B'$.

- Une collection d'objets E étant donnée, soit une situation de tri des objets de E , selon la couleur : considérons qu'un objet est mis dans une boîte parce qu'il est rouge (ou relativement à une autre boîte parce qu'il est bleu...) et les relations suivantes R_1 et R_2 entre les « états-positions possibles de tels objets. La notation O_i désigne un objet à l'extérieur des boîtes et la notation O_j désigne un objet à l'intérieur d'une boîte. La relation binaire R_1 (O_i, O_j), est définie par « O_i devient un O_j » (car il est rouge ou bleu...). La relation binaire R_2 (O_k, O_s) est définie « par O_k devient un O_s » (car il sort de la boîte où on a mis les rouges ou les bleus). R_1 et R_2 sont réciproques l'une de l'autre : la couleur de l'objet quelconque O_j , tiré de la boîte, est la couleur de tous les objets O_i mis dans la même boîte et réciproquement ! La relation binaire d'équivalence, sous-jacente, est définie dans l'ensemble de tous les objets O_i de E , et par la formulation : « avoir la même couleur ».

Notons que les deux exemples précédents sont explicites quant à l'utilisation de certaines formulations langagières. Il s'agit respectivement de l'expression d'un prédicat ou d'un critère. Les équivalences que l'on a pu y déterminer sont précisément ce pourquoi, nous allons nous rapprocher d'une définition de la réversibilité opératoire dans un cadre psycholinguistique.

3.2.1.2 Formalisation de la réversibilité opératoire

« Tout état d'équilibre est reconnaissable [...] à une certaine forme de réversibilité. Cette dernière constituera, par conséquent, dans le cas où l'équilibre atteint par la pensée est de nature opératoire, le mécanisme essentiel des structures d'ensemble qui répondent aux différentes formes d'équilibres »¹⁰⁸⁷.

Nous allons considérer cette réversibilité, comme résultant de l'exercice d'une régulation systématique, qui établit une relation dynamique entre une forme langagière F_C et un schème S_C . Nous avons déjà noté cette régulation comme une opération anticipa-

¹⁰⁸⁷ Lexique. Opus cité. Extrait de « De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent ».

trice ou schème anticipateur R_a .

Au niveau opératoire, cette régulation est l'expression de la réciprocité entre un geste (ou, plus précisément, la conséquence du geste) et une parole (ou, plus précisément, une formulation langagière spécifique)¹⁰⁸⁸.

➤ Par exemple, la forme langagière F_c' « trier selon la couleur », relativement à un ensemble d'objets (dont les couleurs sont discernables), et élément de la situation perturbante \mathcal{S}_c' , est mise en relation \mathcal{R}_1 avec l'exercice d'un schème $S_{C'}$, plus ou moins complexe (selon le dénoté de F_c' ¹⁰⁸⁹), et tel que la performance explicite est une opération pertinente de tri sur les objets. Réciproquement, considérons une situation contenant le résultat d'un tel tri, à l'issue d'une activité que l'on peut noter S_c' (\mathcal{S}_c'). A la question $F_{c''}$ de déterminer le critère de tri, un système disposant de la compétence C' , « trier selon un certain genre », et disposant du résultat de l'activité S_c' (\mathcal{S}_c'), doit « produire » sa mise en relation \mathcal{R}_2 avec la formulation langagière F_c' , puis la forme F_c' elle-même¹⁰⁹⁰. Il y a donc réciprocité entre les relations « $F_c' \mathcal{R}_1 S_{C'}$ (\mathcal{S}_c') » et « $S_{C'} (\mathcal{S}_c') \mathcal{R}_2 F_c' \mathcal{R}_1 S_{C'} (\mathcal{S}_c')$ », au point que le système peut anticiper une équivalence, au sens logique du terme entre F_c' et $S_{C'} (\mathcal{S}_c')$ ¹⁰⁹¹. Nous allons présenter, ci-dessous, par quel jeu de régulations, le système peut parvenir à une telle construction.

➤ Mais réellement, ces deux relations sont à observer sur des plans différents, car l'une est explicite et peut se matérialiser par une activité physique, performance associée à une compétence C' , et l'autre est implicite et relève d'une activité purement mentale. Et il n'est pas inconsistant de considérer que la production de la forme langagière F_c' relève d'une compétence C'' , associée à un schème $S_{C''}$ et à la forme langagière $F_{c''}$: « dire le critère de tri ? ». On se retrouve avec une situation spécifique $\mathcal{S}_{c''}$, de sorte que, dans les deux sens, on peut entendre des actions que l'on peut qualifier de réciproques, dès lors qu'un ensemble suffisant d'objets, dont au moins le résultat de l'activité $S_{c'}$ ($\mathcal{S}_{c'}$), donné dans la situation $\mathcal{S}_{c''}$, dans laquelle se déroule l'activité $S_{c''}$ ($\mathcal{S}_{c''}$), appartient à $r(F_{c''})$ ¹⁰⁹².

➤ Mais il faut noter qu'à ce point, la régulation anticipatrice R_a qui, dans sa forme initiale, pourrait sembler ne concerner que la relation \mathcal{R}_1 , ne suffit pas à expliquer la relation \mathcal{R}_2 , c'est-à-dire la sélection du schème $S_{C''}$. Il convient donc de faire intervenir deux régulations, $R_{a'}$ et $R_{a''}$, l'une anticipatrice du schème $S_{C'}$ et l'autre anticipatrice du schème $S_{C''}$, pour

¹⁰⁸⁸ Une forme langagière écrite ou orale.

¹⁰⁸⁹ Voir des situations de référence, avec responsabilité du calcul du nombre de boîtes ou non, avec méthode libre, par « catégorisations successives » : boîte par boîte ; ou par remplissage aléatoire ; objet après objet...

¹⁰⁹⁰ Avec modification syntaxique de nature linguistique.

¹⁰⁹¹ En abrégé, et en utilisant le connecteur logique de l'équivalence : « affirmer F_c' » \Rightarrow « affirmer $S_{C'} (\mathcal{S}_c')$ ». Mais ceci relève d'une façon de dire trop peu significative.

¹⁰⁹² r est la fonction de référence. Voir 2.3.3.2.

rendre compte, aussi bien de \mathcal{R}_1 que de \mathcal{R}_2 . Et, précisément, l'équivalence relationnelle va conduire à la réversibilité opératoire, à savoir que $R_{a'}$ et $R_{a''}$ sont inverses l'une de l'autre, en tant qu'opérations sur les formes langagières $F_{c'}$ et $F_{c''}$, et dont les exercices respectifs conduisent à la sélection d'un des deux schèmes pertinents¹⁰⁹³. Nous obtenons alors la première relation fondamentale suivante :

$$(R_{a'}(F_{c'}))(\mathcal{S}c') \subset (R_{a''}(F_{c''}))(\mathcal{S}c'')$$

En rappelant que $(R_{a'}(F_{c'}))(\mathcal{S}c') = S_{c'}(\mathcal{S}c')$ est une objectivation virtuelle, dans l'activité du schème $S_{c''}$. Si celle-ci produit finalement la forme langagière $F_{c'}$, elle en contient la reconstitution d'un milieu et d'une activité du schème $S_{c'}$, virtuels et constitutifs d'une situation $\mathcal{S}c'$, ce qui précisément est fondamental dans l'activité du schème $R_{a''}(F_{c''}) = S_{c''}$

➤ Dans de nombreux cas¹⁰⁹⁵, on peut concevoir qu'une contrainte comme l'ordre temporel, selon lequel vont se développer les compétences C' et C'' , ne soit pas imposée par la nature des connaissances en jeu. Il s'ensuit que les constructions des couples $(F_{c'}, S_{c'})$ et $(F_{c''}, S_{c''})$ ne se posent plus selon un ordre nécessaire. En d'autres termes on obtient une relation fondamentale, duale de la précédente et qui peut s'écrire :

$$(R_{a''}(F_{c''}))(\mathcal{S}c'') \subset (R_{a'}(F_{c'}))(\mathcal{S}c')$$

Mais, en fait, cette relation est toujours à concevoir dans le sens suivant : reprenons notre exemple. Lorsqu'un sujet se trouve placé dans une situation de tri, son activité $S_{c'}(\mathcal{S}c')$ contient une représentation d'un schéma complet d'actions, de sorte que le processus de tri se trouve totalement anticipé. En d'autres termes, ce processus est objectivé virtuellement et jusqu'à son terme, à savoir le résultat de cette activité. A ce stade de l'activité notre sujet dispose potentiellement d'une situation objective emboîtée dans une situation $\mathcal{S}c''$.

➤ Ces deux relations nous permettent d'exprimer finalement la réversibilité opératoire fondamentale, relative à un schème $S_{c'}$, et d'un point de vue langagier. Et il faut alors

¹⁰⁹³ Certes, dans le milieu, d'autres indicateurs sémiotiques peuvent jouer lors de cette sélection. Mais nous adoptons une écriture simplifiée qui focalise, parmi les arguments de ce type de régulations, sur une forme langagière donnée.

¹⁰⁹⁴ Il est normal que ces deux relations ne soient pas « symétriques. Ce fait vient que, dans le développement des régulations $R_{a'}$ et $R_{a''}$, $R_{a'}$ peut précéder, sous une forme partielle ou non, $R_{a''}$.

¹⁰⁹⁵ On peut citer toutes les compétences associées à : des opérations mathématiques inverses l'une de l'autre : addition-soustraction, multiplication-division, double-moitié ; des opérations logiques réciproques : compréhension-extension ; relations de comparaison notées \leq et \geq , \Rightarrow et \Leftarrow etc.

« voir, dans l'opération comme telle, une forme supérieure de régulation, dont le contrôle rétroactif est devenu réversibilité complète et rigoureuse »¹⁰⁹⁶.

Formellement, on peut retenir les constructions cognitives suivantes :

$$\mathbf{R}_a = (\mathbf{R}_{a'}, \mathbf{R}_{a''}) ; \mathbf{S}_c = (\mathbf{S}_{c'}, \mathbf{S}_{c''}) \text{ et } \mathbf{C} = (\mathbf{C}', \mathbf{C}'')^{1097}.$$

Conclusion

La médiation didactique doit accompagner systématiquement la construction d'une certaine forme de réversibilité opératoire. Et, sur ce point, notre démarche, que nous définirons comme canonique, est d'envisager cette construction comme de nature langagière. On peut noter, dans les différentes programmations, relatives à l'apprentissage d'une compétence, la restriction de C à C' et corrélativement celle de F_c à F_{c'}¹⁰⁹⁸.

Mais cette réversibilité opératoire se construit sur un temps suffisamment long. Si donc, le développement scolaire en veut accélérer l'équilibre, il devrait nous apparaître fortement médiatisé, l'enjeu étant que ce contrôle rétroactif (l'activité des régulations R_a et R_{a'}), en ses débuts correcteurs, en vienne systématiquement à des feedbacks positifs, en un temps raisonnable¹⁰⁹⁹.

3.2.1.3 Loi didactique fondamentale

Nous pouvons désormais énoncer la loi didactique suivante :

Le schème S_c ne va prendre une forme opératoire définitive, qu'au terme d'une construction à deux niveaux : un couple de régulations R_{a'} et R_{a''}, inverses l'une de l'autre, et un couple de schèmes S_{c'} et S_{c''}, liés réciproquement.

Nous devons prendre le terme de réciprocité dans le sens suivant : l'exercice du schème S_{c'} suppose l'exercice virtuel du schème S_{c''}. L'exercice du schème S_{c''} suppose l'exercice virtuel du schème S_{c'}. Mais, comme nous l'avons vu, cette objectivation virtuelle est dissymé-

¹⁰⁹⁶ Jean Piaget. *Biologie et connaissance*. Opus cité. Chapitre IV. § 14. *Les régulations et l'équilibration*.

¹⁰⁹⁷ Ce choix dissymétrique entre S_{c'} et S_{c''} exprime donc l'ordre dans lequel se sont développées les compétences C' et C''. Certes, dans de nombreuses situations mathématiques, il y a souvent un ordre didactique traditionnel. Mais celui-ci peut tout aussi souvent s'inverser. Par exemple, et en théorie, rien n'interdit de faire « apprendre » la division avant la multiplication ou la soustraction avant l'addition. En vérité, les opérations inverses l'une de l'autre sont, comme on l'a compris, indissociables dans une même situation didactique.

¹⁰⁹⁸ Nous nous éloignons donc, aussi bien des pédagogues qui séparent nettement, dans le temps, l'apprentissage des opérations inverses l'une de l'autre, que de ceux qui, comme Hans Aebli, en font finalement un apprentissage frontal, fondé sur une analyse limitée à la seule dimension épistémologique historique, tout en se référant à Jean Piaget (ce que nous avons décrit en introduction).

¹⁰⁹⁹ Provisoirement, comme tout équilibre cognitif.

trique, pour des raisons didactiques ou des nécessités épistémologiques.

Un exemple¹¹⁰⁰ peut être le suivant : S_c est le schème du calcul d'une somme, dans les cas simples de situations additives (calcul d'une somme $a + b$). $S_{c'}$ est le schème du calcul d'un des termes, dans le calcul d'une somme, le résultat, d , étant donné (calcul de b dans l'égalité $a+b = d$). On voit que l'exercice de S_c suppose une anticipation de la forme générale du résultat d et d'un contrôle de validité (d calculé, on peut retrouver b , en vérifiant), ce qui s'apparente à l'exercice du schème $S_{c'}$. Réciproquement, l'exercice de $S_{c'}$ (« complétion d'une somme à trou »), suppose celui de S_c , remarquons toutefois, à partir d'un indicateur manquant, b . L'inversion des régulations R_a et $R_{a'}$ peut être entendue ainsi : $R_a(F_c) \rightarrow d$, où F_c contient le signe b ; $R_{a'}(F_{c'}) \rightarrow b$, où $F_{c'}$ contient le signe d .

Il est clair que ce qui précède contient, en germe cognitif, « l'inversion algébrique des opérations d'addition et de soustraction ».

Mais un fait fondamental et qui rend complexe l'activité, est que cette construction pourrait parvenir à un achèvement, alors même que la régulation R_a n'active initialement qu'un schème S_c , non encore complètement opérationnel. En effet, cette opérationnalité n'est, véritablement, que lorsque les deux schèmes S_c et $S_{c'}$ se supposent l'un et l'autre, c'est dire sont constitutifs de la forme opératoire du schème S_c . Nous devons alors comprendre, avec Jean Piaget, que les coordinations, entre les observables sur l'action (par exemple ici les propositions de réponses du système), et les observables sur l'objet (par exemple les réponses du milieu), et ceci dans la situation virtuelle \mathcal{S}_{C_f} , s'accompagne d'une prise de conscience réfléchie de niveau 1, portant sur l'activité du système, dans une situation réelle $\mathcal{S}_{C'f}$. **Précisément, la construction du couple ($R_{a'}$, $S_{c'}$) signifie des rétroactions, reconstruisant la relation entre la régulation R_a et son argument, à savoir la formulation langagière F_c .**

Il nous paraît ainsi intéressant de noter que la résolution du problème, qui s'impose dans la situation initiale de référence $\mathcal{S}_{C'f}$, n'est pas l'expression directe de sa solution F_c . Mais, dans un sens plus bachelardien, l'activité de résolution est la construction de $R_{a'}$, et comme on vient de la voir, une reconstruction du couple (R_a , S_c), ce qui finalement conduit à l'équilibre du système fermé R_a ¹¹⁰¹.

Nous pouvons vérifier que, dans l'apprentissage des mathématiques élémentaires, en milieu scolaire, cette loi est générale.

¹¹⁰⁰ Parmi de très nombreux autres.

¹¹⁰¹ C'est pourquoi, nous insistons souvent lors d'animations pédagogiques sur le jugement suivant : dans des situations d'apprentissage de notions nouvelles et dans lesquelles une tâche est proposée, il ne faut pas se focaliser sur la réussite de la tâche, forme logique de la réponse attendue, mais sur la conduite de l'activité de l'élève, au terme de laquelle la réponse principale construite est une certaine forme de conscience de cette activité qui peut conduire à la réponse logiquement attendue.

Définitions

Nous appelons schème fermé, le couple $(S_c, S_{c'})$ constitué des schèmes associés au couple de régulations $(R_a, R_{a'})$.

Nous appelons système fermé le couple (R_a, S_c) .

Une compétence C est opératoire lorsqu'elle est associée à un système fermé (R_a, S_c) .

La composante langagière de la compétence C est définie par le couple $F_c = (F_c, F_{c'})$.

Par abus de langage, et pour simplifier, on pourra désigner la compétence C par le verbe d'action contenu dans la formulation F_c . Mais nous prendrons garde, en pratique, à tenir compte d'une réalité plus complexe.

Remarque importante

Pour la pratique il devient nécessaire de définir ce que l'on peut qualifier d'inversions locales. Si nous avons focalisé notre attention sur l'inversion fondamentale qui concerne une forme langagière F_c , il existe d'autres variables d'une situation perturbante qui peuvent être l'objet d'un questionnement à partir d'une situation $S_{c'}$.

Notons une situation $S_{c'}$, sous la forme d'un prédicat de plusieurs variables, a, b, c, x et F_c , et le prédicat : $\forall F_c (S_{c'} (a, b, c, x, F_c))$ ¹¹⁰², où a, b et c sont des constantes et x une variable. Cet exercice conduit à remplacer la variable libre x par une valeur x (F_c), résultat final de l'exercice d'une certaine compétence C''_x , et indicateur nécessaire à l'exercice de la compétence C' . Le prédicat $\forall F_c \exists x (F_c) (S_{c'} (a, b, c, x, F_c))$ est une proposition vraie. Cet exercice suppose, plus généralement, une régulation d'accommodation visant à construire ce en quoi le schème S_c a besoin pour s'activer. Ce qui suppose un exercice anticipé de la compétence C' . Notons qu'inversement, l'exercice de la compétence C' suppose l'exercice virtuel de la compétence C''_x , dans le sens suivant : une régulation de contrôle conduit bien à vérifier que la valeur x, lorsqu'elle est donnée, est suffisante pour que puisse être menée à bien l'exercice de la compétence C' . On retrouve une réversibilité opératoire que l'on peut qualifier de locale, à savoir que deux régulations spécifiques que l'on peut noter R_a et $R_{a'/x}$ sont inverses l'une de l'autre, en tant qu'opérations sur les schèmes et plus formellement :

$$\forall x ((R_a(F_c)) (S_c) \subset (R_{a'/x}(F_c)) (S_{c'})) \text{ et } \forall x ((R_{a'/x}(F_c)) (S_{c'}) \subset (R_a(F_c)) (S_c))$$

¹¹⁰² \forall, \exists sont les quantificateurs respectivement universel et existentiel

Exemples

Dans le cas du tri, x peut être « le nombre de boîtes » (qui peut être 0) ou la nature des objets. Dans un énoncé, une question posée (ou que se pose le système) peut porter sur le nombre de boîtes nécessaires ou sur la qualité des objets donnés, qui peut les rendre susceptibles d'un tri, le critère étant donné.

C est la compétence « mesurer la longueur d'un segment L donné ». La situation objective correspondant à $\mathcal{S}c'$ admet comme constantes : une unité u de mesure de longueur, un segment donné L , des outils de manipulation, et la forme langagière F_c , « mesurer la longueur du segment L ». Concernant la réversibilité fondamentale, la situation objective correspondant à $\mathcal{S}c''$ admet comme constantes : l'unité u , une mesure de longueur et la forme langagière F_c , « représenter le segment L de mesure donnée ». Comme variable, on peut considérer la donnée ou non de l'unité u et définir une situation objective dont la forme langagière est : « représenter le segment u , le segment L et sa mesure étant donnée ».

Il est remarquable de noter que le plus souvent, réversibilité locale et fondamentale se confondent dans l'apprentissage mathématique. On a noté cela en introduction, avec Hans Aebli, qu'une formulation de l'aire d'un rectangle comme $A = L \times l$ est entendue comme relevant d'une connaissance opératoire car $L = A/l$ ou $l = A/L$. Alors que, par exemple, la question d'une représentation d'un rectangle d'aire donnée n'est pas considérée comme fondamentale. Or cette question est, dans notre approche, constitutive de la situation $\mathcal{S}c''$, relative à la réversibilité opératoire fondamentale. De même, la question portant sur l'unité d'aire ne l'est pas, dans les termes que nous avons donnés. On peut, en l'occurrence, insister encore sur ce que nous considérons comme une focalisation prématurée, à notre sens, sur l'aspect logico-mathématique de la connaissance en jeu.

Nous pourrions, par contre, postuler que toutes les formes de réversibilité possibles sont constitutives d'une construction psychique supérieure, qui conduit à une possibilité d'une expression logico-mathématique des réversibilités opératoires, ce que Jean Piaget définit comme le niveau le plus élevé dans l'achèvement d'un stade des opérations finalement formelles.

Définition

Nous appelons **système complet**, l'ensemble des couples $(R_a, R_{a'/\alpha}(F_c))$ où $R_{a'/\alpha}$ est une régulation qui est activée dans une situation indéterminée par rapport à l'une quelconque de ses variables α ¹¹⁰³.

¹¹⁰³ Mais nous n'épuisons sans doute pas ainsi toutes les réversibilités envisageables.

Notons qu'un schème complet est un schème fermé, en précisant que la complétion d'un schème S_c résulte de l'exercice répété de la compétence C , construite, dans un premier temps, par le développement du schème fermé S_c . Cet exercice conduit en effet à des équilibres des types 1 ou 2 qui élargissent, par la variation des constantes α , le dénoté de la compétence C .

Conséquences didactiques

➤ Le développement d'une compétence de C_i à C_f est celui d'un schème fermé. Une séquence didactique contient des séances spécifiques, relatives aux situations \mathfrak{S}_{C_i} et \mathfrak{S}_{C_f} . Ces séances devraient donc proposer des situations qui répondent d'une construction explicite de la réversibilité opératoire fondamentale.

➤ L'évaluation d'une compétence, une fois admis l'équilibre d'un schème fermé, doit comprendre des exercices de réversibilité locale qui ne se réduisent pas à l'exercice des inversions des opérations mathématiques. Se limiter à celles-ci, conduit à ne consolider de certaines formulations, que l'aspect purement algorithmique et numérique de l'exercice d'une compétence, et insuffisamment l'aspect cognitif.

➤ Un point important, il nous semble, et qu'il convient de rappeler, est que l'enjeu d'un développement des compétences mathématiques, au sens où nous l'entendons, ne peut se limiter au point de vue strictement mathématique que nous pouvons qualifier de point de vue rationnel, pour le différencier du point de vue cognitif. Nous venons d'en expliciter une raison fondamentale. Mais nous allons préciser encore, en quoi les deux analyses sont à distinguer.

3.2.2 Le possible et le nécessaire

3.2.2.1 Quelques considérations sur l'écologie des concepts

C'est une question qui s'associe à une position épistémologique forte, dans certains travaux de la didactique des sciences, comme ceux menés par Christian Orange et par Michel Fabre, dans la cadre de la problématisation¹¹⁰⁴. Elle est par contre d'un abord malaisé en didactique des mathématiques, car aussi bien le possible est-il un concept négligé¹¹⁰⁵ que le nécessaire, un concept trop prisonnier d'une formulation liée à une compréhension classique de l'implication logique : « $p \Rightarrow q$ », se dit parfois, « une condition nécessaire pour p est q ». Remarquons qu'il semble que l'on puisse alors dire « non q est impossible quand p » car « non p est nécessaire pour non q ». D'où une relation formulable entre l'impossible et le nécessaire : « **le nécessaire est ce dont le contraire est impossible** ». Et il semble que l'on

¹¹⁰⁴ Ces chercheurs réaffirment la « valeur apodictique des savoirs scientifiques ». « Cet accès à des savoirs présentant un caractère de nécessité est intimement lié à la problématisation, si on considère que celle-ci consiste, partant d'une question, à la relier à un cadre théorique jugé pertinent, à en explorer les possibles et à identifier des raisons qui contraignent les solutions ». Christian Orange. Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. *Apprentissage scientifique et problématisation*. Volume 35(1). Pages 24-41.

¹¹⁰⁵ En dehors de ce que l'on peut entendre dans la théorie des probabilités.

puisse rejoindre, sur ce point, les chercheurs sur la problématisation¹¹⁰⁶, à la condition de considérer p comme une donnée (élément pertinent retenu dans un énoncé ou construit par inférence), et de supposer l'accord des protagonistes, élèves et enseignants, concernant cadres et registres de représentations pour de tel discours¹¹⁰⁷.

Mais alors qu'en didactique des mathématiques, une telle expression semble exclure le concept du possible, ce dernier va trouver une place plus naturelle en didactique des sciences : Christian Orange précise, en particulier, que dans un débat argumenté entre des élèves, vont apparaître des possibles explicatifs qui seront soumis à débat, afin d'en effectuer un tri et d'en extraire ceux retenus comme nécessaires¹¹⁰⁸. On retrouve, de ceci, de grandes analogies avec les situations de formulation et de validation décrites par Guy Brousseau, dans la théorie des situations didactiques. On comprend d'autant mieux, dans cette approche, que le contraire du possible n'est pas l'impossible mais plutôt le non possible.

Ce que certains auteurs, en didactique des mathématiques, appellent nécessité épistémique est que, dans une théorie mathématique T , la formule propositionnelle « $p \Rightarrow q$ » a aussi la propriété méta-discursive d'énoncer que son contraire est non-possible. Voilà ce qu'elle dit et il ne peut en être autrement. « *C'est la qualité des énoncés qui sont nécessairement vrais à l'intérieur du mathématique, socialement admis par les mathématiciens* »¹¹⁰⁹.

Mais nous voulons préciser ceci : étant donné le développement d'une théorie mathématique T , un problème, posé dans ce cadre, peut conduire, lors de son traitement, à la formulation « $p \Rightarrow q$ », qui n'existe pas encore dans la théorie, soit lorsque celle-ci fait partie du texte de la résolution, parce qu'elle en est un passage nécessaire, soit qu'elle en constitue elle-même la solution¹¹¹⁰. Mais il se peut que, tant qu'un tel problème n'est pas posé, cette formulation n'apparaisse pas. Dans ce cas, on peut la considérer comme un possible épistémique et non comme une nécessité épistémique. Autre chose est une conjecture, qui tout en étant un possible, qui peut admettre droit de cité dans un certain paradigme mathématique, n'en est pas pour autant épistémique. Cette qualité reste en suspens, tant que la validité de sa formulation n'a pas été démontrée, à moins qu'elle le soit implicitement.

¹¹⁰⁶ *Apprentissage scientifique et problématisation*. Page 38. Opus cité.

¹¹⁰⁷ En l'occurrence, le cadre est celui de la logique du premier ordre ou logique booléenne des propositions. Elle devrait imposer les règles pour conduire la raison. Le registre est celui des objets mathématiques en cours d'utilisation.

¹¹⁰⁸ *Débat scientifique dans la classe, problématisation et argumentation, le cas d'un débat sur la nutrition au cours moyen*. Aster n°37. Pages 83-107. 2003.

¹¹⁰⁹ Catherine Sackur et al. *L'expérience de la nécessité épistémique*. Groupe CESAME. RDM. Volume n°25 (1) Pages 57-90. 2005.

¹¹¹⁰ Nous distinguons donc, dans une formulation de preuve, le texte complet de son exposé et la solution finale qui est la réponse à la question posée par le problème.

Nous pouvons maintenant définir le possible et le nécessaire, dans le cadre de notre approche du développement des compétences.

3.2.2.2 Le possible

Les possibles ne sont pas des observables, mais les produits d'une construction du système cognitif, en interaction avec les propriétés d'un certain milieu problématique et antagoniste, comme une situation perturbante S_c , « en les insérant en des interprétations qui sont dues aux activités du sujet »¹¹¹¹. **Ces possibles sont dans un potentiel régulé de réactions d'un schème d'assimilation S_c** ¹¹¹², et dont les expressions se matérialisent en des observables, que l'on considère le plus souvent comme révélateurs de conceptions du système cognitif¹¹¹³. En adoptant ce point de vue, est « non possible » ce qui n'est pas dans le potentiel du schème S_c . Pour ce potentiel, nous reprenons, de Jean Piaget, l'expression suggestive de **norme de réaction du schème S_c** ¹¹¹⁴, et nous entendons que « *le possible résulte d'une activité accommodatrice, à la recherche de son actualisation* »¹¹¹⁵. De plus, et pour préciser, **lors d'une même activité, dans la situation de référence, nous pouvons bien entendre les productions des possibles, comme des tentatives d'accommodation, par régulations successives, mais sans atteindre encore à l'équilibre, sous la forme d'une nouvelle structure de schèmes**. Enfin, il se trouve que selon le niveau de développement du système cognitif, et pour cela même que la production de possibles est un processus régulé, il faille envisager plusieurs espèces de possibles qui sont fonction de leur mode de sélection. En effet, une telle production peut être exclusivement déterminée par la prise en compte de la seule forme langagière F_c , mais aussi, par la prise en compte de formes langagières retenues abusivement comme synonymes, auquel cas, l'expression des possibles résulte d'une simple tentative d'assimilation, avec essais-erreurs, puis éventuellement tentative de réparation. L'expression des possibles peut résulter aussi d'inférences, plus ou moins conscientes, et plus ou moins explicites : un système peut effectivement être capable de justifier une solution, c'est dire qu'il a ses raisons, et que, donc, le possible est déjà pour lui le nécessaire, même bien sûr si sa solution est erronée, ou plus généralement rejetée ultérieurement. Par contre, comme nous avons pu le noter, à tout âge, lorsqu'un système cognitif n'entrevoit qu'un possible limité, celui-ci devient de fait le nécessaire. C'est ce que Jean Piaget appelle le pseudo-nécessaire,

¹¹¹¹ Jean Piaget. *Le possible et le nécessaire. I. L'évolution des possibles chez l'enfant. Introduction*. Puf. 1981.

¹¹¹² Ce que nous appelons norme de réaction du schème S_c .

¹¹¹³ Ce dont nous ne discuterons pas ici.

¹¹¹⁴ *Biologie et connaissance*. Position du problème. Opus cité.

¹¹¹⁵ Jean Piaget. *Le possible et le nécessaire*. Opus cité. Ibid.

accompagnant de fait un pseudo-possible¹¹¹⁶.

Conséquence didactique

Dans l'analyse a priori des situations didactiques, celle des possibles devient celle des probables. En effet, l'ingénierie devant concevoir l'activation de schèmes spécifiques S_c , dont la définition relève de la compétence C , s'adresse en fait à une diversité assez importante de systèmes. On peut penser, bien sûr, qu'une telle analyse n'aboutit jamais à l'épuisement de l'ensemble des possibles. C'est l'évaluation de la compétence C , dans sa double dimension épistémologique, qui donne à cette analyse son alimentation. **Mais il convient d'élargir la conception piagétienne du possible en y adjoignant le principe d'un obstacle O_c , et pour ce qui peut concerner certaines de nos séquences, d'un obstacle épistémologique O_{ce} .**

3.2.2.3 Le nécessaire

« *La nécessité n'est pas un observable mais toujours le produit d'une composition déductive. Même en cas de liaisons jugées causales, l'expérience ne fournit que des successions régulières et, pour passer de cette généralité à la nécessité, la construction par le sujet d'un modèle déductif demeure indispensable* »¹¹¹⁷. On retrouve tout aussi bien cela, mais implicitement, dans les situations didactiques de validation, formalisées par Guy Brousseau¹¹¹⁸, qu'explicitement, dans les situations de constructions de preuves ou constructions de raisons, dans « le cadre de la problématisation » développée par Christian Orange¹¹¹⁹. Il nous paraît important de retenir cet aspect, dès lors que l'on veut bien considérer que, dans le développement d'une compétence de C_i à C_f , des régulations de natures inférentielles sont nécessairement en jeu, d'une part, et que, d'autre part, ces activités inférentielles participent d'un développement du second ordre, à savoir « produire de la composante cognitive » R_c , telle que nous l'avons définie.

Mais nous devons retrouver la construction d'un « modèle déductif », selon une double germination¹¹²⁰, car il ne suffit pas de penser que cette forme de nécessité, inhérente au modèle, « soit tirée du seul réel, puisque sa constitution exige les déductions du sujet, mais cela postule un certain isomorphisme, entre les nécessités inhérentes à la construction des mo-

¹¹¹⁶ Ibid.

¹¹¹⁷ Jean Piaget. *Le possible et le nécessaire. 2. L'évolution du nécessaire chez l'enfant*. Chapitre premier. *Un problème de nécessité physique*. Puf. 1983.

¹¹¹⁸ *Théorie des situations didactiques*.

¹¹¹⁹ *Apprentissages scientifiques et problématisation*. Opus cité.

¹¹²⁰ Et nous pouvons faire le lien entre la double germination des concepts quotidiens et des concepts scientifiques définie par Lev Vygotski.

dèles, et ce que le sujet doit admettre de nécessaire au sein de la réalité »¹¹²¹.

On se trouve à cet égard en présence d'une question essentielle. Chaque schème S_{Ci} d'assimilation « comporte une certaine capacité d'accommodation »¹¹²², ensemble des formes S_{Cf} possibles, que l'on peut qualifier globalement de « norme d'accommodation ». **Parmi ces formes possibles, certaines, qui dépendent des situations perturbantes S_{ci} , rencontrées par le système, lui deviennent nécessaires, mais au terme de leur développement.** Ainsi, en mathématique, comme dans d'autres disciplines, il nous semble qu'est nécessaire, que ce qui peut être actualisé, et qui le devient au terme d'une certaine construction, définie comme la résolution d'un problème. Alors la question renvoie à la construction des situations objectives et, en particulier, au problème qui va initialiser un tel développement.

Conséquence didactique

En rapprochant ces précisions cognitives, relatives au possible et au nécessaire, de notre postulat d'homéomorphisme, on en déduit une forme d'isomorphisme topologique¹¹²³, relativement à l'enseignement des mathématiques : cognitivement et mathématiquement, le nécessaire est topologiquement situé en des points analogues des graphes épistémologiques. A partir de ce point, nous en déduisons ainsi la possibilité d'une corrélation naturelle des deux dimensions épistémologiques Deh et Dep ¹¹²⁴.

De plus, nous en sommes conduits à minorer, non l'idée de dévolution qui, à divers moments, joue forcément dans le sens où le système reste libre un certain temps de ses propres inférences, mais celle d'adidactisme, pour les situations d'action, car, compte tenu des possibilités que nous offre le principe d'un isomorphisme exposé ci-dessus, nous pouvons opter pour le maintien d'une forte présence médiatique.

Toutefois, rappelons que l'ingénierie didactique doit mettre en œuvre un travail implicite, relatif à l'inertie d'un schème S_{Ci} , c'est-à-dire une activité organisée par le franchissement d'un obstacle O_c (voire O_{ce}). En effet, « la nécessité résulte des compositions effectuées par le sujet et n'est pas un observable donné dans les objets ». « Elle n'est pas un état isolable et définitif mais résulte d'un processus de nécessitation ». « Elle est solidaire de la constitution des possibles »¹¹²⁵. **Nous pouvons définir une part de la médiation comme catalyseur du**

¹¹²¹ Jean Piaget. *Le possible et le nécessaire. 2. L'évolution du nécessaire chez l'enfant*. Chapitre premier. *Un problème de nécessité physique*.

¹¹²² Jean Piaget. *Équilibration des structures cognitives. Position des problèmes*. §6. *L'équilibration majorante*. Opus cité.

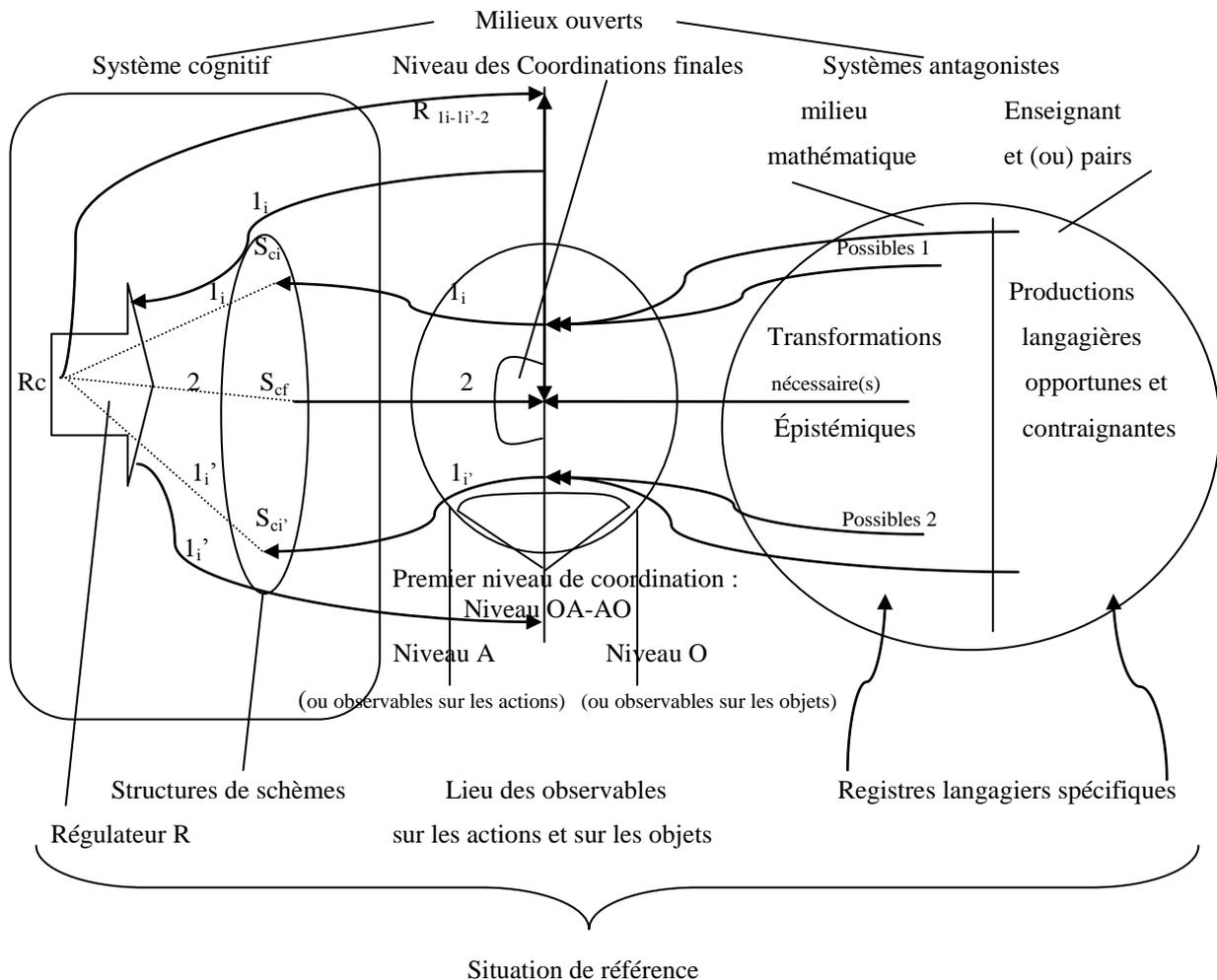
¹¹²³ Topos, pour la connexité et logique, pour les normes de réactions.

¹¹²⁴ Nous pourrions en inférer aussi les raisons pour lesquelles, au moins en mathématique, les pédagogies dites transmissives sont des possibles de la pédagogie.

¹¹²⁵ Jean Piaget. *Le possible et le nécessaire. 2. L'évolution du nécessaire chez l'enfant. Conclusion générale*. Opus cité.

processus de nécessité. Nous retrouvons les étapes du développement d'une compétence comme nous l'avons décrit (sous 2.3.5.3), car le possible résulte des différenciations et le nécessaire résulte des intégrations¹¹²⁶.

Nous pouvons alors schématiser les aspects dynamiques d'une situation perturbante S_c :



« Un observable est ce que l'expérience permet de constater par une lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes, tandis qu'une coordination comporte des inférences nécessaires et dépasse ainsi la frontière des observables »¹¹²⁷

Il faut noter, comme cela a été décrit (sous 3.1), que des observables peuvent se trouver conditionnés par des coordinations antérieures, et donc dépendent d'observables antérieurs. On doit donc entendre, dans le schéma, précéder un aspect dynamique et cyclique.

R : Régulateur ou ensemble des régulations coordonnées dans le système cognitif.

I_i : régulations anticipatrices et assimilations productives de possibles par le schème S_{ci} .

Il faut concevoir plusieurs possibles résultant de reprises de S_{ci} . I_i relève d'une assimilation

¹¹²⁶ Jean Piaget. Ibid.

¹¹²⁷ Jean Piaget. *L'équilibration des structures cognitives*. §8. Les observables et les coordinations. Opus cité.

normale par S_{ci} , après son activation par une régulation anticipatrice, d'où le sens des flèches 1_i .

1_i : régulations compensatrices et assimilations productives de possibles par un schème S_{ci} , résultant de certaines inférences et de premières coordinations, non explicitement inférentielles. Il faut concevoir plusieurs possibles résultant de reprise de S_{ci} . 1_i relève d'une assimilation par un certain S_{ci} , après inhibition de S_{ci} , par une régulation compensatrice. On note qu'il s'agit là d'une différenciation. On peut considérer un début d'accommodation ; d'où le sens de la flèche. Il peut s'agir en général de possibles qui, dans un premiers temps, peuvent apparaître au sujet comme différents, voire comme contradictoires des possibles 1_i .

2 : régulations compensatrices et accommodations aboutissant à une intégration de possibles 1_i et de possibles 1_i . Cette intégration définit un possible de niveau hiérarchique supérieur, et se définissant comme le nécessaire. Cette activité constructive aboutit au développement d'un nouveau schème S_{cf} ; d'où le sens de la flèche.

Le niveau O est le lieu des observables empiriques sur les objets.

Le niveau A est le lieu des observables empiriques sur les actions, sans relations avec le niveau O, en ce sens que ces observables sont non anticipés.

Un autre niveau OA-AO est celui d'observables sur les objets et sur les actions, dans une mise en relations de causalités. On peut parler, à ce niveau, de causalité empirique et de certaines formes d'anticipations.

Un dernier niveau est celui des coordinations relatives aux actions elles-mêmes. Il suppose des inférences concernant ces actions et la construction ou le début de constructions opératoires, aboutissant, à terme, à un système fermé (R_a, S_{cf}) (voir 3.2.1.3).

Corrélativement, le nécessaire vient résoudre les contradictions apparentes et, d'une façon générale, met fin à la perturbation. Conclusion heureuse qui se matérialise par l'équilibre d'un certain schème S_{cf} .

R_c : dimension cognitive, résultante de l'activité. Le sens de la flèche exprime un processus d'accommodation d'une partie du régulateur lui-même. On peut toujours la supposer et chercher à en évaluer certaines de ses composantes. Dans ce sens, on peut noter un certain développement fonctionnel de R_i à R_f et qui concerne la structure du régulateur lui-même. En d'autres termes, le système fermé (R_i, S_{ci}) se trouve transformé en système fermé (R_f, S_{cf}). **Mais, envisager une résultante cognitive, c'est aussi considérer qu'un développement plus général a pu s'opérer, à savoir la relation fonctionnelle entre toute régulation anticipatrice R_a et le schème activable S_c .** De sorte que l'on peut exprimer un tel développement

par celui, plus structural, du système formel fermé (R_a, S_c). On peut aussi faire un rapprochement avec une transformation structurale de la fonction de dénotation.

Remarques :

➤ **Nous notons que le caractère nécessaire d'un objet mathématique (qui se ramène le plus souvent à l'expression d'une proposition) l'est, au terme d'un développement qui relève d'une causalité cyclique, puisque les interactions conduisent à une certaine accommodation progressive du régulateur lui-même, ce qui permet d'atteindre effectivement le nécessaire et le développement recherché de la compétence.** La transformation est exprimée par $R_{i-1} \rightarrow R_i$.

➤ Si l'on tient compte de la remarque de Lev Vygotski, sur la nature non systématique des concepts des élèves pré-adolescents, nous retrouvons, par contre, que la compétence C_f a pour signification le dénoté et donc aussi, pour critérium de vérité, la fonction de dénotation elle-même. Ainsi, l'approche cognitive tendrait à autoriser le postulat que ce n'est pas la quête de la proposition vraie ou le rejet de la proposition fautive¹¹²⁸ qui conduit l'activité des systèmes cognitifs¹¹²⁹, mais celle d'un ensemble de possibles et de son extension, puis celle d'un ensemble de nécessaires dont l'actualisation éteint les tensions entre les systèmes antagonistes et le système cognitif.

3.2.3 Le franchissement d'un obstacle

Nous devons travailler à préciser le sens que l'on peut accorder au concept organisateur systématique de toute situation didactique : le franchissement d'un obstacle.

3.2.3.1 Définition

Nous appelons **franchissement de l'obstacle O_c (et O_{ce} en particulier)**, le développement structural du régulateur, associé au développement de R_i à R_f . Un tel développement peut être approché par une évaluation de certaines composantes de R_c , plus précisément celles qui concernent le schème S_{cf} , construit dans l'activité.

Cette définition du franchissement des obstacles cognitifs et épistémologiques nous rapprocherait de son origine bachelardienne : le franchissement d'un obstacle n'est pas seulement celui d'un changement de conception, même s'il concerne avant tout celui des structures de schèmes. Il est celui d'un changement de rationalité, puisqu'il concerne un développement du régulateur lui-même, à savoir l'organe de contrôle de la production et de la construction des conceptions. C'est ce que nous avons défini comme le développement structural du système formel fermé (R_a, S_c).

¹¹²⁸ Le principe de non contradiction : non (p et non p)

¹¹²⁹ Ce qui serait à rapprocher d'une construction des concepts au sein d'un système.

Enfin, puisque le régulateur est lui-même une structure constituée de schèmes (dits régulations), on retrouve, dans un tel développement, la conjonction de ce qui est nécessitable au niveau de cette structure et de ce qui devient le nécessaire au terme de ce développement.

Conclusion

Comme nous l'avions pressenti dans le chapitre 2, le franchissement d'un obstacle au sens bachelardien ne peut que se construire dans un processus de développement piagétien.

Ce processus est ce que nous allons appeler la compréhension.

Nous pensons avoir maintenant achevé notre réponse à la question Q3, puisque le franchissement d'un obstacle prend, dans ce que nous venons de dire, une signification explicite : en pratique, un tel franchissement devient mesurable, non pas seulement par des évaluations directes de l'exercice de la compétence construite mais par des évaluations directes de ce qu'il est possible de concevoir comme composantes de la résultante cognitive¹¹³⁰.

3.2.3.2 Définition du verbe comprendre

Nous allons fixer notre attention sur deux concepts qui nous paraissent dilués dans les théories didactiques : la compréhension et le sens. Notre ambition va se limiter à les inclure dans notre approche du développement cognitif par les compétences.

3.2.3.2.1 Comprendre et la psychologie cognitive

Nous avons vu (sous.1.6.4.2) l'importance des concepts de schéma et de représentation, dans l'activité de recherche de résolution d'un problème. Comprendre est toujours une construction ou une suite de constructions¹¹³¹ :

- de représentations, par particularisation d'un schéma¹¹³² ;

Et nous pouvons retrouver systématiquement ceci, lors de la sélection du schème S_{ci} , par une régulation anticipatrice.

- d'interprétations, par analogie avec une situation connue¹¹³³ ;

Si la dénotation ouvre sur des possibles qui peuvent théoriquement se différencier les uns des autres, et de façon biunivoque, avec l'extension du dénoté, l'expression effective de l'un d'eux ressort d'un choix de l'un des éléments de ce dénoté. Il dépend donc de la fonction de référence. Mais, c'est plus généralement, dans le cas des situations perturbantes de type 1, dont les caractéristiques s'apparentent à une situation de référence, sauf éventuellement pour quelques valeurs numériques ou aspects sémantiques, pour lesquels le réseau sé-

¹¹³⁰ Nous pouvons considérer qu'il y a là un apport considérable en ce qui concerne ce que l'on peut appeler une évaluation des compétences. Nous en donnerons un exemple dans le chapitre 5.

¹¹³¹ Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Chapitre IV. *Comprendre : construire une représentation*. Opus cité.

¹¹³² Ibid.

¹¹³³ Ibid.

mantique permet d'établir facilement des équivalences¹¹³⁴ (par exemple des synonymies). La production de possibles s'accompagne alors d'un accroissement de type 1 du dénoté. Mais cette accommodation peut s'accompagner d'une assimilation déformante, productive d'erreurs éventuelles, si la situation perturbante relève en fait du type 2 et systématiquement, si la situation relève du type 3.

- d'une représentation particularisée de la situation ;

« Elle se construit sur la base d'une représentation propositionnelle : elle constitue un niveau de traitement et donc un niveau de compréhension plus profond »¹¹³⁵. Cette particularisation requiert des inférences qui ne sont pas automatiques et exigent une forme d'attention logique (Lev Vygotski). Cette étape, dans le processus de compréhension l'est, lors de la recherche des équilibres de types 2 ou 3. On peut alors penser à des formes d'équilibrations provisoires de schèmes de nature S_{cf} , et dont les activations conduisent à la production de nouveaux possibles, mais qui, contrairement aux précédents, tirent leur expressions de feedbacks négatifs.

- d'une conceptualisation de la situation ;

« Elle peut consister en une généralisation des descripteurs ou en la création d'un nouveau système élaboré avec d'autres objets ou d'autres relations qu'on peut mettre en correspondance avec la situation et qui permet de raisonner sur elle »¹¹³⁶. C'est une façon de définir des équilibrations de types 2 ou 3, dès lors que la conceptualisation est une réorganisation du réseau sémantique, associé à un domaine d'action ; et, en particulier, pour nous, d'un déplacement sémantique d'un verbe d'action. Nous analysons cette phase comme l'achèvement de l'activité de compréhension. S_{cf} est la construction cognitive finale de cette activité. Son équilibration s'associe à la production explicite d'une proposition nécessaire.

3.2.3.2.2 Conclusion : la compétence et le sens

« La causalité cognitive sous-jacente à la compréhension doit être vue aujourd'hui comme se réalisant dans un traitement incrémental »¹¹³⁷.

Définitions

Nous pouvons définir « comprendre » comme le verbe d'action associé à une compétence, et dont l'exercice est un processus d'activités mentales qui se produisent entre la perception d'une perturbation et l'extinction de cette perturbation, par la production

¹¹³⁴ Ibid.

¹¹³⁵ Ibid.

¹¹³⁶ Ibid.

¹¹³⁷ Jean-François le Ny. *Comment l'esprit produit du sens. La compréhension du langage parmi les activités cognitives. Quelques généralités sur la construction du sens.* Opus cité

d'une proposition nécessaire. Ce processus fonctionnel est la compréhension. Nous dirons que les formes langagières explicites qui sont associées à cette compétence sont celles qui anticipent les constructions mentales précisées ci-dessus (sous 3.2.3.2.1) ; par exemple « interpréter une situation ».

Nous pouvons définir le sens S , dans sa signification la plus générale, comme une compétence associée à une structure de régulations dont l'activité se définit par l'anticipation, l'activation et le contrôle des structures de schèmes de la compréhension¹¹³⁸.

Dans une situation perturbante S_c , et par abus de langage (par métonymie), nous pourrions qualifier cette activité comme le sens de la situation perturbante¹¹³⁹.

Le schéma précédent est une représentation d'une situation perturbante pour S . Nous notons, en particulier, l'activité du régulateur R , au sein de cette situation de référence que l'on peut donc noter S_S .

Ainsi, nous pouvons mieux entendre que le sens S est lui-même en développement et qu'il admet un dénoté $d(S)$. C'est dire aussi que, comme toute compétence, son domaine d'efficacité reste fini, et qu'il peut être remis en question par quelques situations perturbantes pour un schème quelconque, et ceci, en vertu de l'autorégulation qui conduit à des causalités cycliques.

Conséquence

Le développement de C_i à C_f (compréhension) et la consolidation de C_f (apprentissage) se produisent initialement dans une situation perturbante pour S , et supposent donc une activité de la structure S_s , soit un développement de S_i à S_f . Notons qu'un type d'équilibration comme « 1 et 3 », relative au développement de C_i à C_f , peut ne conduire qu'à des équilibrations de type « 1 et 2 », relatives au développement de S_i à S_f ¹¹⁴⁰.

¹¹³⁸ Nous ne prenons pas ici comme objectif d'approfondir davantage et en particulier, concernant cette composante structurale au niveau du régulateur. Notre façon de voir rend caduque ou, tout au moins insuffisante du point de vue cognitif, l'expression : « sens d'une connaissance », dès lors que l'on entend par là quelque chose dont doit s'emparer un sujet ; puisque tout ce qui précède tend à vérifier que le sens est un construit dont le contenu l'est au terme d'un processus de nécessité. Le sens d'une connaissance ne saurait être pré-définissable à moins de le confondre avec sa signification mathématique.

¹¹³⁹ Il nous semble de plus que lorsque le sujet dit « je comprends », c'est en fait qu'il a déjà compris ou plus précisément qu'il a ressenti quelque chose d'équilibrant au point de dire qu'il a compris. Il est aussi en effet habituel d'entendre un sujet se dire avoir compris, dès lors qu'il a obtenu une solution à un problème. Il est d'ailleurs, comme nous en avons déjà parlé, dans notre développement sur la prise de conscience, souvent difficile, voire impossible, de renvoyer le sujet à son activité de compréhension ou de construction de cette solution, autrement qu'en des termes purement descriptifs et métonymiques.

¹¹⁴⁰ Comme nous l'avons déjà dit, si l'action didactique néglige certains obstacles épistémologiques.

3.2.4 La zone proximale de développement

Nous revenons à ce concept, dont nous avons signalé, déjà dans notre introduction, sa faible valeur opérationnelle. Il s'agit effectivement de rendre pragmatique ce concept dans une technologie de la conception des situations didactiques.

3.2.4.1 Le concept de Lev Vygotski¹¹⁴¹

Le psychologue introduit la notion de zone de proche développement, pour distinguer les niveaux de développement actuel et potentiel d'un sujet¹¹⁴². Il se trouve que deux sujets, considérés comme ayant le même niveau de développement présent, peuvent différer, relativement à un potentiel de développement. « *La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un, est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement. Elle coïncide entièrement avec sa zone de proche développement* », qui s'entend alors comme l'ensemble des problèmes possibles que le sujet peut résoudre avec aide, mais en comprenant la résolution. La limite d'une telle compréhension est son niveau potentiel.

Nous avons, considérant le développement des compétences dans leurs composantes cognitives, esquissé une approche fonctionnelle de ce concept (sous 1.3.1)¹¹⁴³. Il convient maintenant d'en préciser la signification, dans le cadre de notre construction.

3.2.4.2 La zone de proche développement des compétences mathématiques, dans le cadre scolaire

Notons d'abord que :

➤ « *la croissance intellectuelle comporte son rythme et ses créodes¹¹⁴⁴ comme la croissance physique, ce qui ne signifie pas que de meilleures méthodes pédagogiques (au sens de « plus actives » n'accélèreraient pas les âges critiques, mais cette accélération ne saurait être indéfinie* »¹¹⁴⁵. Ainsi, toute adaptation est régulée, selon un principe de conservation : l'équilibre entre l'assimilation et l'accommodation. **C'est pourquoi il faut entendre que le développement de toute compétence est soumis à certaines normes d'accommodation ;**

➤ « *tout développement présent est fondé sur le développement passé* ». « *Le développement est un complexe historique, reflétant à chaque stade donné, le passé qu'il in-*

¹¹⁴¹ *Pensée et langage*. Chapitre 6. *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Opus cité.

¹¹⁴² Que l'auteur considère comme une grandeur temporelle mesurable.

¹¹⁴³ Et rejeté, au point où nous nous trouvons là, des précisions concernant notre expression « développement différent de l'intelligence ».

¹¹⁴⁴ Normes d'accommodation.

¹¹⁴⁵ Jean Piaget. *Psychologie et pédagogie*. Opus cité

clut »¹¹⁴⁶. D'où :

Définition

Nous disons que C_f est dans **la zone de proche développement de C_i** , si la situation perturbante \mathfrak{S}_{C_i} conduit à des équilibrations complexes de type 1 ou « 1 et 2 » ou « 1 et 3 », sans niveau de complexité supplémentaire¹¹⁴⁷.

4 Les éléments constitutifs d'une certaine technique pour le projet didactique.

Définition

On appelle **séquence didactique** une suite finie de situations perturbantes dont la conception est finalisée par la construction de C_f .

Conséquence pour l'ingénierie didactique

En vertu du principe d'homéomorphisme, toute compétence mathématique C_f de la zone de proche développement de C_i correspond à une connaissance mathématique (plus précisément, sa composante procédurale) nécessaire, au terme d'un développement mathématique de connaissances actuelles. Il suffit de préciser ce que l'on entend par équilibres des types 1 ou « 1 et 2 » ou « 1 et 3 ». Toutefois, les deux développements voient aussi leur potentiel limité par le niveau de maturité des élèves (comme le rappelle Jean Piaget), mais aussi par le découpage didactique.

Le nombre minimal de séances de la séquence didactique est déterminé, en théorie,¹¹⁴⁸ par les deux analyses épistémologiques des dimensions Deh et Dep qui prédefinisent le type d'équilibre à atteindre. En effet, le projet didactique peut en inférer une succession d'équilibrations de type « 1 et 2 » puis « 1 et 3 » etc.

Remarques

Nous avons ainsi achevé notre réponse à la question Q3 portant sur la valeur pragmatique du concept d'obstacle puisque celui-ci se trouve associé à la définition des équilibrations de type « 1 et 2 » ou « 1 et 3 ».

Nous pouvons considérer comme suffisant le système des outils conceptuels que nous avons construits dans les parties 2 et 3. Un tel système se constitue en une technologie pour la conception de situations didactiques. Par là même, nous avons répondu positivement aux

¹¹⁴⁶ Lev Vygotski. Chapitre 5. *Etude expérimentale du développement des concepts*. Opus cité.

¹¹⁴⁷ Des types « 1 et 2 et 2 » ou « 1 et 2 et 3 » ou « 1 et 3 et 3 »...

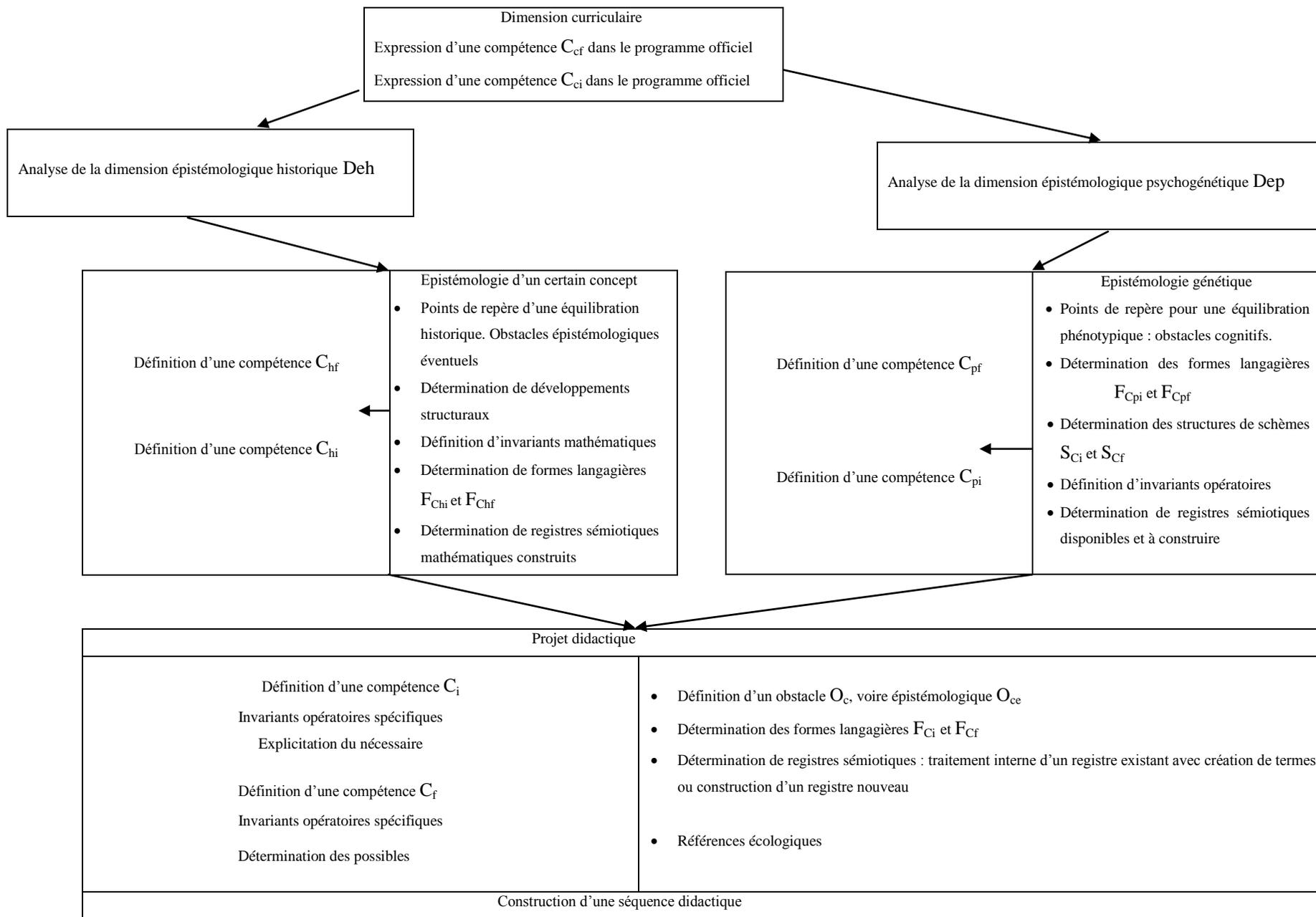
¹¹⁴⁸ Car, comme nous l'avons vu, par exemple dans le cas du développement de la compétence « compter » (d'additivement à multiplicativement), ces séances dépendent d'un choix didactique.

questions Q4 et Q'4 de notre problématique, énoncées dans le chapitre 2, et relatives à la conception de séquences didactiques

Les considérations qui suivent vont se constituer en réponses définitives.

4.1 Les éléments de l'analyse a priori

Nous présentons dans la page suivante ces éléments sous la forme d'un organigramme :



Remarque

Nous avons distingué, en les notant C_c , C_h , C_p (respectivement d'indices i et f) les compétences telles qu'elles peuvent ressortir des différentes analyses, dans les cadres des textes du curriculum ou des épistémologies historique et génétique. Il en est inféré des définitions de C_i et de C_f . En effet, les transpositions didactiques vont nécessairement en produire des formes distinguables. Nous en donnons quelques raisons :

➤ l'objectif de l'analyse de la dimension historique, telle que nous l'entendons, est de nous rapprocher d'une définition des compétences, comme elles se constituent dans les communautés mathématiciennes historiquement repérables ;

➤ mais cette analyse est entreprise à partir d'une interprétation du texte des programmes. Inversement, ces derniers sont l'expression, à la fois d'une progression qui précise un ordonnancement dans l'acquisition de ces compétences, et d'une transposition des textes produits par ces communautés mathématiciennes ;

➤ enfin, l'analyse de la dimension épistémologique psychogénétique retrouve des définitions de compétences qui relèvent à la fois du curriculum, mais aussi de choix didactiques antérieurs ;

➤ finalement, la possibilité d'une définition des compétences C_f et C_i résulte d'une application du principe d'homéomorphisme qui devrait permettre, le plus souvent, de retrouver une compatibilité entre les compétences définies dans le cadre d'une épistémologie historique et celles définies dans le cadre d'une épistémologie psychogénétique, en supposant un curriculum cohérent, relativement à l'aspect d'un développement possible des compétences mathématiques en milieu scolaire. Ce que nous n'analysons pas ici.

4.2 Une séquence didactique formelle

1. Amorçage d'un schème S_{C_i} par une situation perturbante de type 1¹¹⁴⁹ : utilisation de la forme langagière F_{C_i} .
2. Remédiation éventuelle et complétion du schème S_{C_i} . En particulier, évaluation des réversibilités locales, dans des situations perturbantes de types 1 ou « 1 et 2 ».
3. Construction du schème S_{C_f} , dans une ou plusieurs situations perturbantes S_{C_i} de type « 2 » ou « 3 » : utilisation de la forme langagière F_{C_f} .
4. Construction de la fermeture du schème S_{C_f} : utilisation de la forme langagière F_{C_f} .
5. Séances de consolidation du schème S_{C_f} : travaux systématiques sur les réversibilités locales et la réversibilité opératoire.

¹¹⁴⁹ Pourrait correspondre à ce que les enseignants du primaire appellent souvent évaluation diagnostique.

4.3 Remarques finales

➤ Indépendamment des choix didactiques, relativement à des situations perturbantes de type 2 ou de type 3, les formes langagières F_{Ci} et F_{Cf} sont très proches l'une de l'autre. De même que les situations objectives sont initialement peu différenciables. Il se trouve que l'intensité de la perturbation d'une situation provient effectivement de ces ressemblances morphologiques. On retrouve parfaitement ici, ce en quoi une telle situation fait problème et se constitue en piège pour l'élève. Et nous avons insisté, pour exprimer que le piège est avant tout de nature linguistique. Mais le principe d'homéomorphisme permet à l'enseignant de se fixer, comme objectif explicite, le développement de nouveaux invariants opératoires, à partir de ceux déjà disponibles.

Il nous semble insuffisant de définir la décentration, comme la prise en compte de l'intersubjectivité et, d'une façon générale, comme un changement de représentation. Une coordination progressive d'une suite de centrations successives définit un processus de façon générique et seulement descriptive. Or, il y a des obstacles spécifiques, selon les cas, à cette suite de régulations compensatrices portant sur des actions (manipulations, énoncés verbaux...). La définition de ces obstacles et de leur franchissement, par des fonctionnements régulés, se donne précisément comme explicative d'une décentration, qui devient alors fondamentalement la solution cognitive nécessaire, dans la résolution d'un problème, imposé par le milieu. **C'est donc la forme particulière de cette décentration dont il nous paraît fécond de focaliser l'attention didactique, en chacun de ces cas :**

Au moins, la décentration peut-elle prendre la forme d'un déplacement dans un registre sémiotique différent. Ce déplacement est un véritable changement dans la relation sémiotique du système cognitif avec des objets mis en situation. Ainsi, en particulier, la relation d'un système cognitif à son registre langagier propre peut se trouver modifiée, dans une situation qui le contraint d'avoir à écouter, dans le registre langagier de son enseignant(e), autre chose que la seule communication des désignations (fonction référentielle). Mis en échec par cette restriction, centrant la langue sur cette seule fonction discursive, un système doit être contraint de porter une attention logique¹¹⁵⁰ à une autre fonction de la langue : la fonction apophantique, qui donne à voir, dans le discours de l'enseignant(e), des formes propositionnelles.

Nous envisageons alors effectivement ces formes de décentration, lorsque la construction du schème $S_{C'f}$ active un positionnement virtuel dans une situation $S_{C'f}$. Le système,

¹¹⁵⁰ C'est-à-dire finalisée et maintenue dans un objectif anticipé.

centré initialement sur une perception concrète d'un certain milieu, en vient à se déplacer dans un autre milieu, mais symbolique, car seulement évoqué. Le système cognitif s'imagine opérant dans ce monde symbolique, et c'est là une forme de décentration fondamentale, comme nous l'avons décrite (sous 3.2.1.2).

A des niveaux divers, la prise de conscience peut accompagner fonctionnellement cette décentration, dès lors que cette activité de résolution, dans la situation $S_{C''f}$ nécessite une telle évocation.

Elle peut être considérée comme le début du franchissement d'un obstacle épistémologique. Car la situation $S_{C''f}$ est souvent perturbante de type 3, relativement à certains points spécifiques, en particulier fondamentalement langagiers.

Par là se trouve définie la nature de la médiation et notre réponse à la dernière question Q''4 de notre problématique

➤ Terminons ce chapitre en remarquant que l'on peut retrouver, dans une situation perturbante de type 3 (mais aussi de type 2), les composantes majeures d'une situation problème :

- un obstacle O_c (O_{ce}) est toujours constitutif d'une situation perturbante S_{Ci} ;
- la conception de la situation suppose précisément que le système cognitif s'y engage initialement, sans autre perception que certains indicateurs sémiotiques ; de ceux qui conduisent à l'activation de schème S_{Ci} ;
- l'acquisition d'une compétence nouvelle (au sens large ou nous l'avons précisée), si elle signifie la construction de nouveaux invariants opératoires, s'accompagne toujours d'une transformation qui concerne les registres de représentation sémiotique : soit un développement interne à un registre existant, soit la construction d'un nouveau registre¹¹⁵¹ ;
- le jeu des régulations -activation, inhibition, différenciation, intégration- est véritablement l'outil cognitif naturel du franchissement d'un obstacle. Et nous avons pu noter qu'il peut s'accompagner d'un développement structural profond.

Le chapitre suivant est un modèle de nos schémas formels, ce qui va, pensons-nous, justifier sa désignation de technologie, pour la conception des situations didactiques à l'école primaire.

¹¹⁵¹ Et la raison peut être en l'occurrence un changement de cadre. Mais il peut y avoir changement de registres sans changement de cadres.

Chapitre 5

UN APPRENTISSAGE POUR L'ÉCOLE MATERNELLE LA CATÉGORISATION

« L'enseignement délibéré à un élève, de nouveaux concepts et formes de mots, non seulement est possible, mais peut être le point de départ d'un développement supérieur des concepts propres déjà formés »¹¹⁵².

La seconde partie du chapitre 4 (paragraphe 2 et 3) a contribué à forger une technologie des situations didactiques pour le développement de compétences mathématiques à l'école primaire. Cette technologie se constitue en un système formel. Il s'agit donc, dans ce nouveau chapitre, d'un travail de sémantisation : le projet didactique est ici défini comme le développement de la compétence « catégoriser », à l'école maternelle. Le paragraphe 4 du chapitre 4 nous a permis de rappeler, en en détaillant les composantes, les dimensions que la problématique nous conduit à interroger : il s'agit de la dimension curriculaire et de trois dimensions que nous avons qualifiées d'épistémologiques. Les différentes analyses se constitueront en une première partie (sous 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4). Nous devrions commencer par l'analyse de la dimension curriculaire, mais, en l'occurrence, l'ambiguïté lexicale des textes officiels rend nécessaire de la reprendre après celle de la dimension épistémologique historique, ce qui devrait nous permettre, en retour, des interprétations possibles relatives aux constituants linguistiques du curriculum. Ce même paragraphe 4, du chapitre 4, a défini la forme d'une séquence didactique que nous allons donc maintenant retrouver exposée concrètement, dans une troisième partie (ci-dessous, sous 3). On trouvera là les analyses qui conviennent, et, en particulier, une étude comparative des développements intellectuels des sujets de deux classes dont l'une appartient à un établissement dit ZEP. Les conditions de notre construction sémantique sont exposées dans une deuxième partie (sous 2). On retrouvera là, de plus, une séance dite test, en rapport, comme on le verra, avec la genèse des structures logiques telle que retrouvée par Jean Piaget. On notera, à ce moment, l'intérêt de ce test initial, relativement à la comparaison entreprise.

Pour la lisibilité du texte, nous avons introduit toute situation nouvelle par le symbole :

❖ . On trouvera deux types de tableaux : les premiers, repérés par un nombre en notation arabe, et correspondant à une description générique pour un type de situations (à partir de 4).

¹¹⁵² Lev Vygotski. *Pensée et langage*. Chapitre 6. *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Page 214. Opus cité.

On les retrouvera donc systématiquement, pour définir les situations spécifiques de la séquence de catégorisation, la structure d'une telle séquence ayant été fixée une fois pour toute par la technologie, forgée dans la chapitre précédent. De tels tableaux seront suivis des analyses a priori que l'on peut aussi qualifier de génériques. En particulier, seront produites des explicitations du possible et du nécessaire. Les seconds, repérés par un nombre en notation romaine, sont constitutifs d'analyse a posteriori pour des situations du type. Leur contenu explicite des distributions de proportions selon certaines variables qui seront donc alors définies.

1 Les différentes analyses

1.1 La dimension épistémologique historique : Deh

Nous limiterons cette analyse aux seuls aspects qui devraient pouvoir se transposer dans l'apprentissage que nous pourrions concevoir de mettre en place à ce niveau.

« *La catégorisation est la conduite adaptative fondamentale par laquelle les systèmes cognitifs biologiques ou artificiels « découpent » le réel physique et social* »¹¹⁵³. Sa fonction cognitive est la création de catégories d'objets nécessaires à la transition du continu au discret¹¹⁵⁴. En ce sens, la discrétisation, au sein des objets du monde, s'accompagne de la construction de schèmes qui en favorisent une certaine assimilation.

Aristote considère dix catégories premières : la substance, la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, l'attitude, la possession, l'action et la passion¹¹⁵⁵.

Nous nous intéressons, dans ce qui suit, à la catégorisation au sens classique du terme et hérité d'Aristote¹¹⁵⁶ : nous définissons une catégorie comme un ensemble A d'objets qui ont en commun un certain caractère (ou attribut) p : un même genre de catégorie première ou une même espèce de ce genre ou un même mode de cette espèce¹¹⁵⁷. Par exemple, le carmin est un mode de l'espèce rouge du genre couleur. Ainsi, certains concepts peuvent-ils prendre, de par leur définition, une forme catégorielle. Le caractère dense de l'ensemble de tels concepts, dans la pensée, et corrélativement ce même caractère se retrouvant dans le langage, justifie le

¹¹⁵³ Houdé olivier. *Catégorisation et développement. Introduction*. Puf. 1992.

¹¹⁵⁴ Houdé olivier et al. *Vocabulaire de sciences cognitives. Article catégorisation*. Puf. 1998.

¹¹⁵⁵ Paul Mouy. *Cours de philosophie. Logique*. Hachette 1944.

¹¹⁵⁶ Jean Barthélemy Saint-Hilaire. *Logique d'Aristote. Introduction aux catégories par Porphyre*. 1844. <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/categoriesporhyre.htm>

¹¹⁵⁷ « *Ainsi, par exemple, le genre c'est animal, l'espèce c'est homme, la différence c'est raisonnable, ...c'est être blanc, être noir, ...* ». Logique d'Aristote. Ibid. Il faut donc entendre que l'homme est du genre animal, le raisonnable est l'un des caractères de l'espèce homme. Le noir est un mode d'homme.

but didactique que nous nous fixons dans ce chapitre¹¹⁵⁸. On peut entendre ce caractère de façon plus complexe en considérant la conjonction¹¹⁵⁹ de plusieurs attributs, relevant de la même ou de plusieurs de ces catégories

➤ Un jugement aristotélicien est donc de la forme $x \in A$ qui se dit parfois « x est un A », et qui signifie que « x a le caractère p »¹¹⁶⁰.

Un tel jugement est ce que l'on peut appeler en logique classique une proposition « v -définie »¹¹⁶¹, c'est-à-dire un jugement pour lequel il est possible de décider effectivement s'il est vrai ou faux. Nous pouvons donc « introduire comme proposition v -définie tout schème d'action pour lequel on aura fixé une procédure qui, appliquée conformément au schème, fournira exactement une des deux valeurs »¹¹⁶², dites valeurs de vérité. On peut donc présumer l'existence d'une compétence spécifique dont l'exercice conduit à la production d'une des deux valeurs de vérité. La structure de schèmes associée dépend de la théorie dont la proposition est un jugement¹¹⁶³. Ses constituants se différencient en fonction de ce sur quoi porte le jugement.

En formalisant le calcul dans l'ensemble des parties d'un ensemble donné E , l'algèbre de George Boole¹¹⁶⁴ permet de rendre compte du calcul propositionnel. On dispose inversement de deux modèles d'une telle algèbre qui fournissent deux registres sémiotiques différents¹¹⁶⁵ : Soit E est un ensemble, notons χ_A la fonction définie sur E , pour toute partie A de E , par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ ¹¹⁶⁶. En particulier, soit p_A la proposition « $\chi_A(x) = 1$ », alors $\chi_A \leq \chi_B$ signifie $A \subset B$ ou $p_A \Rightarrow p_B$: l'implication est interprétée en terme d'inclusion de parties de E et réciproquement.

Notons que pour connaître la valeur de $\chi_A(x)$, on dispose d'un procédé explicite immédiat qui consiste à « regarder » si $x \in A$ ou non. La procédure est la performance associée à

¹¹⁵⁸ On peut exprimer ceci autrement, en disant que « le concept peut être considéré à la fois comme une entité cognitive, essentielle à la pensée, et comme une unité sémantique, dépendant du langage et de la communication ». Dictionnaire fondamental de psychologie. Larousse. 2002

Concernant le type de concept considéré là, on parle souvent de concepts catégoriels, pour les différencier des concepts de relation, comme le concept de cause ou d'implication. Mais cette différenciation peut tomber, dès lors que l'on s'intéresse à une dénotation de « la relation de cause », dans un paradigme donné, comme par exemple celui des sciences physiques.

¹¹⁵⁹ Par l'utilisation du connecteur logique et.

¹¹⁶⁰ Nous dirons tout aussi bien 'x est un p'. En mathématique, on lit : x appartient à A.

¹¹⁶¹ Paul Lorenzen. *Métamathématique*. Chapitre premier. *Formalisation de la logique*. Gauthier- Villars. 1967

¹¹⁶² Ibid.

¹¹⁶³ Un tel jugement doit être construit selon les règles de formation syntaxique explicites ou partagées implicitement.

¹¹⁶⁴ Logicien anglais. 1815-1864.

¹¹⁶⁵ Jacques Vélou. *Méthodes mathématiques pour l'informatique*. Dunod 1987.

¹¹⁶⁶ Précisons uniquement que : $\chi_E = 1$, $\chi_\emptyset = 0$; $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$ (\bar{A} , complémentaire de A dans E ; $\chi_{A \cap B} = \chi_A \times \chi_B$; $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B$.

un schème tel que défini ci-dessus. A l'aide de ce schème, on peut donc décider de la valeur de vérité de la proposition p_A . Précisons que cette procédure ne suppose pas la notion de preuve. Par exemple, il n'y a rien à prouver pour affirmer qu'un triangle est jaune ou que $11+1=12$. Ceci est de l'ordre de la définition¹¹⁶⁷.

Mais peut-on ainsi décider « aussi simplement » de la valeur de toutes les propositions correctement formulées dans une langue, comme celle en usage dans un cadre mathématique? La réponse est non. Ce type de proposition, quoi que significative, exige un procédé plus complexe pour que soit décidé finalement sa valeur. Ce procédé relève d'une structure de schème d'argumentation que l'on appelle, en mathématique, une preuve.

Le langage des prédicats utilise la quantification¹¹⁶⁸ : le jugement comme $\forall x (\chi_A(x) = 1)$ est faux si $A \neq E$ alors que le jugement $\exists x (\chi_A(x) = 1)$ est vrai si $A \neq \emptyset$ ¹¹⁶⁹. Une proposition comme $\forall n \exists p \exists q (n \in 2\mathbf{N}^* \text{ et } p \in \mathbf{N} \text{ et } q \in \mathbf{N} \text{ et } p \text{ premier et } q \text{ premier et } n = p + q)$ reste une conjecture¹¹⁷⁰.

Ainsi, une quête de la preuve peut-elle revêtir un caractère dramatique car, parvenir en un temps fini à une décision n'est pas une certitude¹¹⁷¹. Il faut au moins admettre l'existence et l'unicité de la négation pour toute proposition p ; la négation, opérateur logique unaire, étant définie par « non (p et non p) » et « p ou non p »¹¹⁷². On peut alors définir, pour une proposition, ce qui pourrait être une preuve. Pour une telle proposition, on suppose donc un procédé qui permet de décider non de sa valeur, mais, la concernant, de ce qui relève d'un statut de preuve. Qualifions ces propositions de *p-définies*¹¹⁷³. Ainsi, pour la proposition donnée ci-dessus, une preuve de sa négation peut consister à exhiber un entier n pair, non nul (et différent de 2), pour lequel on vérifie qu'il n'est pas somme de deux nombres premiers.

➤ Nicolas Bourbaki note l'obstacle épistémologique de la focalisation aristotélienne sur la compréhension des concepts¹¹⁷⁴ : $A \subset B$ exprimant que les attributs qui définis-

¹¹⁶⁷ Quoi que nous pourrions évoquer là une sorte de preuve consistant à aller chercher en mémoire une certaine forme fixée.

¹¹⁶⁸ Systématisée par Gottlob Frege (1848-1925). Un prédicat est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables et tel que quand on substitue à chacune de ces variables un élément donné d'un ensemble, on obtient une proposition.

On introduit le calcul des prédicats qui utilise les mêmes connecteurs logiques que le calcul des propositions. Avec \forall (pour tout), quantificateur universel et \exists (il existe) quantificateur existentiel.

¹¹⁶⁹ Nous supposons toujours $E \neq \emptyset$.

¹¹⁷⁰ Conjecture de Goldbach. $2\mathbf{N}^*$ = l'ensemble des nombres entiers pairs différents de 0 et de 2. Tout nombre pair, autre que 0 et 2, est la somme de deux nombres premiers.

¹¹⁷¹ Nous ne parlons pas ici des propositions indécidables.

¹¹⁷² Principe de non contradiction et principe du tiers-exclu, exprimés ici par deux formes propositionnelles logiquement équivalentes d'après des lois dites de Morgan.

¹¹⁷³ Paul Lorenzen. *Métamathématique*. Chapitre premier. *Formalisation de la logique*. Opus cité.

¹¹⁷⁴ *Éléments d'histoire des mathématiques. Fondement des mathématiques*. Hermann 1974.

sent le concept B s'appliquent au concept A. Par exemple, l'attribut rectangle est un constituant de l'attribut plus complexe de carré : analyser un carré c'est y retrouver les attributs d'un rectangle. Cela relève d'une sorte de jugement analytique puisque le prédicat (être rectangle) est contenu dans le sujet (carré)¹¹⁷⁵. C'est ainsi l'interprétation aristotélicienne du jugement : « $\forall x (x = \text{carré} \Rightarrow x = \text{rectangle})$ ». Il est alors difficile de produire le jugement : « $\exists x (x = \text{rectangle} \text{ et } x \neq \text{carré})$ ». La conception extensionniste (et actuelle) consiste à regarder les objets de A comme des objets particuliers de B. Par exemple, affirmer que les carrés sont des rectangles particuliers. On se retrouve avec un jugement synthétique puisque comme tous les rectangles ne sont pas des carrés, le prédicat n'est pas contenu dans le sujet. Cette approche permet de définir l'inclusion de deux ensembles, A dans B¹¹⁷⁶ : « $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ », ce qui se note :

$A \subseteq B$ (A inclus dans B).

Les deux quantifications sont mises en dualité dans la formule :

Pour tout prédicat $p(x)$,

$\text{non} (\forall x (p(x))) \Leftrightarrow \exists x (\text{non } p(x))$

ou, de manière équivalente

$\forall x (\text{non } p(x)) \Leftrightarrow \text{non} (\exists x (p(x)))$

On obtient, à partir des axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel¹¹⁷⁷, le résultat suivant : « $\forall E \exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$ ». **En d'autres termes, si p est une propriété portant sur les objets d'un ensemble E, et bien formulée, il existe une partie de E et une seule dont les éléments vérifient la propriété p.**

En conséquence :

➤ si p et q sont deux prédicats, x étant une variable définie dans un ensemble E,

A la partie de E définie par : « $\forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$ »,

B la partie de E définie par : « $\forall x (x \in B \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } q(x)))$ »,

On obtient :

$(A \subset B \text{ et } A \neq B) \Leftrightarrow \forall x (x \in E \text{ et } (p(x) \Rightarrow q(x))) \text{ et } \exists x (x \in E \text{ et } q(x) \text{ et non } p(x))$ ¹¹⁷⁸ ;

➤ enfin, en notant \tilde{A} la partie de B définie par « $\forall x (x \in \tilde{A} \Leftrightarrow (x \in B \text{ et non } p(x)))$).

On obtient $B = A + \tilde{A}$ (et de plus, $\text{card } B = \text{card } A + \text{Card } \tilde{A}$).

Nous résumons, dans le tableau ci-dessous, les éléments de notre analyse qu'il nous

¹¹⁷⁵ Un carré est un mode de rectangle.

¹¹⁷⁶ George Boole définit l'inclusion de A dans B par $A \times B = A$ ou « x » est le produit logique

¹¹⁷⁷ Alain Bouvier : *Théorie des ensembles*. Puf 1972.

¹¹⁷⁸ A est inclus strictement dans B : tout élément de A est élément de B et quelques éléments de B ne sont pas éléments de A.

paraît utile de retenir, dans la limite de notre objectif didactique.

Repères critiques	Invariants mathématiques	Formes langagières possibles	Registre sémiotique formel
Conception aristotélicienne de l'inclusion des concepts	-Principe du tiers exclu	- « Le contraire de »	-La négation : « non »
Obstacle épistémologique	-Principe de non contradiction	- « Tous »	-Les quantifications :
		-« Quelques » ou « au moins un »	+l'universelle $\forall x (p(x))$
		- A est du genre p	+l'existentielle $\exists x (p(x))$
		-A est une partie de E	$A \subset E$
	$\neg \forall E \exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$	- « Pas tous » ou « un n'est pas »	+non ($\forall x (p(x))$)
Conception ensembliste de l'inclusion des classes.	-non ($\forall x (x \in A) \Leftrightarrow \exists x (x \notin A)$)	- (F_{Ch}) « Dans E, tous vérifiant p constituent A et seulement A »	+ $\exists x (\text{non } p(x))$
			- $A \subset E \text{ et } A \neq E$
			$x \in A \Leftrightarrow p(x)$

Tableau 1

Conclusion

Nous avons présenté dans ce tableau ce qui, à partir des travaux Georges Boole nous apparaît comme un changement de paradigme¹¹⁷⁹ : l'interprétation du prédicat p. En effet, si p(o) est vrai, on peut interpréter cette proposition en termes de compréhension, à savoir que o possède effectivement le caractère exprimé par le prédicat p. On peut interpréter aussi une telle relation en termes d'extension, à savoir que l'objet o appartient à une catégorie d'objets x dont on peut affirmer « p(x) est vrai ».

Nous définissons C_{hi} comme la compétence de prouver une inclusion au sens aristotélicien. Nous définissons C_{hf} comme la compétence de prouver une inclusion ou une « non inclusion » au sens de l'extension des classes.

1.2 La dimension curriculaire

L'analyse précédente a pu vérifier que la catégorisation est un concept relevant du cadre d'une théorie logique, quantifiée et ensembliste¹¹⁸⁰ qui fixe les règles d'un calcul des prédicats et qui en interprète les formulations en termes ensemblistes. Elle met en évidence deux des attributs de la catégorisation : la compréhension et l'extension. La coordination de ces attributs est exprimée par le théorème de la théorie des ensembles (graisé dans le tableau ci-dessus), théorème, conséquence directe d'un des axiomes de la théorie : l'axiome de rempla-

¹¹⁷⁹ Alors qu'Emmanuel Kant considère la logique aristotélicienne comme suffisante car exprimant tout ce dont on pouvait avoir besoin dans les applications.

¹¹⁸⁰ Nous devrions dire, avant tout, égalitaire pour justifier de l'emploi de certaines identifications, en un sens large, dont la relation d'égalité.

cement qui en est une expression plus générale.

Notons que les programmes ne fixent pas d'objectif explicite relatif à la catégorisation, à aucun des niveaux de l'école, du collège ou du lycée. En un sens général, les activités relatives à la catégorisation semblent relever de compétences nomades et favorisées par le développement d'une certaine compétence linguistique depuis l'enfance jusqu'à l'adulte.

Le tableau suivant donne la liste des expressions qui, dans le bulletin officiel¹¹⁸¹, connotent pourtant implicitement des activités liées à la catégorisation et au programme de l'école maternelle ; c'est dire, par l'utilisation de mots spécifiques. On peut supposer qu'en grande partie, l'apprentissage relève, de près ou de loin, d'activités de catégorisation, dès lors que de tels apprentissages concernent le développement de la pensée conceptuelle, et ceci au moins lors du fonctionnement de la fonction référentielle ou de la désignation d'objets.

Domaines	Expressions langagières explicites
S'approprier le langage ¹	« Ils nomment avec exactitude les objets qui les entourent » ¹¹ « L'acquisition du vocabulaire exige des activités régulières de classification » ¹²
Découvrir le monde	« Il devient capable de classer » ²² « ...comprendre ce qui distingue le vivant du non vivant » ²³ « En agissant sur les matériaux...les enfants repèrent leurs caractéristiques simples » ²⁴
Découvrir le monde ²	« Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères ²⁵ , à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance » ²⁶ « ...nommer, ... comparer, ranger et classer des matières, des objets selon leurs qualités et leurs usages » ²⁷
Découvrir l'écrit. ³	« Ils savent reconnaître une syllabe identique dans plusieurs mots » ³¹ « Ils apprennent la plupart des lettres de l'alphabet qu'ils savent reconnaître » ³²
Percevoir, sentir, imaginer, créer ⁴	« Ils apprennent à caractériser le timbre, l'intensité, la durée, la hauteur » (sons) ⁴¹

Tableau 2

¹¹⁸¹ Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008. Numéro hors série. *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire.*

Analysons donc que ces expressions renvoient à :

- des productions référentielles (1, 11 et 32), donc à un renforcement du concept en acte de l'identité : un objet o peut être identifié par un signifiant x et cette identification conserve une permanence ; ce que l'on peut exprimer par le principe : pour tout x , $x = x$;
- des activités de catégorisation (2, 3 et 4). Notons sur point une certaine ambiguïté terminologique. Il y a une ambiguïté terminologique relative aux concepts de catégorisation et de tri¹¹⁸².

Nous devons donc apporter des précisions sur ce point :

- La catégorisation : Il s'agit en fait d'analyser le théorème suivant : « $\forall E \exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$ ». Sont donnés un ensemble E d'objets (par exemple un ensemble de formes géométriques « planes » et colorées, de couleurs discernables (et non discutables) et un prédicat p , portant sur ces objets (par exemple « être rouge »). Une activité de catégorisation peut conduire à construire A , vérifiant : A est le plus grand ensemble dans E tel que $A \subset E$ et $x \in A \Rightarrow p(x)$. En d'autres termes, $\exists ! \tilde{A}$ vérifiant : \tilde{A} est le plus grand ensemble tel que $\tilde{A} \subset E$ et $x \in \tilde{A} \Rightarrow \text{non } p(x)$. On obtient : $A + \tilde{A} = E$ et $A \cap \tilde{A} = \emptyset$. (Par exemple A est l'ensemble de toutes les formes de E qui sont rouges. \tilde{A} est l'ensemble de toutes les formes de E qui ne sont pas rouges). Notons qu'un prédicat se rapporte à un certain mode (par exemple rouge) de l'espèce couleur (si le genre est la qualité). Si l'on excepte les prédicats conduisant à des ensembles vides (par exemple « être un ustensile de cuisine », E étant un ensemble de figures géométriques) ou à l'ensemble E (par exemple « avoir une qualité », E étant un ensemble d'objets quelconques) ou les prédicats conduisant à des singletons¹¹⁸³, on peut noter que, pour qu'un prédicat soit « bien formulable », il faut que quelques objets de E possèdent sous une certaine espèce, un mode commun et que les autres ne le possèdent pas.

- Le tri : il s'agit en fait d'analyser le théorème suivant : « $\forall E \exists A \forall x \forall u \forall v (x \in A \Leftrightarrow (x \subset E \text{ et } ((u \in x \text{ et } v \in x) \Leftrightarrow u R v)))$, avec R , relation binaire d'équivalence¹¹⁸⁴ définie sur E . Sont donnés un ensemble E d'objets (par exemple un ensemble de formes géométriques « planes » et colorées de couleurs discernables et non discutables), et une relation d'équivalence R , portant sur ces objets (par exemple « avoir la même couleur »). Une activité de tri exhaustif peut conduire à construire A , un ensemble de parties x non vides de E , vérifiant : deux objets u et v sont dans la même partie x si et seulement si $u R v$ (par exemple u et v sont de la même couleur, rouge) ; tout objet de E appartient à une et une seule de ces parties.

¹¹⁸² Nous allons retrouver cette confusion dans l'analyse de la dimension psychogénétique qui va suivre.

¹¹⁸³ $\{x\}$. Ce qui nous ramène à une simple désignation d'un objet, le prédicat exprimant dans E , un nom propre.

¹¹⁸⁴ $\forall u \forall v \forall w (u \in E, v \in E, w \in E, (u R u) \text{ et } (u R v \Leftrightarrow v R u) \text{ et } (u R v \text{ et } v R w \Rightarrow u R w))$.

On obtient ce que l'on appelle une partition de E en classes d'équivalences (par exemple en se limitant à trois couleurs :

$$x_1 + x_2 + x_3 = E \text{ avec } x_i \cap x_j = \emptyset \text{ ou } x_i = x_j, (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}^{1185}.$$

Notons que la relation d'équivalence se rapporte à une certaine espèce (par exemple la couleur). Si l'on excepte les partitions extrêmes, de la plus grossière $\{\emptyset, E\}$ à la plus fine (la partition ne contenant que des singletons), pour qu'un tri puisse s'opérer, selon une certaine espèce, il faut que tous les objets de E possèdent sous un même genre, une même espèce (la partition étant obtenue en distinguant les différents modes de cette espèce).

Conclusions

Si nous revenons aux expressions repérées dans le texte du programme, 23, 24, 25, 31, 32 et 41 connoteraient des activités de catégorisation et 12, 22, 26 et 27 connoteraient des activités de tri. Toutefois, le vocabulaire de la quantification n'est pas explicite. Plus généralement, on ne trouve pas de précisions relatives à l'usage d'un certain registre linguistique. Et rien n'indique que les reconnaissances de certaines caractéristiques soient attendues dans une dimension collectivisante (inter objectale, considérant l'ensemble des objets de la catégorie) à l'inverse d'une reconnaissance individuelle (intra objectale, reconsidérant l'objet lui-même comme particulier).

Concernant la compétence à construire C_{Cf} , et en considérant celle-ci comme l'objectif recherché, au terme du cursus de l'école maternelle, nous pourrions la définir comme « construire une catégorie A, le prédicat étant donné ». C_{Ci0} est alors la compétence de désigner un objet au niveau opératoire concret : l'objet est montré, l'enfant peut le nommer, l'objet est nommé, l'enfant peut le montrer. Cette compétence se coordonne avec une autre compétence C_{Ci1} qui est celle de comparer deux objets selon une certaine espèce, le schème de la comparaison aboutissant à conclure à une équivalence ou à une « non équivalence » (différence) modulo l'espèce.

La structure des schèmes C_{Ci0} et C_{Ci1} étant toujours supposée initiale, on peut aussi définir une compétence C'_{Cf} par « trier selon un critère donné ». Mais une question demeure : si, sur le plan logique, l'analyse d'une tâche de tri peut anticiper des activités bien distinctes¹¹⁸⁶, sur le plan cognitif, C'_{Cf} peut devoir supposer C_{Cf} , comme compétence initiale ; et même si l'exercice de celle-ci n'est pas explicite dans l'activité, mais n'en demeure pas moins, au niveau mental, sous la forme du résultat d'une inférence : on peut mentalement anticiper le con-

¹¹⁸⁵ Produit cartésien des neuf couples d'indices

¹¹⁸⁶ Par exemple, l'exercice de C'_{Cf} peut conduire à des remplissages aléatoires des « boîtes » : on prend un objet quelconque de E et « on le met dans la bonne boîte ». Ou aussi, par catégorisations successives : on remplit d'abord exhaustivement une première boîte, puis une seconde, etc.

tenu final de chaque boîte et en conclure que ce contenu peut être obtenu par catégorisation. Ainsi, on peut procéder par catégorisation successives. C'est d'ailleurs ce que l'on constate dans la majorité des cas. Cette remarque pourrait expliquer pourquoi, aussi bien dans les investigations de Jean Piaget que dans les situations pédagogiques courantes, les compétences de catégorisations et de tri, telles que nous les avons définies, ne sont pas distinguées. Mais si, comme nous en faisons dans cette thèse un point nodal, nous lions par un lien indéfectible une compétence avec une certaine forme langagière, cette distinction devient explicite et obligée.

1.3 La dimension épistémologique psychogénétique

1.3.1 La genèse de la structure de catégorisation selon Jean Piaget

« Il est clair tout d'abord que le langage comporte en sa syntaxe et en sa sémantique mêmes, des structures de classification. Il est inutile d'y insister, puisque tous les substantifs et les adjectifs consistent à découper le réel en classes qui ou bien se transmettent à l'enfant apprenant à parler par le fait qu'il confèrera à ces mots le même sens que les adultes, ou bien ne se transmettent pas intégralement, mais l'influencent cependant en l'obligeant tout au moins à un début de classement »¹¹⁸⁷.

Mais le langage ne semble pas nécessaire à la formation de la structure des schèmes de la catégorisation, il joue un rôle indiscutable et constitue (peut être) une condition nécessaire mais non suffisante de l'achèvement de ces structures sous leurs formes les plus générales. C'est pourquoi, le langage, si important qu'il soit dans l'élaboration d'une structure logique, comme la catégorisation, ne saurait être un facteur essentiel d'une telle formation¹¹⁸⁸.

Ainsi, Jean Piaget et Bärbel Inhelder n'ont-ils pas accordé d'attention particulière aux relations réciproques pouvant exister entre certaines formes langagières et la structures des schèmes de la catégorisation, durant le développement de cette dernière.

« Bien avant d'apprendre à classer les objets, l'enfant les perçoit déjà selon certaines relations de ressemblances et de différences, sources des classifications »¹¹⁸⁹. Ces relations sont proprement perceptives. Ainsi connotées, de telles perceptions sont des formes d'action exploratoires qui conduisent à la production en extension d'agrégats, dont l'unité est fondée sur des principes de proximités spatiales ou temporelles¹¹⁹⁰. Aussi, par exemple, un enfant peut-il vouloir éliminer un objet noir d'un ensemble d'objets, tous rouges en dehors de lui, parce que cet objet provoque une sorte de rupture dans la continuité du perçu. Aussi, si cet

¹¹⁸⁷ Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La genèse des structures logiques élémentaires. Introduction*. Opus cité. Jean Piaget dit 'classe' pour 'catégorie' et ne distingue pas toujours, dans ses investigations, la catégorisation du tri.

¹¹⁸⁸ Jean Piaget. Ibid.

¹¹⁸⁹ Jean Piaget. Ibid.

¹¹⁹⁰ Jean Piaget. Ibid.

objet est caché dans le « tas ensemble » et qu'on demande à l'enfant si tous les objets sont rouges, il pourra dire oui, même s'il ne les voit pas tous¹¹⁹¹.

Jean Piaget et Bärbel Inhelder distinguent à ce niveau deux types d'appartenance : l'appartenance schématique, par exemple, « une table appartient à un restaurant » et l'appartenance partitive, par exemple un objet venant combler un vide dans une configuration (comme un puzzle en cours de construction). Ces deux appartenances se distinguent de l'appartenance inclusive d'un objet dont on reconnaît le caractère générique, commun à tous les objets d'un ensemble¹¹⁹².

Nous dirons donc qu'on peut parler d'une catégorie à partir du moment (et seulement à partir du moment) où le sujet est capable :

- (1) de la définir en compréhension ;
- (2) de la manipuler en extension, selon « des relations d'appartenances » ;
- (3) d'une coordination entre la compréhension et l'extension par le jeu conscient des quantificateurs 'tous' et 'quelques'.

Ainsi donc, pour Jean Piaget, le développement de la compétence « catégoriser » est celui de la différenciation et de la coordination progressive de l'extension et de la compréhension, selon un réglage, qui en fait, ne se constituera, sous une forme cohérente opératoire, qu'avec la construction des inclusions proprement dites¹¹⁹³, et évaluée à l'aide d'un critère de logicité des classes¹¹⁹⁴.

L'analyse d'un tel développement explicite trois stades successifs¹¹⁹⁵.

- (I) Celui des collections figurales.

L'enfant dispose d'un schème d'assimilation lui permettant de construire des ressemblances et des différences (deux objets sont en plastique ou un objet est en plastique et l'autre non). Mais, il peut y avoir glissement de la ressemblance à la contiguïté ou à la convenance. Par exemple, la collection commence avec des ronds et se poursuit avec des objets rouges car le dernier rond choisi est rouge puis se poursuit avec des carrés car le dernier objet rouge

¹¹⁹¹ Ce que nous avons maintes fois constaté avec des enfants de l'école maternelle.

¹¹⁹² Jean Piaget. Ibid.

¹¹⁹³ Jean Piaget. Ibid. Nous ne citons pas exactement l'auteur car sa terminologie (il ajoute « les quantificateurs un et aucun ») nous paraît redondante au moins logiquement. Car non 'tous x (p(x))' équivaut à 'quelques x (non p(x))' ou 'un x (au moins) (non p(x))' et 'tous x (non p(x))' équivaut à 'aucun x (p(x))'. « Le réglage des quantificateurs » relèverait davantage d'une coordination entre la négation et la quantification universelle. Il est d'ailleurs vrai que Jean Piaget définit un critère de logicité comme une inférence obtenue à partir de la proposition $A \subset B$ ou « tous les A sont quelques B ». Donc : cardinal de $A \leq$ cardinal de B. Ce critère, en ce qui concerne les quantificateurs, se restreint bien aux deux seuls que nous avons notés. Nous ne discuterons pas davantage de cela mais nous rappelons que ce critère de logicité est largement discuté.

¹¹⁹⁴ *La genèse des structures logiques élémentaires*. Opus cité. Chapitre I. *Les collections figurales*.

¹¹⁹⁵ Et tels que la genèse de l'un soit en continuité avec l'achèvement de l'autre, mais de façon instable, puisqu'il peut y avoir chevauchements des stades, selon les situations et les connaissances en jeu.

choisi est un carré. L'enfant peut alors poser un triangle sur le dernier carré pour commencer une maison, et poursuivre ainsi. On note cet aspect important qu'une telle collection peut se constituer par alternance d'une centration sur la compréhension ou d'une centration sur l'extension qui, dans ce dernier cas, n'est plus réglée par le seul jeu des ressemblances et des différences. Le processus qui conduit à une telle collection est complètement empirique et non anticipé globalement, c'est-à-dire, non régulé par une détermination unique, à savoir une assimilation par un certain schème de la catégorisation d'une situation de référence, contenant la forme langagière constante $p(x)$. Sans prédicat explicite et permanent, la constance dans l'activité se traduit par celle de l'activation du schème de la comparaison (binaire) « des ressemblances et des différences »¹¹⁹⁶, régulé par des prédicats contingents. Jean Piaget distingue toutefois différents niveaux dont nous pouvons retenir d'une façon générale que « *le stade I serait avant tout caractérisé par son indifférenciation entre les structures logiques et infralogiques*¹¹⁹⁷, et cette indifférenciation se traduirait par un ensemble de degrés intermédiaires entre le plus ou moins figural dans les collections constituées »¹¹⁹⁸.

(II) Celui les collections non figurales.

Les collections ne sont plus figurales et leur constitution est régulée par une permanence (conservation en mémoire de travail) de la forme langagière $\forall x (p(x))$ mais avec modification de $p(x)$ en cours d'activité.

Précisons que Jean Piaget fait, pour ses expérimentations et leurs analyses, les choix suivants :

➤ Il introduit une situation dont les éléments matériels sont un ensemble E , très hétérogène au niveau des espèces et des modes¹¹⁹⁹, et une formulation langagière qui connote une activité de tri¹²⁰⁰. Dans certaines situations, le milieu matériel contient d'ailleurs des boîtes. Il semble donc que l'activité des enfants soit contrainte par le concept organisateur du rangement (il n'est donc pas étonnant comme, le souligne Jean Piaget, que tous les éléments de E « trouvent une place »). Ainsi, une telle situation objective autorise-t-elle aux enfants la liberté des critères de tri, celle d'en concevoir plusieurs au sein du même ensemble E et celle d'en

¹¹⁹⁶ Chapitre II. *Les collections non figurales*. Opus cité.

¹¹⁹⁷ L'infralogique ou opérations de partitions isomorphes aux classifications, mais portant sur le continu et non sur les ensembles discontinus.

¹¹⁹⁸ Chapitre II. *Les collections non figurales*. Opus cité.

¹¹⁹⁹ Par exemple, des personnages, des animaux, des plantes des bâtiments et des véhicules. Ou des formes géométriques de différentes couleurs et des lettres de différentes couleurs.

¹²⁰⁰ Par exemple « tu vas essayer de mettre de l'ordre » ou « mettre de l'ordre, tous les mêmes ensemble », en supposant que le concept quotidien d'ordre s'apparente à celui de tri, ce que semble confirmer les activités des cas présentés par Jean Piaget.

changer finalement¹²⁰¹.

➤ Il analyse l'activité des enfants comme l'ajustement de proche en proche d'une construction de plusieurs catégories, sans plan initial d'ensemble : type 1 : pas de critère de départ et résidu final non classé ; type 2 : modification de cet état, par corrections rétroactives et anticipations partielles, avec des classes ne présentant pas d'intersection¹²⁰², jusqu'à « épuisement des objets de E » ; type 3 : plus évolué que le type 2. Les rétroactions partielles peuvent finalement conduire à des catégories exhaustives, sur la base d'un critère unique (une seule espèce et une partition en modes incompatibles de cette espèce) ; types 4 : ces catégories peuvent alors être subdivisées en sous catégories exhaustives.

On note que, même à son niveau le plus évolué, le processus qui conduit à un tel tri reste empirique et non anticipé globalement, c'est à dire non régulé par une détermination unique¹²⁰³, à savoir une assimilation par un certain schème du tri d'une situation de référence contenant la forme langagière constante : $(u \in x \text{ et } v \in x) \Leftrightarrow u R v$, « x étant une boîte donnée », la relation R étant appliquée à l'ensemble des couples (u, v), d'éléments de $E \times E$.

On note aussi que les sujets du stade II évaluent bien des ressemblances et, au contraire, des différences binaires. On les entend dire explicitement que deux objets vont ensemble « car ce sont les mêmes », relativement à une certaine qualité¹²⁰⁴. Mais on n'entend pas de verbalisations associées à la différence, relativement à cette qualité. Ainsi, si l'on peut lier, à certains moments de l'activité d'un sujet, une construction en extension d'une succession de catégories qui vérifient bien séparément $\forall x (p(x) \Rightarrow x \in A)$, donc avec une anticipation du prédicat p conduisant à une certaine extension A, on ne saurait affirmer, à ce stade, que $\forall x (p(x) \Leftrightarrow x \in A)$, c'est-à-dire une véritable coordination entre la compréhension¹²⁰⁵ et l'extension. Donc, on ne saurait affirmer $\forall x (\text{non } p(x) \Rightarrow x \in \tilde{A})$, signifiant une anticipation, coordonnée avec la première, d'une certaine extension \tilde{A} . Pour ce fait, jusqu'à ce stade, Jean Piaget utilise le terme de collection, réservant le terme de classe (catégorie) au stade (III) suivant.

(III) Celui de la coordination entre l'inclusion et l'extension.

L'analyse précédente nous conduit à une première focalisation sur un invariant concep-

¹²⁰¹ Voir les cas de One (4 ; 6) : tri selon la couleur puis selon la forme. Mais avec Bec (4 ; 8), on ne peut déterminer un unique critère de tri. Opus cité. Ibid.

¹²⁰² Au contraire, une classe pourrait se constituer en rassemblant « tous » les rectangles. Une autre classe étant obtenue en rassemblant « tous » les objets rouges dont un rectangle.

¹²⁰³ Par venance, un critère initial peut se trouver abandonné ou « subdivisé ».

¹²⁰⁴ Comme Pat (5 ; 2) et Cur (5 ; 8). Ibid.

¹²⁰⁵ Notons que l'on trouve de façon bien suggestive, très souvent en psychologie cognitive, le terme 'intention' à la place du terme 'compréhension'.

tuel de la catégorisation : celui de la quantification universelle. En effet, sa signification¹²⁰⁶ conduit à considérer un objet de A comme générique au sens de p , donc indépendamment de ses caractères empiriques et accidentels. **La compétence « catégoriser » suppose donc une double régulation : au niveau anticipateur, l'activation du concept de la quantification universelle et, au niveau du contrôle, la coordination de la compréhension et de l'extension**, laquelle pourrait se suffire, en fait, encore du maintien du schème de la comparaison entre une image mentale ou un prototype concret, et un objet actuellement manipulé. **Ces deux concepts sont donc des concepts organisateurs de l'activité.** En des termes formels, **on se retrouve alors avec une conception complète de la relation $\forall x (p(x) \Leftrightarrow x \in A)$ que l'on peut définir comme l'invariant opératoire du schème de la catégorisation.**

Jean Piaget note que les sujets du stade III ont un plan, dès le début (ou le trouvent rapidement). Ce qui caractérise l'activité de ces sujets est une anticipation de la relation d'addition des classes $E = A + \tilde{A}$: Une régulation anticipatrice va activer un schème qui, s'il conduit tout aussi bien à une construction de A en extension, est régulé plus globalement par le caractère opératoire de la relation $E = A + \tilde{A}$. Psychologiquement, un sujet anticipe consciemment que tous les objets de E vérifient soit $p(x)$ soit non $p(x)$ ¹²⁰⁷.

Jean Piaget pense que la quantification s'accompagne de la réversibilité opératoire $E = A + \tilde{A} \Leftrightarrow E - \tilde{A} = A$ ¹²⁰⁸ et du « réglage du tous et du quelque » : « tous les A sont quelques E »¹²⁰⁹. Nous sommes donc conduits à une seconde focalisation sur la quantification universelle, celle de porter aussi sur les objets de E soit $\forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$. En ces termes, E peut alors être considéré comme un objet générique pour l'ensemble des prédicats possibles définissables sur E qui agissent alors comme des opérateurs sur les ensembles : Au couple (p, E) est associée une et une seule catégorie A . On retrouve alors le niveau le plus élevé de la compétence « catégoriser » et qui s'exprime par le principe :

$$\forall E \forall p \exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x))).$$

Mais, il nous semble aussi que le stade III peut se trouver instable sur au moins deux points :

➤ Nous avons pu constater, à plusieurs reprises, l'infirmité des conceptions, s'agissant de la catégorisation, dans un cas essentiel : quelle évaluation peut avoir l'assertion

¹²⁰⁶ Cette signification relève sans doute de la métamathématique.

¹²⁰⁷ A cela s'ajoute le principe de non contradiction qui relève d'une compétence plus primitive.

¹²⁰⁸ Réversibilité opératoire définie donc en des termes algébriques. Si nous traduisons ces expressions en termes propositionnels il viendrait : $\forall x (x \in E \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \notin A))$ et $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in E \text{ et non } (x \notin A))$. Nous adopterons un autre aspect de la réversibilité opératoire, associée au schème de la catégorisation.

¹²⁰⁹ Cette expression consciente (ce qui constitue un premier test) pour un sujet lui permettrait de passer avec succès le test de logicité : « il y a plus de E que de A ».

suiuante « si $p(x)$ vrai alors $q(x)$ vrai » ? Beaucoup de lycéens (et d'adultes) répondent faux lorsqu'ils surchargent un objet o vérifiant q de caractères prototypiques qu'ils ne reconnaissent pas dans l'objet générique x , vérifiant p , au sens aristotélicien du terme. Ainsi, ils ne savent pas tous expliquer pourquoi « si x est carré alors x est rectangle » est une proposition vraie. En d'autres termes : « tout carré est un rectangle » est une proposition vraie. Nous mettons ici l'accent sur la signification des objets manipulés, laquelle dépend du cadre dont ces objets sont des termes. En l'occurrence, la compétence relative à l'inclusion des catégories (reconnaître une inclusion) suppose aussi une compétence logico-linguistique, comme par exemple $(p(x) \text{ et } q(x)) \Rightarrow p(x)$ ¹²¹⁰.

➤ Nous avons expérimenté, sur des sujets élèves de 1^{ère} S¹²¹¹, des énoncés du même type que le suivant : $\forall x (3x + 15 > 12 \Leftrightarrow x > -1)$. Déterminer t tel que $3(t-1) + 15 > 12$ ¹²¹². Une infime minorité d'élèves déterminent t « en partant de » $t-1 > -1$. La plupart des élèves résolvent donc l'équation d'inconnue t donnée. La quantification universelle de la proposition initiale ne donne pas à x le caractère de nombre réel générique. La forme (accidentelle) de l'objet manipulé influence encore le traitement que l'on en fait. Donc, la quantification universelle est en fait ignorée et l'élève entend de façon restrictive $(3x + 15 > 12 \Leftrightarrow x > -1)$. Ainsi, la substitution ne peut être spontanée¹²¹³.

Considérant les formulations langagières, il nous apparaît que le terme ensemble connote très tôt chez les enfants (dès le stade I) une conception qui rendra compatible une conception logique : il s'agit bien d'opérer entre des objets un rapprochement selon certaines convenances. Très tôt donc, l'enfant peut entendre ce mot et construire certaines collections. Jean Piaget considère alors que le progrès dans la coordination de la compréhension et de l'extension est lié au développement du concept de la quantification universelle, comme délimitant les ensembles. Nous allons, pour notre part, décomposer ci-dessous (dans le tableau 3)

¹²¹⁰ Par exemple certains enfants du stade I (comme nous l'avons constaté) ne répondent pas précisément à la question « est-ce qu'un carré jaune en plastique est un carré ? ». Ils ne disent pas oui simplement, ils ajoutent c'est un carré jaune ou c'est un carré en plastique. Notons que $(p \text{ et } q) \Rightarrow p$ est un théorème de la logique mathématique. (N.Bourbaki. *Théorie des ensembles*. Chapitre 1. §3. *Théorie logique*. Mais qui ne semble pas très naturelle (au sens de la logique naturelle de Jean-Blaise Grize) puisque même beaucoup d'adultes ont du mal à justifier une telle implication, en « jouant sur les significations », comme il faudrait. En particulier, cette assertion a pu être vérifiée dans un public d'enseignants en formation.

¹²¹¹ Mémoire de DEA : *Approche sémantique et non cognitive d'un concept mathématique. Le concept "égalité"*.

¹²¹² E est l'ensemble des nombres réels.

¹²¹³ Nous ne disons pas que cette absence de spontanéité est la conséquence d'une conception seulement relative à la quantification universelle. Une certaine conception de l'égalité est aussi en jeu. D'autre part, Il ne suffit pas, il nous semble, d'évoquer à ce sujet un effet de contrat (ce qui l'a été par un didacticien à qui cette situation a été relatée) : si la question conduit un sujet à une résolution automatisée d'une inéquation, ceci prouve au moins qu'une telle résolution n'est pas régulée par l'indicateur qu'est le quantificateur universel. Ce qui conduit à une mauvaise conception de l'équivalence.

l'acquisition du concept de la quantification universelle et définir cette acquisition dans un premier niveau. Un second niveau est celui, il nous semble, du stade III considéré par Jean Piaget. Il s'agit de la réversibilité opératoire définie par les opérations inverses portant sur les ensembles :

$E = A + \tilde{A}$ et $E - \tilde{A} = A$. Dès lors, l'achèvement de ce second niveau ne peut s'entendre que de façon formelle et en termes d'opérations.

Si nous considérons le concept de schème fermé¹²¹⁴, **nous définissons un premier niveau comme associé à la réversibilité opératoire : l'ensemble E étant donné, une formulation langagière F_c , qui contient le prédicat p, donne A et, réciproquement, A donne une formulation langagière qui contient p. C'est à dire que nous envisageons l'homomorphisme de l'ensemble des prédicats possibles (définis sur E) sur l'ensemble des parties de E¹²¹⁵.**

Jean Piaget précise le point suivant : Au stade I des collections figurales, l'enfant assimile la quantification en la déformant. Une disposition de formes colorées lui étant présentée, il n'a pas de peine à reconnaître, par exemple, et justement, que tous les ronds sont bleus. Mais une telle reconnaissance n'est pas due à un usage pertinent des adjectifs indéfinis tous ou toutes (voire du pronom indéfini dans « ils sont tous bleus ») et déterminants universels, relatifs aux unités d'une totalité. Cette reconnaissance résulte d'une perception globale de la collection, l'adjectif porte sur la collection totale. « *Un enfant hésite par exemple à reconnaître que tous les ronds soient bleus parce qu'ils sont mêlés en une même collection figurale à des carrés rouges* »¹²¹⁶. Nous ajoutons à cette analyse un autre élément qui nous paraît lié, voire explicatif. **Le complexe de sons « tout » (ou « toute ») est considéré par des jeunes enfants et dans une utilisation quotidienne comme un adverbe d'intensité** : ainsi, dans l'expression il est tout bleu (elle est toute rouge). On retrouve ainsi associée à une telle référence une notion de globalité : l'objet, comme la collection font un tout relativement à une certaine qualité. **Nous allons retenir de cela un obstacle épistémologique.**

Enfin, Jean Piaget note, qu'au niveau le plus évolué du stade II, ce qui est frappant « *est l'emploi toujours plus fréquent du quantificateur tous* »¹²¹⁷. « *Il y a un progrès dans le sens de la coordination de la « compréhension » et de « l'extension », ce qu'attesterait précisément*

¹²¹⁴ Défini dans le chapitre précédent sous 3.1.1.3

¹²¹⁵ Il n'est pas utile d'expliquer ici davantage cet homomorphisme mais rappelons qu'il est celui de deux algèbres de Boole, dont les éléments constitutifs sont respectivement P (ensemble de prédicats p définissables sur E), 0, 1, et, ou, non, < d'une part, et $\Pi(E)$ (ensemble des parties A de E), ϕ , E, \cap , \cup , \tilde{A} , \subset , d'autre part.

¹²¹⁶ Jean Piaget. Chapitre III. *Le « tous et le « quelques » et les conditions de l'inclusion*. Opus cité.

¹²¹⁷ Jean Piaget. Opus cité. Ibid.

*cet emploi du « tous » comme délimitation des ensembles ainsi formés »*¹²¹⁸. Mais il ne note pas l'ambiguïté concernant cet usage de la quantification que nous avons signalé plus haut. Par exemple *Ed (5 ; 6)* dira aussi bien « *c'est tout des bêtes* » et « *c'est tout en bois* » dans la même activité alors que *Cla (7 ; 0)* dira « *c'est tous des bêtes* ».

1.3.2 Conclusion

Nous nous limitons à ceux des éléments pertinents qui devraient nous servir au niveau de l'école maternelle, nous ne rendons pas compte de la suite des études de Jean Piaget en ce qui concerne des différenciations au niveau du stade III¹²¹⁹. Nous avons au moins précisé ce stade III, à son niveau minimal, pour montrer en quoi il représente une évolution par rapport au stade II. Plus au-delà, il s'agirait de considérer des activités de construction d'une suite décroissante de sous-ensembles de E, coordonnée à une suite croissante des sous-ensembles complémentaires. ... $A_3 \subset A_2 \subset A_1 \subset E$ et $E \supset \dots \tilde{A}_3 \supset \tilde{A}_2 \supset \tilde{A}_1$, et aux relations inclusives systématiques : $A_1 \subset E$, $A_2 \subset E$, $A_3 \subset E$, jusqu'à la conception d'une catégorie vide. Notons toutefois que (comme nous le verrons) déjà au stade II et au niveau 1 direct, un enfant est capable de construire une catégorie concrète à partir d'une proposition de la forme « p(x) et q(x) et r(x) »¹²²⁰.

Le tableau ci-dessous rend compte de ce que nous retenons.

Repères critiques	Invariants opératoires	Schémes	Formes langagières
(Stade I) -Relation binaire de la comparaison -Relation schématique ou figurale de la comparaison : appartenance schématique ou parti-tive.	 -La négation -Principe de non contradiction -Principe du tiers-exclu	S_{Co_i} = Schèmes coordonnés de : -la désignation ; -la négation. S_{Ci_i} = schèmes coordonnés de : -la comparaison binaire. Autres schèmes : -constructions relevant d'une anticipation locale et fluctuante d'une configuration selon divers critères de rassemblement.	 -Noms ou qualifications spécifiques d'objets -Adverbes : non ou pas -Ensemble -Pareils, pas pareils

¹²¹⁸ Opus cité. Chapitre II. *Les collections non figurales*.

¹²¹⁹ Chapitre IV : *inclusion des classes et classifications hiérarchiques*. Chapitre V : *les complémentarités*.

¹²²⁰ Ce qui suppose une approche hiérarchisée dans l'exploration perceptive des objets et que l'on peut formaliser ainsi : $(p(x) \text{ et } q(x) \text{ et } r(x))_E \Rightarrow p_{A_1}(x)$, $(p(x) \text{ et } q(x) \text{ et } r(x))_{A_1} \Rightarrow q_{A_2}(x)$, puis $(p(x) \text{ et } q(x) \text{ et } r(x))_{A_2} \Rightarrow r_{A_3}(x) \dots$
Décision finale : $\forall x ((p(x) \text{ et } q(x) \text{ et } r(x))_E \Rightarrow x \in A_3)$. Jean-François le Ny. *Comment l'esprit produit du sens*. Chapitre 4. *Signification de mots concepts et catégories*. Opus cité.

Repères critiques	Invariants opératoires	Schémes	Formes langagières
(Stade I-II) -Relation permanente de la comparaison binaire parvenant à une quantification extensive non consciente	-Conception de la quantification universelle : restriction au perceptivo-moteur Niveau 0 direct: -Premier niveau de coordination entre la compréhension et l'extension. ($p(x) \Rightarrow x \in A$)	$S_{Ci} =$ -La construction d'une collection A en extension avec maintien en mémoire du prédicat ¹ : $p(x) \rightarrow A$ soit $A = \{p(x)\}$ ¹ Par rapprochement binaire avec un ou deux objets précédents.	F_{Cpi} : « mettre les x ensemble qui sont p » -Ensemble -Tous (toutes) = les -Tous (pareils « quel que chose ») -« Tous les p sont des A »
1. Inertie du schème de la comparaison binaire S_{Ci} et perceptive $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Obstacle épistémologique			
(Stade II) - Permanence non consciente de la quantification extensive aboutissant à une ressemblance globale Obstacles non franchis.	- Niveau 1 direct : - Apport sémantique : concept de la quantification universelle : $\forall x ((p(x) \Rightarrow x \in A)$ - E- ($A + \tilde{A}$) = ϕ	$S_{C'pf}$ -La construction d'une collection en extension avec maintien en mémoire de la quantification universelle portant sur les objets de A^2 Régulation R_a ² Par anticipation de l'extension finale	- « Tous les p sont les A » - $F_{C'pf}$: « mettre ensemble tous x qui sont p » - « Tous les p sont les A » et « Les autres ne sont pas des p »
<p>- ² Une assimilation déformante peut pourtant conduire en fait à la construction d'une catégorie équivalente à celle d'un tri selon la relation d'équivalence ¹²²¹ : en particulier: $\forall x \forall y (xRy$ signifie $p(x)$ et $p(y)$ ou non xRy signifie $p(x)$ et non $p(y)$) ; c'est-à-dire, « x et y sont tous les deux p » ou « x est p et y est non p ». Il s'agit donc là d'une adaptation de S_{Ci} ¹²²²</p> <p style="text-align: center;">- Homonymie linguistique (tout≠tous, toute≠toutes) $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Obstacle épistémologique</p> <p style="text-align: center;">- Inertie du schème $S_{C'pf}$ $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ Obstacle (voire épistémologique en tenant compte de la note 2 ci-dessus)</p>			
-Réversibilité opératoire = fermeture du schème $S_{C'pf}$ -Permanence consciente de la quantification extensive aboutissant à une ressemblance générale	- Niveau 1 réciproque: Deuxième niveau de coordination entre la compréhension et l'extension. $\forall x ((x \in A \Rightarrow p(x))$	$S_{C''pf}$ -La construction d'un prédicat caractérisant les éléments de A Régulation R_a ,	- $F_{C''pf}$: « Tous les x ensemble sont quel p ? » -« Tous les x de A vérifient p »

¹²²¹ Et de façon redondante mais correspondant à une activité cognitive possible.

¹²²² D'ailleurs, Jean Piaget exprime t-il, dans une définition d'une catégorie (que nous ne reprenons pas), que, par exemple, « toutes les herbes sont vertes » « signifie qu'elles se ressemblent en tant que vertes et présentent donc la relation « co-vertes » ».

Repères critiques	Invariants opératoires	Schémes	Formes langagières
<p>(Stade II-III)</p> <p>Niveau concret</p> <p>-Coordination entre la compréhension et l'extension anticipée et régulée par la - quantification universelle</p> <p>Inclusion des classes non anticipée.</p> <p>-Consolidation de la fermeture d'un schème opératoire → réversibilité opératoire au niveau des régulations</p>	<p>- Niveau 1 :</p> <p>E donné</p> <p>- $\forall x (p(x) \Leftrightarrow x \in A)$.</p> <p>$\exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow p(x))$.</p> <p>- $E \subset A + \tilde{A}$</p>	<p>$S_{C_{pf}}$</p> <p>-Accommodation réciproque des schèmes $S_{C_{pf}}$ et $S_{C''_{pf}}$</p> <p>R_a</p> <p>-Structuration de niveau supérieur :</p> <p>$R_{a'}$ et $R_{a''}$ réversibles</p>	<p>- « Tous les x de A vérifient p et réciproquement »</p> <p>- « Tous les x de \tilde{A} vérifient non p et réciproquement »</p> <p>- « Tous les x de E sont dans A ou dans \tilde{A} »</p>
<p>-Expertise sur la nature véritable de l'assimilation au niveau de la résultante cognitive R_c : $R_{a'}$ et $R_{a''}$ se consolident progressivement comme des régulations inverses.</p> <p>-Inertie du schème de la comparaison non hiérarchique →→→→→→→→</p> <p style="text-align: center;">Obstacle épistémologique</p>			
<p>(Stade II-III)</p> <p>Niveau formel</p> <p>-Coordination entre la compréhension et l'extension anticipée et régulée par la quantification universelle.</p> <p>Inclusion des classes anticipée.</p>	<p>-Niveau 2</p> <p>E donné</p> <p>-$\exists ! \tilde{A} \forall x (x \in \tilde{A} \Leftrightarrow \text{non } p(x))$.</p> <p>-$E = A + \tilde{A}$ et</p> <p>$A = E - \tilde{A}$</p> <p>$\tilde{A} = E - A$</p>	<p>$S_{C_{pf}}$</p> <p>- La construction d'une collection en extension avec maintien en mémoire de la quantification universelle portant sur les objets de E.</p> <p>-Schème de la reconnaissance anticipée des relations logiques</p>	<p>-Non tous</p> <p>- Quelques</p> <p>- « Tous les x de E sont dans A ou dans \tilde{A} »</p> <p>« Tous les x de E sont des p ou ne sont pas des p »</p>
<p>(Stade III)</p> <p>-Hiérarchie consciente de premier niveau</p>	<p>$\forall E \forall p \exists ! A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } p(x)))$.</p> <p>non $(\forall x (p(x)) \Leftrightarrow \exists x (\text{non } p(x)))$</p>	<p>Schéme de la construction coordonnée des deux suites croissantes $A \subset E$ et $\tilde{A} \subset E$ et homomorphes. Utilisation des théorèmes « p ou non p », « non p et p », comme invariants opératoires explicites.</p>	<p>« Quelques x de E ne sont pas dans A »</p> <p>« Tout x de E est soit dans A soit dans \tilde{A} car pour tout x on a p(x) ou non p(x) ».</p>

Tableau 3

1.3.3 Définitions des compétences des niveaux 1 et 2

1.3.3.1 Niveau 1

C_{pf} :

- composante schème : $S_{C_{pf}} = (S_{C'_{pf}}, S_{C''_{pf}})$, de niveau 1 ;
- composante langagière : $F_{C_{pf}} = (F_{C'_{pf}}, F_{C''_{pf}})$.

C_{pi} :

- composante schème : structure fondée sur une accommodation achevée, et dont certains constituants sont les schèmes fermés $S_{C_{0i}}$ et $S_{C_{1i}}$;

- composante langagière : $F_{C_{pi}}$.

Rappelons que le processus qui définit l'exercice d'une compétence s'accompagne de l'activation de certaines régulations qui conduisent à la production d'inférences (théorèmes en acte) implicites (non verbalisées) ou explicites (verbalisées). Elles concernent ici une conception naturelle de la négation et ressortent d'une logique naturelle¹²²³ :

- concernant C_{pi} , on peut comprendre les arguments suivants : « si x alors p(x) vrai ou non p(x) vrai », « si p(x) vrai alors $x \in A$ », « si p(x) vrai alors non ($x \notin A$) », « si non p(x) vrai alors non ($x \in A$) », « on n'a pas (p(x) vrai et non p(x) vrai)¹²²⁴ ;

- concernant C_{pf} : on peut comprendre les expressions précédentes et réciproquement : « si $x \in A$ alors p(x) vrai », « si non ($x \notin A$) alors p(x) vrai », « si non ($x \in A$) alors (non p(x) vrai) », et « si (non p(x) vrai) alors $x \in \tilde{A}$ », « si x dans E alors $x \in A$ ou $x \in \tilde{A}$ ». On se retrouve à un niveau de conscience où l'activité de construction d'une catégorie A se double de celle de la catégorie \tilde{A} , mais non encore d'une construction explicite des inclusions d'ensembles ($A \subset E$ et de même, $\tilde{A} \subset E$) inclusions non anticipées globalement et de la forme $E = A + \tilde{A}$.

1.3.3.2 Niveau 2

C_{pf} :

- composante schème : $S_{C_{pf}}$ de niveau 2 ;
- composantes langagières : celle du niveau 1 ;
- compétences langagières implicites : « les x de A sont quelques x de E »,

¹²²³ « Parler de logique naturelle, c'est vouloir en marquer deux aspects. L'une est sa démarcation d'avec la logique mathématique et l'autre, le fait qu'elle se développe spontanément avec l'apprentissage de la langue naturelle ». Jean-Blaise Grize. *Logique naturelle et communication*. Chapitre 4. *Une logique naturelle*. Puf. 1996.

¹²²⁴ Expressions qui perdent un caractère formel car renforcées par des ajouts linguistiques Le premier théorème est un des invariants opératoires implicites dans l'activité. Les quatre expressions suivantes peuvent servir d'arguments distinguables, bien que certaines puissent être considérées comme équivalentes dans un dialogue, au cours d'une activité relative à la catégorisation (éventuellement collective).

« il existe des x de E qui ne sont pas des x de A » ;

- nous reprenons, concernant C_{pf} , les capacités d'inférence précédentes mais en y adjoignant une construction explicite d'une inclusion d'ensembles ($A \subset E$), pouvant conduire secondairement au critère de logicité de Jean Piaget : « $\text{card } A < \text{card } E$ ».

C_{pi} :

- C_{pf} de niveau 1.

1.4 Des choix didactiques

1.4.1 Un regard sur l'écologie du concept de la catégorisation dans l'enseignement, à l'école primaire

1.4.1.1 Les instructions officielles¹²²⁵

La réforme dans l'enseignement des mathématiques qui va modifier en profondeur les programmes en vigueur depuis 1945 aboutit à l'écriture d'un nouveau programme en 1970¹²²⁶. « Pour les réformateurs, cette modernisation doit prendre en compte l'état de la discipline « mathématique » telle qu'elle s'est développée depuis le début des années 1950, ainsi que les apports récents de la psychologie de l'enfant. Ces derniers identifient volontiers l'élaboration des structures mathématiques et le développement des structures mentales de l'enfant mis en évidence par la psychologie génétique de Jean Piaget »¹²²⁷. On obtient alors explicitement que l'apprentissage de nombreux concepts mathématiques en « passe » par un processus de catégorisation¹²²⁸ (nombres entiers, relations fonctionnelles ou non...).

Une circulaire de 1977¹²²⁹, concernant l'école maternelle, ne restreint pas un tel apprentissage à la seule discipline mathématique. Il s'agit de mettre en relief la valeur d'une éducation globale et fonctionnelle. Elle précise « que l'instituteur de jeunes enfants ne doit pas oublier pour autant que le langage est aussi un puissant moyen d'analyse de la réalité. Il faut que l'enfant puisse faire l'adéquation du mot à la chose, à la situation ». C'est là un appren-

¹²²⁵ Nous n'excluons pas les formulations connotant des activités de sériation. Aussi bien d'ailleurs, Jean Piaget et Bärbel Inhelder rendent compte dans le même ouvrage des développements synchronisés des compétences de catégorisation, de tri et de sériation. De cette synchronisation, ils tirent d'ailleurs argument de la secondarisation de l'influence du langage sur de tels développements.

¹²²⁶ Arrêté du 2 janvier 1970.

¹²²⁷ Renaud d'Enfert. IUFM de l'académie de Versailles, groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay. France. *Du calcul aux mathématiques ? L'introduction des «mathématiques modernes» dans l'enseignement primaire français, 1960-1970.*

C'est le cas notamment au sein de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM) fondée en 1952 par des mathématiciens, des philosophes et des psychologues, et dont les premières réflexions ont pour thème les « Relations entre structures mathématiques et structures mentales ». 2008.

<http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/dEnfert-2008-Prague/dEnfert08.htm>.

¹²²⁸ Par exemple il existe un nombre entier défini comme « l'ensemble de tous les ensembles équipotents à l'ensemble $\{\phi, \{\phi\}\}$ », ce qui donne l'entier désigné par le signe 2.

¹²²⁹ Circulaire du 2 août 1977.

tissage relevant des activités qualifiées de cognitives. L'une de ses activités concerne les opérations ainsi explicitées :

« Les opérations sont des transformations conduisant peu à peu, toujours par l'intermédiaire de l'action, à l'élaboration de structures qui se remanient sans cesse grâce à des corrections successives. Il sera dit comment, grâce à l'organisation matérielle du milieu éducatif et dans des situations plus ou moins aléatoires, avec du matériel éducatif ou non, l'enfant doit pouvoir :

- *manipuler des objets ;*
- *reconnaître leurs propriétés ;*
- *les déplacer, les regrouper, ou les ranger ;*
- *les aligner ou les étaler selon certaines « formes » se détachant sur des « fonds » ;*
- *les trier par formes ou par couleurs ;*
- *se donner des règles pour les aligner dans une succession numérique de formes ou de couleurs données ;*
- *décider de les classer selon un ou deux critères bien définis ;*
- *définir des collections d'objets par la propriété commune des éléments qui les constituent, ou par liste des éléments qui les constituent ;*
- *établir des correspondances entre les éléments de deux collections après avoir bien défini ces derniers ;*
- *faire des sériations».*

Un second arrêté, de 1977¹²³⁰, avait précisé pour les classes suivantes.

« Activités pré-numériques :

- *elles sont le prolongement d'activités et la consolidation de compétences amorcées avant la période considérée ;*
- *exercices sur la reconnaissance de propriétés d'objets (forme, couleur, taille...) ;*
- *classement d'objets selon un critère. Organisation d'une collection d'objets suivant plusieurs critères. Rangements et sériations par application d'une puis de plusieurs règles ;*
- *exercices de mise en relation des éléments de deux collections, puis des éléments d'une même collection, par l'application de règles simples (changement de forme, de couleur...) ;*

¹²³⁰ Arrêté du 18 mars 1977. Horaires, objectifs et programmes pour le Cycle Préparatoire.

➤ *ces activités sont souvent un des aspects d'autres activités s'intégrant à la vie de la classe (façon de se grouper, distribution ou rangement de jouets, d'outils, élevages et cultures, exercices corporels, activités manuelles et expression plastique ou musicale...)* ;

➤ *elles peuvent être pratiquées comme telles ou donner lieu, à l'occasion, à quelques jeux et exercices plus spécifiques et aboutir à des figurations plus ou moins schématisées.*

Approche de la notion de nombre :

➤ *exercices de mise en correspondance terme à terme, notions de "autant que" ; "moins que", « plus que », à partir des situations les plus diverses ;*

➤ *classement de collections d'objets en utilisant la correspondance ;*

➤ *on attachera la propriété « nombre » aux classes ainsi obtenues ».*

L'arrêté de 1985¹²³¹ réduit considérablement ces références structuralistes. On y note simplement, pour le cours préparatoire : « *classement et rangement des objets et des collections d'objets selon des critères simples ou composés* ».

Une circulaire de 1986¹²³² précise, pour l'école maternelle.

« Les activités scientifiques et techniques :

➤ *ce faisant, l'enfant déploie, découvre et organise les relations logiques et mathématiques ;*

➤ *qui fondent la construction des objets, le repérage de leurs propriétés, et l'établissement des classifications ;*

➤ *progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et récite la comptine numérique ; il établit des sériations, c'est-à-dire ordonne des collections en fonction de propriétés ; il compare des collections terme à terme ».*

Dans l'arrêté de 1991¹²³³, la catégorisation concerne de façon explicite, comme objectif, la construction du nombre au cycle 1.

« Approche du nombre :

➤ *l'enfant doit pouvoir identifier certaines propriétés des objets en vue de : les comparer ; les trier ; les classer ; les ordonner » ;*

➤ *mettre en œuvre une procédure numérique (dénombrement, reconnaissance globale de certaines quantités...) ou non numérique (correspondance terme à terme...) pour : réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre collection ; comparer des*

¹²³¹ Arrêté du 15 mai 1985. *Horaires, programmes et instructions pour l'école élémentaire.*

¹²³² Circulaire du 30 janvier 1986. *Orientations pour l'école maternelle.*

¹²³³ *Les cycles à l'école primaire.* http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes_1991.pdf

collections ».

Et pour l'école maternelle, l'arrêté de 1995¹²³⁴ consacre également un paragraphe spécifique, avec comme objectif la construction du nombre :

- *classifications, sériations, dénombrement, mesurage, reconnaissance des formes et relations spatiales ;*
- *tous ces instruments du travail intellectuel qui deviendront plus tard des opérations de l'activité mathématique sont particulièrement utiles pour décrire la réalité et pour comprendre les phénomènes qui y surviennent ;*
- *classifications et sériations ;*
- *progressivement, l'enfant découvre et organise les relations logiques en travaillant sur des collections d'objets ;*
- *pour cela, il peut procéder à :*
 - *des classements d'objets en fonction de l'une de leurs qualités,*
 - *des rangements d'objets, en particulier grâce à des critères quantitatifs (plus grand, plus gros, plus large...),*
 - *des comparaisons de collections, conduisant éventuellement à compléter certaines d'entre elles* ».

Dans le bulletin officiel de 2002¹²³⁵, il est conservé une terminologie relative à quelques activités de catégorisation à l'école maternelle :

- *« chaque enseignement est l'occasion, pour l'enfant, d'organiser le monde dans lequel il vit, de construire les catégories qui rassemblent ou différencient les objets qui l'entourent en apprenant à tenir compte des critères qui les distinguent ;*
- *lorsque l'enfant compare, classe ou range en explicitant ce qu'il fait dans le cadre d'un dialogue serré avec l'adulte, les propriétés des objets prennent progressivement de la consistance. Il convient d'engager ces activités dans des situations aussi proches que possible de la vie quotidienne (remise en ordre d'un local, réorganisation des classements dans le coin jeu ou en bibliothèque...), en évitant de les systématiser ;*
- *compétences dans le domaine de la matière et des objets : être capable de reconnaître, classer, sérier, ...* ».

Nous avons déjà explicité notre analyse relative aux programmes de 2008¹²³⁶ (sous 1.2).

¹²³⁴ Arrêté du 22-2-1995. Programmes de l'école primaire.

¹²³⁵ Bulletin officiel du 14 février 2002. Horaires et programmes de l'enseignement de l'école primaire.

¹²³⁶ Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008. Numéro hors série. Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire.

Conclusion

Nous vérifions donc qu'une certaine référence à la catégorisation se retrouve de façon pérenne dans les différents textes que nous avons présentés. Les textes de 1970 et de 1977 affirment leur ancrage dans les paradigmes structuralistes et piagétien, et relèvent particulièrement :

- le postulat d'un constructivisme par l'action ;
- que les structures logico-mathématiques sont celles-là mêmes auxquelles les conduites du sujet tendent peu à peu à se conformer.

A partir des textes de 1985, nous enregistrons l'appauvrissement de cet ancrage avec, toutefois, une connotation explicite à des activités de catégorisation (ou de tri) (1985, 1986, 1991, 1995) :

- à l'école maternelle, explicitement ;
- en cours préparatoire, pour construire la « cardinalité » du nombre entier.

Dès 2002, on note le caractère estompé de cette connotation (2002, 2008) :

- à l'école maternelle, où les activités relatives à la catégorisation et le tri sont appelées non systématiquement ;
- en perdant définitivement leurs entrées possibles dans la construction du nombre¹²³⁷, question qui semble tranchée dans les programmes de 2002 et éludée dans les programmes de 2008.

1.4.1.2 L'approche de Britt-Marie Barth

La pédagogue, disciple de Jérôme Brunner, propose une approche systématisée dans la construction des concepts. « *Le modèle opératoire du concept, en tant qu'outil pédagogique, exige qu'on mette le concept « à plat », qu'on en détermine les attributs.... Le modèle du concept oblige donc à une réflexion sur la définition et sur les exemples qui pourront l'illustrer* »¹²³⁸.

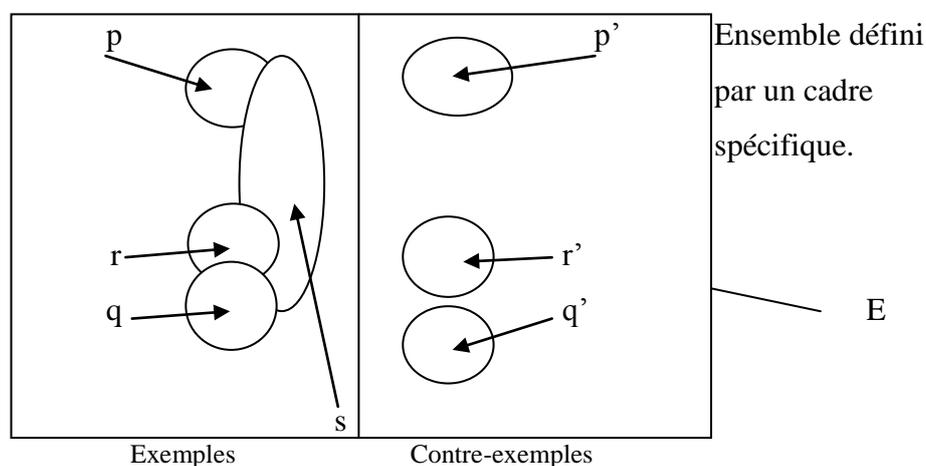
¹²³⁷ « Il faut garder à l'esprit qu'apprendre la suite orale des nombres n'est pas "apprendre à compter" et ne suffit pas pour dénombrer une quantité qui dépasse les possibilités de reconnaissance globale. La pratique du comptage nécessite, en effet, une mise en correspondance des mots ("un", "deux", "trois"...) avec les objets d'une collection, sans oublier d'aucun objet et sans compter plusieurs fois le même objet. Celle-ci ne devient possible et rigoureuse que très progressivement et suppose, en particulier, la prise de conscience du fait que le dernier mot prononcé permet d'évoquer la quantité tout entière (et pas seulement de désigner le dernier objet pointé ». On note bien, dans cette citation, l'absence délibérée d'une référence au caractère ensembliste de la cardinalisation. Notons, à ce propos, un élément que nous avons stigmatisé ; à savoir une formulation d'une des composantes de l'apprentissage, « la prise de conscience ».

¹²³⁸ *Le Savoir en Construction*, Retz, Paris, 1993. Chapitre V. *Rendre le savoir accessible : choisir une forme appropriée pour définir le savoir à enseigner.*

Nous rapportons trois aspects de son approche¹²³⁹.

➤ Présentant à des élèves des situations « exemples » et différentes, elle s'attache à les guider pour qu'ils y « découvrent » des invariants d'un concept désigné au préalable. Par exemple, il est choisi « *de travailler sur le concept d'opinion* ». Les situations « exemples » présentent donc implicitement ou explicitement certains de ces invariants qui sont alors les attributs d'un certain concept ou, plus précisément, une association d'attributs dits essentiels qui, selon le concept sous-jacent, sont de natures très diverses. Par exemple, les attributs d'une espèce de statut social (comme « *avoir un emploi* » ou « *avoir une source de revenu* »), pour le concept de population active, ou les attributs d'une espèce de jugement, pour le concept d'opinion ou le concept d'objectivité, ou une espèce de relations figurales pour le concept de parallélisme...

➤ Ainsi, de telles situations, qui « contextualisent » le concept, peuvent être mises en confrontation avec d'autres, « contre-exemples », ce qui, par un « jeu de oui-non », relatif à certains attributs (ou conjonction d'attributs) reconnaissables (p, r et s, q et s...) et de suppressions graduées de certains attributs non essentiels (s...), dans plusieurs exemples, permettent d'orienter plus précisément l'attention des élèves sur les seuls attributs essentiels p-s¹²⁴⁰, q-s, r-s.



E ensemble s'exprimant dans un certain registre ; p, q, r : attributs essentiels ; s : attributs non essentiels ; p', q', r' contraires des attributs essentiels¹²⁴¹.

➤ Les élèves doivent savoir que le jeu a pour objectif de construire une définition générale et que la langue peut exprimer, par un mot ou une expression, pour un concept donné

¹²³⁹ *L'apprentissage de l'abstraction. Annexe : une démarche pédagogique visant l'abstraction. Formation d'un concept.* Edition Retz. 1987.

¹²⁴⁰ Qui se lit « p moins s ».

¹²⁴¹ Un tel schéma n'est pas à entendre dans un contexte ensembliste.

a priori. Il s'agit d'une approche empirique et propositionnelle d'un concept. On ne retrouve pas, dans la démarche, la recherche d'une catégorie. La définition obtenue peut ne pas rendre compte d'une inclusion explicite. Comme le montre le schéma, Britt-Mary Barth renonce à cet aspect car, la définition qu'elle vise, se doit d'être avant tout « opérationnelle ». « *Les définitions surchargées d'éléments non essentiels ne nous sont pas très utiles* ». Et aussi, « *la définition ...qui donne un concept supérieur ne nous est pas très utile* »¹²⁴². Car une partie de l'extension de son référentiel¹²⁴³ étant donnée, ainsi qu'un ensemble de situations externe à ce référentiel, il convient alors d'en préciser une compréhension aux contours définis par un objectif pédagogique¹²⁴⁴.

Notre analyse

Il semblerait que l'on doive comprendre, à partir de la démarche, que le concept puisse se définir par une certaine forme propositionnelle ((p et q et r) - s...). On ne peut toutefois, sur tous les exemples, atteindre l'objectif par une démarche ensembliste explicitable, comme pourrait le suggérer notre schéma. Or, les définitions que donne l'auteure, sont du type p et q et r. Nous notons que chaque exemple, dit positif, peut rendre compte d'un attribut. Mais il n'est pas évident que l'on puisse toujours y reconnaître explicitement un autre attribut.

La règle du jeu suppose que les élèves en sont au minimum au stade III¹²⁴⁵ puisqu'un tel jeu devrait consister, dans certains cas, en une recherche de coordination entre des extensions implicites E, A1, A2...et des attributs associés à E, A1, A2 ... E -A1, (E-A2)..., à partir d'exemples mélangés, positifs et négatifs. Ce qui suppose un contrôle rétroactif permanent de la quantification universelle portant sur tous les E, tous les A1, tous les A2..., rétroactions consécutives à l'évaluation des inférences successives qu'un sujet peut produire, « pour approcher » la compréhension, en termes d'attributs essentiels (nécessaires et suffisants). Les enfants de l'école élémentaire¹²⁴⁶ ne disposent pas forcément de telles compétences. Un objectif peut-être alors et, déjà à l'école maternelle, de leur apprendre la règle du jeu ou au moins d'un jeu de « oui-non », opérationnel au stade II ou pour consolider le stade II.

Mais le fait que cette recherche d'attributs ne soit pas accompagnée d'une prise de conscience de son caractère extensif (au moins son évocation), rend en fait caduque ce contrôle. **Enfin, il nous semble que la démarche évacue la question de la signification**

¹²⁴² *L'apprentissage de l'abstraction*. Chapitre 4. *Stratégie d'enseignement : comment aider les élèves à construire leur savoirs*. Opus cité.

¹²⁴³ Ensemble de « situations exemples ».

¹²⁴⁴ Compréhension provisoirement acceptable, et suffisante au niveau scolaire à qui s'adresse la séance.

¹²⁴⁵ A moins d'accepter, en ce qui concerne « cet apprentissage des concepts catégoriels », une assimilation, en fait, déformante. Ce qui veut dire que les systèmes apprennent autre chose que ce que l'on croit.

¹²⁴⁶ Au moins eux, comme nous pouvons le constater avec certains élèves de lycée.

du concept sous-jacent. Par exemple, en quelles circonstances, les concepts d'opinion, d'objectivité ou de population active doivent-ils nécessairement être envisagés ? Le concept n'émerge pas comme une nécessité dans un processus de problématisation, au sein duquel les liens de signification avec d'autres concepts sont construits.

Certes, nous retenons que le concept est approché dans des situations qui lui donnent du sens et non par une définition a priori : une proposition, qui contient un attribut essentiel du concept, peut renvoyer à une certaine référence. Cette démarche, qui est conforme avec la définition du concept que donne Gérard Vergnaud¹²⁴⁷, insiste donc sur la dimension compréhension et moins sur sa dimension extension.

Il n'est pas réellement pertinent de poursuivre là une discussion critique sur la démarche. Toutefois, pour introduire une forme de justification, quant au choix didactique que nous pensons voir découler de nos analyses, nous devons insister sur plusieurs points.

➤ Pour qu'un tel concept puisse apparaître dans des situations qui lui donnent a posteriori du sens, il faut au moins supposer une connaissance suffisante d'autres concepts, pour servir de point d'appui explicite dans l'investigation. Pour l'exemple « *l'efficacité de la médecine homéopathique gît tout entière dans l'imagination du malade* ». Pour entendre finalement que cette espèce de jugement est une opinion, il faut au moins bien comprendre ce que sont les concepts d'efficacité, d'homéopathie et d'imagination. Or, sur ce point, les élèves sont largement inégaux. Et l'on voit que la méthode demande une évaluation très stricte et éventuellement assez considérable de pré-requis linguistiques, en d'autres termes d'un certain réseau sémantique.

➤ **Le concept se retrouve finalement isolé d'un certain réseau sémantique relevant d'un même paradigme. Ses attributs semblent bien en décrire fidèlement quelques-unes de ses occurrences référentielles, mais « ils ne le placent » pas systématiquement en opposition avec d'autres concepts, ni plus généralement ne donnent de précisions relatives à certaines de ses relations avec d'autres concepts.** Il nous semble alors qu'il ne peut être l'objet de jugement inter-conceptuel : par exemple, lorsque le concept d'objectivité est finalement défini comme : « *la qualité d'un jugement (ou d'une description ou d'un récit) ; qui est exact (e) et précis(e) ; où ne se trouve aucune indication concernant les intérêts, les goûts, les préférences, les opinions et sentiments personnels ; qui est valable pour tous* »¹²⁴⁸, on ne sait ni ce qui peut impliquer un tel jugement (ou récit ou description) ni si les élèves parviennent à dire ce qu'il (elle) implique lui (elle)-même . Par exemple, l'objectivité im-

¹²⁴⁷ *La théorie des champs conceptuels*. Opus cité.

¹²⁴⁸ *L'apprentissage de l'abstraction*. Annexe : *L'acquisition du concept d'objectivité*. Opus cité.

plique-t-elle vraiment l'exactitude ?... Ces implications pourraient conduire comme nous l'avons vu, à définir des formes d'inclusion contrôlées. En particulier, une telle définition peut être contradictoire dès lors que les choix des attributs (exact, précis...), constitutifs de la compréhension du concept, n'acquièrent pas eux-mêmes ce statut sous le contrôle d'une certaine objectivité !

1.4.1.3 Les travaux de Sylvie Cèbe¹²⁴⁹

« *Catégoriser consiste à considérer de manière équivalente des objets, des personnes ou des situations qui partagent des caractéristiques communes* ». *Les catégories sont impliquées dans toutes les activités cognitives* »¹²⁵⁰.

Les auteurs distinguent deux types de catégories¹²⁵¹ :

- les catégories taxonomiques : elles relèvent de ce que Jean Piaget a appelé l'appartenance inclusive ;
- les catégories schématiques ou fonctionnelles. Elles relèvent pour les premières de ce que, avec Jean Piaget, on pourrait en l'étendant, appeler l'appartenance schématique : un objet (concept, relation, schéma) ou une action sont reconnus par expérience comme se retrouvant impliqué dans un certain schéma¹²⁵² statique (un restaurant) ou dynamique (une visite chez le dentiste). Concernant les secondes, elles peuvent rassembler un enchaînement d'événements ou d'actions comme par exemples « *tout ce qu'il faut faire pour planter un clou, le déroulement d'un anniversaire...* ».

Les auteurs critiquent les « imagiers » traditionnels qui proposent d'emblée des regroupements par familles ou par thèmes et soigneusement séparés. Cette présentation présenterait des limites parce qu'elles proposent un découpage « figé du monde ». La dénotation se trouverait peu évolutive en ce sens qu'elle renverrait alors à des catégories absolues renforçant certains caractères prototypiques¹²⁵³ et leur non relativité. Sur ce dernier point, cela semblerait avoir pour conséquence qu'un même objet ne pourrait pas être le sujet de prédicats différents ou alors, contradictoirement (« un jour oui, un jour non »). Ainsi, par exemple, une ca-

¹²⁴⁹Sylvie Cèbe. ATER à l'IUFM d'Aix-Marseille, Centre de recherche en Psychologie de la connaissance, du Langage et de l'Emotion. Université de Provence.

¹²⁵⁰Faire Savoirs n°0. Juin 2001. <http://www.amares.org/revue/00/pdf/These1.pdf>

¹²⁵¹Sylvie Cèbe et Jean Louis Paour. *Catégo. Apprendre à catégoriser. Maternelle toutes sections*. Hatier 2007

¹²⁵²Jean-François Richard. *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*. Opus cité. Chapitre II. *Les formes de représentations. Les schémas*.

¹²⁵³Eléanor Rosh a montré que certains concepts peuvent se développer autour d'un prototype (on parle alors de catégories naturelles): « *les exemplaires d'une même catégorie ne sont pas équivalents quant à leur appartenance catégorielle mais se répartissent au contraire, selon un gradient de représentativité ou de typicalité* ». Ainsi, pour une catégorie donnée, certains exemplaires sont peu représentatifs alors que d'autres sont plus prégnants. *Le représentant le plus typique est le prototype*. *Vocabulaire de psychologie cognitive*. Article *catégorisation*. Opus cité.

tégorisation qui conduit à reconnaître carotte et salade comme deux légumes participerait d'un obstacle dès lors que l'on voudrait considérer une catégorie (schématique) avec carotte et lapin et réciproquement. Dès lors, un objectif pédagogique pourrait être d'aider les enfants à comprendre les relations catégorielles.

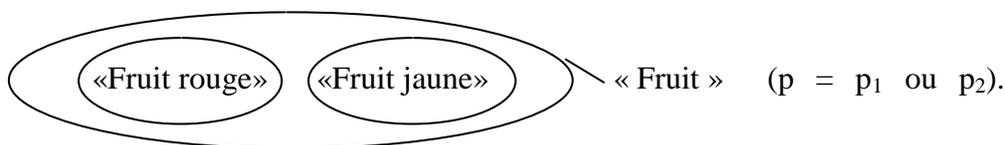
« C'est pourquoi, on s'accorde aujourd'hui pour penser que le développement consiste à expliciter la logique implicite contenue dans leurs procédures ». « Le processus d'explicitation n'a rien d'automatique et n'est pas une conséquence obligée de l'action, de la réussite ou du jeu ». Il résulte nécessairement « d'un traitement actif par l'enfant qu'il faut stimuler ». « Il faut aider les enfants à comprendre les raisons de leur réussite »¹²⁵⁴.

Les auteurs analysent que les enfants disposent, à un certain niveau de leur développement, de deux compétences contradictoires : ils peuvent se trouver au stade I des collections figurales et être capable d'opérer des regroupements, au sein de catégories naturelles comme « Animaux » ou « Personnages d'une histoire ». Mais, même dans ce cas, on ne peut dire en général que l'enfant anticipe de telles catégories lorsqu'il est encouragé à les construire. En fait, il ne disposerait d'un prédicat « qu'après coup », même si leur expérience et leur mémoire les conduisent à reconstituer des catégories taxonomiques ou schématiques (avec d'éventuelles déviations, ce que nous retrouvons au stade transitoire I - II).

« En lui proposant des jeux de catégorisation, les adultes vont amener l'enfant à prendre conscience des catégories qu'il connaît et des opérations intellectuelles qu'il utilise... »¹²⁵⁵.

Les tâches proposées sont de quatre types et dont la chronologie n'est pas précisée¹²⁵⁶.

➤ « Association de cartes » : on peut retrouver ainsi une recherche de prédicat par une démarche ascendante. On réunit deux catégories en une seule dès lors que l'on peut exprimer un prédicat qui lui correspond :

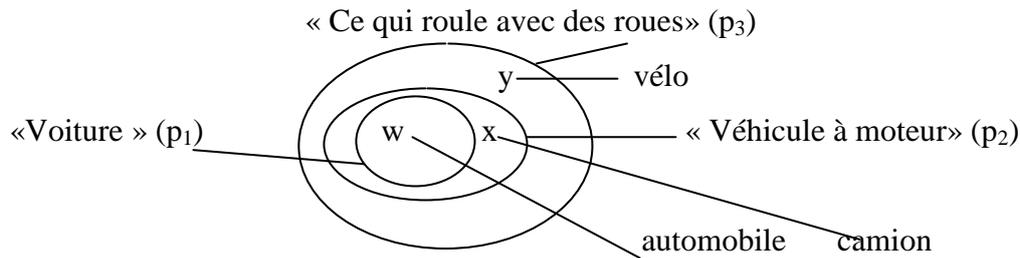


¹²⁵⁴ Catégo. Arguments psychologiques. Réussir sans comprendre. Opus cité.

¹²⁵⁵ Ibid. Les difficultés à catégoriser.

¹²⁵⁶ « L'adulte peut choisir librement parmi les jeux proposés en prenant cependant quelques précautions ». Le matériel est un ensemble d'images dans lequel l'enseignant(e) peut choisir librement.

➤ « *Catégories ascendantes ou descendantes* » : on construit une suite croissante ou décroissante (au sens de la relation d'inclusion) de catégories :

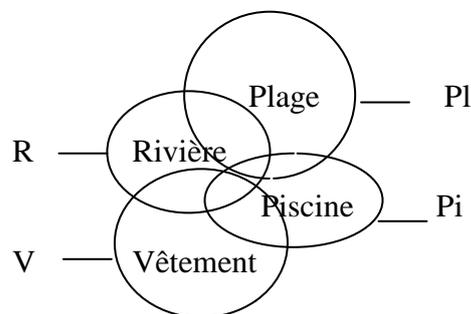


$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3$. Selon les cas, on recherche p_1 ou p_3 .

➤ « *Construire des catégories* » : le prédicat étant donné et relevant d'un concept quotidien (« *catégorie familière* ») pour l'enfant (par exemple « être un animal » ou « se mange au petit déjeuner »...). Il s'agit de tâches dont le concept organisateur principal est la conservation en mémoire d'un prédicat¹²⁵⁷. Inversement, certaines tâches vont consister à retrouver ce pourquoi trois ou quatre images posées sur la table « *vont bien ensemble* ».

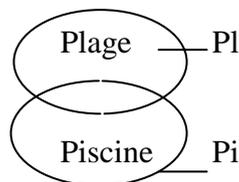
On peut retrouver une telle recherche de prédicat dans une démarche descendante : les images sont dévoilées progressivement et les élèves sont amenés à affiner leurs propositions de prédicats pour qu'ils « conviennent bien » aux cartes dévoilées.

Par exemple :



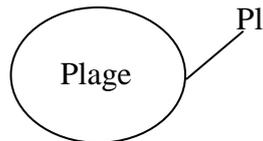
Car la première carte tirée est un « maillot de bain ».

La deuxième carte tirée étant « un maître nageur », on est réduit au schéma suivant :



La troisième carte tirée étant « un crabe », on est réduit à la catégorie plage.

¹²⁵⁷ Systématique, mais après un certain nombre de tâches visant à la prise de conscience de son utilisation en acte.



Analysons plus particulièrement cet exemple. C'est en effet par ce type que l'on approche (comme son titre l'exprime) l'objectif le plus essentiel.

L'analyse logique de la tâche est finalement complexe

p étant le prédicat à déterminer. E peut être considéré comme un univers sur lequel est défini p ¹²⁵⁸

(*) Soit la forme disjonctive $p_1 : (x \in R \text{ ou } x \in V \text{ ou } x \in P_i \text{ ou } x \in P_l)$.

On suppose (d'après l'énoncé de la tâche) que :

$$\exists y \forall x (p_1(y) \Rightarrow (p(x) \Rightarrow p_1(x)))$$

Si O est l'objet « maillot de bain », $p_1(O)$ vrai. On a donc :

$$\forall x ((p(x) \Rightarrow x \in R \cup V \cup P_i \cup P_l),^{1259}$$

(*) Soit la forme conjonctive $p_2 :$

$$(x \notin (R \cup V) \text{ et } (x \in R \text{ ou } x \in V \text{ ou } x \in P_i \text{ ou } x \in P_l)).$$

On suppose (d'après l'énoncé de la tâche) que :

$$\exists y \forall x (p_2(y) \Rightarrow ((p(x) \Rightarrow p_2(x)))$$

Si M est l'objet « maître nageur », $p_2(M)$ vrai. On a donc :

$$\forall x (p(x) \Rightarrow x \in P_i \cup P_l),^{1260}$$

(*) Soit la forme conjonctive $p_3 :$

$$(x \notin P_i \text{ et } (x \in P_i \text{ ou } x \in P_l)).$$

On suppose (d'après l'énoncé de la tâche) que :

$$\exists y \forall x (p_3(y) \Rightarrow (p(x) \Rightarrow p_3(x)))$$

Si C est l'objet « crabe », $p_3(C)$ vrai. On a donc

$$\forall x (p(x) \Rightarrow x \in P_l),^{1261}$$

(*) Si on suppose $\forall x (x \in P_l \Rightarrow p(x))$, on obtient la conclusion :

$$\forall x (p(x) \Leftrightarrow x \in P_l).$$

¹²⁵⁸ Nous ne faisons plus référence à E dans les écritures qui suivent mais cet ensemble reste implicite.

¹²⁵⁹ Premier schéma.

¹²⁶⁰ Deuxième schéma.

¹²⁶¹ Troisième schéma.

Analyse cognitive de la tâche

Notons que dans l'analyse, les anticipations globales sont exprimées à l'aide de la quantification systématique : un prédicat comme $p \Rightarrow p_i$ exprime une application portant sur un objet générique x de E et non seulement sur une proposition p_1 (O) ou p_2 (M) ou p_3 (C) portant sur un objet particulier comme O ou M ou C.

Précisons certains éléments de la situation objective.

- Six à huit cartes sont alignées faces cachées.
- L'enseignant(e) précise : « elles appartiennent à la même catégorie. Vous devez trouver la règle de tri¹²⁶² en retournant une carte à chaque fois ».
- Les enfants doivent faire des hypothèses en « énonçant les règles possibles et celles qui ne le sont plus ».
- Le système cognitif est au stade I-II et donc dispose des compétences relatives aux schèmes S_{COi} et S_{Ci} ¹²⁶³. Nous considérons donc un schème S_{Ci} comme la structure de schèmes dont S_{COi} et S_{Ci} sont des schèmes entrant dans une telle structure¹²⁶⁴.
- Le système dispose du mot catégorie qui est désignée par « une étiquette ».

Précisons certains éléments de la situation de référence.

- Dans ce qui suit, on note p cette étiquette ce qui, selon notre terminologie, est un abus de langage provisoire mais se rapprochant d'une formulation de Jean Piaget : « x est un A ».
- La proposition « O est un p » conduit à la proposition « $p = R$ ou $p = V$ ou $p = Pi$ ou $p = Pl$ ».
- **L'appartenance n'est pas conçue comme « inclusive » mais comme « schématique »**¹²⁶⁵. On ne peut concevoir la conjonction de deux schémas puisqu'ils s'excluent les uns et les autres dans la mémoire des sujets. Dans ce cas, le connecteur « ou » est à interpréter comme exclusif : p est l'une des quatre étiquettes et une seulement.

On peut noter que **ce n'est pas le schème de la comparaison binaire qui rend possible la proposition mais celui de la relation d'appartenance schématique**. Il faut toutefois préciser ce propos : si l'on considère que l'expression « maillot de bain » participe, dans une représentation, d'une évocation des schémas « Plage », « Piscine », « Rivière », « Vête-

¹²⁶² Notons là le terme que nous avons déjà analysé comme non pertinent.

¹²⁶³ Nous avons noté que des activités précédemment proposées au sujet en ont favorisé la consolidation mais il n'en a pas été proposé une évaluation de la fermeture.

¹²⁶⁴ Ce qui ne définit certes pas complètement S_{Ci} .

¹²⁶⁵ Pour reprendre la typologie de Jean Piaget.

ment »¹²⁶⁶, cette dernière y doit, d'une part, son occurrence à l'existence constante de l'objet « maillot de bain » dans ces schémas mémorisés dans la mémoire à long terme et, d'autre part, une telle représentation, stabilisée dans la mémoire de travail, permet le contrôle effectif de l'appartenance schématique de l'objet maillot de bain à chacun de ces schémas. On peut donc exprimer le principe d'une double régulation : l'une anticipatrice, échappant à la conscience, mais assurant un rôle effectif dans la comparaison puisque cela aboutit à la bonne représentation, l'autre de contrôle, pouvant être consciente, puisque la proposition [l'objet 'maillot de bain' appartient à la catégorie « Plage »] est vraie. Et cela peut être l'objet d'une argumentation explicite. Ce contrôle s'identifie donc à une activité de comparaison binaire, à l'issue de laquelle une décision consciente d'appartenance peut être prise¹²⁶⁷.

➤ Maintien en mémoire de travail de la proposition : « on choisit pour p, R ou V ou Pi ou Pl ».

➤ La proposition « M est un p » conduit à la proposition « p = Pi ou p = Pl ».

La proposition peut s'obtenir sans le rejet conscient de R ou de V car, dans le cas d'une évocation schématique, Pi ou Pl imposent un « effet attracteur » suffisant, ce qui exprime un fonctionnement spontané de la régulation anticipatrice et donc du caractère exclusif de l'indicateur « maître nageur ». Mais cela n'exclut pas qu'un sujet, questionné sur le rejet de R et de V, puisse exprimer un argument correct comme le lui permet la compétence liée au schème S_{Coi} . Il faut bien alors entendre S_{Coi} comme fermé puisque, reconnaître que M n'est pas un R, c'est se donner d'abord R (ici une représentation) puis des formulations langagières exprimant R en compréhension¹²⁶⁸.

Ainsi, certains sujets peuvent se limiter, dans cette activité, volontairement ou non, à la seule analyse de la dernière carte tirée en n'ayant finalement aucune activité relative à l'inclusion. On peut parler dès lors d'assimilation déformante.

La quantification ne joue donc pas comme un concept organisateur de l'action : O et M peuvent disparaître de la mémoire de travail sans raison vraiment logique.

➤ La proposition « C est un p » conduit à la proposition « p est Pl ».

¹²⁶⁶ Pour ce dernier, on pourra parler de schéma ou de catégorie selon les compétences linguistiques des sujets.

¹²⁶⁷ Jean François le Ny parle de processus d'appariement (réussi). « On considère qu'il se produit une comparaison entre la représentation occurrente produite par l'information entrante venue du stimulus (l'image du maillot de bain), et une autre représentation contenue en mémoire sémantique, la catégorie (la plage) ». Mais nous considérons que ce premier appariement n'est que subjectivement réussi (il dépend de l'expérience du sujet) et que le second appariement a toutes les chances d'être effectif dès lors que la situation de référence contient certaines représentations affectives (associées aux attendus de l'enseignant, aux contrôles des pairs, aux conflits cognitifs, à la dimension de manifestation de la proposition). *Comment l'esprit produit du sens*. Opus cité.

¹²⁶⁸ Notons que cette compréhension peut revêtir une description exhaustive du schéma.

Remarques conclusives sur cet exemple

L'activité qui vient d'être décrite ne relève pas d'un processus de catégorisation logique¹²⁶⁹ puisque :

➤ **il y a absence d'un univers E.** Une interprétation initiale a été de considérer que $R \cup V \cup Pi \cup Pl$ se substitue à E. Mais nous avons analysé qu'une telle référence est non viable dans une représentation par un sujet cognitif (en apprentissage au niveau que l'on considère) dès lors que ces ensembles s'excluent les uns des autres dans une même représentation schématique. Enfin, un implicite, consiste finalement à maximaliser l'ensemble possible, défini par $\forall x (p(x))$;

➤ **d'une catégorie, on ne donne initialement ni son extension, ni une compréhension. On ne peut donc évoquer ici, l'activation des schèmes $S_{C, pf}$ ou $S_{C', pf}$;**

➤ **la quantification est inutile comme concept organisateur de l'action.** Ainsi, l'absence de cette quantification systématique et d'une évaluation portant sur les éléments d'un univers E, ne permet pas de situer les élèves au stade II ;

➤ **la proposition $p(x)$ n'est pas comprise comme une proposition génériquement vraie pour $x \in A$ et fautive pour $x \in \tilde{A}$.**

Conclusions générales relatives aux activités de Catégo

➤ La pédagogie proposée se fixe comme objectif « de consolider le stade I », mais en objectivant les catégories manipulées. En particulier, les catégories schématiques devraient échapper « aux convenances personnelles ». Ce qui permet une systématisation de l'activation du schème S_{ci} , au niveau du stade intermédiaire I - II. « *Catégo permet d'apprendre d'une part que, quand on catégorise, il faut maintenir la propriété qu'on a choisie jusqu'au bout (ne pas changer de règle en cours de route) et que, d'autre part, pour qu'un objet appartienne à une catégorie, il faut qu'il partage la même propriété que tous les autres objets de cette catégorie* »¹²⁷⁰.

➤ Cette pédagogie prend la forme d'une maïeutique puisqu'il s'agit, dans un premier temps, de faire « *prendre conscience* »¹²⁷¹ aux enfants de leur propre compétence de catégorisation. La position de Sylvie Cèbe est, sur cet aspect, non ambiguë : « *nous adoptons le point de vue de plusieurs auteurs (...Case et al...(1996)... Piaget (1974)) qui considèrent que le moteur du développement n'est pas l'action mais la réflexion que l'enfant mène pour com-*

¹²⁶⁹ Jean-François le Ny appelle catégorisation le processus d'appariement réussi suivi d'une décision : « x est un C » ou « x est une occurrence de C ». C'est ce qu'il précise comme une catégorisation sémantique, activité qu'il distingue de la catégorisation perceptive, qui est l'accès à la forme lexicale. *Comment l'esprit produit du sens.* Opus cité.

¹²⁷⁰ Ibid. *Catégo pour développer la flexibilité.*

¹²⁷¹ Expression couramment employée dans le manuel.

prendre les procédures qu'il maîtrise mais dont il n'a pas compris la logique interne. Grâce à elle, il peut très bien traiter des relations (quand il compare pareil et différent), catégoriser (quand il aligne des objets les uns derrière les autres) etc. Mais la logique de ses actions ne lui est pas connue. C'est cette logique implicite que nous cherchons à lui faire expliciter »¹²⁷². Certes, mais en considérant d'une part, que l'action reste le carburant nécessaire au bon fonctionnement du moteur et que, d'autre part, la nature de ces actions et, plus largement, les situations, dans lesquelles elles se déroulent, influencent (par définition) les contenus de la réflexion dont certains prémisses restent de « l'action intériorisée ». Pour notre part, nous n'avons pas considéré que la médiation scolaire, pour un développement cognitif, puisse en l'occurrence être définie par cette forme de maïeutique. Nous avons exprimé plus haut et appliquerons (plus loin, sous 2) que la catégorisation est indissociable de formulations langagières spécifiques dont, précisément, nous pensons, qu'à l'âge des enfants concernés par ces études, elles ne sont déjà pas disponibles au niveau non conscient¹²⁷³. Ainsi, nous en ferons le levier fondamental pour un développement des compétences concernées.

➤ Dans un second temps, il s'agit par diverses activités de leur faire « *prendre conscience* » de la nécessité d'une attention systématique, relative à la logique d'une tâche relevant de la catégorisation. Ce que nous entendons est que l'option essentielle choisie, dans le but de rendre pérenne (et déjà « de la provoquer ») cette prise de conscience, est la stimulation répétée de telles activités jusqu'à leur réussite systématique¹²⁷⁴.

➤ Des noms ou expressions permettent la désignation des « catégories » proposées dans les activités. Concernant une désignation, si la rétention consciente d'un prédicat en mémoire peut, pour les enfants, résulter d'une raison nécessaire, on ne peut décider si celle-ci exprime l'une des conditions d'un contrat qui, tel quel, permet d'être gagnant au jeu de la réciprocité entre un prédicat et une catégorie (on donne l'un (e), il faut trouver l'autre) ou si celle-ci résulte de la forme nécessaire qui exprime le caractère global d'une intentionnalité dans le processus de catégorisation. En l'occurrence, nous ne pensons pas retenir cette dernière explication pour les raisons suivantes.

• **Se restreindre à des catégories naturelles peut corrélativement réduire le prédicat à n'être qu'un attribut de fait, parmi d'autres faits, des objets manipulés :**

¹²⁷² Site cité. www.amares.org/revue/00/Thèse1.pdf

¹²⁷³ Nous faisons souvent l'expérience, avec des étudiants de première année post-baccalauréat, de leur demander de transformer la proposition non ($\forall x, p$) en une proposition équivalente. Nous notons sur ce point une grosse majorité d'échecs (on trouve souvent $\forall x$ (non p)). Ceci nous semble un élément de preuve que le développement des compétences, en lien avec le concept de catégorisation, exige une médiation spécifique.

¹²⁷⁴ Dit ainsi, il y donc comme postulat que 'la prise de conscience 'naît de la répétition des situations et donc de la répétition de l'action, plutôt que de sa nécessité fonctionnelle.

une cerise est rouge parce que le rouge est perçu comme un attribut de la cerise ; une tomate est rouge parce que le rouge est perçu comme un attribut de la tomate. On retrouve la conception aristotélicienne du jugement d'appartenance : le prédicat «Rouge » est « contenu » dans le sujet cerise ou le sujet tomate. De tels attributs ne peuvent être inférés ou alors les inférences prennent une forme forcée et arbitraire comme dans l'exemple suivant : « *Le poulet, il fait partie de la catégorie repas parce qu'on mange du poulet au repas* »¹²⁷⁵. Le jugement : « la cerise est rouge » concerne le sujet¹²⁷⁶. **Dans ce cas, on ne peut entendre que la cerise est rouge car elle a la couleur « Rouge ». Dans une conception différente, l'évaluation du prédicat «Rouge », défini sur l'ensemble des objets visibles du monde, et appliqué à l'objet « cerise », conduit à une proposition vraie. Le jugement : « la cerise est rouge », concernant le prédicat « Rouge », dénote dans ce cas, l'ensemble A des objets rouges, ensemble actuel. Dans le premier cas, l'objet « cerise » préexiste au prédicat. Dans le second cas, le prédicat préexiste à l'objet cerise et, c'est l'intentionnalité d'une évaluation qui conduit à l'actualisation d'une certaine partie de A, dont l'un des éléments est « cerise ».**

- Si nous considérons une construction du stade II, en milieu scolaire, nous rappelons l'obstacle épistémologique relatif au schème de la comparaison binaire et perceptive (comparaison que nous avons décrite plus haut). Dans toutes les activités proposées, on retrouve une insistance concernant l'activation du schème de la comparaison binaire. Elle relève d'un objectif explicite (en vue de sa consolidation) et est finalement attendue explicitement dans les arguments des élèves, pour valider leur choix de cartes. Nous avons noté que la réussite, dans les tâches proposées, peut résulter, d'une assimilation déformante puisqu'un schème de tri peut se substituer à celui d'une catégorisation ou, en des termes logiques, une relation binaire d'équivalence peut se substituer au prédicat défini sur E. L'activation systématique du schème de la comparaison binaire et l'absence de régulations induites chez le sujet par des « rétroactions de l'enseignant(e) », relative à cette activation, est de nature, nous semble-il, à renforcer l'obstacle. L'obstacle épistémologique de la conception aristotélicienne du jugement catégoriel et celui exprimant l'inertie du schème de la comparaison binaire s'opposent à la construction du schème $S_{C'pf}$. Rappelons qu'une assimilation déformante se traduit pas l'activation de fait du schème S_{Ci} . Auquel cas, il n'y a pas, de la part du sujet de construction nouvelle.

¹²⁷⁵ Catégo. Opus cité. Forcée et arbitraire car le « Repas » ne peut être défini par ce que l'on peut y manger. On peut s'interroger sur ce qui ce s'y boit, sur l'objet bonbon et sur le cas des végétariens.

¹²⁷⁶ Kant exprime que de tels jugements sont vrais en fait mais non nécessaires.

➤ Nous avons signalé, plus haut, un obstacle, relatif à une quasi homonymie entre le « tout », adverbe et le « tous (les...) », adjectif indéfini¹²⁷⁷ ou le « tous (toutes) », pronom indéfini. Il se trouve que le traitement non différencié des catégories taxonomiques et schématiques peut entraîner avec lui un autre obstacle de même nature : dans l'expression « tout ce qu'on voit à la plage », l'enfant peut entendre la construction d'une partie d'un schéma (évo-cation), le tout portant sur une sorte de puzzle achevé¹²⁷⁸. **Cette occurrence peut être constitutive d'un obstacle cognitif lorsque, comme c'est le cas pour les catégories taxonomiques, le tout porte sur les unités de cet ensemble**¹²⁷⁹. Or le stade I, décrit par Jean Piaget, montre précisément que l'enfant organise ses collections en suivant le principe d'une reconstitution schématique jusqu'à la plus complète possible. Dans ce cas, l'acception initiale du mot « tout » est « *subordonnée aux configurations perceptives et par conséquent limitées au domaine...des totalités continues ou spatiales* »¹²⁸⁰. Il nous semble alors que cet obstacle peut être renforcé par une non systématisation de l'utilisation de la quantification universelle ni celle d'une forme verbale constante dans des situations analogues. Pourtant, l'utilisation d'un « tous (toute) » apparaît souvent, mais comme un aspect secondaire de la communication de l'enseignant et non attendu, réciproquement, dans le discours des enfants. Notons des « exemples de consignes » proposées par les auteurs :

- « Vous allez placer sur cette feuille tous ...les jouets.. » ;
- « Papa a fini de faire ses courses, qu'y a t-il dans son panier ? » ;
- « Prendre les cartes qui te permettent de raconter quand on met la table pour le petit-déjeuner » ;
- « Prendre les cartes qui représentent des choses rondes »... ;
- « Je prends le bateau pneumatique parce que je prends tout ce qu'on voit sur la plage ».

Les tâches conduisent alors à l'activation du schème S_{Ci} . Ainsi, l'inconstance des formulations langagières, dont la quantification universelle est un constituant systématique, ne permet pas d'envisager une construction effective du schème $S_{C''pf}$.

¹²⁷⁷ D'ailleurs, des enfants, encouragés à préciser pourquoi ils ont mis la cerise « ensemble avec des objets rouges », argumentent, pendant longtemps, « parce qu'elle est toute rouge ».

¹²⁷⁸ D'ailleurs, la grammaire peut définir ce « tout » comme un adjectif exprimant globalement un ensemble non discrétisé. Voir R.L.Wagner et J.Pinchon. *Grammaire du français*. Hachette. 1962. Ce qui, notons le, n'est pas envisagé par les auteurs.

¹²⁷⁹ La grammaire peut définir ce « tout » comme un adjectif exprimant la totalité, par l'évocation de ses éléments. Ibid.

¹²⁸⁰ Jean Piaget. *La genèse des structures logiques élémentaires*. Chapitre premier. *Les collections figurales*. Opus cité.

1.4.2 La stratégie didactique

1.4.2.1 Préliminaires

Nous proposons de spécifier l'apprentissage de la catégorisation, par les élèves de l'école maternelle, en termes de catégories logiques. En particulier, nous ne considérerons pas une option qui envisagerait les catégories naturelles dont les objets se répartissent, au contraire, selon un gradient de représentativité ou de typicalité¹²⁸¹. Dans ce dernier cas, les processus de catégorisations résulteraient alors de l'activité de schèmes de comparaison (entre autres) que nous n'avons pas explicités jusqu'ici, activité qui se traduirait par la construction de catégories ordonnées par la typicalité. Nous pouvons alors préciser que cette option, autre que celle que nous voulons privilégier, conduirait à envisager l'inertie d'un tel schème et donc la prise en compte d'un nouvel obstacle épistémologique. C'est, reconnaissons le, une orientation possible, mais notons alors que Sylvie Cèbe fait l'impasse sur la prise en compte de cet obstacle.

Si nous considérons le seul schème $S_{C^*_{pf}}$, nous pensons que les enfants peuvent réussir à prendre effectivement toutes les cartes qui vérifient un prédicat p . Nous avons associé l'activité de ce schème à une permanence apparente de la quantification. Mais, plus précisément, il ne semble même pas qu'il soit nécessaire de parler de quantification universelle au sens d'une anticipation de celle-ci : la réussite peut très bien s'obtenir par assimilation déformante : il reste encore des p . Il semble possible que quand une maîtresse demande à un enfant de prendre toutes les choses qu'on voit sur une plage et, à un autre, de prendre tout ce qui se mange, son intention peut être guidée par le désir de posséder le plus possible de tels objets. Ainsi, « pas laisser quelques-uns » peut se substituer à « prendre tous ». Bien que ces deux formulations devraient produire logiquement les mêmes résultats, nous pourrions craindre que l'intentionnalité d'un élève, entretenue par la quantification logique, se déplace vers une intentionnalité psychoaffective, entretenue par une sorte de désir (par exemple de possession), entendant que la force de cette dernière peut finalement jouer favorablement dans la réussite à une tâche de catégorisation¹²⁸².

1.4.2.2 Le choix didactique

Pour les raisons précédentes, nous considérons, pour un apprentissage initial, des situations objectives dont le matériel connote moins certaines affectivités et, en particulier, nous renoncerons aux catégories naturelles. Les situations seront toutefois assimilables par le

¹²⁸¹ Comme l'a analysé Eleanor Rosh, professeure de psychologie à l'université de Californie (Berkeley).

¹²⁸² Même dans le cas de catégories « plus abstraites » que nous avons privilégiées, nous avons noté, lorsque ceci était explicite, que des enfants vont rechercher une sorte d'assentiment dans le regard de l'enseignant tout au long de leur activité. C'est aussi introduire dans l'intentionnalité une dimension psychoaffective.

schème S_{Ci} . Ainsi, en particulier, les désignations des objets manipulés seront initialement dans les compétences des élèves¹²⁸³. C_i est donc la compétence dont la composante cognitive est une structure de schèmes qui contient une coordination des schèmes S_{C0i} et S_{Ci} .

Aussi, c'est donc l'aspect logique de la tâche de catégorisation que nous avons privilégié. Le développement, jusqu'à la compétence C_f , « catégoriser », devant permettre que les compétences « expliciter une inclusion de catégories » et « comparer la cardinalité de catégories en ordre croissant¹²⁸⁴ » soient dans la zone de proche développement de C_f . En d'autres termes, la construction de C_f doit pouvoir anticiper un développement au niveau 2.

Nous nous proposons le développement et la consolidation du niveau 1, c'est dire la construction d'un schème défini par : $S_{Cf} = S_{Cpf}$. En termes de compétences : $C_f = C_{pf}$ de niveau 1. On définit de même $S_{C'f} = S_{C'pf}$ et $S_{C''f} = S_{C''pf}$.

Pour définir ce niveau, nous pouvons adopter les définitions suivantes.

➤ **Registre de représentation sémiotique.**

« Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi des signes appartenant à un système de représentations ». « Elles sont essentielles pour l'activité cognitive de la pensée »¹²⁸⁵.

Les registres de représentation sémiotiques sont des systèmes constitués :

- d'un ensemble de signes : ses unités ;
- de transformations internes ou traitement de ces signes selon certaines règles¹²⁸⁶. De telles transformations produisent d'autres représentations et dans le même registre¹²⁸⁷ ;
- de règles de conversion dans un ou plusieurs registres de représentations sémiotiques. Les conversions produisent des représentations dans un autre registre¹²⁸⁸.

Exemples :

- le registre des fractions décimales et celui des nombres décimaux ;
- le registre du calcul des prédicats définis sur un ensemble E et celui d'un

¹²⁸³ Certaines maîtresses du groupe ont pu considérer que c'était là l'occasion d'un apprentissage de vocabulaire. Mais nous avons finalement opté pour que le lexique ne pose pas de difficultés, dans les séances initiales. On opte ainsi pour une focalisation directe sur l'objet de l'apprentissage.

¹²⁸⁴ Du point de vue de l'inclusion

¹²⁸⁵ Raymond Duval. *Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives. Pages 37-65. IREM de Strasbourg, 1993

¹²⁸⁶ Raymond Duval. Ibid

¹²⁸⁷ Raymond Duval. *Sémiosis et pensée humaine. Registre de représentation*. Chapitre 1. *Compréhension et apprentissage*. Opus cité

¹²⁸⁸ Ibid.

ensemble de partie de l'ensemble E ;

Le premier exemple présente deux formes de congruence : l'une sémantique¹²⁸⁹ et l'autre computationnelle. La première concerne la conversion et la deuxième les traitements internes¹²⁹⁰.

Concernant le second exemple, on peut définir la conversion de la façon suivante :

- soit E un ensemble et p un prédicat défini sur E. On suppose ainsi que pour tout x, élément de E, p(x) est un jugement v-défini. On appelle un tel jugement une proposition. notons v (p(x)) la valeur de vérité de p(x). On peut alors considérer la partie A de E définie par $\forall x (x \in A \Leftrightarrow v (p(x)) = \text{vrai})$;
- on dispose des deux registres de représentation sémiotiques : l'ensemble des prédicats définissables sur E et l'ensemble des parties de E ;
- on peut noter que s'il y a congruence computationnelle¹²⁹¹, il n'y a pas, pour tout ensemble E de congruence sémantique car à deux prédicats différents peuvent correspondre la même partie de E¹²⁹².

➤ Catégorisation

Soit E, un ensemble d'objets. On dit qu'un prédicat p est correctement formulé, relativement à E, si pour tout élément x de E, p (x) est une proposition¹²⁹³. On peut dire alors que le prédicat p est défini sur E.

La catégorisation est l'opération :

- qui, à tout couple (E, p), associe une partie et une seule de l'ensemble E. E est un ensemble donné, p est un prédicat correctement formulé, relativement à E ;
- qui, réciproquement, à tout couple (E, A) où A est une partie de E, associe un prédicat correctement formulé relativement à E.

Nous venons donc de définir une opération de conversion cognitive entre les deux registres de représentation sémiotiques.

¹²⁸⁹ Ibid. « Deux représentations sont (sémantiquement) congruentes lorsqu'il y a correspondance sémantique entre leurs unités signifiantes, univocité sémantique terminale et même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations ».

¹²⁹⁰ Ibid. Pour le premier exemple, on peut exprimer ces deux congruences par l'isomorphisme des deux structures d'anneaux.

¹²⁹¹ Donnons une des relations qui vérifient cette congruence : Si l'on considère la partie A de E définie par $\forall x (x \in A \Leftrightarrow v (p(x)) = \text{vrai})$ et la partie B de E définie par $\forall x (x \in B \Leftrightarrow v (q(x)) = \text{vrai})$ alors on peut considérer que $A \cup B$ est définie par $\forall x (x \in A \cup B \Leftrightarrow v ((p(x) \text{ ou } q(x)) = \text{vrai}))$.

¹²⁹² Par exemple : si E est un ensemble de formes géométriques. Si les objets jaunes sont les triangles. Les deux prédicats distincts « être un triangle » et « être jaune » sont convertis en la même partie de E. Mais, on envisagera, dans une séquence didactique, le cas où cette sorte d'équivalence de deux prédicats est moins triviale et ne sera reconnue par le sujet qu'au terme d'une inférence.

¹²⁹³ Rappelons qu'une proposition est un jugement pour lequel on dispose d'un moyen de décider d'une valeur de vérité.

C_f est la compétence « Catégoriser » et définie, dans sa dimension cognitive, par S_{Cp} . La compétence C_f est opératoire, en ce sens que l'opération de catégorisation, E étant donné, est réversible :

$$\begin{array}{ccc} (E, p) & \longrightarrow & A \quad \text{et} \\ A & \longrightarrow & (E, p). \end{array}$$

Rappelons que ne se trouvent pas ainsi définies deux opérations inverses l'une de l'autre, en raison de l'absence de congruence sémantique.

2 Compléments

2.1 Un test¹²⁹⁴

Nous rendons compte d'une situation que nous pourrions qualifier « de situation test », dans la mesure où il s'agit d'évaluer la réalité du stade I des collections figurales et du stade II d'un classement, plus ou moins exhaustif, des objets d'une collection, dans la population des élèves de deux classes de maternelle de moyenne et de grande section (les deux niveaux pouvant se retrouver dans la même classe).

Toutefois, notre objectif est double : **il s'agit aussi de faire prendre conscience, aux enseignants de notre groupe, de l'importance de la formulation langagière que nous avons notée F_c . Une absence de pertinence, en la matière, peut conduire à une grande hétérogénéité des performances, ceci rendant difficile une définition générique des compétences initiales.** Ces dernières doivent effectivement servir de leviers à l'apprentissage de la catégorisation, concernant un sujet épistémique, c'est-à-dire concernant tous les élèves, quel que soit leur niveau de développement, relatif à la catégorisation et selon la taxonomie de Jean Piaget¹²⁹⁵.

Description du milieu objectif

➤ Sur une table d'élève sont disposés en « désordre » les objets suivants : 5 crayons de bois, 1 domino, 1 légo, 2 ou 3 pinceaux différents (pinceaux fins et un épais), 3 cuillères de formes et de couleurs différentes et 5 « magnets piky¹²⁹⁶ ».

➤ Nous avons opté initialement pour une neutralité¹²⁹⁷ des indices langagiers dans l'expression de la consigne : « *qu'est-ce que tu peux faire avec ça* ». Cette formulation vise comme possible l'introduction libre par le sujet, dans la situation de référence, de formes de

¹²⁹⁴ Que nous allons qualifier de piagétien, pour simplifier son rappel ultérieurement.

¹²⁹⁵ Sont certes, et éventuellement exclus, des systèmes cognitifs globalement contradictoires. En particulier ceux pour qui le principe du tiers-exclus, concept organisateur de la régulation de contrôle de l'activité du schème de la comparaison binaire n'est pas un invariant.

¹²⁹⁶ Ceux-ci sont des carrés de plastique qui sont aimantés d'un côté et présentant un seul animal de l'autre. Les représentations des animaux se distinguent par le type ou la couleur. Mais ils sont superposables et, en dehors du dessin, ils se caractérisent par leur ressemblance « parfaite ». Une collection de « piky » permet de construire différentes collections et des tableaux à double entrée.

¹²⁹⁷ Relativement à des schèmes anticipant une forme d'assemblage d'objets.

prédicats, introduction non directement influencée par la question posée. Toutefois, nous interprétons la collection des « piky » comme un indicateur sémiotique devant favoriser une activation d'un schème, producteur d'un assemblage fondé sur une ressemblance prégnante. Mais aucune des deux classes n'en ont fait un usage, antérieurement.

➤ Nous avons considéré, dans la collection, deux objets, un domino et un légo qui pourraient ne pas se retrouver facilement dans une même catégorie¹²⁹⁸. Nous envisageons comme possible l'absence de décision. Mais nous sommes intéressés par une évaluation d'une initiative les concernant.

➤ Mais, si le sujet ne semble pas avoir plus d'intention au niveau de l'action ou s'il ne produit pas de réponse significative sous la forme de certaines catégories, nous faisons le choix d'induire davantage une activité liée à la catégorisation par l'introduction du mot ensemble dans la formulation langagière : « *qu'est-ce que tu peux mettre ensemble ?* » Notons que Jean Piaget utilise des formulations comme « *Mettre ensemble ce qui va ensemble* » ou « *mettre ensemble ce qui est pareil* »¹²⁹⁹ qui nous semblent plus fortes mais qui seraient significativement peu différentes, s'il s'agissait d'évaluer le niveau au stade I ou II dans des conditions matérielles proches. Ce qui n'est pas le cas, comme nous le précisons plus bas. De plus, nous avons déjà noté l'ambiguïté de telles formulations puisqu'elles apportent de la confusion entre les activités de tri et celle de la catégorisation pure. Et, comme l'indique Jean Piaget, la seconde formulation indique davantage une construction par ressemblance, alors que la première peut indiquer plutôt, une construction par convenance empirique ou en relation avec un certain prédicat. Il y a donc une certaine orientation, dans les possibles envisageables, ce que nous avons cherché à éviter. Enfin, un point important a consisté à éviter l'introduction prématurée d'autres indicateurs langagiers, en particulier celui de la quantification. **Les enseignantes ont constaté que souvent l'introduction d'un tel indicateur dans certaines situations peut nuire à son efficacité dans d'autres situations ; car déjà et, de façon subjective, un enfant peut s'en faire une certaine conception qui pourrait faire obstacle à celle qu'il s'agit de développer ultérieurement. Or, nous visons, in fine, un enseignement et non une simple évaluation.**

➤ L'enseignante reste avec l'élève pris individuellement.

La situation est mise en place en septembre 2007 (donc en début d'année) dans deux

¹²⁹⁸ En effet, concrètement, ils ne peuvent être sujets d'un même prédicat, connotant un même usage, ce qui est le cas des catégories envisageables avec les autres objets

¹²⁹⁹ *La genèse des structures logiques élémentaires*. Chapitre 2. Opus cité.

classes : la classe de B.C en moyenne et grande section¹³⁰⁰ et la classe de P.B, en zone classée ZEP et en moyenne et en grande section.

Éléments d'analyse a priori

Nous limitons l'analyse a priori de cette situation aux points suivants :

- les études piagésiennes laissent envisager qu'on retrouve effectivement les différents niveaux du stade I et du stade II de la petite section à la grande section ;
- nous devrions donc avoir confirmation que le mot ensemble ne suffit pas à uniformiser les performances et à rendre compte d'une compétence C_i , que l'on peut considérer comme acquise par la presque totalité des élèves ;
- nous devrions analyser ces performances comme associées à des schèmes de nature diverses et au sein de la même activité : collections figurales et (ou) tri complet ou incomplet ;
- dans certains cas, nous devrions obtenir un énoncé explicite de prédicat, « spontanément » à la suite de la première question ou dans le cours de l'activité, après que soit posée la seconde question ;
- la situation que nous proposons est beaucoup plus neutre que celle dans laquelle se retrouvent souvent les sujets du stade II de Jean Piaget. En particulier, il introduit dans la situation objective des formulations diverses comme « *tu vas essayer de mettre de l'ordre* » ou « *mettre de l'ordre, tous les mêmes ensembles* », en proposant parfois des boîtes. C'est pourquoi nous ne prévoyons pas un nombre important, au niveau du stade II, de tris exhaustifs, associés à des occurrences, explicitées verbalement, de la quantification ;
- enfin, on pourrait craindre que la question « qu'est ce que tu peux mettre ensemble ? » n'induisse pas, pour tous les élèves, de manipulations effectives. Les enseignantes pensent (et c'est un effet de contrat), qu'au contraire, une majorité des sujets de maternelle entendront la question comme une incitation à manipuler les objets. Cette prévision nous a justement permis de ne pas se passer d'une formulation la plus neutre possible.

Analyse a posteriori

Les tableaux ci-dessous renseignent une distribution des effectifs selon la variable (X, Y).

- X est la variable donnant le nombre de catégories construites :
 - 0, pour aucune catégorie ou collection figurale ;
 - 1, pour au moins une collection figurale et sans catégorie ;

¹³⁰⁰ Enfants âgés de 4 ans à 5 ans et de 5 ans à 6 ans.

- 2, pour la seule catégorie des « piky » avec collection figurale ou non ;
 - 3, pour au moins une extension autre que celle des « piky » avec collection figurale ou non, et tri non exhaustif ;
 - 4, tri exhaustif de la collection donnant 5 ou 6 extensions distinctes¹³⁰¹.
- Y est la variable donnant la valeur :
- 0, si non explicitation verbale du nom d'une collection figurale ou d'un prédicat ;
 - 1 si énoncé d'un prédicat comme réponse à la première question ;
 - 2 si énoncé de plusieurs prédicats comme réponse à la première question ;
 - 3 si énoncé du « nom » de la collection figurale ;
 - 4 si énoncé d'un ou plusieurs prédicats au cours de l'activité « résultant de la seconde question », sans que ceci l'ai été à la suite de la première question.

❖ **La classe de P.B : 23 élèves ayant passé le test**¹³⁰².

Ajoutons que l'enseignante a tenté, après la seconde question, de relancer certains sujets, soit en reposant cette même question, soit par des questions du type « tu peux ne rien faire d'autre ? » ou « tu veux faire autre chose ? » ou « il y a d'autres objets sur la table, qu'est-ce que tu en fais ? ». Les conséquences ont été de deux types : soit l'élève n'avait pas auparavant construit de collection, et l'incitation n'a pas donné d'autre construction significative. Cela concerne certains des 10 sujets qui « donnent la valeur (0 ; 0) » ; soit l'élève en avait construite une et il s'agissait de la catégorie « piky » et il l'a détruite, dans le cours de l'activité qui s'en est suivie sans reconstruction autre. C'est le cas d'un sujet donnant la valeur (2 ; 0). Nous avons comptabilisé ce dernier avec ceux ayant effectivement construit une extension ; soit l'élève en avait construite une et il s'agissait de la catégorie « piky » et il en a construit d'autres, dans le cours de l'activité qui s'en est suivie. C'est le cas du sujet donnant la valeur (4 ; 4).

Nous avons précisé les âges dans chaque case du tableau.

¹³⁰¹ 5, si une paire dont les éléments sont le domino et le légo, 6, si deux catégories singleton.

¹³⁰² On peut voir, en annexe 1, des images de certains éléments du milieu et de trois productions qui présentent une forme achevée des activités de deux élèves.

X \ Y	0	1	2	3	4
0	10 (4 ; 4) à (5 ; 8)	2 (4 ; 5) à (5 ; 8)	5 (4 ; 3) à (5 ; 3)	2 (4 ; 3)	
1					
2					
3		3 (4 ; 6) à (5 ; 8)			
4					1 (4 ; 9)

Tableau I

Conclusion 1¹³⁰³ :

➤ relativement à ce type d'évaluation, l'âge n'apparaît pas comme une variable indicatrice du niveau de compétence¹³⁰⁴ ;

➤ **65,2% des élèves de cette classe ne construisent aucune extension et donc seraient à un niveau de développement antérieur au stade II. En particulier, l'indicateur langagier « ensemble », seul, n'est pas anticipateur d'un schème « catégorisant » ;**

➤ mais seulement 5 d'entre eux construisent effectivement des collections figurales ;

➤ malgré l'indication sémiotique forte qu'ils présentent, seulement 34,7% des élèves rassemblent les « piky » ;

➤ seulement 3 élèves construisent des extensions autres que l'extension « piky » ;

➤ **une seule élève (de moyenne section) construit un tri exhaustif et en associant, à chaque extension construite, un prédicat acceptable. Aucun autre élève n'exprime de prédicat acceptable ;**

➤ aucun élève ne conçoit spontanément « une mise en ordre » comme réponse, à la suite de la question 1 qui ne donne d'ailleurs aucune indication précise en ce sens. Sans cela, ces élèves ne prennent pas d'initiative ;

➤ 56% des élèves essaient d'entreprendre quelque chose après la première question : 11 d'entre eux se mettent « à jouer à quelque chose » et 2 répondent, pour un seul des objets, par l'usage que l'on peut en faire ;

➤ **le quantificateur universel n'est pas spontanément présent dans la situation de référence, concernant tous les élèves dont les 3 élèves signalés dans les deux dernières colonnes du tableau ;**

¹³⁰³ Dans les valeurs statistiques données les pourcentages sont arrondis à 0,1% près.

¹³⁰⁴ Alors qu'à cet âge, les variables « différence d'âges » et « niveau mesurable de développement » ne sont pas indépendantes, relativement à certaines compétences.

- parmi les extensions construites par les 8 élèves, considérés dans les trois dernières colonnes, on retrouve systématiquement celle des « piky » ;
 - la donnée des « piky », dans le milieu matériel semble avoir joué le rôle que nous lui prévoyions puisque, pour ces 8 élèves, la première extension construite est celle des « piky », en une ou deux fois, dans le cours de l'activité ;
 - 60,8% des élèves n'entreprennent aucune manipulation, après que la question 2 ait été posée. Dans ce cas, l'enseignante leur a précisé « tu peux bouger les objets ».
- ❖ **La classe de B.C : 26 élèves ont passé le test**¹³⁰⁵.

X \ Y	0	1	2	3	4
0	1 (4 ; 5)		2 (3 ; 11) à (5 ; 1)		9 (4 ; 7) à (4 ; 8)
1					1 (4 ; 8)
2	2 (4 ; 8) à (4 ; 10)			2 (4 ; 7) à (4 ; 8)	7 (4 ; 5) à (5 ; 6)
3			1 (5 ; 3)		
4					1 (5 ; 8)

Tableau II

Conclusion 2

- on peut confirmer que l'âge n'est pas une variable indicatrice du niveau de compétence ;
- **11,5% des élèves de cette classe ne construisent aucune catégorie et donc en seraient à un niveau de développement antérieur au stade II.** Toutefois, deux élèves sur les trois élèves concernés expriment des prédicats, en réponse à la première question. Ainsi, Amélie (4 ; 8) peut donner comme réponse « on peut écrire, on peut manger, on peut faire de la peinture ». Mais elle ne construit pas de collection, bien qu'elle manipule spontanément les objets et sans but précis. Son cas reste ambiguë : on pourrait tout aussi bien lui attribuer la valeur (4 ; 2), mais en introduisant une formulation langagière plus ostentatoire. Cela semble confirmer que l'indicateur langagier « ensemble », seul, n'est pas associé à un schème de la construction d'une extension et en relation avec des désignations pourtant disponibles ;
- 76,9% construisent des catégories autres que la catégorie « piky » ;
- mais tous ces derniers construisent l'extension des « piky » ;
- 73% des élèves qui ont construit, au moins une extension, ont bien commencé par celle des « piky » ;

¹³⁰⁵ On trouvera, en annexe 2, trois images de productions d'élèves.

➤ **69,2% des élèves ont construit un tri exhaustif dont 44,4% expriment déjà, et spontanément, comme réponse à la première question, des formes de prédicats acceptables ;**

➤ 7 élèves entreprennent de construire une extension (celle des « pikis »), à la suite de la première question, et l'un d'eux achève un tri complet ;

➤ 3 des 9 élèves évalués (4 ; 0) « réunissent » la brique lego et le domino, en exprimant un prédicat acceptable : « pour jouer » ou « de même forme » ou « présentant des points », mais à la suite d'une question concernant ces objets ;

➤ **aucun élève n'introduit le quantificateur universel, dans la situation de référence,**

Nous présentons, dans le tableau suivant, des statistiques comparatives qui nous paraissent remarquables :

Critères	Aucune collection figurale ou extension construite et pas de réponse cohérente à la première question	Collection(s) figurale(s) et pas d'extension construite	Construction d'extensions autre que celle des « piky »	Construction d'un tri exhaustif	Enoncé(s) de prédicat(s)
Classe de P.B	43,5%	21,7%	13%	4,3%	4,3%
Classe B.C	0%	0%	76,9%	69,2%	53,8%

Tableau III

Conclusion relative à la comparaison des deux classes

Cette comparaison explicite un gros déséquilibre entre les élèves de la classe située en ZEP et l'autre classe, relativement au test effectué :

➤ **seulement 4,3% des élèves de la première classe contre 69,2% de ceux de la seconde sont « rattachables » au type 2 du stade II défini par Jean Piaget.** En ces cas, l'activité des élèves concernés a consisté en un tri exhaustif, par correction rétroactive et anticipations partielles avec des classes ne présentant pas d'intersection, jusqu'à « épuisement » des objets de la collection ;

➤ **seulement 13% des élèves de la première classe contre au moins 76,9% (compte non tenu du cas ambiguë évalué (0 ; 2)) de ceux de la seconde semblent avoir un niveau de développement postérieur au stade I ;**

➤ 21,7% des élèves de la première classe contre 0% des élèves de la seconde sont rattachables explicitement au stade I ;

➤ **43,5% des élèves de la première classe contre 11,5% de la seconde classe ne peuvent fournir d'activité en rapport attendu avec les questions posées ;**

➤ il s'avère, d'un intérêt évident, de reprendre une évaluation comparative d'une

composante de la résultante cognitive, après l'apprentissage tel que nous l'aurons précisé.

2.2 Sur certaines conditions de la recherche

Précisons, dans ce qui suit, la nature d'une certaine influence sur la forme des séances décrites.

Les exemples qui vont suivre se rapportent à des situations effectivement mises en œuvre dans les classes des enseignants en 2007-2008 et en 2008-2009 et dont nous rappelons qu'ils sont, pour une première, (H.B), en charge d'une petite section, pour une deuxième, (B.C), en charge d'une moyenne et d'une grande section, toutes deux maîtresses formatrices, pour une troisième, (P.B), maîtresse des écoles, en charge d'une moyenne et d'une grande section et, pour un cinquième enseignant, (D.B), en charge d'une moyenne et d'une grande section et qui a rejoint le groupe en 2008-2009, alors que P.B l'a quitté, cette même année. Nous disposons également de plusieurs films tournés entre septembre 2007 et décembre 2008. Nous exploiterons, dans nos analyses a posteriori, deux films, tournés en septembre 2007 et concernant des séances qui se sont déroulées dans les classes de H.B et de B.C, puis des extraits de films, tournés en décembre 2008, dans la classe de D.B. Un autre film a été tourné, dans la classe de B.C, en décembre 2009. Il ne sera pas exploité ici ¹³⁰⁶ mais il présente une forme achevée du déroulement d'une séquence sur l'apprentissage à la catégorisation. Il demeure donc un produit à usage pédagogique puisque l'ensemble des paramètres, abordés dans la recherche, se montrent là maîtrisés. De plus, ces deux derniers films représentent des déroulements complets de séquences relatives à l'apprentissage de la catégorisation, en moyenne et grande section.

Nous devons préciser certains points qui différencient les années scolaires 2007-2008 (première année des activités du groupe) et 2008-2009 (seconde année des activités du groupe), et relativement à nos travaux de recherche.

Année scolaire 2007-2008.

➤ La première année a été aussi bien, pour une partie du temps, de réflexion que de formation : nous avons évité d'imposer d'emblée une ingénierie didactique aux collègues enseignants sans leur faire partager et(ou) découvrir, en partie, le substrat, de cette ingénierie ¹³⁰⁷. En retour, nous avons appris à tenir compte des contraintes et des possibles propres à ces ni-

¹³⁰⁶ Notre communauté a été dissoute en juin 2009.

¹³⁰⁷ Rappelons que ce n'est pas un des objets de cette thèse de rendre compte de cette formation collective. Nous devons aussi préciser que nous n'avons pas introduit, dans nos échanges, le concept de régulation mais que nous avons fini par insister de façon systématique sur une formulation relative à une « réciprocité des situations » concernant les schèmes S_{C^*F} et $S_{C^{**}F}$.

veaux de classe¹³⁰⁸. En ce sens, s'est établi, lors de la conception des situations didactiques, une sorte de négociation visant à trouver un équilibre entre les objectifs d'une recherche et le pragmatisme des enseignants.

➤ En effet, s'il a été entendu, dès notre première réunion, que nous visions la mise en place de situations d'enseignement, certes à l'état expérimental, celles-ci ne devaient pas se définir comme situations d'expériences, dans le seul but de servir une recherche.

➤ Pour différentes raisons et la réalité qui vient d'être dite, il y a eu, d'une classe à l'autre, des décalages dans la mise en place des situations. Le groupe devait donc s'astreindre à l'attente de certains rattrapages avant de continuer la construction de notre séquence.

➤ La conséquence a été que nous ne nous sommes pas fixés, a priori, un repérage temporel des séances de la séquence décrite plus haut. Mais nous avons, au moins, comme objectif, de l'achever avant la fin de l'année.

➤ De plus, évidemment, nous n'avions pas une conception de la séquence suffisamment avertie des données de terrain pour l'entendre dans la programmation de ces classes. Et d'ailleurs, ce n'était, pour aucun des sujets du groupe, un objectif initial, puisqu'il s'agissait d'en construire la structure concrète, au fur et à mesure de nos « expérimentations ». « Le chercheur » du groupe (en l'occurrence, nous-mêmes) n'a jamais présenté, au préalable une structure formelle de la séquence : l'une des raisons est que « le chercheur » avait aussi comme objectif d'en mesurer, au fur et à mesure des discussions, au sein d'un groupe de professionnels de terrain de l'enseignement scolaire, le caractère nécessaire de ce qui détermine l'enchaînement des séances¹³⁰⁹.

➤ Par contre, notre action a été systématiquement de proposer, a posteriori, une forme unifiée des remarques et observations, forme dont l'émanation au sein d'un groupe n'est pas chose spontanée et qui, d'ailleurs, peut être normée par la subjectivité du chercheur. Il nous a donc fallu, pour l'obtenir, introduire, de façon sous-jacente, une sorte de contrat concernant la finalité de nos débats : parvenir à un consensus.

➤ Nous avons pu noter certaines difficultés dans le déroulement des situations. En particulier, les moments 2 qui se constituent en situations d'institutionnalisation n'ont pas été ritualisés systématiquement par tous.

¹³⁰⁸ Sur deux points au moins : l'adaptation des formulations langagières, selon les niveaux et « la gestion des élèves », lors du déroulement des séances.

¹³⁰⁹ Pour n'en citer que l'aspect fondamental, la question tout à fait générale de l'inversion des premières séances (vocabulaire qui est apparu au sein du groupe sans que nous ayons introduit antérieurement la notion de schèmes réciproques et la construction nécessaire d'une telle réciprocité) : « comment se fait-il qu'il arrivent à faire dans un sens et pas dans l'autre ? ». Il a été évoqué par exemple les premiers problèmes soustractifs, et donc aussi : « s'ils arrivent à mettre tous les p ensemble, est-ce que, s'ils disposent de tous les p, ils savent retrouver p ? ».

- Nous avons méthodiquement défini a priori, recueilli et étudié des données relatives aux performances des élèves.
- Au final, la séquence s'est étendue de septembre à juin.
- Mais B.C n'a pu mener à bien les situations relatives aux évaluations de la composante cognitive, ce qu'elle fera par contre en janvier 2009.

Année scolaire 2008-2009.

- L'enseignante P.B a quitté le groupe.
- Les trois enseignants du nouveau groupe ont décidé (finalement trois enseignants maîtres formateurs dont les deux maîtresses du groupe précédent) de programmer la séquence dans leur classe respective, entre septembre et janvier.
 - Ont été mises en place davantage de situations : les premières, relatives au schème $S_{C'f}$ et dont nous n'avons pas mesuré assez, l'année précédente, comme on va le voir dans nos analyses ci-dessous, le besoin d'une consolidation ; les secondes, que nous avons définies comme apprentissages¹³¹⁰, les participants du groupe ayant déterminé, qu'en effet, les situations conduisant à un exercice systématique du schème $S_{C''f}$ et comme nous l'avons analysé plus haut sont indispensables à la consolidation de l'équilibre de la structure cognitive fermée S_{Cf} ¹³¹¹.
 - Nous en avons tiré aussi un bénéfice par une diversification plus libre des différentes situations de la séquence et, surtout, en ce qui concerne une évaluation de la résultante cognitive R_c ¹³¹².
 - Nous avons choisi de ne pas différencier, concernant le déroulement de la séquence, les différents niveaux de l'école maternelle, petite section, moyenne section et grande section. La différenciation pouvant cependant porter sur des modulations langagières secondaires (se mettre à la portée des plus petits) et non sur la structure fondamentale des formulations langagières $F_{C'f}$ ou $F_{C''f}$.
 - La personnalité des enseignants a donné à certaines situations des aspects différenciables : matériel à manipuler, conçu et fabriqué par l'enseignant ; gestion des élèves de la classe : élèves seuls ou en groupes ou en collectif restreint (construits selon certaines normes (« homogénéité ou non, taille du groupe... ») ; mise en scène : gestes, intonations verbales... (dans le discours de l'enseignant) ; nombre de situations de consolidation... Tout cela a pu jouer sur les performances des élèves considérés individuellement, tout au long du déroule-

¹³¹⁰ On retrouve son expression en désignant une consolidation du système fermé (R_a , S_{Cf}).

¹³¹¹ Nous rappelons que nous n'avons pas introduit, dans nos échanges, la notion de régulation.

¹³¹² Un fait notable est qu'il est apparu, aux trois enseignants, que le potentiel cognitif, atteint par les sujets, permettait réellement d'envisager des évaluations dans des cadres les plus divers.

ment de la séquence. Toutefois, la structure fondamentale de la séquence, donc stabilisée dès la fin scolaire précédente (juin 2008) a bien été respectée rigoureusement et par tous.

➤ Ainsi, nous pensons que les évaluations de la composante cognitive, en janvier 2009, ne se sont pas trouvées biaisées, par ces particularités de l'apprentissage des élèves.

3 La séquence elle-même

Nous allons, dans cette partie, faire un usage systématique des outils de notre technologie. Rappelons, en particulier, que, dans le chapitre 5 :

➤ nous avons décrit un développement canonique d'une compétence par différenciation et intégration, sous 2.3.5.3 ;

➤ nous avons défini quelques une des opérations de la fonction de régulation, sous 1.6.4.3.1 ;

➤ nous avons construit et solidarisé les concepts fondamentaux, dans la partie 3 (structuration didactique, système fermé, réversibilité opératoire...);

➤ nous avons construit différents types d'équilibration et d'obstacles sous 2.3.4.2.

On retrouvera systématiquement pour chacune des séances :

➤ un tableau qui en précise la structuration didactique ;

➤ deux analyses à priori :

- une analyse logique de la tâche,
- une analyse cognitive de l'activité. En particulier une recherche de possibles et lorsque cela sera pertinent, du nécessaire,

➤ des séances concrètement effectuées dans des classes, et pour lesquelles seront produites :

- d'éventuels compléments d'analyses a priori,
- une analyse a posteriori¹³¹³,
- des conclusions.

3.1 Précisions sur la nature des obstacles épistémologiques

Plusieurs obstacles, considérés dans cette séquence, peuvent être qualifiés d'épistémologiques¹³¹⁴ car ils sont des inerties des schèmes de la désignation par les mots¹³¹⁵.

¹³¹³ Selon l'usage de Jean Piaget, lorsqu'il s'agira de considérer un sujet âgé de x années et y mois nous précisons son âge par le couple (x ; y).

¹³¹⁴ On retrouvera notre définition des équilibrations de type 3 dans le chapitre 4.

¹³¹⁵ Nous précisons que ce schème de la désignation est constitutif d'une structure de schèmes que nous avons définie comme la dénotation. Rappelons, en l'occurrence, que si l'on s'impose l'explicitation d'un verbe d'action

➤ En deçà d'un certain niveau de développement, cette désignation qui associe un signe linguistique à un certain objet, rend compte d'une qualité concrète de cet objet particulier. L'inertie de ce schème de la désignation est un obstacle à une désignation d'une qualité de cet objet considéré comme générique. Là, la désignation met en relation un mot et un aspect concret d'un objet présent et perçu, ici, la désignation met en relation un mot et un aspect des objets d'une catégorie toujours virtuelle. Le changement de paradigme qui pourrait être évoqué est celui de la pensée concrète en celui de la pensée abstrayant.

➤ Cet obstacle se trouve renforcé par l'homonymie rappelée ci-dessus : l'adverbe d'intensité « tout »¹³¹⁶ peut, dans l'écoute de l'élève masquer naturellement les différentes expressions de la totalité d'un ensemble¹³¹⁷ : l'adjectif indéfini tout (tous), pour l'expression distributive ; l'adjectif indéfini « tous », pour l'expression globale de la totalité¹³¹⁸. Cet obstacle peut se révéler d'autant plus résistant qu'il s'associe à une qualification concrète d'un objet : en termes de concept quotidien, l'adverbe « tout » concerne bien un aspect concret d'un objet, ce qui n'est pas le cas de l'adjectif « tous » qui concerne un aspect détaché des objets, eux-mêmes « pris » dans une même collection. On peut reprendre ceci en considérant le pronom indéfini « tous »¹³¹⁹ qui sera utilisé dans les séances¹³²⁰. Il y a aussi à repérer là une différenciation entre la simple représentation et la dénotation du mot.

➤ Rappelons que l'inertie du schème de la comparaison binaire se constitue en obstacle épistémologique dans la construction du schème de la comparaison globale. En d'autres termes, le dénoté de la compétence initiale « comparer » qui ne concerne que des situations dans lesquelles la comparaison est une relation binaire ou, au plus ternaire¹³²¹, doit se plonger dans le dénoté de la compétence finale « comparer » et qui concerne des situations dans lesquelles la comparaison est une relation « n-aire »¹³²². On comprend alors que cet obstacle est à corrélérer aux précédents.

3.2 Construction initiale du schème S_{Cf} . Premières phases de la compréhension

Il s'agit de concentrer l'activité cognitive sur la construction du schème S_{Cf} et donc d'initialiser la construction d'une structure cognitive spécifique de la catégorisation.

et donc d'une compétence particulière, il s'agit bien de nommer ou de qualifier une suite d'actions particulières...

¹³¹⁶ Et qui peut prendre la forme féminisée « toute » !

¹³¹⁷ Comme dans les expressions « tout ce qui est vivant » ou « tous ceux qui sont concernés par... »

¹³¹⁸ Comme dans les expressions « tous les objets rouges » ou « toutes les fleurs bleues ».

¹³¹⁹ Et bien que l'homophonie soit en ce cas atténuée.

¹³²⁰ Ces différenciations se retrouvent dans R.L Wagner et J.Pinchon : *Grammaire française*. Opus cité

¹³²¹ En vérité celle-ci peut n'être que l'expression d'une application de la transitivité de la relation binaire :

« $R(x, y)$ et $R(y, z)$ équivaut à $R'(x, y, z)$ ».

¹³²² n étant un entier supérieur ou égal à 2.

Construction du schème $S_{C'f}$ ou début de différenciation de la dénotation du schème S_{Ci}				
Situation de référence. Compréhension : premières phases	Enseignant	Élève (\bar{S}_{Ci} , non S_{Ci})	Début de la Construction du schème $S_{C'f}$	Situation didactique
Situation objective : deux moments successifs	2-Enseignant(e) demandant le rappel de la consigne	Elève rappelant la consigne et comprenant (début)	Restructuration du schème S_{Ci} (début)	Situation de Référence : deux moments successifs :
	1-Enseignant(e) n'agissant pas	Elève construisant une catégorie A en extension	Activité du schème S_{Ci}	
Milieu matériel : un ensemble E d'objets disposés sur une table et visibles ; une boîte fermée ¹³²³ ; un énoncé de tâche sous la forme langagière : « mets dans la boîte tous les p ¹³²⁴ ». ($F_{C'f}$)	Enseignant(e) prononçant la con- signe avec accent tonique sur le « tous »	Elève face à la boîte et assis à côté de l'enseignant(e)	Système tatif ¹³²⁵ : schème S_{C0i} et S_{C1i} disponibles	Situation objective

Tableau 4

En toute rigueur, nous devrions dédoubler le tableau et considérer deux situations objectives distinctes : dans sa position 2, l'enseignant(e) s'adresse en fait à un système cognitif ayant agi dans la situation définie comme un premier moment. Mais l'analyse, ci-dessous, va effectivement en tenir compte.

Les analyses a priori

Analyse logique de la tâche

Quel que soit x, objet de E,

Évaluation de p(x) : si p(x) vrai alors $x \in A$; si p(x) faux alors $x \notin A$.

Analyse cognitive de l'activité

Nous considérons les deux moments définis dans le tableau 4, ci-dessus. Les schèmes sont désignés comme dans le tableau 3, sous 1.3.2.

L'analyse va concerner uniquement le système cognitif élève.

Moment 1 :

➤ Situation perturbante de type 1. Le système peut entendre « mets dans la boîte les p ». L'élève peut s'acquitter de la tâche car le quantificateur est, dans la pratique quotidienne,

¹³²³ Dont le contenu ne peut jamais être visible.

¹³²⁴ Où p est un prédicat correctement formulé par rapport à E. On pourra dire aussi « mets dans la boîte tout ce qui est p ».

¹³²⁵ On peut qualifier un tel système de milieu cognitif objectif. Bien sûr, d'autres schèmes, dont certaines régulations (dont celles de la sélection de ces deux schèmes) sont également disponibles et en activité dans la situation de référence.

un implicite : les formulations « mettre les p » et « mettre tous les p » étant, dans cette pratique, « synonymes ». Pour cette raison, nous ne pensons pas que, dans la situation, l'obstacle de l'homonymie joue.

➤ Le système dispose de la signification qui permet au prédicat p d'être défini sur E . En d'autres termes, une première régulation prenant en compte l'indicateur sémiotique p conduit à la sélection d'un schème spécifique relativement à p , donc de schèmes coordonnés au schème S_{C0i} .

➤ Il s'ensuit une activité sensori-motrice : il s'agit d'une énumération qui se suffit du regard et qui se coordonne avec la préhension de l'objet. L'activité est celle du schème S_{Ci} .

➤ **Possible 0** : exercice du schème S_{Ci} avec début d'une procédure de sélection des objets x de E tels que « $p(x)$ vrai ». Arrêt de l'activité avant la construction exhaustive de l'extension de A . Dans ce cas, l'indice « tous » (même interprété comme le déterminant « les ») de la quantification universelle n'est pas un indicateur qui stimulera une régulation aussi bien, anticipatrice d'un schème spécifique, que de contrôle.

➤ **Possible 1** : exercice du schème S_{Ci} avec alimentation récurrente du schème de la comparaison binaire. Précisément, maintien en mémoire de « $p(x_n)$ vrai », (ce qui correspond à une perception mémorisée volontairement ou non) et rapprochement avec $p(x_{n+1})$, x_{n+1} venant à son tour compléter l'extension¹³²⁶ ou non, selon l'évaluation de $p(x_{n+1})$ ¹³²⁷. La quantification universelle peut jouer comme un indicateur d'une anticipation de la suite des actions. Mais la régulation de contrôle de l'activité peut ne plus s'exercer dans le cours de la récurrence. Il peut donc y avoir oublié ou non d'objets de E tels que $p(x)$ vrai.

➤ **Possible 2** : exercice du schème S_{Ci} avec alimentation du schème de la comparaison binaire. La quantification universelle joue comme un indicateur d'une anticipation de la suite des actions. Mais, dans ce cas, rassemblement contrôlé par le perceptif et conservation initiale de tous les objets x tels que « $p(x)$ vrai », puis placement dans la boîte de tous les objets ainsi réunis. Le maintien de la régulation de contrôle du respect de quantification universelle est facilité par le procédé. L'oubli d'un objet est peu probable.

➤ **Possible 3** : concernant les deux possibles 1 et 2, la prise en compte de l'indicateur sémiotique « tous » de la quantification universelle peut permettre de construire une représentation complète de la situation mais non forcément un schéma complet d'actions. Précisément, cet indicateur peut, dans ce cas, être pris en compte pour lancer la suite des ac-

¹³²⁶ Si x_n et x_{n+1} sont « co- p ».

¹³²⁷ Rappelons que les objets, une fois dans la boîte, ne sont plus visibles.

tions mais être oublié dans le cours de l'activité¹³²⁸. Le possible 3, au contraire, envisage le maintien d'une régulation de contrôle portant effectivement sur cette quantification.

➤ Pratiquement, dans les cas correspondant aux possibles 2 et 3, ce contrôle porte sur ce que ne doit pas posséder E-A, c'est dire, en particulier, l'activation constante du théorème en acte $x \in A \Rightarrow x \notin E-A$.

Moment 2 :

➤ Situation perturbante \mathcal{S}_{C_i} de type 3 pour les raisons qui suivent.

➤ Hors le cas du « possible 3 », nous avons précisé la nature fluctuante de la rétention en mémoire de travail de l'indicateur de la quantification universelle et même la possibilité d'une non conscience, relativement à celle-ci. D'autre part, **la construction de l'extension peut ne s'interpréter que comme un exercice de renforcement du schème \mathcal{S}_{C_i} . Ainsi, la réussite de la tâche, lors du moment 1, a pu l'être par assimilation déformante. La question de l'enseignant(e) force à une réflexivité sur l'activité et impose une première centration sur cet indicateur qui, a posteriori, pourrait être reconnu, par le système, comme un des concepts organisateurs explicites et permanent dans ce type d'action**, concept qui n'est donc pas à construire dans le moment 1 et qui donc, pour lors, serait à considérer en acte. Dans le cas du possible 3, on pourrait se retrouver avec un équilibre de type 2, voire de type 1.

➤ On se trouve donc avec un début de construction du couple $(R_{a'}, S_{C'f})$ (ou une consolidation dans le cas du possible 3) et une première phase dans la compréhension¹³²⁹. Si ce genre de situations se reproduit (en particulier, une systématisation du moment 2), une régulation $R_{a'}$ pourrait s'équilibrer et s'activer systématiquement pour la sélection d'un schème de type $S_{C'f}$ dont l'exercice est coordonné à celui permanent d'une régulation de contrôle, portant effectivement sur la quantification universelle. Dans ce cas, on retrouverait bien des équilibres de type 2 puisque le schème $S_{C'f}$ est en fait le schème \mathcal{S}_{C_i} auquel s'est coordonnée une certaine régulation, rendue plus globale et non seulement limitée à la comparaison binaire, mais toutefois en acte et donc déjà disponible pour le système cognitif. Ce faisant, on se situerait dans une deuxième phase de compréhension et un début de troisième phase qui sera achevée dans la situation suivante. **Mais on peut concevoir que, malgré la réflexivité imposée par l'enseignante, une conscience réfléchie pouvant n'en rester qu'au niveau 1, niveau tel que l'indicateur sémiotique de la quantification universelle bien que considéré par le**

¹³²⁸ Il faut préciser que notre choix s'est fixé, concernant les objets de E, sur de faibles quantités n ($n \leq 20$).

¹³²⁹ On pourra se reporter à la description du processus canonique que nous avons faite dans le chapitre 4, sous 2.3.5.3

système pour la construction d'un schéma complet d'action, peut l'être sans plus d'attention logique.

Année I¹³³⁰

Nous ne donnons des situations objectives que les éléments matériels, les éléments cognitifs ayant été définis dans le tableau 4 précédent

❖ **Classe de H.B (enfants âgés de (2 ; 9) à (3 ; 11), petite section)**

Les situations objectives

Moment 1

Le milieu matériel :

- une boîte, munie d'une ouverture ne laissant pas voir l'intérieur ;
- des formes géométriques en bois relevant de catégories diverses dont 9 triangles, dont 4 triangles jaunes, un disque jaune et un triangle bleu, le tout posé sur une même table ;
- un élève et la maîtresse assis l'un à côté de l'autre, devant la table ;
- la formulation langagière : « *je te demande de mettre dans ma boîte **tous les triangles jaunes*** ».

Le milieu cognitif :

- schème S_{COi} et S_{CIi} disponibles.

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel précédent transformé ;
- l'enseignante montrant l'intérieur de la boîte ;
- la formulation de l'enseignante : « *On va vérifier* » ;
- la question de l'enseignante : « *Ils sont ... ?* ».

Le milieu cognitif :

- système cognitif en l'état et issu de la situation précédente.

❖ **Classe de B.C (enfants âgés de (4 ; 8) à (5 ; 11), moyenne et grande sections)**

Les situations objectives

Moment 1

Le milieu matériel :

- un panier recouvert d'un tissu, afin que l'intérieur ne soit pas visible ;
- des formes géométriques de plusieurs matières, relevant de catégories diverses ;

¹³³⁰ Nous noterons I, pour l'année 2007-2008 et II, pour l'année 2008-2009.

dont 4 triangles jaunes, un rond jaune et 3 triangles, de couleurs autres que le jaune, le tout posé sur une même table ;

- un élève et la maîtresse se faisant face, de part et d'autre de la table ;
- la formulation langagière : « *Dans ce panier, tu me mets tous les triangles jaunes* ».

en plastique ».

Le milieu cognitif :

- schème S_{C0i} et S_{C1i} disponibles.

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel précédent transformé ;
- questions de l'enseignante :
 - « *Tu as fini ?* »,
 - « *Qu'est-ce que tu devais mettre dans le panier ?* ».

Le milieu cognitif :

- système cognitif en l'état et issu de la situation précédente.

Les analyses a posteriori

Nous y ferons référence aux possibles, précisés ci-dessus.

❖ **Nous analysons, ci-après, le cas de Pierre (P) ((3 ; 5) dans la classe de H.B.**

Moment 1

Éléments discursifs de la situation de référence¹³³¹

1- H.B : « *Vas-y, tous les triangles jaunes !* »

P prend dans ses mains les quatre triangles jaunes

4- P : « *C'est pas une boîte jaune !* » (il doit mettre les triangles dans une boîte bleue)

P met les triangles dans la boîte

P saisit le disque jaune

8- P : « *Et ça aussi c'est jaune* », en montrant le disque jaune

9- H.B : « *Oui, est-ce un triangle ?* »

10- P : « *Non !* »

Dénégation de Pierre par un mouvement de la tête

11- H.B : « *Alors, on le met ?Non...Parce qu'on avait demandé ? ...que des ? ...triangles jaunes* »

¹³³¹ Nous rendons compte, ci-dessous, de la totalité des échanges discursifs en dehors de ceux qui nous sont restés inaudibles.

Analyse

Nous pouvons interpréter la performance de Pierre comme relevant du possible 2. Ce qui le conduit à la réussite de la tâche.

On note un affaiblissement « dangereux » du prédicat « triangle jaune » en 4 et 8 : « le jaune attire le jaune », par l'exercice d'un schème qui tend à construire une totalité de l'espèce jaune. H.B, en 9 et 10, participe à l'inhibition de ce schème dangereux, exprimée par 10. Toutefois, cette activité cognitive pourrait passer inaperçue, dès lors que l'exercice du schème S_{Ci} de la comparaison binaire a pu permettre le bon déroulement de la tâche, et si l'analyse se focalisait uniquement sur la réussite de la tâche.

H.B conduit avec 8, 9, 10 et 11, une situation de validation locale en induisant une inférence relative à un objet x tel que $p(x)$ faux. La réponse de P en 10 exprime l'actualisation du principe de non contradiction, invariant conceptuel du schème S_{Ci} , donc en acte dans l'activité qui a précédé.

Moment 2

Éléments discursifs de la situation de référence

Pierre ne fait plus rien. H.B lui propose de vérifier en regardant dans la boîte.

12- H.B : « *Et on va vérifier ; on regarde !* »

13- P : « *Eh oui !* »

14- H.B : « *Ils sont... ?* »

15- P : « *Jaunes !* »

16- H.B : « *Ils sont tous jaunes, ils sont tous des triangles jaunes ; bravo ! tous...* »

Analyse

H.B conduit avec 12, 13, 14 et 15 une situation de validation globale.

16 peut s'interpréter comme un élément d'une forme d'institutionnalisation. On peut y noter l'insistance relative à l'utilisation du quantificateur universel « tous », sous sa forme pronom et associé une première fois au prédicat «jaune », mais vite modifié par le prédicat « triangle jaune ». Enfin, on note l'insistance finale par le rappel du seul quantificateur. Mais Pierre ne reprend pas finalement la quantification comme un indicateur a posteriori.

On peut donc confirmer que Pierre peut être considéré comme un possible 2.

❖ **Nous analysons, ci-après, le cas de Clément(C) : (4 ; 5), dans la classe de B.C¹³³².**

¹³³² Nous rendons compte, ci-dessous, de la totalité des échanges discursifs en dehors de ceux qui nous sont restés inaudibles.

Moment 1

Éléments discursifs de la situation de référence

1- B.C : « *Dans ce panier, tu me mets tous les triangles jaunes en plastique. Allez vas-y !* »

C prend 3 triangles jaunes en plastique et les met dans le panier ; il continue en mettant le dernier triangle en plastique

2- C : « *J'ai fini !* »

Analyse

Nous notons que le sujet construit l'extension de l'ensemble A en deux temps. Ce fait rend plausible une performance relevant du possible 2, si l'on considère le premier temps (rassemblement de trois premiers triangles qui disparaissent dans le panier). Mais le second temps permet d'envisager une réelle mémorisation volontaire du prédicat et le maintien d'une régulation, portant sur le contrôle de l'extension de E-A.

La performance du système pourrait relever du possible 3, mais le moment 2 peut invalider cette hypothèse.

Moment 2

Éléments discursifs de la situation de référence

3- B.C : « *Qu'est ce que tu devais mettre dans le panier ?* »

4- C : « *Des triangles en plastique !* »

5- B.C : « *Tous les triangles en plastique !..... ? Il y avait autre chose..... ?* »

Pas de réponse de Clément

6- B.C : « *Tu ne te souviens plus ?* »

Clément dit non de la tête.

7- B.C : « *Je te fais regarder et tu me diras ce que tu devais mettre dans le panier...Alors tous les triangles en plastique ?* »

Elle soulève le tissu et il regarde

8- B.C : « *A quelle autre chose, il fallait que tu penses ? A quelle autre chose, tu devais penser ? Tu ne sais plus ?* »

9- C : « *Non !* »

B.C sort les triangles du panier.

10- B.C : « *Redis-moi ce que tu as mis dans le panier ?* »

11- C : « *Des triangles jaunes en plastique !* »

12- B.C : « *Redis : tous les triangles jaunes en plastique !* »

13- C : « *Tous les triangles jaunes en plastique !* »

Analyse

Les trois attributs des genres forme, couleur et matière sont des données immédiates de la perception (même l'espèce plastique qui, de ce point de vue, se distingue bien du carton ou du bois). Ainsi, on peut interpréter l'oubli (4, 6 et 9), aussi rapide du prédicat (complet), comme l'indication, lors du moment 1, d'une performance qui relèverait en grande partie du possible 2. La possibilité de visualiser effectivement le dernier triangle (jaune en plastique), jouant, à lui seul, comme un attracteur pour son placement dans le panier avec les autres triangles. Une fois les objets non visibles, le schème fermé S_{Ci} , actif dans ce possible 2, ne permet pas d'exprimer le prédicat puisque, rappelons-le, ce schème n'est opératoire que dans une situation ne comportant que deux objets ou dans une extension (équilibre du type 2) d'au plus trois objets¹³³³. Le retour à la possibilité d'une perception de l'extension de A permet, au sujet, en ne se focalisant que sur un objet, d'en retrouver les trois attributs en 11 ; ainsi, sans que cela indique pour autant l'expression de l'ensemble A en compréhension.

Notons alors que l'enseignante construit en 10, 11 12, et 13, une situation d'institutionnalisation en y remplaçant la quantification universelle.

3.3 Début de la construction de la réversibilité opératoire ou de la construction du schème $S_{C''f}$. Secondes phases de la compréhension

La situation suivante suit immédiatement la précédente et peut être qualifiée de fondamentale. Nous y noterons, en effet, une activité relative aux obstacles épistémologiques (déjà entreprise dans la situation précédente, second moment), obstacles mis en exergue dans nos analyses épistémologiques antérieures¹³³⁴, et le processus nécessaire, engendré à un niveau supérieur du fonctionnement mental, pour franchir ces obstacles.

En toute rigueur, nous devrions démultiplier le tableau suivant et considérer une suite de deux situations objectives successives : dans ses positions 2, l'enseignant(e) s'adresse en fait à un système cognitif ayant agi en coordonnant les positions 1' de l'enseignant(e) et ses propres actions (proposition d'un p) et ceci, de façon récurrente. Mais l'analyse qui suivra va effectivement en tenir compte.

¹³³³ Rappelons qu'une telle extension du dénoté résulte d'une accommodation à une situation perturbante qui ne nécessite qu'une application récursive du schème S_{Ci}

¹³³⁴ Tableau 3

Construction initiale du schème S_{C^*f} ou intégration en structure unique				
Situation de référence. Compréhension. secondes phases	Enseignant	Élève (\bar{S}_{C_i} , \bar{S}_{C^*f})	Système en fermeture (R_a , S_{C^*f})	Situation didactique
Situation objective	Moment 2 2-Enseignant (e) induisant la solution ¹³³⁵ ou validant la solution 2'-Enseignant (e) demandant le rappel de la proposition énoncée : « dans la boîte, ils sont tous des p »	Elève comprenant	Début de la construction de la réversibilité opératoire R_a et R_a'	Situation de référence Deux moments distinguables
	Moment 1 1-Enseignant (e) sortant du panier les objets un par un et interrogeant régulièrement l'élève sur p. 1'-Pression de l'enseignant (e) pour maintenir l'activité de l'élève dans la bonne orientation, par le rappel de l'énoncé	Elève (par décentrations forcées) produisant diverses réponses dont des hypothèses sur p	Les deux schèmes S_{C^*f} et S_{C^*f} liés dans l'activité cognitive. Fin de la restructuration de S_{C_i}	
Milieu matériel : un ensemble d'objets disposés dans une boîte ¹³³⁶ fermée ; un énoncé de tâche sous la forme langagière : « tous les objets ensemble, dans la boîte, sont p, dire p » (F_{C^*f})	Enseignant(e) prononçant la consigne avec accent tonique sur le « tous »	Elève face à la boîte et assis à côté de l'enseignant(e).	Le système cognitif dispose de la situation de référence précédente ¹³³⁷ soit \bar{S}_{C_i} et \bar{S}_{C^*f} Schèmes S_{C_i} et S_{C^*f} et un certain état de R_a	Situation objective

Tableau 5

Les analyses a priori

Analyse logique de la tâche

Elle concerne le premier moment.

k étant le nombre d'objets cachés dans la boîte,

On peut considérer un processus récurrent : tant que $i \leq k$

Soit A_i la collection de i objets déjà visibles sur la table et « p_1 et p_2 et ... p_i » un prédicat

tel que $\forall x(x \in A_i \Rightarrow (p_1 \text{ et } p_2 \text{ et } \dots p_i)(x))$;

Soit A_{i+1} la collection de i + 1 objets visibles. Alors, on a :

$A_i \subset A_{i+1}$,

($x \in A_{i+1} \Rightarrow (p_1 \text{ et } p_2 \text{ et } \dots p_{i-1} \text{ et non } p_i)(x)$), on retient p_1 et p_2 et ... p_{i-1} ,

Si ($x \in A_{i+1} \Rightarrow (p_1 \text{ et } p_2 \text{ et } \dots p_i)(x)$), on retient p_1 et p_2 et ... p_i ,

i prend la valeur i + 1.

¹³³⁵ Si le sujet n'a pas trouvé, après extraction de tous les objets de la boîte.

¹³³⁶ Dont le contenu ne peut être visible.

¹³³⁷ On peut donc préciser, pour cette composante du milieu cognitif, une certaine disponibilité de la régulation R_a et donc du schème S_{C^*f} .

Ce processus s'achève bien avec l'épuisement de l'ensemble des objets contenus dans la boîte.

Analyse cognitive de l'activité

Il s'agirait de se donner comme possible une influence de certains indicateurs de l'autre situation avant que ceux-ci ne s'estompent complètement. C'est en ce sens que la situation de référence précédente peut être objectivement considérée comme un des objets du milieu. La proximité temporelle de la nouvelle situation peut faire apparaître celle-ci comme inverse de la précédente. Plus précisément, l'objectif principal est que l'indicateur de la quantification universelle, sur lequel l'enseignant avait focalisé a posteriori l'attention du sujet, soit reconnu systématiquement par une régulation R_a . Ce « forcing » d'une activation virtuelle et récurrente de la régulation R_a est stimulé par les positions 1 et 1' et la donnée d'une extension potentielle qui se matérialise progressivement sous les yeux du sujet. Précisément, le système cognitif vient d'actualiser une telle extension dans la situation de référence précédente.

Mais la régulation R_a , en produisant l'activation du schème $S_{C'f}$, conduit à un échec puisque la formulation langagière n'est pas « mettre ensemble tous les p », argument de R_a pour activer $S_{C'f}$ mais « dire p tel que tous les p sont ensemble ».

Le système cognitif se trouve alors devant l'obstacle de l'inertie du schème $S_{C'f}$ ¹³³⁸. Précisément, un tel schème a pu trouver une équilibration, sans plus de réflexivité de la part du système cognitif. Et cela, d'autant plus que l'assimilation a pu être déformante, ce qui constitue un obstacle cognitif épistémologique associé au schème S_{Ci} , comme nous l'avons déjà dit¹³³⁹.

Moment 1 :

➤ **Possible 0** : la situation de référence précédente est perdue pour ce nouveau milieu, auquel cas, R_a , donc $S_{C'f}$ ne sont pas activés¹³⁴⁰. Il n'y a pas de conflit et le sujet reste passif ou donne diverses réponses, obligations qui le lient par contrat.

➤ **Autres possibles** : au contraire, le système cognitif, soumis à l'injonction récurrente de l'enseignant est le siège d'un conflit : des indicateurs sémiotiques (objets et termes langagiers) conduisent à l'activation de $S_{C'f}$ mais ce schème ne peut aboutir :

- **Possible 1** : le système cherche à se sortir du conflit en substituant dans la

¹³³⁸ Nous rencontrons effectivement ceci dans des cas classiques en mathématiques lorsque, dans « une situation de type soustractif » (en début d'apprentissage de la soustraction), le système cognitif considère à tort une opération d'addition. L'énoncé « induit » une addition, induction que le sujet ne soumet pas à un contrôle de validité une fois le schème de l'addition activé.

¹³³⁹ On peut se reporter au tableau 3

¹³⁴⁰ Nous chercherons à rendre peu probable ce possible par les accents toniques répétés portant sur le quantificateur « tous ». Egalement, l'accent sera porté, dans ces mêmes situations, sur la forme d'extension déjà constituée.

formulation langagière « tous de A_i sont p », par « tous d'une partie de A_i sont p ». L'inertie du schème S_{C_i} ¹³⁴¹ de la comparaison binaire permet cette tentative d'assimilation déformante.

- **Possible 2** : le système cherche à se sortir du conflit en substituant dans la formulation langagière « tous de A_i sont p », par « chaque objet de A_i est tout p' » où p' est différent d'un objet à l'autre ou d'un groupe d'objets à l'autre¹³⁴². On retrouve l'obstacle de l'homonymie et aussi des formes de construction rappelant les pseudo-concepts de Lev Vygotski et résultant de schèmes spécifiques. Ils ont, comme spécificité de rester ancrés en grande partie à la seule perception des qualités concrètes des objets. Telles sont en particulier leur désignation.

Mais, dans ces deux cas, l'enseignant(e) invalide la réponse du sujet par des phrases du type « ceux-ci ne sont pas p ! » (possible 1) ou « là tu me dis des différences, je te demande un p pareil pour tous ! » (possible 2).

- **Possible 3. Le nécessaire**¹³⁴³ : **la décentration**¹³⁴⁴.

Le système cognitif est forcé à une décentration : il n'est plus autorisé à la confusion des homophones ; il est contraint de considérer l'extension potentielle dans sa totalité, à savoir la réunion de sa partie actualisée et de sa partie non encore visible. Les invariants opératoires mis en œuvres dans les possibles 1 et 2 et qui sont respectivement la relation de comparaison binaire et la dénotation d'un complexe de sons (t-ou), sont mis en échec par les invalidations récurrentes de l'enseignant(e). Précisément, la décentration a une triple composante qui forme un tout :

- la première est que ce n'est pas son interprétation de la langue parlée, telle qu'il l'entend, qui pré-organise la construction d'un schéma complet de la situation mais une formulation langagière qui demande une attention et une mise en mémoire taires¹³⁴⁵ ;

- la seconde composante est que cette attention doit conduire à une production d'inférences, ce qui n'était pas le cas dans les possibles 1 et 2, lorsque l'on voit que le système subit la spontanéité des schèmes évoqués là. **Par définition, une inférence produit toujours une conclusion qui n'est donc pas une donnée immédiate. On peut considérer que les prémisses de l'inférence sont une correspondance entre l'extension achevée de la situation de référence précédente et l'interprétation que le contenu de la collection ca-**

¹³⁴¹ Obstacle cognitif épistémologique évoqué plus haut.

¹³⁴² Idem.

¹³⁴³ On peut se reporter au paragraphe 3.2.2 du chapitre 4, en ce qui concerne le nécessaire.

¹³⁴⁴ Le point de vue de l'enseignant(e) devient, à force, un observable.

¹³⁴⁵ Fonctions psychiques qualifiées par Lev Vygotski de supérieures et dont précisément il note le faible développement chez les pré-adolescents.

chée est aussi une extension achevée (ce qui aussi n'était donc pas une donnée immédiate de la conscience du système cognitif). En d'autres termes, c'est l'apparition d'un jugement de conservation « exprimant précisément le fait que, dès lors, le sujet conçoit la deuxième action comme l'inverse (ou la réciproque¹³⁴⁶) de la première »¹³⁴⁷ ;

- la troisième composante porte précisément sur le contenu de cette inférence. **C'est ici que l'invariant fondamental du système cognitif va alors s'exprimer. L'auto régulation va conduire à la réorganisation du régulateur lui-même : la fermeture d'une régulation R_a , par la construction d'une régulation inverse de R_a , c'est-à-dire $R_{a''}$, fermeture qui se définit comme le nécessaire au terme de son développement¹³⁴⁸.** Nous pouvons supposer que l'inférence dont il est question ici, ne relève pas, au sens classique du terme, d'un processus totalement conscient, car le concept organisateur, invariant fondamental, qui rend nécessaire leur production, est l'auto régulation du système.

➤ Nous analysons maintenant le processus définissant une telle construction :

- La construction de $R_{a''}$, par celle de la réversibilité de $S_{C'f}$: rappelons les deux relations fondamentales, une fois considérée la construction achevée¹³⁴⁹ :

- $(R_a, (F_{C'f})) (S_{C'f}) \subset (R_{a''}, (F_{C''f})) (S_{C''f})$

- $(R_{a''}, (F_{C''f})) (S_{C''f}) \subset (R_a, (F_{C'f})) (S_{C'f})$

- $S_{C''f}$ est la nouvelle situation de référence correspondant à la situation objective où l'extension d'une catégorie est donnée ainsi que la formulation langagière $F_{C''f}$, « dire p quand l'extension est donnée ». La présence de certains indicateurs sémiotiques (dont $F_{C''f}$) conduit, à ce stade, le système cognitif à assimiler l'extension comme le résultat obtenu dans une situation $S_{C'f}$, c'est-à-dire résultant de l'activité du schème $R_a, (F_{C'f})$. C'est ce qu'exprime la première relation.

- Mais une telle situation est initialement un problème car il manque $F_{C'f}$, alors que $F_{C''f}$ est disponible dans cette situation. Il faut donc¹³⁵⁰ compléter la situation $S_{C'f}$.

¹³⁴⁶ En l'occurrence, c'est bien ce terme qui conviendrait ; au sens où, relativement à une catégorie, compréhension et extension renvoient l'une à l'autre. Selon les termes de Jean Piaget, « la compréhension et l'extension une fois construites, donnent lieu à une correspondance telle que connaissant l'une, on peut reconstituer l'autre et réciproquement ». *La genèse des structures logiques élémentaires*. Chapitre. I. *Les collections figurales*. Opus cité.

¹³⁴⁷ On peut revoir le paragraphe 3.2.1.2 du chapitre 4, en ce qui concerne la réversibilité opératoire.

¹³⁴⁸ Nous pouvons noter que la composante première connote une socialisation de la pensée par le langage et que les autres composantes concernent plus intimement le développement cognitif d'un sujet. On met ainsi, sur cet exemple, l'accent sur une indéfectible corrélation qui ne fait pas de l'une un pré-requis de l'autre et réciproquement.

¹³⁴⁹ Nous n'avons pu, pour lors, (sous 3.1.1.3, du chapitre 4), les analyser de façon purement formelle, renvoyant de le faire concrètement sur ce cas présent.

¹³⁵⁰ C'est le point central de l'inférence

Cette complétion est au moins favorisée par la pression des réactions de l'enseignant(e) qui peut conduire le système à prendre enfin conscience que c'est précisément $F_{C'f}$ qui contient la réponse attendue. Par nécessité, devrait se construire $R_{a''}$ ($F_{C''f}$) qui est précisément le schème réciproque du schème $S_{C'f}$ et que nous avons noté antérieurement $S_{C''f}$ ¹³⁵¹. Mais une telle construction ne peut s'expliquer que par une reconstruction du système (R_a , $S_{C'f}$), par auto-régulation du système cognitif, en d'autres termes, par une réorganisation du régulateur. C'est ce qu'exprime la seconde relation¹³⁵².

- **Cette reconstruction du système (R_a , $S_{C'f}$), alors que l'on pouvait la considérer en apparence, comme achevée dans $\mathfrak{S}_{C'f}$, s'accompagne effectivement du franchissement définitif des deux obstacles épistémologiques que nous avons définis l'un, comme l'inertie du schème de la comparaison binaire S_{Ci} et l'autre, que nous pouvons définir comme l'inertie du schème de la dénotation d'un complexe de sons. Ce franchissement d'obstacles épistémologiques est, ce par quoi, le schème $S_{C'f}$ est définitivement équilibré.**

- Les deux relations formalisent donc la construction opératoire et dont les composantes sont :

- une régulation $R_a = (R_a', R_a'')$ où R_a' et R_a'' sont inverses l'une de l'autre ;
- une structure de schème $S_{Cf} = (S_{C'f}, S_{C''f})$, où $S_{C'f}$ et $S_{C''f}$ sont réciproques l'un de l'autre ;
- une compétence opératoire $C_f = (C'_f, C''_f)$ où C'_f est la compétence « mettre ensemble tous les p de E » et C''_f est la compétence « dire p tel que A est tous les p ».

Moment 2 :

Il s'agit de considérer la situation initialisée par la position 2 de l'enseignante :

➤ **Possible 0** : on pourrait observer le cas d'un sujet qui, pour différentes raisons¹³⁵³, est resté en dehors de la situation. Pour un tel système cognitif, le gain concernant une cons-

¹³⁵¹ En des termes plus naïfs, on peut dire que $S_{C''f}$ produit la réponse à la question : « si je suis dans une situation $\mathfrak{S}_{C'f}$, qu'est-ce que $F_{C'f}$, pour obtenir l'extension visible dans $\mathfrak{S}_{C''f}$ (notation abusive puisque C''_f est en construction. Nous devrions, en effet, introduire un schème antérieur structurellement au schème $S_{C''f}$. Nous avons là simplifié pour ne pas introduire une complexité supplémentaire).

Mais cela ne définit pas la totalité de l'activité du schème $S_{C''f}$, puisque $R_{a''}$ consiste aussi à activer ce schème en tant que réciproque du schème $S_{C'f}$. Il y a donc, dans $S_{C''f}$, des éléments constitutifs qui expriment cet aspect fondamental.

¹³⁵² En des termes naïfs, on peut exprimer la loi que la construction du schème $S_{C''f}$, conduit le sujet à reconsidérer plus attentivement la situation $\mathfrak{S}_{C'f}$.

¹³⁵³ Dont des formes de contrat qui entravent, en quelques sortes leur liberté d'action : la crainte de se tromper.

truction du schème $S_{C'f}$ reste très faible. Son niveau de développement reste défini, en l'occurrence, par les schèmes initiaux S_{C0i} et S_{C1i} . On ne peut alors parler de construction du schème $S_{C''f}$.

➤ **Possible 1:** sans que le sujet ait pu fournir la réponse attendue qui est « le bon prédicat », un système cognitif peut avoir construit les outils nécessaires, définis dans le possible 2 du moment 1. Le système cognitif a compris. L'enseignant(e) va donc proposer le prédicat, ce qui, pour le sujet, apparaîtra bien comme une (ou la) solution acceptable. Le niveau de développement concernant le schème de la catégorisation, quoique non stabilisé, peut se définir par l'existence des régulations R_a' et R_a'' , d'une part et des schèmes $S_{C'}$ et $S_{C''}$ d'autre part. La répétition, par le sujet, lors du moment 2, de la formulation langagière spécifique, va anticiper, pour les séances ultérieures, la consolidation de cette construction récente : c'est ce que nous allons définir comme des situations d'apprentissage.

➤ **Possible 2 :** on peut entendre ainsi un sujet pour qui la situation de construction du schème $S_{C''f}$ est de type 1 (cas du possible 3). Dans ces conditions, on peut supposer que le système cognitif dispose déjà d'un système fermé (R_a , S_{Cf}).

❖ **Nous reprenons donc la classe de H.B**

Les situations objectives

Moment 1

Le milieu matériel :

- la même boîte de la situation antérieure, et dont l'intérieur n'est visible que par l'enseignante ;
- enfermés dans la boîte, des disques (« des ronds ») de plusieurs tailles et de plusieurs couleurs ;
- l'élève et l'enseignante, assis côte à côte, cette dernière se préparant à sortir de la boîte des disques et progressivement ;
- la formulation langagière : « *Dans ma boîte tous les objets ont quelque chose de pareil. Tu vas deviner ce qu'ils ont de pareils* ».

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- schèmes S_{Ci} et $S_{C'f}$ et un certain état de R_a' .

Moment 2

Le milieu matériel :

- La boîte vidée et tous les disques disposés sur la table devant le sujet ;
- La maîtresse demandant le rappel du prédicat : « dans la boîte, ils sont tous ?... » ;

- la maitresse exhibant un carré ;
- la question de l'enseignante : « *Et celui-ci, est-ce que j'avais le droit de le mettre* ».

dans ma boîte ? ».

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- un certain état des systèmes (R_a, S_{C^f}) et $(R_a'', S_{C''^f})$.

❖ **Nous reprenons donc la classe de B.C**

Les situations objectives

Moment 1

Le milieu matériel :

- le même panier de la situation antérieure, et recouvert d'un tissu afin que l'intérieur ne soit pas visible ;
- dans le panier, des disques (ronds), non visibles, de plusieurs tailles et de plusieurs couleurs ;
- l'élève et l'enseignante, assis côte à côte, cette dernière se préparant à sortir de la boîte des disques et progressivement ;
- la formulation langagière : « *Dans ma boîte tous les objets ont quelque chose de* ».

pareil. Tu vas deviner ce qu'ils ont de pareil ».

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- schèmes S_{C_i} et S_{C^f} et un certain état de R_a .

Moment 2

Le milieu matériel :

- tous les disques disposés sur la table ;
- question de l'enseignante : « *Alors qu'est-ce qu'ils ont de pareil tous ces jeux ? »* »

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- un certain état des systèmes (R_a, S_{C^f}) et $(R_a'', S_{C''^f})$

Les analyses a posteriori

❖ **Nous poursuivons l'étude du cas de Pierre, dans la classe de H.B.**

Éléments discursifs de la situation de référence¹³⁵⁴.

¹³⁵⁴ Pour les quelques extraits absents, on peut se reporter à l'annexe 3 ;

Moment 1

17- H.B : « Attention, dans ma boîte, tous les objets ont quelque chose de pareil. Tu vas deviner ce qu'ils ont de pareil. D'accord ? »

18- P : « Oui »

H.B sort de la boîte successivement 2 disques rouges superposables.

19- H.B : « ...ils ont tous quelque chose de pareil »

20- P : « Oui, c'est les mêmes »

21- H.B : « Ce sont ?... »

22- P : « Des rouges ! »

H.B sort un 3^{ème} disque rouge superposables aux précédents.

23- H.B : « Donc, je sors ?...»

24- P : « On va les compter d'abord : 1, 2, 3 »

25- H.B : « Je sors des jeux ?... »

26- P : « Des jeux rouges »

H.B sort un disque bleu de taille différente.

27- P : « Non, c'est un bleu, tu fais de la magie ? »

28- H.B : « Ils ont tous quelque chose de pareil ».

29- P : « Ben oui, ce sont des ronds ! »

30- H.B : « Alors qu'est-ce que je vais sortir ? »

31- P : « Un rond »

32- H.B : « Eh oui ! »

H.B sort un disque bleu superposable au précédent.

33- P : « C'est les mêmes ! »

34- H.B : « Je vais sortir ?... »

35- P : « Un rond bleu »

H.B sort un disque bleu.

36- H.B : « Alors, ils ont tous quelque chose de pareil ? »

37- P : « Oui »

38- H.B : « Ils sont tous ? ... »

39- P : « tout bleu, tout bleu, tout bleu », en montrant successivement les trois disques bleus, « tout rouge, tout rouge, tout rouge », en montrant successivement les trois disques rouges.

40- H.B : « Oui, mais ils sont tous... »

56- P : « y-a plein de ronds »

57- H.B : « *Il n'y a que des ronds ?* »

58- P : « *Oui !* »

H.B sort d'autres disques de la boîte.

P fait divers commentaires relatifs aux disques, au fur et à mesure de leur sortie.

69- H.B : « *Ils sont tous ?...* »

70- P : « *De la même couleur : tu vois, il y a plein de couleurs comme ça* »

Et

73- H.B : « *Oui, mais ils sont tous ?...* »

74- P : « *Des ronds* »

H.B sort les derniers disques de la boîte.

82- H.B : « *Voilà, ils sont tous ?...* »

83- P : « *De la même couleur* »

84- H.B : « *Eh non...la couleur change...Qu'est-ce qu'ils ont tous de pareil ?* »

85- P : « *Que des ronds* »

86- H.B : « *Ils sont tous* »

87- P : « *Ronds, ils sont tous ronds !* »

88- H.B : « *Ils sont tous ronds !* »

....

Analyse

Nous nous référerons aux possibles définis dans notre analyse cognitive de l'activité.

Nous notons la difficile adaptation du système cognitif à cette situation¹³⁵⁵. Il faut attendre de nombreux essais dont les résultats sont invalidés par le sujet enseignant, avant de parvenir à une formulation du prédicat, associé à la quantification. Bien que l'analyse a priori se soit positionnée sur les expressions que pourraient prendre les résistances en jeu (voir les possibles 1 et 2), en signalant l'existence d'obstacles épistémologiques se manifestant, par définition, par des résistances à leur franchissement, il nous semble percevoir, dans cette situation de référence, une difficulté d'une autre nature et que nous n'avions pas signalée. Précisons-en donc la teneur : la description que nous avons donnée de la situation de référence, dans le cas du possible 3, partait du principe d'une activation virtuelle du schème S_{C^f} . En des termes un peu abusifs, on peut dire que S_{C^f} est une extension du schème S_{C_i} de la relation de

¹³⁵⁵ Cet aspect « sportif » de la situation a fortement étonné les enseignants qui ont pu l'observer.

comparaison binaire puisque, dans le cas d'une totalité A, réduite à deux éléments, affirmer $p(x)$ pour tout x de A, c'est affirmer que les éléments de A sont co-p, comme le dit (abusivement en l'occurrence) Jean Piaget¹³⁵⁶. Et par transitivité, en se limitant à trois éléments, on obtient, dans 26, la prévision par P du prédicat « Rouge ». Il s'en suit que déjà, la similitude des deux premiers disques sortis (taille et couleur rouge) est un indicateur pour l'activation du schème $S_{C_{li}}$ de la comparaison binaire. Celle-ci s'oriente vers le genre le plus prégnant, à savoir la couleur, dans 22. Notons alors que si ce schème est fermé, il est donc interprétable par deux schèmes : $S_{C'_{li}}$: la relation de comparaison est donnée et l'activation de $S_{C'_{li}}$ conduit à des appariements ; $S_{C''_{li}}$: l'appariement est donné et l'activation de $S_{C''_{li}}$ conduit à l'expression de la relation de comparaison. Lorsque P, dans 22, dit « des rouges », il s'agit donc là de l'activation du schème $S_{C''_{li}}$ et non de $S_{C'_{li}}$! Si l'on maintient le principe d'une extension, ce n'est pas $S_{C'_{f}}$ qui est alors virtuellement activé par le système mais une réduction en acte de $S_{C''_{f}}$ à 2 ou 3 éléments, dans 20, 22, 26 et 27. On se heurte alors à une impossibilité car $S_{C'_{f}}$ est en cours de construction, dans la situation de référence et exige comme nous l'avons décrit, la construction virtuelle d'une situation $\mathfrak{S}_{C'_{f}}$. C'est ce qui expliquerait le nombre important d'échecs du sujet, sans que l'on puisse noter de progrès significatif avant 73.

En conclusion, il semble, en première approche, que le possible 3, pourtant décrit fondamentalement comme le nécessaire dans la construction du schème $S_{C''_{f}}$ ne puisse être. Nous insisterons pourtant sur cette considération du possible 3.

26, 27, 29, 31 expriment Pierre comme un possible 1.

Entre 26 et 27, la sortie d'un disque bleu est à l'origine d'une perturbation de l'assimilation initiale par $S_{C''_{li}}$. 27 exprime un feedback positif explicable par l'inertie de ce schème. La relance de H.B, dans 28, prise en considération par le système, est à l'origine d'un feedback négatif dans 30 et produit l'expression du prédicat « Rond ».

Pourtant, une résistance de l'obstacle due à l'inertie du schème $S_{C''_{li}}$, se manifeste en 35, 39, 44 et 46. Le feedback négatif précédent a conduit le système à évoluer dans le possible 1 dont on rappelle qu'il signifie la seule considération de la partie visible de l'extension.

Entre 40 et 70, on note que le sujet devient un possible contingent.

Dans 41, 52, 68, 70, 83, le système semble perdre le contrôle de la situation à laquelle l'enseignante le ramène¹³⁵⁷.

¹³⁵⁶ xRy signifie $p(x) \Leftrightarrow p(y)$

¹³⁵⁷ Il y a certes aussi des raisons psychoaffectives à ceci et propre au sujet, mais notre analyse, comme nous l'avons indiqué, ne regarde que le sujet épistémique.

En 28, 36 et 38, l'enseignante réintroduit dans le milieu le quantificateur « tous ». Malgré ses réponses en 29, 33, 35 et 37 qui expriment un feedback négatif correspondant au possible 1, le système peut être perturbé par cette insistance et la perturbation interprétée au niveau du régulateur lui-même. Le quantificateur « tous », pourtant efficient, dans le cadre du possible 1, est reconsidéré mais régressivement, puisque remplacé par l'adverbe d'intensité « tout » dans 39. Une autre régulation anticipatrice active un schème de la reconnaissance d'une intensité de l'espèce bleue puis rouge : manifestation de l'obstacle de l'homonymie dans 39 et évolution dans le possible 2.

56, 70, 74 et 83 montrent que Pierre oscille entre plusieurs possibles.

En 84, l'enseignante argumente son invalidation pour la première fois explicitement, en mettant en opposition les expressions « la couleur change » et « tous de pareil ». Il semble que cette opposition soit perçue par le système comme la prémisse d'une inférence. Cette perception peut être d'autant plus plausible qu'elle concerne ce qui a paru au sujet comme un des aspects le plus prégnant dans la situation, à savoir la qualité couleur. Le rejet de la proposition « la couleur reste » et la considération de « pareil » a conduit l'attention sur une autre qualité, la forme. Le prédicat « Rond » semble, à partir de là, conserver une certaine permanence en 85 et 87.

Mais cet aboutissement n'est obtenu qu'une fois la totalité de l'extension visible. Notons que P reprend, en fin de situation, en 87, le quantificateur « tous » mais il reste une ambiguïté sur sa conception du complexe de sons associé, puisqu'il n'a pas là l'initiative.

Moment 2

Éléments discursifs de la situation de référence

H.B montre un carré.

89- H.B : « *Celui-ci, est-ce que j'avais le droit de la mettre dans la boîte ?* »

P fait non de la tête

90- H.B : « *Non ? Pourquoi ?* »

91- P : « *Parce qu'il fallait mettre que des ronds* »

92- H.B : « *Oui, c'est quoi ?...* »

92- P : « *C'est un carré* »

93- H.B : « *Donc là, je n'avais mis que des ronds* »

Analyse

Cet échange discursif pourrait indiquer une dénotation, au moins partielle, du quantificateur « tous » : Les éléments d'un ensemble A étant perçus comme « co-p », x ne peut être

un A si $p(x)$ est faux. Mais cette capacité ne précise pas p comme un prédicat prenant la valeur vrai sur tous les objets de A, reconnu alors comme « discrétisable ».

Pierre ne reprend pas verbalement la quantification qu'il remplace par une formulation restrictive « que des » et que l'on ne peut pas confondre avec l'expression d'une quantification extensive.

❖ **Nous poursuivons l'étude du cas de Clément, dans la classe de B.C.**

Moment 1

Éléments discursifs de la situation de référence¹³⁵⁸

14- B.C : « *Je vais te proposer un autre panier. Tu vas me dire tout ce que j'ai mis dans mon panier. Dès que tu as trouvé, tu me le dis !* »

Elle sort un disque rouge du panier.

15- C : « *Un rond !* »

Elle sort un autre disque, rouge et superposable

16- C : « *Un rond !* »

Elle sort un disque rouge superposable.

17- C : « *Un rond !* »

Elle sort un disque bleu différent en taille.

18- C : « *Un rond bleu en plastique* »

Elle sort un disque bleu en plastique de taille différente.

19- C : « *Un rond bleu en plastique qui est plus grand que l'autre !* »

20- B.C : « *Tous les objets doivent avoir la même chose ... Réfléchis ... On continue* »

Elle sort un disque jaune.

21- C : « *Triangle...euh... un rond !* »

22- B.C : « *Un rond ?* »

23- C : « *Un rond jaune !* »

24- B.C : « *Alors qu'est ce qu'ils ont de pareil tous ces objets ?* »

Pas de réponse

Elle sort un gros disque jaune

25- C : « *Un gros rond jaune !* »

26- B.C : « *Y en a un plus gros ; tu dois trouver ce qu'ils ont de pareil. Qu'est ce qui est pareil dans tous ces objets ?* »

¹³⁵⁸ Rendus, ci-dessous, complètement.

C montre les 3 premiers ronds rouges identiques.

27- C : « *Ces trois là sont pareils !* »

28- B.C : « *Moi, je te demande non pas de me montrer ceux qui sont pareils, je te demande de me dire tout ce qui est pareil dans ces objets ? Qu'est ce qu'ils ont de pareil tous ces objets. Voilà, qu'est ce qu'ils ont de pareil, tous ?* »

29- C : Montrant un rond bleu, « *il est plus gros que celui-ci* » en montrant un autre rond bleu.

30- B.C : « *C'est pas pareil ça ! Tu me dis une différence, tu ne me dis pas ce qui est pareil !* ». En désignant les disques.

« *Rond rouge, rond rouge, rond rouge, rond bleu, rond bleu !...* »

« *Quand on les nomme, qu'est ce qui est pareil dans tous ces objets ? Qu'est ce qu'on dit de pareil ?* »

31- C : « *Ché pas !* »

32- B.C : « *On continue : Qu'est-ce que tu vois ?* »

L'enseignante sort un disque rouge

33- C : « *Un rond rouge..... un rond bleu....* »

Il désigne ainsi le disque à chaque fois que BC le sort

34- B.C : « *Tu n'as pas trouvé ce qui était pareil dans tous ces objets ?* »

Elle balaie de la main la collection des disques exposés.

35- C : « *Non !* »

36- B.C : « *Une chose !....* »

37- C : « *Il peut se tordre, en désignant un disque souple* ».

38- B.C : « *Il peut se tordre... Non, ce n'est pas ça ! Il n'y a que lui qui peut se tordre !* »

Elle sort un autre rond. « *On continue !* »

39- C : « *Un rond rouge !* »

40- B.C : « *Qu'est ce qui est pareil ?* » Tout en sortant un autre disque.
« *Tous les objets du panier ont quelque chose de pareil.... qu'est ce qui est pareil ?* »

41- C : « *Je sais pas !....* »

B.C sort les trois derniers disques du panier.

42- C : « *Y-en a de plus grand* »

43- B.C : « *Ça c'est pas pareil... Quelque chose qui est pareil dans tous ces objets ?* ».

Pas de réponse. C montre les deux disques jaunes superposables.

44- B.C : « *Tu veux que je t'aide ?* »

45- C : « *Oui !* »

B.C énumère tous les disques en disant : « *rond, rond, rond,* », sept fois.

46- C : « *y-a que des ronds !* »

Analyse

L'enseignante B.C choisit une autre occurrence de la quantification universelle en 14 : l'adjectif indéfini « tout » qui a bien une valeur distributive généralisante mais conduit le sujet à l'entendre comme synonyme de l'adjectif indéfini chaque en 15, 16, 17, 18 et 19. Elle a donc engagé C dans une énumération exhaustive de l'extension de A et non dans la recherche du prédicat¹³⁵⁹.

Le sujet est probablement perturbé par le manque d'acquiescement par B.C, après ses réponses en 15, 16 et 17. La sortie d'un rond différent des précédents et une rémanence de certains indices de la situation objective antérieure conduisent, après régulation, à une recherche d'une désignation plus complexe en 18 et 19.

En 20, B.C rectifie sa formulation initiale et introduit dans la situation une autre occurrence du quantificateur universel : l'adjectif indéfini « tous » qui a bien valeur d'expression globale de l'ensemble des objets contenus dans le panier ou déjà visibles sur la table. Elle conserve ce choix définitivement (en 20, 24, 26, 28, 30, 34, 40 et 43) sauf en 28 en reprenant l'occurrence « tout » et le pronom indéfini « tous » analysant semble t-il la non pertinence de l'emploi de tout (comme l'indique l'adverbe voilà...).

En 23 et 27, le système cognitif n'a toujours pas construit de représentation complète de la situation.

Le complexe de son 'tous' renvoie le système cognitif de C à un résidu mnésique de la séance précédente, à savoir le mot « triangle » qui est donc un lapsus qu'il rectifie. Mais le quantificateur 'tous' n'est toujours pas pris en compte comme un indicateur, par une régulation. Ceci semble confirmer que le système a évolué dans le possible 2 et non dans le possible 3, lors du moment 1.

En 27, le quantificateur devient un indicateur mais, restreint à une partie de l'extension, à savoir l'ensemble des trois premiers ronds, ce que, dans l'analyse a priori, nous avons défi-

¹³⁵⁹ Notons qu'en théorie une telle énumération peut aussi être interprétée comme un prédicat : $x \in A \leftrightarrow x=x_1$ ou $x=x_2$ ou $x=x_3$...ou $x=x_n$. Ce qui veut bien dire que le système cognitif est « le siège » d'une activation récurrente d'une structure de schèmes de niveau sensorielle et coordonnée au schème de la désignation. Il ne faut pas en effet entendre dans les désignations par C en 15, 16, 17...de valeur prédicative puisque, justement, c'est un des objectifs de cette situation de référence.

ni comme un possible 1.

31, 35 et 41 peuvent être interprétés comme le résultat d'une inférence du sujet. Il ne peut donner la réponse qui semble attendue par sa maîtresse mais il admet qu'un indicateur peut lui échapper. Il semble tenir compte pour la première fois du quantificateur « tous ».

La tirade 46, avec l'intonation qui l'a accompagnée, est révélatrice de l'existence du quantificateur comme un des termes d'une représentation de la situation complétée dans le cours de l'activité.

Le déroulement de cette situation de référence, avec sa lente progressivité de la transformation du quantificateur « tous » en un véritable indicateur, nous conduit à refuser l'hypothèse d'une construction du schème $S_{C''f}$ comme réciproque du schème $S_{C'f}$. On peut toutefois admettre un début de reconstruction du schème $S_{C'f}$, auquel le système cognitif pourrait associer une conception nouvelle de la quantification ; puisqu'un certain niveau de prise de conscience de la quantification, dans cette situation, pourrait, par rétroaction, stabiliser une régulation, prenant comme argument la structure de la forme langagière « tous les (px) sont des A », le quantificateur « tous » étant conçu alors comme un véritable indicateur d'une anticipation globale de l'extension A, et cela, dès la construction d'un schéma complet de la situation. Rappelons qu'un tel niveau de développement correspond à ce que nous avons défini comme étant un possible 3, dans notre analyse a priori.

Moment 2

Éléments discursifs de la situation de référence

- 47- B.C « *Tous les objets..... ?* »
- 48- C « *Sont des ronds* ».
- 49- B.C « *Tu me dis la phrase : tous les objets.... ?* »
- 50- C « *Tous les objets sont des ronds* ».

Analyse

Phase d'institutionnalisation qui focalise le sens de l'activité comme initialisée par une formulation langagière constante.

B.C force le sujet à une reprise verbale de la quantification universelle.

3.4 Situations de consolidations du schème $S_{C'f}$.

Année I

Remarque

La construction effective du schème $S_{C''f}$, comme réciproque du schème $S_{C'f}$, nécessite une extension préalable de la dénotation de la formulation langagière $F_{C'f}$. En effet, pour que le système, évoluant dans la situation perturbante $S_{C''f}$, en vienne, par nécessi-

té, à se donner une représentation virtuelle d'une situation S_{Cf} , il convient que le schème S_{Cf} soit effectivement opérationnel dans un nombre suffisant de situations perturbantes pour lui et de type 1. En dessous d'un certain seuil, il semble que le processus fondamental de la construction du module (R_a , S_{Cf}) ne puisse être enclenché.

De plus, pour rendre plus probable la réalisation du possible 3, donc l'émergence du nécessaire, nous avons construit des situations objectives présentant des objets et des formulations langagières non directement corrélés dans le perceptif¹³⁶⁰. Dans ce dernier cas, en effet, nous avons noté des possibilités d'assimilation déformantes, le schème S_{Ci} pouvant se substituant au schème S_{Cf} . Certes, à ce stade, nous n'avons pu ainsi éviter l'écueil de catégories déjà existantes dans l'expérience du sujet¹³⁶¹, donc le risque de la construction des extensions sur le fondement de cette seule expérience et donc, encore une fois, par assimilation déformante.

Notre solution, pour certaines situations, a été de provoquer dans le système, et à ce stade de la séquence, la nécessité d'une inférence visant à construire un prédicat équivalent mais toutefois proche sémantiquement.

Nous poursuivons donc par l'analyse de situations mises en place dans les classes de P.B et de B.C, l'année I. Précisons que P.B a proposée, dans sa classe (enfants âgés de (4 ; 10) à (5 ; 11), en septembre 2007) deux situations analogues à celles que B.C a produites dans sa propre classe et que nous venons d'étudier.

❖ **Nous présentons quatre situations relatives¹³⁶² à la consolidation du système (R_a , S_{Cf}) et conçues par l'enseignante P.B entre septembre à novembre 2007.**

Comme précédemment, nous ne rendons plus compte, dans la situation objective, des éléments cognitifs que nous avons donnés, en toute généralité, dans nos analyses antérieures.

Situations objectives

Situation 1

Milieu matériel :

- 9 images représentant des objets familiers, dont 4 images représentant des objets, occurrences possibles dans « des situations culinaires » ;
- la formulation langagière : « *Tu mets dans le tiroir tout ce qui sert à faire la cuisine* ».

¹³⁶⁰ Qualité des genres forme, couleur, aspect...

¹³⁶¹ Nous n'avons pas vraiment le choix, puisque les objets du milieu matériels sont d'une façon ou d'une autre connus du sujet.

¹³⁶² Elles ont été précédées de la situation « des triangles », analogue à celle que nous avons relatée dans la classe d'H.B.

Situation 2

Milieu matériel :

- 9 images représentant des objets familiers, dont 5 images représentant des vêtements ou chaussures ;
- l'histoire : Pierre était dans la cour, il est tombé dans une flaque d'eau. Il est tout mouillé ;
- la formulation langagière : « *mets dans le tiroir tout ce qui peut servir à Pierre pour se changer* ».

Situation 3

Milieu matériel :

- 9 images représentant des objets familiers, dont 3 images représentant respectivement, un parapluie un ciré et des bottes ;
- l'histoire : Il pleut. Marie veut sortir ;
- la formulation langagière : « *mets dans le tiroir tout ce que Marie peut prendre* »

Situation 4

Milieu matériel :

- un panier fermé et dont l'intérieur doit toujours rester invisible ;
- 12 objets dont 6 objets pouvant subir un enfoncement par pression. Précisons que, parmi ces objets, on trouve une balle dégonflée et une éponge mouillée ;

Moment 1 :

- la formulation langagière : « *mets dans le panier tous les objets mous* » ;
- dévolution ;
- puis aide relative à des objets mal évalués ou oubliés.

Moment 2 :

- le dernier état de la situation de référence précédente ;
- la question : « *redis-moi la consigne* ».

Moment 3 :

- la question : « *comment as-tu vu que c'était mou ?* ».

Compléments d'analyse a priori

- L'analyse a priori de l'activité cognitive ayant été produite (sous 3.2), il s'agit ici de considérer quelques spécificités associées au milieu matériel.
- Les trois premières situations ne « proposent » pas un prédicat p' , directement définissable sur l'ensemble E. Mais les contextes qu'elles connotent sont des situations ou des

schémas connus de la plupart des sujets, à une ambiguïté près, peut-être relative à un objet¹³⁶³.

➤ Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire une inférence consciente, visant à la production d'un prédicat p équivalent au prédicat p' . En l'occurrence, on pourrait parler d'inférence en acte. Le prédicat p peut donc, pour la majorité des sujets, se réduire à une forme canonique « appartenir au schéma »¹³⁶⁴. Ainsi, pour tout objet de E , « $p'(x)$ vrai » équivaut à « x appartient au schéma », ce qui définit de fait, le prédicat p .

➤ Toutefois, l'efficacité du schéma, dans une représentation de la situation, et dans ce cas, ne dépend pas uniquement de capacités perceptives. La réussite de la tâche dépend aussi d'une attention logique qui y est portée puisque la nature de certains des objets peut nécessiter une véritable construction de preuve pour préciser une évaluation de $p(x)$. Mais celle-ci va prendre des formes diverses selon que, pour le sujet, « x se lit directement dans le schéma » ou s'y rattache par inférence (avec toutefois des subjectivités possibles lorsque $p(x)$ prend la valeur vraie pour des raisons de convenances ou d'expérience personnelles¹³⁶⁵).

➤ Ainsi, l'activité du système peut-elle exiger, relativement à certains des objets présentés, un rafraîchissement de la mémoire de travail, relativement au prédicat p' , car ce dernier se constitue en une prémisse pour l'inférence¹³⁶⁶. Mais une telle activité n'est envisageable que si le développement du système, indépendamment du contexte, le permet.

➤ La situation 4 est différente des trois autres puisque p' , le prédicat « être mou » ne peut s'évaluer par une lecture directe, dans un schéma. Certains objets « mous » peuvent être évalués ainsi car ils appartiennent déjà au référent¹³⁶⁷ de cet attribut. Mais pour ceux qui n'y appartiennent pas encore, il est donc attendu comme compétence, « définir un critère de mollesse ». Nous pouvons sur ce point, et pour une majorité d'enfants, estimer que la balle dégonflée peut s'apparier à une occurrence de balle dégonflée dans une situation de référence¹³⁶⁸ mais non l'éponge mouillée : la mollesse d'un tel objet n'étant pas associée à un état per-

¹³⁶³ Par exemple un enfant ne va pas reconnaître un moule à gâteau ou peut ignorer la possibilité d'un objet dans le schéma ...

¹³⁶⁴ Au sens que Jean Piaget nous avait signalé comme une appartenance « schématique ». On définit comme un prédicat canonique, relatif à une partie A d'un ensemble E , l'expression « $x \in A$ ».

¹³⁶⁵ Par exemple, l'objet « collants » et l'objet « paire de chaussettes » n'appartiennent pas directement au même schéma (on ne peut porter à la fois des chaussettes et des collants) et donc, au schéma qui s'est imposé comme prototype dans la représentation construite par le système.

¹³⁶⁶ Par exemple l'objet « cuillère à soupe » peut être évalué comme élément de l'extension à la suite d'une évocation d'une situation « avec la cuillère à soupe on peut prendre une quantité d'un certain ingrédient à ajouter dans la préparation d'un plat ». Et ceci, même si le système ne dispose pas de l'expérience d'une telle situation.

¹³⁶⁷ An sens linguistique du terme.

¹³⁶⁸ En effet, le caractère dégonflé d'une balle doit avoir vraisemblablement été expérimenté (ce qui relève de la vie normale d'une balle) et ceci, sans que l'expérience relève d'une volonté anticipatrice. Le caractère 'mou' d'une éponge, étant donné son usage (ce qui relève de sa vie normale) n'est pas, pour la majorité des sujets, un attribut caractéristique.

çu¹³⁶⁹, ou conçu comme résultant d'une déformation de l'objet par rapport à un état antérieur¹³⁷⁰. Le critère le plus commun est certainement « subir une déformation par pression ». Mais le schème associé est, à ce niveau, une structure dont l'un des éléments est le schème du toucher direct, coordonné à un schème de la perception qui permet d'obtenir une pré-évaluation de la dureté de l'objet. Le concept quotidien de mollesse résulte, pour la majorité des sujets, d'une intériorisation d'un ensemble de situations ou dénoté de la compétence « évaluer la mollesse d'un objet ». Une activité, dans ces situations, est justement la pression exercée par le toucher (directement avec le doigt ou indirectement avec un autre objet). Ainsi, on peut estimer que l'évaluation de $p'(x)$ le soit en acte, sans autre nécessité, et que la proposition $p(x)$ soit en fait « il existe dans le dénoté, une situation telle que x est évalué mou », pour la plupart des objets x . Et même si, pour certains d'entre eux, comme l'éponge mouillée (ou une boule de coton), cette évaluation est obtenue par réflexivité sur une situation vécue et évoquée pour la circonstance.

Conclusions

➤ A ce stade de la séquence, nous pensons que l'activité du système cognitif ne nécessite pas, en son niveau de développement, de régulation de contrôle qui conduirait, à l'activation d'un schème d'inférence pour construire p .

En effet :

- ou le sujet retrouve directement en mémoire (schéma ou dénoté) une évaluation de $p(x)$ et il peut conclure ;
- ou il n'évalue pas $p(x)$ sans que cela signifie $p(x)$ faux. Et x se retrouve dans E-A ;
- ou le schéma (ou le dénoté), en tant que connaissance du sujet, est partiel. Il peut y avoir alors une évaluation de $p(x)$ négative pour certains objets et x se retrouve dans E-A ;
- ou le sujet dispose d'une extension suffisante¹³⁷¹ du schéma (ou du dénoté) pour construire une extension de l'ensemble défini par le prédicat p' , mais le quantificateur « tout » ne joue pas comme indicateur d'une régulation de contrôle. Il y aura omission de certains des objets de l'extension qui se retrouveront dans E-A ;
- ou le sujet dispose d'une extension suffisante du schéma (ou du dénoté) pour construire une extension de l'ensemble défini par le prédicat p' et le quantificateur

¹³⁶⁹ Par exemple Roman (4 ; 8), choisit un oreiller « parce qu'il est mou ».

¹³⁷⁰ Par exemple Roman (4 ; 8), choisit un ballon « parce que c'est un peu gonflé ».

¹³⁷¹ Compte tenu des objets présents dans la situation objective.

« tout » joue effectivement comme indicateur d'une régulation de contrôle. Il y aura exhaustivité dans la construction de l'extension.

➤ **Les analyses précédentes n'explicitent pas l'exercice du schème de la comparaison binaire que nous avons pourtant mis en exergue à plusieurs reprises. Vraisemblablement, l'activité, en ces situations, peut en faire l'impasse. Toutefois, nous avons précisé que le prédicat p est exprimé par une relation d'appartenance « $x \in S$ » où S est un schéma ou une situation¹³⁷². Ainsi, c'est le couple (x', S) , avec S , schéma constant, qui est l'objet d'une attention et dans le second cas, c'est le couple (x', S) , avec S , situation de référence¹³⁷³ d'une certaine compétence¹³⁷⁴ constante, qui est l'objet d'une attention. Le schème de la comparaison binaire s'exprime par une relation du type $x' R x$: où x' est un objet (ou une représentation de l'objet), donné(e) dans le milieu matériel, et tel que x' peut se substituer, dans le schéma S , à une occurrence x ¹³⁷⁵, dans le premier cas¹³⁷⁶ ; où x' est un objet (ou une représentation de l'objet), donné(e) dans le milieu matériel, et tel que x' peut se substituer, dans une situation de référence d'une certaine compétence, à une occurrence x d'un objet ou d'un objet ressemblant¹³⁷⁷. Dans les deux cas, $p(x)$ vrai équivaut donc à $p'(x')$ vrai.**

➤ Cette position, dans l'analyse, est renforcée par le fait systématique suivant : soit un objet x' de E qui possède la propriété: le système ne trouve (ou ne retrouve) pas en mémoire de schéma ou de situation tel que x' peut s'y substituer à une occurrence x du même objet. Dans ce cas, $p(x')$ est systématiquement évalué faux. Nous pouvons ainsi interpréter, en ces situations, l'obstacle épistémologique ou l'inertie du schème de « la comparaison binaire » par l'inertie du schème de « l'évaluation d'appartenance » et qui fera donc obstacle au schème de « l'évaluation de l'inclusion ». On retrouve bien, et fondamentalement, dans les deux cas, un obstacle à une conception de la quantification universelle, comme anticipateur d'une régulation de l'action visant à produire une extension au sens inclusif du terme Rappelons que Jean Piaget distingue, quant à lui, « l'appartenance schématique » ou *identification d'un élément x par assimilation cognitive à un schème perceptif ou sensori-moteur* », ce à quoi nous venons de faire allusion, de « l'appartenance « inclusive » qui exprime la relation

¹³⁷² Formellement, il y a là un abus de langage, mais cognitivement les deux cas peuvent relever d'une activité de la mémoire épisodique qui inclut des expériences personnelles, et qui précisément sont intériorisées sous la forme de schémas ou de dénoté.

¹³⁷³ Rappel de la fonction de référence.

¹³⁷⁴ Rappelons, au sens linguistique du terme.

¹³⁷⁵ En d'autres termes, x et x' sont désignés par le même mot ou par des mots synonymes.

¹³⁷⁶ Situations 1, 2 et 3.

¹³⁷⁷ Situation 4.

entre un individu et une classe A, ce qui concerne l'inclusion »¹³⁷⁸.

Éléments d'analyse a posteriori

Les quatre situations se sont déroulées dans un ordre repéré par un indice : 1, 2, 3 ou 4.

Concernant les trois premières situations, nous présentons, dans le tableau suivant, les distributions des effectifs selon la variable X_i , où :

- X_i est la variable prenant la valeur :
 - 2, si le sujet a construit une extension exhaustive, et sans intervention de l'enseignante ;
 - 1, si le sujet a construit une extension exhaustive, avec intervention de l'enseignante ;
 - 0, si le sujet n'a pas construit d'extension exhaustive, malgré l'intervention de l'enseignante.

Concernant la quatrième situation, nous présentons, dans ce même tableau, la distribution des effectifs selon la variable (T, Y, Z), où :

- T est la variable prenant la valeur :
 - 2, si le sujet a construit une extension exhaustive et, sans intervention de l'enseignante,
 - 1, si le sujet a construit une extension exhaustive, avec intervention de l'enseignante,
 - 0, si le sujet n'a pas construit d'extension exhaustive, malgré l'intervention de l'enseignante ;
- Y est la variable prenant la valeur :
 - 1, si, en fin d'activité, le sujet peut rappeler la consigne,
 - 0 si le sujet ne le peut ;
- Z est la variable prenant la valeur :
 - 1, si le sujet peut expliciter un « critère de mollesse », sachant $T=2$ ou $T=1$,
 - 0, si le sujet ne le peut sachant, $T=2$ ou $T=1$.

Les interventions de l'enseignante ont été les suivantes : « *redis la consigne* » ou « *je vois encore un objet p'* » (oubli d'un objet x) ou « *je vois un objet non p'* » (ajout dans A, d'un objet tel que $p'(x)$ faux).

Les objets, éléments du milieu matériel dans la situation 4, relèvent d'une expérience banale (ballon, oreiller, éponge...). Ils ne se présentent pas de façon ambiguë « quant à leur

¹³⁷⁸ *La genèse des structures logiques élémentaires. Introduction.* Opus cité.

évaluation par le prédicat ». Cette situation est achevée systématiquement par deux moments caractérisés respectivement par l'une des questions : « *Que devais-tu faire ?* » puis « *Comment sais-tu que c'est mou ?* »

Situations	situation 1			situation 2			situation 3			Situation 4						
Variables	X1			X2			X3			T			Y		Z	
Valeurs	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	1	0	1	0
Effectifs	7	9	3	7	10	2	16	2	1	5	8	5	14	4	9	4
Total	19			19			19			18			18		13	
Pourcentages ¹³⁷⁹	37%	47%	16%	37%	53%	10%	84%	11%	5%	28%	44%	28%	78%	22%	69%	31%

Tableau IV

Analyse de ces données

➤ En situation de dévolution, la troisième situation produit un pourcentage de réussite important relativement aux deux précédentes : 84% contre 37%. Bien que les trois situations se soient déroulées dans cet ordre et que l'on pourrait alors envisager une sorte de progrès, ce n'est pas cette donnée sur laquelle nous devons focaliser notre attention :

- Dans la situation 3, l'activité conduisait à privilégier tous les vêtements pouvant convenir à une sortie sous la pluie. Or, l'ensemble E présente, sous forme d'images, un sous-ensemble « non redondant » de tels objets. Dans le schéma « Marie sous la pluie » les trois objets de ce sous-ensemble peuvent effectivement en être des occurrences simultanées.

- Dans la situation 2, l'activité conduisait à privilégier tous les vêtements pouvant convenir à Pierre, pour se changer, après qu'il se soit entièrement mouillé. Or, l'ensemble E présente, sous forme d'images, un sous-ensemble « redondant » de tels objets : il se trouve davantage d'objets du sous-ensemble qu'il ne peut s'en trouver d'occurrences simultanées dans un même schéma, comme « Pierre échange des vêtements mouillés contre des vêtements secs ». Ainsi, Salomé qui prend la valeur $X2=1$, explicite : « *je n'ai pas mis le pantalon car Pierre a déjà la salopette pour se changer* ». 7 élèves, parmi les 10 donnant la valeur $X2=2$, oublient effectivement une des images représentant un objet « faisant doublon » avec un autre objet représenté.

- Le prédicat p' de la situation objective 1 peut être considéré comme mal formulé, relativement à l'ensemble donné E. En effet, sont représentés aussi bien une casserole, qu'un moule à gâteau, qu'un paquet de farine, que des cuillères à soupe ou que des couteaux de table. Aussi, p pourrait-il aussi bien signifier « être un ustensile de cuisine » que « être un ingrédient pour la cuisine ». De même, un couteau de table ou une cuillère à soupe

¹³⁷⁹ Arrondis à 1% près.

peuvent n'être reconnus comme des ustensiles de cuisine que subjectivement : pour certains élèves, ils appartiennent au schéma « table de repas » plutôt que dans le schéma « préparation d'un repas ». Ainsi, parmi les oublis¹³⁸⁰ enregistrés par des sujets donnent la valeur $X1=1$: il n'y a jamais l'objet « casserole » ; il y a 2 oublis du seul objet « paquet de farine » ; il y a 2 oublis des objets « cuillères » et des objets « couteaux », sans autre oubli ; il y a 1 oubli de l'objet farine, des objets « couteaux » et des objets « cuillères » ; Soit cinq élèves sur les neufs élèves donnant la valeur $X1=1$.

➤ Concernant la situation 4 :

- on observe un seul sujet donnant la valeur $(T ; Y ; Z) = (2 ; 1 ; 1)$ et exprimant le critère: « *Parce que en fait, j'ai essayé de l'aplatir* » ;
- 69% des sujets qui réussissent la tâche avec ou sans aide, révèlent, relativement à cette situation, une conscience réfléchie de niveau 1.

❖ **Nous allons établir une comparaison avec la classe de B.C qui a construit la situation suivante et analogue à la situation 1.**

La situation objective

- **Le Milieu matériel** : 10 objets dont 5 objets « ustensile de cuisine » et deux cuillères à soupe, un panier, le tout posé sur une table.
- L'enseignante et l'élève se faisant face, devant la table.
- La formulation langagière : « *Mets dans le panier tout ce qui sert à faire la cuisine* ».

La situation de référence :

- **moment 1** : en dévolution complète ;
- **moment 2** : vérification du contenu du panier : aide pour inciter à une rectification : pour un objet oublié ou mis en « trop » dans le panier, la question : « *à quoi sert cet objet ?* »¹³⁸¹.

Éléments d'analyse a posteriori

Nous avons conservé la valeur $X1=1$ ¹³⁸², lorsque la réponse est accompagnée d'une rectification spontanée.

Le tableau suivant renseigne sur la distribution des effectifs selon la variable $X1$.

¹³⁸⁰ Ce que l'on peut qualifier ainsi relativement aux attentes de l'enseignante et à son comportement dans la situation.

¹³⁸¹ L'enseignante a estimé que la méconnaissance d'un objet ne pas devait jouer dans l'évaluation.

¹³⁸² Si le sujet a construit une extension exhaustive, avec intervention de l'enseignante

Situation 1			
Variable	X1		
Valeurs	2	1	0
Effectifs	14	5	7
Total	26		
Pourcentages ¹³⁸³	54%	19%	27%

Tableau V

Analyse de ces données

➤ **La proportion de valeurs $X1 = 2$ ¹³⁸⁴ est notablement plus importante dans cette classe (54% contre 37%, dans la classe de P.B).** Certes, les deux situations peuvent être, de certains points de vue, difficilement comparables. En particulier, aux images du milieu matériel se substituent ici des objets réels et manipulables. Même un schéma ou une situation de référence, rappelés en mémoire, « conservent » certains attributs physiques des objets dont ceux perçus par les sens (tailles couleurs, matière...). Les représentations imagées (caricaturales et « atones ») perdent cet aspect de la réalité. Ainsi, lorsqu'il va s'agir de cette activité évocatrice qu'est la recherche en mémoire d'un schéma ou d'une situation, il se peut que la mauvaise congruence des représentations, celle activée en mémoire de travail, sous la forme, par exemple, du schéma « faire la cuisine » et celle des images, présentes dans ce milieu, ne se pose en obstacle pour l'évaluation du prédicat.

➤ **Pourtant, nous retenons davantage que ce qui peut produire un tel écart est une absence de « plasticité des schémas », dans le cas des systèmes cognitifs, dans la classe de P.B : nous n'avons trouvé, dans la classe de B.C, aucun élève prenant la valeur $X1=2$ ou $X1=1$ et « oubliant » de mettre les cuillères dans le panier. L'indice « servir à faire la cuisine » a donc, pour tous ces sujets, été conservé comme un indicateur interprété en « pouvant servir à faire la cuisine », dans une représentation (plus ou moins complète) de la situation.** Ainsi, une cuillère à soupe peut-elle aussi bien servir à prendre une cuillerée d'un certain ingrédient, même si elle sert à manger la soupe et donc se retrouve dans un autre schéma, « un diner à table ». Alors que, pour un élève de P.B une cuillère à soupe sert à manger la soupe et non à un autre usage. Des couteaux de table servent, certes à découper, mais dans un schéma proche de son usage classique à savoir « un repas à table ». Donc un tel objet est exclu de l'extension à construire. **Ainsi, dans un cas, un schéma peut posséder des éléments « dynamiques » et substituables. On peut aussi parler de l'évocation « simultanée » de plusieurs schémas. Dans l'autre cas, un schéma est un contenu mémorisé**

¹³⁸³ Arrondis à 1% près.

¹³⁸⁴ Si le sujet a construit une extension exhaustive, et sans intervention de l'enseignante.

sous une forme statique et indéformable. On peut alors faire, dans la classe de P.B, une autre évaluation de 4 ou 5 élèves à qui ce caractère de rigidité serait applicable¹³⁸⁵. Avant qu'ils ne changent d'avis, « sous la pression de l'enseignante », ils pourraient donc prendre la valeur $X1=2$. Dans ces conditions, on pourrait concevoir que dans la classe de P.B, le pourcentage de valeurs $X1=2$ soit en réalité de 58% à 63 %. La valeur $X1=1$ aurait une proportion de 21%. On obtiendrait dans les deux classes des taux comparables¹³⁸⁶.

❖ **Nous poursuivons alors la comparaison entre les deux classes.** Elle est en fait plus approfondie que la précédente, car la compréhension du prédicat va supposer là une activité spécifique de la part des sujets. Elle concerne la situation 4 qui est donc reprise par B.C.

La situation objective

➤ **Milieu matériel :** 15 objets dont 8 objets déformables par pression (comme un oreiller ou un ballon peu gonflé) et deux objets « paire de gants » et « gobelet en plastique », un panier. Le tout posé sur une table.

➤ L'enseignante et l'élève se faisant face devant la table.

➤ La formulation langagière : « mets dans le panier tous les objets mous ».

Les situations de référence

➤ **Moment 1 :** en dévolution complète ; aide relative à un objet oublié ou mal évalué : « je te dis qu'il y a un objet de trop » ou « je te dis que tu as oublié un objet » ;

➤ **Moment 2 :** question 1 : « qu'est-ce que je t'ai demandé de faire ? » ; question 2 : « Comment sais-tu que c'est mou ? »

Éléments d'analyse a posteriori

➤ Le tableau suivant renseigne sur la distribution des effectifs selon les variables T, Y et Z.

Situation 4							
Variables	T			Y		Z	
Valeurs	2	1	0	1	0	1	0
Effectifs	6	5	0	11	0	11	0
Total	11			11		11	
Pourcentages ¹³⁸⁷	54%	46%	0%	100%	0%	100%	0%

Tableau VI

➤ Les pourcentages calculés présentent des écarts notables : 54 % contre 28% s'acquittent de leur tâche (T=2), en situation de dévolution.

¹³⁸⁵ Ce que l'on peut considérer comme une correction de biais.

¹³⁸⁶ Nous retenons toutefois cette notion de « rigidité sémantique » que l'on constate souvent dans des classes d'établissements classés ZEP. Il apparaît que beaucoup d'élèves de ces établissements ne s'autorisent pas, dans leur propre langue, certaines initiatives, relatives à des transformations potentielles.

¹³⁸⁷ Arrondis à 1% près.

- Corrélation entre un critère a priori et la réussite de la tâche :
 - dans la classe de P.B : $\{T=2\} = \{(T, Z) = (2,1)\}$: les sujets qui réussissent sans aide disposent a priori d'un critère d'évaluation « par toucher ». $\{T=0\} \subset \{Y=0\}$: un sujet qui ne réussit pas la tâche ne mémorise pas le prédicat, même avec une aide ;
 - dans la classe de B.C : $\{Z=1\} = \{T=2\} \cup \{T=1\}$: les sujets qui réussissent sans aide et aussi bien ceux qui réussissent avec une aide¹³⁸⁸, disposent a priori d'un critère d'évaluation « par toucher ». Tous les élèves disposent a priori d'un critère d'évaluation.
- Analyse de la valeur $Z=1$ ¹³⁸⁹ :

Tableau comparatif.

Expression d'un critère d'évaluation du prédicat « mou »				
modes	Verbalisée ¹³⁹⁰		Mimée	En mémoire
Aspects	« Je touche »	« Ça se dé-forme » ou « j'ai appuyé »	Contact avec l'objet par toucher et (ou) exercer une pression	« Je savais déjà »
Classe de P.B	56%	11% (1)	33%	0%
Classe de B.C	36%	37%	0%	27%

Tableau VII

(1). En fait un seul sujet sur les 9 sujets considérés ici¹³⁹¹.

- Précisions sur l'exercice de la compétence C' : « évaluer la dureté¹³⁹² d'un objet » :
 - La performance résulte au moins de l'exercice coordonné de plusieurs schèmes, éléments d'une structure $S_{C'}$:
 - $S_{C'1}$: « du toucher de l'objet »,
 - $S_{C'2}$: « d'une pression sur l'objet »,
 - $S_{C'3}$ « d'une mesure de la déformation de l'objet »,
 - $S_{C'4}$ « d'une conclusion sur la dureté de l'objet »,
 - La formulation langagière $F_{C'}$ est: « dire la dureté de l'objet».
 - L'activité peut donc s'achever par l'une des formulations : « objet mou » ou « non objet mou ».
 - Nous avons vu que lorsqu'un schème S_C est fermé, il se décompose en deux schèmes réciproques¹³⁹³ : un schème $S_{C'}$ que nous venons de préciser et un schème $S_{C''}$.

¹³⁸⁸ Dans tous ces cas, il s'agit d'un seul oubli.

¹³⁸⁹ Si le sujet peut expliciter un « critère de mollesse », sachant $T=2$ ou $T=1$.

¹³⁹⁰ A l'aide d'expressions sémantiquement proches.

¹³⁹¹ Célian (4 ; 11) : « Parce que, en fait, j'ai essayé de l'aplatir »

¹³⁹² Ce que l'on peut entendre ici comme formulation équivalente à « évaluer la mollesse d'un objet ».

¹³⁹³ Chapitre 4 sous 3.2.1.2

que nous pouvons associer à la formulation langagière F_C : « lorsque tu dis que l'objet est mou, de quoi s'agit-il ? ». L'exercice du schème S_C devrait conduire à la réponse : F_C ou « faire quelque chose pour dire s'il est dur ».

- Nous avons vu aussi que l'exercice du schème S_C suppose une activité virtuelle du schème S_C . C'est ce à quoi les enseignantes engagent les cognitions des systèmes lorsqu'elles demandent : « comment sais-tu que c'est mou ? ». On comprend alors que l'exercice virtuel du schème S_C , qui implique l'exercice virtuel et ordonné des trois schèmes S_{C1} , S_{C2} et S_{C3} , suppose des formulations langagières F_{C1} ¹³⁹⁴, F_{C2} et F_{C3} , associées et qui, comme on le sait, sont anticipatrices respectivement de ces schèmes. En pratique, on sait que F_{C2} implique F_{C1} , ce qui fait que, dans certains cas, F_{C2} sera sous-entendu.

- Ainsi, à la condition que le schème S_C soit fermé et possède une certaine complétude, pour s'accommoder à la diversité des objets présent dans le milieu, on retrouve bien, comme possible, les trois expressions d'un critère d'évaluation du prédicat « mou », données dans le tableau.

- L'analyse des données montre que :

- 37% des systèmes cognitifs dans la classe de B.C (4 élèves sur 11) et 11% (1 élève sur 9) dans la classe de P.B disposent d'un schème S_C fermé dont l'exercice est associé au concept de dureté et une conscience réfléchie de niveau 2.

- Toutefois, tous les élèves de la classe de P.B relèvent d'une conscience réfléchie de niveau 1, puisqu'ils expriment tout ou partie du critère d'évaluation de la dureté des objets, après avoir construit une catégorie exhaustive. Notons que cette expression ne relève pas seulement du registre langagier pour 33% d'entre eux¹³⁹⁵.

- L'absence d'une verbalisation explicite relative aux schèmes S_{C1} et S_{C2} n'empêche pas, dans la classe de B.C, 54% (dont les 3/4 des précédents) de réussir la tâche de catégorisation, en dévolution complète alors que ce pourcentage tombe à 28% dans la classe de P.B. Ce qui pourrait indiquer que les grandeurs « niveau de conscience » et « pourcentage de réussite » ne sont pas systématiquement dépendantes.

- 27% des sujets de la classe B.C expriment que leur évaluation de la valeur de vérité du prédicat p s'est réduite à une évocation d'une situation ou d'un schéma

¹³⁹⁴ Concernant la formulation F_{C1} , il faut bien la supposer. Mais elle peut ne relever que d'un langage égocentrique qui ne trouve pas, par définition, à s'exprimer dans un but de communication avec l'enseignante.

¹³⁹⁵ Nous pouvons noter ainsi une définition plus nuancée des niveaux de prise de conscience en y précisant qu'un niveau de conscience peut être évalué i mais, qu'en ce qui concerne la verbalisation, on peut noter, selon les cas, un décalage. Notons que ce décalage peut être considérable puisqu'il est observable avec des adultes. La verbalisation relève donc d'une compétence bien séparable. Quoi qu'il en soit, « non verbalisation n'implique pas non prise de conscience » de niveau i .

disponibles en mémoire. Ce pourcentage est nul dans la classe de P.B. Nous pensons que cette forme de l'activité, dans la situation de référence de construction de la catégorie, est présente systématiquement dans le cas de la plupart des objets. **Mais que seul 27% des sujets relèvent, sur ce point, d'une conscience réfléchie de niveau 2 : la prise de conscience concerne là, l'activité de la mémoire de travail et dont les objets sont disponibles dans la mémoire à long terme.** Par exemple :

- Mannon (5; 4) : « *Je savais déjà que c'était mou. J'en ai déjà trouvé et je savais que c'était mou* »,
- Victor (5 ; 11) : « *Je touche. Et puis quelquefois, je sais que c'est déjà mou* ». Il ajoute : « *Je vois que c'est mou parce que, des fois, il y a des gros trous dans les choses* ». Ce qui pourrait montrer que le critère « de mollesse » est associé à une forme intériorisée de l'expérience physique de la dureté : un trou laissé par une pression exercée sur l'objet. On peut estimer que ce sujet, et, relativement à cette situation, relève d'une conscience réfléchie de niveau 3. C'est dire, déjà une certaine connaissance du concept de dureté. L'attribut « mou » ne renvoie pas seulement à tel ou tel objet mais à une première dénotation¹³⁹⁶ (sans doute, dangereuse, compte tenu du concept scientifique de dureté) : « la classe des objets qui ont des trous ». Et c'est le seul que l'on peut ainsi qualifier.

➤ Notons que $\{Y=0\} \subset \{T=0\}$: la mémorisation de « la consigne » apparaît donc comme nécessaire mais non suffisante à la réussite de la tâche.

➤ D'après ce qui précède (un sujet peut rappeler la consigne alors qu'il n'a pas réussi la tâche de catégorisation) l'évaluation de la régulation de contrôle, relativement à la quantification universelle, doit donc se restreindre aux groupes d'élèves donnant la valeur $Z=1$ et non étendue à $Y=1$. Précisons d'ailleurs que dans les deux classes $\{Z=1\} \subset \{Y=1\}$. **En d'autres termes, pour qu'un critère de dureté reste disponible tout au long de l'activité, il est nécessaire de mémoriser la consigne et de pouvoir la reverbaler.**

Introduisons :

- la variable E sachant $Z=1$ et donnant la valeur :
 - 1, si le prédicat p est exprimé par geste,
 - 2, si le prédicat est verbalisé par « je touche »,
 - 3, si le prédicat est verbalisé par « ça se déforme »,

¹³⁹⁶ Au sens linguistique du terme.

- 4, si le prédicat est exprimé par « je savais »¹³⁹⁷ ;
- la variable Q sachant Z=1 et donnant la valeur :
 - 2, si la quantification est conservée en dévolution complète avec extension exhaustive construite sans aide,
 - 1, si la quantification est conservée en situation de dévolution complète mais l'extension achevée avec aide,
 - 0, si la quantification n'est pas conservée.

Nous obtenons les tableaux suivants :

Pour la classe de P.B

Q \ E	0	1	2	Total
1	1	2	0	3
2	0	2	3	5
3	0	0	1	1
4	0	0	0	0
total	1	4	4	9

Tableau VIII

Pour la classe de B.C

Q \ E	0	1	2	Total
1	0	0	0	0
2	0	2	2	4
3	0	1	3	4
4	0	2	1	3
total	0	5	6	11

Tableau IX

Mélange des deux classes

Q \ E	0	1	2	Total
1	1	2	0	3
2	0	4	5	9
3	0	1	4	5
4	0	2	1	3
total	1	9	10	20

Tableau X

¹³⁹⁷ A une synonymie près.

Tableau de la distribution des pourcentages selon la variable « Q = 2 sachant E »¹³⁹⁸ :

E	pourcentages
1	0%
2	56%
3	80%
4	33%

Tableaux XI

Conclusion

➤ Les résultats semblent confirmer :

- **Que la régulation de contrôle s'exprimant par la conservation de la quantification universelle durant l'activité est dépendante de la disponibilité du schème fermé S_C de l'évaluation de la dureté.**

- Que lorsque l'accommodation aux situations « d'expérience de la dureté d'un objet » n'est pas allée à son terme, en l'occurrence, à la coordination des trois schèmes S_{C1} , S_{C2} et S_{C3} , il s'ensuit une perte de la régulation de contrôle dans le cours de l'activité. On note d'ailleurs que lorsque le système cognitif ne dispose que du schème fermé S_{C1} , il n'a pas la capacité de résoudre la tâche de catégorisation en situation de dévolution.

- **Que la régulation relative à la conservation de la quantification universelle est facilitée par la disponibilité d'un schème S_C fermé**, comme le montrent l'opposition flagrante entre la proportion des événements « Q = 2 sachant E = 3 » (80%), et la proportion des événements « Q = 2 sachant E=1 » (0%). On pourrait d'ailleurs s'étonner qu'une régulation qui, par définition, est une forme cognitive, accompagnant l'exercice de compétences déjà opérationnelles dans un certain dénoté, se trouve défaillante, justement en contexte ; c'est dire, que l'efficacité d'une telle régulation dépend du contexte.

Année II

Nous n'avons pas fait allusion, dans notre technologie, aux situations de consolidation qui s'intercalent systématiquement entre les situations constitutives de la séquence. Il va de soi, tout au moins au niveau scolaire concerné par nos travaux, qu'un schème ne saurait être opérationnel si la dénotation de la formulation langagière se trouve réduite à la référence première. En effet, on peut penser que des facteurs subjectifs, et qui font sortir le sujet d'un certain fonctionnement épistémique, celui que nous avons considéré dans les analyses a priori, se soient initialement « incrustés » dans le schème, sans que ceci soit accessible à l'analyse a

¹³⁹⁸ Q=2 sachant qu'un prédicat construit est exprimé.

posteriori¹³⁹⁹. Il est certain aussi qu'une seule situation de référence ne suffise pas à certains systèmes pour atteindre, à chaque étape du processus de construction, une équilibration des schèmes construits¹⁴⁰⁰. La répétition de situations dont l'élément commun reste fondamentalement la même forme langagière et une certaine constance du milieu matériel, mais qui se différencient par des variables secondaires, peut garantir, au niveau intra-subjectif, des auto-régulations qui se traduisent par des corrections et un équilibre durable du schème spécifique de la situation. Le but étant, bien entendu, qu'un schème corresponde bien à une organisation invariante de la conduite pour toute une classe de situations données, classe que nous avons définie comme le dénoté d'une certaine forme langagière.

➤ Nous confirmons donc le constat de Lev Vygotski, dès lors qu'une régulation est une fonction psychique supérieure que celle-ci n'atteindra à l'équilibre qu'après un exercice suffisant de schèmes de même type, au sens où l'exercice de ces schèmes suppose leur coordination avec ce schème supérieur, coordination que nous reconnaissons comme constitutive de l'exercice d'une telle régulation de contrôle. *« Les recherches sur le processus de formation des concepts nous ont appris que le concept est non pas un simple ensemble de liaisons associatives assimilé à l'aide de la mémoire, non pas une habilité mentale automatique, mais un véritable et complexe acte de pensée, qu'on ne peut acquérir simplement en l'apprenant et qui ne peut apparaître dans la conscience qu'à la condition absolue que la pensée de l'enfant ait elle-même atteinte, dans son développement interne, un degré supérieur »*¹⁴⁰¹.

➤ **En particulier, nous devons reconnaître que la construction de la régulation R_a , associées au schème S_C , et que nous avons spécifiée, dans le cas de la catégorisation, suppose donc une disponibilité d'un niveau de développement suffisant d'un autre schème du régulateur, à savoir une régulation de contrôle, dont la définition et l'exercice ne sont plus eux-mêmes réductibles, comme on vient de le dire, à un certain contexte.**

➤ Ainsi, nous sommes amenés à évoquer, encore une fois, un développement général de l'intelligence, développement dont il nous apparaît fortement certains des aspects structuraux, tant il est vrai qu'un apprentissage qui pourrait sembler ne concerner qu'une simple localité d'un savoir disciplinaire s'adresse, en fait, en raison du principe fondamental d'auto-régulation à toute une structure cognitive en situation d'équilibration.

➤ Nous en revenons alors sur un point déjà évoqué : la nécessité d'une multiplica-

¹³⁹⁹ Rappelons que la réussite à une tâche peut parfois être obtenue par assimilation déformante.

¹⁴⁰⁰ On retrouvera encore certains des sujets concernés, en échec dans toute la suite de la séquence, sauf réussissant parfois par mimétisme, et donc de façon illusoire.

¹⁴⁰¹ Lev Vygotski. *Pensée et langage*. Chapitre 6. *Etude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Opus cité.

tion de situations visant la consolidation du schème S_{C^*f} et, réciproquement, de situations visant la construction du schème $S_{C^{**}f}$ ¹⁴⁰². Mais nous avons montré que ces dernières supposent la consolidation du schème S_{C^*f} . C'est ce que, entre autre, nous avons appris du travail de recherche accompli durant l'année 2007-2008. C'est pourquoi nous allons retrouver ces situations ad hoc, la seconde année de notre activité de groupe.

❖ **Les situations précisées ci-dessous ont donc toutes trait à la construction et à consolidation du schème S_{C^*f}** ¹⁴⁰³. Elles se situent donc en aval des deux situations initiales, l'une et l'autre que l'on peut qualifier d'amorçage des schèmes S_{C^*f} et $S_{C^{**}f}$, et qui ont été reproduite, cette année par les enseignants du groupe.

Elles se sont déroulées d'octobre à décembre 2008 dans la classe de B.C (un autre public donc). Elles concernent des enfants âgés de (4 ; 2) à (5 ; 8) en septembre 2008. Elles sont présentées, ci-dessous, sans corrélation avec une quelconque chronologie, les élèves se retrouvant individuellement, dans l'une ou l'autre des situations, sans ordre particulier prédéfini.

Nous donnons des descriptions simplifiées des situations objectives¹⁴⁰⁴.

Situation 1

Moment 1

Situation objective :

- milieu matériel : un panier ouvert ; des formes géométriques différentes, de couleurs et de matières distinctes ;
- l'énoncé : « *mets dans le panier ouvert tous les ronds rouges* » ;
- dévolution complète.

Moment 2

Situation objective : la question « *qu'est-ce que je t'avais demandé ?* ».

Situation 2

Moment 1

Situation objective

- milieu matériel : un panier ouvert ; des cartes présentant des dessins en nombres et à motifs distincts, les mêmes motifs se retrouvant sur une carte donnée ;
- l'énoncé : « *mets dans le panier ouvert toutes les cartes qui ont trois dessins* »

¹⁴⁰² Comme exprimé sous 2.2.5.

¹⁴⁰³ Nous les précisons ci-dessous de manière abrégée. Les nombre d'objets de l'ensemble E donné, variant d'une situation à l'autre. Le déroulement des séances suppose toujours une tâche, proposée à un élève seul. Ainsi, nous pourrions obtenir certaines analyses plus fines.

¹⁴⁰⁴ Rappelons que les détails de ces situations ont été donnés, une fois pour toutes, dans le tableau 4.

pareils» ;

- dévolution complète.

Moment 2

Situation objective : la question « *qu'est-ce que je t'avais demandé ?* ».

A partir de la situation suivante, le panier est fermé et son contenu n'est jamais visible.

Situation 3 : on retrouve la situation relative aux objets mous. Mais avec dévolution complète

Situation 4 : on retrouve la situation des objets servant à faire la cuisine mais avec comme formulation langagière « *mets dans le panier tous les objets de la cuisine* ». Mais avec dévolution complète.

Situation 5

Moment 1

Situation objective

- milieu matériel : un panier fermé ; des cartons sur chacun desquels est écrit un mot, en lettres majuscules et pour d'autres en lettres minuscules ;
- l'énoncé : « *mets dans le panier tous les mots qui commencent par un E majuscule* » ;
- dévolution complète.

Moment 2

Situation objective : la question « *qu'est-ce que je t'avais demandé ?* ».

Situation 6 :

Moment 1

Situation objective

- milieu matériel : un panier fermé ; des cartons sur chacun desquels est écrit un mot,
- l'énoncé : « *mets dans le panier tous les mots qui ont un e* »,
- dévolution complète.

Moment 2

Situation objective : la question « *qu'est-ce que je t'avais demandé ?* »

Situation 7 :

Moment 1

Situation objective

- milieu matériel : un panier fermé ; un ensemble de cartes, extrait d'un jeu de

32 cartes à jouer et ne contenant pas des figures ou des as,

- l'énoncé : « mets dans le panier toutes les cartes qui gagnent le 4 à la bataille »,
- dévolution complète.

Moment 2

Situation objective : la question « qu'est-ce que je t'avais demandé ? »

Éléments d'analyse a posteriori¹⁴⁰⁵

➤ Notons tout d'abord que l'enseignante a systématisé une formulation langagière où l'on retrouve comme constante la quantification universelle exprimée invariablement par l'adjectif indéfini tous (toutes).

Concernant les moments 2, B.C a pu dire : « je m'aperçois que le fait d'avoir insisté, dès la première situation, sur la formulation "Tous les objets...", a joué sur la reformulation des élèves »¹⁴⁰⁶.

➤ Nous renseignons, dans le tableau suivant, la distribution des pourcentages¹⁴⁰⁷ selon :

- la variable X donnant la valeur :
 - 1, si « construction exhaustive de l'extension »,
 - 0, sinon ;
- la variable Y sachant X=1 donnant la valeur :
 - 1, si réponse à la question par l'expression d'un prédicat correct,
 - 0, sinon ;
- la variable Z sachant Y=1 donnant la valeur :
 - 1, si l'expression du prédicat est associé au quantificateur « tous »,
 - 0, sinon ;
- la variable T, sachant Y=0 donnant la valeur :
 - 1, si expression de la quantification universelle,
 - 0, sinon.

¹⁴⁰⁵ Relative à toutes les situations.

¹⁴⁰⁶ En novembre 2008. Nous ne ferons pas d'étude comparative entre les situations construites par B.C d'une année sur l'autre. Comme elle l'a dit elle-même, elle a, en quelque sorte, davantage maîtrisé son sujet lors de cette seconde année. Il est possible que les résultats obtenus dans les situations 3 et 4 et reproduites donc cette seconde année s'en soient trouvés fortement améliorés relativement aux valeurs $X = 1$ et $Y/X = 1$.

¹⁴⁰⁷ Arrondis à 1% près.

variables	X		Y/X=1		Z/ ((Y/X=1)=1)		T/ ((Y/X=1)=0)	
	1	0	1	0	1	0	1	0
Situation 1 10 sujets : (4 ; 2) à (4 ; 9)	100%	0%	55%	45%	40%	60%	50%	50%
Situation 2 23 sujets : (4 ; 2) à (5 ; 7)	87%	13%	10%	90%	100%	0%	50%	50%
Situation 3 9 sujets : (4 ; 5) à (5 ; 8)	100%	0%	89%	11%	75%	25%	0%	1 sujet
Situation 4 12 sujets : (4 ; 2) à (4;10)	100%	0%	83%	17%	80%	20%	0%	2 sujets
Situation 5 6 sujets : (5 ; 1) à (5 ; 8)	100%	0%	100%	0%	100%	0%	X	
Situation 6 18 sujets : (4 ; 2) à (5 ; 8)	100%	0%	94%	6%	75%	25%	0%	1 sujet
Situation 7 16 sujets : (4 ; 10) à (5 ; 8)	100%	0%	94%	6%	79%	21%	0%	1 sujet

Tableau XII

Nous noterons, dans ce qui suit, pour simplifier : Y', pour Y/X=1 et Z', pour T/((Y/X=1)=0).

➤ Les situations objectives introduisent en fait une conjonction de plusieurs prédicats : « Rond et Rouge » ; « carte et trois et dessins pareils » ; « Objet et Mou » ; « Objet et 'De Cuisine' » ; « Mot et 'Avoir E au début' et Majuscule » ; « Mot et Avoir e » ; « Carte et Quatre et 'Gagne le quatre' ». On peut considérer que les prédicats « Objet », « Mot » et « Cartes » ne sont pas évalués dans les activités, ceux-ci allant, en quelque sorte, « de soi ». De plus, on peut penser, pour des raisons didactiques, que le prédicat 'E majuscule' forme un tout'. Les seuls prédicats, cognitivement complexes, sont en fait ceux correspondant aux situations 1 et 2. On retrouve d'ailleurs un déficit de la valeur Y'= 1, avec respectivement un pourcentage de 55% et de 10%.

➤ **La situation 2** propose un prédicat complexe qui se présente comme la conjonction de deux prédicats à évaluer « trois » (p₁) et « dessins pareils » (p₂). Les observations que nous n'avons pas séparées sont comparables en moyenne section et grande section.

- En grande section, 0% des sujets exprime le prédicat complet « p₁ et p₂ ».
- Alors que 2 élèves sur 9 élèves, de moyenne section, âgés de (4 ; 2) et (4 ; 5) expriment un prédicat complet.

- Dans la classe de moyenne section, 78 % des sujets qui expriment un prédicat n'en explicitent que la partie « trois dessins ».

- Dans la classe de grande section 90 % des sujets qui expriment un prédicat n'en explicitent que la partie « trois dessins » (souvent réduite à 3). Si l'indice « pareil » a bien été considéré comme un indicateur entrant dans la construction d'un schéma complet d'actions pour 87% des sujets, nous pouvons faire l'hypothèse que la composition de la collection E n'a pas rendu nécessaire, dans la représentation du schéma, le maintien d'une régulation de contrôle relative à l'indicateur « pareil ». En d'autres termes, à une carte près, $p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$. Nous prenons comme un argument, en faveur de cette hypothèse, le fait que 75% des élèves qui prennent la valeur $Y'=0$ se contente de p_1 . Enfin, un sujet, Cloé (âgé de (5 ; 2)) qui présente, comme nous le noterons, relativement à la catégorisation, un niveau 1 de développement¹⁴⁰⁸, prend, par la suite, la valeur constante $(X ; Y' ; Z') = (1, 1, 1)$, sauf en cette situation, dans laquelle il prend la valeur $Y=0$. Son expression de la consigne devient : « toutes les cartes qui ont trois dessins ». Ce cas, bien que particulier, pourrait conforter notre hypothèse.

- **Ainsi, nous ne pouvons pas négliger le caractère complexe de prédicat qui, tout en étant retenu dans un schéma complet d'actions par 87% des sujets (moment 1), ne l'est plus, parmi ceux-ci, dans la situation de référence qui suit (moment 2), que par 10 % des sujets.**

➤ Il nous semble devoir insister sur deux aspects :

- Le premier concerne toutes les situations proposées. La régulation de contrôle, relative à la quantification universelle et qui favorise l'équilibre du schéma complet d'action (moment 1), n'a plus sa raison d'être dans la seconde situation (moment 2) : lorsque l'enseignante demande le rappel de la consigne, l'ensemble des schèmes en exercice dans la situation première, se retrouvent dans un état inactif. La résolution de cette nouvelle tâche relève d'une compétence spécifique et qui concerne le niveau de conscience qui a accompagnée l'activité, lors du moment 1: dès lors que la situation est comprise¹⁴⁰⁹ et l'action lancée, ce qui peut, pour cela, se suffire d'une prise de conscience en acte¹⁴¹⁰, car la conscience que le système a de sa propre activité, en particulier de l'exercice d'une régulation de contrôle, ne semble pas en l'occurrence une nécessité. Ainsi, la question de l'enseignante est relative à une évaluation d'une des composantes de la compétence « prendre conscience de sa propre activité ». Évaluée dans cette situation 2, nous pouvons la considérer de niveau 0 pour la plupart

¹⁴⁰⁸ Voir tableau 3. Paragraphe 1.3.2.

¹⁴⁰⁹ Au sens de la construction des représentations ad hoc.

¹⁴¹⁰ Les niveaux de prise de conscience sont précisés en 2.3 du chapitre 3.

des systèmes cognitifs. Inversement, nous notons que les deux seuls sujets de moyenne section, Baptiste (4 ; 2) et Elouan (4 ; 5), qui prennent dans cette situation la valeur $(Y', Z') = (1,1)$ sont systématiquement évalués $(Y', Z') = (1,1)$, pour toutes les situations dans lesquelles ils se sont trouvés. Leur prise de conscience réfléchie peut donc être évaluée de niveau 1. Ils sont, sur ce point, les deux seuls cas, dans cette classe. Mais nous noterons que les d'autres élèves progresseront sur ce point en prenant la valeur $(X, Y', Z') = (1, 1, 1)$ dans d'autres situations. Cette évaluation d'un niveau bas de prise de conscience de sa propre activité, semble confirmée par l'échec de 90% des sujets, évalués $Y=0$ sachant $X=1$: tous ceux-ci expriment bien un prédicat mais soit p_1 seul, soit p_2 seul.

- Le second aspect concerne la situation 1. Celle-ci propose un prédicat complexe qui se présente aussi comme la conjonction de deux prédicats « Rond » (p_1) et « Rouge » (p_2). Elle se différencie en ceci que les deux prédicats sont évaluables à l'aide de schèmes se coordonnant à des schèmes de la perception : perception de la forme et perception de la couleur¹⁴¹¹. L'assimilation de la situation peut se suffire d'une structure de schème dont un des éléments principaux est le schème de la reconnaissance de la totalité intensive associée, dans une formulation langagière, à l'adverbe d'intensité « tout ». Nous avons noté, dans une analyse précédente, son activité spontanée dans le cas de reconnaissances perceptives. Si dans le cas de la situation 2, l'indicateur « 3 »¹⁴¹² peut également conduire à une telle analyse, il ne peut en être ainsi concernant l'indicateur « pareil ». L'indication de cet indice devrait conduire, dans le processus d'assimilation de la situation, à l'activation du schème de la comparaison binaire S_{Ci} (rappelons que de plus, les paniers sont ouverts et donc de contenus visibles, tout au long de l'activité). **On voit bien, ce qui différencie les deux situations : dans la situation 1, aussi bien pour le prédicat p_1 que pour le prédicat p_2 , l'évaluation est rendue possible par des compétences relatives à la perception ; dans la situation 2, l'évaluation du prédicat p_1 est rendue possible par une compétence relative à la perception, alors que non, pour le prédicat p_2 qui exige aussi l'exercice du schème de la perception mais coordonné au schème de la comparaison binaire. Cette conjonction de deux schèmes, de natures ainsi différentes, est difficile à stabiliser à ce niveau de développement de la compétence « catégoriser ».** On devrait ainsi obtenir davantage de valeurs $X=0$, dans cette situation, ce qui est le cas de 30% des sujets de moyenne section contre 0% dans le cas de la situation 1. Toutefois, l'écart entre les proportions d'échecs est affaibli en raison possible des élé-

¹⁴¹¹ Bien sûr, il faut voir là une simplification, puisqu'il faut, au moins, toujours considérer une coordination avec le schème de la désignation.

¹⁴¹² Puisque pour des petits nombres ($n \leq 4$), est invocable la reconnaissance numérale par « subitizing » (reconnaissance immédiate).

ments mis en avant dans l'analyse précédente, relativement à la composition de l'ensemble E.

➤ La situation 7 présente une particularité qui la distingue des précédentes : nous avons noté, dans certaines analyses, la possibilité d'une assimilation déformante par une structure de schèmes dans laquelle le schème S_{Ci} de la comparaison binaire, sous une forme explicite (la comparaison physique de deux objets) ou sur une forme implicite (la comparaison d'un objet perçu physiquement avec un objet évoqué¹⁴¹³), est un outil déterminant. Ici, par contre, le prédicat « être plus fort que le 4 à la bataille », ne se donne pas directement comme un indicateur anticipant un schéma ou une situation simple d'un certain dénoté, l'un ou l'autre évocables, pour la construction d'une représentation de la situation et l'exercice du schème S_{Ci} .

Pour les sujets de cette classe, le prédicat p' est sémantiquement proche, voire équivalent au prédicat p , présenter sur la carte « Plus de 4 dessins » ou afficher « Un nombre plus grand que 4 ». Les actions correspondant aux évaluations des valeurs des propositions $p'(x)$ sont donc systématiquement assimilables à une comparaison numérique dans le schéma complet d'action et, ceci de façon récursive.

On note bien que, dans cette situation, le schème de la comparaison numérique est celui d'une relation d'ordre, même restreinte, puisque l'un des arguments « 4 » est constant, alors que dans les autres situations, le schème pouvant jouer de façon définitive et, par assimilation déformante, est celui de la comparaison binaire.

Il s'en suit que, dans la situation 7, l'activité du système correspondrait bien au possible 3, car il faut alors envisager le maintien incontournable d'une régulation de contrôle portant effectivement sur la quantification¹⁴¹⁴. D'autant plus que l'expérience des sujets du « jeu de la bataille »¹⁴¹⁵, à leur âge, ne les dispense pas encore d'une comparaison numérique explicite. Cette activité de contrôle systématique fait de l'équivalence en acte, entre les prédicats p et p' , une véritable substitution.

Ainsi, le prédicat p , « être plus fort que le quatre » se substitue-t-il systématiquement au prédicat p' « gagner le quatre à la bataille » et deux sujets, sur les 15 ayant exprimé un prédicat, substituent même le prédicat p'' « être plus que le quatre » à ce prédicat. **Pour les 15 élèves concernés, nous pouvons évaluer, dans l'activité qui a précédé, une prise de conscience réfléchie de niveaux 1 et 2 (pour les deux derniers évoqués)**¹⁴¹⁶, mais encore avec

¹⁴¹³ Comme il a été dit plus haut.

¹⁴¹⁴ Comme il l'a été précisé sous 3.2.

¹⁴¹⁵ Par exemple, la pratique de ce jeu pourra finalement conduire à l'inhibition du schème de la comparaison numérique et à l'activation du schème de la reconnaissance de certaines constellations de dessins sur les cartes.

¹⁴¹⁶ Niveaux définis au chapitre 3 sous 2.3

des possibilités verbales limitées.

Conclusion

➤ D'une part,

Les résultats observés (pourcentage de valeurs $X=1$ et $Y'=1$) nous permettent d'envisager un équilibre suffisant du schème S_C . **Toutefois, comme notre analyse a pu l'exprimer, l'attention logique des systèmes cognitifs a pu se suffire d'une focalisation sur le prédicat et d'un maintien relatif de la quantification universelle, mais sans que soit maîtrisé le risque d'assimilation déformante, en dehors de la situation 7. En d'autres termes, la multiplication de situations perturbantes de type 1 pour le système (R_a , S_{Cf}) ne peut assurer le franchissement effectif de ces obstacles.**

On note ainsi que la valeur $Z' = 1$ est inégalement répartie selon les situations. Et nous avons déjà fait de cela un indice d'une utilisation de la quantification universelle déformante. La situation 2 est particulière ($Y' = 1$ à 100%) puisque qu'elle concerne effectivement les deux élèves dont nous avons signalé les évaluations à 1, pour toutes les variables et pour toutes les situations. De plus, il ne faut pas négliger le fait que même s'il y a eu assimilation déformante, certains élèves ont pu mémoriser l'existence du mot « tous » sans pour autant que celui-ci ait joué effectivement comme un indicateur dans la catégorisation. On retrouve explicitement cela dans les situations 1 et 2 avec la variable T' .

➤ D'autre part,

Nous avons noté que les situations, proposées l'année précédente aux sujets comme Pierre et Clément¹⁴¹⁷, et qui consistaient à dévoiler une extension donnée selon une suite croissante, en associant à chaque étape de ce processus, la même question : « si tous p dire p » conduisait à la rencontre du système avec certains obstacles épistémologique possibles, que nous avons analysés a priori : inertie du schème de la perception phonique, associée aux phénomènes de l'obstacle de l'homonymie ; inertie du schème de la comparaison binaire, faisant obstacle à la comparaison globale¹⁴¹⁸.

Nous avons pu noter que le sujet « ne trouvait pas seul la solution » et nous avons pu penser cette constatation comme non rédhibitoire¹⁴¹⁹, dès lors qu'une situation

¹⁴¹⁷ Voir 3.2.2.

¹⁴¹⁸ Nous aurions pu, dans nos analyses, évoquer l'obstacle épistémologique de l'inertie du schème de la désignation concrète, faisant obstacle à la compréhension en attributs abstraits (dans les cas de prédicats présentant des caractères abstraits). Mais si cet obstacle épistémologique est bien un fait structurel, il n'apparaît pas opportun de l'évoquer systématiquement, à ce niveau scolaire, et au moins tant que l'apprentissage à la catégorisation, tel que nous en avons défini les contours, n'est pas largement achevé.

¹⁴¹⁹ Cette position reste surprenante pour la majorité des enseignants de l'école élémentaires, tant la leur est de considérer qu'une tâche, proposée à leurs élèves, n'a d'intérêt, pour ceux-ci, que réussie. Sinon, ils considèrent que la situation n'était pas bonne ou qu'ils doivent « s'en sortir » en introduisant plus d'ostensifs.

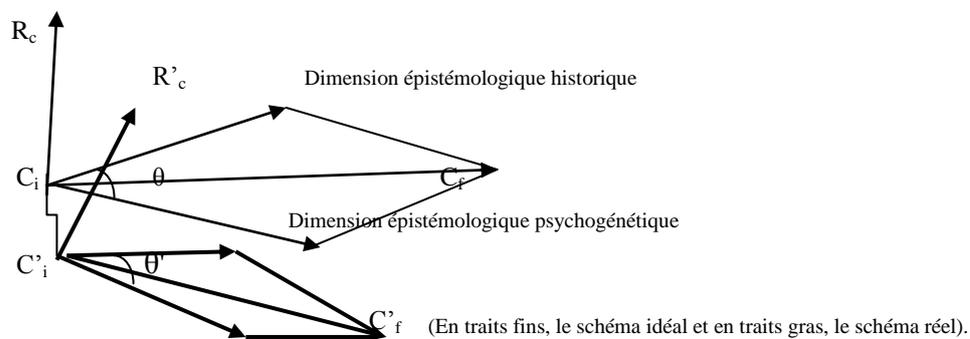
d'institutionnalisation et, incluant « les gains »¹⁴²⁰ de la situation de référence antérieure, était proposée aux sujets.

Pour la conception des situations didactiques, la phénoménologie de tous ces obstacles reste un enjeu majeur, d'autant plus qu'ils ne sont pas indépendants¹⁴²¹ et, qu'alors, ces obstacles et d'autres s'expriment, d'un certain point de vue, à un niveau de développement plus général d'un système cognitif. Nous avons montré que le développement réel de la compétence « catégoriser », lorsqu'il est médiatisé, suppose les situations, concernant la construction de S_C , comme un passage obligé. Notre analyse va toutefois désormais nous conduire à faire l'impasse sur l'obstacle de l'homonymie pour les raisons suivantes :

- L'obstacle de l'homonymie n'est pas un incontournable structurel dans la construction de la compétence « catégoriser » : il peut être ignoré, lorsque les prédicats à découvrir ne relèvent pas de la seule perception : par exemple : « mou » ; « gagner le quatre à la bataille » ; et plus généralement, lorsque l'évaluation de la proposition $p'(x)$ n'est pas une conséquence en acte de la seule perception, pour tout x de A .

- Aussi, il est envisageable que, lorsque la compétence « catégoriser » aura atteint un niveau de développement suffisant, le système cognitif « saura » inhiber le schème de la reconnaissance de l'intensité d'une qualité associée, au sein d'une formulation langagière spécifique, à l'adverbe d'intensité « tout ».

Toutefois, il nous semble important de ne pas l'ignorer car, comme nous l'avons montré, il y a toujours solidarité structurelle entre différents obstacles et, celui-ci n'échappe pas à la règle. Ainsi, si nous en revenons à notre schéma de corrélation entre les deux épistémologies Deh et Dep, cette réduction conduit à une diminution de l'angle dont nous avons précisé qu'il symbolise les obstacles épistémologiques. Mais aussi en fait, à une déviation dans le développement structural.



¹⁴²⁰ Par exemple, Pierre finit « par trouver » et Clément manifeste explicitement sa compréhension avec la solution proposée par sa maîtresse.

¹⁴²¹ On retrouve effectivement la pertinence de cet avertissement chez Gaston Bachelard.

Nous venons d'admettre, en l'occurrence, que l'obstacle de l'homonymie peut être contourné à l'aide de situations spécifiques, le système cognitif pouvant ultérieurement prendre conscience de sa dangerosité, une fois le schème de la catégorisation véritablement équilibré. Nous notons le risque (provisoire) donc, dans ce cas, d'une réduction ou déviation corrélée de l'espace des composantes de la résultante cognitive R_c .

➤ **Fondamentalement, c'est le franchissement de l'obstacle de la comparaison binaire qui est le véritable enjeu, dans la construction du schème $S_{C'f}$** : il est ainsi un incontournable structurel comme nous l'avons largement analysé.

3.5 Des séances relatives à la construction du schème $S_{C'f}$ ¹⁴²²

Les situations qui vont concerner la construction du schème $S_{C'f}$ auront, comme objectif, de contraindre le système cognitif, dont une compétence a déjà pour composante cognitive un schème $S_{C'f}$ opérationnel, mais par assimilation déformante possible, à une décentration consistant en un déplacement de l'attention logique sur la quantification universelle. Celle-ci, au terme de nouvelles situations de référence, doit donc finalement devenir l'indicateur premier, alors que le prédicat devra devenir à terme, par régulation rétroactive, un indicateur second dans l'anticipation du schème $S_{C'f}$; ce qui, à ce stade du processus didactique, engagé avec les premières séances, ne s'est pas imposé aux systèmes cognitifs, dans leur majorité, comme une nécessité logique.

Année 2

Elles se sont déroulées de décembre 2008 à janvier 2009, dans la classe de B.C, et d'octobre 2008 à novembre 2009, dans la classe de D.B. Elles concernent des enfants âgés de (4 ; 2) à (5 ; 8) en septembre 2008.

Principes généraux dans la conception des situations objectives :

➤ La décentration : nous avons rappelé les positions de Doise et Mugny¹⁴²³ : au sein d'un groupe, la décentration consistant en un déplacement des observables de sa propre action¹⁴²⁴ vers celles de ses pairs, pourrait favoriser une coordination, au sein d'un système cognitif, entre les différents observables. Une compréhension de la situation en serait le gain final. De plus, cette activité individuelle, régulée par une activité collective, ne peut aboutir sans certains pré-requis cognitifs. Nous considérons le niveau de développement du schème S_C comme suffisant, pour se constituer en pré-requis ;

¹⁴²² Les termes suggestifs de « situations réciproques » ont été proposés par des membres du le groupe de recherche.

¹⁴²³ Chapitre 3 sous 3.2.

¹⁴²⁴ Nous entendons ici l'ensemble des actions dans un sens le plus large possible, car nous y incluons l'ensemble des formes discursives apparaissant dans la situation.

➤ Rappelons la conception de la situation objective fondamentale: présenter, directement ou progressivement, la totalité de l'extension de l'ensemble A et poser la question : « *tous ces objets sont des p. Dire p* ».

❖ **Nous présentons une situation conçue par D.B** et première d'une suite de situations de même type qui seront proposées à un groupe constant de 5 sujets : Lilou (L), Matéo (M), Baptiste (B), Enzo (E) et Timothée (T). La situation objective va correspondre à un amorçage du schème $S_{C'f}$.

Une situation de référence préliminaire

D.B est assis face au groupe.

1- D.B « *Est-ce que vous vous souvenez de ce qu'on a fait la dernière fois ? ...On avait joué ?* »

2- L « *On avait des caisses et on devait remettre les objets que tu demandais, par exemple les objets de la cuisine* ».

3- D.B « *Les objets de cuisine c'étaient.....* »

Lilou lui rappelle qu'ils devaient demander pour les objets qu'ils ne connaissaient pas.

4 D.B « *Et après : qu'est ce je vous avais demandé ?* »

5- M « *Par exemple de remettre les objets de la cuisine, Les objets qui roulent.....* »

6- D.B « *Alors, la consigne que je disais c'était « tu mets ?* »

7- D.B « *Les objets de cuisine, les ustensiles de cuisine ou les objets qui roulent... Est-ce que c'était bien ça ma consigne ? Moi je demandais, tu mets dans la boîte....* »

8- M « *Les objets qui roulent ...* »

9- DB « *Oui, mais pas tout à fait, je ne suis pas tout à fait d'accord ! Vous ne vous en souvenez pas ? C'était ... ?* »

10- B « *Moi, c'étaient les instruments...Et les objets qui servent à attacher* ».

Fin de la situation.

Situation objective :

- le milieu matériel : un boîtier plat et fermé ;
- l'enseignant D.B, le groupe de cinq sujets, assis sur un banc face à lui ;
- la situation de référence précédente ;

➤ le discours de D.B : « *Aujourd'hui, on va faire un petit peu l'inverse... : Là, j'ai une boîte, et dans cette boîte, j'ai mis des objets.... Ma boîte n'est pas très grande, et au lieu des objets, j'ai mis une photo des objets, des choses qui m'intéressent et il va falloir deviner pourquoi j'ai mis tous ces objets dans cette boîte* ».

Situation de référence

D.B va sortir d'une boîte, cinq cartons (de forme carrée), sur lesquels des objets sont représentés et qu'il va aligner.

D.B sort un premier carton représentant un objet.

1- M « *Un abricot...* »

D.B sort un deuxième carton.

2- T « *Un abricot...* »

3- M « *Y-a deux abricots* »

D.B sort un troisième carton.

4- L « *Un abricot* »

5- M « *Ça fait trois abricots* »

6- D.B « *Ça fait 3 abricots* »

D.B sort un autre carton.

7- E « *Une fraise...* »

8- B « *Une fraise...* »

9- D.B « *C'est une fraise* »

D.B sort un autre carton.

10- T « *Un abricot* »

11- D.B « *T'as quelque chose à dire Mathéo ?* »

12- M « *Y-a 4 abricots* »

D.B sort un autre carton.

13- D.B « *Baptiste ?* »

14- B « *Une cerise* »

15- D.B « *Et ma boîte est vide !* »

« *Pourquoi est-ce que j'avais mis ces cartons là, ici ?* » En associant ce dernier adverbe à un mouvement circulaire, à l'aide du doigt et autour de la collection cartons.

16- E « *Parce que c'est des fruits !* »

17- D.B « *Ce sont des fruits : parce que ce sont.... ?* »

18- E « *C'est sucré !* »

19- D.B « *J'ai mis tous ces cartons là dans la boîte parce que... parce que ... ce sont ? ...* »

20- E « *Des fruits* ».

21- D.B « *Et même je peux dire que ce sont.... ?* »

22- M « *Des objets* ».

23- D.B « *Ici ce sont... ?..* ». Il refait un geste du doigt autour des 5 cartons pour suggérer un ensemble.

DB fait plusieurs tentatives pour obtenir l'expression du quantificateur

....

Ce à quoi, il ne parvient pas.

Il introduit alors la formulation $F_{C'}$:

33- D.B « *Parce qu'ils étaient tous des fruits ! Ils étaient tous des fruits... et c'est pour ça que je les ai mis dans ma boîte, parce que, dans ma boîte... c'étaient que des fruits, c'étaient tous des fruits* ».

Éléments d'analyse a posteriori

➤ Dans la situation de référence préliminaire, D.B essaie de faire construire par les systèmes cognitifs une évocation d'une situation de référence, élément du dénoté de la compétence C'_f , dont la composante cognitive est le schème $S_{C'_f}$ et la formulation langagière associée, $F_{C'}$: « Mettre ensemble tous les p ». On peut préciser d'ailleurs que chacun des sujets disposent de plusieurs telles situations¹⁴²⁵.

➤ Il semble que les sujets qui s'expriment à partir de 16 (2 sur les 5) aient conservé, en mémoire, le principe de construire un ensemble en extension, à partir de la donnée d'un prédicat. Mais **ils n'expriment pas, dans une formulation langagière, le quantificateur universel**. Pourtant, en dehors de T, et dans les situations de référence antérieures, concernant la construction du schème $S_{C'_f}$, nous ne trouvons pas d'exception aux deux moments suivants : D.B énonce bien la consigne $F_{C'}$ dans sa totalité, et les sujets rappellent tout aussi bien la forme langagière $F_{C'}$ (excepté T). **Comme on le note donc, la quantification universelle, tout en étant un indicateur qui se constitue en anticipation du schème $S_{C'_f}$, n'est pas encore conceptualisée. C'est ce qui peut confirmer que les assimilations ont été, là, déformantes dans les situations perturbantes de type 1 pour $S_{C'_f}$.**

¹⁴²⁵ Situations que nous avons toutes filmées et dont nous ne rendons pas compte, plus en détails dans cet écrit, car leurs analyses n'apporteraient pas plus que ce que nous avons déjà dit, dans le cas de situations de même type, et menées par les autres enseignantes, l'année précédente.

➤ En accord, en cela, avec l'analyse de Jean Piaget, il n'y a donc pas, à ce niveau de l'apprentissage de la catégorisation, de coordination stable entre l'extension et la compréhension d'un même ensemble A. **Ce déséquilibre peut se définir, à un niveau supérieur de la cognition, de la façon suivante : l'exercice du schème S_{C^T} est associé à deux niveaux de prise de conscience différents : la construction de l'extension de A est associée à la conservation volontaire, en mémoire de travail, du prédicat p, dans une prise de conscience réfléchie de niveau 0 voire 1 ; la quantification universelle, actualisée par l'indicateur « tous », au début de l'activité, et bien que prise comme un de ses arguments par une régulation anticipatrice, n'est, par la suite, maintenue dans l'activité que dans une prise de conscience en acte. En effet, ce niveau bas de conscience est associé, comme on l'a vu, à une possible assimilation déformante, car la quantification ne s'y constitue pas comme concept explicite, organisateur de l'action, mais peut s'y substituer une comparaison binaire.**

➤ Toutefois, dans ces situations, le système cognitif, active une autre régulation de contrôle : s'assurer que « non $\exists x (x \in \tilde{A} \text{ et } p(x))$ ». Cette régulation l'est à un niveau 1 de prise de conscience réfléchie et pas seulement en acte, puisque, dans ces mêmes situations de références, la question de D.B « comment sais-tu qu'ils y sont tous ? » (tous les p) obtient comme réponse « parce que je ne vois plus rien »¹⁴²⁶). **Il est remarquable de noter que le formalisme « non $\exists x (x \in \tilde{A} \text{ et } p(x))$ » équivaut logiquement au formalisme « $\forall x (p(x) \Rightarrow x \in A)$ » et que, cognitivement, le premier semble se substituer en acte au second. On pourrait effectivement qualifier cette équivalence, avec Gérard Vergnaud, de théorème en acte, mais risquer de confondre, sur l'essentiel en l'occurrence, analyse cognitive de l'activité et analyse logique de la tâche. Mais il convient, pour prévenir cette illusion, de rappeler que ce théorème, ainsi actualisé, est coordonné à une assimilation déformante, comme nous l'avons explicitée à plusieurs reprises.**

Nous pouvons analyser fondamentalement que si c'est bien l'équivalence des deux propositions : « non $\exists x (x \in \tilde{A} \text{ et } p(x))$ » et « $\forall x (p(x) \Rightarrow x \in A)$ » qui semble avoir été le concept organisateur dans les situations de référence, relatives à la construction du schème S_{C^T} , celui-ci n'est pas opérationnel dans la construction du schème S_{C^T} , puisque la solution p, suppose au moins la proposition « $\forall x (x \in A \Rightarrow p(x))$ » !

➤ Nous notons que le prédicat est rapidement trouvé : M en 1, T en 2, L en 4, E en 7 et B en 14, collaborent, comme une seule structure cognitive, à l'expression du prédicat

¹⁴²⁶ Réponse de B, dans un second moment d'une situation proposée antérieurement. B associe sa réponse à un regard sur \tilde{A}

« Fruit » par E en 16 ; à la condition que D.B rappelle en 15 (par un mouvement ostentatoire) et, en 16, la consigne « Tous sont p, dire p ». Mais plus exactement, il substitue l'adjectif démonstratif « ces », avec renforcement de la détermination par l'adverbe de lieu « là »¹⁴²⁷ (en 15 et 19), au pronom indéfini « tous », contenu dans la formulation initiale. L'analyse précédente et cette dernière remarque semblent pouvoir expliquer pourquoi, malgré ses relances en 17, 19, 21 et 23, il n'y parvient pas. Il obtient plus facilement, par contre, des réponses pertinentes, et en lien avec le niveau de conscience des systèmes cognitifs, dans le type d'activités précédentes, à savoir l'expression d'autres prédicats possibles : « Sucré », « Objet ».

➤ **Remarquons enfin une dernière substitution que nous analyserons plus bas : l'expression « ne que p » vient se substituer à l'expression « tous p » en 33.** Nous avons déjà remarqué ce glissement sémantique dans la situation de référence dont H.B et P sont les sujets agissants¹⁴²⁸ : H.B en 57, 86 et 88 ; P en 85 et 87. Il n'y a donc pas, semble-t-il là, de simple fait de hasard. Même s'il nous paraît difficile d'en déterminer des causes, **nous pouvons faire l'hypothèse qu'il s'agit de l'expression d'une forme intermédiaire de représentation de la totalité. A ce stade, un système oscille encore entre une conception du couple (p, x), certes générique mais centrée toujours sur la perception des objets x¹⁴²⁹ et une conception du couple (p, A), centrée sur une perception globale de l'extension¹⁴³⁰.** On peut s'étonner que le sujet adulte puisse tomber sous le coup de cette analyse. Nous n'excluons pas cela, mais en précisant que justement le système cognitif adulte s'autorise, en quelque sorte, ce qu'il admet comme une équivalence sémantique et dont il peut être conscient. Il semble que le sujet adulte se fasse l'illusion que cette conscience soit partagée par le sujet enfant. Si l'on considère donc que la locution adverbiale « ne que » vient se substituer au pronom indéfini « tous », et qu'il s'agit là d'une conversion sémiotique à l'intérieur d'un même registre, nous devons reconnaître que cette conversion peut induire ultérieurement certains obstacles puisqu'elle n'est pas congruente du point de vue de la computation¹⁴³¹ :

- pour nous en persuader, opérons sur les propositions. Soient les propositions : « tout x être p » et « ne avoir que p ». Les propositions négatives sont respectivement : « il existe x être non p » et « ne avoir pas que p » ;

- nous notons que, dans la première proposition le prédicat p devient un autre prédicat q = non p, tel que pour au moins un x, la proposition q(x) est vraie. Il y a donc poten-

¹⁴²⁷ Dans le sens connu de concentrer l'attention sur les objets concernés par le discours.

¹⁴²⁸ Sous 3.2.2.1.

¹⁴²⁹ Et d'ailleurs beaucoup de sujets disent encore « chaque x est p ».

¹⁴³⁰ On retrouve bien cela dans le test de logicité de Jean Piaget : le système cognitif ne conçoit pas la totalité « englobante » mais s'en tient à la seule considération interne de cette totalité, ici ses éléments.

¹⁴³¹ Ces notions sont précisées, dans ce même chapitre, sous 1.4.2.2.

tiellement, dans la proposition négative une référence à une autre totalité, à savoir \tilde{A} . Ainsi, aussi bien l'affirmation que sa négation renvoie à un couple (r, N) où r est un prédicat et N un ensemble dont l'extension est définie par r . D'ailleurs, cette invariance entre l'affirmative et la négative est maintenue par l'intégrité de la copule « être » ;

- nous notons que, dans la seconde proposition, le prédicat p reste inchangé entre l'affirmative et la négative. Ainsi le prédicat de l'ensemble complémentaire \tilde{A} , n'est-il pas implicite. **Il y a perte de la dualité : la négative ne renvoie pas potentiellement à \tilde{A} mais renvoie de nouveau à l'expérience de l'ensemble A . Parce que, justement, le sujet reste centré sur la seule observation des objets de A .**

En deçà d'un niveau 1, véritablement équilibré, de la compétence « catégoriser », il est donc probable que cette formulation s'impose souvent dans les situations de référence¹⁴³².

❖ **D.B va proposer ensuite, aux cinq sujets, une situation individuelle et dont il va multiplier le type en faisant tourner le matériel.** On peut les considérer comme des situations de consolidation du schème $S_{C''_f}$, à son niveau de développement actuel, et également comme situations d'évaluation de la compétence C''_f

Les situations objectives types

Moment 1

➤ Le milieu matériel : une table sur laquelle est posée une boîte fermée ; dans cette boîte, cinq à six petits cartons rectangulaires superposables, sur lesquels sont peintes les images d'objets appartenant à la même catégorie.

➤ Le milieu cognitif : le système cognitif dont plusieurs situations de référence du type précédent dont le schème $S_{C''_f}$; l'enseignant.

➤ l'énoncé verbalisé : « *Tu vas regarder dans la boîte et tu vas me dire pourquoi j'ai mis dans la boîte tous ces objets* ».

Moment 2

➤ « Pourquoi ai-je mis tous ces objets dans la boîte ? »

Les situations de référence

Moment 1

➤ Dévolution complète.

➤ Le sujet ouvrant la boîte et alignant les petits cartons devant lui.

➤ Le sujet observant attentivement les petits cartons.

¹⁴³² On pourrait faire une analyse analogue en considérant la proposition : « chaque x est p » (qui s'entend parfois dans la langue de Lilou), dès lors que le locuteur qui en fait l'usage considère que sa négative est chaque x n'est pas p . On retrouve largement cette difficulté dans le langage des adultes, lorsqu'on leur propose de construire certaines propositions négatives à partir de propositions positives.

Moment 2

Éléments discursifs

1- D.B « *Alors Baptiste, est-ce que tu sais pourquoi, j'ai mis tous ces objets dans la boîte ?* »

2- B « *Je sais pourquoi : parce que ce sont tous des jeux !* »

3- D.B « *Ce sont tous des jeux.* »

1'- D.B « *Alors Matthéo : est-ce que tu sais pourquoi, j'ai mis tous ces objets dans la boîte ?* »

2'- M « *Parce que ce sont tous des insectes !* »

D.B donne à B une autre boîte en répétant la consigne.

1''- D.B « *Et Lilou ! Alors, est-ce que tu sais pourquoi, j'ai mis tous ces objets dans la boîte ?* »

2''- L « *Parce qu'il n'y a que des outils !* »

3''- D.B « *Ce sont ?* »

4''- L « *Tous des outils !* »

5''- D.B « *Ce sont tous des outils* »

D.B donne à L une autre boîte en répétant la consigne.

1³- D.B « *Avec Enzo ! Enzo tu peux me dire pourquoi j'avais mis toutes ces images dans la boîte ?* »

2³- E « *Je ne sais pas* »

3³- D.B « *J'aimerais bien que tu trouves pourquoi... pourquoi j'ai mis ces cartes dans la boîte, il faut réfléchir un peu.... Je vais voir Timothée* »

1⁴- D.B « *Timothée, c'est bon ?... Est-ce que tu peux me dire pourquoi j'ai mis toutes ces cartes dans la boîte ?* »

2⁴- T « *Dans la boîte* »

3⁴- D.B « *Dans la boîte oui mais pourquoi ?* »

Pas de réponse...

Éléments d'analyse a posteriori

➤ Nous notons que les situations objectives sont les plus dépouillées possibles. Elles se réduisent à : l'extension d'un ensemble A, sans référence à un ensemble E dont A serait une partie ; la consigne dans laquelle on retrouve une formulation langagière qui suppose implicitement la disponibilité dans le milieu cognitif de la situation de référence précédente. Aussi, l'adverbe d'interrogation « pourquoi » qui, en d'autres circonstances ouvrirait la voie à des possibles divers, relevant de convenances personnelles des sujets, est, en fait,

l'introducteur d'une question fermée et ne renvoyant qu'à deux possibles : le sujet énonce un prédicat p ; le sujet n'énonce pas un prédicat p.

➤ **Dans la situation antérieure, la quantification universelle s'exprimait de façon concurrentielle à l'aide du pronom indéfini « tous » et de la locution adverbiale « ne...que ». Il apparaît désormais une prégnance plus forte du quantificateur « tous ».** Nous remarquerons ultérieurement que cette dernière expression reste, dans le système cognitif de Lilou, fortement ancrée au schème $S_{C'f}$. Pourtant, elle se montrera, parmi les cinq sujets, la plus perspicace pour découvrir un prédicat dans l'une ou l'autre des séances de la suite de la séquence.

➤ Le tableau, ci-dessous, renseigne sur les valeurs de deux variables P et Q, pour chacun des 5 sujets :

- la variable P qui prend la valeur :
 - 1, si un prédicat pertinent est exprimé,
 - 0, sinon ;
- la variable Q qui prend la valeur :
 - 1 si le prédicat est associé à la quantification à l'aide du pronom « tous »,
 - 0, si elle l'est à l'aide de la locution « ne...que ».

➤ Les prédicats «à découvrir» sont l'un de ceux de la liste : {Jeu, Insecte, Outil, Vêtement, Animal, Fleur}. Trois situations sont proposées à chacun des sujets. Nous présentons ci-dessous les valeurs observées.

Situations	Situation 1		Situation 2		Situation 3	
	P	Q	P	Q	P	Q
Baptiste	1	1	1	0	1	0
Enzo	0		1	1	1	1
Lilou	1	0	1	0	1	0
Mathéo	1	1	1	0	1	0
Timoté	0		0		0	
Proportions	3/5	2/3	4/5	1/4	4/5	1/4

Tableau XIII

En dehors de T, pour les quatre autres systèmes cognitifs, il apparaît que le schème $S_{C'f}$, associé à la formulation langagière « tous sont p, dire p », est partiellement équilibré. En ce sens, que le prédicat peut être découvert mais que la proportion d'expressions de la quantification universelle l'est majoritairement par la locution adverbiale « ne...que ». Nous précisons que T n'avait pu atteindre un niveau de développement de la compétence correspondant à une première construction du schème $S_{C'f}$. Et des cinq, c'était le seul. Nos analyses avaient exprimé le principe d'une impossibilité de construire directement $S_{C'f}$ sans ce pré-requis.

➤ Nous avons analysé que la substitution, relative à l'expression de la quantification universelle, conduisait finalement à une « non anticipation » de l'ensemble \tilde{A} , complémentaire de A . Une activité, s'associant à la seule observation de A , dans une situation de référence, ainsi systématisée, pourrait laisser craindre que le schème S_{Cf} ne s'en ressorte bridé dans son développement¹⁴³³. En particulier, les situations objectives précédentes excluent la relation d'inclusion de A dans E , comme un observable. Il est donc apparu, comme pertinent, de proposer des situations objectives donnant, comme des observables explicites et en opposition, les deux ensembles A et \tilde{A} , partition d'un ensemble E . On se retrouve alors proche d'un observable isomorphe à celui qui s'est construit finalement dans les situations de référence, relatives à la construction du schème S_{Cf} . Nous pensons que cet aspect va donc favoriser la construction fondamentale que nous avons formalisée plus haut¹⁴³⁴. On se retrouve avec ce que nous définissons comme l'achèvement de la réversibilité opératoire.

3.6 L'apprentissage

La construction du schème S_{Cf} , dans la situation fondamentale décrite précédemment, est celle de premières compréhensions par le système cognitif.

L'achèvement de la réversibilité opératoire, comme exercice du système cognitif, consiste en une consolidation du système fermé (R_a, S_{Cf}), encore instable, par variation des variables secondaires¹⁴³⁵, et aussi par l'introduction systématique, dans le milieu matériel, d'une forme réifiée de la relation

$$E = A + \tilde{A}$$

Il s'agira de présenter aux sujets, dans la situation objective, directement ou progressivement, une partition de l'ensemble E , en deux sous-ensembles : A et \tilde{A} et de poser la question : « pour tous x ($(x \in A$ alors $p(x)$) et $(x \in \tilde{A}$ alors non $p(x))$), dire p ».

Nous avons, dans un même tableau ci-dessous, considéré plusieurs situations perturbantes de type 1, pour la régulation R_a . L'ensemble des ces situations est ce que nous avons appelé la situation d'apprentissage. Il faut entendre également que chacune des variations des constantes plonge le système cognitif dans une situation perturbante de type 1, voire 2, pour S_{Cf} , si le changement de valeur d'une constante exige, par exemple, une adaptation au niveau de la fonction de désignation (des objets ou des mots non connus).

¹⁴³³ En d'autres termes, que le niveau 2 de la compétence ne pourrait se trouver naturellement dans la zone de proche développement de ce schème

¹⁴³⁴ Chapitre 4, sous 3.2.13. Voir l'énoncé de la loi didactique fondamentale.

¹⁴³⁵ Nous avons défini cela dans le chapitre 4, sous 3.2.1.3.

Achèvement de la réversibilité opératoire Ou opérations systématisées des inversions relatives à R_a et $R_{a'}$				
Situation d'apprentissage	Enseignant	Élèves	Système fermé (R_a, S_{Cf})	Situation didactique
Situations de référence	Enseignant observant ou agissant	Élève comprenant	système fermé (R_a, S_{Cf}) en équilibrations du type 1	Situations de compréhension
Situations objectives	1- Enseignant (e) observant 2- Enseignant (e) pouvant interroger l'un des élèves 3- Enseignant (e) demandant le rappel de la proposition : « dans la boîte, ils sont tous des p »	Elèves produisant diverses réponses dont des hypothèses sur p Élèves produisant des inférences Elèves argumentant	Les deux schèmes $S_{C'f}$ et $S_{C''f}$ liés réciproquement dans l'activité cognitive	Situations de référence
			Consolidation de la réversibilité opératoire $R_{a'}$ et $R_{a''}$	
Milieu matériel : un ensemble d'objets conservés par l'enseignant ¹⁴³⁶ ; un énoncé de tâche sous la forme langagière : « tous les objets posés, de ce côté ci, sont des p, ceux posés, de ce côté-là, ne sont pas des p. Dire p ».	Enseignant(e) posant les objets un par un et prononçant la consigne, avec accent tonique sur le « tous »	Elèves face aux objets posés par l'enseignant(e) qui leur fait face. Les systèmes cognitifs disposent des constructions précédentes.	Systèmes (R_a, S_{Cf}) et ($R_{a'}, S_{C'f}$)	Situations objectives

Tableau 6

Analyse a priori

Analyse logique de la tâche

Un ensemble E est donné ainsi que sa partition explicite $\{A, \tilde{A}\}$:

$$E = A + \tilde{A} \text{ et } A \cap \tilde{A} = \phi.$$

L'énoncé de la tâche exprime que : il existe p tel que $A = \{x \in E \text{ et } A \Leftrightarrow p(x)\}$.

Nous désignons par S1, S2, S3, S4, S5 et SI un sujet élève, S'1, S'2...S'I le sujet enseignant(e), à des moments distincts, et considérons le dialogue formel (interne à la situation de référence) suivant :

- S1 : $\forall x (x \in A' \Leftrightarrow p(x))$, où $A' \subset A$: « ils sont tous des p' » ;
- S2 (ou S'2) : $\exists x (x \in A \text{ et non } p'(x))$: « non celui-ci n'est pas un p' » ;
- S3 : $\forall x (x \in A \Rightarrow p''(x))$: « ils sont tous des p'' » ;
- S4 (ou S'4) : $\forall x (x \in A \Rightarrow p''(x)) \text{ et } \exists y (y \in \tilde{A} \text{ et } p''(y))$: « oui mais celui-là, de ce côté est aussi un p'' » ;
- S5 : $\forall x (A \Rightarrow p'''(x))$: « ils sont tous des p''' », « et là, il n'y a pas de p''' ».

¹⁴³⁶ Dont le contenu n'est pas encore visible.

Le dialogue conduit à exprimer que : $\forall x (x \in A \Leftrightarrow p''(x)) : \ll p'' = p \gg$.

Analyse cognitive de l'activité

Nous pouvons considérer que S1, S2, S3...SI sont des sujets distincts.

L'analyse va concerner uniquement les systèmes cognitifs en apprentissage, et pour lesquels, nous supposons un niveau de compréhension, produit de la situation précédente.

➤ L'extension d'un ensemble A est donnée. L'énoncé de la tâche contient les éléments implicites de la formulation langagière « tous les A et seulement les A sont des p ».

➤ Celle-ci et la phase « dire p » activent la régulation anticipatrice R_a . Celui-ci sélectionne le schème $S_{C''f}$.

➤ **Possible 1** : il y a encore absence de cohésion de la relation $\forall x (A \Leftrightarrow p(x))$. La recherche de p prend la forme restrictive S1. On peut concevoir le couple (S1, S2), avec la production d'une inférence dont l'un des prémisses est un contre-exemple : $\exists x (x \in A \text{ et non } p'(x))$.

➤ **Possible 2** : l'extension de l'ensemble complémentaire \tilde{A} est donnée et caractérisée dans l'énoncé par : « aucun \tilde{A} est un p ». Cette indication offre au système la possibilité d'une régulation de contrôle : $p''(x)$ et $x \in \tilde{A} \Rightarrow p'' \neq p$. Ce qui donne le couple (S3, S4) avec production d'une inférence dont l'un des prémisses est un contre-exemple à l'affirmation : $(p'' = p)$. Remarquons que l'on peut bien avoir, dans cette situation, $\forall x (x \in A \Rightarrow p''(x))$.

➤ **Possible 3 ou la réponse nécessaire (au sens logique du terme)** : les inférences de type précédentes, si elles ne conduisent pas à une absence de réponses (la définition du prédicat p n'étant pas provisoirement accessible) enseignent rétroactivement sur la définition du prédicat p. On peut considérer comme possible le couple (S5, SI).

❖ **Nous reprenons notre séquence dans la classe de D.B et avec le même groupe de cinq élèves.**

Nous avons choisi de présenter, ci-dessous, l'une de ces situations, (la troisième d'une série de cinq), car elle a l'avantage de montrer en quoi un certain équilibre du schème $S_{C''f}$ favorise la production plus libre (libérée d'autres contraintes cognitives) des inférences fondamentales qui se construisent implicitement, à partir du principe du tiers exclu :

- (1) non $(\forall x(x \in A \Leftrightarrow p(x)))$ car $\exists x (p(x) \text{ et } x \in \tilde{A})$. Et de même
- (2) $\forall x(x \in A \Leftrightarrow p(x))$ car $\forall x ((x \in A \Rightarrow p(x)) \text{ et } (x \in \tilde{A} \Rightarrow \text{non } p(x)))$ ¹⁴³⁷

Ces deux relations sont à considérer comme des invariants opératoires du schème S_C

¹⁴³⁷ Notons que les deux dernières propositions sont logiquement équivalentes. Notre usage de la conjonction « car », qui est donc réductrice, anticipe l'analyse cognitive de l'activité de la séance qui va suivre.

Mais avant d'introduire de telle situation, D.B propose **une situation préliminaire**¹⁴³⁸:

- 1- D.B « *Est-ce que vous vous souvenez de ce que je vous demandais la dernière fois ?* »
- 2- M « *Tu venais, tu nous donnais une boîte et tu nous demandais de quoi ça parlait* ».
- 3- D.B « *De quoi ça parlait...* »
- 4- M « *Par exemple, quel objet, ...par exemple, s'il y a que des animaux* »
- 5- D.B « *Ah ! S'il y avait que des animaux, alors il y avait, pour toutes, des images d'animaux. On pouvait les mettre dans la boîte* ».

Analyse a posteriori

D.B provoque une évocation des situations précédentes.

Un niveau 1 de conscience réfléchie est représenté par le système cognitif de Mathéo, en 4, si on tient compte de sa réussite dans les trois situations précédentes : 3 sur 3.

Cela ne suffit pas à D.B qui introduit un fait de causalité dans l'évocation ; ce qui relèverait d'une compétence d'un certain système cognitif, relativement à une prise de conscience de niveau 2, mais que ces élèves n'ont pas.

D'autre part, nous retrouvons, dans l'évocation de Mathéo, l'ancrage de la locution « ne...que » (sous une forme tronquée), dans l'exercice du schème $S_{C''f}$.

D.B opère alors lui-même la substitution en remplaçant la locution « ne...que » par le pronom « toutes ». On peut penser qu'il exprime en même temps une équivalence sémantique. Notons, dans la formulation de D.B « il y avait pour toutes... », une insistance (pour) sur l'aspect distributif du prédicat « Image d'animal ». Mais le pluriel « animaux » connote aussi une perception globale de l'extension A. On retrouve implicite la coordination, extension-compréhension.

Cette double insistance donne la mesure de l'insuffisance du schème $S_{C''f}$, tel qu'il s'est équilibré au sein des situations précédentes, pour nos cinq systèmes cognitifs.

C'est aussi l'objet des situations qui suivront de pallier ces insuffisances. Ce qui correspond, dans notre description formelle, à l'achèvement de la réversibilité opératoire : R_a' et R_a'' , inverses l'une de l'autre.¹⁴³⁹ La situation, que nous décrivons ci-après, est introduite par la phrase suivante de D.B : « *Alors, aujourd'hui, on veut faire quelque chose qui ressemble* ».

¹⁴³⁸ Ce qui correspond à une démarche pédagogique assez classique.

¹⁴³⁹ Voir Tableau 3 sous 3.2.3.

C'est dire, la volonté de soutenir l'attention des sujets sur une sorte de continuité entre la situation préliminaire et les situations qui vont se présenter : les situations précédentes sont bien à entendre comme disponibles, dans la situation objective qui doit suivre.

La situation objective type

Le milieu matériel

➤ D. B, assis devant le groupe des cinq sujets (B, E, L, M et T), de part et d'autre d'une même table ; une boîte fermée contenant des bandes cartonnées (5 ou 6), rectangulaires, superposables et représentant chacune 5 images alignées.

➤ D.B sort de sa boîte une fiche cartonnée représentant le wingding suivant : ☺.

➤ Le discours de D.B : « *Avec cette petite fiche là, ça veut dire que je veux bien les mettre dans ma boîte* ». Il fait un geste balayant de la main l'endroit de la table où il va les placer.

➤ D.B sort de sa boîte une fiche cartonnée représentant le wingding suivant : ☹.

➤ Le discours de D.B : « *Et de l'autre côté, avec ce petit dessin, là je poserai les petites fiches que je ne veux pas mettre dans la boîte* ». Il fait un geste balayant de la main l'endroit de la table où il va les placer.

➤ D.B prend dans sa main toutes les fiches (5 à 6 fiches). Et, une par une, il les place sur la table sous les wingdings, selon les deux événements suivants :

- la fiche correspond à la catégorie A, conçue par l'enseignant. Dans ce cas, D.B la pose sous le wingding ☺, en expliquant : « *Je la pose ici parce que celle-là, je pourrai la mettre dans ma boîte* » ;
- la fiche correspond à la catégorie Ñ. Dans ce cas, D.B la pose sous le wingding ☹, en expliquant : « *Je la pose ici parce que celle-là, je ne pourrai pas la mettre dans ma boîte* » ;
- finalement, le milieu matériel, tel qu'il apparaît aux sujets, est représenté par la photo suivante :



Le milieu cognitif

- Les situations de références précédentes.
- La situation de référence préliminaire.
- La situation fondamentale correspondant au début de la construction du schème $S_{C''f}$ ¹⁴⁴⁰
- Les systèmes cognitifs disposant d'un schème $S_{C''f}$ ayant atteint la forme définie précédemment.
- Une première représentation de la situation, induite par l'énoncé contenant la formulation langagière F_c : « *Moi, je voudrais savoir pourquoi je voudrais mettre toutes ces fiches là ensemble, dans ma boîte, et pas celles-là* ». Ce discours est renforcé par un geste de la main, comme précédemment.

Analyse a priori¹⁴⁴¹

Nous démarrons cette analyse à partir de l'hypothèse d'un schème $S_{C''f}$, défini par un développement atteint à l'issue de la situation dont il est rendu compte, entre autre, dans le tableau 5. Nous n'analyserons pas plus le cas de Timoté, puisque, rappelons-le, son système cognitif ne dispose pas du schème $S_{C''f}$ ¹⁴⁴².

Analyse logique de la tâche

Il existe p tel que la proposition $(\bigwedge_{x \in A} p(x))$ est vraie, et la proposition $(\bigvee_{x \in \tilde{A}} p(x))$ est fausse¹⁴⁴³. D'où : $\forall x (x \in E, x \in A \Leftrightarrow p(x))$

Analyse cognitive de l'activité

Éléments de la situation du dénoté de la compétence C''_f : un ensemble A ; la formulation langagière : « dans A , tous sont des p , dire p » ; l'activité complexe déjà décrite et reposant sur une activation virtuelle du schème $S_{C''f}$ ¹⁴⁴⁴ ; le résultat observable final de l'activité : l'expression verbale de p .

Éléments d'analyse a posteriori¹⁴⁴⁵

La situation de référence

¹⁴⁴⁰ Voir 3.2. Année 1.

¹⁴⁴¹ Une analyse a priori a déjà été faite. Nous l'exprimons ici quelque peu différemment mais, fondamentalement, en respectant des équivalences logiques.

¹⁴⁴² Ce qui ne veut pas dire, qu'a posteriori, et déjà dans la situation précédente, l'étude de son cas et de quelques autres, que nous avons repérés dans d'autres classes, n'est pas envisageable, en terme développemental. Mais cette étude, alors clinique, pourrait nous faire sortir de notre propos qui ne vise que le sujet épistémique. Notons toutefois qu'une analyse de situations qui ne néglige pas l'évaluation des fonctions psychiques supérieures, comme par exemple, la mise en mémoire volontaire, permet d'envisager des remédiations spécifiques pour ces cas cliniques

¹⁴⁴³ $P(x)$ est vraie pour tout x de A et $p(x)$ est fausse pour tout x de \tilde{A}

¹⁴⁴⁴ On peut revoir l'analyse faite au début de ce paragraphe.

¹⁴⁴⁵ Éléments qui sont donc à rapprocher de l'analyse a priori faite en début de paragraphe.

D.B laisse les enfants chercher. Pour tous, le regard se focalise d'abord sur la représentation de l'ensemble A. On pouvait préciser cela comme un possible, étant connu le milieu cognitif initial.

Éléments discursifs

E lève le doigt.

- 1- D.B « *Tu as une idée Enzo ?* »
 - 2- E « *Là, il y a des étoiles* ». E désigne le groupe des fiches associées à A. Il désigne alors le groupe des fiches associées à \tilde{A} . « *Là, il a aussi des étoiles. Ah non !* ». Il se cache le visage pour, semble t-il, manifester 'qu'il a fait fausse route'.
 - 3- T « *Là, là, là, là, une ampoule* », en désignant chaque fiche associée à A¹⁴⁴⁶.
 - 4- M « *Non, là, il y a une ampoule, en désignant une fiche du groupe associé à \tilde{A}* ».
 - 5- D.B « *Ah ! Ici, il a une ampoule (en désignant la même fiche) et on n'a pas le droit de la mettre. Alors, c'est pas ça !* »
 - 6- D « *Mathéo, tu avais une idée ?* »
 - 7- M « *En fait...* » (il lance un regard, alternativement sur A et \tilde{A} puis désigne une image d'une des fiches du groupe associé à A), « *... elles ont toutes des trucs comme ça* »¹⁴⁴⁷
 - 8- D.B « *Oui, ça, ça s'appelle un cadenas* ».
 - 9- E « *Non !* »
 - 10- D.B « *Pourquoi Enzo ?* »
- E montre une fiche du groupe associé à \tilde{A} et qui présente une image de cadenas.
- 11- D.B « *Ah oui, elle a un cadenas et on n'a pas le droit de la prendre* ».
 - 12- E « *J'ai une idée !* »
 - 13- D.B « *Oui ?* »
 - 14- E désigne, dans le groupe des fiches associées à A, trois fiches qui ont une image de sapin en disant : « *il y a trois sapins là* ».
 - 15- M « *Oui, mais là aussi, il y en a* ». Il les désigne dans le groupe des images associé à \tilde{A} .

¹⁴⁴⁶ Notons qu'effectivement, une image d'ampoule est présente sur toutes les fiches associées à A

¹⁴⁴⁷ En fait toutes les fiches de A ne présentent pas ce même « truc ».

16- D.B « *Donc ça ne peut pas être ça. Lilou avait tout à l'heure une idée* » Lilou a levé son doigt puis l'a rapidement baissé, après l'intervention de T. Mais apparemment D.B l'avait noté.

17- L « *Ah, je sais ! Il y a toujours quelque chose de rose* ».

18- D.B « *Alors, on peut regarder* »

19- M « *Ben non, il y en a un là !* ». Il désigne une fiche du groupe associé à \tilde{A} .

20- T « *Moi, je sais, il y a toujours quelque chose de vert* ».

21- E « *Ben non, parce qu'il y en a un* ». Il désigne une fiche du groupe associé à \tilde{A} .

22- E « *Ah c'est le jaune* ».

...

Puis Enzo et Mathéo se mettent à discuter, en désignant à tour de rôle des fiches. Mais leurs échanges sont inaudibles (ils sont penchés sur la table et font abstraction de tout le reste du groupe). Il semble qu'ils se renvoient des arguments. Nous avons perçu quatre de tels échanges.

27- B « *Moi, moi, je sais, c'est le jaune ! Là il y en a pas (et il désigne le groupe des fiches de \tilde{A}). Et là, y en a une sur ça, une sur ça, une sur ça, une sur ça* ». Il désigne successivement les quatre fiches de A

28- D.B « *Alors, qu'est-ce qu'on peut dire Baptiste. Ces fiches là, elles ont...* »

29- B « *Elles ont toutes des trucs jaunes* »

30- D.B « *Elles ont toutes une figure jaune. Donc, celles-là, je peux les mettre dans ma boîte !* » ;

Analyse

➤ En 2, Enzo fait une confusion puisqu'il se lance dans la recherche d'un prédicat caractérisant \tilde{A} et non A. Il constate que des fiches des groupes associés respectivement à A et \tilde{A} vérifient le prédicat p' « avoir une étoile ».

Son inférence : $\exists x \exists y (x \in \tilde{A} \text{ et } p'(x) \text{ et } y \in A \text{ et } p'(y))$.

D'où sa conclusion : non $(\forall z (p'(z) \Rightarrow z \in A))$. On ne retrouve finalement pas en Enzo un possible de notre analyse. Cela provient de sa confusion initiale.

➤ En 3, 4 et 5, on retrouve précisément respectivement les sujets S3, S4 et S'1 : $\forall x (x \in A \Rightarrow p''(x))$ et $\exists y (y \in A' \text{ et } p''(y))$ où p est le prédicat « Avoir une ampoule ». Ce en quoi, on retrouve le possible 2 ; d'où la conclusion : non $(\forall z (p''(z) \Rightarrow z \in A))$.

➤ En 7, Mathéo se définit comme un sujet S1 puisqu'il le prédicat « avoir un truc » (« avoir un cadenas ») n'est vérifiable que sur une partie stricte de A . Enzo, en 9 et 10 ne se définit pas comme un sujet S2 mais comme un sujet S4. En d'autres termes, on a pour ce sujet, comme inférence explicite: $\exists x \exists y (x \in \tilde{A} \text{ et } p''(x) \text{ et } y \in A \text{ et } p''(y))$. On note donc qu'il produit ce type d'inférence pour la deuxième fois. On retrouve donc une forme hybride correspondant aux possibles 1 et 2.

➤ Pour 14, 15 et 16, l'analyse est la même mais les rôles des sujets Mathéo et Enzo sont inversés. On retrouve donc des sujets S2, S4 et S'2.

➤ Pour 17 et 19, l'analyse est la même que pour 3 et 4. Lilou qui est S3 propose le prédicat « avoir du rose » (une image rose). Mathéo est alors S4. Il s'agit donc d'un possible 2.

➤ En 20 et 21, Timoté¹⁴⁴⁸ est S1 et Enzo est S4. On retrouve encore Enzo sur le même type d'inférence.

➤ En 22, Enzo énonce le prédicat p , « solution de la tâche proposée » : « avoir du jaune ». Il est défini par le sujet SI qui est un possible 3.

➤ En 27, cette formulation est validée totalement par Baptiste : $\bigwedge_{x \in \tilde{A}} \text{non } p(x)$ vraie et $\bigwedge_{x \in A} p(x)$ vraie. Baptiste est donc le sujet S5 du possible 3.

➤ En 29, on peut noter une expression de la quantification universelle à l'aide du pronom « toute » facilement obtenue.

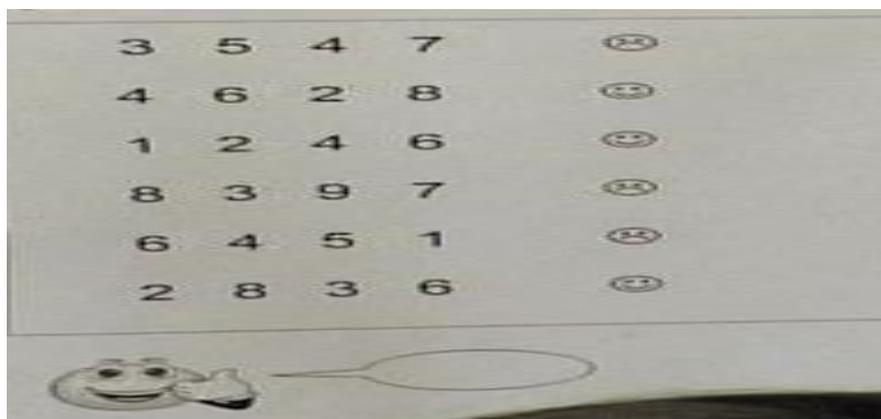
➤ En 30, D.B confirme que le problème est bien résolu, en reprenant une formulation proche de celle contenue dans l'énoncé « je peux les mettre dans ma boîte » comme en 5, de la situation préliminaire.

❖ **Des situations analogues seront proposées par B.C à ses élèves de grande section.** Nous présentons, ci-dessous, le principe des situations objectives et l'une des situations de référence, la deuxième d'une série de quatre.

¹⁴⁴⁸ Il serait intéressant, quoique hors de propos ici, d'interpréter l'intervention de Timoté. Ce dernier reste prisonnier d'une forme de contrat (qui définit les contours de ses participations à différentes tâches). Toutefois, le concept de contrat qui peut certainement rendre compte de certains comportements stéréotypés n'est que descriptif et non explicatif.

Situation préliminaire

➤ L'enseignante, (B.C) assise sur une chaise, à proximité d'un groupe de 5 élèves ; tous faisant face au tableau sur lequel est affiché l'image suivante :



On reconnaît les wingdings dont l'enseignant D.B a fait l'usage.

Avec la consigne écrite au-dessus : *regarde la liste de chiffres et trouve le chiffre auquel pense le petit bonhomme ;*

➤ Nous désignerons par E l'un des élèves.

B.C « *Qu'est-ce qu'il faut faire ici* »,

E « *Il faut trouver un chiffre* ».

.....

E se lève et va barrer les listes repérées par le « bonhomme pas content », comme le lui demande B.C ;

La situation objective type

Le milieu matériel

➤ L'image affichée au tableau : \tilde{A} et par opposition A sont ainsi signalés dans deux registres sémiotiques différents mais congruents.

➤ L'enseignante, (B.C) assise sur une chaise, à proximité du groupe de 5 élèves et tous faisant face au tableau, sur lequel est affichée l'image suivante :



Avec la consigne écrite au-dessus : regarde la liste de chiffre et trouve le chiffre auquel pense le petit bonhomme.

Le milieu cognitif

- La situation de référence préliminaire
- La situation de références précédente.
- Les situations de référence précédentes ayant conduit à construire un type pour $S_{C'f}^{1449}$.
- La situation fondamentale correspondant au début de la construction du schème $S_{C''f}^{1450}$

Éléments d'analyse a posteriori

- On peut noter que la consigne n'épuise pas la totalité de l'énoncé : celui-ci ne fait pas explicitement référence à \tilde{A} . La raison est que l'énoncé complet est devenu un implicite dans le milieu cognitif : une situation du même type ont été déjà proposée. C'est ce qui va être confirmé par le déroulement de la situation de référence¹⁴⁵¹.
- On retrouve le couple (S1, S4) par 2 fois.
- Un élève se retrouve dans la position du sujet S5 : il énonce le prédicat sous la forme suivante : « *c'est le 2* ».
- C'est l'enseignante qui demande une validation.
- Un autre élève E se retrouve alors dans la position SI par l'énoncé : « *Parce qu'il n'est pas dans 'pas content' et il l'est, dans tous 'ceux contents'* ».
- Un autre élève E reprend cette validation : « *Le 2 est dans toutes les bandes contentes et il n'est pas là* » en montrant les trois autres bandes 'pas contentes' On obtient définitivement un possible 3.

Conclusion

Nous notons donc des comportements analogues d'une classe à l'autre :

- Les inférences correspondant aux possibles 1 et 2.
- L'expression du prédicat à la suite d'un débat, donc un sujet S5.
- La validation finale sous la forme « $\bigwedge_{x \in A} (p(x) \text{ vraie}), \text{ et } (\bigvee_{x \in \tilde{A}} (p(x)) \text{ est fausse})$ »¹⁴⁵². **On retrouve cette même forme de validation pour deux élèves, B, dans la**

¹⁴⁴⁹ Voir les situations sous 3.4, année 2.

¹⁴⁵⁰ Voir 3.2. Année 1.

¹⁴⁵¹ Nous avons évoqué en groupe l'énoncé suivant : « Les listes que veut garder le petit bonhomme ont **toutes** le même chiffre. Trouve ce chiffre ». L'enseignante l'a donc adapté.

¹⁴⁵² « On vérifie que $p(x)$ est vraie pour tout x de A . On vérifie que x pour chaque x de \tilde{A} , on ne trouve pas $p(x)$ vraie ».

classe de D.B et E dans la classe de B.C : un jugement synthétique sur \tilde{A} et un justement analytique sur A. La validation reconstruit A à l'aide du schème S_{Cf} et vérifie la complétude de A par « un regard sur \tilde{A} », et ceci par l'exercice d'une régulation de contrôle relative à celui du schème S_{Cf} , ce qui est remarquable, car pouvant être interprété comme une recherche de coordination entre l'extension et la compréhension. Pour autant que l'on puisse faire l'analyse de ce fait, il semble donc que l'on perçoive, a posteriori, l'exercice sous-jacent du schème S_{Cf} et donc la reconstruction virtuelle de la catégorie A, le prédicat p étant donné, comme nous l'avons maintes fois rappelé ;

➤ L'expression explicite et spontanée de la quantification : nous trouvons là, confirmation de ce qui vient d'être dit et, de plus, une indication de la fermeture d'un système (R_a, S_{Cf}).

❖ **Situations pour des petites sections**¹⁴⁵³

L'enseignante H.B a multiplié les situations relatives à la construction du schème S_{Cf} , en insistant systématiquement sur la quantification, et proposées à des sujets, d'abord individuellement puis semi-collectivement (groupe de 3 ou 4 sujets).

De même, de nombreuses situations seront proposées par H.B à ses élèves de petits sections PS2¹⁴⁵⁴ et concernant la construction du schème S_{Cf} , puis sa consolidation (situations proposées à un seul sujet ou à des petits groupes de 2 ou 3 sujets).

Nous présentons ci-dessous le principe des situations objectives et l'une des situations de référence, la cinquième d'une série de huit.

La Situation objective

Le milieu matériel

➤ Six cartes, disposées sur une petite table, ce dont rend compte l'image ci-dessous.



¹⁴⁵³ Enfants âgés de 2 ans à 4 ans.

¹⁴⁵⁴ Seconde année des classes de petites sections.

➤ L'énoncé suivant : « *Pourquoi les ai-je mises ensemble ? Qu'est-ce qu'elles ont toutes de pareil ?* », en montrant le groupe des cinq cartes.

Le milieu cognitif

- L'enseignante disposant les cartes devant un élève.
- Un sujet élève regardant l'enseignante disposer d'une façon particulière les six cartes.
- Un système cognitif ayant atteint un niveau d'équilibre d'un schème S_{C_f} et tel que nous l'avons rappelé à plusieurs reprises.
- Ce même système dispose d'une compétence C''_f , dont le dénoté est constitué de quatre situations de référence « qui font type » ;

La situation de référence

- Dévolution complète : l'enseignante n'agissant pas mais veillant à éliminer des perturbations externes (bruits, autres élèves voulant intervenir...).
- Réponse sans attendre de Corentin (3 ; 7) : « *Elle, elle est allongée, les autres sont toutes assises* ».

Analyse a posteriori

➤ Nous ne notons pas, dans la situation objective, d'énoncé isomorphe à ceux présentés par D.B et B.C, et tels que pourtant ils vont se retrouver dans quelques-unes de huit autres situations, toutes proposées à chacun des élèves de la classe (13 élèves. Mais entre 3 et 8 situations chacun, en fonction des absences) : par exemple, et par analogie (avec ce qu'elle énonce dans d'autres situations du même type), H.B aurait pu dire, en écartant sur la gauche la carte représentant une statuette allongée : « celle-là, je ne la veux pas » et, en montrant les autres : « celles-ci, j'en veux bien ».

➤ On comprend toutefois, pourquoi la réponse de Corentin peut être aussi exhaustive : le système cognitif dispose de suffisamment d'indicateurs sémiotiques pour activer le schème $S_{C''_f}$ tel qu'il s'est construit dans les situations antérieures. L'énoncé complet est donc un implicite dans le milieu cognitif.

➤ **Précisément, on note, dans la réponse de Corentin, une formulation identique à ses pairs plus âgés : $\bigwedge_{x \in A} (p(x) \text{ vraie})$ et $(\bigvee_{x \in \tilde{A}} p(x) \text{ est fausse})$. Avec utilisation spontanée de la quantification universelle.**

➤ **Il est remarquable de noter que la nécessité de produire un prédicat a permis à Corentin de surmonter l'éventuelle difficulté relative à des positionnements pourtant bien différents des objets de l'extension de A.**

Conclusion

Nous pourrions déduire, des analyses qui précèdent, une confirmation du caractère universel de la construction proposée, dès lors qu'elle s'adresse à un sujet épistémique. Toute proportion gardée, et concernant l'ensemble des objets du milieu matériel, on atteint relativement à la construction du schème S_{Cf} , un développement de niveau analogue pour des sujets de petites section et des sujets de grandes section¹⁴⁵⁵.

3.7 Analyse complémentaire sur le processus canonique d'adaptation

Elle concerne le schème de la comparaison binaire et le franchissement de l'obstacle épistémologique associé à son inertie. Notons le S_i , comme composante d'une compétence¹⁴⁵⁶.

Précisons que l'analyse qui suit concerne le processus constitutif d'une réorganisation structurale accompagnant la construction du schème S_C de la catégorisation.

➤ **Le franchissement de l'obstacle épistémologique, défini par l'inertie du schème S_i de la comparaison binaire, devient en fait celui de l'obstacle, défini par l'inertie du schème $S_{C'f}$, obtenu lors d'une première construction et dont un certain schème S'_i (la composante directe du schème S_i) reste un élément constitutif, pour de nombreux sujets, à l'issue des premières phases de la compréhension.¹⁴⁵⁷**

Le développement structural sous-jacent est donc relatif à la reconstruction du schème $S_{C'f}$.

Rappelons que cette construction est la forme nécessaire que prend la résolution de la tâche contenue dans la situation perturbante $S_{C''f}$.

➤ Nous reprenons ci-dessus les étapes de ce franchissement¹⁴⁵⁸, de façon très simplifiée, puisqu'il n'est là décrit que le développement de la composante S'_i vers la composante S'_f . L_i désigne, ci-dessous, la compétence associée. R_i est la régulation anticipatrice correspondante.

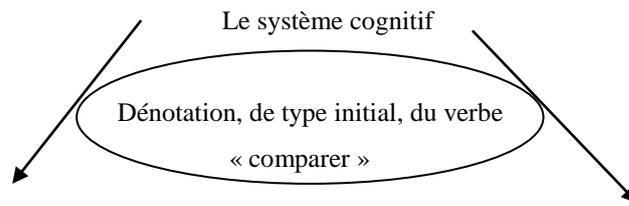
¹⁴⁵⁵ Et c'est ce qui va se confirmer, dans d'autres situations, proposées par H.B à ses élèves.

¹⁴⁵⁶ Nous changeons de police afin ne pas confondre avec les notations utilisées précédemment. En particulier, voir que $S_i \subset S_{Ci}$

¹⁴⁵⁷ Possibles 1, 2 sous 3.2.

¹⁴⁵⁸ On peut alors noter ci-dessous un modèle du schéma formel, développé dans le chapitre 4, sous 2.3.5.3.

- o Etat initial de la compétence : \mathbb{L}_i



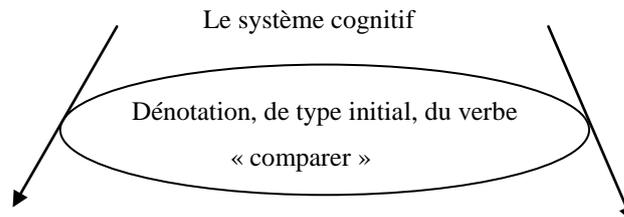
Performance associée :
la comparaison binaire

Structure \mathbb{S}_i de schèmes spécifique¹⁴⁵⁹
initiale $\{S_{C0i}, S_{C1i}, \dots\}$

- i. indicateurs sémiotiques spécifiques ;
- ii. assimilation de ces indicateurs par une régulation R_i ;
- iii. activation du schème \mathbb{S}'_i , sélectionné par R_i ;
- iv. assimilation normale par ce schème, disponible pour une opération de comparaison binaire ou ternaire.

- 1 Etat suivant de la compétence : \mathbb{L}_i

Première phase de la compréhension



Performance associée :
La comparaison binaire élargie (possibles 1 ou 2)

Structure \mathbb{S}'_i de schèmes spécifique
initiale $\{S_{C'0i}, S_{C'1i}, \dots\}$

- i. situation \mathbb{S}_i , perturbante de type « 1 et 2 »¹⁴⁶⁰, situation de comparaison binaire élargie définie lors de la première construction du schème $S_{C'f}$;
- ii. déformante, relativement à la quantification universelle, lors de la construction de $S_{C'f}$ (concerne tous les cas sauf éventuellement le possible 3).

¹⁴⁵⁹ On retrouve cela dans le tableau 3 sous 1.3.1. Pour rappel :

S_{C0i} = Schèmes coordonnés de : la désignation ; la négation.

S_{C1i} = schèmes coordonnés de : la comparaison binaire ; autres schèmes : constructions relevant d'une anticipation locale et fluctuante d'une configuration selon divers critères de rassemblement.

¹⁴⁶⁰ Elle concerne la situation relative à la construction d'un schème \mathbb{S}'_i . Elle est de type « 1 et 2 » et non seulement 1, car la comparaison n'a pas pour seule finalité l'appariement de 2 objets. C'est en fait, en une récurrence de cet appariement que se forme l'activité. Il y a donc une construction qui ne se limite pas à la seule comparaison binaire.

2 Variation dans la situation de type unique. Situation nouvelle
Deuxième phase de la compréhension.

La situation perturbante pour S'_i devient de type 3 (sauf éventuellement pour le possible 3). Elle concerne une situation de référence virtuelle $\mathcal{S}_{C'f}$, introduite lors de la construction de $S_{C'f}$. Il est ainsi défini le franchissement indirect de l'obstacle épistémologique, associé à l'inertie du schème $S_{C'f}$ dont S'_i est constitutif. Ce franchissement va prendre alors un caractère de nécessité, puisque qu'il est une solution pour l'achèvement de la construction structurale de S_{Cf} .

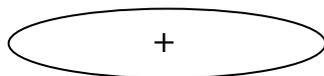
- i. mêmes indicateurs sémiotiques (ensemble, tous p) ;
- ii. le système dispose initialement d'une structure de schèmes spécifiques S'_i et activée indirectement par la régulation R_a' , anticipatrice de $S_{C'f}$;
- iii. nous avons vu, en fait, que l'activation du schème $S_{C'f}$ supposera une construction virtuelle de $\mathcal{S}_{C'f}$ par une régulation R_a'' , solution du système, au sein du régulateur, lors de la structuration en un système fermé (R_a, S_{Cf}) . Toutefois, dans la situation de référence $\mathcal{S}_{C'f}$, le schème S'_i , ne se trouve activable, toujours virtuellement, que sur une partie visible pour le sujet, une restriction de l'extension ;
- iv. déséquilibre au sein du régulateur, car le feedback du système qui prend la forme d'un germe de régulation pour R_a'' est non encore opérationnel ;
- v. l'assimilation normale par S'_i est refusée par le milieu¹⁴⁶¹. Une représentation initiale de la situation de référence, construction du schème $S_{C'f}$, a conduit le système à lui associer, comme on vient de le dire, l'évocation d'une situation du dénoté de la formulation langagière « mettre ensemble tous les p ». Mais le schème S'_i de la « comparaison de 2 ou 3 objets » et activé de façon récurrente, rend inassimilable, par le système, une telle situation et, non seulement parce p n'est pas donné, mais parce que la quantification universelle n'est pas encore véritablement un concept organisateur de R_a' .

A ce stade, dans une même représentation de la situation de référence $\mathcal{S}_{C'f}$, se retrouvent deux états différenciés et antinomiques de la réalité observée : une situation de comparaison locale binaire ou ternaire récurrente et une situation de comparaison globale. Le milieu invalide toute forme de comparaison locale et renvoie systématiquement le système cognitif à une comparaison des objets déjà perçus, mais autrement. Ainsi,

¹⁴⁶¹ Ce qui, à terme, conduit à l'instauration, dans le milieu, d'un conflit que nous avons rappelé dans le chapitre 3 : le conflit sociocognitif.

dans la situation de référence cohabitant, un temps, deux mondes :

dénoté unique ou monde des affirmations : le schème S_{C^f} , dont S'_i est un constituant, est opérationnel¹⁴⁶² ;



situation nouvelle ou monde des négations : le schème $S_{C^f n}$ est virtuellement pas opérationnel¹⁴⁶³.



3 Régulation 1. Différenciation de la dénotation de la compétence C_i

Troisième phase de la compréhension.

i. observations spécifiques plus systématiques : les mêmes indicateurs sémiotiques peuvent renvoyer à des références opposées : une situation nouvelle ou occurrence négative de la réalité a la caractéristique de ne pas être directement assimilable par la structure de schèmes S_{C^f} ;

ii. schème spécifique ou régulation stabilisant la décentration¹⁴⁶⁴ : le point de vue de l'enseignant(e) est « réécouté ». Une attention logique d'un certain niveau est portée à d'autres indicateurs. Cette attention est orientée par une volonté d'une autre nature : de passive, lors de la perception des indices sémiotique initiaux, elle doit se voir plonger dans une forme d'attention élargie à l'ensemble des indices sémiotiques que présente la situation et qui jusqu'ici étaient négligés. L'invalidation systématique, par le sujet enseignant, de la réponse produite par le système cognitif, est réinterprétée à un niveau différent : cette invalidation ne concerne pas seulement la réponse, auquel cas, la rétroaction se limite à n'être qu'un feedback positif, donc aboutissant à la réactivation intermédiaire du schème S'_i , coordonnée à des changements mineurs. Cette invalidation, à force, devrait aboutir à une régulation sous la forme d'une feedback négatif, se traduisant effectivement par l'inhibition de certains constituants du schème S_{C^f} dont, en particulier,

¹⁴⁶² Par assimilation déformante.

¹⁴⁶³ Puisque donc la quantification universelle ne joue pas dans la conservation du prédicat.

¹⁴⁶⁴ Conformément à l'approche que nous avons conservée tout au long de ces chapitres 4 et 5, cette décentration est, comme d'autres fonctions, l'expression d'une compétence également en développement. Elle n'est pas une donnée génétique qui se manifeste dans une situation qui en active l'appel. Elle est un construit progressif, participant, comme d'autres fonctions, au contenu actuel comme au contenu potentiel du développement de l'intelligence du système cognitif.

le schème S_1 ¹⁴⁶⁵ ;

- iii. la quantification universelle qui, dans la situation de l'exercice du schème S_{C^f} , pouvait être traitée de façon partielle, est précisément l'indicateur sémiotique dont la re-représentation va initialiser la construction d'un nouveau schème S_{C^f} , ce qui participe, rappelons le, de la construction de schème S_{C^f} ;
- iv. l'auto régulation du système se manifeste par une rétroaction du système cognitif qui prend la forme de la régulation R_{a^*} ¹⁴⁶⁶. En l'occurrence, si un germe de R_{a^*} a conduit à l'exercice virtuel du schème S_{C^f} , avec quantification universelle, on peut entendre désormais que l'exercice de cette régulation conduit alors, en fait, à l'activation virtuelle d'un schème plus général que S_{C^f} , puisqu'une telle activation doit son origine dans une re-représentation de la quantification universelle¹⁴⁶⁷. Cette dernière devient véritablement un concept organisateur de l'activité du schème S_{C^f} , ainsi reconstruit. Précisément ce processus transitoire et instable se constitue en construction de la régulation R_{a^*} et en reconstruction de la régulation R_a ¹⁴⁶⁸.

4 Régulation 2. Résolution de la tâche se présentant dans la référence négative

Quatrième phase de la compréhension.

- i. coordination des observations et des actions en retour : re-représentation de la situation. Le schéma d'action contient des observations de l'extension visible et

¹⁴⁶⁵ Nous nous permettons de nous citer, dans cette note, au risque d'être redondant. Mais il s'agit d'insister sur l'importance de ce moment qui rentre comme crucial dans le processus d'adaptation : C'est ici le niveau, noté par Jean Piaget, comme celui véritablement des premières coordinations inférentielles. Si l'attention logique se porte sur d'autres indicateurs, c'est qu'une coordination s'est faite entre les observables de l'action et ceux de la situation. **Précisément, le sujet comprend une certaine causalité entre sa centration sur les seuls indicateurs sémiotiques spécifiques et la forme prise par son action, dont les effets sont invalidés par le milieu. La décentration est précisément ici l'attention portée à d'autres indices sémiotiques.**

¹⁴⁶⁶ Nous ne disposons pas des connaissances utiles pour expliciter davantage le processus de cette construction et surtout l'explicatif d'un tel processus. Mais, il nous semble que Jean Piaget, lui-même, renvoie l'explicatif au concept de l'auto régulation du système cognitif.

¹⁴⁶⁷ Toutefois, cette compréhension peut ne pas aller jusqu'au rejet de l'exclusivité de la première centration. On peut parler d'équilibre instable, dans la mesure où l'activité du sujet oscille entre une propension à en demeurer à la conclusion d'une inférence qui renvoie à la forme non opératoire du schème S_C (puisque d'un exercice partiel dans le cas de l'activation du schème S_C), et celle qui renvoie à une quantification devant porter sur la totalité d'une extension. « *Ce qui manque à ce niveau, c'est la compréhension de cette solidarité entre les différents indices sémiotiques qui font l'unité de la situation* ».

¹⁴⁶⁸ Cette forme de construction concerne plus particulièrement les sujets correspondant aux possibles 1 et 2 et certains possibles 3.

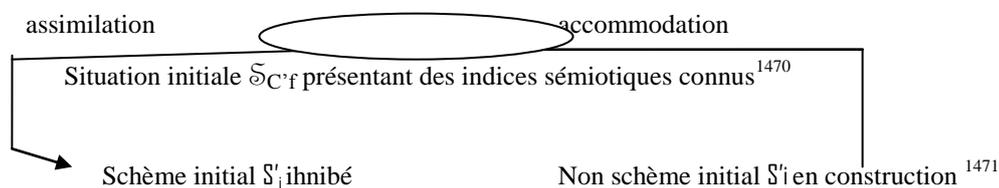
des hypothèses raisonnées¹⁴⁶⁹ relatives au prédicat ;

ii. recherche régulée de solutions aboutissant à des réponses relatives au prédicat p. Celui-ci exprime sa relation avec une exigence explicite de la quantification universelle. La solution logique attendue peut ou non être la production du prédicat par le système, mais son expression, à ce stade, est comprise (et est, au moins, attendue) ;

iii. accommodation : nouveau schème « non S'_i », forme distincte du schème initial S'_i ;

iv. coexistence de deux schèmes non systématisés mais liés par des indications initiales communes en particulier langagières.

C'est ce qu'exprime le schéma suivant :



Rappelons notre remarque : la solidarité de l'ensemble des indicateurs sémiotiques est prise en compte par un développement des coordinations inférentielles. L'élève développe un schème « non S'_i », correspondant à la compétence d'agir dans la situation nouvelle. Mais la référence demeure dichotomique. Les situations de référence peuvent ne pas apparaître comme relevant d'un type unique¹⁴⁷². D'où :

5 Régulation 3. Intégration des deux schèmes $S_{C'}$ et $S_{C''}$ dans une structure unique S_C

Dernière phase de la compréhension ou franchissement définitif de l'obstacle épistémologique $O_{S'ie}$ ¹⁴⁷³ :

i. coordination structurelle des schèmes S'_i et « non S'_i », opposés jusqu'ici psy-

¹⁴⁶⁹ Concernant ce raisonnement, nous pouvons le considérer comme relevant d'une compétence initiale ancienne, car constitué par le noyau des invariants que sont la négation et le tiers exclu (ceci dit de façon non exhaustive). Mais on peut estimer que ces mêmes schèmes, dont ces invariants sont constitutifs, trouvent là occasion de se développer eux-mêmes.

¹⁴⁷⁰ Rappelons que cette situation est virtuelle et reconstruite à partir des indices sémiotiques de la situation $S_{C'f}$.

¹⁴⁷¹ En fait il s'agit donc d'une reconstruction du schème $S_{C'f}$.

¹⁴⁷² Il est remarquable que des enfants peuvent comprendre de la réalité qu'elle relève de deux formes d'actions distinctes sans construire par eux-mêmes une unité de conception de cette réalité. Ceci se rencontre largement lorsqu'ils apprennent différentes procédures de comptage d'une même collection et qu'ils n'ont pas encore construit que ces différents comptages doivent donner le même nombre. Ils se trouvent alors étonnamment redondants (concernant les procédures), pour beaucoup d'enseignants. La conclusion est que cette unité doit se construire explicitement dans le cadre scolaire.

¹⁴⁷³ Que, dans une formulation simplifiée, on peut qualifier de quantification non exhaustive.

- chologiquement : construction d'un schème \mathcal{S}'_f . Sous certains aspects, le schème \mathcal{S}'_i , dont un invariant conceptuel est celui de la comparaison binaire, est une forme particulière du schème \mathcal{S}'_f : les invariants fondamentaux de la comparaison binaire sont conservés et non rejetés. Ainsi, une situation du dénoté de la compétence \mathcal{C}_i peut-elle être assimilée à un élément constitutif du dénoté \mathcal{C}_f . C'est, en ce sens, qu'on ne peut parler de rejet de \mathcal{S}'_i , et définir le plongement de $d(\mathcal{C}_i)$ dans $d(\mathcal{C}_f)$;
- ii. accroissement de la dénotation de la compétence « comparer » associée à la construction du schème $\mathcal{S}_{C'_f}$;
 - iii. dans une situation de référence $\mathcal{S}_{C'_f}$, l'indicateur sémiotique, $\forall x$, « donne à x », dans le schéma complet de la situation, une forme générique définie par p . Ainsi, l'objet générique x de la situation de référence $\mathcal{S}_{C'_f}$ se substitue à l'objet effectivement perçu dans une situation de référence $\mathcal{S}_{\mathcal{S}'_i}$. L'attribut linguistique, défini par le prédicat p , se substitue, par inhibition, à la qualité de l'objet perçue par les sens ;
 - iv. jeu possible entre l'activation et l'inhibition de \mathcal{S}'_i , par une régulation spécifique, disponible dans le régulateur ;
 - v. l'auto régulation du système cognitif s'est exprimée dans une reconstruction du schème \mathcal{R}_a ,¹⁴⁷⁴ et le franchissement de l'obstacle épistémologique de la comparaison binaire.

Comme on l'a compris, ce franchissement est le sens que prend la construction d'un système complet relatif à la compétence \mathcal{C}_f de la catégorisation. En d'autres termes, l'ensemble du processus, décrit dans cette construction du système fermé $(\mathcal{R}_a, \mathcal{S}_c)$, comme une activité de compréhension, à tous les niveaux, dont celui du régulateur, peut être constitutif d'une situation du dénoté $d(\mathcal{S})$.

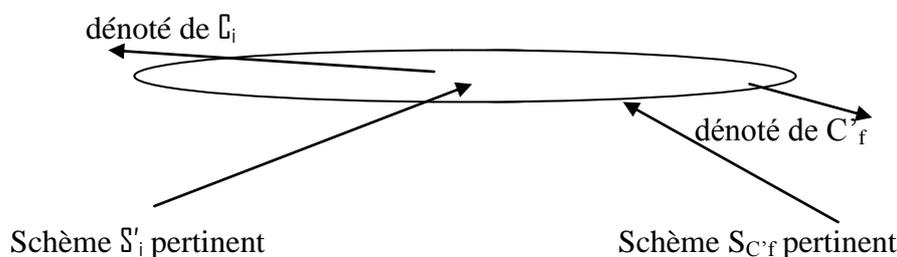
6 Etat final de la compétence \mathcal{C}'_f

Une structure du dénoté spécifique de la construction :

- i. formulation langagière $F_{C'_f}$: « mettre ensemble tous les p » ;

¹⁴⁷⁴ Il est difficile pour nous de préciser davantage une telle reconstruction. Toutefois, il nous semble qu'au niveau du régulateur dont les régulations sont les éléments, il se produise une rééquilibration du type « 1 et 2 » et non « 1 et 3 ». Et ceci pour la raison suivante que nous postulons : si l'achèvement, dans la construction du schème \mathcal{S}_c , est le produit d'une accommodation réussie, il faut bien supposer que le système cognitif possède les outils d'un tel achèvement et donc, supposer un développement des capacités d'auto régulation déjà suffisant. \mathcal{R}_a serait donc le produit achevé résultant de l'activation de schèmes de second ordre, déjà disponibles dans le régulateur.

- ii. schème $S_{C'f}$ de la comparaison globale régulée par la quantification universelle ;
- iii. dénotation de $F_{C'f}$: ensemble des situations $\mathcal{S}_{C'f}$ de catégorisation aboutissant à des extensions.



Analyse complémentaire

Elle concerne l'obstacle de l'homonymie « tout vs tous »¹⁴⁷⁵. Précisons que l'homonymie contribue à induire l'exercice d'un schème dangereux :

➤ Si l'on doit considérer que l'obstacle de l'inertie du schème de la désignation orale et celui de l'inertie du schème S_i de la comparaison binaire sont à regarder séparément, en l'occurrence, ils se trouvent liés dans l'activité où l'on retrouve l'exercice du schème $S_{C'f}$. Ils se constituent en invariants de ce schème et sont en acte dans la reconnaissance des objets par leurs aspects qualitatifs et concrets, ce en quoi est limitée la perception, donc, à une reconnaissance intra-objectale. Par là, se trouve défini l'obstacle épistémologique le plus fondamental et dont l'inertie du schème de la comparaison binaire et celui de l'homonymie se réduisent à des émanations. Alors que la reconnaissance plus globale relève d'une forme d'abstraction relative à l'objet, puisqu'elle en détache une qualité pour la retrouver en dehors de l'objet lui-même, abstraction qui, permettant une différenciation sémantique et donc concernant le sens des mots (ici le prédicat p), permet de lui associer une dimension inter-objectale. **Il y a là une différenciation relative à la dénotation d'une formulation langagière, formulation transmise d'abord par certaines désignations.**

➤ **Ainsi, la construction du schème $S_{C'f}$ s'accompagne-t-elle d'une accommodation du schème de la désignation, lorsque le complexe de sons 'tous' en arrive à être considéré différemment du complexe de sons 'tout'. On se retrouve avec le franchissement effectif d'une des formes d'un obstacle épistémologique de nature linguistique.**

¹⁴⁷⁵ Voir sa définition, sous 2.1

3.8 Évaluation du développement mental

3.8.1 Préliminaires et apports théoriques

Toutes nos analyses précédentes tendent à montrer que la construction de la compétence de catégorisation est multidimensionnelle et doit s'accompagner d'un développement mental plus général. C'est ce que nous avons appelé la résultante cognitive R_C ¹⁴⁷⁶.

Nous allons proposer une situation d'évaluation d'une des composantes de cette résultante ; celle directement concernée par la catégorisation. Mais en fait, nous pourrions noter que s'évaluera aussi une compétence transversale qui est celle de produire des nécessités.

C'est ce qui sépare explicitement l'exercice du problème. Ces problèmes et leur résolution vont se constituer en évaluation de la résultante cognitive R_C . Ils relèvent certainement de différents types qui restent à définir. Mais nous les définissons comme constitutifs de situations que nous avons précisées comme perturbantes de type 2. La perturbation y est relative au prédicat p' , introduit dans une situation donnée à l'assimilation du schème $S_{C'f}$. Mais nous verrons que le caractère universel de la compétence « catégoriser » lui confère une efficience tout à fait spontanée.

Pour ce faire, nous présentons tout d'abord, ci-dessous, l'aspect formel de cette évaluation.

Premier moment

E est un ensemble donné. P est un ensemble de prédicats, correctement formulés relativement à E . $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E .

On définit la fonction de catégorisation \mathcal{C} qui, à tout élément de P , associe un élément de $\mathcal{P}(E)$.

$$P \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{P}(E)$$

On définit une relation R dans l'ensemble P des prédicats par :

$$p R p' \text{ équivaut à } \mathcal{C}(p) = \mathcal{C}(p') \quad (p \in P \text{ et } p' \in P)^{1477}$$

On vérifie :

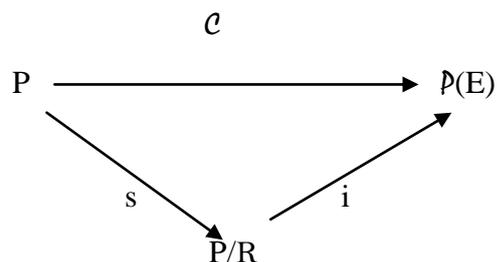
- que R est une relation d'équivalence sur P ;

¹⁴⁷⁶ Voir chapitre 4 sous 1.4.2.1

¹⁴⁷⁷ L'application de p et de p' à E donne la même partie A de E

- que \mathcal{C} peut être décomposé en un produit de deux fonctions i et s et telles que

$\mathcal{C}(p) = i(s(p))$; ce que l'on peut représenter par le schéma suivant :



Où l'ensemble P/R est une partition de P en classes d'équivalences, i une injection et s une surjection¹⁴⁷⁸.

D'où la définition :

Deux prédicats p et p' , définis sur E , sont équivalents lorsque l'exercice du schème S_C de la catégorisation conduit à la même partie A de E : $i(s(p)) = i(s(p'))$.

Second moment

Il concernera le niveau de conscience du système cognitif relativement au moment précédent.

Nous présentons ces deux moments dans le tableau ci-dessous.

En toute rigueur, nous devrions dédoubler ce tableau et considérer deux situations objectives distinctes : dans sa position 2, l'enseignant(e) s'adresse en fait à un système cognitif ayant agi dans la situation définie comme un premier moment. Mais l'analyse, ci-dessous, va effectivement en tenir compte.

¹⁴⁷⁸ Les images par i de deux classes distinctes sont deux parties distinctes de E (i injective). L'image réciproque par s d'une classe est un ensemble de prédicats (définition de s) telle que si P est « assez grand » il existe dans cette classe un prédicat p' et un prédicat p équivalents : $\mathcal{C}(p) = \mathcal{C}(p')$.

Evaluation d'une composante de la résultante cognitive R_C				
Situation de référence	Enseignant(e) observant puis agissant	Élève réflexif à trois niveaux	Fonctionnements cognitifs	Situation de compréhension
Situations objectives	2. Enseignant(e) interrogeant l'élève sur son activité	Dévolution complète - Élève verbalisant - Élève exprimant le prédicat p' ou un prédicat p (niveau 1) - Élève explicitant certaines heuristiques (niveau 2)	Exercice de la compétence : -objectiver l'activité du schème $Sc'f$: niveau 1 de la conscience réfléchie -objectiver l'activité de la régulation R_a : niveau 2 de la conscience réfléchie ¹⁴⁷⁹	Situation de référence : moment 2
	1. Enseignant(e) observant	Dévolution complète - Élève raisonnant - Élève se donnant un prédicat p opérationnel - Élève construisant une catégorie A , en extension	Conscience en acte Fonction apophantique Régulation spécifique : alimentation de la régulation R_a Activité du schème $Sc'f$	Situations de référence : moment 1
Milieu matériel : un ensemble d'objets, disposés sur une table et visibles ; une boîte fermée ¹⁴⁸⁰ ; un énoncé de tâche sous la forme langagière : « mets dans la boîte tous les p ¹⁴⁸¹ ».	Enseignant(e) prononçant la consigne sans accent tonique particulier	Élève face aux objets posés par l'enseignant(e) qui lui fait face.	Système fermé (R_a , Sc) Compétence cognitive résultante (en cours d'évaluation) Compétences cognitives transversales	Situation objective

Tableau 7

Analyse a priori

Analyse logique de la tâche

E donné et le prédicat p' donné, il existe $p \in s(p')$ tel que

$$\mathcal{C}(p) = A \text{ donc } \mathcal{C}(p') = A.$$

$$A = \{x \in E \text{ et } p'(x) \text{ vrai}\}.$$

Analyse cognitive de l'activité

Cette analyse de l'activité nous permet d'envisager plusieurs possibles, en nous plaçant en aval d'une construction achevée du schème S_C :

¹⁴⁷⁹ Voir chapitre 3 sous 2.3.

¹⁴⁸⁰ Dont le contenu ne peut jamais être visible.

¹⁴⁸¹ Où p' est un prédicat correctement formulé par rapport à E mais qui ne permet pas une évaluation directe de $p'(x)$.

Moment 1

Nous allons vérifier que l'activité va consister à résoudre un problème, dans ce sens où l'intention de résoudre la tâche conduit le système à désactiver définitivement ou provisoirement le module (R_a , $S_{C'f}$) (selon les systèmes cognitifs), pour construire un objet plus favorable à l'alimentation d'un autre module (assimilation déformante) ou à ce même module (résolution du problème) : en effet, dans cette situation, le système reconnaît la forme linguistique « mettre ensemble tous les p' ». La régulation anticipatrice R_a active le schème $S_{C'f}$. Le système cognitif reste démuné lorsque le schème $S_{C'}$ n'est pas directement alimenté dans ce milieu, car le prédicat p' n'est pas immédiatement un indicateur opérationnel. Différentes stratégies sont alors possibles :

➤ **Possible 0** : le système renonce purement et simplement à tenter quoique ce soit. Dans l'environnement scolaire, ce cas reste rare car des effets de contrat contraignent toujours le sujet à agir d'une façon ou d'une autre et plus ou moins aléatoirement, ce qui, sans plus d'inférence, peut conduire à des décisions dangereuses.

➤ **Possible 1** : on peut penser que le système va inhiber le schème $S_{C'}$. Il peut considérer une formulation langagière simplifiée en excluant le prédicat p' et en conservant la partie : « mets ensemble »¹⁴⁸². On peut noter que l'inhibition du schème ne porte pas sur la totalité de sa structure, car un schème S_0 , constitutif de $S_{C'}$ et qui est associé à la formulation langagière « mets ensemble », peut alors être activé. Le système peut alors se donner un prédicat p quelconque, voire le prédicat « $x \in E$ ».

➤ **Possible 2** : le système se trouve en échec car p' n'est pas opérationnel : il existe au moins un objet de E pour lequel la valeur de vérité de p'(x) est indécidable. Le système, pour cette forme de perturbation, active une régulation compensatrice dont le rôle est de construire un environnement plus favorable à l'exécution de la tâche¹⁴⁸³. Une suite de régulations de l'activité s'active.

- Il y a mise en standby du schème $S_{C'}$ mais conservation de l'intention.
- Nous avons déjà noté¹⁴⁸⁴, à ce stade, la production possible d'heuristiques et, à un niveau de conscience qui n'exige pas une pensée verbale explicite. Il se peut, d'ailleurs, que l'équilibration du couple (R_a , S_C) se soit « accompagnée » (et cela con-

¹⁴⁸² Il est connu que lorsqu'un élève ne sait pas résoudre un problème, en tenant compte de toutes les données, il peut proposer une résolution qui évacue de l'énoncé une partie de ces données.

¹⁴⁸³ On peut exprimer ceci classiquement lorsque, dans un problème, pour répondre à une question, il faut construire une autre question et y répondre.

¹⁴⁸⁴ Voir le tableau relatif à l'exercice des régulations, du paragraphe 1.6.4.3.1 du chapitre 4

cernerait bien une autre des composantes de la résultante cognitive R_c^{1485}) d'une réorganisation du système de contrôle de l'activité et relatif à ces inférences dont le rôle est précisément de pourvoir à une alimentation défaillante de certains schèmes. C'est un tel niveau de développement du régulateur dont disposerait en l'état présent le système cognitif¹⁴⁸⁶.

- **Le nécessaire est précisé par la teneur de l'inférence : le système cognitif analyse dans un premier temps la situation comme suffisante pour la production d'une extension A^{1487} . L'impossibilité d'un exercice normal du schème S_{C_f} va conduire à la nécessité d'une reformulation du prédicat p' ou, plus précisément, de la construction d'un prédicat équivalent p .** Dans la situation nouvelle où le prédicat p s'est substitué au prédicat p' , l'exercice du schème S_{C_f} , correctement alimenté, peut se dérouler sans échec selon un processus déjà bien maîtrisé par le système cognitif ; d'où la construction de la catégorie A .

Précisons ici deux aspects de l'activité qui nous paraissent remarquables :

- Le prédicat p' , donné dans la formulation langagière, contient en fait des formes prédicatives nécessaires p_1, p_2, \dots au sens logique du terme ($p' \Rightarrow p_1$ ou $p' \Rightarrow p_2, \dots$). C'est l'une de ces formes ou une disjonction de ces formes qui est alors testée comme « candidat p ». Mais le caractère suffisant de l'un de ces prédicats doit alors être vérifié. C'est ce qui concerne le second aspect.

- Lorsqu'un prédicat q est directement opérationnel, il peut être supposé que l'observation analytique préalable de l'ensemble E ne soit pas nécessaire : on se saisit d'un objet x (ou on jette un regard sur un objet x), comme il se présente, et on lui applique le prédicat q avant de conclure sur la valeur de vérité de $q(x)$. Mais dans la situation présente, une certaine attention logique devrait être portée aux objets de E pour en découvrir une partition en un A , des objets qui pourraient être p , et en un \tilde{A} , des objets qui, simultanément ne seraient pas des p . Cette heuristique peut aboutir, après un ou plusieurs essais, selon les cas, à la découverte d'un prédicat p , équivalent au prédicat p' , et correspondant à une hypothétique et actualisable partition virtuelle¹⁴⁸⁸. **Le point remarquable est que cette activité mentale qui s'analyse comme une suite d'hypothèses, s'accompagne, par définition, non seulement**

¹⁴⁸⁵ Quoique nous devrions penser qu'une telle régulation soit elle-même en développement et dépendante du contexte.

¹⁴⁸⁶ Au moins, lorsque le prédicat p' n'est pas trop complexe, avons-nous, semble-t-il, pu vérifier cette disponibilité lors de nos séances.

¹⁴⁸⁷ Ceci est une façon de parler. En fait, nous supposons que le milieu présente toutes les conditions pour une activation quasi automatisée du couple (R_a, S_{C_f}) .

¹⁴⁸⁸ Bien sûr, en général, et sauf hasard, l'ensemble E ne se donne pas à la perception comme ayant une disposition préalable, laissant entrevoir une partition possible.

d'une activité du schème S_{Cf} , afin de tester l'hypothèse p sur A , mais aussi d'une prise en compte d'un partitionnement de E en deux catégories disjointes A et \tilde{A} et donc de la considération consciente, car voulue ainsi, de la relation $E = A + \tilde{A}$ (1).

Conclusion

Ainsi, nous devons regarder que, dans cette évaluation de la résultante cognitive R_c , la forme opératoire du schème S_{Cf} joue effectivement son rôle attendu. De plus, nous notons que le niveau 2 du stade II-III¹⁴⁸⁹ est bien, comme nous pouvions l'espérer, dans la zone proximale de développement du schème S_{Cf} , puisque se constituera, en la relation (1), un invariant opératoire dans la structure de schèmes de ce niveau 2.

Moment 2

Celui-ci concerne une demande d'explicitation de l'inférence décrite ci-dessus et donc une évaluation du niveau de la conscience du sujet, relativement à son activité. L'enseignant(e) interroge : « pourquoi as-tu choisi ces objets ? ». Cette question porte sur le pourquoi du choix de la catégorie A ». Seconde question envisagée : « qu'est-ce que je t'avais demandé ? ».

➤ **Possible 0** : nous avons donné, comme possible (moment 1), que le système en échec a conduit le sujet soit à renoncer, dans de rares cas, à mener à bien une quelconque activité qui aurait pu le rapprocher d'une réponse, soit à une production aléatoire. La demande de l'enseignant(e), portant au moins sur le rappel de l'énoncé de la tâche, nous pensons que, dans ce cas, le sujet ne s'en souviendra plus.

➤ **Possible 1** : nous avons noté (moment 1) que le système en échec l'a conduit à détourner la tâche, en substituant à la formulation langagière, donnée dans le milieu objectif, une formulation langagière dans laquelle p (qui pose le problème) est évincé. A la demande de l'enseignant(e) sur le pourquoi un tel A , il pourrait effectivement répondre « qu'il fallait mettre dedans » (la boîte donnée comme réceptacle des éléments de la catégorie). Il nous semble que la demande de rappel de l'énoncé de la tâche conduira alors à la même réponse, pour la raison que le système, en simplifiant son activité, n'en demeure pas moins rationnel et donc, le souvenir de l'énoncé de la tâche, tel qu'initialement donné, s'est trouvé, comme par nécessité, remplacé définitivement par l'énoncé modifié.

➤ **Possible 2** : nous pouvons envisager deux cas :

- Il y a proximité sémantique entre le prédicat p' donné et le prédicat p inféré. En d'autres termes, la substitution de p à p' qui s'est construite s'est imposée au système

¹⁴⁸⁹ Voir paragraphe ci-dessus 1.3.1.

« quasi instantanément »¹⁴⁹⁰. En d'autres termes encore, l'expérience antérieure du sujet fait que la situation dans laquelle il se produit une reconnaissance de l'équivalence de p et p' peut être considérée comme élément du dénoté de la compétence nécessaire à une telle reconnaissance. Le prédicat p s'est imposé sans plus d'expérimentation intérieure¹⁴⁹¹. Dans ce cas, la question de l'enseignant(e) peut induire une conscience réfléchie de niveau 1, relativement à cette activité¹⁴⁹². La réponse produite par le sujet est : « parce que p' ». Toutefois, si l'enseignant(e) insiste, ne se satisfaisant pas de la réponse paraphrasant cette simple relation de l'indicateur du schème S_{Cf} , on pourrait voir le sujet forcé à cette conscience réfléchie de niveau 1, mais supérieure : une inférence en acte dans l'activité et relative à une équivalence, de fait, entre p et p' .

- Si au contraire, il n'y a pas, dans l'expérience du sujet une reconnaissance directe de la proximité sémantique entre un prédicat donné p' et un prédicat inféré p , on peut penser que l'activité a laissé dans sa mémoire de travail des traces suffisantes pour que la question de l'enseignant(e) induise directement ou, en insistant quelque peu, une conscience réfléchie de niveau 2, à son stade le plus bas. Dans ce cas, on pourrait obtenir, explicitement dans la réponse, l'expression d'une liaison implicative entre p et p' : le rappel de p' en tant que prémisse d'une inférence dont p est la conclusion, cette dernière non consciente dans l'activité. Toutefois, nous n'envisageons pas la production d'une inférence relativement au caractère nécessaire d'une alimentation de la régulation R_a . On peut donc considérer que l'activité du régulateur reste en acte.

Complément d'analyse

➤ **La fermeture du schème S_{Cf} est un premier stade dans sa construction, en tant que concept. L'invariant fondamental de ce schème étant la quantification universelle qui, en langage courant est désigné par la forme indéfinie « tous (toutes) »¹⁴⁹³. Cet invariant doit être compris dans le sens suivant : il est le « connecteur logique »¹⁴⁹⁴ entre**

¹⁴⁹⁰ En des termes autres, on peut dire que pour le sujet, « p et p' ont les mêmes dénnotations » au sens linguistique du terme. On pourrait mesurer cela au temps d'hésitation mis par le sujet avant de choisir son premier objet.

¹⁴⁹¹ Il ne s'agit pas, dans ce cas, de contester une inférence, mais celle-ci est déjà en acte dans le schème d'une telle reconnaissance.

¹⁴⁹² On peut revoir le paragraphe 2.3 du chapitre 3.

¹⁴⁹³ L'expression « quel que soit » peut parfois lui être substituée. Mais cette substitution, qui est logiquement acceptable, par exemple, dans un texte mathématique, reste dangereuse et peut connoter cognitivement une restriction puisqu'elle focalise l'attention sur l'objet particulier x que l'on s'apprête à manipuler, davantage que sur l'objet générique x , élément d'une catégorie reconnue comme telle. Nous en avons analysé certains effets dans notre mémoire de DEA.

¹⁴⁹⁴ Ce qualificatif n'est pas abusif. Par Exemple, Hilbert a introduit pour différentes raisons un signe logique τ qui sert à définir le quantificateur existentiel \exists et donc le quantificateur universel \forall . *Théorie des ensembles. Description de la mathématique formelle*. §4. *Théories quantifiées*. Opus cité.

la compréhension et l'extension d'une catégorie : cette coordination est conceptualisée par le quadruplet (E, A, Ext A, p) où A est la désignation d'un ensemble, partie de E, Ext A, son extension et p le prédicat qui la définit en compréhension. Au niveau des régulations, il est le concept organisateur de la catégorisation. Nous avons pu, en effet, associer cet indicateur qui se retrouve dans l'analyse de la dimension épistémologique historique, au développement régulé par un système cognitif de la compétence « catégoriser » et dont la composante cognitive est un schème S_{Cf} . Ce dernier aspect nous a été révélé, par l'analyse de la dimension épistémologique psychologique, analyse qui nous a permis de concevoir des formes actualisées d'une auto régulation. En tenant compte du caractère systématique de ce processus qui en a donc structuré l'organisation, nous avons compris que la désignation de la quantification universelle est un indicateur que l'on peut alors également qualifier de connecteur logique au sens cognitif du terme.

Dès lors, on peut espérer qu'au niveau de développement des systèmes cognitifs, où se situe la compétence « caractériser », des situations peuvent leur être proposées, situations qui n'induisent pas une simple activation 'routinisée' du schème S_{Cf} .

➤ Nous n'envisageons donc pas, au niveau où nous plaçons la prise de conscience, la production d'une proposition telle que : « pour qu'un objet x de E soit un p', il faut qu'il soit un p », donc une inférence manipulant explicitement les deux prédicats et une forme de la quantification universelle¹⁴⁹⁵. Ainsi, le fonctionnement de la régulation anticipatrice R_a , en reste aussi, sur ce point, au niveau d'une conscience en acte. Pour le dernier possible, toutefois, nous envisagerions donc plutôt une expression comme « pour p', il faut p ». Nous envisageons encore moins, l'expression d'une équivalence logique. Celle-ci correspondrait à un des éléments de l'inférence conduite par le système cognitif pour un sujet qui disposait, antérieurement aux situations d'apprentissages mises en place, de structures cognitives relativement à la catégorisation. Il pourrait s'agir des possibles 3 (construction de $S_{C'f}$ sous 2.2.2). En effet, le caractère nécessaire de p est un construit logique dans le but de satisfaire l'alimentation du schème $S_{C'f}$ ¹⁴⁹⁶. Mais les heuristiques qui ont conduit le système à la recherche d'un tel p le sont en acte et tirent leur origine d'une auto régulation du système, forçant une accommodation du schème $S_{C'f}$ à une nouvelle situation. Sous leurs formes verbalisables et complètes, ces heuristiques relèveraient donc d'une conscience réfléchie de niveau 3, niveau dont nous avons analysé que son développement est incertain et inégal jusqu'à l'âge

¹⁴⁹⁵ Dans les raisonnements classiques, des expressions comme « quel que soit x » et « soit x... » signifient la même chose.

¹⁴⁹⁶ Notons qu'en toute logique, cette affirmation dépend de E.

adulte.

➤ Notons, alors, que ce que nous avons explicité, ne rend pas compte de toute l'activité cognitive : en effet, nous avons analysé que la construction de p résulte d'une anticipation d'une possible partition de E en « un A et un \tilde{A} », d'une intuition de p ¹⁴⁹⁷ et de l'action intériorisée : « $x \in A$ est bien un p et $x \in \tilde{A}$ n'est pas un p ». On retrouve, en acte, le raisonnement qui conduit à affirmer que « $p(x)$ vrai $\Leftrightarrow x \in A$ ». Une conscience réfléchie de niveau 3 permettrait donc de justifier le choix de p par l'équivalence des deux prédicats p' et p , et ceci relativement à l'ensemble E donné¹⁴⁹⁸.

3.8.2 Un pré-test

❖ B.C a proposé à ses élèves, de moyenne et de grande section, une situation du même type que celle que nous avons choisie pour une évaluation de la composante cognitive R_c . Elle s'est déroulée en octobre 2008, précédant les situations entrant dans la consolidation du schème $S_{C'f}$ et comme nous venons d'en décrire quelques-unes.

La situation objective

Moment 1

Le milieu matériel

➤ Un ensemble de bâtonnets (matériel utilisé, entre autre, pour des tâches de sériation selon leur taille) et disposés sur une table de la façon suivante : 4 premiers bâtonnets alignés et de tailles croissantes mais avec accroissements non constants ; d'autres bâtonnets, une dizaine, certains plus grands et d'autres plus petits que le dernier des quatre déjà disposés et posés sur la table.

➤ L'énoncé suivant : « Mets ensemble tous les bâtonnets pouvant aller après celui-ci », B.C désignant du doigt le dernier des quatre bâtonnets.

Le milieu cognitif

➤ Un système cognitif (dont un schème $S_{C'f}$ et un début de construction du schème $S_{C''f}$) ayant atteint un premier niveau de développement résultant de la situation fondamentale.

Moment 2

Le milieu matériel

- Le milieu matériel précédent, transformé,
- La question : « Pourquoi as-tu choisi ces bâtonnets ? ».

Le milieu cognitif

¹⁴⁹⁷ Nous n'avons pas jusqu'ici employé ce terme pour la raison qu'il ne rend pas compte de l'activité qui en justifie l'existence. En l'occurrence, « intuition de p » pourrait signifier l'application du théorème en acte de l'existence de la classe d'équivalence de p .

¹⁴⁹⁸ En fait donc, un autre ensemble E peut conduire à un autre prédicat p , « à partir du même prédicat p' ».

- La situation de référence précédente.
- Le système cognitif disposant du schème $S_{C'f}$
- Dévolution complète.

Éléments d'analyse a priori

Analyse logique de la tâche

On peut reprendre l'analyse formelle.

Analyse cognitive de l'activité

Moment 1

- Une régulation peut prendre comme indicateurs les indices « ensemble », « tous » et « aller après celui-ci ».
- La régulation qui va prendre comme arguments ces indicateurs active le schème $S_{C'f}$ qui vient d'être construit.
- Le prédicat p' ne permet pas la coordination de ce schème à un schème de la perception ou une traduction sémantique automatisée du prédicat par un prédicat p .¹⁴⁹⁹
- p' est exprimé à l'aide de la formulation « aller après » qui ne donne pas prise à une inférence permettant de construire un prédicat p : une telle expression n'implique aucun prédicat nécessaire p ¹⁵⁰⁰ qui, le plus souvent, et dans les cas simples, est en fait équivalent à p' .
- La réussite de la tâche passe par une re-représentation du milieu objectif, en redéfinissant des observables comme des contraintes. Il y a, pour ce faire, différents choix possibles.
- L'expression qui semble la plus naturelle d'une de ces contraintes est consécutive de la reconnaissance d'une disposition des quatre bâtonnets dans un ordre de tailles croissantes, c'est-à-dire le début d'une activité de sériation.
- Ainsi, le prédicat p peut résulter de l'inférence « *pour aller après celui-ci, il faut qu'il soit plus grand* ».
- Un tel prédicat est correctement formulé, relativement à l'ensemble E des dix bâtonnets.
- p est donc formulé par « être plus grand que ce dernier ».

¹⁴⁹⁹ Rappelons que ceci signifie que le système dispose, en mémoire, d'associations binaires ou n-aires, dont les termes sont reconnus comme équivalents, par exemple en se coordonnant à un schème sensori-moteur comme les schèmes de la perception. Exemples « être de contour triangulaire » et « avoir trois angles », pour un polygone, « être 5 » et « être 3+2 », « être carré perçu » et « avoir une frontière de 4 côtés de même longueur et perpendiculaires » « être plus grand » et « mesurer plus ». Ce qui signifie aussi que des formulations langagières associées F_c sont reconnues, par le système, comme synonymes.

¹⁵⁰⁰ $p' \Rightarrow p$.

➤ Toutefois, la structure de schème assimilatrice est celle de la sériation et il n'est pas sûr que le système puisse la coordonner à la structure S_{C^f} .

➤ Ainsi, le sujet peut tout aussi bien imposer comme contrainte au milieu des considérations de symétrie : « *Des plus petits à gauche* », « *Les plus petits à droite* ». Et p peut tout aussi bien se formuler par « *Etre plus petit que ce dernier* ».

Conclusion

La situation est certes complexe mais elle demeure pertinente pour évaluer la capacité du système cognitif à alimenter le schème S_{C^f} , et, aussi, sa capacité à produire des inférences, en imposant aux milieux des contraintes. Toutefois, « l'aspect sérial du milieu matériel » peut détourner le système de la tâche et une régulation anticipatrice peut ne pas concerner seulement le schème S_{C^f} mais le schème plus complexe de la sériation, dans le cas de certaines situations. Mais une analyse, que nous ne présentons pas ici, montre que le schème S_{C^f} peut être constitutif du schème de la sériation. En l'occurrence, son exercice devrait être un incontournable dans l'activité attendue ici. Ainsi, on ne peut parler d'assimilation déformante mais il reste à craindre qu'une focalisation sur une tâche de sériation et, par un système cognitif ne la maîtrisant pas, vienne finalement biaiser l'évaluation de la compétence S_{C^f} .

Moment 2

➤ **Possible 0** : une sorte de contrat impose une réponse non cohérente avec le milieu ou l'action :

- possible 0' : une pseudo-intention est exprimée mais qui ne correspond pas avec les observables¹⁵⁰¹ sur l'action ;

- possible 0'' : une intention est exprimée mais ne correspondant pas à un prédicat bien formulé ou conservé. Une catégorie n'est finalement pas obtenue ;

➤ **Possible 1** : le sujet a effectivement imposé au milieu des contraintes et a pu en inférer un prédicat possible :

- possible 1' : le sujet a reconnu « le début d'une série ». Il a placé les 5 bandes plus grandes en continuant une sériation. L'expression du prédicat pourrait-être : « être utilisable pour prolonger la série selon la taille croissante ». Et l'intention du sujet ayant été la poursuite de la série, dans l'ordre croissant des tailles, son expression devrait refléter plutôt cette intention, en raison de l'assimilation de la situation par un schème de sériation. Sa conscience réfléchie, relativement à l'organisation d'un schéma d'actions, peut être considé-

¹⁵⁰¹ Nous ne rendons pas cette appréciation comme l'affirmation d'une incohérence cognitive. Elle peut l'être dans un cadre logique mais elle ne l'est pas (jamais, pensons-nous) dans un cadre cognitif. Par exemple, l'effet de contrat rapidement évoqué ici, est un des éléments qui peut être analysé dans la cadre d'une logique cognitive.

rée de niveau 1. Pour ce même sujet, l'observable, redéfini comme un début de sériation, s'est associé à une contrainte, reconnue a posteriori, indépendamment même de la consigne. En d'autres termes, le milieu matériel est un indicateur sémiotique anticipant, indépendamment de la consigne, un schème de sériation. Dans ce cas, la conscience du sujet relativement à cette activité peut être seulement en acte,

- possible 1'' : le sujet a imposé au milieu des éléments de symétrie. Son activité est régulée par cette intention. Sa conscience réfléchie, sur ce point, peut être de niveau 1. Nous pouvons estimer que dans ce possible, l'activité inférentielle n'a pu être menée à bien que grâce à une conscience réfléchie de niveau 1 ;

➤ **Possible 2** : la complexité de la tâche proposée restreint les possibles à l'expression d'une intention explicite et cohérente avec la transformation du milieu matériel. Le système a imposé des contraintes au milieu matériel, pour en obtenir volontairement une coordination avec la régulation R_a , anticipatrice du schème S_{Cf} . Toutefois, cette contrainte peut n'être définie qu'à partir d'une restriction du milieu matériel¹⁵⁰². La conscience réfléchie du système cognitif pourrait être considérée de niveau 2. Mais, sans verbalisation explicite, une telle évaluation reste de toute façon délicate.

Éléments d'analyse a posteriori

Le tableau ci-dessous renseigne sur cette évaluation concernant 20 élèves de moyenne et de grande section:

Catégorie explicitée ou explicitable (1)	Intention explicite mais donnant des catégories non finalisées ; possible 0''	Possibles 0'	Intention explicitée et cohérente associée à une catégorie explicitable
3	6	11	2

(1) Un observateur pourrait associer un prédicat à l'expression du sujet.

Tableau XIV

17 élèves (85%) ne construisent finalement pas de catégorie alors que nombre d'entre eux semblaient disposer d'un schème S_{Cf} opérationnel et se retrouvent être tous des possibles 0.

Les trois sujets qui ont produit une catégorie explicitable ont disposé les bâtonnets correspondants « en continuant » la série telle qu'ils l'ont conçue. La régulation de contrôle du maintien de la contrainte qu'ils ont imposée au milieu a été réifiée durant l'activité. Pour aucun de ces trois élèves, nous n'obtenons l'expression d'une inférence faisant entrevoir un possible 2 :

¹⁵⁰² Par exemple, ne considérer que le dernier des quatre bâtonnets mis en place.

➤ Mélusine (5 ; 6) serait un possible 1^{er}. Elle a sélectionné les cinq bandes plus petites et explicité son intention : « *Parce qu'elles sont plus petites* ». Mais on ne peut être sûr que la contrainte soit celle d'une symétrie. Il pourrait davantage s'agir d'un possible 2 avec réduction du milieu matériel au dernier bâtonnet en place. Auquel cas, l'évaluation se trouve être celle de C_f.

➤ Chloé (5 ; 3) est un possible 1^{er}. Elle répondra à la question de B.C : « *Parce que je ne me rappelle plus* ».

➤ Lucie (5 ; 3) est un possible 1^{er}. Elle répondra à la question de B.C : « *Parce qu'elles sont plus grandes* ».

3.8.3 Le post-test

❖ **B.C a proposé, à ses élèves de grande section, la même situation en mars 2009** : 23 sujets âgés de (5 ; 1) à (6 ; 1). Le groupe correspond donc en grande partie à celui considéré dans le pré-test.

❖ **P.B avait également proposé, à ses élèves de grande section, la même situation en juin 2008** (Année 1 donc) : 15 sujets de grande section âgés de (5 ; 4) à (6 ; 2). Elle avait également conçu le pré-test en octobre 2007.

Pour les deux classes, il s'agit, relativement à cette situation, d'évaluer les résultats de l'apprentissage défini par la séquence.

Éléments d'analyse a posteriori

On définit :

- la variable X prenant la valeur :
 - 1, si le résultat de l'activité permet l'observation d'une catégorie explicite,
 - 0, sinon ;
- la variable Y sachant X=1 prenant la valeur :
 - 2, si l'expression du prédicat est « être plus grande que la dernière »¹⁵⁰³,
 - 1, si l'expression du prédicat est autre,
 - 0, si le sujet ne fournit aucune expression de prédicat.

➤ Le tableau suivant renseigne sur les distributions des pourcentages¹⁵⁰⁴, selon ces variables. On y rappelle les résultats du pré-test.

¹⁵⁰³ Précisément le qualificatif « grand » ou le comparatif « plus grand » sont explicités dans la formulation. Et cette appréciation est associée au dernier. Ce qui est alors interprétable autrement que comme « la continuation de la sériation ».

¹⁵⁰⁴ Arrondis à 1% près.

Variables	X		Y/X=1		
	1	0	2	1	0
Classe de P.B (octobre 2007) : Pré-test	13%	87%	33%	33%	33%
Classe de P.B (juin 2008) : Post-test	43%	57%	90%	0%	10%
Classe de B.C (octobre 2008) : Pré-test	15%	85%	33%	33%	33%
Classe de B.C (mars 2009) : Post-test	61%	39%	78%	22%	0%

Tableau XV

Conclusion

➤ Initialement, et en amont (pré-test) d'une consolidation du schème S_{C^*f} et de situations poursuivant l'achèvement de la construction de S_{C^*f} , les deux classes obtiennent des résultats identiques : la valeur $X = 1$ a respectivement un pourcentage de 13% et de 15. Pour les systèmes concernés, la répartition, selon les valeurs de Y , est la même : 66% d'entre eux présentent là une conscience réfléchie de niveau 1.

➤ On note, dans la classe de B.C, que 14 élèves sur 23 élèves (61%), dans le post-test au lieu de 3 élèves sur 20 élèves (15%), dans le pré-test, sont identifiables, relativement à cette situation, à des systèmes cognitifs qui ont atteint un développement opérationnel dans l'espace résultant de leur apprentissage de la catégorisation et, relativement à cette seule situation.

➤ On peut confirmer que, malgré la complexité de la situation, 43% des systèmes cognitifs de la classe de P.B, ont atteint finalement un tel développement et, relativement à cette seule situation¹⁵⁰⁵, alors qu'ils n'étaient que de 13%.

➤ On retrouve, dans cette situation, un écart significatif, quant aux réussites exprimées par la valeur $X=1$, mais non en ce qui concerne les valeurs $Y=1$ ou $Y=2$ sachant $X=1$ (90% et 100%), ce qui confirme que l'exercice du schème fermé S_C s'accompagne d'une conscience réfléchie de niveau 1, plutôt systématiquement.

➤ Les systèmes concernés s'identifient aux possibles 2, dans 90% des cas de la classe de P.B et 78% de la classe de B.C. Leur réussite pourrait s'accompagne d'une prise de conscience réfléchie de niveau 2. Pour tous ces systèmes cognitifs, l'activation d'un schème d'inférence a bien été finalisée par la nécessité de construire une alimentation suffisante pour le schème S_{C^*f} . Cette cognition en acte nous apparaît donc comme un observable implicite a posteriori.

¹⁵⁰⁵ On les retrouvera plus performants dans d'autres situations.

➤ Il est à noter que 22% des élèves de la classe de B.C contre 0% des élèves de la classe de P.B « prennent le risque » d'un autre prédicat. On pourrait inférer qu'en dehors de ceux qui « n'ont pas vu », dans le milieu matériel, un indicateur de sériation, les autres pourraient effectivement disposer d'une conscience réfléchie déjà de niveau 2. Mais on retrouve que, dans une classe dite en ZEP, les sujets s'autorisent moins de liberté avec les choses du monde.

➤ **Nous pouvons mesurer le progrès de développement qui se matérialise ainsi dans la classe de P.B, en rappelant qu'au test initial, seulement 13% des sujets avaient pris l'initiative de produire une certaine extension contre 77%, dans la classe de B.C.**

➤ La justification de la sélection de bâtonnets par l'énoncé du critère « plus grand... » ne contient pas l'expression de la quantification universelle. Un seul sujet parmi tous ceux qui sont en situation de pos- test va l'exprimer explicitement. Mais on trouve fréquemment un substitut des formes indéfinies « tous (toutes) », à savoir l'article défini « les », comme dans la réponse : « J'ai mis les plus grandes parce qu'elles étaient plus grandes que la dernière ». Nous avons déjà analysé le sens de ce déterminant, dans les situations quotidiennes : il est effectivement pensé implicitement comme l'adjectif indéfini « tous (toutes) ». Ceci est encouragé par la forme de la question qui interroge précisément sur le prédicat, et non sur la raison de l'extension, considérée globalement. Ce pourrait être au contraire le cas avec la question : « Qu'ont-ils tous de pareil pour que tu les aies choisis ? ».

➤ Nous rendons compte, ci-dessous, d'observations comparées, relativement à l'existence d'un schème définissable comme composante de la compétence « catégoriser », en amont d'un apprentissage (test), en cours de l'apprentissage et précocement (pré-test et juste après la première « double situation directe et réciproque ») et en aval de l'apprentissage (test). La compétence « catégoriser » est bien à prendre en un sens développemental, puisqu'il est là considéré, aussi bien le stade des collections figurales, que les états intermédiaires relatifs aux développements du schème S_{Cf} . Nous devons aussi les considérer relativement à la situation que nous venons de décrire.

Nous rappelons, qu'à des fluctuations d'effectifs près, la classe de P.B se rapporte à un même public (test piagétien, pré-test et post-test effectués la même année), alors que la classe de B.C, ce rapporte elle à des publics différents (test l'année I, pré-test et post-test, l'année II). Toutefois, ce que nous visons comme éléments de comparaison (essentiellement concernant les pré-tests et post tests) ne s'en trouve pas dénaturé.

	Schème S_{C^r} disponible	Conscience réfléchie de niveau 1, sachant S_{C^r} disponible
Classes et périodes		
	Test piagétien	
Classe de P.B (sept 2007)	4.3%	1/1
Classe de B.C (sept 2007)	69%	18/20
	Pré-test	
Classe de P.B (octobre 2007)	13%	66%
Classe de B.C (octobre 2008)	15%	66%
	Post-test	
Classe de P.B (juin 2008)	43%	90%
Classe de B.C (mars 2009)	61%	100%

Tableau XVI

➤ Notons que le pré-test a donné des résultats identiques.

➤ Si les écarts observés entre le test et le post-test s'est considérablement réduit, nous allons noter que, dans le cas de situations objectives présentant une formulation plus fermée, en ce sens que l'inférence devrait conduire à un choix plus restreint et plus naturel d'un prédicat p , suffisant pour alimenter S_{C^r} , cet écart devient finalement très faible¹⁵⁰⁶.

3.8.4 Les situations¹⁵⁰⁷

❖ **Les situations 1, 2 et 3 ont été proposées par P.B à ses 23 élèves de grande section, en juin 2008.** Il s'agit donc, en grande partie, du même groupe¹⁵⁰⁸ que l'on a suivi depuis septembre 2007 et désormais constitué de sujets âgés de (5 ; 0) à (6 ; 5).

❖ **Les situations 2, 3 et 4 ont été proposées par B.C à ses 15 élèves de grande section, en mars 2009.** Il s'agit donc, en grande partie, du même groupe¹⁵⁰⁹ que nous suivons depuis octobre 2008 et désormais constitué de sujets âgés de (5 ; 3) à (6 ; 1).

Situations objectives 1

Moment 1

Le milieu matériel :

➤ des objets percés et d'autres non percés disposés sur une table ;

➤ l'énoncé exprimé verbalement : « *Mets ensemble tous les objets pouvant servir à faire un collier* ».

¹⁵⁰⁶ Il y a d'ailleurs là une question intéressante à approfondir et qui concerne la liberté d'agir que s'autorisent effectivement les élèves dits en difficulté.

¹⁵⁰⁷ Rappelons que pour toutes ces situations, les analyses a priori, logique de la tâche et cognitive de l'activité ont été détaillées en début de paragraphe, en toute généralité.

¹⁵⁰⁸ « A des absences ou des départs ou des arrivées près »

¹⁵⁰⁹ Idem.

Le milieu cognitif :

- l'enseignante produisant l'énoncé ;
- un système cognitif ayant atteint l'équilibre du schème opératoire S_{Cf} , soit le système fermé (R_a, S_{Cf}) .

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- la question exprimée verbalement: « *Pourquoi as-tu choisi tous ces objets?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante exprimant la question ;
- le système cognitif en l'état et issu de la situation de référence précédente.

Analyse logique de la première tâche

Prédicat p' : « pouvant servir à faire un collier »

Prédicat p : « avoir un trou »

Dans E , $p \Leftrightarrow p'$

A = l'ensemble des objets présentant un trou

Situations objectives 2

Moment 1

Le milieu matériel :

- une plaque de carton X de forme quelconque, d'autres plaques de carton de formes quelconques et telles que certaines (3) peuvent se cacher sous X et d'autres (4), non. L'ensemble de ces plaques sont disposées sur une même table ;

➤ l'énoncé exprimé verbalement : « *Mets ensemble toutes les plaques qui peuvent se cacher sous celles-ci. Tu ne dois-pas essayer* ». L'enseignante désigne du doigt X , comme étant celle-ci.

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- l'enseignante exprimant l'énoncé ;
- un système cognitif ayant atteint l'équilibre du schème opératoire S_{Cf} , soit le système fermé (R_a, S_{Cf}) .

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;

- la question exprimée verbalement: « *Pourquoi as-tu choisi toutes ces plaques ?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante exprimant la question ;
- le système cognitif, en l'état et issu de la situation de référence précédente.

Analyse logique de la première tâche

Prédicat p' : « pouvant se cacher dessous ».

Prédicat p : « superposable à une partie de X ».

$P \Leftrightarrow p'$

A = l'ensemble des plaques superposables à une partie de X .

Situations objectives 3

Moment 1

Le milieu matériel :

- un cercle C tracé sur une feuille ; 11 formes triangulaires : cinq d'entre elles sont superposables à une partie du disque de frontière C ; 6 autres, non. L'ensemble est disposé sur une table ;
- le scénario : l'enseignante prend ostensiblement un des triangles du premier sous-ensemble en disant : « Regarde bien ce que je fais » : Elle place le triangle x_0 sur l'intérieur du disque. Elle place alors devant l'enfant le triangle et donne comme consigne : « *Mets ensemble tous les triangles qui peuvent aller avec celui-ci* ».

Le milieu cognitif :

- les situations de référence précédentes ;
- l'enseignante exprimant l'énoncé ;
- un système cognitif ayant atteint l'équilibre du schème opératoire S_{Cf} , soit le système fermé (R_a, S_{Cf}) .

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- la question 1, exprimée verbalement : « *Qu'est-ce que je t'avais demandé ?* » ;
- la question 2, exprimée verbalement et faisant suite à la réponse du sujet: « *Pourquoi as-tu choisi toutes ces formes ?* » ;

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante énonçant la première puis la seconde question ;

- le système cognitif, en l'état, et issu de la situation de référence précédente.

Analyse logique de la première tâche

Prédicat p' : « pouvant aller avec x_0 ».

Prédicat p : « superposable à une partie du disque »

$P \Leftrightarrow p'$

A = l'ensemble des objets superposables à une partie du disque

Situations objectives 4

Moment 1

Le milieu matériel :

- huit étiquettes sur lesquelles sont écrits des mots et disposées sur une même table ;
- l'énoncé : « *Mets ensemble tous les mots qui finissent comme jeudi* ».

Le milieu cognitif :

- les situations de références précédentes ;
- un sujet élève qui ne voit pas une écriture de jeudi ;
- l'enseignante exprimant l'énoncé ;
- le système cognitif.

Moment 2 :

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- la question 1, exprimée verbalement : « *Qu'est-ce que je t'avais demandé ?* » ;
- la question 2, exprimée verbalement et faisant suite à la réponse du sujet: « *Pourquoi as-tu choisi ces étiquettes ?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente,
- l'enseignante énonçant la première puis la seconde question,
- un système cognitif ayant atteint l'équilibre du schème opératoire S_{Cf} , soit le système fermé (R_a, S_{Cf}) .

Analyse logique de la tâche

Prédicat p' : « se termine comme jeudi »

Prédicat p : « s'écrire di à la fin »

$p \Leftrightarrow p'$

A = l'ensemble des mots dont la dernière syllabe est di.

Quelques éléments d'analyse a posteriori

- Les situations de référence, relatives aux moments 1 et 2, ont toutes été en dévolu-

tion complète.

➤ Nous présentons, dans le tableau comparatif suivant, des statistiques relatives aux observables : distribution des pourcentages¹⁵¹⁰ selon les variables :

- R, donnant la valeur :
 - 1, s'il y a production de l'extension,
 - 0, sinon ;
- P sachant R=1, donnant la valeur :
 - 1, si le prédicat p est exprimé¹⁵¹¹,
 - 0, sinon
- I, donnant la valeur :
 - 1, si on obtient, dans la réponse à la question 2, une production d'une inférence mettant explicitement¹⁵¹² en relation p et p', et sachant P = 1(sachant R = 1),
 - 0, sinon.¹⁵¹²

Pour cette dernière variable, nous donnerons des proportions, non sous la forme de pourcentages, étant donné le petit nombre de sujets concernés.

➤ Précisons que, dans les situations objectives 3, construites par B.C, il n'y pas que des formes triangulaires. Nous estimons qu'en dehors des aspects perceptifs, l'essentiel de l'activité des systèmes cognitifs n'en a pas été modifié.



Situations	Situation 1					Situation 2					Situation 3					Situation 4				
	R		P		I	R		P		I	R		P		I	R		P		I
Valeurs	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
Classe de P.B	65	35	100	7	1/15	48	52	91	9	2/10	74	26	94	6	1/16					
Classe de B.C						80	20	92	8	2/11	85	15	100	0	0/12	93	7	77	23	6/10
Différence						+32		+1		0	+11		+6		0					
situation des bâtonnets (post-test)					R=1		P.B= 43%			B.C = 61%			P=1							
Différence					18%										10%					

Tableau XVII

¹⁵¹⁰ Arrondis à 1% près.

¹⁵¹¹ Etant donné l'âge des sujets, on a accepté ainsi toute expression contenant le terme central du prédicat, à une synonymie près.

¹⁵¹² Pour simplifier, nous désignerons par P, la variable P/R=1 et par I, la variable (I/(P=1))/R=1

Concernant la réussite à la tâche de construire une extension, en se donnant un prédicat p opérationnel (R=1), les pourcentages de réussites présentent des différences encore notables. Rappelons que la classe de P.B est dans une zone classée ZEP, ce qui donc, sur ce point, semble finalement encore jouer mais de façon atténuée¹⁵¹³.

➤ Nous comparons ces observations avec celles que nous avons pu faire à l'issue du test initial et positionnant les sujets par rapport aux stades piagétien : **Nous avons pu, dans ce dernier cas, observer que 87% des élèves de la classe de P.B semblaient relever du stade I, voire antérieur (en y incorporant les sujets n'ayant produit comme extension que celle concernant les « piky » et que l'on peut considérer comme relevant aussi de la convenance personnelle). Nous pouvons considérer que 62% d'élèves de cette classe en sont désormais au stade II-III et au niveau 1 tels que nous les avons définis¹⁵¹⁴.**

Le tableau suivant illustre précisément, la comparaison entre le test piagétien initial et l'évaluation de la résultante cognitive et pour les deux classes.

Test Piagétien	Construction d'extensions Possibles	Enoncé(s) de prédicat(s)
Evaluation	R=1	P=1/R=1
Classe de P.B	13%	4,3%
Situations 1, 2 et 3	62,3%	95%
Classe de B.C	77%	53,8%
Situations 2, 3 et 4	86%	90%

Tableau XVIII

➤ Rappelons que le test a été réalisé la même année en septembre 2007 dans les deux classes. Les évaluations de R_C concernent la même classe, prise en charge par P.B et en juin 2008 et une classe différente, prise en charge par B.C et en mars 2009. Ce qui nous importe, c'est, en l'occurrence, de mettre en évidence la forte réduction du différentiel entre une classe classée en ZEP et une autre classe, lorsqu'elles ont bénéficiée d'apprentissages isomorphes. D'autre part, on ne peut négliger que l'expérience acquise par B.C, relativement à la compétence « catégoriser », a certainement contribué, en l'année II, à améliorer la qualité de sa communication avec ses élèves¹⁵¹⁵.

➤ **On peut observer que l'expression d'un prédicat est l'indice d'une conscience**

¹⁵¹³ Nous estimons que des impondérables nombreux dans ces classes biaisent les évaluations relatives à certains sujets. Par exemple, un écart de 4% dans la classe de P.B, correspond à 1 élève sur les 23 élèves concernés par ces évaluations ce qui, en termes de données brutes, est peu.

¹⁵¹⁴ Nous avons considéré une moyenne, relativement aux quatre situations.

¹⁵¹⁵ Jugement que nous reprenons de l'intéressée elle-même.

réfléchi de niveau 2, même si la verbalisation d'une inférence en acte reste, à l'école élémentaire, peu accessible. Ce niveau se retrouve à plus de 90% des systèmes cognitifs, ayant produit des catégories pertinentes, et dans les deux classes.

➤ Le cas de la situation 4, dans la classe de B.C, est remarquable sur ce point : 23% des sujets se contentent de répéter la réponse à la première question : ils reprennent le prédicat p' de l'énoncé. Toutefois, une majorité (60%) de ceux qui parviennent à exprimer le prédicat p produisent explicitement une inférence ou une partie de cette inférence (parce que p'). **On note alors, dans cette situation, une conscience réfléchi de niveau 2 mais avec une partie substantielle de verbalisation.**

➤ Il reste la situation 2 qui présente, entre les deux classes, un différentiel remarquable, concernant la valeur $R=1$. Nous retrouvons, comme précision, dans le compte rendu de P.B, le fait que 51% (6 élèves) des sujets donnant la valeur $R = 0$, dans cette situation, expriment pourtant un prédicat p : le même que les sujets évalués $R=1$, dans notre tableau. **Pour ces sujets, la régulation de contrôle n'est donc pas restée active tout au long de l'activité. Cet aspect n'est certes pas une constante, tout au moins directement observable, mais doit se coordonner à d'autres déficiences transversales.** En effet, dans les quatre situations qui leur ont été proposées, les échecs (évaluation : $R_i = 0$) le sont, respectivement pour cinq d'entre eux, aux nombres de 4, 3, 3, 3 et 3 (sur 4 possibles), le sixième ayant subi 2 échecs.

➤ Nous détaillons l'étude de cette évaluation, concernant la classe de P.B, avec le tableau à suivre. Nous y reprenons la variable X , étudiée au test piagétien (Tableau I) On y considère la variable ΣR_i où R_i est une des variables relatives aux trois situations construites ($1 \leq i \leq 3$) et étudiées dans le tableau XVII ci-dessus. R_4 est la variable X de la situation des bâtonnets du post-test du tableau XV.

Nous allons considérer comme satisfaisant, le développement d'un système cognitif, concernant un sujet donnant la valeur $\Sigma R_i \geq 2$. Cette terminologie laisse certes place à une forme subjective d'évaluation. Mais, à partir de deux évaluations de la variable R_i , nous pourrions penser que le développement de la compétence C_f , « catégoriser » et de sa composante cognitive, le schème opératoire S_{Cf} , sont objectivement évalués dans l'espace de la résultante cognitive R_C , puisque l'on peut estimer que l'inférence conduisant « à la découverte de p » ne relève pas de la contingence mais d'une inférence implicite.

➤ Quoique les concepts de schèmes, de régulations et de niveaux de conscience nous autorisent aussi des analyses de type cliniques, nous ne le ferons pas dans ce qui suit.

On obtient ainsi le tableau suivant :

Développement		Schème S _C peu ou pas opératoire		Schème S _C opératoire			Développement satisfaisant
Situation : évaluation R _C Evaluation au test	ΣR_i	0	1	2	3	4	Pourcentages
	X						
Pas de schème S _C initialement disponible	0	x	xxxx	xx	xx	x	50%
	1		xx		x	xx	60%
	2		x	x	xx	x	80%
Schème S _C initialement disponible ¹⁵¹⁶	3				x	x	100%
	4				x		100%

Tableau XIX x est l'un des 23 sujets

➤ Nous notons que :

- 50% des sujets dont la compétence « catégoriser » avait été évaluée comme inexistante ($X = 0$), c'est à dire en deçà d'un développement correspondant au stade des collections figurales, atteignent, au terme de cet apprentissage, un développement satisfaisant ;
- 60% des sujets dont la compétence « catégoriser » avait été évaluée au stade des collections figurales ($X = 1$), atteignent, au terme de cet apprentissage, un développement satisfaisant ;
- 80% des sujets ayant construit une catégorie mais par convenance personnelle ($X = 2$), atteignent, au terme de l'apprentissage, un développement satisfaisant ;
- 100% des sujets dont la compétence « catégoriser » avait été évaluée au stade des collections non figurales de type 1 (extension autre que celle « des piki », $X = 3$) et de type 2, pour un sujet avec tri exhaustif, ($X = 4$), atteignent, au terme de cet apprentissage, un développement satisfaisant.

➤ Ces dernières observations tendraient aussi à montrer que le développement de la compétence « catégoriser » est d'autant plus équilibré que le système cognitif disposait, antérieurement à l'apprentissage, d'outils interprétables comme éléments initiaux constitutifs d'une structure de schème S_C⁷, ce qui est un résultat en accord avec les positions de Jean Piaget, concernant les normes d'accommodation.

➤ Nous notons, ci-dessous, la distribution des pourcentages selon le nombre de

¹⁵¹⁶ Nous voulons dire que le sujet dispose, antérieurement à l'apprentissage, d'une certaine compétence à catégoriser.

tâches « réussies » par un sujet et ceci, pour les deux classes¹⁵¹⁷ :

Valeurs	0	1	2	3	4	moyenne
Classe de P.B	4.3%	30.4%	13.0%	30.4%	21.7%	2.34
Classe de B.C	0%	0%	7.1%	57.1%	35.7%	3.28

Tableau XX

- La réussite aux tâches d'évaluation de la résultante cognitive R_c , dans la classe de B.C, peut être considérée comme totalement satisfaisante.
- On obtient, dans la classe de P.B, une réussite aux tâches d'évaluation de la résultante cognitive satisfaisante.

Éléments conclusifs

➤ Les sujets concernés dans notre analyse a priori par une réussite, à l'une des trois tâches et qui ont été anticipés comme des possibles 2 (au début de ce paragraphe) présentent un pourcentage de 88 % dans la classe de B.C et 62,3% des sujets, dans la classe de P.B¹⁵¹⁸. Le niveau 1 de développement atteint par les systèmes cognitifs correspondants, dans ces cas, est bien celui que nous avons fixé comme l'objectif didactique de l'apprentissage sous 1.4.2.2. En effet, une évaluation de la résultante cognitive R_c implique celle de la compétence opératoire C_f , à ce niveau.

➤ Dans toutes les situations, on note une stabilité importante, relativement à une conscience réfléchie de niveau 2, sachant S_c disponible. Et bien qu'associée à une verbalisation seulement dans 13 cas sur 114 cas. Nous analysons¹⁵¹⁹ ceci de la façon suivante : le développement de la régulation R_a , s'est, en dehors de sa spécificité qui est d'activer le schème S_c , systématiquement coordonné à une régulation de contrôle dont l'indicateur sémiotique fondamental est le couple (quantificateur, prédicat). Précédemment à notre évaluation, les énoncés de tâches présentaient explicitement de tels indicateurs. Et la régulation anticipatrice R_a , demeurerait suffisante à l'activation d'un schème d'action, opérationnel sur le plan cognitif. La quantification universelle est interprétée par le système cognitif comme s'accompagnant d'un prédicat p, nécessairement opérationnel sur le plan logique. C'est ce qui a été appris. Mais dans nos évaluations, le prédicat p', donné dans la situation objective, n'est pas directement opérationnel, et l'activation de R_a , seule, est insuffisante. Le système cognitif est perturbé. L'auto régulation consiste, en l'occurrence, à activer une autre régulation qui doit sa disponibilité à un développement non réduit à ne servir que les opérations de catégorisation. Nous avons déjà exprimé

¹⁵¹⁷ Concernant la classe de B.C, il faut donc entendre R_i avec $2 \leq i \leq 4$ et $R_1 = X$, X étant la variable du post-test.

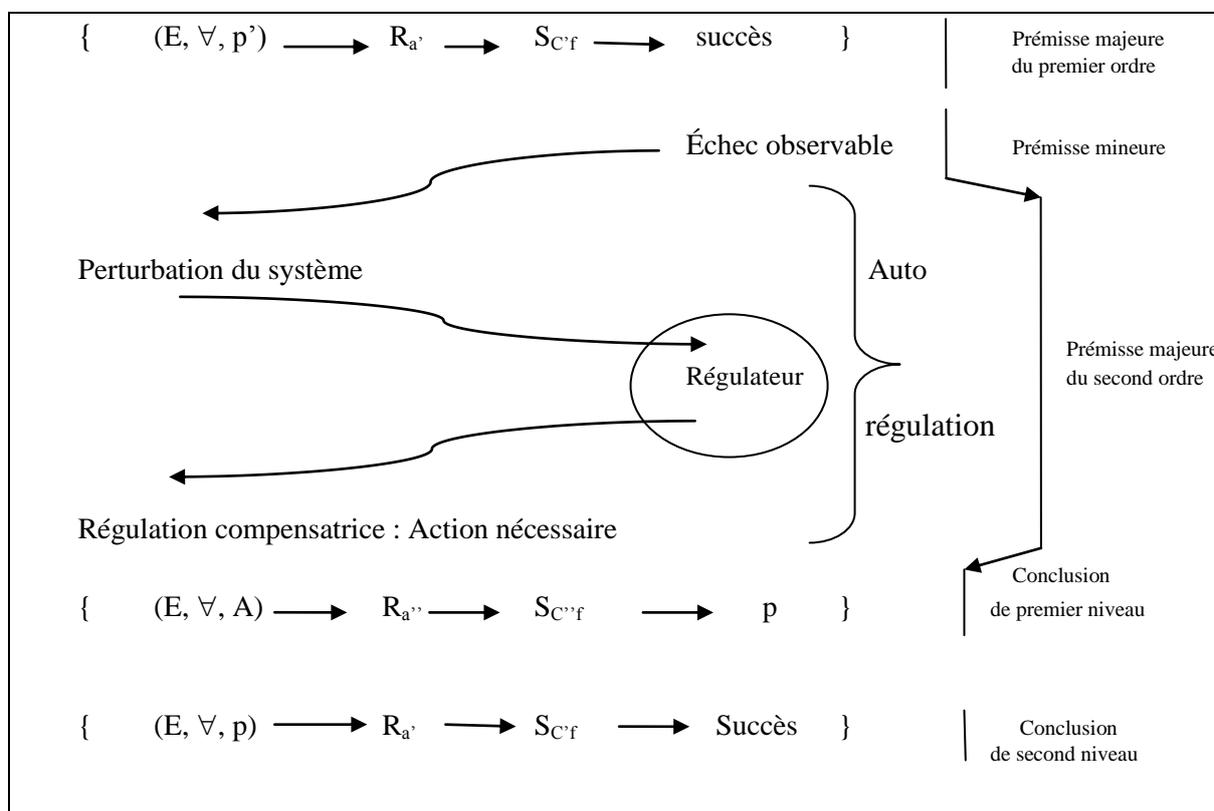
¹⁵¹⁸ Nous considérons donc 45 sujets (3x15) dans la classe de B.C et 69 sujets (3x23) dans la classe de P.B.

¹⁵¹⁹ Nous reprenons en ce point les éléments de notre analyse a priori et que nous complétons maintenant.

l'hypothèse (dans notre analyse a priori), que nous pouvons concevoir que le développement spécifique de la catégorisation ait renforcé le potentiel d'action d'une telle régulation ; ce en quoi, on peut considérer par là, une autre composante de la résultante cognitive R_c .

➤ **Précisons alors que, dans le cas des situations qui précèdent, la perturbation est, au niveau du régulateur, de type 1. Elle est de type 1, au niveau du régulateur, donc en particulier pour la régulation R_a . Car la régulation compensatrice aboutissant à l'activation d'un schème d'inférence, déjà disponible dans le système, fait intervenir les régulations R_a' et R_a'' , sans qu'elles en soient modifiées, à l'issue des situations de référence.**

On peut exprimer naïvement ainsi cette inférence fondamentale par le schéma suivant :



➤ Les situations sont, pour le schème S_{Cf} perturbante de type 2. En effet, le dénoté de la compétence « catégoriser » s'étend aux situations qui supposent, dans l'activité, la production d'une inférence spécifique, sans changement de conception. D'un point de vue développemental, la situation est donc perturbante de type 1 pour la régulation R_a' , anticipatrice du schème S_{Cf} , puisque celle-ci ne change pas de nature, sauf qu'elle sera réactivée une seconde fois, dès lors qu'un schème d'inférence sera le produit nécessaire d'une rétroaction, après que

le système ait perçu l'activation première de la régulation R_a comme un échec. Et le développement évalué concerne précisément cette compétence qui, au niveau du système, est analysé comme la nécessité de produire cette inférence, mais cette fois explicitable logiquement : pour avoir A, il suffit d'avoir un p équivalent à p'.

➤ **Ce processus complexe d'inférence, qui constitue, dans ces situations, pour l'analyste, l'élément causal de la réussite de la tâche, est précisément celui dont l'activation traduit, par cette régulation fondamentale, la nécessité au niveau du système cognitif** : nous déduisons des réponses des sujets que l'essentiel de cette activité cognitive relève, dans la totalité des cas, d'une conscience en acte, concernant les situations 1, 2, 3,4 et celle des « bâtonnets » et pour une minorité des cas, d'une conscience réfléchie de niveau 2, mais restreinte à quelques éléments de l'inférence logique explicitable.

➤ La situation 4 semble remarquable, sur ce point, puisque 6 élèves sur 10 expriment des éléments d'une inférence logique, dans une formulation du type : « parce comme jeudi il y a di à la fin »¹⁵²⁰. Rappelons que l'enseignante dédouble son questionnement par une demande de rappel de la consigne (donc de p'), suivie d'une demande d'explicitation. Ce qui pourvoit le système en indices renvoyant à son activité et favorisant la prise de conscience réfléchie de quelques éléments de l'inférence logique (p parce que p').

3.9 Le cas du tri comme évaluation de la résultante cognitive

3.9.1 Définitions

Éléments de logiques

Soit E un ensemble d'objets. On dit qu'un critère \mathcal{R} est correctement formulé, relativement à E, si \mathcal{R} est une application de $E \times E$ dans $\{0, 1\}$.

En d'autres termes, pour tout couple (x, y), élément de $E \times E$, $\mathcal{R}((x, y))$ est une proposition¹⁵²¹

On note plus simplement $\mathcal{R}((x, y))$ sous la forme $x \mathcal{R} y$ lorsque la proposition est vraie et on interprète cette proposition comme une relation \mathcal{R} entre x et y.

On formule également la définition du critère en disant que \mathcal{R} est une relation définie sur E.

\mathcal{R} étant une relation d'équivalence¹⁵²², nous définissons le tri comme l'opération :

➤ qui, à tout couple (E, \mathcal{R}), associe une partition \mathcal{P} de l'ensemble E. E étant un en-

¹⁵²⁰ Que l'on peut rapprocher de la formulation : « comme jeudi alors di à la fin ». C'est-à-dire $p' \Rightarrow p$.

¹⁵²¹ Rappelons qu'une proposition est une assertion pour laquelle on dispose d'un moyen de décider d'une valeur de vérité.

¹⁵²² Comme nous l'avons déjà définie sous 1.2.

semble donné, \mathcal{R} est un critère correctement formulé, relativement à E ;

➤ qui, réciproquement, à tout couple (E, \mathcal{P}) , où \mathcal{P} est une partition de E , associe un critère correctement formulé relativement à E .

Éléments cognitifs

C_t est la compétence « trier » et définie, dans sa dimension cognitive, par un schème S_{C_t} .

La compétence C_t est opératoire, en ce sens que l'opération de tri, E étant donné, est réversible :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathcal{P} \quad \text{et} \\ \mathcal{P} & \longrightarrow & (E, \mathcal{R}). \end{array}$$

Compléments structuraux

Il s'agit d'éléments cognitifs analogues à ceux définis pour la compétence « catégoriser » et que nous pensons pouvoir retrouver pour toutes compétences mathématiques, ainsi définissables à l'école élémentaire :

- $S_{C_t} = (S_{C_t}, S_{C_t'})$ est le schème opératoire de cette compétence ;
- S_{C_t} est le schème anticipé par la formulation langagière F_{C_t} : « construire \mathcal{P} tel que (E, \mathcal{R}) » ;
- formulation qui sert d'indicateur à une régulation R_a , anticipatrice du schème S_{C_t} ;
- $S_{C_t'}$ est le schème anticipé par la formulation langagière $F_{C_t'}$: « dire (E, \mathcal{R}) tel que \mathcal{P} » ;
- formulation qui sert d'indicateur à une régulation inverse R_a' , anticipatrice du schème réciproque $S_{C_t'}$.

3.9.2 L'évaluation

Éléments d'analyse logique et cognitive

L'analyse logique et cognitive d'une tâche directe de tri, c'est-à-dire de la construction d'une partition de E , (E, \mathcal{R}) étant donné comme objet d'une certaine situation objective, nous conduit à la conclusion que C_t est dans la zone proximale de développement de la compétence C_f de la catégorisation¹⁵²³. Cela va de soi, en ce qui concerne le schème S_{C_t} , qui, dans une première construction, l'est au terme d'une équilibration de type 2¹⁵²⁴ puisque le système peut s'accommoder d'une situation de tri, finalisée par un partitionnement de E , en activant de façon récursive le schème S_{C_f} de la catégorisation directe¹⁵²⁵.

¹⁵²³ Ceci est déjà exprimable dans un développement purement mathématique.

¹⁵²⁴ Rappelons que trois types de perturbations sont définis dans le chapitre 4.

¹⁵²⁵ Le système peut concevoir une succession de catégories (« une par boîte »), jusqu'à « épuisement » de l'ensemble E .

Toutefois, et c'est là l'un des possibles, nous avons pu constater que la solidité du schème S_{C_f} peut permettre, à certains systèmes cognitifs, de considérer simultanément et non successivement ce qu'il a analysé comme plusieurs catégories à construire, dans une opération de tri. Une telle disponibilité permet donc de disposer de plusieurs schémas d'actions possibles.

Notre objectif présent n'est pas de définir un apprentissage conduisant à un développement poussé de la compétence « trier ». Nous précisons simplement qu'un tel apprentissage proposerait, à un système cognitif, des situations perturbantes de type 2, mais en le contraignant à inhiber finalement¹⁵²⁶ le schème S_{C_f} , dans la construction d'un schéma complet d'actions, puisque le tri n'est pas réductible à la catégorisation ni logiquement ni cognitivement, dans sa compréhension la plus générale.

Nous visons simplement à évaluer la capacité du système à adapter le schème S_{C_f} , sans autre apprentissage initial qu'une construction de la formulation F_{C_t} ¹⁵²⁷.

❖ **B.C va proposer à ses élèves, en mai 2009¹⁵²⁸, des situations qui contiennent, de plus, la dévolution du choix de \mathcal{R} .** Ainsi, la compétence C_t est en fait plus générale (de dénoté plus grand¹⁵²⁹), puisque la formulation langagière se réduit à « trier ».

Les situations objectives

Situation 1

Moment 1

Le milieu matériel :

- le jeu de cartes présenté ci-dessous ;
- l'énoncé verbalisé : « *Trie ces cartes de plusieurs façons* » ;
- quatre boîtes posées sur la même table et d'intérieur visible.

Le milieu cognitif :

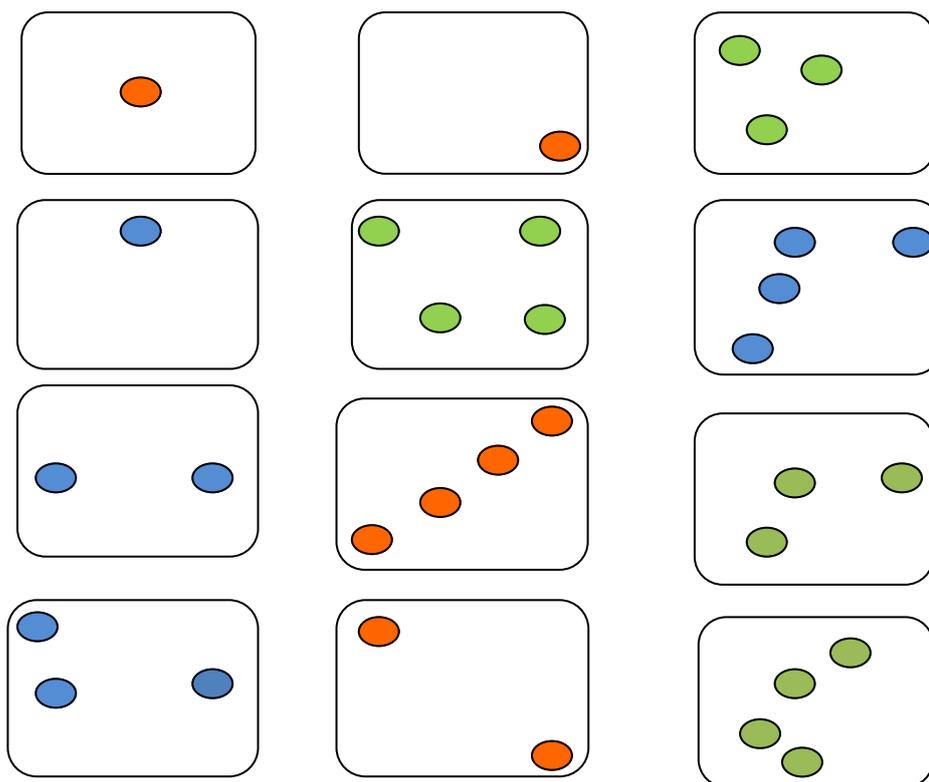
- un système cognitif élève ;
- l'enseignante, exprimant l'énoncé ;
- un système cognitif compétent pour catégoriser.

¹⁵²⁶ Et non définitivement, comme dans le cas de situations perturbantes de type 3.

¹⁵²⁷ Il s'agit de s'entendre initialement sur les mots disponibles dans un énoncé.

¹⁵²⁸ 13 élèves de grande section.

¹⁵²⁹ Au sens inclusif du terme.



Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- la question exprimée verbalement par l'enseignante, après qu'un tri soit considéré comme achevé par le sujet : « *Comment as-tu trié ?* » ;
- la question exprimée verbalement : « *Qu'est-ce que ça veut dire ?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante exprimant la question ;
- le système cognitif en l'état et issu de la situation de référence précédente.

Situation 2

Le milieu matériel :

- reconstitution du milieu matériel précédent ;
- reprise à partir du moment 1 précédent ;
- la consigne : « *refais d'une autre façon* » se substitue à celle définie dans le moment 1 précédent.

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- la question exprimée verbalement par l'enseignante, après qu'un tri soit considéré comme achevé par le sujet : « *Comment as-tu trié ?* » ;
- la question exprimée verbalement : « *Qu'est-ce que ça veut dire ?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante exprimant la question ;
- le système cognitif en l'état et issu de la situation de référence précédente.

Les analyses a priori

Moment 1

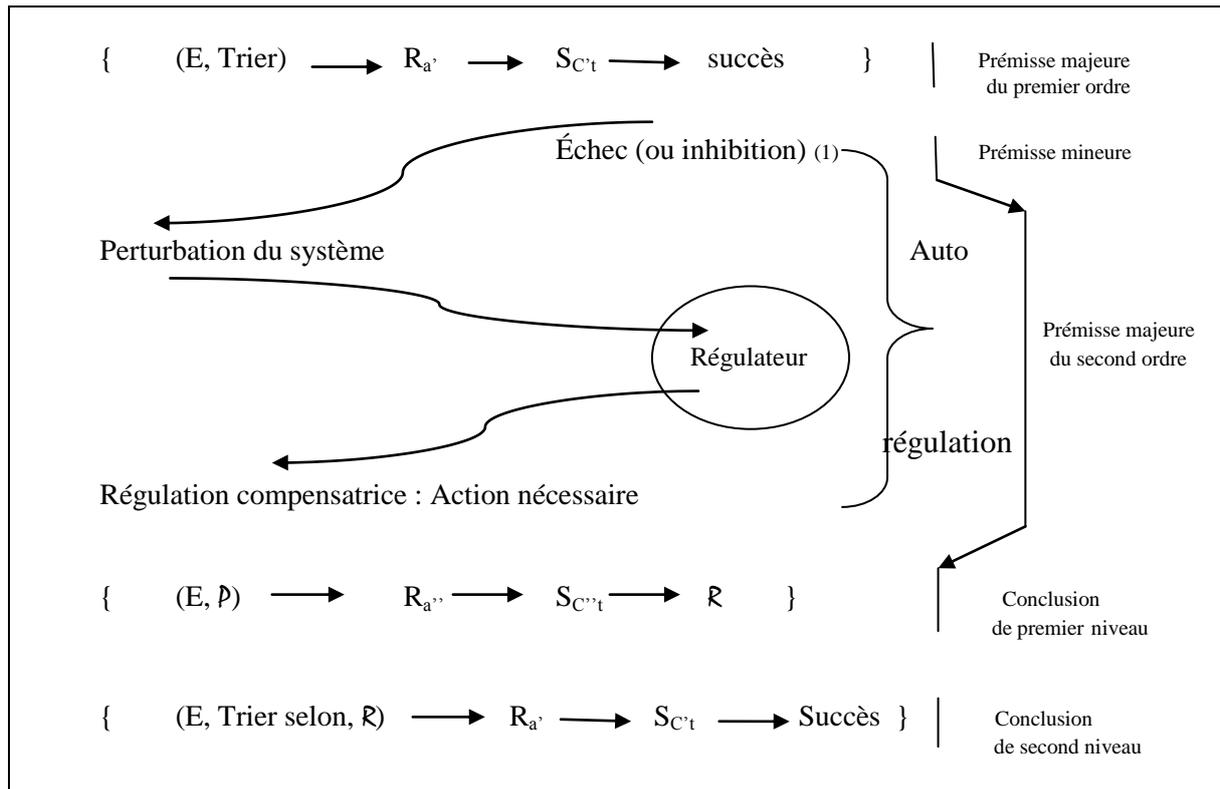
L'analyse logique de la tâche

- Il existe \mathcal{R} tel que : $(E, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{P}$
- c'est-à-dire $\forall x \forall y (\mathcal{R}((x, y))$ est une proposition.
- $\forall x, x \in E$, on définit la fonction $V_x: E \longrightarrow \{0, 1\}$
 $V_x(y) = 1$ équivaut à $x \mathcal{R} y$
- On définit par \mathcal{P}_x , une partie de E par $\mathcal{P}_x = \{y \in E \text{ et } V_x(y) = 1\}$
- $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_x ; x \in E\}$.
- Remarque : cardinal $(\mathcal{P}) = \text{cardinal } \{\mathcal{P}_x ; x \in E\}$

L'analyse cognitive de l'activité

Moment 1

- Le verbe « trier » et l'ensemble donné E sont des indicateurs sémiotiques, anticipateurs du schème S_{C_t} du tri.
- Le critère \mathcal{R} manque dans le milieu matériel pour une assimilation normale de la situation par le schème S_{C_t} . Ce qui est analysé par le système comme une perturbation.
- Nous ne reprenons pas l'analyse de l'activité, dans toute sa complexité et, telle que nous l'avons détaillée en plusieurs endroits de nos écrits : il suffit de considérer la substitution d'un prédicat p par un critère \mathcal{R} et la substitution du schème de catégorisation S_{C_f} par le schème S_{C_t} de tri. On retrouve une analyse formelle analogue à celle développée sous 3.7
- Nous allons reprendre le schéma précédent en l'adaptant :



En toute généralité, nous définissons la première tentative d'assimilation comme conduisant à un échec et ressenti comme tel. Mais en fait, le développement de la compétence « trier » est dans la zone proximale de développement de la compétence « trier selon ». Un tel développement semble pouvoir s'opérer dans des situations perturbantes de type 1 et donc, sans la nécessité d'une médiation pour tous les sujets. Dans ce cas, le schème $S_{C't}$, initialement activé, est provisoirement inhibé. Il n'y a pas échec mais « mise en standby » de l'exercice de ce schème.

➤ **Une régulation compensatrice active le schème d'une attention logique sur l'ensemble E et coordonnée à celle de la production d' hypothèses (heuristiques) qui conduisent (par essais-erreurs¹⁵³⁰) à la découverte de R. Rappelons que c'est par ce processus heuristique que s'exprime la nécessité et non, comme on l'entend souvent, dans son expression métonymique, à savoir R. Concrètement, le système anticipe différentes partitions P de E, jusqu'à ce que l'une d'entre elles s'impose comme solution de l'exercice :**

$$\boxed{\{ (E, P) \longrightarrow R_{a''} \longrightarrow S_{C''t} \longrightarrow R \}}$$

➤ On peut préciser la teneur des observables : les éléments de E relèvent tous d'une

¹⁵³⁰ Nous pouvons entendre cela comme un implicite et dans une conscience seulement en acte.

même espèce : la couleur ou la quantité... ; les classes d'équivalence de la partition sont tous définies par tous les modes de cette espèce, relativement à E. D'où les possibles :

- possible 0 : le système ne perçoit pas l'espèce et abandonne ou produit, pour différentes raisons, une partition qui ne correspond pas à un tri ;

- possible 1 : le système perçoit une espèce et les différentes modes de cette espèce. Le sujet peut alors anticiper le nombre de boîtes nécessaire et suffisant. On devrait retrouver systématiquement les solutions $\mathcal{R} = \ll \text{couleur} \gg$ ou $\mathcal{R} = \ll \text{quantité} \gg$:

- possible 1.1 : le système construit son tri par catégorisations successives.

Formellement : $S_{Ct}(\mathcal{S}_{Ct})=S_{Ct}(S_{Ct}(S_{Cf}...(S_{Cf}(\mathcal{S}'_{Cf}))$ où \mathcal{S}_{Ct} est la situation objective initiale et \mathcal{S}'_{Cf} est une re-représentation(récursive) de la situation \mathcal{S}_{Ct} ,

- possible 1.2 : le système construit son tri globalement ou semi-globalement (si quelques catégorisations).

Moment 2

- Le possible 1 devrait conduire à l'exercice d'une conscience réfléchie de niveau 1, induite par la première question.

- La réponse à la seconde question devrait rendre compte d'une activité de catégorisation.

- Et comme celle-ci est récursive, c'est-à-dire, un outil systématique (jusqu'à épuisement de E), pour exécuter une tâche de tri, la régulation de contrôle qui a permis de maintenir la récursivité à été l'objet d'une conscience de niveau 1, participant elle-même du processus de récursivité. Précisons que cette régulation contraint (entre autre) le sujet à une observation systématique de E-A, à chaque pas du processus récursif. La quantification universelle pourrait alors relever d'une conscience réfléchie de niveau 2. En effet, celle-ci est, pour la finalisation d'un schéma complet d'action, un indicateur explicite qui « joue », comme une prémisse, dans une inférence qui conduit à définir (en acte, toutefois) une forme suffisante d'un ensemble d'actions.

- Nous limitons, à ce point, la prise de conscience de niveau 2, car nous ne supposons pas, à ce niveau de développement des systèmes cognitifs, une anticipation calculée de la totalité d'une suite décroissante d'ensembles¹⁵³¹.

- Les réponses des sujets devraient donc contenir des formulations langagières complètes, relativement à la catégorisation.

¹⁵³¹ Les compléments dans E de la dernière réunion de catégories A construites, si le système s'y prend par catégories successives.

Éléments d'analyse a posteriori

➤ Toutes les situations de référence l'ont été en dévolution complète.
 ➤ Le tableau suivant rend compte de la distribution des pourcentages¹⁵³² selon les variables :

- A, prenant la valeur :
 - 0, s'il y a échec dans la partition \mathcal{P} ,
 - 1, si l'activité est interprétable en termes de catégorisations successives et produit une partition \mathcal{P} ,
 - 2, si l'activité n'est pas interprétable en termes de catégorisations successives et produit une partition \mathcal{P} ;
- E sachant $A \neq 0$, prenant la valeur :
 - 1, si la réponse à la première question est l'énoncé du critère \mathcal{R} associé à la partition \mathcal{P} ,
 - 0, sinon ;
- C sachant $E = 1$, prenant la valeur :
 - 1, si la réponse à la seconde question est l'expression des catégories disjointes et contient explicitement une quantification¹⁵³³ ;
 - 0, sinon.

Variables	A			E/A≠0		C/E=1	
	0	1	2	1	0	1	0
Tri selon la quantité	15%	46%	38%	91%	9%	45%	55%
Tri selon la couleur	0%	77%	23%	100%	0%	92%	29%

Tableau XXI

➤ Nous retrouvons 2 sujets, sur les 13 sujets, qui sont des possibles 0, dans la situation « tri par quantité » ; donc seulement 2 sujets, sur 26 sujets, (8%)¹⁵³⁴, en échec sur un tri. Comme nous le constatons, dans de multiples situations, des « activités associées au genre quantitatif » sont le plus souvent moins bien réussies que des « activités d'un autre genre » et du même type. Notons que l'un de ces deux sujets a confondu la constellation des quatre ellipses, alignées en diagonale sur une carte, avec une constellation de trois ellipses, alignées en

¹⁵³² Arrondis à 1% près.

¹⁵³³ On n'assimilera pas le substitut, article défini « les », à une occurrence de quantificateur. Mais nous avons déjà dit que le système cognitif le conçoit souvent ainsi.

¹⁵³⁴ En réunissant les deux situations.

diagonale, ce qui constitue sa seule erreur.

➤ Concernant une activité de tri, entre 91% et 100% des systèmes cognitifs sont susceptibles d'un niveau 1 de prise de conscience. Concernant une verbalisation, on note une plus grande difficulté, dans le cas du genre quantité que dans celui du genre couleur.

➤ Le genre « qualitatif » autorise une évaluation immédiate de la proposition : « x est du mode ... », ce qui n'est pas le cas du genre « qualitatif ». Ainsi, le maintien de la régulation de contrôle, relatif au processus récursif de catégorisation se trouve-t-il mis en difficulté par cette charge, en mémoire travail, qui est le rappel du schème de comptage et l'exercice de ce schème. Et ceci de façon non systématique, puisque certaines cartes présentent des ellipses en petite quantité. Ainsi, le schème du subitizing peut-il se substituer à celui de comptage. Ce non systématisme est producteur de complexité pour le système cognitif.

➤ On observe donc une déperdition du schème de la catégorisation. Ainsi, l'opérationnalité du schème de tri conduit le système à une adaptation et une autre procédure se substitue à l'exercice systématique du schème de la catégorisation qui reste présent, lorsque l'évaluation de la proposition $p(x)$ est immédiate. Paradoxalement, les systèmes qui réussissent développent, dans ce cas, une activité traduisant une compétence de niveau supérieur. C'est ce qui pourrait expliquer aussi une sorte d'abandon de l'expression de la quantification par une partie des 55% des sujets qui ne la formulent pas dans leur réponse.

➤ On ajoute que 50% des situations, qui conduisent le sujet à prendre la valeur $A=1$ (activité par catégorisations successives) sont suivies, dans le moment 2, d'une réponse caractérisée par $C=1$ (expression de la quantification). Ils constituent donc le minimum des systèmes cognitifs assimilables à des possibles 1.1. Si nous n'excluons pas la substitution langagière : « les » à la place de tous (toutes) ce pourcentage passe à 88%.

➤ On ajoute que 50% des situations qui conduisent le sujet à prendre la valeur $A=2$ (activité hybride) sont suivies, dans le moment 2, d'une réponse caractérisée par $C=1$ (expression de la quantification). Ils constituent donc le minimum des systèmes cognitifs assimilables à des possibles 1.2.

➤ On se retrouve, dans ces derniers cas, avec une possible conscience réfléchie de niveau 2 mais toujours en l'absence d'une verbalisation, relative à une inférence.

➤ **Précisons enfin que 100% des sujets donnant la valeur $A=1$ ou $A=2$ ont construit au moins 3 catégories.**

➤ **Notons enfin que 61 % des systèmes ont construit explicitement 7 catégories, ce qui correspond à toutes les catégories possibles, les deux situations de tri étant confondues.**

➤ Seulement 4 sujets sur les 28 sujets tentent directement une opération de tri sans chercher à catégoriser. Ainsi l'indice « boîtes ouvertes » n'a pas été un indicateur pour induire une anticipation d'une opération de tri sans catégorisation explicite¹⁵³⁵. Ce qui ne veut pas dire que celle-ci ait été absente de leur représentation mais qu'elle l'est de leur schéma complet d'action.

Conclusion

Le schème de la catégorisation est systématiquement constitutif du schème tri ; les systèmes cognitifs en ont une conscience réfléchie de niveau 2, dans au moins 50% des cas et, précisément, associée à la régulation de contrôle dont l'un des arguments est la quantification universelle.

Pour au moins 50% des sujets, l'expression d'un quantificateur universel est systématique.

La prise de conscience que le système a de cette régulation est suffisante pour la réussite d'une tâche de tri. Elle est aussi naturellement nécessaire, mais à un niveau qui peut être minimal comme la conscience en acte.

❖ **H.B a proposé, en juin 2009, à ses onze élèves de petite section, désormais âgés de (4 ; 0) à (4 ; 3), des opérations de tri.** Il s'agit, pour l'enseignante, de séances d'évaluation, l'apprentissage des opérations de tri s'étant étalé sur le mois de mai. Elle impose ici au milieu matériel des boîtes dont l'intérieur n'est pas visible.

Les situations objectives

Nous les précisons succinctement.

Moment 1

Le milieu matériel :

➤ le même que précédemment, à ceci près que les boîtes ne sont pas disponibles. Elles sont disposées plus loin sur une autre table. C'est dans la situation de référence que le sujet pourvoira à ce manque et, selon les besoins qu'il aura définis ;

- l'énoncé : « *Tu regardes. Je vais te demander de trier* ».
« *Tu vas trier par quoi ?* »
« *Tu prépares les boîtes dont tu auras besoin* ».

¹⁵³⁵ Nous ne disons pas que toute activité de tri est indépendante d'une représentation contenant des éléments de catégorisation. Ceci serait contraire à la fois à la théorie des ensembles et aussi à la logique développementale des schèmes.

Le milieu cognitif :

- un système cognitif élève ;
- l'enseignante, exprimant l'énoncé ;
- un système cognitif compétent pour catégoriser.

Moment 2

Le milieu matériel :

- le milieu matériel initial transformé ;
- l'énoncé : « *Tu as trié par quoi ?* ».

Le milieu cognitif :

- la situation de référence précédente ;
- l'enseignante exprimant la question ;
- le système cognitif en l'état et issu de la situation de référence précédente.

Élément d'analyse a posteriori

➤ Nous présentons, dans le tableau ci-dessous, la distribution des proportions selon les variables A et E, précédemment définies. Les interrogations de l'enseignante ne conduisent pas à des observables relatifs à la variable C.

- Nous ajoutons la variable B prenant la valeur :
 - 1, si le sujet anticipe le nombre de boîtes ;
 - 0, sinon.

Variables	A			E		B	
	0	1	2	1	0	1	0
Tri par Quantité (1)	0%	2/3	1/3 (3)	100%	0%	0/3	3/3
Tri par Couleur (2)	9% (4)	82%	9% (5)	70%	30% (6)	1/11	10/11

Tableau XXII

- (1) Concerne trois sujets.
- (2) Concerne 11 sujets.
- (3) Un seul sujet qui rectifie correctement un oubli, lors d'une première catégorisation.
- (4) Un seul sujet qui rectifie spontanément, après avoir vérifié le contenu des boîtes.
- (5) Un seul sujet qui rectifie correctement un oubli lors d'une première catégorisation.
- (6) Concerne 3 sujets. Deux sujets sur trois explicitent les trois catégories relatives aux trois couleurs.

➤ Nous observons, qu'à ce niveau de développement, le schème de tri S_{Ct} peut être défini comme un schème récursif, l'exercice du schème S_{Cf} étant constitutif du fonctionnement récursif.

- Les systèmes cognitifs ne sont pas perturbés par l'absence provisoire des boîtes et

donc le schème de la catégorisation n'a pas à subir une accommodation autre.

➤ Un seul sujet anticipe spontanément et correctement le nombre de boîtes utiles, mais il procède aussi par catégorisation. En fait, aucun autre sujet ne s'acquitte de la tâche, proposée par l'enseignante, et exprimée par la contrainte : « Tu prépares les boîtes dont tu auras besoin ». Enoncé qui, finalement, ne leur apparaît pas comme une contrainte, autre que de s'acquitter de cette tâche de façon empirique.

Conclusion

➤ **Les sujet de petites sections disposent d'un développement de leur compétence « catégoriser » de niveau comparable à celui de sujets ayant un âge d'environ deux années de plus** (en dehors d'une verbalisation explicite de la quantification qui n'est pas évaluée ici).

➤ On ne retrouve pas aussi de différence significative dans l'évaluation du niveau de conscience, relatif à l'activité de tri. S'ils ont catégorisé de façon systématique, ils ne substituent pas la formulation langagière F_{C_f} à F_{C_t} , dans 70% des cas. Mais la situation présente ne permet pas une évaluation de la régulation de contrôle dont l'un des arguments est la quantification universelle.

➤ Toutefois, des évaluations¹⁵³⁶ de R_C , et qui ont concerné quelques sujets, ont montré que l'usage du quantificateur, lorsque la situation en contraint l'appel, est systématiquement verbalisé. Nous avons de plus noté, « chez les petits », une plus grande fidélité à cette formulation du quantificateur que chez « les plus grands ». Les premiers ne s'autorisent que rarement la substitution du pronom ou de l'article indéfini « tous (toutes) » par l'article défini « les ». Nous n'en concluons pas pour autant que, sur ce point, la conscience réfléchie des petits, est de niveau 2. Car, pour une telle conclusion, il faudrait une évaluation non directe du schème de la catégorisation, comme par exemple, dans des situations de tri.

3.10 Evaluations non didactiques

Définition

Une situation est non didactique, relativement à une connaissance, lorsque l'intention didactique n'est pas directement la construction¹⁵³⁷ ou l'exercice de schèmes associés à l'application de cette connaissance. Guy Brousseau étend cette notion aux situations qu'un sujet peut retrouver en dehors de l'institution scolaire et, d'une façon générale : « *les situations hypothétiques ...appartiennent à deux catégories : les situations didactiques où un ac-*

¹⁵³⁶ Dans des situations du même type que les situations 1, 2, 3 ou 4, définies sous 3.2.7

¹⁵³⁷ Donc ne peut être confondue avec la notion de situation adidactique, même si les relations entre le sujet et milieu, devraient, dans ce cas, s'appauvrir en intentions didactiques et se rapprocher de « la réalité ».

tant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève, par exemple, et lui permet de s'exprimer en actions, et les situations « non didactiques » où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe »¹⁵³⁸

Situation 1

Nous reproduisons un compte-rendu de l'enseignant D.B :

« Avant la séance sur le tri avec les GS, un élève (Matéo) a naturellement employé la catégorisation comme moyen d'optimisation de son travail et m'en a fait part spontanément. Il s'agit de disposer des pièces plates sur deux niveaux, pour obtenir la configuration selon un modèle donné. La difficulté est de jouer sur l'existence de ces deux niveaux car certaines pièces ne sont visibles qu'en partie, voire même sont entièrement masquées (jeu "Duo-puzzle") ».

Matéo : "J'ai trouvé comment faire pour que ce soit plus facile. Je partage les pièces. **De ce côté, je mets toutes les pièces qu'on ne voit pas et là je mets toutes les pièces qu'on voit** et comme ça c'est plus facile après".

Situation 2

Nous reproduisons le compte rendu de l'enseignant D.B :

« Je t'envoie le compte-rendu de ma séance sur le tri avec mes GS. Une seule séance, car la notion me semble parfaitement maîtrisée sans réel travail de ma part. De plus, je note l'emploi systématique de la structure 'j'ai trié par...'. **Je pense que ceci est dû à un réinvestissement des séances sur la catégorisation, les élèves identifiant une situation où l'emploi d'une tournure précise va être demandée.**

Situation 3

Nous donnons ci-dessous, et sans modification, le texte que nous a fait parvenir l'enseignant D.B, en mars 2009.

« Je te joins le compte-rendu d'une séance où **la catégorisation est apparue (de manière transversale et spontanée), à l'initiative des élèves** (c'est ce qui m'a paru intéressant), comme un moyen d'atteindre l'objectif que l'on avait. **Le réemploi des structures et du vocabulaire étant flagrant** ».

Nous donnons ci-dessous les images et les commentaires qu'il nous a fait parvenir :

¹⁵³⁸ Guy Brousseau « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques ». Article électronique : http://homepage.mac.com/tatsuya_ds/mt/Glossaire_TSDM.html#Footnote1

Compte-rendu d'une situation où la catégorisation est réinvestie de manière spontanée, par les élèves et va permettre de mener à bien une phase de projet.

La situation mise en place n'avait pas pour objectif de travailler sur la catégorisation. Dans le cadre de la création et réalisation physique d'un album en grande section, il s'agissait de concevoir les deuxième et troisième de couverture de cet album.

Il est proposé aux élèves d'aller en BCD pour rechercher des albums qui serviront de base à la réflexion. Un temps de 5 minutes est laissé pour consulter et sélectionner un album à rapporter au groupe. Sur les 13 élèves, seuls 9 rapportent des albums qui sont alors posés au sol, ouverts, deuxièmes de couverture apparentes.



Observation des élèves. Un élève propose, sans invitation de ma part : « Il faudrait mettre ensemble celui-là, celui-là et celui-là parce qu'il ont tous un grand dessin sur les deux pages. Approbation unanime des autres. à l'acte.



Passage

La discussion s'engage sur le contenu des illustrations. L'attention est reportée sur les autres albums : « Et les autres ? » Réponse : « Il faudrait mettre ensemble tous ceux qui ont de la couleur et un dessin ». Action. un débat s'engage sur l'appartenance ou non à cette catégorie de l'album de Ponti qui sera finalement sélectionné car c'est la représentation d'une feuille .



« Et les autres ? » « Ils ont tous que de la couleur »



Le travail s'est poursuivi sur cette base pour arriver à élaborer notre propre deuxième de couverture. Les prédicats énoncés permettant de lancer la procédure de choix.

Situation 4

En salle de motricité¹⁵³⁹, D.B travaille en atelier avec 4 élèves.

L'enseignant a placé des plots, à proximité d'un mur et à une distance d'environ 20 cm pour certains et à environ 50 cm pour d'autres.

Son intention didactique est d'associer des expressions langagières à des déplacements spécifiques. Par exemple « se déplacer entre les murs et les plots ».

Il propose à ses élèves un tel déplacement. Naturellement, les élèves bousculent les

¹⁵³⁹ Salle d'Education physique et sportive que l'on peut trouver dans les écoles.

plots peu distants du mur.

D.B leur demande de modifier le milieu pour respecter la consigne qu'il leur a donnée.

- Un élève, considéré comme ayant des facilités d'apprentissage : « il faudrait déplacer ce plot ». Et il désigne le plot le plus proche de lui.

- Une élève, considérée comme ayant des difficultés d'apprentissage : « non, il faudrait déplacer **tous les plots qui sont près du mur !** ». Et elle désigne les plots trop proches du mur.

Conclusion

Il semble bien que le schème opératoire de la catégorisation participe de l'adaptation d'un système cognitif à des situations les plus diverses.

L'ensemble de ces situations, qu'un tel système peut assimiler, est le dénoté d'une compétence de l'espace cognitif résultant de son apprentissage à la catégorisation. L'ensemble des situations, associées à la composante cognitive R_c , et tel que nous l'avons défini, n'en est qu'une des projections possibles.

Chapitre 6

CONCLUSIONS

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

1 Les questions de notre problématique

1.1 Une question de formation

Nous sommes partis de la question de l'introduction d'une connaissance nouvelle, en classe de mathématique, à l'école élémentaire. La spécificité du savoir mathématique nous a permis de considérer la question, tout à fait générale, de la psychogenèse d'une certaine connaissance, en milieu scolaire. Cette question, nous semble-t-il, la plus fondamentale pour l'enseignant, en ce qui concerne l'aspect disciplinaire, et vraisemblablement tout au long de sa carrière, a été ramenée à celle du développement d'une compétence mathématique à l'école élémentaire. Au moins, est-elle incontournable, dans le cadre d'une formation de futurs enseignants des écoles. Et, c'était là notre motivation initiale.

En définissant, comme une nécessité, la consistance d'un ensemble que nous avons assimilé à une technologie de l'analyse et de la conception des situations didactiques, nous nous sommes heurtés, dans la didactique savante, à ce que nous y avons retrouvé comme des conceptions, au moins non consensuelles et au plus contradictoires ; par exemple, d'une part, la notion d'obstacle épistémologique ou, d'autre part, les rapprochements des positions piagétienes, vygotskiennes ou bachelardiennes, dans un même projet didactique du développement scolaire des concepts mathématiques.

De plus, nous avons relevé, dans cette didactique des mathématiques, que, telles quelles, des notions comme celles de situation-problème, d'obstacles ou, dans une approche plus développementale, de franchissement d'obstacle ou de zone proximale de développement, étaient finalement d'une application mal aisée.

Notre position épistémologique de la question a été de privilégier la recherche d'une formulation systématique de réponse à la question posée, et quelle que soit la compétence en jeu. Ainsi, espérons-nous pouvoir dépasser contradiction et manque de pragmatismes de certaines notions découvertes par la didactique scientifique des mathématiques.

1.2 Un cadre cognitif

Or, une telle gageure nous est apparue pouvoir se tenir initialement, et indépendamment de toute autre épistémologie, dans un cadre purement cognitif, en ramenant le sujet-apprenant à une structure cognitive ouverte et épistémique. C'est, dans notre texte, ce que nous avons le plus souvent désigné comme un système cognitif.

L'approche développementale des concepts, et, en particulier, les explications de Lev Vygotski, nous ont fait comprendre, au moins au niveau où nous avons placé notre étude, que la conception des situations didactiques ne pouvait faire l'impasse de ce que des opérations psychiques supérieures, comme l'activation et l'organisation de la mémoire de travail, l'attention logique, la prise de conscience, doivent elles-mêmes être considérées en développement, tout au long de l'enfance scolaire. Nous avons été amenés à penser que de telles opérations, dans une approche systémique du fonctionnement cognitif, sont elles-mêmes à redéfinir en termes de compétences. En particulier, que leur fonctionnement implicite, dans des situations de référence, devait s'entendre à des niveaux différenciables. Nous avons, en conséquence, insisté, sans développement excessif, sur le concept de conscience réfléchie ou, plus précisément, de prise de conscience réfléchie, tant il est vrai que, dans leur grande majorité, les concepteurs de situations didactiques en font, nous semble-t-il, un concept « allant de soi », et systématisé dans les formulations, dans le cadre d'un projet d'apprentissage. Comme conséquence redoutable, les opérations associées à la fonction de conscience, comme la compréhension et la prise de sens, nous sont apparues elles-mêmes à relativiser, c'est-à-dire sujettes à développements, et donc définissables aussi comme des compétences possédant un potentiel d'opérationnalité fini et en extension. En renonçant à des conceptions non absolues de telles fonctions ou opérations, c'est-à-dire à ne pas les poser comme génétiquement disponibles, dans toute activité cognitive, indépendamment de l'âge d'un sujet, il nous fallait un autre point d'appui : Jean Piaget nous a donné celui qui, dans un système cognitif, peut être considéré comme structurant son langage de plus bas niveau : le principe d'auto régulation. Ce principe conduit à définir ce que l'on peut appeler la nécessité épistémique qui s'exprime par une sorte d'inférence transcendantale et qui nous permet de proposer une phénoménologie, il nous semble, au moins consistante, de l'adaptation cognitive, enfin localisée à une situation spécifique du développement d'une certaine compétence. Dans tous les cas, nous avons défini qu'une situation didactique possède un certain niveau de perturbation, au sein de laquelle le principe d'auto régulation doit jouer fondamentalement.

1.3 La corrélation de deux épistémologies

Un cadre purement psycholinguistique a donné corps, il nous semble, à un concept généralisé de l'obstacle et permis de déterminer, a priori, le caractère épistémologique de certains d'entre eux, ce qui, rétroactivement pourrait autoriser la prédiction de leur caractère historique, même si l'histoire n'en a pas forcément laissé de trace. Inversement, une étude historique du développement des concepts, étude qui remonterait aussi loin que leur histoire nous permet d'en retrouver la trace, mais aussi proche si possible de leur état actuel, dans la communauté savante qui en fait référence, peut révéler en chaque cas d'espèce, de tels obstacles. Ceux-ci peuvent alors, en retour, être ré-explicables dans un cadre cognitif.

Il s'impose alors une analyse à deux dimensions ainsi corrélées, et que nous avons respectivement appelée dimension épistémologique historique et dimension épistémologique psychologique ; l'une et l'autre contribuant à préciser l'ensemble des obstacles épistémologiques, spécifiques du développement d'une compétence mathématique donnée, et auxquels pourrait se heurter une structure cognitive, dans une situation appelée à favoriser un tel développement.

1.4 La consolidation d'un système

En épurant le concept de schème qui devient simplement la composante cognitive d'une compétence, et, corrélativement, en systématisant le fonctionnement des schèmes d'un ordre supérieur que l'on a définis comme des régulations, nous avons pu reconstituer, en un système qui nous paraît consistant, un ensemble d'activités cognitives finalisées par le développement des compétences.

La conséquence théorique heureuse, pourrait-on dire, est que le concept d'obstacle a trouvé une place naturelle dans ce système. Nous avons, pour ce faire, énoncé et exploité une conséquence du principe piagétien d'auto régulation d'une structure cognitive, à savoir un principe d'inertie. Et, c'est naturellement, semble-t-il, que nous en avons obtenu, comme conséquence, une définition unifiant les différentes conceptions d'obstacles en didactique des mathématiques. La valeur pragmatique du concept d'obstacle a été obtenue en couplant la définition à différents niveaux d'équilibrations ou, ce qui revient au même, à différents niveaux de perturbations : tous les obstacles, de toutes perspectives où l'on se place, sont l'expression de l'inertie du système cognitif. Le paradigme est donc résolument psychogénétique, ce que nous avait déjà montré Jean Piaget. En particulier, un tel concept présente l'avantage de rendre compte, dans une phénoménologie de l'obstacle épistémologique, de ses aspects paradoxaux : normalité, résistance, récurrence. Autant d'attributs que l'on a reconnus à l'obstacle épistémologique se trouvent explicables comme, aussi bien, pour tout autre type

d'obstacle. Comme conséquence attendue de cette typologie des obstacles, associée, en fait, à une typologie de l'équilibration, nous avons obtenu une autre définition, mais que nous pensons cette fois opérationnelle, du concept de zone proximale de développement. Nous n'y faisons pas référence à un ensemble de problèmes dont la résolution médiatisée devient possible pour un sujet, mais à un espace de compétences dont les états sont accessibles et définissables, à partir d'un état initial d'une certaine compétence, et, bien sûr, sous la conduite d'une médiation adaptée. La composante cognitive fondamentale d'une compétence étant donc une structure de schèmes, une telle zone proximale de développement devient alors la désignation d'une norme d'accommodation d'une telle structure. En d'autres termes, tout schème initial possède un certain potentiel de développement. La question renvoie donc à la détermination des conditions de possibilité de faire évoluer un tel schème initial et définissable vers un schème final et tout aussi définissable.

Étonnamment, bien qu'un de nos cadres théoriques, concernant le développement de l'intelligence mathématique d'un élève de l'école élémentaire soit, sans conteste, un structuralisme de type piagétien, notre analyse du fonctionnement cognitif d'un sujet, placé en situation didactique, nous a fait concevoir, par certains aspects fondamentaux, le franchissement d'un obstacle épistémologique comme de nature bachelardienne ; à la condition toutefois de rendre compte, dans l'analyse du développement d'une compétence, d'une réorganisation d'un régulateur, ensemble structuré de régulations dont dispose le système cognitif activé, lors du développement de telle ou telle compétence.

Par contre, nous avons renoncé à la notion de rupture, au sens de la mort nécessaire d'un schème, passage obligé d'un développement vers une conception nouvelle, relative à une connaissance donnée. Des études approfondies (produites par différents auteurs, entre autres mathématiciens), concernant le développement historique de certaines connaissances mathématiques, et à des instants critiques de leur histoire, nous ont confirmé que l'approche relative à la psychogenèse du savoir mathématique de Jean Piaget et de Rolando Garcia était à privilégier : pas de rupture mais réfléchissement critique sur certains fondements conceptuels. A la notion de rupture, nous avons substitué celles de compensation et d'inhibition qui donnent l'avantage de comprendre qu'un schème dangereux ne meurt pas, mais peut être (ou non) désactivé, une fois que le système en a construit la compétence. Davantage, un schème dangereux peut être intégré dans une nouvelle structure de schèmes nouvellement construite. Nous avons défini, sans doute, trois formes de tels développements structuraux, en ne nous privant pas d'aller nous appuyer sur ce que nous avons pressenti et désigné comme un homéomorphisme entre développement de compétences mathématiques et développement cognitif.

1.5 Une approche linguistique du développement des compétences

Mais, pour entrer précisément dans l'intimité structurale d'un système cognitif, il nous fallait un point d'appui. Et c'est la théorie du développement psychologique des concepts de Lev Vygotski qui nous l'a donné : à tous les états de son développement, la signification que va prendre un concept est indissociable de celle d'un mot. Ainsi, le mot apparaît comme l'outil fonctionnel dont peut disposer le pédagogue pour favoriser la structuration des connaissances d'un sujet.

En appliquant ce principe au développement psychologique des compétences mathématiques, nous avons conçu que ce mot fondateur est celui d'un verbe d'action. Et, plus précisément, une formulation langagière spécifique et organisée autour d'un verbe d'action.

D'autre part, la didactique moderne a, depuis Guy Brousseau, défini la notion de situation de telle sorte que la réponse à la question du développement d'une connaissance mathématique renvoie à celle de la conception de situations didactiques, en particulier relatives à cette connaissance. Mais la conception de telles situations repose aussi sur des invariants que l'on peut définir comme des concepts organisateurs de l'action didactique.

Ainsi, une approche linguistique du concept de compétence nous a amené à définir une fonction de dénotation qui, prenant comme argument une certaine formulation langagière, associe l'ensemble des situations dans lesquelles, lors d'une activité du sujet, on peut retrouver l'exercice de cette compétence. Le développement d'une compétence, c'est-à-dire celui de l'extension ainsi définie, devient, en fait, celui de la dénotation d'un verbe d'action, dans un certain cadre.

La médiation didactique se trouve alors contrainte par ces spécificités linguistiques qui entrent comme des composantes d'une compétence : une certaine formulation langagière, pour autant que l'on puisse la considérer comme systématiquement perturbante, devient l'argument d'une régulation anticipatrice de l'exercice d'une compétence. En dehors de son organisation initiale et qui peut s'autoriser des variations de type matériel, le milieu objectif contient une formulation linguistique qui doit servir, sans distorsion, de fil d'Ariane, durant le développement de la compétence. C'est là, le point clé dans notre conception de la médiation didactique.

1.6 Une formulation cognitive dans l'analyse du développement des compétences

En plaçant l'analyse des fonctionnements de régulation et de schème sous le contrôle d'une compatibilité avec certains des concepts développés par la psychologie des activités cognitives finalisées, dont en particulier ceux de représentations, de schéma d'action ou de régulation de contrôle, nous avons pu préciser une forme possible d'analyse de l'activité d'un

sujet, dans des situations didactiques dites de référence. En associant l'opérationnalité du concept de schème aux fonctionnements psychiques supérieurs, nous avons pu, tout au moins dans quelques cas, en faire aussi des objets dans cette analyse.

Nous n'avions pas considéré initialement cette question dans notre problématique mais plutôt la question de la médiation de cette activité du sujet, lors du développement de ses compétences. En fait, la réponse par la construction de notre technologie de la conception des situations didactiques est, comme on peut dire, une forme de réciproque à l'analyse. Il y a là, en quelque sorte, pensons-nous, une démarche finalement complète.

La composante cognitive d'une compétence est finalement un complexe de schèmes réciproques et de régulations inversibles, en lien indéfectible avec certaines formulations langagières, et dont nous avons précisé les aspects structuraux et fonctionnels. Un de ces aspects est justement défini par ce que l'on appelle le caractère opératoire d'une compétence. Un tel caractère va alors se constituer en concept organisateur dans la médiation didactique.

Nous avons rencontré, sur ce point, un obstacle majeur que l'on retrouve aussi bien chez Jean Piaget que chez d'autres auteurs : une formulation mathématique et parfois contestable du caractère opératoire d'une connaissance mathématique. Mais notre approche linguistique nous a permis de surmonter cet écueil. Et nous pensons que notre définition du caractère opératoire d'une compétence généralise celle de Jean Piaget ou, plutôt, en est une des anticipations, et permet de le définir en des termes non inféodés à ses formulations strictement mathématiques.

Nous pouvons estimer que l'effort difficile, pour décomposer le développement des compétences selon deux dimensions épistémologiques distinguables, a été récompensé par la possibilité d'exprimer, dans un cadre cognitif pur, une signification du caractère opératoire d'une connaissance, sous la forme d'une véritable loi. Celle-ci exprime que les formes opératoires d'une connaissance sont ce que l'on a pu appeler des systèmes fermés : des couples (R_a, S_c) , composés d'une régulation et d'un schème, tous deux spécifiques d'une des compétences, entrant comme composantes de cette connaissance.

1.7 La conception des situations didactiques

Le substrat de notre technologie nous est apparu suffisant pour formaliser une séquence didactique dont la finalité est un certain apprentissage : le développement fortement médiatisé d'une compétence mathématique, de son état C_i à l'un de ses possibles, un état C_f opératoire. Ce faisant, nous avons systématisé le fait qu'une compétence est toujours un développement d'une ou plusieurs compétences initiales qui, tout en se développant elles-mêmes, trouvent là à se coordonner.

Outre le caractère nécessaire qu'un tel possible appartienne à ce que nous avons retrouvé comme étant la zone proximale de développement d'un schème initial S_{Ci} , nous avons analysé des éléments fondamentaux de ce que l'on peut définir comme une logique des schèmes, logique qui règle certaines restructurations cognitives, lors du développement des compétences. La médiation didactique se trouve alors contrainte par cette logique, et ipso facto définie.

Ainsi, pensons-nous, qu'à ce point de notre travail, nous avons retrouvé la question initiale de notre problématique et nous avons pu y répondre de façon générique.

L'étape suivante a donc consisté en une application de notre technologie qui se présente finalement comme une construction formelle. Notre effort de sémantisation s'est porté sur la conception de situations didactiques finalisées par le développement d'une des compétences fondamentales dans l'apprentissage de la langue, et en fait, mal définie dans le curriculum, malgré cette importance.

2 Un apprentissage à l'école maternelle : la catégorisation

2.1 Un groupe de recherche

Jean Piaget et Bärbel Inhelder ont fourni une étude approfondie de la genèse des structures logiques élémentaires chez l'enfant, âgé de 2 ans et demi à 9 ans et demi (environ). Cela nous a certes fourni des points de repères épistémologiques mais a rendu notre approche psycholinguistique plus convaincue de son utilité, dans le cadre d'un développement scolaire des compétences. On le sait, d'une façon générale, Jean Piaget a tenu à préciser que la dimension linguistique n'est pas première, voire non nécessaire dans les développements structuraux des connaissances, quoi que sa nécessité puisse être considérée pour leurs achèvements et que, de plus, le langage socialisé en puisse accélérer et en généraliser les formes possibles. Nous n'avons pas à aborder la question des antériorités dans la psychogenèse de telles connaissances. Mais nous avons défini que, dans le cadre scolaire, le développement des connaissances mathématiques, au moins au niveau considéré par notre travail, est indéfectiblement lié à celui de la langue.

Nous avons pu bénéficier, pendant deux ans, d'une collaboration experte de plusieurs enseignants, ayant en charge des classes de l'école maternelle, et réunis autour du projet commun de concevoir des séquences didactiques finalisées par un apprentissage de type logique : la catégorisation. Ainsi, l'expertise de ces enseignants a-t-elle contribué à la construction des attributs concrets d'un modèle de notre séquence définie formellement. Et notre ap-

port s'est, en particulier, focalisé sur un enchaînement de séances, orienté par la construction d'un schème fermé, composante de la compétence opératoire « catégoriser » ; fermeture qui définit un concept organisateur dans notre système technologique, pour la conception des situations didactiques.

2.2 L'apprentissage et son évaluation

Les performances des sujets, enfants d'âges compris entre 2 ans et demi et 6 ans et demi (environ), ont confirmé l'efficacité du modèle et donc, en retour, la productivité de notre technologie.

Toutefois, nous ne sommes pas limités à de simples évaluations de l'opérationnalité du schème S_{Cf} de la catégorisation, évaluations circonscrites aux situations que nous avons définies comme perturbantes de type 1 ; c'est-à-dire encore destinées à n'évaluer de la compétence « catégoriser » que son exercice routinier ou, dans des situations de référence faisant intervenir des modifications relatives à des variables secondaires.

L'application du principe d'auto régulation d'une structure cognitive nous a fait comprendre que la fermeture d'un schème est corrélée à une construction structurale au niveau du régulateur, à savoir la construction d'une régulation R_a , dite anticipatrice du schème S_{Cf} , et couple de régulations R_a' et R_a'' , inverses l'une de l'autre. Nous avons donc conçu deux évaluations de l'adaptabilité du schème R_a lui-même. La Zone proximale de développement d'un tel schème de niveau supérieur, est ce que nous avons appelé l'espace cognitif résultant. En des termes plus naïfs, cela signifie que si la logique des schèmes est bien respectée, lors de l'apprentissage, un système cognitif sait faire plus de choses que ce qui lui a été appris. Les évaluations les plus abordables que l'on puisse concevoir se retrouvent alors dans une projection ou espace engendré par les dimensions épistémologiques spécifiques de la catégorisation. La première évaluation nous a conduits à la conception de situations dont l'un des deux indicateurs sémiotiques, nécessaires à l'activation du schème de la catégorisation, à savoir le prédicat, était donné comme non opérationnel, c'est-à-dire non assimilable, en l'état, par un certain schème S_{Cf} . Toutefois, le milieu objectif contenait bien, un appel à la quantification universelle que nous avons définie comme un concept organisateur de l'activité de catégorisation. La seconde évaluation nous a conduits à proposer des situations de tri, dans lesquelles donc, la formulation langagière n'est pas spécifique d'une tâche de catégorisation : ni prédicat, ni quantification mais un critère de tri. Dans les deux cas, les situations étaient perturbantes pour la régulation R_a .

Les réussites remarquables obtenues nous ont confirmé l'existence d'un développement de compétences non limitées à ne servir que l'exercice de la compétence « catégoriser ». Ce

faisant, nous pouvons en déduire, qu'à l'issue de leur apprentissage, la majorité des sujets ont compris que la catégorisation est une opération dont l'un des concepts organisateurs fondamentaux est celui de la quantification universelle et que, de cela, ils ont la capacité d'une certaine prise de conscience, non limitée à l'acte de catégorisation lui-même. C'est ce que nous avons défini comme des prises de consciences réfléchies de niveaux 2 ou 3. A ces niveaux, une situation objective présentant une certaine tâche à résoudre, peut, après inférence, être reconstruite, si nécessaire, pour être assimilable par le schème de la catégorisation.

Enfin, la solidité de cet apprentissage a pu être indirectement évaluée dans des situations non didactiques : des sujets activent spontanément l'exercice de leur compétence « catégoriser », dès lors que leur analyse d'une certaine situation leur fait apparaître ce geste cognitif comme pertinent, voire même nécessaire.

Finalement, nous pouvons postuler qu'un des concepts organisateurs de la médiation didactique est, relativement à une compétence spécifique, un registre de représentation sémiotique de nature langagière. A partir de cela, nous sommes amenés à reconnaître que les traitements d'un tel registre, durant la séquence finalisée par le développement de la compétence, sont, eux-mêmes, des invariants opératoires.

3 Perspectives de recherche

3.1 La construction de modèles didactiques

La construction systématique de séquences didactiques, et relatives aux compétences définies dans le curriculum mathématique de l'école élémentaire, devient à la fois un enjeu pragmatique et une évaluation d'une technologie élaborée par la recherche. L'un des principes organisateurs est la définition et la construction des réversibilités opératoires.

3.2 Des évaluations cognitives spécifiques

L'exploration de l'espace cognitif résultant de l'apprentissage d'une compétence définie devient un enjeu :

- étude de la zone proximale de développement de cette compétence ;
- déterminations et évaluations de niveaux relatifs aux opérations psychiques supérieures que sont la prise de conscience, l'organisation de la mémoire de travail, la production d'inférences spécifiques...

3.3 Des remédiations

Nous n'avons pas défini ce que pourraient être des situations de remédiation proposées à des sujets qui n'ont pas réussi leur apprentissage, nos sujets étant essentiellement définis

comme épistémiques. Toutefois, nous pressentons que les unités cognitives que sont les schèmes, parce qu'elles sont apparues comme des outils efficaces dans l'analyse de l'activité, restent pertinentes pour personnaliser la conception de situations de remédiation ; mais, dès lors que nous entendons comme schèmes, aussi bien les composantes cognitives de compétences spécifiques, que leur régulation anticipatrice ou que les régulations de contrôle qui s'activent dans l'activité ou, enfin, que certains schèmes que nous avons associés aux fonctions psychiques supérieures. Il devient alors un objectif de définir des formes d'évaluation du niveau de développement de ces schèmes et, en particulier, du caractère opératoire de certains d'entre eux. C'est sur ce point précisément que pourraient se focaliser les remédiations. Notre propre expérience de l'enseignement nous conduit, en fait, à l'hypothèse que nombre de difficultés d'élèves, de tous niveaux, sont explicables par le caractère non réversible de certaines de leur connaissance. La recherche pourrait s'orienter vers la construction systématique de définitions de cette réversibilité, et spécifique d'une compétence donnée mais sans limitation relative au niveau scolaire.

3.4 Genèse des structures logiques

Il s'agirait de penser l'apprentissage de la catégorisation jusqu'au niveau du stade III de l'inclusion logique des catégories. Celui-ci s'accompagnerait d'une conscience réfléchie de niveaux 2 et 3. Précisément, dans certaines situations, cette conscience porterait sur les congruences sémantiques et computationnelles des registres sémiotiques des propositions et de celui des parties d'un ensemble ; c'est s'intéresser aussi au franchissement de l'obstacle épistémologique de la conception aristotélicienne de l'implication, et telle que nous avons pu la retrouver.

3.5 L'action virtuelle comme action concrète

Nous pourrions entrevoir une extension possible de notre recherche aux situations didactiques destinées à des élèves de l'école, du collège ou du lycée. Et, étudier en quoi les situations simulées sur ordinateur pourraient se substituer aux manipulations concrètes. En d'autres termes, il s'agirait de questionner un homomorphisme possible entre les situations à manipulations concrètes et celles à manipulations simulées sur ordinateur, du point de vue de l'intériorisation des actions. Une autre question qui se poserait alors serait celle de la opérationnalité des concepts de schèmes fermés et de compétences opératoires, dans un environnement informatisé.

ANNEXES

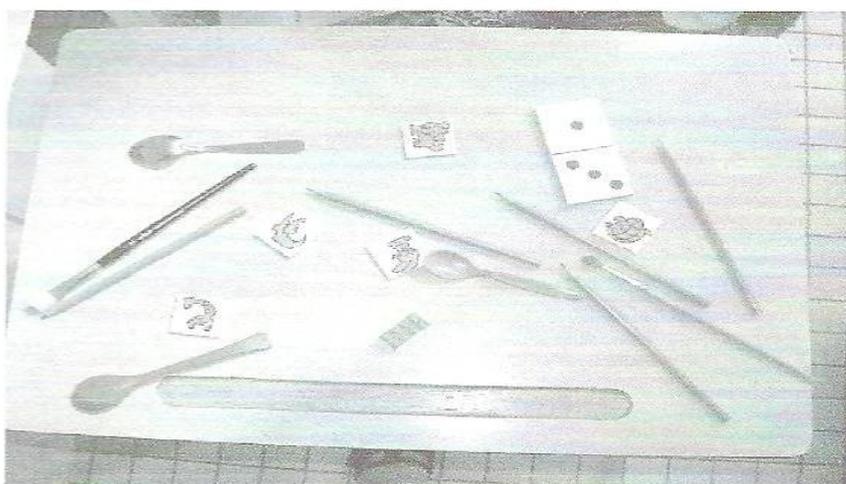
Annexe 1 :

Test P.B. Septembre 2007 (chapitre 5 : 2.1)

CONDITIONS DES TESTS

- 5 crayons de bois
- 5 Piky, tous différents mais de même couleur
- 1 domino
- 3 cuillères de couleurs et formes différentes
- 1 légo
- 2 pinceaux différents

Disposition des objets sur la table à chaque fois



1- Ne rien dire

2- Qu'est-ce que tu peux faire avec ça en restant à ta place?

3- Qu'est-ce que tu peux mettre ensemble?

Ce que je dis est souligné
Ce que dit l'enfant est entre guillemets

17:09:07

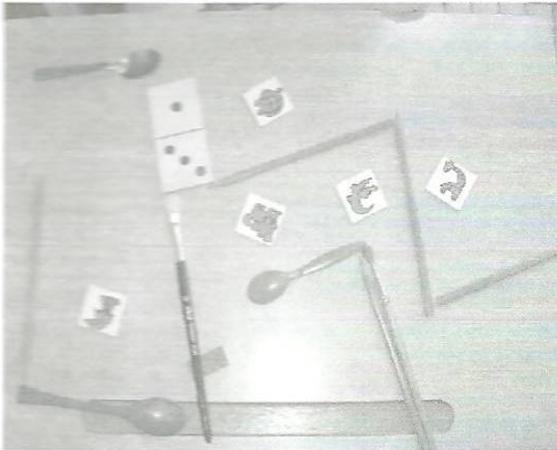
Théo (01.03.02) - 7mn

(5,6)

1- Regarde ce qu'il y a sur la table

Me nomme les 5 animaux puis dit : « et des cuillères avec des pinceaux et des crayons verts »

2-



Qu'est-ce que tu as fait?

« J'ai séparé les animaux pour pas se battre »

Je vais te demander autre chose +3

« Le chien avec le lapin »

« Le crocodile avec la girafe »

C'est tout?

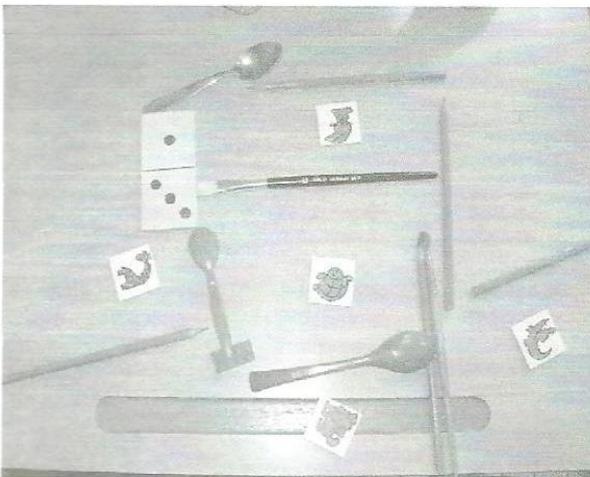
Tu ne veux rien faire d'autre?

« Si »

« Ah, je sais—t'as pris que les bleus »

Echange les animaux de place puis rebouge pour réorganiser

« Et voilà, ils sont séparés »



25.09.07

Noham (19.04.03) - 7mn

(4; 5)

1-
Me sourit

2-
Montre un Piky
« Je dois le mettre »
Tu dois le mettre où?
Me montre le domino
Sur le domino?
« Non »

3-
« Les mêmes »
Vas-y
Essaie de faire des couples avec les Piky
Prend le crocodile et cherche : « Il va aller avec la tortue, il va dans l'eau »
Met le lapin avec la girafe puis le chien
Il y a d'autres objets sur la table
« La cuillère bleue »
Qu'est-ce que tu en fais?
« Je dois trouver la même cuillère »
Prend la cuillère rouge et les met ensemble
Prends des crayons et dit : « Mais y'a des crayons! »
En rassemble 4, les compte, se rend compte qu'il en reste 1, le prend avec les autres, recompte, trouve 5
« Les pinceaux à côté des crayons, ils vont être mieux »
Met la cuillère en métal à côté des deux autres, joue avec les pinceaux et les crayons pris verticalement
Ne garde que 3 crayons dans sa main et dit « Voilà 3 crayons »



Annexe 3

Construction initiale du schème $S_{C'f}$ et du schème $S_{C''f}$ (Chapitre 5 : 3.2 et 3.3). Classe de H.B

Octobre 2007

On dispose de 10 formes en bois, dont 9 triangles dont 4 jaunes et un bleu, un disque jaune.

(HB = Hélène B, la maîtresse P = Pierre)

1. HB **Je te demande de mettre dans ma boîte tous les triangles jaunes** ; vas-y, tous les triangles jaunes !
2. P prend dans sa main tous les triangles jaunes
3. HB Mets là tous les triangles jaunes !
4. P C'est pas une boîte jaune !
(il faut mettre les objets dans une boîte bleue – il met les 4 triangles jaunes dans la boîte)
5. HB Dis-moi ce que tu as mis dans la boîte ? Des triangles jaunes ? Tous ?...
6. P Oui
7. HB On va vérifier !
8. P Il se saisit du disque jaune et dit «Et ça aussi c'est jaune !»
9. HB Oui, est-ce que c'est un triangle ?
10. P Non !
11. HB Alors on le met ? Non ? ... Parce qu'on avait demandé ? ...que des triangles jaunes !
12. HB Et on va vérifier ; on regarde
13. P Eh oui !
14. HB Ils sont ... ?
15. P Jaunes !
16. HB Ils sont tous jaunes, ils sont tous des triangles jaunes ; bravo, tous...

17. HB Attention, dans ma boîte, **tous les objets ont quelque chose de pareil ? Tu vas deviner ce qu'ils ont de pareil** : d'accord ?
18. P Oui
19. HB Donc, je t'en sors un d'abord (elle sort un gros rond rouge, puis un 2^e) ; ils ont tous quelque chose de pareil ?
20. P Oui c'est les mêmes ! (d'ailleurs le 2^e rond rouge est identique au précédent)
21. HB Ce sont ?
22. P Des rouges !
(elle sort un 3^e rond rouge identique aux précédents)
23. HB Voilà, donc je sors...
24. P On va les compter d'abord : 1, 2, 3
25. HB Je sors des jeux ... ?
26. P Des jeux rouges !
Elle sort un rond bleu de taille différente
27. P Non, c'es un bleu : tu fais de la magie !
28. HB Ils sont tous quelque chose de pareil ?
29. P. Ben oui, c'est des ronds !
30. HB Alors qu'est ce que je vais sortir ?
31. P Un rond ! (il est identique au précédent)
32. HB Eh oui !
33. P C'est les mêmes !
34. HB Je vais sortir?
35. P Un rond bleu ! (elle sort un gros rond bleu)
36. HB Alors ils ont tous quelque chose de pareil ?
37. P Oui
38. HB Ils sont tous.....
39. P Tous bleus, tous bleus, tous bleus...(en montrant les 3 ronds bleus) et tous rouges, tous rouges, tous rouges (en montrant les 3 ronds rouges)
40. HB Oui, mais ils sont tous.....

41. P De la même taille ! (elle le regarde d'un air dubitatif) ...de la même couleur... ils sont tous bleus !
42. HB Eh non regarde (et elle montre les rouges)
(il compte les 3 bleus 1, 2, 3)
43. P On continue : je vais sortir..... ? Ils ont tous quelque chose de pareil ? Je vais sortir..... ?
44. P Un autre rouge !
45. HB Un autre quoi ?
46. P Un autre rond rouge !
47. HB Est-ce un autre rond rouge ? (elle sort un rond vert)
48. P C'est un rond vert !
49. HB Alors qu'est ce qu'ils ont de pareiltous ces jeux ? Je n'ai pris que ?
50. P Y en a qu'un ! (en montrant le vert)
51. HB Oui, mais qu'et ce qu'ils ont tous de pareil ? Ce sont tous ?
52. P Ils sont tous pas de la même couleur !
53. HB Oui mais qui ils ? Mais qu'est ce que j'ai mis dans ma boîte ?
54. P Eh bien un autre rond !
55. HB Donc ils sont tous Ce sont tous Ce sont tous : quoi ?
56. P Y en a plein de ronds !
57. HB Il n'y a que des ronds ?
58. P Oui
59. HB On continue, on vérifie ! Est-ce que c'est un rond ? (avant de sortir un rond vert)
60. P Eh oui, tu vois c'était un rond ; maintenant y en a 2 ronds (en montrant les 2 ronds verts)
61. HB Alors je vais sortir.... ?
62. P Des autres ronds !
63. HB Eh bien oui, (elle sort un rond rouge)
64. P Eh oui, un rond rouge !
65. HB Je n'ai mis que ?
66. P Que des ronds !
67. HB (elle sort un autre rond) Ils sont tous ?
68. P Ils sont tous de la même couleur !
69. HB Ils sont tous ?
70. P Ils sont tous de la même couleur : tu vois, il y a plein de couleur comme ça ;..
71. HB Il y a plusieurs couleurs mais qu'est ce qu'ils ont tous de pareil .. ?
. Et elle sort un autre rond.
72. P Y en a tous de pareil ces jeux (en montrant les 3 verts)
73. HB Oui, mais ils sont tous..... ? Qu'est-ce que je vais encore sortir de ma boîte ? Encore ?
74. P Des ronds !
75. HB Encore un rond ! (elle sort un autre rond bleu) On continue, je vais encore sortir... ? Encore ?
76. P Des ronds ! (elle sort un rond jaune)
77. P Eh oui, encore un rond... jaune !
78. HB Et attention, je vais sortir ... encore un ?
79. P Un gros rond bleu : comme ça, ça en fait 1, 2, 3, 4 (en comptant les 4 ronds bleus)
80. HB Et qu'est ce que je sors encore..... ?
81. P Un autre rond ! (et elle sort un rond rouge) ; eh oui, un rond rouge !
82. HB Voilà, ils sont tous ... ?
83. P De la même couleur !
84. HB Eh non qu'est ce qu'ils ont tous de pareil, tous ? La couleur change, mais qu'et ce qu'ils ont tous de pareil.... ?..... Donc, ce sont tous ? Je n'ai mis que ?
85. P Que des ronds !
86. HB Ils sont tous ?
87. P Ronds : ils sont tous ronds !
88. HB Ils sont tous ronds (elle montre un carré) ; tiens, et celui-ci, est-ce que j'ai le droit de le mettre dans ma boîte ?
89. H.B Non ?... Pourquoi ?
90. P Parce qu'il fallait mettre que des ronds !
91. HB Oui ! C'est quoi ?
92. P C'est un carré !
93. HB Donc là, je n'avais mis que des ronds !

Annexe 4

Construction initiale du schème $S_{C'f}$ et du schème $S_{C''f}$ (Chapitre 5 : 3.2 et 3.3). Classe de B.C

Octobre 2007

On dispose d'un panier recouvert de tissu et d'une quinzaine de formes géométriques dont 5 formes jaunes géométriques en plastique, une en papier, dont quatre triangles jaunes, des formes autres et des triangles de couleurs différentes

(BC = Béatrice C, la maîtresse C = Clément)

1. BC **Dans ce panier, tu me mets tous les triangles jaunes en plastique !** Allez vas-y !
Clément prend les 3 triangles jaunes en plastique et les met dans le panier ; il continue en mettant un dernier triangle jaune en plastique.
2. C J'ai fini !
3. BC Qu'est ce que tu devais mettre dans le panier ?
4. C Des triangles en plastique !
5. BC Tous les triangles en plastique ? Il y avait autre chose ?
Pas de réponse de Clément.
6. BC Tu ne te souviens plus ?
Clément dit non de la tête.
7. BC Je te fais regarder et tu me diras ce que tu devais mettre dans le panier ? Alors tous les triangles en plastique ? Elle soulève le tissu et il regarde.
8. BC A quelle autre chose, il fallait que tu penses ? A quelle autre chose, tu devais penser ? Tu sais plus ?
9. C Non ! Elle les sort du panier.
10. BC Redis-moi ce que tu as mis dans le panier ?
11. C Des triangles jaunes en plastique !
10. BC Redis : tous les triangles jaunes en plastique !
13. C Tous les triangles jaunes en plastique !

14. BC **Je vais te proposer un autre panier** (le panier est recouvert de tissu et son contenu est invisible)
Tu vas me dire tout ce que j'ai mis dans mon panier ?
Dès que tu as trouvé, tu me le dis !
Elle sort un rond rouge du panier.
15. C Un rond !
Elle sort un autre rond rouge, identique.
14. C Un rond !
Elle sort un rond rouge, le même.
17. C Un rond !
Elle sort un rond bleu
18. C Un rond bleu en plastique
Elle sort un rond bleu en plastique à nouveau
19. C Un rond bleu en plastique qui est plus grand que l'autre !
20. BC Tous les objets doivent avoir la même chose ... ? Réfléchis ? ... On continue
Elle sort un rond jaune.
21. C Triangle...euh... un rond jaune !
22. BC Un rond ?
23. C Un rond jaune !
24. BC Alors qu'est ce qu'ils ont de pareil tous ces objets ?
Pas de réponse. Elle sort un gros rond jaune.
25. C Un gros rond jaune !
26. BC Y en a un plus gros ; tu dois trouver ce qu'ils ont de pareil ? Qu'est ce qui est pareil dans tous ces objets ?
Il montre les 3 premiers ronds rouges identiques.
27. C Ces 3 là sont pareils !
28. BC Moi je te demande non pas de me montrer ceux qui sont pareils, je te demande de me dire tout ce qui est pareil dans ces objets ? Qu'est ce qu'ils ont de pareil tous ces objets, voilà, qu'est ce qu'ils ont de pareil ?

29. C Montrant un rond bleu, il est plus gros que celui-ci en montrant un autre rond bleu.
30. BC C'est pas pareil ça ! Tu me dis une différence, tu ne me dis pas ce qui est pareil !
Rond rouge, rond rouge, rond rouge, rond bleu, rond bleu !... En montrant les ronds.
Quand on les nomme, qu'est ce qui est pareil s tous ces objets ? Qu'est ce qu'on dit de pareil ?
31. C Ché pas !
32. BC Elle sort un rond rouge. On continue : qu'est ce que tu vois ?
33. C Un rond rouge un rond bleu.... Il précise le rond à chaque fois que BC le sort.
34. BC Tu n'as pas trouvé ce qui était pareil dans tous ces objets ?
35. C Non !
36. BC Une chose.... ?
37. C Il peut se tordre , dit –il en en prenant un soufle.
38. BC Il peut se tordre... Non, c'est pas ça ! Il n'y a que lui qui peut se tordre !
Elle sort un autre rond. On continue !
39. C Un rond rouge !
40. BC Qu'est ce qui est pareil (tout en sortant un autre rond) ; tous les objets du panier ont quelque chose de pareil.... qu'est ce qui est pareil ?
41. C Je sais pas !....
Elle sort les 3 derniers ronds du panier.
42. BC J'ai sorti tous les objets du panier !
43. C Y en a de plus grands !
44. BC Ca c'est pas pareil ! ...Quelque chose qui est pareil dans tous ces objets ?...
Pas de réponse. Il montre 2 ronds jaunes.
Tu veux que je t'aide ?
45. C Oui !
46. BC Elle énumère tous les ronds en disant Rond... rond... rond... rond (7 fois)
47. C Ya que des ronds !.
48. BC Tous les objets ?
49. C Sont des ronds !
50. BC Tu me dis la phrase : tous les objets ?
51. C Tous les objets sont ronds !
52. BC Voilà !.....

BIBLIOGRAPHIE et SITOGRAPHIE

Aebli Hans, 1963, *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestlé.

Artigue Michèle, *Introduction au colloquium de didactique des mathématiques*, International Commission on Mathematical Instruction, 18 octobre 2007.

Artigue Michèle, 1990, *Épistémologie et didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques Vol 10 (2.3), La Pensée Sauvage, pages 241-286.

Astolfi Jean Pierre, 2008, *L'erreur, un outil pour enseigner*, ESF.

Bachelard Gaston, 1949, *Le rationalisme appliqué*, PUF.

Bachelard Gaston, 1975. *Le nouvel esprit scientifique*, PUF.

Bachelard Gaston, 1999, *Formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique VRIN.

Bessot Annie, 2003 (octobre), *Une introduction à la théorie des situations didactique*, Les cahiers du laboratoire Leibniz, n° 91.

Boll Marcel, 1968, *Histoire des mathématiques*, PUF.

Britt Marie Barth, 1987, *L'apprentissage de l'abstraction*, Edition Retz.

Britt Marie Barth, 1993, *Le Savoir en Construction*, Edition Retz.

Bourbaki Nicolas, 1964, *Algèbre*. Livre II, *Structures algébriques*, Hermann.

Bourbaki. Nicolas, 1970, *Théorie des ensembles, Théorie logique*, Chapitre 1. §3, Hermann.

Bourbaki Nicolas, 1974, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann.

Bouvier Alain, 1972, *Théorie des ensembles*, PUF.

Brousseau Guy, 1976 (août), *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, actes de la 28^{ème} rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Louvain la Neuve, in J. Vanhamme et W. Wanhamme Editions, pages 101-117.

Brousseau Guy, 1980, *Problèmes de l'enseignement des nombres décimaux*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 1(1), La Pensée Sauvage, pages 241-286.

Brousseau Guy, 1981, *Problèmes de didactique des nombres décimaux*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 2(1), La Pensée Sauvage.

Brousseau Guy, 1983, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 4(2), pages 165-198.

Brousseau Guy, 1986, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Volume 7(2), pages 33-115.

Brousseau Guy, 1990, *Le contrat didactique : le milieu*, Recherche en Didactique des mathématiques, Vol 9(3), pages 309-336.

Brousseau Guy, 1995, *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques*, actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques de Saint Sauves d'Auvergne, pages 3-46.

Brousseau Guy, 1997, Cours donné à l'université de Montréal, version électronique, http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf. Juin 1997.

Brousseau Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage.

Brousseau Guy, 2000 (avril), *Education et didactique des mathématiques*, Communication au congrès d'Agua Calientes, Mexico, version électronique. http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/62/60/PDF/Mexico_2000_HAL.pdf

Brousseau Guy, 2003, Erreurs, difficulté, obstacles, article mis en ligne. <http://guy-brousseau.com/1659/erreurs-difficultes-obstacles-2003/>

Brousseau Guy, 2004, *Tâches, situation, activité*, article mis en ligne. <http://www.ssr dm.ch/spip1/IMG/pdf/tachebrousseau.pdf>.

Brousseau Guy, 2006, *Recherche en éducation mathématique*, Quaderni di Ricerta in Didattica. n° 16, version électronique, http://math.unipa.it/~grim/quad16_Brousseau_06.pdf

Brun Jean, 1994, *Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques dans Vingt ans de didactique des mathématiques en France, Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud*, La Pensée Sauvage, pages 67-83.

Brun Jean, 1994, *Erreurs systématiques et schèmes algorithmes*, dans *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud*, La Pensée Sauvage, pages 203-209.

Bruner Jérôme, 1998, *Savoir faire, savoir dire*, PUF.

Bruner Jérôme, 2000, *Piaget et Vygotsky. Célébrons la différence*, l'esprit Piagétien, hommage international à Jean Piaget, Houdé olivier et Meljac Claire Editions, chapitre XII.

Cèbe Sylvie, 2001 (juin), *Développer les capacités de conceptualisation et les compétences transversales*, Savoir faire n° 0, version électronique <http://www.amares.org/revue/00/pdf/These1.pdf>.

Cèbe Sylvie et **Paour** Jean Louis, 2007, *Catégo, Apprendre à catégoriser, Maternelle toutes sections*, Hatier.

Chevallard Yves, 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique. Perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 12 (1), pages 73-112.

Chevallard Yves, 1998 (juillet), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique*, Leçon 1, Actes de l'UE d'été de la Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand, pages 91-100.

Coll César, 2002, *La construction de la connaissance à l'école : condition d'une intégration théorique*, sous la direction de Michel Brossard et de Jacques Fijalkow, *Apprendre à l'école : perspectives piagétienne et vygotkiennes*, Presses universitaires de Bordeaux. Pages 17-26.

Cortès A, 1994, *Invariants opératoires dans la résolution des équations, Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques*, La pensée Sauvage, pages 210-217.

Court Marielle, (11 mars 2003), article « *formation des professeurs : un rapport qui accuse* », Le Figaro.

Couturat Louis, 1980, *Les principes des mathématiques*, Albert Blanchard.

Dahan Maurice, 2001, *Approche sémantique et non cognitive d'un concept mathématique. Le concept "égalité"*. Mémoire DEA Paris VII.

Darcos Xavier, (juin 2008), Bulletin officiel de l'éducation nationale (BOEN), numéro hors série, n° 3 du 19 juin 2008.

Doise Willem et Gabriel **Mugny**, 1997, *Psychologie sociale et développement cognitif*, Armand Colin.

Dhombres Jean, 1978, *Nombres mesures et continu*, Cedic, Fernand Nathan.

Douady Régine, 1986, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherche en Didactique des Mathématiques, La pensée Sauvage, Vol. 7.2, pages 5-31.

Dubinski Edand Lewin Philip, 1986, *Reflective abstraction and mathematic education*, The journal of mathematical behavior, n° 5, pages 55-92.

Duval Raymond, 1993, *Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, pages 37-65.

Duval Raymond, 1995 « *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Duval Raymond, 1999, actes du séminaire IUFM Nord Pas de Calais, « *Conversion et articulation des représentations analogiques* », séminaire de recherche 1, Direction de la Recherche et du Développement.

Duval Raymond, 2001, *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres ?* Article mis en ligne, <http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf>.

Enfert (d') Renaud, *Du calcul aux mathématiques ? L'introduction des «mathématiques modernes» dans l'enseignement primaire français, 1960-1970*. Article mis en ligne, <http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/dEnfert-2008-Prague/dEnfert08.htm>

Fabre Michel, 1995, *Bachelard éducateur*, PUF.

Fabre Michel, **Orange** Christian, 1997, *Construction des problèmes et franchissements d'obstacles*, Aster n° 24, pages 37-57.

Fabre Michel, 1999, *Situations-problèmes et savoir scolaire*, PUF.

Fayol Michel, 1990, *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problème*, Delachaux et Niestlé.

Fayol Michel, 2000, *Acquisition et mise en œuvre de la numération*, article mis en ligne, <http://www.wpsy.univ-bpclermont.fr/lapsco/dispoetudiants/FayolArith2000.pdf>

Frege Gottlob, 1971, *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris Seuil.

Glaeser Georges, 1981, *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherche en Didactique des mathématiques, la Pensée Sauvage, Volume 2(3), pages 303-346.

Glaeser Georges, 1984, *Réflexion préalable à une étude des obstacles*, Cahier 56, IMAG. Grenoble.

Greco Pierre, 1962, *Structure numérique élémentaire, Quantité et quotité..* Paris, PUF, pages 1-70.

Gréco Pierre, 1991, *Structures et significations. Approche du développement cognitif*, Edition de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

Houdé Olivier, 2000, *La genèse de la cognition. L'esprit piagétien et les perspectives actuelles*, l'esprit piagétien, hommage international à Jean Piaget, Houdé olivier et Meljac Claire, PUF, Chapitre VII.

Houdé Olivier, 1992, *Catégorisation et Développement cognitif*, PUF.

Ifrah George, 1994, *Histoire universelle des chiffres*. Tome 1, Robert Laffont, pages 29-33 et page 977.

Ifrah George, 1994, *Histoire universelle des chiffres*, Tome 2, Robert Laffont, page 460.

Jonnaert Philippe, 2002 *Compétences, performance et qualification, Compétence et socio-constructivisme. Un cadre théorique*. De Boeck université. Chapitre 1.

Joshua Samuel, 2002, in *Apprendre à l'école, perspectives piagésiennes et vygotkiennes. Les obstacles épistémologiques et le cadre vygotkien*, par Michel Brossard Jacques Fijalkow, Presses Universitaires de Bordeaux, pages 27-37.

Kahane Jean Pierre, 2002, *L'enseignement des sciences mathématiques*, Rapport au ministère de l'éducation nationale, Odile Jacob.

Krivine Jean louis, 1972, *Théorie axiomatique des ensembles, Ordinaux, Cardinaux*, PUF, Chapitre II.

Lakatos Imre, 1984, *Preuves et réfutations, Cauchy et la défense du principe de continuité*, Hermann.

Le Ny Jean François, 2005, *Comment l'esprit produit du sens*, Odile Jacob.

Lorenzen Paul, 1967, *Formalisation de la logique, Métamathématique*, Chapitre premier, Gauthier-Villars

Margolinas Claire, 1995, *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, Les débats de didactique des mathématiques, Edition La pensée sauvage, pages 89-102.

Margolinas Claire, 1998, *Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement*, actes de l'université d'été de la Rochelle, Edition La pensée sauvage, pages 3-15.

Mouy Paul. 1944, *Cours de philosophie. Logique*. Hachette.

Orange Christian et **Fabre** Michel, 1997, *Apprentissages scientifiques et problématisation. Construction des problèmes et franchissements d'obstacles*, Aster n° 24, INRP, pages 28-38.

Orange Christian, 2002, *Apprentissages scientifiques et problématisation*, Science de l'Education pour l'ère nouvelle, Volume 35 (1), pages 24-41.

Orange Christian, 2003, *Débat scientifique dans la classe, problématisation et argumentation, le cas d'un débat sur la nutrition au cours moyen*. Interactions langagières, Aster n° 37, pages 83-107.

Orange Christian, 2010 (octobre), *Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier d'enseignant*. Revue de la Recherche en éducation. Hors série n° 2, pages 73-85.

Pastré Pierre, 2002, *L'analyse du travail en situation professionnelle*, Revue française de pédagogie, n° 138, pages 9-17.

Pastré Pierre, 2007 (octobre), *Analyse du travail et formation*. Recherche en éducation, n° 4, pages 23-28.

Perrin Glorian M. J., 1994, *Théorie des situations didactique : naissance, développement, perspectives*. Dans 20 ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud, La pensée sauvage, pages 97-148.

Perrin Glorian M. J., 1999, *Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu*, Recherche en Didactique des Mathématiques Volume 19 (3), pages 279-322,

Piaget Jean, 1947, *La psychologie de l'intelligence. Les facteurs sociaux du développement*, Armand Colin. Chapitre 6.

Piaget Jean, 1949, *Le problème neurologique de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*, extrait des Archives de psychologie, Vol 32, version électronique, pages 241-258. http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono.php

Piaget Jean, 1950, *La construction du nombre*, Introduction à l'épistémologie génétique, Tome 1, La pensée mathématique, et Chapitre 1, PUF

Piaget Jean, 1957, Introduction à l'épistémologie génétique, Tome 2, La pensée physique, introduction, PUF.

Piaget Jean, 1962, *Commentaires sur les remarques critiques de Lev Vygotski concernant le langage et la pensée chez l'enfant*, dans la traduction anglaise de MIT press de Pensée et Langage de Lev Vygotski. Editions sociales.

Piaget Jean, 1967, *Biologie et connaissances*, Gallimard.

Piaget Jean, 1967 « *L'homme à la découverte de lui-même* », la conscience, extrait en version électronique réalisée par la fondation Jean Piaget. http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono.php

Piaget Jean, 1967, « *Le jugement et raisonnement chez l'enfant* » Delachaux et Niestlé.

Piaget Jean. 1967, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé.

Piaget Jean et **Széminska** Anna, 1967, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé.

Piaget Jean, 1969, *Psychologie et pédagogie*, Denoël.

Piaget Jean, 1970, *Le structuralisme*, PUF.

Piaget Jean, 1970, *L'épistémologie génétique*, PUF.

Piaget Jean et **Bärbel Inhelder**, 1973, *La psychologie de l'enfant*, PUF.

Piaget Jean, 1974, *La prise de conscience*, PUF

Piaget Jean, 1974, *Réussir et comprendre*, PUF.

Piaget Jean, 1975, *La psychologie de l'enfant*, PUF.

Piaget Jean, 1975, *Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues*, Année psychologique, Vol 75, pages 23-60.

- Piaget** Jean, 1975, *Equilibration des structures cognitives. Problème central du développement*, PUF.
- Piaget** Jean, 1981, *Le possible et le nécessaire, l'évolution des possibles chez l'enfant*, PUF.
- Piaget** Jean. 1983, *Le possible et le nécessaire, l'évolution du nécessaire chez l'enfant*, PUF.
- Piaget** Jean et Rolando **Garcia**, 1983, *Psychogenèse et histoire des sciences*.
- Piaget Jean** et Bärbel **Inhelder**, 1991, *La genèse des structures logiques élémentaires*, Delachaux et Niestlé.
- Plomion** Charles, 1933, *Arithmétique, Cours moyen*, Hatier.
- Reuchlin** Maurice, 1977, *Psychologie, La psycholinguistique*, pages 295-306, PUF.
- Richard** Jean François, 1984, *La construction de la représentation du problème*, Psychologie Française n° 24, pages 226-230.
- Richard** Jean François, 1990, *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Armand Colin.
- Richard** Jean François et al, 1990, *Connaissances et représentations*, Traité de psychologie cognitive 2. Le traitement de l'information symbolique, Chapitre 2, Dunod.
- Richard** Jean-François, 2005, *Les activités mentales. De l'interprétation de l'information à l'action*, Armand Colin.
- Ricco** Graciela, 1995, *Psychologie cognitive et didactique des mathématiques, perspectives critiques et différentes approches concernant la cognition scolaire*, actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques, page 157-173.
- Robert** Aline, 2008, *La classe de mathématique. Activité des élèves et pratique des enseignants*, Octarès.
- Rogalski** Jeanine, 2008, *La classe de mathématique. Activité des élèves et pratique des enseignants*, Octarès.
- Rogalski** Jeanine, 1983, *Quelques éléments de la théorie piagétienne et didactique des mathématiques*, Cahier de didactique des mathématiques, n° 2, IREM
- Rouchier** André, 1996, *Connaissances et savoirs dans le système didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Volume 16(2), La pensée sauvage, pages 177-196.
- Sackur** Catherine et al, 2005, Groupe CESAME, *L'expérience de la nécessité épistémique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol n° 25(1), pages 5-90.

Saint-Hilaire Jean Barthélemy, 1844, *Logique d'Aristote. Introduction aux catégories par Porphyre*, version électronique,
<http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/categoriesporhyre.htm>.

Sarrasy Bernard (1997), *Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques* », *Recherches en Didactique des mathématiques*, , Volume 17(2), Grenoble, La Pensée Sauvage, pages 135-166.

Sierpiska Anna, 1995, *La compréhension en mathématique*, De Boeck.

Spagnolo Filippo, Université de Palerme, *Obstacles épistémologiques : le postulat d'Eudoxe Archimède*, version électronique,
http://math.unipa.it/~grim/spagnolo_obstacle_cipro_1999.pdf

Taton René, 1969, *Histoire du calcul*, PUF.

Temple Bell Éric, 1961, *Les grands mathématiciens*, Paris Payot.

Troadec Bertrand, 1998, *Psychologie du développement cognitif*, Armand Colin.

Vélu Jacques, 1987, *Méthodes mathématiques pour l'informatique*, Dunod.

Vergnaud Gérard, 1976, *Structures additives et complexité génétique*, *Revue française de pédagogie* n° 36, pages 28-43.

Vergnaud Gérard et al, (1977, mai) *Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel de l'élève*, *Didactique des sciences et psychologie*. n° 45, pages 7-15.

Vergnaud Gérard, 1981, *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol n° 2 (2), pages 215-232.

Vergnaud Gérard, 1983, *la didactique du concept de volume*, *Recherche en Didactique des Mathématiques* Vol n° 4 (1), pages 9-121.

Vergnaud, Gérard, 1985, *Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation*, *Psychologie française*, n° 30 (3/4), pages 245-252.

Vergnaud Gérard, 1986, *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*, Article dans la revue *Grand N*, n° 38, page 21-39.

Vergnaud Gérard, 1989, *L'obstacle des nombres négatifs à l'introduction de l'algèbre*, actes du Colloque d'Ottawa, *Obstacles et conflits*, CIRADE, Université du Québec, pages 76-84.

Vergnaud Gérard, 1991, *Langage et Pensée dans l'apprentissage des mathématiques*. *Revue Française de Pédagogie*, n° 96, pages 79-86.

Vergnaud Gérard, 1994, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang.

Vergnaud Gérard, 2002, *La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels*, Cahier du laboratoire de Leibniz n° 53, Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant, pages 3-19.

Vergnaud Gérard, 2003, *La Conceptualisation, clé de voûte des rapports entre pratique et théorie*, in analyse de pratiques et professionnalité des enseignants. Actes de la DESCO, CRDP de l'Académie de Versailles, pages 48-57.

Vergnaud Gérard, 2006, *La didactique professionnelle*, Revue française de pédagogie n° 154, pages 145-198.

Vergnaud Gérard, 2007 (octobre) *Représentation et activité : deux concepts étroitement associés*, Recherche en éducation n° 4, revue du CREN, pages 9-23.

Vermersch Pierre, 2000, *Conscience directe et conscience réfléchie*, intellectica 2000/2,31, pages 269-311, article mis en ligne,
http://www.intellectica.org/archives/n31/31_10_Vermersch.pdf

Vygotski Lev, 1985, *Pensée et langage*, Editions Sociales.

Wagner R.L et Pinchon J, 1962, *Grammaire du français*. Hachette.

Waldegg Guillermina, *L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stévin*, article électronique, <http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Waldegg.pdf>.

Weil-Barrais Annick et al, 1994, *L'homme cognitif*, Première partie, chapitre III, *Conscience et inconscient* PUF.

Dictionnaires glossaires et lexiques

Battro Antonio M., 1966, *dictionnaire d'épistémologie génétique*, PUF.

Bloch H. et al, 2002, *Dictionnaire fondamental de la psychologie*, Larousse.

Brousseau Guy, *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*, mis en ligne,
http://homepage.mac.com/tatsuya_ds/mt/Glossaire_TSDM.html

Ducret Jean Jacques, *Glossaire électronique*, mis en ligne,
http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_extraits_chrono.php <http://fondationjeanpiaget.ch>

Houdé Olivier et al, 1998, *Vocabulaire de sciences cognitives*, PUF.

Lalande André, 1999, *Vocabulaire technique et critique de philosophie*, PUF

Legendre Bergeron Marie Françoise, 1980, *Lexique de la psychologie du développement de Jean Piaget*, Gaétan Morin Editeur.

Mounin Georges, 1974, Dictionnaire de la linguistique, PUF

Piéron Henri, 1992, *Vocabulaire de la psychologie*, PUF.

Vax Louis, 1982, *lexique, logique*, PUF.

Wikipédia, *Encyclopédie en ligne*.

Textes officiels

Arrêté du 2 janvier 1970. Programme de mathématique de l'enseignement élémentaire.

Arrêté du 18 mars 1977. Horaires, objectifs et programmes pour le Cycle Préparatoire.

Arrêté du 15 mai 1985. Horaires, programmes et instructions pour l'école élémentaire.

Arrêté du 22 février 1995. Programmes de l'école primaire.

Bulletin officiel du 14 février 2002. Horaires et programmes de l'enseignement de l'école primaire.

Bulletin officiel n° 3 du 19 juin 2008. Numéro hors série. Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire.

Circulaire du 2 août 1977 pour l'école maternelle.

Circulaire du 30 janvier 1986. Orientations pour l'école maternelle.

Ces textes sont consultables sur le site <http://jl.bregeon.perso.sfr.fr>.

Décret du 23 avril 2005. *La loi d'orientation pour l'avenir de l'école*.

Décret du 11 juillet 2006. *Le socle commun des connaissances et des compétences*.

Ministère de l'éducation nationale « *Evaluation des acquis des élèves en français et en mathématiques* ». http://www.education.gouv.fr/evaluation_des_acquis/acad15/nantes.html.

Ministère de l'éducation nationale : *rapport de jury portant sur l'épreuve de mathématique au capes interne de 2005*. CNDP.

Manuels pédagogiques

Brissiaud Rémi et al, 2008, *J'apprends les maths avec Picbille*, CP, livre du maître, Retz.

Charnay Roland et Mante Michel, 2003, *Mathématique* Tomes 1 et 2, Hatier Concours.

Charnay Roland et al, 2003, *Cap math CM1, le guide des activités*, Hatier.

Colin Pierre et Redouté Christian, 2001, *Défi math*, CP, Retz.

Ermel, 1990. *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* Grande Section, Hatier.

Éléments de psychogénétique pour l'analyse et la conception de situations didactiques en classe de mathématique à l'école primaire.
Application à la conception d'une séquence d'apprentissage de la catégorisation à l'école maternelle.

Résumé

Dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants des écoles, nous nous sommes posés la question d'une ingénierie didactique épistémique. Précisément, pour nous, il s'est agi de définir, à la suite des travaux de Jean Piaget et de Gérard Vergnaud, un développement structural et épistémique des compétences à l'école primaire, et, ce faisant, d'élaborer une technologie de séquences didactiques ad hoc. Aussi, nous avons dû poser les bases d'une logique du développement des structures des schèmes ; à la condition de considérer que, relativement à une compétence donnée, un sujet élève est une structure cognitive autorégulée qui contraint les liaisons, au sein du couple schème-situation : tout développement d'une compétence mathématique impose, comme concept organisateur, un couple (R, S), où R est un couple de régulations inverses l'une de l'autre et S, un couple de schèmes réciproques. Nous avons dû plonger le concept de compétence dans un cadre linguistique, adaptant en cela les positions de Lev Vygotski qui associe étroitement développement des mots et développement conceptuel : tout développement d'une compétence mathématique peut être associé à celui d'une certaine formulation langagière dont le prédicat est un verbe d'action. Enfin, le concept d'obstacle épistémologique devient un cas particulier d'un concept que nous avons qualifié, en toute généralité, de cognitif. Nous avons choisi, comme modèle, la construction de la compétence «catégoriser à l'école maternelle». Nous avons pu confirmer qu'une médiation didactique, aux contraintes définies par la logique des schèmes, favorise un développement cognitif plus général que l'objectif initialement fixé.

Mots clés : compétence/ adaptation/ fonctions cognitives/ assimilation/ accommodation/ régulations/ schèmes/ schèmes fermés / situations perturbantes/ obstacles cognitifs/ réversibilité opératoire/ résultante cognitive.

Psychogenic elements for analysis and development of didactical situations in mathematics class in primary school.

Application to construct a sequence of categorization learning in nursery school

Abstract

In the framework of first time and continuous training for primary school teachers, I considered the question of epistemic didactical engineering. More precisely, starting from the works of Jean Piaget and Gerard Vergnaud, I focused on defining a structural and epistemic development of the competences of the pupils in primary school, and on the elaboration of a technology of ad hoc didactical sequences. So, I had to lay basis for the logic of the development of structures of schemes, taking into account that, for a given competence, a subject – pupil is a self-regulated cognitive structure, which constitutes a constraint for the links in the couple scheme – situation: that is, any development of competence in mathematics requires as organizing concept a couple (R, S) in which R is a couple of regulations, inverse to each other, and S, a couple of reciprocal schemes. I had to take into account the context of linguistics to delineate the concept of competence after Lev Vygotski who tightly links the development of words to conceptual development. Any mathematical concept can be linked to a certain language formulation, which predicate is a verb of action. Last point is that the concept of epistemological obstacle becomes a special case of a concept that I qualified, in general, as “cognitive”. As a model, I chose the building of competence “to categorize in nursery- school”. I was able to confirm that a didactical mediation with constraints shaped by the logic of schemes induces a cognitive development beyond the initial goal that we had initially defined.

Keywords : competence/ adaptation / cognitive functions / assimilation/ accommodation/ regulations / schemes / closed schemes/ disturbing situations / cognitive obstacles/ operational reversibility/ cognitive resultant.

Discipline : Sciences de l'Éducation

Laboratoire : CREN
UFR : Lettres et Langages
Chemin de la Censive du Tertre
44312 Nantes