

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET MATHÉMATIQUES

Année 2011

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Modélisation et identification dynamiques des robots avec un modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Automatique – Productique
Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Pauline HAMON

Le 30 mai 2011, devant le jury ci-dessous

Président : MARTINET Philippe, Professeur, IFMA Clermont-Ferrand

Rapporteurs : ABBA Gabriel, Professeur, ENI de Metz
MEIZEL Dominique, Professeur, Université de Limoges

Examineurs : GARREC Philippe, Ingénieur de recherche, CEA-LIST Fontenay-aux-Roses
GAUTIER Maxime, Professeur, Université de Nantes
JANOT Alexandre, Docteur Ingénieur de recherche, ONERA DCSD Toulouse
JOLY Luc, Docteur, Stäubli Faverges

*Directeur de thèse : GAUTIER Maxime
Co-encadrant : GARREC Philippe*

ED :

*“Première loi de la robotique :
Un robot ne doit pas porter
atteinte à un être humain ni, en
restant passif, laisser cet être
humain exposé au danger.”*

Isaac Asimov

À mes grands-pères,

Remerciements

Ce travail de thèse est né de la collaboration scientifique entre le Laboratoire de Robotique Interactive (LRI) du CEA-LIST de Fontenay-aux-Roses et l'équipe de Robotique de l'IRCCyN à Nantes. Je tiens à remercier Yann Perrot et Christine Chevallereau pour leurs accueils dans ces laboratoires et pour les bonnes conditions de travail.

Je remercie sincèrement Maxime Gautier, professeur à l'Université de Nantes, pour avoir accepté de diriger cette thèse. Merci pour ses précieux conseils scientifiques, ses compétences, ses nombreuses relectures, et pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie également Philippe Garrec, ingénieur de recherche au CEA, pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse, pour son encadrement et pour son enthousiasme.

J'exprime ma reconnaissance à M. Gabriel Abba, professeur à l'ENI de Metz, et à M. Dominique Meizel, professeur à l'Université de Limoges, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ces travaux.

Je remercie M. Philippe Martinet, professeur à l'IFMA de Clermont-Ferrand, d'avoir accepté d'être président du jury.

Je remercie M. Luc Joly, docteur chez Stäubli à Faverges, d'avoir accepté de juger ces travaux.

J'adresse mes vifs remerciements à Alexandre Janot, docteur à l'ONERA de Toulouse, pour ses remarques pertinentes et constructives, et pour sa participation à l'écriture de communications scientifiques et au jury de thèse.

Je remercie tous les membres du jury de la thèse pour le temps passé à lire le présent mémoire et à évaluer le travail réalisé.

Je remercie le personnel technique de l'IRCCyN travaillant sur le TX40, Philippe Lemoine, Stéphane Jolivet et Gaël Branchu, ainsi que les thésards qui m'ont bien accueillie à l'IRCCyN lors de mes passages.

Il me tient à cœur de remercier tous les collègues du CEA pour leur soutien et pour l'ambiance de travail sérieuse mais détendue. Merci donc :

à Anne pour son efficacité et sa gentillesse,

à Franck pour sa patience et son aide indispensable,

à Nolwenn pour avoir affronté l'hiver polaire avec moi, en compagnie du RX90L,

à Marc pour son aide et son humour,

à Benoît P. pour sa disponibilité et ses conseils techniques,

à Julien pour ses mails intéressants ou inutiles, sa passion pour la musique, et son amitié,

à Rouba, ma danseuse libanaise préférée, pour sa bonne humeur et notre complicité,

à Luc pour nos conversations passionnantes et loufoques,

à Marie pour son dynamisme et sa gaieté,

à Ziad, le libanais farceur, pour m'avoir fait bien rire,

à Aymen pour ses rares mais sympathiques apparitions au CEA,

à Denis D. pour m'avoir si bien supporté dans son bureau,

à Jonathan, Seb, Benoît H. et Gaël pour leurs discussions, blagues et jeux aux pauses café,

à Julie B. pour avoir envoyé à l'IRCCyN l'offre d'emploi qui m'a amenée à faire cette thèse,

à Raphaël pour nos bavardages,

à Farès, Ramla et Taher pour leurs cours d'arabe,

à mes collègues-musiciens Dominique, Martin P., Alain M. et Christophe L.,
à mes collègues-danseurs Tanguy, Christine et Christophe,
à mes collègues-photographes du BE Alexandre V., Aurélie et Vincent,
à Romain pour ses merveilleux dessins du RX130L,
à Julie D. pour nos batailles de robots RX130L VS TX90,
à Mathieu, Mehdi et Alain R. pour leurs conseils,
à Pascal et P'tit Julien, les électroniciens,
à Tatiana et Florian, pour leur discrétion et leur sympathie,
à Javier et Belen pour leurs conversations en espagnol,
à Henrique pour son invitation au Brésil et sa démonstration de forró,
à Matthieu pour sa tentative de film d'action avec acteurs du CEA,
à Martine, Maria, Ioanna, Xavier, Mickaël, Jean, Sylvain, Fred, Laure, Alexandre M.,
Quentin, Manu, Anne-Laure, Virginie, Denis, Neil et tous les autres CDI, CDD, post-docs,
thésards, apprentis et stagiaires pour l'ambiance sympathique.

Enfin, je remercie infiniment Martin, mes parents et mes frères pour m'avoir supportée et encouragée au cours de ces années d'étude. Merci à toute ma famille et à mes amis sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Table des matières

Remerciements	I
Table des matières	III
Introduction générale.....	1
1. Problématique et outils classiques.....	3
1.1. Introduction, contexte.....	3
1.2. Détection d'anomalie et observation des efforts	4
1.2.1. Détection d'anomalie en suivi de trajectoire.....	4
1.2.2. Observation des efforts en télérobotique et cobotique	4
1.3. Modélisation et identification classiques	6
1.3.1. Modèle géométrique direct des robots sériels	6
1.3.2. Modèle dynamique de robot.....	8
1.3.3. Méthode d'identification	17
1.4. Conclusion.....	23
2. Etat de l'art sur les modèles de frottement	25
2.1. Bibliographie	25
2.1.1. Introduction	25
2.1.2. Historique et définitions	25
2.1.3. Modèles classiques	29
2.1.4. Modèles tribologiques	31
2.1.5. Modèles de frottement utilisés pour les transmissions.....	35
2.1.6. Modèles de frottement des transmissions prenant en compte la charge.....	36
2.1.7. Conclusion.....	47
2.2. Modèle de frottement unifié au CEA	47
2.2.1. Introduction : modèle de frottement.....	47
2.2.2. Modèle de transfert et diagramme associé	47
2.2.3. Fondement du diagramme de transfert – Plan incliné.....	48
2.2.4. Généralisation à un composant quelconque	54
2.2.5. Exploitation d'un diagramme de transfert simplifié	54
2.2.6. Distinction entre propriété mécanique et comportement de l'actionneur	56
2.2.7. Synthèse d'une chaîne de transmission et modèle de transfert associé.....	56
2.2.8. Identification du diagramme de transfert	57
2.3. Conclusion.....	58
3. Caractérisation du modèle de frottement sec	59
3.1. Introduction	59
3.2. Frottement sec et charge.....	60
3.2.1. Banc à vérin à câble	60
3.2.2. EMPS	67
3.2.3. Robot Stäubli RX130L.....	74
3.2.4. Robot Stäubli TX40	86
3.2.5. Nouveau modèle de frottement sec fonction de la charge.....	95
3.3. Frottement sec et vitesse	97
3.3.1. Banc à vérin à câble	97
3.3.2. EMPS	97
3.3.3. Stäubli RX130L.....	99
3.3.4. Stäubli TX40	100
3.3.5. Nouveau modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse	101
3.4. Conclusion.....	104

4. Modélisation dynamique	105
4.1. Introduction	105
4.2. Nouveau modèle dynamique	105
4.2.1. Modélisation dynamique ($4 \times 1Q$)	106
4.2.2. Modélisation dynamique ($2 \times 2Q$)	107
4.2.3. Modélisation dynamique ($1 \times 4Q$)	108
4.2.4. Synthèse des modélisations	108
4.3. Nouveau modèle dynamique d'identification linéaire par rapport aux paramètres ...	110
4.3.1. Linéarité par rapport aux paramètres inertiels et de frottement	110
4.3.2. Linéarité par rapport à la constante de vitesse de Stribeck	110
4.3.3. Linéarité par rapport au signe de l'effort de charge	111
4.3.4. Synthèse du modèle dynamique inverse d'identification	111
4.4. Complexité du nouveau modèle dynamique d'identification	113
4.4.1. Modèles dynamiques d'identification en mono-axe	113
4.4.2. Modèles dynamiques d'identification en multi-axes	115
4.5. Conclusion	116
5. Identification du nouveau modèle dynamique	117
5.1. Introduction	117
5.2. Banc à vérin à câble	117
5.2.1. Identification du modèle classique	118
5.2.2. Identification du nouveau modèle	119
5.2.3. Résultats et analyses	120
5.3. EMPS	124
5.3.1. Identification du modèle classique	125
5.3.2. Identification du nouveau modèle	125
5.3.3. Résultats et analyses	126
5.4. Stäubli RX130L – Axe 3	131
5.4.1. Identification du modèle classique	131
5.4.2. Identification du nouveau modèle	132
5.4.3. Résultats et analyses	132
5.5. Stäubli TX40	136
5.5.1. Identification Axe 1	136
5.5.2. Identification Axe 2	140
5.5.3. Identification Axe 3	145
5.5.4. Identification Axe 4	149
5.5.5. Identification multi-axes	151
5.6. Synthèse sur l'identification	159
5.6.1. Méthode d'identification pour un axe	159
5.6.2. Méthode d'identification en multi-axes	163
5.7. Conclusion	167
Conclusion générale	169
Bibliographie	171
Publications de l'auteur	177
Annexes	179
Annexe 1 : Formalisme de Newton-Euler pour le calcul du modèle dynamique	179
Annexe 2 : Méthodes littérale et numérique pour le calcul des paramètres de base	182

Introduction générale

Les applications robotiques telles que la téléopération et la cobotique induisent de nouvelles problématiques en termes de modélisation, identification et commande. Il ne s'agit plus seulement d'avoir des robots rapides, stables et précis, mais aussi des robots capables de contrôler et d'estimer précisément les efforts d'interaction avec leur environnement matériel et humain. C'est le concept de robots sécurisés ("safe robot"), développé actuellement pour les robots industriels de nouvelle génération. Ce nouveau cahier des charges nécessite le développement de modèles de frottement adaptés aux applications et des méthodes d'identification associées.

Le Laboratoire de Robotique Interactive (LRI) du CEA LIST à Fontenay-aux-Roses et l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN) mènent des recherches dans les domaines de la téléopération et de la cobotique. Des systèmes sont développés principalement pour des applications médicales ou nucléaires. Dans ces contextes, les robots évoluent à des vitesses faibles, avec des variations importantes de charge, et sont souvent commandés en effort. L'expertise acquise au cours de 25 années de recherche dans ces laboratoires, en modélisation et en identification dynamiques, validée expérimentalement sur de nombreuses applications, a montré que les modèles d'effort de gravité et d'inertie des équations de Newton-Euler ou Lagrange sont précis et qu'un modèle simple de frottement sec constant est suffisamment précis dans les applications à dynamique élevée.

Pourtant, d'après la loi de Coulomb, l'effort de frottement sec de glissement varie avec l'amplitude des efforts de contact entre les éléments de la transmission mécanique. Ainsi, cet effet est à prendre en compte pour les systèmes mécaniques soumis à de fortes variations de charge. De plus, un effet Stribeck de variation de l'effort de frottement sec par rapport à la vitesse est souvent observé aux faibles vitesses dans certaines transmissions.

Il en résulte que si le modèle classique avec un frottement sec constant est suffisamment précis dans bon nombre d'applications, il se révèle insuffisant dans les applications avec une variation importante de la charge et/ou avec des vitesses faibles.

Cette thèse propose une modélisation originale du frottement sec, fonction de la charge, de la vitesse et de la puissance articulaire, son intégration dans le modèle dynamique multi-axes, et son identification par modèle inverse et moindres carrés linéaires.

Le mémoire est divisé en 5 chapitres :

- Le premier chapitre décrit le contexte général dans lequel se situent ces travaux : la recherche d'un modèle dynamique précis pour la détection d'anomalie (ou défaut de fonctionnement) et l'observation des efforts entre le robot et son environnement. Il introduit ensuite la modélisation géométrique, le modèle dynamique inverse des robots, ainsi que les techniques d'identification utilisées en robotique.
- Le deuxième chapitre donne un état de l'art sur les modèles de frottement. Après un bref historique, quelques modèles sont présentés : les modèles classiques simples souvent utilisés en robotique, des modèles tribologiques plus complexes, et des modèles plus rarement vus en robotique où le frottement sec dépend de la charge. Enfin, une étude théorique sur les frottements réalisée au LRI du CEA est exposée.

- Le troisième chapitre présente une étude expérimentale réalisée en mono-axe sur divers prototypes ou robots industriels afin de mettre en évidence l'importance de la variation des efforts de frottement en fonction de la charge et de la vitesse et de caractériser la forme des équations du nouveau modèle.
Les systèmes étudiés sont : un banc à vérin à câble un axe du CEA ; un prototype un axe de l'Université de Nantes, l'EMPS ; un robot Stäubli RX130L (axe 3) ; un robot Stäubli TX40. Différents types de transmission constituent les axes de ces robots. Afin de caractériser le modèle de frottement sec, divers essais sont réalisés sur chacun des systèmes, avec de fortes variations de charge et de vitesse.
Les résultats conduisent à proposer un nouveau modèle de frottement sec mono-axe : il combine la variation par rapport à la charge du modèle de Coulomb et la variation par rapport à la vitesse du modèle de Stribeck. De plus, une distinction de fonctionnement entre les 4 quadrants du plan (vitesse, charge) articulaire amène à un modèle fonction de la puissance articulaire. La complexité du modèle est adaptable à la complexité de l'effort de frottement de la transmission étudiée.
- Dans le quatrième chapitre, le nouveau modèle de frottement sec mono-axe proposé est intégré dans le modèle dynamique multi-axes du robot, tout en conservant la linéarité du modèle dynamique inverse par rapport aux nouveaux paramètres dynamiques, ce qui permet de conserver la procédure classique en robotique d'identification par moindres carrés linéaires. Une réflexion sur la complexité du nouveau modèle dynamique par rapport au modèle classique est abordée, en particulier pour les robots à multi-degrés de liberté (multi-ddl).
- Dans le cinquième et dernier chapitre, une identification dynamique est réalisée pour chacun des systèmes étudiés, tout d'abord en mono-axe avec le banc à vérin à câble, l'EMPS et l'axe 3 du robot Stäubli RX130L, puis en multi-axes sur le robot Stäubli TX40. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec le modèle classique. Enfin, une synthèse sur la méthode d'identification en mono-axe et multi-axes est proposée.

Chapitre 1

1. Problématique et outils classiques

Résumé : Ce chapitre introduit la modélisation et la nécessité de l'identification précise des paramètres de frottements pour les applications robotiques, et en particulier la détection de collision et l'observation des efforts d'interaction du robot avec l'environnement. Les outils utilisés fréquemment en modélisation et identification des paramètres mécaniques des robots sont présentés. La modélisation géométrique est basée sur la convention DHM et les techniques d'identification sont basées sur l'utilisation du modèle dynamique inverse linéaire par rapport aux paramètres et les moindres carrés linéaires.

1.1. Introduction, contexte

Dans le cadre des développements de technologies robotiques pour les applications nucléaires ou médicales, la sûreté d'utilisation des robots est primordiale. Cette sûreté est particulièrement importante lorsque le robot intervient en contact direct avec son environnement ou avec l'homme. En particulier en téléopération ou en cobotique, la mesure des efforts d'interaction entre le robot et son environnement matériel et humain est primordiale.

La surveillance des efforts extérieurs est un axe majeur d'amélioration de la sécurité et de la sûreté, ou même de la commande. Dans le cas d'une orthèse à retour d'effort telle que celle du membre supérieur du CEA-LIST (ABLE, [Garrec 2008]), on cherche à contrôler les efforts internes du système multi-corps articulé, composé de l'ensemble bras humain plus orthèse, afin d'évaluer les capacités physiques du patient et d'analyser ses évolutions dans le cadre d'une étude clinique. Dans le cas d'un robot industriel utilisé en téléopération, tels que les robots de Stäubli [Stäubli], on souhaite détecter des anomalies de fonctionnement correspondant à d'éventuelles collisions avec l'environnement ou avec un opérateur humain.

Si l'observation et la détection d'anomalie sont des champs de recherche très actifs en automatique, ils ont été encore peu appliqués à la robotique. Les techniques vont de l'exploitation directe de données capteurs adaptés, à l'utilisation d'un modèle dynamique basé sur des mesures simples de position et courant pour lesquelles il faut rejeter bruits et perturbations. Pour les applications qui nous intéressent, nous faisons le choix de ne pas instrumenter le robot avec des capteurs supplémentaires, pour des raisons de minimisation de la masse, de l'encombrement, du coût, du risque de pannes capteurs, etc... La surveillance des efforts extérieurs sera donc basée sur l'utilisation du modèle dynamique du robot qui calcule les efforts moteurs en fonction des positions, vitesses et accélérations de chaque axe et sur la comparaison en ligne entre la prédiction des efforts calculés par la simulation du modèle et les efforts moteurs réels déduits des courants moteurs.

Il s'agit donc de réaliser un observateur des efforts extérieurs, ce qui demande une modélisation fine et une identification précise du système. C'est sur cette partie que se sont concentrés nos travaux : améliorer la précision du modèle dynamique et adapter la méthode

d'identification au nouveau modèle, afin d'augmenter la précision de l'observateur. L'amélioration du modèle qui est proposée concerne plus particulièrement les modèles des frottements dans la chaîne de transmission des efforts moteurs vers les efforts articulaires. Cependant, dans ce chapitre, afin de bien positionner le problème, nous allons détailler les méthodes de détection de collision/observation ainsi que le modèle et l'identification classiques utilisés généralement en robotique.

1.2. Détection d'anomalie et observation des efforts

Dans le cadre de la téléopération ou de la cobotique, la surveillance pour la sécurité n'a pas les mêmes conditions et les mêmes conséquences qu'en suivi de trajectoire simple. Pour bien comprendre les différents enjeux, nous allons détailler les 2 cas.

1.2.1. Détection d'anomalie en suivi de trajectoire

Lors d'un suivi de trajectoire pour un robot industriel, celui-ci a une tâche bien spécifique à exécuter. Bien souvent, son environnement est connu et la planification de trajectoire est adaptée de manière à éviter toute collision. Si d'autres systèmes automatisés se trouvent dans l'environnement du robot, il est alors possible d'implémenter des algorithmes permettant de planifier à l'avance les trajectoires de chaque système afin d'éviter des collisions entre eux. Il est également possible de faire une commande duale qui corrige en temps réel la trajectoire de l'un si elle se trouve sur la trajectoire de l'autre.

En général, ce type de robot est contrôlé par une commande en position et évolue à une vitesse relativement élevée, ayant peu de risques d'entrer en collision avec l'environnement. Cependant, pour des raisons de sûreté, il est souvent nécessaire de mettre en place une détection d'anomalie : panne capteur, collision non prévisible, ou tout autre problème matériel. La méthode couramment utilisée consiste à utiliser l'erreur de poursuite : différence entre la position articulaire mesurée par les codeurs des moteurs et la consigne de position. L'erreur de poursuite en position, en fonctionnement normal, ne doit pas dépasser un certain seuil. En cas d'anomalie, l'erreur de poursuite augmente et dépasse le seuil. On peut alors décider de stopper le robot ou de programmer une action à effectuer en cas de détection d'anomalie.

1.2.2. Observation des efforts en télérobotique et cobotique

Les conditions en télérobotique ou cobotique sont très différentes des précédentes. Tout d'abord, les trajectoires ne sont pas planifiées à l'avance mais dépendent du choix de l'opérateur. Ainsi, les commandes sont rarement de simples commandes en position, mais plutôt des commandes bilatérales positions et efforts, pour le système maître-esclave. D'autre part, l'environnement est parfois mal connu ou changeant, par exemple dû à la présence d'opérateurs dans l'espace de travail du robot. On ne peut donc pas limiter la zone d'action du robot pour éviter des obstacles en permanence. La détection de collision est donc indispensable. Enfin, les mouvements sont réalisés à basses vitesses. Une collision, si elle est détectée à temps, n'endommagera pas le robot ou son environnement.

De plus, comme nous le verrons par la suite, les frottements secs sont prépondérants sur les efforts dynamiques à basse vitesse et accélération faible, d'où l'intérêt d'un modèle de frottement précis pour la détection de collision dans ce type d'applications.

Pour la cobotique, il ne s'agira plus de détecter une collision mais plutôt d'observer les efforts fournis par l'opérateur.

Dans les 2 cas, la technique décrite ci-dessus pour le suivi de trajectoire et basée sur l'erreur de poursuite entre consigne et mesure de position n'est plus suffisante. De plus, c'est cette erreur de poursuite entre les positions du maître et de l'esclave qui permet d'appliquer, sur l'environnement, un effort avec l'organe terminal du robot esclave, dans les schémas de commande bilatérale de robots téléopérés. Dans ces conditions, un seuil sur l'erreur de poursuite devient difficilement utilisable pour la détection de contacts anormaux.

L'idée est alors d'utiliser un modèle dynamique du robot et la mesure de l'effort sur l'effecteur du robot, pour simuler en temps réel l'évolution du manipulateur. Il suffit ensuite de comparer l'état (en général les efforts moteurs) du robot simulé à l'état du robot réel, pour conclure ou non à une anomalie de fonctionnement, qui peut provenir d'un contact anormal sur le corps du robot, ou bien d'une panne électromécanique autre.

La détection d'anomalie est calculée à partir de l'amplitude du couple de défaut défini par la différence entre le couple de consigne envoyé au robot réel et le couple de consigne envoyé au robot simulé, et à partir de l'amplitude de la vitesse de défaut définie par la différence entre la vitesse réelle et la vitesse du robot simulé. Ceci conduit au réglage de deux seuils de détection, correspondant respectivement au seuil d'effort et au seuil de vitesse ([Geffard 2000]).

Les seuils de détection doivent être supérieurs aux erreurs de simulation provenant des erreurs de modèle et/ou d'identification des paramètres, afin d'éviter les détections abusives dans les cas extrêmes d'utilisation du système (grandes accélérations et chocs en extrémité, avec éventuellement excitation du premier mode flexible des axes). Une solution consiste à pondérer le seuil d'effort de détection en fonction du couple envoyé sur le simulateur. Ceci est envisageable car, à faibles sollicitations, le seuil sera faible et la détection assez fine, alors qu'à forte sollicitation (mouvements rapides), c'est la vitesse d'anomalie qui déclenchera la détection.

Lorsque le robot est en position singulière, son évolution est très sensible aux conditions initiales. En effet, pour une même position de consigne cartésienne, le robot peut évoluer de différentes façons, et donc on ne peut pas garantir une évolution identique du simulateur, compte tenu des écarts entre état réel et simulé. Ces différences d'évolution entre le robot et le simulateur peuvent conduire à des détections abusives, c'est pourquoi le passage des singularités est une zone de simulation non valide pour certains axes. L'évolution des autres axes étant valide, on assure la détection d'anomalie sur ces derniers.

Dans le cas où les singularités ne sont pas calculables facilement, ou dans le cas d'un robot redondant, il faut se tourner vers une simulation en boucle ouverte, le couple envoyé sur le simulateur est alors directement le couple envoyé au robot réel. La détection se fait sur l'information de vitesse, mais on retrouve alors les problèmes de dérive du simulateur.

La détection par modèle de référence permet une détection assez fine des contacts à vitesse lente, et permet également de détecter les chocs, mais elle nécessite une modélisation fine du système. Il faut préciser que les seuils de détection peuvent être augmentés ou diminués en fonction de la tâche à réaliser. Une tâche ne nécessitant pas de mouvements trop brusques du robot peut être réalisée avec des seuils faibles, et ainsi permettre une détection fine, à condition d'avoir un modèle de frottements précis, ceux-ci étant prépondérants à vitesse faible. A l'inverse pour des tâches brutales, il est toujours possible d'augmenter les seuils. Un autre avantage de la détection par modèle de référence est justement de disposer de seuils en effort, ce qui permet un réglage intuitif en fonction de la tâche à réaliser.

1.3. Modélisation et identification classiques

Nous introduisons ici les outils nécessaires à la modélisation géométrique et dynamique des robots série à n degrés de liberté, et à l'identification des paramètres. Le chapitre est divisé en 3 parties : la première présente le formalisme pour la modélisation géométrique des robots à structure sérielle, la deuxième introduit le modèle dynamique inverse d'un robot. Enfin, la troisième partie traite de la méthode d'identification utilisée en robotique, basée sur l'utilisation du modèle dynamique inverse et la procédure des moindres carrés linéaires. Pour ce chapitre, on se référera à [Khalil 2002], [Gautier 1990a], [Janot 2007] et [Hollerbach 2008].

1.3.1. Modèle géométrique direct des robots sériels

En robotique, la description géométrique de Denavit-Hartenberg modifiée (DHM) introduite par Khalil et Kleinfinger [Khalil 1986] permet une description géométrique unifiée des robots sériels, arborescents, et à structure fermée et parallèle. Cette description utilise un nombre minimum de paramètres géométriques et conduit à un modèle dynamique linéaire par rapport aux paramètres inertiels. On suppose que les corps sont rigides et qu'ils sont reliés par des articulations prismatiques (translations pures) ou rotoïdes (rotations pures).

D'un point de vue mécanique, un robot à chaîne ouverte simple est un système composé de $n+1$ corps rigides notés $C_0, C_1, \dots, C_n$ reliés entre eux par n articulations. C_0 est la base du robot et C_n son organe terminal (Figure 1-1). Les positions, vitesses et accélérations en chaque point de chaque corps de robot sont définis dans un repère absolu lié à la Terre. On définit R_0 le repère lié à la base C_0 et rattaché à la terre, et R_j un repère attaché à chaque corps C_j . Chaque repère R_j est caractérisé par son origine O_j et ses vecteurs de base orthonormés $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_j$. On peut choisir indifféremment les repères, mais la convention DHM permet une description homogène des robots à chaîne ouverte simple avec un nombre minimum de paramètres. De plus, ce choix peut être généralisé à des structures plus complexes. Enfin, cette méthode est adaptée aux calculs symboliques des modèles des robots [Khalil 1997].

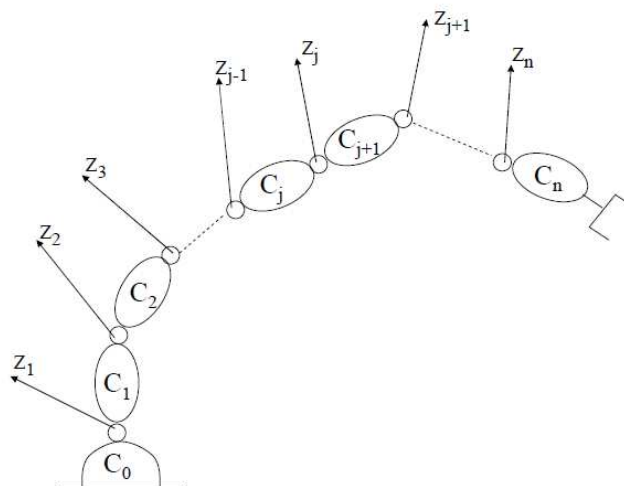


Figure 1-1 : Robot à structure ouverte simple

Le repère R_j ($0 \leq j \leq n$) lié au corps C_j , successeur du corps C_{j-1} et antécédent du corps C_{j+1} est défini de la façon suivante (Figure 1-2) :

- L'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ,
- L'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune à z_j et z_{j+1} , et orienté arbitrairement,
- Le changement de repère de R_{j-1} à R_j utilise les 4 paramètres minimaux :
 - o α_j angle entre les axes z_{j-1} et z_j mesuré autour de l'axe x_{j-1} ,
 - o d_j distance entre z_{j-1} et z_j mesurée le long de l'axe x_{j-1} ,
 - o θ_j angle entre les axes x_{j-1} et x_j mesuré autour de l'axe z_j ,
 - o r_j distance entre x_{j-1} et x_j mesurée le long de l'axe z_j .

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ème}}$ articulation est définie par l'équation algébrique suivante :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \quad (1.1)$$

avec :

- $\sigma_j = 0$ si l'articulation est rotoïde
- $\sigma_j = 1$ si l'articulation est prismatique
- $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$

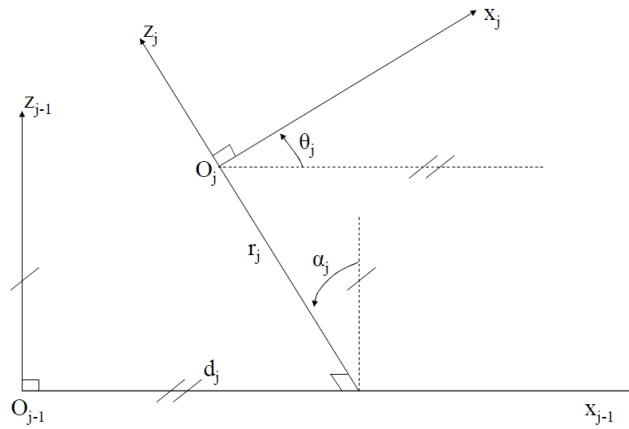


Figure 1-2 : Paramètres géométriques d'une structure ouverte simple

La matrice du changement de repère ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$, appelée aussi matrice de transformation homogène, représente à la fois l'orientation et la position du repère R_j dans le repère R_{j-1} . Elle s'exprime par :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \text{Rot}(x_{j-1}, \alpha_j) \text{Trans}(x_{j-1}, d_j) \text{Rot}(z_j, \theta_j) \text{Trans}(z_j, r_j) \quad (1.2)$$

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{j-1}\mathbf{A}_j & {}^{j-1}\mathbf{P}_j \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

avec :

- ${}^{j-1}\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} {}^{j-1}\mathbf{s}_j & {}^{j-1}\mathbf{n}_j & {}^{j-1}\mathbf{a}_j \end{bmatrix}$
- ${}^{j-1}\mathbf{P}_j$ est le vecteur (3×1) des coordonnées du point O_j exprimé dans le repère R_{j-1} ,
- ${}^{j-1}\mathbf{A}_j$ est la matrice orthogonale (3×3) de rotation définissant l'orientation de R_j dans le repère R_{j-1} . Les éléments de ${}^{j-1}\mathbf{A}_j$ définissent les cosinus directeurs d'orientation.
- ${}^{j-1}\mathbf{s}_j$, ${}^{j-1}\mathbf{n}_j$ et ${}^{j-1}\mathbf{a}_j$ sont les vecteurs unitaires qui constituent la base orthonormée suivant les axes $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$ et $\mathbf{z}_j$ de R_j exprimés dans R_{j-1} ,
- On pose $C. = \cos(.)$ et $S. = \sin(.)$.

Le modèle géométrique direct est utilisé dans la suite pour le calcul du modèle dynamique inverse du robot.

1.3.2. Modèle dynamique de robot

1.3.2.1. Introduction

Le modèle dynamique calcule les couples ou forces appliqué(e)s au robot en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires, et des efforts extérieurs d'interaction du robot avec l'environnement. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_{in} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbb{f}_{en}) \quad (1.4)$$

avec :

- $\boldsymbol{\tau}_{in}$: vecteur des couples ou forces des actionneurs (selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique)
- $\mathbf{q}$: vecteur des positions articulaires ;
- $\dot{\mathbf{q}}$: vecteur des vitesses articulaires ;
- $\ddot{\mathbf{q}}$: vecteur des accélérations articulaires ;
- $\mathbb{f}_{en}$: vecteur représentant le torseur des forces et moments des efforts extérieurs d'interaction du robot avec l'environnement.

Toutes les grandeurs sont exprimées en unités SI côté articulaire.

Remarque : Par la suite, pour rester général, on utilisera le terme “effort” pour désigner soit un “couple”, soit une “force”. Le symbole τ désigne également indifféremment une force ou un couple.

On convient d'appeler *modèle dynamique inverse*, ou tout simplement *modèle dynamique*, la relation ci-dessus. Cette forme qui s'exprime en fonction des variables lagrangiennes (variables positions articulaires et leurs dérivées) est appelée modèle lagrangien, ceci par opposition au modèle eulérien qui s'exprime en fonction des variables eulériennes (positions et orientations des corps et leurs dérivées).

1.3.2.2. Calcul du modèle dynamique par le formalisme de Lagrange

Les formalismes les plus utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots sont le formalisme de Lagrange et le formalisme de Newton-Euler [Khalil 2002]. Nous rappelons ici le calcul par le formalisme de Lagrange : il décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du système, et exprime le modèle dynamique sous une forme explicite. Il se traduit par l'équation suivante :

$$\tau_{in j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \tau_{frott j} + \tau_{ext j} \quad j = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

avec :

- L : lagrangien du système égal à $E - U$,
- E : énergie cinétique totale du système,
- U : énergie potentielle totale du système,
- τ_{frott} : vecteur des efforts de frottement,
- τ_{ext} : vecteur des efforts d'interaction du robot avec l'environnement.

La convention de signe des positions, vitesses, accélérations et efforts articulaires, utilisée pour le modèle dynamique, est définie par la Figure 1-3 (par convention, on considère que τ_{ext} , comme τ_{frott} , s'oppose au mouvement).

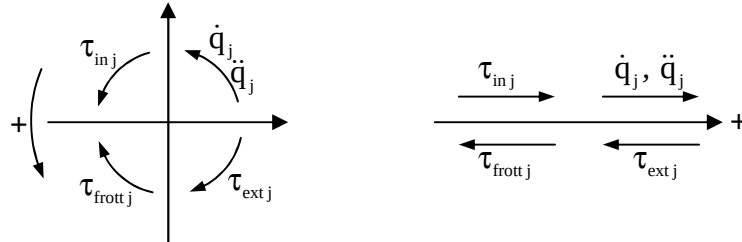


Figure 1-3 : Convention de signe pour le modèle dynamique

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique, d'élément générique A_{ij} , appelée aussi *matrice d'inertie* du robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction des variables articulaires $\mathbf{q}$.

L'énergie potentielle étant fonction des variables articulaires $\mathbf{q}$, l'effort τ_{in} peut se mettre, à partir des équations précédentes, sous la forme :

$$\tau_{in} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \tau_{frott} + \tau_{ext} \quad (1.7)$$

avec :

- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$: vecteur de dimension ($n \times 1$) représentant les efforts de Coriolis et centrifuges, tel que :

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.8)$$

- $\mathbf{Q} = [Q_1 \quad \dots \quad Q_n]^T$: vecteur des efforts de gravité.

Les éléments de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}$ sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Les équations dynamiques d'un système mécanique articulé forment donc un système de n équations différentielles du second ordre, couplées et non linéaires.

On définit le vecteur $\boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}}$ des efforts dûs à la dynamique du robot seul (inertie et gravité) :

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad (1.9)$$

1.3.2.3. Calcul des éléments de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}$ dus aux corps C_j

Pour calculer les éléments de $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}$, il faut tout d'abord calculer les énergies cinétique et potentielle de tous les corps du robot. On procède ensuite comme suit :

- L'élément A_{ij} est égal au coefficient de $(\dot{q}_j^2/2)$ dans l'expression de l'énergie cinétique, tandis que l'élément A_{ij} , si $i \neq j$, est égal au coefficient de $(\dot{q}_i \dot{q}_j)$;
- On peut calculer les éléments de $\mathbf{C}$ à partir du symbole de Christoffel $c_{i,jk}$ tel que :

$$\begin{cases} C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad (1.10)$$

- Les éléments du vecteur $\mathbf{Q}$ se calculent en écrivant :

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (1.11)$$

1.3.2.4. Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du système est donnée par la relation :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (1.12)$$

où E_j désigne l'énergie cinétique du corps C_j qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbf{I}_{G_j} \boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_{G_j}^T \mathbf{V}_{G_j} \right) \quad (1.13)$$

avec :

- $\boldsymbol{\omega}_j$ la vitesse de rotation du corps C_j

- $\mathbf{I}_{G_j}$ le tenseur d'inertie du corps C_j par rapport à un repère parallèle à R_j et d'origine G_j le centre de gravité du corps C_j
- $\mathbf{V}_{G_j}$ la vitesse du centre de gravité du corps C_j
- M_j la masse du corps C_j

En appliquant la loi de composition des vitesses, on obtient (Figure 1-4) :

$$\mathbf{V}_{G_j} = \mathbf{V}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{S}_j \quad (1.14)$$

(L'opérateur $\times$ représente ici le produit vectoriel)

Et en appliquant le théorème de Huygens, on obtient :

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{I}_{G_j} - M_j \hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_j \quad (1.15)$$

où :

- $\mathbf{V}_j$ est la vitesse du point O_j origine du repère R_j ;
- $\mathbf{J}_j$ est le tenseur d'inertie du corps j par rapport au repère R_j , qui s'exprime par :

$$\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{XX}_j & \mathbf{XY}_j & \mathbf{XZ}_j \\ \mathbf{XY}_j & \mathbf{YY}_j & \mathbf{YZ}_j \\ \mathbf{XZ}_j & \mathbf{YZ}_j & \mathbf{ZZ}_j \end{bmatrix}; \quad (1.16)$$

- $\mathbf{S}_j$ est égal au vecteur $\mathbf{O}_j \mathbf{G}_j = [X_j \ Y_j \ Z_j]^T$;
- $\hat{\mathbf{S}}_j$ est la matrice antisymétrique du préproduit vectoriel, c'est-à-dire que quel que soit

$$\text{le vecteur } \mathbf{vect}, \text{ on a : } \mathbf{S}_j \times \mathbf{vect} = \hat{\mathbf{S}}_j \mathbf{vect}, \text{ et donc : } \hat{\mathbf{S}}_j = \begin{bmatrix} 0 & -Z_j & Y_j \\ Z_j & 0 & -X_j \\ -Y_j & X_j & 0 \end{bmatrix}.$$

On pose $\mathbf{MS}_j$ le premier moment d'inertie du corps C_j autour de l'origine du repère R_j , égal à $M_j \mathbf{S}_j$ et tel que : $\mathbf{MS}_j = [MX_j \ MY_j \ MZ_j]^T$.

On arrive alors à l'expression de l'énergie cinétique suivante :

$$E_j = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_j^T \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j + M_j \mathbf{V}_j^T \mathbf{V}_j + 2 \mathbf{MS}_j^T (\mathbf{V}_j \times \boldsymbol{\omega}_j) \right) \quad (1.17)$$

Cette dernière expression est linéaire par rapport aux paramètres $\mathbf{J}_j$, M_j et $\mathbf{MS}_j$.

On peut finalement exprimer les variables eulériennes $\boldsymbol{\omega}_j$ et $\mathbf{V}_j$ en fonction des variables articulaires $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$ (voir l'Annexe 1, équation (A1.4)). Ainsi, E peut s'écrire en fonction des variables articulaires et on en déduit la matrices $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{C}$.

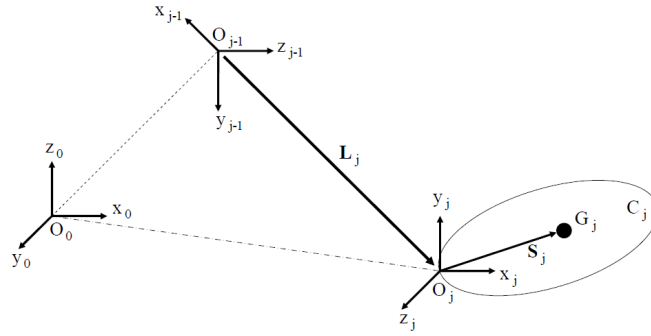


Figure 1-4 : Représentation d'un corps j et composition des vitesses

1.3.2.5. Calcul de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n -M_j \mathbf{g}^T (\mathbf{L}_{0j} + \mathbf{S}_j) \quad (1.18)$$

où :

- $\mathbf{g}$ est l'accélération de la pesanteur ;
- $\mathbf{L}_{0j}$ est le vecteur d'origine O_0 et d'extrémité O_j .

En projetant les vecteurs de cette relation dans le repère R_0 , on obtient :

$$U_j = -M_j {}^0\mathbf{g}^T ({}^0\mathbf{P}_j + {}^0\mathbf{A}_j \mathbf{S}_j) = -{}^0\mathbf{g}^T (M_j {}^0\mathbf{P}_j + {}^0\mathbf{A}_j \mathbf{M} \mathbf{S}_j) \quad (1.19)$$

avec :

- ${}^0\mathbf{P}_j$ le vecteur position de O_j dans le repère R_0 ;
- ${}^0\mathbf{A}_j$ la matrice de rotation du corps C_j exprimée dans le repère R_0 .

Cette relation est également linéaire par rapport aux paramètres M_j et $\mathbf{M} \mathbf{S}_j$.

Puisque ${}^0\mathbf{P}_j$ et ${}^0\mathbf{A}_j$ dépendent des positions articulaires $\mathbf{q}$ (modèle géométrique en 1.3.1), U s'écrit en fonction de $\mathbf{q}$ et on en déduit le vecteur $\mathbf{Q}$.

1.3.2.6. Paramètres inertiels standard d'un robot

Les énergies cinétiques et potentielles étant linéaires par rapport aux paramètres inertiels, le modèle dynamique l'est également. Ainsi les paramètres inertiels standard d'un robot sont :

- $XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j, ZZ_j$, les six composantes du tenseur d'inertie $\mathbf{J}_j$ du corps C_j par rapport au repère R_j ,
- M_j la masse du corps C_j ,
- MX_j, MY_j, MZ_j , les trois composantes du premier moment d'inertie $\mathbf{M} \mathbf{S}_j$ du corps C_j autour de l'origine du repère R_j .

Le vecteur des paramètres inertiels d'un corps C_j est le vecteur (10×1) suivant :

$$\chi_{lj} = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j & YY_j & YZ_j & ZZ_j & MX_j & MY_j & MZ_j & M_j \end{bmatrix}^T \quad (1.20)$$

1.3.2.7. Prise en compte des inerties des chaînes d'actionnement

On représente l'énergie cinétique totale côté articulaire du rotor de l'actionneur et de la chaîne de transmission mécanique j par $\frac{1}{2} I_{a_j} \dot{q}_j^2$, avec $I_{a_j} = J_{a_j} + J_{r_j}$, où :

- J_{a_j} correspond à l'énergie cinétique du rotor seul qui s'écrit :

$$\frac{1}{2} J_{a_j} \dot{q}_j^2 = \frac{1}{2} J_{m_j} \dot{q}_{mj}^2 \quad (1.21)$$

d'où :

$$J_{a_j} = N_j^2 J_{m_j} \quad (1.22)$$

avec :

- o J_{m_j} le moment d'inertie du rotor de l'actionneur j ,
- o N_j le rapport de réduction de l'axe j tel que $\dot{q}_{mj} = N_j \dot{q}_j$,
- o $\dot{q}_{mj}$ la vitesse du rotor de l'actionneur j .
- J_{r_j} est la somme des inerties du réducteur, tel que $\frac{1}{2} J_{r_j} \dot{q}_j^2$ soit égal à l'énergie cinétique totale des éléments de la chaîne de transmission.

On en déduit que l'élément A_{jj} de la matrice $\mathbf{A}$ doit être augmenté de I_{a_j} . Le paramètre I_{a_j} est également à ajouter aux paramètres d'inertie de l'axe j .

1.3.2.8. Calcul des efforts de frottement

De nombreux articles traitent de la modélisation des frottements (voir le paragraphe 2.1) et montrent principalement deux groupes de modèles : les modèles statiques qui ne dépendent que de la vitesse articulaire et les modèles dynamiques qui introduisent 1 ddl (degré de liberté) supplémentaire par liaison. Le modèle le plus souvent utilisé en robotique est celui décrit par l'équation (1.23). Pour chaque articulation j , il est constitué d'un effort de frottement sec constant F_{Cj} , correspondant au frottement de Coulomb, et d'un effort de frottement visqueux proportionnel à la vitesse, de coefficient F_{vj} [Khalil 2002], [Gautier 1995], [Gautier 1997].

$$\begin{cases} \tau_{frott} = \tau_{fs} + \tau_{fv} \\ \tau_{fs} = F_C \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + F_{Coff} \\ \tau_{fv} = F_v \dot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (1.23)$$

avec :

- $\boldsymbol{\tau}_{fs}$ le vecteur $(n \times 1)$ des efforts de frottement sec,
- $\boldsymbol{\tau}_{fv}$ le vecteur $(n \times 1)$ des efforts de frottement visqueux,
- $\mathbf{F}_C$ la matrice diagonale $(n \times n)$ des efforts de frottement sec F_{Cj} constants,
- $sign(\cdot)$ la fonction signe telle que : $sign(\dot{\mathbf{q}}) = [sign(\dot{q}_1) \cdots sign(\dot{q}_n)]^T$,
- $\mathbf{F}_{Coff} = [F_{Coff1} \cdots F_{Coffn}]^T$,
- $\mathbf{F}_V$ la matrice diagonale $(n \times n)$ des coefficients de frottement visqueux F_{Vj} .

Le paramètre F_{Coffj} exprime une dissymétrie de F_{Cj} par rapport au signe de la vitesse $\dot{q}_j$. (Remarque : le modèle est défini ici pour une vitesse non nulle.)

On définit de plus le vecteur des efforts de frottement sans offset (effort centré, symétrique par rapport à la vitesse) $\boldsymbol{\tau}_f$ par :

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mathbf{F}_C sign(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_V \dot{\mathbf{q}} \quad (1.24)$$

1.3.2.9. Calcul des efforts d'interaction entre l'organe terminal et l'environnement

Soit $\mathbb{f}_{en}$ le torseur d'interaction entre l'organe terminal et l'environnement défini dans le repère R_n :

$$\mathbb{f}_{en} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{en} \\ \mathbf{m}_{en} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z & m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^T \quad (1.25)$$

où $\mathbf{f}_{en}$ est la résultante des efforts et $\mathbf{m}_{en}$ le moment résultant.

D'après le principe des puissances virtuelles, le torseur $\mathbb{f}_{en}$ est équivalent au vecteur $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ des efforts extérieurs exprimés sur les axes z_j des repères R_j ($j \in [1:n]$), avec conservation de la puissance telle que [Khalil 2002] :

$$\boldsymbol{\tau}_{ext}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbb{f}_{en}^T \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

où $\mathbf{V}_n$ et $\boldsymbol{\omega}_n$ sont les vecteurs vitesses de translation et de rotation du repère R_n lié au corps n .

Soit la matrice jacobienne cinétique $\mathbf{J}_n$ définie par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_n \dot{\mathbf{q}} \quad (1.27)$$

on a donc :

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{J}_n^T \mathbb{f}_{en} \quad (1.28)$$

Remarque : on peut utiliser la matrice jacobienne ${}^n\mathbf{J}_n$ ou ${}^0\mathbf{J}_n$ selon que l'effort $\mathbf{f}_{en}$ est défini dans le repère R_n ou dans le repère R_0 .

1.3.2.10. Calcul des efforts moteurs

Pour connaître les couples moteurs, l'usage de couple-mètres ou de capteurs d'efforts est peu répandu, en tout cas en milieu industriel. Souvent, seules les consignes de courant des boucles de courant des amplificateurs de puissance qui alimentent les moteurs sont connues. Compte tenu de la bande passante élevée de la boucle de courant supérieure à 1 kHz, la fonction de transfert de cette boucle est approchée par son gain statique, pour les fréquences inférieures à 100 Hz, qui contiennent la dynamique rigide du robot, inférieure à 10 Hz [Restrepo 1995], [Restrepo 1996]. On obtient l'expression de l'effort articulaire $\boldsymbol{\tau}_{in}$:

$$\boldsymbol{\tau}_{in} = \mathbf{G}_\tau (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}_{\tau_0}) \quad (1.29)$$

où :

- $\mathbf{v}_\tau$ est le vecteur $(n \times 1)$ des consignes de courant des amplificateurs de courant qui alimentent les moteurs et est calculé par le contrôleur numérique du robot,
- $\mathbf{v}_{\tau_0}$ est le vecteur $(n \times 1)$ des offsets des amplificateurs,
- $\mathbf{G}_\tau$ est la matrice $(n \times n)$ des gains d'actionnement telle que :

$$\mathbf{G}_\tau = \mathbf{N}\mathbf{G}_i\mathbf{K}_t \quad (1.30)$$

avec :

- $\mathbf{N}$ la matrice $(n \times n)$ des rapports de transmission des chaînes articulaires ($\dot{\mathbf{q}}_m = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}$ avec $\dot{\mathbf{q}}_m$ le vecteur $(n \times 1)$ des vitesses des rotors moteurs exprimés côté moteur),
- $\mathbf{G}_i$ la matrice diagonale $(n \times n)$ des gains statiques des amplificateurs de courant,
- $\mathbf{K}_t$ la matrice diagonale $(n \times n)$ des constantes de couple électromagnétique des moteurs.

Puisqu'on ne connaît pas le terme $\mathbf{v}_{\tau_0}$ des offsets des amplificateurs, on ne peut connaître les efforts moteurs $\boldsymbol{\tau}_{in}$. On définit alors le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ des efforts d'entrée sans compensation d'offset par :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{in} + \mathbf{G}_\tau \mathbf{v}_{\tau_0} = \boldsymbol{\tau}_{in} + \boldsymbol{\tau}_{in_0} = \mathbf{G}_\tau \mathbf{v}_\tau \quad (1.31)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{in_0}$ est le vecteur des offsets des efforts d'entrée.

1.3.2.11. Définition de l'effort de charge

Bien que l'effort de frottement sec soit considéré comme constant et indépendant de la charge dans le modèle dynamique classique, on introduit ici l'effort de charge dont on aura besoin par la suite.

On définit tout d'abord le vecteur des efforts de charge τ_{load} dans les chaînes de transmissions articulaires de robots :

$$\tau_{load} = \tau - \tau_{frott} - \tau_{in_0} = \tau_{dyn} + \tau_{ext} \quad (1.32)$$

On définit de plus la puissance de charge P_{loadj} de l'articulation j par :

$$P_{loadj} = \tau_{loadj} \dot{q}_j \quad (1.33)$$

Les domaines de fonctionnement de l'effort τ_{loadj} et de la vitesse de charge $\dot{q}_j$ définissent 4 quadrants dans le plan $(\dot{q}_j, \tau_{loadj})$ décrit Figure 1-5.a, en adoptant la convention de signe moteur pour $(\dot{q}_j, \tau_{loadj})$ telle que τ_{loadj} est dans le sens de $\dot{q}_j$ positif (Figure 1-5.b).

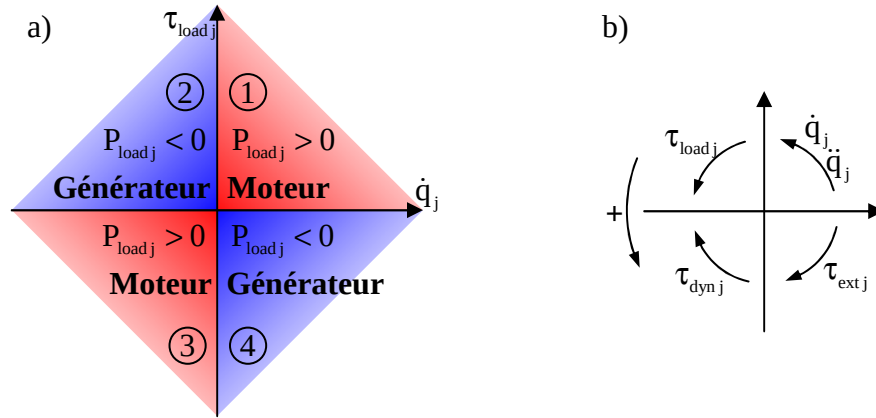


Figure 1-5 : a) Définition des 4 quadrants de fonctionnement dans le plan $(\dot{q}_j, \tau_{loadj})$
b) Convention de signes pour une articulation j

Dans les quadrants 1 et 3, la puissance de charge positive correspond à un fonctionnement moteur de τ_{loadj} . Dans les quadrants 2 et 4, la puissance de charge négative correspond à un fonctionnement générateur de τ_{loadj} .

1.3.2.12. Conclusion

Finalement, le modèle dynamique inverse complet est l'expression de τ en fonction de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$ et τ_{ext} , et s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{dyn} + \tau_{fs} + \tau_{fv} + \tau_{in_0} + \tau_{ext} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_C \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_V \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{Coff} + \tau_{in_0} + \tau_{ext} \end{aligned} \quad (1.34)$$

On regroupe les termes d'offsets (offsets dus à l'électronique de commande et de puissance des moteurs τ_{in_0} et offsets dus à la dissymétrie du frottement sec $\mathbf{F}_{Coff}$) en seul vecteur τ_{off} défini par :

$$\tau_{\text{off}} = \mathbf{F}_{\text{Coff}} + \tau_{\text{in}_0} \quad (1.35)$$

On réécrit alors le modèle dynamique inverse qui sera utilisé pour l'identification :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{\text{load}} + \tau_f + \tau_{\text{off}} = \tau_{\text{dyn}} + \tau_f + \tau_{\text{off}} + \tau_{\text{ext}} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_c \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \tau_{\text{off}} + \tau_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (1.36)$$

De plus, le couple de charge τ_{load} peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tau_{\text{load}} = \tau - \tau_f - \tau_{\text{off}} \quad (1.37)$$

On complète la convention de signe utilisée pour le modèle dynamique dans la Figure 1-6.

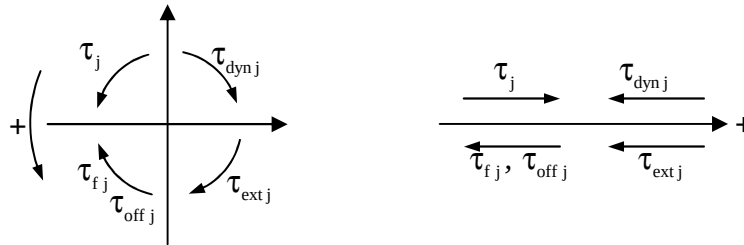


Figure 1-6 : Convention de signe pour le modèle dynamique

1.3.3. Méthode d'identification

1.3.3.1. Introduction

Que ce soit pour la commande dynamique qui utilise le modèle dynamique inverse ou pour la simulation des équations dynamiques qui utilise le modèle dynamique direct, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des valeurs numériques des paramètres dynamiques du robot. On montre dans ce chapitre comment exploiter la linéarité du modèle dynamique par rapport à ces paramètres afin de les identifier. Le principe revient alors à chercher la solution d'un système linéaire surdéterminé au sens des moindres carrés.

On suppose que les paramètres géométriques sont connus. Les paramètres dynamiques standard du corps j correspondent aux paramètres inertiels associés au corps et à l'actionneur j ainsi qu'aux paramètres de frottement. On les met sous la forme d'un vecteur χ_{St_j} :

$$\chi_{\text{St}_j} = [\text{XX}_j \quad \text{XY}_j \quad \text{XZ}_j \quad \text{YY}_j \quad \text{YZ}_j \quad \text{ZZ}_j \quad \text{MX}_j \quad \text{MY}_j \quad \text{MZ}_j \quad \text{M}_j \quad \text{Ia}_j \quad \text{F}_{\text{Cj}} \quad \text{F}_{\text{Vj}} \quad \tau_{\text{offj}}]^T \quad (1.38)$$

Les paramètres dynamiques standard du robot sont représentés par le vecteur χ_{St} tel que :

$$\chi_{\text{St}} = [\chi_{\text{St}_1}^T \quad \chi_{\text{St}_2}^T \quad \dots \quad \chi_{\text{St}_n}^T]^T \quad (1.39)$$

n étant le nombre de corps mobiles du robot.

Comme le modèle dynamique inverse est linéaire par rapport aux paramètres, la démarche généralement adoptée en robotique consiste à utiliser ce modèle inverse associé aux moindres carrés linéaires. Cette démarche a été utilisée pour identifier de nombreux robots industriels et prototypes [Gautier 1997], [Gautier 2002a] et [Khalil 2007]. Une bibliographie plus complète est donnée dans [Hollerbach 2008].

1.3.3.2. Modèle dynamique inverse d'identification

Le modèle dynamique étant linéaire par rapport aux paramètres dynamiques, le modèle d'identification est donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_{St}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\chi}_{St} \quad (1.40)$$

$\mathbf{D}_{St}$ étant une matrice de dimension $(n \times N_p)$, N_p étant le nombre total de paramètres dynamiques standard.

Pour le calcul de la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{D}_{St}$, notée $\mathbf{D}_{Sti}$, on montre que :

$$\mathbf{D}_{Sti} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \text{ avec } \chi_{Sti} = 1 \text{ et } \chi_{Stj} = 0 \text{ pour } j \neq i) \quad (1.41)$$

Cette relation indique que la colonne $\mathbf{D}_{Sti}$ peut être calculée avec le modèle dynamique inverse de Newton-Euler (voir en Annexe 1) en utilisant comme paramètres dynamiques les valeurs $\chi_i = 1$, $\chi_j = 0$ pour $j \neq i$.

1.3.3.3. Procédure d'identification

Le modèle (1.40) est échantillonné à la fréquence f_e (période $T_e = 1/f_e$) pendant que le robot exécute un mouvement de durée T_{obs} et de consigne $(\mathbf{q}_c, \dot{\mathbf{q}}_c, \ddot{\mathbf{q}}_c)$. On enregistre à chaque instant t_k les valeurs des consignes de courant calculées par le contrôleur numérique du robot (ce qui permet de calculer $\boldsymbol{\tau}(t_k)$ grâce à l'équation (1.31)) et des positions $\mathbf{q}(t_k)$.

Les vitesses et accélérations sont estimées à partir des positions filtrées. On obtient alors pour chaque échantillon k les positions, vitesses et accélérations estimées : $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}})_{(k)} = \hat{\mathbf{q}}(t_k), \hat{\dot{\mathbf{q}}}(t_k), \hat{\ddot{\mathbf{q}}}(t_k)$, avec $k = 1, \dots, N_e$, et où N_e est le nombre d'échantillons.

On construit un système linéaire surdéterminé de r équations à N_p inconnues :

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{W}_{St}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\dot{\mathbf{q}}}, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}) \boldsymbol{\chi}_{St} + \boldsymbol{\rho} \quad (1.42)$$

où $\mathbf{Y}$ est le vecteur des mesures, $\mathbf{W}_{St}$ est la matrice d'observation de dimension $(r \times N_p)$ et $\boldsymbol{\rho}$ est le vecteur des résidus ou vecteur des erreurs :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}(N_e) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{W}_{St} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{St}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{St}(N_e) \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

et tel que :

- $r = n \times N_e \gg N_p$
- $\mathbf{D}_{st}(k) = \mathbf{D}_{st}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}_{(k)})$

La solution des moindres carrés du système (1.42) n'est pas unique car la matrice d'observation $\mathbf{W}_{st}$ n'est jamais de rang plein (certaines colonnes de $\mathbf{W}_{st}$ sont, en effet, des combinaisons linéaires d'autres colonnes et ce, quelles que soient les données $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ et $\hat{\mathbf{q}}$). On doit donc déterminer un jeu de paramètres identifiables encore appelés *paramètres de base* ou *paramètres minimaux* [Gautier 1991].

Les paramètres dynamiques de base se déduisent des paramètres standard en éliminant ceux qui n'interviennent pas dans le calcul de $\boldsymbol{\tau}$ et en regroupant linéairement d'autres paramètres. Ils représentent l'ensemble minimal des paramètres nécessaires pour calculer le modèle dynamique inverse (1.40). Il existe deux manières de calculer les paramètres de base : une méthode littérale basée sur le calcul de l'énergie et une méthode numérique basée sur la factorisation QR de $\mathbf{W}_{st}$. Ces méthodes sont rappelées en Annexe 2.

Le vecteur des paramètres de base, de dimension N_b , est noté $\boldsymbol{\chi}$. Les colonnes des matrices $\mathbf{D}_{st}$ et $\mathbf{W}_{st}$ correspondant aux paramètres éliminés et regroupés sont supprimées pour obtenir les matrices $\mathbf{D}$ de dimension minimale $(n \times N_b)$ et $\mathbf{W}$ de dimension $(r \times N_b)$, dont les colonnes correspondent aux paramètres de base $\boldsymbol{\chi}$. On obtient ainsi un système linéaire à résoudre :

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{W}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\rho} \quad (1.44)$$

où $\mathbf{W}$ est la nouvelle matrice d'observation de rang plein.

Un filtrage parallèle est ensuite appliqué sur $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{W}$ (voir paragraphe 1.3.3.6 et Figure 1-7).

Afin de faciliter la résolution du système (1.44) avec les moindres carrés linéaires pondérés (voir paragraphe 1.3.3.8), on ordonne le système en regroupant les équations de chaque articulation. Le vecteur $\mathbf{Y}$ et la matrice $\mathbf{W}$ s'écrivent alors :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^n \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}^n \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

où $\mathbf{Y}^j$ et $\mathbf{W}^j$ représentent les équations de l'articulation j , pour tous les échantillons, de telle sorte que :

$$\mathbf{Y}^j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_j(e) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{W}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(j,:)(1) \\ \vdots \\ \mathbf{D}(j,:)(e) \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

où $\mathbf{D}(j,:)(k)$ désigne la ligne correspondant à l'articulation j dans le modèle d'identification pour l'échantillon numéro k .

1.3.3.4. Choix des trajectoires

Pour que $\mathbf{W}$ soit de rang maximum, il faut que les échantillons utilisés soient obtenus sur des trajectoires qui excitent les paramètres de base [Gautier 1992]. Une trajectoire excitante se traduit par un bon conditionnement de $\mathbf{W}$. Ainsi, le calcul de trajectoires excitantes peut s'effectuer à l'aide d'une méthode d'optimisation non linéaire dont le critère à minimiser est $cond(\mathbf{W})$ ou une fonction de $cond(\mathbf{W})$ avec :

$$cond(\mathbf{W}) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (1.47)$$

où σ_{max} et σ_{min} sont respectivement les valeurs singulières maximale et minimale de la matrice $\mathbf{W}$ [Pressé 1993].

Il est également possible de construire des trajectoires pour exciter spécifiquement certains paramètres. Par exemple, pour exciter les paramètres de frottement, on peut utiliser des paliers de vitesse, pour identifier les termes de gravité, on peut utiliser des allers-retours à faible vitesse, et pour les inerties on peut choisir des trajectoires à forte accélération. L'utilisation de trajectoires spécifiques permet de simplifier la recherche des trajectoires excitantes ainsi que l'interprétation des résultats.

1.3.3.5. Estimation des variables articulaires

Le filtrage des données est important pour le succès de l'identification des paramètres dynamiques. La matrice d'observation $\mathbf{W}$ dépend des positions, vitesses et accélérations de chaque articulation. En général, les robots industriels sont équipés de capteurs de position dont les données sont précises. En revanche, les mesures de $\dot{\mathbf{q}}$ et de $\ddot{\mathbf{q}}$ posent des problèmes. Il en est de même pour la détermination de ces variables à partir des informations de position. En effet, la mesure de position par des codeurs introduit un bruit de quantification. La vitesse estimée par dérivation numérique de $\mathbf{q}$ est bruitée. De même, la double dérivation pour calculer $\ddot{\mathbf{q}}$ aboutit à des données inexploitable car la différentiation amplifie les bruits hautes fréquences.

Les échantillons aberrants de la position sont tout d'abord éliminés avec un filtre médian glissant sur 3 échantillons (fonction *medfilt1* de Matlab). La position est ensuite filtrée à l'aide d'un filtre passe-bas de Butterworth aller-retour sans distorsion d'amplitude dans la bande passante et sans distorsion de phase sur toutes les fréquences [Gautier 1997]. On utilise pour cela les fonctions *butter* et *filtfilt* de Matlab. Le choix de la fréquence de coupure f_c dépend de la dynamique du système que l'on désire identifier. Les calculs de la vitesse et de l'accélération se font à l'aide d'une différence centrée sans distorsion de phase. La différence centrée est donnée par l'équation suivante, T_e étant la période d'échantillonnage :

$$\dot{q}_k = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{2T_e} \quad (1.48)$$

1.3.3.6. Filtrage parallèle de $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{W}$

Un filtrage passe bas du vecteur $\mathbf{Y}$ et des colonnes de la matrice $\mathbf{W}$ est effectué avec la fonction *decimate* de Matlab. Cette opération est appelée filtrage parallèle de $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{W}$ [Gautier 1997], [Gautier 2002b]. Ce filtrage permet d'éliminer les perturbations hautes fréquences sur l'effort τ présent dans $\mathbf{Y}$ provenant de toutes les perturbations non modélisées et rejetées par la boucle fermée de position et vitesse. Le choix de la fréquence de coupure f_c dépend de la dynamique du système à identifier. Généralement, on prend $f_c \geq 10f_{\text{dyn}}$, où f_{dyn} est la bande passante de la boucle fermée de position articulaire. Ce filtrage élimine l'information contenue dans $[f_c : f_e/2]$ qui perturbe $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{W}$ et qui est inutile pour identifier la dynamique du robot. Il s'accompagne d'une décimation temporelle (sous échantillonnage) qui élimine un échantillon sur n_d , ce qui contribue à diminuer la taille du système surdéterminé (1.44) sans diminuer l'information qu'il contient. On prend :

$$n_d = 0,8 \frac{f_e/2}{f_c} \quad (1.49)$$

Par exemple, si on a $f_e = 250f_{\text{dyn}}$ et que l'on prend $f_c = 10f_{\text{dyn}}$, on obtient $n_d = 10$.

La méthode de filtrage est illustrée Figure 1-7.

1.3.3.7. Moindres carrés linéaires

Le système à résoudre est donné par la relation générale suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\rho} \quad (1.50)$$

où $\mathbf{Y}$ est le vecteur des mesures, $\mathbf{W}$ la matrice d'observation et $\boldsymbol{\rho}$ le vecteur des résidus.

La solution des moindres carrés $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ du système (1.50) minimise la norme 2 du vecteur des erreurs $\boldsymbol{\rho}$:

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} = \underset{\boldsymbol{\chi}}{\text{Argmin}} \|\boldsymbol{\rho}\|_2 \quad (1.51)$$

Si $\mathbf{W}$ est une matrice $(r \times N_b)$ de rang maximum, avec $r = n \times N_e$ et N_e le nombre d'échantillons, la solution des moindres carrés $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ est unique et est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{Y} = \mathbf{W}^+ \mathbf{Y} \quad (1.52)$$

où $\mathbf{W}^+$ désigne la matrice pseudo-inverse de $\mathbf{W}$. La solution est calculée en utilisant la factorisation QR de $\mathbf{W}$.

On calcule une estimation de l'écart-type sur les valeurs identifiées en considérant que $\mathbf{W}$ est déterministe et que $\boldsymbol{\rho}$ est un vecteur aléatoire centré, de composantes indépendantes, d'écart-type σ_ρ et de matrice de variance-covariance $\mathbf{C}_\rho$ telle que :

$$\mathbf{C}_\rho = E(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T) = \sigma_\rho^2 \mathbf{I}_r \quad (1.53)$$

où E désigne l'espérance mathématique et $\mathbf{I}_r$ la matrice unité d'ordre r .

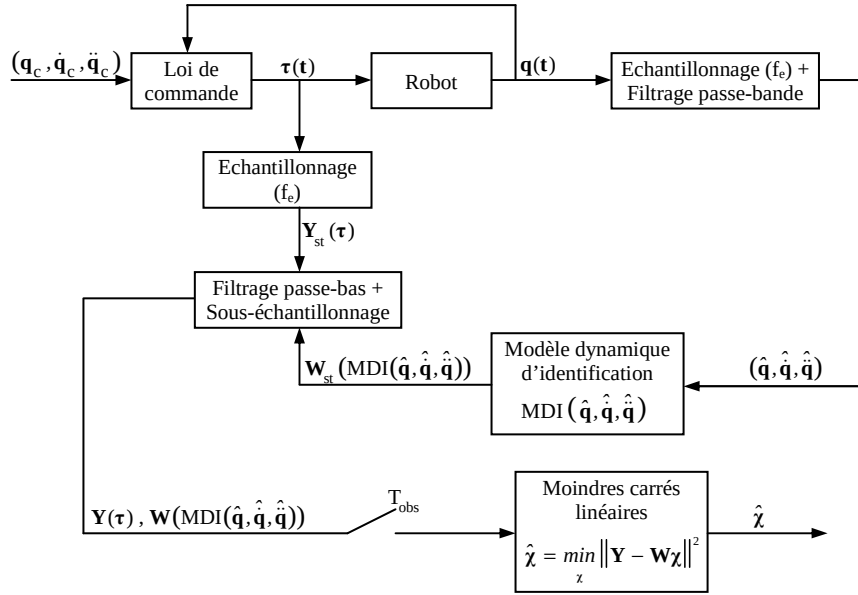


Figure 1-7 : Méthode d'identification par moindres carrés linéaires

En supposant que le vecteur des erreurs est centré, de composantes indépendantes et d'égales dispersions, l'écart-type σ_p peut être calculé par l'estimateur non biaisé suivant :

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{\|Y - W\hat{\chi}\|^2}{r - N_b} \quad (1.54)$$

La matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation a alors pour expression :

$$C_{\hat{\chi}} = E[(\chi - \hat{\chi})(\chi - \hat{\chi})^T] = W^+ C_p (W^+)^T = \sigma_p^2 (W^T W)^{-1} \approx \hat{\sigma}_p^2 (W^T W)^{-1} \quad (1.55)$$

On en déduit l'écart-type sur le $j^{\text{ème}}$ paramètre :

$$\sigma_{\hat{\chi}_j} = \sqrt{C_{\hat{\chi}}(j, j)} \quad (1.56)$$

L'écart-type relatif est estimé par :

$$\% \sigma_{\hat{\chi}_{jr}} = 100 \frac{\sigma_{\hat{\chi}_j}}{|\hat{\chi}_j|} \quad (1.57)$$

La norme relative du résidu total est calculée par :

$$N_{\text{rel}} = \frac{\|p\|_2}{\|Y\|_2} \quad (1.58)$$

L'écart-type relatif peut être utilisé comme critère pour déterminer la qualité de l'estimation de la valeur obtenue pour chaque paramètre identifié. Cependant, cet indicateur de l'incertitude de l'estimation est à utiliser avec prudence car, dans notre cas, les hypothèses statistiques ne sont pas garanties, W n'étant pas déterministe. En effet, les coefficients de W sont perturbés par des mesures et des erreurs de modèle. Ce problème peut être atténué en

filtrant en parallèle le vecteur des mesures $\mathbf{Y}$ et chaque colonne de la matrice d'observation $\mathbf{W}$.

La norme relative des erreurs peut être utilisée comme critère pour déterminer la précision du modèle global.

La méthode d'identification est illustrée par la Figure 1-7, [Gautier 2011].

1.3.3.8. Moindres carrés linéaires pondérés

L'hypothèse que $\mathbf{p}$ est un bruit additif indépendant à moyenne nulle de matrice de covariance donnée par (1.53) suppose que l'on accorde la même confiance à chaque ligne de la matrice d'observation $\mathbf{W}$. Pour les robots, cette hypothèse n'est pas judicieuse car les équations correspondant à chaque articulation n'ont pas la même précision. La résolution par moindres carrés pondérés consiste à calculer un nouveau système global en multipliant chaque équation de (1.50) par un facteur de confiance qui est l'inverse de l'écart-type $\hat{\sigma}_{pj}$ estimé pour l'articulation j ([Gautier 1997]). Chaque sous système articulaire est défini par :

$$\mathbf{Y}^j = \mathbf{D}^j \boldsymbol{\chi} + \mathbf{p}^j \quad (1.59)$$

On définit la transformation linéaire :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{S}^n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{S}^j = \frac{1}{\hat{\sigma}_{pj}} \mathbf{I}_r \\ \hat{\sigma}_{pj} = \frac{\|\mathbf{Y}^j - \mathbf{D}^j \hat{\boldsymbol{\chi}}\|}{\sqrt{r_j - N_b}} \end{cases} \quad (1.60)$$

La nouvelle formulation débouche sur l'écriture du modèle équivalent :

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{W}_p \boldsymbol{\chi} + \mathbf{p}_p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{Y}_p = \mathbf{S} \mathbf{Y} \\ \mathbf{W}_p = \mathbf{S} \mathbf{W} \\ \mathbf{p}_p = \mathbf{S} \mathbf{p} \end{cases} \quad (1.61)$$

La solution au sens des moindres carrés pondérés $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ minimise la norme 2 du vecteur des erreurs $\mathbf{p}_p$ pondérées :

$$\hat{\boldsymbol{\chi}} = \underset{\boldsymbol{\chi}}{\text{Argmin}} (\mathbf{p}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{p}) \quad (1.62)$$

1.4. Conclusion

La modélisation classique et la méthode d'identification des robots ont été présentées. Ces deux points seront indispensables par la suite : bien que le modèle de frottement soit modifié pour les nouvelles applications robotiques, la partie inertielle du modèle dynamique sera conservée. De plus, l'efficacité de la méthode d'identification par les moindres carrés linéaires ayant été maintes fois prouvée dans la bibliographie, on cherchera à proposer un nouveau modèle dynamique linéaire par rapport aux paramètres afin de conserver cette méthode d'identification.

Chapitre 2

2. Etat de l'art sur les modèles de frottement

Résumé : Ce chapitre propose tout d'abord une étude bibliographique sur le phénomène de frottement et sur les modèles de frottement utilisés en robotique. Il introduit ensuite une étude théorique des frottements, avec une approche utilisée en mécanique, réalisée depuis plusieurs années au Laboratoire de Robotique Interactive du CEA de Fontenay-aux-Roses.

2.1. Bibliographie

2.1.1. Introduction

Le frottement est une force tangentielle d'interaction entre deux surfaces en contact. Physiquement, ces forces d'interaction sont le résultat de différents mécanismes dépendant de la géométrie de contact, de la topologie, des propriétés surfaciques des matériaux constituant les corps, des déplacements, des vitesses relatives, de la charge et enfin de la lubrification. Ces forces s'opposant au mouvement, posent un problème du point de vue de la commande et du calcul des efforts d'interaction entre le robot et l'environnement. Il est donc indispensable de bien comprendre et de modéliser l'effet des frottements sur le comportement des systèmes.

Les causes du frottement sont multiples et interdépendantes et ont conduit à de nombreux modèles, théorique ou empiriques. On peut classer ces modèles en 2 catégories : modèles "statiques" et modèles "dynamiques" [Olsson 1998]. Les premiers regroupent les modèles simples et classiques, fonction de la vitesse. Les seconds sont plus complexes, provenant de la tribologie, fonction de la vitesse, de la position et/ou du temps. Enfin, certaines approches en robotique se distinguent des autres en ajoutant des termes fonction de la charge.

2.1.2. Historique et définitions

Les premières théories sur le frottement ont été proposées par Léonard de Vinci (Figure 2-1.a – [Wills 1980]) et ses contemporains (vers 1500) [Palaci 2007]. D'après ces études, l'imbrication des aspérités des deux corps en contact était la cause du frottement. Les lois fondamentales de Léonard de Vinci, qui furent redécouvertes deux siècles plus tard par Guillaume Amontons [Amontons 1699], s'énoncent ainsi :

- les forces de frottement entre deux surfaces en mouvement relatif varient en proportion des forces normales aux surfaces en contact,
- elles sont indépendantes de l'aire apparente de contact des surfaces en présence,
- elles dépendent des matériaux et de l'état de leurs surfaces.

Bernard Forest de Bélidor étudia également les frottements (Figure 2-1.b) en imaginant les surfaces comme formées d'aspérités hémisphériques régulières [Bélidor 1737]. (Si l'on dispose trois sphères selon un arrangement triangulaire, une quatrième sphère venant

se loger dans la "niche" formée par les trois premières doit franchir un obstacle avant qu’on puisse la faire glisser. Une fois qu’elle est "montée" au-dessus des autres, le déplacement doit être plus facile.). Amontons (1699) et Bélidor (1737) ont tous deux conclu que la force de frottement était proportionnelle à l’effort normal, avec un coefficient égal à $1/3$ pour le premier et à $1/\sqrt{8}$ pour le second. Le mathématicien et physicien Leonhard Euler étudia également les frottements vers 1748.

En 1785, Charles-Augustin de Coulomb a complété la loi d’Amontons (qui porte désormais son nom), ajoutant que les forces de frottement sec sont pratiquement indépendantes de la vitesse de glissement des surfaces, qu’elles varient selon la nature des matériaux en contact et qu’il y a une différence entre frottement statique (ou frottement d’adhérence) et dynamique (ou frottement de glissement), Figure 2-2 [Coulomb 1821]. Coulomb sert désormais de base aux modèles de frottement sec.

Aux frottements secs de Coulomb, on a par la suite ajouté les frottements dus à la viscosité du lubrifiant, de l’air, etc... Bien que ces effets soient représentés par différentes lois physiques, on admet pour le frottement visqueux un modèle proportionnel à la vitesse relative entre les surfaces en contact. La transition adhérence-glissement a également été étudiée, et enfin des modèles plus complexes issus de la tribologie (science qui étudie le frottement, l’usure et la lubrification) ont été élaborés, prenant en compte des aspects macroscopiques.

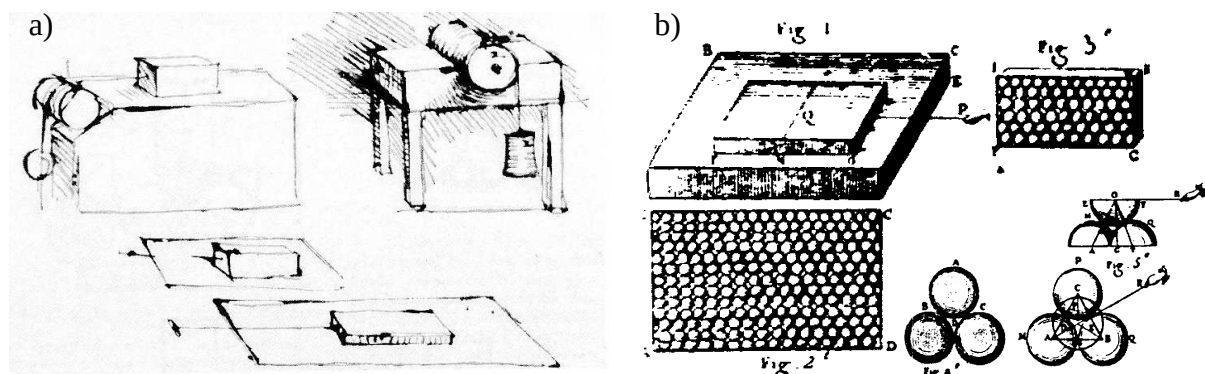


Figure 2-1 : a) Esquisses de machines de De Vinci – b) Frottement selon Bélidor

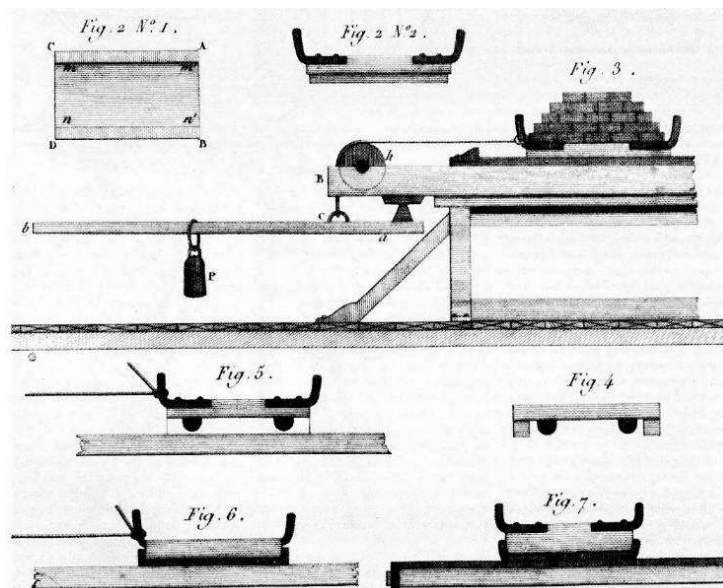


Figure 2-2 : Appareil de Coulomb

2.1.2.1. La tribologie

Vers la fin des années soixante, suite à la prise de conscience de l’épuisement à plus ou moins long terme des sources d’énergie, on a vu se développer des études prenant en compte les aspects économie d’énergie et de matière. La tribologie est née dans ce courant, elle s’intéresse aux pertes par frottement et par usure conjointement avec la corrosion. Ce sont évidemment les principales causes de pertes énergétiques. De nos jours, les problèmes liés à l’environnement et à la pollution poussent de nouveau à développer et utiliser ces études [Wikibooks].

La tribologie (qui signifie en grec "science du frottement") prend en compte beaucoup de paramètres tels que :

- le mouvement des pièces (roulement, glissement),
- la forme des pièces, géométrie de contact,
- les matériaux : caractéristiques mécaniques (limite élastique, résistance à la rupture, limite d’endurance, Module de Young, dureté, ténacité...), la structure (les grains, liaisons atomiques), les propriétés physiques (conductibilité thermique, coefficient de dilatation), la composition des couche superficielles (finition des surfaces, usinages),
- la topologie (rugosité...),
- les sollicitations (charges, pressions de contact, vitesse de glissement),
- l’ambiance (réactivité chimique, propriétés physiques, température, propreté),
- le lubrifiant...

2.1.2.2. Différentes caractéristiques du frottement

L’observation et l’étude des frottements a permis de découvrir différents phénomènes [Olsson 1998] et [Thiery 2005] :

- Le frottement dépend de nombreuses caractéristiques (géométrie, matériaux, déplacement et vitesse, lubrification, température, usure...)
- De nouveaux mécanismes physiques apparaissent quand il y a ajout d’un lubrifiant, ce qui modifie le frottement (type du lubrifiant, épaisseur du film... - Figure 2-3)

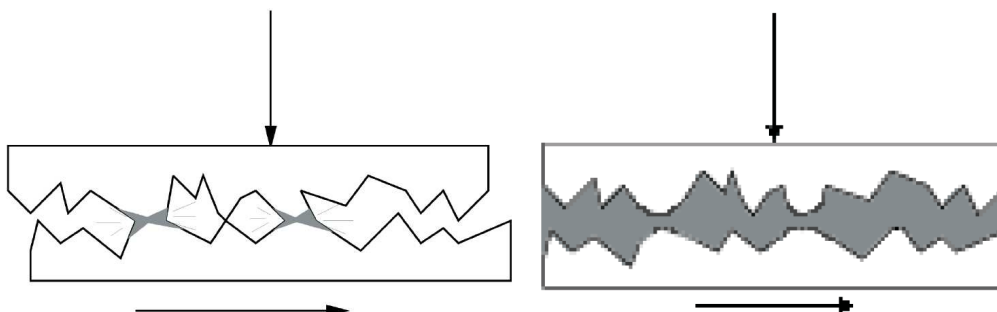


Figure 2-3 : Différence pour le contact de solides sans (gauche) ou avec (droite) lubrifiant

- Stribeck, par ses travaux vers 1902, a montré que le coefficient de frottement décroît dans un premier temps lorsque la vitesse de déplacement augmente jusqu’à atteindre un minimum pour ensuite croître en fonction de la vitesse. Cette force fonction de la vitesse de déplacement est caractérisée par la courbe de Stribeck (Figure 2-4). La

figure montre les différents types de frottements dominants en fonction de la vitesse de déplacement des solides.

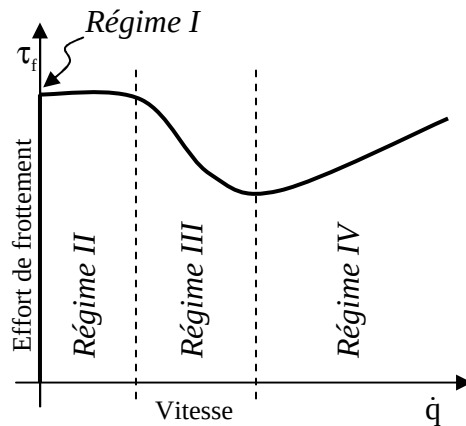


Figure 2-4 : Courbe généralisée de Stribeck

L’explication de ce phénomène est assez simple :

- o *Régime I* : La force n’est pas assez élevée pour produire un déplacement, la surface du film fluide et les aspérités se déforment.
 - o *Régime II* : La vitesse n’est pas assez élevée pour que la lubrification permette le soulèvement suffisant des surfaces en contact. Les frottements secs sont alors dominants et ainsi les micro-rugosités sont source de frottement.
 - o *Régime III* : A partir d’une certaine vitesse, les surfaces commencent à se soulever ce qui provoque la diminution de la force de frottement. Celle-ci arrive à un minimum avant de croître à nouveau. La vitesse augmentant, la lubrification joue le rôle d’un frein.
 - o *Régime IV* : Au delà du minimum, la force de frottement prédominante devient la force de viscosité proportionnelle à la vitesse de déplacement.
- La force de décollement (break-away force) est la force requise pour vaincre le frottement statique ou frottement d’adhérence et démarrer le mouvement. Cette force est supérieure au frottement sec à vitesse faible. Différentes études ont été menées sur la transition entre adhérence et glissement : il y a un mouvement microscopique de pré-glissement observé avant le décollement et l’effort maximal qui y correspond.

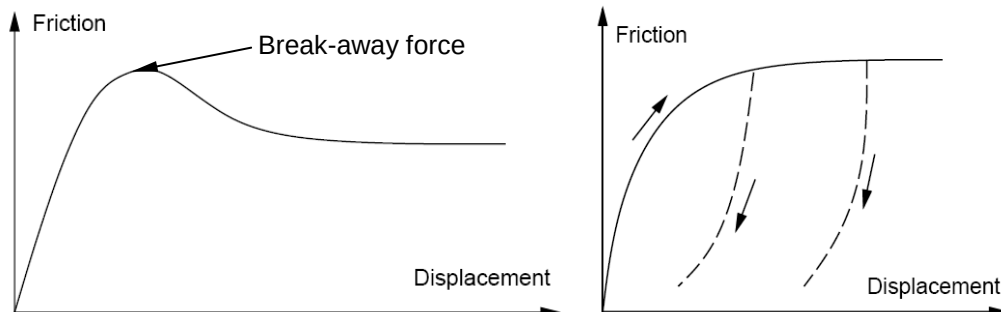


Figure 2-5 : Frottement et déplacement de pré-glissement selon Rabinowicz en 1951 (gauche) et Courtney-Pratt et Eisner en 1957 (droite)

- Hess et Soom en 1990 tracèrent des courbes du frottement en fonction de la vitesse. Une boucle d’hystérésis apparaît lorsque la vitesse varie (Figure 2-6). La taille de la

boucle augmente avec la charge normale, la viscosité et la fréquence de variation de la vitesse.

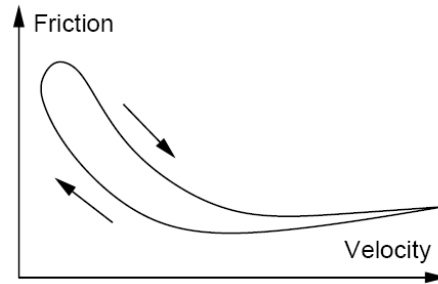


Figure 2-6 : Boucle d’hystérésis

2.1.3. Modèles classiques

Les modèles suivants, appelés modèles statiques, expriment le frottement au contact entre 2 corps. Ils sont couramment utilisés en robotique.

2.1.3.1. Frottement sec de glissement

D’après la loi de Coulomb, le frottement sec de glissement s’oppose au sens du mouvement et son amplitude est indépendante de la vitesse et de la surface de contact. Il est modélisé par :

$$\tau_f = F_C \cdot \text{sign}(\dot{q}) \quad (2.1)$$

où F_C est proportionnel à la charge normale F_N : $F_C = \mu \cdot F_N$ avec μ le coefficient de frottement cinétique.

Ce modèle est représenté par la Figure 2-7.a.

2.1.3.2. Frottement visqueux

Le frottement visqueux est classiquement représenté par une loi proportionnelle à la vitesse : $F_V \cdot \dot{q}$. En l’ajoutant au modèle précédent, on obtient :

$$\tau_f = F_C \cdot \text{sign}(\dot{q}) + F_V \cdot \dot{q} \quad (2.2)$$

Ce modèle est représenté par la Figure 2-7.b.

2.1.3.3. Frottement sec d’adhérence

Le frottement sec d’adhérence correspondant au frottement à vitesse nulle (non défini dans les modèles précédents) est différencié du frottement sec de glissement (vitesse non

nulle). Il est également défini par la loi de Coulomb appliquée à vitesse nulle. Soit F_e la composante tangentielle de l’effort entre les surfaces en contact, on complète le modèle précédent :

$$\tau_f = \begin{cases} F_e & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \cdot \text{sign}(F_e) & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \\ F_c \cdot \text{sign}(\dot{q}) + F_v \cdot \dot{q} & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où F_s est le frottement statique d’adhérence, proportionnel à la charge normale : $F_s = \mu_s \cdot F_N$ avec μ_s le coefficient de frottement statique tel que $\mu < \mu_s$.

Ce modèle est représenté par la Figure 2-7.c.

2.1.3.4. Frottement de Stribeck

Le frottement de Stribeck est un modèle semblable au précédent mais qui supprime la discontinuité de transition entre vitesse nulle et vitesse non nulle en adoptant une expression non linéaire par rapport à la vitesse :

$$\tau_f = \begin{cases} F_e & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \cdot \text{sign}(F_e) & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \\ F(\dot{q}) \text{sign}(\dot{q}) + F_v \dot{q} & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $F(\dot{q}) = F_c + (F_s - F_c) e^{-|\dot{q}/\dot{q}_s|^{\delta_s}}$, où $\dot{q}_s$ est la constante de vitesse de Stribeck et δ_s est un coefficient pris généralement entre 1 et 2.

Ce modèle est représenté par la Figure 2-7.d.

Le modèle de Stribeck a été étudié notamment dans [Armstrong-Hélouvry 1991] ou [Swevers 2000].

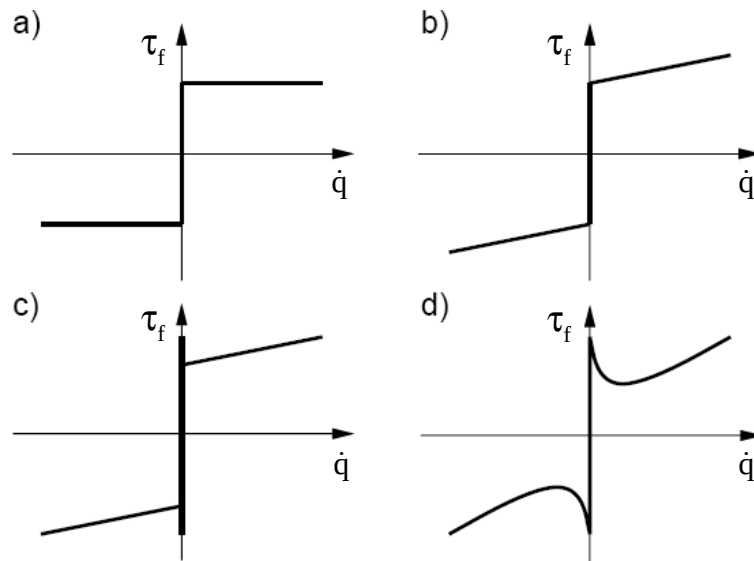


Figure 2-7 : Modèles classiques de frottements secs

2.1.3.5. Conclusion

Il existe de multiples variantes à partir de ces modèles classiques. De nombreux modèles dérivent de celui de Stribeck, en modifiant l’expression de $F(\dot{q})$ comme par exemple les modèles de Tustin, de Gauss, de Lorentz [Márton 2007], de Karnopp, d’Armstrong [Olsson 1998]...

2.1.4. Modèles tribologiques

Les modèles tribologiques, appelés encore modèles dynamiques, ont été conçus pour prendre en compte un maximum de phénomènes physiques (aspérités, lubrification, pré-glissement...). Bien entendu, un modèle très "complet" entraîne une complexité mathématique des équations et il faudra donc toujours garder en vue les objectifs et le contexte pour éviter un modèle trop complexe. Les modèles tribologiques sont nombreux dans la littérature et ils sont choisis en fonction des paramètres les plus significatifs à prendre en compte selon l’application. On ne présente ici que quelques modèles tribologiques fréquemment rencontrés.

2.1.4.1. Modèle de Dahl

Le modèle de Dahl a été développé à partir d’expériences sur des systèmes motorisés à roulements à billes [Dahl 1968]. Dans ces éléments de transmission, Dahl remarque que le frottement est similaire à celui de 2 solides en contact plan et observe le comportement du frottement en régime de pré-glissement. Il obtient une courbe contrainte-déformation (Figure 2-8) qui est modélisée par l’équation différentielle (2.5) exprimant l’effort de frottement τ_f , en fonction de x le déplacement entre les surfaces en contact et du signe de $v = \dot{x}$ la vitesse relative entre les surfaces [Olsson 1998] :

$$\frac{d\tau_f}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{\tau_f}{F_C} \text{sign}(v) \right)^\alpha \quad (2.5)$$

où F_C est le frottement de Coulomb, σ est le coefficient de raideur et α est un paramètre déterminant la forme de la courbe (la valeur $\alpha = 1$ est la plus courante).

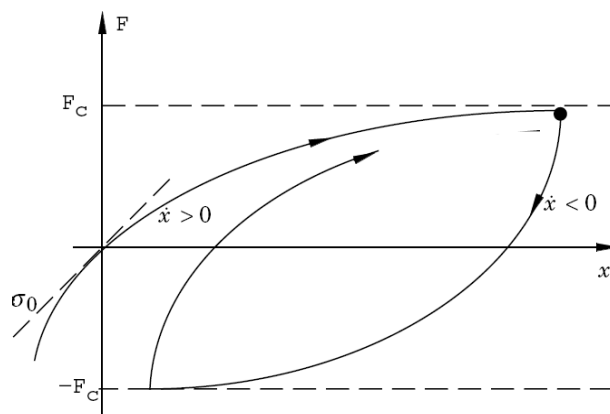


Figure 2-8 : Courbe de Dahl

Ce modèle de frottement ne dépend que de la position et du signe de la vitesse. Pour obtenir un modèle dans le domaine temporel, Dahl observe que :

$$\frac{d\tau_f}{dt} = \frac{d\tau_f}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\tau_f}{dx} v = \sigma \left(1 - \frac{\tau_f}{F_C} \text{sign}(v) \right)^\alpha v \quad (2.6)$$

Le modèle de Dahl est une généralisation du frottement de Coulomb, mais il ne tient pas compte de l’effet Stribeck ni de l’adhérence, d’où des extensions du modèle prenant en compte ces paramètres telle que celle de [Canudas 1995].

Pour le cas $\alpha = 1$, le modèle de Dahl devient : $\frac{d\tau_f}{dt} = \sigma v - \frac{\tau_f}{F_C} |v|$

2.1.4.2. Modèle "brosse"

En 1991, Haessig et Friedland ont introduit un modèle de frottement prenant en compte le comportement des points microscopiques en contact entre 2 surfaces : le nombre et la localisation des points de contacts sont aléatoires et sont modélisés par des liaisons de "poils" flexibles agissant comme des ressorts [Haessig 1991], [Olsson 1998]. Quand les surfaces en contact ont un mouvement relatif, la déformation des ressorts crée une force de frottement donnée par :

$$\tau_f = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (2.7)$$

où N est le nombre de poils, σ_0 est la raideur des ressorts, x_i les positions relatives des poils, b_i les lieux où les liaisons se sont formées. Quand $|x_i - b_i| = \delta_s$, il y a rupture de la liaison actuelle et une nouvelle liaison se forme de manière aléatoire.



Figure 2-9 : Modèle "brosse"

La complexité du modèle augmente avec N , et on peut obtenir de bons résultats en prenant $N \in [20 : 25]$. La raideur σ_0 peut être prise dépendante de la vitesse. L’intérêt de ce modèle est la nature aléatoire du frottement, mais il est très difficile à simuler. Le mouvement en adhérence est oscillatoire car il n’y a pas d’amortissement dans le modèle de liaison flexible par les poils.

2.1.4.3. Modèles de Bliman et Sorine

Bliman et Sorine ont proposé plusieurs modèles proches de celui de Dahl, soulignant l’indépendance par rapport à la vitesse [Bliman 1993]. L’amplitude du frottement dépend uniquement du signe de la vitesse notée v et d’une variable d’état s définie par :

$$s = \int_0^t |v(\theta)| d\theta \quad (2.8)$$

Le frottement dépend donc ici uniquement du chemin. Le modèle est exprimé comme système linéaire par rapport à la variable s :

$$\begin{cases} \frac{dx_s}{ds} = Ax_s + B \text{sign}(v) \\ \tau_f = Cx_s \end{cases} \quad (2.9)$$

où x_s est un vecteur d’état.

Le premier modèle est du premier ordre et est donné par : $A = -\frac{1}{\epsilon_f}$, $B = \frac{f_1}{\epsilon_f}$, $C = 1$,

d’où : $\frac{d\tau_f}{dt} = \frac{d\tau_f}{ds} \frac{ds}{dt} = |v| \frac{d\tau_f}{ds} = \frac{f_1}{\epsilon_f} \left(v - |v| \frac{\tau_f}{f_1} \right)$ est équivalent au modèle de Dahl, avec le

frottement de Coulomb $F_C = f_1$, la raideur $\sigma = \frac{f_1}{\epsilon_f}$ et $\alpha = 1$.

Ce modèle ne traite pas l’adhérence ni le pic de force au moment du décollement. C’est pourquoi Bliman et Sorine ont développé un modèle du second ordre :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta\epsilon_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon_f} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{\eta\epsilon_f} \\ -\frac{f_2}{\epsilon_f} \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1) \quad (2.10)$$

où $f_1 - f_2$ correspond au frottement dynamique atteint quand s tend vers l’infini.

Les 2 modèles sont dissipatifs et Bliman et Sorine ont montré que quand ϵ_f tend vers zéro, le modèle du premier ordre se comporte comme un modèle classique de frottement de Coulomb, et celui du deuxième ordre comme un modèle classique avec frottement de Coulomb et adhérence. Le second ordre modélise de plus un pic de frottement d’adhérence.

2.1.4.4. Modèle de Lund-Grenoble (LuGre)

Ce modèle a été développé conjointement par les universités de Lund (Suède) et de Grenoble (France) [Canudas 1995]. Le modèle de LuGre est semblable au modèle "brosse" : la surface de liaison entre deux solides est vue comme un contact entre des lames flexibles (pour simplifier, les lames inférieures sont considérées comme rigides et seules les lames supérieures sont flexibles : Figure 2-10), représentant deux aspérités en contact. La déviation des lames notée z est modélisée par :

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.11)$$

avec l’effet Stribeck :

$$\sigma_0 g(v) = F_C + (F_s - F_C) e^{-(v/v_s)^2} \quad (2.12)$$

où v est la vitesse, σ_0 la raideur des lames, F_C le frottement de Coulomb, F_s la force d’adhérence, et v_s la vitesse de Stribeck.

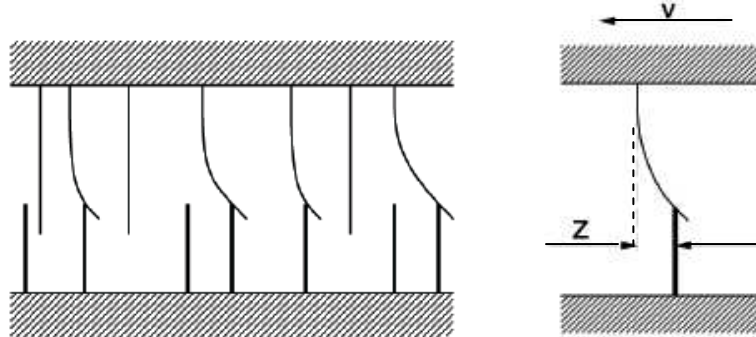


Figure 2-10 : Modèle de LuGre

La force de frottement générée par les lames s’écrit :

$$\tau_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (2.13)$$

où σ_0 est la raideur, σ_1 l’amortissement et σ_2 le coefficient de frottement visqueux.

Pour un mouvement à vitesse constante, on aura : $z_{vc} = \frac{v}{|v|} g(v) = g(v) \text{sign}(v)$ et :

$$\begin{aligned} \tau_{fvc} &= \sigma_0 g(v) \text{sign}(v) + \sigma_2 v \\ &= F_C \text{sign}(v) + (F_s - F_C) e^{-(v/v_s)^2} \text{sign}(v) + \sigma_2 v \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ce modèle est donc caractérisé par six paramètres (F_C , F_s , v_s , σ_0 , σ_1 , σ_2) et décrit différentes caractéristiques du frottement. La fonction g peut être choisie différente (plus complexe pour prendre en compte plus de paramètres, ou plus simple comme $g(v) = F_C/\sigma_0$ pour correspondre au modèle de Dahl).

2.1.4.5. Autres modèles

Bien d’autres modèles sont proposés dans la littérature et on ne pourra les présenter tous ici. Nombreux sont ceux qui sont basés sur ceux décrit ci-dessus ou qui ont une approche similaire. Nous en citons ici quelques-uns pour mémoire.

D’autres auteurs tels que Kermani, Patel et Moallem se sont intéressés par exemple au frottement lors du passage de l’adhérence au pré-glissement et au glissement (et inversement) et ont modélisés ces phénomènes [Kermani 2005].

Hayward et Armstrong ont proposé un modèle microscopique s’inspirant du modèle de Dahl et s’intéressant en plus aux phénomènes d’adhérence, de glissement, au "stick-slip", et au régime oscillatoire [Hayward 2000].

Swevers, Al-Bender, Ganseman et Prajogo se sont également intéressés au frottement en pré-glissement et en glissement. Ils se réfèrent au modèle de LuGre, étudient l’hystérésis et modélisent l’effet Stribeck. Pour ce dernier, ils identifient les paramètres (en distinguant des valeurs selon le signe de la vitesse) à partir de mesures moyennées des couples [Swevers 2000].

Bogdan s’intéresse plus particulièrement à l’effet Stribeck avec hystérésis. Les coefficients de frottement de Coulomb et visqueux sont pris constants mais le modèle de Stribeck est étendu : on distingue différentes valeurs des paramètres selon les signes de l’accélération et de la vitesse. Ce modèle est utilisé pour identifier des systèmes mono-axe [Bogdan 2010].

Nombreux sont les articles sur le frottement en robotique, mais peu sont ceux qui s’intéressent à la variation du frottement sec en fonction de la charge.

2.1.4.6. Conclusion

Tous ces modèles sont complexes, non linéaires par rapport aux paramètres, et malgré une description physique plus complète, ils ne sont pas facilement utilisables en robotique.

Les modèles classiques et tribologiques présentés ont tout d’abord été écrits pour étudier le frottement entre 2 surfaces planes simples en contact. En robotique, ils ont été utilisés par extension pour calculer le frottement dans des éléments de transmission dont les surfaces en contact sont plus complexes. Des hypothèses simplificatrices sont donc souvent adoptées.

Dans la partie suivante, nous nous intéressons donc aux modèles de frottement pour les transmissions.

2.1.5. Modèles de frottement utilisés pour les transmissions

Les modèles de frottement précédents sont des modèles pour le contact de surfaces planes simples. Ils sont cependant appliqués aux axes de robots qui sont des mécanismes complexes composés de moteur, réducteur, transmission, paliers, etc... Chaque composant a ses propres pertes par frottement. Plusieurs hypothèses simplificatrices sont donc adoptées pour modéliser le frottement en robotique.

En conception mécanique tout d’abord, le calcul des pertes par frottement dans les composants est généralement traité de 2 manières.

Pour les cas d’équilibre (vitesse nulle ou négligeable), on applique la loi de Coulomb aux contacts glissants (ou, par analogie, aux contacts roulants) [Spenlé 2007]. Ce cadre permet de démontrer certaines formules de rendement pour divers composants (vis-écrou, engrenage) sans considérer le frottement visqueux mais en s’intéressant à différents cas de charge.

Pour les autres cas (vitesse non négligeable), les constructeurs donnent souvent un rendement énergétique nominal du composant (effort et vitesse nominaux). Ce rendement intègre l’ensemble des pertes (frottement sec et visqueux) mais seulement pour un point de fonctionnement.

On remarque une opposition en robotique entre la conception des transmissions des axes et l’identification et la commande de ces mêmes axes. En conception, la prise en compte de la charge pour le calcul des pertes est importante, tandis que les variations avec la vitesse,

telles que l’effet Stribeck ou le stick-slip le sont moins. En identification ou commande, on constate bien souvent l’inverse : la variation du frottement en fonction de la vitesse est toujours prise en compte et souvent étudiée, tandis que la variation de la charge est souvent négligée, comme l’attestent les modèles présentés précédemment où les paramètres de frottement sec tels que F_c ou F_s sont généralement considérés comme constant.

En identification et commande d’axe, les modèles de frottement pour 2 surfaces en contact sont utilisés pour les mécanismes complexes de transmission des axes de robots. La variation du frottement sec en fonction de la charge est rarement modélisée. Cela pose problème lorsque les robots ont de fortes variations de charge. La prise en compte de la charge (en plus de la vitesse) dans le calcul des frottements devient donc indispensable dans certains cas. Quelques articles proposent de tels modèles pour différents éléments de transmission d’axe de robots.

2.1.6. Modèles de frottement des transmissions prenant en compte la charge

L’influence de la charge est rarement prise en compte dans le calcul des frottements en robotique. Quelques études dans la bibliographie proposent toutefois des modèles de frottement sec fonction de la charge pour certains types de transmission. Cinq articles sont présentés ici.

2.1.6.1. Article 1 [Gogoussis 1988] : *Coulomb Friction Effects on the Dynamics of Bearings and Transmissions in Precision Robot Mechanisms*

Dans cet article, les auteurs étudient le rendement d’une chaîne de transmission et plus particulièrement d’un Harmonic Drive. Ils introduisent le fait que les frottements dépendent de la vitesse et des efforts s’exerçant sur l’articulation i considérée :

$$\tau_{Ci} = \phi_i(f_i, n_i, \mu(\dot{q}_i), \text{sign}(\dot{q}_i)) \quad (2.15)$$

où :

- τ_{Ci} est l’effort de frottement de Coulomb à l’articulation i ,
- f_i est la force totale effective à l’articulation i ,
- n_i est le moment total effectif à l’articulation i ,
- μ est le coefficient de frottement approprié,
- $\dot{q}_i$ est la vitesse articulaire relative entre les 2 corps reliés par l’articulation i .

Pour exprimer les frottements dans un Harmonic Drive, ils partent du calcul du rendement η défini par : $\eta = P_s/P_e$ (P_s = puissance de sortie et P_e = puissance d’entrée). D’où :

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{\tau_s \omega_s}{\tau_e \omega_e} = \frac{\tau_s}{\tau_e r} \quad (2.16)$$

avec τ_s et τ_e les couples de sortie et d’entrée, ω_s et ω_e les vitesses de sortie et d’entrée et r le rapport de transmission.

Ils distinguent ensuite les différents cas de flux de puissance : selon les signes de la vitesse, du couple d’entrée, et du couple de sortie, la puissance est transférée de l’entrée vers la sortie, ou de la sortie vers l’entrée, ou est totalement dissipée dans le mécanisme. On peut distinguer 6 cas :

$$\begin{aligned}
 1) \dot{q} > 0, \tau_e > 0, \tau_s > 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par l'entrée} \\ \text{puissance transférée de l'entrée vers la sortie} \end{cases} \\
 2) \dot{q} < 0, \tau_e > 0, \tau_s > 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par la sortie} \\ \text{puissance transférée de la sortie vers l'entrée} \end{cases} \\
 3) \dot{q} < 0, \tau_e < 0, \tau_s < 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par l'entrée} \\ \text{puissance transférée de l'entrée vers la sortie} \end{cases} \\
 4) \dot{q} > 0, \tau_e < 0, \tau_s < 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par la sortie} \\ \text{puissance transférée de la sortie vers l'entrée} \end{cases} \\
 5) \dot{q} > 0, \tau_e > 0, \tau_s < 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par l'entrée et la sortie} \\ \text{puissance dissipée à l'intérieur} \end{cases} \\
 6) \dot{q} < 0, \tau_e < 0, \tau_s > 0 : & \begin{cases} \text{transmission actionnée par l'entrée et la sortie} \\ \text{puissance dissipée à l'intérieur} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Les auteurs s’intéressent aux 4 premiers cas où la puissance est transférée et non totalement dissipée. Dans ces 4 cas, ils considèrent que le frottement est une fonction linéaire par rapport à l’effort X qui actionne la transmission. L’effort Y produit (en sortie ou en entrée selon le sens du flux de puissance) s’exprime alors en fonction de X , du coefficient de frottement μ , et d’un seuil de frottement T_{NL} :

$$Y = (1 - \mu)(X - T_{NL}) \tag{2.18}$$

L’expression de τ_s en fonction de τ_e est alors déduit pour chaque cas de flux de puissance.

$$\begin{aligned}
 1^{er} \text{ cas : } \dot{q} > 0, \tau_e > 0, \tau_s > 0 & \Rightarrow X = r\tau_e \text{ et } Y = \tau_s \\
 \text{d'où : } \tau_s &= (1 - \mu)r\tau_e - (1 - \mu)T_{NL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{ème} \text{ cas : } \dot{q} < 0, \tau_e > 0, \tau_s > 0 & \Rightarrow X = \tau_s \text{ et } Y = r\tau_e \\
 \text{d'où : } \tau_s &= (1 - \mu)^{-1}r\tau_e + T_{NL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^{ème} \text{ cas : } \dot{q} < 0, \tau_e < 0, \tau_s < 0 & \Rightarrow X = -r\tau_e \text{ et } Y = -\tau_s \\
 \text{d'où : } \tau_s &= (1 - \mu)r\tau_e + (1 - \mu)T_{NL}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4^{ème} \text{ cas : } \dot{q} > 0, \tau_e < 0, \tau_s < 0 & \Rightarrow X = -\tau_s \text{ et } Y = -r\tau_e \\
 \text{d'où : } \tau_s &= (1 - \mu)^{-1}r\tau_e - T_{NL}
 \end{aligned}$$

Les cas 1 et 3, et les cas 2 et 4 sont équivalents (même flux de puissance).
Soit $T_{OUT} = \tau_s$ et $T_{IN} = r\tau_e$, les auteurs obtiennent le graphe entrée-sortie suivant (Figure 2-11).

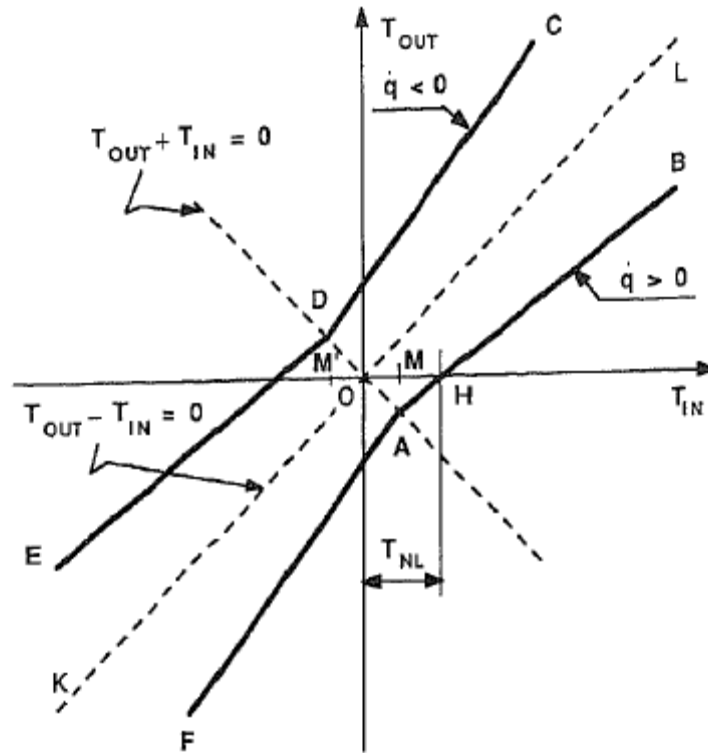


Figure 2-11 : Graphe entrée-sortie de Gogoussis et Donath

Remarque : pour les zones où T_{IN} et T_{OUT} sont de signes opposés, c’est-à-dire les cas 5 et 6 de flux de puissance, les auteurs précisent qu’ils ont simplement prolongé les droites, mais que des modèles plus complexes pourraient être utilisés pour les discontinuités en A et D.

Cette représentation sous forme de diagramme de transfert d’effort entrée-sortie est intéressante et très peu utilisée (excepté dans les représentations du cône de frottement de Coulomb dans le plan incliné). Seuls les frottements secs sont considérés ici et les frottements visqueux sont ensuite à ajouter.

2.1.6.2. Article 2 [Dohring 1993] : A Load-Dependent Transmission Friction Model: Theory and Experiments

Dans cet article, les auteurs cherchent à mettre en évidence la dépendance des frottements par rapport à la charge dans un système roue et vis tangente.

Dans une première partie théorique, ils démontrent par la géométrie du système roue et vis tangent et en appliquant les lois de Coulomb, que l’effort de sortie τ_s dépend de l’effort d’entrée τ_e , d’un rapport de transmission r (dépendant de la géométrie), et d’un rendement ρ (dépendant de la géométrie, du coefficient de frottement μ et du sens de déplacement dans le système roue et vis sans fin) : $\tau_s = \rho r \tau_e$.

Ils distinguent également les 6 différents sens de flux de puissance définis par (2.17), excepté que la convention de signe qu’ils utilisent pour τ_s est l’inverse de celle utilisée par [Gogoussis 1988] (ils précisent que les cas 2 et 4 existent seulement si la transmission est réversible). Ils les regroupent en 2 cas.

Si le flux de puissance va de l’entrée vers la sortie (cas 1 et 3), ils posent :

$$\tau_e r = -\tau_s \frac{1+\mu r}{1-\frac{\mu}{r}} \quad \text{d'où le rendement : } \rho = \frac{\frac{\mu}{r}-1}{\mu r+1} \quad (2.19)$$

et pour les autres sens du flux de puissance (cas 2, 4, 5 et 6), ils posent :

$$\tau_e r = -\tau_s \frac{1-\mu r}{1+\frac{\mu}{r}} \quad \text{d'où le rendement : } \rho = \frac{\frac{\mu}{r}+1}{\mu r-1} \quad (2.20)$$

Pour appuyer leur théorie, les auteurs présentent ensuite des résultats d’expériences sur une roue et vis tangente et tracent les graphes suivants, de la Figure 2-12 à la Figure 2-14.

La Figure 2-12 est un graphe du couple d’entrée en fonction de la vitesse et paramétré en charge (ici considérée comme le couple de sortie).

Les deux autres graphes (Figure 2-13 et Figure 2-14) mettent en évidence l’importance de l’influence de la charge (couple de sortie) sur les frottements en comparant la mesure (en pointillé) à un modèle de frottement sec constant (traits pleins). Le premier graphe est un graphe entrée-sortie (cas 1 et 2). Le deuxième donne le couple de frottement en fonction de la charge (couple de sortie) : on remarque une différence d’amplitude du frottement sec entre les 2 cas considérés.

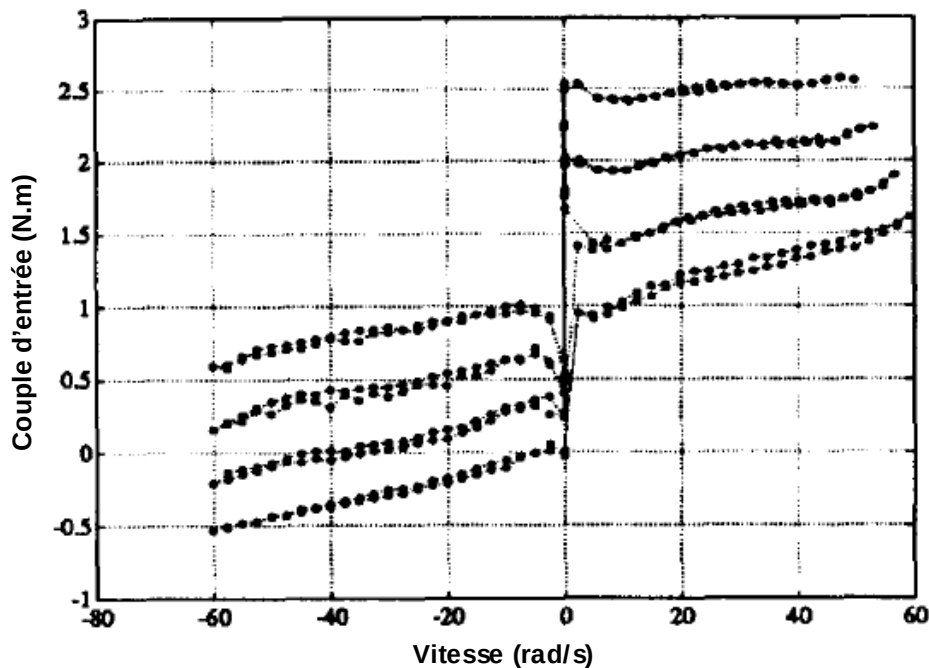


Figure 2-12 : Couple d’entrée en fonction de la vitesse pour différents couples de sortie

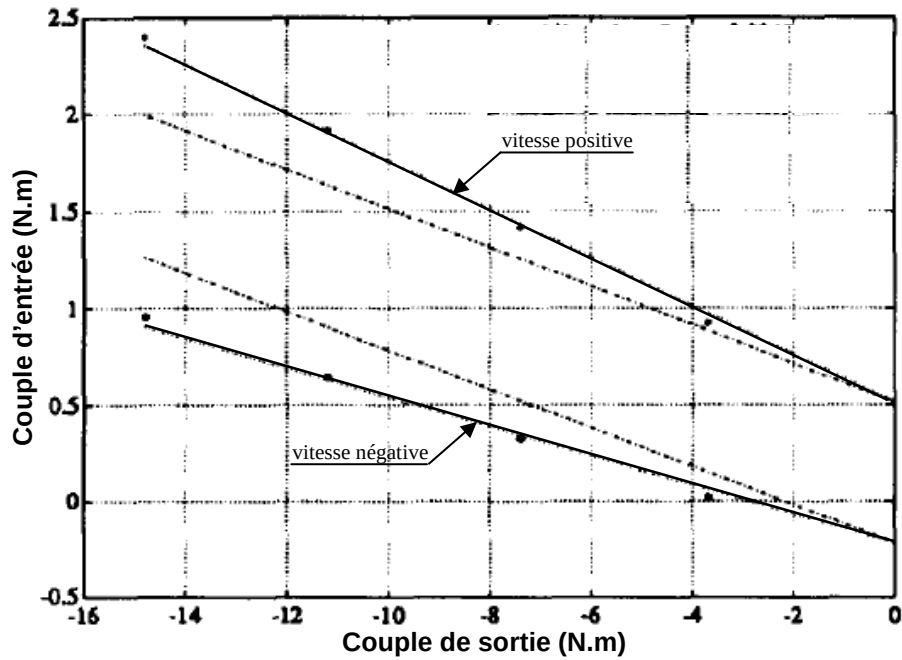


Figure 2-13 : Couple d’entrée en fonction du couple de sortie (vitesse quasi nulle et $\mu = 0,024$)
 Pointillés : frottements indépendants de la charge
 Traits : frottements dépendants de la charge

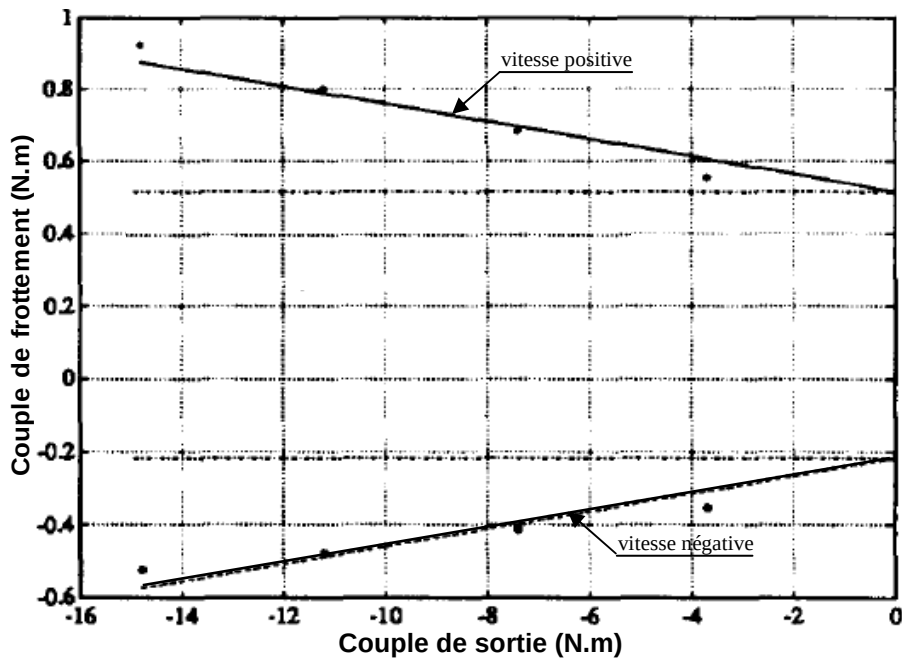


Figure 2-14 : Frottement en fonction du couple de sortie (vitesse quasi nulle et $\mu = 0,024$)
 Pointillés : frottements indépendants de la charge
 Traits : frottements dépendants de la charge

Cet article montre clairement l’importance de la dépendance du frottement sec par rapport à la charge. On y distingue de plus 2 expressions du frottement selon le sens du flux de puissance. Cependant, l’existence de seuils de frottement (tels que donnés par [Gogoussis 1988]) n’est pas abordée et les cas 5 et 6 pour lesquels la puissance est dissipée dans le mécanisme ne sont pas différenciés des cas 2 et 4.

Ces 2 cas (côté droit de la dent A au contact et vitesse positive ou négative) correspondent aux cas 1 et 2 des sens de flux de puissance définis par (2.17). Les auteurs ajoutent alors les 2 autres cas 3 et 4 : puisque les cas 1 et 3 ont le même flux de puissance, et de même pour les cas 2 et 4, ils les distinguent en considérant le signe de $\tau_A \omega_A$. Ils considèrent de plus que μ est dépendant de la vitesse, et que ρ_1 et ρ_2 le sont donc aussi. Ils obtiennent finalement l’expression de τ_B en fonction de τ_A :

$$\tau_B = i\hat{\rho}\tau_A, \quad \text{avec} \quad \hat{\rho} = \begin{cases} \rho_1(|\omega_A|) & \text{si } \{\tau_A \omega_A > 0\} \text{ ou } \{\tau_A = 0 \text{ et } \omega_A > 0\} \\ \frac{1}{\rho_2(|\omega_A|)} & \text{si } \{\tau_A \omega_A < 0\} \text{ ou } \{\tau_A = 0 \text{ et } \omega_A < 0\} \\ \text{tel que } \dot{\omega}_A = 0 & \text{si } \{\omega_A = 0\} \end{cases} \quad (2.22)$$

Les auteurs remarquent que ρ_1 et ρ_2 sont souvent égaux, notamment pour les engrenages, mais précisent que ce n’est pas le cas, par exemple, pour les roues-vis tangentes.

La synthèse de la boîte à engrenage (palier + engrenage) est ensuite faite et les auteurs obtiennent alors la loi de transmission entrée-sortie suivante :

$$\tau_B = i(-\hat{\rho}\tau_A + \hat{\tau}_{bf}) \quad (2.23)$$

avec un rendement $\hat{\rho}$ et un seuil $\hat{\tau}_{bf}$ dépendants de la vitesse et du sens de fonctionnement.

Ils définissent alors le couple de frottement $\Delta\tau$ par : $\tau_B = i(-\tau_A + \Delta\tau)$. D’où :

$$\Delta\tau = \begin{cases} (1-\hat{\rho})\tau_A + \hat{\tau}_{bf} & \text{si } \omega_A \neq 0 \\ \text{tel que } \dot{\omega}_A = 0 & \text{si } \omega_A = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Il y a donc deux expressions de $\Delta\tau$ selon le signe de $\tau_A \omega_A$ (ou le sens du flux de puissance).

Les auteurs présentent enfin leurs résultats sous la forme de deux graphes : frottement en fonction de l’entrée (Figure 2-17), et frottement en fonction de la vitesse (Figure 2-18) :

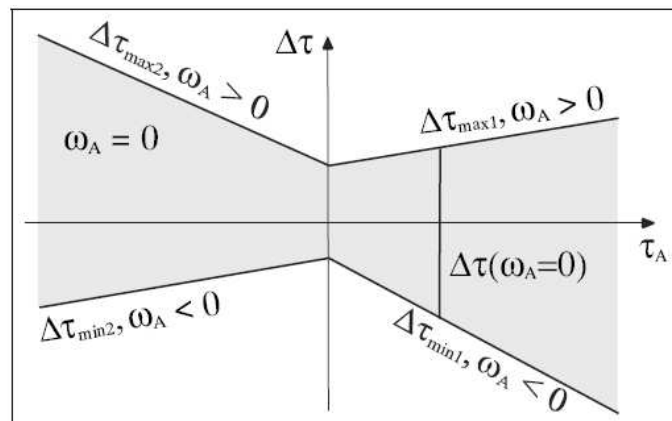


Figure 2-17 : Frottement fonction du couple d’entrée

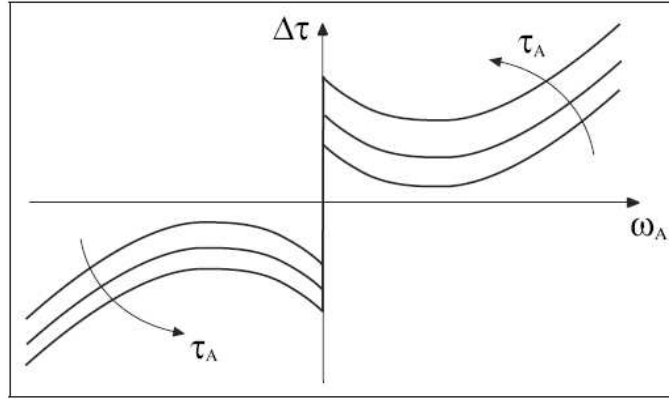


Figure 2-18 : Frottement fonction de la vitesse pour différents couples d’entrée

La variation du frottement sec en fonction de la charge est ici étudiée de manière théorique à partir de la géométrie de l’engrenage et de la loi de Coulomb. Par ailleurs, la variation du frottement sec en fonction de la vitesse est citée et même représentée sur la Figure 2-18, mais non détaillée dans les équations. Le frottement visqueux n’est pas abordé. On remarque de plus une incohérence de représentation du frottement sec d’adhérence entre les 2 graphes : Figure 2-18 on observe un frottement à vitesse nulle supérieur au frottement sec de glissement, tandis que Figure 2-17, le frottement d’adhérence semble toujours inférieur au frottement de glissement.

2.1.6.4. Article 4 [Abba 2003] : Modélisation des frottements dans les éléments de transmission d’un axe de robot en vue de son identification

En partant des lois de Coulomb et du modèle de Stribeck, les auteurs proposent un modèle de frottement fonction de la charge et de la vitesse :

$$\tau_f = (F_r + \mu|\tau|) \left(1 + ce^{-(\dot{q}/\dot{q}_s)^2}\right) \text{sign}(\dot{q}) + F_v\dot{q} + F_{vQ}\dot{q}|\dot{q}| \quad (2.25)$$

où τ_f est l’effort de frottement, τ l’effort de charge, $\dot{q}$ la vitesse, F_r un terme de frottement constant (seuil de frottement), μ le coefficient de frottement (coefficient de proportionnalité avec la charge), c un terme constant, F_v le coefficient de frottement visqueux, F_{vQ} le coefficient de frottement visqueux quadratique et $\dot{q}_s$ la vitesse de Stribeck. Ce modèle est représenté par la Figure 2-19.

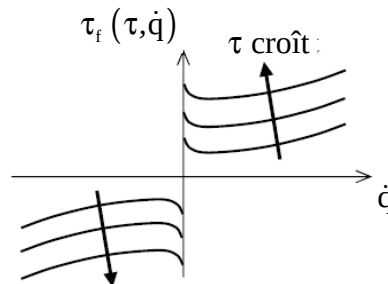


Figure 2-19 : Frottement en fonction de la vitesse pour différentes charges

Les auteurs considèrent que, pour leur application robotique, le frottement statique se fait sentir au démarrage mais influence peu le fonctionnement général. De plus, l'effet de frottement visqueux quadratique apparaît peu dans les transmissions de robot et le paramètre F_{VQ} est négligé. Le modèle est alors simplifié :

$$\tau_f = (F_r + \mu|\tau|) \text{sign}(\dot{q}) + F_v \dot{q} \quad (2.26)$$

Ils introduisent ensuite le modèle dynamique pour un élément de transmission :

$$\tau_e = \tau_s + J_t \ddot{q}_t + \tau_f \quad (2.27)$$

où τ_e est l'effort d'entrée, τ_s l'effort de sortie, J_t l'inertie de l'élément, q_t la position et τ_f l'effort de frottement.

En considérant que, pour chaque élément de transmission, l'effort de charge correspond à l'effort de sortie de l'élément, le modèle dynamique est complété avec l'expression de τ_f , ce qui donne :

$$\tau_e = (1 + \mu \text{sign}(\tau_s \dot{q}_t)) \tau_s + J_t \ddot{q}_t + F_r \text{sign}(\dot{q}_t) + F_v \dot{q}_t \quad (2.28)$$

Ce modèle est appliqué aux éléments de la chaîne de transmission d'un axe de robot bipède, dont l'organigramme est donné Figure 2-20.

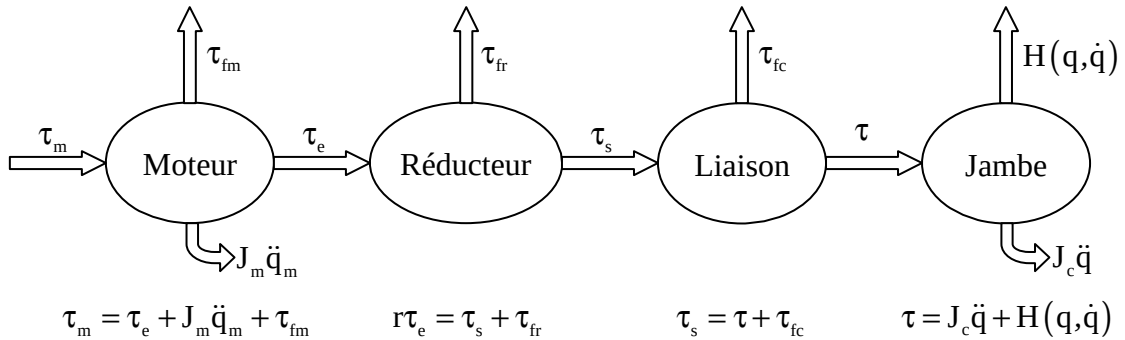


Figure 2-20 : Organigramme de l'axe étudié et équations dynamiques des éléments de la chaîne

Pour le premier élément, le moteur, les frottements considérés ne dépendent que de la vitesse, avec 2 paramètres constants : F_{Cm} et F_{Vm} . Soit J_m l'inertie du moteur, le modèle du moteur s'écrit :

$$\tau_m = \tau_e + J_m \ddot{q}_m + F_{Cm} \text{sign}(\dot{q}_m) + F_{Vm} \dot{q}_m \quad (2.29)$$

Pour le réducteur, les auteurs considèrent un frottement sec fonction de la charge tel que défini par (2.26) (mais sans frottement visqueux ni seuil). Soit r le rapport de transmission, le modèle du réducteur s'écrit :

$$\begin{aligned} r\tau_e &= \tau_s + \mu|\tau_s| \text{sign}(\dot{q}) = (1 + \mu \text{sign}(\tau_s(\dot{q}))) \tau_s \\ \Rightarrow \tau_e &= \frac{1 + \mu \text{sign}(\tau_s(\dot{q}))}{r} \tau_s = \frac{1}{r\alpha} \tau_s \end{aligned} \quad (2.30)$$

où α représente le coefficient de transfert en couple.

Pour l’ensemble liaison-jambe, les frottements considérés ne dépendent que de la vitesse, avec 2 paramètres constants : F_{Cc} et F_{Vc} . De plus, le terme H (effet de la gravité et des efforts de Coriolis et centrifuges) s’écrit : $H(q, \dot{q}) = ml \sin(q)$, où ml est le premier moment d’inertie de la jambe. Soit J_c l’inertie de la jambe, le modèle s’écrit :

$$\tau_s = J_c \ddot{q} + ml \sin(q) + F_{Cc} \text{sign}(\dot{q}) + F_{Vc} \dot{q} \quad (2.31)$$

Finalement, les auteurs font l’hypothèse que les paramètres de frottement sec prennent différentes valeurs selon le sens de transmission de la puissance. Ils distinguent donc 2 valeurs différentes pour chacun des termes suivants : α , F_{Cm} et F_{Cc} .

Le modèle de frottement sec proposé dans cet article prend en compte la charge mais pas la vitesse. Une distinction est faite entre un fonctionnement moteur et un fonctionnement générateur de la transmission. Par ailleurs, les auteurs séparent les différents termes de frottement provenant de chacun des éléments de la transmission et identifient donc plusieurs paramètres de frottement sec et de frottement visqueux. (Voir aussi [Chaillat 1994] et [El Yaaqoubi 2009].)

2.1.6.5. Article 5 [Bittencourt 2010] : *An Extended Friction Model to capture Load and Temperature effects in Robot Joints*

Les auteurs s’intéressent aux effets des couples de charge et de la température sur les frottements, afin de proposer un nouveau modèle. Ils étudient pour cela l’axe 2 d’un robot industriel ABB IRB 6620.

Leur modèle de départ est basé sur le modèle de Stribeck suivant :

$$\tau_f = \left(F_C + F_S e^{-|\dot{q}/\dot{q}_s|^\alpha} \right) \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} \quad (2.32)$$

avec 4 paramètres : F_C , F_S , F_V , $\dot{q}_s$, et le coefficient α qui est ici choisi égal à 1,3.

Des mesures sont alors réalisées sur l’axe 2 du robot ABB IRB 6620, dans différentes conditions, en calculant à chaque fois le couple de frottement, afin de construire un modèle empirique.

Le modèle dynamique utilisé est le suivant :

$$\tau = A(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + Q(q) + \tau_f \quad (2.33)$$

Les mesures étant réalisées sur un seul axe et à vitesse constante, le modèle est simplifié en : $\tau = Q(q) + \tau_f$. En considérant que le couple de frottement pour une vitesse $\dot{q}_k$ est égal à l’opposé du couple de frottement pour une vitesse $-\dot{q}_k$, ils estiment τ_f par :

$$\tau_f(\dot{q}_k) = \frac{\tau(\dot{q}_k) - \tau(-\dot{q}_k)}{2} \quad (2.34)$$

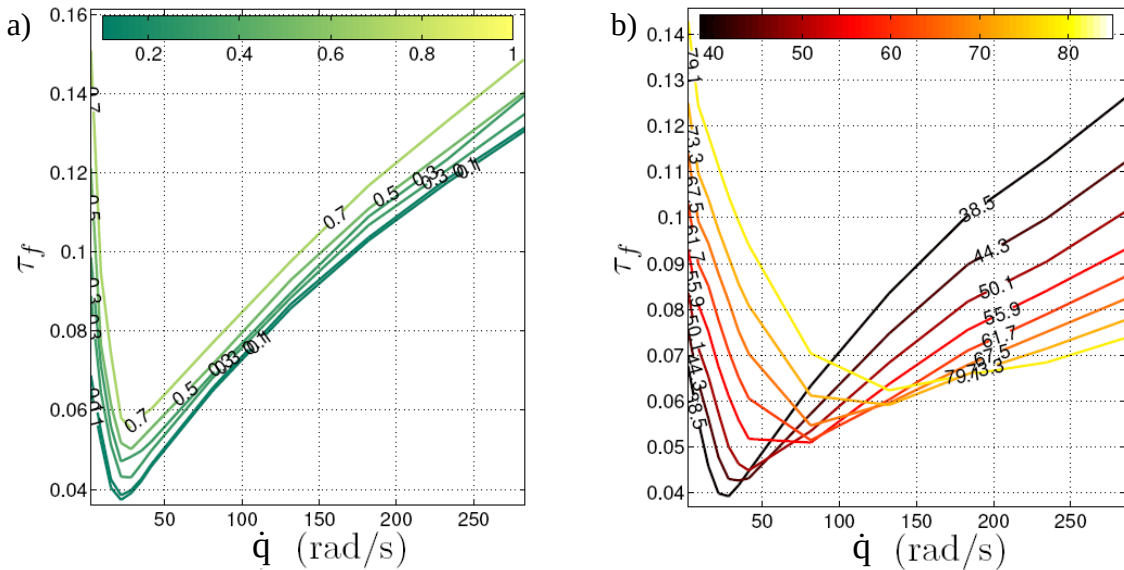
où le couple d’entrée τ est également estimé par une moyenne.

Dans un premier temps, ils font varier le couple de charge sur l’axe 2 en réalisant des mouvements à des vitesses constantes et à température constante, en plaçant le robot dans différentes configurations. Le couple de charge (dû au couple de gravité) est calculé à partir des données constructeurs et des outils de simulation, et le couple de frottement est estimé par (2.34). Ils obtiennent ainsi des courbes du frottement en fonction de la vitesse, pour plusieurs charges (Figure 2-21.a). Ils proposent alors le modèle de frottement suivant, fonction de la vitesse $\dot{q}$ et du couple de charge τ_{load} :

$$\tau_f(\dot{q}, \tau_{load}) = (F_{C,0} + F_{C,\tau_{load}} |\tau_{load}|) + (F_{S,0} + F_{S,\tau_{load}} |\tau_{load}|) e^{-|\dot{q}/\dot{q}_{s,\tau_{load}}|^{1.3}} + F_V \dot{q} \quad (2.35)$$

Dans un second temps, de nouvelles mesures sont réalisées, avec des mouvements à vitesses constantes, et pour différentes températures (un capteur mesure directement la température du lubrifiant). Les mesures obtenues pour un même cas de charge sont retenues. Ils obtiennent ainsi des courbes du frottement en fonction de la vitesse, pour plusieurs températures (Figure 2-21.b). Un nouveau modèle de frottement est proposé, fonction de la vitesse $\dot{q}$, du couple de charge τ_{load} et de la température T :

$$\begin{aligned} \tau_f(\dot{q}, \tau_{load}, T) = & (F_{C,0} + F_{C,\tau_{load}} |\tau_{load}|) + (F_{S,0} + F_{S,\tau_{load}} |\tau_{load}|) e^{-|\dot{q}/\dot{q}_{s,\tau_{load}}|^{1.3}} + \dots \\ & \dots (F_{S,0} + F_{S,T} T) e^{-|\dot{q}/(\dot{q}_{s,0} + \dot{q}_{s,T} T)|^{1.3}} + (F_{V,0} + F_{V,T} e^{-T/T_{V0}}) \dot{q} \end{aligned} \quad (2.36)$$



2.1.7. Conclusion

Les frottements sont étudiés depuis longtemps, avec des approches nombreuses et variées. La dépendance des frottements sec par rapport à la charge et à la vitesse est connue mais pas toujours modélisée. La recherche d’un modèle de frottement simple prenant ces deux paramètres en compte est rare dans la littérature. Les quelques auteurs ayant posés de tels modèles se sont, de plus, souvent limités à un seul type de transmission. Un apport intéressant serait de généraliser un modèle simple pour tous les types de transmission ainsi qu’aux guidages / paliers. C’est ce que [Garrec CEA] propose : une représentation générale de la transmission des efforts intégrant les modèles de frottement sec et visqueux, afin de rendre plus efficace la boucle conception–fabrication–identification–commande, de rendre compréhensible les phénomènes de pertes dans les chaînes d’actionnement à l’ensemble des partenaires d’un projet, et de faciliter la communication technique.

2.2. Modèle de frottement unifié au CEA

2.2.1. Introduction : modèle de frottement

L’étude réalisée au CEA (au DRT/LIST/DIASI/LRI, par Philippe Garrec, [Garrec 2002] à [Garrec 2010]) propose une approche universelle du transfert de l’effort en s’appuyant sur un modèle de frottement de Coulomb. Celui-ci est enrichi par l’ajout de seuils et une généralisation de l’emploi de *modèles de transfert d’effort* et de leurs *diagrammes* associés.

Le modèle de Coulomb (adhérence et glissement) est complété afin de restituer les seuils de frottement en combinant, dans la réaction de contact, les efforts tant extérieurs qu’intérieurs grâce à l’introduction du bi-contact et d’une déformation élastique (hypothèse du ressort ou théorie du contact de Herz). Les efforts internes ont différentes origines : ajustement sans jeu, ressort de rattrapage de jeu ou tendeur, tension de pose de courroie, etc...

Le frottement visqueux est ensuite ajouté au frottement sec pour aboutir à un modèle général fonction de la charge et de la vitesse.

2.2.2. Modèle de transfert et diagramme associé

Ce modèle de frottement unifié est appliqué à tous les types usuels de composants (conversion de puissance ou guidage) pour fournir un modèle élémentaire de transfert d’effort associé à son diagramme de transfert. Le diagramme est constitué de courbes caractéristiques représentant l’effort de sortie d’une transmission/un composant en fonction de l’effort d’entrée pour différentes valeurs de la vitesse. On effectue ensuite la synthèse (modèle et diagramme) d’une transmission d’architecture quelconque en combinant les modèles élémentaires de ses composants. On peut ainsi escompter développer une bibliothèque de modèles permettant de synthétiser des modèles de machines avec une précision significativement améliorée par rapport aux méthodes de calculs usuelles en bureau d’étude (logiciel R²M FT du CEA).

La représentation par diagramme de transfert d’effort a l’avantage d’exprimer synthétiquement l’ensemble des paramètres significatifs et la visualisation de divers facteurs : rendements, seuils absolus et relatifs, réversibilité/irréversibilité, saturations. Ce référentiel

permet de comparer efficacement les modèles de transfert entre différentes transmissions. Il permet également de visualiser les phénomènes d’interdépendance (coefficient de frottement fonction de la vitesse et de la charge). Il peut aussi être étendu au régime d’accélération uniforme, principalement dans le but d’exprimer des performances en conception et pour l’interprétation d’indices de performances (par exemple, la transparence). On peut de plus mettre en évidence l’existence de 2 modèles dynamiques associés aux signes de transfert de la puissance dans la transmission : les différents cas définis par (2.17) sont considérés. Les cas 1 et 3 de flux de puissance correspondent à un fonctionnement moteur de la transmission, appelé ici fonctionnement direct. Ils peuvent être associés aux quadrants 1 et 3 du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$ de la Figure 1-5.a. Les cas 2 et 4 de flux de puissance correspondent à un fonctionnement générateur de la transmission, appelé ici fonctionnement indirect. Ils peuvent être associés aux quadrants 2 et 4 du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$ de la Figure 1-5.a. Les cas 5 et 6 de flux de puissance ne peuvent être représentés dans le plan $(\dot{q}, \tau_{load})$. Les modèles associés aux fonctionnements direct et indirects peuvent être prolongés dans ces 2 cas.

2.2.3. Fondement du diagramme de transfert – Plan incliné

Le plan incliné fournit une analogie fondamentale à la notion de transfert d’effort. En effet, dans le modèle de Coulomb, la réaction tangentielle de frottement est liée à l’existence d’une réaction normale au contact. Or, dans tout mécanisme, en supposant qu’on puisse le ramener à un contact unique, la normale à ce contact a une direction qui dépend de sa géométrie/cinématique. On peut donc s’attendre en général à ce que la réaction de contact dépende à la fois des efforts d’entrée et de sortie. Le frottement sec va donc dépendre des efforts d’entrée et de sortie.

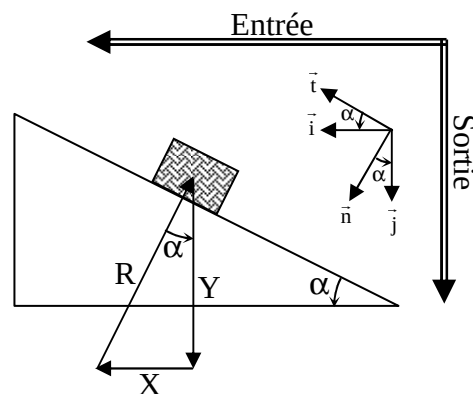


Figure 2-22 : Equilibre sur un plan incliné – Cônes de frottement

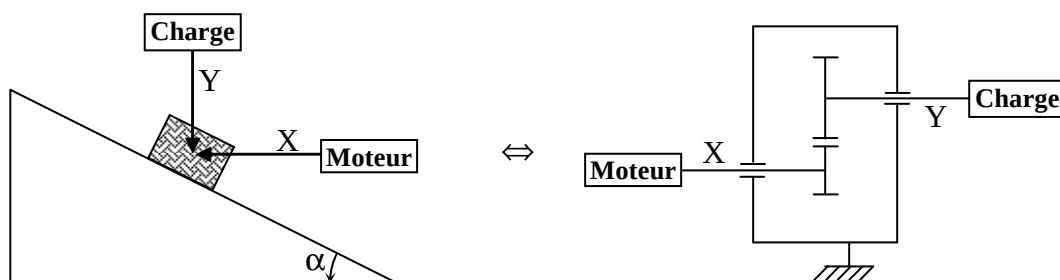


Figure 2-23 : Analogie Plan incliné - Transmission

Afin de mieux comprendre cette notion, nous proposons l’exemple simple du plan incliné (Figure 2-22) où sont fixées les directions d’entrée et de sortie.

On peut faire l’analogie entre le plan incliné et une transmission classique en considérant qu’un moteur exerce un effort en entrée, et qu’on a la charge (le poids) en sortie : Figure 2-23.

2.2.3.1. Plan incliné sans frottement

Le plan incliné sans frottement constitue un mécanisme élémentaire de conversion d’effort.

Définition des repères :

- o $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{j}$ la verticale descendante
- o $(\vec{t}, \vec{n})$ repère lié à l’objet orienté sur la tangente et la normale au plan incliné

Angle : $\alpha = \widehat{(\vec{t}, \vec{i})}$

Efforts :

- o $\vec{X}_{(\vec{i}, \vec{j})}(X, 0)$: Force "d’entrée"
- o $\vec{Y}_{(\vec{i}, \vec{j})}(0, Y)$: Force "de sortie"
- o $\vec{R}_{(\vec{i}, \vec{j})}(R_i, R_j)$: Réaction de contact

En projection sur $(\vec{t}, \vec{n})$, on a :

- o $\vec{X}_{(\vec{t}, \vec{n})}(X \cos \alpha, X \sin \alpha)$
- o $\vec{Y}_{(\vec{t}, \vec{n})}(-Y \sin \alpha, Y \cos \alpha)$
- o $\vec{R}_{(\vec{t}, \vec{n})}(R_t, R_n)$

On pose :

- o $T = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$: la résultante tangentielle
- o $N = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$: la résultante normale

A l’équilibre, on a : $(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{R} = \vec{0}$ c’est-à-dire :

$$\begin{cases} T + R_t = 0 \\ N + R_n = 0 \Rightarrow R_n = -N, \quad \forall N \text{ (condition de résistance du contact)} \end{cases}$$

Pour un contact sans frottement, $R_t = 0$, d’où :

$$T = 0 \Rightarrow Y = X \tan^{-1} \alpha$$

Et d’autre part, pour les vitesses on a :

$$\begin{cases} V_i = V_t \cos \alpha \\ V_j = -V_t \sin \alpha \end{cases}$$

D’où le rapport de transmission i est défini par :

$$i = \frac{V_{\text{entrée}}}{V_{\text{sortie}}} = \frac{V_i}{V_j} = -\tan^{-1} \alpha \quad (2.37)$$

2.2.3.2. Plan incliné avec frottements

La mise en équation du plan incliné met en évidence la notion des 2 cônes de frottement de Coulomb : statique (régime adhérent) et dynamique ou cinématique (régime de glissement ou de roulement). La représentation vectorielle de l’équilibre donne une première représentation élémentaire du transfert d’effort sous la forme des cônes de frottement “tournés” de la valeur d’inclinaison du plan incliné. Elle permet entre autre de définir l’irréversibilité (arc-boutement).

En **glissement**, on considère ici la vitesse très proche de zéro (pas de frottement visqueux) : $V_t \approx 0$. On a alors, d’après la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} |T| = |R_{t_{MAX}}| = \mu |N| \\ T = \text{sign}(V_t) |R_{t_{MAX}}| = \text{sign}(V_t) \mu |N| \quad \text{et} \quad N > 0 \Rightarrow |N| = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \\ \text{avec } \mu > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Si $V_t > 0$, alors $T = X \cos \alpha - Y \sin \alpha = \mu (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)$ et $Y = \frac{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} X$,
c’est-à-dire $Y = \frac{1 - \tan \phi \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \phi} X = \tan^{-1}(\alpha + \phi) X$, soit : $X = \tan(\alpha + \phi) Y$.

Si $V_t < 0$, alors $T = X \cos \alpha - Y \sin \alpha = -\mu (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)$ et $X = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} Y$,
c’est-à-dire $X = \frac{\tan \alpha - \tan \phi}{1 + \tan \phi \tan \alpha} Y = \tan(\alpha - \phi) Y$.

A vitesse constante, les points de coordonnés (X,Y) sont sur un cône de demi-angle ϕ (angle de frottement) appelé **cône de frottement de glissement**, avec $\phi = \arctan \mu$. Hors équilibre, ils sont soit à l’intérieur du cône (décélération) soit à l’extérieur (accélération).

En **adhérence**, on a un cône de frottement d’adhérence, pour lequel les expressions sont identiques au précédent mais en remplaçant μ par μ_s , ϕ par ϕ_s et V_t par T.

2.2.3.3. Réversibilité, irréversibilité

Si $\phi_s < \alpha < \frac{\pi}{2} - \phi_s$, la limite d’adhérence sera franchie en agissant à volonté soit sur la sortie Y soit sur l’entrée X. Le plan incliné est **réversible** donc sans risque de coincement (exemple pratique : came déplaçant une roulette).

Pour le cas de l’**irréversibilité ou arc-boutement**, le système reste en équilibre quel que soit l’intensité de Y (ou de X). Les exemples pratiques sont nombreux : coin, cale de réglage, cric de voiture, etc...

- Si $X = 0$, la condition d'équilibre devient : $|-Y \sin \alpha| < \mu_s |Y \cos \alpha|$

Si $0 < \alpha < \varphi_s$, alors quel que soit Y , $R_t = -Y_t$.

Le système est irréversible vu de la sortie : la limite d'adhérence ne peut être franchie si l'on agit uniquement sur la sortie Y .

- Si $Y = 0$, la condition d'équilibre est $|X \cos \alpha| < \mu_s |X \sin \alpha|$

Si $\frac{\pi}{2} - \varphi_s < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors quel que soit X , $R_t = -X_t$.

Le système est irréversible vu de l'entrée : la limite d'adhérence ne peut être franchie si l'on agit uniquement sur l'entrée X .

Les cas réversibles et irréversibles sont présentés dans la Figure 2-24 et la Figure 2-25. Pour faciliter la lecture des diagrammes vectoriels, on a choisi les conventions suivantes : indice "+" pour $V_t > 0$ et indice "-" pour $V_t < 0$.

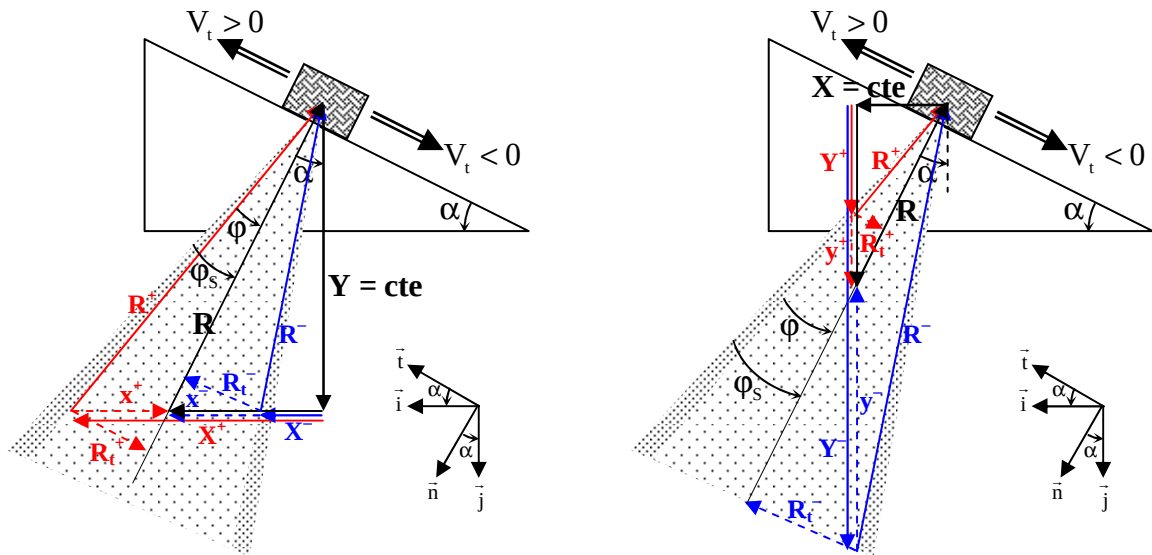


Figure 2-24 : Plan incliné réversible

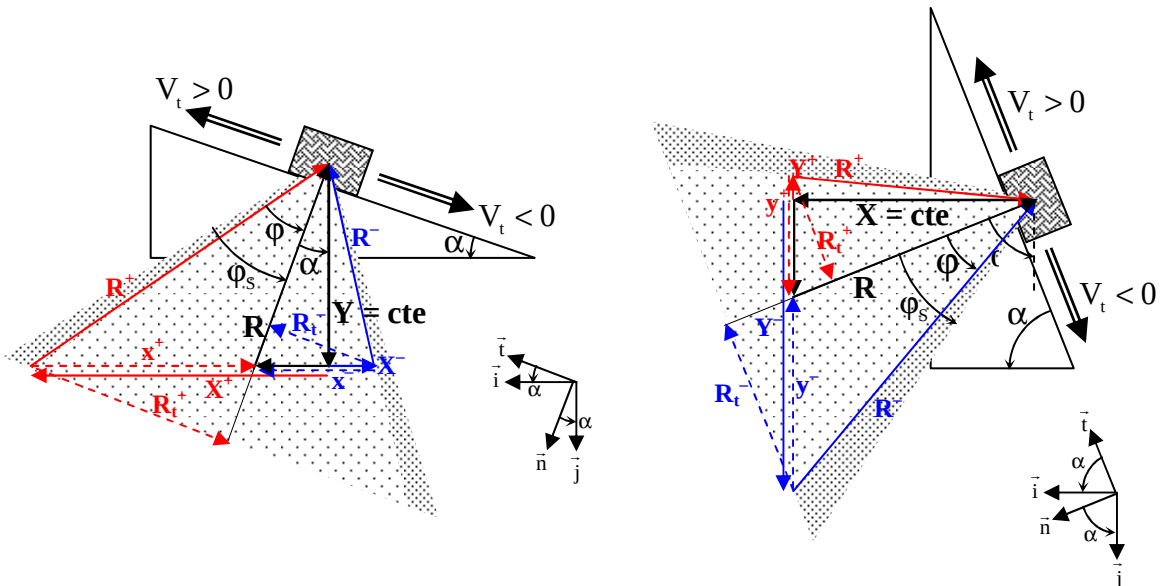


Figure 2-25 : Plan incliné irréversible

Pour les cas intermédiaires $\varphi < \alpha < \varphi_s$ et $\frac{\pi}{2} - \varphi_s < \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$, le système est irréversible à condition d’une immobilité totale ce qui en pratique peut rarement être garanti (un mécanisme peut toujours être soumis à un choc ou à des vibrations par exemple en provenance de l’asservissement). On parle alors d’*irréversibilité incertaine ou conditionnelle*. Si l’on souhaite profiter de l’avantage de l’irréversibilité (par exemple pour éviter un frein de sécurité), il faudra éviter cette zone en prévoyant une marge suffisante pour garantir la condition d’irréversibilité certaine.

Lorsqu’il y a réversibilité, on a un régime transmetteur de puissance tandis que lorsqu’on est en irréversibilité, on a un régime dissipateur.

2.2.3.4. Rendements limites

Le terme de rendement limite sera justifié par la suite, en 2.2.5.

On se place en régime de glissement, à vitesse lente $V_t \approx 0$.

Pour le rendement limite direct ρ_D , on prend $V_t > 0$ et on a :

$$\rho_D = \frac{Y}{iX} = \frac{X \tan^{-1}(\alpha + \varphi)}{X \tan^{-1} \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} = \frac{1 - \mu \tan \alpha}{1 + \mu \tan^{-1} \alpha} \text{ défini pour } \alpha \neq \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (2.39)$$

$$Y = X \tan^{-1}(\alpha + \varphi) = \rho_D \tan^{-1} \alpha X = \rho_D iX \quad (2.40)$$

(Remarque : $\alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi \Leftrightarrow \rho_D < 0 \Leftrightarrow$ Irréversibilité vue de l’entrée)

Pour le rendement limite indirect ρ_I , on prend $V_t < 0$ et on a :

$$\rho_I = \frac{X}{i^{-1}Y} = \frac{Y \tan(\alpha - \varphi)}{Y \tan \alpha} = \frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan \alpha} = \frac{1 - \mu \tan^{-1} \alpha}{1 + \mu \tan \alpha} \text{ défini pour } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} X = Y \tan(\alpha - \varphi) = \rho_I \tan \alpha Y \\ Y = \rho_I^{-1} \tan^{-1} \alpha X = \rho_I^{-1} iX \end{cases} \quad (2.42)$$

(Remarque : $\alpha < \varphi \Leftrightarrow \rho_I < 0 \Leftrightarrow$ Irréversibilité vue de la sortie)

Le réseau des courbes de rendement (valeurs positives seulement) en fonction de l’angle α et du coefficient de frottement μ pour un plan incliné est donné Figure 2-26.

Remarque : lorsque l’angle est différent de 45° les 2 rapports sont différents (transfert asymétrique).

On peut donc tracer les diagrammes de transfert du plan incliné, dans les cas réversible et irréversible (voir Figure 2-27).

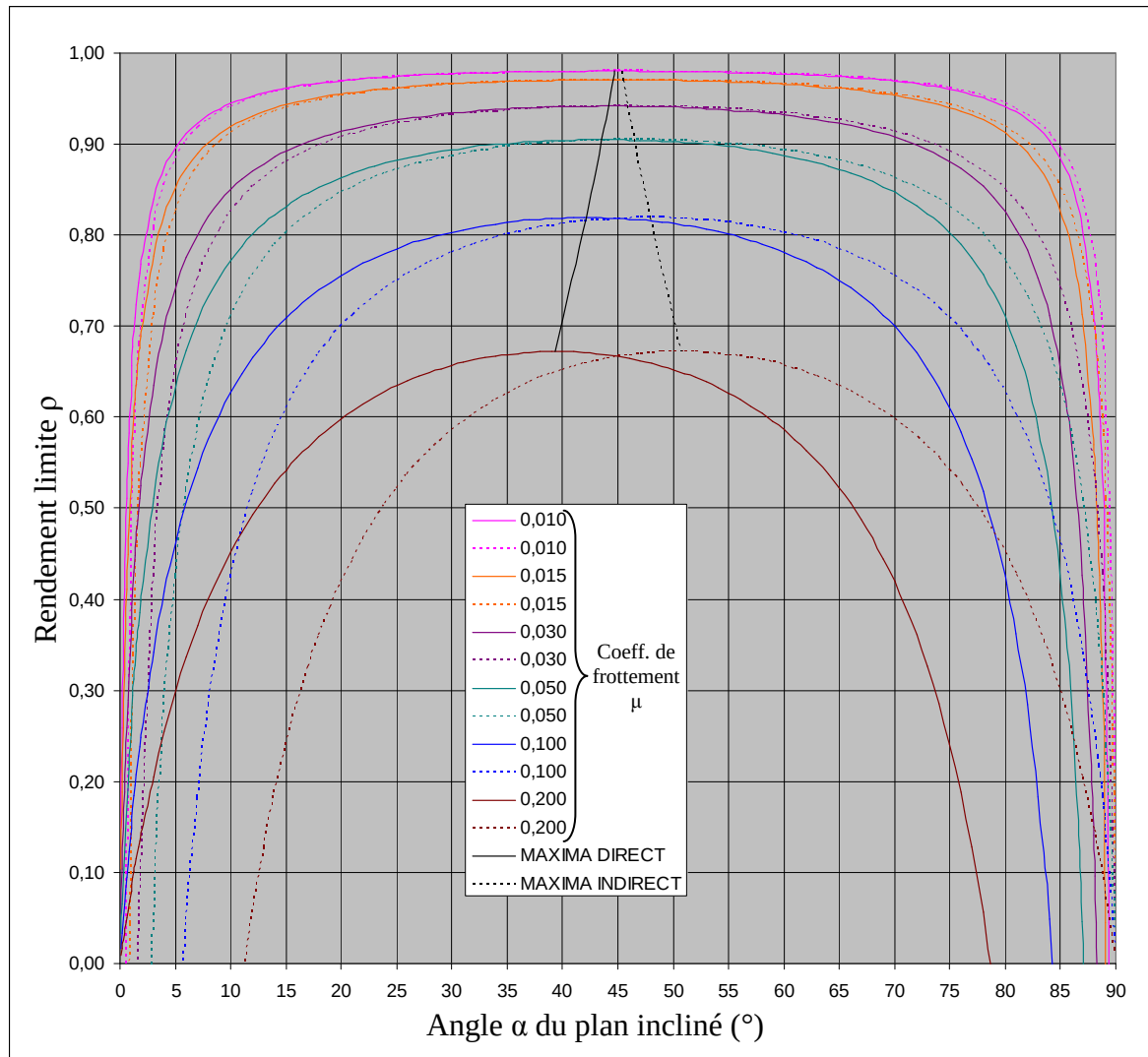


Figure 2-26 : Courbes de rendements limites direct (trait plein) et indirect (pointillés) du plan incliné en fonction de l’angle d’inclinaison et du coefficient de frottement μ (en régime transmetteur seulement)

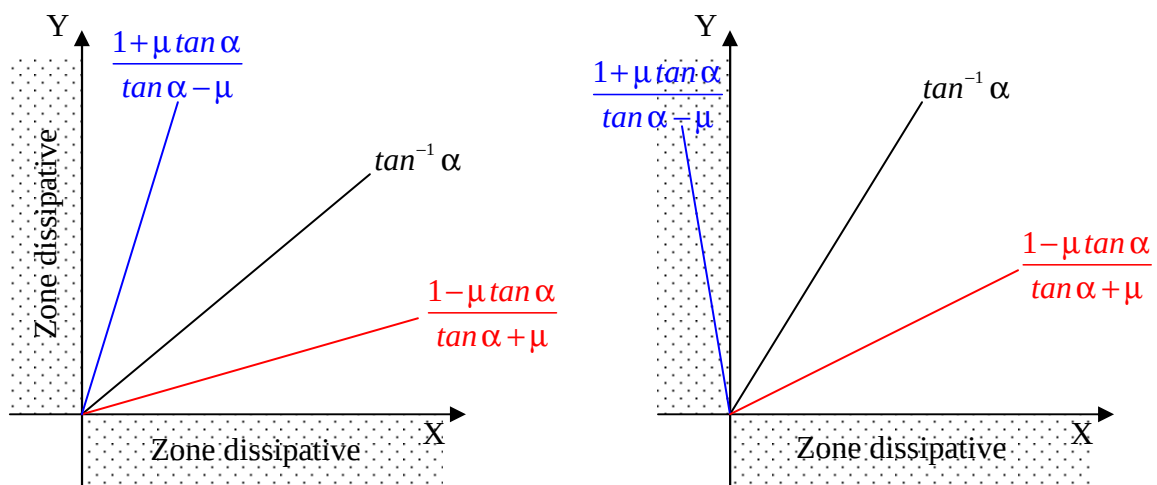


Figure 2-27 : Diagramme de transfert du plan incliné – réversible (gauche) et irréversible vu de la sortie (droite)

2.2.4. Généralisation à un composant quelconque

Pour chacun des différents éléments de transmission existants, il est possible de faire une étude similaire à celle effectuée pour le plan incliné, afin de trouver les expressions des rendements, mais également des seuils pour certains d’entre eux.

Il apparaît ainsi que les éléments de transmission peuvent être classés en 2 familles : la famille du plan incliné et la famille de l’engrenage.

Dans la première famille, on trouve les transmissions avec vis sans fin qui ont un comportement similaire à celui du plan incliné, avec des rendements limites qui dépendent de l’angle de vis, et un transfert généralement asymétrique. Dans la deuxième famille, on trouve les éléments de type engrenage, où le transfert reste nécessairement symétrique avec égalité entre ρ_D et ρ_I (voir [Henriot 1979]).

Remarque : le terme “cône de frottement” ne peut être utilisé que pour le plan incliné, car il y a alors bien symétrie angulaire. Pour les autres transmissions, même si on a une égalité des rendements, on n’a pas la symétrie angulaire et on parlera alors de “pseudo-cône”.

2.2.5. Exploitation d’un diagramme de transfert simplifié

A vitesse quasi-statique (afin de ne considérer que le frottement sec), on admet un diagramme simplifié à 2 bifurcations où le rapport de transmission est noté i . La Figure 2-28 montre 2 diagrammes, l’un dans le cas réversible et l’autre dans le cas irréversible vu de la sortie. Les droites en trait-point-trait représentent les caractéristiques statiques (correspondant aux limites du cône d’adhérence). Les droites en trait plein représentent les caractéristiques dynamique/cinématique (correspondant au cône de glissement) pour une vitesse constante $\dot{q}_0$.

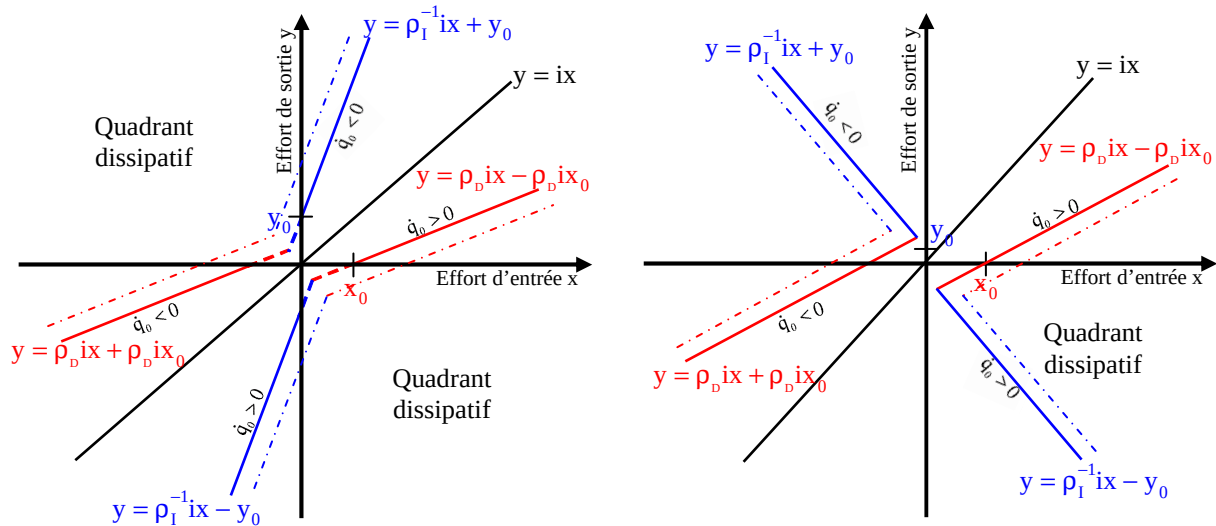


Figure 2-28 : Diagramme de transfert général réversible (gauche) et irréversible (droite)

Par analogie avec le plan incliné, P. Garrec différencie le fonctionnement direct (en rouge sur la figure) et le fonctionnement indirect (en bleu) et définit les termes correspondants de rendements limites ρ_D et ρ_I ainsi que les seuils d’entrée x_0 et de sortie y_0 [Garrec CEA].

Les rendements limites ρ_D et ρ_I sont des paramètres liés à la loi de Coulomb (car ils intègrent le coefficient de frottement de glissement ou de roulement μ des surfaces en contact) pour les efforts extérieurs, et les caractéristiques géométriques du mécanisme. Les seuils x_0 et y_0 sont eux supposés explicables en utilisant la loi de Coulomb et les efforts internes à la transmission (voir en 2.2.1) : ils traduisent le type de réalisation et l’état de ses réglages éventuels.

On remarque, sur le diagramme de transfert, que les 2 quadrants où les efforts d’entrée et de sortie sont de signes opposés (haut-gauche et bas-droite), correspondent à un régime de fonctionnement entièrement dissipatif de la transmission : cas 5 et 6 du flux de puissance. Les 2 autres quadrants du diagramme de transfert (haut-droite et bas-gauche) correspondent à un régime de fonctionnement transmetteur de puissance : cas 1 à 4 du flux de puissance. On note également que le fonctionnement dissipatif se rencontre aussi bien sur un mécanisme irréversible que réversible.

En supposant une transmission rigoureusement proportionnelle des vitesses et en se plaçant dans un quadrant transmetteur, le rendement énergétique η (ou rendement réel) est donné par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta = \frac{y\dot{q}_y}{x\dot{q}_x} = \frac{(\rho_D i x \pm \rho_D i x_0) \dot{q}_y}{x i \dot{q}_y} = \rho_D \pm \rho_D \frac{x_0}{x} & \text{en fonctionnement direct} \\ \eta = \frac{x\dot{q}_x}{y\dot{q}_y} = \frac{(\rho_I i^{-1} y \pm \rho_I i^{-1} y_0) i \dot{q}_y}{y \dot{q}_y} = \rho_I \pm \rho_I \frac{y_0}{y} & \text{en fonctionnement indirect} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Ainsi, η dépend à la fois des efforts extérieurs (utiles) et des efforts intérieurs (précharge) à la transmission. Il traduit globalement la proportion effective d’effort transmis dans le mécanisme et constitue un index de la transparence du mécanisme. La relation (2.43) justifie bien l’appellation de rendements limites (ou rendements maximaux) pour ρ_D et ρ_I car il s’agit de la valeur du rendement réel η lorsque l’effort d’entrée (ou de sortie) tend vers l’infini.

En cas d’irréversibilité, le paramètre ρ_I devient simplement négatif et perd sa signification de rendement.

En terme de choix de représentation, on peut tracer le diagramme de transfert en mettant l’effort de sortie et l’effort d’entrée à la même échelle (en général, on exprime les 2 efforts dans le domaine articulaire de sortie), ce qui permet de ne plus avoir le rapport de transmission i dans les équations.

D’autres représentations équivalentes peuvent être utilisées pour représenter le frottement variant avec la charge et la vitesse (en ajoutant le frottement visqueux). Trois graphes équivalents sont donnés Figure 2-29.

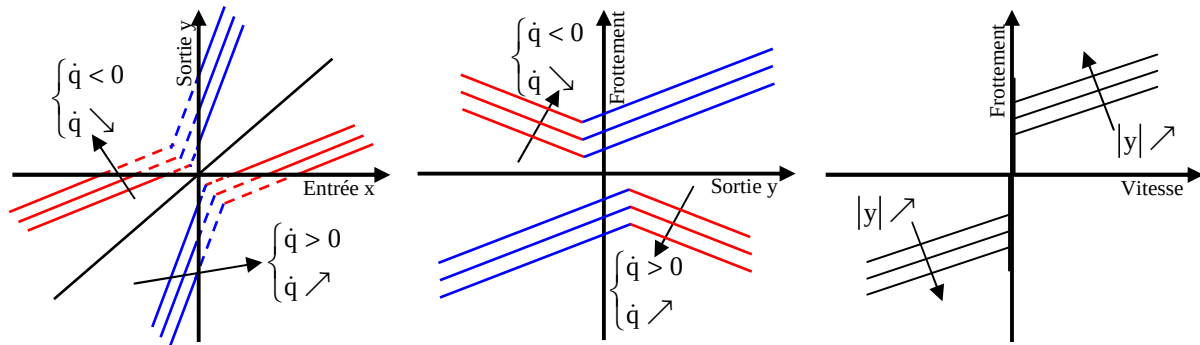


Figure 2-29 : Différentes représentations graphiques équivalentes du frottement

2.2.6. Distinction entre propriété mécanique et comportement de l'actionneur

Chaque élément de transmission peut être, par construction mécanique, réversible ou irréversible. Son comportement va, lui, dépendre de la manière dont il est asservi : voir Tableau 2-1. En effet, la propriété d'irréversibilité est vérifiable par le comportement d'arc-boutement. En revanche, il est important de noter que le comportement bilatéral d'une transmission réversible peut-être simulé sur un actionneur intégrant une transmission irréversible en utilisant une rétro-action en effort.

Tableau 2-1 : Propriétés des transmissions

Propriété mécanique (disposition constructive)	Comportement	
	Non assisté (boucle ouverte)	Assisté (boucle fermée)
Irréversible	Unilatéral - Arc-boutant	Bilatéral
Réversible	Bilatéral	

2.2.7. Synthèse d'une chaîne de transmission et modèle de transfert associé

On peut synthétiser le modèle d'une transmission et son diagramme associé à partir de ses modèles élémentaires : la sortie d'un élément est l'entrée du suivant (Figure 2-30).



Figure 2-30 : Chaîne cinématique

Si les différents éléments ont des seuils différents, on aura alors plusieurs points de bifurcation dans les efforts faibles. Au-delà des points de bifurcation, pour chaque sens de fonctionnement (direct et indirect), on obtient une droite dont le coefficient directeur est le produit des rendements limites des différents éléments, et le seuil est fonction des différents seuils et des rendements limites.

Les équations pour le sens direct, pour l'exemple à 3 éléments illustré par la Figure 2-30 sont les suivantes :

$$\begin{cases}
 S_1 = \rho_{D1} i_1 E_1 + \rho_{D1} i_1 x_{01} \\
 S_2 = \rho_{D2} i_2 E_2 + \rho_{D2} i_2 x_{02} \\
 S_3 = \rho_{D3} i_3 E_3 + \rho_{D3} i_3 x_{03}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_3 &= \rho_{D3} i_3 S_2 + \rho_{D3} i_3 x_{03} = \rho_{D3} i_3 (\rho_{D2} i_2 E_2 + \rho_{D2} i_2 x_{02}) + \rho_{D3} i_3 x_{03} \\
 \Rightarrow S_3 &= \rho_{D3} \rho_{D2} i_3 i_2 S_1 + \rho_{D3} \rho_{D2} i_3 i_2 x_{02} + \rho_{D3} i_3 x_{03} \\
 \Rightarrow S_3 &= \rho_{D3} \rho_{D2} i_3 i_2 (\rho_{D1} i_1 E_1 + \rho_{D1} i_1 x_{01}) + \rho_{D3} \rho_{D2} i_3 i_2 x_{02} + \rho_{D3} i_3 x_{03} \\
 \Rightarrow S_3 &= \rho_{D3} \rho_{D2} \rho_{D1} i_3 i_2 i_1 E_1 + \rho_{D3} \rho_{D2} \rho_{D1} i_3 i_2 i_1 \left(x_{01} + \frac{x_{02}}{\rho_{D1} i_1} + \frac{x_{03}}{\rho_{D2} \rho_{D1} i_2 i_1} \right) \\
 \Rightarrow S_3 &= \rho_{DTotal} i_{total} E_1 + \rho_{DTotal} i_{total} x_{total}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Pour une chaîne cinématique, on adoptera donc toujours le modèle élémentaire à 2 points de bifurcation, avec 2 rendements limites ρ_D et ρ_i et 2 seuils x_0 et y_0 , en prolongeant et recoupant, pour les efforts faibles, les portions de caractéristiques obtenues dans la zone des efforts moyens à forts.

2.2.8. Identification du diagramme de transfert

On peut tracer le diagramme de transfert en quasi-statique d’une chaîne cinématique en réalisant des mesures directes sur le système. Une méthode consiste à charger la sortie du mécanisme par des efforts précis, par exemple des poids agissant directement ou par l’intermédiaire de leviers ou poulies. On procède ensuite à des déplacements lents et à vitesse constante dans les 2 sens de fonctionnement, afin de mettre en évidence les 2 sens de conversion énergétique, direct et indirect. On reporte ensuite sur un diagramme les points de mesure (effort d’entrée ; effort de sortie).

Pour un axe de robot, la séparation du moteur de la transmission n’est pas toujours applicable et interdit les méthodes d’identification automatique plus facile à mettre en œuvre et de portée plus générale (balayage en vitesse et accélération). On cherche alors pour l’effort d’entrée à utiliser la grandeur commandant l’effort moteur (courant pour un actionneur électrique, pression pour un actionneur hydraulique). Il est alors nécessaire d’établir la loi donnant l’effort de sortie du moteur en fonction de cette valeur de commande (étalonnage du moteur). P. Garrec propose d’interpréter cette loi d’étalonnage comme une extension de la notion de diagramme de transfert. Un moteur électrique, par exemple, peut être considéré comme la synthèse d’un générateur de couple électromagnétique et d’un palier. Pour le générateur de couple électromagnétique, la grandeur d’entrée x est le courant pour un moteur à courant continu à excitation constante (ou son image dans le cas d’un moteur à courant alternatif), et la grandeur de sortie y est son couple électromagnétique. Le palier a pour entrée le générateur de couple électromagnétique et comme sortie l’arbre du moteur.

Au total, les pertes dans le moteur électrique sont modélisées par :

- un couple assimilable à un seuil de frottement sec y_0 , traduisant les pertes par hystérésis magnétique et par le frottement sec de palier,
- un couple assimilable à un frottement visqueux, traduisant les pertes par courant de Foucault et par les frottements visqueux aérodynamiques, hydrodynamiques, etc...

Le diagramme de transfert du moteur permet aussi d’intégrer le cas échéant une loi du couple non linéaire (lorsqu’on s’approche des saturations). Cette approche unifiée a aussi le mérite de mettre en rapport d’une part la constante de couple moteur le rendement, et d’autre part le couple d’hystérésis et le seuil du mécanisme.

Si on reste donc dans une zone suffisamment éloignées des saturations du moteur, on a les équations de transfert usuelles suivantes :

- pour une vitesse positive, $y = K_t x - y_0$,
- pour une vitesse négative, $y = K_t x + y_0$.

Des essais en quasi-statique ont été réalisés sur différents systèmes pour obtenir le diagramme de transfert, et sont présentés dans le Chapitre 3.

2.3. Conclusion

De nombreuses approches et de nombreux modèles de frottement sont proposés dans la littérature. Certains modèles sont très simples et décrivent peu le comportement du frottement sec. D’autres modèles, basés sur la tribologie, permettent de considérer de nombreux phénomènes du frottement sec, tels que l’adhérence, le décollement, l’hystérésis... Ces modèles complexes sont difficilement utilisables en robotique. Enfin, quelques approches proposent des modèles moins élaborés mais prenant en compte la variation du frottement sec avec la charge. L’étude théorique réalisée au CEA montre pourquoi de tels modèles seraient valables pour tout type de transmission. C’est vers ce type de modèle que l’on cherche à se diriger. Une étude expérimentale de différentes transmissions va permettre de caractériser au mieux le modèle de frottement sec qui conviendrait.

Chapitre 3

3. Caractérisation du modèle de frottement sec

Résumé : Ce chapitre présente une étude expérimentale réalisée en mono-axe sur des prototypes et robots industriels. L'analyse des essais montre une variation significative de l'effort de frottement sec en fonction de la charge et de la vitesse et conduit à proposer un nouveau modèle de frottement sec.

3.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la caractérisation d'un nouveau modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse.

La température est un autre facteur important de variation des efforts de frottement, étudié récemment par [Bittencourt 2010] et signalé dans les catalogues constructeurs tel que [Harmonic Drive] (voir par exemple la Figure 3-1 : courbes du couple de fonctionnement à vide pour une vitesse d'entrée de 500 tr/min en fonction de la température pour des Harmonic Drive du type HFUC). Afin de s'affranchir de cette variation qui ne fait pas l'objet de notre étude, tous les essais exploités dans cette thèse ont été réalisés après un échauffement des robots de façon à obtenir une température d'équilibre constante de fonctionnement identique pour tous les essais.

Quatre systèmes sont étudiés ici : un banc d'essai du CEA constitué d'un vérin à câble, le prototype un axe EMPS de l'Université de Nantes, l'axe 3 du robot Stäubli RX130L de la société AREVA NC et le robot Stäubli TX40 de l'IRCCyN. On s'intéresse tout d'abord à l'influence de la charge sur le frottement sec, puis à l'influence de la vitesse. Les trajectoires utilisées lors des essais sont des vitesses sinusoïdales et des paliers de vitesse obtenus sur des profils de vitesse en créneaux, en trapèzes, des sinus ou en sinus saturés (l'amplitude du sinus est égale à deux fois la vitesse du palier du sinus saturé, le temps d'accélération et de décélération est égal au temps sur le palier) : Figure 3-2.

Pour étudier la dépendance du frottement vis-à-vis de la charge, deux méthodes sont utilisées. La première est celle présentée en 2.2.8 : des essais sont réalisés à une vitesse très lente constante pour négliger le frottement visqueux moyen, à accélération moyenne nulle afin de négliger les efforts inertiels, dans des configurations telles que l'effet de la gravité sur les axes soit également négligeable, et avec différents efforts extérieurs constants ajoutés en sortie. L'objectif est d'obtenir le diagramme de transfert d'effort de l'axe : graphe de l'effort de sortie en fonction de l'effort d'entrée moyen pour une vitesse moyenne constante.

La deuxième méthode consiste à utiliser le modèle dynamique classique et à identifier le coefficient constant F_c pour différents cas de charge de l'axe étudié.

Les identifications, moyennes et écarts-types sont calculés sur un nombre d'échantillons de l'ordre de 10 000 à 100 000 (selon le système considéré).

Un modèle de frottement sec fonction de la charge est alors proposé.

Afin d'étudier la dépendance du frottement sec vis-à-vis de la vitesse, des mesures réalisées pour différentes vitesses moyennes constantes sont exploitées : des moyennes de l'effort d'entrée sont réalisées pour chaque palier de vitesse ce qui permet d'observer l'allure de la courbe de l'effort d'entrée en fonction de la vitesse. Un modèle de frottement sec prenant en compte la vitesse est enfin proposé.

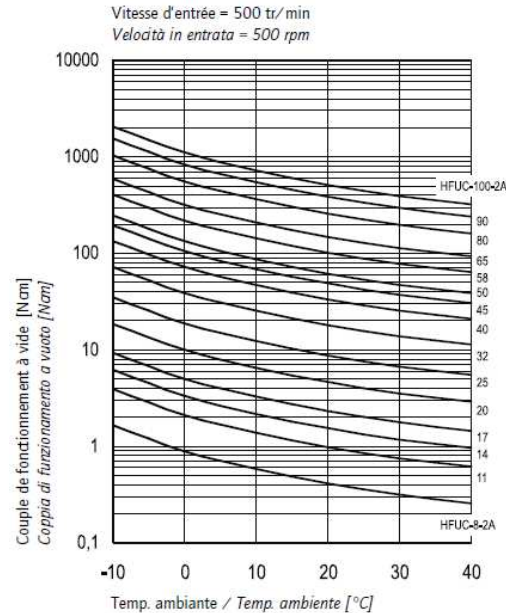


Figure 3-1 : Couple en fonction de la température – Harmonic Drive

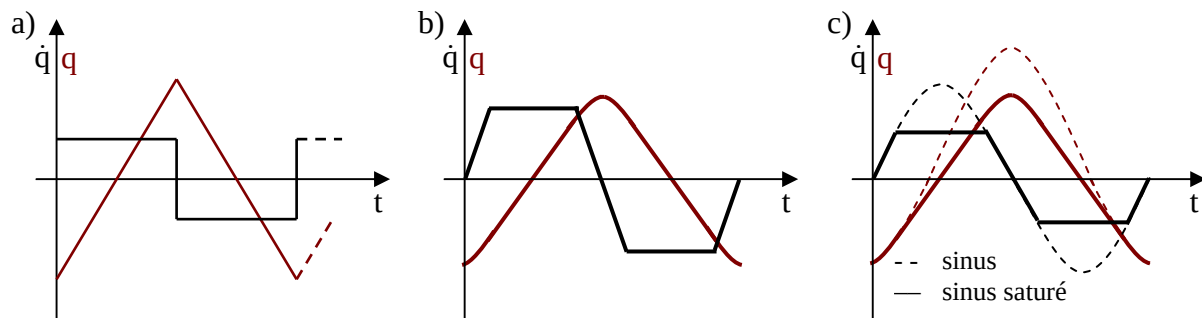


Figure 3-2 : a) Créneaux de vitesse – b) Trapèzes de vitesse – c) Sinus et sinus saturés en vitesse

3.2. Frottement sec et charge

3.2.1. Banc à vérin à câble

3.2.1.1. Présentation du système

Le banc à vérin à câble du CEA est un prototype à un degré de liberté. Il est constitué d'un moto-réducteur qui entraîne, par un réducteur à poulie-courroie, la rotation de l'écrou d'un système vis-écrou dont la vis creuse, bloquée en rotation, entraîne en translation un câble fixé à l'intérieur de la vis. Le chemin de câble est un système de poulies modulables en nombre et disposition, permettant de faire varier les conditions de frottements et de tension du câble. Des masses, suspendues aux extrémités d'un câble solidaire d'une poulie de charge de grand diamètre, permettent de faire varier la charge statique en sortie de la chaîne de transmission (voir photos Figure 3-3 et schéma Figure 3-4).

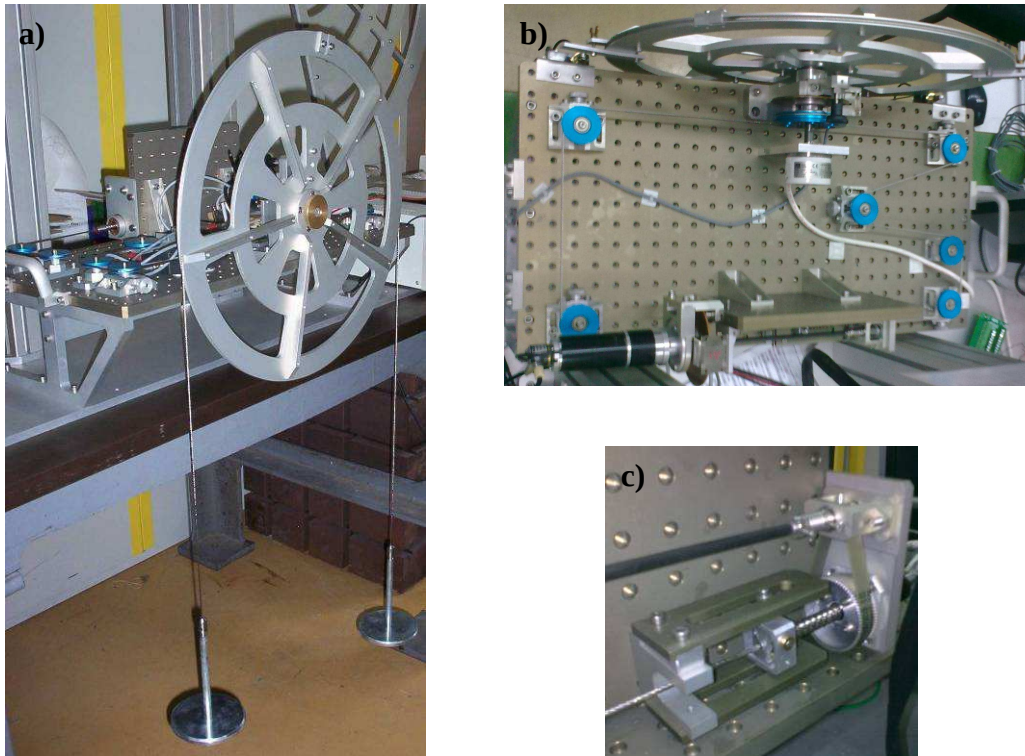


Figure 3-3 : a) Vue d'ensemble du banc d'essai – Roue de chargement en sortie
b) Vue de dessus du banc d'essai – Chemin de câble
c) Vue du système Poulies-Courroie-Ecrou-Vis

Ce banc d'essai a été conçu pour étudier la technologie du vérin à câble qui est notamment utilisée pour l'actionnement des axes de l'orthèse ABLE du CEA. Le banc permet d'étudier plus facilement les effets des frottements en testant différents systèmes vis-écrou, différentes poulies-courroie, etc... afin d'aider à la conception et à la modélisation des orthèses.

Pour notre étude, nous avons utilisé un moteur Maxon RE40G de constante de couple 0,0603 N.m/A, un réducteur de rapport égal à 4,3, un système poulie-courroie Binder Magnetic T2 de rapport 1,083, une vis Thomson PRM 1010 (rayon de vis de 4,2 mm et pas de 10 mm), et un câble Carstahl en inox.

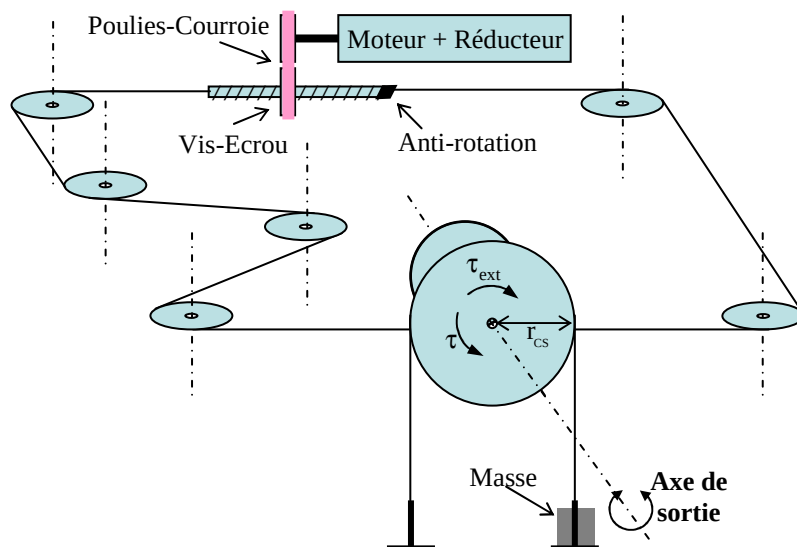


Figure 3-4 : Schéma du banc à vérin à câble

Une commande PI en vitesse a été mise en place pour réaliser des trajectoires du type sinus saturés en vitesse (Figure 3-2.c). La vitesse maximale $V_{\max}$ est fixée à 310 rad/s côté moteur. Avec un rapport de transmission de 457,44, on atteint donc une vitesse de 0,678 rad/s côté articulaire, pour la poulie de sortie. La fréquence d'acquisition des positions et du courant moteur est de 1 kHz. La fréquence de coupure du filtre passe-bande et du filtre parallèle appliqués à chaque essai lors de l'identification dynamique est de 4 Hz.

3.2.1.2. Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse du banc à vérin à câble est le suivant :

$$\tau = J\ddot{q} + \tau_{\text{ext}} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (3.1)$$

où J est l'inertie de tous les éléments ramenée en sortie, et le couple extérieur τ_{ext} dépend de la masse ajoutée M_a suspendue sur la poulie de sortie :

$$\tau_{\text{ext}} = M_a g r_{\text{CS}} + M_a r_{\text{CS}}^2 \ddot{q} \quad (3.2)$$

avec :

- la masse ajoutée $M_a \in \{0 ; 0,985 ; 1,950 ; 2,924 ; 4,046\}$,
- $g = 9,81$ si la masse M_a est fixée sur le brin droit du câble de la poulie de charge,
- $g = -9,81$ si la masse est fixée sur le brin gauche,
- r_{CS} le rayon de la poulie de charge en sortie égal à 0,2505 m.

Le couple de charge τ_{load} est donc ici :

$$\tau_{\text{load}} = J\ddot{q} + \tau_{\text{ext}} = J\ddot{q} + M_a g r_{\text{CS}} + M_a r_{\text{CS}}^2 \ddot{q} \quad (3.3)$$

Et le modèle dynamique inverse s'écrit alors :

$$\tau = J\ddot{q} + M_a g r_{\text{CS}} + M_a r_{\text{CS}}^2 \ddot{q} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (3.4)$$

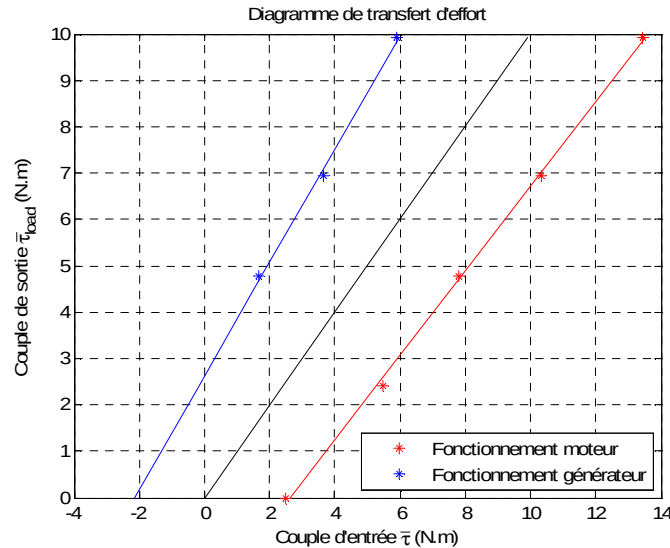
3.2.1.3. Diagramme de transfert

Les essais sont réalisés avec une vitesse de consigne constante $\dot{q}_0$ très faible (ici 0,5% de $V_{\max}$) et pour différentes masses fixées en sortie de l'axe, sur le brin de câble de droite. On obtient ainsi des échantillons dans le quadrant 1 (mode moteur) et dans le quadrant 2 (mode générateur). De plus, l'accélération moyenne étant nulle, les efforts d'inertie sont négligés. Pour un cas de charge donné et chaque signe de vitesse, on calcule le couple de sortie égal au couple de charge moyen $\bar{\tau}_{\text{load}} = M_a g r_{\text{CS}}$, et on calcule la moyenne $\bar{\tau}$ du couple d'entrée τ sur chaque palier.

Les valeurs obtenues pour $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}_{\text{load}}$, ainsi que les écarts-types sur τ , sont résumés dans le Tableau 3-1 (Les écarts-types importants proviennent essentiellement des variations du couple dues à l'ondulation de la vis). A partir de ces valeurs, on peut tracer le diagramme de transfert d'effort de $\bar{\tau}_{\text{load}}$ en fonction de $\bar{\tau}$: Figure 3-5.

Tableau 3-1 : Résultats des essais mécaniques sur le banc à vérin à câble

Masse en sortie	Couple de charge	Couple d'entrée Quadrant 1 moteur		Couple d'entrée Quadrant 2 générateur	
		moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
0,000 kg	0,000 N.m	2,487 N.m	0,435 N.m	/	/
0,985 kg	2,417 N.m	5,486 N.m	0,636 N.m	/	/
1,950 kg	4,785 N.m	7,787 N.m	0,477 N.m	1,678 N.m	0,466 N.m
2,824 kg	6,930 N.m	10,340 N.m	0,476 N.m	3,658 N.m	0,490 N.m
4,046 kg	9,929 N.m	13,457 N.m	0,550 N.m	5,894 N.m	0,548 N.m


Figure 3-5 : Diagramme de transfert d'effort pour le banc à vérin à câble

A partir du diagramme de transfert, nous obtenons une approximation des paramètres du modèle de P. Garrec (voir paragraphe 2.2.5) :

$$\begin{cases} \rho_D = 0,909 \\ \rho_I = 0,818 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 2,618 \\ y_0 = 2,639 \end{cases} \quad (3.5)$$

L'accélération moyenne étant nulle et la vitesse étant très faible, les efforts d'inertie et de frottement visqueux sont négligeables. Ainsi, la variation du couple d'entrée est due au couple de charge et aux frottements secs. Sur le diagramme de transfert, on observe donc un frottement sec qui augmente avec la charge puisque les 2 droites de transfert s'écartent de la droite $\tau_{load} = \bar{\tau}$: cela est confirmé par les paramètres ρ_I et ρ_D de (3.5) qui sont différents de 1. Ils sont de plus non égaux ce qui montre une dissymétrie entre le fonctionnement moteur et le fonctionnement générateur. Cependant, on remarque dans le Tableau 3-1 que les écarts-types sur τ sont du même ordre de grandeur que l'amplitude de la variation du frottement avec la charge. La variation de charge ne semble donc pas assez importante pour que cela soit significatif au niveau du frottement.

3.2.1.4. Identification du modèle classique masse par masse

Les essais utilisés ici sont des sinus saturés en vitesse. Seuls les paliers de vitesse constante sont exploités. Compte tenu de la faible course de la vis de 3,3 cm et de

l'accélération maximum admissible par le système, les paliers de vitesse suffisamment longs sont obtenus avec des consignes de palier de : 0,5% ; 1% ; 2% ; 4% ; 6% ; 8% ; 10% ; 20% et 40% de $V_{\max}$.

Pour chacune de ces vitesses, on réalise 9 essais : un premier essai à vide, puis 8 essais avec des masses en sortie permettant de créer un couple de charge. Quatre masses différentes sont utilisées : 0,985 kg ; 1,950 kg ; 2,924 kg et 4,046 kg. Pour chacune des masses, on réalise un essai avec un couple de charge positif (masse fixée au brin droit du câble de la poulie de chargement) et un essai avec un couple de charge négatif (masse fixée au brin gauche du câble). Ceci permet d'explorer les 4 quadrants du plan $(\dot{q}, \tau_{\text{load}})$ défini par la Figure 1-5.a en 1.3.2.11.

Pour chaque cas de charge, connaissant la valeur de la masse M_a , on réécrit le modèle (3.4) de la manière suivante :

$$\tau - M_a g r_{CS} = (J + M_a r_{CS}^2) \ddot{q} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (3.6)$$

Dans un premier temps, on identifie les paramètres, pour chaque cas de charge, par moindres carrés en utilisant le modèle d'identification suivant :

$$\begin{cases} y = \mathbf{D}\boldsymbol{\chi} \\ y = \tau - M_a g r_{CS} \\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \ddot{q} & \text{sign}(\dot{q}) & \dot{q} & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} J + M_a r_{CS}^2 & F_C & F_V & \tau_{\text{off}} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (3.7)$$

Seuls les échantillons sur les paliers ayant été retenus, le paramètre $J + M_a r_{CS}^2$ est non identifiable et donc considéré comme négligeable. Le paramètre τ_{off} est également supprimé de l'identification car trop faible. Finalement, cela permet donc d'observer l'évolution du paramètre de frottement F_C en fonction du couple de charge $\bar{\tau}_{\text{load}} = M_a g r_{CS}$.

Dans un second temps, on réalise à nouveau des identifications pour chaque cas de charge, en utilisant le même système (3.7), mais en sélectionnant les échantillons qui correspondent au mode moteur (quadrants 1 et 3), puis ceux qui correspondent au mode générateur (quadrants 2 et 4).

Dans un troisième temps, on réalise une identification pour chaque quadrant, en sélectionnant les échantillons appropriés.

Ainsi, pour chaque cas de charge, 7 identifications ont été faites. Pour chaque identification, les paramètres $J + M_a r_{CS}^2$ et τ_{off} ayant des écarts-types élevés sont négligés.

Le Tableau 3-2 donne les valeurs identifiées de F_C et F_V pour chaque cas de charge, tous quadrants confondus, et sur la Figure 3-6 on peut voir le graphe de F_C en fonction de la valeur absolue du couple de charge $|\bar{\tau}_{\text{load}}|$.

Le Tableau 3-3 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. Le Tableau 3-4 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. On trace le graphe de F_C en fonction de $|\bar{\tau}_{load}|$ pour les 2 modes (moteur et générateur) : Figure 3-7.

Enfin le Tableau 3-5 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons seulement dans le quadrant 1, le Tableau 3-6 pour le quadrant 2, le Tableau 3-7 pour le quadrant 3 et le Tableau 3-8 pour le quadrant 4. L'évolution de F_C en fonction de $|\bar{\tau}_{load}|$ pour chacun des quadrants est donnée Figure 3-8.

Pour les 2 premières charges (à vide et 0,985 kg), il n'y a pas d'échantillons en mode générateur, donc pas d'identification. A l'extrémité de chaque tableau sont donnés les écarts-types maximaux multipliés par 2 pour les paramètres identifiés.

Les différents écarts-types obtenus sont faibles et les paramètres sont donc bien identifiés dans chaque cas. Soient σ_{F_C} l'écart-type maximal du paramètre F_C et ΔF_C l'amplitude de variation du frottement sec avec la charge, on observe que : $\frac{2\sigma_{F_C}}{\Delta F_C} \leq 3\%$. On remarque de plus que l'évolution du frottement sec n'est pas le même selon le quadrant de fonctionnement de l'axe.

Les 2 méthodes ont permis d'observer que le frottement sec varie bien avec la charge. Cette variation a une allure linéaire et différente selon le mode de fonctionnement de l'axe.

Tableau 3-2 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	2,491	3,068	2,918	3,211	3,639	$\leq 0,012$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	28,963	25,999	27,950	26,602	25,305	$\leq 0,417$

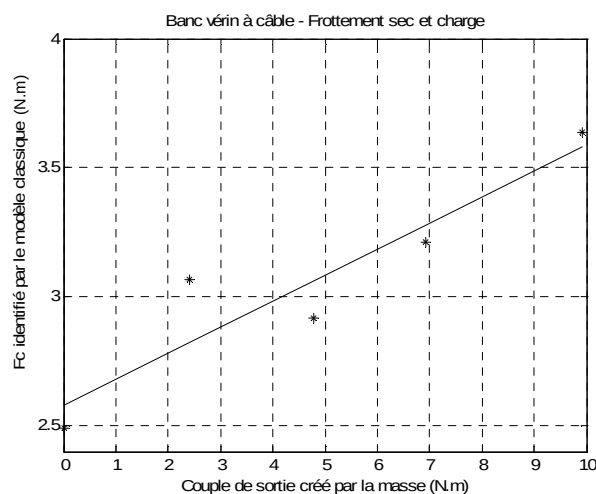


Figure 3-6 : Banc à vérin à câble – Frottement sec en fonction de la charge

Tableau 3-3 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – mode moteur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	2,505	3,115	3,002	3,518	3,619	$\leq 0,018$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	28,712	25,384	27,687	25,468	25,721	$\leq 0,526$

Tableau 3-4 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – mode générateur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	/	/	2,917	2,988	3,736	$\leq 0,016$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	/	/	24,789	25,773	22,657	$\leq 0,851$

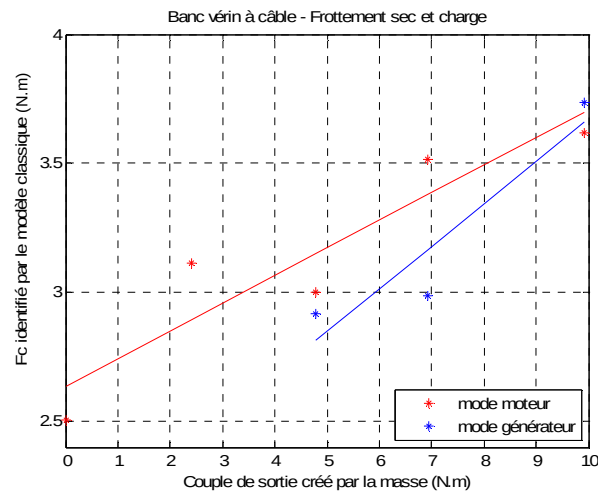


Figure 3-7 : Banc à vérin à câble – Frottement sec fonction de la charge selon les 2 modes

Tableau 3-5 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – quadrant 1 moteur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	2,386	2,778	2,778	3,227	3,318	$\leq 0,023$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	28,239	24,791	27,302	24,655	25,216	$\leq 0,768$

Tableau 3-6 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – quadrant 2 générateur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	/	/	2,978	3,121	3,893	$\leq 0,021$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	/	/	26,056	24,203	20,921	$\leq 1,273$

Tableau 3-7 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – quadrant 3 moteur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	2,621	3,450	3,220	3,800	3,916	$\leq 0,030$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	29,489	26,033	28,184	26,349	26,226	$\leq 0,782$

Tableau 3-8 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – quadrant 4 générateur

Masse ajoutée	0,000 kg	0,985 kg	1,950 kg	2,824 kg	4,046 kg	2*ec-type
F_C (N.m)	/	/	2,864	2,844	3,567	$\leq 0,023$
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	/	/	23,503	27,442	24,323	$\leq 1,061$

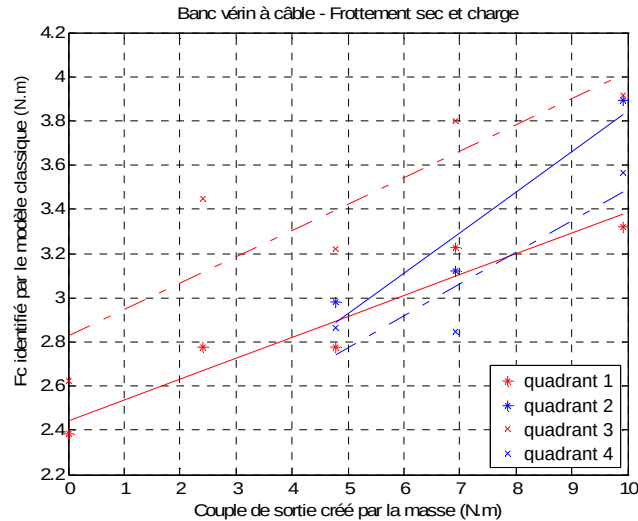


Figure 3-8 : Banc à vérin à câble – Frottement sec fonction de la charge selon les 4 quadrants

3.2.2. EMPS

3.2.2.1. Présentation du système

Le bras EMPS (Electro-Mechanical Positioning System) de l'Université de Nantes est un système électro-mécanique de positionnement linéaire de haute précision (Figure 3-9). Il est constitué d'un moteur Maxon DC qui est alimenté par un amplificateur à MLI (modulation de largeur d'impulsion) quatre quadrants et contrôlé en courant par une boucle de courant, un système de positionnement à vis à bille haute précision Star, et un codeur incrémental HP 500 traits/tour. La vis à bille transforme le mouvement de rotation du moteur en un déplacement linéaire du chariot, sortie de l'articulation prismatique. Le banc d'essai EMPS est une configuration standard de système de transmission pour une articulation prismatique de robot, de machine-outil, de dispositif haptique... Il est connecté à un contrôleur numérique dSPACE permettant une commande simple et une acquisition des données en utilisant les logiciels Matlab et Simulink [Mathworks].

L'EMPS peut être fixé soit en position horizontale (Figure 3-9), soit en position verticale avec l'axe z définissant le sens de déplacement positif orienté vers le haut (le ciel) dans le sens opposé à l'accélération de la gravité (Figure 3-10.a), soit en position verticale avec l'axe z orienté vers le bas (centre de la Terre) dans le même sens que l'accélération de la gravité (Figure 3-10.b). Des masses peuvent être fixées sur le chariot afin de faire varier la charge en sortie de l'articulation.

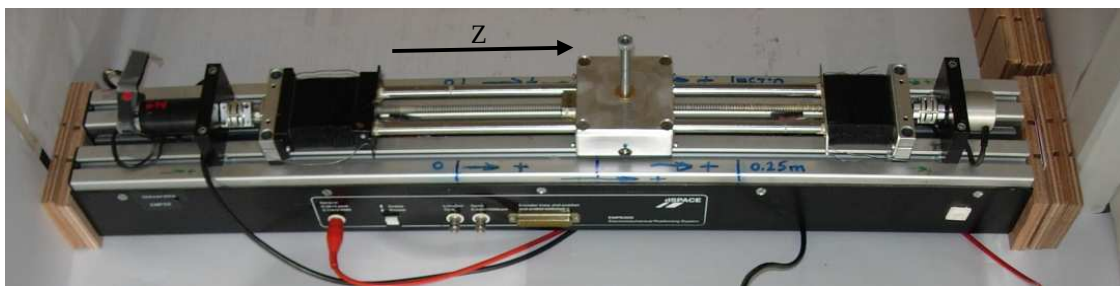


Figure 3-9 : Le bras EMPS en position horizontale

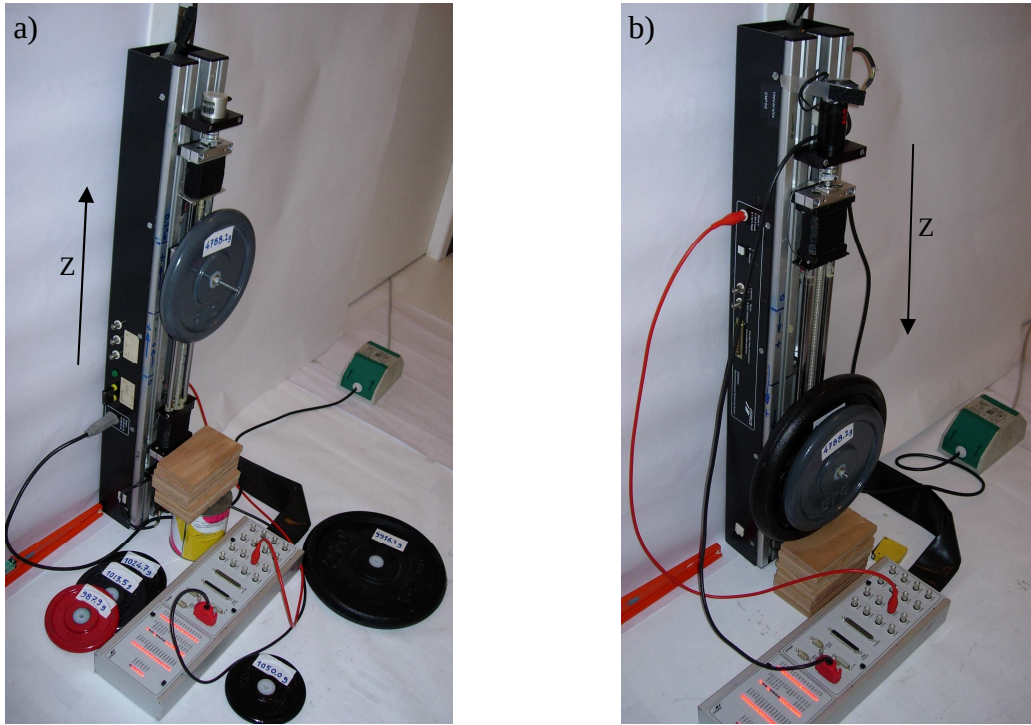


Figure 3-10 : a) Le bras EMPS chargé en position verticale, z positif vers le haut + masses
b) Le bras EMPS chargé en position verticale, z positif vers le bas

La vitesse maximale du chariot est $V_{\max} = 0,125 \text{ m/s}$. Des trajectoires trapézoïdales en vitesse sont réalisées afin d'avoir des phases d'accélération et de décélération, ainsi que des paliers à vitesse constante (Figure 3-2.b). La période d'échantillonnage est de 4 ms soit une fréquence de 250 Hz pour les essais à 0,5% de $V_{\max}$, de 2 ms soit 500 Hz pour les essais de 2 à 10% de $V_{\max}$, et de 0,2 ms soit 5 KHz pour les essais de 20 à 100% de $V_{\max}$. La fréquence de coupure du filtre passe-bande et du filtre parallèle utilisés lors des identifications dynamiques est de 20 Hz pour les essais entre 0 et 10% de la vitesse maximale et de 80 Hz pour les essais plus rapides.

3.2.2.2. Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse de l'EMPS s'écrit :

$$\tau = m_{la} \ddot{q} + m_0 \ddot{q} - m_0 g + \tau_{\text{ext}} + F_v \dot{q} + F_c \text{sign}(\dot{q}) + \tau_{\text{off}} \quad (3.8)$$

où :

- m_{la} est la masse équivalente de tous les éléments en rotation dans la chaîne d'actionnement,
- m_0 est la masse de tous les éléments en translation dans la chaîne d'actionnement,
- g est la projection de l'accélération de la pesanteur sur l'axe z de l'articulation prismatique, telle que : $g = 9,81$ quand l'axe z est orienté vers la terre, $g = -9,81$ quand l'axe z est orienté vers le ciel et $g = 0$ quand l'axe z est horizontal.
- τ_{ext} est la force extérieure qui dépend de la masse ajoutée m_a fixée au chariot :

$$\tau_{\text{ext}} = m_a \ddot{q} - m_a g \quad (3.9)$$

avec $m_a \in \{0 ; 1,0500 ; 3,0266 ; 4,7882 ; 9,9162 ; 14,704\}$.

La force de charge τ_{load} est donc ici :

$$\tau_{load} = (m_{la} + m_0) \ddot{q} - m_0 g + \tau_{ext} = (m_{la} + m_0) \ddot{q} - m_0 g + m_a (\ddot{q} - g) \quad (3.10)$$

Et le modèle dynamique inverse s'écrit alors :

$$\tau = (m_{la} + m_0) \ddot{q} - m_0 g + m_a (\ddot{q} - g) + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{off} \quad (3.11)$$

3.2.2.3. Diagramme de transfert

On étudie ici l'effort de charge moyen $\bar{\tau}_{load}$ en fonction de l'effort moyen d'entrée $\bar{\tau}$ sur un seul palier de vitesse de consigne $\dot{q}_0 = 0,5\% \cdot V_{max}$. Les essais sont réalisés réalisés en positionnant l'EMPS verticalement afin de faire varier la charge plus simplement, et dans les 2 sens pour avoir des mesures dans les 4 quadrants du plan défini Figure 1-5.a.

Afin de calculer $\bar{\tau}_{load}$, on a tout d'abord besoin d'avoir une estimation de m_0 . Pour cela, des échantillons sont sélectionnés sur des paliers de vitesse entre 0,5% et 100% de V_{max} , l'EMPS étant placé dans les 2 sens verticaux et sans masse ajoutée ($m_a = 0$). On identifie donc la masse m_0 par les moindres carrés linéaires en utilisant le modèle d'identification $y = D\chi$ suivant :

$$\begin{cases} y = \tau \\ D = [\ddot{q} \quad -g \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad 1] \\ \chi = [m_{la} + m_0 \quad m_0 \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{off}]^T \end{cases} \quad (3.12)$$

On obtient les résultats présentés dans le Tableau 3-9. Les paramètres $m_{la} + m_0$ et τ_{off} sont non identifiables et ont été négligés. L'écart-type relatif obtenu pour le paramètre m_0 étant très faible, on considère que m_0 est bien identifié et que la valeur de 0,7349 kg est fiable.

Tableau 3-9 : Valeurs identifiées à vide avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	Écart-type relatif (%)
m_0	0,7349 kg	0,112
F_C	21,933 N	0,040
F_V	315,854 N.s.m ⁻¹	0,150

Les essais exploités pour tracer le diagramme de transfert sont ceux réalisés à 0,5% de V_{max} , avec l'EMPS positionné dans les 2 sens verticaux et pour les 6 cas de charge. Pour chaque cas de charge et pour chaque quadrant du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$, on calcule alors l'effort de

sortie égal à l'effort de charge moyen par $\bar{\tau}_{load} = -(m_0 + m_a)g$ (l'accélération moyenne étant nulle) et on calcule la moyenne $\bar{\tau}$ de l'effort d'entrée τ (obtenu à partir de la mesure des courants moteurs) sur le palier de vitesse.

Les valeurs obtenues pour $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}_{load}$, ainsi que les écarts-types sur τ sont résumés dans le Tableau 3-10. A partir de ces valeurs, on peut tracer le diagramme de transfert d'effort : Figure 3-11.

Tableau 3-10 : Résultats des essais mécaniques sur le prototype EMPS

Masse en sortie	Effort de sortie	Effort d'entrée pour $\dot{q}_0 > 0$		Effort d'entrée pour $\dot{q}_0 < 0$	
		moyenne	écart-type	moyenne	écart-type
14,704 kg	-151,554 N	-117,943 N	3,644 N	-211,488 N	8,981 N
9,916 kg	-104,583 N	-76,794 N	3,354 N	-154,495 N	7,915 N
4,788 kg	-54,278 N	-31,203 N	3,384 N	-88,841 N	4,070 N
3,027 kg	-37,002 N	-14,805 N	3,733 N	-66,602 N	3,138 N
1,050 kg	-17,608 N	/	/	-42,021 N	2,347 N
0,000 kg	-7,307 N	/	/	-30,039 N	2,150 N
0,000 kg	7,307 N	28,209 N	2,334 N	/	/
1,050 kg	17,608 N	39,316 N	2,383 N	/	/
3,027 kg	37,002 N	60,256 N	2,376 N	16,847 N	2,778 N
4,788 kg	54,278 N	79,511 N	2,504 N	34,065 N	2,387 N
9,916 kg	104,583 N	136,385 N	3,253 N	83,233 N	2,420 N
14,704 kg	151,554 N	189,652 N	4,228 N	128,083 N	3,244 N

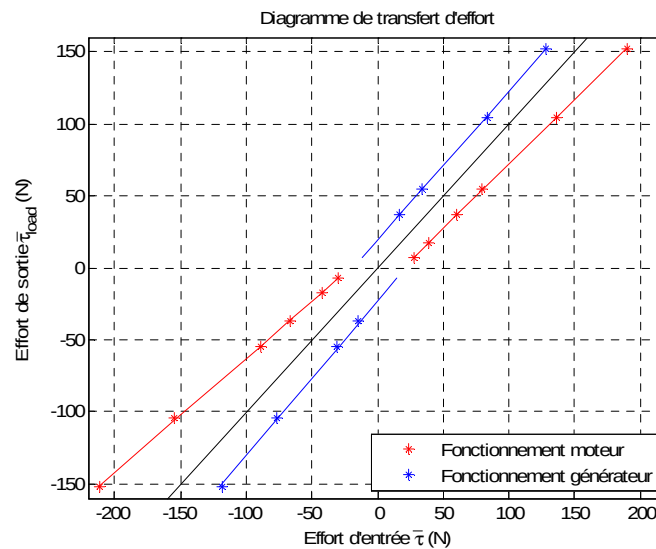


Figure 3-11 : Diagramme de transfert d'effort pour le prototype EMPS

A partir du diagramme de transfert, nous obtenons une approximation des paramètres du modèle de P. Garrec (voir paragraphe 2.2.5) :

$$\begin{cases} \rho_D = 0,828 \\ \rho_I = 0,965 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 18,937 \\ y_0 = 22,337 \end{cases} \quad (3.13)$$

A partir du diagramme de transfert Figure 3-11 et des valeurs (3.13), on observe un frottement sec variable avec l'effort de charge. On remarque de plus que les écarts-types obtenus pour la force d'entrée sont inférieurs aux variations sur l'effort de frottement. On observe enfin une dissymétrie du frottement entre les 4 quadrants de fonctionnement.

3.2.2.4. Identification du modèle classique masse par masse

Les essais utilisés ici sont des trajectoires trapézoïdales en vitesse entre 0,5% et 100% de $V_{\max}$. Seuls les échantillons obtenus sur le palier de vitesse constante sont exploités. Pour chaque palier de vitesse, on réalise 12 essais correspondant aux 6 cas de charge et aux 2 sens verticaux de l'EMPS.

L'identification à vide, décrite au paragraphe précédent, avec le système linéaire (3.12), est à nouveau exploitée ici afin de fixer la valeur de la masse à vide : $m_0 = 0,7349$ kg.

Pour chaque cas de charge, connaissant la valeur de la masse à vide m_0 ainsi que la valeur de la masse ajoutée m_a , on réécrit le modèle dynamique (3.11) de la manière suivante :

$$\tau + (m_0 + m_a)g = (m_{la} + m_0 + m_a)\ddot{q} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (3.14)$$

Dans une première étape, on peut alors identifier les paramètres, pour chaque cas de charge, par moindres carrés en utilisant le modèle d'identification $y = \mathbf{D}\chi$ suivant :

$$\begin{cases} y = \tau + (m_0 + m_a)g \\ \mathbf{D} = [\ddot{q} \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad 1] \\ \chi = [m_{la} + m_0 + m_a \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{\text{off}}]^T \end{cases} \quad (3.15)$$

Seuls les échantillons sur les paliers ayant été retenus, le paramètre $m_{la} + m_0 + m_a$ est non identifiable et donc considéré comme négligeable. On peut donc observer l'évolution du paramètre de frottement F_C en fonction du couple de charge $\tau_{\text{load}} = -(m_0 + m_a)g$.

Dans une deuxième étape, on réalise à nouveau des identifications pour chaque cas de charge, en utilisant le même système (3.15), mais en sélectionnant seulement ceux qui correspondent au mode moteur (quadrants 1 et 3), puis ceux qui correspondent au mode générateur (quadrants 2 et 4).

Et enfin dans une troisième étape, on réalise une identification pour chaque quadrant en sélectionnant les échantillons appropriés.

Ainsi, pour chaque cas de charge, 7 identifications ont été faites. Les paramètres pour lesquels les écarts-types obtenus sont trop grands, sont non identifiables et supprimés.

Le Tableau 3-11 donne les valeurs identifiées de F_C et F_V pour chaque cas de charge, tous modes confondus, et sur la Figure 3-12 on peut voir le graphe de F_C en fonction de la valeur absolue de la force de charge $|\tau_{\text{load}}|$.

Le Tableau 3-12 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. Le Tableau 3-13 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. On trace le graphe de F_C en fonction de $|\tau_{load}|$ pour les 2 modes (moteur et générateur) : Figure 3-13.

Enfin le Tableau 3-14 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons seulement dans le quadrant 1, le Tableau 3-15 pour le quadrant 2, le Tableau 3-16 pour le quadrant 3 et le Tableau 3-17 pour le quadrant 4. L'évolution de F_C en fonction de $|\tau_{load}|$ pour chacun des quadrants est donnée Figure 3-14.

Pour les 2 premières charges (à vide et 1,0500 kg), il n'y a pas d'échantillons en mode générateur, donc pas d'identification. A l'extrémité de chaque tableau sont donnés les écarts-types maximaux multipliés par 2.

Les différents écarts-types obtenus sont faibles et les paramètres sont donc bien identifiés dans chaque cas. Soient σ_{F_C} l'écart-type maximal du paramètre F_C et ΔF_C l'amplitude de variation du frottement sec avec la charge, on remarque que : $\frac{2\sigma_{F_C}}{\Delta F_C} \leq 0,7\%$. Cela montre que cette variation ne peut être négligée pour ce type transmission si la charge fluctue. Par ailleurs, on observe une variation linéaire du frottement avec la charge, qui est de plus très différente entre les 4 quadrants de fonctionnement.

Tableau 3-11 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	21,933	21,497	23,045	25,101	31,927	37,934	$\leq 0,060$
F_V (N.s.m ⁻¹)	315,854	386,152	411,906	416,922	426,220	442,905	$\leq 3,195$
τ_{off} (N)	/	-1,069	-1,655	-2,268	-3,545	-3,520	$\leq 0,056$

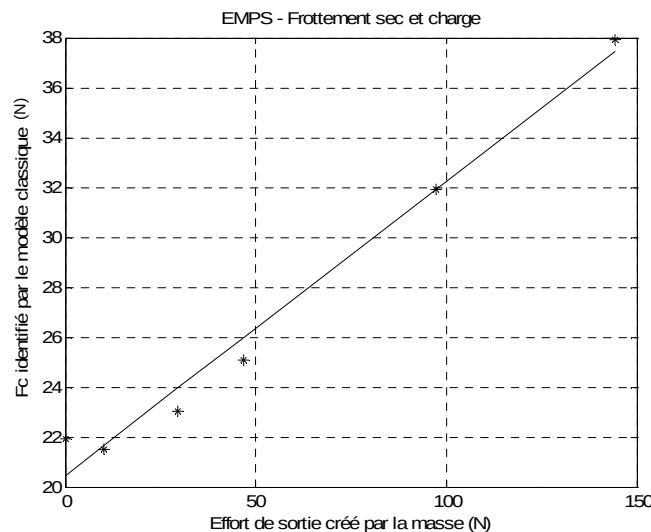


Figure 3-12 : EMPS – Frottement sec fonction de la charge

Tableau 3-12 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – mode moteur

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	21,934	21,924	25,886	29,287	39,892	48,429	$\leq 0,044$
F_V (N.s.m ⁻¹)	315,879	379,425	382,554	381,069	373,840	363,933	$\leq 2,299$
τ_{off} (N)	/	-1,048	-3,723	-5,253	-9,534	-11,724	$\leq 0,041$

Tableau 3-13 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – mode générateur

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	/	/	20,298	21,046	24,041	28,153	$\leq 0,026$
F_V (N.s.m ⁻¹)	/	/	390,357	410,947	477,085	508,441	$\leq 2,749$
τ_{off} (N)	/	/	0,626	0,874	2,388	4,084	$\leq 0,024$

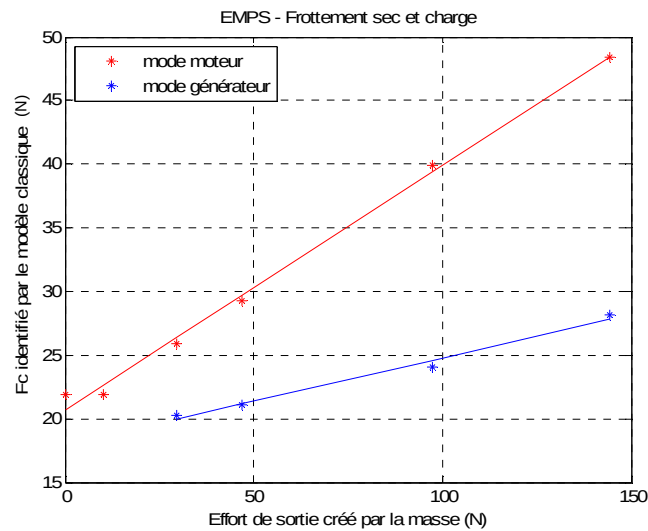


Figure 3-13 : EMPS – Frottement sec fonction de la charge selon les 2 modes

Tableau 3-14 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – quadrant 1

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	22,468	21,474	22,646	24,376	30,670	37,152	$\leq 0,037$
F_V (N.s.m ⁻¹)	217,276	293,264	329,203	336,772	326,440	296,284	$\leq 2,029$

Tableau 3-15 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – quadrant 2

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	/	/	19,052	19,206	20,791	23,240	$\leq 0,029$
F_V (N.s.m ⁻¹)	/	/	553,705	613,679	593,915	620,385	$\leq 3,147$

Tableau 3-16 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – quadrant 3

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_C (N)	21,307	22,299	29,049	34,170	49,067	59,602	$\leq 0,085$
F_V (N.s.m ⁻¹)	416,371	467,183	435,665	418,865	422,235	433,810	$\leq 4,236$

Tableau 3-17 : Paramètres de frottement identifiés pour chaque cas de charge – EMPS – quadrant 4

Masse ajoutée	0,0000 kg	1,0500 kg	3,0266 kg	4,7882 kg	9,9162 kg	14,704 kg	2*ec-type
F_c (N)	/	/	21,344	22,406	27,178	32,955	$\leq 0,034$
F_v (N.s.m ⁻¹)	/	/	279,903	319,677	362,635	398,853	$\leq 3,962$

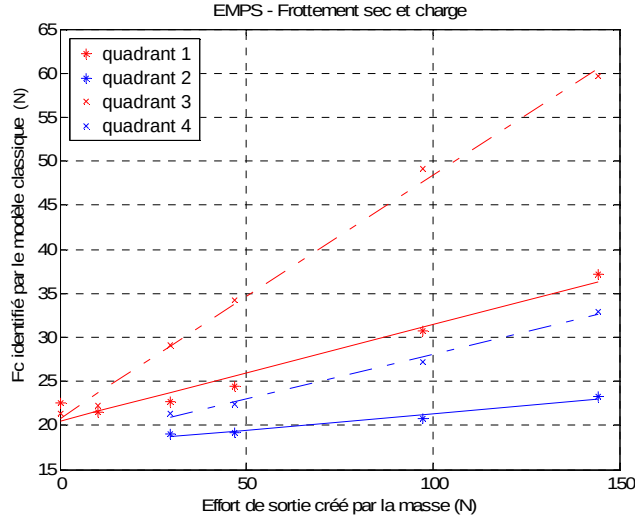


Figure 3-14 : EMPS – Frottement sec fonction de la charge selon les 4 quadrants

3.2.3. Robot Stäubli RX130L

3.2.3.1. Présentation du système

Le robot Stäubli RX130L est un robot industriel à 6 articulations rotoïdes (Figure 3-15). Les axes sont composés de transmissions à réducteur épicycloïdal pour les 4 premiers axes et de type roue et vis pour les 2 derniers qui sont couplés. Ils sont équipés de moteurs synchrones Baldor BSM. L'exemplaire étudié appartient à la société AREVA NC [Areva].

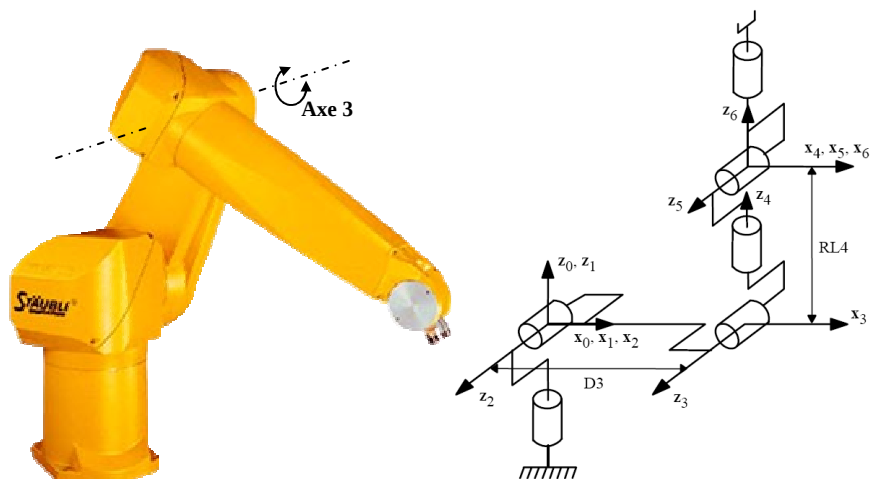


Figure 3-15 : Robot Stäubli RX130L et placement des repères

Les caractéristiques des axes 1 à 6 sont données dans le Tableau 3-18 : rapport de transmission, couple nominal moteur et vitesse articulaire maximale admissible par la commande. La Figure 3-15 donne le placement des repères pour la représentation DHM et le

Tableau 3-19 donne les paramètres géométriques. Les différentes trajectoires réalisées en boucle fermée sur le RX130L sont des créneaux de vitesse, des sinus, et des sinus saturés en vitesse (Figure 3-2).

La période d'échantillonnage pour les essais utilisés afin de tracer les diagrammes de transfert est de 2,9 ms (soit une fréquence d'acquisition de 341,3 Hz). Les diagrammes de transfert du paragraphe 3.2.3.2 sont tracés pour tous les axes.

A partir du paragraphe 3.2.3.3, seul l'axe 3 du RX130L est étudié. Cet axe a été choisi pour l'étude car il est soumis à la gravité (contrairement à l'axe 1 et il est donc plus facile de faire varier la charge) et, contrairement à l'axe 2, l'axe 3 n'est pas compensé en effort de gravité à l'aide d'un ressort. Lors des essais dynamiques sur l'axe 3, les autres axes sont bloqués sous asservissement dans une position fixe : $q_1 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$ et $q_2 = \pi/2$ (axe 2 vertical, dirigé vers le haut : Figure 3-16). On peut de plus fixer des masses à l'extrémité du robot, dans l'alignement des axes 4 et 6. Le repère 3 est repositionné pour cette étude : voir Figure 3-16.

Pour les essais dynamiques sur l'axe 3, la période d'acquisition est de 3,9 ms (soit une fréquence d'acquisition de 256,5 Hz) pour les trajectoires avec des vitesses inférieures à 4% de la vitesse maximale, et de 1,95 ms (soit une fréquence d'acquisition de 513 Hz) pour les vitesses supérieures. Pour l'identification dynamique de l'axe 3, la fréquence de coupure du filtre passe-bande appliqué à chaque essai est de 100 Hz, et celle du filtre parallèle est prise égale à 10 Hz.

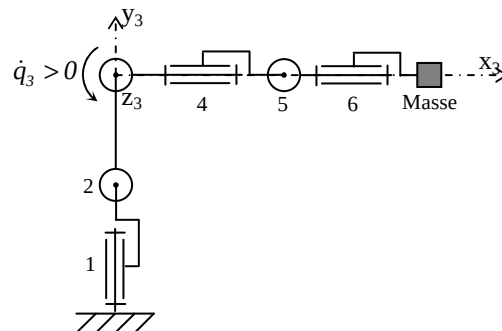


Figure 3-16 : Schéma avec axes 1, 2, 4, 5 et 6 bloqués

Tableau 3-18 : Caractéristiques axes 1 à 6 – Staubli RX130L

	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 4	Axe 5	Axe 6
Rapport de transmission	129,3913	129,3913	101,0909	88	75	32
Couple nominal moteur	3,56 N.m	3,56 N.m	2,51 N.m	0,58 N.m	1,45 N.m	0,94 N.m
Vitesse articulaire max	1,50 rad/s	0,85 rad/s	1,20 rad/s	3,00 rad/s	2,20 rad/s	3,00 rad/s

Tableau 3-19 : Paramètres géométriques, convention DHM – Staubli RX130L

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	$D_3 = 0,625 \text{ m}$	θ_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	$RL_4 = 0,925 \text{ m}$
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6	0

3.2.3.2. Diagrammes de transfert des axes 1 à 6

Les essais ont été réalisés axe par axe avec une consigne triangulaire en créneaux de vitesse (voir Figure 3-2.a) avec une vitesse constante très lente (entre 0,004 et 0,005 rad/s selon les axes) afin de négliger le frottement visqueux et l'inertie. Afin de négliger l'effet de la gravité sur l'axe étudié, on choisit une configuration du robot adaptée pour chaque axe (voir Tableau 3-20 et Figure 3-18 : configuration n° j pour l'axe j) et une amplitude de variation de la position très faible (environ 0,12 rad).

Tableau 3-20 : Configurations pour les diagrammes de transfert – Stäubli RX130L

Configuration n°	1	2	3	4	5	6
θ_1	0	0	0	0	0	0
θ_2	$\pi/2$	$\pi/2$	0	0	0	0
θ_3	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$
θ_4	0	0	0	0	0	0
θ_5	0	0	0	0	$-\pi/2$	0
θ_6	0	0	0	0	0	0
Bras de levier L_j	1,690 m	1,660 m	1,035 m	1,000 m	1,000 m	0,350 m

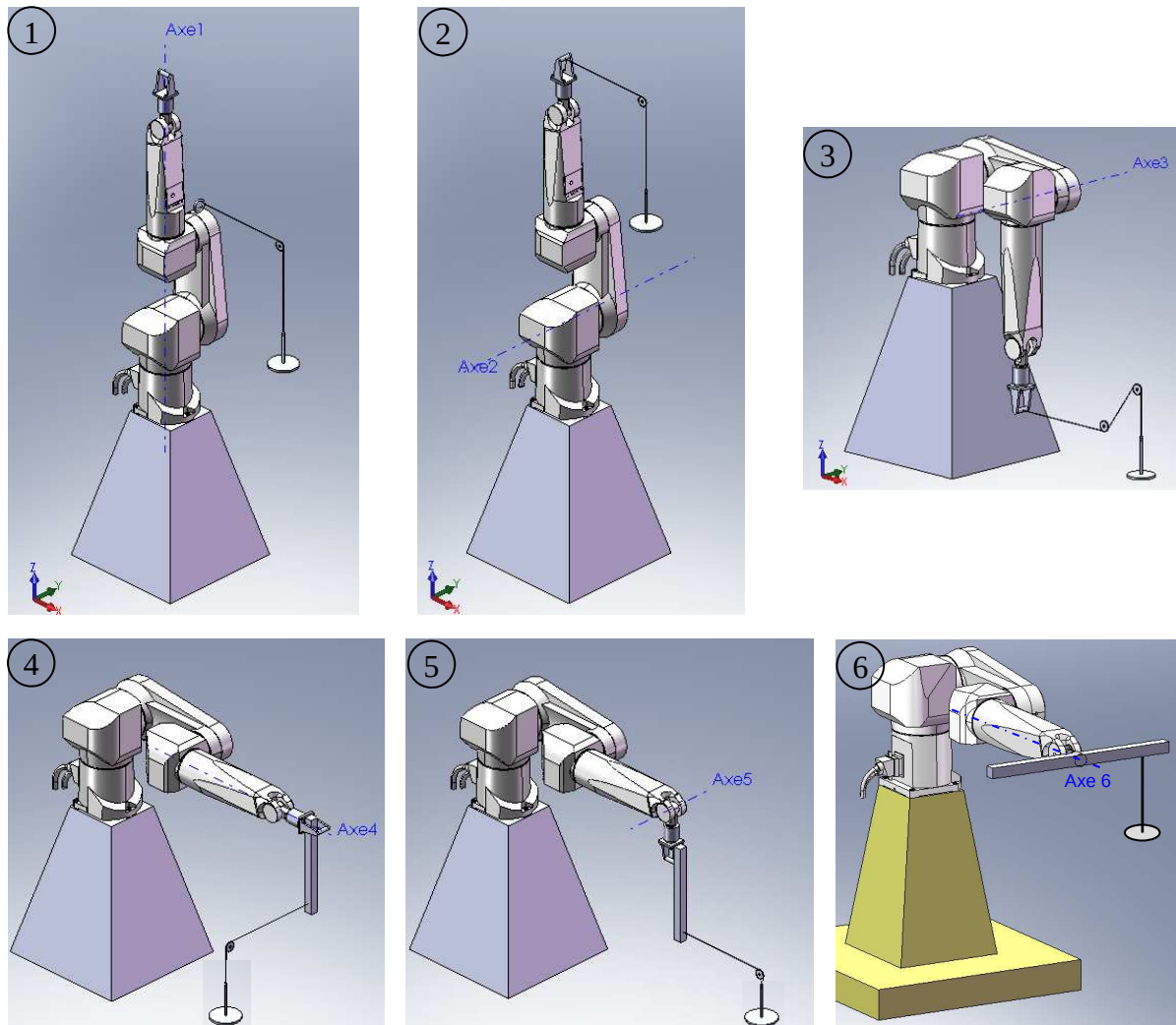


Figure 3-17 : Configurations pour les diagrammes de transfert – Stäubli RX130L

La charge ajoutée en sortie est créée avec une masse fixée à un câble relié au robot et éventuellement renvoyé par une poulie. L'accélération moyenne étant considérée nulle, le couple de charge moyen de l'axe j étudié $\bar{\tau}_{loadj}$ est égal au poids de la masse ajoutée M_a multiplié par le bras de levier (distance entre l'axe étudié et le point de fixation de la masse – voir dernière ligne du Tableau 3-20) : $\bar{\tau}_{loadj} = M_a g L_j$.

Tableau 3-21 : Mesures axe 1 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	18,311 N.m	5,189 N.m	/	/
5,022 kg	83,259 N.m	102,323 N.m	5,565 N.m	41,888 N.m	5,448 N.m
10,080 kg	167,115 N.m	186,980 N.m	6,289 N.m	104,719 N.m	5,374 N.m
15,195 kg	251,908 N.m	276,442 N.m	7,306 N.m	164,505 N.m	5,995 N.m
20,281 kg	336,228 N.m	363,033 N.m	8,753 N.m	220,994 N.m	6,450 N.m
25,373 kg	420,648 N.m	450,952 N.m	10,503 N.m	276,562 N.m	7,140 N.m
29,920 kg	496,032 N.m	529,402 N.m	11,914 N.m	325,543 N.m	7,745 N.m

Tableau 3-22 : Mesures axe 2 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	74,421 N.m	6,811 N.m	/	/
5,043 kg	82,123 N.m	165,527 N.m	11,096 N.m	34,549 N.m	10,784 N.m
10,080 kg	164,149 N.m	256,333 N.m	11,443 N.m	105,610 N.m	10,721 N.m
15,195 kg	247,436 N.m	353,393 N.m	11,645 N.m	174,242 N.m	11,170 N.m
20,281 kg	330,260 N.m	451,856 N.m	12,604 N.m	241,027 N.m	12,274 N.m
25,373 kg	413,181 N.m	553,386 N.m	14,282 N.m	306,900 N.m	13,257 N.m
29,920 kg	487,227 N.m	665,170 N.m	16,277 N.m	372,387 N.m	13,216 N.m

Tableau 3-23 : Mesures axe 3 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	25,523 N.m	4,970 N.m	/	/
2,435 kg	24,723 N.m	/	/	0,000 N.m	
5,043 kg	51,203 N.m	81,699 N.m	4,999 N.m	16,743 N.m	7,123 N.m
10,080 kg	102,346 N.m	138,697 N.m	5,370 N.m	58,891 N.m	7,819 N.m
15,195 kg	154,275 N.m	199,886 N.m	5,761 N.m	97,830 N.m	8,505 N.m
20,281 kg	205,915 N.m	259,334 N.m	6,006 N.m	138,717 N.m	8,550 N.m
25,373 kg	257,616 N.m	324,042 N.m	6,382 N.m	176,720 N.m	9,450 N.m
29,920 kg	303,783 N.m	381,858 N.m	7,357 N.m	213,344 N.m	9,979 N.m

Tableau 3-24 : Mesures axe 4 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	8,920 N.m	0,919 N.m	/	/
0,639 kg	6,269 N.m	/	/	0,000 N.m	
0,985 kg	9,663 N.m	18,928 N.m	1,305 N.m	1,929 N.m	1,030 N.m
1,785 kg	17,511 N.m	26,459 N.m	1,319 N.m	7,590 N.m	0,972 N.m
2,585 kg	25,359 N.m	34,126 N.m	1,424 N.m	13,674 N.m	0,978 N.m
3,385 kg	33,207 N.m	42,062 N.m	1,480 N.m	19,283 N.m	1,076 N.m
4,185 kg	41,055 N.m	50,200 N.m	1,735 N.m	24,656 N.m	1,208 N.m
4,985 kg	48,903 N.m	58,709 N.m	1,749 N.m	29,922 N.m	1,219 N.m

Tableau 3-25 : Mesures axe 5 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	4,587 N.m	1,102 N.m	/	/
0,985 kg	9,663 N.m	23,497 N.m	1,207 N.m	-4,854 N.m	1,146 N.m
2,985 kg	29,283 N.m	58,872 N.m	1,371 N.m	-9,267 N.m	1,548 N.m
5,043 kg	49,472 N.m	97,351 N.m	3,414 N.m	-16,001 N.m	1,564 N.m
7,043 kg	69,092 N.m	145,050 N.m	19,146 N.m	-22,709 N.m	1,794 N.m

Tableau 3-26 : Mesures axe 6 – Stäubli RX130L

Masse en sortie	Couple de sortie moyen	Quadrant 1 Moteur - entrée		Quadrant 2 Générateur - entrée	
		Couple moyen	Ecart-type	Couple moyen	Ecart-type
0,000 kg	0,000 N.m	4,280 N.m	0,529 N.m	/	/
0,985 kg	3,382 N.m	11,671 N.m	0,522 N.m	-4,789 N.m	0,569 N.m
2,485 kg	8,532 N.m	22,188 N.m	0,708 N.m	-1,761 N.m	0,573 N.m
3,985 kg	13,682 N.m	41,719 N.m	1,022 N.m	4,321 N.m	0,835 N.m
5,543 kg	19,032 N.m	46,236 N.m	1,125 N.m	5,066 N.m	0,766 N.m
7,043 kg	24,182 N.m	66,965 N.m	1,455 N.m	11,493 N.m	1,340 N.m
8,560 kg	29,391 N.m	71,744 N.m	1,656 N.m	12,524 N.m	1,450 N.m

Le couple moteur est calculé par le logiciel de commande TAO à partir de la consigne de vitesse envoyée au variateur et de la vitesse moteur mesurée. Sa valeur est ensuite multipliée par le rapport de transmission afin d'obtenir le couple d'entrée exprimé côté articulaire. Une moyenne $\bar{\tau}$ du couple d'entrée est ensuite faite sur chaque palier.

Pour chaque axe, les mesures sont faites pour 5 à 8 différentes charges, de la charge nulle à la charge correspondant environ au couple nominal moteur (Tableau 3-18), et pour 2 modes de fonctionnement : quadrant 1 moteur et quadrant 2 générateur.

Toutes les valeurs de $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}_{load}$ sont données dans les Tableaux, du Tableau 3-21 au Tableau 3-26. On trace alors, pour chaque axe, le diagramme de transfert d'efforts exprimant le couple de sortie moyen (charge) $\bar{\tau}_{load}$ en fonction du couple d'entrée moyen $\bar{\tau}$ sur le palier (Figure 3-18 et Figure 3-19).

A partir des diagrammes de transfert, nous obtenons une approximation des paramètres du modèle de P. Garrec (voir paragraphe 2.2.5) pour chaque axe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{D1} = 0,969 \\ \rho_{I1} = 0,685 \\ x_{01} = 16,61 \\ y_{01} = 16,49 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{D2} = 0,833 \\ \rho_{I2} = 0,827 \\ x_{02} = 64,42 \\ y_{02} = 38,41 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{D3} = 0,852 \\ \rho_{I3} = 0,769 \\ x_{03} = 21,39 \\ y_{03} = 26,64 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{D4} = 0,990 \\ \rho_{I4} = 0,713 \\ x_{04} = 8,836 \\ y_{04} = 6,542 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{D5} = 0,499 \\ \rho_{I5} = -0,31 \\ x_{05} = 2,703 \\ y_{05} = -3,73 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{D6} = 0,409 \\ \rho_{I6} = 0,723 \\ x_{06} = 3,522 \\ y_{06} = 10,18 \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Pour chacun des axes, on observe bien une variation linéaire du frottement en fonction de la charge. Les écarts-types sont faibles et la variation du frottement est significative. On remarque de plus une amplitude différente du frottement entre le quadrant 1 moteur et le quadrant 2 générateur (les quadrants 3 et 4 n'ayant pas été étudiés ici).

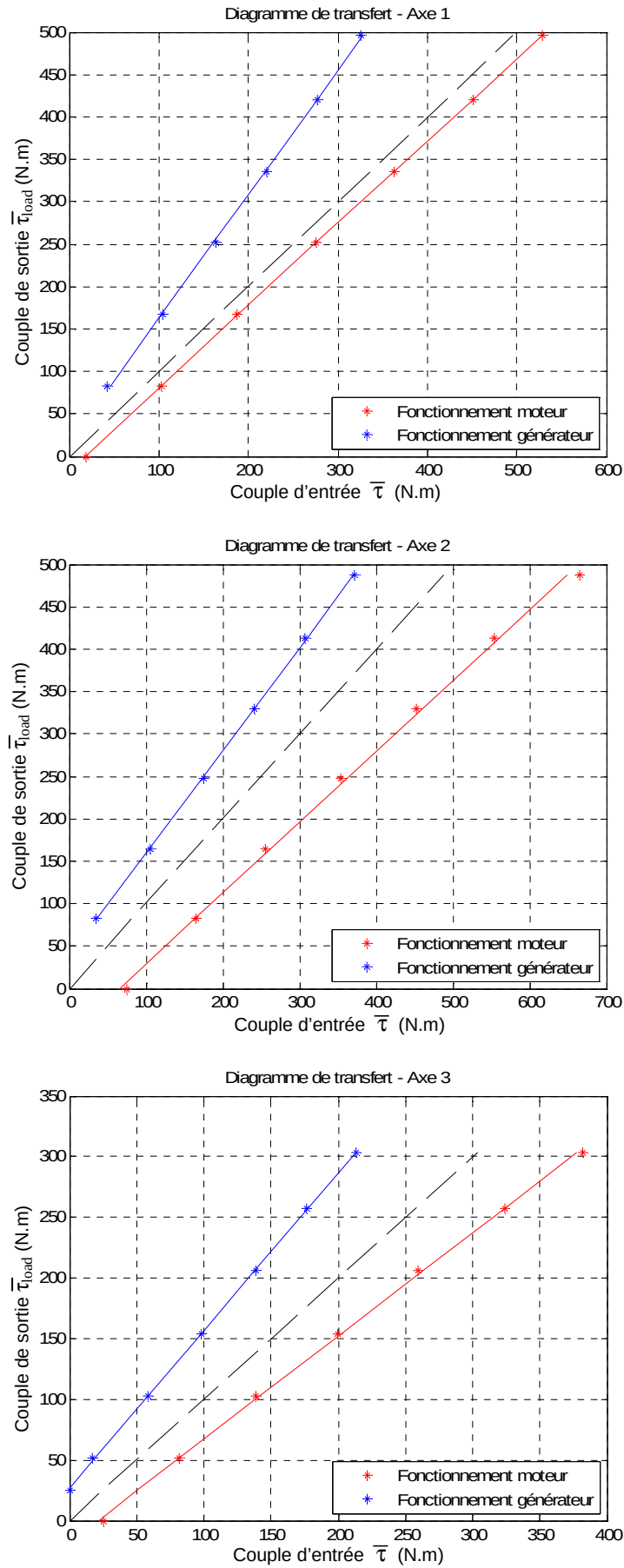


Figure 3-18 : Diagrammes de transfert – Axes 1 à 3

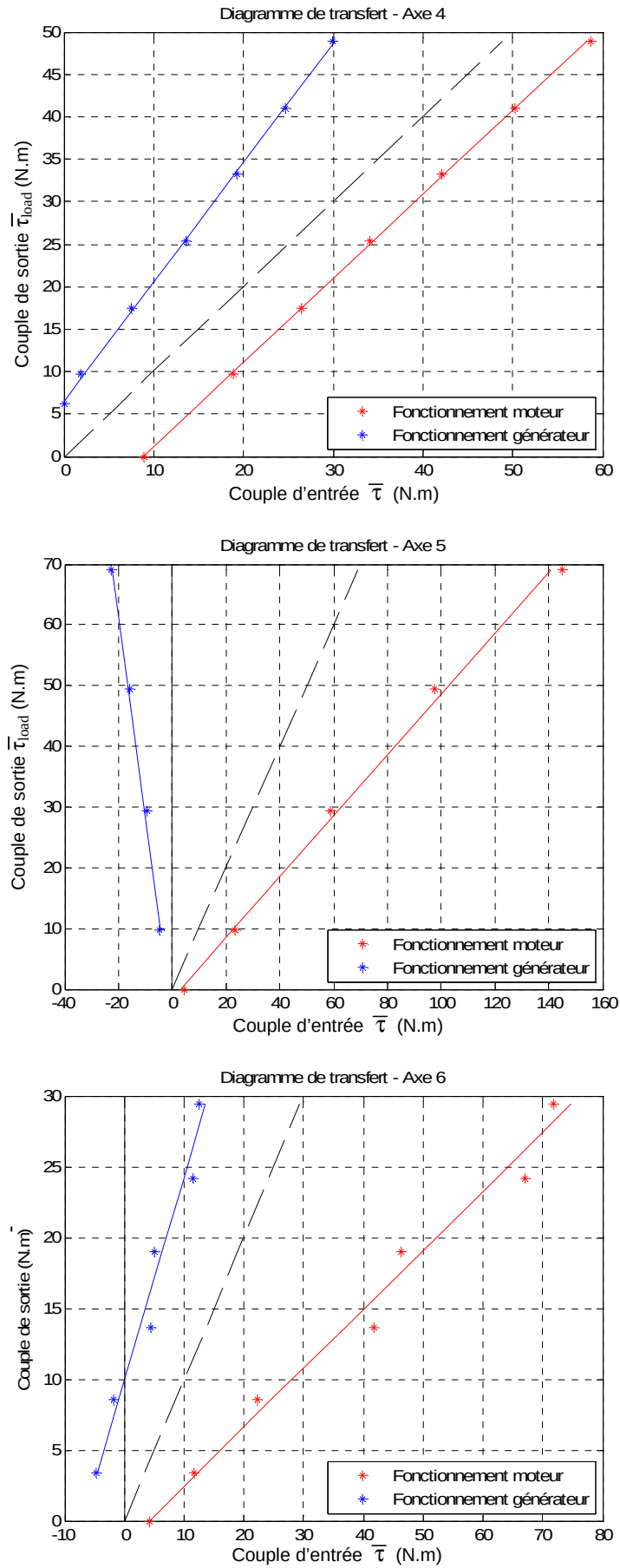


Figure 3-19 : Diagrammes de transfert – Axes 4 à 6

On peut voir sur la Figure 3-19 et avec les valeurs (3.16), que l'axe 5 est irréversible car il se bloque par arc-boutement sous l'effet moteur d'une charge extérieure. Pour le mode générateur (quadrants 2 et 4), le couple d'entrée τ et le couple de charge τ_{load} sont alors de signes opposés. Par la suite, on ne s'intéressera qu'aux axes réversibles.

Remarque : Des essais semblables réalisés sur un robot Stäubli RX90L ont donnés des résultats similaires à ceux obtenus sur le RX130L.

3.2.3.3. Modèle dynamique inverse de l'axe 3

Pour l'étude de l'axe 3 en dynamique, les autres axes sont bloqués sous asservissement dans une position fixe ($q_1 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$ et $q_2 = \pi/2$, Figure 3-16). Des essais sont réalisés à vide ou avec une masse M_a (de 3,458 kg ou 6,970 kg) ajoutée en bout de bras, à une distance $L_a = 1,277$ m de l'axe 3.

Le modèle dynamique inverse de l'axe 3 s'écrit de la manière suivante :

$$\tau_3 = J_3 \ddot{q}_3 + MX_3 g \cos(q_3) + MY_3 g \sin(q_3) + \tau_{ext3} + F_{V3} \dot{q}_3 + F_{C3} \text{sign}(\dot{q}_3) + \tau_{off3} \quad (3.17)$$

où :

- $J_3 = I_{a3} + ZZ_3$ est le moment d'inertie total I_{a3} de la chaîne d'actionnement plus le moment d'inertie ZZ_3 du bras,
- MX_3 , MY_3 et ZZ_3 sont ici les paramètres inertiels de l'axe 3, regroupés avec ceux des axes 4 à 6 qui sont bloqués,
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de la gravité
- τ_{ext3} est le couple supplémentaire dû à la masse ajoutée $M_a \in \{0 ; 3,458 ; 6,970\}$

Dans la suite, on omettra l'indice 3 pour alléger l'écriture.

Pour avoir une expression de τ_{ext} , il faut calculer les couples de gravité et d'inertie supplémentaires dus à une masse additionnelle M_a fixée à une distance L_a de l'axe 3.

Soit le repère R_m situé au centre de gravité G_m de la masse additionnelle M_a et parallèle au repère $R_3(x_3, y_3, z_3)$ lié au bras (Figure 3-15), on donne la matrice d'inertie I_{Ga} de la masse, celle-ci étant un disque de rayon r et d'épaisseur e :

$$I_{Ga} = \begin{bmatrix} M_a r^2 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & M_a (r^2 / 4 + e^2 / 12) & 0 \\ 0 & 0 & M_a (r^2 / 4 + e^2 / 12) \end{bmatrix}_{(G_m, R_m)} \quad (3.18)$$

Le vecteur de translation entre les repères R_3 et R_m est $T = [L_a \ 0 \ 0]^T$, et les 2 repères étant parallèles, on applique le théorème de Huygens :

$$J_a = \begin{bmatrix} M_a r^2 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & M_a (r^2 / 4 + e^2 / 12) & 0 \\ 0 & 0 & M_a (r^2 / 4 + e^2 / 12) + M_a L_a^2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Les termes en r^2 et e^2 étant négligeables devant L_a^2 , on conserve seulement pour l'inertie le terme en $M_a L_a^2 \ddot{q}$. De même pour la gravité, étant donné le vecteur de translation, on aura : $M_a L_a g \cos(q)$.

Ainsi, l'expression du couple τ_{ext} est la suivante :

$$\tau_{\text{ext}} = M_a L_a^2 \ddot{q} + M_a L_a g \cos(q) \quad (3.20)$$

Et le couple de charge s'exprime par :

$$\tau_{\text{load}} = J \ddot{q} + M X g \cos(q) + M Y g \sin(q) + M_a L_a^2 \ddot{q} + M_a L_a g \cos(q) \quad (3.21)$$

D'où l'écriture du modèle dynamique inverse :

$$\tau = J \ddot{q} + M X g \cos(q) + M Y g \sin(q) + M_a L_a^2 \ddot{q} + M_a L_a g \cos(q) + F_v \dot{q} + F_c \text{sign}(\dot{q}) + \tau_{\text{off}} \quad (3.22)$$

3.2.3.4. Identification du modèle classique de l'axe 3 masse par masse

Le modèle dynamique classique (3.22) de l'axe 3 est identifié ici pour différentes masses fixées en bout de robot et en utilisant des paliers de vitesse (Figure 3-16). Cependant, l'axe 3 étant soumis à la gravité, τ_{load} est ici dépendant de la position q . Ainsi, le paramètre F_c identifié par le modèle classique ne correspond pas à une valeur précise de l'effort de charge mais est une moyenne du frottement sec sur le débattement de l'axe 3. On ne peut donc pas, à partir de cette expression, obtenir précisément des valeurs du frottement sec en fonction de τ_{load} : les valeurs identifiées de F_c peuvent cependant être tracées en fonction de la masse ajoutée M_a . L'allure de la courbe n'a alors qu'une valeur indicative sur l'évolution du frottement.

Les essais utilisés ici ont été réalisés avec les axes 1, 2, 4, 5 et 6 bloqués, voir Figure 3-16. Des créneaux de vitesse d'amplitude 0,5% ; 1% ; 2% ; et 4% de $V_{\text{max}} = 1,2$ rad/s (Figure 3-2.a) puis des sinus saturés en vitesse avec des paliers de 8% ; 16% ; 32% ; 48% ; 64% ; 80% ; et 96% de V_{max} (Figure 3-2.c) sont réalisés sur l'axe 3. Seuls les mesures sur les paliers d'accélération moyenne nulle sont exploitées. Ces essais sont réalisés pour les 3 cas de charge : à vide, avec 3,458 kg en bout de bras (à une distance $L_a = 1,277$ m), puis avec 6,970 kg.

On commence tout d'abord par réaliser une identification avec les essais à vide avec le modèle d'identification $y = D\chi$ suivant :

$$\begin{cases} y = \tau \\ \mathbf{D} = [\ddot{q} \quad g \cos(q) \quad g \sin(q) \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad 1] \\ \boldsymbol{\chi} = [J \quad MX \quad MY \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{\text{off}}]^T \end{cases} \quad (3.23)$$

On obtient les résultats présentés dans le Tableau 3-27. Les paramètres J , MY et τ_{off} ayant des écarts-types élevés, ils sont négligés et supprimés de l'identification.

Tableau 3-27 : Valeurs identifiées à vide avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	Écart-type relatif %
MX	22,399 kg.m	0,061
F_C	37,293 N.m	0,298
F_V	152,154 N.m.s.rad ⁻¹	0,860

Pour chaque cas de charge, connaissant la valeur de MX ainsi que la valeur de la masse ajoutée M_a , on réécrit le modèle dynamique (3.22) de la manière suivante :

$$\tau - (MX + M_a L_a) g \cos(q) = (J + M_a L_a^2) \ddot{q} + MY g \sin(q) + F_V \dot{q} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + \tau_{\text{off}} \quad (3.24)$$

On peut alors identifier les paramètres, pour chaque cas de charge, par moindres carrés en utilisant le modèle d'identification $y = \mathbf{D}\boldsymbol{\chi}$ suivant :

$$\begin{cases} y = \tau - (MX + M_a L_a) g \cos(q) \\ \mathbf{D} = [\ddot{q} \quad g \sin(q) \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad 1] \\ \boldsymbol{\chi} = [J + M_a L_a^2 \quad MY \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{\text{off}}]^T \end{cases} \quad (3.25)$$

Le système (3.25) est utilisé pour identifier les paramètres de frottement, d'abord pour tous les échantillons, puis en séparant le mode moteur du mode générateur, et enfin en séparant les 4 quadrants du plan $(\dot{q}, \tau_{\text{load}})$, en sélectionnant les échantillons appropriés. Les paramètres pour lesquels les écarts-types obtenus sont trop grands, sont non identifiables et supprimés : les paramètres $J + M_a L_a^2$ et MY sont considérés comme négligeables.

On observe l'évolution du paramètre de frottement F_C en fonction de la masse ajoutée M_a (représentative d'un couple de charge moyen).

Le Tableau 3-28 donne les valeurs identifiées de F_C , F_V et τ_{off} pour chaque cas de charge, tous modes confondus, et sur la Figure 3-20 on peut voir le graphe de F_C en fonction de la masse ajoutée M_a .

Le Tableau 3-29 donne les valeurs de F_C , F_V et τ_{off} , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. Le Tableau 3-30 donne les valeurs de F_C , F_V et τ_{off} , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons dans les quadrants moteur 1 et 3. On trace le graphe de F_C en fonction de M_a pour les 2 modes (moteur et générateur) : Figure 3-21.

Enfin le Tableau 3-31 donne les valeurs de F_C et F_V , pour chaque cas de charge, identifiées en sélectionnant les échantillons seulement dans le quadrant 1, le Tableau 3-32 pour le quadrant 2, le Tableau 3-33 pour le quadrant 3 et le Tableau 3-34 pour le quadrant 4. L'évolution de F_C en fonction de M_a pour chacun des quadrants est donnée Figure 3-22.

Les différents écarts-types obtenus sont faibles et les paramètres sont donc bien identifiés dans chaque cas. Soient σ_{F_C} l'écart-type maximal du paramètre F_C et ΔF_C l'amplitude de variation du frottement sec avec la charge, on remarque que : $\frac{2\sigma_{F_C}}{\Delta F_C} \leq 6\%$. L'écart-type du paramètre F_C est encore relativement élevé car il a été identifié pour des trajectoires sur tout le débattement de l'axe et donc pour une charge variable. On observe une variation linéaire du frottement en fonction de la masse ajoutée qui ne peut pas être négligée. Elle est différente entre les modes moteur et générateur, mais n'est pas significativement différente entre les quadrants 1 et 3, et entre les quadrants 2 et 4.

Tableau 3-28 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3

Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	37,279	0,216	42,799	0,266	49,105	0,323
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	152,650	2,542	127,808	3,267	105,030	4,028
τ_{off} (N.m)	-3,014	0,204	-3,144	0,251	-3,025	0,305

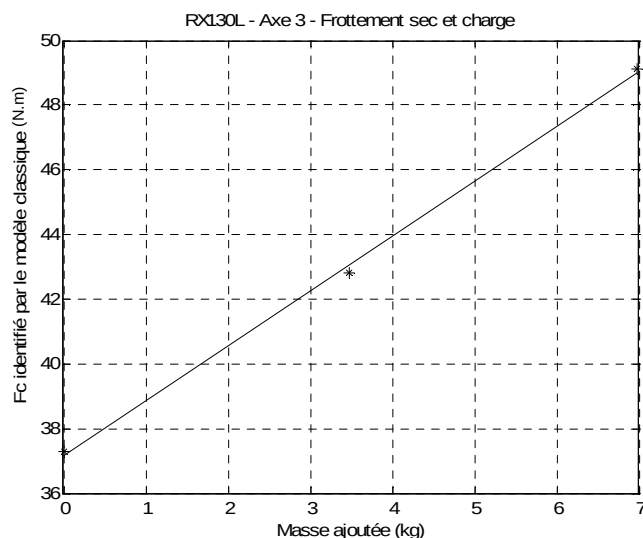


Figure 3-20 : RX130L axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée

Tableau 3-29 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – mode moteur

Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	36,013	0,300	40,790	0,364	46,074	0,438
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	155,849	3,000	133,496	3,935	113,929	4,844
τ_{off} (N.m)	-1,264	0,285	-1,202	0,345	-0,171	0,416

Tableau 3-30 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – mode générateur

Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	38,997	0,300	45,364	0,373	52,821	0,451
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	143,287	4,838	114,773	5,695	86,487	6,791
τ_{off} (N.m)	-5,219	0,277	-5,532	0,347	-6,407	0,420

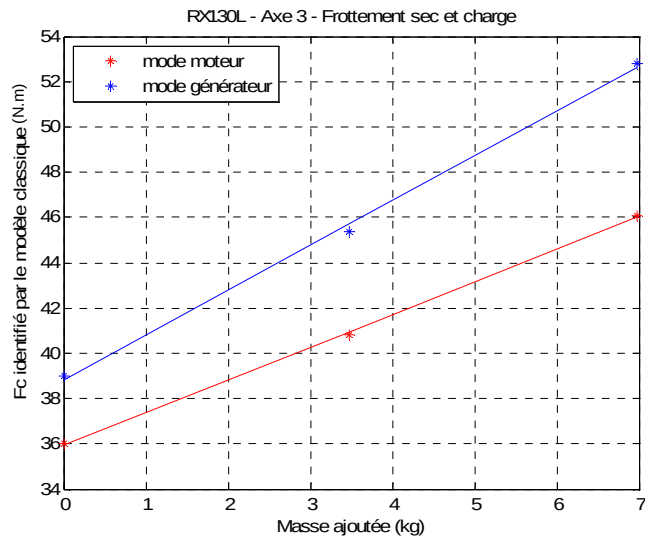


Figure 3-21 : RX130L axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 2 modes

Tableau 3-31 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – quadrant 1

Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	34,737	0,420	39,562	0,530	45,875	0,616
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	156,204	6,790	134,315	8,365	114,808	9,475

Tableau 3-32 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – quadrant 2

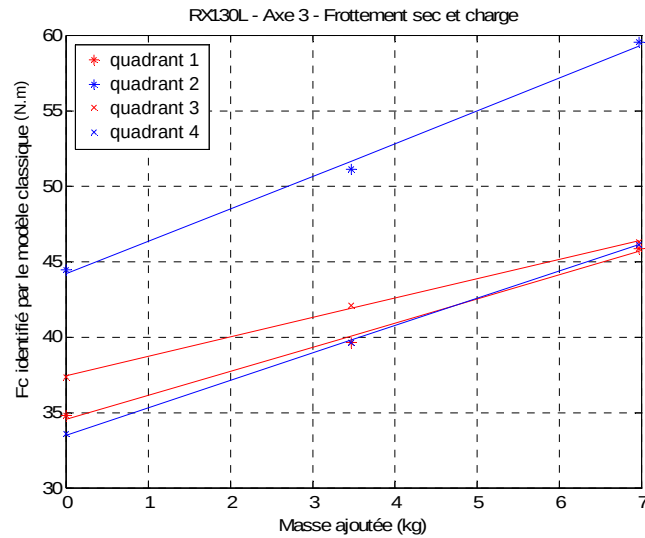
Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	44,445	0,428	51,087	0,525	59,498	0,659
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	133,798	6,880	106,967	7,750	75,378	9,713

Tableau 3-33 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – quadrant 3

Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	37,291	0,358	42,025	0,445	46,278	0,508
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	155,366	3,918	132,266	5,373	112,663	6,195

Tableau 3-34 : Paramètres de frottement identifiés par cas de charge – RX130L axe 3 – quadrant 4

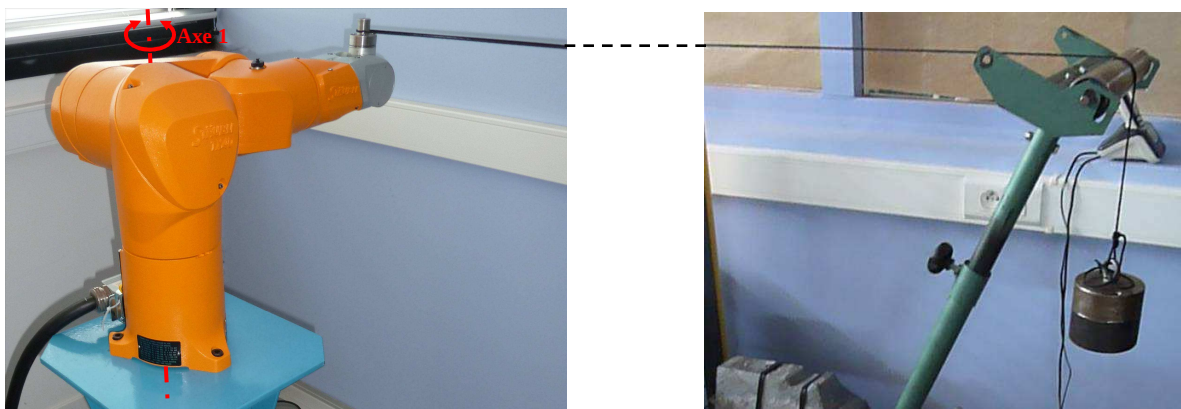
Masse ajoutée	0,000 kg		3,458 kg		6,970 kg	
	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type	valeur	2*ec-type
F_C (N.m)	33,561	0,420	39,626	0,530	46,128	0,616
F_V (N.m.s.rad ⁻¹)	152,525	6,790	123,432	8,365	98,440	9,475


Figure 3-22 : RX130L axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 4 quadrants

3.2.4. Robot Stäubli TX40

3.2.4.1. Présentation du système

Le robot Stäubli TX40 est un robot industriel à 6 articulations rotoïdes (Figure 3-23 et Figure 3-24) ayant charge maximale de 2kg, soit 3,5 fois inférieure à celle du RX130L. Les transmissions des axes 1, 2 et 4 sont des réducteurs épicycloïdaux, tandis que celle de l'axe 3 est de type roue et vis tangente. La Figure 3-25 donne le placement des repères pour la représentation DHM et le Tableau 3-35 donne les paramètres géométriques. Les essais ont été réalisés sur les 4 premiers axes du robot TX40 de l'IRCCyN.


Figure 3-23 : TX40 – Configuration pour les tests sur l'axe 1

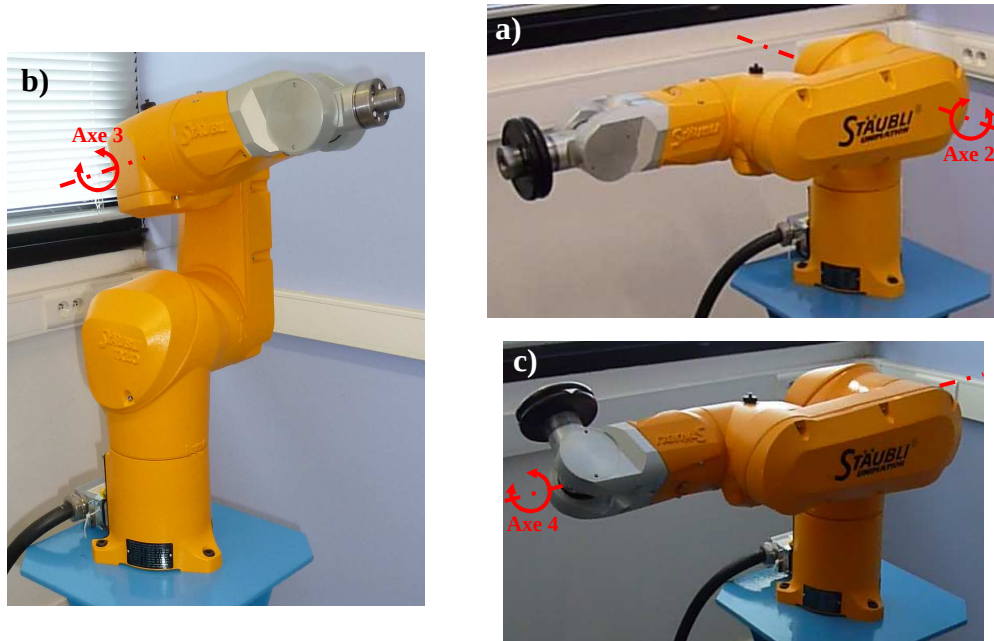


Figure 3-24 : TX40 – Configurations pour les tests des axes 2 (a), 3 (b) et 4 (c)

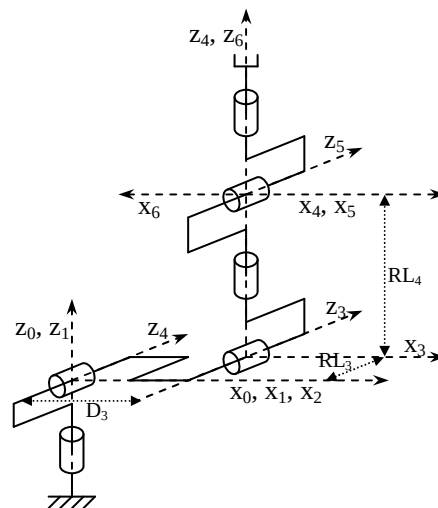


Figure 3-25 : Placement des repères – Staubli TX40

Tableau 3-35 : Paramètres géométriques, convention DHM – Staubli TX40

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$-\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	$D_3 = 0,225 \text{ m}$	θ_3	$RL_3 = 0,035 \text{ m}$
4	0	$\pi/2$	0	θ_4	$RL_4 = 0,225 \text{ m}$
5	0	$-\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	$\pi/2$	0	θ_6	0

Les axes 1 à 4 ont d'abord été étudiés en mouvement axe par axe, puis en mouvement multi-axes, avec les axes 5 et 6 bloqués sous asservissement.

Pour les mouvements axe par axe des axes 2 à 4, plusieurs masses ont été fixées sur l'effecteur (0 kg ; 0,67439 kg ; 1,19549 kg ; 1,69906 kg ; 2,21733 kg) et le robot a été placé dans des configurations optimales pour avoir la plus forte variation de charge sur l'axe étudié (Figure 3-24) : $q_3 = \pi/2$ pour l'étude de l'axe 2, $q_2 = -\pi/2$ pour l'étude de l'axe 3, $q_3 = q_5 = \pi/2$ pour l'étude de l'axe 4 (les autres axes sont à la position 0).

Pour le mouvement de l'axe 1, celui-ci a été chargé en suspendant une masse au bout d'un câble vertical renvoyé à l'horizontale par un galet à roulement à billes et fixé sur l'effecteur du robot (Figure 3-23). Les axes 2 à 6 sont bloqués dans la configuration donnée par le schéma Figure 3-26 : $q_3 = \pi/2$, $q_5 = -\pi/2$ et $q_2 = q_4 = q_6 = 0$. L'axe 1 évolue autour des positions $\pi/2$ et $-\pi/2$. Les masses fixées sont : 0 kg ; 2,08731 kg ; 4,08304 kg ; 6,21649 kg ; 8,915 kg ; 9,89 kg.

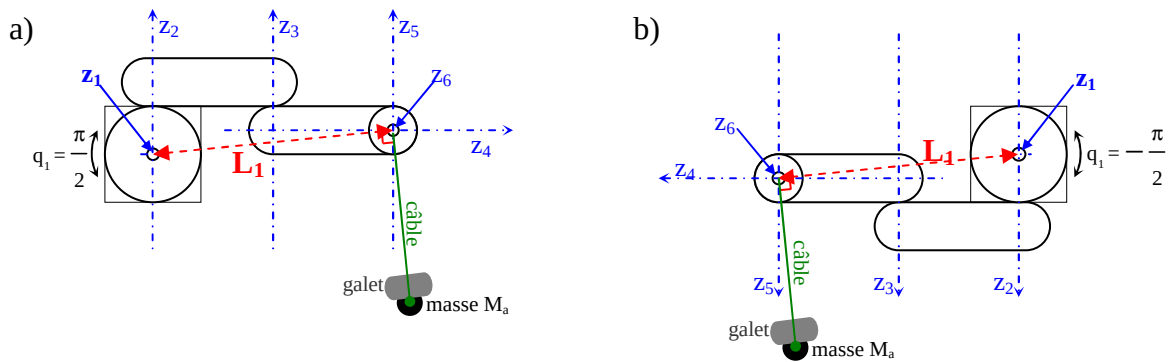


Figure 3-26 : Configurations du TX40 pour les mesures sur l'axe 1 – Vue du dessus
 a) Essais pour les quadrants 1 et 2 – b) Essais pour les quadrants 3 et 4.

Pour l'étude axe par axe, tous les essais sont réalisés avec le générateur de mouvement en trapèzes de vitesses de la baie de commande CS8C de Stäubli, avec les vitesses de palier suivantes : 0,5%, 1%, 2%, 4%, 6%, 8%, 10%, 20%, 40%, 60%, 80% et 100% de la vitesse maximale. La vitesse maximale est de 5,01 rad/s pour les axes 1 et 2, de 7,52 rad/s pour l'axe 3 et de 7,15 rad/s pour l'axe 4. Cependant pour l'axe 1, l'amplitude des mouvements étant faible, seuls les paliers jusqu'à 40% de la vitesse maximale sont étudiés.

Pour l'étude en multi-axes, les essais exploités sont :

- ceux des axes 2 et 3 des mouvements mono-axes précédents,
- des essais mono-axes de l'axe 1 et de l'axe 4 avec la configuration (a) de la Figure 3-24, avec les différentes charges utilisées en mono-axe pour les axes 2 et 3,
- des essais multi-axes, avec les mêmes charges que précédemment (axes 5 et 6 bloqués en position $\theta_5 = \theta_6 = 0$ sous asservissement).

3.2.4.2. Modèle dynamique inverse

On écrit tout d'abord les modèles dynamiques pour les essais mono-axes, le modèle dépendant alors de la configuration du robot.

Le schéma Figure 3-26 détaille la configuration du robot pour les essais de l'axe 1 et on peut donc calculer les couples inertiels dus à la masse ajoutée de la manière suivante :

$$\tau_{\text{ext}1} = M_a L_1^2 \ddot{q}_1 + M_a L_1 g \sin(q_1) \quad (3.26)$$

Le modèle dynamique pour l'axe 1 dans la configuration Figure 3-23 s'écrit donc :

$$\tau_1 = J_1 \ddot{q}_1 + M_a L_1^2 \ddot{q}_1 + M_a L_1 g \sin(q_1) + F_{C1} \text{sign}(\dot{q}_1) + F_{V1} \dot{q}_1 + \tau_{\text{off}1} \quad (3.27)$$

où $J_1 = I_{a1} + ZZ_1$ est le moment d'inertie total I_{a1} de la chaîne d'actionnement plus le moment d'inertie ZZ_1 du bras (paramètre inertiel de l'axe 1 regroupé avec ceux des axes suivants bloqués sous asservissement) et $M_a \in \{0 ; 2,08731 ; 4,08304 ; 6,21649 ; 8,915 ; 9,890\}$.

Et le couple de charge est défini par :

$$\tau_{\text{load}1} = J_1 \ddot{q}_1 + M_a L_1^2 \ddot{q}_1 + M_a L_1 g \sin(q_1) \quad (3.28)$$

Les modèles dynamiques des axes 2, 3 et 4 dans les configurations de la Figure 3-24 sont similaires à celui de l'axe 3 du RX130L donné en 3.2.3.3, soit pour l'axe j (avec $j \in \{2 ; 3 ; 4\}$) :

$$\tau_j = J_j \ddot{q}_j + M X_j g \cos(q_j) + M Y_j g \sin(q_j) + \tau_{\text{ext}j} + F_{Vj} \dot{q}_j + F_{Cj} \text{sign}(\dot{q}_j) + \tau_{\text{off}j} \quad (3.29)$$

où $\tau_{\text{ext}j} = M_a L_j^2 \ddot{q}_j + M_a L_j g \cos(q_j)$, $J_j = I_{aj} + ZZ_j$ et où L_j est la distance entre l'axe et le centre de gravité de la masse ajoutée $M_a \in \{0 ; 0,67439 ; 1,19549 ; 1,69906 ; 2,21733\}$. Les paramètres ZZ_j , $M X_j$ et $M Y_j$ sont les paramètres inertiels de l'axe j , regroupés avec ceux des axes suivants qui sont bloqués.

Et le couple de charge est défini par :

$$\tau_{\text{load}j} = J_j \ddot{q}_j + M X_j g \cos(q_j) + M Y_j g \sin(q_j) + M_a L_j^2 \ddot{q}_j + M_a L_j g \cos(q_j) \quad (3.30)$$

L'expression du modèle dynamique inverse du robot multi-axes est calculé à l'aide du logiciel SYMORO+ [Khalil 1997]. Les couples extérieurs $\tau_{\text{ext}j}$ dus à la masse ajoutée, qui s'exercent sur chaque axe, dépendent des caractéristiques inertielles des masses, de leurs positions sur le robot, des paramètres géométriques du robot, et des positions, vitesses et accélérations de tous les axes. Les valeurs des paramètres inertiels des masses sont obtenues par des pesées et par CAO. Les expressions des couples $\tau_{\text{ext}j}$ sont intégrées facilement dans le modèle dynamique grâce à SYMORO+ (voir [Khalil 1997] et [Khalil 2007]) : la masse fixée sur l'effecteur est ajoutée dans SYMORO+ comme un corps 7 fixé au corps 6 ($\sigma_7 = 2$).

3.2.4.3. Identification du modèle classique masse par masse

On identifie, pour chaque axe, les paramètres de frottement moyens pour chaque cas de charge, en utilisant la même méthode que celle décrite pour le RX130L en 3.2.3.4, en considérant pour l'axe 1 l'équation :

$$\tau_1 - M_a L_1 g \sin(q_1) = (J_1 + M_a L_1^2) \ddot{q}_1 + F_{C1} \text{sign}(\dot{q}_1) + F_{V1} \dot{q}_1 + \tau_{\text{off}1} \quad (3.31)$$

et pour les axes 2 à 4 l'équation :

$$\tau_j - (MX_j + M_a L_j) g \cos(q_j) = (J_j + M_a L_j^2) \ddot{q}_j + MY_j g \sin(q_j) + F_{vj} \dot{q}_j + F_{cj} \text{sign}(\dot{q}_j) + \tau_{offj} \quad (3.32)$$

après avoir identifié les paramètres MX_j à vide.

On donne ici seulement les valeurs identifiées pour le paramètre F_c par axe, par cas de charge, et par groupe d'échantillons sélectionnés (tous les quadrants, mode moteur, mode générateur, et par quadrant) ainsi que 2 fois l'écart-type maximal : Tableau 3-36 pour l'axe 1, Tableau 3-37 pour l'axe 2, Tableau 3-38 pour l'axe 3 et Tableau 3-39 pour l'axe 4.

Tableau 3-36 : Paramètre de frottement F_{c1} identifié par cas de charge – TX40 axe 1

Masse Mode	0,0000 kg	2,0873 kg	4,0830 kg	6,2165 kg	8,9150 kg	9,8900 kg	2*écart- type
Tous modes	2,867 N.m	3,890 N.m	5,061 N.m	7,381 N.m	9,542 N.m	10,288 N.m	$\leq 0,037$
Mode moteur	3,587 N.m	4,116 N.m	5,025 N.m	7,250 N.m	9,415 N.m	9,870 N.m	$\leq 0,059$
Mode génér.	/	3,609 N.m	5,095 N.m	7,491 N.m	9,668 N.m	10,678 N.m	$\leq 0,046$
Quadrant 1	3,652 N.m	4,036 N.m	4,738 N.m	7,271 N.m	9,362 N.m	9,764 N.m	$\leq 0,085$
Quadrant 2	/	3,877 N.m	5,193 N.m	7,974 N.m	10,491 N.m	11,304 N.m	$\leq 0,058$
Quadrant 3	3,523 N.m	4,195 N.m	5,315 N.m	7,226 N.m	9,468 N.m	9,974 N.m	$\leq 0,081$
Quadrant 4	/	3,347 N.m	4,997 N.m	7,001 N.m	8,854 N.m	10,043 N.m	$\leq 0,074$

Tableau 3-37 : Paramètre de frottement F_{c2} identifié par cas de charge – TX40 axe 2

Masse Mode	0,0000 kg	0,6744 kg	1,1955 kg	1,6991 kg	2,2173 kg	2*écart- type
Tous modes	7,081 N.m	7,610 N.m	8,024 N.m	8,103 N.m	8,827 N.m	$\leq 0,016$
Mode moteur	6,876 N.m	7,369 N.m	7,754 N.m	7,728 N.m	8,497 N.m	$\leq 0,023$
Mode génér.	7,418 N.m	7,975 N.m	8,410 N.m	8,609 N.m	9,255 N.m	$\leq 0,023$
Quadrant 1	6,741 N.m	7,232 N.m	7,629 N.m	7,592 N.m	8,369 N.m	$\leq 0,034$
Quadrant 2	7,478 N.m	8,018 N.m	8,479 N.m	8,712 N.m	9,338 N.m	$\leq 0,031$
Quadrant 3	7,012 N.m	7,506 N.m	7,880 N.m	7,863 N.m	8,625 N.m	$\leq 0,032$
Quadrant 4	7,358 N.m	7,932 N.m	8,341 N.m	8,505 N.m	9,170 N.m	$\leq 0,033$

Tableau 3-38 : Paramètre de frottement F_{c3} identifié par cas de charge – TX40 axe 3

Masse Mode	0,0000 kg	0,6744 kg	1,1955 kg	1,6991 kg	2,2173 kg	2*écart- type
Tous modes	5,339 N.m	6,140 N.m	6,853 N.m	7,577 N.m	8,379 N.m	$\leq 0,022$
Mode moteur	5,305 N.m	5,960 N.m	6,550 N.m	7,185 N.m	7,909 N.m	$\leq 0,028$
Mode génér.	5,594 N.m	6,793 N.m	7,666 N.m	8,437 N.m	9,359 N.m	$\leq 0,030$
Quadrant 1	5,279 N.m	5,887 N.m	6,400 N.m	6,968 N.m	7,597 N.m	$\leq 0,037$
Quadrant 2	5,547 N.m	6,577 N.m	7,294 N.m	7,966 N.m	8,774 N.m	$\leq 0,038$
Quadrant 3	5,332 N.m	6,033 N.m	6,700 N.m	7,402 N.m	8,223 N.m	$\leq 0,043$
Quadrant 4	5,630 N.m	7,015 N.m	8,052 N.m	8,918 N.m	9,956 N.m	$\leq 0,051$

Tableau 3-39 : Paramètre de frottement F_{c4} identifié par cas de charge – TX40 axe 4

Masse Mode	0,0000 kg	0,6744 kg	1,1955 kg	1,6991 kg	2,2173 kg	2*écart- type
Mode moteur	2,114 N.m	2,172 N.m	2,342 N.m	2,611 N.m	2,840 N.m	$\leq 0,004$
Quadrant 1	2,133 N.m	2,196 N.m	2,342 N.m	2,608 N.m	2,834 N.m	$\leq 0,005$
Quadrant 3	2,096 N.m	2,148 N.m	2,341 N.m	2,615 N.m	2,847 N.m	$\leq 0,006$

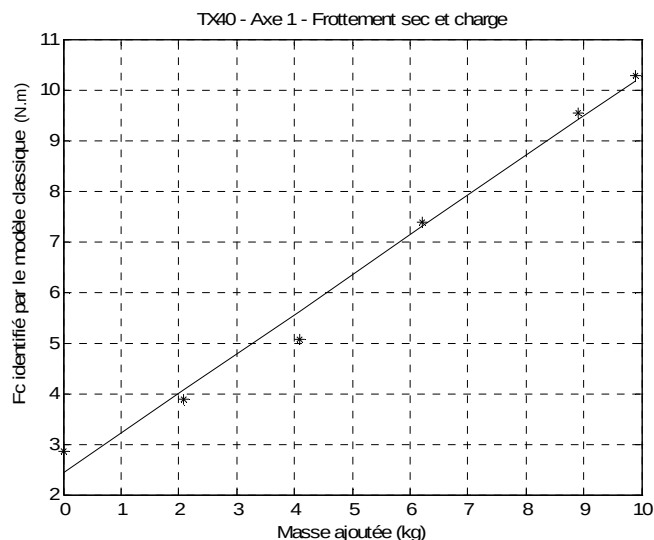


Figure 3-27 : TX40 axe 1 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée

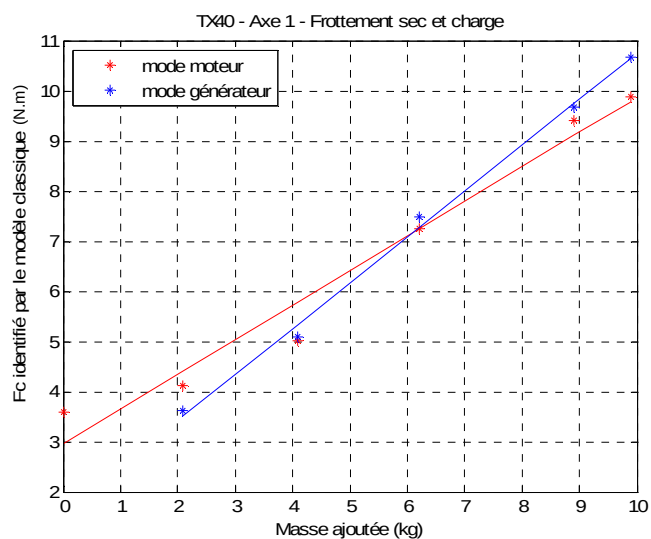


Figure 3-28 : TX40 axe 1 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 2 modes

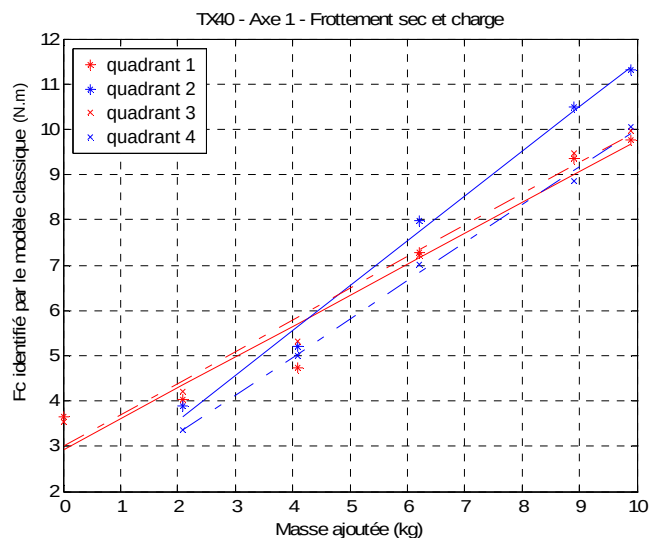


Figure 3-29 : TX40 axe 1 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 4 quadrants

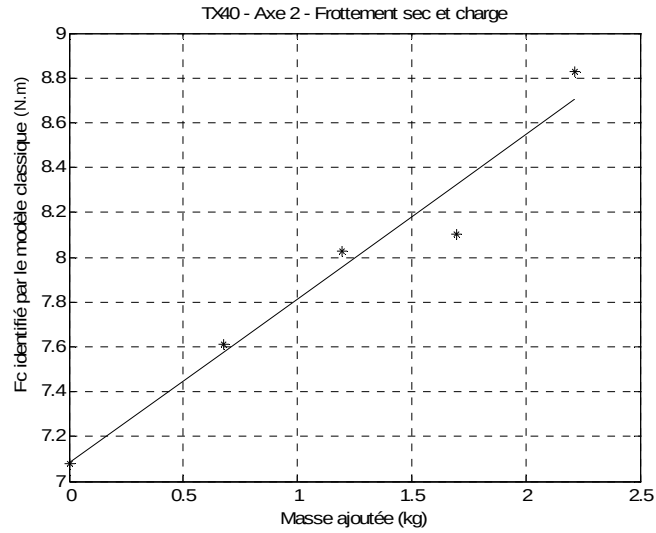


Figure 3-30 : TX40 axe 2 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée

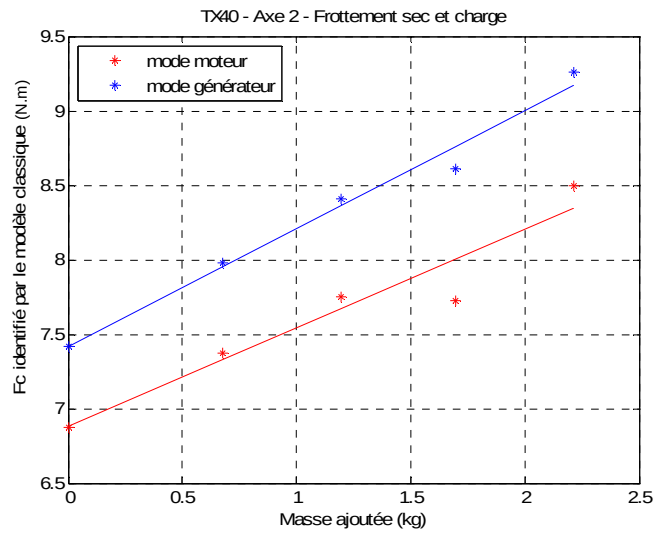


Figure 3-31 : TX40 axe 2 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 2 modes

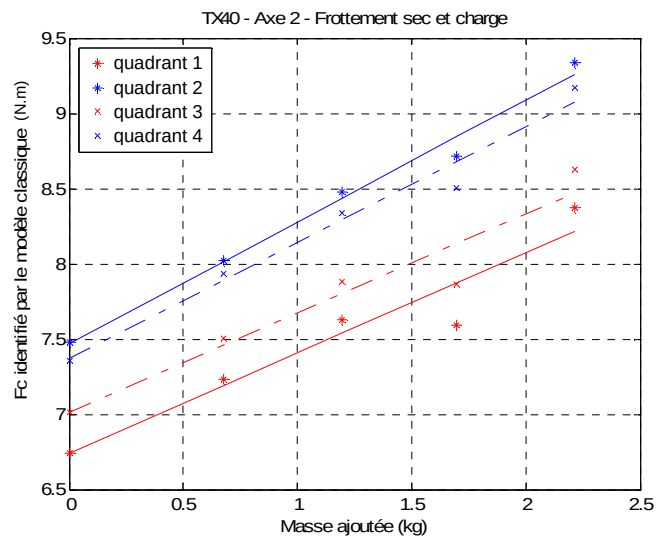


Figure 3-32 : TX40 axe 2 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 4 quadrants

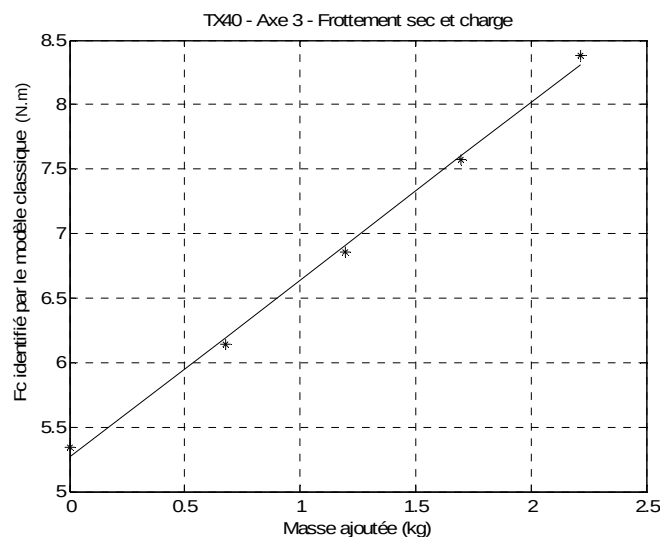


Figure 3-33 : TX40 axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée

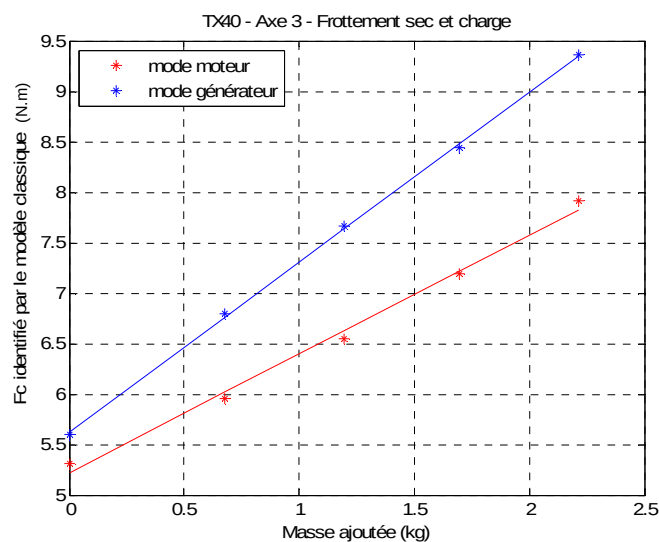


Figure 3-34 : TX40 axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 2 modes

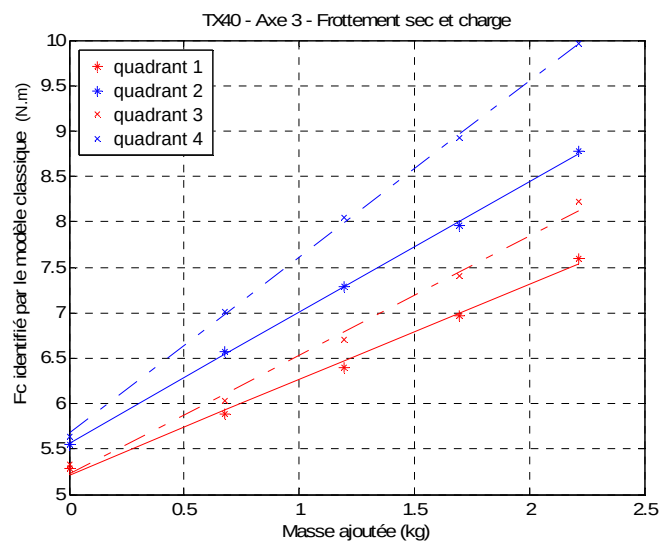


Figure 3-35 : TX40 axe 3 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 4 quadrants

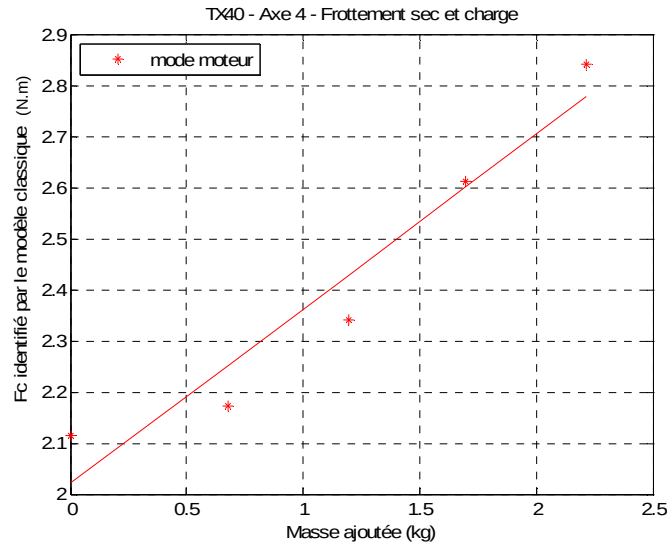


Figure 3-36 : TX40 axe 4 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée en mode moteur

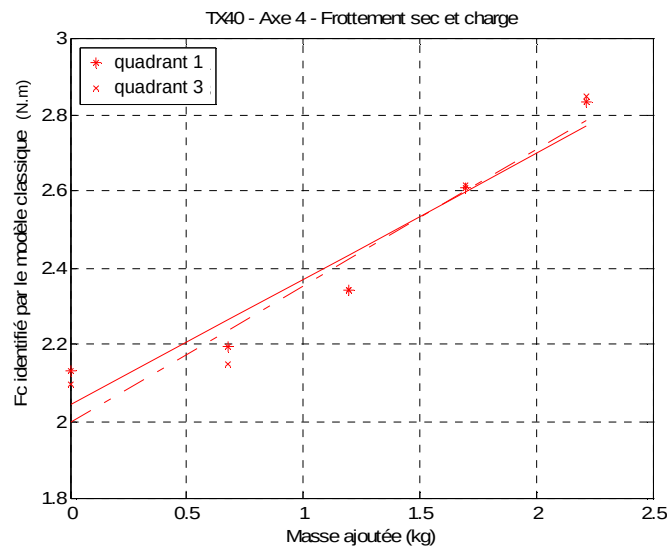


Figure 3-37 : TX40 axe 4 – Frottement sec fonction de la masse ajoutée selon les 2 quadrants moteur

Pour chacun des axes et pour chaque cas de charge, le paramètre F_c est bien identifié. De plus, les écarts-types sont faibles par rapport à l'amplitude de la variation du frottement sec avec la masse ajoutée. Cette variation est donc significative et doit être modélisée. Par ailleurs, pour chacun des axes, la variation du frottement sec a bien une allure linéaire en fonction de la charge.

Cependant, on peut noter des différences de comportement entre les axes. Pour l'axe 1, on observe que les pentes des droites du paramètre F_{Ci} sont proches entre les 2 quadrants moteurs 1 et 3, et de même entre les 2 quadrants générateurs 2 et 4. Pour l'axe 2, on remarque que les pentes des droites sont très proches entre les 4 quadrants de fonctionnement. Pour l'axe 3, au contraire, on observe 4 comportements différents entre les 4 quadrants. Enfin, pour l'axe 4, les résultats pour les 2 quadrants moteurs semblent très proches.

On remarque que l'axe 3 a un comportement différent des autres axes, ce qui est dû à sa transmission de type vis-roue tangente, différente des transmissions à réducteur épicycloïdal des autres axes.

3.2.5. Nouveau modèle de frottement sec fonction de la charge

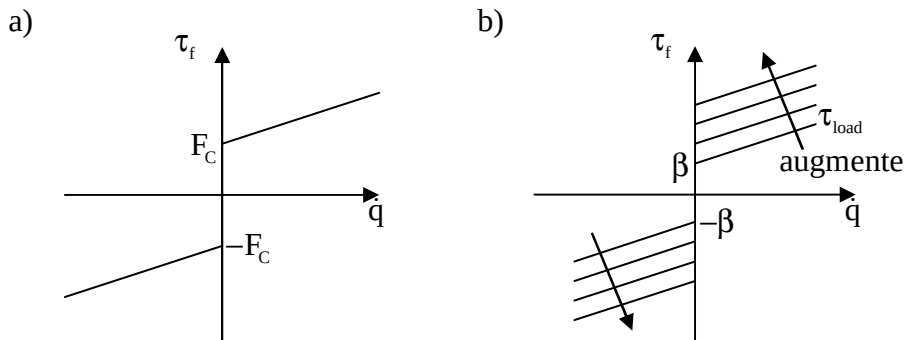
Les observations faites sur les différents systèmes étudiés montrent une variation de l'effort de frottement sec en fonction de l'effort de charge τ_{load} transmis par la chaîne d'actionnement. On rappelle l'expression du modèle classique de l'effort de frottement sec τ_{fs} pour un axe j (on omettra l'indice j pour alléger les expressions) :

$$\tau_{fs} = F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} \quad (3.33)$$

Nous proposons ici un nouveau modèle de frottement sec dans lequel le paramètre F_C n'est plus considéré comme constant (Figure 3-38.a) mais comme une fonction linéaire de l'amplitude de l'effort de charge τ_{load} (Figure 3-38.b). F_C s'écrit sous la forme :

$$F_C = \alpha |\tau_{load}| + \beta \quad (3.34)$$

où les paramètres α et β sont des constantes à identifier. Ces nouveaux paramètres dépendent du type de réducteur utilisé dans la chaîne d'actionnement (engrenage, vis à billes, Harmonic Drive, lubrification à l'huile, à la graisse...).



**Figure 3-38 : a) Modèle classique de frottement : Frottement sec constant et Frottement visqueux
b) Nouveau modèle de frottement : Frottement sec fonction de la charge et Frottement visqueux**

Sachant que $|\tau_{load}| = \tau_{load} \text{sign}(\tau_{load})$, on peut écrire le modèle de frottement sec τ_{fs} avec :

$$\tau_{fs} = (\alpha \tau_{load} \text{sign}(\tau_{load}) + \beta) \text{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} \quad (3.35)$$

Le modèle (3.35) traduit un effort de frottement sec identique dans les 4 quadrants du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$. Cependant, on a pu observer sur les différents systèmes précédents, que la variation linéaire du frottement sec pouvait être différente entre les 4 quadrants. Ainsi, on peut considérer en général un frottement dissymétrique avec des paramètres α , β et F_{Coff} qui prennent différentes valeurs selon le mode de fonctionnement. Nous proposons ici 3 modélisations possibles selon le niveau de complexité choisi.

3.2.5.1. Modélisation (4×1Q)

Dans le cas général, les nouveaux paramètres de frottement sec α et β dépendent des signes de τ_{load} et $\dot{q}$, ce qui définit 4 couples de valeurs (α_i, β_i) suivant les 4 quadrants de fonctionnement du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$. Le paramètre F_{Coff} est pris en compte dans les coefficients β_i . On définit donc quatre modèles de frottement sec différents (un par quadrant) pour la modélisation appelée (4×1Q) :

$$\begin{cases} \tau_{load} > 0 \ \& \ \dot{q} > 0 \Rightarrow \tau_{fs} = \alpha_1 \tau_{load} + \beta_1 \\ \tau_{load} > 0 \ \& \ \dot{q} < 0 \Rightarrow \tau_{fs} = -\alpha_2 \tau_{load} - \beta_2 \\ \tau_{load} < 0 \ \& \ \dot{q} < 0 \Rightarrow \tau_{fs} = \alpha_3 \tau_{load} - \beta_3 \\ \tau_{load} < 0 \ \& \ \dot{q} > 0 \Rightarrow \tau_{fs} = -\alpha_4 \tau_{load} + \beta_4 \end{cases} \quad (3.36)$$

3.2.5.2. Modélisation (2×2Q)

Dans certains cas, le comportement du frottement est identique entre les quadrants moteurs 1 et 3, et entre les quadrants générateurs 2 et 4. Les quatre modèles (4×1Q) se regroupent alors en 2 modèles (un pour 2 quadrants) définissant la modélisation (2×2Q). Les paramètres α et β prennent seulement 2 valeurs différentes : (α_m, β_m) pour les quadrants moteurs 1 et 3, et (α_g, β_g) pour les quadrants générateurs 2 et 4. Le paramètre F_{Coff} prend également 2 valeurs différentes : F_{Coffm} exprime la dissymétrie par rapport au signe de $\dot{q}$ entre les quadrants 1 et 3, et F_{Coffg} exprime la dissymétrie par rapport au signe de $\dot{q}$ entre les quadrants 2 et 4. On distingue les 2 modèles de frottement sec en considérant le signe de P_{load} (on remarque que : $sign(\tau_{load})sign(\dot{q}) = sign(\tau_{load}\dot{q}) = sign(P_{load})$).

$$\begin{cases} P_{load} > 0 \Rightarrow \tau_{fs} = \alpha_m \tau_{load} + \beta_m sign(\dot{q}) + F_{Coffm} \\ P_{load} < 0 \Rightarrow \tau_{fs} = -\alpha_g \tau_{load} + \beta_g sign(\dot{q}) + F_{Coffg} \end{cases} \quad (3.37)$$

3.2.5.3. Modélisation (1×4Q)

Enfin, dans le cas où le comportement du frottement sec est identique entre les 2 modes (moteur et générateur), les 2 modèles précédents se regroupent en un seul modèle pour les 4 quadrants, définissant la modélisation (1×4Q). On a alors :

$$\tau_{fs} = \alpha sign(P_{load}) \tau_{load} + \beta sign(\dot{q}) + F_{Coff} \quad (3.38)$$

3.3. Frottement sec et vitesse

3.3.1. Banc à vérin à câble

Pour cette étude, on utilise les essais décrits en 3.2.1.4 pour l'identification classique masse par masse (sinus saturés avec des paliers de vitesse entre 0,5% et 40% de $V_{\max}$, avec 5 cas de charge différents, sollicitant les 4 quadrants du plan $(\dot{q}, \tau_{\text{load}})$).

Pour ce banc d'essai, la charge en sortie ne varie pas avec la position. Ainsi, pour chaque cas de charge (couple positif ou négatif) et chaque consigne de vitesse (négative ou positive), on calcule la moyenne $\bar{\tau}$ du couple d'entrée sur le palier de vitesse moyenne constante. On trace ainsi le couple d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne dans les 4 quadrants (Figure 3-39).

On observe un léger effet Stribeck avec un minimum autour de 1% de $V_{\max}$. Pour les essais à vide, on n'observe pas l'effet, et pour les essais avec le maximum de charge, la variation d'amplitude aux faibles vitesses est d'environ 0,1 N.m. Au-delà de 2% de $V_{\max}$, on observe uniquement une variation linéaire due au frottement visqueux proportionnel à la vitesse. Sur le zoom de la Figure 3-39, on peut voir les écarts-types obtenus pour chaque couple moyen et chaque palier de vitesse (traits noirs) : ces écarts-types (d'environ 0,5 N.m) sont 5 fois plus importants que l'amplitude de l'effet Stribeck qui n'est donc pas significatif pour le type de transmission vis à bille lubrifiée à la graisse de ce banc.

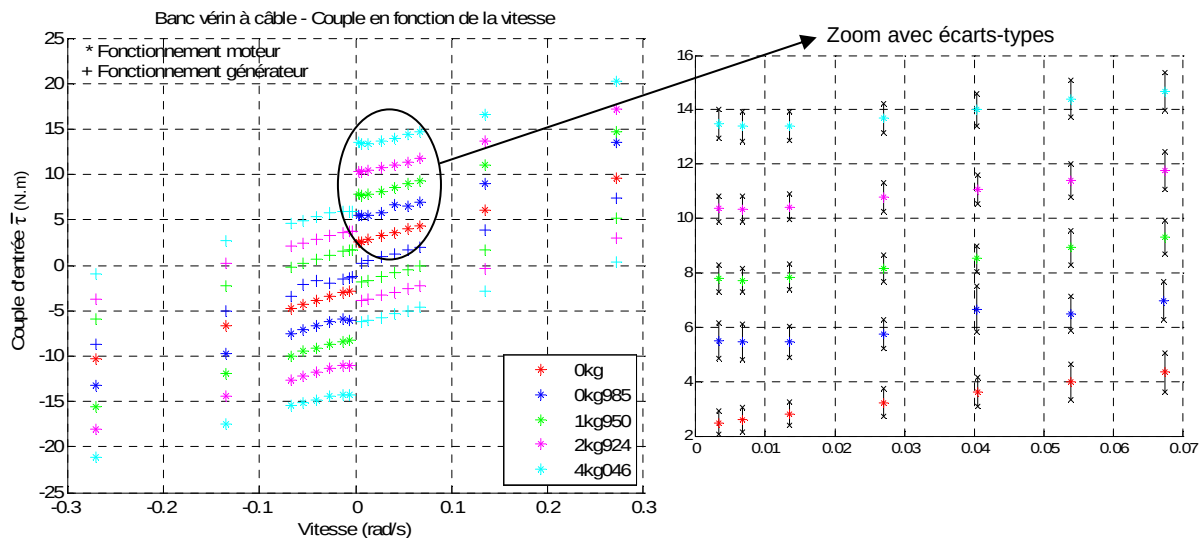


Figure 3-39 : Couple d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne – Banc à vérin à câble

3.3.2. EMPS

L'EMPS possède une transmission vis à bille lubrifiée à la graisse similaire à celle du banc à vérin à câble. On peut donc s'attendre à des résultats semblables.

On étudie d'abord le comportement de l'axe à vide en disposant l'EMPS en position horizontale, sans masse ajoutée. Des trapèzes de vitesse de 0,5% à 100% de la vitesse maximale sont réalisés. On trace l'effort d'entrée moyen $\bar{\tau}$ en fonction de la vitesse de

moyenne sur chacun des 11 paliers de vitesse (Figure 3-40). On observe un faible effet Stribeck à vide.

Pour étudier l'effet de la vitesse en charge, l'EMPS est fixé verticalement, dans un sens puis dans l'autre : on exploite ici les mêmes essais que ceux utilisés pour l'identification classique masse par masse en 3.2.2.4 (trapèzes de vitesse, de 0,5% à 100% de $V_{\max}$, avec 6 cas de charge). Pour chaque cas de charge, on trace l'effort d'entrée moyen $\bar{\tau}$ en fonction de la vitesse moyenne de chaque palier de vitesse (positive et négative) : Figure 3-41.

Pour l'EMPS, l'effet Stribeck n'est pas beaucoup plus prononcé que pour le banc à vérin à câble : l'écart de force entre 0,5% de $V_{\max}$ et 2% de $V_{\max}$ (où se situe environ le minimum) est de 1,5 à 2 N. Le zoom Figure 3-41 montre que les écarts-types obtenus pour chaque moyenne d'effort et chaque vitesse (traits noirs) sont du même ordre de grandeur que l'amplitude de l'effet Stribeck. Celui-ci est donc difficilement identifiable en dynamique.

Ces résultats confirment ceux obtenus sur le banc à vérin à câble : l'effet Stribeck n'est pas significatif par rapport aux autres perturbations pour les vis à billes lubrifiées à la graisse.

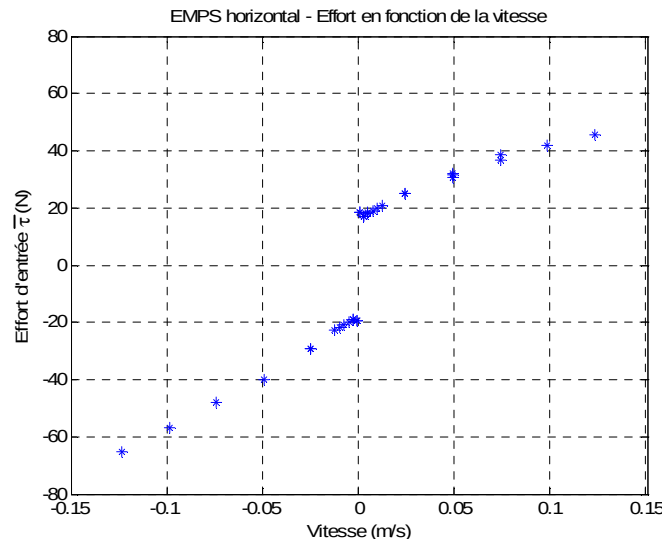


Figure 3-40 : Effort d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne – EMPS horizontal à vide

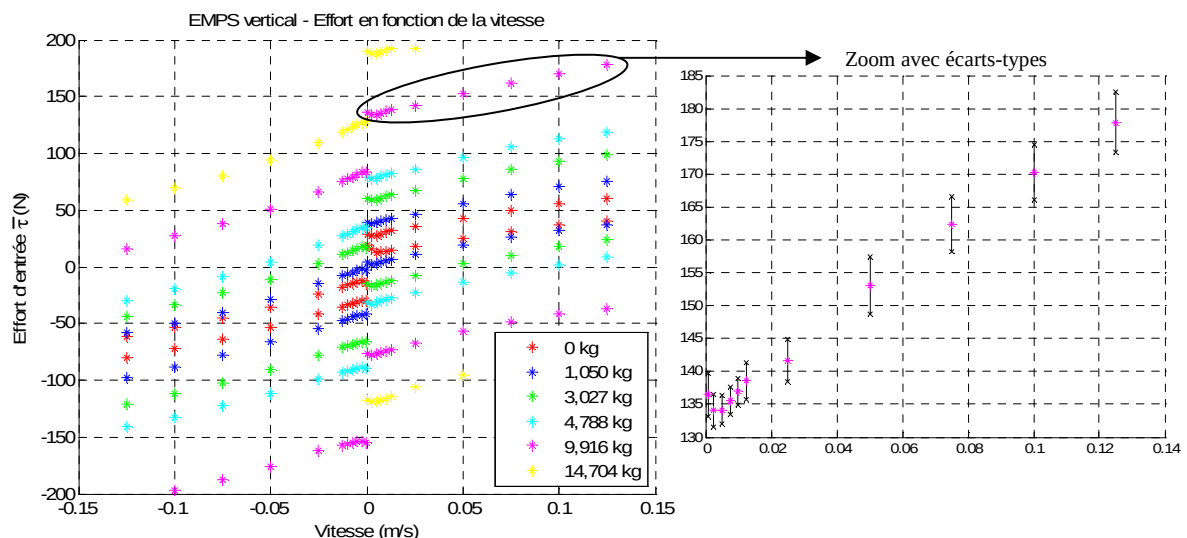


Figure 3-41 : Effort d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne – EMPS vertical

3.3.3. Stäubli RX130L

On utilise ici les mêmes essais que ceux pris lors de l'identification classique masse par masse en 3.2.3.4 (créneaux de vitesse de 0,5% à 4% de $V_{\max}$ puis sinus saturés en vitesse jusqu'à $V_{\max}$, 3 cas de charge).

On relève tout d'abord le couple d'entrée τ pour chaque palier de vitesse, pour une charge donnée. Afin d'avoir une charge constante malgré l'influence de la gravité sur l'axe, on choisit une position de l'axe (0,45 rad), et sa position symétrique ($\pi - 0,45$ rad) pour avoir une charge positive ou négative. On sélectionne les échantillons de mesures où l'axe passe à une vitesse constante (positive ou négative) par ces 2 positions. Pour chaque palier de vitesse, on récupère donc 4 points moyens correspondant aux 4 quadrants de fonctionnement. On réitère le procédé pour chaque cas de charge. La Figure 3-42 représente le couple d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne du palier pour chaque cas de charge et pour les différents modes de fonctionnement.

On remarque que le couple est élevé pour la première vitesse (0,5% de $V_{\max}$), puis diminue jusqu'à la vitesse de 4% de $V_{\max}$ environ, et augmente à nouveau. On observe donc bien un effet Stribeck sur le frottement sec, modélisable par un terme exponentiel.

On note de plus que l'effet Stribeck augmente avec l'amplitude de la charge. Par exemple en mode moteur 3 ($\tau_{\text{load}} < 0$ et $\dot{q} < 0$, voir zoom Figure 3-42) entre le paliers de 0,5% et 4% de $V_{\max}$, la variation du couple d'entrée (et donc du frottement sec) est de 22,2 N.m, 28,5 N.m et 32,8 N.m pour une valeur de la charge de 0 kg, 3,472 kg et 6,970 kg respectivement. On peut voir de plus Figure 3-42 que l'écart entre les 3 charges diminue lorsque la valeur absolue de la vitesse augmente. Enfin, le zoom nous montre que les écarts-types (traits noirs) pour chaque moyenne du couple, à chaque vitesse sont faibles par rapport à l'amplitude de l'effet Stribeck qui est donc significatif par rapport aux autres perturbations.

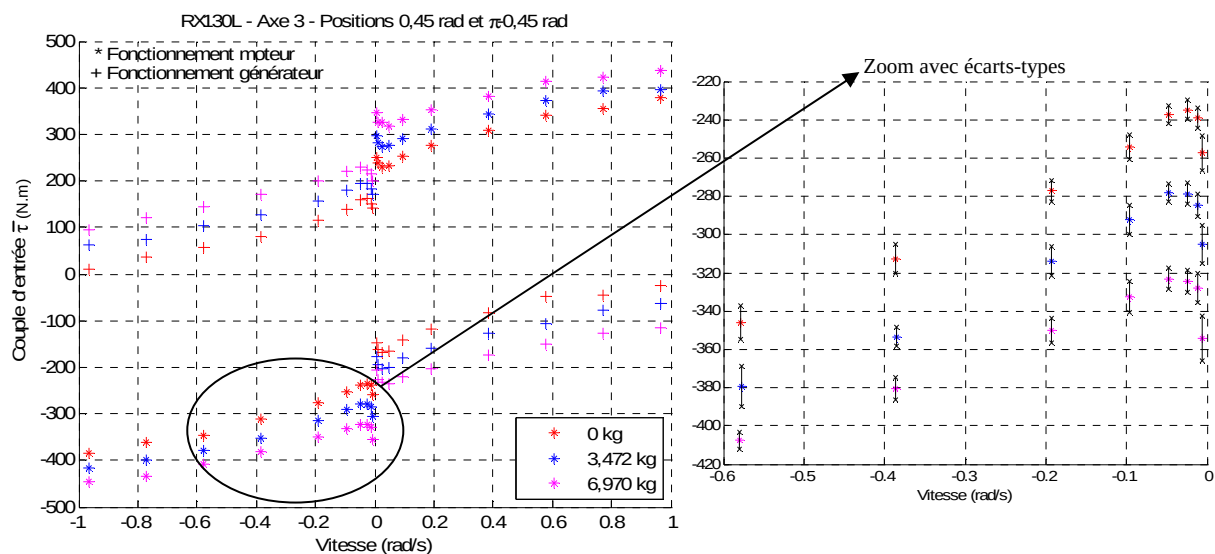


Figure 3-42 : Couple d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne – RX130L – Axe 3

En résumé, le frottement sec est élevé en quasi-statique puis diminue de manière exponentielle avec la vitesse (effet Stribeck), tandis que le frottement visqueux augmente. L'effet Stribeck est d'autant plus visible que l'axe est chargé. L'influence de la charge sur le frottement sec est moins importante quand la vitesse augmente. Puisque ce robot est utilisé par AREVA NC en téléopération, c'est-à-dire à de faibles vitesses et avec des variations charge, il est important de prendre en compte cette variation du frottement sec en fonction de la vitesse dans le modèle dynamique.

3.3.4. Stäubli TX40

Les essais réalisés pour l'identification classique masse par masse (en 3.2.4.3) sont réutilisés ici pour étudier l'influence de la vitesse sur le frottement sec.

Pour chacun des axes, afin d'avoir une charge constante, on relève la valeur moyenne $\bar{\tau}$ du couple d'entrée pour une position donnée et sa position symétrique (couple de charge positif et négatif), pour chaque palier de vitesse. Pour l'axe 1 on choisit les positions ($-\pi/2$ rad ; $\pi/2$ rad), pour l'axe 2 les positions ($-2,5$ rad ; $\pi - 2,5$ rad), pour l'axe 3 les positions ($2,5 - \pi$ rad ; $2,5$ rad), et pour l'axe 4 les positions ($-\pi/4$ rad ; $\pi/4$ rad). Les couples d'entrée moyens en fonction de la vitesse moyenne du palier pour les différentes charges et pour les 4 axes sont donnés dans les graphes Figure 3-43.

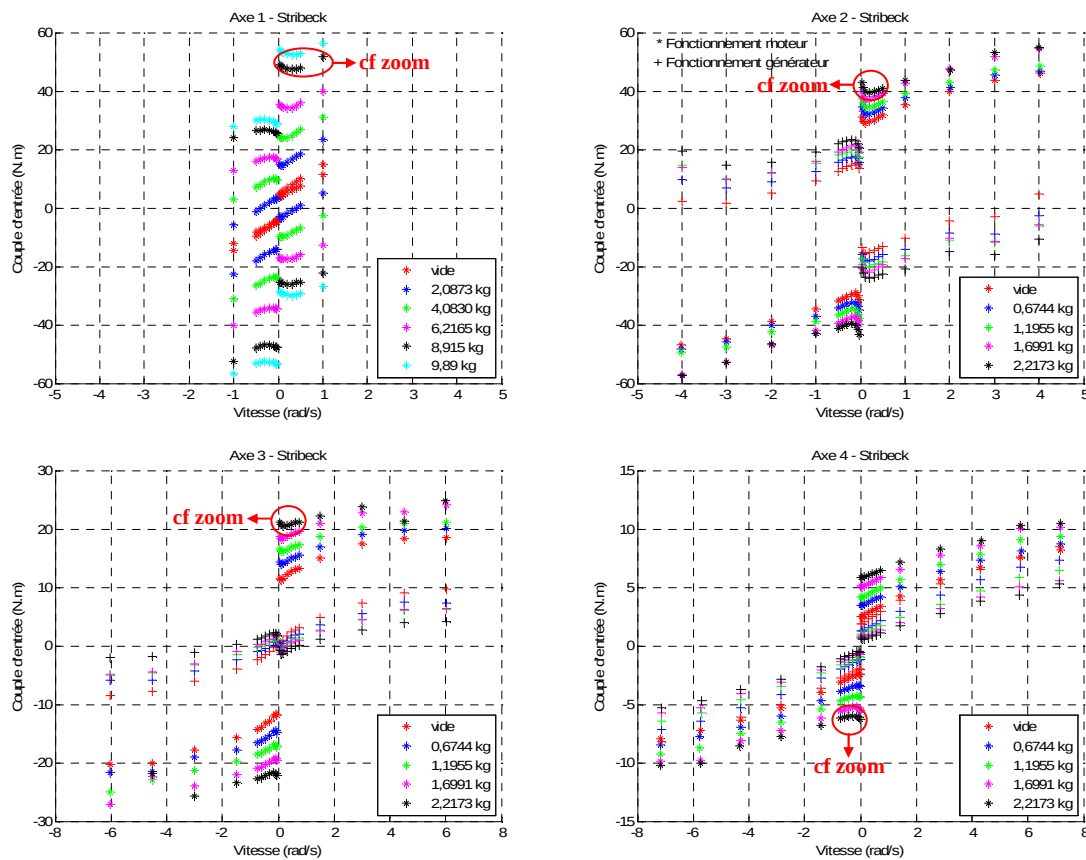


Figure 3-43 : Couple d'entrée moyen en fonction de la vitesse moyenne – TX40

On observe un effet Stribeck important pour les axes 1 et 2, faible pour l'axe 3 et négligeable pour l'axe 4. On remarque de plus que l'amplitude de l'effet Stribeck s'accroît avec la charge.

Un zoom est réalisé pour chacun des axes, autour de l'effet Stribeck, pour les charges élevées : graphes Figure 3-44. On y ajoute les écarts-types calculés sur le couple d'entrée (traits rouges). On remarque que pour l'axe 2, les écarts-types sont inférieurs à l'amplitude de l'effet Stribeck qui est donc significatif. Pour les axes 3 et 4, les écarts-types sont au contraire supérieurs à l'amplitude de l'effet Stribeck qui n'est pas significatif. Enfin, les écarts-types pour l'axe 1 sont du même ordre de grandeur que l'effet Stribeck. Ceci est dû en partie à une forte oscillation de couple provenant de la flexibilité du câble de suspension des masses (Figure 3-23). La transmission de l'axe 1 étant du même type à engrenages que celle de l'axe 2, l'effet Stribeck est cependant à modéliser pour les 2 axes.

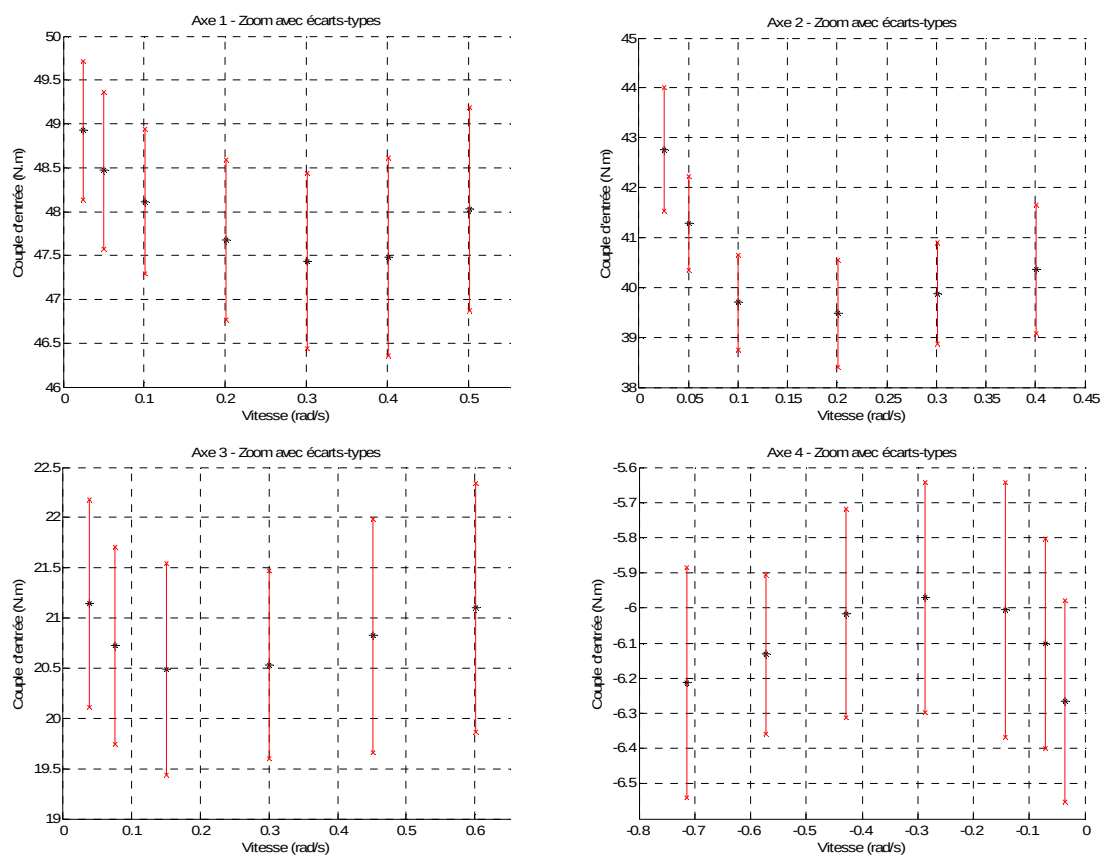


Figure 3-44 : Zoom effet Stribeck – TX40

3.3.5. Nouveau modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse

A partir de mesures, on a pu observer, pour certains robots évoluant à de faibles vitesses, une variation de l'effort de frottement sec en fonction de la vitesse, avec une allure de modèle de Stribeck. Les variations par rapport à la charge et à la vitesse sont liées suivant l'allure représentée Figure 3-45 (à comparer à la Figure 3-38).

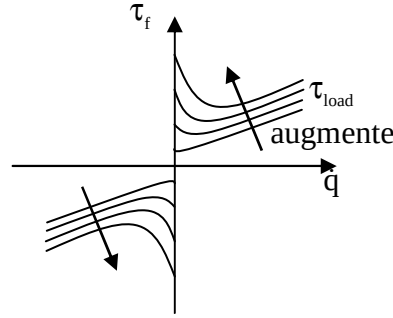


Figure 3-45 : Nouveau modèle de frottement
Frottement sec fonction de la charge et de la vitesse et Frottement visqueux

L'écriture du nouveau modèle se fait en 2 étapes. On commence par écrire un modèle de Stribeck sur un axe, pour un effort de charge donné τ_{load} (on omet à nouveau l'indice j de l'axe pour alléger l'écriture). L'effort de frottement sec τ_{fs} s'écrit :

$$\tau_{fs} = \begin{cases} \tau - \tau_{load} & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |\tau - \tau_{load}| < F_a \\ F_a \operatorname{sign}(\tau - \tau_{load}) & \text{si } \dot{q} = 0 \text{ et } |\tau - \tau_{load}| \geq F_a \\ F(\dot{q}) \operatorname{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} & \text{si } \dot{q} \neq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

avec :

$$F(\dot{q}) = F_g + (F_a - F_g) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \quad (3.40)$$

et où :

- F_a est le frottement sec d'adhérence,
- F_g est le frottement sec de glissement,
- $\dot{q}_s$ est une constante de vitesse, positive.

Nous nous intéressons ici au mode de glissement, lorsque $\dot{q} \neq 0$.

Pour coupler les variations du frottement sec par rapport à la charge et par rapport à la vitesse, on pose :

$$F_g = \alpha |\tau_{load}| + \beta \text{ et } F_a = \gamma |\tau_{load}| + \delta \quad (3.41)$$

d'où la nouvelle expression de l'effort de frottement sec :

$$\begin{aligned} \tau_{fs} &= (\alpha |\tau_{load}| + \beta + (\gamma |\tau_{load}| + \delta - \alpha |\tau_{load}| - \beta) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s}) \operatorname{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} \\ &= (\alpha + (\gamma - \alpha) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s}) \tau_{load} \operatorname{sign}(\tau_{load}) \operatorname{sign}(\dot{q}) + (\beta + (\delta - \beta) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s}) \operatorname{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} \\ &= (\alpha + (\gamma - \alpha) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s}) \tau_{load} \operatorname{sign}(\tau_{load}) + (\beta + (\delta - \beta) e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s}) \operatorname{sign}(\dot{q}) + F_{Coff} \end{aligned} \quad (3.42)$$

On suppose à nouveau que, dans le cas général, le frottement sec n'a pas la même valeur dans les 4 quadrants du plan $(\dot{q}, \tau_{load})$. On différencie à nouveau 3 cas de modélisation.

3.3.5.1. Modélisation (4×1Q)

Pour la modélisation (4×1Q), les paramètres α , β , γ et δ prennent 4 valeurs différentes. On introduit 8 paramètres supplémentaires :

$$\begin{cases} a_1 = \gamma_1 - \alpha_1 \\ b_1 = \delta_1 - \beta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_2 = \gamma_2 - \alpha_2 \\ b_2 = \delta_2 - \beta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_3 = \gamma_3 - \alpha_3 \\ b_3 = \delta_3 - \beta_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_4 = \gamma_4 - \alpha_4 \\ b_4 = \delta_4 - \beta_4 \end{cases} \quad (3.43)$$

et on obtient le modèle de frottement sec suivant :

$$\begin{cases} \tau_{\text{load}} > 0 \ \& \ \dot{q} > 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = \alpha_1 \tau_{\text{load}} + a_1 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} + \beta_1 + b_1 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \\ \tau_{\text{load}} > 0 \ \& \ \dot{q} < 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = -\alpha_2 \tau_{\text{load}} - a_2 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} - \beta_2 - b_2 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \\ \tau_{\text{load}} < 0 \ \& \ \dot{q} < 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = \alpha_3 \tau_{\text{load}} + a_3 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} - \beta_3 - b_3 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \\ \tau_{\text{load}} < 0 \ \& \ \dot{q} > 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = -\alpha_4 \tau_{\text{load}} - a_4 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} + \beta_4 + b_4 e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \end{cases} \quad (3.44)$$

3.3.5.2. Modélisation (2×2Q)

Pour la modélisation (2×2Q), les paramètres α , β , γ et δ prennent 2 valeurs différentes. On introduit 4 paramètres supplémentaires a_m , b_m , a_g et b_g :

$$\begin{cases} a_m = \gamma_m - \alpha_m \\ b_m = \delta_m - \beta_m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_g = \gamma_g - \alpha_g \\ b_g = \delta_g - \beta_g \end{cases} \quad (3.45)$$

et on obtient le modèle de frottement sec suivant :

$$\begin{cases} P_{\text{load}} > 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = \alpha_m \tau_{\text{load}} + a_m e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} + \beta_m \text{sign}(\dot{q}) + b_m e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \text{sign}(\dot{q}) + F_{\text{Coffm}} \\ P_{\text{load}} < 0 \Rightarrow \tau_{\text{fs}} = -\alpha_g \tau_{\text{load}} - a_g e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} + \beta_g \text{sign}(\dot{q}) + b_g e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \text{sign}(\dot{q}) + F_{\text{Coffg}} \end{cases} \quad (3.46)$$

3.3.5.3. Modélisation (1×4Q)

Pour la modélisation (1×4Q), on introduit 2 paramètres supplémentaires a et b :

$$\begin{cases} a = \gamma - \alpha \\ b = \delta - \beta \end{cases} \quad (3.47)$$

et on obtient le modèle de frottement sec suivant :

$$\tau_{\text{fs}} = \alpha \tau_{\text{load}} \text{sign}(P_{\text{load}}) + a e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \tau_{\text{load}} \text{sign}(P_{\text{load}}) + \beta \text{sign}(\dot{q}) + b e^{-|\dot{q}|/\dot{q}_s} \text{sign}(\dot{q}) + F_{\text{Coff}} \quad (3.48)$$

3.4. Conclusion

L'étude théorique et expérimentale des différents systèmes, dans plusieurs conditions d'utilisation (différentes vitesses, charges et flux de puissance), a permis de proposer un nouveau modèle de frottement sec valable dans toutes ces conditions d'utilisation. On a pu remarquer que, selon le type de transmission considéré, la complexité du modèle utilisé est variable. La dépendance du frottement sec par rapport à la vitesse n'est pas toujours significative. De même, la dissymétrie entre les différents quadrants de puissance n'est pas toujours significative.

Le modèle articulaire mono-axe de frottement sec proposé être intégré dans le modèle dynamique multi-axes pour réaliser ensuite l'identification globale du robot.

Chapitre 4

4. Modélisation dynamique

Résumé : Ce chapitre propose un nouveau modèle dynamique qui intègre le modèle de frottement proposé avec 3 niveaux de complexité. La linéarité du modèle par rapport aux paramètres est conservée, ce qui permet d'étendre l'identification des paramètres du nouveau modèle par une technique des moindres carrés linéaires.

4.1. Introduction

Le modèle de frottement sec proposé est fonction de la vitesse et de la charge, qui dépend elle-même de la dynamique de l'axe considéré (efforts de gravité, efforts inertiels). Ainsi, ce nouveau modèle de frottement sec conduit à une nouvelle expression du modèle dynamique. On calcule 3 modèles dynamiques multi-corps correspondant aux 3 modèles de frottement articulaire proposés dans le chapitre 3, en conservant la linéarité du nouveau modèle par rapport aux paramètres.

4.2. Nouveau modèle dynamique

On rappelle tout d'abord l'expression du modèle dynamique inverse (1.34) pour un robot à n ddl :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{fs}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{fv}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{in}_0} + \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad (4.1)$$

et d'après la définition (1.32) de $\boldsymbol{\tau}_{\text{load}}$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{load}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{fs}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{fv}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{in}_0} \quad (4.2)$$

Pour chaque axe j du robot, on écrit :

$$\tau_j = \tau_{\text{load } j} + \tau_{\text{fs } j} + \tau_{\text{fv } j} + \tau_{\text{in}_0 j} \quad (4.3)$$

avec :

- $\tau_{\text{load } j} = \mathbf{A}_{(j,:)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{(j,:)} \dot{\mathbf{q}} + Q_j + \tau_{\text{ext } j}$, où $\mathbf{A}_{(j,:)}$ est la ligne j de la matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}_{(j,:)}$ est la ligne j de la matrice $\mathbf{C}$, Q_j est l'élément j du vecteur $\mathbf{Q}$ et $\tau_{\text{ext } j}$ est la composante sur l'axe j de l'effort d'interaction du robot avec l'environnement.
- $\tau_{\text{fv } j}$ et $\tau_{\text{in}_0 j}$ sont respectivement le frottement visqueux de l'axe j et l'offset de l'effort moteur j (voir en 1.3.2),
- $\tau_{\text{fs } j}$ est le frottement sec de l'axe j , dont l'expression dépend du modèle choisi.

A chaque modèle du frottement sec, on fait correspondre un modèle dynamique.

4.2.1. Modélisation dynamique (4×1Q)

Le modèle de frottement sec de l'axe j s'écrit (voir en 3.3.5.1) :

$$\begin{cases} \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = \alpha_{1j}\tau_{loadj} + a_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{1j} + b_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \\ \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = -\alpha_{2j}\tau_{loadj} - a_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{2j} - b_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = \alpha_{3j}\tau_{loadj} + a_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{3j} - b_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = -\alpha_{4j}\tau_{loadj} - a_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{4j} + b_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \end{cases} \quad (4.4)$$

En intégrant (4.4) dans (4.3), on obtient :

$$\begin{cases} \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{1j})\tau_{loadj} + a_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{1j} + b_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j + \tau_{in0j} \\ \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{2j})\tau_{loadj} - a_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{2j} - b_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j + \tau_{in0j} \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{3j})\tau_{loadj} + a_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{3j} - b_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j + \tau_{in0j} \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{4j})\tau_{loadj} - a_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{4j} + b_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j + \tau_{in0j} \end{cases} \quad (4.5)$$

Les termes β_{ij} et τ_{in0j} étant des constantes, on choisit de les regrouper. On redéfinit pour chaque axe j les paramètres β_{ij} par :

$$\begin{cases} \beta_{1j} := \beta_{1j} + \tau_{in0j} \\ \beta_{2j} := \beta_{2j} - \tau_{in0j} \\ \beta_{3j} := \beta_{3j} - \tau_{in0j} \\ \beta_{4j} := \beta_{4j} + \tau_{in0j} \end{cases} \quad (4.6)$$

D'où la modélisation dynamique (4×1Q) :

$$\begin{cases} \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{1j})\tau_{loadj} + a_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{1j} + b_{1j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{2j})\tau_{loadj} - a_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{2j} - b_{2j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{3j})\tau_{loadj} + a_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} - \beta_{3j} - b_{3j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{4j})\tau_{loadj} - a_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}}\tau_{loadj} + \beta_{4j} + b_{4j}e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} + F_{Vj}\dot{q}_j \end{cases} \quad (4.7)$$

Et sans effet Stribeck, la modélisation dynamique se simplifie en :

$$\begin{cases} \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{1j})\tau_{loadj} + \beta_{1j} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} > 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{2j})\tau_{loadj} - \beta_{2j} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{3j})\tau_{loadj} - \beta_{3j} + F_{Vj}\dot{q}_j \\ \tau_{loadj} < 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{4j})\tau_{loadj} + \beta_{4j} + F_{Vj}\dot{q}_j \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2.2. Modélisation dynamique ($2 \times 2Q$)

Le modèle de frottement sec de l'axe j s'écrit (voir en 3.3.5.2) :

$$\begin{cases} P_{loadj} > 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = \alpha_{mj} \tau_{loadj} + a_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{mj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Coffmj} \\ P_{loadj} < 0 \Rightarrow \tau_{fsj} = -\alpha_{gj} \tau_{loadj} - a_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{gj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Coffgj} \end{cases} \quad (4.9)$$

En intégrant (4.9) dans (4.3), on obtient :

$$\begin{cases} P_{loadj} > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{mj}) \tau_{loadj} + a_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{mj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + F_{Coffmj} + \tau_{in0j} \\ P_{loadj} < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{gj}) \tau_{loadj} - a_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{gj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + F_{Coffgj} + \tau_{in0j} \end{cases} \quad (4.10)$$

Les termes F_{Coffmj} , F_{Coffgj} et τ_{in0j} étant des constantes, on choisit de les regrouper. On définit, pour chaque axe j , 2 paramètres τ_{offmj} et τ_{offgj} par :

$$\begin{cases} \tau_{offmj} = F_{Coffmj} + \tau_{in0j} \\ \tau_{offgj} = F_{Coffgj} + \tau_{in0j} \end{cases} \quad (4.11)$$

D'où la modélisation dynamique ($2 \times 2Q$) :

$$\begin{cases} P_{loadj} > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{mj}) \tau_{loadj} + a_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{mj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{mj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offmj} \\ P_{loadj} < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{gj}) \tau_{loadj} - a_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} + \beta_{gj} \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{gj} e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offgj} \end{cases} \quad (4.12)$$

Et sans effet Stribeck, la modélisation dynamique se simplifie en :

$$\begin{cases} P_{loadj} > 0 \Rightarrow \tau_j = (1 + \alpha_{mj}) \tau_{loadj} + \beta_{mj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offmj} \\ P_{loadj} < 0 \Rightarrow \tau_j = (1 - \alpha_{gj}) \tau_{loadj} + \beta_{gj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offgj} \end{cases} \quad (4.13)$$

Remarques :

- Cette modélisation ($2 \times 2Q$) est similaire à celle présentée en 2.2. Les fonctionnements “moteur” et “direct” sont équivalents, de même pour les fonctionnements “générateur” et “indirect”. Les paramètres β_m et β_g correspondent aux seuils, tandis que les paramètres α_m et α_g peuvent être associés aux rendements limites ρ_D et ρ_I par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_D = \frac{1}{1 + \alpha_m} & \text{et} & \begin{cases} x_0 = \beta_m \\ y_0 = \frac{\beta_g}{1 - \alpha_g} \end{cases} \\ \rho_I = 1 - \alpha_g \end{cases} \quad (4.14)$$

- Pour les cas irréversibles vu de la sortie, tel que pour l'axe 5 du RX130L, le paramètre α_g est supérieur à 1.

4.2.3. Modélisation dynamique (1×4Q)

Le modèle de frottement sec de l'axe j s'écrit (voir en 3.3.5.3) :

$$\tau_{fsj} = \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + a_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + b_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Coffj} \quad (4.15)$$

En intégrant (4.15) dans (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_j = \tau_{loadj} + \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + a_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + \dots \\ \dots b_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + F_{Coffj} + \tau_{in_0j} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Comme pour le modèle classique, on regroupe les termes F_{Coffj} et τ_{in_0j} : on définit, pour chaque axe j , le paramètre τ_{offj} :

$$\tau_{offj} = F_{Coffj} + \tau_{in_0j} \quad (4.17)$$

D'où la modélisation dynamique (1×4Q) :

$$\begin{aligned} \tau_j = \tau_{loadj} + \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + a_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + \dots \\ \dots b_j e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offj} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Et sans effet Stribeck, la modélisation dynamique se simplifie en :

$$\tau_j = \tau_{loadj} + \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_{loadj}) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offj} \quad (4.19)$$

4.2.4. Synthèse des modélisations

Une représentation intéressante du modèle général (4×1Q) est le diagramme de transfert d'effort donné Figure 4-1 pour un axe, dans le plan (τ, τ_{load}) , pour une vitesse constante d'amplitude $|\dot{q}_0|$. On remarque que lorsque l'effort de charge τ_{load} et l'effort d'entrée τ sont très faibles, le modèle dynamique proposé n'est plus valable. En effet, on se trouve alors dans une zone dissipative où la chaîne de transmission ne transmet plus de puissance : elle dissipe en chaleur l'énergie provenant du moteur et de la charge.

Remarque : Dans le cas d'une transmission irréversible, la caractéristique du fonctionnement générateur est entièrement contenue dans le quadrant dissipatif, ce qui indique bien que le système ne peut pas être mis en mouvement s'il n'est soumis qu'à un effort de charge (Figure 4-2).

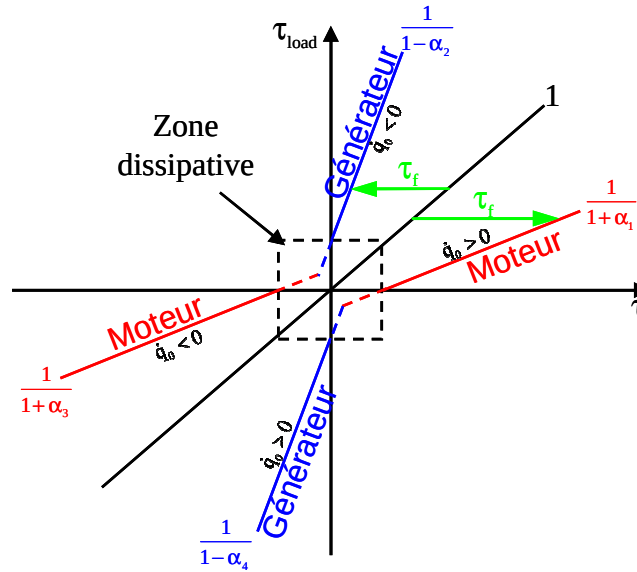


Figure 4-1 : Diagramme de transfert d'effort, à vitesse constante $|\dot{q}_0|$

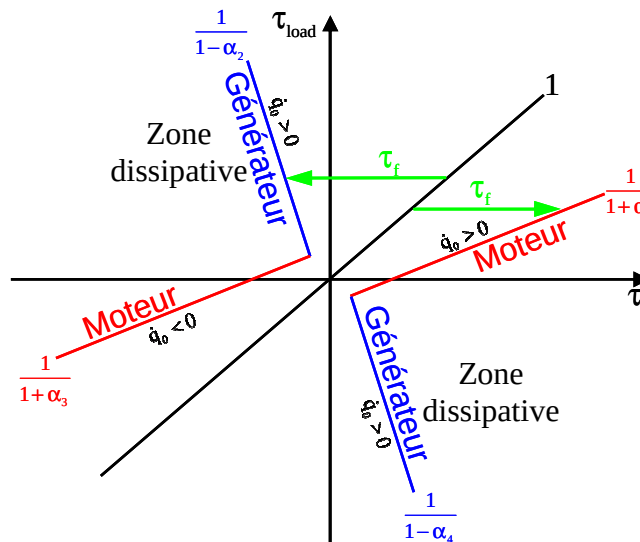


Figure 4-2 : Diagramme de transfert d'effort dans le cas irréversible

Chacune des modélisations prend en compte la variation de l'effort de frottement sec en fonction de la charge et de la vitesse. Partant de la modélisation ($4 \times 1Q$), une procédure de simplification basée sur les résultats d'identification détermine le modèle le plus simple pour la précision recherchée.

Selon les robots étudiés, la variation par rapport à la vitesse peut-être très faible et donc non identifiable. De même, certains paramètres du frottement sec peuvent être négligeables ou égaux dans plusieurs quadrants. Les simplifications du modèle sont alors faites lors de l'identification. Mais il faut tout d'abord un modèle dynamique d'identification linéaire par rapport aux paramètres.

4.3. Nouveau modèle dynamique d'identification linéaire par rapport aux paramètres

4.3.1. Linéarité par rapport aux paramètres inertiels et de frottement

On cherche à conserver un modèle dynamique d'identification linéaire par rapport aux paramètres pour calculer simplement les valeurs des paramètres en utilisant les moindres carrés linéaires.

Il a été vu en 1.3.2 que $\tau_{\text{dyn}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q})$ est linéaire par rapport aux paramètres inertiels et on peut donc écrire τ_{dyn} sous une forme linéaire :

$$\tau_{\text{dyn}} = \mathbf{D}_{\text{dyn}} \chi_{\text{dyn}} \quad (4.20)$$

où le vecteur χ_{dyn} regroupe tous les paramètres inertiels de base du robot.

Ainsi, le vecteur des efforts de charge peut s'écrire : $\tau_{\text{load}} = \mathbf{D}_{\text{dyn}} \chi_{\text{dyn}} + \tau_{\text{ext}}$. Puisque τ_{ext} est considéré connu, le vecteur τ_{load} est donc linéaire par rapport aux paramètres inertiels.

Pour chaque axe j d'un robot n -ddl, on remarque que $\tau_{\text{load } j}$ est linéaire par rapport aux paramètres inertiels de l'axe j et des suivants, et $\tau_{\text{load } j}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_{\text{load } j} &= \mathbf{A}_{(j,:)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{(j,:)} \dot{\mathbf{q}} + Q_j + \tau_{\text{ext } j} \\ &= \mathbf{D}_{\text{dyn}(j,:)} \chi_{\text{dyn}} + \tau_{\text{ext } j} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans le nouveau modèle dynamique, on remarque que $\tau_{\text{load } j}$ est multiplié par les paramètres de frottement du type α_j et a_j . Le nouveau modèle dynamique est donc linéaire par rapport aux produits des paramètres inertiels χ_{dyn} par les paramètres de frottement.

4.3.2. Linéarité par rapport à la constante de vitesse de Stribeck

Afin de conserver la linéarité du modèle dynamique inverse par rapport aux paramètres (plus précisément aux produits des paramètres), on fixe a priori une valeur pour chaque $\dot{q}_{sj}$. Cette constante de vitesse de l'axe j exprime le comportement transitoire exponentiel du passage de l'effort d'adhérence F_{aj} à l'effort de glissement F_{gj} , soit pour une plage de vitesse entre 0 et $3 \times \dot{q}_{sj}$ ($\pm 5\%$). La valeur de $\dot{q}_{sj}$ est estimée par des mesures préalables de l'effort d'entrée pour différentes vitesses, telles que celles présentées au paragraphe 3.3. Un ajustement peut éventuellement être fait lors de l'identification pour diminuer la norme de l'erreur de prédiction du modèle.

Etant donné $\dot{q}_{sj}$, on définit la variable $E_{\text{xp } j}$:

$$E_{\text{xp } j} = e^{-|\dot{q}_j|/\dot{q}_{sj}} \quad (4.22)$$

4.3.3. Linéarité par rapport au signe de l'effort de charge

Le modèle dynamique (4.7), (4.12) ou (4.18) n'est pas linéaire par rapport aux paramètres car il dépend pour chaque axe j de $\text{sign}(P_{\text{load } j})$ ou de $\text{sign}(\tau_{\text{load } j})$ que l'on ne connaît pas. De plus, pour les modélisations $(4 \times 1Q)$ et $(2 \times 2Q)$, on a plusieurs expressions du modèle selon le quadrant de fonctionnement considéré.

Dans notre étude, on choisit de se limiter aux articulations réversibles et, afin de contourner le problème, on remarque qu'en dehors de la zone dissipative (Figure 4-1), on a :

$$\text{sign}(\tau_{\text{load } j}) = \text{sign}(\tau_j) \quad (4.23)$$

Et on définit la puissance d'entrée P_j de l'axe j avec :

$$\begin{aligned} \text{sign}(P_{\text{load } j}) &= \text{sign}(\tau_{\text{load } j} \dot{q}_j) = \text{sign}(\tau_{\text{load } j}) \text{sign}(\dot{q}_j) \\ &= \text{sign}(\tau_j) \text{sign}(\dot{q}_j) = \text{sign}(\tau_j \dot{q}_j) = \text{sign}(P_j) \end{aligned} \quad (4.24)$$

On peut alors, pour chaque type de modélisation, écrire le modèle dynamique inverse de manière linéaire par rapport aux paramètres.

Remarque : Pour les articulations irréversibles, cette approximation n'est pas valable car la puissance d'entrée P est toujours positive (Figure 4-2) et il n'est pas possible de dissocier le fonctionnement moteur du fonctionnement générateur sans connaître le signe de $\tau_{\text{load } j}$.

4.3.4. Synthèse du modèle dynamique inverse d'identification

4.3.4.1. Modèle dynamique d'identification $(4 \times 1Q)$

Pour exprimer la modélisation $(4 \times 1Q)$ en un seul modèle, on introduit 4 nouvelles variables pour chaque axe j , P_j^1 , P_j^2 , P_j^3 et P_j^4 , définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_j^1 = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_j)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_j)}{2} \right) \\ P_j^2 = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_j)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_j)}{2} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_j^3 = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_j)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_j)}{2} \right) \\ P_j^4 = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_j)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_j)}{2} \right) \end{array} \right. \quad (4.25)$$

C'est-à-dire qu'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_j > 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Leftrightarrow P_j^1 = 1, P_j^2 = 0, P_j^3 = 0, P_j^4 = 0 \\ \tau_j > 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Leftrightarrow P_j^1 = 0, P_j^2 = 1, P_j^3 = 0, P_j^4 = 0 \\ \tau_j < 0 \ \& \ \dot{q}_j < 0 \Leftrightarrow P_j^1 = 0, P_j^2 = 0, P_j^3 = 1, P_j^4 = 0 \\ \tau_j < 0 \ \& \ \dot{q}_j > 0 \Leftrightarrow P_j^1 = 0, P_j^2 = 0, P_j^3 = 0, P_j^4 = 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, le modèle dynamique d'identification ($4 \times 1Q$) avec un effort de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_j = & (1 + \alpha_{1j}) P_j^1 \tau_{loadj} + a_{1j} E_{xpj} P_j^1 \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{2j}) P_j^2 \tau_{loadj} - a_{2j} E_{xpj} P_j^2 \tau_{loadj} + \dots \\ & \dots (1 + \alpha_{3j}) P_j^3 \tau_{loadj} + a_{3j} E_{xpj} P_j^3 \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{4j}) P_j^4 \tau_{loadj} - a_{4j} E_{xpj} P_j^4 \tau_{loadj} + \dots \\ & \dots \beta_{1j} P_j^1 + b_{1j} E_{xpj} P_j^1 - \beta_{2j} P_j^2 - b_{2j} E_{xpj} P_j^2 - \beta_{3j} P_j^3 - b_{3j} E_{xpj} P_j^3 + \beta_{4j} P_j^4 + b_{4j} E_{xpj} P_j^4 + F_{Vj} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.26)$$

Si la variation du frottement sec avec la vitesse est négligeable, le modèle dynamique d'identification ($4 \times 1Q$) se simplifie et s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_j = & (1 + \alpha_{1j}) P_j^1 \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{2j}) P_j^2 \tau_{loadj} + (1 + \alpha_{3j}) P_j^3 \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{4j}) P_j^4 \tau_{loadj} + \dots \\ & \dots \beta_{1j} P_j^1 - \beta_{2j} P_j^2 - \beta_{3j} P_j^3 + \beta_{4j} P_j^4 + F_{Vj} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.3.4.2. Modèle dynamique d'identification ($2 \times 2Q$)

Pour exprimer la modélisation ($2 \times 2Q$) sous un seul modèle, on introduit 2 nouvelles variables pour chaque axe j , P_j^+ et P_j^- , définies par :

$$\begin{cases} P_j^+ = \frac{1 + \text{sign}(P_j)}{2} \\ P_j^- = \frac{1 - \text{sign}(P_j)}{2} = \bar{P}_j^+ \end{cases} \quad (4.28)$$

C'est-à-dire qu'on a : $P_j > 0 \Leftrightarrow P_j^+ = 1 \Leftrightarrow P_j^- = 0$ & $P_j < 0 \Leftrightarrow P_j^+ = 0 \Leftrightarrow P_j^- = 1$.

Ainsi, le modèle dynamique d'identification ($2 \times 2Q$) avec un effort de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_j = & (1 + \alpha_{mj}) P_j^+ \tau_{loadj} + a_{mj} E_{xpj} P_j^+ \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{gj}) P_j^- \tau_{loadj} - a_{gj} E_{xpj} P_j^- \tau_{loadj} + \dots \\ & \dots \beta_{mj} P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{mj} E_{xpj} P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) + \beta_{gj} P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) + b_{gj} E_{xpj} P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) + \dots \\ & \dots \tau_{offmj} P_j^+ + \tau_{offgj} P_j^- + F_{Vj} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.29)$$

Si la variation du frottement sec avec la vitesse est négligeable, le modèle dynamique d'identification ($2 \times 2Q$) se simplifie et s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_j = & (1 + \alpha_{mj}) P_j^+ \tau_{loadj} + (1 - \alpha_{gj}) P_j^- \tau_{loadj} + \beta_{mj} P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) + \beta_{gj} P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) + \dots \\ & \dots \tau_{offmj} P_j^+ + \tau_{offgj} P_j^- + F_{Vj} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3.4.3. Modèle dynamique d'identification (1×4Q)

Le modèle dynamique d'identification (1×4Q) avec un effort de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse s'écrit directement :

$$\tau_j = \tau_{loadj} + \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_j) + a_j E_{xpj} \tau_{loadj} \text{sign}(P_j) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + b_j E_{xpj} \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offj} \quad (4.31)$$

Si la variation du frottement sec avec la vitesse est négligeable, le modèle dynamique d'identification (1×4Q) se simplifie et s'écrit :

$$\tau_j = \tau_{loadj} + \alpha_j \tau_{loadj} \text{sign}(P_j) + \beta_j \text{sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + \tau_{offj} \quad (4.32)$$

4.4. Complexité du nouveau modèle dynamique d'identification

4.4.1. Modèles dynamiques d'identification en mono-axe

On remarque que le nouveau modèle de frottement apporte des paramètres supplémentaires. Quelle que soit la complexité choisie, le modèle dynamique peut s'écrire de manière linéaire par rapport aux paramètres. Les paramètres identifiés sont alors des paramètres inertiels pondérés par les paramètres de frottements, ainsi que les paramètres de frottement seuls. Le nombre de paramètres à identifier avec le nouveau modèle augmente avec la complexité du modèle.

Pour un robot mono-axe, on identifie habituellement le modèle classique sans effort extérieur et les paramètres à identifier par le modèle classique sont les paramètres χ_{dyn} , et les paramètres F_C , F_V et τ_{off} .

Pour le nouveau modèle d'un robot mono-axe, on a $\tau_{load} = \mathbf{D}_{dyn} \chi_{dyn} + \tau_{ext}$. Les paramètres inertiels se combinent par produit avec les paramètres de frottement. De plus, en utilisant différents efforts τ_{ext} connus, on peut identifier les paramètres de frottement seuls. Ainsi :

- les paramètres à identifier par le modèle (1×4Q) sont les paramètres χ_{dyn} , $\alpha \chi_{dyn}$, $a \chi_{dyn}$, α , a , β , b , F_V et τ_{off} .
- les paramètres à identifier par le modèle (2×2Q) sont les paramètres $(1 + \alpha_m) \chi_{dyn}$, $a_m \chi_{dyn}$, $(1 - \alpha_g) \chi_{dyn}$, $a_g \chi_{dyn}$, $1 + \alpha_m$, a_m , β_m , b_m , $1 - \alpha_g$, a_g , β_g , b_g , τ_{offm} , τ_{offg} et F_V .
- les paramètres à identifier par le modèle (4×1Q) sont les paramètres $(1 + \alpha_1) \chi_{dyn}$, $a_1 \chi_{dyn}$, $(1 - \alpha_2) \chi_{dyn}$, $a_2 \chi_{dyn}$, $(1 + \alpha_3) \chi_{dyn}$, $a_3 \chi_{dyn}$, $(1 - \alpha_4) \chi_{dyn}$, $a_4 \chi_{dyn}$, $1 + \alpha_1$, a_1 , β_1 , b_1 , $1 - \alpha_2$, a_2 , β_2 , b_2 , $1 + \alpha_3$, a_3 , β_3 , b_3 , $1 - \alpha_4$, a_4 , β_4 , b_4 et F_V .

Dans le Tableau 4-1, on donne le nombre de paramètres pour l'identification d'un axe, pour chaque modélisation, si le nombre de paramètres dynamiques de base du modèle classique est égal à b .

Tableau 4-1 : Nombre de paramètres dynamiques pour un axe

	Modèle classique	Modèle (1×4Q)	Modèle (2×2Q)	Modèle (4×1Q)
Sans effet Stribeck	b	$2b - 2$	$2b + 1$	$4b - 3$
Avec effet Stribeck	$b + 1$	$3b - 3$	$4b - 1$	$8b - 7$

Pour un robot un axe, on applique la méthode des moindres carrés linéaires afin d'identifier les paramètres regroupés par produits). Pour obtenir les paramètres de frottement α_i et a_i seuls, on utilise différents efforts extérieurs τ_{ext} (en chargeant le robot avec des masses connues) comme on va le voir au chapitre 5.

Le choix du nouveau modèle d'identification se fait de la manière suivante. Dans un premier temps, on réalise des paliers de vitesse afin de tracer l'effort d'entrée moyen en fonction de la vitesse (étude faite en 3.3). Cela permet d'identifier la valeur de $\dot{q}_s$ directement à partir des courbes (voir au paragraphe 4.3.2) et de savoir si l'effet Stribeck est significatif. Dans un second temps, on identifie le nouveau modèle en fixant la valeur de $\dot{q}_s$ et en utilisant différentes charges extérieures connues. On commence par identifier le modèle le plus complexe : modèle (4×1Q) avec frottement sec fonction de la charge et de la vitesse. Les paramètres ayant des écarts-types trop élevés sont non identifiables et supprimés. En particulier, si les paramètres qui dépendent de a_i et b_i sont non identifiables, cela signifie que l'effet Stribeck est négligeable et peut être supprimer du modèle de frottement. On valide ensuite le modèle (4×1Q) : si les valeurs des paramètres α_i et a_i sont proches entre les 2 quadrants moteur et entre les 2 quadrants générateur (c'est-à-dire si $\alpha_1 \approx \alpha_3$, $\alpha_2 \approx \alpha_4$, $a_1 \approx a_3$ et $a_2 \approx a_4$), on peut simplifier le modèle (4×1Q) par le modèle (2×2Q). Celui-ci peut éventuellement être également simplifié par le modèle (1×4Q) si les paramètres de frottement du mode moteur sont égaux aux paramètres de frottement du mode générateur.

Remarque : Comme on peut le voir dans le Tableau 4-1, le nombre de paramètres n'est pas très différent entre le modèle (1×4Q) et le modèle (2×2Q). La complexité des 2 modèles est donc semblable mais le modèle (2×2Q) décrit mieux le comportement dissymétrique du frottement. De plus, les paramètres α_i étant très proches de zéro, il sera plus simple d'identifier $1 + \alpha_m$ et $1 - \alpha_g$ proches de la valeur 1 (modèle (2×2Q)) que d'identifier α seul (modèle (1×4Q)) : on a un meilleur équilibrage des paramètres avec le modèle (2×2Q) qu'avec le modèle (1×4Q). Ainsi, on préférera en général le modèle (2×2Q) au modèle (1×4Q) même si les valeurs des paramètres α_m et α_g sont proches.

4.4.2. Modèles dynamiques d'identification en multi-axes

Notre objectif pour la méthode d'identification multi-axes est d'utiliser également un modèle linéaire par rapport aux paramètres, de façon à utiliser une technique de moindres carrés linéaires pour l'estimation.

Pour les robots multi-axes, la combinaison par produits des paramètres de frottement α et a et des paramètres inertiels (paragraphe 4.3.1) est plus complexe. En effet, pour chaque axe j , tout mouvement sur un axe k égal à l'axe j ou situé en aval ($k \geq j$) peut faire varier la charge vue par l'axe j . Les paramètres de frottement α_j et a_j de l'axe j sont multipliés par chacun des paramètres inertiels de chaque corps k , avec $k \geq j$. En ajoutant des efforts de charge extérieurs connus, on peut par ailleurs identifier les paramètres de frottement seuls.

Soit n le nombre d'axes du robot, b_j le nombre de paramètres inertiels de l'axe j et soit 3 le nombre de paramètres de frottement du modèle classique pour chaque axe (F_{Cj} , F_{Vj} et τ_{offj}), le nombre total B de paramètres pour le modèle classique peut s'écrire :

$$B = \sum_{j=1}^n b_j + 3n \quad (4.33)$$

Pour le modèle $(1 \times 4Q)$ sans effet Stribeck, on a pour un axe j : le même nombre b_j de paramètres inertiels, plus la somme des nombres des paramètres inertiels de chaque corps k avec $k \geq j$, plus les 4 paramètres de frottement supplémentaires (α_j , β_j , F_{Vj} et τ_{offj}). Ainsi, pour un axe j , on a : $b_j + \sum_{k=j}^n b_k + 4$. Et donc au total, pour le modèle $(1 \times 4Q)$, on a :

$$B_{(1 \times 4Q)} = \sum_{j=1}^n \left(b_j + \sum_{k=j}^n b_k + 4 \right) = \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 4n = B + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + n \quad (4.34)$$

Un raisonnement analogue conduit aux nombres de paramètres pour les différents modèles, indiqués dans le Tableau 4-2.

Tableau 4-2 : Nombre de paramètres dynamiques pour un robot multi-axes

	Modèle classique	Modèle $(1 \times 4Q)$	Modèle $(2 \times 2Q)$	Modèle $(4 \times 1Q)$
Sans effet Stribeck	$\sum_{j=1}^n b_j + 3n$	$\sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 4n$	$2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 7n$	$4 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 9n$
Avec effet Stribeck	$\sum_{j=1}^n b_j + 4n$	$\sum_{j=1}^n b_j + 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 6n$	$4 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 11n$	$8 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \right) + 17n$

Le Tableau 4-3 et le Tableau 4-4 illustrent l'augmentation de la complexité du modèle d'identification avec un robot 2 axes puis avec un robot 4 axes : on prend l'exemple du robot Stäubli TX40 en considérant d'abord les 2 premiers axes seulement, puis les 4 premiers. Le nombre de paramètres de base du modèle classique est obtenu par la méthode formelle décrite à l'Annexe 2.

Tableau 4-3 : Nombre de paramètres dynamiques pour un robot 2 axes (exemple du TX40)

	Modèle classique	Modèle (1×4Q)	Modèle (2×2Q)	Modèle (4×1Q)
Sans effet Stribeck	14	31	44	78
Avec effet Stribeck	16	50	82	154

Tableau 4-4 : Nombre de paramètres dynamiques pour un robot 4 axes (exemple du TX40)

	Modèle classique	Modèle (1×4Q)	Modèle (2×2Q)	Modèle (4×1Q)
Sans effet Stribeck	36	111	170	320
Avec effet Stribeck	40	190	328	636

Comme on peut le voir sur les 3 tableaux, le nombre de paramètres à identifier augmente rapidement avec la complexité du modèle et avec le nombre d'axes du robot. Ainsi, on ne peut appliquer pour un robot multi-axes la méthode utilisée sur un axe qui consiste à identifier les produits de paramètres.

De plus, le modèle de frottement le plus approprié n'est pas toujours le même selon le type de transmission. Dans un robot multi-axes, les axes n'ayant pas nécessairement le même type de transmission ou de lubrification, le modèle adapté à chaque axe peut être différent des autres.

La méthode d'identification proposée pour un robot multi-axes est donc progressive en 2 étapes. Dans la première étape, on identifie chaque axe j séparément (avec des mouvements axe par axe) pour obtenir les valeurs des paramètres de frottement permettant de prendre en compte la variation du frottement sec par rapport à la charge et à la vitesse, c'est-à-dire $\dot{q}_{sj}$, α_j et a_j . Cela permet également de choisir la complexité appropriée du modèle pour chaque axe. Dans une seconde étape, les valeurs obtenues de ces paramètres sont fixées dans le modèle et utilisées dans la matrice d'observation afin d'identifier les paramètres inertiels seuls. Ainsi, lors de la seconde étape, le nombre de paramètre est sensiblement le même entre le modèle classique et le nouveau modèle.

Cette méthode est appliquée au robot Stäubli TX40 (4 axes) dans le chapitre 5.

4.5. Conclusion

Le modèle de frottement a bien été intégré au modèle dynamique. Etant donné les 3 modélisations possibles du frottement sec, on obtient 3 variantes du modèle dynamique. Un choix devra donc être fait entre ces modélisations lors de l'identification.

Afin de pouvoir identifier le modèle dynamique en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires, on utilise une hypothèse simplificatrice quant au signe du couple de charge. On propose de plus une identification par étapes : pour l'identification mono-axe, la vitesse de Stribeck doit être tout d'abord estimée, puis sa valeur est fixée dans l'identification globale. Pour l'identification multi-ddl, on propose d'identifier tout d'abord chaque axe séparément afin d'obtenir les valeurs des paramètres de frottement sec, et de les fixer dans l'identification globale du système complet.

Chapitre 5

5. Identification du nouveau modèle dynamique

Résumé : Ce chapitre présente pour chaque prototype ou robot étudié, une validation expérimentale avec modélisation et identification. Dans chaque cas, un nouveau modèle de frottement adapté est choisi et les modèles dynamiques, classique et nouveau, sont comparés afin de quantifier l'apport du nouveau modèle. Enfin, une synthèse sur la méthode d'identification est donnée.

5.1. Introduction

Les différents prototypes et robots déjà présentés ont été utilisés pour appliquer le modèle proposé et réaliser l'identification dynamique : le banc à vérin à câble, l'EMPS, l'axe 3 du robot RX130L et le robot TX40 (4 premiers axes).

Pour chaque robot, on commence par rappeler le modèle dynamique ainsi que l'expression de l'effort créé par les masses ajoutées qui est affecté à l'effort extérieur τ_{ext} . Une méthode d'identification est proposée pour réaliser l'identification du modèle classique du robot par une régression linéaire qui regroupe tous les essais (avec et sans charge). Enfin, l'identification est réalisée avec le nouveau modèle dynamique et les résultats obtenus avec les deux modèles sont comparés.

Le choix du nouveau modèle pour l'identification 1 axe se fait de la manière suivante : la prise en compte de la variation du frottement sec en fonction de la vitesse dépend des résultats obtenus dans la partie 3.3. Pour le type de modélisation selon les 4 quadrants, on commence par identifier le modèle (4×1Q) que l'on simplifie selon les résultats obtenus : si $(\alpha_1 \simeq \alpha_3, a_1 \simeq a_3)$ et $(\alpha_2 \simeq \alpha_4, a_2 \simeq a_4)$, le modèle (4×1Q) est simplifié suivant le modèle (2×2Q). Si $\alpha_m \simeq \alpha_g$ et $a_m \simeq a_g$, le modèle (2×2Q) est simplifié suivant le modèle (1×4Q). On regardera également les paramètres β et b pour la simplification. Les paramètres mal identifiés et négligeables sont supprimés.

5.2. Banc à vérin à câble

Le banc à vérin à câble a été présenté en 3.2.1.1. On rappelle ici le modèle dynamique inverse du banc à vérin à câble (voir en 3.2.1.2) :

$$\tau = J\ddot{q} + M_a g r_{CS} + M_a r_{CS}^2 \ddot{q} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (5.1)$$

où M_a est la masse ajoutée en sortie : $M_a \in \{0 ; 0,985 ; 1,950 ; 2,924 ; 4,046\}$.

Le couple de charge τ_{load} est ici :

$$\tau_{\text{load}} = J\ddot{q} + M_a r_{CS} (g + r_{CS} \ddot{q}) \quad (5.2)$$

5.2.1. Identification du modèle classique

L'objectif étant de comparer le modèle classique au nouveau modèle, pour des robots dont la charge varie, on doit pouvoir identifier le modèle classique, avec F_C constant, en utilisant tous les échantillons, avec et sans charge, avec et sans accélérations.

Soit $n_c = 4$ le nombre de charges utilisées dans les mesures pour l'identification et soit $k \in [0 : n_c]$. Les échantillons réalisés avec le système à vide sont les échantillons (0) auxquels correspondent les mesures de couple $\tau_{(0)}$. De même, pour chaque masse ajoutée $M_{a(k)}$, on a les échantillons (k) avec les mesures de couples $\tau_{(k)}$ (on a donc : $M_{a(0)} = 0$; $M_{a(1)} = 0,985$; ... ; $M_{a(n_c)} = M_{a(4)} = 4,046$). Pour chaque masse pesée $M_{a(k)}$, on calcule le couple extérieur $\tau_{\text{ext}(k)} = M_{a(k)} r_{CS} (g + r_{CS} \ddot{q})$.

Pour chaque échantillon avec $M_{a(k)}$, le modèle dynamique classique (5.1) s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\begin{cases} \tau_{(k)} = \mathbf{D}\chi \\ \mathbf{D} = [\ddot{q} \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad 1 \quad \tau_{\text{ext}(k)}] \\ \chi = [J \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{\text{off}} \quad \text{Un}]^T \end{cases} \quad (5.3)$$

avec le paramètre $\text{Un} = \frac{\tau_{\text{extE}}}{\tau_{\text{ext}(k)}}$, où τ_{extE} correspond à l'estimation, par l'identification, du couple extérieur connu $\tau_{\text{ext}(k)}$: $\tau_{\text{extE}} = \hat{M}_a r_{CS} (g + r_{CS} \ddot{q})$ où $\hat{M}_a$ est la masse estimée par le modèle.

Pour l'identification, on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système $\tau = \mathbf{W}\chi + \rho$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{q} \quad \text{sign}(\dot{q}) \quad \dot{q} \quad \mathbb{1}_e \quad \tau_{\text{ext}}] \\ \chi = [J \quad F_C \quad F_V \quad \tau_{\text{off}} \quad \text{Un}]^T \end{cases} \quad (5.4)$$

où :

$$\begin{cases} \tau = [\tau_{(0)}^T \quad \dots \quad \tau_{(k)}^T \quad \dots \quad \tau_{(n_c)}^T]^T \\ \dot{q} = [\dot{q}_{(0)}^T \quad \dots \quad \dot{q}_{(k)}^T \quad \dots \quad \dot{q}_{(n_c)}^T]^T \\ \ddot{q} = [\ddot{q}_{(0)}^T \quad \dots \quad \ddot{q}_{(k)}^T \quad \dots \quad \ddot{q}_{(n_c)}^T]^T \\ \tau_{\text{ext}} = [\tau_{\text{ext}(0)}^T \quad \dots \quad \tau_{\text{ext}(k)}^T \quad \dots \quad \tau_{\text{ext}(n_c)}^T]^T \end{cases} \quad (5.5)$$

et $\mathbb{1}_e$ est le vecteur unitaire ($e \times 1$), e étant le nombre total d'échantillons.

Si le modèle est bien identifié, les masses ajoutées sont correctement estimées et :

$$U_n = \frac{\tau_{\text{extE}}}{\tau_{\text{ext}(k)}} = \frac{\hat{M}_a r_{CS} (g + r_{CS} \ddot{q})}{M_{a(k)} r_{CS} (g + r_{CS} \ddot{q})} = \frac{\hat{M}_a}{M_{a(k)}} \simeq 1 \quad (5.6)$$

La valeur identifiée du paramètre U_n doit donc être proche de 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.2.3 et comparés à ceux obtenus avec le nouveau modèle.

5.2.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.1, il est superflu de modéliser l'effet Stribeck pour cet axe (on pourra le vérifier en conservant les paramètres liés à la vitesse lors de l'identification et en remarquant qu'ils sont non identifiables). On expose donc ici la méthode d'identification pour la modélisation ($4 \times 1Q$) sans variation du frottement sec avec la vitesse.

Pour les échantillons avec $M_{a(k)}$, le modèle dynamique (5.1) modifié pour obtenir la modélisation ($4 \times 1Q$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_{(k)} = & (1 + \alpha_1) J P^1 \ddot{q} + (1 + \alpha_1) P^1 \tau_{\text{ext}(k)} + \beta_1 P^1 + (1 - \alpha_2) J P^2 \ddot{q} + (1 - \alpha_2) P^2 \tau_{\text{ext}(k)} - \beta_2 P^2 + \dots \\ & \dots (1 + \alpha_3) J P^3 \ddot{q} + (1 + \alpha_3) P^3 \tau_{\text{ext}(k)} - \beta_3 P^3 + (1 - \alpha_4) J P^4 \ddot{q} + (1 - \alpha_4) P^4 \tau_{\text{ext}(k)} + \beta_4 P^4 + F_V \dot{q} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pour l'identification, on utilise le système $\tau = \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)} + \boldsymbol{\rho}$, avec (5.5) et :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} = [\mathbf{P}^1 \ddot{q} & \mathbf{P}^1 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^2 \ddot{q} & \mathbf{P}^2 \tau_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^3 \ddot{q} & \mathbf{P}^3 \tau_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^3 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^4 \ddot{q} & \mathbf{P}^4 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^4 \mathbb{1}_e & \dot{q}] \\ \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)} = [(1 + \alpha_1)J & 1 + \alpha_1 & \beta_1 & (1 - \alpha_2)J & 1 - \alpha_2 & \beta_2 & (1 + \alpha_3)J & 1 + \alpha_3 & \beta_3 & (1 - \alpha_4)J & 1 - \alpha_4 & \beta_4 & F_V]^\top \end{cases} \quad (5.8)$$

et où l'on définit les matrices diagonales ($e \times e$) $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$ et $\mathbf{P}^4$ (correspondant aux variables (4.25) définies au paragraphe 4.3.4.1), telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}^1(i, i) = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \\ \mathbf{P}^2(i, i) = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{P}^3(i, i) = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \\ \mathbf{P}^4(i, i) = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \end{cases} \quad (5.9)$$

(τ_i est le couple d'entrée pour l'échantillon i et $\dot{q}_i$ la vitesse pour l'échantillon i).

Si l'on peut simplifier le modèle ($4 \times 1Q$) par la modélisation ($2 \times 2Q$), on utilise alors le système $\tau = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = [\mathbf{P}^+ \ddot{q} & \mathbf{P}^+ \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^+ \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^- \ddot{q} & \mathbf{P}^- \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^- \mathbb{1}_e & \dot{q}] \\ \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} = [(1 + \alpha_m)J & 1 + \alpha_m & \beta_m & \tau_{\text{off m}} & (1 - \alpha_g)J & 1 - \alpha_g & \beta_g & \tau_{\text{off g}} & F_V]^\top \end{cases} \quad (5.10)$$

où $\mathbf{P}^+$ et $\mathbf{P}^-$ sont des matrices diagonales ($e \times e$) (correspondant aux variables (4.28) définies au paragraphe 4.3.4.2), telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}^+ (i,i) = \frac{1 + \text{sign}(P_i)}{2} \\ \mathbf{P}^- (i,i) = \frac{1 - \text{sign}(P_i)}{2} \end{cases} \quad (5.11)$$

(P_i la puissance d'entrée pour l'échantillon i : $P_i = \tau_i \dot{q}_i$).

Enfin, si l'on peut à nouveau simplifier en prenant la modélisation ($1 \times 4Q$), on utilise le système $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} = [\ddot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{P}^{\text{sign}} \ddot{\mathbf{q}} \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad \mathbf{P}^{\text{sign}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbb{I}_e \quad \dot{\mathbf{q}}] \\ \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} = [J \quad \alpha J \quad U_n \quad \alpha \quad \beta \quad \tau_{\text{off}} \quad F_V]^T \end{cases} \quad (5.12)$$

où $\mathbf{P}^{\text{sign}}$ est une matrice diagonale ($e \times e$) telle que :

$$\mathbf{P}^{\text{sign}} (i,i) = \text{sign}(P_i) \quad (5.13)$$

Pour la modélisation ($1 \times 4Q$), on retrouve le même paramètre U_n que pour le modèle classique, et il doit être estimé à une valeur proche de 1.

Les résultats des identifications avec les différentes modélisations sont donnés dans la partie suivante.

5.2.3. Résultats et analyses

Les mêmes mesures ont été utilisées pour l'identification de tous les modèles. Aux mesures déjà réalisées avec des sinus saturés en vitesse, on ajoute des mesures réalisées sur des trajectoires sinusoïdales allant de 40% à 100% de la vitesse maximale, permettant d'avoir de plus fortes accélérations.

Le modèle classique et le modèle ($4 \times 1Q$) fonction de la charge sont tout d'abord identifiés et comparés : on observe une diminution de 10% de la norme relative des erreurs grâce au nouveau modèle. On s'intéresse aux valeurs identifiées des paramètres α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,063 & ; & \alpha_2 = 0,187 \\ \alpha_3 = 0,046 & ; & \alpha_4 = 0,173 \end{cases} \quad (5.14)$$

On remarque que les valeurs de α_1 et α_3 sont proches, de même pour les valeurs de α_2 et α_4 . On choisit donc de simplifier le nouveau modèle et d'identifier le modèle ($2 \times 2Q$) fonction de la charge.

La norme relative du résidu total obtenue avec le modèle $(2 \times 2Q)$ est très proche de celle obtenue avec le modèle $(4 \times 1Q)$: celui-ci est donc superflu. On compare cette fois les paramètres α_m et α_g obtenus : $\alpha_m = 0,055$ et $\alpha_g = 0,181$ (ces valeurs sont cohérentes avec celles (5.14) obtenues avec le modèle $(4 \times 1Q)$). Ces 2 valeurs étant très différentes, on ne peut pas simplifier le modèle.

Afin de confirmer le choix du modèle, le modèle $(1 \times 4Q)$ fonction de la charge et le modèle $(2 \times 2Q)$ fonction de la charge et de la vitesse ont été également identifiés. Le premier apporte des résultats meilleurs qu'avec le modèle classique mais moins bon qu'avec le modèle $(2 \times 2Q)$ fonction de la charge. Le deuxième est équivalent au modèle fonction de la charge mais les paramètres a_m , b_m , a_g et b_g ont des écarts-types élevés et sont mal identifiés.

La norme relative du résidu total obtenue pour chacun des modèles (classique, $(4 \times 1Q)/\text{charge}$, $(2 \times 2Q)/\text{charge}$, $(1 \times 4Q)/\text{charge}$ et $(2 \times 2Q)/\text{charge} + \text{vitesse}$) est donnée dans le Tableau 5-1.

Tableau 5-1 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,09676
Modèle $(4 \times 1Q)$ / charge	0,08780
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge	0,08795
Modèle $(1 \times 4Q)$ / charge	0,09167
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge + vitesse	0,08682

On retient donc le modèle $(2 \times 2Q)$ avec variation par rapport à la charge et on compare les résultats de l'identification obtenus avec ce modèle et le modèle classique. Les paramètres identifiés dans les 2 cas sont donnés dans le Tableau 5-2 et le Tableau 5-3 (valeurs en unités SI). La Figure 5-1 et la Figure 5-2 présentent les validations directes où on compare le couple mesuré au couple estimé par chaque modèle. La Figure 5-3 et la Figure 5-4 sont extraites de la Figure 5-1 et la Figure 5-2, et sont des zooms sur les échantillons correspondants aux mesures réalisées avec la charge maximale de 4,046 kg.

Tableau 5-2 : Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J	4,9305	0,0424	0,4299
F_c	3,0898	0,0056	0,0904
F_v	26,6622	0,0831	0,1559
τ_{off}	-0,2177	0,0054	1,2398
Un	1,0078	0,0009	0,0435

Tableau 5-3 : Valeurs identifiées avec le modèle ($2 \times 2Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_m)J$	5,3056	0,0860	0,8104
$1 + \alpha_m$	1,0550	0,0014	0,0656
β_m	2,9001	0,0078	0,1345
$\tau_{\text{off } m}$	-0,2844	0,0059	1,0458
$(1 - \alpha_g)J$	4,8710	0,0434	0,4451
$1 - \alpha_g$	0,8186	0,0038	0,2303
β_g	1,8315	0,0283	0,7730
$\tau_{\text{off } g}$	-0,1187	0,0087	3,6672
F_v	27,0180	0,0772	0,1429

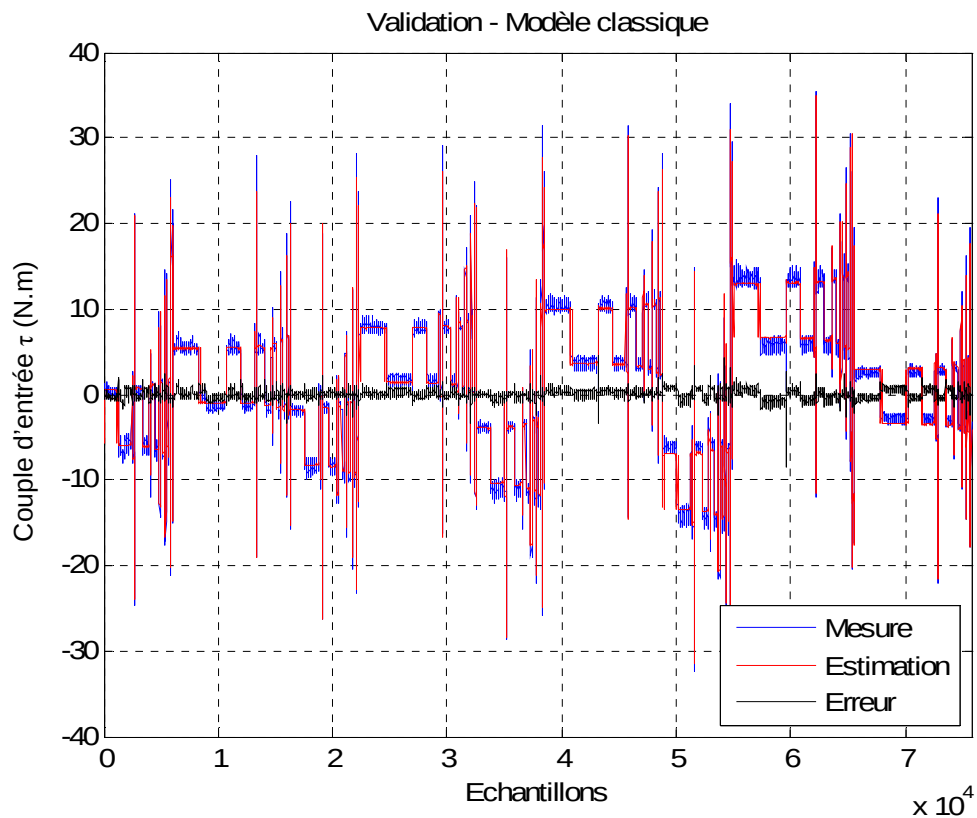


Figure 5-1 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle classique.

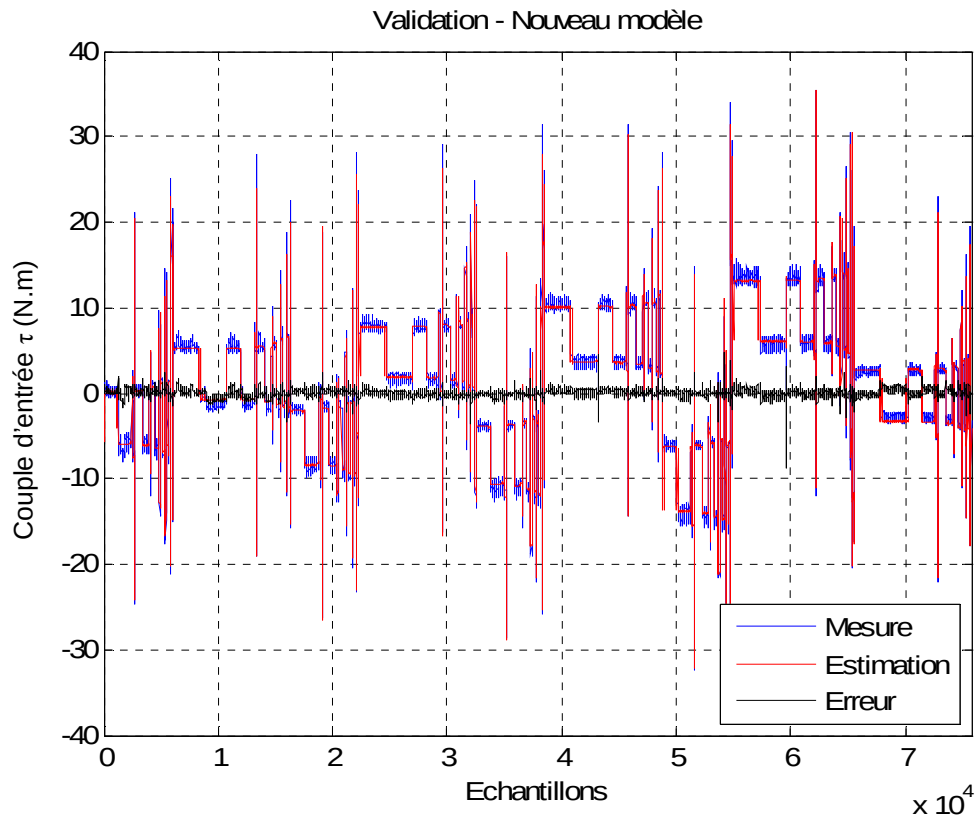


Figure 5-2 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le nouveau modèle.

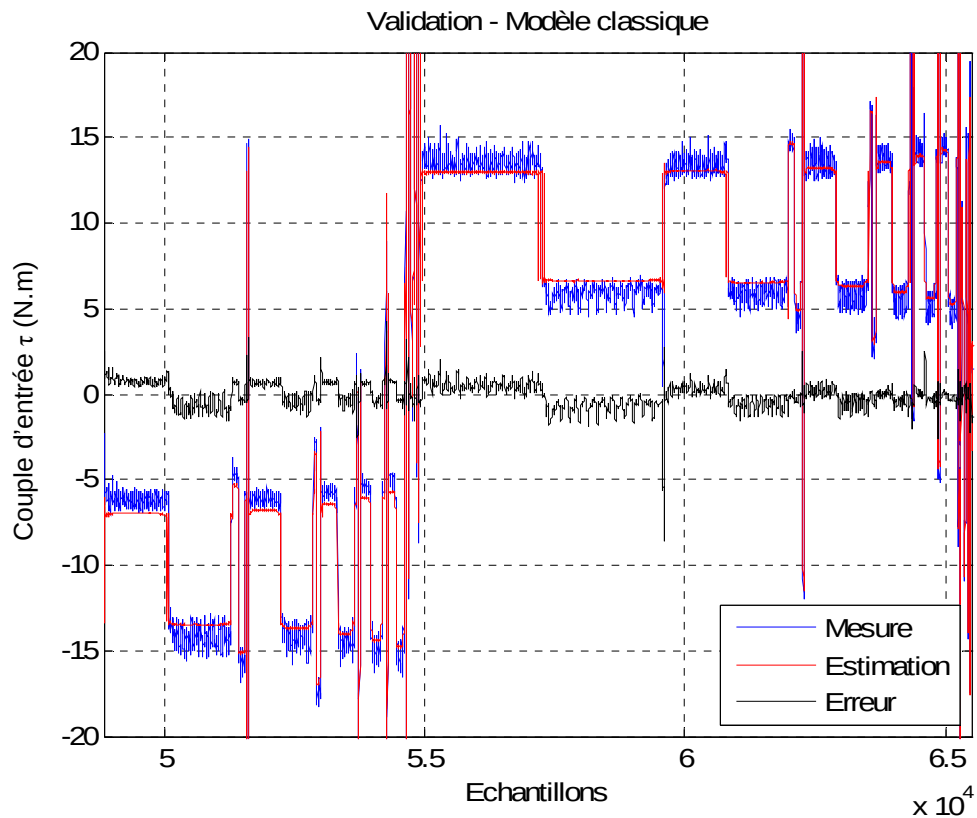


Figure 5-3 : Zoom sur les échantillons avec la charge maximale (Modèle classique)

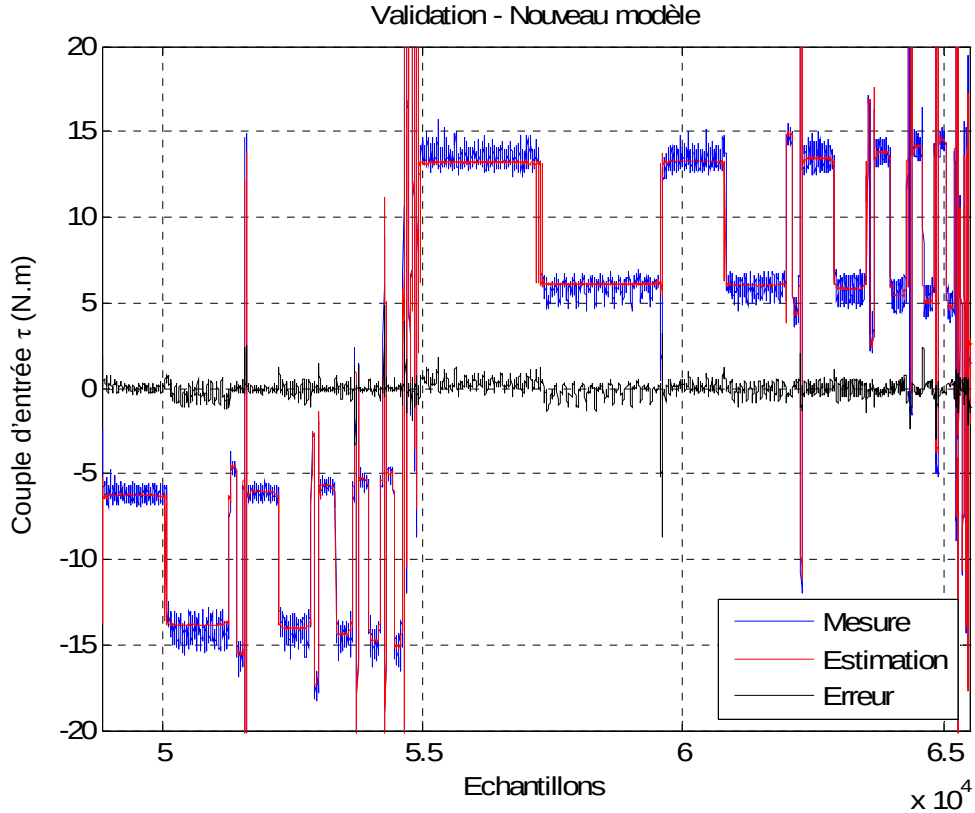


Figure 5-4 : Zoom sur les échantillons avec la charge maximale (Nouveau modèle)

Comme on peut le voir, dans les 2 cas, les paramètres sont bien identifiés, à l'exception des offsets qui ont un écart-type élevé et sont négligeables. Dans le paragraphe 3.2.1.4, on a pu remarquer que le paramètre de frottement sec F_c variait peu d'une charge à l'autre : on a un écart maximal de 1,2 N.m entre les mesures à vide et celles avec la charge maximale (masse d'environ 4 kg). On observe également ici que la différence entre le modèle classique et le nouveau modèle est faible : seulement 10% de diminution de la norme relative des erreurs. L'amélioration se voit surtout pour la masse la plus élevée (voir Figure 5-3 et Figure 5-4). Le frottement augmente bien avec la charge, mais le nouveau modèle aurait sans doute plus d'utilité pour des variations de charge plus importantes. Le banc à vérin à câble ayant été conçu pour diminuer les frottements, l'intérêt du modèle sur ce banc est limité.

5.3. EMPS

Le prototype EMPS a été présenté en 3.2.2.1. On rappelle ici le modèle dynamique inverse de l'EMPS (voir en 3.2.2.2) :

$$\tau = (m_{la} + m_0)\ddot{q} - m_0g + m_a(\ddot{q} - g) + F_c \text{sign}(\dot{q}) + F_v\dot{q} + \tau_{off} \quad (5.15)$$

où m_a est la masse ajoutée en sortie : $m_a \in \{0 ; 1,0500 ; 3,0266 ; 4,7882 ; 9,9162 ; 14,704\}$.

La force de charge τ_{load} est ici :

$$\tau_{load} = (m_{la} + m_0)\ddot{q} - m_0g + m_a(\ddot{q} - g) \quad (5.16)$$

5.3.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 5$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $m_{a(k)}$, c'est-à-dire une force extérieure $\tau_{\text{ext}(k)} = m_{a(k)}(\ddot{q} - g)$.

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.15), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau = \mathbf{W}\chi + \rho$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{g} & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \dot{\mathbf{q}} & \mathbb{1}_e & \tau_{\text{ext}}] \\ \chi = [m_{ia} + m_0 & m_0 & F_c & F_v & \tau_{\text{off}} & \text{Un}]^T \end{cases} \quad (5.17)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre Un est proche de 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.3.3.

5.3.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.2, il est superflu de modéliser l'effet Stribeck pour cet axe. On expose donc ici la méthode d'identification pour les 3 modélisations ($4 \times 1Q$), ($2 \times 2Q$) et ($1 \times 4Q$) avec variation du frottement sec avec la charge seule.

Pour le modèle ($4 \times 1Q$), on a le système linéaire $\tau = \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)}\chi_{(4 \times 1Q)} + \rho$ avec (5.9) et :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} = [\mathbf{P}^1 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^1 \mathbf{g} & \mathbf{P}^1 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^2 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^2 \mathbf{g} & \mathbf{P}^2 \tau_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^3 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^3 \mathbf{g} & \mathbf{P}^3 \tau_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^3 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^4 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^4 \mathbf{g} & \mathbf{P}^4 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^4 \mathbb{1}_e & \dot{\mathbf{q}}] \\ \chi_{(4 \times 1Q)} = [(1+\alpha_1)(m_{ia}+m_0) & (1+\alpha_1)m_0 & 1+\alpha_1 & \beta_1 & (1-\alpha_2)(m_{ia}+m_0) & (1-\alpha_2)m_0 & 1-\alpha_2 & \beta_2 & \dots \\ \dots & (1+\alpha_3)(m_{ia}+m_0) & (1+\alpha_3)m_0 & 1+\alpha_3 & \beta_3 & (1-\alpha_4)(m_{ia}+m_0) & (1-\alpha_4)m_0 & 1-\alpha_4 & \beta_4 & F_v]^T \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour le modèle ($2 \times 2Q$), on a le système linéaire $\tau = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)}\chi_{(2 \times 2Q)} + \rho$ avec (5.11) et :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\mathbf{P}^1 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^1 \mathbf{g} & \mathbf{P}^1 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^1 \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^2 \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^2 \mathbf{g} & \mathbf{P}^2 \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^2 \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & \dot{\mathbf{q}}] \\ \chi = [(1+\alpha_m)(m_{ia}+m_0) & (1+\alpha_m)m_0 & 1+\alpha_m & \beta_m & \tau_{\text{offm}} & (1-\alpha_g)(m_{ia}+m_0) & (1-\alpha_g)m_0 & 1-\alpha_g & \beta_g & \tau_{\text{offg}} & F_v]^T \end{cases} \quad (5.19)$$

Pour le modèle ($1 \times 4Q$), on a le système linéaire $\tau = \mathbf{W}_{(1 \times 4Q)}\chi_{(1 \times 4Q)} + \rho$ avec (5.13) et :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{g} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \ddot{\mathbf{q}} & -\mathbf{P}^{\text{sign}} \mathbf{g} & \tau_{\text{ext}} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \tau_{\text{ext}} & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \dot{\mathbf{q}} & \mathbb{1}_e] \\ \chi = [m_{ia} + m_0 & m_0 & \alpha(m_{ia} + m_0) & \alpha m_0 & \text{Un} & \alpha & \beta & F_v & \tau_{\text{off}}]^T \end{cases} \quad (5.20)$$

Les résultats des identifications avec les différentes modélisations sont donnés dans la partie suivante.

5.3.3. Résultats et analyses

Les mêmes mesures ont été utilisées pour l'identification de tous les modèles. Il s'agit des mêmes essais utilisés précédemment, l'EMPS étant placé en position verticale dans les 2 sens : des trajectoires trapézoïdales en vitesse afin d'avoir des phases d'accélération et décélération et des phases à vitesse constante (de 0,5% à 100% de la vitesse maximale).

Le modèle classique et le modèle (4×1Q) fonction de la charge sont tout d'abord identifiés. Les valeurs identifiées des paramètres α_i sont comparées :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,116 & ; & \alpha_2 = 0,047 \\ \alpha_3 = 0,260 & ; & \alpha_4 = 0,109 \end{cases} \quad (5.21)$$

Les valeurs des α_i des 2 quadrants moteurs et des α_i des 2 quadrants générateurs étant éloignées, il n'y a pas de simplification à faire. Le modèle approprié est donc le modèle (4×1Q).

Pour vérification, les modèles (2×2Q) et (1×4Q) fonction de la charge sont également identifiés.

Les paramètres identifiés dans chaque cas de modélisation (classique, (4×1Q), (2×2Q), et (1×4Q)) sont donnés dans les tableaux suivants, du Tableau 5-4 au Tableau 5-7 (valeurs en unités SI). Les graphes, de la Figure 5-5 à la Figure 5-8, présentent les validations directes où l'on compare l'effort d'entrée τ mesuré à l'effort d'entrée estimé par chaque modèle.

Tableau 5-4 : Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$m_{la} + m_0$	75,9383	0,2822	0,1858
m_0	0,7795	0,0022	0,1418
F_C	26,7096	0,0161	0,0301
F_V	404,0984	0,8401	0,1040
τ_{off}	-1,9233	0,0149	0,3868
Un	1,0593	0,0003	0,0139

Tableau 5-5 : Valeurs identifiées avec le modèle (4×1Q)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_1)(m_{la} + m_0)$	72,2888	0,2395	0,1657
$(1 + \alpha_1)m_0$	0,5564	0,0017	0,1516
$1 + \alpha_1$	1,1164	0,0003	0,0125
β_1	20,7434	0,0162	0,0390
$(1 - \alpha_2)(m_{la} + m_0)$	71,9648	0,3425	0,2380
$(1 - \alpha_2)m_0$	0,9528	0,0004	0,0213
β_2	10,6728	0,0367	0,1721
$(1 + \alpha_3)(m_{la} + m_0)$	79,2954	0,2515	0,1586
$(1 + \alpha_3)m_0$	0,7215	0,0018	0,1247
$1 + \alpha_3$	1,2599	0,0003	0,0122
β_3	22,4208	0,0172	0,0384
$(1 - \alpha_4)(m_{la} + m_0)$	76,1424	0,3201	0,2102
$(1 - \alpha_4)m_0$	0,8915	0,0004	0,0207
β_4	9,6768	0,0334	0,1724
F_V	407,2576	0,4168	0,0512

Tableau 5-6 : Valeurs identifiées avec le modèle (2×2Q)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_m)(m_{la} + m_0)$	75,6723	0,2215	0,1463
$(1 + \alpha_m)m_0$	0,6412	0,0016	0,1225
$1 + \alpha_m$	1,1806	0,0003	0,0111
β_m	21,7753	0,0154	0,0354
$\tau_{off\ m}$	-3,9991	0,0115	0,1441
$(1 - \alpha_g)(m_{la} + m_0)$	74,1716	0,2988	0,2014
$1 - \alpha_g$	0,9193	0,0003	0,0190
β_g	9,9504	0,0316	0,1587
$\tau_{off\ g}$	1,8833	0,0160	0,4253
F_V	406,0848	0,5320	0,0655

Tableau 5-7 : Valeurs identifiées avec le modèle ($1 \times 4Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$m_{la} + m_0$	77,6021	0,2034	0,1310
m_0	0,7344	0,0016	0,1086
U_n	1,0648	0,0002	0,0100
α	0,1138	0,0002	0,0897
β	20,7426	0,0158	0,0380
F_v	413,5859	0,6056	0,0732
τ_{off}	-2,0022	0,0107	0,2678

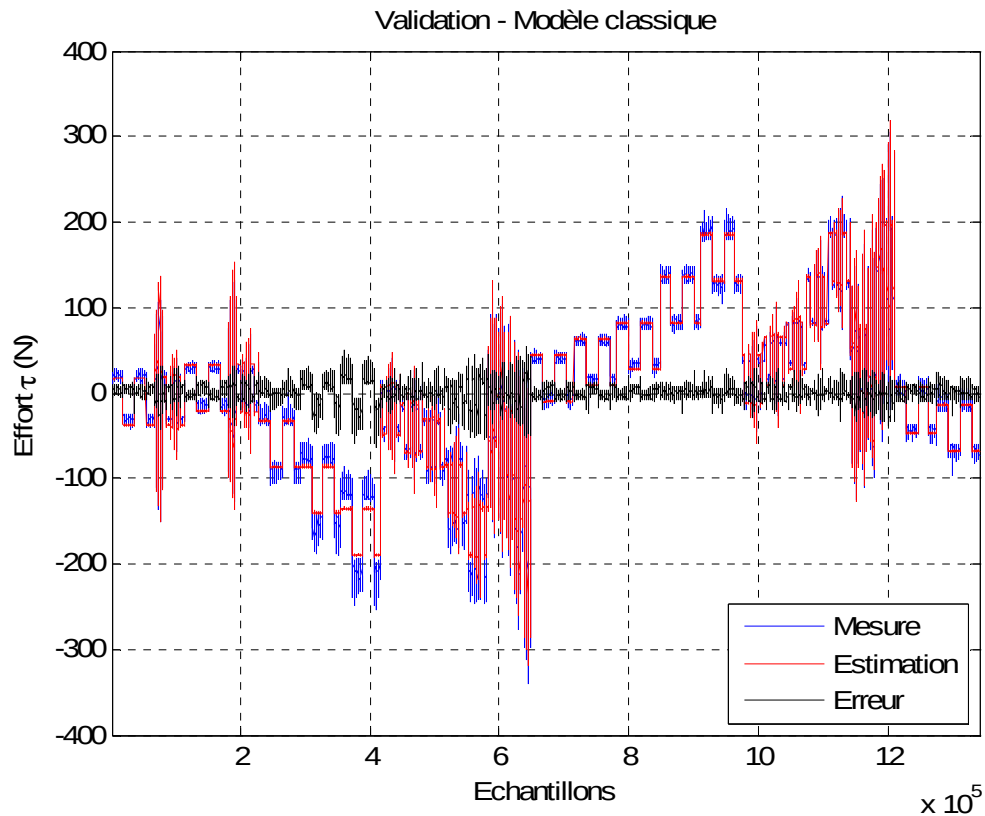


Figure 5-5 : Comparaison directe entre force mesurée et force estimée par le modèle classique.

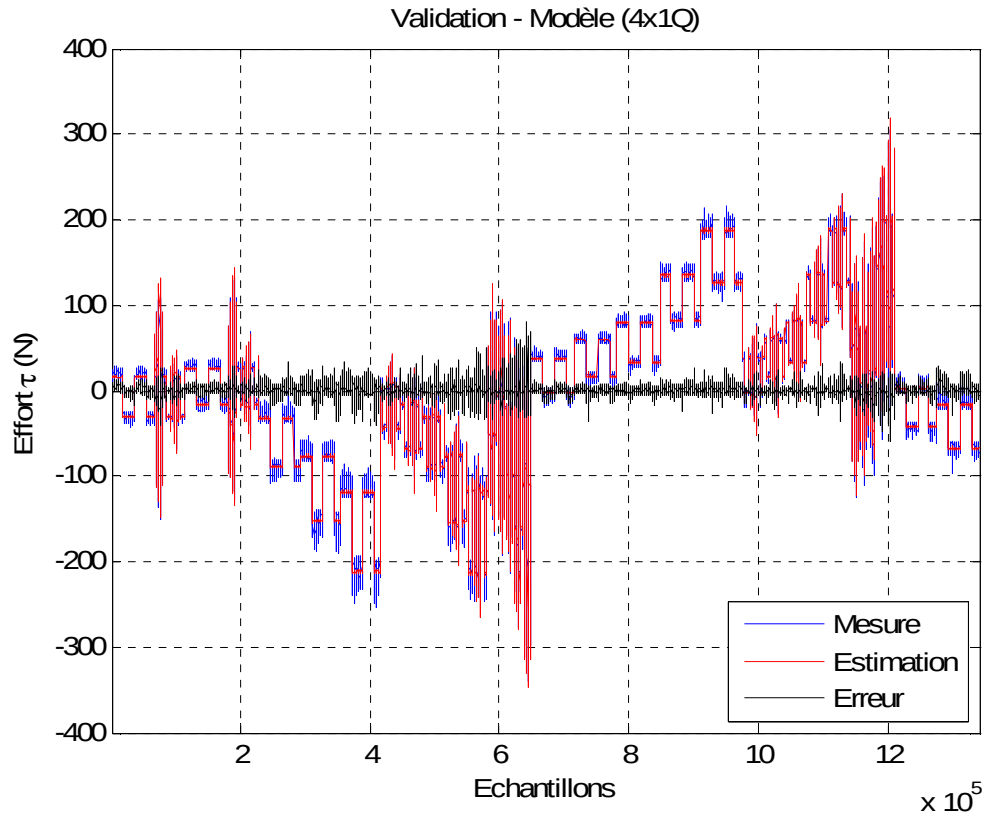


Figure 5-6 : Comparaison directe entre force mesurée et force estimée par le modèle ($4 \times 1Q$).

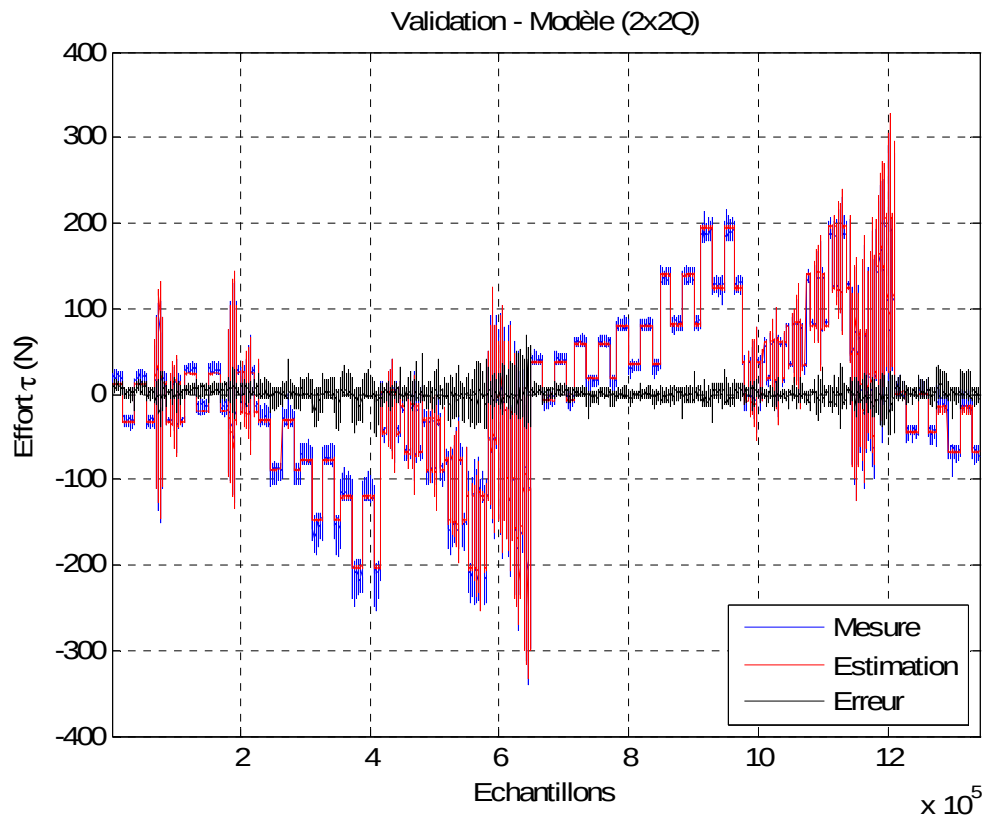


Figure 5-7 : Comparaison directe entre force mesurée et force estimée par le modèle ($2 \times 2Q$).

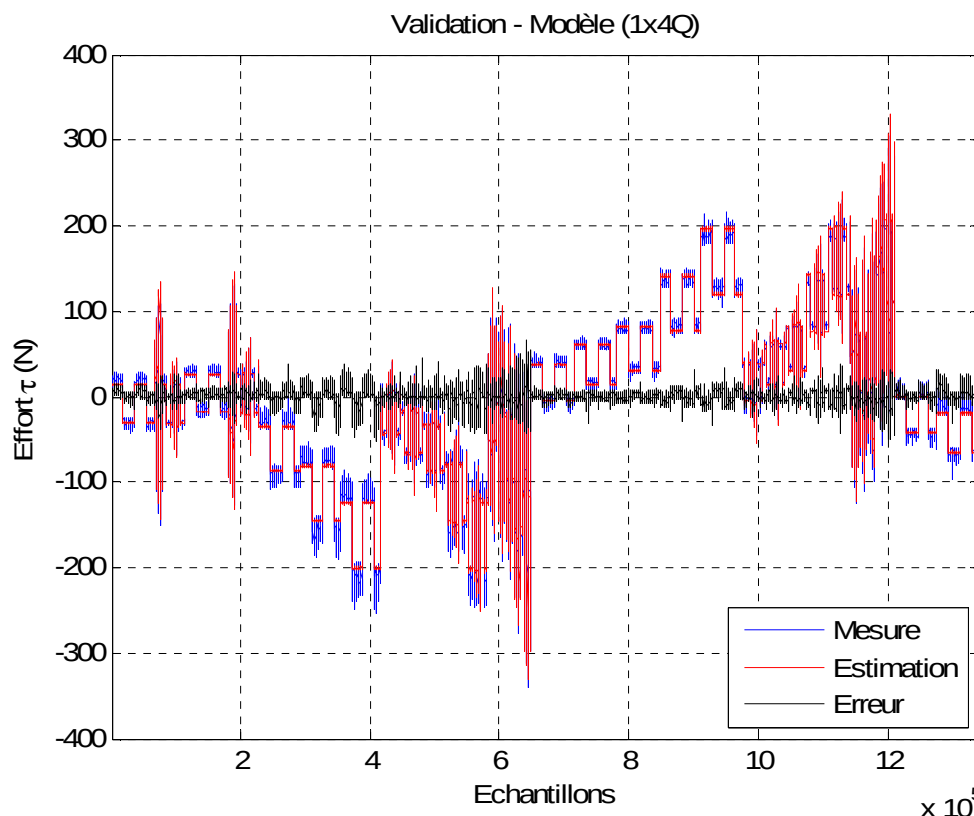


Figure 5-8 : Comparaison directe entre force mesurée et force estimée par le modèle (1×4Q).

Tous les modèles sont correctement identifiés (écarts-types faibles pour les paramètres identifiés). De plus, pour le modèle classique et le modèle (1×4Q), le paramètre Un est très proche de 1.

Tableau 5-8 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,09612
Modèle (4×1Q)	0,04735
Modèle (2×2Q)	0,06044
Modèle (1×4Q)	0,06926

Le Tableau 5-8 donne la norme relative du résidu total pour chaque modèle. Comme on peut le voir, les erreurs diminuent de 28% avec le modèle (1×4Q) par rapport au modèle classique, de 37% avec le modèle (2×2Q), et de 50% avec le modèle (4×1Q). Ce dernier est donc bien le plus précis.

Les résultats concordent avec les observations faites dans l'identification masse par masse en 3.2.2.4. Pour l'EMPS, le frottement sec a 4 comportements bien distincts selon les 4 quadrants de fonctionnement.

La modélisation de la dépendance du frottement par rapport à la charge est indispensable pour un axe tel que l'EMPS, qui peut avoir de fortes variations de charge. Si au contraire, un axe de ce type est utilisé avec de très faibles variations de charge, il est suffisant

d'utiliser le modèle classique plus simple. En effet, le Tableau 5-9 nous donne la norme relative des erreurs pour le modèle classique et le modèle (4×1Q), lorsqu'on n'utilise que les 3 premières charges (0 kg ; 1,0500 kg ; 3,0266 kg).

Tableau 5-9 : Norme relative du résidu total avec peu de variation de charges

Modèle classique	0,10930
Modèle (4×1Q)	0,09770

S'il y a peu de variation de charge, l'apport du nouveau modèle ne fait diminuer l'erreur que de 10%. Ainsi, le nouveau modèle de frottement a son intérêt pour de fortes variations de charge.

Ces résultats ont été présentés aux conférences internationales AIM 2010 [Hamon 2010b] et RAM 2010 [Hamon 2010c].

5.4. Stäubli RX130L – Axe 3

Le robot Stäubli RX130L a été présenté en 3.2.3.1. On rappelle ici le modèle dynamique inverse de l'axe 3 du RX130L (voir en 3.2.3.3) :

$$\tau = J\ddot{q} + MXg \cos(q) + MYg \sin(q) + M_a L_a^2 \ddot{q} + M_a L_a g \cos(q) + F_v \dot{q} + F_c \text{sign}(\dot{q}) + \tau_{\text{off}} \quad (5.22)$$

- où M_a est la masse ajoutée en sortie : $M_a \in \{0 ; 3,458 ; 6,970\}$.

Le couple de charge τ_{load} est ici :

$$\tau_{\text{load}} = J\ddot{q} + MXg \cos(q) + MYg \sin(q) + M_a L_a (L_a \ddot{q} + g \cos(q)) \quad (5.23)$$

5.4.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 2$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$, c'est-à-dire un couple extérieur :

$$\tau_{\text{ext}(k)} = M_{a(k)} L_a (L_a \ddot{q} + g \cos(q)).$$

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.22), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau = \mathbf{W}\chi + \mathbf{p}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{q} & g \cos(q) & g \sin(q) & \text{sign}(\dot{q}) & \dot{q} & \mathbb{1}_e & \tau_{\text{ext}}] \\ \chi = [J & MX & MY & F_c & F_v & \tau_{\text{off}} & Un]^T \end{cases} \quad (5.24)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre U_n devrait être trouvé proche de 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.4.3.

5.4.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.3, il est important de modéliser l'effet Stribeck pour cet axe. A partir des courbes du couple d'entrée τ en fonction de la vitesse (voir en 3.3.3), on détermine la valeur de la vitesse de Stribeck : $\dot{q}_s = 0,03$. On expose donc ici la méthode d'identification pour une modélisation avec variation du frottement sec en fonction de la charge et de la vitesse.

Comme on va le voir dans les résultats en 5.4.3, la modélisation la plus adaptée est la modélisation $(2 \times 2Q)$. Ainsi, seul le système linéaire utilisé pour ce modèle est détaillé ici.

Pour le modèle $(2 \times 2Q)$, on a le système linéaire $\tau = W_{(2 \times 2Q)} \chi_{(2 \times 2Q)} + \rho$ avec (5.5), (5.11) et :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} P^+ \ddot{q} & E_{xp} P^+ \ddot{q} & P^+ g \cos(q) & E_{xp} P^+ g \cos(q) & P^+ g \sin(q) & E_{xp} P^+ g \sin(q) & \dots \\ \dots & P^+ \tau_{ext} & E_{xp} P^+ \tau_{ext} & P^+ \text{sign}(\dot{q}) & E_{xp} P^+ \text{sign}(\dot{q}) & P^+ l_e & \dots \\ \dots & P^+ \ddot{q} & -E_{xp} P^+ \ddot{q} & P^+ g \cos(q) & -E_{xp} P^+ g \cos(q) & P^+ g \sin(q) & -E_{xp} P^+ g \sin(q) & \dots \\ \dots & P^+ \tau_{ext} & -E_{xp} P^+ \tau_{ext} & P^+ \text{sign}(\dot{q}) & E_{xp} P^+ \text{sign}(\dot{q}) & P^+ l_e & \dot{q} \end{bmatrix} \\ \chi_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha_m)J & a_m J & (1+\alpha_m)MX & a_m MX & (1+\alpha_m)MY & a_m MY & 1+\alpha_m & a_m & \beta_m & b_m & \tau_{offm} & \dots \\ \dots & (1-\alpha_g)J & a_g J & (1-\alpha_g)MX & a_g MX & (1-\alpha_g)MY & a_g MY & 1-\alpha_g & a_g & \beta_g & b_g & \tau_{offg} & E_v \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Les résultats des identifications avec les différentes modélisations sont donnés dans la partie suivante.

5.4.3. Résultats et analyses

Les mêmes mesures ont été utilisées pour l'identification de tous les modèles. Les essais réalisés pour l'identification dynamique de l'axe 3 sont : des trajectoires triangulaires en position (ou créneaux de vitesse, de 0 à 4% de la vitesse maximale), des trajectoires trapézoïdales en vitesse (avec phases d'accélération, de décélération et de vitesse constante entre 8 et 96% de la vitesse maximale) et des trajectoires sinusoïdales en position (amplitude de 0,17 rad avec une modulation en fréquence de 0,25 Hz à 0,5 Hz ; et amplitude de 0,86 rad avec modulation en fréquence de 0,12 Hz à 0,22 Hz). Tous les autres axes sont bloqués en position (0 rad pour les axes 1, 4, 5 et 6 et $-\pi/2$ pour l'axe 2).

Le modèle classique et le modèle $(4 \times 1Q)$ fonction de la charge et de la vitesse sont tout d'abord identifiés. Les valeurs identifiées des paramètres α_i et a_i dans les 2 quadrants moteurs et dans les 2 quadrants générateur étant relativement proches, on teste également l'identification du modèle $(2 \times 2Q)$. La norme relative du résidu total du modèle $(2 \times 2Q)$

étant très proche de celle du modèle $(4 \times 1Q)$, le modèle $(2 \times 2Q)$ est donc suffisant. Bien que les paramètres de frottement soient différents entre mode moteur et mode générateur, le modèle $(1 \times 4Q)$ est toutefois identifié : la norme relative du résidu total augmente par rapport aux 2 modèles précédents. De plus, le paramètre α est non identifiable. Ce modèle est donc insuffisant. Enfin, pour vérification, le modèle $(2 \times 2Q)$ avec frottement sec fonction de la charge seule est identifié. La suppression des termes de frottement variant avec la vitesse fait augmenter l'erreur. Cependant, ce modèle est quand même plus intéressant que le modèle classique.

La norme relative du résidu total obtenue pour chacun des modèles (modèle classique, modèle $(4 \times 1Q)$ /charge+vitesse, modèle $(2 \times 2Q)$ /charge+vitesse, $(1 \times 4Q)$ /charge+vitesse et $(2 \times 2Q)$ /vitesse) est donnée dans le Tableau 5-10. Le modèle $(2 \times 2Q)$ est le modèle retenu pour cet axe et nous détaillons les résultats de son identification que nous comparons aux résultats obtenus pour le modèle classique.

Tableau 5-10 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,07233
Modèle $(4 \times 1Q)$ / charge + vitesse	0,04686
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge + vitesse	0,04695
Modèle $(1 \times 4Q)$ / charge + vitesse	0,05858
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge	0,05521

Différentes paramètres ont été éliminés, car non identifiables, pour les 2 modèles : MY pour le modèle classique et $a_m J$, $a_g J$, $(1 + \alpha_m)MY$, $(1 - \alpha_g)MY$, $a_m MY$, $a_g MY$, b_m , et b_g pour le modèle $(2 \times 2Q)$.

Ainsi, le Tableau 5-11 et le Tableau 5-12 présentent les résultats de l'identification pour chaque modèle (valeurs en unités SI). La Figure 5-9 et la Figure 5-10 montrent les validations directes où on compare le couple mesuré au couple estimé, pour les 2 modèles.

Le Tableau 5-13 présente les normes relatives des résidus obtenues pour chaque modèle, tout d'abord pour tous les échantillons, puis les résidus des échantillons à basse vitesse (entre 0 et 10% de la vitesse maximale) et ceux des échantillons à vitesse élevée (entre 35 et 100% de la vitesse maximale). Comme on peut le voir, au-delà d'une certaine vitesse, la charge n'a plus beaucoup d'influence sur le frottement et les 2 modèles sont équivalents. Mais dans la gamme de vitesse allant de 0 à 10%, l'effet Stribeck est important et on observe une diminution de la norme relative de 47% avec le nouveau modèle par rapport au classique. En moyenne, pour tous les échantillons, on a une diminution des erreurs de 35% grâce au nouveau modèle.

Tableau 5-11 : Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J	32,8525	0,3009	0,4580
MX	22,4492	0,0169	0,0376
F_C	42,4230	0,0898	0,1059
F_V	116,6309	0,4198	0,1800
τ_{off}	-2,7220	0,0816	1,4995
Un	0,9810	0,0029	0,1491

Tableau 5-12 : Valeurs identifiées avec le modèle ($2 \times 2Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_m)J$	33,8886	0,2669	0,3938
$(1 + \alpha_m)MX$	23,5066	0,0328	0,0698
$a_m MX$	1,7948	0,0518	1,4427
$1 + \alpha_m$	1,0060	0,0049	0,2431
a_m	0,2490	0,0086	1,7309
β_m	22,9738	0,1463	0,3184
$\tau_{off m}$	-1,0079	0,0713	3,5356
$(1 - \alpha_g)J$	32,0716	0,2984	0,4653
$(1 - \alpha_g)MX$	20,5728	0,0442	0,1074
$a_g MX$	1,9090	0,0536	1,4041
$1 - \alpha_g$	0,9715	0,0051	0,2635
a_g	0,2807	0,0089	1,5844
β_g	15,7818	0,2628	0,8327
$\tau_{off g}$	-4,8024	0,0793	0,8255
F_V	137,2133	0,3268	0,1191

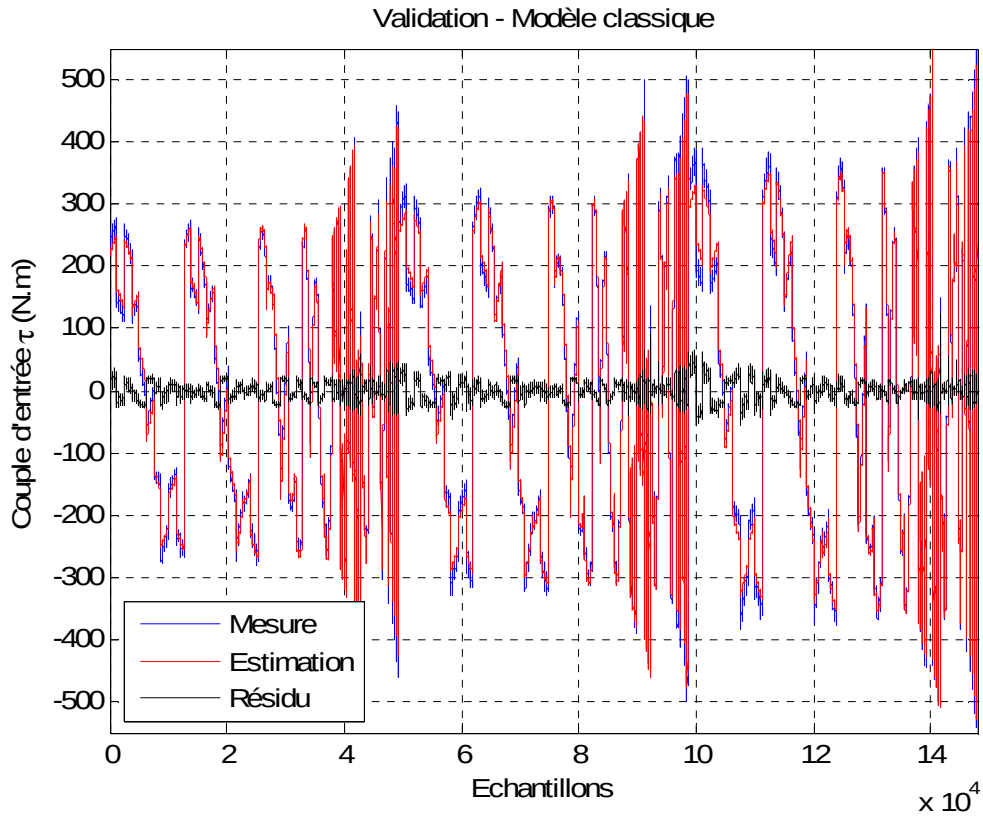


Figure 5-9 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle classique.

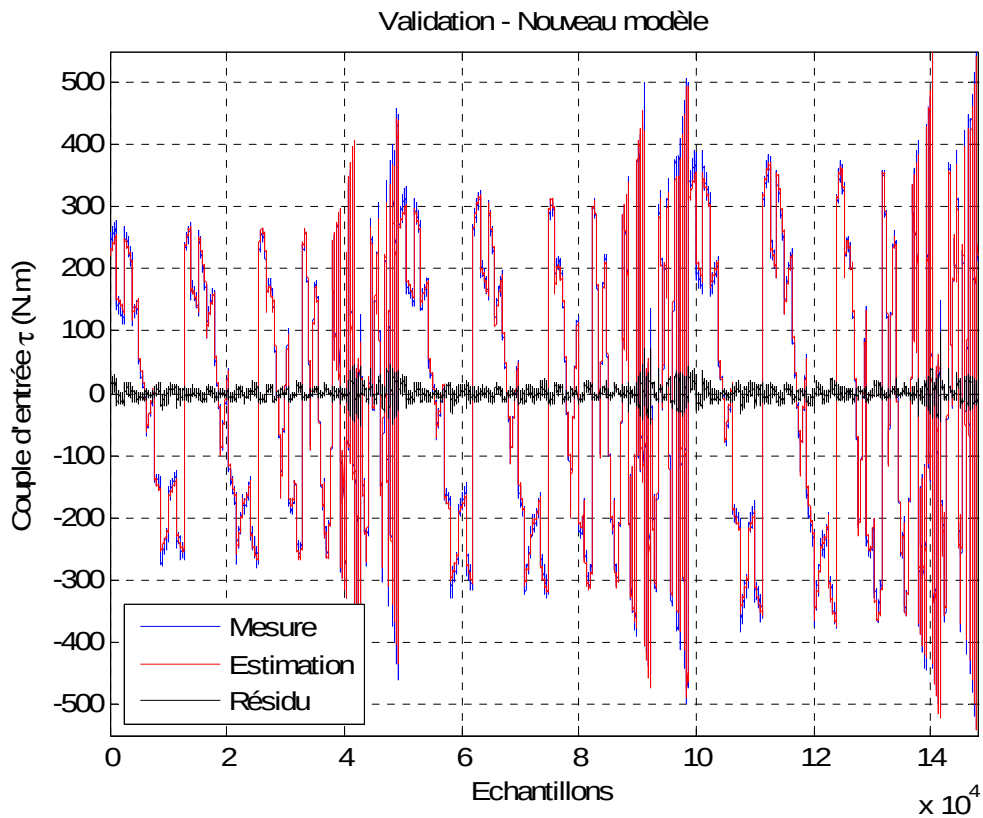


Figure 5-10 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle $(2 \times 2Q)$.

Tableau 5-13 : Norme relative du résidu pour les 2 modèles pour différents groupes d'échantillons

	Modèle classique	Modèle (2×2Q)
Tous les échantillons	0,07233	0,04695
Echantillons à basse vitesse	0,07363	0,03892
Echantillons à vitesse élevée	0,07671	0,07835
Echantillons toutes vitesses à vide	0,07284	0,05815

Par ailleurs, on a voulu voir si le modèle avait un intérêt pour le robot à vide, sans masse ajoutée, et pour des mouvements sur l'axe 3 seul. Dans ce cas, l'effort de charge et donc le frottement sec varient avec les efforts inertiels et de gravité dus uniquement aux masses et inerties des corps du robot. Une identification des 2 modèles a donc été faite en ne prenant que les échantillons de mesures du robot à vide : voir dernière ligne du Tableau 5-13. La norme relative du résidu obtenue pour le modèle classique est de 0,07284 et celle obtenue pour le nouveau modèle est de 0,05815. On a donc déjà une diminution des erreurs de 20% grâce au nouveau modèle. Celui-ci reste tout de même plus intéressant si le robot porte des charges variables.

Ces résultats ont été présentés aux conférences internationales CIFA 2010 [Hamon 2010a] et IROS 2010 [Hamon 2010d].

5.5. Stäubli TX40

Le robot TX40 a été présenté en 3.2.4.1. L'identification multi-axes est faite selon la méthode décrite en 4.4.2 : des identifications axe par axe sont d'abord réalisées (méthode un axe : voir en 4.4.1) pour obtenir les valeurs des paramètres de frottement $\dot{q}_s$, α , et a . L'identification multi-axes est ensuite réalisée en intégrant dans le modèle les valeurs des paramètres de frottement obtenues précédemment. Les trajectoires utilisées en mono-axes et en multi-axes ont été présentées en 3.2.4.1.

5.5.1. Identification Axe 1

On rappelle le modèle dynamique inverse de l'axe 1 seul (voir en 3.2.4.2) :

$$\tau_1 = J_1 \ddot{q}_1 + M_a L_1^2 \ddot{q}_1 + M_a L_1 g \sin(q_1) + F_{C1} \text{sign}(\dot{q}_1) + F_{V1} \dot{q}_1 + \tau_{\text{off}1} \quad (5.26)$$

où M_a est la masse utilisée en sortie $M_a \in \{0 ; 2,08731 ; 4,08304 ; 6,21649 ; 8,915 ; 9,890\}$.

Et le couple de charge est ici :

$$\tau_{\text{load}1} = J_1 \ddot{q}_1 + M_a L_1 (L_1 \ddot{q}_1 + g \sin(q_1)) \quad (5.27)$$

5.5.1.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 5$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$, c'est-à-dire un couple extérieur : $\tau_{ext1(k)} = M_{a(k)} L_1 (L_1 \ddot{q}_1 + g \sin(q_1))$.

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.26), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau_1 = \mathbf{W}\chi + \rho$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \text{sign}(\dot{q}_1) & \dot{q}_1 & \mathbb{1}_{e1} & \tau_{ext1} \end{bmatrix} \\ \chi = \begin{bmatrix} J_1 & F_{C1} & F_{V1} & \tau_{off1} & Un_1 \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.28)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre Un_1 devrait être trouvé proche de 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.5.1.3.

5.5.1.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.4, il semble nécessaire de modéliser l'effet Stribeck pour l'axe 1. A partir des courbes du couple d'entrée τ_1 en fonction de la vitesse (voir en 3.3.4), on détermine la valeur de la vitesse de Stribeck : $\dot{q}_{s1} = 0,2$. On expose donc ici la méthode d'identification pour une modélisation avec variation du frottement sec en fonction de la charge et de la vitesse.

Comme on va le voir dans les résultats en 5.5.1.3, la modélisation la plus adaptée est la modélisation $(2 \times 2Q)$. Ainsi, nous ne donnons ici que le système linéaire utilisé pour ce modèle.

Pour le modèle $(2 \times 2Q)$, on a le système linéaire $\tau_1 = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \chi_{(2 \times 2Q)} + \rho$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^+ \ddot{q}_1 & \mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^+ \ddot{q}_1 & \mathbf{P}_1^+ \tau_{ext1} & \mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^+ \tau_{ext1} & \mathbf{P}_1^+ \text{sign}(\dot{q}_1) & \mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^+ \text{sign}(\dot{q}_1) & \mathbf{P}_1^+ \mathbb{1}_{e1} & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_1^- \ddot{q}_1 & -\mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^- \ddot{q}_1 & \mathbf{P}_1^- \tau_{ext1} & -\mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^- \tau_{ext1} & \mathbf{P}_1^- \text{sign}(\dot{q}_1) & \mathbf{E}_{xp1} \mathbf{P}_1^- \text{sign}(\dot{q}_1) & \mathbf{P}_1^- \mathbb{1}_{e1} & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ \chi = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{m1}) J_1 & a_{m1} J_1 & 1 + \alpha_{m1} & a_{m1} & \beta_{m1} & b_{m1} & \tau_{off m1} & \dots \\ \dots & (1 - \alpha_{g1}) J_1 & a_{g1} J_1 & 1 - \alpha_{g1} & a_{g1} & \beta_{g1} & b_{g1} & \tau_{off g1} & F_{V1} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.29)$$

Les résultats de l'identification de chaque modèle sont donnés dans la partie suivante.

5.5.1.3. Résultats et analyses

Le modèle classique et le modèle ($4 \times 1Q$) fonction de la charge et de la vitesse sont tout d'abord identifiés. Les valeurs identifiées des paramètres α_{i1} et a_{i1} sont comparées :

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 0,014 & ; & \alpha_{21} = 0,097 \\ \alpha_{31} = 0,029 & ; & \alpha_{41} = 0,113 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{11} = 0,198 & ; & a_{21} = 0,146 \\ a_{31} = 0,180 & ; & a_{41} = 0,122 \end{cases} \quad (5.30)$$

Les valeurs des paramètres des quadrants 1 et 3 sont relativement proches, de même pour les paramètres des quadrants 2 et 4. On teste donc l'identification du modèle ($2 \times 2Q$). On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{m1} = 0,040 \\ \alpha_{g1} = 0,092 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{m1} = 0,162 \\ a_{g1} = 0,153 \end{cases} \quad (5.31)$$

Les valeurs des paramètres a_{m1} et a_{g1} sont proches, mais celles de α_{m1} et α_{g1} le sont moins. On choisit de conserver ce modèle ($2 \times 2Q$). Pour vérification, le modèle ($2 \times 2Q$) avec variation du frottement en fonction de la charge seule est également identifié.

La norme relative du résidu total obtenue pour chacun des modèles (classique, ($4 \times 1Q$)/charge+vitesse, ($2 \times 2Q$)/charge+vitesse, et ($2 \times 2Q$)/charge est donnée dans le Tableau 5-14. Ces résultats montrent que le modèle le plus approprié est le modèle ($2 \times 2Q$) fonction de la charge et de la vitesse. Nous détaillons donc les résultats de l'identification avec ce modèle que nous comparons au modèle classique.

Tableau 5-14 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,11099
Modèle ($4 \times 1Q$) / charge + vitesse	0,05555
Modèle ($2 \times 2Q$) / charge + vitesse	0,05610
Modèle ($2 \times 2Q$) / charge	0,06391

Les 2 tableaux suivants (Tableau 5-15 et Tableau 5-16, valeurs en unités SI) donnent les résultats de l'identification pour chaque modèle (certains paramètres ont été supprimés à l'identification car trop faibles/non identifiables), et la Figure 5-11 et la Figure 5-12 montrent les validations directes où on compare le couple mesuré au couple estimé, pour les 2 modèles.

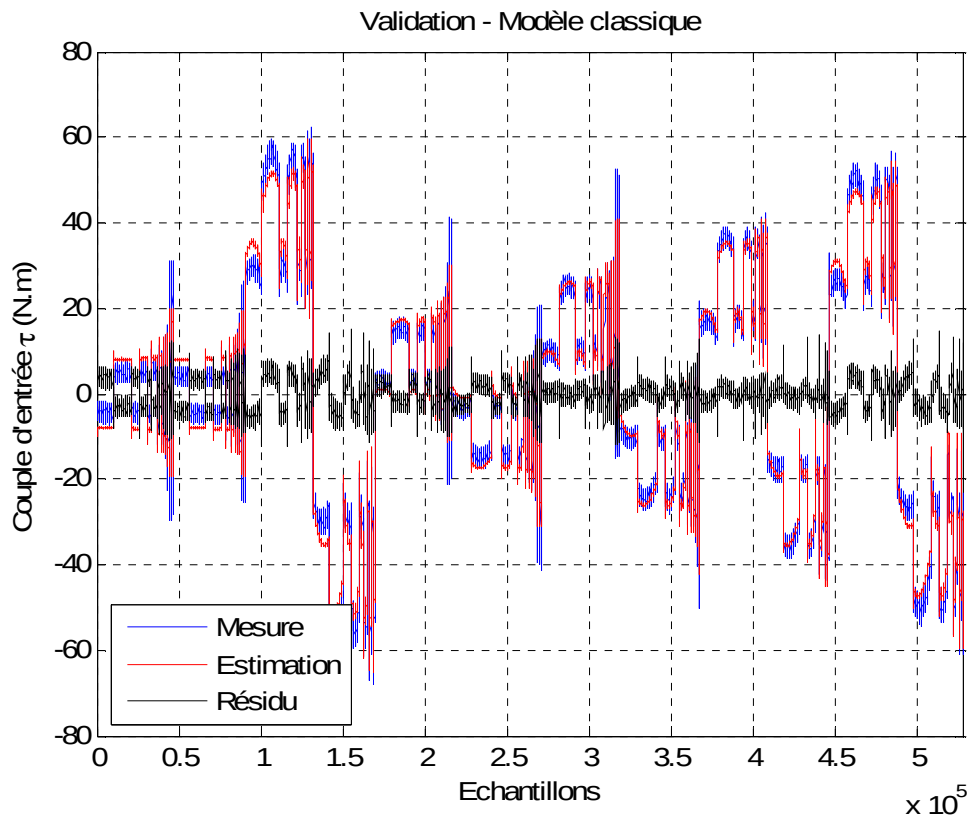
Tableau 5-15 : Axe 1 – Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J_1	1,5732	0,0142	0,4519
F_{C1}	7,9151	0,0094	0,0592
F_{V1}	5,1531	0,0400	0,3880
Un_1	0,9930	0,0003	0,0159

Tableau 5-16 : Axe 1 – Valeurs identifiées avec le modèle ($2 \times 2Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_{m1})J_1$	1,6574	0,0085	0,2573
$1 + \alpha_{m1}$	1,0397	0,0008	0,0362
a_{m1}	0,1618	0,0010	0,3067
β_{m1}	4,1458	0,0090	0,1089
$(1 - \alpha_{g1})J_1$	1,4726	0,0135	0,4579
$1 - \alpha_{g1}$	0,9083	0,0009	0,0487
a_{g1}	0,1532	0,0010	0,3305
β_{g1}	3,1415	0,0150	0,2392
$\tau_{off\ g1}$	-0,1952	0,0064	1,6491
F_{V1}	9,0983	0,0252	0,1386

On remarque, sur le Tableau 5-14, qu'avec le nouveau modèle, les erreurs sont divisées par deux par rapport au modèle classique. Les écarts-types sont faibles, les modèles sont donc bien identifiés. De plus, le paramètre Un_1 du modèle classique est très proche de la valeur 1, avec un écart-type très faible : ce modèle ne peut donc pas être plus précis.


Figure 5-11 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle classique – Axe 1.

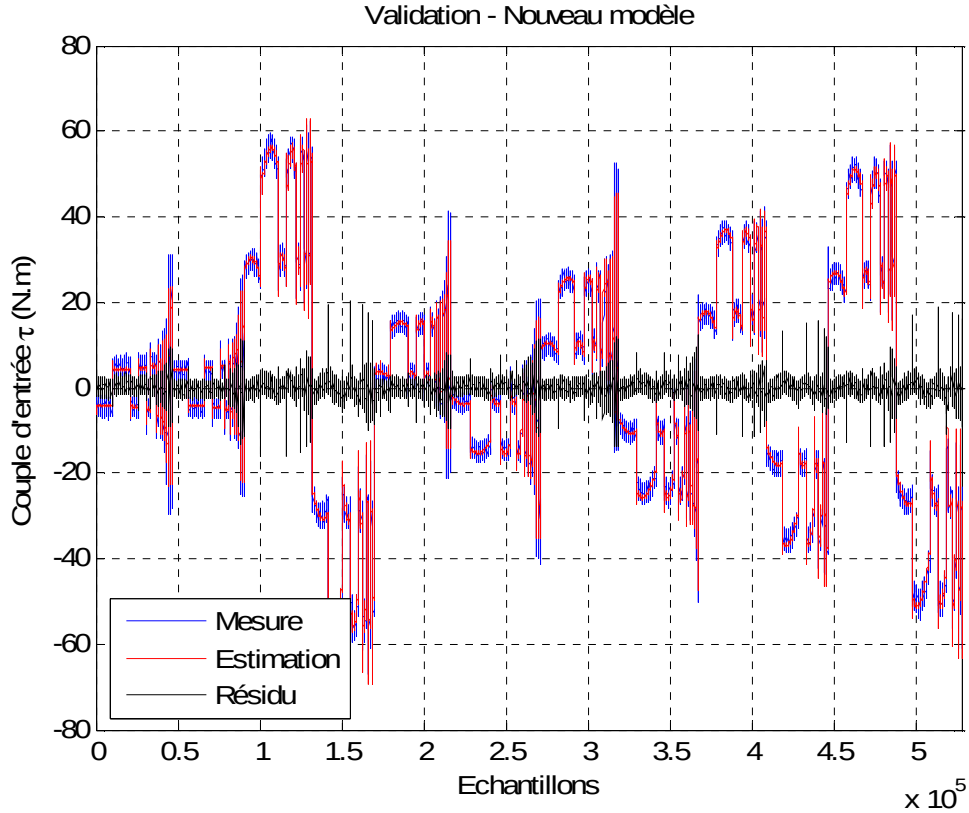


Figure 5-12 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle $(2 \times 2Q)$ – Axe 1.

Les paramètres à retenir pour l'identification multi-axes du nouveau modèle sont les paramètres $(1 + \alpha_{m1})$, a_{m1} , $(1 - \alpha_{g1})$, et a_{g1} .

5.5.2. Identification Axe 2

On rappelle le modèle dynamique inverse de l'axe 2 seul (voir en 3.2.4.2) :

$$\tau_2 = J_2 \ddot{q}_2 + MX_2 g \cos(q_2) + MY_2 g \sin(q_2) + \tau_{\text{ext}2} + F_{C2} \text{sign}(\dot{q}_2) + F_{V2} \dot{q}_2 + \tau_{\text{off}2} \quad (5.32)$$

où M_a est la masse ajoutée en sortie $M_a \in \{0 ; 0,67439 ; 1,19549 ; 1,69906 ; 2,21733\}$.

Et le couple de charge est ici :

$$\tau_{\text{load}2} = J_2 \ddot{q}_2 + MX_2 g \cos(q_2) + MY_2 g \sin(q_2) + M_a L_2 (L_2 \ddot{q}_2 + g \cos(q_2)) \quad (5.33)$$

5.5.2.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 4$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$, c'est-à-dire un couple extérieur : $\tau_{\text{ext}2(k)} = M_{a(k)} L_2 (L_2 \ddot{q}_2 + g \cos(q_2))$.

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.32), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau_2 = \mathbf{W}\chi + \mathbf{p}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{q}_2 & g \cos(q_2) & g \sin(q_2) & \text{sign}(\dot{q}_2) & \dot{q}_2 & \mathbb{1}_e & \tau_{\text{ext}2}] \\ \chi = [J_2 & MX_2 & MY_2 & F_{C2} & F_{V2} & \tau_{\text{off}2} & Un_2]^T \end{cases} \quad (5.34)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre Un_2 devrait être trouvé proche de 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.5.2.3.

5.5.2.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.4, il est important de modéliser l'effet Stribeck pour l'axe 2. A partir des courbes du couple d'entrée τ_1 en fonction de la vitesse (voir en 3.3.4), on détermine la valeur de la vitesse de Stribeck : $\dot{q}_{s2} = 0,1$. On expose donc ici la méthode d'identification pour une modélisation avec variation du frottement sec en fonction de la charge et de la vitesse.

Comme on va le voir dans les résultats en 5.5.2.3, la modélisation la plus adaptée est la modélisation $(2 \times 2Q)$. Ainsi, nous ne donnons ici que le système linéaire utilisé pour ce modèle.

Pour le modèle $(2 \times 2Q)$, on a le système linéaire $\tau_2 = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \chi_{(2 \times 2Q)} + \mathbf{p}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2^+ \ddot{q}_2 & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^+ \ddot{q}_2 & \mathbf{P}_2^+ g \cos(q_2) & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^+ g \cos(q_2) & \mathbf{P}_2^+ g \sin(q_2) & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^+ g \sin(q_2) & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_2^+ \tau_{\text{ext}2} & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^+ \tau_{\text{ext}2} & \mathbf{P}_2^+ \text{sign}(\dot{q}_2) & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^+ \text{sign}(\dot{q}_2) & \mathbf{P}_2^+ \mathbb{1}_e & \mathbf{P}_2^+ \dot{q}_2 & \dots \\ \dots & -\mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^- \ddot{q}_2 & \mathbf{P}_2^- g \cos(q_2) & -\mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^- g \cos(q_2) & \mathbf{P}_2^- g \sin(q_2) & -\mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^- g \sin(q_2) & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_2^- \tau_{\text{ext}2} & -\mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^- \tau_{\text{ext}2} & \mathbf{P}_2^- \text{sign}(\dot{q}_2) & \mathbf{E}_{xp2} \mathbf{P}_2^- \text{sign}(\dot{q}_2) & \mathbf{P}_2^- \mathbb{1}_e & \mathbf{P}_2^- \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \chi_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{m2}) J_2 & a_{m2} J_2 & (1 + \alpha_{m2}) MX_2 & a_{m2} MX_2 & (1 + \alpha_{m2}) MY_2 & a_{m2} MY_2 & \dots \\ \dots & 1 + \alpha_{m2} & a_{m2} & \beta_{m2} & b_{m2} & \tau_{\text{off}m2} & (1 - \alpha_{g2}) J_2 & a_{g2} J_2 & (1 - \alpha_{g2}) MX_2 & \dots \\ \dots & a_{g2} MX_2 & (1 - \alpha_{g2}) MY_2 & a_{g2} MY_2 & 1 - \alpha_{g2} & a_{g2} & \beta_{g2} & b_{g2} & \tau_{\text{off}g2} & F_{V2} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.35)$$

Les résultats de l'identification de chaque modèle sont donnés dans la partie suivante.

5.5.2.3. Résultats et analyses

Le modèle classique et le modèle $(4 \times 1Q)$ fonction de la charge et de la vitesse sont tout d'abord identifiés. Les valeurs identifiées des paramètres α_{i2} et a_{i2} sont comparées :

$$\begin{cases} \alpha_{12} = 0,012 & ; & \alpha_{22} = 0,130 \\ \alpha_{32} = 0,017 & ; & \alpha_{42} = 0,119 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{12} = 0,187 & ; & a_{22} = 0,243 \\ a_{32} = 0,171 & ; & a_{42} = 0,254 \end{cases} \quad (5.36)$$

Les valeurs des paramètres des quadrants 1 et 3 sont relativement proches, de même pour les paramètres des quadrants 2 et 4. On teste donc l'identification du modèle $(2 \times 2Q)$. On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{m2} = 0,017 \\ \alpha_{g2} = 0,124 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{m2} = 0,175 \\ a_{g2} = 0,250 \end{cases} \quad (5.37)$$

Les valeurs des paramètres moteurs ne sont pas proches de celles des paramètres générateur. On ne simplifie donc pas plus et on conserve le modèle $(2 \times 2Q)$. Pour vérification, le modèle $(2 \times 2Q)$ avec variation du frottement en fonction de la charge seule est également identifié.

La norme relative du résidu total obtenue pour chacun des modèles (classique, $(4 \times 1Q)/\text{charge} + \text{vitesse}$, $(2 \times 2Q)/\text{charge} + \text{vitesse}$ et $(2 \times 2Q)/\text{charge}$) est donnée dans le Tableau 5-17. Ces résultats montrent que le modèle $(2 \times 2Q)$ fonction de la charge et de la vitesse convient. Nous détaillons donc les résultats de l'identification avec ce modèle que nous comparons au modèle classique.

Tableau 5-17 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,09745
Modèle $(4 \times 1Q)$ / charge + vitesse	0,06296
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge + vitesse	0,06356
Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge	0,07323

Les tableaux suivants (Tableau 5-18 et Tableau 5-19, valeurs en unités SI) donnent les résultats de l'identification pour chaque modèle (certains paramètres ont été supprimés à l'identification car trop faibles/non identifiables), et la Figure 5-13 et la Figure 5-14 montrent les validations directes où on compare le couple mesuré au couple estimé, pour les 2 modèles.

La norme du résidu diminue de 35% en passant du modèle classique au nouveau modèle $(2 \times 2Q)$. Les écarts-types des paramètres identifiés sont faibles pour les 2 modèles, les deux modèles sont donc bien identifiés. Les paramètres à retenir pour le nouveau modèle sont les paramètres $(1 + \alpha_{m2})$, a_{m2} , $(1 - \alpha_{g2})$, et a_{g2} .

Tableau 5-18 : Axe 2 – Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J_2	1,6568	0,0042	0,1259
MX_2	2,8333	0,0017	0,0291
F_{C2}	7,9139	0,0067	0,0420
F_{V2}	3,6399	0,0160	0,2203
Un_2	0,9270	0,0020	0,1087

Tableau 5-19 : Axe 2 – Valeurs identifiées avec le modèle ($2 \times 2Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_{m2})J_2$	1,8224	0,0041	0,1125
$(1 + \alpha_{m2})MX_2$	2,9015	0,0036	0,0612
$a_{m2}MX_2$	0,4449	0,0055	0,6161
$1 + \alpha_{m2}$	1,0171	0,0040	0,1952
a_{m2}	0,1747	0,0065	1,8581
β_{m2}	5,0440	0,0103	0,1018
$(1 - \alpha_{g2})J_2$	1,4928	0,0042	0,1404
$(1 - \alpha_{g2})MX_2$	2,5653	0,0042	0,0810
$a_{g2}MX_2$	0,3621	0,0056	0,7713
$1 - \alpha_{g2}$	0,8765	0,0040	0,2303
a_{g2}	0,2492	0,0066	1,3202
β_{g2}	3,8522	0,0183	0,2377
F_{V2}	4,6669	0,0119	0,1271

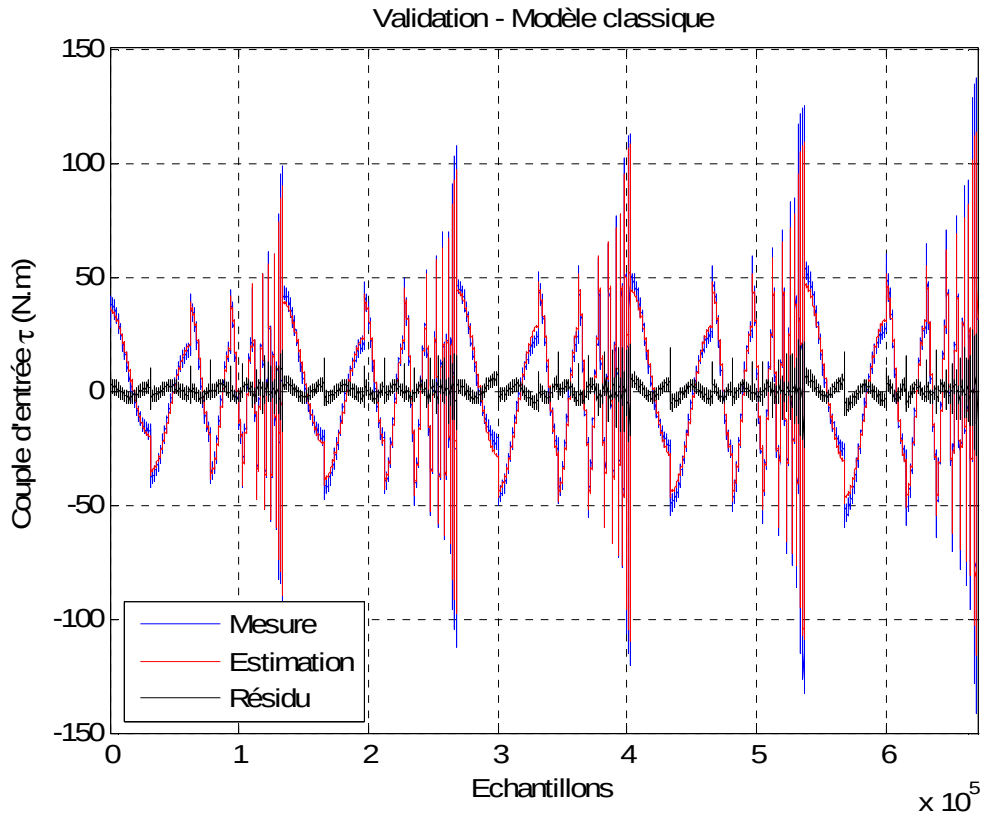


Figure 5-13 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle classique – Axe 2.

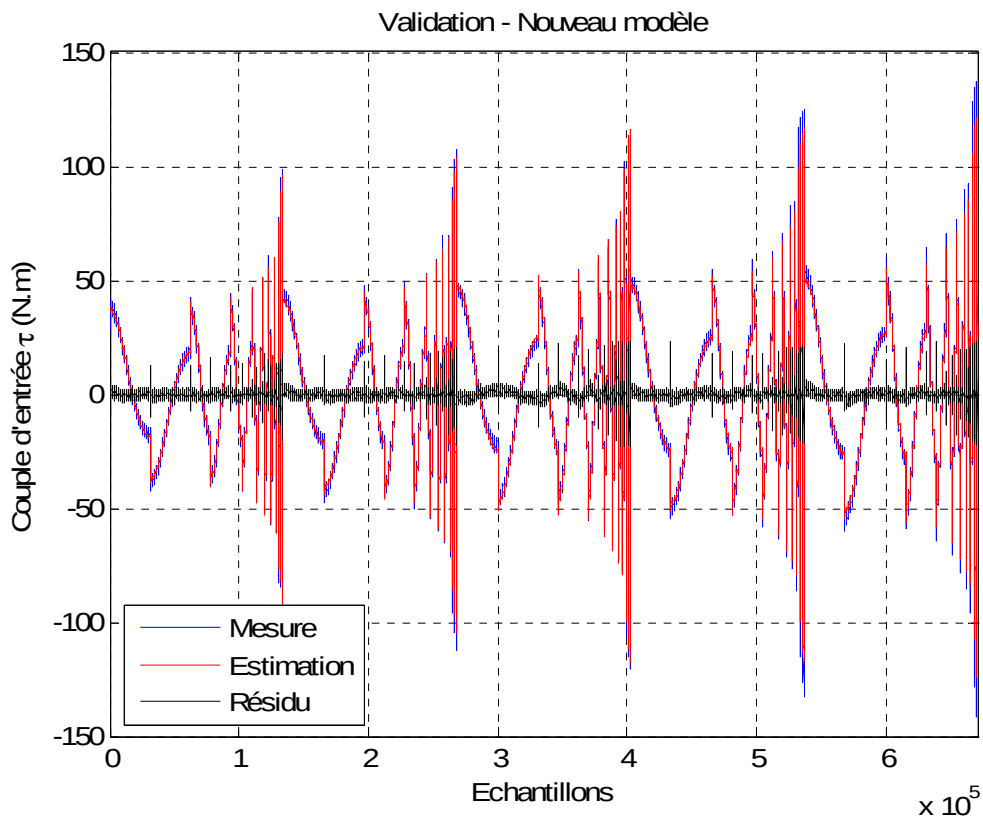


Figure 5-14 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle $(2 \times 2Q)$ – Axe 2.

5.5.3. Identification Axe 3

On rappelle le modèle dynamique inverse de l'axe 3 seul (voir en 3.2.4.2) :

$$\tau_3 = J_3 \ddot{q}_3 + MX_3 g \cos(q_3) + MY_3 g \sin(q_3) + \tau_{\text{ext}3} + F_{C3} \text{sign}(\dot{q}_3) + F_{V3} \dot{q}_3 + \tau_{\text{off}3} \quad (5.38)$$

où M_a est la masse ajoutée en sortie $M_a \in \{0 ; 0,67439 ; 1,19549 ; 1,69906 ; 2,21733\}$.

Et le couple de charge est ici :

$$\tau_{\text{load}3} = J_3 \ddot{q}_3 + MX_3 g \cos(q_3) + MY_3 g \sin(q_3) + M_a L_3 (L_3 \ddot{q}_3 + g \cos(q_3)) \quad (5.39)$$

5.5.3.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 4$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$, c'est-à-dire un couple extérieur :

$$\tau_{\text{ext}3(k)} = M_{a(k)} L_3 (L_3 \ddot{q}_3 + g \cos(q_3)).$$

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.38), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau_3 = \mathbf{W}\chi + \rho$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{q}_3 & g \cos(q_3) & g \sin(q_3) & \text{sign}(\dot{q}_3) & \dot{q}_3 & \mathbb{1}_e & \tau_{\text{ext}3}] \\ \chi = [J_3 & MX_3 & MY_3 & F_{C3} & F_{V3} & \tau_{\text{off}3} & Un_3]^T \end{cases} \quad (5.40)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre Un_3 devrait être trouvé proche de la valeur 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.5.3.3.

5.5.3.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.4, l'effet Stribeck est très faible pour l'axe 3. Comme on va le voir dans les résultats en 5.5.3.3, la modélisation la plus adaptée est la modélisation (4×1Q) avec variation du frottement sec en fonction de la charge seule. Ainsi, nous ne détaillons ici que le système linéaire utilisé pour ce modèle.

Pour le modèle $(4 \times 1Q)$, on a le système linéaire $\tau_3 = \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} \chi_{(4 \times 1Q)} + \mathbf{p}$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3^1 \ddot{\mathbf{q}}_3 & \mathbf{P}_3^1 g \cos(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^1 g \sin(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^1 \tau_{\text{ext}3} & \mathbf{P}_3^1 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_3^2 \ddot{\mathbf{q}}_3 & \mathbf{P}_3^2 g \cos(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^2 g \sin(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^2 \tau_{\text{ext}3} & -\mathbf{P}_3^2 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_3^3 \ddot{\mathbf{q}}_3 & \mathbf{P}_3^3 g \cos(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^3 g \sin(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^3 \tau_{\text{ext}3} & -\mathbf{P}_3^3 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}_3^4 \ddot{\mathbf{q}}_3 & \mathbf{P}_3^4 g \cos(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^4 g \sin(\mathbf{q}_3) & \mathbf{P}_3^4 \tau_{\text{ext}3} & \mathbf{P}_3^4 & \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} \\ \chi_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha_{13})J_3 & (1+\alpha_{13})MX_3 & (1+\alpha_{13})MY_3 & 1+\alpha_{13} & \beta_{13} & \dots \\ \dots & (1-\alpha_{23})J_3 & (1-\alpha_{23})MX_3 & (1-\alpha_{23})MY_3 & 1-\alpha_{23} & \beta_{23} & \dots \\ \dots & (1+\alpha_{33})J_3 & (1+\alpha_{33})MX_3 & (1+\alpha_{33})MY_3 & 1+\alpha_{33} & \beta_{33} & \dots \\ \dots & (1-\alpha_{43})J_3 & (1-\alpha_{43})MX_3 & (1-\alpha_{43})MY_3 & 1-\alpha_{43} & \beta_{43} & F_{V3} \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Les résultats de l'identification de chaque modèle sont donnés dans la partie suivante.

5.5.3.3. Résultats et analyses

Le modèle classique et le modèle $(4 \times 1Q)$ fonction de la charge sont tout d'abord identifiés. Les valeurs identifiées des paramètres α_{i3} sont comparées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{13} = 0,550 \quad ; \quad \alpha_{23} = 0,605 \\ \alpha_{33} = 0,665 \quad ; \quad \alpha_{43} = 0,703 \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Ces valeurs sont toutes différentes. On ne propose donc pas de simplification. Pour vérification, le modèle $(4 \times 1Q)$ avec variation du frottement en fonction de la charge et de la vitesse est identifié : les paramètres a_{i3} ne sont pas identifiables et sont supprimés. Le modèle retenu est donc le modèle $(4 \times 1Q)$ fonction de la charge.

La norme relative du résidu total obtenue pour chacun des modèles (classique et $(4 \times 1Q)/\text{charge}$) est donnée dans le Tableau 5-20. Nous détaillons les résultats des identifications avec ces 2 modèles et nous les comparons.

Tableau 5-20 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique	0,23111
Modèle $(4 \times 1Q)$ / charge	0,11637

Les tableaux suivants (Tableau 5-21 et Tableau 5-22, valeurs en unités SI) donnent les résultats de l'identification pour chaque modèle (certains paramètres ont été supprimés à l'identification car trop faibles/non identifiables), et la Figure 5-15 et la Figure 5-16 montrent les validations directes où on compare le couple mesuré au couple estimé, pour les 2 modèles.

Tableau 5-21 : Axe 3 – Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J_3	0,2882	0,0024	0,4169
MX_3	0,7138	0,0020	0,1423
F_{C3}	6,8796	0,0082	0,0599
F_{V3}	1,6741	0,0133	0,3958
Un_3	0,9735	0,0042	0,2164

Tableau 5-22 : Axe 3 – Valeurs identifiées avec le modèle ($4 \times 1Q$)

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
$(1 + \alpha_{13})J_3$	0,3079	0,0024	0,3903
$(1 + \alpha_{13})MX_3$	0,8550	0,0026	0,1517
$1 + \alpha_{13}$	1,5499	0,0042	0,1349
β_{13}	4,3236	0,0144	0,1662
$(1 - \alpha_{23})J_3$	0,2807	0,0025	0,4439
$(1 - \alpha_{23})MX_3$	0,2888	0,0033	0,5740
$1 - \alpha_{23}$	0,3949	0,0043	0,5421
β_{23}	2,2749	0,0202	0,4440
$(1 + \alpha_{33})J_3$	0,3030	0,0024	0,3979
$(1 + \alpha_{33})MX_3$	0,9372	0,0027	0,1430
$1 + \alpha_{33}$	1,6650	0,0042	0,1264
β_{33}	4,2316	0,0148	0,1745
$(1 - \alpha_{43})J_3$	0,2766	0,0025	0,4534
$(1 - \alpha_{43})MX_3$	0,2000	0,0032	0,8120
$1 - \alpha_{43}$	0,2966	0,0043	0,7272
β_{43}	2,0531	0,0194	0,4721
F_{V3}	1,8168	0,0072	0,1991

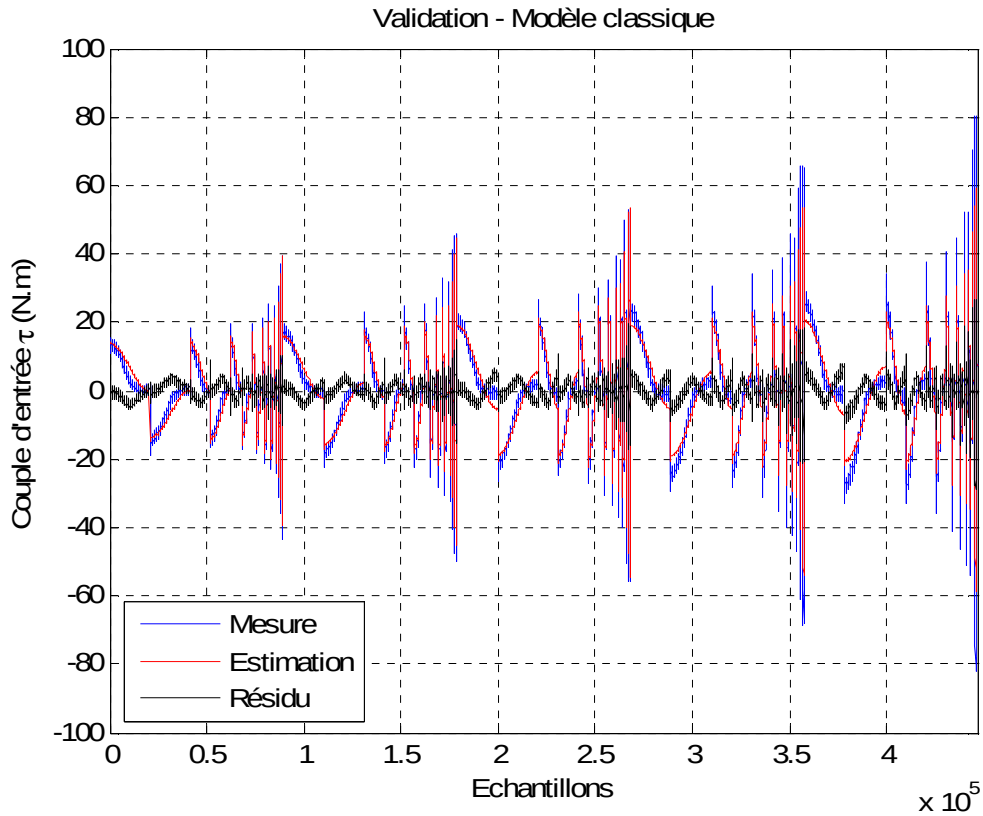


Figure 5-15 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle classique – Axe 3.

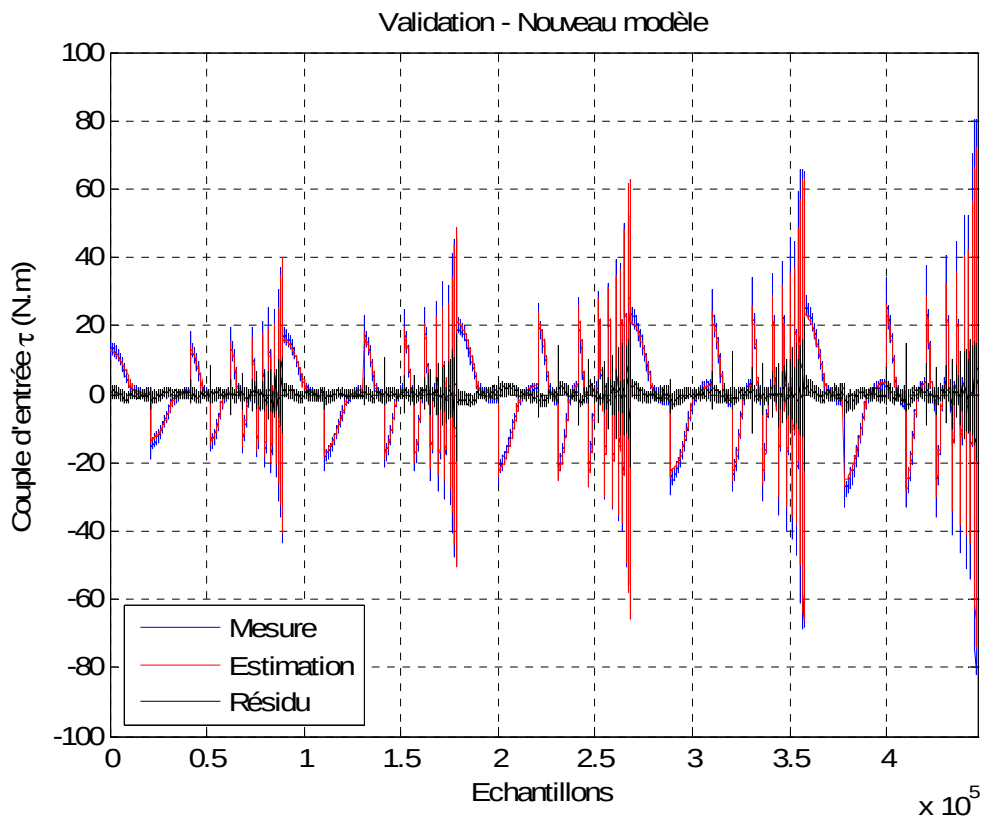


Figure 5-16 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par le modèle $(4 \times 1Q)$ – Axe 3.

La norme du résidu est divisée par deux si on prend le nouveau modèle à la place du modèle classique. Les écarts-types des paramètres identifiés sont faibles pour les 2 modèles, et le paramètre Un_3 du modèle classique est relativement proche de 1. Les deux modèles sont bien identifiés. Les paramètres à retenir pour le nouveau modèle sont les paramètres $1+\alpha_{13}$, $1-\alpha_{23}$, $1+\alpha_{33}$ et $1-\alpha_{43}$.

5.5.4. Identification Axe 4

On rappelle le modèle dynamique inverse de l'axe 4 seul (voir en 3.2.4.2) :

$$\tau_4 = J_4 \ddot{q}_4 + MX_4 g \cos(q_4) + MY_4 g \sin(q_4) + \tau_{ext4} + F_{C4} \text{sign}(\dot{q}_4) + F_{V4} \dot{q}_4 + \tau_{off4} \quad (5.43)$$

où M_a est la masse ajoutée en sortie $M_a \in \{0 ; 0,67439 ; 1,19549 ; 1,69906 ; 2,21733\}$.

Et le couple de charge est ici :

$$\tau_{load4} = J_4 \ddot{q}_4 + MX_4 g \cos(q_4) + MY_4 g \sin(q_4) + M_a L_4 (L_4 \ddot{q}_4 + g \cos(q_4)) \quad (5.44)$$

5.5.4.1. Identification du modèle classique

Pour l'identification du modèle classique avec tous les échantillons (avec et sans charge), on utilise la même méthode que celle présentée en 5.2.1 pour le banc à vérin à câble.

Soit $n_c = 4$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$, c'est-à-dire un couple extérieur :

$$\tau_{ext4(k)} = M_{a(k)} L_4 (L_4 \ddot{q}_4 + g \cos(q_4)).$$

Pour l'identification, à partir du modèle dynamique (5.43), on concatène tous les échantillons avec toutes les charges, et on utilise le système linéaire $\tau_4 = \mathbf{W}\chi + \rho$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W} = [\ddot{q}_4 & g \cos(q_4) & g \sin(q_4) & \text{sign}(\dot{q}_4) & \dot{q}_4 & \mathbb{1}_e & \tau_{ext4}] \\ \chi = [J_4 & MX_4 & MY_4 & F_{C4} & F_{V4} & \tau_{off4} & Un_4]^T \end{cases} \quad (5.45)$$

Si le modèle est bien identifié, le paramètre Un_4 devrait être trouvé proche de la valeur 1. Les résultats de l'identification sont donnés en 5.5.4.3.

5.5.4.2. Identification du nouveau modèle

D'après l'étude faite dans le paragraphe 3.3.4, l'effet Stribeck est négligeable pour l'axe 4. De plus, comme nous le verrons dans les résultats en 5.5.4.3, le modèle ($2 \times 2Q$) est suffisant. Nous ne détaillons donc ici que le système linéaire utilisé pour ce modèle ($2 \times 2Q$) avec variation en fonction de la charge seule.

D'autre part, on a pu voir que dans les essais réalisés, l'axe 4 ne fonctionne qu'en mode moteur. Le modèle $(2 \times 2Q)$ peut donc être simplifié de la manière suivante :

$$\tau_4 = (1 + \alpha_{m4}) (J_4 \ddot{q}_4 + MX_4 g \cos(q_4) + MY_4 g \sin(q_4) + \tau_{ext4}) + \beta_{m4} \text{sign}(\dot{q}_4) + F_{V4} \dot{q}_4 + \tau_{off\ m4} \quad (5.46)$$

Ainsi, on a le système linéaire $\tau_4 = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = [\ddot{q}_4 & g \cos(q_4) & g \sin(q_4) & \tau_{ext4} & \text{sign}(\dot{q}_4) & \dot{q}_4 & \mathbb{1}_{e4}] \\ \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} = [(1 + \alpha_{m4}) J_4 & (1 + \alpha_{m4}) MX_4 & (1 + \alpha_{m4}) MY_4 & 1 + \alpha_{m4} & \beta_{m4} & F_{V4} & \tau_{off\ m4}]^T \end{cases} \quad (5.47)$$

Les résultats de l'identification de chaque modèle sont donnés dans la partie suivante.

5.5.4.3. Résultats et analyses

Le modèle classique et le modèle $(4 \times 1Q)$ fonction de la charge sont tout d'abord identifiés. Puis le nouveau modèle est simplifié en un modèle $(2 \times 2Q)$. Le Tableau 5-23 donne les normes relatives du résidu total pour les différents modèles : ces valeurs étant proches, le modèle $(2 \times 2Q)$ est suffisant.

On remarque que les 2 régresseurs, du modèle classique et du modèle $(2 \times 2Q)$ sont égaux : $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)}$. Ainsi, une seule identification est réalisée pour les 2 modèles : le vecteur des paramètres obtenu est donc le même mais les valeurs ne désignent pas les mêmes paramètres selon le modèle considéré. Les résultats sont donnés dans le Tableau 5-24 (valeurs en unités SI) : les écarts-types sont faibles, le modèle est bien identifié. La Figure 5-17 montre la validation directe où on compare le couple mesuré au couple estimé.

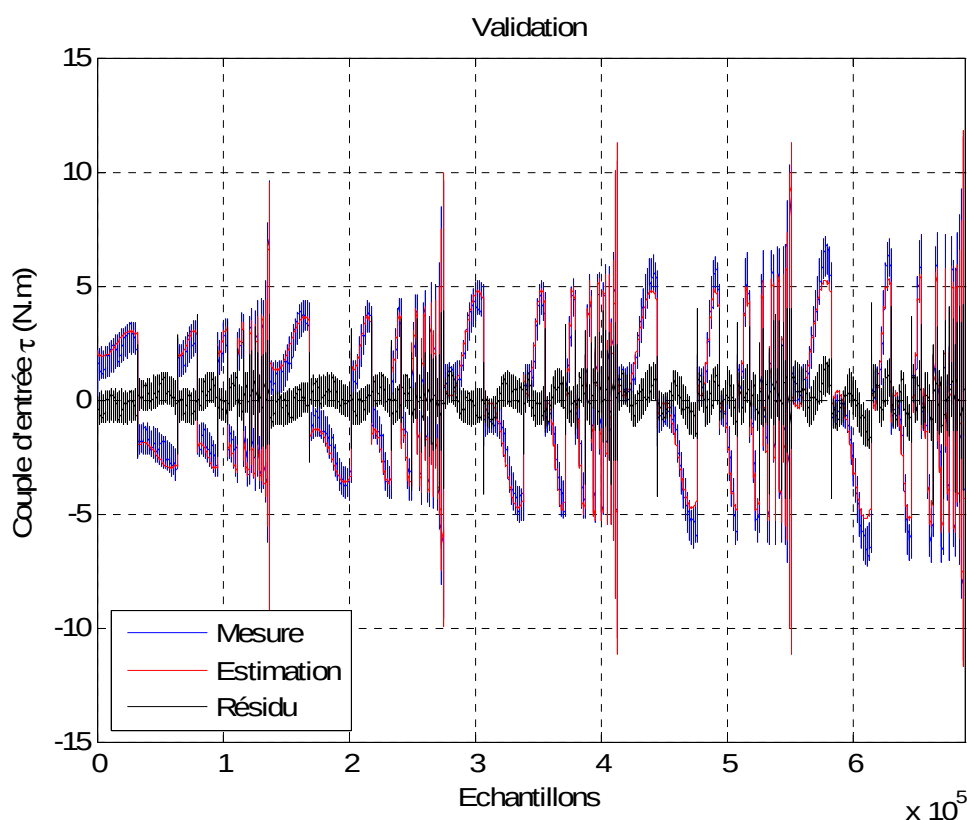
Le paramètre Un_4 du modèle classique est assez éloigné de 1. Cela est normal du point de vue du modèle $(2 \times 2Q)$ puisque ce paramètre correspond à $1 + \alpha_{m4}$. On en déduit que α_{m4} est égal à 0,104 et que le modèle classique ferait donc une erreur de 10% sur l'estimation des couples extérieurs. Le paramètre à retenir pour le nouveau modèle est le paramètre $1 + \alpha_{m4}$.

Tableau 5-23 : Norme relative du résidu total pour différents modèles

Modèle classique et Modèle $(2 \times 2Q)$ / charge	0,17172
Modèle $(4 \times 1Q)$ / charge	0,17088

Tableau 5-24 : Axe 4 – Valeurs identifiées

Paramètre modèle classique	Paramètre modèle ($2 \times 2Q$)	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
J_4	$(1 + \alpha_{m4}) J_4$	0,0450	0,0005	0,5084
MY_4	$(1 + \alpha_{m4}) MY_4$	0,0553	0,0003	0,2781
Un_4	$1 + \alpha_{m4}$	1,1039	0,0022	0,0984
F_{C4}	β_{m4}	2,4190	0,0014	0,0280
F_{V4}	F_{V4}	0,8479	0,0022	0,1281


Figure 5-17 : Comparaison directe entre couple mesuré et couple estimé par les modèles – Axe 4.

5.5.5. Identification multi-axes

L'identification multi-axes est réalisée en utilisant la méthode décrite dans le paragraphe 4.4.2. Les différentes masses utilisées pour tester les axes 2 à 4 seuls sont à nouveau fixées en bout de robot. Des essais axe par axe (de l'axe 1 à l'axe 4) et multi-axes sont effectués.

Les 4 premiers axes nous intéressant, les axes 5 et 6 sont bloqués sous asservissement pour les essais multi-axes et on considère donc le TX40 comme un robot 4 axes (on prendra donc $n = 4$). On cherche à identifier celui-ci en concaténant tous les essais, avec et sans masse ajoutée, pour le modèle classique comme pour le nouveau modèle. Les modèles dynamiques d'identification sont détaillés dans les 2 cas puis les résultats des identifications sont donnés.

5.5.5.1. Modèle dynamique d'identification classique en multi-axes

Le modèle dynamique inverse minimal classique, utilisé lorsque la charge extérieure ne varie pas, a été défini en 1.3.3.2. Son expression pour le robot TX40 peut être obtenue facilement à l'aide du logiciel SYMORO+. On définit ici χ_{dyn} , le vecteur contenant les c_{dyn} paramètres inertiels extraits du vecteur des paramètres de base χ (c'est-à-dire qu'il contient tous les paramètres excepté les paramètres de frottement et les offsets). D_{dyn} est alors définie comme la matrice $(4 \times c_{\text{dyn}})$, extraite du régresseur minimal D , et qui correspond aux paramètres de χ_{dyn} . Le modèle classique utilisé habituellement pour un cas de charge s'écrit $\tau = D\chi$ avec :

$$\begin{cases} D = \begin{bmatrix} D_{\text{dyn}} & \text{diag}(\text{sign}(\dot{q})) & \text{diag}(\dot{q}) & \mathbb{I}_4 \end{bmatrix} \\ \chi = \begin{bmatrix} \chi_{\text{dyn}}^T & F_{C1} & F_{C2} & F_{C3} & F_{C4} & F_{V1} & F_{V2} & F_{V3} & F_{V4} & \tau_{\text{off}1} & \tau_{\text{off}2} & \tau_{\text{off}3} & \tau_{\text{off}4} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.48)$$

où :

- $\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4]^T$
- $\mathbb{I}_4$ est la matrice unité (4×4)
- la fonction *diag* convertit un vecteur **vect** de dimension n en une matrice diagonale

$$(n \times n) \text{ définie par : } \text{diag}(\text{vect}) = \begin{bmatrix} \text{vect}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{vect}_n \end{bmatrix}.$$

On identifie ici le modèle classique en concaténant tous les essais, avec et sans charge extérieure. Ainsi, soit $n_c = 4$ et soit $k \in [0 : n_c]$, les échantillons (k) correspondent aux mesures réalisées avec la masse ajoutée $M_{a(k)}$. Pour chaque échantillon avec une masse ajoutée $M_{a(k)}$, chaque couple extérieur $\tau_{\text{ext}(k)}$ peut être calculé connaissant les positions, vitesses et accélérations de tous les axes ainsi que les caractéristiques inertielles de la masse $M_{a(k)}$ (voir en 4.4.2). On peut alors écrire un système linéaire pour tous les essais avec $M_{a(k)}$, $\tau_{(k)} = D_{\text{usual}}\chi_{\text{usual}}$, avec :

$$\begin{cases} D_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} D & \text{diag}(\tau_{\text{ext}(k)}) \end{bmatrix} \\ \chi_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \chi^T & Un_1 & Un_2 & Un_3 & Un_4 \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.49)$$

où :

- $\tau_{(k)} = [\tau_{1(k)} \quad \tau_{2(k)} \quad \tau_{3(k)} \quad \tau_{4(k)}]^T$
- $\tau_{\text{ext}(k)} = [\tau_{\text{ext}1(k)} \quad \tau_{\text{ext}2(k)} \quad \tau_{\text{ext}3(k)} \quad \tau_{\text{ext}4(k)}]^T$.

Pour l'identification, on concatène tous les essais en prenant le système linéaire suivant : $Y_{\text{usual}} = W_{\text{usual}}\chi_{\text{usual}} + p$.

Le vecteur des mesures $\mathbf{Y}_{\text{usual}}$ est défini par :

$$\mathbf{Y}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{1(0)}^T \cdots \boldsymbol{\tau}_{1(4)}^T & \boldsymbol{\tau}_{2(0)}^T \cdots \boldsymbol{\tau}_{2(4)}^T & \boldsymbol{\tau}_{3(0)}^T \cdots \boldsymbol{\tau}_{3(4)}^T & \boldsymbol{\tau}_{4(0)}^T \cdots \boldsymbol{\tau}_{4(4)}^T \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\tau} \quad (5.50)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{j(k)}$ est le vecteur des couples d'entrée de l'axe j , de tous les échantillons (k).

La matrice d'observation $\mathbf{W}_{\text{usual}}$ est définie par :

$$\mathbf{W}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}1(0)} & & & \\ & \vdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}1(4)} & & & \\ & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}2(0)} & & \\ & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \vdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}2(4)} & & \\ & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}3(0)} & \\ & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \vdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}3(4)} & \\ & & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}4(0)} \\ & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \vdots \\ & & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}4(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}j(k)}$ est le vecteur des couples extérieurs chargeant l'axe j , de tous les échantillons (k), et où $\mathbf{0}_{(m \times p)}$ définit une matrice nulle de dimension $(m \times p)$ (ici, $\mathbf{0}_{(e \times 1)}$ est un vecteur colonne nul de dimension e avec e le nombre total d'échantillons).

5.5.5.2. Nouveau modèle dynamique d'identification en multi-axes

Les paramètres à identifier par le nouveau modèle sont les mêmes paramètres inertiels χ_{dyn} que dans le nouveau modèle, plus les paramètres de frottements et d'offsets qui dépendent du type de modélisation choisie pour chaque axe. En l'occurrence, pour l'axe 1, un modèle $(2 \times 2Q)/\text{charge} + \text{vitesse}$ a été retenu : les valeurs des paramètres α_{m1} , a_{m1} , α_{g1} , a_{g1} et $\dot{q}_{s1}$ sont fixées, et il reste à identifier les paramètres β_{m1} , b_{m1} , $\tau_{\text{off}m1}$, β_{g1} , b_{g1} , $\tau_{\text{off}g1}$ et F_{V1} . De même pour l'axe 2, le modèle $(2 \times 2Q)/\text{charge} + \text{vitesse}$ a été retenu. Pour l'axe 3, le modèle $(4 \times 1Q)/\text{charge}$ a été retenu : les valeurs des paramètres α_{m3} et α_{g3} sont fixées, et il reste à identifier les paramètres β_{13} , β_{23} , β_{33} , β_{43} et F_{V3} . Pour l'axe 4, le modèle $(2 \times 2Q)/\text{charge}$ en mode moteur a été retenu : la valeur du paramètre α_{m4} est fixée, et il reste à identifier les paramètres β_{m4} , $\tau_{\text{off}m4}$ et F_{V4} . Il reste donc 22 paramètres de frottement et d'offsets à identifier. De plus, connaissant les couples extérieurs $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}j(k)}$, on ajoute, comme pour le modèle classique, des paramètres Un_j .

On exprime le système linéaire du nouveau modèle pour des échantillons (k) à partir du modèle classique. Le nouveau modèle s'écrit $\tau_{(k)} = \mathbf{D}_{\text{new}} \chi_{\text{new}}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\lambda) \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{D}_{\text{frott}} & \text{diag}(\lambda) \text{diag}(\tau_{\text{ext}(k)}) \end{bmatrix} \\ \chi_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \chi_{\text{dyn}}^T & \beta_{m1} & b_{m1} & \tau_{\text{offm1}} & \beta_{g1} & b_{g1} & \tau_{\text{offg1}} & F_{V1} & \beta_{m2} & \dots \\ \dots & b_{m2} & \tau_{\text{offm2}} & \beta_{g2} & b_{g2} & \tau_{\text{offg2}} & F_{V2} & \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \dots \\ \dots & \beta_{43} & F_{V3} & \beta_{m4} & \tau_{\text{offm4}} & F_{V4} & U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & U_{n4} \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.52)$$

où :

- χ_{new} est un vecteur de dimension $c_{\text{dyn}} + 26$,
- λ est un vecteur (4×1) dont chaque terme λ_j dépend des paramètres de frottement sec déjà connus de l'axe j,
- $\mathbf{D}_{\text{frott}}$ est une matrice (4×22) qui dépend des vitesses, des signes des puissances et des vitesses de Stribeck,

Les termes λ_j sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda_1 = P_1^+ (1 + \alpha_{m1} + a_{m1} E_{xp1}) + P_1^- (1 - \alpha_{g1} - a_{g1} E_{xp1}) \\ \lambda_2 = P_2^+ (1 + \alpha_{m2} + a_{m2} E_{xp2}) + P_2^- (1 - \alpha_{g2} - a_{g2} E_{xp2}) \\ \lambda_3 = P_3^1 (1 + \alpha_{13}) + P_3^2 (1 - \alpha_{23}) + P_3^3 (1 + \alpha_{33}) + P_3^4 (1 - \alpha_{43}) \\ \lambda_4 = 1 + \alpha_{m4} \end{cases} \quad (5.53)$$

Soit $\mathbf{D}_{\text{frott}j}$ la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{D}_{\text{frott}}$, $\mathbf{D}_{\text{frott}}$ se définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\text{frott}1} = \begin{bmatrix} P_1^+ \text{sign}(\dot{q}_1) & E_{xp1} P_1^+ \text{sign}(\dot{q}_1) & P_1^+ & P_1^- \text{sign}(\dot{q}_1) & \dots \\ & & \dots & E_{xp1} P_1^- \text{sign}(\dot{q}_1) & P_1^- & \dot{q}_1 & \mathbf{0}_{(1 \times 15)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{\text{frott}2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(1 \times 7)} & P_2^+ \text{sign}(\dot{q}_2) & E_{xp2} P_2^+ \text{sign}(\dot{q}_2) & P_2^+ & P_2^- \text{sign}(\dot{q}_2) & \dots \\ & & & \dots & E_{xp2} P_2^- \text{sign}(\dot{q}_2) & P_2^- & \dot{q}_2 & \mathbf{0}_{(1 \times 8)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{\text{frott}3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(1 \times 14)} & P_3^1 & -P_3^2 & -P_3^3 & P_3^4 & \dot{q}_3 & \mathbf{0}_{(1 \times 3)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{\text{frott}4} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(1 \times 19)} & \text{sign}(\dot{q}_4) & \dot{q}_4 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.54)$$

La notation $\mathbf{0}_{(1 \times)}$ désigne un vecteur ligne nul de dimension $(1 \times)$

L'identification du nouveau modèle avec tous les échantillons, avec et sans masse ajoutée, se fait en concaténant tous les essais de la même manière que pour le modèle classique avec l'équation (5.51), en mettant à la place des termes en $\tau_{\text{extj}(k)}$, des termes en $\lambda_j \tau_{\text{extj}(k)}$. On obtient un système linéaire qu'on écrit : $\mathbf{Y}_{\text{new}} = \mathbf{Y}_{\text{usual}} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_{\text{new}} \boldsymbol{\chi}_{\text{new}} + \boldsymbol{\rho}$.

5.5.5.3. Résultats d'identification et analyses

On identifie le modèle classique et le nouveau modèle en utilisant les mêmes mesures. Pour le nouveau modèle, les valeurs des paramètres de frottement fixées dans $\mathbf{W}_{\text{new}}$ sont données ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \alpha_{m1} = 1,0397 \\ a_{m1} = 0,1618 \\ 1 - \alpha_{g1} = 0,9083 \\ a_{g1} = 0,1532 \\ \dot{q}_{s1} = 0,2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} 1 + \alpha_{m2} = 1,0171 \\ a_{m2} = 0,1747 \\ 1 - \alpha_{g2} = 0,8765 \\ a_{g2} = 0,2492 \\ \dot{q}_{s2} = 0,1 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} 1 + \alpha_{13} = 1,5499 \\ 1 - \alpha_{23} = 0,3849 \\ 1 + \alpha_{33} = 1,6650 \\ 1 - \alpha_{43} = 0,2966 \end{array} \right. , 1 + \alpha_{m4} = 1,1039 \quad (5.55)$$

Les paramètres négligeables, ou non significatifs sont éliminés lors de l'identification. Le Tableau 5-25 compare les résidus obtenus par les 2 modèles. Le Tableau 5-26 et le Tableau 5-27 donnent les valeurs en unités SI et les écarts-types des paramètres identifiés, pour les 2 modèles.

La Figure 5-18 présente les trajectoires utilisées pour la validation directe des axes 1 à 3 : la Figure 5-19 donne les graphes des validations directes réalisées sur les différents axes, à gauche avec le modèle classique et à droite avec le nouveau modèle. Pour l'axe 4, les 2 modèles étant équivalents, on ne s'intéresse pas à la validation de cet axe.

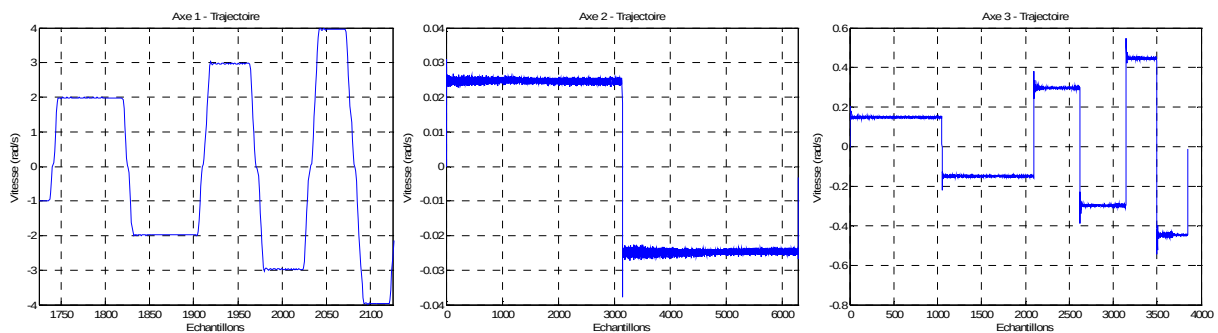


Figure 5-18 : Trajectoires utilisées pour la validation des axes 1, 2 et 3.

Tableau 5-25 : Comparaison des résidus entre les 2 modèles

	Norme relative du résidu	Ecart-type du résidu
Modèle classique	0,1163	1,7920
Nouveau modèle	0,0824	1,5046

Tableau 5-26 : TX40 – Valeurs identifiées avec le modèle classique

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
ZZ_{1R}	1,6379	0,0045	0,2772
ZZ_{2R}	1,1032	0,0047	0,4266
MX_{2R}	2,1187	0,0017	0,0820
ZZ_{3R}	0,2271	0,0024	1,0410
MY_{3R}	-0,6700	0,0014	0,2034
Ia_4	0,0367	0,0005	1,3735
F_{C1}	4,3052	0,0028	0,0651
F_{V1}	8,1786	0,0178	0,2171
F_{C2}	7,8107	0,0051	0,0659
F_{V2}	3,2301	0,0191	0,5898
F_{C3}	6,3491	0,0065	0,1023
F_{V3}	1,7889	0,0157	0,8800
F_{C4}	2,3281	0,0017	0,0720
F_{V4}	0,8447	0,0024	0,2791
Un_2	0,9942	0,0016	0,1628
Un_3	1,0460	0,0036	0,3468
Un_4	1,2108	0,0030	0,2487

Tableau 5-27 : TX40 – Valeurs identifiées avec le nouveau modèle

Paramètre	Valeur identifiée	2*écart-type	Écart-type relatif (%)
ZZ_{1R}	1,2651	0,0050	0,3963
ZZ_{2R}	1,3047	0,0037	0,2842
MX_{2R}	2,3029	0,0015	0,0653
ZZ_{3R}	0,2084	0,0016	0,7740
MY_{3R}	-0,4112	0,0009	0,2084
Ia_4	0,0334	0,0004	1,1945
β_{m1}	5,5690	0,0115	0,2061
b_{m1}	-1,5019	0,0140	0,9315
F_{V1}	6,8360	0,0183	0,2673
β_{m2}	5,9022	0,0086	0,1456
β_{g2}	2,2215	0,0154	0,6933
b_{g2}	9,5831	0,0221	0,2301
F_{V2}	4,8055	0,0148	0,3081
β_{13}	5,5144	0,0085	0,1549
β_{23}	1,1834	0,0140	1,1794
β_{33}	5,3375	0,0092	0,1728
β_{43}	1,3434	0,0170	1,2624
F_{V3}	1,7054	0,0123	0,7238
β_{m4}	2,3551	0,0015	0,0630
F_{V4}	0,8451	0,0021	0,2430
Un_1	1,3491	0,0147	1,0864
Un_2	0,9434	0,0011	0,1213
Un_3	1,0325	0,0022	0,2170
Un_4	1,0987	0,0024	0,2171

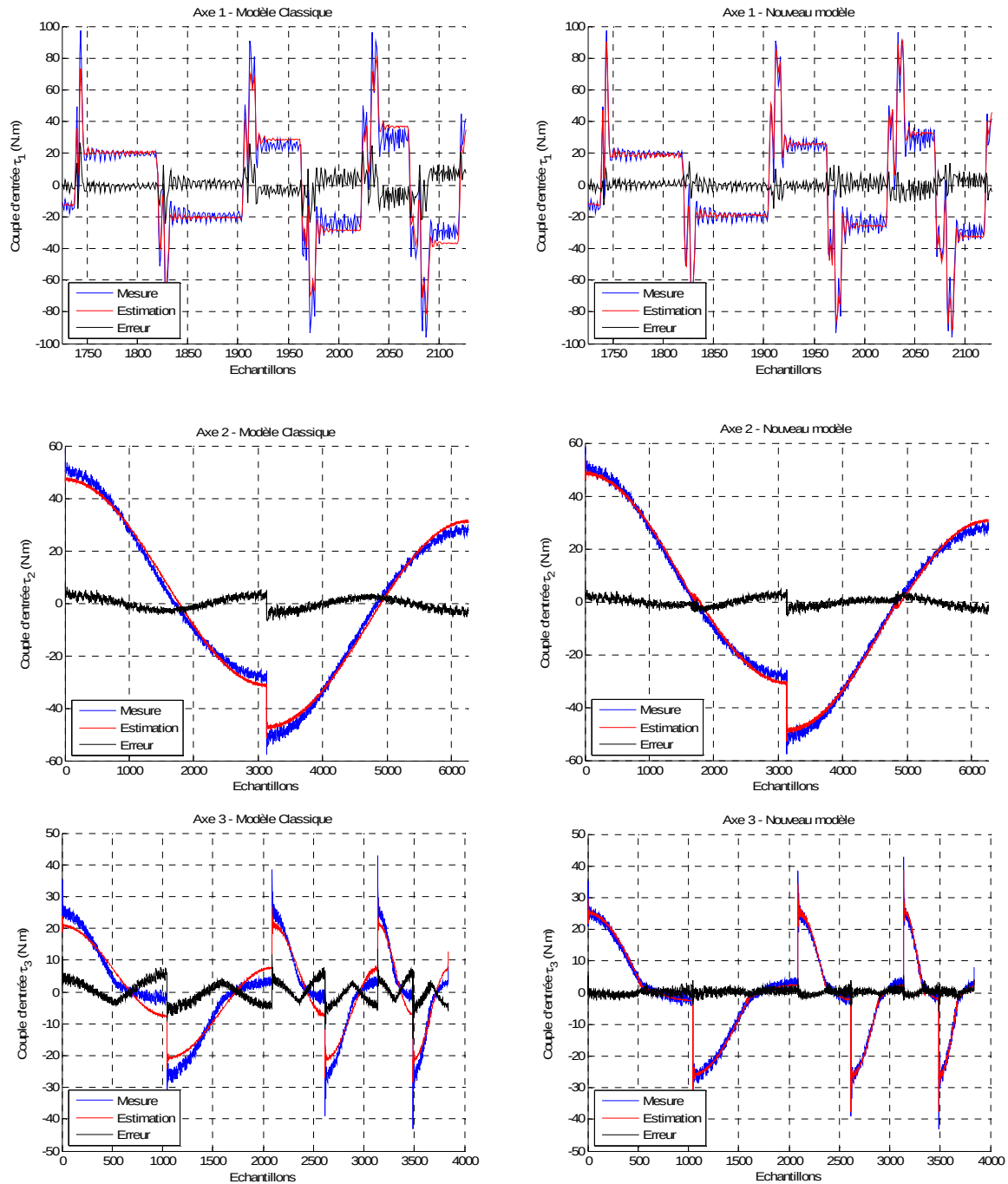


Figure 5-19 : Validations directes sur les axes 1, 2 et 3 pour les 2 modèles – TX40

Les trajectoires choisies ici pour la validation sont celles réalisées avec la masse de 2,217 kg, avec des vitesses différentes selon les axes. Pour chacun des axes, on observe une diminution des erreurs grâce au nouveau modèle. Celle-ci est surtout remarquable pour l'axe 3 (dont la transmission est de type roue et vis tangente). Au total, on a une diminution moyenne des erreurs d'environ 30% (voir norme relative du résidu, Tableau 5-25).

Le nouveau modèle augmente donc la précision et permettra donc une meilleure détection des anomalies ou observation des efforts extérieurs.

Ces résultats ont été présentés à la conférence internationale ICRA 2011 [Hamon 2011].

5.6. Synthèse sur l'identification

5.6.1. Méthode d'identification pour un axe

La procédure consiste à réaliser des mesures sur des mouvements mono-axes, avec différentes masses ajoutées. Les mouvements mono-axes permettent de simplifier le modèle d'identification, et les paramètres de frottement sont de plus mieux excités sur les paliers.

Soit n_c le nombre de masses ajoutées utilisées dans les mesures pour l'identification et soit $k \in [0 : n_c]$. Les échantillons réalisés avec le système à vide sont les échantillons (0) auxquels correspondent les mesures d'effort d'entrée $\tau_{(0)}$ (et $\tau_{\text{ext}(0)} = 0$). De même, pour chaque masse ajoutée, on a les échantillons (k) avec la charge extérieure $\tau_{\text{ext}(k)}$ et les mesures de l'effort d'entrée $\tau_{(k)}$.

L'effort extérieur $\tau_{\text{ext}(k)}$ doit être connu pour l'identification (mesures, CAO, calculs) et peut être exprimé en fonction des positions, vitesses et accélérations.

Le modèle dynamique inverse pour les échantillons (k) peut s'écrire :

$$\tau_{(k)} = \tau_{\text{dyn}} + \tau_{\text{ext}(k)} + F_C \text{sign}(\dot{q}) + F_V \dot{q} + \tau_{\text{off}} \quad (5.56)$$

où τ_{dyn} est l'effort dû aux effets d'inertie et de gravité de l'axe seul (sans la charge extérieure), avec : $\tau_{\text{load}(k)} = \tau_{\text{dyn}} + \tau_{\text{ext}(k)}$.

Il a été montré en 1.3 que le terme τ_{dyn} peut s'écrire de manière linéaire par rapport aux c_{dyn} paramètres inertiels et de gravité χ_{dyn} . On peut donc l'écrire sous la forme :

$$\tau_{\text{dyn}} = \mathbf{D}_{\text{dyn}} \chi_{\text{dyn}} \quad (5.57)$$

Pour le modèle classique et pour le nouveau modèle, on donne dans les parties suivantes les expressions des systèmes linéaires de type $\tau = \mathbf{D}\chi$ utilisés pour l'identification.

Pour la concaténation de tous les échantillons, avec et sans charge extérieure, et pour obtenir une expression du type $\mathbf{Y} = \mathbf{W}\chi + \mathbf{p}$, on a besoin de définir les vecteurs τ et τ_{ext} :

$$\begin{cases} \tau = [\tau_{(0)}^T & \dots & \tau_{(k)}^T & \dots & \tau_{(n_c)}^T]^T \\ \tau_{\text{ext}} = [\tau_{\text{ext}(0)}^T & \dots & \tau_{\text{ext}(k)}^T & \dots & \tau_{\text{ext}(n_c)}^T]^T \end{cases} \quad (5.58)$$

où $\tau_{(k)}$ et $\tau_{\text{ext}(k)}$ sont respectivement le vecteur des efforts d'entrée et le vecteur des efforts extérieurs, issus des échantillons (k).

On définit également le paramètre $Un = \frac{\tau_{\text{extE}}}{\tau_{\text{ext}(k)}}$, où τ_{extE} correspond à l'estimation, par l'identification, de l'effort extérieur connu $\tau_{\text{ext}(k)}$.

5.6.1.1. Identification du modèle classique

Le système linéaire classique pour les échantillons (k) s'écrit $\tau_{(k)} = \mathbf{D}_{\text{usual}(k)} \chi_{\text{usual}}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\text{usual}(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \text{sign}(\dot{q}) & \dot{q} & 1 & \tau_{\text{ext}(k)} \end{bmatrix} \\ \chi_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \chi_{\text{dyn}}^T & F_C & F_V & \tau_{\text{off}} & U_n \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.59)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{\text{usual}} \chi_{\text{usual}} + \mathbf{p}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \text{sign}(\dot{q}) & \dot{q} & \mathbb{1}_e & \tau_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

où $\mathbb{1}_e$ est le vecteur unitaire ($e \times 1$), e étant le nombre d'échantillons.

5.6.1.2. Identification du nouveau modèle

Selon la modélisation choisie, différentes matrices seront nécessaires. On introduit ici les matrices diagonales ($e \times e$) suivantes : $\mathbf{E}_{\text{xp}}$, $\mathbf{P}^{\text{sign}}$, $\mathbf{P}^+$, $\mathbf{P}^-$, $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$ et $\mathbf{P}^4$. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{xp}}(i,i) = E_{\text{xpi}} = e^{-|\dot{q}_i|/\dot{q}_s} \\ \mathbf{P}^{\text{sign}}(i,i) = \text{sign}(P_i) \\ \mathbf{P}^+(i,i) = \frac{1 + \text{sign}(P_i)}{2} \\ \mathbf{P}^-(i,i) = \frac{1 - \text{sign}(P_i)}{2} \\ \mathbf{P}^1(i,i) = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \\ \mathbf{P}^2(i,i) = \left(\frac{1 + \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \\ \mathbf{P}^3(i,i) = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 - \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \\ \mathbf{P}^4(i,i) = \left(\frac{1 - \text{sign}(\tau_i)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{sign}(\dot{q}_i)}{2} \right) \end{cases} \quad (5.61)$$

où $\dot{q}_i$ est la vitesse pour l'échantillon i et P_i est la puissance d'entrée ($P_i = \tau_i \dot{q}_i$) pour l'échantillon i.

Modélisation (1×4Q) avec variation en fonction de la charge

Le modèle (4.32) pour les échantillons (k) s'écrit $\tau_{(k)} = \mathbf{D}_{(1 \times 4Q)(k)} \chi_{(1 \times 4Q)}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{(1 \times 4Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \text{sign}(P)\mathbf{D}_{\text{dyn}} & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \text{sign}(P)\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \text{sign}(\dot{q}) & 1 & \dot{q} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \alpha \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \text{Un} & \alpha & \beta & \tau_{\text{off}} & F_V \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.62)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \text{sign}(\dot{q}) & \mathbb{1}_e & \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Modélisation (1×4Q) avec variation en fonction de la charge et de la vitesse

Le modèle (4.31) pour les échantillons (k) s'écrit $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{(1 \times 4Q)(k)} \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{(1 \times 4Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \text{sign}(P)\mathbf{D}_{\text{dyn}} & E_{\text{xp}} \text{sign}(P)\mathbf{D}_{\text{dyn}} & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \text{sign}(P)\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \dots \\ \dots & E_{\text{xp}} \text{sign}(P)\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \text{sign}(\dot{q}) & E_{\text{xp}} \text{sign}(\dot{q}) & 1 & \dot{q} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \alpha \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & a \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \text{Un} & \alpha & a & \beta & b & \tau_{\text{off}} & F_V \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.64)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} \boldsymbol{\chi}_{(1 \times 4Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{(1 \times 4Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & E_{\text{xp}} \mathbf{P}^{\text{sign}} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^{\text{sign}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & E_{\text{xp}} \mathbf{P}^{\text{sign}} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \dots \\ \dots & \text{sign}(\dot{q}) & E_{\text{xp}} \text{sign}(\dot{q}) & \mathbb{1}_e & \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Modélisation (2×2Q) avec variation en fonction de la charge

Le modèle (4.30) pour les échantillons (k) s'écrit $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{(2 \times 2Q)(k)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)}$, avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{(2 \times 2Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^+ \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^+ & \mathbf{P}^- \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^- & \dot{q} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_m) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1 + \alpha_m & \beta_m & \tau_{\text{offm}} & (1 - \alpha_g) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1 - \alpha_g & \beta_g & \tau_{\text{offg}} & F_V \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.66)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^+ \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^+ \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^- \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{q}) & \mathbf{P}^- \mathbb{1}_e & \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Modélisation (2×2Q) avec variation en fonction de la charge et de la vitesse

Le modèle (4.29) pour les échantillons (k) s'écrit $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{(2 \times 2Q)(k)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)}$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{(2 \times 2Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^+ \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^+ & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^- \mathbf{D}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^- & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha_m) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \mathbf{a}_m \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1+\alpha_m & \mathbf{a}_m & \beta_m & \mathbf{b}_m & \tau_{\text{offm}} & \dots \\ \dots & (1-\alpha_g) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \mathbf{a}_g \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1-\alpha_g & \mathbf{a}_g & \beta_g & \mathbf{b}_g & \tau_{\text{offg}} & \mathbf{F}_V \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (5.68)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} \boldsymbol{\chi}_{(2 \times 2Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{(2 \times 2Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^+ \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^+ \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^+ \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^- \mathbf{W}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^- \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{P}^- \mathbb{1}_e & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Modélisation (4×1Q) avec variation en fonction de la charge

Le modèle (4.27) pour les échantillons (k) s'écrit $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{(4 \times 1Q)(k)} \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)}$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}_{(4 \times 1Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^1 & \mathbf{P}^2 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{P}^2 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^3 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{P}^3 & \mathbf{P}^4 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^4 & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha_1) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1+\alpha_1 & \beta_1 & (1-\alpha_2) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1-\alpha_2 & \beta_2 & \dots \\ \dots & (1+\alpha_3) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1+\alpha_3 & \beta_3 & (1-\alpha_4) \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & 1-\alpha_4 & \beta_4 & \mathbf{F}_V \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (5.70)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)} + \boldsymbol{\rho}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^2 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^3 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^3 \mathbb{1}_e & \mathbf{P}^4 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^4 \mathbb{1}_e & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Modélisation (4×1Q) avec variation en fonction de la charge et de la vitesse

Le modèle (4.26) pour les échantillons (k) s'écrit $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{(4 \times 1Q)(k)} \boldsymbol{\chi}_{(4 \times 1Q)}$, avec :

$$\mathbf{D}_{(4 \times 1Q)(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^1 & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^2 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{P}^2 & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^3 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{P}^3 & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^4 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} & \mathbf{P}^4 & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

et :

$$\begin{aligned} \chi_{(4 \times 1Q)} = & \begin{bmatrix} (1+\alpha_1)\chi_{\text{dyn}}^T & a_1\chi_{\text{dyn}}^T & 1+\alpha_1 & a_1 & \beta_1 & b_1 & \dots \\ \dots & (1-\alpha_2)\chi_{\text{dyn}}^T & a_2\chi_{\text{dyn}}^T & 1-\alpha_2 & a_2 & \beta_2 & b_2 & \dots \\ \dots & (1+\alpha_3)\chi_{\text{dyn}}^T & a_3\chi_{\text{dyn}}^T & 1+\alpha_3 & a_3 & \beta_3 & b_3 & \dots \\ \dots & (1-\alpha_4)\chi_{\text{dyn}}^T & a_4\chi_{\text{dyn}}^T & 1-\alpha_4 & a_4 & \beta_4 & b_4 & F_V \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.73)$$

Lorsque l'on concatène tous les essais, on construit le système linéaire $\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)}\chi_{(4 \times 1Q)} + \mathbf{p}$ avec $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}$ et :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(4 \times 1Q)} = & \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^1 \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^2 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^2 \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^3 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{P}^3 \mathbb{1}_e & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^3 \mathbb{1}_e & \dots \\ \dots & \mathbf{P}^4 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & -\mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} & \mathbf{P}^4 \mathbb{1}_e & \mathbf{E}_{\text{xp}} \mathbf{P}^4 \mathbb{1}_e & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.74)$$

5.6.2. Méthode d'identification en multi-axes

On considère un robot n-ddl, dont chacun des axes est identifié séparément. Après identification et choix du modèle pour chaque axe j du robot, on retient les valeurs identifiées des paramètres de frottement sec $\dot{q}_{sj}$, α_j et a_j qui seront ensuite fixées dans l'identification multi-axes.

Des mesures sont réalisées en mono-axe et multi-axes, à vide et avec différentes charges extérieures. Soit n_c le nombre de masses ajoutées utilisées dans les mesures pour l'identification et soit $k \in [0 : n_c]$. Pour chaque masse ajoutée, on a les échantillons (k) avec pour chaque axe j la charge extérieure correspondante $\boldsymbol{\tau}_{\text{extj}(k)}$ et la mesure de l'effort d'entrée $\boldsymbol{\tau}_{j(k)}$.

Comme précédemment pour un axe, on définit ici χ_{dyn} le vecteur des c_{dyn} paramètres inertiels de tous les axes. $\mathbf{D}_{\text{dyn}}$ est alors la matrice $(n \times c_{\text{dyn}})$ qui correspond à χ_{dyn} et on peut poser : $\boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}} = \mathbf{D}_{\text{dyn}} \chi_{\text{dyn}}$, où $\boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}_1}^T & \dots & \boldsymbol{\tau}_{\text{dyn}_n}^T \end{bmatrix}^T$.

On définit également n paramètres Un_j , associés à l'identification avec $\boldsymbol{\tau}_{\text{extj}(k)}$.

5.6.2.1. Identification du modèle classique

Le modèle classique correspondant aux échantillons (k) peut s'écrire selon le système linéaire $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{\text{usual}(k)} \chi_{\text{usual}}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\text{usual}(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \text{diag}(\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})) & \text{diag}(\dot{\mathbf{q}}) & \mathbb{I}_n & \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \mathbf{F}_{C1} \dots \mathbf{F}_{Cn} & \mathbf{F}_{V1} \dots \mathbf{F}_{Vn} & \boldsymbol{\tau}_{\text{off}1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\text{off}n} & \mathbf{Un}_1 \dots \mathbf{Un}_n \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.75)$$

et avec :

- $\mathbb{I}_n$ la matrice unité ($n \times n$),
- la fonction *diag* définie en 5.5.5.1,
- $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \begin{bmatrix} \tau_{1(k)} & \dots & \tau_{n(k)} \end{bmatrix}^T$,
- $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)} = \begin{bmatrix} \tau_{\text{ext}1(k)} & \dots & \tau_{\text{ext}n(k)} \end{bmatrix}^T$.

Pour l'identification, on concatène tous les essais en prenant le système linéaire suivant : $\mathbf{Y}_{\text{usual}} = \mathbf{W}_{\text{usual}} \boldsymbol{\chi}_{\text{usual}} + \boldsymbol{\rho}$.

Le vecteur des mesures $\mathbf{Y}_{\text{usual}}$ est défini par :

$$\mathbf{Y}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{1(0)}^T \dots \boldsymbol{\tau}_{1(n_c)}^T & \boldsymbol{\tau}_{2(0)}^T \dots \boldsymbol{\tau}_{2(n_c)}^T & \dots & \boldsymbol{\tau}_{n(0)}^T \dots \boldsymbol{\tau}_{n(n_c)}^T \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\tau} \quad (5.76)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{j(k)}$ est le vecteur des efforts d'entrée de l'axe j , de tous les échantillons (k).

La matrice d'observation $\mathbf{W}_{\text{usual}}$ est définie par :

$$\mathbf{W}_{\text{usual}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{dyn}} & \mathbf{W}_{\text{Fc}} & \mathbf{W}_{\text{Fv}} & \mathbf{W}_{\text{off}} & \mathbf{W}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\text{Fc}} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}_1) & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_{\text{Fv}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dot{\mathbf{q}}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dot{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_{\text{off}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_e & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbb{1}_e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \dots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \mathbb{1}_e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.78)$$

où $\dot{\mathbf{q}}_j$ est le vecteur des vitesses de l'axe j pour les e échantillons, $\mathbb{1}_e$ est le vecteur unitaire ($e \times 1$), et $\mathbf{0}_{(e \times 1)}$ est le vecteur colonne nul de dimension e .

Et avec :

$$\mathbf{W}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}1(0)} & & & \\ \vdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \cdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}1(n_c)} & & & \\ & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}2(0)} & & \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}2(n_c)} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} \\ & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}n(0)} \\ \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \cdots & \mathbf{0}_{(e \times 1)} & \vdots \\ & & & \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}n(n_c)} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}j(k)}$ est le vecteur des efforts extérieurs chargeant l'axe j , de tous les échantillons (k).

5.6.2.2. Identification du nouveau modèle

Le nouveau modèle correspondant aux échantillons (k) peut s'écrire selon le système linéaire $\boldsymbol{\tau}_{(k)} = \mathbf{D}_{\text{new}(k)} \boldsymbol{\chi}_{\text{new}}$ avec :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\text{new}(k)} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{D}_{\text{dyn}} & \mathbf{D}_{\text{frott}} & \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \text{diag}(\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}(k)}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\chi}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}^T & \boldsymbol{\chi}_{\text{frott}_1}^T \cdots \boldsymbol{\chi}_{\text{frott}_n}^T & \mathbf{U}n_1 \cdots \mathbf{U}n_n \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.80)$$

où :

- $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur ($n \times 1$) dont chaque terme λ_j dépend du modèle de frottement sec choisi pour l'axe j et des paramètres déjà connus,
- $\mathbf{D}_{\text{frott}}$ est une matrice dépendant des vitesses, des signes des puissances, et des vitesses de Stribeck,
- $\boldsymbol{\chi}_{\text{dyn}}$ est le vecteur ($c_{\text{dyn}} \times 1$) des paramètres inertiels,
- $\boldsymbol{\chi}_{\text{frott}_j}$ est un vecteur qui dépend du modèle de frottement sec choisi pour l'axe j .

On note $\mathbf{D}_{\text{frott}_j}$ la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{D}_{\text{frott}}$ et on définit le vecteur $\mathbf{0}_{<j}$ (respectivement le vecteur $\mathbf{0}_{>j}$) : vecteur ligne nul dont la dimension dépend des modèles de frottement sec des axes précédant (respectivement succédant) l'axe j . Selon le type de modèle de frottement sec choisi pour l'axe j , les termes λ_j , $\boldsymbol{\chi}_{\text{frott}_j}$ et $\mathbf{D}_{\text{frott}_j}$ sont définis par :

$$(1 \times 4Q) / \text{charge} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = 1 + \alpha_j \text{sign}(P_j) \\ \boldsymbol{\chi}_{\text{frott}_j} = [\boldsymbol{\beta}_j \quad F_{vj} \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{off}j}]^T \\ \mathbf{D}_{\text{frott}_j} = [\mathbf{0}_{<j} \quad \text{sign}(\dot{q}_j) \quad \dot{q}_j \quad 1 \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.81)$$

$$(1 \times 4Q) / \text{charge} + \text{vitesse} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = 1 + (\alpha_j + a_j E_{xpj}) \text{sign}(P_j) \\ \mathbf{x}_{frottj} = [\beta_j \quad b_j \quad F_{Vj} \quad \tau_{offj}]^T \\ \mathbf{D}_{frottj} = [\mathbf{0}_{<j} \quad \text{sign}(\dot{q}_j) \quad E_{xpj} \text{sign}(\dot{q}_j) \quad \dot{q}_j \quad 1 \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.82)$$

$$(2 \times 2Q) / \text{charge} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = P_j^+ (1 + \alpha_{mj}) + P_j^- (1 - \alpha_{gj}) \\ \mathbf{x}_{frottj} = [\beta_{mj} \quad \tau_{offmj} \quad \beta_{gj} \quad \tau_{offgj} \quad F_{Vj}]^T \\ \mathbf{D}_{frottj} = [\mathbf{0}_{<j} \quad P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) \quad P_j^+ \quad P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) \quad P_j^- \quad \dot{q}_j \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.83)$$

$$(2 \times 2Q) / \text{charge} + \text{vitesse} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = P_j^+ (1 + \alpha_{mj} + a_{mj} E_{xpj}) + P_j^- (1 - \alpha_{gj} - a_{gj} E_{xpj}) \\ \mathbf{x}_{frottj} = [\beta_{mj} \quad b_{mj} \quad \tau_{offmj} \quad \beta_{gj} \quad b_{gj} \quad \tau_{offgj} \quad F_{Vj}]^T \\ \mathbf{D}_{frottj} = [\mathbf{0}_{<j} \quad P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) \quad E_{xpj} P_j^+ \text{sign}(\dot{q}_j) \quad P_j^+ \quad \dots \\ \dots \quad P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) \quad E_{xpj} P_j^- \text{sign}(\dot{q}_j) \quad P_j^- \quad \dot{q}_j \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.84)$$

$$(4 \times 1Q) / \text{charge} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = P_j^1 (1 + \alpha_{1j}) + P_j^2 (1 - \alpha_{2j}) + P_j^3 (1 + \alpha_{3j}) + P_j^4 (1 - \alpha_{4j}) \\ \mathbf{x}_{frottj} = [\beta_{1j} \quad \beta_{2j} \quad \beta_{3j} \quad \beta_{4j} \quad F_{Vj}]^T \\ \mathbf{D}_{frottj} = [\mathbf{0}_{<j} \quad P_j^1 \quad -P_j^2 \quad -P_j^3 \quad P_j^4 \quad \dot{q}_j \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.85)$$

$$(4 \times 1Q) / \text{charge} + \text{vitesse} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_j = P_j^1 (1 + \alpha_{1j} + a_{1j} E_{xpj}) + P_j^2 (1 - \alpha_{2j} - a_{2j} E_{xpj}) + \dots \\ \dots P_j^3 (1 + \alpha_{3j} + a_{3j} E_{xpj}) + P_j^4 (1 - \alpha_{4j} - a_{4j} E_{xpj}) \\ \mathbf{x}_{frottj} = [\beta_{1j} \quad b_{1j} \quad \beta_{2j} \quad b_{2j} \quad \beta_{3j} \quad b_{3j} \quad \beta_{4j} \quad b_{4j} \quad F_{Vj}]^T \\ \mathbf{D}_{frottj} = [\mathbf{0}_{<j} \quad P_j^1 \quad E_{xpj} P_j^1 \quad -P_j^2 \quad -E_{xpj} P_j^2 \quad \dots \\ \dots \quad -P_j^3 \quad -E_{xpj} P_j^3 \quad P_j^4 \quad E_{xpj} P_j^4 \quad \dot{q}_j \quad \mathbf{0}_{>j}] \end{cases} \quad (5.86)$$

L'identification du nouveau modèle avec tous les échantillons, avec et sans masse ajoutée, se fait en concaténant tous les essais pour obtenir le système linéaire suivant :

$$\mathbf{Y}_{\text{new}} = \mathbf{Y}_{\text{usual}} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}_{\text{new}} \boldsymbol{\chi}_{\text{new}} + \boldsymbol{\rho}.$$

La méthode de concaténation pour $\mathbf{W}_{\text{new}}$ est similaire à celle utilisée pour le modèle classique en 5.6.2.1.

5.7. Conclusion

La démarche d'identification du nouveau modèle dynamique d'un robot multi-axes peut être résumée comme suit :

- Identification mono-axe :
 - o Faire des mesures axe par axe avec des trajectoires de type paliers de vitesse afin d'estimer la vitesse de Stribeck $\dot{q}_s$ pour chaque axe ;
 - o Réaliser diverses trajectoires axe par axe avec différentes vitesses, accélérations et charges : les mesures de l'axe considéré doivent être prises dans les 4 quadrants de fonctionnement de la transmission, dans le plan $(\dot{q}, \tau_{load})$;
 - o Identifier chaque axe séparément avec le modèle $(4 \times 1Q)$ où le frottement sec est fonction de la charge et de la vitesse, en fixant la valeur de $\dot{q}_s$ obtenue précédemment ;
 - o Pour chaque axe, si les paramètres de frottement sec variant avec la vitesse sont négligeables, les supprimer du modèle d'identification de l'axe considéré ;
 - o Pour chaque axe, comparer les valeurs des paramètres de frottement sec entre les différents quadrants et simplifier éventuellement par le modèle $(2 \times 2Q)$, voire le modèle $(1 \times 4Q)$.
- Identification multi-axes :
 - o Réaliser des trajectoires multi-axes avec différentes vitesses, accélérations et charges ;
 - o Identifier le modèle dynamique global en choisissant pour chaque axe le modèle le plus adapté et en fixant les valeurs des paramètres de frottement sec obtenues lors de l'identification mono-axe ;
 - o Valider le modèle en comparant l'effort d'entrée mesuré et l'effort d'entrée simulé par le modèle.

Le nouveau modèle dynamique avec le modèle de frottement sec proposé a été identifié avec succès sur différents prototypes et robots. Par comparaison avec le modèle classique, on a pu observer qu'il apporte une amélioration significative pour les articulations avec des variations de charge importantes. Les robots portant différentes masses ou ayant de fortes variations inertielles sont concernés. Pour certaines transmissions, l'apport est d'autant plus important aux vitesses faibles grâce à la modélisation de l'effet Stribeck.

Le processus d'identification nécessite des mesures plus complètes que celles prises habituellement pour identifier le modèle classique : plus grande gamme de vitesses, différentes charges. Cependant, la méthode des moindres carrés linéaires est conservée et l'identification n'est donc pas plus complexe.

Une synthèse sur la méthode d'identification a été proposée pour les robots mono-axes et multi-axes, valable quelle que soit la complexité choisie pour le modèle de frottement sec.

Conclusion générale

Bilan

L'objectif de ce travail était de proposer un nouveau modèle dynamique plus précis qui pourra être utilisé en détection d'anomalie ou en observation des efforts dans les nouvelles applications telles que la téléopération et la cobotique. L'accent a été mis sur la recherche d'un modèle de frottement sec adapté à ces applications.

Après une présentation du modèle dynamique inverse classique et de la méthode d'identification au premier chapitre, un état de l'art des modèles de frottement a été réalisé. Ces deux chapitres ont servi de base pour la suite de la thèse.

Une étude expérimentale réalisée sur divers axes de robots a permis de caractériser un nouveau modèle de frottement sec de la transmission articulaire. Celui-ci combine la variation du frottement sec par rapport à la charge du modèle de Coulomb, et la variation par rapport à la vitesse du modèle de Stribeck. Trois niveaux de complexité sont proposés. Ce modèle de frottement a été intégré dans le modèle dynamique des robots multi-axes, en conservant la linéarité du modèle par rapport aux nouveaux paramètres d'inertie et de frottement.

Ce modèle a été validé expérimentalement en identifiant 7 cas mono-axe et un cas multi-axes (4 axes du robot Stäubli TX40). Les résultats montrent que l'objectif est atteint : on observe une amélioration globale entre 30% et 50% pour des robots avec des variations moyennes de charge : 2 kg pour le TX40, 7 kg pour le RX130L et 15 kg pour l'EMPS. Le modèle s'avère donc indispensable pour les robots à très forte variation de charge tels que certains robots Kuka ou ABB (charge de plus de 300 kg).

L'intérêt relatif du modèle avec variations par rapport à la charge et à la vitesse dépend de 2 facteurs : le type de transmission et sa lubrification, et le domaine d'utilisation du robot. En effet, selon les transmissions, l'effet Stribeck n'est pas toujours significatif et la variation par rapport à la charge est plus ou moins importante. D'autre part, le rapport entre l'effort de frottement et l'effort inertiel est à considérer car l'effet de la charge peut être peu visible sur des applications à forte dynamique.

Pour les applications telles que la téléopération et la cobotique, les mouvements du robot s'effectuent à vitesse lente et à charge variable, d'où la nécessité du nouveau modèle dynamique avec modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse. Un modèle plus précis permet une meilleure détection de collisions (plus rapide et plus sûre) d'un robot téléopéré avec son environnement matériel et humain, sans utiliser de capteur. Dans le cadre de la cobotique, telle que pour l'orthèse ABLE du CEA, un modèle plus fin permet de mieux estimer les efforts entre le robot et l'opérateur.

Les résultats obtenus ouvrent donc des perspectives.

Perspectives

Le modèle dynamique identifié pourra être utilisé pour la détection d'anomalie ou l'observation des efforts. Des premiers tests de détection de collision, non présentés dans cette thèse, ont été réalisés sur l'axe 3 du RX130L. Les résultats semblaient satisfaisants, mais aucune méthode de validation n'a pu être mise en place. Afin de quantifier l'intérêt du nouveau modèle pour la détection de collision et l'observation des efforts d'interaction, il serait intéressant de réaliser une étude sur un robot équipé de capteurs d'efforts, en comparant les efforts extérieurs estimés par le modèle aux efforts mesurés par les capteurs.

Des améliorations peuvent encore être apportées au modèle de frottement sec, en particulier pour mieux modéliser l'effet Stribeck, ou encore pour ajouter la variation du frottement en fonction de la température (à condition d'avoir un capteur approprié).

D'autre part, la question des transmissions irréversibles se pose : la méthode d'identification proposée n'est plus applicable dans ce cas puisqu'on ne peut plus estimer le signe de l'effort de charge par le signe de l'effort d'entrée.

Enfin, un autre aspect non abordé ici est la modélisation du frottement sec pour les axes couplés soumis à des variations de charge, tels que les 2 premiers axes de l'orthèse ABLE du CEA ou ceux des poignets de robots.

Il reste donc encore de nombreuses pistes à explorer.

Bibliographie

[Abba 2003] : G. Abba et P. Sardain, “Modélisation des frottements dans les éléments de transmission d'un axe de robot en vue de son identification”, *Mécanique & Industries*, vol. 4(4), pp. 391-396, 2003.

[Amontons 1699] : G. Amontons, “De la résistance causée dans les machines”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1699.

[Areva] : Site internet d'Areva, <http://www.areva.com/>.

[Armstrong-Hélouvry 1991] : B. Armstrong-Hélouvry, “Control of Machines with Friction”, *Springer*, Boston, 1991.

[Bélicor 1737] : B.F. Bélicor, “Architecture hydraulique, ou l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie” (Tome 1), *Charles-Antoine Jombert, Libraire de l'Artillerie & du Génie*, chap. 2, 1737-1739.

[Bittencourt 2010] : A.C. Bittencourt, E. Wernholt, S. Sander-Tavallaey et T. Brogårdh, “An Extended Friction Model to capture Load and Temperature effects in Robots Joints”, *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp. 6161-6167, Octobre 2010.

[Bliman 1993] : P.A. Bliman et M. Sorine, “A System-Theoretic Approach of Systems with Hysteresis - Application to Friction Modelling and Compensation”, *Proc. second European Control Conference*, Groningen, Pays-Bas, pp. 1844-1849, 1993.

[Bogdan 2010] : I.C. Bogdan, “Modélisation et commande de systèmes linéaires de micropositionnement : application à la production de micro-composants électroniques”, *Thèse de doctorat*, Université Paul Verlaine de Metz, 2010.

[Canudas 1995] : C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Åström et P. Lischinsky, “A New Model for Control of Systems with Friction”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 40(3), pp. 419-425, Mars 1995.

[Chaillet 1994] : N. Chaillet, G. Abba et E. Ostertag, “Double Dynamic Modelling and Computed-Torque Control of a Biped Robot”, *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 'Advanced Robotics Systems and the Real Word'*, Munich, Allemagne, vol. 2, pp. 1149-1155, Septembre 1994.

[Coulomb 1821] : C.A. Coulomb, “Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et a la roideur des cordages” (Nouvelle édition), *Bachelier (Paris)*, 1821.

[Dahl 1968] : P.R. Dahl, “A Solid Friction Model”, *The Aerospace Corporation*, pp. 3107-3118, Mai 1968.

[Dohring 1993] : M.E. Dohring, E. Lee et W.S. Newman, “A Load-Dependent Transmission Friction Model: Theory and Experiments”, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Atlanta, Etats-Unis, vol. 3, pp. 430-436, Mai 1993.

- [El Yaaqoubi 2009] : N.L. El Yaaqoubi et G. Abba, "Identification of Physical Parameters including Ground Model Parameters of Walking Robot Rabbit", *IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoid Robots*, Paris, France, pp. 269-276, Décembre 2009.
- [Garrec 2002] : P. Garrec, "Téléopération et télérobotique", *Hermès*, Paris, France, chap. 2 "Systèmes mécaniques", 2002.
- [Garrec 2004a] : P. Garrec, J.P. Friconneau et F. Louveau, "Virtuose 6D: A New Force-Control Master Arm using Innovative Ball-Screw Actuators", *Proc. Int. Symposium on Robotics*, Paris, Mars 2004.
- [Garrec 2004b] : P. Garrec, J.P. Martins et J.P. Friconneau, "Une nouvelle technologie d'orthèse portable", *Handicap 2004*, Paris, Juin 2004.
- [Garrec 2005] : P. Garrec, G. Piolain, S. Lamy-Perbal et J.P. Friconneau, "The Telerobotics System MT200-TAO Replaces Mechanical Telemanipulators in COGEMA/AREVA-La Hague Hot Cells", *European Nuclear Conference*, Versailles, Décembre 2005.
- [Garrec 2008] : P. Garrec, J.P. Friconneau, Y. Measson et Y. Perrot, "ABLE, an Innovative Transparent Exoskeleton for the Upper-Limb", *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Nice, France, pp. 1483-1488, Septembre 2008.
- [Garrec 2010] : P. Garrec, "Screw and Cable Actuators (SCS) and their Applications to Force Feedback Teleoperation, Exoskeleton and Anthropomorphic Robotics", *Robotics 2010 Current and Future Challenges*, Houssem Abdellatif (Ed.), 2010.
- [Garrec CEA] : P. Garrec, "Transfert d'effort dans les chaînes cinématiques - Modélisation, représentation graphique et applications", *Rapport interne 06RT007*, CEA-DRT/LIST/DIASI/LRI Fontenay-aux-Roses.
- [Gautier 1990a] : M. Gautier, "Contribution à la modélisation et à l'identification des robots", *Thèse d'état*, Université de Nantes, 1990.
- [Gautier 1990b] : M. Gautier et W. Khalil, "Direct Calculation of Minimum Set of Inertial Parameters of Serial Robots", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 6(3), pp. 368-373, Juin 1990.
- [Gautier 1991] : M. Gautier, "Numerical Calculation of the Base Inertial Parameters", *Journal of Robotics Systems*, vol. 8(4), pp. 485-506, Août 1991.
- [Gautier 1992] : M. Gautier et W. Khalil, "Exciting Trajectories for Inertial Parameter Identification", *Int. J. of Robotics Research*, vol. 11, pp. 362-375, 1992.
- [Gautier 1995] : M. Gautier, W. Khalil et P.P. Restrepo, "Identification of the Dynamic Parameters of Serial Robots", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Nagoya, Japon, pp. 3045-3050, Mai 1995.
- [Gautier 1997] : M. Gautier, "Dynamic Identification of Robots with Power Model", *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Albuquerque, Etats-Unis, pp. 1922-1927, 1997.

- [Gautier 2002a] : M. Gautier et W. Khalil, “La commande des robots manipulateurs”, *Hermès série IC2*, chap. 4 “Identification des paramètres des modèles”, 2002.
- [Gautier 2002b] : M. Gautier et P. Poignet, “Identification en boucle fermée par modèle inverse des paramètres physiques de systèmes mécatronique”, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 36(3), pp. 465-480, 2002.
- [Gautier 2011] : M. Gautier, P.O. Vandanjon et A. Janot, “Dynamic Identification of a 6 dof Robot Without Joint Position Data”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Shanghai, Chine, Mai 2011.
- [Geffard 2000] : F. Geffard, “Etude et conception de la commande en effort d'un télémanipulateur équipé d'un capteur d'efforts à sa base et à son extrémité”, *Thèse de doctorat*, Université de Nantes, 2000.
- [Gogoussis 1988] : A. Gogoussis et M. Donath, “Coulomb Friction Effects en the Dynamics of Bearings and Transmission in Precision Robot Mechanisms”, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Philadelphie, Etats-Unis, vol. 3, pp. 1440-1446, Avril 1988.
- [Haessig 1991] : D.A. Haessig et B. Friedland, “On the Modeling and Simulation of Friction”, *Trans. of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 113, pp. 354-362, Septembre 1991.
- [Hamon 2010a] : P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, “Identification dynamique de robots avec un modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse”, *Conf. Int. Francophone d'Automatique*, Nancy, France, Juin 2010.
- [Hamon 2010b] : P. Hamon, M. Gautier, P. Garrec et A. Janot, “Dynamic Identification of Robot with a Load-Dependent Joint Friction Model”, *IEEE Int. Conf. on Robotics, Automation and Mechatronics*, Singapour, pp. 129-135, Juin 2010.
- [Hamon 2010c] : P. Hamon, M. Gautier, P. Garrec et A. Janot, “Dynamic Modeling and Identification of Joint Drive with Load-Dependent Friction Model”, *IEEE Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, Montreal, Canada, pp. 902-907, Juillet 2010.
- [Hamon 2010d] : P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, “Dynamic Identification of Robots with a Dry Friction Model Depending on Load and Velocity”, *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp. 6187-6193, Octobre 2010.
- [Hamon 2011] : P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, “New Dry Friction Model with Load- and Velocity-Dependence and Dynamic Identification of Multi-DOF Robots”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Shanghai, Chine, Mai 2011.
- [Harmonic Drive] : Site internet d'Harmonic Drive AG, <http://www.harmonicdrive.de/>.
- [Hayward 2000] : V. Hayward et B. Armstrong, “A New Computational Model of Friction Applied to Haptic Rendering”, *Experimental Robotics VI*, P. Corke and J. Trevelyan Eds, Springer, New-York, pp. 403-412, 2000.

- [Henriot 1979] : G. Henriot, "Traité théorique et pratique des engrenages", *Dunod*, Paris, France, 1979.
- [Hollerbach 2008] : J. Hollerbach, W. Khalil et M. Gautier, "Handbook of Robotics", *Springer*, chap. 14 "Model Identification", pp. 321-344, 2008.
- [Janot 2007] : A. Janot, "Contribution à la modélisation et à l'identification des interfaces haptiques", *Thèse de doctorat*, Université de Nantes, 2007.
- [Kermani 2005] : M.R. Kermani, R.V. Patel et M. Moallem, "Friction Identification in Robotic Manipulators: Case Studies", *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*, Toronto, Canada, pp. 1170-1175, Août 2005.
- [Khalil 1986] : W. Khalil et J.F. Kleinfinger, "A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, San Francisco, Etats-Unis, pp. 1147-1180, Avril 1986.
- [Khalil 1997] : W. Khalil et D. Creusot, "SYMORO+: A System for the Symbolic Modelling of Robots", *Robotica*, vol. 15, pp. 153-161, 1997.
- [Khalil 2002] : W. Khalil et E. Dombre, "Modeling, Identification and Control of Robots", *Hermès Penton*, Londres, 2002.
- [Khalil 2007] : W. Khalil, M. Gautier et P. Lemoine, "Identification of the Payload Inertial Parameters of Industrial Manipulators", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Rome, Italie, pp. 4943-4948, Avril 2007.
- [Márton 2007] : L. Márton et B. Lantos, "Modeling, Identification, and Compensation of Strick-Slip Friction", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 54(1), pp. 511-521, Février 2007.
- [Mathworks] : Site internet de Mathworks, <http://www.mathworks.com/>.
- [Mayeda 1990] : H. Mayeda, K. Yoshida et K. Osuka, "Base Parameters of Manipulator Dynamic Models", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 6(3), pp. 312-321, Juin 1990.
- [Olsson 1998] : H. Olsson, K.J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert et P. Lischinsky, "Friction Models and Friction Compensation", *Eur. J. of Control*, vol. 4(3), pp. 176-195, 1998.
- [Palaci 2007] : I. Palaci, "Atomic Force Microscopy Studies of Nanotribology and Nanomechanics", *Thèse de doctorat*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [Pelchen 2002] : C. Pelchen, C. Schweiger et M. Otter, "Modeling and Simulating the Efficiency of Gearboxes and of Planetary Gearboxes", *Proc. second International Modelica Conference*, Oberpfaffenhofen, Allemagne, pp. 257-266, Mars 2002.

[Pressé 1993] : C. Pressé et M. Gautier, “New Criteria of Exciting Trajectories for Robot Identification”, *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Atlanta, Etats-Unis, pp. 907-912, 1993.

[Restrepo 1995] : P.P. Restrepo et M. Gautier, “Calibration of Drive Chain of Robots Joints”, *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*, Albany, Etats-Unis, pp. 526-531, Septembre 1995.

[Restrepo 1996] : P.P. Restrepo, “Contribution à la modélisation, identification et commande des robots à structures fermées : application au robot ACMA SR400”, *Thèse de doctorat*, Université de Nantes, 1996.

[Spenlé 2007] : D. Spenlé et R. Gourhant, “Guide du calcul en mécanique”, *Hachette Technique*, 2007.

[Stäubli] : Site internet de Stäubli France, <http://www.staubli.fr/>.

[Swevers 2000] : J. Swevers, F. Al-Bender, C.G. Ganseman et T. Prajogo, “An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45(4), pp. 675-686, Avril 2000.

[Thiery 2005] : S. Thiery, “Modélisation et compensation des frottements dans un moteur linéaire”, *Technical report*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

[Wikibooks] : Livre traitant de la tribologie sur le site internet Wikibooks, <http://fr.wikibooks.org/wiki/Tribologie>.

[Wills 1980] : J.G. Wills, “Lubrication Fundamentals”, *Marcel Dekker Inc.*, 1980.

Publications de l'auteur

Conférences internationales avec comité de lecture

P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, "Identification dynamique de robots avec un modèle de frottement sec fonction de la charge et de la vitesse", *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010)*, Nancy, France, 2-4 Juin 2010.

P. Hamon, M. Gautier, P. Garrec et A. Janot, "Dynamic Identification of Robot with a Load-Dependent Joint Friction Model", *IEEE International Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM 2010)*, Singapour, pp. 129-135, 28-30 Juin 2010.

P. Hamon, M. Gautier, P. Garrec et A. Janot, "Dynamic Modeling and Identification of Joint Drive with Load-Dependent Friction Model", *IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2010)*, Montreal, Canada, pp. 902-907, 6-9 Juillet 2010.

P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, "Dynamic Identification of Robots with a Dry Friction Model Depending on Load and Velocity", *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2010)*, Taipei, Taiwan, pp. 6187-6193, 18-22 Octobre 2010.

P. Hamon, M. Gautier et P. Garrec, "New Dry Friction Model with Load- and Velocity-Dependence and Dynamic Identification of Multi-DOF Robots", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2011)*, Shanghai, Chine, 9-13 Mai 2011.

Annexes

Annexe 1 : Formalisme de Newton-Euler pour le calcul du modèle dynamique

Les équations de Newton-Euler expriment le torseur dynamique en G_j des efforts extérieurs sur un corps j par les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_{Gj} \\ \mathbf{M}_{Gj} = \mathbf{I}_{Gj} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{I}_{Gj} \boldsymbol{\omega}_j) \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

où $\mathbf{F}_j$ est la résultante des forces extérieures sur le corps C_j et $\mathbf{M}_{Gj}$ est le moment résultant des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de G_j .

A partir de ces équations et une méthode de double récurrence, il est possible d'obtenir le modèle dynamique inverse, mais sous une forme non linéaire par rapport aux paramètres inertiels.

Un autre algorithme de Newton-Euler est proposé par [Khalil 2002], basé sur le torseur dynamique des efforts extérieurs en O_j plutôt que G_j et en utilisant les paramètres inertiels M_j , $\mathbf{MS}_j$ et $\mathbf{J}_j$. Le modèle ainsi calculé est linéaire par rapport aux paramètres inertiels. Les équations de Newton-Euler modifiées s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times \mathbf{MS}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j) \\ \mathbf{M}_j = \mathbf{J}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j) \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

où $\mathbf{M}_j$ est le moment des efforts extérieurs exercés sur le corps C_j autour de O_j .

L'algorithme de Newton-Euler est fondé sur une double récurrence.

1) Récurrence avant : calcul de la base du robot vers l'effecteur

Elle permet de calculer $\mathbf{F}_j$ et $\mathbf{M}_j$ à partir des relations (A1.2). Pour ce faire, il faut calculer $\boldsymbol{\omega}_j$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ et $\dot{\mathbf{V}}_j$. Les formules de compositions des vitesses donnent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \\ \mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

où $\mathbf{a}_j$ est le vecteur unitaire suivant $\mathbf{z}_j$.

En dérivant les équations (A1.3), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_j = \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \omega_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \\ \dot{\mathbf{V}}_j = \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \omega_{j-1} \times (\omega_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \omega_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \\ = \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \omega_{j-1} \times (\omega_{j-1} \times \mathbf{L}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + 2\omega_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j) \end{cases} \quad (\text{A1.4})$$

Lorsque la base est fixe, on initialise cette récurrence par $\omega_0 = \mathbf{0}$, $\dot{\omega}_0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$. On calcule finalement $\mathbf{F}_j$ et $\mathbf{M}_j$ avec les équations (A1.2).

2) Récurrence arrière : calcul de l'effecteur vers la base du robot

Les équations composant la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine O_j . On obtient (Figure 1-1) :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_j = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{M}_j \mathbf{g} - \mathbf{f}_{ej} \\ \mathbf{M}_j = \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_{j+1} - \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{S}_j \times \mathbf{M}_j \mathbf{g} - \mathbf{m}_{ej} \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

où :

- $\mathbf{f}_j$ est la résultante du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par son antécédent et par l'actionneur j ;
- $\mathbf{f}_{ej}$ est la résultante du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement ;
- $\mathbf{m}_j$ est le moment du torseur dynamique exercé sur le corps C_j par son antécédent et par l'actionneur autour de O_j ;
- $\mathbf{m}_{ej}$ est le moment du torseur dynamique exercé par le corps C_j sur l'environnement autour de O_j .

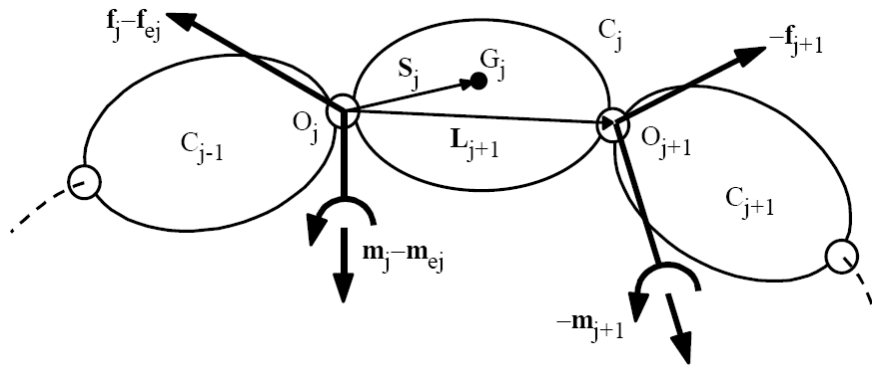


Figure 1-1 : Bilan des efforts au centre de gravité

A partir des premières équations de (A1.2) et (A1.5), on déduit que l'on peut faire intervenir l'effet de la gravité sans avoir à la prendre en compte explicitement dans le bilan des efforts des corps en prenant :

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad (\text{A1.6})$$

d'où l'on tire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{f}_{ej} \\ \mathbf{m}_j = \mathbf{M}_j + \mathbf{m}_{j+1} + \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{m}_{ej} \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

La récurrence est initialisée par les efforts $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{0}$.

On obtient alors les efforts des actionneurs τ_{inj} en projetant, suivant la nature de l'articulation j , les vecteurs $\mathbf{f}_j$ ou $\mathbf{m}_j$ sur l'axe du mouvement. On ajoute enfin les termes représentant l'effet des frottements et des inerties des actionneurs, ce qui donne :

$$\tau_{inj} = (\sigma_j \mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j \mathbf{m}_j)^T \mathbf{a}_j + \tau_{frottj} + I a_j \ddot{q}_j \quad (A1.8)$$

On déduit des équations (A1.7) que $\mathbf{f}_j$ et $\mathbf{m}_j$ ne dépendent que des paramètres inertiels du corps j et de ceux des corps situés en aval qui sont introduits par $\mathbf{f}_{j+1}$ et $\mathbf{m}_{j+1}$ de la récurrence.

Annexe 2 : Méthodes littérale et numérique pour le calcul des paramètres de base

On présente ici deux méthodes permettant de calculer un jeu minimal de paramètres inertiels, appelés paramètres de base, caractérisant complètement le modèle dynamique. L'utilisation de ces paramètres dans le calcul du modèle dynamique diminue sa complexité. En outre, cette étape est un préliminaire indispensable pour l'évaluation par identification des paramètres inertiels, les paramètres de base constituant les seuls paramètres identifiables. Ils sont obtenus à partir des paramètres standard en éliminant ceux qui n'ont pas d'effet sur le modèle dynamique et en regroupant certains autres entre eux. On expose ci-dessous une méthode formelle basée sur l'énergie des corps du robot, puis une méthode numérique.

Méthode formelle [Khalil 2002], [Gautier 1990a], [Mayeda 1990]

L'énergie totale du corps j , qui est linéaire par rapport aux paramètres inertiels, s'écrit sous la forme :

$$H_j = E_j + U_j = \mathbf{h}_j \boldsymbol{\chi}_{sj} = (\mathbf{e}_j + \mathbf{u}_j) \boldsymbol{\chi}_{sj} \quad (\text{A2.1})$$

avec :

- $\boldsymbol{\chi}_{sj} = [XX_j \quad XY_j \quad XZ_j \quad YY_j \quad YZ_j \quad ZZ_j \quad MX_j \quad MY_j \quad MZ_j \quad M_j]^T$ le vecteur des paramètres standard du corps j (le paramètre Ia_j n'est pas considéré dans un premier temps),
- $\mathbf{h}_j = [h_{XXj} \quad h_{XYj} \quad h_{XZj} \quad h_{YYj} \quad h_{YZj} \quad h_{ZZj} \quad h_{MXj} \quad h_{MYj} \quad h_{MZj} \quad h_{Mj}]$ la matrice ligne (1×10) des fonctions d'énergie correspondant aux paramètres inertiels du corps j ,
- $\mathbf{e}_j$ la matrice ligne (1×10) des fonctions d'énergie cinétique correspondant aux paramètres inertiels du corps j ,
- $\mathbf{u}_j$ la matrice ligne (1×10) des fonctions d'énergie potentielle correspondant aux paramètres inertiels du corps j .

Les éléments de $\mathbf{h}_j$ s'obtiennent à partir des relations (1.17) paragraphe 1.3.2.4 et (1.19) paragraphe 1.3.2.5 et s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{XXj} = \frac{1}{2} \omega_{1,j} \omega_{1,j} \\ h_{XYj} = \omega_{1,j} \omega_{2,j} \\ h_{XZj} = \omega_{1,j} \omega_{3,j} \\ h_{YYj} = \frac{1}{2} \omega_{2,j} \omega_{2,j} \\ h_{YZj} = \omega_{2,j} \omega_{3,j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{ZZj} = \frac{1}{2} \omega_{3,j} \omega_{3,j} \\ h_{MXj} = \omega_{3,j} V_{2,j} - \omega_{2,j} V_{3,j} - {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{s}_j \\ h_{MYj} = \omega_{1,j} V_{3,j} - \omega_{3,j} V_{1,j} - {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{n}_j \\ h_{MZj} = \omega_{2,j} V_{1,j} - \omega_{1,j} V_{2,j} - {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{a}_j \\ h_{Mj} = \frac{1}{2} {}^j \mathbf{V}_j^T {}^j \mathbf{V}_j - {}^0 \mathbf{g}^T {}^0 \mathbf{P}_j \end{array} \right. \quad (\text{A2.2})$$

avec ${}^j \boldsymbol{\omega}_j = [\omega_{1,j} \quad \omega_{2,j} \quad \omega_{3,j}]^T$ et ${}^j \mathbf{V}_j = [V_{1,j} \quad V_{2,j} \quad V_{3,j}]^T$: ${}^j \boldsymbol{\omega}_j$ et ${}^j \mathbf{V}_j$ sont obtenues à partir des équations (A1.3) en exprimant les éléments dans le repère R_j fixe au corps j . On obtient :

$$\begin{cases} {}^j\boldsymbol{\omega}_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j = {}^j\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j \\ {}^j\mathbf{V}_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} \left({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j \right) + \sigma_j \dot{q}_j {}^j\mathbf{a}_j \end{cases} \quad (\text{A2.3})$$

A partir des équations (1.17) paragraphe 1.3.2.4 et (1.19) paragraphe 1.3.2.5, on peut écrire la relation générale de récurrence entre les fonctions d'énergie des corps j et $j-1$:

$$\mathbf{h}_j = \mathbf{h}_{j-1} {}^{j-1}\boldsymbol{\lambda}_j + \dot{q}_j \boldsymbol{\eta}_j \quad (\text{A2.4})$$

avec ${}^{j-1}\boldsymbol{\lambda}_j$ une matrice (10×10) fonction des paramètres géométriques du repère j :

$${}^{j-1}\boldsymbol{\lambda}_j = \begin{bmatrix} C^2\theta & -2CS\theta & 0 & S^2\theta & 0 \\ CS\theta C\alpha & (C^2\theta - S^2\theta)C\alpha & -C\theta S\alpha & -CS\theta C\alpha & S\theta S\alpha \\ CS\theta S\alpha & (C^2\theta - S^2\theta)S\alpha & C\theta C\alpha & -CS\theta S\alpha & -S\theta C\alpha \\ S^2\theta C^2\alpha & 2CS\theta C^2\alpha & -2S\theta CS\alpha & C^2\theta C^2\alpha & -2C\theta CS\alpha \\ S^2\theta CS\alpha & 2CS\theta CS\alpha & S\theta(C^2\alpha - S^2\alpha) & C^2\theta CS\alpha & C\theta(C^2\alpha - S^2\alpha) & \dots \\ S^2\theta S^2\alpha & 2CS\theta S^2\alpha & 2S\theta CS\alpha & C^2\theta S^2\alpha & 2C\theta CS\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2r & r^2 \\ 0 & -dS\theta C\alpha + rC\theta S\alpha & -dS\theta C\alpha - rS\theta S\alpha & dS\alpha & drS\alpha \\ 0 & -dS\theta S\alpha - rC\theta C\alpha & -dC\theta S\alpha + rS\theta C\alpha & -dC\alpha & -drC\alpha \\ S^2\alpha & 2(dC\theta + rS\theta CS\alpha) & 2(-dS\theta + rC\theta CS\alpha) & 2rC^2\alpha & d^2 + r^2C^2\alpha \\ -CS\alpha & rS\theta(S^2\alpha - C^2\alpha) & rC\theta(S^2\alpha - C^2\alpha) & 2rCS\alpha & r^2CS\alpha \\ C^2\alpha & 2(dC\theta - rS\theta CS\alpha) & 2(-dS\theta - rC\theta CS\alpha) & 2rS^2\alpha & d^2 + r^2S^2\alpha \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 & d \\ 0 & S\theta C\alpha & C\theta C\alpha & -S\alpha & -rS\alpha \\ 0 & S\theta S\alpha & C\theta S\alpha & C\alpha & rC\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.5})$$

où tous les paramètres géométriques sont indicés j , et avec les notations : $C^* = \cos(*)$, $S^* = \sin(*)$, $C^2* = \cos^2(*)$, $S^2* = \sin^2(*)$, et $CS^* = \cos(*)\sin(*)$;

et avec le vecteur ligne $\boldsymbol{\eta}_j$ tel que :

$$\boldsymbol{\eta}_j = \bar{\sigma}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{1,j} & 0 & \omega_{2,j} & \omega_{3,j} - \frac{1}{2}\dot{q}_j & V_{2,j} & -V_{1,j} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots \sigma_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{2,j} & \omega_{1,j} & 0 & V_{3,j} - \frac{1}{2}\dot{q}_j \end{bmatrix} \quad (\text{A2.6})$$

La matrice ${}^{j-1}\lambda_j$ permet d'exprimer les paramètres inertiels du corps j dans le repère $j-1$ selon la relation :

$${}^{j-1}\chi_{sj} = {}^{j-1}\lambda_j {}^j\chi_{sj} \quad (A2.7)$$

Pour prendre en compte les inerties des actionneurs, on introduit le paramètre inertiel la_j comme onzième paramètre standard de corps C_j , ce qui porte à $11n$ leur nombre total pour le robot. La matrice $\mathbf{h}_j$ est alors étendue à 11 composantes avec :

$$h_{11,j} = \frac{1}{2} \dot{q}_j^2 \quad (A2.8)$$

Les paramètres de base s'obtiennent à partir des équations de l'énergie :

- Un paramètre inertiel χ_{sj} n'a pas d'effet sur le modèle dynamique si sa fonction d'énergie est constante : $h_j = \text{constante}$. Dans ce cas, on pose $\chi_{sj} = 0$ et le paramètre χ_{sj} est éliminé.
- Un paramètre inertiel χ_{sj} peut être regroupé avec r autres paramètres $\chi_{sj1}, \dots, \chi_{sjr}$ si sa fonction d'énergie est linéaire par rapport aux fonctions de ces paramètres :

$$h_j = \sum_{p=1}^r t_{jp} h_{jp} + \text{constante} \quad (A2.9)$$

où t_{jp} est un coefficient constant. On obtient alors la relation suivante pour chaque paramètre χ_{sjp} ($p \in \llbracket 1 : r \rrbracket$) :

$$\chi_{sjpR} = \chi_{sjp} + t_{jp} \chi_{sj} \quad (A2.10)$$

L'indice R signifie que le paramètre est regroupé avec d'autres paramètres.

L'utilisation des formules de récurrence des vitesses (A2.3), et des expressions (A2.2) de $\mathbf{h}_j$, permet d'établir des règles générales pour déterminer les paramètres qui n'affectent pas le modèle dynamique sans avoir à calculer l'énergie.

A partir de la relation de récurrence (A2.4) entre les fonctions d'énergie $\mathbf{h}_j$ et $\mathbf{h}_{j-1}$, on en déduit les relations de regroupement entre paramètres (différentes selon le type d'articulation : rotoïde ou prismatique).

Finalement, différentes règles sont obtenues afin d'éliminer ou de regrouper des paramètres, pour ne conserver que les paramètres de base. La démarche est donnée ci-après.

Soit r_1 la première articulation rotoïde en partant de la base et r_2 la première articulation rotoïde succédant à l'articulation r_1 et d'axe z_{r2} non parallèle à z_{r1} . On applique pour $j = n, \dots, 1$ les règles suivantes :

- 1) Regrouper les paramètres suivants :
 - o YY_j , MZ_j et M_j si $\sigma_j = 0$, avec les formules :

$$\begin{cases}
 XX_{jR} = XX_j - YY_j \\
 XX_{j-1R} = XX_{j-1} + YY_j + 2r_j MZ_j + r_j^2 M_j \\
 XY_{j-1R} = XY_{j-1} + d_j S\alpha_j MZ_j + d_j r_j S\alpha_j M_j \\
 XZ_{j-1R} = XZ_{j-1} - d_j C\alpha_j MZ_j - d_j r_j C\alpha_j M_j \\
 YY_{j-1R} = YY_{j-1} + C^2\alpha_j YY_j + 2r_j C^2\alpha_j MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 C^2\alpha_j) M_j \\
 YZ_{j-1R} = YZ_{j-1} + CS\alpha_j YY_j + 2r_j CS\alpha_j MZ_j + r_j^2 CS\alpha_j M_j \\
 ZZ_{j-1R} = ZZ_{j-1} + S^2\alpha_j YY_j + 2r_j S^2\alpha_j MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 S^2\alpha_j) M_j \\
 MX_{j-1R} = MX_{j-1} + d_j M_j \\
 MY_{j-1R} = MY_{j-1} - S\alpha_j MZ_j - r_j S\alpha_j M_j \\
 MZ_{j-1R} = MZ_{j-1} + C\alpha_j MZ_j + r_j C\alpha_j M_j \\
 M_{j-1R} = M_{j-1} + M_j
 \end{cases} \quad (A2.11)$$

o $XX_j, XY_j, XZ_j, YY_j, YZ_j$ et ZZ_j si $\sigma_j = 1$, avec les formules :

$$\begin{cases}
 XX_{j-1R} = XX_{j-1} + C^2\theta_j XX_j - 2CS\theta_j XY_j + S^2\theta_j YY_j \\
 XY_{j-1R} = XY_{j-1} + CS\theta_j C\alpha_j XX_j + (C^2\theta_j - S^2\theta_j) C\alpha_j XY_j - C\theta_j S\alpha_j XZ_j \quad \dots \\
 \quad \dots - CS\theta_j C\alpha_j YY_j + S\theta_j S\alpha_j YZ_j \\
 XZ_{j-1R} = XZ_{j-1} + CS\theta_j S\alpha_j XX_j + (C^2\theta_j - S^2\theta_j) S\alpha_j XY_j + C\theta_j C\alpha_j XZ_j \quad \dots \\
 \quad \dots - CS\theta_j S\alpha_j YY_j - S\theta_j C\alpha_j YZ_j \\
 YY_{j-1R} = YY_{j-1} + S^2\theta_j C^2\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j C^2\alpha_j XY_j - 2S\theta_j CS\alpha_j XZ_j \quad \dots \\
 \quad \dots + C^2\theta_j C^2\alpha_j YY_j - 2C\theta_j CS\alpha_j YZ_j + S^2\alpha_j ZZ_j \\
 YZ_{j-1R} = YZ_{j-1} + S^2\theta_j CS\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j CS\alpha_j XY_j + S\theta_j (C^2\alpha_j - S^2\alpha_j) XZ_j \quad \dots \\
 \quad \dots + C^2\theta_j CS\alpha_j YY_j + C\theta_j (C^2\alpha_j - S^2\alpha_j) YZ_j - CS\alpha_j ZZ_j \\
 ZZ_{j-1R} = ZZ_{j-1} + S^2\theta_j S^2\alpha_j XX_j + 2CS\theta_j S^2\alpha_j XY_j + 2S\theta_j CS\alpha_j XZ_j \quad \dots \\
 \quad \dots + C^2\theta_j S^2\alpha_j YY_j + 2C\theta_j CS\alpha_j YZ_j + C^2\alpha_j ZZ_j
 \end{cases} \quad (A2.12)$$

2) Si j est prismatique, $\sigma_j = 1$, pour $r_1 < j < r_2$, on déduit :

o si $\mathbf{a}_j // \mathbf{a}_{r1}$, éliminer MZ_j et regrouper MX_j et MY_j en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases}
 MX_{j-1R} = MX_{j-1} + C\theta_j MX_j - S\theta_j MY_j \\
 MY_{j-1R} = MY_{j-1} + S\theta_j C\alpha_j MX_j + C\theta_j C\alpha_j MY_j \\
 MZ_{j-1R} = MZ_{j-1} + S\theta_j S\alpha_j MX_j + C\theta_j S\alpha_j MY_j \\
 ZZ_{jR} = ZZ_j + 2d_j C\theta_j MX_j - 2d_j S\theta_j MY_j
 \end{cases} \quad (A2.13)$$

o si $\mathbf{a}_j$ n'est pas perpendiculaire ni parallèle à $\mathbf{a}_{r1}$, regrouper MZ_j :

$$\begin{cases} MX_{jR} = MX_j - \frac{{}^j a_{xr1}}{{}^j a_{zr1}} MZ_j \\ MY_{jR} = MY_j - \frac{{}^j a_{yr1}}{{}^j a_{zr1}} MZ_j \end{cases} \quad (A2.14)$$

- o si $\mathbf{a}_j$ est perpendiculaire à $\mathbf{a}_{r1}$ (donc ${}^j a_{zr1} = 0$), éliminer MX_j si la composante ${}^j a_{yr1}$ est nulle, éliminer MY_j si ${}^j a_{xr1}$ est nulle, sinon (pour ${}^j a_{xr1}$ et ${}^j a_{yr1}$ non nulles) regrouper MY_j avec la relation :

$$MX_{jR} = MX_j - \frac{{}^j a_{xr1}}{{}^j a_{yr1}} MY_j \quad (A2.15)$$

- 3) Si $\sigma_j = 0$ et $r_1 \leq j < r_2$, éliminer XX_j , XY_j , XZ_j , et YZ_j qui n'ont pas d'effet.
- 4) Si $\sigma_j = 0$, $r_1 \leq j < r_2$, $\mathbf{a}_j$ est confondu avec $\mathbf{a}_{r1}$, et $\mathbf{a}_{r1} // \mathbf{a}_i // \mathbf{g}$ pour $i < j$, alors éliminer MX_j et MY_j qui n'ont pas d'effet.
- 5) Le paramètre la_j peut être regroupé avec ZZ_j ou M_j dans les cas suivants :
 - o si $j = r_1$
 - o si $j = r_2$ et son axe est perpendiculaire à r_1
 - o si $j \leq r_2$ et que l'axe de la première articulation prismatique, notée p_1 , est perpendiculaire à la gravité et son axe est aligné avec les axes rotoïdes en amont ou $p_1 = 1$.

Méthode numérique [Khalil 2002], [Gautier 1990a], [Gautier 1990b], [Gautier 1991]

La recherche des paramètres inertiels minimaux se ramène à calculer le rang de $\mathbf{W}_{St}$ et à détecter des combinaisons linéaires entre ses colonnes. Pour cela, on utilise la méthode de décomposition QR appliquée à $\mathbf{W}_{St}$ et qui permet d'écrire :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{W}_{St} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{(r-c) \times c} \end{bmatrix} \quad (A2.16)$$

où $\mathbf{Q}$ est une matrice orthogonale de dimension $(r \times r)$ et $\mathbf{R}$ est une matrice triangulaire supérieure de dimension $(c \times c)$

Le rang de la matrice $\mathbf{W}_{St}$ est égal au nombre des paramètres inertiels minimaux b :

$$\text{rang}(\mathbf{W}_{St}) = b \quad (A2.17)$$

Ce rang se détermine par le nombre d'éléments R_{ii} non nuls sur la diagonale de la matrice $\mathbf{R}$. Numériquement, on définit un seuil de tolérance tol et on considère que les différents R_{ii} sont nuls s'ils vérifient la relation $|R_{ii}| \leq \text{tol}$.

Les b éléments R_{ii} de la diagonale de $\mathbf{R}$ tels que $|R_{ii}| > \text{tol}$ fournissent les indices des paramètres inertiels de base χ_1 , les colonnes indépendantes de $\mathbf{W}_{\text{St}}$ étant notées $\mathbf{W}_1$. Les autres fournissent les paramètres à regrouper χ_2 et les colonnes dépendantes $\mathbf{W}_2$. Par permutation de colonnes de $\mathbf{W}_{\text{St}}$ et des paramètres de χ_{St} , on peut écrire :

$$\mathbf{W}_{\text{St}}\chi_{\text{St}} = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.18})$$

Les paramètres de base χ s'expriment comme combinaison linéaire des paramètres initiaux du modèle :

$$\chi = \chi_1 + \beta\chi_2 \quad (\text{A2.19})$$

où la matrice β exprime les relations linéaires entre les colonnes de $\mathbf{W}_{\text{St}}$:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1\beta \quad (\text{A2.20})$$

On peut donc écrire :

$$\mathbf{W}_{\text{St}}\chi_{\text{St}} = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2] \begin{bmatrix} \chi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_1\chi \quad (\text{A2.21})$$

Les relations de regroupement sont alors calculées à partir de celles exprimant $\mathbf{W}_2$ en fonction de $\mathbf{W}_1$. La décomposition QR de la matrice $[\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2]$ s'écrit :

$$[\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2] = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{0}_{(r-b) \times b} & \mathbf{0}_{(r-b) \times (c-b)} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2] \quad (\text{A2.22})$$

où $\mathbf{R}_1$ est une matrice triangulaire supérieure régulière de dimension $(r \times r)$ et $\mathbf{R}_2$ est une matrice de dimension $(b \times (c-b))$.

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{W}_1\mathbf{R}_1^{-1} \\ \mathbf{W}_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{W}_1\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2 \end{cases} \quad (\text{A2.23})$$

Ce résultat fournit les $(c-b)$ relations linéaires entre les colonnes de $\mathbf{W}_2$ et $\mathbf{W}_1$. On obtient ainsi la relation de regroupement des paramètres χ_2 sur les paramètres χ_1 à partir de laquelle on établit le vecteur des paramètres inertiels de base χ :

$$\chi = \chi_1 + \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\chi_2 \quad (\text{A2.24})$$

RÉSUMÉ ET MOTS-CLÉS

MODÉLISATION ET IDENTIFICATION DYNAMIQUES DES ROBOTS AVEC UN MODÈLE DE FROTTEMENT SEC FONCTION DE LA CHARGE ET DE LA VITESSE

Ce travail est le résultat d'une collaboration entre le CEA et l'IRCCyN dans les domaines de la téléopération et la cobotique où les robots fonctionnent à vitesse lente et avec des variations importantes de charge. Dans ce cas, l'effort de frottement sec est important par rapport aux efforts inertiels. Le modèle dynamique classique avec frottement sec constant ne permet pas une estimation précise des efforts d'interaction du robot avec son environnement matériel et humain.

Cette thèse propose une modélisation originale du frottement sec, fonction de la charge et de la vitesse, son intégration dans le modèle dynamique multi-axes et son identification par modèle inverse et moindres carrés linéaires.

Une étude expérimentale mono-axe de plusieurs robots conduit à proposer un modèle qui combine la variation du frottement sec par rapport à la charge du modèle de Coulomb et la variation par rapport à la vitesse du modèle de Stribeck, et qui couvre les 4 quadrants du plan (vitesse, charge) articulaire. Ce modèle mono-axe est intégré dans le modèle dynamique inverse multi-axes du robot en assurant la linéarité par rapport aux nouveaux paramètres dynamiques. La méthode d'identification par moindres carrés linéaires du modèle classique est étendue au nouveau modèle avec une procédure en 2 étapes : une identification axe par axe fixant certains paramètres de frottement, et une identification multi-axes pour les autres paramètres de frottements et d'inertie. Une validation expérimentale sur 7 cas mono-axes et sur un cas multi-axes (robot Stäubli TX40) prouve la pertinence de cette approche originale, pour les robots fonctionnant avec une forte variation de charge et/ou à vitesse lente.

Mots-clés : Robotique, Modélisation, Identification, Paramètres dynamiques, Frottement sec

DYNAMIC MODELING AND IDENTIFICATION OF ROBOTS WITH A DRY FRICTION MODEL DEPENDING ON LOAD AND VELOCITY

This work is the result of collaboration between CEA and IRCCyN in the area of teleoperation and cobotics, where robots work at low velocity and with high external forces variations. In this range of use, the joint dry friction force becomes significant compared with the inertial forces. The dynamic model with the usual constant dry sliding friction force model is no longer accurate enough to predict the joint forces and therefore to predict the interaction forces between the robot and its material or human environment.

This thesis proposes an original dry friction model, which depends on the joint load and velocity. This model is merged into the multi-joint inverse dynamic model, which is identified with linear least squares techniques.

An experimental study of several one-joint robots leads to propose a new dry friction model that combines the load-dependence of the Coulomb model and the velocity-dependence of the Stribeck model, and that is suitable for the 4 quadrants in the (velocity, load) frame. This model is incorporated into the multi-joint inverse dynamic model that remains linear in relation to the new dynamic parameters. The usual robotics identification method, based on linear least squares techniques, is divided in two steps for the new model: at first, a joint-by-joint procedure allows to identify some friction parameters, and then a multi-joint identification is carried out to estimate the other friction and inertial parameters. An experimental validation on seven one-joint cases and on a multi-joint case (4 joints of the Stäubli TX40 robot) proves the relevance of this original approach for robots working with high load variations and/or at low velocity.

Keywords : Robotics, Modeling, Identification, Dynamic parameters, Dry friction