

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2011

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Étude dynamique des champs de Reeb et
propriétés de croissance de l'homologie de contact

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Anne VAUGON

le 09 décembre 2011, devant le jury ci-dessous

Président du jury : Emmanuel GIROUX (École Normale Supérieure de Lyon)
Rapporteurs : Tobias EKHOLM (Uppsala Universitet)
Jean-Claude SIKORAV (École Normale Supérieure de Lyon)
Examineurs : Frédéric BOURGEOIS (Université Libre de Bruxelles)
Paolo GHIGGINI (Université de Nantes)
Emmanuel GIROUX (École Normale Supérieure de Lyon)
Directeur de thèse : Vincent COLIN (Université de Nantes)

Chapitre 8. Théorème de recollement de rocade	77
1. Énoncé du théorème	77
2. Équation de contact sur une surface épaissie	79
3. Recollement de rocade sur une surface épaissie	82
Chapitre 9. Applications du théorème de recollement de rocade	87
1. Structures de contact sur le tore plein	88
2. Étude d'un cas particulier	90
3. Cas des structures de contact sur le tore plein	92
4. Cas d'une surface épaissie	94
Chapitre 10. Stratégie de preuve du théorème de recollement de rocade	97
1. Conventions et notations	98
2. Zone de recollement	99
3. Modèle de rocade hyperbolique	100
4. Rocades convexes hyperboliques	103
5. Démonstration du théorème de recollement de rocade	105
6. Propriétés de l'indice de Conley-Zehnder	110
Chapitre 11. Construction d'une rocade pré-convexe	115
1. Modèle de rocade	115
2. Contrôle de l'application retour	121
3. Modèle de rocade pré-convexe	125
4. Existence d'une rocade pré-convexe	129
Chapitre 12. Construction d'une rocade hyperbolique	133
1. Existence d'une rocade hyperbolique	134
2. Choix de coordonnées adaptées	135
3. Description de la convexification	140
4. La construction précédente convient	146
5. Existence d'une paire de convexification	148
6. Modification d'une paire de convexification	153
7. Indice de Conley-Zehnder	158
Bibliographie	159
Index	163

Remerciements

« *Vogon poetry is the third worst poetry in the universe* »
The Hitchhiker's Guide to the Galaxy
Douglas Adams

Je remercie d'abord mon directeur de thèse, Vincent Colin, pour tout ce qu'il m'a enseigné, mais aussi pour sa grande disponibilité et son éternel optimisme. Merci à Emmanuel Giroux pour m'avoir fait découvrir la géométrie symplectique et m'avoir encouragée dans cette voie. Merci à François Laudenbach et Paolo Ghiggini pour avoir discrètement mais sûrement guidé mes pas dans le monde de la recherche. Merci à Patrick Massot pour m'avoir présenté avec enthousiasme la géométrie de contact et à Emmanuel Ferrand qui a dirigé mon stage de L3 sur les nœuds legendriens.

Merci à Tobias Ekholm et à Jean-Claude Sikorav d'avoir rapporté ce texte. Je suis très honorée qu'ils aient accepté de s'intéresser à mon travail. Merci à Jean-Claude Sikorav pour les nombreuses améliorations qu'il m'a suggérées. Merci à Frédéric Bourgeois, Paolo Ghiggini et Emmanuel Giroux d'avoir fait partie de mon jury.

Merci à tous ceux, au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray ou ailleurs, qui m'ont en diverses occasions consacré une partie de leur temps. Merci tout particulièrement à Dan Mathews sans qui je n'aurais pas persévéré dans l'étude des rocade, Margherita-Sheila Sandon, Samuel Tapie consultant dynamique (de préférence en urgence), Carlos Moraga, Gaël Meigniez, Gilles Carron, Aurélien Djament et Friedrich Wagemann. Merci à tous ceux qui m'ont fait partager leurs expériences d'enseignants, tout particulièrement Éric Paturel, Laurent Piriou, Nathalie Burguin-Gleize et Jean-Marc Patin. Merci encore à Jean-Marc Patin de m'avoir remplacée dans les moments critiques.

Merci à Frédéric Bourgeois de m'avoir accueillie à Bruxelles, j'ai beaucoup appris lors de ce séjour. Merci à Chris Wendl.

Merci à l'inoubliable équipe de thésards-postdoc-ATER nantais. Sans vous la vie serait moins colorée (surtout en pique-carreau-trèfle-cœur). Votre soutien m'a été très précieux, « *Salut, et encore merci pour le poisson* » (Douglas Adams).

Merci aux fanfarons d'avoir égayé mes mardi midi. Merci à tous ceux qui participent à la vie de laboratoire. L'ambiance de travail (et plus) y est formidable.

Merci à ma famille et à la famille Mezzarobba de m'avoir accueillie et soutenue tout au long de cette thèse. Merci à mon père d'avoir relu une partie de ce texte.

Bîp à Marc.

* * *

Plus tristement, je ne voudrais pas conclure ces lignes sans une pensée pour Frédéric Bouchier, frère taupin jovial et inoubliable.

Introduction

Cette thèse parle de géométrie de contact, de champs de Reeb, de courbes holomorphes et de dynamique.

En dimension 3, une *structure de contact*, objet d'étude de la géométrie de contact, est un champ de plans localement décrit par l'équation $dz - ydx = 0$ (voir figure 1). Lorsqu'il est coorienté, ce champ de plans est globalement donné par une

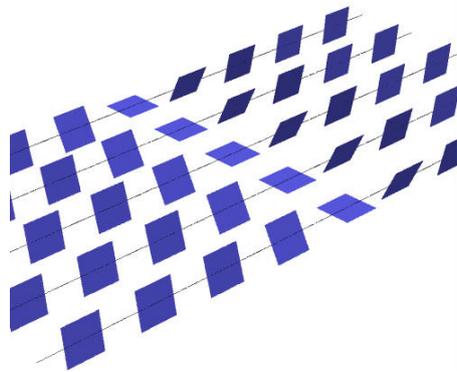


FIGURE 1. Modèle local d'une structure de contact

équation alors appelée *équation de contact* ou *forme de contact* (et qui est une forme différentielle de degré 1 sur la variété ambiante). Cette équation n'est pas unique car tout multiple non nul d'une équation de plan reste une équation du même plan.

À partir d'une équation de contact α , on définit un champ de vecteurs transverse au plan de contact appelé *champ de Reeb* et caractérisé par les équations $\alpha(R) = 1$ et $d\alpha(R, \cdot) = 0$. Dans l'exemple de la structure associée à l'équation standard $\alpha_0 = dz - ydx = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$, le champ de Reeb est donné en tout point (x, y, z) par le vecteur vertical $(0, 0, 1)$ (voir figure 2). Cependant, pour l'équation de contact $\alpha_1 = e^{-y}(dz - ydx) = 0$ qui décrit la même structure de contact, le champ de Reeb est $(e^y, 0, e^y(1 - y))$ en tout point (x, y, z) (voir figure 2). Ces deux champs de vecteurs ont une dynamique différente : toutes les trajectoires du champ de Reeb associé à α_0 sont périodiques alors que le champ de Reeb associé à α_1 n'admet aucune trajectoire périodique (voir figure 3).

Les questions suivantes orientent l'étude présentée dans ce texte. La géométrie de la variété impose-t-elle certaines propriétés aux champs de Reeb ? Les champs de Reeb associés à des équations de contact différentes de la même structure de contact ont-ils des propriétés communes ? Comment extraire des informations sur la structure de contact à partir du champ de Reeb associé à une équation de contact ? Un angle naturel d'attaque de ces questions est de s'intéresser aux orbites périodiques des champs de Reeb. Ce sont en effet les premiers éléments examinés lors d'une étude dynamique.

L'introduction de l'*homologie de contact* et plus généralement de la théorie des champs symplectiques (SFT, Symplectic Field Theory) par Eliashberg, Givental

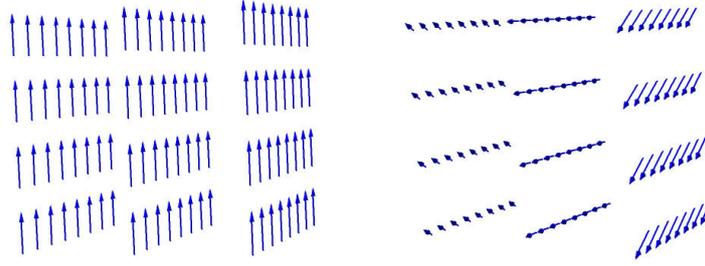


FIGURE 2. Champs de Reeb associés aux formes α_0 et α_1 dans trois plans $y = \text{cst}$

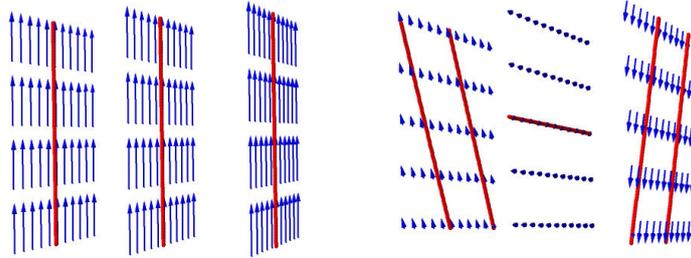


FIGURE 3. Orbites de Reeb associées aux formes α_0 et α_1 dans trois plans $y = \text{cst}$ (en identifiant le haut et le bas de la figure)

et Hofer [25] en 2000 a fourni une réponse aux deux dernières questions. Avant de présenter informellement cette homologie dont le complexe est engendré par les orbites périodiques de Reeb, énonçons quelques résultats garantissant l'existence de telles orbites. L'exemple développé précédemment montre qu'elle n'est pas automatique. Néanmoins dans le cas d'une variété *close* (compacte sans bord) le théorème suivant permet de conclure.

THÉORÈME 0.1 (Taubes [67]). *Tout champ de Reeb associé à une forme de contact sur une variété close de dimension 3 admet au moins une orbite périodique.*

Ce théorème, démontré par Taubes en 2007, est la restriction en dimension 3 de la conjecture de Weinstein. Dans des cas particuliers, on dispose de résultats plus précis, par exemple le théorème suivant démontré par Hofer en 1993.

THÉORÈME 0.2 (Hofer [41]). *Tout champ de Reeb sur une variété de contact de dimension 3 close et vrillée¹ admet une orbite périodique contractile.*

L'existence d'orbites périodiques associées à un champ de vecteurs sur une variété compacte n'est pas automatique. Ainsi le théorème de Kuperberg [54] garantit l'existence de champs C^∞ sur S^3 sans orbite périodique. Au-delà de l'existence d'une orbite périodique, Colin et Honda [20] s'intéressent au nombre $N_L(\alpha)$ d'orbites

1. Les structures vrillées, de même que les structures *tendues* et *universellement tendues* mentionnées plus loin, sont définies dans la section 1 du chapitre 1.

périodiques de période inférieure à L du champ de Reeb associé à l'équation de contact α .

CONJECTURE 0.3 (Colin-Honda [20, Conjecture 2.10]). *Sur une variété hyperbolique de dimension 3 compacte sans bord, pour toute équation de contact non dégénérée associée à une structure universellement tendue, $N_L(\alpha)$ croît exponentiellement avec L .*

Cette thèse traite du cas des variétés possédant un découpage JSJ non vide et contenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle (on pourra consulter [4] pour plus de détails sur la décomposition JSJ). Le théorème suivant est le résultat principal du chapitre 7.

THÉORÈME 0.4. *Soit V une variété de dimension 3 orientée, close, connexe, qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors V porte une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues² et universellement tendues telles que pour toute équation de contact α non dégénérée et hypertendue $N_L(\alpha)$ croisse exponentiellement avec L .*

Si l'homologie de contact est bien définie et invariante (hypothèse H , voir section suivante), on peut retirer la condition hypertendue des hypothèses sur la forme α .

La croissance exponentielle du nombre d'orbites de Reeb pour des structures de contact universellement tendues sur les variétés hyperboliques (sans bord) qui fibrent sur le cercle, cas particulier de la conjecture 0.3, est toujours un problème ouvert. Si la conjecture virtuellement fibrée de Thurston ([68]) est vérifiée, le cas des variétés hyperboliques qui fibrent sur le cercle devient le cas général à revêtement fini près. Un résultat de croissance exponentielle pour toutes les structures universellement tendues sur les variétés hyperboliques qui fibrent sur le cercle induirait alors une croissance exponentielle pour toutes les variétés hyperboliques.

Par ailleurs, Colin et Honda conjecturent que la croissance de l'homologie de contact des structures universellement tendues est « généralement » quadratique sur les variétés de géométrie ni hyperbolique ni sphérique et qu'elle est linéaire dans le cas des variétés sphériques. On s'intéresse ici aux fibrés en cercles. Dans le théorème 0.7, on calcule l'homologie de contact et on estime sa croissance dans le cas des structures universellement tendues non transversales aux fibres en s'appuyant sur la classification de Giroux [35] et Honda [46].

Enfin, le théorème 0.8 détermine les orbites de Reeb périodiques créées lors d'un recollement de rocade, c'est-à-dire l'attachement d'un demi-disque le long d'un arc legendrien γ_0 situé dans le bord de la variété. Cette opération décrit une modification élémentaire de la structure de contact. Les nouvelles orbites de Reeb s'expriment alors comme mots en les cordes de Reeb de l'arc γ_0 .

Homologie de contact et croissance. L'homologie de contact est le principal outil permettant d'estimer la croissance du nombre d'orbites périodiques de Reeb. Elle est définie [25] à l'aide d'un complexe (C, ∂) où C est, dans le cas simplifié qui nous intéresse ici, la \mathbb{Q} -algèbre engendrée par les orbites périodiques de Reeb et ∂ s'obtient en « comptant » les solutions de l'équation de Cauchy-Riemann associée à une structure presque complexe adaptée à l'équation de contact.

Bien que communément admises, l'existence et l'invariance de l'homologie de contact demeurent non démontrées. Dans ce mémoire, certains résultats s'appuient sur ces propriétés. On le précise³ alors en utilisant l'hypothèse H (voir énoncé 3.11).

2. Une équation est dite hypertendue si aucune de ses orbites périodiques de Reeb n'est contractile. Une structure est hypertendue si elle admet une équation hypertendue.

3. Dans le cas d'énoncés publiés par d'autres auteurs, la précision n'est pas systématique.

Le développement de la théorie des polyfolds par Hofer, Wysocki et Zehnder [42, 44] devrait permettre d'obtenir une preuve. Mentionnons aussi les travaux menés par Cieliebak et Oancea dans le cadre de l'homologie de contact équivariante [15] (voir [12]). Enfin, les travaux de Dragnev [22] fournissent des résultats partiels. L'homologie de contact ainsi que les points délicats évoqués ici seront développés dans la section 2 du chapitre 3.

L'homologie de contact admet de nombreuses variantes comme l'homologie de contact linéarisée et l'homologie de contact suturée [18] qui traite du cas des variétés à bord. Ces invariants sont cependant délicats à calculer car il faut pour cela étudier les orbites périodiques d'un champ de Reeb et résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires.

La *croissance de l'homologie de contact* [8] est un invariant extrait de l'homologie de contact et plus simple à évaluer. C'est l'analogue, dans le cas de l'homologie de contact, de la croissance de l'homologie symplectique introduite par Seidel [66] et utilisée par McLean [62]. Cet invariant est défini en considérant la croissance avec L de l'homologie de contact restreinte aux orbites périodiques de période inférieure à L .

L'homologie de contact des structures vrillées étant triviale [70], on ne peut espérer obtenir des résultats de croissance caractéristiques pour toutes les structures de contact portées par une même variété. On s'intéresse ici aux cas universellement tendus. Ces structures sont à la fois celles fournies par les exemples les plus naturels, les structures les plus « éloignées » des structures vrillées et celles pour lesquelles on rencontre le moins de difficultés techniques pour définir la croissance de l'homologie de contact.

Croissance exponentielle. Les résultats portant sur la croissance exponentielle du nombre d'orbites de Reeb se déduisent de propriétés de croissance de l'homologie de contact. Ainsi le théorème 0.4 découle du résultat suivant qui correspond au théorème 7.13.

THÉORÈME 0.5. *Soit V une variété de dimension 3 orientée, close et connexe qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors V admet une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues et universellement tendues munies d'une équation hypertendue ayant une homologie de contact cylindrique de croissance exponentielle dans les classes primitives.*

Sous l'hypothèse H , la variété V admet une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues et universellement tendues ayant une homologie de contact linéarisée de croissance exponentielle.

Ce théorème s'inspire du résultat de Colin et Honda [20] concernant les structures de contact portées par des livres ouverts avec monodromie pseudo-Anosov. Les homéomorphismes pseudo-Anosov seront définis dans le chapitre 7. Pour la définition de livre ouvert on pourra consulter [31] et [20] pour les coefficients de Dehn fractionnaires.

THÉORÈME 0.6 (Colin-Honda, [20, Theorem 2.3]). *Soient V une variété close munie d'une structure de contact ξ et (S, h) un livre ouvert portant ξ . On suppose que ∂S est connexe et que h est homotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov ψ et possède un coefficient de Dehn fractionnaire $\frac{k}{n}$ avec $k \geq 3$ (où n est le nombre de singularités du feuilletage stable de ψ tracées sur ∂S). Alors, la croissance de l'homologie de contact linéarisée est exponentielle.*

D'après Thurston [69], un fibré sur le cercle de fibre S est hyperbolique si et seulement s'il est une suspension de S par un difféomorphisme homotope à un pseudo-Anosov.

Fibrés en cercles. Les structures de contact sur les fibrés en cercles ont été étudiées par Giroux [35] et Honda [46] et sont presque explicitement connues. Il s'agit d'une large classe d'exemples pour lesquels on sait déjà calculer l'homologie de contact (et sa croissance) dans les cas les plus simples. On rappelle de façon un peu imprécise les résultats de classification des structures de contact universellement tendues orientées sur les fibrés en cercles dont la base est de genre au moins 1. La figure 4 résume les principales catégories de structures de contact et les résultats connus concernant la croissance de l'homologie de contact. Les caractérisations comme « tangente aux fibres » ou « transversale aux fibres » sont à comprendre à isotopie près. Par ailleurs $\chi(S)$ désigne la caractéristique d'Euler de S et $\chi(S, V)$ le nombre d'Euler du fibré.

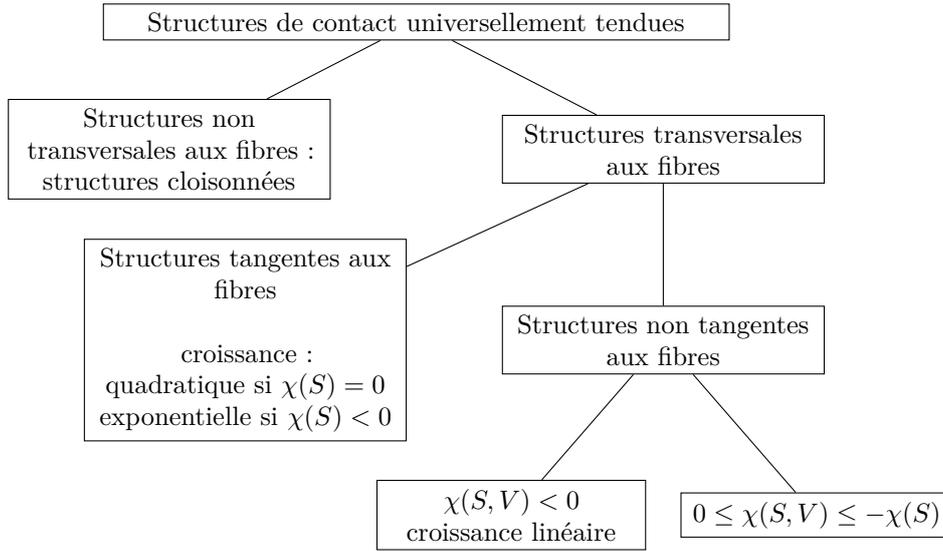


FIGURE 4. Classification des structures universellement tendues sur les fibrés en cercles

Les structures tangentes aux fibres sont exactement les revêtements fibrés du fibré unitaire tangent à la surface muni de la structure des éléments de contact. La conjecture de Colin et Honda n'est pas vérifiée si la surface est hyperbolique. En effet, le flot de Reeb de l'équation standard sur le fibré unitaire tangent est le flot géodésique (voir par exemple [31]). Or, dans cette situation, il existe exactement une géodésique fermée par classe d'homotopie libre [53, Theorem 3.9.5] et le nombre de classes d'homotopie libre croît exponentiellement [63] avec la longueur. L'homologie de contact est donc à croissance exponentielle.

Lorsque la base est de genre 1 les structures de contact décrites sont les structures standard sur T^3 . Par ailleurs, les structures transversales aux fibres avec $\chi(S, V) < 0$ sont exactement les structures transversales aux fibres admettant un représentant S^1 -invariant. Elles ont été étudiées par Bourgeois [5].

La contribution de cette thèse à ce problème est le calcul de l'homologie de contact (et de sa croissance) pour les structures de contact cloisonnées. Soit V un fibré en cercles de base S . Une structure de contact ξ est *cloisonnée par la multicourbe* Γ si

- (1) Γ est une sous-variété compacte orientée de dimension 1 de S ;
- (2) ξ est transversale aux fibres sur $V \setminus \pi^{-1}(\Gamma)$;
- (3) la surface $\pi^{-1}(\Gamma)$ est transversale à ξ et les feuilles du feuilletage caractéristique sont les fibres.

Ces structures admettent un représentant S^1 -invariant.

THÉORÈME 0.7. *Soit (V, ξ) un fibré en cercles orienté de base compacte orientée muni d'une structure de contact cloisonnée par une courbe $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile. Si $X = V \setminus \pi^{-1}(\Gamma)$, on note $X_1^+ \dots X_{n_+}^+$ les composantes connexes de X pour lesquelles ξ est positivement transversale aux fibres et $X_1^- \dots X_{n_-}^-$ les composantes connexes pour lesquelles ξ est négativement transversale aux fibres. Soit a un lacet de V . Il existe une équation de contact hypertendue α telle que l'homologie de contact cylindrique $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q})$ soit bien définie et*

- (1) si $[a] = [\text{fibre}]^k$ avec $\pm k > 0$, on a $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^{n_{\pm}} H_*(W_j^{\pm}, \mathbb{Q})$;
- (2) si $[a] = [\text{fibre}]^k [\Gamma_j]^{k'}$ avec $k' \neq 0^4$, on a $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{[\Gamma_i]=[\Gamma_j]} H_*(S^1, \mathbb{Q})$;
- (3) sinon, $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = 0$.

Sous l'hypothèse H , les homologies de contact cylindriques calculées ci-dessus sont les homologies $HC_*^{[a]}(V, \xi, \mathbb{Q})$ et leur croissance est quadratique.

Ce théorème est le résultat principal du chapitre 6. Pour achever l'étude de l'homologie de contact des structures universellement tendues sur les fibrés en cercles, il reste donc à étudier le cas des structures transversales aux fibres avec $0 \leq \chi(S, V) \leq -\chi(S)$.

Recollement de rocade. La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude des orbites de Reeb qui apparaissent lors d'un recollement de rocade. Les rocades ont été introduites par Honda dans [45] pour classifier les structures de contact sur les tores pleins, les tores épais et les espaces lenticulaires.

Soient $(V, \partial V, \xi)$ une variété de contact compacte de bord convexe⁵. Le recollement d'une rocade à V le long d'un arc legendrien γ_0 (tangent à la structure de contact) dans ∂V est celui d'un demi-disque D le long duquel on prescrit une extension particulière de ξ . En ajoutant un épaississement de (D, ξ) , on obtient une nouvelle variété de contact à bord (V', ξ') prolongeant (V, ξ) .

Ce texte s'intéresse à la construction d'une forme de contact sur les variétés obtenues par recollement de rocade et à la détermination des nouvelles orbites périodiques de Reeb créées par ce recollement. Pour pouvoir effectuer un recollement de rocade tout en contrôlant l'équation de contact, on impose que l'équation de contact ait une forme fixée au voisinage de l'arc d'attachement. On dit alors que l'arc d'attachement est *en position de recollement* (définition 8.2). Le théorème suivant sera présenté en détail dans le chapitre 8.

THÉORÈME 0.8. *Soient (V, α) une variété de contact de bord convexe S et γ une courbe legendrienne tracée sur S contenant un arc d'attachement γ_0 telle que (S, γ) soit en position de recollement de rocade. Pour $K > 0$, on suppose que l'image sur S de γ_0 par le flot de Reeb en temps inférieur à K est transversale à γ_0 en dehors de la courbe de découpage de S . Alors il existe variété (V', S', α') obtenue par recollement de rocade vérifiant les propriétés suivantes :*

- (1) $S' = \partial V'$ est convexe ;
- (2) α' est adaptée à S' ;

4. La fibre est centrale dans $\pi_1(V)$, les produits de classes d'homotopie libre considérés sont donc bien définis.

5. Les surfaces convexes sont définies dans la section 1 du chapitre 1. Au voisinage d'une telle surface, la structure de contact est « codée » par une courbe appelée courbe de découpage.

- (3) α' est arbitrairement proche de α dans V ;
- (4) les orbites périodiques du champ de Reeb de période inférieure à K rencontrant la zone de recollement sont en bijection avec les mots de longueur (« période ») inférieure à K en les cordes de Reeb de γ_0 .

La condition de transversalité entre γ_0 et l'image de γ_0 par le flot de Reeb pour des temps bornés est générique.

Ce théorème est à mettre en parallèle avec les résultats de Bourgeois, Ekholm et Eliashberg [9] qui expriment les nouvelles orbites de Reeb après une chirurgie le long d'une sphère legendrienne Λ comme mots en les cordes de Reeb de Λ . Ce dernier résultat est ensuite exploité pour obtenir des triangles exacts reliant l'homologie de contact, l'homologie symplectique et l'homologie de contact legendrienne. Un des développements du travail présenté ici serait d'obtenir ce type de triangles exacts dans la situation d'un recollement de rocade.

Le théorème de recollement de rocade 0.8 est une première étape pour le calcul de l'homologie de contact d'une variété obtenue par recollement de rocade en fonction de celle de la variété de départ. Ce type de calculs reste en général inaccessible car le théorème 0.8 fournit de nombreuses orbites périodiques homotopes proches ce qui laisse penser que la différentielle est non triviale. Dans le cas des structures de contact sur le tore plein ou des surfaces épaissies, on peut néanmoins obtenir des résultats en utilisant des calculs déjà existants donnés dans [38]. L'homologie de contact considérée ici est l'homologie de contact suturée [18] (voir chapitre 4) qui, avec les mêmes restrictions que pour l'homologie de contact standard, permet de calculer un invariant des variétés de bord suturé par la courbe de découpage. La suture sépare le bord en deux zones respectivement positivement et négativement transverses au champ de Reeb. On commence par donner l'homologie de contact d'une surface épaissie (ce calcul est détaillé dans le chapitre 4) puis on étudie l'effet d'un recollement de rocade (voir chapitre 9).

PROPOSITION 0.9. *Soit S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile. Soit $V = S \times [-1, 1]$ un voisinage de S avec structure de contact invariante dans la direction $[-1, 1]$. Il existe une forme de contact hypertendue α telle l'homologie de contact cylindrique suturée soit le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $n+1$ orbites périodiques homotopes à $\Gamma_k \times \{0\}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et par leurs multiples.*

THÉORÈME 0.10. *Soient S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile et γ_0 un arc d'attachement reliant trois composantes connexes différentes de Γ . On note Γ_0 la composante intersectant l'intérieur de γ_0 . On considère un voisinage $V = S \times [-1, 1]$ de S avec structure de contact invariante dans la direction $[-1, 1]$. Sous l'hypothèse H , l'homologie de contact cylindrique de (V', ξ', Γ') obtenue par recollement de rocade le long de $\gamma_0 \times \{1\}$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par n orbites périodiques homotopes à $\Gamma_k \times \{0\}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et par leurs multiples.*

Autrement dit, l'ajout d'une rocade le long d'un arc d'attachement rencontrant Γ_0 dans son intérieur fait disparaître Γ_0 et ses multiples de l'homologie de contact.

Les structures de contact sur le tore plein avec un découpage longitudinal au bord sont décrites par la courbe de découpage d'un disque méridien : en découpant le long d'un tel disque, on obtient une boule dont la structure de contact est décrite par le courbe de découpage au bord. Si le découpage du disque méridien est formé de segments parallèles au bord, les résultats de Golovko [38] fournissent l'homologie de contact suturée. D'autres travaux de Golovko [37] traitent du cas des découpages non longitudinaux. Le théorème suivant, présenté dans le chapitre 9, concerne les

structures de contact sur le tore plein dont le bord a une courbe de découpage avec $2n$ composantes longitudinales et tel que la courbe de découpage des disques méridiens D vérifie la propriété (P) (définition 9.2). De façon un peu imprécise, un découpage Γ_D d'un disque D vérifie la propriété (P) si le bord de D se décompose en deux sous-intervalles tels que si on découpe D le long des arcs ayant une extrémité dans chaque intervalle, chaque composante connexe contienne au plus une composante de Γ_D .

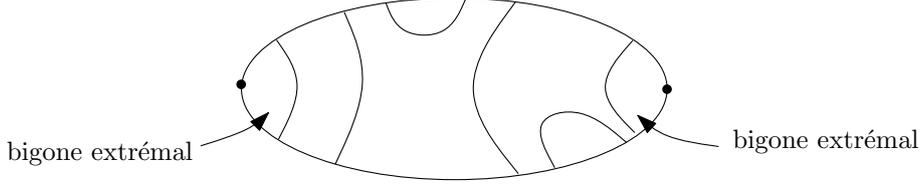


FIGURE 5. Exemple de découpage vérifiant la propriété P

THÉORÈME 0.11. Soit (V, ξ, Γ) une structure de contact sur le tore plein $D^2 \times S^1$ avec $2n$ courbes de découpage longitudinales et un découpage d'un disque méridien vérifiant (P). Sous l'hypothèse H, l'homologie de contact cylindrique suturée de (V, ξ, Γ) est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par n_+ courbes homotopes à $\{*\} \times S^1$, n_- courbes homotopes à $\{*\} \times (-S^1)$ et leurs multiples où

$$n_+ = \chi(S_+) + \#\{\text{bigones négatifs non extrémaux}\} - \#\{\text{bigones positifs}\}$$

et

$$n_- = \chi(S_-) + \#\{\text{bigones positifs non extrémaux}\} - \#\{\text{bigones négatifs}\}.$$

Pour calculer ces homologies de contact, on part du tore plein muni d'une structure de contact avec découpage du bord longitudinal et découpage des disques méridiens composé d'arcs parallèles entre eux et on recolle un nombre fini de rocaes afin de se ramener à la structure de contact que l'on veut étudier.

Organisation du manuscrit. Cette thèse comprend trois parties. La première est principalement consacrée à des rappels de géométrie et d'homologie de contact. Le chapitre 1 rappelle les notions de base de géométrie de contact. Le chapitre 2 présente les structures de contact sur les fibrés en cercles et sur le tore plein. On calculera l'homologie de contact de certaines de ces structures dans les parties suivantes. La suite de cette partie traite d'homologie de contact. Le chapitre 3 présente les notions de base sur les structures presque complexes, les courbes pseudo-holomorphes ainsi que le schéma de construction de l'homologie de contact et la définition de sa croissance. Les deux chapitres suivants introduisent des variantes de l'homologie de contact. Le chapitre 4 parle d'homologie de contact suturée (homologie de contact pour les variétés à bord). Il comprend une définition rapide et des exemples de calculs dans les cas simples (surfaces convexes épaissies et certaines structures sur le tore plein). Le chapitre 5 explique une méthode développée par Bourgeois [5] pour calculer l'homologie de contact dans le cas Morse-Bott, où les orbites de Reeb sont dégénérées. Cette méthode permettra de calculer l'homologie de contact des structures cloisonnées.

La deuxième partie explore les liens entre hyperbolicité et croissance exponentielle du nombre d'orbites de Reeb ou de l'homologie de contact. Le chapitre 6 présente le calcul de l'homologie de contact de structures cloisonnées et le chapitre 7 traite celui des variétés ayant une composante hyperbolique.

Enfin, la troisième partie traite des recollements de rocares. Le chapitre 8 présente le théorème principal ainsi que les premiers exemples d'applications. Le chapitre 9 est consacré au calcul de l'homologie de contact suturée de certaines structures sur le tore plein et d'une surface convexe épaissie. Pour finir, les chapitres 10, 11 et 12 composent la démonstration du théorème de recollement de rocade.

Partie 1

Géométrie de contact et homologie de contact

Géométrie de contact

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base de géométrie de contact. On pourra consulter [31] pour une présentation plus approfondie. La section 1 parcourt les définitions standard de géométrie de contact et présente quelques éléments de classification, la méthode de Moser ainsi que les notions de surface convexe et de découpage. La section 2 est une section plus « pratique ». Elle traite de la condition imposée par Colin, Ghiggini, Honda et Hutchings [18] sur la forme de contact au voisinage du bord d'une variété pour définir l'homologie de contact suturée. La section 3 se place dans l'optique de l'homologie de contact et définit les notions relatives aux orbites périodiques de Reeb associées : orbite périodique non-dégénérée et indice de Conley-Zehnder. Enfin, la section 4 est consacrée à la définition de rocade, objet fondamental de la troisième partie de ce texte.

1. Structures de contact et convexité

1.1. Présentation générale. Comme expliqué dans l'introduction, une *structure de contact* ξ sur une variété V de dimension 3 est un champ de plans qui est décrit dans un système de cartes locales par l'équation

$$(1) \quad dz - ydx = 0.$$

Par le théorème de Darboux (voir par exemple [31, 2.5.1]), cette condition est équivalente à la condition : au voisinage de tout point, il existe une 1-forme α , telle que $\xi = \ker(\alpha)$ et

$$(2) \quad \alpha \wedge d\alpha \neq 0.$$

La condition 2 est appelée *condition de contact*. Si la structure de contact est co-orientée, il existe une 1-forme globale, appelée *équation de contact* ou *forme de contact* telle que $\xi = \ker(\alpha)$. On pourra consulter [58] pour de nombreux exemples illustrés.

Un champ de vecteurs dont le flot préserve ξ est appelé *champ de contact*. En particulier, le champ de Reeb R_α associé à l'équation de contact α et caractérisé par

$$(3) \quad \alpha(R_\alpha) = 1 \text{ et } d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0.$$

est un champ de contact car son flot préserve α . On dit qu'une équation de contact est *hypertendue* si aucune orbite périodique du champ de Reeb n'est contractile. On dit que la structure est *hypertendue* si elle admet une équation hypertendue.

La classification des structures de contact s'effectue à conjugaison ou à isotopie près. Deux structures de contact ξ_0 sur V_0 et ξ_1 sur V_1 sont *conjuguées* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : V_0 \rightarrow V_1$ tel que $\varphi^*\xi_1 = \xi_0$. Un tel difféomorphisme est appelé un *contactomorphisme*. Deux structures de contact sur V_0 sont dites *isotopes* si elles sont conjuguées par un difféomorphisme isotope à l'identité. Deux structures de contact isotopes sont clairement conjuguées. La réciproque est l'objet du théorème de Gray.

THÉORÈME 1.1 (Gray [39]). *Sur une variété compacte sans bord, deux structures de contact homotopes parmi les structures de contact sont isotopes.*

Une étape fondamentale dans la classification des structures de contact a été l'introduction des notions de structures tendues et vrillées par Eliashberg [23] suite aux travaux de Bennequin [3]. Une structure de contact est *vrillée* si elle contient un disque plongé tangent à la structure de contact le long de son bord. Une structure qui n'est pas vrillée est dite *tendue*. Par le théorème de Hofer 0.2, toute structure hypertendue est tendue. On dit qu'une structure de contact sur V est *universellement tendue* si son rappel sur le revêtement universel de V est tendu. Si la structure induit une structure vrillée dans un revêtement fini, on parle de structure *virtuellement vrillée*. D'après les travaux de Perelman (voir [4]), le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 est résiduellement fini et ainsi toute structure de contact est dans l'une de ces catégories. On pourra consulter [33] pour un résumé des résultats de classification des structures de contact tendues et vrillées.

La démonstration moderne du théorème de Gray, utilise la *méthode de Moser* [65]. Cette méthode sera utilisée à plusieurs reprises dans ce texte. On en présente ici le principe général.

LEMME 1.2 (Méthode de Moser). *Soit $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ un chemin lisse d'équations de contact sur une variété V , on note $\xi_t = \ker(\alpha_t)$. Considérons un champ de vecteurs $(X_t)_{t \in [0,1]}$ dépendant du temps tel que $X_t \in \xi_t$ pour tout $t \in [0,1]$ et dont le flot ψ_t est défini jusqu'au temps 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le flot vérifie $\psi_t^* \xi_t = \xi_0$.*
- (2) *Le champ de vecteurs X_t vérifie*

$$\mu_t \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t$$

avec $\mu_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(R_t)$, où R_t est le champ de Reeb associé α_t .

DÉMONSTRATION. Si $\psi_t^* \xi_t = \xi_0$ alors il existe $\lambda_t : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\psi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$. En différenciant l'expression précédente par rapport à t on obtient

$$\mu_t \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t$$

avec $\mu_t = \left(\frac{1}{\lambda_t} \frac{\partial \lambda_t}{\partial t}\right) \circ \psi_t^{-1}$. On évalue sur le champ de Reeb pour obtenir la valeur de μ_t cherchée. Réciproquement, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* \alpha_t = \varphi_t^* \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t \right) = (\mu_t \circ \psi_t^{-1}) \varphi_t^* \alpha_t.$$

Par conséquent $\varphi_t^* \alpha_t = \exp(\mu_t \circ \varphi_t^{-1}) \exp(-\mu_0) \alpha_0$. D'où $\psi_t^* \xi_t = \xi_0$. \square

La méthode de Moser fournit des isotopies des structures de contact mais pas d'isotopie des équations associées, sauf si toutes les équations considérées ont le même champ de Reeb. Par construction $X_t \in \xi_0 \cap \xi_1$.

1.2. Sous-variétés dans les variétés de contact. Les sous-variétés de dimension 1 spécifiquement étudiées dans le cadre de la géométrie de contact sont les courbes *legendriennes* et les courbes *transverses*. Ces courbes sont respectivement les courbes tangentes en tout point ou transverses en tout point à la structure de contact.

L'étude des surfaces dans les variétés de contact est un outil essentiel et a débuté avec les travaux d'Eliashberg [23, 24]. Commençons par remarquer que la condition de contact, qui peut se reformuler en « ξ est maximale non intégrable » implique qu'il n'existe pas de surface tangente en tout point à la structure de contact. La structure de contact trace sur une surface S un feuilletage singulier appelé *feuilletage caractéristique* dont les points singuliers sont les points x tels que $\xi_x = T_x S$ et qui

est tangent à $\xi_x \cap T_x S$ en tout point x non singulier. Le feuilletage caractéristique de S est dirigé par le champ de vecteurs X tel que

$$(4) \quad \iota_X \omega = i^* \alpha$$

où i est l'inclusion de S dans V et ω est une forme volume sur S . Il détermine entièrement le germe de ξ le long de S .

THÉORÈME 1.3. *Soit S une surface compacte plongée dans une variété de contact V . Deux germes de structures de contact qui induisent le même feuilletage caractéristique sur S sont conjugués par un germe de difféomorphisme isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant le feuilletage.*

Une étape fondamentale dans l'étude des surfaces dans les variétés de contact a été le développement par Giroux [32] de la notion de convexité introduite par Eliashberg et Gromov [26]. Une surface S dans une variété de contact (V, ξ) est *convexe* (ou ξ -convexe) s'il existe un champ de contact transverse à S . Un voisinage d'une surface convexe compacte S est donc contactomorphe à $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ muni d'une structure de contact décrite, dans les coordonnées (x, t) , par une 1-forme

$$(5) \quad \alpha = \beta(x) + u(x)dt$$

où β est une 1-forme sur S et $u : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Au voisinage de S la structure de contact est codée par une courbe tracée sur S appelée courbe de découpage.

Soient S une surface dans une variété de dimension 3 et \mathcal{F} un feuilletage singulier localement orientable tracé sur S . Une multicourbe¹ Γ tracée sur S découpe \mathcal{F} s'il existe deux surfaces S_+ et S_- de bord Γ , un champ de vecteurs Y qui dirige \mathcal{F} et une forme volume ω de S tels que²

- (1) $\operatorname{div}_\omega Y > 0$ sur S_+ ;
- (2) $\operatorname{div}_\omega Y < 0$ sur S_- ;
- (3) Y est sortant de S_+ .

Une telle courbe Γ , orientée comme ∂S_+ , est appelée une *courbe de découpage*.

THÉORÈME 1.4 (Giroux [32]). *Soit S une surface plongée dans (V, ξ) . On note \mathcal{F} son feuilletage caractéristique. La surface S est ξ -convexe si et seulement si il existe une courbe Γ qui découpe \mathcal{F} . De plus, si S est convexe et si X est un champ de contact transversal à S , on peut choisir $\Gamma = \{x \in S, X(x) \in \xi(x)\}$. Enfin, si la variété est $S \times \mathbb{R}$ munie de l'équation 5, $\Gamma = \{x \in S, u(x) = 0\}$ est une courbe de découpage.*

La courbe de découpage d'une surface convexe n'est pas unique mais toutes les courbes de découpage d'une même surface sont isotopes (parmi les découpages). Giroux [32] montre que toute surface compacte S peut être rendue convexe par une isotopie \mathcal{C}^∞ -petite. En combinant cette généralité et le théorème 1.5 on obtient une grande liberté dans le choix du feuilletage caractéristique tracé sur une surface (quitte à perturber cette surface).

THÉORÈME 1.5 (Giroux [32]). *Soit S une surface convexe compacte dans une variété de contact. On note Γ une courbe de découpage du feuilletage caractéristique de S . Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier localement orientable découpé par Γ . Alors il existe une isotopie $\delta_s : S \rightarrow V, s \in [0, 1]$, telle que $\delta_s(S)$ soit \mathcal{C}^0 -proche de S et le feuilletage caractéristique de $\delta_1 S$ soit $\delta_1 \mathcal{F}$.*

1. Une multicourbe sur une surface est une union disjointe de courbes fermées simples et d'arcs proprement plongés (dans le cas à bord).

2. La divergence du champ de vecteurs Y pour la forme volume ω est définie par $L_Y \omega = \operatorname{div}_\omega(Y)\omega$.

COROLLAIRE 1.6 (Lemme de réalisation, Giroux [32]). *Soient S une surface convexe dans une variété de contact, Γ une courbe de découpage de S et K une courbe tracée sur S . On suppose que chaque composante de $S \setminus K$ rencontre Γ . Alors il existe une isotopie $\delta_s : S \rightarrow V$ où $s \in [0, 1]$ telle que $\delta_1(K)$ soit legendrienne et $\delta_s(S)$ soit C^0 -proche de S , convexe et de courbe de découpage $\delta_s(\Gamma)$.*

Terminons cette section par un lemme technique permettant de garantir la convexité d'une surface et d'obtenir une courbe de découpage privilégiée en observant les propriétés du champ de Reeb le long de cette surface.

LEMME 1.7. *Soit S une surface compacte dans une variété de contact (V, α) . Si R_α est tangent à S le long d'une courbe lisse Γ et si, le long de Γ , le feuilletage caractéristique de S pointe vers S_+ – la zone où R_α est positivement transverse à S – alors S est convexe de courbe de découpage Γ .*

DÉMONSTRATION. Soit ω une forme volume sur S . On choisit Y dirigeant le feuilletage caractéristique de S tel que $\iota_Y \omega = i^* \alpha$, où i est l'inclusion de S dans V . Alors, $\text{div}_\omega Y \omega = d\iota_Y \omega = i^* d\alpha$ qui est bien positif sur S_+ et négatif sur S_- (zone sur laquelle R est négativement transverse à S). Par hypothèse, Y vérifie les bonnes conditions de transversalité le long de Γ , donc S est convexe. \square

2. Variétés de contact à bord

Les voisinages de surfaces convexes sont parmi les exemples de variétés de contact à bord les plus élémentaires. Ce seront les premiers exemples sur lesquels on calculera l'homologie de contact suturée (chapitre 4) et sur lesquels on appliquera le théorème de recollement de rocade (chapitres 8 et 9). Pour effectuer ces deux opérations, on aura besoin d'une équation de contact presque explicite.

DÉFINITION 1.8. Soit S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ dans une variété de contact. Une équation de contact α sur $S \times [-1, 1]$ est de la forme (F) si

- (1) il existe un voisinage U_i de chaque Γ_i muni de coordonnées

$$(x, y, z) \in [-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times S^1$$

dans lesquelles

- $S \cap U_i \simeq [-x_{\max}, x_{\max}] \times \{0\} \times S^1$;
- $\Gamma_i \simeq \{0\} \times \{0\} \times S^1$;
- $\alpha = f(x)dy + \cos(x)dz$ où $f : [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, vaut -1 au voisinage de $-x_{\max}$, 1 au voisinage de x_{\max} et $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de $x = 0$;

- (2) $\alpha = \beta_+ + dy$ sur $V_+ = S_+ \times [-1, 1] \setminus U$ où $d\beta_+ > 0$ et $U = \bigcup_{i=0}^n U_i$;

- (3) $\alpha = \beta_- - dy$ sur $V_- = S_- \times [-1, 1] \setminus U$ où $d\beta_- < 0$.

La proposition suivante est un cas particulier de la preuve du théorème 1.4 (voir [32, Proposition 2.1]).

PROPOSITION 1.9. *Soit S une surface convexe compacte dans une variété de contact (V, ξ) . Alors, il existe un voisinage $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ de S sur lequel ξ admet une équation de forme (F).*

Passons maintenant à des considérations plus générales sur les variétés de contact à bord. La condition usuellement imposée au bord d'une variété de contact est la convexité. Dans l'exemple de la surface convexe épaissie, les composantes du bord sont $S \times \{1\}$ et $S \times \{-1\}$. Ces deux composantes sont convexes car $\frac{\partial}{\partial y}$ est un champ de contact. Néanmoins pour certaines applications comme la définition de l'homologie de contact suturée ([18], voir chapitre 4), la convexité du bord ne suffit pas et il faut imposer des conditions supplémentaires sur l'équation de contact.

DÉFINITION 1.10 ([18, 2.3, 4.1]). L'équation de contact α est *adaptée* à la surface convexe S munie de la courbe de découpage Γ (on dit aussi que S est *convexe* pour α) si le champ de Reeb associé à α est positivement transverse à S_+ , négativement transverse à S_- , tangent à S et pointe vers S_+ le long de Γ . Symétriquement, la surface S est *concave* pour α si le champ de Reeb associé à α est positivement transverse à S_+ , négativement transverse à S_- , tangent à S et pointe vers S_- le long de Γ .

EXEMPLE 1.11. Dans \mathbb{R}^3 , la forme de contact $\alpha = dz - ydx$ est adaptée à la sphère unité : le champ de Reeb est $\frac{\partial}{\partial z}$ et le feuilletage caractéristique de la sphère unité est singulier aux pôles et admet l'équateur comme courbe de découpage.

Dans l'exemple de la surface épaissie, une équation de la forme (F) n'est adaptée à aucune des composantes de bord. En effet, le champ de Reeb est bien tangent à $S \times \{1\}$ et $S \times \{-1\}$ le long des courbes lisses $\Gamma_i \times \{1\}$ et $\Gamma_i \times \{-1\}$ pour $i = 0, \dots, n$ mais il est tangent à ces courbes. Le procédé permettant de modifier l'équation de contact pour la rendre adaptée au bord a été développé dans [18]. On l'appelle *convexification*. Dans l'exemple de la surface épaissie une perturbation arbitrairement petite de l'équation sous forme (F) permet d'obtenir une équation adaptée au bord. Dans le cas général, ce procédé modifie considérablement la forme de contact au voisinage de la courbe de découpage.

Voyons comment perturber la forme de contact $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$ définie sur $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times S^1$ pour que α soit adaptée le long de $I \times \{1\} \times S^1$ et $I \times \{-1\} \times S^1$. En effectuant cette perturbation dans chacun des ouverts U_i fournis par la définition 1.8, on obtient une perturbation d'une équation de contact de forme (F) sur une surface convexe épaissie rendant l'équation adaptée au bord. Pour cela, considérons

$$\alpha_p = \sin(x)dy + p(x, y) \cos(x)dz$$

où p est une fonction lisse vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) il existe $x_{\max}^p < x_{\max}$ tel que $p = 1$ en dehors de $[-x_{\max}^p, x_{\max}^p] \times [-1, 1]$;
- (2) $p(x, y) = 1 + k(x)l(y)$ où k est une fonction bosse égale à 1 au voisinage de $x = 0$ et l est \mathcal{C}^∞ -petite strictement décroissante sur $[-1, 0]$, nulle en 0 et strictement croissante sur $[0, 1]$.

Pour $p > 0$, α_p est bien une équation de contact. Son champ de Reeb est donné par

$$R_{\alpha_p} = \frac{1}{p(x, y)} \begin{pmatrix} l'(y)k(x) \cos(x) \\ p(x, y) \sin(x) - k'(x)l(y) \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

et donc dans la zone $k = 1$ au voisinage de $x = 0$ on obtient

$$R_{\alpha_p} = \frac{1}{1 + l(y)} \begin{pmatrix} l'(y) \cos(x) \\ (1 + l(y)) \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

et α_p est bien adaptée au bord (voir figure 1).

Dans le cas général, il est plus délicat de rendre une équation de contact adaptée au bord. Cette question est un des aspects clés de la démonstration du théorème 0.8. Le procédé de convexification décrit par Colin, Ghiggini, Honda et Hutchings [18] s'applique dans le cas où l'équation de contact est concave. On en rappelle ici l'énoncé car ce sera le point de départ de la construction de convexification présentée dans la troisième partie de ce texte.

PROPOSITION 1.12 ([18, Proposition 4.4]). *Soit $(M, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de bord concave. Il existe une variété de contact $(M', \xi' = \ker(\alpha'))$ de bord convexe S' telle que*

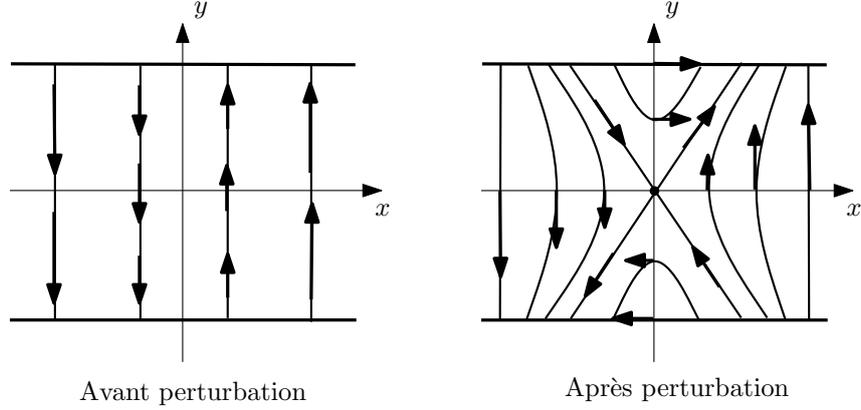


FIGURE 1. Champ de Reeb dans le plan (x, y) au voisinage de $x = 0$. Après perturbation, au voisinage de $(0, 0)$, le champ de Reeb a une composante non nulle sur $\frac{\partial}{\partial z}$.

- (1) $M \hookrightarrow M'$;
- (2) α' est adaptée à S' ;
- (3) (M, ξ) et (M', ξ') sont contactomorphes par un contactomorphisme qui induit l'inclusion sur une petite rétraction de M ;
- (4) un voisinage de $M' \setminus M$ est difféomorphe à une union (un élément par composante connexe de la courbe de découpage) de fermés du produit $[-\eta, \eta] \times S^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ de coordonnées (t, u, v) munis d'une équation de contact de la forme

$$\alpha = h(u)g(v, t)du + f(v, t)dt$$

où g a pour champ hamiltonien X_g associé à la forme symplectique $dv \wedge dt$ donné dans la figure 2.

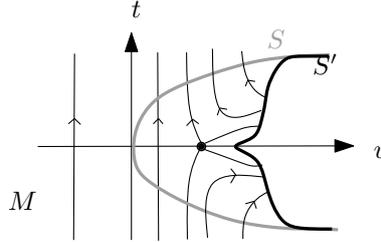


FIGURE 2. modèle de X_g et S'

En particulier, dans chaque plan $u = \text{cst}$, S' est tangente à une orbite périodique de X_g en un unique point et transversale aux autres orbites et, dans ces plans, $R_{\alpha'}$ est positivement colinéaire à X_g . Le procédé de convexification crée pour l'équation α' une orbite périodique hyperbolique par composante connexe concave de la courbe de découpage. Cette orbite est homotope à la composante associée.

3. Orbites périodiques du champ de Reeb

3.1. Orbites périodiques non dégénérées. Soit X un champ de vecteurs sur une variété compacte. On note φ_t son flot au temps t . Considérons une orbite

périodique γ de X de période T , $x_0 \in \gamma$ et $\Sigma = u^{-1}(0)$ un germe de surface transverse à γ en x_0 . Par le théorème des fonctions implicites, il existe $T : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ appelé *temps de premier retour* sur Σ tel que $u(\varphi_{T(x)}(x)) = 0$. L'*application de premier retour* sur Σ est définie par

$$\begin{aligned} f : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \varphi_{T(x)}(x). \end{aligned}$$

L'orbite γ est une *orbite périodique non dégénérée* si $df(x_0)$ n'a pas 1 pour valeur propre. Dans le cas contraire on dit que γ est *dégénérée*. La dégénérescence d'une orbite périodique ne dépend ni du choix du point x_0 ni du choix de la surface transverse Σ .

La proposition classique suivante permet de garantir la genericité des équations de Reeb non dégénérées (c'est-à-dire dont le champ de Reeb est non dégénéré). On pourra en trouver une démonstration dans [20, 7].

PROPOSITION 1.13. *Soit α une forme de contact sur une variété compacte V . Alors il existe $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ lisse et arbitrairement proche de la fonction constante 1 en norme C^∞ telle que $f\alpha$ ait toutes ses orbites périodiques de Reeb non dégénérées.*

3.2. Indice de Conley-Zehnder. L'indice de Conley-Zehnder, introduit dans [21], est à l'origine défini pour les chemins de matrices symplectiques. La description donnée ici s'inspire fortement de [56]. On note $\mathrm{Sp}(2)$ l'ensemble des matrices symplectiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}^*(2)$ les matrices symplectiques n'ayant pas 1 pour valeur propre. L'ensemble $\mathrm{Sp}^*(2)$ a deux composantes connexes contractiles $\mathrm{Sp}^+ = \{A \in \mathrm{Sp}(2), \det(A - I) > 0\}$ et $\mathrm{Sp}^- = \{A \in \mathrm{Sp}(2), \det(A - I) < 0\}$. Soit

$$\mathcal{S}^* = \{R : [0, 1] \rightarrow \mathrm{Sp}(2), R_0 = I \text{ et } R_1 \in \mathrm{Sp}^*(2)\}.$$

On pose

$$W_+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } W_- = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Soit $R \in \mathcal{S}^*$, on prolonge R sur $[1, 2]$ par un chemin dans \mathcal{S}^* tel que $R_2 = W_\pm$. Par décomposition polaire, toute matrice de $R \in \mathrm{Sp}(2)$ s'écrit $R = SO$ où S est symétrique définie positive et O une rotation. On relève en θ_t l'angle de la rotation O_t dans la décomposition polaire $R_t = S_t O_t$. L'*indice de Conley-Zehnder* de R est défini par

$$\mu((R_t)_{t \in [0, 1]}) = \frac{\theta_2 - \theta_0}{\pi}.$$

Comme $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SL}_2$, une matrice symplectique a soit 1, soit -1 , soit λ et $\frac{1}{\lambda}$, soit λ et $\bar{\lambda}$ comme valeurs propres. Par conséquent si R_1 est du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda < 0 \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le prolongement \tilde{R} relie I à W_+ et l'indice de Conley-Zehnder est impair. À l'inverse si R_1 est du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda > 0$$

le prolongement \tilde{R} relie I à W_- et l'indice de Conley-Zehnder est pair.

Soient $(V, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de contact et γ une orbite périodique de R_α non dégénérée. Le long de γ , on choisit une trivialisatoin symplectique de ξ (pour la forme $d\alpha$). Pour tout $T > 0$ et $x_0 \in \gamma$, la différentielle du flot de Reeb φ_t induit une application symplectique entre ξ_{x_0} et $\xi_{\varphi_T(x_0)}$ et donc un chemin de matrices symplectiques $(R_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{S}^*$ dans la trivialisatoin précédente. L'*indice de Conley-Zehnder* de γ dans cette trivialisatoin est $\mu\left(R_{\frac{t}{T}}\right)$ où T est la période de γ . L'indice

de Conley-Zehnder dépend du choix de trivialisations mais sa parité n'en dépend pas.

DÉFINITION 1.14. Un orbite périodique de Reeb de période T est dite *hyperbolique* si $d\varphi_{T|\xi}$ est à valeurs propres réelles de module différent de 1. Elle est dite *elliptique* si $d\varphi_{T|\xi}$ est à valeurs propres complexes non réelles.

Un orbite elliptique est d'indice de Conley-Zehnder impair, une orbite hyperbolique est d'indice de Conley-Zehnder pair si ses valeurs propres sont positives et d'indice de Conley-Zehnder impair si ses valeurs propres sont négatives.

DÉFINITION 1.15. L'orbite de Reeb est une *bonne orbite* si les indices de Conley-Zehnder de tous ses multiples ont la même parité. Dans le cas contraire on parle de *mauvaise orbite*.

Concrètement les mauvaises orbites sont les multiples pairs d'orbites hyperboliques impaires.

4. Rocades et recollement de rocades

DÉFINITION 1.16. Soit S une surface convexe de courbe de découpage Γ . On appelle *arc d'attachement* de (S, Γ) un arc legendrien tracé sur S qui rencontre Γ en exactement trois points : les deux extrémités de l'arc et un point intérieur.

DÉFINITION 1.17 (Honda [45]). Soit S une surface convexe (compacte, sans bord) dans une variété de contact de dimension 3. Une *rocade* appuyée sur S est un demi-disque D plongé dans V , transverse à S , de bord legendrien $\gamma_1 \cup \gamma_2$, tel que $D \cap S = \gamma_1$ soit un arc d'attachement. De plus, le feuilletage caractéristique de D a pour singularités une singularité elliptique³ négative à l'intérieur de γ_1 , deux singularités elliptiques positives aux extrémités de γ_1 et des singularités positives le long de γ_2 alternant singularités elliptiques et hyperboliques (voir figure 3). On dit que γ_1 est *l'arc d'attachement de la rocade*.

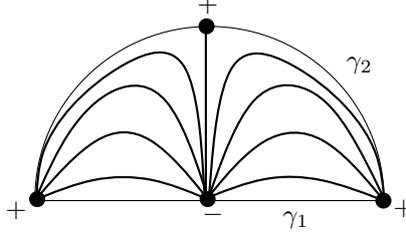


FIGURE 3. Feuilletage caractéristique d'une rocade

PROPOSITION 1.18 (Honda [45]). *Si D est une rocade pour S d'arc d'attachement γ_1 , il existe un voisinage de $S \cup D$ difféomorphe à $S \times [0, 1]$ tel que $S = S \times \{\varepsilon\}$, la structure ξ soit invariante dans la direction transverse à S sur $S \times [0, \varepsilon]$, les surfaces $S \times \{0\}$ et $S \times \{1\}$ soient convexes de courbes de découpage Γ et Γ' où Γ' ne diffère de Γ qu'au voisinage de γ_1 et est obtenue à partir de Γ par l'opération décrite à la figure 4.*

Dans la proposition précédente, $S \times \{1\}$ est obtenue à partir de $S \times \{0\}$ en « bombant » S pour passer au-dessus de la rocade (voir figure 5).

3. Une singularité est dite *elliptique* (resp. *hyperbolique*) si elle correspond à une source ou un puits (resp. à un point selle) pour un champ de vecteurs dirigeant le feuilletage caractéristique fourni par l'équation 4. Une singularité est *positive* si l'orientation du plan de contact et du plan tangent à la surface coïncident et *négative* sinon.

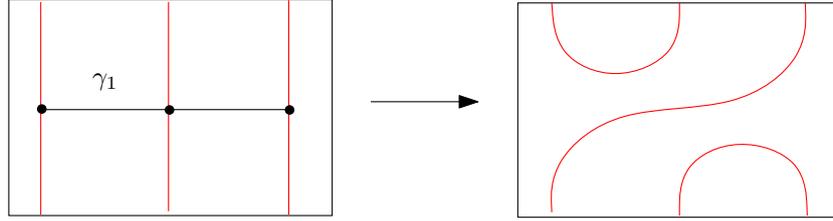
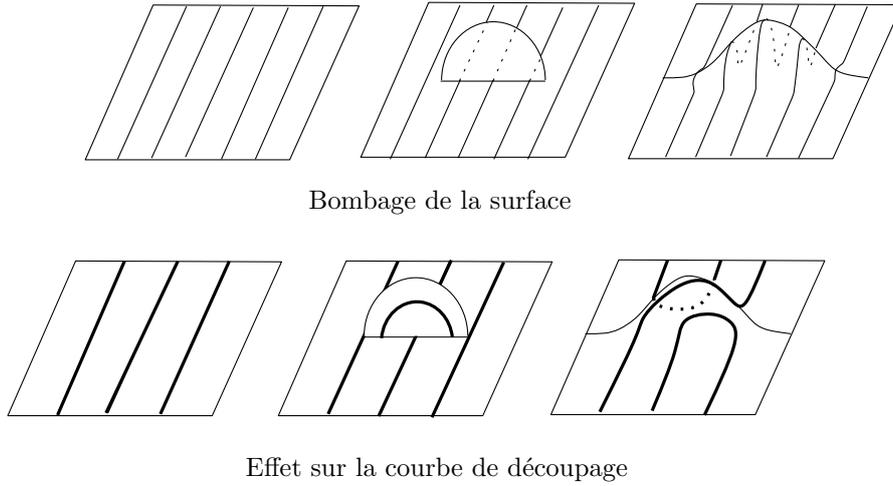
FIGURE 4. Modification de Γ au voisinage de la rocade.

FIGURE 5. Rocado et courbe de découpage

DÉFINITION 1.19. Soit (V, ξ) une variété de contact de bord convexe S de courbe de découpage Γ . Soit γ_1 un arc d'attachement. Un *recollement de rocade le long de γ_1* est une variété de contact (V', ξ') de bord convexe S' prolongeant (V, ξ) telle qu'il existe un voisinage $S \times [0, 1]$ de S' où

- (1) $S' \simeq S \times \{1\}$ et est convexe ;
- (2) $S \times \{0\}$ est une surface obtenue à partir de S en suivant un champ de contact rentrant ;
- (3) il existe une rétraction de contact de $S \times [0, 1]$ sur un voisinage arbitrairement petit de $S \times \{0\} \cup D$ où D est une rocade appuyée sur $S \times \{0\}$ d'arc d'attachement l'image de γ_1 sur $S \times \{0\}$.

La courbe de découpage de S' est alors obtenue à partir de la courbe de découpage de S par la figure 4. La troisième partie de cette thèse est consacrée à la construction d'un modèle explicite de recollement de rocade sur une variété pour lequel on contrôle la dynamique du champ de Reeb.

Il existe deux exemples particuliers de recollement de rocade : le recollement de rocade trivial qui crée une structure de contact difféomorphe à celle de départ et le recollement de rocade vrillé qui crée une structure de contact vrillée.

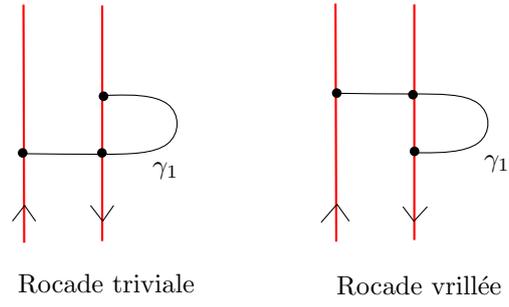


FIGURE 6. Rocades triviale et vrillée

Exemples de variétés de contact

On présente ici les structures de contact qui seront étudiées dans la suite : les structures de contact sur les fibrés en cercles et certaines structures de contact sur le tore plein. Ces variétés de contact ont été étudiées indépendamment par Giroux [35, 34] et Honda [46, 45].

Les fibrés en cercles sont les variétés sur lesquelles on va tester la conjecture de Colin et Honda concernant la croissance quadratique de l'homologie de contact sur les variétés paraboliques (théorème 0.7).

Les structures de contact sur le tore plein sont décrites combinatoirement par l'étude du découpage des disques méridiens. Ces variétés à bord permettront par la suite d'appliquer le théorème de recollement de rocade : elles représentent une classe naturelle d'exemples à considérer car ce sont à la fois des variétés avec des structures de contact relativement simples et une classe stable par certains recollements de rocade.

Dans la section 1, on énonce de façon résumée et partielle des résultats de classification des structures de contact sur les fibrés en cercles. La section 2 est consacrée au cas particulier des structures cloisonnées qui est l'objet du théorème 0.7. On y détermine une équation de contact particulière de ces structures. Enfin, la classification des structures de contact sur le tore plein avec découpage longitudinal est présentée dans la section 3.

1. Classification des structures de contact sur les fibrés en cercles

On s'intéresse ici aux fibrés en cercles orientés sur une surface compacte orientée. Ces fibrés sont décrits par le genre de la base et le nombre d'Euler. On pourra consulter [64] pour le cas général ou [1] dans le cas des fibrés en cercles.

La classification des structures de contact sur les fibrés en cercles est décrite à l'aide de la notion d'*enroulement*. Le long d'une fibre, on possède une classe d'homotopie privilégiée de sections du fibré normal : la classe d'homotopie d'une section constituée de vecteurs qui se projettent sur un même vecteur dans la base. Si la variété considérée n'est pas $S^2 \times S^1$, cette classe est invariante par difféomorphisme isotope à l'identité. L'*enroulement* d'une courbe legendrienne L isotope à la fibre est le nombre de tours que fait ξ le long de L par rapport au champ normal canonique. L'*enroulement de ξ* est le supremum des enroulements des courbes legendriennes isotopes à la fibre.

Une structure S^1 -invariante est une structure de contact invariante par l'action de S^1 le long des fibres. Une structure de contact ξ sur V transversale aux fibres est S^1 -invariante si et seulement s'il existe une équation de ξ dont le champ de Reeb est tangent aux fibres.

REMARQUE 2.1. Par le théorème de Stokes, si ξ est S^1 -invariante et transversale aux fibres et si S est connexe alors toutes les orbites périodiques d'un champ de Reeb tangent aux fibres ont même période.

DÉFINITION 2.2. [35] Une structure de contact ξ sur un fibré en cercles orienté $\pi : V \rightarrow S$ au-dessus d'une surface compacte est *cloisonnée par la multicourbe Γ* si

- (1) Γ est une sous-variété compacte de dimension 1 de S ;
- (2) ξ est transversale aux fibres sur $V \setminus \pi^{-1}(\Gamma)$;
- (3) la surface $\pi^{-1}(\Gamma)$ est transversale à ξ et les feuilles du feuilletage caractéristique sont les fibres.

Soit V connexe, orientée, fibrée en cercles au-dessus d'une surface orientée S de caractéristique d'Euler négative et portant une structure de contact positive. Les figures 1 et 2 résument les principaux résultats de [35]. Les caractérisations comme « tangente aux fibres » sont à comprendre à isotopie près. Par ailleurs $\chi(S)$ désigne la caractéristique d'Euler de S et $\chi(S, V)$ le nombre d'Euler du fibré.

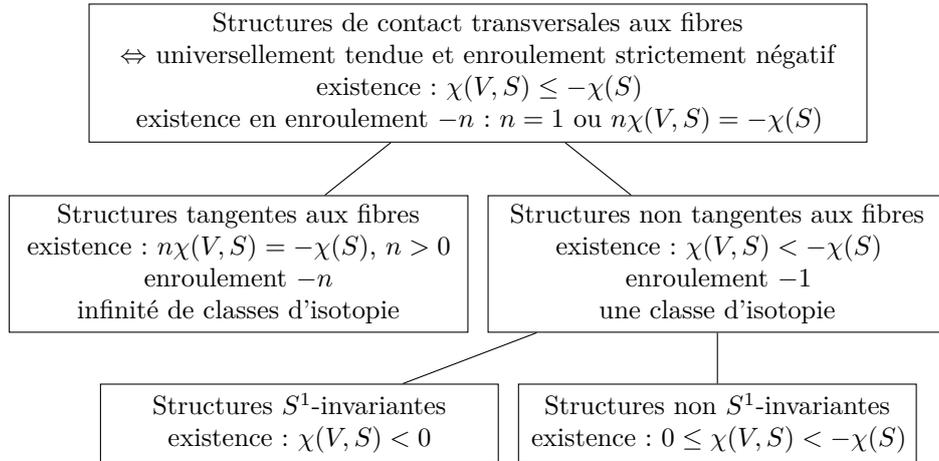


FIGURE 1. Classification des structures de contact transversales aux fibres

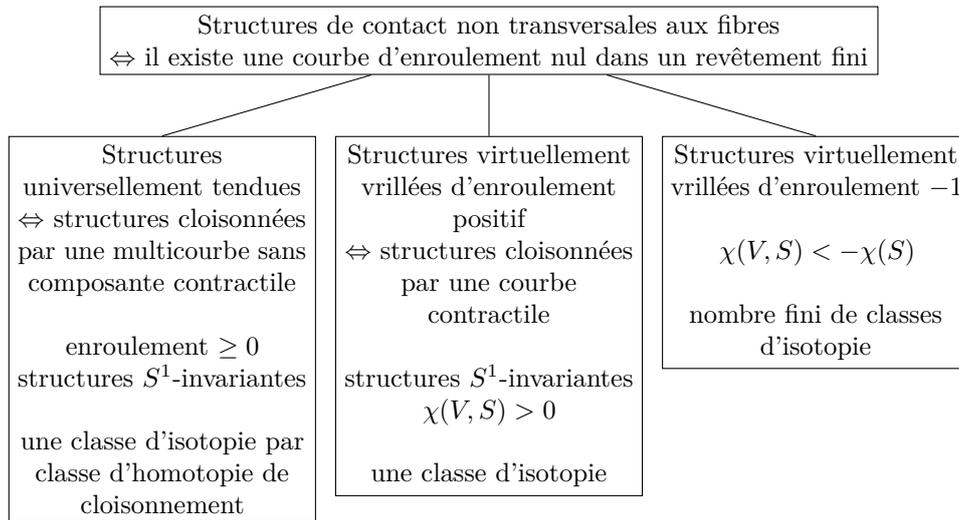


FIGURE 2. Classification des structures de contact tendues non transversales aux fibres

Enfin, énonçons de façon précise le résultat concernant les structures de contact tangentes aux fibres. Ce résultat permettra d'obtenir la croissance de l'homologie de contact des structures tangentes aux fibres dans le chapitre 6.

PROPOSITION 2.3 (Giroux [35]). *Soit V une variété connexe et orientée, fibrée en cercles au-dessus d'une surface quelconque S . L'application qui, à tout revêtement fibré $\rho : V \rightarrow UTS$, associe la structure de contact $\xi = \rho^*\xi_S$ est une bijection de l'espace de revêtement fibrés et orientés $V \rightarrow UTS$ dans l'espace des structures de contact tangentes aux fibrés et coorientées. En outre l'enroulement de $\xi = \rho^*\xi_S$ autour des fibres vaut $-d$, où d est le degré du revêtement.*

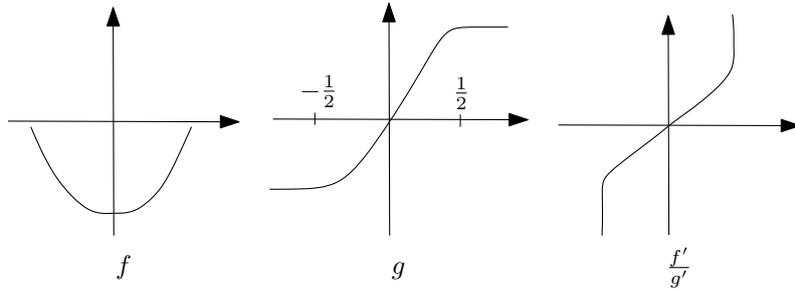
2. Structures cloisonnées

Les structures de contact cloisonnées ressemblent aux structures S^1 -invariantes transversales aux fibres en dehors de l'image réciproque du cloisonnement. Au voisinage de ce cloisonnement, elles sont proches des structures standards sur le tore T^3 . On donne ici une équation de contact particulière qui exploite ces similitudes et permettra de déterminer l'homologie de contact de ces structures (voir chapitre 6).

PROPOSITION 2.4. *Soit ξ une structure de contact sur le fibré en cercles V cloisonnée par une multicourbe Γ non vide et sans composante contractile. Alors, il existe une structure isotope à ξ , d'équation α , et un voisinage $U \simeq]-1, 1[\times \Gamma \times S^1$ de $\pi^{-1}(\Gamma) \simeq \{0\} \times \Gamma \times S^1$ muni de coordonnées (x, y, z) tels que :*

- (1) *la structure associée à α soit cloisonnée par Γ ;*
- (2) *sur $V \setminus U \simeq S_1 \times S^1$ on ait $\alpha = \beta + \varepsilon dz$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant la composante connexe considérée ;*
- (3) *sur U , $\alpha = f(x)dy + g(x)dz$ où f est strictement négative et strictement convexe et g vaut ± 1 au voisinage de ± 1 et est strictement croissante en dehors de ces voisinages avec un point d'inflexion en 0 ;*
- (4) *le changement de trivialisations entre U est un voisinage de $V \setminus U$ soit linéaire (soit de la forme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + ky)$).*

REMARQUE 2.5. Les fonctions f et g vérifient les propriétés graphiques suivantes :



REMARQUE 2.6. Dans U , on alors

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -g'(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}.$$

L'ouvert U est une union de tores épaissis feuilletés par des orbites de Reeb. En dehors de U le champ de Reeb est $\pm \frac{\partial}{\partial z}$.

DÉMONSTRATION. On considère un voisinage $]-1, 1[\times \Gamma \times S^1$ de coordonnées (x, y, z) de $\pi^{-1}(\Gamma) = \{0\} \times \Gamma \times S^1$ dans lequel $\frac{\partial}{\partial x} \in \xi$ et S^1 est la fibre. Dans ces coordonnées, une équation quelconque de ξ est de la forme

$$\alpha = f(x, y, z)dy + g(x, y, z)dz$$

avec $g(0, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) \neq 0$ pour $x \neq 0$. On oriente Γ pour que Γ soit négativement transverse à ξ . On peut alors supposer que $f(0, y, z) = -1$. On définit

$$\alpha_s = \left(sf(x, y, z) + (1-s)f(x, 0, 0) \right) dy + \left(sg(x, y, z) + (1-s)g(x, 0, 0) \right) dz$$

au voisinage de $\{0\} \times \Gamma \times S^1$. Ce sont bien des équations de contact car $f(0, y, z) = f(0, 0, 0)$ et $g(0, y, z) = g(0, 0, 0)$. La méthode de Moser (1.2) fournit un champ de vecteurs X_s défini au voisinage de $\{0\} \times \Gamma \times S^1$ qui vérifie $X_s(0, y, z) = 0$ et est colinéaire à $\frac{\partial}{\partial x}$ car $\xi_s \cap \xi = \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x}$.

On prolonge X_s à $V \times [0, 1]$ en le multipliant par une fonction bosse. On note φ_s le flot de X_s . Il est défini pour tout temps dans $[0, 1]$. Au voisinage de $\{0\} \times \Gamma \times S^1$, la structure de contact définie par $\varphi_s^* \alpha$ coïncide avec la structure de contact définie par α_s . La structure de contact $\varphi_s^* \alpha$ reste transverse aux fibres en dehors de $\{0\} \times \Gamma \times S^1$ car $\varphi_s^* \alpha = f \circ \varphi_s dy + g \circ \varphi_s dz$, φ_s est l'identité sur $\{0\} \times \Gamma \times S^1$ et α est inchangée en dehors de U . Ainsi on a isotopé ξ pour obtenir une nouvelle structure de contact toujours cloisonnée par Γ et qui, dans un voisinage $U' =]-1, 1[\times \Gamma \times S^1$ de $\pi^{-1}(\Gamma)$, a pour équation après reparamétrage

$$\alpha = f(x)dy + g(x)dz$$

avec $g(0, \theta, z) = 0$ et $g \neq 0$ sinon. Comme $g'(0) > 0$ par la condition de contact, on peut imposer $g = -1$ sur $]-1, \frac{1}{2}[$ et $g = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1[$.

Pour chaque composante connexe de Γ , on considère f_0 et g_0 vérifiant les conditions de l'énoncé. On suppose de plus que f_0 et g_0 sont égales à f et g au voisinage de -1 et 1 et que f_0 (resp. g_0) ont les mêmes valeurs pour toutes les composantes connexes de Γ sur $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$. On relève $(f(x), g(x))$ en $\rho(x) \exp(i\theta(x))$ et $(f_0(x), g_0(x))$ en $\rho_0(x) \exp(i\theta_0(x))$. Par la condition de contact θ et θ_0 sont strictement décroissantes et définies sur le même intervalle car g et g_0 ne s'annulent qu'en 0. On crée un chemin de structures de contact en considérant

$$\left((1-s)\rho(x) + s\rho_0(x) \right) \exp \left(i((1-s)\theta(x) + s\theta_0(x)) \right).$$

En utilisant le théorème de Gray, on se ramène à la situation où, sur U' ,

$$\alpha = f_0(x)dy + g_0(x)dz.$$

Soit W un voisinage d'une composante connexe de $V \setminus \left(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \Gamma \times S^1 \right)$. Comme $\Gamma \neq \emptyset$ et S est connexe, W est une variété à bord et donc la fibration est triviale sur W . On l'écrit $S' \times S^1$ et on suppose la trivialisatation choisie pour que, dans des coordonnées polaires adaptées au voisinage de $\partial S'$, le changement de trivialisatation entre W et $]-1, 1[\times \Gamma \times S^1$ soit linéaire au voisinage de chaque composante connexe, c'est-à-dire de la forme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + ky)$. Par conséquent $\alpha = \beta + \varepsilon dz$ au voisinage du bord. Plus généralement $\alpha = \beta_z(x) + h(x, z)dz$ avec $h \neq 0$. On peut donc supposer que $h = \varepsilon$. Le chemin de 1-formes $\alpha_s = s\beta_z(x) + (1-s)\beta_0(x) + \varepsilon dz$ est un chemin de structures de contact. Le théorème de Gray (1.1) transforme ce chemin en isotopie. \square

3. Tores pleins avec découpage longitudinal

Cette section présente un résultat dû indépendamment à Giroux [34] et Honda [45]. On adopte ici la présentation de Mathews [59]. On ne s'intéresse qu'aux structures de contact avec découpage longitudinal au bord.

DÉFINITION 2.7. Un *diagramme de cordes* Γ est un ensemble d'arcs disjoints proprement plongés du disque D^2 à isotopie relative au bord près.

THÉORÈME 2.8 (Giroux, Honda). Soient $F \subset \partial D^2$ un ensemble de cardinal $2n$ et \mathcal{F} un feuilletage singulier découpé par $F \times S^1$ possédant une feuille méridienne intersectant $2n$ fois $F \times S^1$. Les structures de contact tendues sur $D^2 \times S^1$, de bord convexe de feuilletage caractéristique \mathcal{F} et considérées à isotopie relative au bord près sont en bijection avec les diagrammes à n cordes de bord dans F .

De plus, le diagramme associé à une structure est fourni par le découpage de tout disque méridien de bord legendrien intersectant la courbe de découpage du bord en $2n$ points.

En découpant le long d'un disque méridien de bord convexe, on obtient un boule dont la structure de contact est décrite par le courbe de découpage au bord. Par le lemme de réalisation (lemme 1.5), quitte à effectuer une isotopie on peut toujours fixer le feuilletage caractéristique au bord.

PROPOSITION 2.9 (Honda [45]). Soit ξ une structure de contact sur $D \times S^1$ telle que le découpage du bord soit composé de $2n$ courbe longitudinales. Soit D' un disque méridien de bord legendrien intersectant la courbe de découpage du bord en $2n$ points. On considère un arc d'attachement γ contenu dans $\partial D'$. Alors la structure de contact sur $D \times S^1$ obtenue par recollement de rocade le long de γ a une courbe de découpage au bord composée de $2(n-1)$ cercles longitudinaux. De plus, le découpage des disques méridiens s'obtient à partir d'une découpage Γ' de D' en reliant les deux extrémité de Γ' rencontrant γ comme expliqué dans la figure 3 sur un exemple.



FIGURE 3. recollement de rocades et tores pleins

Courbes holomorphes et homologie de contact

Les courbes holomorphes ont été introduites en géométrie symplectique par Gromov [40] en 1985. Les premières variétés considérées étaient des variétés symplectiques compactes. L'utilisation des courbes holomorphes dans la symplectisation d'une variété de contact (variété symplectique non compacte) date des travaux de Hofer sur la conjecture de Weinstein [41]. On s'intéresse ici à l'homologie de contact définie par Eliashberg, Givental et Hofer [25] et on travaille avec \mathbb{Q} pour anneau de référence. Pour plus d'informations, en particulier sur la définition générale de l'homologie de contact sur un anneau de Novikov, on pourra consulter [7]. Dans ce chapitre, on présente l'homologie de contact sans entrer dans les détails de la théorie, en particulier les détails analytiques. Par ailleurs, une partie de ces détails, concernant en particulier les revêtements multiples de courbes holomorphes, n'est pas encore publiée.

Dans la section 1, on rappelle les définitions de base concernant les courbes pseudo-holomorphes ainsi que certaines de leurs propriétés, en particulier la positivité d'intersection. Cette propriété sera fondamentale pour contrôler les courbes holomorphes lors des calculs d'homologie de contact et de croissance dans la deuxième partie de ce document. La section 2 est consacrée à la présentation de l'homologie de contact. On s'intéresse particulièrement à l'homologie de contact cylindrique et à l'homologie de contact linéarisée. Ce sont ces homologies qui permettent de définir la notion de croissance. Enfin, dans la section 3, on définit la croissance et le taux de croissance de l'homologie de contact.

1. Structures presque complexe et courbes holomorphes

On pourra consulter [61] pour plus d'information sur les notions évoquées dans cette section.

1.1. Définitions. Une *structure presque complexe* sur une variété de dimension paire M est la donnée d'une application $J : TM \rightarrow TM$ préservant les fibres telle que $J^2 = -Id$. Une application $u : (V_1, J_1) \rightarrow (V_2, J_2)$ est dite *pseudo-holomorphe* si

$$(6) \quad du \circ J_1 = J_2 \circ du.$$

L'équation 6 est appelée *équation de Cauchy-Riemann*. C'est une équation aux dérivées partielles elliptique. Dans toute la suite on considérera des applications pseudo-holomorphes d'une surface de Riemann (Σ, j) dans une variété de dimension 4 munie d'une structure presque complexe J . Le théorème suivant est à mettre en parallèle avec les propriétés de zéros isolés des applications holomorphes.

THÉORÈME 3.1. *Soient U un ouvert de surface de Riemann (S, j) et (M, J) une variété munie d'une structure presque complexe. Soit $u : (U, j) \rightarrow (M, J)$ une application pseudo-holomorphe non constante. Alors les points critiques de u sont isolés.*

Ce théorème est démontré dans [61, Lemma 2.4.1]. Il existe plusieurs théorèmes concernant les courbes pseudo-holomorphes qui exploitent des propriétés de type

zéros isolés. On pourra par exemple consulter le chapitre 2 de [61] pour plus d'informations.

1.2. Cas des symplectisations. La *symplectisation* d'une variété V munie d'une forme de contact α est la variété $\mathbb{R} \times V$ munie de la forme symplectique $\omega = d(e^\tau \alpha)$ où τ est la coordonnées sur \mathbb{R} . Une structure presque complexe J sur la symplectisation de (V, α) est *adaptée* à α si

- (1) J est τ -invariante ;
- (2) $J \frac{\partial}{\partial \tau} = R_\alpha$;
- (3) $J\xi = \xi$;
- (4) $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne.

Pour définir la différentielle du complexe de l'homologie de contact, on va s'intéresser aux applications pseudo-holomorphes d'une surface de Riemann épointée $(\dot{\Sigma}, j)$ dans la symplectisation $(\mathbb{R} \times V, \omega)$ munie d'une structure presque complexe adaptée. Les exemples de courbes pseudo-holomorphes non constantes les plus simples sont dans ce contexte les courbes au-dessus des orbites de Reeb : si γ est une orbite périodique de Reeb de période T , le *cylindre trivial* associé à γ est l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \times V \\ (s, t) &\longmapsto (Ts, \gamma(Tt)). \end{aligned}$$

Soit $u = (a, f) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times V$, on définit l'aire de contact A et l'énergie de Hofer E par

$$(7) \quad A(u) = \int_{\dot{\Sigma}} u^* d\alpha$$

$$(8) \quad E(u) = \sup \left\{ \int_{\dot{\Sigma}} u^* d(\varphi\alpha), \varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \varphi' \geq 0 \right\}$$

PROPOSITION 3.2 (voir [10, 5.3]). *Si $u = (a, f)$ est pseudo-holomorphe, alors $A(u) \geq 0$ et $E(u) \geq 0$. De plus, si $E(u) = 0$ l'image de f est incluse dans une orbite de Reeb.*

Intéressons-nous maintenant au comportement d'une courbe pseudo-holomorphe au voisinage d'une perforation x de Σ . On choisit des coordonnées polaires (ρ, θ) centrées en x . Soit γ une orbite périodique de Reeb de période T . La courbe $u = (a, f) : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times V$ est *positivement asymptote* à γ en x si

- (1) $\lim_{\rho \rightarrow 0} a(\rho, \theta) = +\infty$;
- (2) $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho, \theta) = \gamma(-T\theta)$.

De même, u est *négativement asymptote* à γ en x si

- (1) $\lim_{\rho \rightarrow 0} a(\rho, \theta) = -\infty$;
- (2) $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho, \theta) = \gamma(T\theta)$.

On suppose maintenant que la forme de contact sur V est non dégénérée.

THÉORÈME 3.3 (Hofer [41, Theorem 31]). *Soit $u : (\dot{\Sigma}, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$, une courbe holomorphe d'énergie de Hofer finie. Alors, en chaque perforation, u est asymptote à une orbite périodique de Reeb.*

PROPOSITION 3.4 (voir [10, 5.8]). *Soit $u : \dot{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R} \times V$, une courbe holomorphe d'énergie finie positivement asymptote aux orbites $\gamma_1^+, \dots, \gamma_{n_+}^+$ et négativement*

asymptote aux orbites $\gamma_1^-, \dots, \gamma_{n_-}^-$. Alors

$$(9) \quad A(u) = \sum_{i=1}^{n_+} \mathcal{A}(\gamma_i^+) - \sum_{i=1}^{n_-} \mathcal{A}(\gamma_i^-)$$

$$(10) \quad E(u) = \sum_{i=1}^{n_+} \mathcal{A}(\gamma_i^+)$$

où $\mathcal{A}(\gamma)$ est la période de l'orbite périodique γ .

REMARQUE 3.5. $\mathcal{A}(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha$ est l'action associée à l'homologie de contact.

Pour terminer cette section, on énonce un résultat du type zéros isolés dans la cadre de la symplectisation. La démonstration est analogue à celle de 3.1.

PROPOSITION 3.6. Soient (V, ξ) une variété de contact, α une équation de ξ et J une structure presque-complexe adaptée sur la symplectisation $(\mathbb{R} \times V, d(e^\tau \alpha))$. On considère la structure complexe standard j sur $\mathbb{R} \times S^1$. Pour toute application pseudo-holomorphe $u : (\mathbb{R} \times S^1, j) \rightarrow (R \times V, J)$ qui n'est pas un cylindre trivial ni une constante, les couples $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$ tels que $\frac{\partial}{\partial \tau} \in \text{im}(du(s, t))$ sont isolés.

1.3. Positivité d'intersection. La positivité d'intersection de deux courbes holomorphes en dimension 4 a été établie par Gromov [40] et McDuff [60]. Elle garantit que deux courbes J -holomorphes distinctes C et C' dans une variété presque complexe (V, J) de dimension 4 ont un nombre fini de points d'intersection et que chacun de ces points contribue de façon strictement positive à l'intersection algébrique $C \cdot C'$. On pourra consulter [61] pour des énoncés alternatifs ou plus précis des propriétés d'intersections de deux courbes holomorphes en dimension 4.

Dans le cas d'une intersection transverse de deux courbes en un point qui est régulier pour chacune de ces courbes, la positivité d'intersection est évidente. En effet, notons p ce point d'intersection et soient $v \in T_p C$ et $v' \in T_p C'$. Alors (v, Jv) et (v', Jv') sont des bases directes de $T_p C$ et $T_p C'$ respectivement et (v, Jv, v', Jv') est une base directe de $T_p V$ par définition de l'orientation associée à J . On n'utilisera ici la positivité d'intersection que sous sa forme la plus simple.

La suite de cette section est consacrée à l'étude de quelques conséquences élémentaires de la positivité d'intersection. La motivation principale est d'obtenir des critères qui garantiront l'absence de certaines courbes holomorphes dans des parties d'une variété. Pour cela, on se place dans la symplectisation d'une variété de contact (éventuellement à bord) et on intersecte une courbe holomorphe avec les courbes holomorphes les plus simples à notre disposition : les courbes au-dessus d'une orbite de Reeb. Dans le cas régulier la positivité d'intersection se reformule de la façon suivante.

LEMME 3.7. Soient (V, ξ) une variété de contact munie d'une équation de contact α et J une structure presque complexe adaptée sur la symplectisation $(\mathbb{R} \times V, d(e^\tau \alpha))$. Soient $u = (a, f)$ une courbe pseudo-holomorphe définie d'un ouvert U de \mathbb{C} dans $(\mathbb{R} \times V, J)$ et $p \in U$ tel que df_p soit injective et transverse à $R(f(p))$. Alors, $R(f(p))$ est positivement transverse à df_p .

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow V$ un arc d'orbite de Reeb tel que $\gamma(0) = f(p)$. Considérons la courbe pseudo-holomorphe

$$v : \mathbb{R} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R} \times V \\ (s, t) \longmapsto (s + f(p), \gamma(t)).$$

Les courbes u et v sont transverses au point $u(p)$. Or, en $u(p)$, le plan tangent à v est orienté par $(\frac{\partial}{\partial \tau}, R(f(p)))$. De plus la projection sur V est régulière en ce point par injectivité de df_p . La positivité d'intersection permet de conclure. \square

Les hypothèses « df_p injective et transverse à $R(f(p))$ » sont vérifiées en dehors de points isolés comme le montrent les propositions 3.1 et 3.6.

1.3.1. *Positivité d'intersection et tores feuilletés par des orbites de Reeb.* Soit V une variété de contact possédant une carte $I \times S^1 \times S^1$ de coordonnées (x, y, z) munie de l'équation de contact $\alpha = f(x)d\theta + g(x)dz$. On suppose que les tores $\{*\} \times S^1 \times S^1$ sont incompressibles¹ dans V . Soit $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times V$ un cylindre holomorphe d'énergie finie ayant pour orbites périodiques asymptotes γ_+ et γ_- . On suppose que pour tout $x \in I$, u rencontre $\mathbb{R} \times \{x\} \times S^1 \times S^1 = \mathbb{R} \times T_x$.

LEMME 3.8. *Quitte à prendre I plus petit, pour tout $x_0 \in I$*

$$u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap (\mathbb{R} \times T_{x_0}))$$

est une union de cercles lisses homotopes à $\{\} \times S^1$.*

Soit C un des cercles fournis par 3.8, on l'oriente comme $\{*\} \times S^1$, il induit une classe d'homotopie sur T_{x_0} . On note p un vecteur dirigeant un représentant linéaire de cette classe. Si A est un voisinage collier de C , on note A_{\pm} les deux composantes connexes de $A \setminus C$ respectivement dans la composante connexe de $\mathbb{R} \times S^1 \subset C$ asymptote à $\{\pm\infty\} \times S^1$.

LEMME 3.9. *Si (p, R) définit l'orientation de T_{x_0} alors*

$$u(A_-) \subset]x, x_0[\times S^1 \times S^1 \text{ et } u(A_+) \subset]x_0, x[\times S^1 \times S^1.$$

Si non

$$u(A_-) \subset]x_0, x[\times S^1 \times S^1 \text{ et } u(A_+) \subset]x, x_0[\times S^1 \times S^1.$$

Autrement dit, on sait dans quel sens un cylindre holomorphe traverse un cylindre feuilleté par des orbites de Reeb. Ce lemme sera utilisé dans le chapitre 6.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.8. Les points tels que $du(s, t) \neq 0$ et les points tels que $\frac{\partial}{\partial \tau} \in \text{im}(du(s, t))$ sont isolés dans $\mathbb{R} \times S^1$. Quitte à réduire I , $I \times S^1 \times S^1$ ne rencontre pas des voisinages de γ_+ et γ_- et donc $u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap I \times S^1 \times S^1)$ est inclus dans un compact de $\mathbb{R} \times S^1$ et ainsi les points à éviter sont en nombre fini.

Soient $x_0 \in I$ et $(s, t) \in \mathbb{R} \times S^1$ tels que $u(s, t) \in \mathbb{R} \times T_{x_0}$. Comme $\frac{\partial}{\partial \tau} \notin \text{im}(du(s, t))$ et u est holomorphe, $R(s, t) \notin \text{im}(du(s, t))$ et il en est de même pour toute combinaison linéaire de R et $\frac{\partial}{\partial \tau}$. Donc

$$\text{Vect} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, R_{u(s, t)} \right) \oplus \text{im}(d_{(s, t)}u) = T_{u(s, t)}(\mathbb{R} \times V)$$

car $du(s, t) \neq 0$. Ainsi $\text{im}(du) + T(\mathbb{R} \times T_{x_0}) = T_u(\mathbb{R} \times V)$ et par transversalité

$$u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap (\mathbb{R} \times T_{x_0}))$$

est une sous-variété compacte de $\mathbb{R} \times S^1$ de dimension 1. C'est donc une union de cercles.

Si on suppose par l'absurde qu'il existe un cercle contractile C , alors $u(C) = c$ est aussi contractile dans $\mathbb{R} \times V$. Or $c \subset \mathbb{R} \times T_{x_0}$ et T_{x_0} est incompressible. Par conséquent c est aussi contractile dans $\mathbb{R} \times T_{x_0}$. On considère la projection de c sur T_{x_0} . Cette projection est régulière car $\frac{\partial}{\partial \tau} \notin \text{im}(du)$. Comme $R \notin \text{im}(du)$, la projection est transverse à R . Or T_{x_0} est feuilleté par les orbites de Reeb et donc la projection de c ne peut pas être contractile dans T_{x_0} . Comme le cercle obtenu est une sous-variété non contractile (et qu'il ne s'auto-intersecte pas) il est homotope à $\{*\} \times S^1$. \square

1. Un tore est *incompressible* dans une variété si son π_1 s'injecte dans le π_1 de la variété

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.9. On considère un cercle C que l'on paramètre par $C(t)$. On note c la projection de $u(C)$ sur T_{x_0} . Cette courbe est régulière et transverse à R . Donc si la base $(c'(t), R(c(t)))$ définit l'orientation de T_{x_0} en un point t , elle la définit en tous les points de c . Alors (p, R) définit l'orientation de T_{r_0} si et seulement si $(c'(t), R(c(t)))$ définit l'orientation.

$u(A_{\pm})$ est connexe et donc inclus dans $]x_0, x[\times S^1 \times S^1$ ou dans $]x, x_0[\times S^1 \times S^1$. Pour déterminer la composante connexe précise, on utilise la positivité d'intersection des courbes holomorphes en dimension 4 : le champ de Reeb intersecte positivement $u(A_{\pm})$. Soit V tangent à $\mathbb{R} \times S^1$ en $C(t)$ tel que $(V, C'(t))$ définisse l'orientation (V pointe vers A_+). On note v son image dans $I \times S^1 \times S^1$. On a $(v, c'(t), R)$ qui définit l'orientation. Si (p, R) définit l'orientation de T_{x_0} , $(c'(t), R)$ définit aussi l'orientation et donc la composante sur $\frac{\partial}{\partial r}$ de v est positive. Réciproquement si (p, R) ne définit pas l'orientation de T_{x_0} , $(c'(t), R)$ ne définit pas non plus l'orientation et donc la composante sur $\frac{\partial}{\partial x}$ de v est négative. \square

1.3.2. *Positivité d'intersection et cordes de Reeb.* Soient $(V, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact à bord non vide et α une équation de contact. On suppose qu'il existe deux ensembles d'intérieur non vide X_+ et X_- qui sont réunion de cordes de Reeb de ∂V . Soit J une structure presque complexe adaptée à α sur $(\mathbb{R} \times V, de^\tau \alpha)$.

LEMME 3.10. *Soit $u : (\mathbb{R} \times S^1, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$ un cylindre pseudo-holomorphe d'énergie bornée asymptote à γ_+ et γ_- tel que toute corde de X_{\pm} soit homotope parmi les courbes proprement plongées de $V \setminus (\gamma_+ \cup \gamma_-)$ à l'opposé d'une corde de l'intérieur de X_{\mp} . Alors u ne rencontre pas l'intérieur de X_+ et X_- .*

DÉMONSTRATION. Une corde de Reeb générique est transverse à u puisque les points où $du = 0$ ou $\text{im}(du)$ contient R sont isolés (résultats 3.1 et 3.6). Soit c_+ une corde de X_+ rencontrant u transversalement. Soit c_- une corde de X_- rencontrant u transversalement telle qu'il existe un chemin c_t de courbes proprement plongées entre c_+ et $-c_-$ ne rencontrant pas $V \setminus (\gamma_+ \cup \gamma_-)$. Par positivité d'intersection, l'intersection entre u et c_{\pm} est positive et strictement positive s'il y a intersection. Or l'intersection (homologique) de u et c_t est constante et par conséquent nulle. \square

2. Homologie de contact

2.1. **Homologie de contact totale.** Soit V une variété de contact munie d'une équation de contact non dégénérée. On décrit ici brièvement le complexe de l'homologie de contact totale $(A_*(V, \alpha), \partial_J)$ introduit par Eliashberg, Givental et Hofer [25]. Le complexe de chaînes $A_*(V, \alpha)$ est la \mathbb{Q} -algèbre super-commutative engendrée par les bonnes orbites périodiques du champ de Reeb R_{α} (on considère ici les orbites périodiques simples et leurs bons multiples). Les orbites périodiques sont relativement graduées par l'indice de Conley-Zehnder. On choisit une structure presque complexe J sur la symplectisation adaptée à α . Pour définir ∂ on considère l'ensemble des classes d'équivalences (par reparamétrisation de la source) de solutions de l'équation de Cauchy-Riemann pour J qui sont positivement asymptotes à γ , négativement asymptotes à $\gamma'_1 \dots \gamma'_n$ et dans la classe d'homologie relative $[Z]$. On le note

$$(11) \quad \mathcal{M}_{[Z]}(J, \gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n).$$

Cet ensemble est soumis à l'action par translation de \mathbb{R} .

HYPOTHÈSE H. *Il existe un modèle de perturbation abstraite de l'équation de Cauchy-Riemann tel que*

$$\overline{\mathcal{M}}_{[Z]}(J, \gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n) = \mathcal{M}_{[Z]}(J, \gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n) / \mathbb{R}$$

soit une union de variétés branchées à coins de poids rationnels et de dimensions données par $[Z]$ et les indices de Conley-Zehnder des courbes asymptotes.

La théorie de Fredholm au voisinage des revêtements multiples de courbes holomorphes pose encore problème et les perturbations abstraites ne sont pas traitées en toute généralité. Il existe néanmoins des modèles dus à Fukaya et Ono [29], Liu et Tian [57], Hofer, Wysocki et Zehnder [42, 44, 43] ([43] est annoncé dans [44]) ou encore Cieliebak et Oancea dans le cadre de l'homologie de contact équivariante [15] (voir [12]) ainsi que des résultats partiels de transversalité [22].

On note $n_{\gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n}$ la somme pondérée et signée [25, 11] pour toutes les classes d'homologie relatives $[Z]$ des éléments de $\overline{\mathcal{M}}_{[Z]}(J, \gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ de dimension 0. La différentielle d'une orbite périodique γ est donnée par

$$(12) \quad \partial\gamma = \sum_{\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}} \frac{n_{\gamma, \gamma'_1, \dots, \gamma'_n}}{i_1! \dots i_l! \kappa(\gamma'_1) \dots \kappa(\gamma'_n)} \gamma'_1 \dots \gamma'_n$$

où $i_1 \dots i_l$ sont les multiplicités de l'ensemble $\{\gamma'_1 \dots \gamma'_n\}$ et $\kappa(\gamma)$ est la multiplicité de l'orbite γ . On étend la formule par la règle de Leibniz.

Sous l'hypothèse H, on espère obtenir le résultat suivant : s'il existe un ouvert U de la symplectisation contenant toutes les images des courbes J -holomorphes positivement asymptotes à γ et négativement asymptotes à $\gamma'_1 \dots \gamma'_n$ alors les solutions obtenues pour toute perturbation abstraite assez petite de l'équation de Cauchy-Riemann vérifient aussi cette propriété.

L'hypothèse H permet obtenir l'existence et l'invariance de l'homologie de contact. Dans ce mémoire, certains résultats s'appuient sur cette hypothèse H.

THÉORÈME 3.11 (Eliashberg-Givental-Hofer). *Sous l'hypothèse H,*

- (1) $\partial^2 = 0$;
- (2) *l'homologie $HC_*(V, \xi)$ associée est indépendante des choix d'équation de contact de ξ , de structure presque complexe J et de perturbation abstraite.*

REMARQUE 3.12. Sans l'hypothèse H, si, pour une équation de contact α , on a $\partial^2 = 0$, on définit l'homologie de contact associée à la forme α et on la note $HC_*(V, \alpha)$.

Précisons maintenant les propriétés des morphismes qui existent entre les complexes associés à des équations de contact et à des structures presque complexes adaptées différentes. On pourra consulter [5] ou [20] pour des descriptions plus détaillées de ces applications. Soit α une équation de contact non dégénérée sur (V, ξ) et J une structure presque complexe adaptée. Pour tout $c > 0$, on définit une nouvelle structure presque complexe J^c sur la symplectisation par $J_{|\xi}^c = J_{|\xi}$ et $J^c \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{R\alpha}{c}$. La structure J^c est adaptée à l'équation de contact $c\alpha$ et le difféomorphisme

$$\varphi_c : \mathbb{R} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \times V \\ (\tau, x) \longmapsto (c\tau, x)$$

envoie toute courbe J -holomorphe sur une courbe J^c -holomorphe. Par conséquent, les complexes $(A_*(V, \alpha, J), \partial)$ et $(A_*(V, c\alpha, J^c), \partial)$ s'identifient en associant les orbites périodiques de Reeb géométriquement. On note $\theta(\alpha, J, c)$ cette application et $\Theta(\alpha, J, c)$ l'application induite en homologie.

Soient α_1 et α_0 deux équations non dégénérées homotopes. Il existe $c > 0$ et une homotopie $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_t = c\alpha_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t = \alpha_1$ et $d\alpha_\tau \wedge d\alpha_\tau > 0$ dans $\mathbb{R} \times V$. On choisit une structure presque complexe J adaptée à $d\alpha_\tau$ qui interpole entre des structures presque complexes J_1 et J_0^c adaptées à α_1 et $c\alpha_0$. Il existe un morphisme de chaînes

$$(13) \quad \psi((\alpha_1, J_1), (c\alpha_0, J_0^c)) : (A_*(V, \alpha_1, J_1), \partial) \rightarrow (A_*(V, c\alpha_0, J_0^c), \partial)$$

obtenu en comptant des courbes J -holomorphes et qui diminue l'action (par le théorème de Stokes). Le morphisme

$$(14) \quad \Psi((\alpha_1, J_1), (c\alpha_0, J_0^c)) : HC_*(V, \alpha_1, J_1) \rightarrow HC_*(V, c\alpha_0, J_0^c).$$

induit en homologie est indépendant des choix précédents.

THÉORÈME 3.13 (Eliashberg-Givental-Hofer). *Soit V une variété close de dimension 3. Sous l'hypothèse H*

(1) *Si $\Psi((\alpha_2, J_2), (\alpha_1, J_1))$ et $\Psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0))$ sont bien définis alors*

$$\Psi((\alpha_2, J_2), (\alpha_0, J_0)) = \Psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0)) \circ \Psi((\alpha_2, J_2), (\alpha_1, J_1)).$$

(2) *$\Psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_1, J_1'))$ et $\Psi((\alpha_1, J_1'), (\alpha_1, J_1))$ existent.*

(3) *Pour tout $c > 0$,*

$$\Theta(\alpha_0, J_0, c) \circ \Psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0)) = \Psi((c\alpha_1, J_1^c), (c\alpha_0, J_0^c)) \circ \Theta(\alpha_1, J_1, c).$$

(4) *Soit $c < 1$, on peut choisir $\psi((\alpha, J), (c\alpha, J^c)) = \theta(\alpha, J, c)$.*

Terminons cette section en donnant quelques éléments de preuve de ce théorème. Pour la propriété 3, on considère une structure presque complexe J permettant de définir $\psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0))$ et associée à une homotopie notée α_t . On considère l'homotopie $c\alpha_{\frac{t}{c}}$ et la structure adaptée J^c définie par

$$J^c(\tau, x) = J\left(\frac{\tau}{c}, x\right) \text{ sur } \xi_{\frac{\tau}{c}}$$

$$J^c(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{c} R_{\alpha_{\frac{\tau}{c}}}$$

Le difféomorphisme $(\tau, x) \mapsto (c\tau, x)$ envoie les courbes J -holomorphes sur les courbes J^c -holomorphes.

Pour la propriété 4, on considère un chemin $\alpha_t = c(t)\alpha_0$ entre $c\alpha_0$ et α_0 avec $t \rightarrow c(t)$ croissante. Soient J_0 une structure presque complexe adaptée à α_0 et C une primitive de c . La structure presque complexe définie par

$$J(\tau, x) = J_0(C^{-1}(\tau), x) \text{ sur } \xi$$

$$J(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{c(C^{-1}(\tau))} R_{\alpha_0}(x)$$

est adaptée à α_t . Le difféomorphisme $(\tau, x) \mapsto (C(\tau), x)$ envoie les courbes J_0 -holomorphes sur les courbes J -holomorphes. Or les seules courbes J_0 -holomorphes considérées pour définir $\Psi((\alpha_0, J_0), (\alpha_0, J_0))$ sont les cylindres triviaux.

2.2. Homologie de contact cylindrique. Soit V une variété de contact munie d'une équation de contact non dégénérée et hypertendue. Le complexe de l'homologie de contact cylindrique est noté $(C_*^{\text{cyl}}(V, \alpha, J), \partial)$ où $C_*^{\text{cyl}}(V, \alpha, J)$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les bonnes orbites périodiques du champ de Reeb R_α . La différentielle d'une orbite périodique γ est donnée par la formule

$$(15) \quad \partial\gamma = \sum_{\gamma'} \frac{n_{\gamma, \gamma'}}{\kappa(\gamma')} \gamma'.$$

Dans le cas de l'homologie cylindrique, les revêtements multiples de cylindres holomorphes posent encore problème, l'hypothèse H se traduit de la façon suivante.

THÉORÈME 3.14 (Eliashberg-Givental-Hofer). *Sous l'hypothèse H,*

(1) $\partial^2 = 0$;

(2) *l'homologie $HC_*^{\text{cyl}}(V, \xi)$ associée est indépendante des choix d'équation de contact hypertendue de ξ , de structure presque complexe J et de perturbation abstraite.*

Il existe néanmoins une version partielle de l'homologie de contact cylindrique pour laquelle l'homologie de contact est bien définie et invariante.

DÉFINITION 3.15. Soit Λ un ensemble inclus dans le groupe d'homotopie libre de V . L'*homologie cylindrique partielle* associée à Λ est l'homologie du complexe engendré par les orbites périodiques dont la classe d'homotopie est dans Λ et dont la différentielle est obtenue par restriction de la différentielle de l'homologie de contact cylindrique.

Si Λ est inclus dans l'ensemble des classes d'homotopies primitives, les travaux de Dragnev [22, Corollary 1] garantissent que pour un choix de structure presque complexe adaptée générique, l'homologie de contact $HC_*^\Lambda(V, \alpha, J)$ est bien définie et invariante parmi les choix de formes hypertendues : si une orbite périodique de Reeb est dans une classe primitive, alors toute courbe pseudo-holomorphe asymptote à cette orbite est « quelque part injective » (somewhere injective).

FAIT 3.16. Les morphismes définis dans 3.13 induisent des morphismes ψ^{cyl} et Ψ^{cyl} vérifiant les mêmes propriétés en restriction au complexe et à l'homologie cylindrique.

2.3. Homologie de contact linéarisée. L'homologie de contact cylindrique est un cas particulier d'homologie de contact linéarisée obtenue à partir d'une augmentation. Elle a été introduite par Chekanov [14] dans le cadre de l'homologie legendrienne des nœuds de \mathbb{R}^3 . Elle est développée dans le cas de l'homologie de contact dans [9]. On pourra aussi consulter [20].

DÉFINITION 3.17. Une *augmentation* est un homomorphisme de \mathbb{Q} -algèbre $(A, \partial) \rightarrow (\mathbb{Q}, 0)$ qui est aussi un morphisme de chaîne.

Si il existe une augmentation ε de (A, ∂) alors, en effectuant le « changement de coordonnées » $a \mapsto \bar{a} = a - \varepsilon(a)$ dans (A, ∂) , on obtient un complexe $(A^\varepsilon(V, \alpha, J), \partial^\varepsilon)$. On écrit $\partial^\varepsilon = \partial_1^\varepsilon + \partial_2^\varepsilon + \dots$ en utilisant la filtration par la longueur des mots en les générateurs de $A^\varepsilon(V, \alpha, J)$. En particulier, on a $\partial_0^\varepsilon = 0$.

PROPOSITION 3.18 (Bourgeois-Ekholm-Eliashberg). *Pour toute augmentation ε , on a $(\partial_1^\varepsilon)^2 = 0$.*

DÉFINITION 3.19. L'homologie de contact *linéarisée* $HC^\varepsilon(V, \alpha, J)$ associée à l'augmentation ε est l'homologie de complexe composé du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les $\bar{\gamma}$ et la différentielle ∂_1^ε .

PROPOSITION 3.20. *Sous l'hypothèse H , si α est non dégénérée et hypertendue, le morphisme trivial est une augmentation. Dans ce cas, l'homologie de contact linéarisée est l'homologie cylindrique.*

Soient α_0 et α_1 deux équations de contact non dégénérées homotopes et

$$\varphi : (A(V, \alpha_1, J_1), \partial) \rightarrow (A(V, \alpha_0, J_0), \partial)$$

un morphisme de chaîne. Si le complexe $(A(V, \alpha_0, J_0), \partial)$ admet une augmentation ε_0 alors φ permet de construire une *augmentation tirée en arrière* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \circ \varphi$ sur $(A(V, \alpha_1, J_1), \partial)$. Les morphismes ψ et Ψ étudiés dans le théorème 3.13 induisent ainsi des morphismes ψ^{ε_0} entre les complexes linéarisés et Ψ^{ε_0} entre leurs homologies vérifiant des propriétés analogues à celle énoncées dans 3.13. On définit de même θ^{ε_0} et Θ^{ε_0} .

THÉORÈME 3.21 (Bourgeois-Ekholm-Eliashberg, voir [20, Theorem 3.2]). *Sous l'hypothèse H .*

(1) L'ensemble des homologies de contact linéarisées

$$\{HC^\varepsilon(V, \alpha, J), \varepsilon \text{ augmentation de } (A_*(V, \alpha, J), \partial)\}$$

est un invariant de la classe d'isotopie de la structure de contact $\xi = \ker(\alpha)$.

(2) Soient $\varphi_1, \varphi_2 : (A(V, \alpha_1, J_1), \partial) \rightarrow (A(V, \alpha_0, J_0), \partial)$ deux morphismes de chaînes homotopes et ε_0 une augmentation de $(A(V, \alpha_0, J_0))$. On note ε_1 et ε_2 les augmentations tirées en arrière par φ_1 et φ_2 . Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : (A_*^{\varepsilon_1}(V, \alpha_1, J_1), \partial) &\longrightarrow (A_*^{\varepsilon_2}(V, \alpha_1, J_1), \partial) \\ \gamma - \varepsilon_1(\gamma) &\longmapsto \gamma - \varepsilon_2(\gamma) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en homologie tel que

$$\begin{array}{ccc} HC_*^{\varepsilon_1}(V, \alpha_1, J_1) & \xrightarrow{\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} & HC_*^{\varepsilon_2}(V, \alpha_1, J_1) \\ \Phi_1 \searrow & & \swarrow \Phi_2 \\ & HC_*^{\varepsilon_0}(V, \alpha_0, J_0) & \end{array}$$

commute où Φ_1 et Φ_2 sont les morphismes induits en homologie par φ_1 et φ_2 .

Les augmentations ε_1 et ε_2 du second point sont dites *homotopes*, on pourra consulter [20, 3.2] pour une définition générale.

3. Croissance de l'homologie de contact

La croissance de l'homologie de contact est définie à partir de l'homologie de contact cylindrique sur \mathbb{Q} ou, plus généralement, d'une homologie de contact linéarisée. C'est un invariant plus facile à calculer que l'homologie de contact car pour le déterminer il peut suffire d'estimer le nombre d'orbites périodiques de Reeb et il n'est pas toujours nécessaire de résoudre les équations de Cauchy-Riemann associées au calcul de la différentielle. Les concepts présentés dans cette section seront utilisés dans le chapitre 7 pour garantir une croissance exponentielle du nombre d'orbites périodiques de Reeb (avec la période). Dans ce chapitre, on déterminera la croissance de l'homologie de contact dans un cas où on ne sait pas la calculer explicitement.

La croissance de l'homologie de contact a été introduite par Bourgeois et Colin [8, 3.6]. L'analogue en homologie symplectique a été défini par Seidel [66] et développé par McLean [62]. Ce dernier montre que des fibrés cotangents ne sont pas symplectomorphes à des variétés affines lisses en déterminant que les taux de croissance de l'homologie symplectique associée à ces variétés sont différents.

3.1. Définitions préliminaires. Commençons par définir précisément les croissances et taux de croissance qui seront utilisés dans la suite de ce texte.

DÉFINITION 3.22. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. On dit que la croissance de f est *polynomiale de degré $\leq n$* s'il existe $a > 0$ tel que pour tout x , on ait $f(x) \leq ax^n$. On dit que la croissance de f est *exponentielle* s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout x , on ait $f(x) \geq a \exp(bx)$.

Les deux situations présentées dans la définition 3.22 ne couvrent pas tous les cas. Pour une présentation plus complète, on utilise la notion de taux de croissance. On pourra consulter [52] pour plus de détails concernant les taux de croissance dans un cadre plus topologique.

DÉFINITION 3.23. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, le *taux de croissance de f* est

$$\Gamma(f) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\max(f(x), 1))}{\log(x)}.$$

Le taux de croissance considéré ici est polynomial. Il existe aussi un taux de croissance exponentiel défini par

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\max(f(x), 1))}{x}.$$

On verra pourquoi le taux de croissance exponentiel n'est pas adapté par la suite.

FAIT 3.24. Si f est à croissance exponentielle alors $\Gamma(f) = +\infty$. Si f admet une croissance polynomiale de degré n , $\Gamma(f) \leq n$.

3.2. Filtration par l'action. La présentation algébrique est inspirée de [62]. On pourra consulter [36, Chapitre I] pour plus de détails sur les préliminaires algébriques.

3.2.1. *Préliminaires algébriques.* Un *système inductif* est une famille d'espaces vectoriels $(E_x)_{x \in [0, \infty[}$ telle que pour tout $x_1 \leq x_2$ il existe une application linéaire $\varphi_{x_1, x_2} : E_{x_1} \rightarrow E_{x_2}$ vérifiant $\varphi_{x_1, x_1} = \text{Id}$ pour tout $x_1 \geq 0$ et $\varphi_{x_1, x_3} = \varphi_{x_2, x_3} \circ \varphi_{x_1, x_2}$ pour tous $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Un système inductif admet une limite inductive $E = \lim_{\rightarrow \infty} E_x$. Par définition, il existe $\varphi_x : E_x \rightarrow E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_{x_1} & \xrightarrow{\varphi_{x_1, x_2}} & E_{x_2} \\ & \searrow \varphi_{x_1} & \swarrow \varphi_{x_2} \\ & & E \end{array}$$

commute pour tous $0 \leq x_1 \leq x_2$. Pour définir la croissance de (E_x) , on suppose que tous les espaces E_x sont de dimension finie.

DÉFINITION 3.25. Le *taux de croissance* de (E_x) est

$$\Gamma((E_x)_{x \in [0, \infty[}) = \Gamma(x \mapsto \text{rg}(\varphi_x)).$$

De plus, la famille $(E_x)_{x \in [0, \infty[}$ *croît exponentiellement* (resp. *polynomialement*) si $x \mapsto \text{rg}(\varphi_x)$ croît exponentiellement (resp. polynomialement).

FAIT 3.26. Pour tout $C > 0$, les systèmes inductifs (E_x) et (E_{Cx}) ont le même taux de croissance.

Un résultat analogue serait faux si on choisissait le taux de croissance exponentiel pour définir la croissance d'un système inductif. Un *morphisme* de systèmes inductifs entre $(E_x)_{x \in [0, \infty[}$ et $(F_x)_{x \in [0, \infty[}$ est la donnée d'un réel strictement positif C et d'une famille d'applications linéaires $\Phi_x : E_x \rightarrow F_{Cx}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_{x_1} & \xrightarrow{\Phi_{x_1}} & F_{Cx_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{x_2} & \xrightarrow{\Phi_{x_2}} & F_{Cx_2} \end{array}$$

commute pour tous $0 \leq x_1 \leq x_2$. Deux systèmes (E_x) et (F_x) sont *isomorphes* s'il existe un morphisme (C, Φ) de (E_x) dans (F_x) et un morphisme (C', Ψ) de (F_x) dans (E_x) tels que $\Psi_{Cx} \circ \Phi_x = \varphi_{x, C'x}^E$ et $\Phi_{C'x} \circ \Psi_x = \varphi_{x, C'x}^F$ pour tout $x \geq 1$.

LEMME 3.27. *Deux systèmes isomorphes ont le même taux de croissance et la même croissance.*

DÉMONSTRATION. Soient (E_x) et (F_x) deux systèmes isomorphes. Par définition de limite inductive, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
& E_{x_1} & \xrightarrow{\varphi_{x_1}} & \lim E \\
& \downarrow & & \downarrow u \\
\text{Id} \quad \varphi_{x, CC'x} & F_{C_{x_1}} & \xrightarrow{\psi_{C_{x_1}}} & \lim F \\
& \downarrow & & \downarrow v \\
& E_{CC'x_1} & \xrightarrow{\quad} & \lim E
\end{array}$$

Par conséquent $\text{rg}(\varphi_{x_1}) \leq \text{rg}(\psi_{C_{x_1}})$ et donc $\Gamma(E) \leq \Gamma(F)$ par le fait 3.26. Symétriquement, on obtient $\Gamma(F) \leq \Gamma(E)$. \square

3.2.2. Homologie de contact et systèmes inductifs. Soit V une variété compacte munie d'une forme de contact α sans orbite de Reeb contractile. Soit $L > 0$, on note $C_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les bonnes orbites périodiques de Reeb de période inférieure à L . Comme la différentielle diminue l'action, on obtient une nouvelle famille de complexes $(C_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J), \partial_{\leq L})_{L>0}$ d'homologie $(HC_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J))_{L>0}$. Ces espaces vectoriels sont tous de dimension finie et l'inclusion $i : C_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J) \rightarrow C_{\leq L'}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J)$ induit une application linéaire en homologie pour tout $L' \geq L$. De façon analogue, pour tout ensemble Λ de classes d'homotopie libre et pour tout $L > 0$ on définit le complexe $(C_{\leq L}^{\Lambda}(V, \alpha, J), \partial_{\leq L})$ ainsi que l'homologie associée $HC_{\leq L}^{\Lambda}(V, \alpha, J)$.

FAIT 3.28. Les familles $(HC_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J))_{L>0}$ et $(HC_{\leq L}^{\Lambda}(V, \alpha, J))_{L>0}$ sont deux systèmes inductifs. Les morphismes associés sont les morphismes induits par l'inclusion. De plus, la limite inductive de $(HC_{\leq L}^{\text{cy}1}(V, \alpha, J))_{L>0}$ est $HC_*^{\text{cy}1}(V, \alpha, J)$ et la limite inductive de $(HC_{\leq L}^{\Lambda}(V, \alpha, J))_{L>0}$ est $HC_*^{\Lambda}(V, \alpha, J)$.

Soit V une variété de contact compacte munie d'une forme de contact α non dégénérée et telle que $(C_*(V, \alpha), \partial)$ admette une augmentation ε . Alors la différentielle ∂_1^{ε} diminue l'action sur $A^{\varepsilon}(V, \alpha)$ et on définit le système inductif associé de la même façon.

FAIT 3.29. Les applications décrite dans 3.13 se restreignent aux complexes filtrés en $\psi_{\leq L}$ et $\Psi_{\leq L}$ (et $\psi_{\leq L}^{\text{cy}1}$ et $\Psi_{\leq L}^{\text{cy}1}$ dans le cas cylindrique). Par construction les applications θ et Θ se restreignent en

$$\begin{aligned}
\theta_{\leq L} &: A_{\leq L}(V, \alpha, J) \rightarrow A_{\leq cL}(V, c\alpha, J^c) \\
\Theta_{\leq L} &: HC_{\leq L}(V, \alpha, J) \rightarrow HC_{\leq cL}(V, c\alpha, J^c)
\end{aligned}$$

et de façon analogue dans le cas cylindrique. De plus il existe des restrictions similaires dans le cas linéarisé. Enfin les applications $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ induisent des applications

$$\Phi_{\leq L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : HC_{\leq L}^{\varepsilon_1}(V, \alpha, J) \rightarrow HC_{\leq L}^{\varepsilon_2}(V, \alpha, J).$$

En plus des propriétés déduites du théorème 3.13, les applications vérifient les propriétés suivantes. Pour tout $0 < c < 1$

$$\Theta_{\leq L} \left(c\alpha, J^c, \frac{1}{c} \right) \circ \Psi_{\leq L}((\alpha, J), (c\alpha, J^c))$$

est le morphisme induit par l'inclusion $HC_{\leq L}(\alpha, J) \rightarrow HC_{\leq \frac{L}{c}}(\alpha, J)$. De plus si $\varphi_1 = \psi((\alpha_1, J_1), (c\alpha, J^c)) \circ \psi((\alpha, J), (\alpha_1, J_1))$ et $\varphi_2 = \theta(\alpha, J, c)$

$$\Phi_{\leq \frac{L}{c}}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \circ \Theta_{\leq L}^{\varepsilon_2} \left(c\alpha, J^c, \frac{1}{c} \right) \circ \Psi_{\leq L}^{\varepsilon_0}((\alpha, J), (c\alpha, J^c))$$

est le morphisme induit par l'inclusion $HC_{\leq L}^{\varepsilon_1}(\alpha, J) \rightarrow HC_{\leq \frac{L}{c}}^{\varepsilon_1}(\alpha, J)$.

3.2.3. Croissance de l'homologie de contact. Les *taux de croissance* de l'homologie de contact cylindrique, de l'homologie de contact partielle et de l'homologie de contact linéarisée sont les taux de croissance des systèmes inductifs associés

PROPOSITION 3.30. *Soient α_0 et α_1 deux formes de contact homotopes et hypertendues sur une variété compacte V . Alors, sous l'hypothèse H , les systèmes inductifs $HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_0)$ et $HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_1)$ sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Les morphismes entre $HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_1)$ et $HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_0)$ sont

$$\begin{aligned} \varphi_L &: HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_1) \rightarrow HC_{\leq \frac{L}{c}}^{\text{cyl}}(V, \alpha_0) \\ \varphi_L &= \Theta_{\leq L}^{\text{cyl}} \left(c\alpha_0, J_0^c, \frac{1}{c} \right) \circ \Psi_{\leq L}^{\text{cyl}}((\alpha_1, J_1), (c\alpha_0, J_0^c)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'_L &: HC_{\leq L}^{\text{cyl}}(V, \alpha_0) \rightarrow HC_{\leq \frac{L}{c'}}^{\text{cyl}}(V, \alpha_1) \\ \varphi'_L &= \Psi_{\leq \frac{L}{c'}}^{\text{cyl}} \left(\left(\frac{\alpha_0}{c'}, J_0^{\frac{1}{c'}} \right), (\alpha_1, J_1) \right) \circ \Theta_{\leq L}^{\text{cyl}} \left(\alpha_0, J_0, \frac{1}{c'} \right). \end{aligned}$$

Par 3.29, on définit bien ainsi un isomorphisme. \square

COROLLAIRE 3.31. *Soient α_0 et α_1 deux formes de contact homotopes et hypertendues sur une variété compacte V , alors, sous l'hypothèse H les homologies cylindriques associées ont le même taux de croissance.*

On montre le résultat suivant de manière analogue mais sans faire intervenir l'hypothèse H

PROPOSITION 3.32. *Soient α_0 et α_1 deux formes de contact homotopes et hypertendues sur une variété compacte V , alors les homologies partielles associées à des classes primitives ont le même taux de croissance.*

PROPOSITION 3.33. *Soient α_0 et α_1 deux équations de contact non dégénérées isotopes et J_0 et J_1 deux structures presque complexes adaptées telles que $(A_*(\alpha_0, J_0), \partial)$ admette une augmentation ε_0 et $\psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0))$ existe. Alors, sous l'hypothèse H , les systèmes $HC_{\leq L}^{\varepsilon_1}(\alpha_1, J_1)$ et $HC_{\leq L}^{\varepsilon_0}(\alpha_0, J_0)$ sont isomorphes. Les taux de croissance de l'homologie de contact linéarisée sont donc les mêmes.*

DÉMONSTRATION. Les morphismes sont

$$\begin{aligned} \varphi_L &: HC_{\leq L}^{\varepsilon_1}(\alpha_1, J_1) \rightarrow HC_{\leq L}^{\varepsilon_0}(\alpha_0, J_0) \\ \varphi_L &= \Psi_{\leq L}^{\varepsilon_0}((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'_L &: HC_{\leq L}^{\varepsilon_0}(\alpha_0, J_0) \rightarrow HC_{\leq \frac{L}{c}}^{\varepsilon_1}(\alpha_1, J_1) \\ \varphi'_L &= \Psi_{\leq \frac{L}{c}}^{\varepsilon_1} \left(\left(\frac{\alpha_0}{c}, J_0^{\frac{1}{c}} \right), (\alpha_1, J_1) \right) \circ \Phi_{\leq \frac{L}{c}}(\varepsilon_0^c, \varepsilon_0') \circ \Theta_{\leq L}^{\varepsilon_0} \left(\alpha_0, J_0, \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

où ε_0^c est l'augmentation obtenue à partir de ε_0 par $\theta\left(\frac{1}{c}\alpha_0, J_0^{\frac{1}{c}}, c\right)$ et ε'_0 l'augmentation fournie par $\psi((\alpha_1, J_1), (\alpha_0, J_0)) \circ \psi\left(\left(\frac{1}{c}\alpha_0, J_0^{\frac{1}{c}}, c\right), (\alpha_1, J_1)\right)$. Par 3.29, on définit bien ainsi un isomorphisme. \square

Homologie de contact suturée

Introduite par Colin, Ghiggini, Honda et Hutchings [18], l'homologie de contact suturée est une version de l'homologie de contact pour les variétés à bord. Les variétés suturées ont été introduites par Gabai [30]. Soit V une variété de dimension 3 de bord S . Une *suture* Γ sur S est une collection de courbes orientées telle que $S \setminus \Gamma$ soit réunion des intérieurs de deux surfaces de bord Γ et orientées, notées $R_+(\Gamma)$ et $R_-(\Gamma)$ telles que les orientations de $\partial R_+(\Gamma)$ et Γ coïncident et que les orientations de $\partial R_-(\Gamma)$ et Γ soient opposées. Pour une variété de bord convexe, c'est la courbe de découpage du bord convexe qui sert de suture.

Dans ce chapitre, on introduit l'homologie de contact suturée et on étudie le cas d'une surface convexe épaissie et de certains tores pleins. Les techniques utilisées pour démontrer ces résultats élémentaires seront reprises dans l'étude d'exemples obtenus par recollement de rocade dans les chapitres 8 et 9.

PROPOSITION 4.1. *Soit S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile. Soit $V = S \times [-1, 1]$ un voisinage de S tel que la structure de contact soit invariante dans la direction $[-1, 1]$. Il existe une forme de contact hypertendue α telle l'homologie de contact cylindrique suturée soit le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $n + 1$ orbites périodiques homotopes à $\Gamma_k \times \{0\}$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et par leurs multiples.*

PROPOSITION 4.2. *Soit $V = D^2 \times S^1$ muni d'une structure de contact ξ qui découpe le bord $\partial D^2 \times S^1$ avec $2n$ courbes longitudinales. On suppose de plus que le découpage d'un disque méridien de bord convexe intersectant $2n$ fois la courbe de découpage de $\partial D^2 \times S^1$ est composé d'arcs parallèles entre eux. Alors il existe une forme de contact hypertendue α telle que l'homologie de contact suturée cylindrique soit le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par n_+ orbites homotopes à $\{*\} \times S^1$ et n_- orbites homotopes à $\{*\} \times -S^1$ et par leur multiples où $n_+ = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ et $n_- = n - 1 - n_+$.*

La classification des structures de contact tendues sur le tore plein avec courbe de découpage longitudinale au bord est rappelée dans le chapitre 2. La proposition 4.2 est un cas particulier du théorème 0.11. La section 1 présente les propriétés de base de l'homologie de contact suturée. On démontre la proposition 4.1 dans la section 2 et la proposition 4.2 dans la section 3.

1. Présentation de l'homologie de contact suturée

Soit (V, ξ) une variété de contact de bord convexe et de courbe de découpage Γ . Soit α une forme de contact adaptée au bord. Le complexe de chaînes de l'homologie de contact est engendré par les bonnes orbites périodiques du champ de Reeb et la différentielle ∂ est définie en « comptant » des courbes holomorphes dans la symplectisation pour une structure presque complexe adaptée J . Elle s'obtient par une formule analogue à la formule 12 du chapitre 3. Par la forme du champ de Reeb au voisinage du bord les courbes holomorphes ne peuvent pas sortir de la variété. L'homologie de contact obtenue est notée $HC(V, \Gamma, \xi)$. Comme l'homologie de contact totale pour une variété sans bord, elle est bien définie sous l'hypothèse H.

THÉORÈME 4.3 (Colin-Ghigini-Honda-Hutchings [18]). *Sous l'hypothèse H,*

- (1) $\partial^2 = 0$;
- (2) *l'homologie obtenue est indépendante des choix d'équation de contact α , de structure presque-complexe J et de perturbation abstraite.*

Ce théorème s'adapte au cas de l'homologie de contact cylindrique, toujours sous l'hypothèse H. Par les travaux de Dragnev [22] l'homologie de contact suturée cylindrique est bien définie dans les classes primitives si l'équation de contact est hypertendue. Les premiers calculs d'homologie de contact suturée sur les tores pleins on été effectués par Golovko [38, 37]. En particulier il démontre le résultat suivant qui sera utile dans le chapitre 9.

THÉORÈME 4.4 (Golovko [38]). *Soit $V = D^2 \times S^1$ muni d'une structure de contact ξ possédant $2n$ courbes de découpage longitudinales au bord. On suppose que le découpage d'un disque méridien de bord convexe et rencontrant la courbe de découpage de $\partial D^2 \times S^1$ en $2n$ points est composé d'arcs parallèles au bord. Alors, l'homologie de contact suturée cylindrique est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $n - 1$ orbites homotopes à $\{*\} \times S^1$ et par leur multiples.*

2. Exemple d'une surface épaissie

Soit S une surface convexe dans une variété de contact, alors S admet un voisinage $S \times [-1, 1]$ muni d'une équation de contact de forme (F) (voir définition 1.9). On note $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ la courbe de découpage de S associée à la forme (F). Chaque voisinage U_i fourni par le forme (F) est muni de coordonnées

$$(x, y, z) \in [-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times S^1$$

dans lesquelles

- $S \cap U_i \simeq [-x_{\max}, x_{\max}] \times \{0\} \times S^1$;
- $\Gamma_i \simeq \{0\} \times \{0\} \times S^1$;
- $\alpha = f(x)dy + \cos(x)dz$.

On perturbe l'équation de contact en

$$\alpha_p = f(x)dy + p(x, y) \cos(x)dz$$

où p est une fonction lisse vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) il existe $x_{\max}^p < x_{\max}$ tel que $p = 1$ en dehors de $[-x_{\max}^p, x_{\max}^p] \times [-1, 1]$ et pour tout $x \in [-x_{\max}^p, x_{\max}^p]$, $f(x) = \sin(x)$;
- (2) $p(x, y) = 1 + k(x)l(y)$ où k est une fonction bosse constante égale à 1 au voisinage de $x = 0$ et l est C^∞ -petite strictement décroissante sur $[-1, 0]$, nulle en 0 et strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $l''(0) \neq 0$.

On obtient bien une équation de contact adaptée au bord (voir chapitre 1, section 2). Le champ de Reeb est décrit dans la figure 1.

LEMME 4.5. *Le champ de Reeb associé à α_p admet pour orbites périodiques les courbes $\Gamma_i \times \{0\}$ pour $i = 0 \dots n$. Ces orbites ont toutes la même période. De plus ces orbites sont hyperboliques d'indice de Conley-Zehnder pair.*

DÉMONSTRATION. En dehors de l'ouvert U_i , le champ de Reeb est $\pm \frac{\partial}{\partial y}$ donc il ne peut pas y avoir d'orbite périodiques. On se place dans un ouvert U_i , la courbe $\Gamma_i \times \{0\}$ est bien une orbite périodique. Dans la zone dans laquelle $k = 0$, le champ de Reeb est donné par

$$R_{\alpha_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

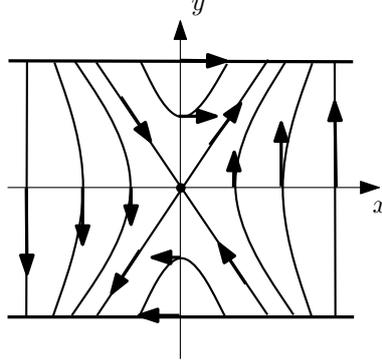


FIGURE 1. Champ de Reeb dans le plan (x, y) au voisinage de $x = 0$. Au voisinage de $(0, 0)$ le champ de Reeb a une composante non nulle sur $\frac{\partial}{\partial z}$.

et il n'y a pas d'orbite périodique. Si $k \neq 0$, le projection dans le plan (x, y) du champ de Reeb est positivement colinéaire à

$$\begin{pmatrix} l'(y) \cos(x) \\ (1 + l(y)) \sin(x) \end{pmatrix}$$

et donc au champ hamiltonien associé à la fonction $H : (x, y) \mapsto l(y) \cos(x)$ pour la forme symplectique standard. Le point critique $(0, 0)$ est une selle et il n'y a pas de niveau fermé. Il ne peut donc pas y avoir d'orbite périodique autre que $\Gamma_i \times \{0\}$.

En linéarisant le flot de Reeb φ_t le long des orbites $\Gamma_i \times \{0\}$, on obtient

$$\text{tr}(\varphi_t(O)|_{\xi}) = 2 \cosh\left(\sqrt{tl''(0)}\right) > 2.$$

Par conséquent l'orbite est paire et hyperbolique. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.1. La différentielle de l'homologie de contact cylindrique est nulle car la différentielle d'une orbite paire ne fait intervenir que des orbites impaires. Or, pour la structure α_p , toutes les orbites périodiques sont paires. \square

COROLLAIRE 4.6. *L'homologie de contact cylindrique suturée $HC^{cy}(V, \xi, \Gamma)$ a une croissance linéaire.*

Ce résultat en dimension 3 se généralise probablement en toute dimension. Soit Σ une hypersurface convexe dans une variété de contact de dimension $2n + 1$ (voir [18, 2.2]). Il existe alors une sous-variété Γ de Σ de dimension $2n - 1$ et une équation de contact α telles que Γ décompose Σ en régions orientées R_{\pm} de bord Γ vérifiant :

- les orientations de ∂R_+ et Γ coïncident et les orientations de ∂R_- et Γ sont opposées ;
- $(R_+, d\alpha)$ et $(R_-, d\alpha)$ sont des variétés symplectiques positives si on renverse l'orientation de R_- ;
- $\alpha|_{\Gamma}$ est une forme de contact.

La sous-variété Γ est appelé *découpage* de Σ .

CONJECTURE 4.7. *Soit Σ une surface convexe dans une variété de contact (W, ξ) de dimension $2n + 1$ découpée par Γ . Soit $\Sigma \times [-1, 1]$ un voisinage de Σ obtenu en suivant un champ de vecteurs transverse. Alors, si Γ est incompressible et si $\alpha|_{\Gamma}$ est hypertendue, l'homologie de contact suturée cylindrique de $(\Sigma \times [-1, 1], \Gamma, \xi)$ est l'homologie de contact cylindrique de $(\Gamma, \xi' = \ker \alpha|_{\Gamma})$.*

REMARQUE 4.8. L'homologie de contact plongée, introduite par Hutchings [48, 49, 50, 51], est définie grâce à un complexe de chaînes engendré par des ensembles finis $\{(\gamma_i, m_i)\}$ où les γ_i sont des orbites de Reeb distinctes et $m_i \in \mathbb{N}^*$ avec $m_i = 1$ si l'orbite est hyperbolique. La différentielle est obtenue en comptant des courbes holomorphes plongées. C'est un invariant de la variété. L'analyse précédente s'adapte dans ce contexte et permet de montrer que la différentielle de l'homologie de contact plongée est nulle. Ainsi l'homologie de contact plongée d'une surface épaissie est engendrée par les sous-ensembles de $\{\Gamma_i \times \{0\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

3. Exemple du tore plein

On démontre ici la proposition 4.2. Pour calculer l'homologie de contact de certaines structures sur le tore plein, on construit une équation de contact appropriée inspirée des structures de contact sur les surfaces épaissies. Dans le plan \mathbb{R}^2 de coordonnées (x, y) , on considère le disque (voir figure 3)

$$D_n = \{(x, y), y \in [-1, 1], x \in [-\pi + 2\varepsilon - h(y), n\pi - 2\varepsilon + h(y)]\}$$

où $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lisse sur $]-1, 1[$, nulle et verticale à tout ordre en -1 et 1 , atteignant son maximum ε en 0 .

PROPOSITION 4.9. *Pour η assez petit, il existe une famille $\alpha_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$ de structures de contact sur $V_n = D_n \times S^1$ telle que*

- $\alpha_\varepsilon = f(x)dy + \beta_\varepsilon$;
- $\beta_\varepsilon = \cos(x)dz$ sur $I \times [-1, 1] \times S^1$ où $I = [-\pi + \varepsilon, n\pi - \varepsilon] \setminus [-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta]$;
- f est une fonction lisse, 2π -périodique, égale à $(-1)^k$ au voisinage de $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, égale à $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de $x = k\pi$, valant -1 au voisinage sur $[-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta]$ et ayant le même sens de variation que la fonction sinus ;
- $\partial D_n \times S^1$ est muni d'une feuilletage legendrien lisse par des courbes méridiennes invariantes dans le direction $\frac{\partial}{\partial z}$ et tendant vers les cercles $z = \text{cst}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. On va perturber la structure de contact $\alpha_0 = f(x)dy + \cos(x)dz$ dans $[-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta] \times [-1, 1] \times S^1$. On choisit η assez petit pour que $f(-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta) = \{-1\}$.

Sur $\partial D_n \times S^1$, il existe une unique courbe legendrienne δ_0 lisse passant par $(-\frac{3\pi}{4}, 1, z)$. En effet, dans la zone plate, les seules courbes legendriennes lisses sont les courbes $z = \text{cst}$ et $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et dans la zone non plate le feuilletage caractéristique n'a pas de singularité.

Montrons que la monodromie l sur le cercle $\{-\frac{3\pi}{4}\} \times \{1\} \times S^1$ vérifie $|l(z) - z| = O(\varepsilon)$. Le passage dans la zone plate ne fait pas changer la coordonnée z de la courbe legendrienne. Au voisinage de $x = n\pi$, on tire l'équation de contact en arrière par l'inclusion

$$i : (y, z) \mapsto (n\pi - 2\varepsilon + h(y), y, z)$$

et on pose $h_+(y) = n\pi - 2\varepsilon + h(y)$. On obtient alors

$$i^*\alpha = f(h_+(y))dy + \cos(h_+(y))dz$$

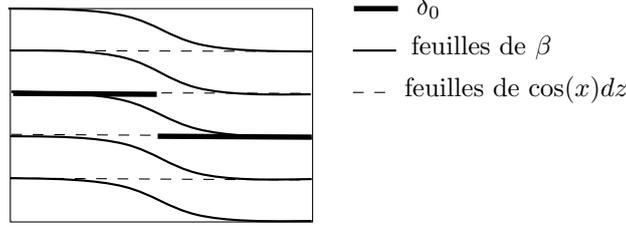
et le feuilletage caractéristique est dirigé par

$$\begin{pmatrix} \cos(h_+(y)) \\ -f(h_+(y)) \end{pmatrix} \text{ avec } \left| \frac{-f(h_+(y))}{\cos(h_+(y))} \right| = O(\varepsilon).$$

On effectue une analyse symétrique au voisinage de $x = -\pi$. On obtient alors que le passage dans la zone non plate fait varier en $O(\varepsilon)$ la coordonnée z d'une courbe legendrienne.

Dans $I \times [-1, 1] \times S^1$, on remplace la 1-forme $\cos(x)dz$ par β_ε telle que

- (1) $\beta_\varepsilon = \cos(x)dz$ au voisinage de $\partial I \times S^1$;
- (2) β_ε ne dépend pas de z ;
- (3) une feuille de β_ε relie $\delta_0 \cap \{-\frac{3\pi}{4} - \eta\} \times S^1$ et $\delta_0 \cap \{-\frac{3\pi}{4} + \eta\} \times S^1$ (voir figure 2) ;
- (4) $d\beta_\varepsilon < 0$.

FIGURE 2. Formes de feuilles de β

On obtient alors bien une équation de contact de la forme cherchée. \square

LEMME 4.10. *La structure α sur le tore plein $V_n = D_n \times S^1$ a pour découpage sur les disques méridiens une courbe composée de n arcs parallèles (voir figure 3). Le bord de la variété est convexe et une courbe de découpage est donnée par les points de tangence entre le champ de Reeb et le bord. Les composantes connexes de Γ sont les courbes $\{-\pi + \varepsilon\} \times \{0\} \times S^1$, $\{n\pi - \varepsilon\} \times \{0\} \times S^1$, $\{k\pi\} \times \{\pm 1\} \times S^1$ pour $k \in 0, \dots, n$.*

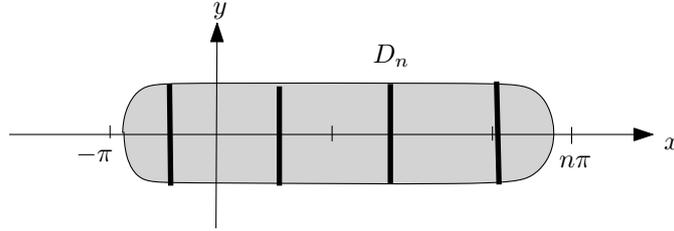


FIGURE 3. Découpage d'un disque méridien

DÉMONSTRATION. Le champ de Reeb est donné par

$$R_\alpha = \frac{1}{f'(x) \cos(x) + f(x) \sin(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

dans $I \times [-1, 1] \times S^1$ et par $R_\alpha = -\frac{\partial}{\partial y}$ dans $[-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta] \times [-1, 1] \times S^1$.

Le champ $\frac{\partial}{\partial z}$ est un champ de contact transverse à un disque méridien de bord legendrien (inclus dans deux plans $z = \text{cst}$ pour $x \in I$), ce disque est donc convexe. Une courbe de découpage est donnée par les points de ce disque où $\frac{\partial}{\partial z}$ est dans le plan de contact, c'est-à-dire par les segments $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (par le théorème 1.4).

Les propriétés de la courbe de découpage au bord sont une conséquence directe de la forme du champ de Reeb par le lemme 1.7. En effet sur la zone plate du bord les points de tangences sont donnés par l'équation $\sin(x) = 0$ et dans la zone non plate par l'équation $h'(x) \sin(x) = 0$. \square

En dehors de la zone de lissage du bord par h , la structure de contact est la même que la structure de contact au voisinage d'une surface convexe décrite dans la section précédente. On perturbe l'équation α_ε en α_p au voisinage de $x = k\pi, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ en suivant le modèle décrit dans la section précédente.

LEMME 4.11. *L'équation de contact α_p sur V_n est adaptée au bord et les orbites périodiques associées sont exactement les courbes $\{k\pi\} \times \{0\} \times S^1, k \in 0, \dots, n$. Ces orbites sont toutes hyperboliques et paires.*

DÉMONSTRATION. Les résultats de la section précédente s'appliquent. Il reste à montrer que l'équation de contact est bien adaptée au niveau des courbes de découpage dans la zone non plate du bord et que dans cette zone il n'y a pas d'orbite périodique. Dans cette zone, α n'a pas été perturbée et donc

$$R_{\alpha_p} = \frac{1}{f'(x) \cos(x) + f(x) \sin(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent toutes les orbites de Reeb sont à extrémités dans le bord de la variété et il n'y a pas d'orbite périodique. De plus, par la forme du champ de Reeb l'équation de contact est adaptée le long de la courbe de découpage dans cette zone. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.2. Pour la forme α_p , toutes les orbites périodiques sont paires. Par conséquent, la différentielle de l'homologie de contact cylindrique est nulle. \square

REMARQUE 4.12. De même, on peut montrer que l'homologie de contact plongée est engendrée par les sous ensembles de $\{\Gamma_i \times \{0\}, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Homologie de contact Morse-Bott

L'homologie de contact Morse-Bott a été introduite par Bourgeois dans sa thèse [5] en 2002. Dans ce texte on n'utilisera pas la construction proprement dite du complexe de Morse-Bott mais des résultats intermédiaires présentés eux aussi dans [5]. L'homologie de contact Morse-Bott est une méthode de calcul de l'homologie de contact utilisant des structures de contact qui sont dégénérées et qui ont en général des sous-variétés d'orbites périodiques de mêmes périodes. Ce type d'équation de contact apparaît naturellement en présence de symétrie et couvre une partie non négligeable des équations de contact usuelles. L'intérêt de l'homologie de contact Morse-Bott est de pouvoir calculer l'homologie de contact sans avoir au préalable à perturber une équation de contact symétrique. En effet, cette perturbation de l'équation de contact complique la dynamique de Reeb et par conséquent la résolution des équations de Cauchy-Riemann.

L'idée générale de l'homologie de contact Morse-Bott est de faire le lien entre la situation dégénérée et une situation non dégénérée contrôlée, obtenue en perturbant l'équation de contact à l'aide de fonctions définies au voisinage des variétés d'orbites périodiques.

1. Formes de contact Morse-Bott et perturbations

Commençons par décrire le cadre d'application de la théorie de Morse-Bott et par donner quelques exemples.

DÉFINITION 5.1 ([5]). Une équation de contact α sur V est de *Morse-Bott* si l'ensemble des périodes $\sigma(\alpha)$ est discret, si pour tout $T \in \sigma(\alpha)$, l'ensemble $N_T = \{p \in V, \varphi_T(p) = p\}$ est une sous-variété lisse close pour laquelle $d\alpha_{N_T}$ est de rang localement constant et $T_p N_T = \ker(\varphi_T - I)$.

EXEMPLE 5.2. Sur le tore T^3 , les équations de contact $\alpha_n = \sin(nx)dy + \cos(nx)dz$ sont des équations de Morse-Bott. En effet le champ de Reeb associé à α_n est

$$R_{\alpha_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(nx) \\ \cos(nx) \end{pmatrix}$$

le flot de Reeb préserve les tores $\{x = \text{cst}\}$ et est linéaire sur ces tores. Un tore $\{x = x_0\}$ est feuilleté par des orbites de Reeb si et seulement si la pente de R_{α_n} est rationnelle. Si $p \sin(nx_0) = q \cos(nx_0)$ avec p et q premiers entre eux, la période des orbites périodiques associées est $\sqrt{p^2 + q^2}$. Les périodes forment donc un ensemble discret.

EXEMPLE 5.3. Soit ξ une structure de contact transversale aux fibres et S^1 -invariante sur un fibré en cercles. Alors ξ admet une équation de contact dont le champ de Reeb est partout tangent aux fibres. Toute la variété est alors composée d'orbites périodiques de Reeb de même période.

Le flot de Reeb induit une action de S^1 sur les espaces N_T . Le quotient, noté S_T , est en général un orbifold. Néanmoins dans tous les exemples considérés par la

suite, S_T aura une structure de variété. Pour des raisons de simplicité, on détaille donc la construction dans le cas où S_T est lisse. On va perturber l'équation de contact Morse-Bott à partir de fonctions de Morse définies sur les espaces S_T . Détaillons cette construction. Soit $T > 0$. Pour tout $T' \in \sigma(\alpha) \cap [0, T]$, on choisit une fonction de Morse $f_{T'}$ sur $S_{T'}$. On prolonge cette fonction en $f_{T'}$ à $N_{T'}$ en garantissant que $df_{T'}(R_\alpha) = 0$. On la prolonge alors à V en $f_{T'}$ en garantissant que $f_{T'} = 0$ en dehors d'un voisinage de $N_{T'}$. On demande de plus que les domaines des différentes fonctions $f_{T'}$ pour $T' \in \sigma(\alpha) \cap [0, T]$ soient disjoints et que les choix soient cohérents. On note \bar{f}_T la fonction obtenue en additionnant les différentes fonctions pour $T' \in \sigma(\alpha) \cap [0, T]$. On perturbe alors l'équation Morse-Bott α en

$$\alpha_{\lambda, T} = (1 + \lambda \bar{f}_T)\alpha.$$

PROPOSITION 5.4 ([5]). *Soit $T > 0$, il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \Lambda$, les orbites périodiques de $\alpha_{\lambda, T}$ de période inférieure à T correspondent aux points critiques des fonctions $f_{T'}$, $T' \in \sigma(\alpha) \cap [0, T]$. De plus ces orbites sont non dégénérées.*

Un choix de structure presque complexe S^1 -invariante dans la symplectisation $\mathbb{R} \times V$ détermine une métrique sur les variétés S_T par $d\alpha(\cdot, J\cdot)$. On peut donc parler de gradient de \bar{f}_T .

2. Homologie de contact Morse-Bott

Pour définir l'homologie de contact dans le cas Morse-Bott on retrouve les mêmes étapes que dans le cas non-dégénéré. Superficiellement, le complexe de l'homologie de contact dans le cas Morse-Bott est engendré par les points critiques des fonctions \bar{f}_T . La différentielle est obtenue en comptant des courbes holomorphes généralisées mélangeant des lignes de gradient de \bar{f}_T et des cylindres holomorphes asymptotes à des orbites périodiques dans les espaces N_T . Le schéma reste le même et comprend un théorème de compacité, des problèmes de transversalité et un choix d'orientations cohérentes. Pour plus d'information on pourra consulter [5] pour une présentation très détaillée, [6] pour un résumé des résultats de la référence précédente, ou encore [7] pour une présentation générale. Dans la suite de cette section, on illustre sur des exemples très simples des éléments de la constructions de l'homologie de contact Morse-Bott. L'objectif est double, ces exemples permettent de mettre en lumière les spécificités de la théorie Morse-Bott en détaillant le rôle joué par les lignes de gradient dans la calcul de la différentielle. De plus, ces résultats spécifiques seront utilisés dans la suite de ce texte pour calculer l'homologie de contact des structures cloisonnées.

Le théorème de compacité demandé dans le cas Morse-Bott est un peu différent du théorème de compacité dans le cas non dégénéré. En effet, on cherche ici à faire le lien entre les situations non dégénérées (équations $\alpha_{\lambda, T}$) et la situation dégénérée (équation α). On veut analyser le comportement des courbes holomorphes pendant que λ devient de plus en plus petit (et donc pour des structures presque complexes différentes). L'idée est de montrer que dans des situations favorables, les courbes holomorphes généralisées comptées dans la différentielle du complexe Morse-Bott correspondent aux limites de courbes holomorphes usuelles.

Lorsque λ devient de plus en plus petit (et que les structures presque-complexes considérées convergent) on observe deux phénomènes principaux entrelacés. D'un côté, et de façon analogue à ce qui se passe dans le cas non dégénéré, des immeubles holomorphes apparaissent : quitte à reparamétriser, on obtient des convergences dans \mathcal{C}^∞ -loc vers des courbes holomorphes asymptotes à des niveaux N_T intermédiaires. D'un autre côté, quand les orbites asymptotes de deux niveaux de l'immeuble holomorphe sont différentes (on est dans une situation dégénérée à la limite) la

courbe holomorphe se « rapproche » d'une ligne de gradient de \bar{f}_T en projection sur la surface S_T .

On se concentre sur des situations dans lesquelles seul le second phénomène est présent : si toutes les orbites périodiques homotopes sont de même période les seuls cylindres holomorphes entre niveaux N_T sont des cylindres triviaux et la « limite » s'exprime uniquement à l'aide de lignes de gradient.

THÉORÈME 5.5 (Bourgeois [5]). *Soient $\pi : V \rightarrow S$ un fibré en cercles sur une surface compacte orientée et α une forme de contact S^1 -invariante, transversale aux fibres. Soient $T > 0$ et \bar{f}_T une perturbation Morse-Bott associée obtenue à partir d'une fonction de Morse $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.*

Soient λ_n une suite de réels strictement positif de limite nulle et J_{λ_n} des structures presque-complexes, S^1 -invariantes, adaptées à $\alpha_{\lambda_n, T}$ et convergeant vers J . Soient γ_+ et γ_- deux orbites périodiques de périodes inférieures à T et associées aux points critiques x_+ et x_- de f . Considérons $u_n : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times V$, suite de fonctions J_{λ_n} -holomorphes, d'énergie bornée, asymptotes à γ_+ et γ_- . Alors, quitte à extraire, il existe une ligne de gradient lisse ou brisée δ de f vérifiant les propriétés suivantes.

- (1) *Pour tout voisinage O de $\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\delta)$, pour tout n assez grand, l'image de u_n est incluse dans O .*
- (2) *Pour tout $p \in \bar{\delta}$, il existe un voisinage U_p de p dans S et une trivialisations $U_p \times S^1$ de $\pi^{-1}(U_p)$ tel que pour toutes suites (s_n^1) et (s_n^2) vérifiant $u_n([s_n^1, s_n^2] \times S^1) \subset \mathbb{R} \times \pi^{-1}(U_p)$ on ait*

$$\left\| u_n(s, t) - \left((s - s_n^1)T + a_n, \varphi_{\lambda_n(s - s_n^1)}^{\frac{f}{1 + \lambda_n \bar{f}}}(p_n), \theta_n + t \right) \right\|_{C^\infty} \rightarrow 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^$ où $u_n(s_n^1, 0) = (a_n, p_n, \theta_n)$ et les angles de S^1 sont relevés pour coïncider en $(s_1, 0)$. De plus, de telles suites existent toujours.*

Autrement dit, à la limite, (u_n) se rapproche de courbes au-dessus d'une trajectoire de gradient de f (ou de trajectoires brisées) parcourue de plus en plus lentement quand λ tend vers 0, tout en tendant vers un cylindre trivial (défini à l'aide de $u_n(0, 0)$) dans C^∞ -loc. Quitte à reparamétriser u_n , on peut faire converger la suite dans C^∞ -loc vers un cylindre trivial au-dessus de n'importe quel point de la trajectoire de gradient limite.

REMARQUE 5.6. Il existe un théorème analogue pour le tore T^3 muni de la forme de contact $\alpha_n = \sin(nx)dy + \cos(nx)dz$.

THÉORÈME 5.7 (Bourgeois [5]). *Soient $\pi : V \rightarrow S$ un fibré en cercles sur une surface compacte orientée muni d'une forme de contact α S^1 -invariante. Soient $T > 0$ et f_T une perturbation Morse-Bott de α associée à T obtenue à partir d'une fonction de Morse $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Soit J_λ une famille de structures presque complexes sur $\mathbb{R} \times V$ adaptées à $\alpha_{\lambda, T}$ et S^1 -invariantes qui converge vers la structure J adaptée à α . On suppose que (f, g) est Morse-Smale où g est la métrique sur S induite par J et α .*

Soient x_+ et x_- deux points critiques de f de différence d'indice 1 et γ_+ et γ_- les orbites périodiques associées. Alors, pour λ assez petit, l'espace de module $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+, \gamma_-, J_\lambda)$ admet une structure de variété compacte de dimension 0. De plus, $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+, \gamma_-, J_\lambda)$ est en bijection avec l'espace des trajectoires de gradient de f reliant x_+ et x_- et les orientations fournies par les deux théories (homologie de contact et homologie de Morse) coïncident.

THÉORÈME 5.8 (Bourgeois). *On considère le tore T^3 muni de la forme de contact $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$. Soient $T > 0$ et f_T une perturbation Morse-Bott*

de α associée à T obtenue à partir d'une fonction de Morse $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ayant deux points critiques. Soit J_λ une famille de structures presque complexes sur $\mathbb{R} \times V$ adaptées à $\alpha_{\lambda,T}$ et S^1 -invariantes sur les espaces $N_{T'}$, où $T' \leq T$, qui converge vers la structure J .

Soient T un tore de $N_{T'}$, où $T' \leq T$ et γ_+ et γ_- les deux orbites périodiques de T associées aux points critiques de f . Alors, pour λ assez petit, l'espace de module $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+, \gamma_-, J_\lambda)$ contient exactement deux éléments associés aux lignes de gradient de f avec des orientations opposées. Par ailleurs, si γ_+ et γ_- ne sont pas incluses dans le même tore $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+, \gamma_-, J_\lambda)$ est vide.

REMARQUE 5.9. Le théorème précédent se généralise au cas des structures sur T^3 d'équations $\sin(nx)dy + \cos(nx)dz$ et $f(x)dy + g(x)dz$, où f et g ont les mêmes variations que les fonctions $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \cos(nx)$.

Ces théorèmes sont des corollaires logiques de la théorie développée dans [5]. La démonstration se décompose en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on étudie l'espace des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann. Pour obtenir que cet espace est une variété de dimension trois, on montre qu'il s'agit de l'intersection transverse d'une section d'un fibré banachique (décrit dans [5, 5.1.1]) avec la section nulle et que cette section est Fredholm. Pour cela, il faut montrer que la dérivée verticale de cet opérateur de Fredholm est surjective. Pour obtenir cette surjectivité, on va garantir la surjectivité [5, Proposition 4.13 et 5.14] pour des points proches des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann (décrits dans [5, 5.3.2]) puis utiliser un théorème des fonctions implicites adapté (voir [5, Proposition 5.16]). Après l'étude de l'espace des solutions des équation de Cauchy-Riemann, il faut s'intéresser à son quotient par les biholomorphismes de $\mathbb{R} \times S^1$ et par l'action de \mathbb{R} et montrer que l'on peut faire le lien entre la variété de dimension 0 obtenue et les trajectoires de gradient de f . On utilise le théorème 5.5 et [5, Proposition 7.6] pour les orientations.

Ces théorèmes impliquent les résultats suivants.

PROPOSITION 5.10 (Bourgeois, [5]). *Soit un fibré en cercles V orienté, de base S compacte orientée et muni d'une structure de contact ξ qui est S^1 -invariante. Notons f la classe d'homotopie associée à la fibre. Alors, pour tout $k > 0$, il existe une forme de contact α telle que*

$$HC_*^{f^k}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = H_*(S, \mathbb{Q}).$$

Pour toutes les autres classes d'homotopie, l'homologie de contact cylindrique est nulle. De plus, sous l'hypothèse H , la croissance de l'homologie de contact est linéaire.

PROPOSITION 5.11. *Considérons T^3 muni de la structure de contact ξ_n décrite par l'équation $\alpha_n = \sin(nx)dy + \cos(nx)dz$ et notons c_y et c_z les classes d'homotopies libres associées respectivement aux cercles $S^1 \times \{0\} \times S^1$ et $S^1 \times S^1 \times \{0\}$. Soit $a = c_y^{n_y} c_z^{n_z}$ une classe d'homotopie non triviale. Alors il existe une forme de contact α'_n telle que*

$$HC_*^a(T^3, \alpha'_n, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{H}_*(S^1, \mathbb{Q}).$$

Pour toutes les autres classes d'homotopie, l'homologie de contact cylindrique est triviale. De plus, sous l'hypothèse H , la croissance de l'homologie de contact est quadratique.

Partie 2

Homologie de contact, hyperbolicité et fibrés en cercles

Homologie de contact cylindrique des structures de contact sur les fibrés en cercles

Ce chapitre est consacré à la conjecture suivante.

CONJECTURE 6.1 (Colin-Honda). *À l'exception de la structure standard sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique et de ses revêtements fibrés, les structures de contact universellement tendues sur les fibrés en cercles ont une homologie de contact de croissance au plus quadratique.*

La classification des structures de contact sur les fibrés en cercles est rappelée dans le chapitre 2. Le cas de T^3 et des structures S^1 -invariantes transversales aux fibres est présenté dans le chapitre 5. On s'intéresse ici aux revêtements fibrés du fibré unitaire tangent et aux structures cloisonnées. Les résultats principaux sont les suivants.

PROPOSITION 6.2 (Folklore). *L'homologie de contact cylindrique d'une structure de contact tangente aux fibres d'un fibré en cercles orienté de base hyperbolique compacte orientée est bien définie et à croissance exponentielle.*

THÉORÈME 6.3. *Soit (V, ξ) un fibré en cercles orienté de base compacte orientée muni d'une structure de contact cloisonnée par une courbe $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile. Si $X = V \setminus \pi^{-1}(\Gamma)$, on note $X_1^+ \dots X_{n_+}^+$ les composantes connexes de X pour lesquelles ξ est positivement transversale aux fibres et $X_1^- \dots X_{n_-}^-$ les composantes connexes pour lesquelles ξ est négativement transversale aux fibres. Soit a un lacet de V . Il existe une équation de contact hypertendue α telle que l'homologie de contact cylindrique $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q})$ soit bien définie et*

- (1) si $[a] = [\text{fibre}]^k$ avec $\pm k > 0$, on a $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^{n_{\pm}} H_*(W_j^{\pm}, \mathbb{Q})$;
- (2) si $[a] = [\text{fibre}]^k [\Gamma_j]^{k'}$ avec $k' \neq 0^1$, on a $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{[\Gamma_i]=[\Gamma_j]} H_*(S^1, \mathbb{Q})$;
- (3) sinon, $HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = 0$.

Sous l'hypothèse H , les homologies de contact cylindriques calculées ci-dessus sont les homologies $HC_^{[a]}(V, \xi, \mathbb{Q})$ et leur croissance est quadratique.*

Les structures de contact $(T^3, \xi_n = \ker \alpha_n)$ où $\alpha_n = \sin(nx)dy + \cos(nx)dz$ sont des structures cloisonnées par les courbes d'équations $x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ si on voit T^3 comme le fibré en cercles $T^3 \rightarrow S^1 \times S^1 \times \{0\}$. On retrouve bien les résultats présentés dans la proposition 5.11. La proposition 6.2 sera démontrée dans la section 1 et le théorème 6.3 dans la section 2.

1. La notation $[a] = [\text{fibre}]^k [\Gamma_j]^{k'}$ est à comprendre comme : a est librement homotope à un lacet représentant $[\text{fibre}]^k [\Gamma_j]^{k'}$ dans $\pi_1(V)$.

1. Structures de contact tangentes aux fibres

On démontre ici la proposition 6.2. Commençons par étudier le cas du fibré unitaire tangent. Soit (S, g) une surface hyperbolique. L'équation de contact standard sur $\pi : UTS \rightarrow S$ est

$$\alpha_S(v_x)(X) = g(x)(v_x, d\pi(x)X).$$

Le flot de Reeb est alors le flot géodésique et les orbites périodiques de Reeb correspondent aux géodésiques fermées (voir par exemple [31, 1.5]). Or, il existe une unique géodésique fermée par classe d'homotopie libre [53, Theorem 3.9.5]. Ainsi l'homologie de contact cylindrique est bien définie et sa différentielle est nulle pour ce choix de forme de contact. De plus, le nombre de classes d'homotopie libre croît exponentiellement [63] avec la longueur et la croissance de l'homologie de contact est donc exponentielle.

Considérons maintenant le cas général d'une structure tangente aux fibres (V, ξ) . D'après Giroux (voir proposition 2.3), une structure de contact tangente aux fibres est le tiré en arrière de la structure standard sur le fibré unitaire tangent par un revêtement fibré. Notons $\rho : V \rightarrow UTS$ ce revêtement et d son nombre de feuilletés. Une équation de ξ est alors $\alpha = \rho^* \alpha_S$ sur V . Les orbites périodiques du champ de Reeb associé à α sont les relevés fermés des orbites périodiques (éventuellement parcourues plusieurs fois) du champ de Reeb associé à α_S . Chaque orbite périodique de période T dans UTS crée au moins une orbite périodique dans V et cette orbite a pour période au plus dT . De plus, toutes les orbites homotopes ont la même période. La différentielle de l'homologie de contact cylindrique est donc nulle et la croissance de l'homologie de contact est exponentielle.

2. Cas des structures cloisonnées

On démontre ici le théorème 6.3. Soit (V, α) un fibré en cercles orienté de base compacte orientée muni d'une structure de contact ξ cloisonnée par une courbe $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ sans composante contractile. On note α l'équation de ξ fournie par la proposition 2.4.

En dehors d'un voisinage de $\pi^{-1}(\Gamma)$, le champ de Reeb est tangent aux fibres. Au voisinage de $\pi^{-1}(\Gamma)$, c'est-à-dire sur une union de tores épais, le champ de Reeb est constant le long des tores et tangent à ces tores. Comme dans l'exemple 5.2, un tore est feuilleté par des orbites périodiques de Reeb si et seulement si la pente du champ de Reeb est rationnelle. Ce n'est pas une situation Morse-Bott car les variétés N_T contenant les orbites périodiques correspondant aux fibres sont des variétés à bord.

On va appliquer la théorie Morse-Bott sur chacune des parties et montrer qu'il n'y a pas d'interaction entre les parties en utilisant la positivité d'intersection. La positivité d'intersection est décrite dans la section 1.3.1.

2.1. Perturbation Morse-Bott. Comme dans le cas Morse-Bott, on note $\sigma(\alpha)$ l'ensemble des périodes des orbites périodiques de R_α ,

$$N_T = \{p \in V, \varphi_T(p) = p\} \text{ et } S_T = N_T/S^1$$

où $T \in \sigma(\alpha)$. Le champ de Reeb est tangent aux fibres en dehors d'un voisinage U de $\pi^{-1}(\Gamma)$ et toutes les orbites périodiques sont de période 1. L'ouvert U est une union de tores épaissis U_i et le champ de Reeb est tangent à ces tores et de flot linéaire.

Plus précisément, on peut supposer que $U_i =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \Gamma_i \times S^1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Sur U_i , on a $\alpha = f(x)dy + g(x)dz$ avec $f \neq \pm 1$. Le champ de Reeb est

donné par

$$R = \frac{1}{f'g - fg'} \begin{pmatrix} 0 \\ -g' \\ f' \end{pmatrix}$$

Si $f(x) \neq 0$ et $\frac{-g'(x)}{f'(x)} = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$, les orbites périodiques de $T_x = \{x\} \times \Gamma_i \times S^1$ sont de période

$$T = \left| \frac{(f'g - fg')q}{f'} \right| = |qg + fp|.$$

Si $g'(x) \neq 0$ et $\frac{f'(x)}{-g'(x)} = \frac{q}{p}$ et $p \wedge q = 1$, les orbites périodiques de T_r sont de période

$$T = \left| \frac{(f'g - fg')p}{-g'} \right| = |qg + fp|.$$

Dans la suite, on supposera toujours $q \geq 0$. On note $W = V \setminus \bigcup U_i$.

LEMME 6.4. $\sigma(\alpha)$ est discret et $\#(\sigma(\alpha) \cap [0, T])$ croît quadratiquement avec T .

DÉMONSTRATION. On écrit $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[= I_1 \cup I_2$ de sorte qu'il existe $A > 0$ avec $\left| \frac{1}{g'} \right| < A$ sur I_1 et $\left| \frac{1}{f'} \right| < A$ sur I_2 . On suppose de plus que $\frac{1}{A} < f'g - fg' < A$, $|f'| < A$ et $|g'| < A$. Soient $T > 0$ et $r \in I_1$ tels que $\frac{f'(x)}{-g'(x)} = \frac{q}{p}$ et $\left| \frac{(f'g - fg')p}{-g'(x)} \right| < T$. Alors $|p| < A^2T$ et comme $\left| \frac{q}{p} \right| < A^2$ il n'y a qu'un nombre fini de rationnels grossièrement borné par $3A^6T^2$ vérifiant ces conditions. Par la forme du graphe de $x \mapsto \frac{f'(x)}{-g'(x)}$, pour chaque rationnel il y a au plus un x tel que la pente du champ de Reeb sur T_x soit donnée par ce rationnel. Sur I_2 le raisonnement est identique. Par conséquent la croissance du nombre de périodes inférieures à T est au plus quadratique.

Si $p^2 + q^2 \leq B$, il existe x tel que $\frac{f'(x)}{-g'(x)} = \frac{q}{p}$ et la période des orbites périodiques associées est inférieure à A^2B . Par conséquent la croissance de $\#(\sigma(\alpha) \cap [0, T])$ est au moins quadratique. \square

Comme dans le cas Morse-Bott, on perturbe l'équation dégénérée à l'aide de fonctions de Morse sur les espaces S_T . On construit des fonctions $f_{T'}$ sur $N_{T'}$ pour $T' \leq T$ telles que $df_{T'}.R = 0$ et $f_{T'} : N_{T'}/S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ soit de Morse. Pour cela on choisit

- (1) sur les tores T_x de $N_{T'}$, $f_{T'}(x, y, z) = h(qy - pz)$ où $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse;
- (2) sur W , une fonction z -invariante f_1 telle que dans des coordonnées cylindriques (x, y, z) au voisinage du bord de W on ait f_1 indépendante de y et $\pm \frac{\partial f_1}{\partial x} > 0$ si $\varepsilon = \pm 1$.

Enfin on prolonge ces fonctions à la variété entière en utilisant des fonctions bosses ne dépendant que de x . La longueur des intervalles (en x) sur lesquels les fonctions bosses sont non constantes tend vers 0 quand T tend vers l'infini. On note \bar{f}_T la fonction obtenue.

Par construction, $\text{dom}(\bar{f}_T)$ et $V \setminus \text{dom}(\bar{f}_T)$ sont stables par le flot de $R_{\alpha_{T,\lambda}}$. Pour λ assez petit, on contrôle les orbites périodiques de période inférieure à T .

LEMME 6.5. Pour tout $T > 0$, il existe $\Lambda(T) > 0$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \Lambda(T)$ le champ de Reeb associé à l'équation de contact $\alpha_{T,\lambda} = (1 + \lambda \bar{f}_T)\alpha$ ait toutes ses orbites périodiques de période $T' \leq T$ associées aux points critiques des $f_{T'}$. De plus ces orbites périodiques sont non dégénérées.

DÉMONSTRATION. En dehors d'un voisinage de ∂W , la théorie Morse-Bott s'applique et fournit le résultat cherché. Au voisinage de ∂W , on se place dans les coordonnées (x, y, z) trivialisant W . Comme le changement de carte est linéaire (proposition 2.4), l'équation de contact s'écrit

$$\alpha = (f(x) + kg(x))dy + g(x)dz = f_W(x)dy + g(x)dz.$$

Par hypothèse \bar{f}_T ne dépend que de x dans ce voisinage, on a donc :

$$R_{\alpha_T, \lambda} = \frac{1}{(f'_W g - f_W g')(1 + \lambda \bar{f}_T)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g'(1 + \lambda \bar{f}_T) - \lambda g \bar{f}'_T \\ f'_W(1 + \lambda \bar{f}_T) + \lambda f_W \bar{f}'_T \end{pmatrix}.$$

Quitte à restreindre le voisinage du bord considéré et pour λ assez petit le terme en $\frac{\partial}{\partial y}$ est de signe constant et aussi petit qu'on veut. Donc il n'y a pas d'orbite périodique de période inférieure à T . \square

2.2. Contrôle des orbites périodiques dans une classe d'homotopie fixée et conséquences. On montre ici les résultats ne nécessitant pas de contrôle des cylindres holomorphes.

LEMME 6.6. *Soit a tel que $[a] = [\text{fibre}]^k$ avec $k \neq 0$ ou $[a] = [\text{fibre}]^k [\Gamma_{j_0}]^{k'}$ avec $k' \neq 0$. Il existe T_0 et $T \mapsto \lambda(T) > 0$ décroissante tels que pour tous $T \geq T_0$ et $\lambda \leq \lambda(T)$ les orbites périodiques du champ de Reeb de $\alpha_{T, \lambda}$ homotopes à a soient de période inférieure à T .*

DÉMONSTRATION. On considère un recouvrement ouvert de V formé de voisinages W'_i de chaque W_i qui ne rencontrent pas $\bigcup_{i=0}^n \pi^{-1}(\Gamma_j)$ et de voisinages U'_j des Γ_j qui ne rencontrent pas les W_i . Il existe $\varepsilon > 0$ tel que dans la trivialisatoin de W'_i donnée par 2.4 la composante sur $\frac{\partial}{\partial z}$ (c'est-à-dire le long de la fibre) du champ de Reeb R_α soit minorée en valeur absolue par ε . De même, quitte à diminuer ε , dans la trivialisatoin de U'_j au voisinage de $\pi^{-1}(\Gamma_j)$, la composante sur $\frac{\partial}{\partial y}$ du champ de Reeb R_α est minorée par ε .

Si $[a]$ admet un représentant dans W_i (resp. U_j), on note k_i (resp. k'_j) la multiplicité de la fibre (resp. Γ_j) dans la décomposition de $[a]$ dans la trivialisatoin de W_i (resp. de U_j). Soit $T_0 > 0$ tel que

- (1) $T_0 > \frac{\max(\{|k_i|, |k'_j|\})}{\varepsilon}$;
- (2) les orbites périodiques de R_α homotopes à a sont de période inférieure strictement à T_0 ;
- (3) les composantes connexes du domaine de $f_{T''}$ pour tout $T'' \geq T_0$ sont incluses chacune dans un des ouverts du recouvrement.

Par le lemme 6.5, on choisit $\lambda(T)$ pour que pour tout $\lambda \leq \lambda(T)$, la forme $\alpha_{T, \lambda}$ ait toute ses orbites périodiques de période $\leq T$ non dégénérées et que les minoration précédentes sur le champ de Reeb restent vérifiées pour $R_{\alpha_{T, \lambda}}$.

Soit γ une orbite périodique du champ de Reeb associé à $\alpha_{T, \lambda}$ de période supérieure à T . Alors γ est soit incluse dans $\text{dom}(f_T)$ soit incluse dans $V \setminus \text{dom}(f_T)$. Si $\gamma \subset (V \setminus \text{dom}(f_T))$ alors γ n'est pas homotope à a car les orbites périodiques sont les mêmes que celles de R_α et toutes les orbites de R_α homotopes à a sont de période inférieure à T (par la condition 2). Sinon, par la condition 3, on a soit $\gamma \subset (\text{dom}(f_T) \cap W'_i)$ soit $\gamma \subset (\text{dom}(f_T) \cap U'_j)$. Si $\gamma \subset (\text{dom}(f_T) \cap W'_i)$, alors γ parcourt au moins $\pm \varepsilon T$ fois la fibre et donc au moins $|k_i| + 1$ ou $-|k_i| - 1$ fois la fibre (par la condition 1). De même si $\gamma \subset (\text{dom}(f_T) \cap U'_j)$ alors elle parcourt au moins $|k'_j| + 1$ ou $-|k'_j| - 1$ fois Γ_j . Donc γ n'est pas homotope à a . \square

La démonstration précédente montre aussi le lemme suivant qui permet de justifier l'existence de l'homologie de contact cylindrique.

LEMME 6.7. *Il existe T_1 et $T \mapsto \lambda_1(T) > 0$ décroissante tels que pour tout $T \geq T_1$ et $\lambda \leq \lambda_1(T)$ l'équation de contact $\alpha_{T,\lambda}$ soit hypertendue. De plus, il existe des perturbations arbitrairement petites de $\alpha_{T,\lambda}$ qui sont non dégénérées et hypertendues.*

DÉMONSTRATION. Par la démonstration précédente, pour T assez grand et λ assez petit toutes les orbites périodiques de périodes inférieures à T sont associées aux points critiques de f_T et donc non contractiles et les orbites périodiques de période supérieures à T restent dans un U'_i ou dans un W'_j et parcourent au moins une fois Γ_j ou au moins une fois la fibre. Or les composantes de Γ ne sont pas contractiles et la fibre n'est pas de torsion donc ces orbites périodiques ne sont pas contractiles. Pour obtenir une perturbation non dégénérée et hypertendue, on choisit une perturbation non dégénérée telle que les orbites de Reeb restent dans un des ouverts U'_i ou W'_j décrits dans la preuve précédente. Pour cela, on perturbe l'équation en conservant des tore feuilletés par des orbites de Reeb denses. \square

FAIT 6.8. Soit $[a] \neq [\text{fibre}]^k$ et $[a] \neq [\text{fibre}]^k[\Gamma_j]^{k'}$, alors il existe une équation α telle que $HC_*^{[a]}(V, \alpha) = 0$.

LEMME 6.9. *Sous l'hypothèse H, la croissance de l'homologie de contact est quadratique.*

DÉMONSTRATION. Soit α' une équation de ξ non dégénérée et sans orbite contractile obtenue par exemple en appliquant 6.7. On construit une suite d'équation α_{T_i, λ_i} telles que $T_i \rightarrow \infty$ et que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on ait $T_i \notin \sigma(\alpha)$ et $\lambda_i \leq \lambda_1(T_i)$. On perturbe ces équations en équations α'_{T_i, λ_i} non dégénérées et sans orbites contractiles en utilisant le lemme 6.7. Pour λ_i assez petit et des perturbations assez petites, on peut supposer que les orbites périodiques de période inférieure à T_i de α'_{T_i, λ_i} sont en bijection avec les orbites périodiques de période inférieure à T_i de α_{T_i, λ_i} et de périodes proche à $\frac{1}{2}$ -près des éléments de $\sigma(\alpha)$ associés. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $T \leq T_i$

$$\#C_{\leq T}^{\text{cy}1}(V, \alpha'_{T_i, \lambda_i}) \leq C\#(\sigma(\alpha) \cap [0, T + 1]).$$

Par ailleurs, il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{1}{M} < \sup \left\{ f_{T_i, \lambda_i}(p), \frac{1}{f_{T_i, \lambda_i}(p)} \right\} < M$$

où $\alpha' = f_{T_i, \lambda_i} \alpha'_{T_i, \lambda_i}$.

Par invariance de la croissance de l'homologie de contact cylindrique (voir corollaire 3.31) et par [20], il existe $C(M)$ tel que pour tout $T > 0$ on ait $\text{rg}(\psi_T) \leq \text{rg}(\psi_{C(M)T}^i)$ où $\psi_T^i : HC_{\leq T}^{\text{cy}1}(V, \alpha'_{T_i, \lambda_i}) \rightarrow HC^{\text{cy}1}(V, \alpha'_{T_i, \lambda_i})$ et $\psi_T : HC_{\leq T}^{\text{cy}1}(V, \alpha') \rightarrow HC^{\text{cy}1}(V, \alpha')$ sont les applications permettant de définir la croissance. Par conséquent, on a

$$\text{rg}(\psi_T) \leq C\#(\sigma(\alpha) \cap [0, T + 1])$$

et $\text{rg}(\psi_T)$ croît donc quadratiquement avec T . \square

2.3. Contrôle des cylindres holomorphes. Soit $[a]$ une classe d'homotopie telle que $[a] = [\text{fibre}]^k$ ou $[a] = [\text{fibre}]^k[\Gamma_j]^{k'}$. Par les lemmes 6.6 et 6.7, on prend T assez grand et λ assez petit pour que toutes les orbites périodiques du champ de Reeb associé à $\alpha_{T,\lambda}$ homotopes à a soient de période $\leq T$, associées à des points critiques de f_T et donc non dégénérées.

On considère une composante connexe $W_j \simeq S_j \times S^1$ de W . On ajoute à W_j les tores U_l adjacents et on obtient une variété à bord $W'_j \simeq S'_j \times S^1$. Dans des coordonnées cylindriques au voisinage du bord adaptées à la trivialisation précédente et données par 2.4, l'équation de contact s'écrit $\alpha = (f(x) + mg(x))dy + g(x)dz$ et le champ de Reeb associé est positivement colinéaire à

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -g' \\ f' + mg' \end{pmatrix}.$$

Donc la composante sur $\frac{\partial}{\partial y}$ est toujours strictement négative sur $S'_j \setminus S_j$.

LEMME 6.10. *Soit u une courbe holomorphe d'énergie finie asymptote à $\gamma \in W_j$ en $-\infty$. Alors $u(\mathbb{R} \times S^1) \subset W_j$.*

DÉMONSTRATION. Par l'absurde, on suppose que u rencontre $W'_j \setminus W_j$. Si u rencontre U_l , il existe un intervalle I tel que dans le sous-ensemble $I \times S^1 \times S^1 \subset U_l$ de la trivialisation associée à W'_j on ait $\alpha = f_1(x)d\theta + g_1(x)dz$ et tel que pour tout $x \in I$, l'image de u rencontre $\{x\} \times S^1 \times S^1$. On applique alors le lemme 3.8 : pour tout $x_0 \in I$,

$$u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap \mathbb{R} \times T_{x_0})$$

est une union de cercles lisses homotopes à $\{*\} \times S^1$. On découpe $\mathbb{R} \times S^1$ le long de ces cercles pour chaque U_l bordant W_j et rencontré par u . On considère la composante connexe de $\mathbb{R} \times S^1$ après découpage qui est asymptote à $-\infty \times S^1$. On note C le bord (orienté) de cette composante et c son image projetée dans T_{x_0} . On choisit deux colliers $\overline{A_+}$ et $\overline{A_-}$ de C tels que A_\pm soit ouvert et contenu dans la composante de $\mathbb{R} \times S^1 \setminus C$ asymptote à $\pm\infty \times S^1$.

Si γ est orienté comme la fibre, alors $W_j \subset W_+$ et un vecteur p dirigeant le représentant linéaire de la classe d'homologie de c est $(0, 1)$. Donc (p, R) définit l'orientation. Par le lemme 3.9, on a $u(A_-) \subset]x, x_0[\times S^1 \times S^1$.

$$\begin{array}{ccccc} W_- & & u(A_-) & | & u(A_+) & & W_+ \\ & & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & \\ & & x_0 & & x & & \end{array}$$

Or, par connexité, $u(A_-) \subset]x_0, x[\times S^1 \times S^1$, d'où une contradiction.

De même si γ est orienté comme l'opposé de la fibre alors $W_j \subset W_-$ et on peut prendre $p = (0, -1)$. Donc (p, R) ne définit pas l'orientation. Par le lemme 3.9, on a $u(A_-) \subset]x_0, x[\times S^1 \times S^1$.

$$\begin{array}{ccccc} W_- & & u(A_+) & | & u(A_-) & & W_+ \\ & & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & \\ & & x_0 & & x & & \end{array}$$

Par connexité, on obtient aussi une contradiction. \square

LEMME 6.11. *Soit u un cylindre holomorphe asymptote à $\gamma \subset U_j$ en $-\infty$ alors $u(\mathbb{R} \times S^1) \subset U_j$ et plus précisément $u(\mathbb{R} \times S^1)$ reste dans la zone perturbée par f_T au voisinage de γ .*

DÉMONSTRATION. Soit x_0 tel que $\gamma \in T_{x_0}$ dans la trivialisation $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times S^1 \times S^1$ de U_j . Si le résultat n'est pas vérifié, il existe un intervalle $I \subset] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sur lequel $\alpha = f(x)dy + g(x)dz$ et tel que, pour tout $x \in I$, l'image de u rencontre $\{x\} \times S^1 \times S^1$. On applique alors le lemme 3.8 : pour tout $x_1 \in I$,

$$u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap \mathbb{R} \times T_{x_1})$$

chacune de ces solutions les conditions analytiques nécessaires à la définition de l'homologie de contact sont bien vérifiées et on sait décrire ces solutions à l'aide des trajectoires de gradient de \tilde{f}_T .

Par ailleurs, par les lemmes 6.10 et 6.11, les solutions cylindriques des équations de Cauchy Riemann associées à J_{λ_n} ayant leurs deux asymptotes dans W_j (resp. U_i) restent dans cet ensemble. Ainsi l'homologie de contact est bien définie. Comme la différentielle s'identifie avec la différentielle de l'homologie de Morse on obtient

(1) si $[a] = [\text{fibre}]^k$ avec $\pm k > 0$,

$$HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^{n_{\pm}} H_*^{\mathcal{M}}(W_j^+, (f_1, g_1), \mathbb{Q})$$

(2) si $[a] = [\text{fibre}]^k [\Gamma_j]^{k'}$ avec $k' \neq 0$,

$$HC_*^{[a]}(V, \alpha, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{[\Gamma_i]=[\Gamma_j]} H_*^{\mathcal{M}}(S^1, (f_T, g_T), \mathbb{Q})$$

où $H_*^{\mathcal{M}}(X, (f, g), \mathbb{Q})$ est l'homologie de Morse associée à la fonction f et à la métrique g . Comme on ne tient pas compte de la graduation, on obtient bien le résultat annoncé. \square

Ce type de contrôles des cylindres holomorphes a été utilisé par Latschev et Wendl [55] pour étudier la torsion algébrique de l'homologie de contact.

Croissance exponentielle des orbites périodiques de Reeb sur une variété avec composante hyperbolique

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 0.4 dont on rappelle ici l'énoncé. Pour toute forme de contact α , on note $N_L(\alpha)$ le cardinal de l'ensemble des orbites périodiques de R_α de période inférieure à L .

THÉORÈME 7.1. *Soit V une variété de dimension 3 orientée, close, connexe, qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors V porte une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues¹ et universellement tendues telles que pour toute équation de contact α non dégénérée et hypertendue $N_L(\alpha)$ croisse exponentiellement avec L .*

Sous l'hypothèse H , on peut retirer la condition hypertendue des hypothèses sur la forme α .

Ce résultat découle de la croissance exponentielle de l'homologie de contact pour une famille particulière de structures de contact. L'invariance de la croissance de l'homologie de contact implique la croissance exponentielle de $N_L(\alpha)$. Cette invariance est complètement établie dans le cas hypertendu. Dans le cas général, elle dépend de résultats de transversalité pour les perturbations abstraites (voir chapitre 3, section 2). Ici, comme on se restreint à des classes d'homotopies primitives, il est possible que la démonstration d'invariance de l'homologie de contact augmentée pour les augmentations tirées en arrière se simplifie.

Les variétés hyperboliques à bord qui fibrent sur le cercle sont des suspensions par des difféomorphismes homotopes à un pseudo-Anosov. Dans la section 1, on rappelle les propriétés de ces applications qui seront utilisées par la suite. La section 2 est consacrée à la construction d'équations de contact particulières sur V . La croissance de leur homologie de contact sera étudiée dans la section 3. Enfin, on démontre le théorème 7.1 dans la section 4.

1. Propriétés des pseudo-Anosov

Un automorphisme $\psi : S \rightarrow S$ où S est une surface compacte orientable est *pseudo-Anosov* s'il existe sur S deux feuilletages singuliers transverses \mathcal{F}^u et \mathcal{F}^s munis de deux mesures transverses μ^u et μ^s tels que $\psi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda^{-1}\mu^u)$ et $\psi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda\mu^s)$ où λ est un réel strictement positif. On pourra consulter [13] pour une étude dans le cas sans bord ou [27] pour une présentation plus complète dans le cas général.

THÉORÈME 7.2. *Le nombre de points k périodiques simples d'un automorphisme pseudo-Anosov sur une surface compacte sans bord croît exponentiellement avec k .*

1. Une équation est dite hypertendue si aucune de ses orbites périodiques de Reeb n'est contractile. Une structure est hypertendue si elle admet une équation hypertendue.

Ce résultat est un corollaire de l'existence d'une partition de Markov (voir [20, 11] et les références associées). Pour étendre les propriétés des points périodiques des pseudo-Anosov aux difféomorphismes homotopes, on utilise les classes de Nielsen.

DÉFINITION 7.3. Soient S une surface sans bord, $h : S \rightarrow S$ un automorphisme et $x \in S$ et $y \in S$ tels que $h(x) = x$ et $h(y) = y$. Les points x et y sont *dans la même classe de Nielsen* s'il existe $\delta : [0, 1] \rightarrow S$ tel que $\delta(0) = x$, $\delta(1) = y$ et $h(\delta)$ est homotope à δ .

Soient $h_t : S \rightarrow S$ où $t \in [0, 1]$, $x \in S$ et $y \in S$ tels que $h_0(x) = x$ et $h_1(y) = y$. Les points x et y sont *dans la même classe de Nielsen* s'il existe $\delta : [0, 1] \rightarrow S$ tel que $\delta(0) = x$, $\delta(1) = y$ et $t \mapsto h_t(\delta(t))$ est homotope à δ .

Pour plus d'informations sur les classes de Nielsen, on pourra consulter [28]. Deux points périodiques sont dans la même classe de Nielsen pour un automorphisme $h : S \rightarrow S$ si et seulement si les orbites périodiques associées pour le champ vertical dans la suspension de S par h sont homotopes.

THÉORÈME 7.4. *Les points périodiques d'un pseudo-Anosov sur une surface compacte sans bord sont tous dans des classes de Nielsen différentes.*

Soient S une surface sans bord, $h : S \rightarrow S$ un automorphisme et $k \in \mathbb{N}^*$. Un point k -périodique $x \in S$ est *non dégénéré* si $dh^k(x)$ n'a pas 1 pour valeur propre. On pose alors $\varepsilon_{h^k}(x) = 1$ si $\det(dh^k(x) - \text{Id}) > 0$ et $\varepsilon_{h^k}(x) = -1$ si $\det(dh^k(x) - \text{Id}) < 0$. Enfin, si S est compacte et tous les points périodiques dans la même classe de Nielsen n que x_0 sont non dégénérés, on note

$$\Lambda_{h^k}(n) = \sum_{x \in n} \varepsilon_{h^k}(x).$$

THÉORÈME 7.5. *Soient $h_0 : S \rightarrow S$ et $h_1 : S \rightarrow S$ homotopes et $x_0 \in S$ et $x_1 \in S$ des points périodiques de h_0 et h_1 dans la même classe de Nielsen. Si les classes de Nielsen n_0 et n_1 associées à x_0 et x_1 pour h_0 et h_1 ne contiennent que des points non dégénérés alors $\Lambda_{h_0^k}(n_0) = \Lambda_{h_1^k}(n_1)$.*

THÉORÈME 7.6. *Soient S_1 une surface à bord obtenue en retirant des disques à une surface sans bord S , $h : S_1 \rightarrow S_1$ un automorphisme tel que $h = \text{Id}$ au voisinage de ∂S_1 et $\psi : S_1 \rightarrow S_1$ un pseudo-Anosov homotope à h . On prolonge h à S par l'identité. Alors, quitte à considérer un revêtement ramifié \hat{S} de S , il existe un pseudo-Anosov $\hat{\psi}$ qui se projette sur ψ et est homotope au relevé \hat{h} de h .*

2. Construction des équations de contact

Soit V une variété de dimension 3 connexe qui peut être découpée le long d'une famille non vide $T_1 \dots T_N$ de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle.

2.1. Construction dans la partie hyperbolique. La composante hyperbolique V_0 s'écrit $(S \times S^1)/h$ où S est une surface orientée à bord non vide et h est un difféomorphisme de S qui est l'identité au voisinage du bord et est homotope à un pseudo-Anosov. On utilise ici la construction standard d'une structure de contact sur une suspension. On choisit des coordonnées cylindriques (r, θ) au voisinage des composantes de bord de S , avec $\frac{\partial}{\partial \theta}$ qui oriente ∂S . Soit β une 1-forme sur S telle que $d\beta > 0$ et au voisinage du bord $\beta = b(r)d\theta$ où $b > 0$ et $b' > 0$. On pose alors sur $S \times [0, 1]$

$$\alpha = (1 - F(t))\beta + F(t)h^*\beta + dt$$

où F est une fonction croissante, valant 0 au voisinage de 0 et 1 au voisinage de 1 et t est la coordonnée sur $[0, 1]$. Cette équation de contact passe au quotient par la

monodromie et définit donc une équation sur V_0 . La structure de contact obtenue est universellement tendue.

LEMME 7.7. *Le champ de Reeb est positivement transverse à $S \times \{*\}$ et l'application premier retour sur $S \times \{0\}$ induite par le flot de Reeb est homotope à h et donc à ψ .*

DÉMONSTRATION. On a

$$d\alpha = (1 - F(t))d\beta + F(t)h^*d\beta + F'(t)dt \wedge (h^*\beta - \beta)$$

par conséquent, si R est tangent à $S \times \{t\}$ en un point (p, t) on obtient

$$\iota_R((1 - F(t))d\beta + F(t)h^*d\beta)(p, t) = 0$$

ce qui est impossible car $d\beta$ et $h^*d\beta$ sont deux formes volume définissant la même orientation. Donc R est transverse à $S \times \{t\}$, il est positivement transverse par la condition au voisinage du bord. Par conséquent l'application retour sur $S \times \{0\}$ induite par le flot de Reeb est bien définie. Cette application retour est isotope à h car h est l'application retour sur $S \times \{0\}$ induite par le flot de $\frac{\partial}{\partial t}$, or R et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont homotopes parmi les champs transverses à $S \times \{*\}$. \square

Dans V_0 les orbites périodiques du champ de Reeb correspondent donc aux points périodiques de l'application premier retour sur $S \times \{0\}$. Quitte à perturber α dans l'intérieur de V_0 (1.13), les points périodiques de l'application retour sur S par le flot de Reeb sont tous non dégénérés dans l'intérieur de V_0 .

2.2. Construction dans les composantes non hyperboliques. Dans les composantes non hyperboliques, on utilise un théorème démontré par Colin et Honda. La construction de [19] fournit les mêmes structures que les constructions de [47] et [17].

THÉORÈME 7.8 (Colin-Honda, [19]). *Toute variété de dimension 3 compacte, orientable, irréductible, bordée par une union non vide de tores porte une forme de contact α hypertendue. La structure associée est donc universellement tendue. De plus, dans un voisinage $T \times I$ de chaque tore du bord muni de coordonnées (x, y, z) on peut supposer que α s'écrit $\cos(z)dx - \sin(z)dy$. Enfin, il existe des perturbations arbitrairement petites de α non dégénérées et hypertendues.*

On suppose que toutes les orbites périodiques de Reeb dont la classe d'homotopie libre n'a pas de représentant inclus dans le bord sont non dégénérées.

2.3. Interpolation entre les équations. Soit T un tore incompressible séparant deux composantes irréductibles. Au voisinage de T chacune de ces composantes admet une trivialisations privilégiée de la forme $T \times I$ définie dans le théorème 7.8. Quitte à effectuer une isotopie, on peut supposer que l'application de recollement entre ces deux trivialisations est linéaire. En épaississant le tore T en $T \times [a, b]$ et en transportant dans cette trivialisations les équations construites au voisinage de $T \times \{a\}$ et $T \times \{b\}$ on obtient deux équations de contact qui s'écrivent respectivement

$$(16) \quad \alpha_a = f_a(x)dy + g_a(x)dz$$

$$(17) \quad \alpha_b = f_b(x)dy + g_b(x)dz.$$

LEMME 7.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lisses prolongeant respectivement f_a et g_a au voisinage de a et f_b et g_b au voisinage de b telles que*

$$(18) \quad \alpha = f_n(x)dy + g_n(x)dz$$

soit une équation de contact telle que R_α parcourt un angle dans $]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3\pi}{2}]$ entre a et b dans les coordonnées (θ, z) .

DÉMONSTRATION. La condition de contact est $f'_n g_n - f_n g'_n > 0$ et le champ de Reeb est donné par la formule

$$R_\alpha = \frac{1}{f'_n g_n - f_n g'_n} \begin{pmatrix} 0 \\ -g'_n \\ f'_n \end{pmatrix}.$$

Les conditions se reformulent en la courbe paramétrée (f_n, g_n) dans \mathbb{R}^2 tourne dans le sens horaire autour de l'origine et la normale parcourt un angle dans $]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3\pi}{2}]$ le long de la courbe. Ces conditions peuvent clairement être vérifiées. \square

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on construit une structure de contact ξ_n sur V en utilisant f_n et g_n pour recoller les structures de contact sur les différentes composantes le long de T_1 et les fonctions f_1 et g_1 le long des autres tores incompressibles.

REMARQUE 7.10. Si $\{b\} \times T$ correspond au bord de V_0 , on a $f < 0$, $f' > 0$ et $g = 1$ au voisinage de b . De même, si $\{a\} \times T$ correspond au bord de V_0 , on a $f > 0$, $f' > 0$ et $g = 1$ au voisinage de b (la différence de signe est due aux différentes conventions d'orientation).

Par [16, Théorème 4.2], comme les structures de contact sont universellement tendues sur chaque composante irréductible, (V, ξ_n) est universellement tendue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus la construction présentée ici correspond à la construction des familles de structures de contact de [17, 4] et ainsi par le théorème [17, 4.5], parmi les structures de contact ξ_n , il existe une infinité de structures deux à deux non isomorphes.

3. Homologie de contact

3.1. Contrôle des cylindres holomorphes.

LEMME 7.11. *Pour toute structure presque complexe adaptée sur $\mathbb{R} \times V$, il n'existe pas de cylindre holomorphe $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times V$ asymptote à γ_0 et γ_1 avec γ_0 et γ_1 dans des composantes connexes différentes de $V \setminus (\bigcup_{i=1}^N T_i \times [a, b])$.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'un tel u existe. On se place dans les coordonnées $T \times [a, b]$ données lors de la construction de α . Alors, $u(\mathbb{R} \times S^1)$ rencontre tous les tores $T \times \{*\}$. Or, d'après 3.1 et 3.6, il n'y a qu'un nombre fini de points tels que $u(\mathbb{R} \times S^1) \in T \times [a, b]$ et $du(s, t) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial \tau} \in \text{im}(du(s, t))$, où τ est la coordonnée sur \mathbb{R} dans $\mathbb{R} \times V$. Par construction il existe donc r_0 et r_1 dans $[a, b]$ tels que $R(r_0) = -R(r_1)$ et

$$C_0 = u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap (\mathbb{R} \times \{r_0\} \times T))$$

et

$$C_1 = u^{-1}(u(\mathbb{R} \times S^1) \cap (\mathbb{R} \times \{r_1\} \times T))$$

ne rencontrent pas les points tels que $du(s, t) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial \tau} \in \text{im}(du(s, t))$.

Par le lemme 3.9, C_0 et C_1 sont constitués de cercles homotopes à $\{*\} \times S^1$. On découpe $\mathbb{R} \times S^1$ le long de ces cercles et on garde une composante connexe Σ telle que $u(\Sigma)$ rencontre tous les tores $\{r\} \times T$ pour $r \in [r_0, r_1]$. Les images des bords de Σ sont des cercles de $\{r_0\} \times T$ et $\{r_1\} \times T$ lisses et homotopes. Par la positivité d'intersection le champ de Reeb intersecte positivement ces courbes mais $R(r_0) = -R(r_1)$ et on obtient ainsi une contradiction. \square

3.2. Croissance de l'homologie de contact partielle. Soit Λ_0 l'ensemble des classes d'homotopies libres primitives qui ne représentent pas des classes issues des tores incompressibles T_i et ayant un représentant qui est une orbite périodique associée à un point périodique de h dans V_0 . Par construction toutes les orbites de Reeb de α homotopes à un élément de Λ_0 sont non-dégénérées et il n'y a pas d'orbite de Reeb contractile. Ainsi l'homologie de contact cylindrique est bien définie pour ces classes. Par ailleurs, il existe C tel que toutes les orbites périodiques associées à des points k périodiques de h_1 soient de périodes inférieures à kL . En effet, il existe $C > 0$ tel que le temps de retour sur S soit majoré par C , le temps de k -ième retour est alors majoré par kC .

LEMME 7.12. *Pour tout $a \in \Lambda_0$, l'homologie cylindrique $HC_*^a(V, \alpha)$ est de dimension au moins 1. De plus, si a est la classe associée à un point k périodique, pour tout $L > kC$ l'image de $HC_{\leq L}^a(V, \alpha)$ dans $HC_*^a(V, \alpha)$ est de dimension au moins 1.*

DÉMONSTRATION. Décomposons le complexe C_*^a en somme directe $C_*^a = C_0 \oplus C_1$ où C_0 est engendré par les orbites périodiques de Reeb homotopes à a et contenues dans V_0 (et donc associées à des points périodiques de h) et C_1 est engendré par les autres orbites périodiques de Reeb homotopes à a . Par le lemme 7.11, la différentielle se décompose en

$$\begin{pmatrix} \partial_a & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir le résultat cherché, il suffit donc de montrer que $\ker(\partial_a)/\text{im}(\partial_a)$ est de dimension au moins 1. Or l'espace vectoriel C_0 se décompose en $C_0 = P \oplus I$ où P est l'espace vectoriel engendré par les orbites d'indice de Maslov pair et I est l'espace vectoriel engendré par les orbites d'indice de Maslov impair (toutes les orbites périodiques sont bonnes car a est une classe primitive). On a alors

$$\partial_a = \begin{pmatrix} 0 & \partial_I \\ \partial_P & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\ker(\partial_a)/\text{im}(\partial_a) = \ker(\partial_P)/\text{im}(\partial_I) \oplus \ker(\partial_I)/\text{im}(\partial_P)$$

$\ker(\partial_a)/\text{im}(\partial_a)$ est trivial si et seulement si

$$\dim(\ker(\partial_P)) = \dim(\text{im}(\partial_I))$$

et

$$\dim(\ker(\partial_I)) = \dim(\text{im}(\partial_P)).$$

Par la section 1, quitte à considérer un revêtement ramifié fini à s feuilletts \hat{S} de S , \hat{h}_1 est homotope à un pseudo-Anosov $\hat{\psi}$. Notons n la classe de Nielsen associée à la classe d'homotopie a et k l'ordre des points périodiques associés. Comme n n'est pas une classe de Nielsen associée aux points de ∂S , chaque point périodique de n est associé à exactement s points périodiques de \hat{h}_1 et \hat{n} ne contient que des points périodiques associés aux points de n . Donc $\Lambda_{\hat{h}_1^k}(\hat{n})$ est bien défini et $\Lambda_{\hat{h}_1^k}(\hat{n}) = \Lambda_{\hat{\psi}^k}(\hat{n}) \neq 0$ (par le théorème 7.4 car \hat{n} contient un unique représentant pour $\hat{\psi}$ et donc s représentants pour $\hat{\psi}$, tous étant de la même parité). Or, l'indice de Maslov de l'orbite issue de x est pair si x est un point périodique hyperbolique de h_0 à valeurs propres positives et impair si x est un point périodique de h_0 elliptique ou hyperbolique à valeurs propres négatives où h_0 est l'application premier retour du champ de Reeb sur une surface transverse à l'orbite périodique. Donc $\Lambda_{\hat{h}_1^k}(\hat{n}) = s \dim(P) - s \dim(I)$ et $\dim(\ker(\partial_I)) + \dim(\text{im}(\partial_I)) \neq \dim(\ker(\partial_P)) + \dim(\text{im}(\partial_P))$. Par conséquent, $\ker(\partial_a)/\text{im}(\partial_a)$ n'est pas trivial.

Pour $L > kC$, le complexe $C_{\leq L}^a$ en somme directe $C_*^a = C_0 \oplus C_{\leq L}^a$, la différentielle est toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_a & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\ker(\partial_a)/\text{im}(\partial_a)$ forme un sous-espace vectoriel de dimension au moins 1 de $HC_{\leq L}^a(V, \alpha)$ qui s'injecte dans $HC_*^a(V, \alpha)$. \square

THÉORÈME 7.13. *Soit V une variété de dimension 3 orientée, close et connexe qui peut être découpée le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle. Alors V admet une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues et universellement tendues munies d'une équation hypertendue ayant une homologie de contact cylindrique de croissance exponentielle dans les classes primitives.*

Sous l'hypothèse H, la variété V admet une infinité de structures de contact non isomorphes, hypertendues et universellement tendues ayant une homologie de contact linéarisée de croissance exponentielle.

DÉMONSTRATION. Il reste à montrer que la croissance de l'homologie de contact $HC_*^A(V, \alpha)$ est exponentielle. Le nombre d'éléments de Λ_0 associés à des points au plus k -périodiques croît exponentiellement avec k . En effet, le nombre de points k périodiques de l'application premier retour croît exponentiellement avec k (par mes théorèmes 7.2, 7.4 et 7.5). Le nombre de classes de points périodiques de l'application retour retirées pour obtenir Λ_0 croît polynomialement avec k (voir lemme 6.4). \square

4. Croissance du nombre d'orbites de Reeb

On achève ici la démonstration du théorème 7.1. Par l'invariance de la croissance de l'homologie de contact cylindrique partielle dans les classes primitives (proposition 3.32), la croissance du nombre d'orbites périodiques de Reeb est exponentielle dès que cette homologie est bien définie, c'est-à-dire dès que le champ de Reeb a toutes ses orbites simples non dégénérées et n'a pas d'orbite périodique contractile. En effet dans ce cas

$$\text{rg}(\varphi_{\leq T}) \leq \dim HC_{\leq T}^{\Lambda_0}(V, \alpha, J) \leq \dim C_{\leq T}^{\Lambda_0}(V, \alpha, J)$$

où $\varphi_{\leq T} : HC_{\leq T}^{\Lambda_0}(V, \alpha, J) \rightarrow HC_*^{\Lambda_0}(V, \alpha, J)$ est l'application permettant de définir la croissance de l'homologie de contact partielle (voir chapitre 3, section 3).

On suppose maintenant que l'hypothèse H est vérifiée. Soit α_n^p une équation de contact de ξ_n non dégénérée. On considère une équation de contact de ξ_n hypertendue et non dégénérée, notée α'_n (obtenue en perturbant par le théorème 7.8 et par le lemme 6.7 l'équation construite dans la section 2). La croissance exponentielle de l'homologie de contact partielle (obtenue pour l'équation α_n) implique la croissance exponentielle de l'homologie cylindrique. On considère l'application fournie par le théorème 3.13 entre $A_*(V, \alpha_n^p, J)$ et $A_*(V, \alpha'_n, J')$ et on tire en arrière l'augmentation triviale associée à l'homologie de contact cylindrique. Par invariance de l'homologie de contact linéarisée sous l'hypothèse H (proposition 3.33), un raisonnement analogue au raisonnement précédent permet de conclure sur la croissance exponentielle de $N_L(\alpha_n^p)$.

Partie 3

Recollement de rocade

Théorème de recollement de rocade

Dans ce chapitre on présente l'énoncé du théorème de recollement de rocade 0.8 ainsi que des exemples simples d'application : le recollement de rocade au bord d'une surface convexe épaissie.

1. Énoncé du théorème

On note $\mathbb{S}_n = \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z}$. Dans toute la suite de cette section $(V, \xi = \ker \alpha)$ est une variété de contact de bord S convexe. On fixe un découpage Γ de S et on se donne une courbe legendrienne fermée γ tracée sur S contenant un arc d'attachement γ_0 . On note S_+ et S_- les surfaces à bord associées au découpage Γ .

Pour construire explicitement le recollement de rocade, il faut garantir que la structure de contact soit standard au voisinage de l'arc d'attachement et que le champ de Reeb soit bien adapté au bord en dehors de la zone de recollement.

DÉFINITION 8.1. Une *zone de recollement* autour de γ est un voisinage Z de γ muni de coordonnées

$$(x, y, z) \in \mathbb{S}_n \times [-y_{\max}, 0] \times [-z_{\max}, z_{\max}]$$

où $n \geq 2$ dans lesquelles $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$, $\gamma = \mathbb{S}_n \times \{0\} \times \{0\}$ et $\gamma_0 = [0, 2\pi] \times \{0\} \times \{0\}$. On appelle $S_Z = S \cap Z = \mathbb{S}_n \times \{0\} \times [-z_{\max}, z_{\max}]$ la *surface de recollement*.

DÉFINITION 8.2. La courbe γ est en *position de recollement de rocade* s'il existe une zone de recollement de γ telle que α soit adaptée à $S \setminus S_Z$.

Les définitions précédentes s'adaptent au cas dans lequel γ est une courbe legendrienne non connexe. Par abus de langage, on dira aussi que (S, γ_0) est en position de recollement de rocade si γ_0 admet un prolongement legendrien γ tel que (S, γ) soit en position de recollement de rocade.

Soit $K > 0$. Génériquement les cordes de Reeb de γ_0 de période inférieure à K sont en nombre fini. On note $a_1 \dots a_N$ ces cordes et $T(a_i)$ leur « période ». On s'intéresse aux mots en $a_1 \dots a_N$ à permutation cyclique près. Soit a_i une corde de Reeb, on note a_i^- l'extrémité de a_i sur S_- et a_i^+ l'extrémité de a_i sur S_+ . On étend cette longueur aux mots en $a_1 \dots a_N$ par la formule

$$l(a_{i_1} \dots a_{i_k}) = T(a_{i_1}) + \dots + T(a_{i_k}).$$

THÉORÈME 8.3. Soient (V, α) une variété de contact de bord convexe S et γ une courbe legendrienne fermée tracée sur S contenant un arc d'attachement γ_0 telle que (S, γ) soit en position de recollement de rocade. Soit $K > 0$, on suppose que l'image de γ_0 sur S par le flot de Reeb en temps inférieur à K est transversale à γ_0 en dehors de Γ_S . Alors il existe une variété (V', S', α') obtenue par recollement de rocade à (V, α) le long de γ_0 , vérifiant les propriétés suivantes

- (1) $S' = \partial V'$ est convexe ;
- (2) α' est adapté à S' ;
- (3) α' est arbitrairement proche de α dans V ;

- (4) les orbites périodiques du champ de Reeb de période inférieure à K rencontrant la zone de recollement sont en bijection avec les mots \mathbf{a} en les cordes de Reeb de γ_0 tels que $l(\mathbf{a}) \leq K$.

De plus, l'orbite $\gamma_{\mathbf{a}}$ associée au mot $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ de longueur inférieure à K intersecte successivement S_Z en les points $p_1^-, p_1^+, \dots, p_k^-, p_k^+$ où l'arc entre p_j^- et p_j^+ est une corde de S_Z dans V arbitrairement proche de a_j et l'arc entre p_j^+ et p_{j+1}^- est inclus dans la rocade.

Pour obtenir une trivialisaton du fibré normal des nouvelles orbites de Reeb, on commence par prendre une trivialisaton du fibré normal des cordes de Reeb. Pour cela on considère un prolongement de la structure de contact sur $S_Z \times [0, \varepsilon[$ par $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$. Pour chaque corde a_i , on choisit un collier S_i dans V dont l'un des bords est $a_i \cup [a_i^+, a_i^-]$, où $[a_i^+, a_i^-]$ est le segment reliant les extrémités de la corde a_i dans les coordonnées de la zone de recollement. Dans une trivialisaton symplectique de ξ le long de a_i de base (e_1, e_2) , on considère le chemin $(R_t)_{t \in [0, T(a_i)]}$ de matrices symplectiques donné par la différentielle du flot de Reeb. Pour tout $t \in [0, T(a_i)]$, on relève l'angle entre e_1 et $R_t(e_1)$ et on note θ_t l'angle obtenu.

DÉFINITION 8.4. L'indice $\tilde{\mu}(a_i)$ est l'unique entier relatif tel que

$$\theta_{T(a_i)} \in]\pi\tilde{\mu}(a_i), \pi(\tilde{\mu}(a_i) + 1)[.$$

L'angle $\theta_{T(a_i)}$ dépend du choix de S_i mais $\tilde{\mu}(a_i)$ ne dépend que de sa classe d'homologie. On a $\tilde{\mu}(a_i) \in \{\mu(a_i) - 2, \mu(a_i) - 1, \mu(a_i), \mu(a_i) + 1\}$.

Les colliers S_i permettent d'obtenir un collier $S_{\gamma_{\mathbf{a}}}$ de $\gamma_{\mathbf{a}}$, où \mathbf{a} est un mot en $a_1 \dots a_N$ de longueur inférieure à K , de la façon suivante.. On écrit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$, l'orbite périodique $\gamma_{\mathbf{a}}$ intersecte S_Z en les points $p_1^-, p_1^+, \dots, p_k^-, p_k^+$ (voir théorème 8.3). Pour tout $i \in i_1 \dots i_k$ on construit un collier \tilde{S}_i proche de S_i qui borde la courbe obtenue par réunion de l'arc de $\gamma_{\mathbf{a}}$ entre p_i^- et p_i^+ et de $[p_i^-, p_i^+]$. Soit maintenant un disque immergé dans un voisinage de la rocade, plongé au voisinage de son bord, de bord l'union des segments $[p_{i_j}^-, p_{i_j}^+]$ et des arcs de $\gamma_{\mathbf{a}}$ entre $p_{i_j}^+$ et $p_{i_{j+1}}^-$. La surface $S_{\gamma_{\mathbf{a}}}$ est obtenue en recollant ce disque aux surfaces \tilde{S}_{i_j} .

THÉORÈME 8.5. Soit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ un mot de longueur inférieure à K en $a_1 \dots a_N$. Alors, dans la trivialisaton symplectique de ξ le long de $\gamma_{\mathbf{a}}$ décrite ci-dessus, l'indice de Conley-Zehnder de $\gamma_{\mathbf{a}}$ est donné par

$$\mu(\gamma_{\mathbf{a}}) = \sum_{j=1}^k \tilde{\mu}(a_{i_j}).$$

Terminons cette section en énonçant une version du théorème de recollement de rocade qui décrit de façon moins précise toutes les orbites périodiques obtenues. On dit qu'une fonction (partielle) $\varphi : X \rightarrow Y$ se décompose en applications $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i$ si chaque X_i est une union de composantes connexes de $\text{dom}(\varphi)$, si les X_i forment une partition de $\text{dom}(\varphi)$ et si $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$.

PROPOSITION 8.6. Soient (V, α) une variété de contact de bord convexe S et γ une courbe legendrienne tracée sur S contenant un arc d'attachement γ_0 telle que (S, γ) soit en position de recollement de rocade. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que l'image de $]\pi, 2\pi[\times I_{\max}$ sur $]0, \pi[\times I_{\max}$ par le flot de Reeb se décompose en applications $(\psi_j)_{j \in J}$ de sources dans $[\pi + \lambda, 2\pi - \lambda] \times I_{\max}$ et d'images dans $[\lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$. On demande de plus que pour toute perturbation assez petite α' de α l'application retour par $R_{\alpha'}$ de $[\pi + \lambda, 2\pi - \lambda] \times I_{\max}$ sur $[\lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ se décompose en $(\psi'_j)_{j \in J}$. Alors il existe une variété (V', S', α') obtenue par recollement d'une rocade à (V, α) le long de γ_0 , vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $S' = \partial V'$ est convexe ;
- (2) α' est adapté à S' ;
- (3) α' est arbitrairement proche de α dans V ;
- (4) pour toute nouvelle orbite périodique de Reeb δ , il existe une suite finie d'indices $\mathcal{I} = (i_1, \dots, i_k) \in J^k$ tels que δ intersecte S_Z en un point fixe de $F_{\mathcal{I}} = \varphi \circ \psi'_{i_k} \circ \dots \circ \varphi \circ \psi'_{i_1}$, où φ est l'application retour sur S_Z dans la rocade.

La décomposition de l'orbite obtenue est alors la même que celle décrite à la fin du théorème 8.3.

Si les hypothèses du théorème 8.3 et de la proposition 8.6 sont vérifiées, on peut faire coïncider les deux constructions. Dans ce cas, pour un mot \mathbf{a} en les cordes de Reeb de période inférieure à K , les deux ensembles d'indices considérés sont les mêmes, $F_{\mathcal{I}}$ admet un unique point fixe et $\gamma_{\mathbf{a}}$ passe par ce point fixe.

La cœur de la proposition réside dans le fait que, pour construire une rocade avec équation adaptée au bord, il faut perturber l'équation de contact α et donc l'application retour dans la variété (en particulier au voisinage de la courbe de découpage). Les conclusions du théorème ne portent que sur l'application retour sur $[\lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ et pas sur $]0, \pi[\times I_{\max}$ (où le résultat ne serait pas vérifié).

REMARQUE 8.7. Pour des raisons techniques, le recollement de rocade décrit ici est effectué le long de la courbe legendrienne γ (et pas seulement le long de l'arc d'attachement). En dehors d'un voisinage de γ_0 , la partie ajoutée à la variété se rétracte par une rétraction de contact sur la variété de départ.

2. Équation de contact sur une surface épaissie

2.1. Modèle de perturbation. Soit S une surface convexe close de courbe de découpage Γ dans une variété (V, ξ) . On se place dans un voisinage $S \times [-1, 1]$ de S . Soit γ une courbe legendrienne tracée sur S contenant un arc d'attachement. Une équation α de ξ sur $S \times [-1, 1]$ est de la forme (F1) s'il existe des coordonnées $(u, v) \in \mathbb{S}_n \times I$ dans un voisinage S_1 de γ dans S telles que

- (1) α est de la forme (F) (définition 1.8) en dehors de $S_1 \times [-1, 1]$;
- (2) dans $S_1 \times [-1, 1]$, on a $\alpha = f(u, v)dt + \cos(u)dv$ où pour tout $v \in I$, $f(\cdot, v)$ a le même tableau de variation que la fonction sinus et $f(\cdot, v) = \sin$ pour z proche de 0 ;
- (3) il existe des coordonnées (x, y, z) dans un voisinage U'_i de chaque composante connexe Γ_i de Γ qui prolongent les coordonnées du voisinage U_i fournies par la forme (F) et telles que $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ sur $S_1 \times [-1, 1] \cap U'_i$.

LEMME 8.8. Soit S une surface convexe de courbe de découpage Γ . Soient α une équation de contact de forme (F) sur $S \times [-1, 1]$ et γ_0 un arc d'attachement tracé sur S . Alors, quitte à effectuer une isotopie de $\xi = \ker \alpha$, il existe un prolongement legendrien γ de γ_0 et une équation de contact de forme (F1).

DÉMONSTRATION. On construit au voisinage de S une équation de contact α' vérifiant (F1) et adaptée à Γ . Par le lemme de réalisation 1.5 et le lemme 1.3, les structures de contact $\ker \alpha$ et $\ker \alpha'$ sont alors isotopes au voisinage de S . \square

Pour obtenir une courbe legendrienne en position de recollement à partir de la forme (F1) il reste à perturber l'équation de contact en dehors de la zone de recollement pour que le champ de Reeb pointe vers S_+ le long de la courbe de découpage. On applique une construction similaire à celle décrite dans la section 2

du chapitre 1 en annulant la perturbation dans la zone de recollement. Ainsi dans chaque U'_i , on perturbe α en

$$\alpha_p = f(x)dy + p(x, y, z) \cos(x)dz$$

où p est une fonction lisse vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) il existe $x_{\max}^p < x_{\max}$ tel que $p = 1$ en dehors de $[-x_{\max}^p, x_{\max}^p] \times [-1, 1] \times S^1 \subset U_0$ et $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in [-x_{\max}^p, x_{\max}^p]$;
- (2) $p(x, y) = 1 + k(x)l(y)m(z)$;
- (3) k est une fonction bosse constante égale à 1 au voisinage de $x = 0$;
- (4) l est \mathcal{C}^∞ -petite strictement décroissante sur $[-1, 0]$, nulle en 0 et strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $l''(0) \neq 0$;
- (5) m est lisse, positive, nulle dans la zone de recollement, strictement positive hors de cette zone et constante égale à 1 en dehors d'un petit voisinage de la zone de recollement.

La fonction $p-1$ est donc \mathcal{C}^∞ -petite et α_p est bien une équation de contact adaptée au bord en dehors de la zone de recollement (voir figure 1). On dira que $(S \times [-1, 1], \alpha_p)$

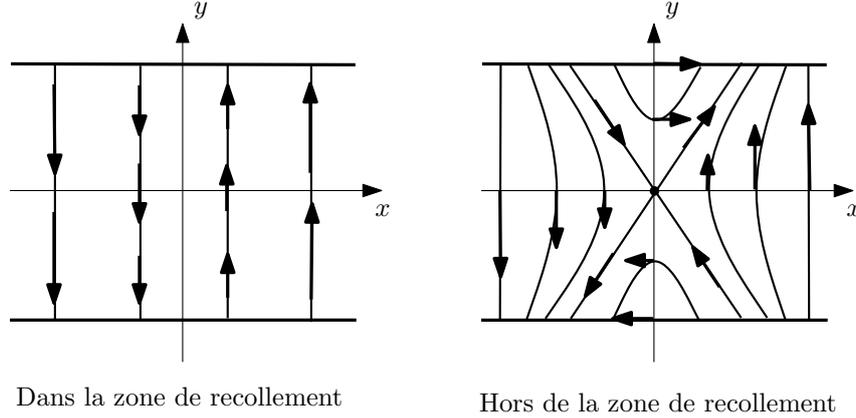


FIGURE 1. Champ de Reeb dans U'_j

est de la forme (F2).

PROPOSITION 8.9. *Soient (V, ξ) une variété de contact de bord S et Γ une courbe de découpage de S . On considère un arc d'attachement de S noté γ_0 . Alors, quitte à effectuer une isotopie de ξ , il existe une équation α de ξ et un prolongement legendrien de γ_0 en position de recollement pour α .*

2.2. Étude des orbites périodiques et des cordes de Reeb. Soient S une surface convexe de courbe de découpage Γ dans une variété (V, ξ) et γ une courbe legendrienne fermée tracée sur S contenant un arc d'attachement γ_0 . Soit α_p une équation de forme (F2) sur $S \times [-1, 1]$.

LEMME 8.10. *Pour une perturbation p adaptée, les orbites périodiques sont exactement les courbes $\Gamma_i \times \{0\}$ pour $i = 0 \dots n$ et ces orbites sont toutes hyperboliques paires.*

DÉMONSTRATION. Le champ de Reeb est donné par (voir figure 1)

$$(19) \quad R_{\alpha_p} = \frac{1}{p - k'(x)l(y)m(z) \cos(x) \sin(x)} \begin{pmatrix} l'(y)k(x)m(z) \cos(x) \\ p \sin(x) - k'(x)l(y)m(z) \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

dans la zone $p \neq 1$ et donc dans la zone $k = 1$ au voisinage de $x = 0$ on obtient

$$R_{\alpha_p} = \frac{1}{1 + l(y)m(z)} \begin{pmatrix} l'(y)m(z) \cos(x) \\ (1 + l(y)m(z)) \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

Dans la zone $k = 0$, les orbites de Reeb ont toutes des extrémités sur le bord de V et il n'y a donc pas d'orbite périodique. Dans la zone $k \neq 0$, les courbes $\Gamma_i \times \{0\}$, pour $i = 0, \dots, n$, sont clairement des orbites périodiques. Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Dans un ouvert U'_i fourni par la forme (F2), on découpe le plan des (x, y) en quarts de plans séparés par les droites $x = 0$ et $y = 0$. Dans un quart de plan ouvert fixé, la coordonnée du champ de Reeb sur $\frac{\partial}{\partial y}$ (donnée dans 19) est de signe constant pour une perturbation avec l assez petit. Par conséquent, toute orbite incluse dans un quart de plan ouvert pour des temps assez grands ou assez petits ne peut pas être périodique.

Par ailleurs, par la forme du champ de Reeb au bord (voir figure 1), les quarts de plans $xy \geq 0$ sont stables par le flot de Reeb, leurs bords ouverts ne sont pas stables et toute orbite périodique passant par un point des quarts de plans $xy < 0$ entre dans un quart de plan $xy \geq 0$. Par conséquent, l'orbite $\Gamma_i \times \{0\}$ est la seule orbite périodique de U'_i .

Pour montrer que ces orbites sont hyperboliques paires, on utilise la linéarisation du flot φ_t le long de $\Gamma_i \times \{0\}$. Dès que l'orbite sort de la zone $m = 0$, on obtient

$$\text{tr} (d\varphi_t(0, 0, 0)|_{\xi}) > \text{tr} (d\varphi_0(0, 0, 0)|_{\xi}) = 2. \quad \square$$

Soit Γ_0 la composante connexe de Γ rencontrée par l'intérieur de γ_0 . On se place dans le voisinage $U'_0 = [-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times S^1$ de Γ_0 fourni par la forme (F2) (voir section 2.1). L'image de $[-x_{\max}, 0[\times \{1\} \times \{0\}$ sur $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times S^1$ est une courbe lisse. Soit s_{\max} la borne supérieure de l'ensemble de $s \in [0, x_{\max}]$ tel que l'image de $[-s, 0] \times \{0\} \times \{0\}$ sur $[0, x_{\max}] \times \{0\} \times S^1$ par le flot de Reeb soit bien définie. Le réel s_{\max} est strictement positif. On relève la coordonnée S^1 à \mathbb{R} et on paramètre cette image δ_0 en

$$(20) \quad \delta_0 : \begin{array}{ccc}]-s_{\max}, 0[& \longrightarrow & [0, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & (x(s), z(s)) \end{array} .$$

On pose $M_0 = \{z, m(z) = 0\}$ et $z_0 = \sup\{z, [0, z] \subset M_0\}$. Alors, $\lim_{s \rightarrow 0} \delta_0(s) = (0, z_0)$ (voir figure 2).

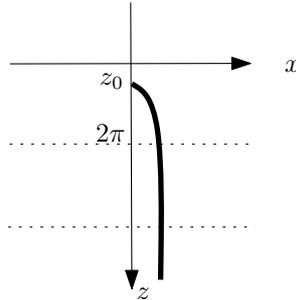


FIGURE 2. Image de γ_0 sur S_+

PROPOSITION 8.11. *Pour une perturbation p adaptée, les cordes de Reeb de $S \times \{1\}$ issues de $[-x_{\max}, 0[\times \{1\} \times \{0\}$ sont contenues dans U'_0 et si les extrémités*

d'une telle corde sont $(s_0, 1, 0)$ et $(x(s_0), 1, z(s_0))$ avec $z(s_0) \in \overset{\circ}{M}_0$, alors $x'(s_0) < 0$ et $z'(s_0) > 0$. De plus, si $s_{\max} < x_{\max}$, on a $\lim_{s \rightarrow -s_{\max}} z(s) = +\infty$.

DÉMONSTRATION. Pour toute perturbation assez petite, les cordes de Reeb issues de $[-x_{\max}, 0[\times \{1\} \times \{0\}$ sont incluses dans U'_0 et plus précisément dans la zone pour laquelle $k = 1$ si l est choisi assez petit. En effet, avant la perturbation toutes les orbites de Reeb en dehors des $\Gamma_0 \times \{t\}$ ont des extrémités au bord de V . Par ailleurs, par construction (voir figure 1) les cordes de Reeb restent incluses dans la zone $y > 0$.

Dans U'_0 , la composante R_z est minorée par un réel strictement positif. Si $s_{\max} < x_{\max}$, on a $\lim_{s \rightarrow s_{\max}} T(s) = +\infty$ où $T(s)$ est le temps de retour sur $S \times \{1\}$ de point $(s, 1, 0)$. Ainsi $\lim_{s \rightarrow -s_{\max}} z(s) = +\infty$.

Soit c la corde de Reeb issue du point $\gamma_0(s_0) = (s_0, 1, 0)$. On note $\delta_{z_0} = (x_{z_0}, y_{z_0})$ l'image de γ_0 dans le plan $z = z_0$. La courbe δ_{z_0} est lisse,

$$x'_{z_0}(0) = -1 \text{ et } y'_{z_0}(0) = -\frac{1}{\cos^2(x_0)} z_0.$$

En étudiant le signe de $\frac{d}{dz}(x_z(0) - x_z(\eta))$ et $\frac{d}{dz}(y_z(0) - y_z(\eta))$ pour η assez petit, on montre que pour tout $z \geq z_0$, on a

$$(21) \quad x'_z(0) \leq -1 \quad y'_z(0) \leq -\frac{1}{\cos^2(x_0)} z_0.$$

En la coordonnée $z(s_0)$, les inégalités précédentes s'appliquent. Comme z est dans l'intérieur de M_0 , l'image sur $S \times \{1\}$ de $\delta_{z(s_0)}$ est

$$s \rightarrow \left(x_z(s), 1, \frac{1 - y_z(s)}{\tan(x_z(s))} + z \right)$$

et donc

$$z'(s_0) = -\frac{1}{\tan(x_z(0))} y'_z(0) > 0$$

car $\tan(x_z(0)) > 0$. □

3. Recollement de rocade sur une surface épaisse

On distingue deux cas en fonction du nombre de composantes connexes de la courbe de découpage intersectées par γ_0 .

3.1. L'arc d'attachement rencontre trois composantes distinctes de la courbe de découpage. Soit S une surface convexe munie d'une courbe de découpage Γ et d'un arc d'attachement γ_0 . On note Γ_0 la composante connexe de Γ rencontrée par l'intérieur de γ_0 . On suppose que γ_0 rencontre trois composantes connexes de Γ différentes. On se place dans $S \times [-1, 1]$ muni d'une équation de contact de forme (F2) (voir section 2.1). On considère l'arc d'attachement du bord $\gamma_0 \times \{1\}$.

Les seules cordes de Reeb de $\gamma_0 \times \{1\}$ sont alors dans U'_0 . L'arc $[-x_{\max}, x_{\max}] \times \{1\} \times \{0\}$ est la seule intersection de $\gamma_0 \times \{1\}$ avec U'_0 . On définit la classe d'homotopie d'une corde de Reeb de l'arc d'attachement comme classe d'homotopie de l'union de cette corde et du segment de l'arc d'attachement reliant ses deux extrémités.

PROPOSITION 8.12. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il y a exactement une corde de Reeb c_k parcourant k fois le facteur S^1 . De plus, toutes les cordes de Reeb sont de ce type. Enfin, pour $K > 0$ et pour une perturbation dans la forme (F2) assez petite, pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$ la période de la corde c_k est arbitrairement proche de $2k\pi$ et ses extrémités arbitrairement proches de $\Gamma_0 \times \{1\}$.*

DÉMONSTRATION. On relève le voisinage U'_0 de Γ_0 fourni par la forme (F2) à $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$. L'image δ_0 de $\gamma_0 \times \{1\}$ sur S_+ par le flot de Reeb est une courbe lisse. Dans les coordonnées de U'_0 on paramètre δ_0 par

$$\begin{array}{ccc}]-s_{\max}, 0[& \longrightarrow & [0, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & (x(s), z(s)) \end{array}$$

en suivant la notation de l'équation 20. On a $0 < z(0) < 2\pi$. Par la proposition 8.11, on a $\lim_{s \rightarrow -s_{\max}} z(s) = +\infty$ et $z'(s) > 0$ si $\delta(s) \in \gamma_0$. Par conséquent δ_0 intersecte en un unique point tous les segments $[-x_{\max}, x_{\max}] \times \{1\} \times \{k\pi\}$ pour tout k entier strictement positif et n'intersecte que ces segments (voir figure 2). \square

On choisit un collier de trivialisations S_{c_k} ne rencontrant pas le cône positif engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$.

PROPOSITION 8.13. *Dans la trivialisations S_{c_k} , on a $\tilde{\mu}(c_k) = 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit s_0 tel que la corde c_k soit issue du point $\{s_0\} \times \{1\} \times \{0\}$. Considérons une bande B constituée de l'image de c_k par le flot de $\frac{\partial}{\partial y}$ pour des temps petits. Soit c_η la corde de Reeb de $S \times \{1\}$ issue du point $\{s_0 + \eta\} \times \{1\} \times \{0\}$. La corde c_η ne rencontre pas la bande B par la condition 21.

On se place dans la base (R, e_1, e_2) fournie par la trivialisations symplectique. On note v la projection de $\frac{\partial}{\partial y}$ sur le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$. Alors v ne rencontre pas e_1 , vaut e_2 en $t = 0$ et $-e_2$ en $t = T(c_k)$. Par ce qui précède, $dR_t \cdot e_1$ ne rencontre pas v . De plus $dR_{T(c_k)} \cdot e_1$ est dans le quart de plan négatif. En écrivant $dR_t \cdot e_1 = r(t)e^{i\theta(t)}$ on obtient $\theta(T(c_k)) \in [\pi, 2\pi]$ (voir figure 3) et donc $\tilde{\mu}(c_k) = 1$. \square

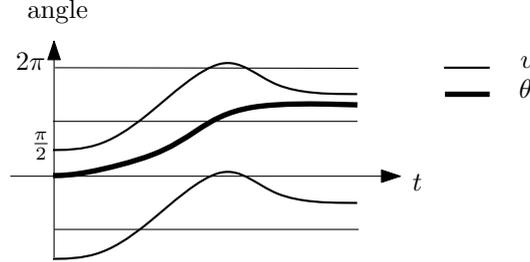


FIGURE 3. Relevé des angles entre e_1 et v et angle θ

En appliquant le théorème de recollement de rocade 8.3, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 8.14. *Soit $K > 0$, $K \neq \pi\mathbb{Z}$. Il existe un modèle de recollement de rocade le long de γ_0 tel que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ avec $l < \frac{K}{2\pi}$, le nombre de nouvelles orbites périodiques homotopes à $[\Gamma_0]^l$ soit exactement le cardinal de*

$$\left\{ \kappa = (k_1, \dots, k_m) \in (\mathbb{N}^*)^l, l = k_1 + \dots + k_m \right\} / \{ \text{permutations cycliques} \}.$$

De plus, le choix de trivialisations S_{c_k} induit un choix cohérent de trivialisations des nouvelles orbites périodiques et l'indice de Conley-Zehnder d'une nouvelle orbite est le nombre de lettres du mot associé.

Les trivialisations des différentes orbites périodiques fournies par le théorème de recollement de rocade sont toutes les mêmes pour des orbites homotopes car on peut toujours choisir le disque immergé prolongeant les trivialisations le long des cordes de sorte que la nouvelle trivialisations ne soit jamais tangente à $\frac{\partial}{\partial y}$.

3.2. Rocade triviale et rocade vrillée. Considérons $(V_t = S_t \times [-1, 1], \alpha_t)$ où α_t est de forme (F2) (voir section 2.1) et l'arc d'attachement γ_t correspond à une rocade triviale (voir section 4, chapitre 1) et $(V_v = S_v \times [-1, 1], \alpha_v)$ où α_v est de forme (F2) et l'arc d'attachement γ_v correspondant à une rocade vrillée (voir section 4, chapitre 1). On se place dans le voisinage U'_0 (fourni par la forme (F2)) de la composante connexe Γ_0 de Γ intersectée par l'intérieur de γ_t et γ_v . Il existe z_1 tel que l'arc d'attachement γ_t ou γ_v intersecte le voisinage U'_0 le long des segments $[-x_{\max}, x_{\max}] \times \{1\} \times \{0\}$ et $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times \{z_1\}$. On définit la classe d'homotopie d'une corde de Reeb de l'arc d'attachement comme classe d'homotopie de l'union de cette corde et du segment de l'arc d'attachement reliant ses deux extrémités.

PROPOSITION 8.15. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, V_t et V_v admettent exactement deux cordes de Reeb c_k et c'_k de γ_t et γ_v dans la classe d'homotopie $[\Gamma_0]^k$. De plus γ_v admet une corde homotopiquement triviale c'_0 . Les cordes c_k relient $[-x_{\max}, 0] \times \{1\} \times \{0\}$ et $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times \{0\}$ et les cordes c'_k relient $[-x_{\max}, 0] \times \{1\} \times \{0\}$ et $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times \{z_1\}$ (voir figure 4). Enfin, toutes les cordes de Reeb sont de ce type.*

DÉMONSTRATION. Les seules cordes de Reeb qui peuvent exister sont dans U'_0 . On relève le voisinage U'_0 de Γ_0 fourni par la forme (F2) à $[-x_{\max}, x_{\max}] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$. L'image δ_0 de $\gamma_0 \times \{1\}$ sur S_+ par le flot de Reeb est une courbe lisse. Dans les coordonnées de U'_0 on paramètre δ_0 par

$$\begin{aligned}]-s_{\max}, 0[&\longrightarrow [0, x_{\max}] \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ s &\longmapsto (x(s), z(s)) \end{aligned}$$

en suivant l'équation 20. On a alors $\lim_{s \rightarrow 0} z(s) \in]0, z_1[$ et $\lim_{s \rightarrow -s_{\max}} z(s) = +\infty$ par la proposition 8.11. De plus $z'(s) > 0$ pour tous les s tels que $\delta_0(s) \in \gamma_0$. Par conséquent $\delta(s)$ intersecte en un unique point tous les segments $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times \{k\pi\}$ et $[0, x_{\max}] \times \{1\} \times \{z_1 + k\pi\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et n'intersecte pas ces segments pour $k < 0$. Les différentes classes d'homotopie obtenues sont expliquées dans la figure 4. \square

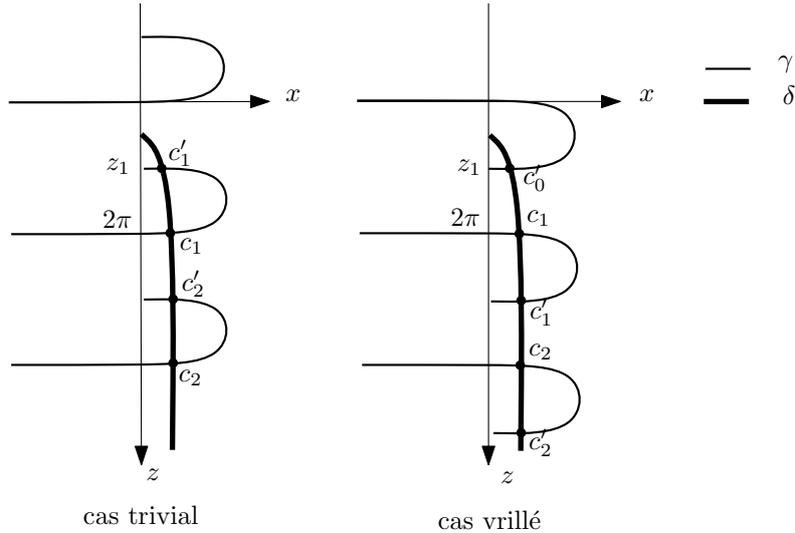


FIGURE 4. Cordes c_k et c'_k

On choisit des colliers de trivialisations S_{c_k} et $S_{c'_k}$ ne rencontrant pas le cône positif engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$.

PROPOSITION 8.16. *Dans les trivialisations S_{c_k} et $S_{c'_k}$, $\tilde{\mu}(c_k) = 1$ et $\tilde{\mu}(c'_k) = 0$.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de résultat pour c_k est la même que celle de la proposition 8.13. Démontrons le résultat pour c'_k . On reprend les notations de la preuve de la proposition 8.13 la stratégie de preuve est la même. Dans la base (R, e_1, e_2) , la projection v de $\frac{\partial}{\partial y}$ sur $\text{Vect}(e_1, e_2)$ ne rencontre pas e_1 , vaut e_2 en $t = 0$ et $t = T(c'_k)$. De plus, $dR_t \cdot e_1$ ne rencontre pas v et $dR_{T(c'_k)} \cdot e_1$ est dans le quart de plan positif. En écrivant $dR_t \cdot e_1 = r(t)e^{i\theta(t)}$ on obtient $\theta(T(c'_k)) \in [0, \pi]$ et donc $\tilde{\mu}(c'_k) = 0$. \square

Ainsi dans le cas vrillé, le théorème de recollement de rocade crée bien une orbite contractile (associée à la corde c'_0). Dans le cas trivial, comme les structures de contact avant et après recollement de rocade sont isotopes, les homologies de contact associées doivent être les mêmes. Dans ce texte, on se contente de remarquer que les classes d'homotopie et les indices de Conley-Zehnder des nouvelles orbites périodiques obtenues ne contredisent pas ce résultat.

Applications du théorème de recollement de rocade

Dans ce chapitre, on utilise la forme générale des orbites périodiques de Reeb créées par un recollement de rocade et fournies par la proposition 8.6 pour calculer l'homologie de contact de la nouvelle variété suturée. Les principaux résultats de ce chapitre sont les suivants.

THÉORÈME 9.1. *Soient S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$ sans composante contractile et γ_0 un arc d'attachement reliant trois composantes connexes différentes de Γ avec Γ_0 pour composante intersectant l'intérieur de γ_0 . On considère un voisinage $V = S \times [-1, 1]$ de S avec structure de contact invariante dans la direction $[-1, 1]$. Alors, sous l'hypothèse H , l'homologie de contact cylindrique de (V', ξ', Γ') obtenue par recollement de rocade le long de $\gamma_0 \times \{1\}$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par n orbites périodiques homotopes à $\Gamma_k \times \{0\}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et par leurs multiples.*

Autrement dit, l'ajout d'une rocade le long d'une rocade rencontrant Γ_0 dans son intérieur fait disparaître Γ_0 et ses multiples de l'homologie de contact (voir la proposition 4.1) sans créer d'autres générateurs. Le théorème suivant concerne les structures de contact sur le tore plein avec $2n$ composantes longitudinales pour la courbe de découpage au bord et tel que la courbe de découpage des disques méridiens D vérifie la propriété (P)

DÉFINITION 9.2. Un découpage $\Gamma_D = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ d'un disque D vérifie la propriété (P) si ∂D se décompose en deux sous intervalles I_1 et I_2 tels que (voir figure 1) :

- (1) ∂I_1 est contenu dans des bigones ;
- (2) si I est l'ensemble des $i \in 1 \dots n$ tels que Γ_i possède une extrémité dans I_1 et l'autre dans I_2 alors chaque composante connexe de $D \setminus \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ contient au plus une composante connexe de Γ_D .



FIGURE 1. Propriété (P)

THÉORÈME 9.3. *Soit (V, ξ, Γ) une structure de contact sur le tore plein avec $2n$ courbes de découpage longitudinales et un découpage d'un disque méridien vérifiant (P). Alors, sous l'hypothèse H , l'homologie de contact cylindrique suturée est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par n_+ courbes homotopes à S^1 , n_- courbes homotopes*

à $-S^1$ et leurs multiples où¹

$$n_+ = \chi(S_+) + \#\{\text{bigones négatifs non extrémaux}\} - \#\{\text{bigones positifs}\}$$

et

$$n_- = \chi(S_-) + \#\{\text{bigones positifs non extrémaux}\} - \#\{\text{bigones négatifs}\}.$$

La suite de ce chapitre s'organise de la façon suivante : dans la section 1 on adapte la construction de la section 2 du chapitre 4 sur le tore plein pour garantir l'existence d'arcs d'attachements avec zones de recollement. Dans la section 2, on étudie le cas particulier $n = 4$ et on montre que les cylindres holomorphes restent au voisinage de leurs orbites périodiques asymptotes. Dans la section 3, on utilise le modèle de courbes holomorphes de la section 2 pour calculer l'homologie de contact de certains tores pleins et démontrer le théorème 9.3. Enfin, la section 4 est consacrée à la démonstration du théorème 9.1.

1. Structures de contact sur le tore plein

Considérons le disque

$$D_n = \{(x, y), y \in [-1, 1], x \in [-\pi + \varepsilon - h(y), n\pi - \varepsilon + h(y)]\}$$

où $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse sur $] -1, 1[$, nulle et verticale à tout ordre en -1 et 1 et atteint son maximum ε en 0 . La démonstration du résultat suivant est analogue à celle de 4.9.

PROPOSITION 9.4. *Pour η assez petit, il existe une famille $\alpha_\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0$ de structures de contact sur $V_n = D_n \times S^1$ telle que*

- (1) $\alpha = f(x)dy + \beta_\varepsilon$;
- (2) $\beta_\varepsilon = \cos(x)dz$ sur $I \times [-1, 1] \times S^1$ où $I = [-\pi, n\pi] \setminus [-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta]$;
- (3) f est une fonction lisse, 2π -périodique, égale à $(-1)^k$ au voisinage de $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, égale à $x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de $x = k\pi$, valant -1 au voisinage de $[-\frac{3\pi}{4} - \eta, -\frac{3\pi}{4} + \eta]$ et ayant le même sens de variation que la fonction sinus ;
- (4) $\partial D_n \times S^1$ est muni d'un feuilletage legendrien lisse par des courbes méridiennes invariantes dans la direction $\frac{\partial}{\partial z}$ et tendant vers les cercles $z = cst$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

LEMME 9.5. *Quitte à effectuer une perturbation arbitrairement petite de ξ au voisinage de $x = -\pi$ et $x = n\pi$, il existe des coordonnées $(u, v) \in \mathbb{S}_n \times I$ au voisinage de toute feuille legendrienne du bord de $D_n \times S^1$ dans lesquelles $\alpha = \cos(u)dv$.*

DÉMONSTRATION. On prend une paramétrisation $u \mapsto \gamma(u)$ de la feuille legendrienne choisie par laquelle les singularités du feuilletage caractéristique apparaissent en $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et les points de tangence avec le champ de Reeb apparaissent en $u = k\pi$. On choisit comme plongement :

$$i : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \times I \longrightarrow \partial D_n \times S^1 \\ (u, v) \longmapsto (\gamma(u) + v \frac{\partial}{\partial z}) .$$

En suivant un champ de contact transverse, on obtient dans les coordonnées (t, u, v) une équation de contact de la forme $\alpha = b(t, u, v)dt + c(t, u, v)dv$ vérifiant les propriétés suivantes

- $c(t, 0, v) = 0 \iff z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $c(k\pi, 0, v) = (-1)^k$.

1. Un bigone est extrémal s'il contient une extrémité de l'intervalle I_1 (ou, de façon équivalente, une extrémité de I_2).

De plus la coordonnée sur $\frac{\partial}{\partial t}$ du champ de Reeb R_α est un multiple strictement positif de $-\frac{\partial c}{\partial u}$ et $R_\alpha(0, k\pi, v) = (-1)^k \frac{\partial}{\partial v}$. Par conséquent, $c(0, \cdot, v)$ possède le même tableau de variations que cosinus. Quitte à effectuer une perturbation C^∞ -petite de α , on peut de plus supposer que

$$(-1)^k \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}(k\pi, v) < 0.$$

Dans les coordonnées (u, v) , on pose

$$\beta_s(u, v) = f(s)c(0, u, v) + (1 - f(s))\cos(u)$$

où $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est croissante, nulle au voisinage de 0 et vaut 1 au voisinage de 1. On cherche une famille de difféomorphismes φ_s telle que $\varphi_s^* \beta_s = \beta_0$. En suivant la méthode de Moser, on cherche φ_s comme flot de X_s . Posons

$$X_s = \frac{f'(s)(\cos(u) - c(0, u, v))}{f(s)\frac{\partial c}{\partial u} - (1 - f(s))\sin(u)} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Un tel champ de vecteurs est défini et lisse. Le flot de X_s est défini pour tout temps car les orbites sont contenues dans les cercles $z = \text{cst}$. Enfin $\frac{\partial}{\partial s} \varphi_s^* \beta_s = 0$. Le changement de variable donné par φ_1 permet d'obtenir la forme cherchée pour α . \square

LEMME 9.6. *Quitte à effectuer une perturbation arbitrairement petite de ξ au voisinage de $x = -\pi$ et $x = n\pi$, toute feuille legendrienne du bord de $D_n \times S^1$ admet une zone de recollement.*

DÉMONSTRATION. On applique le lemme 9.5. On se place dans un voisinage de la feuille legendrienne obtenu à partir des coordonnées précédentes en suivant un champ de contact transverse qui vaut $\pm \frac{\partial}{\partial y}$ dans la zone où le bord est plat. On obtient la forme cherchée dans la zone de bord plat. Dans la zone de bord non plat, quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que les champs de Reeb associés à α et $\sin(u)dt + \cos(u)dv$ coïncident le long du bord. La méthode de Moser fournit alors une isotopie des structures de contact qui fait coïncider ces équation le long du bord. \square

Une démonstration analogue à celle du lemme 4.10 permet de montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 9.7. *La courbe de découpage au bord de $(D_n \times S^1, \alpha)$ a $2n$ composantes connexes longitudinales et celle d'un disque méridien contient n segments parallèles entre eux. De plus, le champ de Reeb est tangent aux courbes de découpage au bord.*

On considère une feuille legendrienne du bord munie d'une zone de recollement (fournie par le lemme 9.6). Il reste à perturber l'équation de contact en dehors de la zone de recollement pour être en position de recollement de rocade. Au voisinage de la courbe de découpage dans la zone plate, on utilise la perturbation décrite dans la forme (F2) (voir section 2.1). Dans la zone $[-\pi, -\pi + \varepsilon] \times [-1, 1] \times S^1$, on perturbe l'équation de contact en ajoutant un terme de la forme $k(x, y, z)dz$ tel que

- (1) $k = 0$ en dehors d'un voisinage produit \mathcal{V} de $\{-\pi\} \times [-1, 1] \times S^1$ et $k = 0$ dans la zone de recollement ;
- (2) $k = \nu(x + \pi)$ avec $\nu > 0$ en dehors d'un voisinage de la feuille legendrienne dans $[-\pi, -\pi + \frac{\varepsilon}{2}] \times [-1, 1] \times S^1$;
- (3) $\frac{\partial k}{\partial x} \geq 0$;
- (4) $\frac{\partial k}{\partial y}(-\pi, 0, z) = 0$.

Pour des perturbations assez petites, on obtient toujours une équation de contact et la courbe de découpage n'est pas modifiée. De plus l'équation de contact est adaptée en dehors de la zone de recollement. On effectue une construction analogue au voisinage de $x = n\pi$. On note α_p l'équation obtenue.

LEMME 9.8. *Pour une perturbation adaptée dans le lemme 9.6 et pour k adapté, il n'y a pas d'orbite périodique dans $[-\pi, -\pi + \varepsilon] \times [-1, 1] \times S^1$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à choisir des perturbations assez petites, les orbites périodiques potentielles ne peuvent exister que dans la zone $[-\pi, -\pi + \frac{\varepsilon}{2}] \times [-1, 1] \times S^1$. On note Δ_M la longueur de l'intervalle en z de \mathcal{V} et Δ_m la longueur de l'intervalle en z en dehors de \mathcal{V} . Il existe $N > 0$ tel qu'on puisse choisir k avec $|k|_{C^\infty} < N\nu$. Soit $\Delta_p < \Delta_m$. On suppose que la perturbation donnée par le lemme 9.6 est de taille inférieure à ν et effectuée pour z dans un intervalle de longueur Δ_p inclus dans \mathcal{V} .

Considérons l'orbite de Reeb entrant par le point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dans la zone $k = \nu(x + \pi)$. Lors de son passage dans la zone dans laquelle α n'est pas perturbée par le lemme 9.6, on a

$$-\Delta y \geq \frac{|\sin(x_0)| + \nu}{1 + 2\nu} \Delta_M \text{ et } |\Delta x| \leq 2N\nu\Delta_m.$$

Dans la zone dans laquelle α n'est pas perturbée par le lemme 9.6,

$$|\Delta y| \leq O(|\sin(x_0)| + \nu)\Delta_p \text{ et } |\Delta x| \leq \nu\Delta_m$$

Par conséquent pour $\Delta_p \ll \Delta_M$ la coordonnée y diminue le long d'une orbite et il ne peut pas y avoir d'orbite périodique. \square

PROPOSITION 9.9. *Le champ de Reeb associé à $(D_n \times S^1, \alpha_p)$ a pour orbites périodiques les courbes $\{k\pi\} \times \{0\} \times S^1$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et toutes ces orbites sont hyperboliques paires.*

De plus, pour un arc d'attachement $[(k-1)\pi, (k+1)\pi] \times \{1\} \times \{z_0\}$, $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, il y a exactement une corde de Reeb par multiple positif j de S^1 . Pour des périodes bornées et pour une perturbation assez petite, cette corde est de période arbitrairement proche de $2\pi j$ et a ses extrémités arbitrairement proches de $\{k\pi\} \times \{1\} \times \{z_0\}$.

2. Étude d'un cas particulier

Considérons le cas $n = 4$ dans la construction décrite dans la section précédente. Soit $\gamma_0 = [0, 2\pi] \times \{1\} \times \{0\}$, on a $\gamma_0 \subset D_4 \times S^1$. Un recollement de rocade le long de γ_0 produit une structure de contact sur le tore plein possédant une courbe de découpage au bord qui est longitudinale avec six composantes connexes et qui trace un découpage parallèle au bord sur les disques méridiens (voir figure 2). On note



Avant recollement de rocade Après recollement de rocade

FIGURE 2. Deux découpages méridiens

(V', ξ') la variété obtenue par recollement de rocade le long de γ_0 et Γ' une courbe de découpage du bord. Les résultats de Golovko [38] (voir 4.4) permettent de calculer son homologie de contact suturée. En particulier $HC^{[S^1]^l}(V', \xi', \Gamma') = 0$ pour $l \geq 0$.

Par la proposition 9.6, γ_0 possède bien un prolongement en position de recollement de rocade. Par la proposition 9.9 on connaît les cordes de Reeb de γ_0 . On note c_j la corde de Reeb qui parcourt j fois $-S^1$ (l'orbite périodique $\{\pi\} \times \{0\} \times S^1$ n'est pas orientée comme la coordonnées z). L'image de γ_0 sur S est bien transverse à γ_0 . Dans les coordonnées associées à la zone de recollement, l'application retour de $]\pi, 2\pi] \times \{0\} \times I_{\max}$ sur $[0, \pi] \times \{0\} \times I_{\max}$ se décompose en applications définies au voisinage de chaque corde c_k et est d'image dans $[\lambda, \pi - \lambda] \times \{0\} \times I_{\max}$ pour $\lambda > 0$. Pour tout $K > 0$ le théorème 8.3 et la proposition 8.6 s'appliquent.

LEMME 9.10. *Pour tout recollement de rocade le long de γ_0 associé à un paramètre K assez grand, toutes les orbites périodiques homotopes à $[S^1]^l$ sont les courbes $[\{0\} \times \{0\} \times S^1]^l$ et $[\{2\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l$ si l est strictement positif et les courbes $[\{\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l$ et les orbites périodiques associées à des mots $\mathbf{a} = c_{i_1} \dots c_{i_k}$ avec $i_1 + \dots + i_k = -l$ si l est strictement négatif.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 8.6 les cordes de Reeb créées par recollement de rocade sont homotopes à $[S^1]^m$ avec $m < 0$.

Soit γ une nouvelle corde de Reeb homotope à $[S^1]^l$ avec $l < 0$. Par la proposition 8.6 il existe un mot en les cordes de Reeb $\mathbf{a} = c_{i_1} \dots c_{i_k}$ tel que γ intersecte S le long d'un point fixe de $F_{(i_1 \dots i_k)}$. La condition sur la classe d'homotopie implique que $i_1 + \dots + i_k = -l$. Pour K assez grand toutes les cordes c_j avec $j \leq |l|$ et tous les mots en ces cordes sont de longueur inférieure à K . L'orbite périodique γ est donc bien fournie par le théorème 8.3. \square

LEMME 9.11. *Soit J une structure presque complexe adaptée à α_p . Les cylindres holomorphes d'énergie finie asymptotes à des orbites homotopes à $[S^1]^l$ avec l strictement négatif sont inclus dans*

$$\mathcal{U} = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup ([0, 2\pi] \times [-1, +\infty[\times I_{\max})$$

où les U_i sont les voisinage des courbes de découpages provenant de la forme (F2) et I_{\max} est l'intervalle de la zone de recollement (voir figure 3).

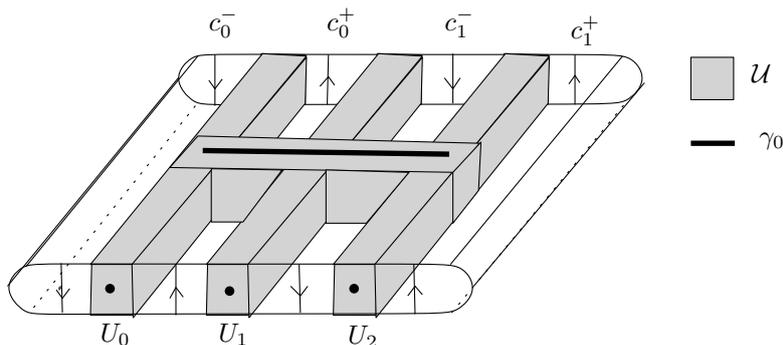


FIGURE 3. Voisinage \mathcal{U}

DÉMONSTRATION. On considère un cylindre u asymptote aux orbites de Reeb γ_+ et γ_- . Par hypothèse, γ_+ et γ_- sont incluses dans $U_1 \cup ([0, 2\pi] \times [-1, +\infty[\times I_{\max})$. On note \mathcal{W} la zone de bord plat privée de \mathcal{U} . Dans \mathcal{W} , les orbites de Reeb vont du bord au bord (même dans la zone de recollement). De plus, chaque corde de \mathcal{W} est homotope dans $\mathcal{W} \cup U_0 \cup U_2$ à une corde de Reeb dont on a renversé l'orientation. Par exemple dans la figure 3 les cordes c_0^+ et c_1^+ sont respectivement homotopes à $-c_0^-$ et $-c_1^-$ dans $\mathcal{W} \cup U_0 \cup U_2$. D'après la positivité d'intersection (proposition 3.10)

l'image de u ne rencontre pas \mathcal{W} . Par connexité l'image de u ne rencontre pas la zone dans laquelle le bord n'est pas plat. \square

3. Cas des structures de contact sur le tore plein

Soit $(D \times S^1, \xi)$ une structure de contact sur le tore plein qui a $2n$ composantes longitudinales pour sa courbe de découpage au bord Γ_b et dont le découpage Γ des disques méridiens vérifie la propriété (P).

LEMME 9.12. *Il existe $n' > 0$ et une famille finie d'arcs d'attachements dans la zone plate de $D_{n'} \times S^1$ munie de la structure de contact décrite dans la proposition 9.4 tels que après recollement de rocade le long de ces arcs la structure de contact obtenue soit isotope à $(D \times S^1, \xi)$.*

DÉMONSTRATION. Par définition de la propriété (P), ∂D se décompose en deux sous-intervalles I_1 et I_2 . Soit

$$n' = \#\{\text{arcs reliant } I_1 \text{ et } I_2\} + 2\#\{\text{arcs avec extrémités dans le même intervalle}\}.$$

Le disque découpé (D, Γ) est alors isotope à $D_{n'}$ muni d'un découpage Γ' tel que (voir figure 4) :

- (1) les extrémités de Γ' sont incluses dans l'ensemble des points $\{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \times \{\pm 1\}$ pour $k \in \llbracket 0, n' - 1 \rrbracket$;
- (2) $I_1 = \partial D_{n'} \cap \{(x, y), y \geq 0\}$ et $I_2 = \partial D_{n'} \cap \{(x, y), y \leq 0\}$;
- (3) les arcs reliant les segments I_1 et I_2 sont des segments verticaux.

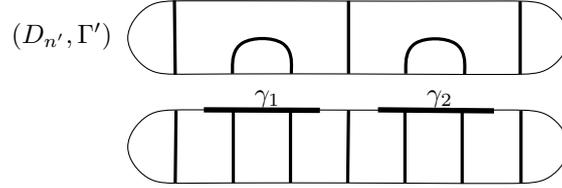


FIGURE 4. Disque $(D_{n'}, \Gamma')$ et courbes γ_j

On paramètre l'ensemble des arcs ayant deux extrémités dans le même intervalle par $\{k_j, \varepsilon_j\}_{j \in 1 \dots m}$ où l'arc correspondant à $\{k_j, \varepsilon_j\}$ est l'arc reliant les points $(k_j\pi - \frac{\pi}{2}, \varepsilon_j)$ et $(k_j\pi + \frac{\pi}{2}, \varepsilon_j)$. Les recollements de rocade le long des arcs

$$\gamma_j = [k_j\pi - 1, k_j\pi + 1] \times \{-\varepsilon_j\} \times \left\{ \frac{2\pi k_j}{n'} \right\}$$

transforment la structure de contact avec découpage du bord longitudinal et découpage méridien parallèle en la structure avec découpage du bord longitudinal et découpage méridien Γ' . \square

Sur $D_{n'} \times S^1$ muni de la structure construite dans la section 3. On considère les arcs d'attachements

$$\gamma_j = [k_j\pi - 1, k_j\pi + 1] \times \{-\varepsilon_j\} \times \left\{ \frac{2\pi k_j}{n'} \right\}$$

fournis par le lemme 9.12 où $\{k_j\}_{j \in 1 \dots m}$ est une famille croissante d'entiers entre 1 et $n' - 2$ tels que $k_{j+1} - k_j \geq 3$. Ces arcs possèdent bien un prolongement en position de recollement de rocade par le lemme 9.6. Notons

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \{k_j, j = 1 \dots m, k_j \text{ pair}\} \\ \sigma_- &= \{k_j, j = 1 \dots m, k_j \text{ impair}\}. \end{aligned}$$

Par la proposition 9.9 on connaît les cordes de Reeb de γ_j . On note c_i^j la corde de Reeb de γ_j qui parcourt i fois $(-1)^{k_j} S^1$. On est bien dans le cadre d'application du théorème 8.3 et de la proposition 8.6. Comme $k_{j+1} - k_j \geq 3$, les arcs d'attachement n'interagissent pas entre eux. Une démonstration analogue à la démonstration du lemme 9.10 permet ainsi d'obtenir le résultat suivant.

LEMME 9.13. *Pour tout recollement de rocade le long des arcs γ_j de paramètre K assez grand, toutes les orbites périodiques homotopes à $[S^1]^l$ sont les courbes*

$$[\{2k\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l$$

et les orbites périodiques associées à des mots $\mathbf{a} = c_{i_1}^j \dots c_{i_k}^j$ avec $i_1 + \dots + i_k = l$ et $k_j \in \sigma_+$ si l est positif et les courbes

$$[\{(2k+1)\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l$$

et les orbites périodiques associées à des mots $\mathbf{a} = c_{i_1}^j \dots c_{i_k}^j$ avec $i_1 + \dots + i_k = -l$ si l est négatif et $k_j \in \sigma_-$.

On note $(V', \xi' = \ker \alpha')$ la variété obtenue par ces recollement de rocade et Γ' sa courbe de découpage. Soit E_j le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les orbites $[\{k_j\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l$ et par les nouvelles orbites périodiques créées par le recollement de rocade le long de

$$[(k_j - 1)\pi, (k_j + 1)\pi] \times \{0\} \times S^1.$$

On considère de plus les \mathbb{Q} -espaces vectoriels E_+ et E_- engendrés respectivement par les orbites périodiques

$$[\{2k\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l \text{ pour } 2k \notin \sigma_+$$

$$[\{(2k+1)\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l \text{ pour } 2k+1 \notin \sigma_-$$

Le complexe de l'homologie de contact se décompose en

$$C_*^{[S^1]^l}(V', \alpha', J') = \bigoplus_{k_j \in \sigma_+} E_j \oplus E_+ \text{ pour } l \text{ pair}$$

$$C_*^{[S^1]^l}(V', \alpha', J') = \bigoplus_{k_j \in \sigma_-} E_j \oplus E_- \text{ pour } l \text{ impair.}$$

LEMME 9.14. *La différentielle préserve la décomposition précédente. De plus, les cylindres holomorphes d'énergie finie avec asymptotes dans E_j où $k_j \in \sigma_\pm$ sont inclus dans (voir figure 5)*

$$\mathcal{U}_j = U_{k_{j-1}} \cup U_{k_j} \cup U_{k_{j+1}} \cup ([(k_j - 1)\pi, (k_j + 1)\pi] \times \{-\varepsilon_j\} \times I_{max}^j)$$

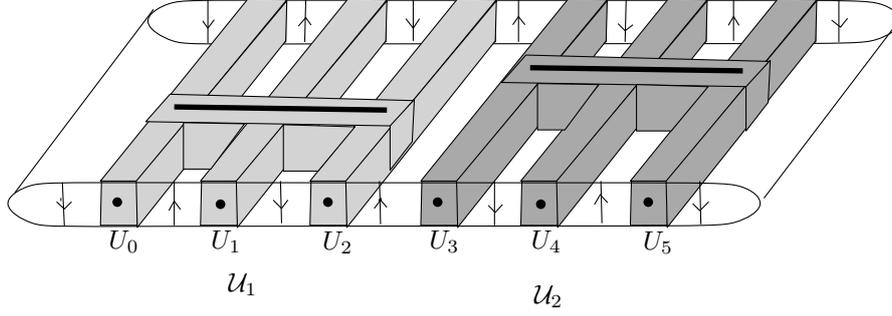
et la différentielle restreinte à E_\pm est nulle.

DÉMONSTRATION. De façon analogue à la preuve de lemme 9.11, on note \mathcal{W} la zone de bord plat privée de \mathcal{U} , où

$$\mathcal{U} = \bigcup_{j=1 \dots n'} U_j \cup \bigcup_{j \in \sigma_\pm} ([(k_j - 1)\pi, (k_j + 1)\pi] \times \{-\varepsilon_j\} \times I_{max}^j).$$

Comme les intervalles $[(k_j - 1)\pi, (k_j + 1)\pi]$ sont disjoint, les composante connexe de \mathcal{U} sont les ouverts U_i pour $i \notin \sigma_\pm \cup (\sigma_\pm - 1) \cup (\sigma_\pm + 1)$ et les ensembles \mathcal{U}_j pour $j \in \sigma_\pm$.

Dans \mathcal{W} , les orbites de Reeb vont du bord au bord. Soit u un cylindre holomorphe asymptote à γ_+ et γ_- . Toute corde de \mathcal{W} est homotope dans $\mathcal{W} \setminus (\gamma_+ \cup \gamma_-)$ à une corde de \mathcal{W} dont on a renversé l'orientation. Par conséquent, par positivité d'intersection (lemme 3.10), l'image de u est incluse dans \mathcal{U} .

FIGURE 5. Voisinage \mathcal{U}

De plus, si γ_+ et γ_- n'appartiennent pas au même espace E_j , alors γ_+ et γ_- ne sont pas homotopes dans \mathcal{U} . On obtient ainsi une contradiction à l'existence du cylindre u et la différentielle associée à l'homologie de contact cylindrique ∂ préserve la décomposition $\oplus E_j \oplus E_{\pm}$. De plus $\partial|_{E_{\pm}} = 0$ sous l'hypothèse H. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 9.3. Le voisinage

$$\mathcal{U}_j = U_{j-1} \cup U_j \cup U_{j+1} \cup \left([(k_j - 1)\pi, (k_j + 1)\pi] \times \{-\varepsilon_j\} \times I_{\max}^j \right)$$

décrit dans le lemme 9.14 est contactomorphe à \mathcal{U} décrit dans le lemme 9.11. Par conséquent, par les lemmes 9.11 et 9.14, les différentielles associées sont les mêmes et par le calcul de Golovko

$$\ker(\partial|_{E_j}) / \text{im}(\partial|_{E_j}) = 0.$$

Ainsi,

$$HC^{[S^1]^l}(V', \xi', \Gamma_b) = \bigoplus_{2k \neq \sigma_+} \mathbb{Q} \cdot [\{2k\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l \text{ pour } l \text{ positif}$$

$$HC^{[S^1]^l}(V', \xi', \Gamma_b) = \bigoplus_{(2k+1) \neq \sigma_-} \mathbb{Q} \cdot [\{(2k+1)\pi\} \times \{0\} \times S^1]^l \text{ pour } l \text{ négatif.}$$

L'arc associé à (k_j, ε_j) correspond à un bigone positif (non extrémal) si k_j est pair et à un bigone négatif (non extrémal) si k_j est impair. De plus

$$n' = \chi(S_+) + \#\{\text{bigones négatifs}\} = \chi(S_-) + \#\{\text{bigones positifs}\}.$$

Par conséquent le nombre de générateurs pour l positif est bien n_+ et n_- pour l négatif. \square

4. Cas d'une surface épaissie

Soient S une surface convexe de courbe de découpage $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ sans composante contractile dans une variété (V, ξ) et γ_0 un arc d'attachement rencontrant Γ_0 dans son intérieur. On se place sur $S \times [-1, 1]$ muni d'une équation de contact de forme (F2).

LEMME 9.15. *Soit $[a]$ une classe d'homotopie. Pour un recollement de rocade le long de γ_0 de paramètre K assez grand, les orbites périodiques homotopes à $[a]$ sont les suivantes*

- (1) *si $[a]$ n'est pas homotope à $[\Gamma_0]^l$ avec $l > 0$, les orbites périodiques sont les courbes $[\Gamma_j \times \{0\}]^l$ homotopes à $[a]$;*

- (2) si $[a]$ est homotope à $[\Gamma_0]^l$ avec $l > 0$, les orbites périodiques sont les courbes $[\Gamma_j \times \{0\}]^l$ homotopes à $[a]$ et les nouvelles orbites périodiques associées à un mot $\mathbf{a} = c_{i_1} \dots c_{i_k}$ avec $i_1 + \dots + i_k = l$.

La démonstration est analogue à la démonstration du lemme 9.10. En utilisant les mêmes arguments que ceux développés pour montrer le lemme 9.11, on prouve le résultat suivant.

LEMME 9.16. Soit J une structure presque-complexe adaptée sur la symplectisation de (V', α') . Alors, les courbes J -holomorphes d'énergie bornée sont incluses dans

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^n U_i \cup [0, 2\pi] \times [-1, 1] \times I_{\max}.$$

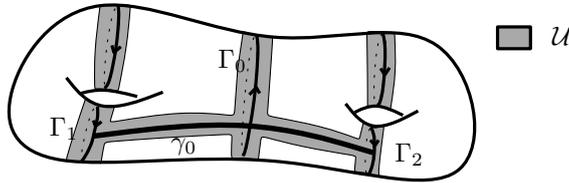


FIGURE 6. Voisinage \mathcal{U} en projection sur S

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{W} = S \times [-1, 1] \setminus \mathcal{U}$. Dans \mathcal{W} , les orbites de Reeb vont du bord au bord. De plus soient γ_+ et γ_- deux orbites périodiques de Reeb homotopes, alors toute corde de Reeb de \mathcal{W} est homotope dans $\mathcal{W} \setminus (\gamma_+ \cup \gamma_-)$ à une corde de Reeb dont on a renversé l'orientation. En effet cela revient à dire que toutes les composantes connexes de $S \setminus (\Gamma_i \cup \Gamma_j)$, où Γ_i et Γ_j sont homotopes, rencontrent S_+ et S_- . Par positivité d'intersection, un cylindre holomorphe homotope à γ_+ et γ_- ne rencontre pas \mathcal{W} . \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 9.1. Par le lemme 9.16, il n'y a pas de cylindres holomorphes entre deux orbites périodiques qui ne sont pas parmi $[\Gamma_0 \times \{0\}]^l$ et les nouvelles orbites obtenues après recollement de rocade, car les autres orbites ne sont pas homotopes dans \mathcal{U} . De plus, dans la classe d'homotopie $[\Gamma_0]^l$, la différentielle du complexe de l'homologie de contact stabilise le \mathbb{Q} -espace vectoriel E_0 engendré par $[\Gamma_j \times \{0\}]^l$ et les orbites périodiques associées à un mot $\mathbf{a} = c_{i_1} \dots c_{i_k}$ avec $i_1 + \dots + i_k = l$. Les cylindres holomorphes qui contribuent à cette différentielle sont inclus dans

$$\mathcal{U}_0 = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \gamma_0 \times [-1, 1] \times I_{\max}$$

où Γ_0 , Γ_1 et Γ_2 sont les trois composantes connexes de Γ qui rencontrent γ_0 . Ainsi \mathcal{U}_0 est difféomorphe à \mathcal{U} défini dans le lemme 9.11. Par conséquent

$$\ker(\partial|_{E_0}) / \text{im}(\partial|_{E_0}) = 0$$

sous l'hypothèse H. \square

Le théorème se généralise au recollement de plusieurs rocades le long d'arcs intersectant des composantes connexes distinctes de la courbe de découpage.

Stratégie de preuve du théorème de recollement de rocade

La rocade permet de relier les orbites de Reeb de V sortantes au voisinage de l'arc d'attachement aux orbites rentrantes au voisinage de cet arc. Une orbite périodique de Reeb qui naît après un recollement de rocade est donc la répétition du motif : passage dans la rocade puis passage dans la variété en suivant une corde de Reeb. Le flot de Reeb pour des points proches de l'arc d'attachement dans la zone sortante est ainsi obtenu en composant l'application retour φ_B sur S_Z dans la rocade et l'application retour ψ_V sur S_Z dans la variété. Or cette dernière application se décompose en applications définies au voisinage des extrémités des cordes de Reeb et les orbites de Reeb qui y contribuent restent dans un voisinage d'une corde de Reeb. À chaque passage dans la variété, une orbite périodique passe dans la composante associée à une corde de Reeb, ainsi, en considérant les cordes associées aux composantes successivement empruntées par une orbite périodique, on obtient un mot cyclique en $a_1 \dots a_N$.

L'existence et l'unicité de l'orbite périodique associée au mot $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ reposent sur l'existence d'un unique point fixe de l'application

$$F_{\mathbf{a}} = \psi_{i_k} \circ \varphi_B \cdots \circ \psi_{i_1} \circ \varphi_B$$

où ψ_i est la composante de ψ_V définie au voisinage des extrémités de la corde a_i . Cet unique point fixe sera fourni par la proposition suivante qui est démontrée dans la section 5.

PROPOSITION 10.1. *Soit $F : R \rightarrow R'$ un difféomorphisme entre rectangles de \mathbb{R}^2 . On suppose que F préserve les fibres, que F est a -contractante¹ (avec $a < 1$) sur les fibres horizontales et $\frac{1}{a}$ -dilatante sur les fibres verticales. On suppose de plus que les itérés par F^{-1} des fibres horizontales de R et les itérés par F des fibres verticales de R' s'intersectent transversalement en au plus point et en exactement un point sans itération. Alors F admet un unique point fixe.*

La démonstration du théorème 8.3 repose sur la construction d'un modèle explicite de rocade (de bord convexe avec champ de Reeb adapté) pour lequel on contrôle l'application retour sur la surface de recollement. Le contrôle recherché est l'obtention d'une structure analogue à celle demandée dans la proposition 10.1 : l'application retour se décompose en difféomorphismes entre rectangles préservant les fibres, dilatant ou contractant certaines directions. C'est toujours ce genre de contrôles qu'on cherchera pour l'application induite par le flot de Reeb.

Dans la suite de cette section, on présente les principales étapes de la démonstration du théorème 8.3. Dans la section 1 on présente les notations et conventions utilisées par la suite. La section 2 est consacrée au contrôle de l'application retour sur la zone de recollement par le flot de Reeb dans la variété. Dans la section 3, on présente le modèle de rocade, appelé *rocade convexe hyperbolique*, que l'on va

1. Pour la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

construire dans la suite. La section 4 présente le modèle de rocade convexe hyperbolique utilisé et décrit la dynamique de Reeb associée. Dans la section 5, on montre comment les résultats précédents impliquent le théorème 8.3 et dans la section 6 on voit comment démontrer le théorème 8.5 sur l'indice de Conley-Zehnder des orbites périodiques obtenue par le théorème 8.3.

Les démonstrations des théorèmes 8.3 et 8.5 se poursuivent dans les chapitres 11 et 12. Le chapitre 11 est consacré à la première étape de la construction d'une rocade hyperbolique : la construction d'une *rocade pré-convexe*. Dans le chapitre 12, on démontre principalement le théorème 10.8 sur l'existence des rocades hyperboliques et dans la section 6, on démontre les résultats permettant de contrôler l'indice de Conley-Zehnder nécessaires à la démonstration du théorème 8.5.

1. Conventions et notations

Dans les coordonnées (x, z) , on appelle x la *coordonnée horizontale* et z la *coordonnée verticale*. On parle de courbe ε -*horizontale* (resp. ε -*verticale*) pour une courbe qui est un graphe en x , ε -proche d'une courbe horizontale (resp. verticale) en norme \mathcal{C}^1 . Sauf mention explicite du contraire ε -proche se référera toujours à la norme \mathcal{C}^1 . Dans les coordonnées (x, y, z) , on note S_{y_0} le plan d'équation $y = y_0$, $X^{\leq y_0} = X \cap \{(x, y, z), y \leq y_0\}$, $X^{\geq y_0} = X \cap \{(x, y, z), y \geq y_0\}$ et $X^{[y_0, y_1]} = X^{\leq y_1} \cap X^{\geq y_0}$.

Pour une zone de recollement Z , on pose $I_{\max} = [-z_{\max}, z_{\max}]$ et pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$, on note (voir figure 1)

$$R_\varepsilon = \left(\bigcup_{k=1 \dots 2n} \left[\frac{k\pi}{2} + \varepsilon, \frac{(k+1)\pi}{2} - \varepsilon \right] \right) \times I_{\max} \subset S_Z$$

et

$$Q_\varepsilon = \left(\bigcup_{k=1 \dots n} \left[k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, k\pi + \frac{\varepsilon}{2} \right] \right) \times I_{\max} \subset S_Z.$$

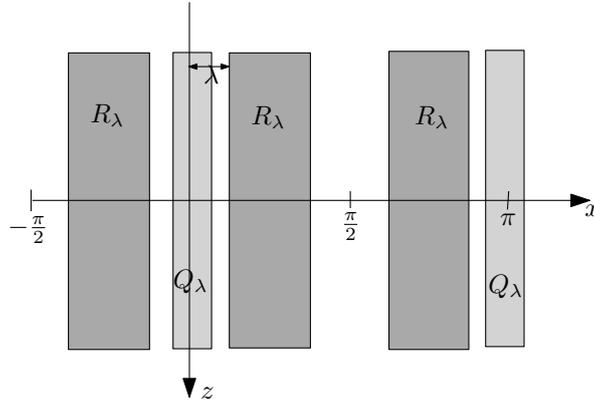


FIGURE 1. Rectangles R_ε

On appelle *rectangle* un fermé difféomorphe à $[0, 1] \times [0, 1]$. Un rectangle a donc une double structure de fibré en intervalles sur l'intervalle. On appelle *fibres horizontales* les fibres de type $[0, 1] \times \{*\}$ et *fibres verticales* les fibres de type $\{*\} \times [0, 1]$. On choisira toujours le difféomorphisme avec $[0, 1] \times [0, 1]$ pour que les deux notions d'horizontalité et de verticalité présentées dans cette section coïncident. Une application entre deux rectangles *présERVE les fibres* si elle préserve les deux structures de fibrés et *renverse les fibres* si elle préserve les fibres et envoie les fibres verticales sur les fibres horizontales et les fibres horizontales sur les fibres verticales.

transversalité des fibres des différents rectangles, on va montrer que les fibres ne « bougent » pas trop lors des compositions. En particulier, on veut que les fibres des rectangles considérés soient presque linéaires. C'est le rôle du paramètre ν et des segments $D_{i,j}$. Les paramètres μ et ν permettent de contrôler les images des courbes proches des fibres par ψ_V . De plus, on a besoin d'informations sur le temps de retour sur S_Z : on utilise pour cela le paramètre τ . Enfin, on veut que toutes ces propriétés soient stables par petites perturbations de l'équation de contact.

DÉFINITION 10.3. Une surface K -hyperbolique est *contrôlée* par $\omega = (\mu, \nu, \tau)$ où μ, ν et τ sont des réels strictement positifs si, pour tous $i \in \{0, 1\}$, $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, il existe des segments $D_{1,j} \subset \text{dom}(\psi_j)$ et $D_{2,j} \subset \text{im}(\psi_j)$ reliant des points sur les segments horizontaux $z = \pm z_{\max}$ tels que (voir figure 2) :

- (1) les fibres verticales de $\text{dom}(\psi_j)$ et $\text{im}(\psi_j)$ soient ν -proches de $D_{i,j}$;
- (2) ψ_j (resp. ψ_j^{-1}) envoie toute courbe ν -horizontale sur une courbe μ -proche de $D_{2,j}$ (resp. $D_{1,j}$) et toute courbe ν -proche de $D_{1,j}$ (resp. $D_{2,j}$) sur une courbe μ -horizontale ;
- (3) le temps de retour de ψ_j soit dans l'intervalle $]T(a_j) - \tau, T(a_j) + \tau[$.

DÉFINITION 10.4. Soit $\varepsilon > 0$. Une zone de recollement K -hyperbolique (S_γ, λ) (ω contrôlée) est ε -stable si pour toute perturbation de α de taille inférieure à ε en norme C^∞ qui préserve γ , (S_γ, λ) est toujours une surface K -hyperbolique (ω contrôlée).

LEMME 10.5. Soient $K > 0$ et (S, γ) en position de recollement sur une variété de contact de bord S . On note $S_Z = \mathbb{S}_n \times [-z_{\max}, z_{\max}]$ la surface de recollement. Pour tous $\tau > 0$, μ et ν , quitte à effectuer une homotopie C^∞ -petite de α et à diminuer z_{\max} , il existe ε arbitrairement petit et λ tels que (S_Z, λ) soit une surface de recollement K -hyperbolique (μ, ν, τ) -contrôlée et ε -stable.

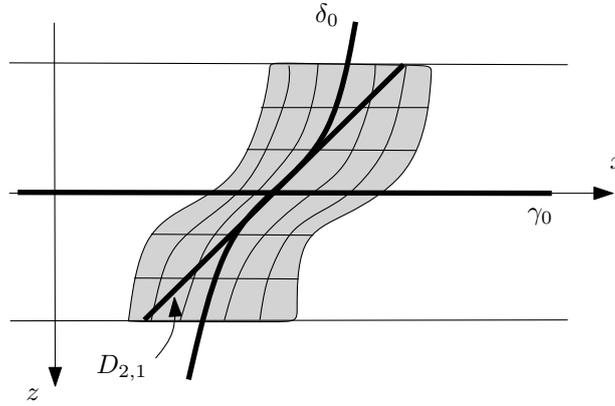
DÉMONSTRATION. Notons δ_0 l'image par le flot de Reeb de $]\pi, 2\pi[\times \{1\} \times \{0\}$ sur S et δ_1 l'image par l'inverse du flot de Reeb de $]0, \pi[\times \{1\} \times \{0\}$ sur S . Les cordes de Reeb de γ_0 ont pour extrémité sur S_+ les points d'intersection de γ_0 et δ_0 et dans S_- les points d'intersection de γ_0 et δ_1 . Quitte à effectuer une homotopie C^∞ -petite de α , les intersections entre δ_0 ou δ_1 et γ_0 correspondant à des cordes de période inférieure à K sont transverse. On note $a_1 \dots a_N$ les cordes de Reeb associées. Quitte à prendre une zone de recollement assez petite, l'application retour sur S_Z est définie au voisinage de ces cordes.

On choisit alors $\text{dom}(\psi_0) = \emptyset$ et on déduit les structures de rectangles au voisinage des extrémités des cordes $a_1 \dots a_N$ à partir des fibres horizontales et de leurs images par l'application retour et son inverse. Les segments $D_{1,j}$ et $D_{2,j}$ associés à la corde a_j sont respectivement donnés par les tangentes à δ_1 et δ_0 aux extrémités de la corde (voir figure 3). Quitte à diminuer z_{\max} on obtient ainsi une surface de recollement K -hyperbolique (μ, ν, τ) -contrôlée.

Pour toute perturbation de l'équation de contact assez petite les propriétés de l'application retour dans Q_λ restent vérifiées et les seules cordes de Reeb de S_Z qui contribuent à cette application en dehors de R_λ sont des cordes de longueur arbitrairement petite au voisinage des segments $x = k\pi$. Or, pour une perturbation assez petite, R_z est de signe constant dans ces voisinages et on obtient les propriétés de ψ_0 cherchées. \square

3. Modèle de rocade hyperbolique

Intéressons-nous maintenant aux propriétés d'un attachement de rocade nécessaires au contrôle des nouvelles orbites périodiques. L'application retour sur S_Z doit vérifier des propriétés analogues à celles décrites dans la section précédente pour

FIGURE 3. $\text{im}(\psi_1)$ et $D_{2,1}$

l'application retour dans la variété. En particulier, on sépare la composante créée par de petites cordes de Reeb de S_Z au voisinage de la courbe de découpage des autres composantes. De plus, comme dans la variété, en dehors de cette composante spéciale au voisinage de la courbe de découpage, les images et sources des composantes de l'application retour sont dans R_λ . On s'intéresse aux propriétés de l'application retour dans la rocade en restriction à R_λ et on les exprime en termes de rectangles.

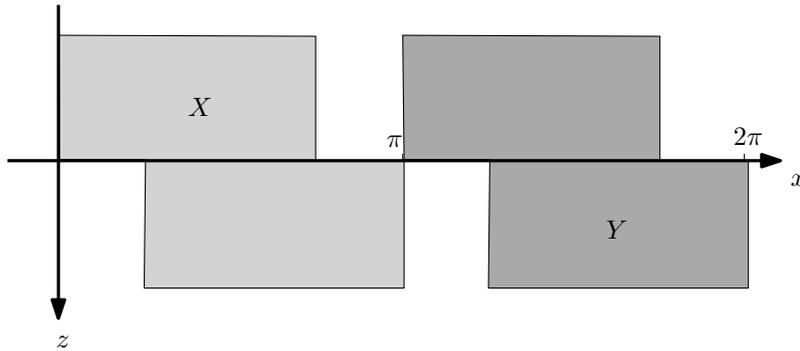
Dans les coordonnées $(x, z) \in \mathbb{S}_n \times I$ d'une surface de recollement, on pose (voir figure 4)

$$X = \left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [-z_{\max}, 0[\right) \cup \left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \times I \right) \cup \left(\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \times]0, z_{\max}] \right)$$

et

$$Y = \left(\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \times [-z_{\max}, 0[\right) \cup \left(\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \times I \right) \cup \left(\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \times]0, z_{\max}] \right)$$

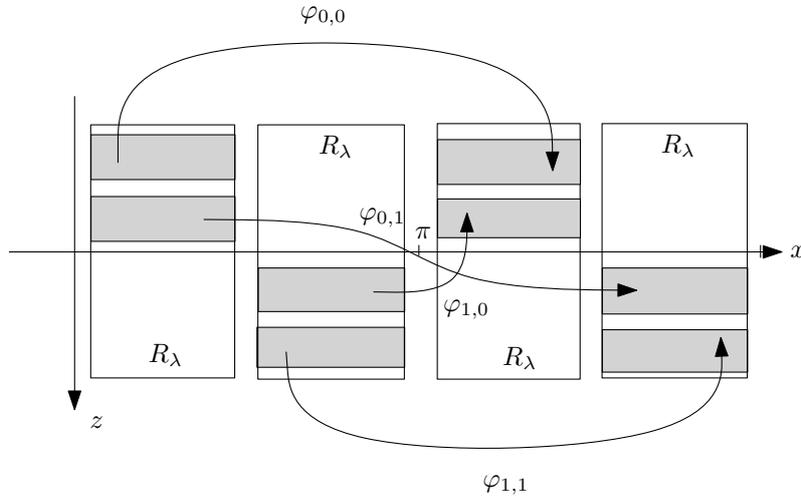
On étend la carte Z au voisinage de l'arc d'attachement en $\mathbb{S}_n \times [-y_{\max}, y_{\max}] \times I_{\max}$.

FIGURE 4. Voisines X et Y

DÉFINITION 10.6. Une *rocade convexe hyperbolique* dans une zone de recollement Z est un triplet $(\mathcal{B}, \alpha_B, \lambda)$ où (\mathcal{B}, α_B) est une variété de contact contenue dans Z et λ est un réel positif tels que

- (1) $\mathcal{B}^{\leq 0} = Z^{\leq 0}$ et α_B soit adaptée au bord dans $Z^{\geq 0}$;

- (2) la fonction retour φ_B sur S_Z dans $\mathcal{B}^{\geq 0}$ se décompose en φ_0 et φ_1 vérifiant
- $\text{dom}(\varphi_0) \subset Q_\lambda$ et $\text{im}(\varphi_0) \subset Q_\lambda$;
 - $\text{dom}(\varphi_1) \subset X$ et $\text{im}(\varphi_1) \subset Y$;
 - si $x \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$ et $(x, z) \in \text{dom}(\varphi_0)$ alors $(\varphi_0)_z(x, z) < z$ pour k impair et $(\varphi_0)_z(x, z) > z$ pour k pair, de plus $(\varphi_0)_x(x, z) \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$;
- (3) la restriction de φ_1 à R_λ se décompose en $\varphi_{i,j}$, $i \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, 1\}$ (voir figure 5) où $\text{dom}(\varphi_{i,j})$ et $\text{im}(\varphi_{i,j})$ sont des rectangles de fibres verticales aussi larges que R_λ (c'est-à-dire que les bases des fibrés verticaux sont respectivement $[\frac{i\pi}{2} + \lambda, \frac{(i+1)\pi}{2} - \lambda]$ et $[\frac{(i+1)\pi}{2} + \lambda, \frac{(i+3)\pi}{2} - \lambda]$) et $\varphi_{i,j}$ renverse les fibres.


 FIGURE 5. Voisines $\text{dom}(\varphi_{i,j})$ et $\text{im}(\varphi_{i,j})$

Comme dans la section précédente, on veut contrôler plus finement les fibres des rectangles ainsi que le temps de retour. De plus, on veut garantir des propriétés de dilatation et de contraction des fibres. Pour obtenir ces propriétés après composition et donc changement des structures de rectangle, on commence par les garantir pour une large classe de courbes (les courbes A -verticales) qui comprendra par les suites toutes les fibres verticales des rectangles $R_{i,j}$ fournies par l'application retour dans la variété.

DÉFINITION 10.7. Une rocade convexe hyperbolique $(\mathcal{B}, \alpha_B, \lambda)$ est *contrôlée par les paramètres* strictement positifs $\omega_B = (\nu, \tau, A, \eta)$ si :

- (1) $\text{dom}(\varphi_{i,j})$ et $\text{im}(\varphi_{i,j})$ sont des rectangles à fibres ν -horizontales;
- (2) $\varphi_{i,j}$ et $\varphi_{i,j}^{-1}$ envoient tout graphe A -vertical sur une courbe ν -horizontale et $\frac{1}{\eta}$ -dilatent les courbes A -verticales;
- (3) le temps de retour entre (x_0, z_0) et $(x_1, z_1) = \varphi_{i,j}(x_0, z_0)$ est majoré par 8τ

THÉORÈME 10.8. Soit $(V, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact de bord convexe muni d'une courbe legendrienne en position de recollement contenant un arc d'attachement γ_0 . Alors pour tous réels strictement positifs $\nu, \tau, A, \eta, \varepsilon$ et λ , quitte à restreindre Z , il existe un modèle de rocade hyperbolique (V_B, α_B, λ) sur S_Z de paramètres

(ν, τ, A, η) tel que $(V_B, \xi_B = \ker \alpha_B)$ soit obtenue par recollement de rocade à (V, ξ_B) le long de γ_0 et α_B soit ε -proche de α .

Ce théorème sera démontré dans les chapitres 11 et 12.

DÉFINITION 10.9. Soit $K > 0$. Soit Z une zone de recollement munie d'une surface de recollement K -hyperbolique (S_Z, λ) , ε -stable et (μ, ν, τ) -contrôlée. Alors, pour tout (A, η) strictement positifs, le recollement de rocade décrit dans le théorème 10.8 est appelé *recollement de rocade K -hyperbolique*.

4. Rocades convexes hyperboliques

Dans cette section on explique schématiquement comment construire une rocade convexe hyperbolique. Pour cela, on part du modèle décrit par Honda [45]. Soit \mathcal{A} un anneau muni d'un feuilletage β découpé par une courbe Γ et décrit dans la figure 6. Il existe une équation de contact α sur $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ telle que :

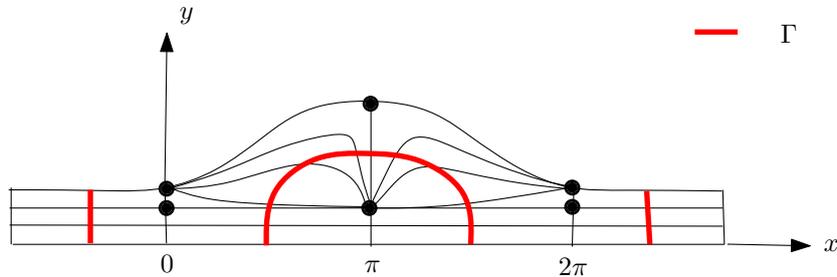


FIGURE 6. Feuilletage β et anneau \mathcal{A}

- le feuilletage caractéristique de $\mathcal{A} \times \{*\}$ soit donné par β ;
- $\Gamma \times \{0\}$ soit composé d'orbites de Reeb ;
- $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$ au voisinage du bord inférieur (les coordonnées sur \mathcal{A} sont données dans la figure 6).

On lisse les bords de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ comme expliqué à la figure 7. L'ensemble

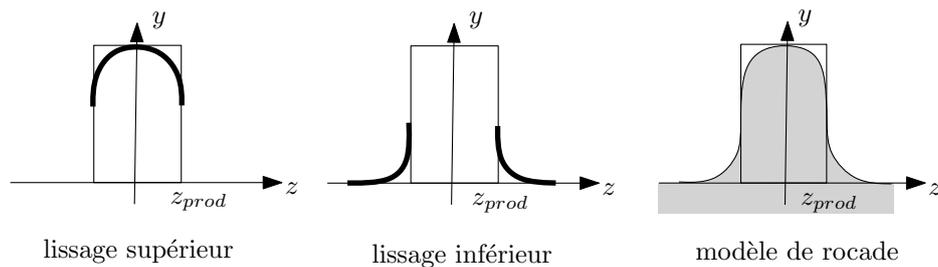


FIGURE 7. Lissage

des points de tangence entre R_α et le bord de la rocade forme une courbe lisse qui est une courbe de découpage du bord. On note R_+ et R_- les surfaces sur lesquelles le champ de Reeb est respectivement positivement et négativement transverse au bord de la rocade. La figure 8 représente la courbe de découpage ainsi que le champ de Reeb le long de celle-ci en projection sur le plan (x, z) . L'équation de contact α n'est pas adaptée au bord car R_α pointe vers R_- dans la zone de lissage inférieur.

La dynamique de l'application retour sur la zone de recollement pour R_α est décrite à la figure 9. Cette dynamique s'explique par l'alternative suivante :

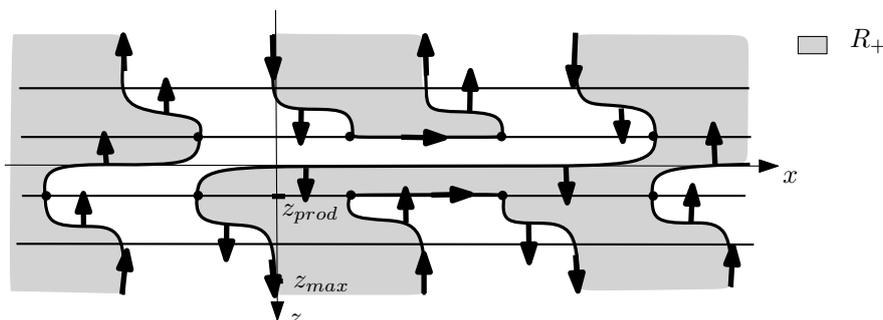


FIGURE 8. Courbe de découpage du bord de la rocade

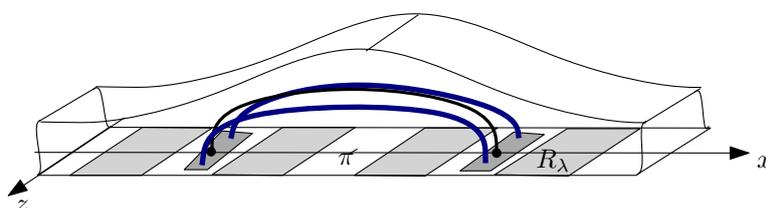


FIGURE 9. Application retour pour une équation non adaptée

- (1) les orbites issues de points de coordonnée x proche de $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont proches de la courbe de découpage $\Gamma \times \{0\}$;
- (2) au voisinage de la zone de recollement le champ de Reeb est contenu dans les plans $\{x = \text{cst}\}$ et est de pente $\tan(x)$: toutes les orbites issues de points de coordonnée x trop éloignée de $k\pi + \frac{\pi}{2}$ sortent de la rocade (voir figure 10).

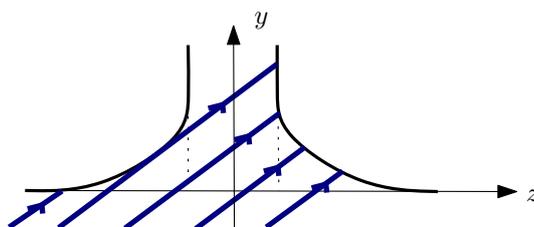


FIGURE 10. Application retour pour une équation non adaptée

Par définition de zone de recollement K -hyperbolique, il n'y a pas de corde de Reeb au voisinage des points de coordonnées x proche de $\frac{\pi}{2}$ et donc le recollement de rocade ne crée pas d'orbite périodique pour ce choix d'équation de contact non adaptée au bord.

La dynamique décrite dans la définition de rocade convexe hyperbolique apparaît lorsqu'on rend l'équation de contact adaptée au bord. Pour effectuer cette opération, on utilise le procédé de convexification [18] décrit dans la section 2 du chapitre 1 : on ajoute à la variété une « bosse » le long de la courbe de découpage dans la zone de lissage inférieure (voir figure 11). On obtient alors une application retour sur R_λ (voir figure 12). La zone de convexification permet aux orbites issues de points de R_λ d'atteindre le voisinage de $\Gamma \times \{0\}$ (partie gauche de la figure) et donc de traverser la rocade pour revenir dans la variété en repassant par la zone de convexification

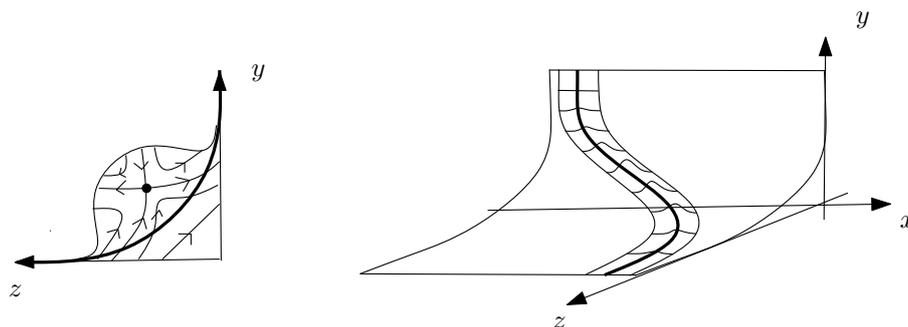
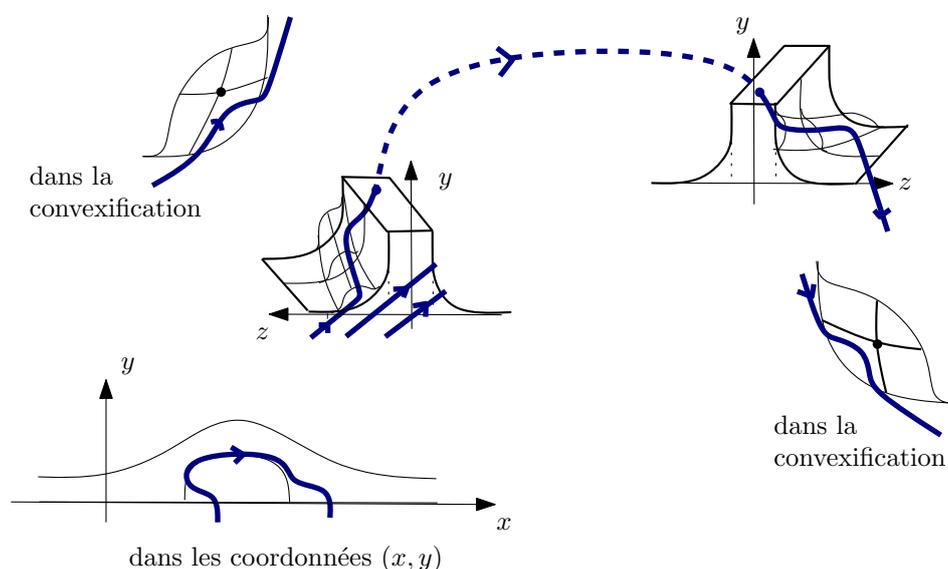


FIGURE 11. Convexification

FIGURE 12. Corde de R_λ dans la rocade

(partie droite de la figure). Pour comprendre la dynamique de l'application retour sur R_λ , on étudie l'image des courbes verticales de S_Z . Pour cela, on s'intéresse à des surfaces intermédiaires : la surface $\{z = z_{\text{prod}}\}$ et une surface $\{y = y_{\text{std}}\}$ au dessus de la zone de convexification (voir figure 13). Une courbe verticale est « étirée » dans la zone de convexification, puis transportée dans la partie supérieure de la rocade (et à nouveau légèrement étirée). Après un nouveau passage dans la zone de convexification la courbe devient presque horizontale. L'effet du passage dans la rocade au niveau des rectangles est présenté à la figure 14. En composant les applications entre S_Z et $\{y = y_{\text{std}}\}$, on obtient la dynamique demandée pour une rocade hyperbolique et décrite dans la figure 5.

Le chapitre 11 décrit en détail le modèle de rocade non adapté au bord ainsi que la première étape de convexification : la construction d'une rocade pré-convexe, c'est cette étape qui garantit la transversalité des rectangles observée dans la figure 14. Le chapitre 12 décrit le processus de convexification.

5. Démonstration du théorème de recollement de rocade

Dans cette section on montre comment obtenir le théorème 8.3 modulo le théorème 10.8. Soient $K > 0$, (V, α) une variété de contact de bord S convexe

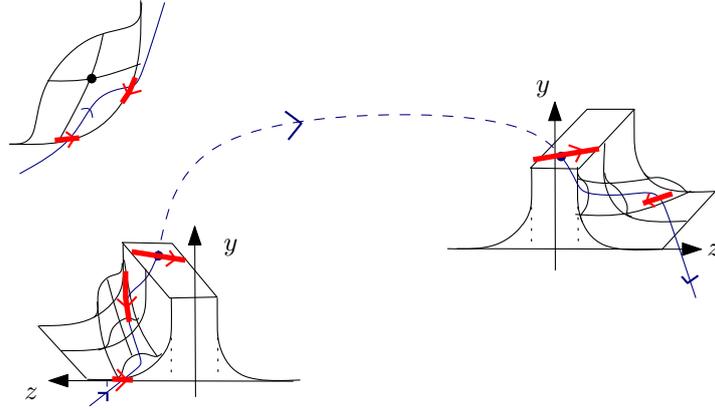


FIGURE 13. Effet du passage dans la rocade sur une courbe verticale

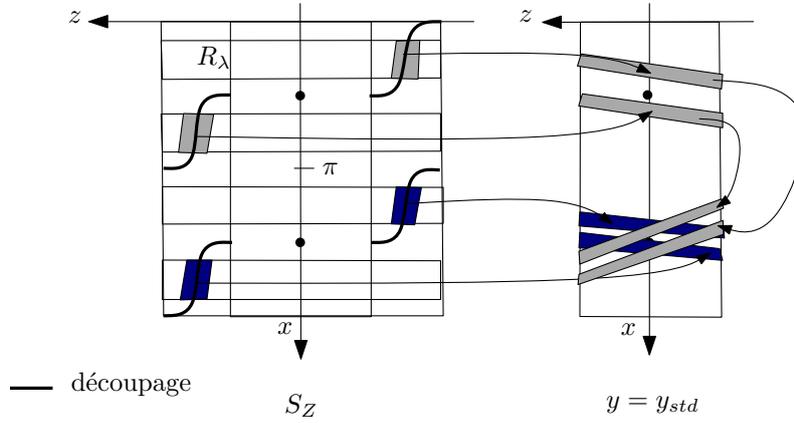


FIGURE 14. Application retour entre S_Z et $\{y = y_{std}\}$

et γ une courbe legendrienne tracée sur S contenant l'arc d'attachement γ_0 et en position de recollement. Quitte à perturber α , les cordes de Reeb $a_1 \dots a_N$ de période inférieure à K sont en nombre fini et $K \neq l(\mathbf{a})$ pour tout mot en $a_1 \dots a_N$.

Soit ε_K tel que $|K - l(\mathbf{a})| > \varepsilon_K$ pour tout mot en $a_1 \dots a_N$. Soit $l_0 > 0$ tel que toutes les cordes de Reeb soient de période supérieure à l_0 . Pour toute perturbation assez petite de α ces propriétés restent vérifiées. Dans toute la suite on garantira toujours ces conditions. Soit $\tau < \frac{l_0}{18K} \varepsilon_K$. D'après le lemme 10.5 il existe une surface de recollement K -hyperbolique (S_Z, λ) qui est ε -stable et (μ, ν, τ) -contrôlée au voisinage de γ où $\nu \leq \mu$ et μ est assez petit pour que toute courbe μ -horizontale et toute courbe μ -proche d'un segment $D_{i,j}$ s'intersectent transversalement en un unique point. Soit A tel que toute courbe μ -proche des droites $D_{1,i}$ et $D_{2,i}$ associées à la surface de recollement K -hyperbolique soient A -verticales pour toute ε -perturbation de l'équation de contact. Soit M majorant les constantes de Lipschitz des applications ψ_j qui apparaissent dans la décomposition de l'application retour sur la surface de recollement pour toute ε -perturbation de l'équation de contact. On choisit $\eta < \frac{1}{3M}$. D'après le théorème 10.8, il existe un modèle de rocade hyperbolique (V_B, α_B, λ) de paramètres (ν, τ, A, η) où α_B est ε -proche de α et ∂V_B est convexe et adapté à $R_{\alpha'}$.

LEMME 10.10. Soit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ un mot en les cordes de Reeb de γ_0 de longueurs inférieures à K . Alors $F_{\mathbf{a}} = \psi_{i_k} \circ \varphi_B \dots \psi_{i_1} \circ \varphi_B$ en restriction à R_λ se

décompose en deux difféomorphismes de rectangles $F_0^{\mathbf{a}}$ et $F_1^{\mathbf{a}}$ préservant les fibres et vérifiant les propriétés suivantes (voir figure 15) :

- (1) $\text{dom}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{dom}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des rectangles de fibres ν -horizontales et verticales, sous-fibrés verticaux d'un composante connexe de R_λ ;
- (2) $\text{im}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{im}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des rectangles de fibres horizontales et ν -proches de D_{2,i_k} , sous-fibrés horizontaux de $\text{im}(\psi_{i_k})$;
- (3) $F_0^{\mathbf{a}}$ et $F_1^{\mathbf{a}}$ $(\eta M)^k$ -contractent les fibres horizontales et $\frac{1}{(\eta M)^k}$ -dilatent les fibres verticales ;
- (4) $F_{\mathbf{a}}$ envoie toute courbe A -verticale sur une courbe ν -proche de D_{2,i_k} .

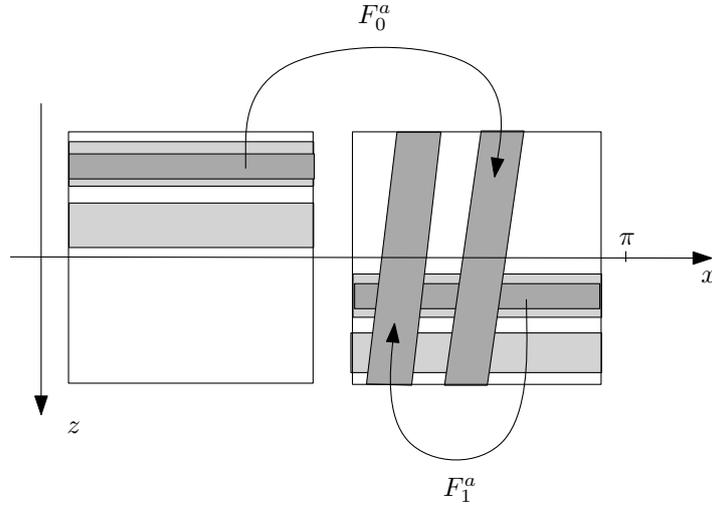


FIGURE 15. Domaines de définition des applications $F_i^{\mathbf{a}}$

L'application $G_{\mathbf{a}} = \varphi_B \circ F_{\mathbf{a}} \circ \varphi_B^{-1}$ vérifie des propriétés analogues, en particulier elle envoie toute courbe ν -horizontale sur une courbe μ -horizontale. Avant de démontrer ce lemme, on présente un résultat permettant de composer des applications entre rectangles.

LEMME 10.11. *Soient R_1, R_2, R_3 et R_4 des rectangles de \mathbb{R}^2 tels que les fibres verticales de R_2 rencontrent transversalement en un unique point les fibres horizontales de R_3 . Soient $F : R_1 \rightarrow R_2$ et $G : R_3 \rightarrow R_4$ deux difféomorphismes préservant les fibres. Alors $H = G \circ F$ est un difféomorphisme préservant les fibres défini de R'_1 dans R'_4 où R'_1 est un rectangle sous-fibré vertical de R_1 et R'_4 est un rectangle sous-fibré horizontal de R_4 .*

DÉMONSTRATION. Par construction, H est définie de $F^{-1}(R_2 \cap R_3)$ dans $G(R_2 \cap R_3)$. On note π_2^v est la projection associée à la structure de fibré vertical sur R_2 et π_3^h la projection associée au fibré horizontal de R_3 . L'application

$$\begin{aligned} R_2 \cap R_3 &\longrightarrow \pi_3^h(R_3) \times \pi_2^v(R_2) \\ p &\longmapsto (\pi_3^h(p), \pi_2^v(p)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Ainsi, $R_2 \cap R_3$ possède une structure de rectangle dont les fibres sont les fibres verticales de R_2 et les fibres horizontales de R_3 . Cette structure induit des structures de rectangle sur $F^{-1}(R_2 \cap R_3)$ et $G(R_2 \cap R_3)$ qui sont préservées par H . Enfin, les fibres verticales de $F^{-1}(R_2 \cap R_3)$ sont incluses dans les fibres verticales de R_1 et les fibres horizontales de $G(R_2 \cap R_3)$ sont incluses dans les fibres horizontales de R_4 . \square

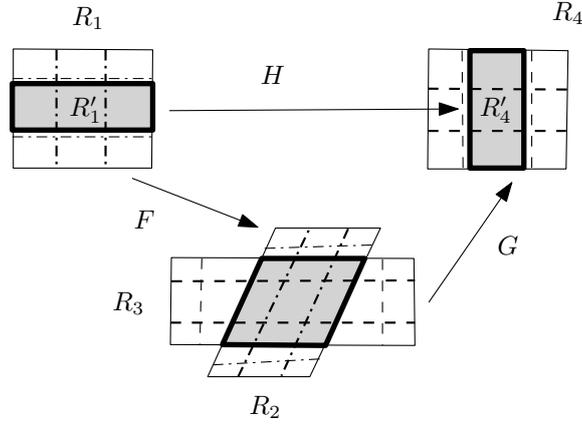


FIGURE 16. Composition de difféomorphismes entre rectangles

DÉMONSTRATION DU LEMME 10.10. On démontre ce résultat par récurrence sur le nombre de lettre du mot. Pour un mot d'une seule lettre, $F_{\mathbf{a}} = \psi_i \circ \varphi_B$ en restriction à R_λ . On suppose que $\text{dom}(\psi_i) \subset [\pi, \frac{3\pi}{2}] \times I_{\max}$ (le cas $\text{dom}(\psi_i) \subset [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \times I_{\max}$ se traite de façon similaire). L'application $F_{\mathbf{a}}$ se décompose alors en $F_0^{\mathbf{a}} = \psi_i \circ \varphi_{0,0}$ et $F_1^{\mathbf{a}} = \psi_i \circ \varphi_{1,0}$. Par le lemme 10.11, $F_0^{\mathbf{a}}$ et $F_1^{\mathbf{a}}$ sont bien deux applications entre rectangles. De plus, $\text{dom}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{dom}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des sous-fibrés verticaux de $\text{dom}(\varphi_{0,0})$ et $\text{dom}(\varphi_{1,0})$ et donc à fibres verticales. Leurs fibres horizontales sont les images des fibres verticales de $\text{dom}(\psi_i)$ par $\varphi_{0,0}^{-1}$ et $\varphi_{1,0}^{-1}$ et donc ν -horizontales. De même, $\text{im}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{im}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des sous-fibrés horizontaux de $\text{im}(\psi_i)$ et donc à fibres horizontales. Leurs fibres verticales sont les images des fibres horizontales de $\text{im}(\varphi_{0,0})$ et $\text{im}(\varphi_{1,0})$ par ψ_i et sont donc ν -proches de $D_{2,i}$.

Les applications $F_0^{\mathbf{a}}$ et $F_1^{\mathbf{a}}$ envoient clairement toute courbe A -verticale sur une courbe ν -proche de $D_{2,i}$. Enfin, l'image par φ_B d'une fibre horizontale de $\text{dom}(F_0^{\mathbf{a}})$ ou $\text{dom}(F_1^{\mathbf{a}})$ est une fibre verticale de $\text{im}(\psi_i)$. Cette fibre est donc η -contractée. De plus, par définition de M , l'application ψ_i contracte d'un facteur M et dilate d'un facteur $\frac{1}{M}$ toutes les courbes de $\text{dom}(\psi_i)$. Par conséquent les applications $F_0^{\mathbf{a}}$ et $F_1^{\mathbf{a}}$ contractent d'un facteur ηM les fibres horizontales et $\frac{1}{\eta M}$ -dilatent les fibres verticales.

On suppose maintenant le résultat vrai pour tous les mots de moins de k lettres. Soit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_{k+1}}$ un mot de $k + 1$ lettres. Alors $F_{\mathbf{a}} = F_{a_{i_1} \dots a_{i_k}} \circ F_{a_{i_{k+1}}}$. Une nouvelle application du lemme 10.11 permet d'obtenir les propriétés cherchées sur les rectangles. Les conditions de contraction et de dilatation s'obtiennent directement. Ceci clôt la récurrence. \square

COROLLAIRE 10.12. *Pour tout mot \mathbf{a} en les cordes de Reeb de γ_0 de longueurs inférieures à K , l'application $F_{\mathbf{a}}$ a un unique point fixe et l'orbite périodique associée a une période dans $[l(\mathbf{a}) - 9k\tau, l(\mathbf{a}) + 9k\tau]$.*

DÉMONSTRATION. C'est une application immédiate du lemme 10.10 et de la proposition 10.1. En effet, soit \mathbf{a} un mot en les cordes de Reeb $a_1 \dots a_N$, on applique le lemme 10.10 et on choisit la composante $F_i^{\mathbf{a}}$ pour laquelle $\text{dom}(F_1^{\mathbf{a}}) \cap \text{im}(F_i^{\mathbf{a}})$ est non vide. Cette composante existe toujours car les fibres horizontales de $\text{dom}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{dom}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des graphes sur $[\lambda, \frac{\pi}{2} - \lambda]$ et $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda]$ respectivement et que les fibres verticales de $\text{im}(F_0^{\mathbf{a}})$ et $\text{im}(F_1^{\mathbf{a}})$ sont des graphes sur I_{\max} inclus dans $[\lambda, \frac{\pi}{2} - \lambda] \times I_{\max}$ ou $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$.

Par hypothèse sur μ et ν , les fibres horizontales de $\text{dom}(F_1^a)$ et les fibres verticales de $\text{im}(F_i^a)$ s'intersectent transversalement en un unique point. De plus, les fibres horizontales sont $(\eta M)^k$ -contractées et les fibres verticales $\frac{1}{(\eta M)^k}$ -dilatées. On peut donc appliquer la proposition 10.1 pour conclure sur l'existence et l'unicité du point fixe.

La condition sur la période découle directement des propriétés sur les temps de retour des définitions 10.3 et 10.7. \square

LEMME 10.13. *Soit $p_0 = (x_0, y_0) \in \text{im}(\psi_0)$ tel que $x_0 \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$. On note X_k cet intervalle.*

- (1) *Supposons k impair et $z_0 \geq 0$. Tant que c'est possible, on définit $p_{2l+1} = \psi_V^{-1}(p_{2l})$ et $p_{2l+2} = \varphi_B^{-1}(p_{2l+1})$. Alors pour tout l pour lequel ces expressions ont un sens, on a $x_l \in X_k$ et $z_{2l} < z_{2l+1} < z_{2l+2}$.*
- (2) *Si k est pair et $z_0 \leq 0$, la construction précédente fournit une suite telle que $x_l \in X_k$ et $z_{2l} > z_{2l+1} > z_{2l+2}$.*
- (3) *Si k est pair et $z_0 \geq 0$, tant que c'est possible, on définit $p_{2l+1} = \varphi_B(p_{2l})$ et $p_{2l+2} = \psi_V(p_{2l+1})$. Alors pour tout l pour lequel ces expressions ont un sens, on a $x_l \in X_k$ et $z_{2l} < z_{2l+1} < z_{2l+2}$.*
- (4) *Si k est impair et $z_0 \leq 0$, la construction précédente fournit une suite telle que $x_l \in X_k$ et $z_{2l} > z_{2l+1} > z_{2l+2}$.*

DÉMONSTRATION. On démontre le résultat par récurrence sur l dans le cas k impair et $z_0 \geq 0$. Si $x_{2l} \in X_k$, $z_{2l} \leq 0$ et p_{2l+1} existe alors $p_{2l} = \psi_V(p_{2l+1})$. Donc $p_{2l} \in \bigcup_j \text{im}(\psi_i)$ et comme $p_{2l} \in Q_\lambda$, on a $p_{2l} \in \text{im}(\psi_0)$. Ainsi, $p_{2l} = \psi_0(p_{2l+1})$ et $p_{2l+1} \in \text{dom}(\psi_0)$. Par conséquent, $x_{2l+1} \in X_k$ et $z_{2l+1} > z_{2l}$. Si $x_{2l+1} \in X_k$, $z_{2l+1} \geq 0$ et p_{2l+2} existe alors $p_{2l+1} = \varphi_B(p_{2l+2})$. Donc $p_{2l+1} \in Y \cup \text{im}(\varphi_0)$, or k est impair, $z_{2l+1} \geq 0$ et $p_{2l+1} \in Q_\lambda$ d'où $p_{2l+1} \in \text{im}(\varphi_0)$. Par conséquent, $p_{2l+1} = \varphi_0(p_{2l+2})$ et $p_{2l+2} \in \text{dom}(\varphi_0)$. Donc $x_{2l+2} \in X_k$ et $z_{2l+2} > z_{2l+1}$.

On se place maintenant de la cas k pair et $z_0 \geq 0$. Si $x_{2l} \in X_k$, $z_{2l} \geq 0$ et p_{2l+1} existe alors $p_{2l+1} = \varphi_B(p_{2l})$. Donc $p_{2l} \in X \cup \text{dom}(\varphi_0)$ et comme $z_{2l} \geq 0$ et $p_{2l} \in Q_\lambda$ on a $p_{2l} \in \text{dom}(\varphi_0)$ d'où $x_{2l+1} \in X_k$ et $z_{2l+1} > z_{2l}$. Si $x_{2l+1} \in X_k$, $z_{2l+1} \geq 0$ et p_{2l+2} existe alors $p_{2l+1} = \psi_V(p_{2l+2})$. On obtient $p_{2l+1} \in \text{dom}(\psi_0)$ et $p_{2l+2} = \psi_0(p_{2l+1})$. D'où $x_{2l+2} \in X_k$ et $z_{2l+2} > z_{2l+1}$. Les autres cas se traitent de manière analogue. \square

COROLLAIRE 10.14. *Soit γ une orbite périodique de période inférieure à K rencontrant S_Z en p_γ , alors p_γ n'appartient pas à Q_λ .*

DÉMONSTRATION. On suppose par l'absurde que γ intersecte Q_λ en p_γ au temps $t = 0$. Chaque point d'intersection d'une orbite périodique avec S_Z doit être dans $\text{im}(\psi_V) \cap \text{dom}(\varphi_B)$ si ce point est dans la zone sortante de S_Z et dans $\text{im}(\varphi_B) \cap \text{dom}(\psi_V)$ si ce point est dans la zone rentrante de S_Z .

Si p_γ est dans la zone rentrante alors $p_\gamma \in Q_\lambda \cap \text{dom}(\psi_V)$ et donc $p_\gamma \in \text{dom}(\psi_0)$. Dans ce cas γ intersecte aussi Q_λ en $\psi_V(p_\gamma)$. Si p_γ est dans la zone sortante alors $p_\gamma \in Q_\lambda \cap \text{im}(\psi_V)$ et donc $p_\gamma \in \text{im}(\psi_0)$. On peut donc imposer que p_γ soit dans la zone avec champ de Reeb sortant et que $p_\gamma \in \text{im}(\psi_0)$.

Soit k tel que $x_\gamma \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$. Supposons que k est impair et $z_\gamma \geq 0$. Alors, par le lemme 10.13, les points d'intersection entre γ et S_Z pour des temps négatifs sont exactement les p_l et ces points sont définis pour tout l car l'orbite est périodique. On obtient alors une contradiction car z_l est strictement croissante. Les autres cas se traitent de façon similaire. \square

LEMME 10.15. *Soit γ une orbite périodique de période inférieure à K rencontrant S_Z en p_γ dans la zone avec champ de Reeb sortant, alors il existe un mot \mathbf{a} en les cordes de Reeb de γ_0 de longueurs inférieures à K tel que p_γ soit le point fixe de $F_{\mathbf{a}}$.*

DÉMONSTRATION. On note $p^0 = p_\gamma, p^1 \dots p^k = p^0$ les points d'intersection de γ avec la surface S_Z dans la zone avec champ de Reeb sortant et $q^0, q^1 \dots q^k = q^0$ les points d'intersection dans la zone de champ de Reeb rentrant. Alors, par 10.14, pour tout $j \in 0 \dots k$ il existe i_j tel que $q^j \in R_{1,i_j}$ et $p^{j+1} = \psi_{i_j}(q^j)$. Le point p_γ est alors un point fixe de $F_{a_{i_1} \dots a_{i_k}}$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.3. Le corollaire 10.12 garantit l'existence d'orbites périodiques associées à chaque mot en $a_1 \dots a_N$. Si la longueur du mot \mathbf{a} est inférieure à K alors $k \leq \frac{K}{l_0}$ et donc la période $T(\gamma_{\mathbf{a}})$ de l'orbite périodique associée à \mathbf{a} vérifie

$$T(\gamma_{\mathbf{a}}) \in \left[l(\mathbf{a}) - \frac{9K}{l_0} \tau, l(\mathbf{a}) + \frac{9K}{l_0} \tau \right]$$

par conséquent

$$T(\gamma_{\mathbf{a}}) \in \left[l(\mathbf{a}) - \frac{\varepsilon K}{2}, l(\mathbf{a}) + \frac{\varepsilon K}{2} \right]$$

et donc $T(\gamma_{\mathbf{a}}) < K$. Enfin le lemme 10.15 permet de conclure sur la surjectivité de l'application

$$\{\text{mots de longueur} \leq K\} \rightarrow \{\text{orbites périodiques de longueur} \leq K\}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 8.6. Une preuve analogue à celle du lemme 10.5 permet de montrer que pour une perturbation assez petite α' de l'équation de contact, l'application retour de $[\pi, 2\pi] \times I_{\max}$ sur $[0, \pi] \times I_{\max}$ se décompose en $(\psi'_j)_{j \in J}$ et ψ_0 où $\text{dom}(\psi_0) \subset Q_\lambda$, $\text{im}(\psi_0) \subset Q_\lambda$. De plus si $x \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$ et $(x, z) \in \text{dom}(\psi_0)$ alors $(\psi_0)_z(x, z) < z$ si k est impair et $(\psi_0)_z(x, z) > z$ si k est pair $(\psi_0)_x(x, z) \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$. On applique alors le théorème 10.8. Les propriétés décrites dans le lemme 10.13, le corollaire 10.14 et le lemme 10.15 sont valables dans ce contexte. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 10.1. Par le lemme 10.11 et la condition de transversalité des fibres, les itérés $F^k : R_k \rightarrow R'_k$ sont des applications entre rectangles, R_k est un sous fibré vertical de R et R'_k un sous fibré horizontal de R' . Par les conditions de contraction et de dilatation, il existe $L > 0$ tel que les fibres verticales de R_k et les fibres horizontales de R'_k soient de longueur inférieure à La^k pour tout $k > 0$. Ainsi, pour tout $k > 0$, $R_k \cap R'_k$ est un rectangle obtenu grâce aux fibres horizontales de R_k et aux fibres verticales de R'_k (condition de transversalité des fibres) de diamètre inférieur à $2La^k$. Ainsi $\bigcap_{i=1}^\infty R_i \cap R'_i$ est une intersection décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0 et est donc réduit à un point. Donc F admet un unique point fixe. \square

6. Propriétés de l'indice de Conley-Zehnder

6.1. Deux lemmes techniques sur l'indice de Conley-Zehnder. Le résultat suivant permet de déterminer, dans des cas favorables, l'indice de Conley-Zehnder en observant l'image d'un vecteur par R_t .

LEMME 10.16. *Soit $(R_t)_{t \in [0,1]}$ un chemin de matrices symplectiques avec $R_1 \in Sp^*$. Dans les coordonnées polaires sur \mathbb{R}^2 , on écrit $R_t e_1 = r(t) e^{i\alpha(t)}$. Alors, si l'indice de Conley-Zehnder de (R_t) est impair et $\alpha(1)$ est contenu dans un intervalle de longueur π centré en $(2k+1)\pi$, on a $\mu(R_t) = 2k+1$. De même, si l'indice de Conley-Zehnder de (R_t) est pair et $\alpha(1)$ est contenu dans un intervalle de longueur π centré en $2k\pi$, on a $\mu(R_t) = 2k$.*

DÉMONSTRATION. On prolonge R_t et donc α_t et r_t comme expliqué dans la construction de μ . On note toujours θ_t l'angle associé à la rotation O_t de la décomposition polaire $R_t = S_t O_t$. On suppose que $\theta_0 = 0$. Comme S_t est symétrique définie positive, pour tout t , on a $\theta_t - \frac{\pi}{2} < \alpha_t < \theta_t + \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs pour tout $t \in [1, 2]$, si $\theta_t = 0[2\pi]$ alors $R_t \in \text{Sp}^-(2)$ et si $\theta_t = \pi[2\pi]$ alors $R_t \in \text{Sp}^+(2)$.

Par conséquent, si $\mu(R)$ est impair, pour tout $t \in [1, 2]$, θ_t ne rencontre pas $2\pi\mathbb{Z}$ et ainsi $\theta_1 - \pi < \theta_2 < \theta_1 + \pi$. D'où $\alpha_1 - \frac{3\pi}{2} < \theta_2 < \alpha_1 + \frac{3\pi}{2}$. Par hypothèse, on obtient

$$(2k+1)k\pi - 2\pi < \theta_2 < (2k+1)\pi + 2\pi.$$

Si $\mu(R)$ est pair, on obtient de façon analogue

$$2k\pi - 2\pi < \theta_2 < 2k\pi + 2\pi. \quad \square$$

Concluons cette section par un lemme permettant de déterminer qu'une matrice symplectique en dimension 2 est hyperbolique. On se place dans \mathbb{R}^2 muni de sa structure symplectique standard et du produit scalaire standard dans la base canonique (e_1, e_2) . On note $C(x, \theta)$ le cône centré en x et d'angle θ et, pour $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $\nu(\theta_0) = \min(\frac{\pi-2\theta_0}{4}, \frac{1}{6})$.

LEMME 10.17. *Soit $R \in \text{Sp}(2)$ tel que $Re_1 \in C(e_1, \nu(\theta_0))$, $\|Re_1\|_2 \geq 3$ et qu'il existe $f \in C(e_2, \theta_0)$ avec $Rf \in C(e_2, \theta_0)$. Alors, R est diagonalisable sur \mathbb{R} et le signe de ses valeurs propres est donné par le signe de $\langle e_1, Re_1 \rangle$.*

DÉMONSTRATION. Comme R est symplectique, son polynôme caractéristique est donné par $X^2 - \text{tr}(R)X + 1$. Par conséquent, si $|\text{tr}(R)| > 2$, R est diagonalisable. Quitte à considérer $-f$, (e_1, f) est une base directe. Pour calculer $\text{tr}(R)$ on effectue le changement de base de (e_1, e_2) vers (e_1, f) . La matrice de changement de base est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\theta \in [\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0]$. Dans la base (e_1, f) la matrice de R s'écrit

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \cos(\theta_1) & \mu_2 \cos(\theta_2) \\ \mu_1 \sin(\theta_1) & \mu_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \mu_1 \sin(\theta - \theta_1) & \mu_2 \sin(\theta - \theta_2) \\ \mu_1 \sin(\theta_1) & \mu_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

où $\theta_1 \in [-\nu(\theta_0), \nu(\theta_0)]$, $\theta_2 \in [\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0]$ et $|\mu_1| \geq 3$. Les réels μ_1 et μ_2 sont de même signe car R préserve l'orientation. Ainsi

$$\text{tr}(R) \geq \frac{1}{\sin(\theta)} (|\mu_1| \sin(\theta - \theta_1) + |\mu_2| \sin(\theta_2)) \geq 2. \quad \square$$

6.2. Schema de preuve du théorème 8.5. Soit \mathbf{a} un mot de longueur inférieure à K en les cordes de Reeb. On considère $\gamma_{\mathbf{a}}$ l'orbite périodique associée. On choisit un point d'intersection $p_{\mathbf{a}}$ entre $\gamma_{\mathbf{a}}$ et la zone de S_Z avec champ de Reeb entrant. On note φ_t le flot du champ de Reeb et $T(\mathbf{a})$ la période de $\gamma_{\mathbf{a}}$. On se place dans la trivialisaton de ξ le long de $\gamma_{\mathbf{a}}$, on obtient alors une famille de matrices symplectiques $R_{\mathbf{a},t}$ en considérant $d\varphi_t(\mathbf{a})|_{\xi(p_{\mathbf{a}})} : \xi(p_{\mathbf{a}}) \rightarrow \xi(\varphi_t(p_{\mathbf{a}}))$. Pour calculer l'indice de Conley-Zehnder de $\gamma_{\mathbf{a}}$, on va utiliser le lemme 10.16. Pour cela on va étudier l'image de $-\frac{\partial}{\partial x} = e_1$ par $d\varphi_t$. Le lemme 10.17 fournira la parité de l'indice de Conley-Zehnder. On note $\chi_{p_{\mathbf{a}}}$ l'application retour entre un voisinage de $p_{\mathbf{a}}$ dans S_Z et $S_{\xi(p_{\mathbf{a}})}$ où $S_{\xi(p_{\mathbf{a}})}$ est une surface tangente à $\xi(p_{\mathbf{a}})$. Comme la différentielle $d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}}) : T_{p_{\mathbf{a}}}S_Z \rightarrow \xi(p_{\mathbf{a}})$ vérifie $d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})\frac{\partial}{\partial x} = \pm e_1$, il existe $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que l'image par $d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})$ de tout vecteur A -vertical soit dans $C(e_2, \theta_0)$. On rappelle que $\nu(\theta_0) = \min(\frac{\pi-2\theta_0}{4}, \frac{1}{6})$ et $G_{\mathbf{a}} = \varphi_B \circ F_{\mathbf{a}} \circ \varphi_B^{-1}$.

LEMME 10.18. *Quitte à choisir les paramètres μ, ν et η assez petits,*

$$(1) R_{\mathbf{a},T(\mathbf{a})}e_1 \in C(e_1, \nu(\theta_0));$$

- (2) *il existe $f \in C(e_2, \theta_0)$ tel que $Rf \in C(e_2, \theta_0)$;*
(3) $\|Re_1\|_2 \geq 3$.

DÉMONSTRATION. Il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout vecteur v de $T_{p_{\mathbf{a}}}S_Z$ μ_0 -horizontal, $d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}}).v \in C(e_1, \nu(\theta_0))$. On suppose $\mu < \mu_0$. Par ailleurs, il existe $l > 0$ tel que $\|d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})\| < l$ et $\|d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})^{-1}\| < l$ où $\|\cdot\|$ est la norme opérateur associée à la norme euclidienne. Par le lemme 10.10, $dG_{\mathbf{a}}$ envoie $\frac{\partial}{\partial x}$ sur un vecteur μ -horizontal et $\frac{1}{(\eta M)}$ -dilata la norme. De plus $dG_{\mathbf{a}}$ envoie le vecteur tangent à la fibre verticale de $P_0^{\mathbf{a}}$ en $p_{\mathbf{a}}$ (vecteur A -vertical) sur un vecteur tangent à la fibre verticale de $P_1^{\mathbf{a}}$ en $p_{\mathbf{a}}$ (vecteur A -vertical). On note v ce vecteur. Par conséquent,

$$R_{\mathbf{a}, T(\mathbf{a})}e_1 = -dG_{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x} \in C(e_1, \nu(\theta_0))$$

$$\left\| R_{\mathbf{a}, T(\mathbf{a})}e_1 \right\|_2 \geq \left\| d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})^{-1} \right\|^{-1} \left\| dG_{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x} \right\|_2 \geq \frac{1}{l\eta M} \geq 3$$

pour η assez petit. Enfin $d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})v \in C(e_2, \theta_0)$ et

$$R_{\mathbf{a}, T(\mathbf{a})}(d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}})v) = d\chi_{p_{\mathbf{a}}}(p_{\mathbf{a}}) \circ d(\varphi_B \circ F_{\mathbf{a}} \circ \varphi_B^{-1})v \in C(e_2, \theta_0). \quad \square$$

L'effet du passage dans la rocade décrit à la figure 13 permet d'obtenir le résultat suivant.

LEMME 10.19. *L'application retour sur S_Z dans la rocade vérifie*

$$\left\langle d\varphi_B(p) \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle > 0$$

pour tout $p \in \text{dom}(\varphi_B)$.

REMARQUE 10.20. La propriété décrite dans le lemme précédent est aussi vérifiée par tout vecteur dans le demi-cône A -vertical dirigé par $\frac{\partial}{\partial z}$. En effet l'image par $d\varphi_B(p)$ de tout vecteur A vertical est ν -horizontale et non nulle et, par conséquent, l'image de demi-cône A -vertical dirigé par $\frac{\partial}{\partial z}$ est incluse dans un demi-cône ν -horizontal.

LEMME 10.21. *Pour tout mot en les cordes de Reeb $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ de longueur inférieure à K et pour tout point $p \in \text{dom}(G_{\mathbf{a}})$, les réels $\langle dG_{\mathbf{a}}(p) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$ et $\prod_{j=1}^k (-1)^{\tilde{\mu}(a_{i_j})}$ sont du même signe.*

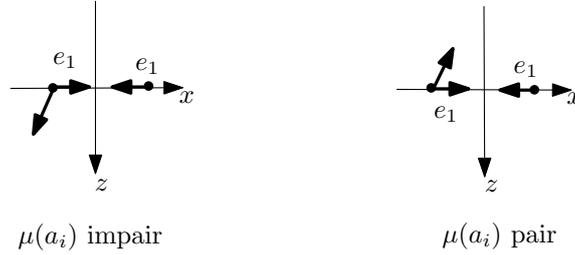
DÉMONSTRATION. On montre le résultat par récurrence sur la longueur du mot \mathbf{a} . Pour un mot de longueur 1, on sait que $d\psi_{a_1}(p) \frac{\partial}{\partial x}$ est A -vertical. De plus, si $\tilde{\mu}(a_1)$ est pair, $\langle -d\psi_{a_1}(p) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle < 0$ et donc, par le lemme 10.19

$$\left\langle dG_{a_1}(p) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle > 0.$$

De même si $\mu(a_1)$ est impair, $\langle -d\psi_{a_1}(p) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle > 0$ et donc

$$\left\langle dG_{a_1}(p) \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle < 0.$$

Supposons maintenant le résultat vrai au rang k et montrons le au rang $k+1$. Soit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_{k+1}}$ un mot en les cordes de Reeb. Soit $p \in \text{dom}(G_{\mathbf{a}})$, on note $v = dG_{a_{i_1} \dots a_{i_k}}(p) \frac{\partial}{\partial x}$. Par hypothèse, $\langle v, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$ est du même signe que $\prod_{j=1}^k (-1)^{\tilde{\mu}(a_{i_j})}$. Alors, $\left\langle d\psi_{a_{i_{k+1}}}(p) v, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$ est du même signe que $\prod_{j=1}^{k+1} (-1)^{\tilde{\mu}(a_{i_j})}$ et il en est de même pour $\left\langle dG_{a_{i_{k+1}}}(p) v, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$. Ceci clôt la récurrence. \square

FIGURE 17. Cas $\tilde{\mu}(a_i)$ pair et impair

COROLLAIRE 10.22. Si μ , ν et η sont choisis assez petits, pour tout mot $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ en les cordes de Reeb, les parités de $\sum_{j=1}^k \tilde{\mu}(a_{i_j})$ et de $\mu(\gamma_{\mathbf{a}})$ sont les mêmes.

DÉMONSTRATION. Par le lemme 10.21, on connaît le signe de $\langle dG_{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$. Or ce signe est le même que celui de $\langle R_{T(\mathbf{a})} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle$. De plus, par les lemmes 10.18 et 10.17 on sait que $R_{T(\mathbf{a})}$ est hyperbolique et donc si $\sum_{j=1}^k \tilde{\mu}(a_{i_j})$ est pair, les valeurs propres de $R_{T(\mathbf{a})}$ sont positives et $\mu_{CZ}(\gamma_{\mathbf{a}})$ est pair. De même, si $\sum_{j=1}^k \tilde{\mu}(a_{i_j})$ est impair, les valeurs propres de $R_{T(\mathbf{a})}$ sont négatives et $\mu_{CZ}(\gamma_{\mathbf{a}})$ est impair. \square

LEMME 10.23. Soit \mathbf{a} un mot en les cordes de Reeb de longueur inférieure à K . Il existe une surface lisse $S_{\gamma_{\mathbf{a}}}$ de bord $\gamma_{\mathbf{a}}$ qui détermine la classe de trivialisations de ξ le long de $\gamma_{\mathbf{a}}$ telle que, si on écrit $R_t \frac{\partial}{\partial x} = r(t)e^{i\theta(t)}$ dans cette trivialisations, alors $\theta(t) \neq 0[\pi]$ pour tout $t > 0$ pour lequel $\gamma_{\mathbf{a}}(t)$ est dans la rocade.

Ce lemme sera prouvé dans la section 7 du chapitre 12.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8.5. Soit $\mathbf{a} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ un mot en les cordes de Reeb de longueur inférieure à K . On se place dans la trivialisations fournie par le lemme 10.23. On écrit $R_t \frac{\partial}{\partial x} = r(t)e^{i\theta(t)}$ avec $\theta(0) = 0$. On note $0 = t_1 < t'_1 < \dots < t_k < t'_k = T(\mathbf{a})$ les temps d'intersection successifs de $\gamma_{\mathbf{a}}$ avec S_Z (on choisit pour $\gamma_{\mathbf{a}}(0)$ le point fixe de $G_{\mathbf{a}}$). Montrons par récurrence que pour tout $j \in 1 \dots k$ on a

$$\theta(t_j) \in \left[\left(\sum_{l=1}^{j-1} \mu(a_{i_l})\pi \right) - \nu(\theta_0), \left(\sum_{l=1}^{j-1} \mu(a_{i_l})\pi \right) + \nu(\theta_0) \right].$$

Le cas $j = 1$ est vérifié car $\theta(0) = 0$.

Supposons le résultat vrai au rang $j \in 1 \dots k - 1$ et montrons le au rang $j + 1$. Par définition de $\mu(a_{i_j})$, on a

$$\theta(t'_j) \in \left[\left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) + \frac{\pi}{2} - \theta_0, \left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) + \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right].$$

Par conséquent, par le lemme 10.23

$$\theta(t_{j+1}) \in \left[\left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) - \nu(\theta_0), \left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) + \nu(\theta_0) \right]$$

ou

$$\theta(t_{j+1}) \in \left[\left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) + \pi - \nu(\theta_0), \left(\sum_{l=1}^j \mu(a_{i_l})\pi \right) + \pi + \nu(\theta_0) \right]$$

et le lemme 10.21 permet de conclure. Ceci clôt la récurrence. On applique le lemme 10.16 pour conclure sur l'indice de Conley-Zehnder. \square

Construction d'une rocade pré-convexe

La démonstration du théorème 10.8 occupe les chapitres 11 et 12. Elle est présentée dans la section 4 du chapitre 10. Elle repose sur une construction explicite de rocade. Les principales étapes sont les suivantes.

- (1) On construit une équation de contact sur $\mathcal{A} \times I$ où \mathcal{A} est obtenu en lissant un disque de rocade et I est un intervalle, puis on lisse les coins de $\mathcal{A} \times I$. L'équation de contact obtenue n'est pas adaptée au bord mais le bord est convexe. On parle de *modèle de rocade*.
- (2) On perturbe le modèle précédent au voisinage de la courbe de découpage pour obtenir un *modèle pré-convexe*. L'équation de contact n'est toujours pas adaptée mais on est en position d'appliquer un procédé de convexification. Cette étape est purement technique et n'apparaît pas dans le schéma général du chapitre précédent.
- (3) On applique le procédé de convexification décrit dans le chapitre 1, section 2 pour rendre l'équation adaptée et obtenir une rocade hyperbolique.

Dans ce chapitre on explique les deux premières étapes de cette construction. La section 1 correspond à la première étape. La section 2 est consacrée à l'étude des propriétés du flot de Reeb dans la rocade. Ces propriétés seront utilisées dans toute la suite de la preuve. Enfin les sections 3 et 4 décrivent la deuxième étape de la construction d'une rocade hyperbolique.

On reprend toutes les notations des chapitres 8 et 10.

1. Modèle de rocade

Dans la section 1.1, on donne un modèle de disque de rocade lissé plus adapté à la construction d'un recollement \mathcal{C}^∞ qu'un disque de rocade. On construit ensuite une équation de contact dans un voisinage produit de ce disque lissé. Dans la section 1.2, on voit comment lisser ce voisinage. Enfin dans la section 1.3, on décrit les symétries du modèle.

1.1. Modèle produit. Dans les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note

$$U_y = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right] \times [y, +\infty[.$$

Dans toute la suite de la section on fixe \mathcal{A} difféomorphe à un anneau (voir figure 1), inclus dans $\mathbb{S}_n \times [0, \infty[$, contenant $\mathbb{S}_n \times \{0\}$ et tel que $\mathcal{A} = \mathbb{S}_n \times [0, y_0]$ hors de U_0 .

DÉFINITION 11.1. Un *feuilletage de rocade* (voir figure 1) est un feuilletage singulier de \mathcal{A} , noté β , vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) il existe y_{std}, y_β et $f_\beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $0 < y_{\text{std}} < y_\beta$, on ait $f_\beta(x, y) = 1$ pour $(x, y) \notin U_{2y_{\text{std}}}$ et $\beta = f_\beta(x, y) \sin(x) dy$ pour $(x, y) \notin U_{y_\beta}$;
- (2) dans $U_{y_\beta} \cap \mathcal{A}$ les singularités de β sont
 - une singularité demi-elliptique négative en (π, y_β) ;
 - deux singularités demi-hyperboliques en $(0, y_\beta)$ et $(2\pi, y_\beta)$;

- deux singularités elliptiques positives sur $\partial\mathcal{A}$ pour $x = 0$ et $x = 2\pi$;
 - des singularités positives sur $\partial\mathcal{A} \cap U_{y_\beta}$;
- (3) il existe une courbe lisse Γ_A qui découpe¹ (\mathcal{A}, β) .

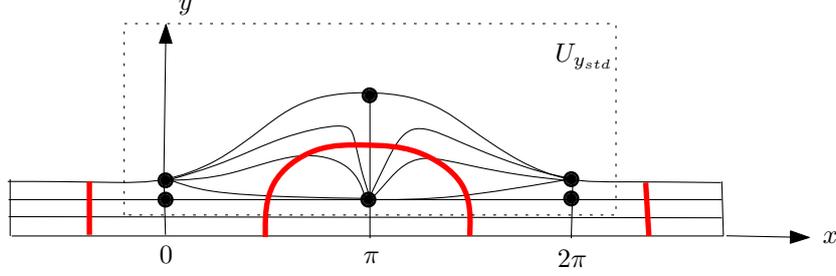


FIGURE 1. Feuilletage de rocade

Par la condition 3, Γ_A vérifie

$$\Gamma_A \cap \mathbb{S}_n \times [0, y_{\text{std}}] = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, z \right), k \in 1 \dots n \right\}.$$

On note Γ_D la composante connexe de Γ_A reliant $(\frac{\pi}{2}, 0)$ et $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. On note γ_1 le bord inférieur de \mathcal{A} et γ_2 son bord supérieur. Le sous-arc $[0, 2\pi] \times \{0\}$ de γ_1 est appelé *arc d'attachement* de la rocade lissée. Le feuilletage de rocade est l'analogue lisse du demi-disque muni d'un feuilletage de demi-disque vrillé utilisé pour définir une rocade.

DÉFINITION 11.2. Soit S une surface convexe close dans une variété de contact de dimension 3. Une *rocade lissée pour S* est un plongement de \mathcal{A} muni d'un feuilletage de rocade β intersectant transversalement S le long de γ_1 , intersectant la courbe de découpage de S au moins en les points de coordonnées $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ et $(2\pi, 0)$ et tel que β décrive le feuilletage caractéristique de l'anneau.

PROPOSITION 11.3 (Honda [45]). Soit S une surface convexe dans une variété de contact (V, ξ) . Quitte à effectuer une isotopie C^∞ -petite de ξ , S admet une rocade si et seulement si S admet une rocade lissée.

PROPOSITION 11.4 (Honda [45]). Soient Z une zone de recollement de (S, γ) et (\mathcal{A}, β) un feuilletage de rocade. Quitte à perturber β de façon C^∞ -petite pour $y \geq y_{\text{std}}$, il existe une équation de contact α sur $\mathcal{A} \times [-z_{\text{max}}, z_{\text{max}}]$ telle que

- $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$ en dehors de $[-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}] \times [y_{\text{std}}, \infty[$;
- le feuilletage caractéristique de $\mathcal{A} \times \{z\}$ soit β pour tout $z \in [-z_{\text{max}}, z_{\text{max}}]$;
- dans un voisinage $\mathcal{U}_D \subset \mathcal{A}$ de Γ_D , il existe des coordonnées

$$(r, \theta) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, \theta_{\text{max}}]$$

dans lesquelles $\alpha = \sin(r)d\theta + \cos(r)dz$.

Dans la suite de ce texte, on utilisera la construction explicite de α présentée ici.

CONSTRUCTION 11.5. On construit α sous la forme $\alpha = \beta + f(x, y)dz$. Quitte à perturber β pour $y \geq y_{\text{std}}$, il existe un voisinage \mathcal{U}_D de Γ_D muni de coordonnées $(r, \theta) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, \theta_{\text{max}}]$ telles que

1. On considère ici le découpage associé au champ de vecteurs Y tel que $\iota_Y dx \wedge dy = \beta$ et à la forme volume $dx \wedge dy$. Ce découpage est alors unique.

- (1) $\Gamma_D \simeq \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\} \times [0, \theta_{\max}]$;
- (2) $\beta = \sin(r)d\theta$;
- (3) $(r, \theta) = (x, y)$ pour $y \leq y_{\text{std}}$ au voisinage de $x = \frac{3\pi}{2}$;
- (4) $(r, \theta) = (-x + 2\pi, -y - \theta_{\max})$ pour $y \leq y_{\text{std}}$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$.

Choisissons maintenant une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) pour $(x, y) \in \left((\mathbb{S}_n \setminus [-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]) \times [0, +\infty[\right) \cap \mathcal{A}$ et $(x, y) \in \mathbb{S}_n \times [0, y_{\text{std}}]$ on a $f(x, y) = \cos(x)$;
- (2) dans \mathcal{U} , la fonction f ne dépend que de r et est croissante, $f(r, \theta) = \cos(r)$ au voisinage de $r = \frac{3\pi}{2}$;
- (3) dans $U_{y_\beta} \setminus \mathcal{U}$, la fonction f vaut 1 dans la zone positive et -1 dans la zone négative;
- (4) dans $([-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}] \times [y_{\text{std}}, \infty[) \cap \mathcal{A}$, la fonction f ne dépend que de x , est croissante et interpole entre \cos et 1;
- (5) dans $([\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}] \times [y_{\text{std}}, \infty[) \cap \mathcal{A}$, la fonction f ne dépend que de x , est décroissante et interpole entre 1 et \cos ;
- (6) dans $([-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}] \times [y_{\text{std}}, 2y_{\text{std}}]) \cap \mathcal{A}$, les fonctions $f(\cdot, y)$ interpolent entre $f(\cdot, y_{\text{std}})$ et $f(\cdot, 2y_{\text{std}})$ en gardant le tableau de variation de la fonction cosinus.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 11.4. Commençons par justifier que les coordonnées (r, θ) utilisées dans la construction 11.5 sont bien définies. Pour les obtenir, on choisit des coordonnées (r, θ) au voisinage de Γ_D dans lesquelles $\beta = b(r, \theta)d\theta$ et $b(\frac{3\pi}{2}, \theta) = -1$. Comme Γ_A découpe β , on a de plus $\frac{\partial b}{\partial r}(r, \theta) > 0$ pour $r > \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{\partial b}{\partial r}(r, \theta) > 0$ pour $r < \frac{3\pi}{2}$. On applique ensuite la méthode de Moser de façon analogue à la démonstration du lemme 9.5 pour obtenir $\beta = \sin(r)d\theta$.

La 1-forme donnée par 11.5 est bien une équation de contact. En effet le résultat est immédiat hors des zones d'interpolation. Dans ces zones (correspondant aux conditions 4, 5 et 6), la condition de contact s'écrit

$$\cos(x)f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \sin(x) > 0.$$

Comme $f(\cdot, y)$ a le même tableau de variations que cosinus, elle est vérifiée. \square

Avant de conclure cette section remarquons que, en choisissant le feuilletage de rocade utilisé, l'orbite de Reeb associée à Γ_D dans la rocade est de « période » aussi petite que l'on veut. Il suffit pour cela de montrer que θ_{\max} peut être rendu arbitrairement petit car $\theta_{\max} = \left| \int_{\Gamma_D} \beta \right|$.

LEMME 11.6. *Pour tout $\tau > 0$, il existe un feuilletage de rocade (\mathcal{A}, β) tel que $\left| \int_{\Gamma_D} \beta \right| < \tau$.*

DÉMONSTRATION. On part d'un modèle de rocade (\mathcal{A}, β) tel que $\beta = \sin(x)dy$ dans un voisinage U de $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{13\pi}{6}$. On va construire un nouveau modèle de rocade $(\mathcal{A}, \tilde{\beta})$ plus adapté. Soient $b : \mathbb{S}_n \rightarrow [0, 1[$ et $c : [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$ des fonctions lisses telles que :

- $b(x) = 0$ pour $x \notin [-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$;
- b est constante hors de U ;
- b est croissante au voisinage de $x = -\frac{\pi}{6}$ puis décroissante au voisinage de $x = \frac{13\pi}{6}$ et $b(0) = \max(b) > 0$;
- $c = 0$ sur $[0, \frac{y_{\text{std}}}{2}]$;
- $c(x)$ est constante non nulle sur pour $y \geq y_{\text{std}}$;

– c est croissante.

Considérons $\tilde{\beta} = (1 - b(x)c(y))\beta$. Comme $1 - b(x)c(y) > 0$, le feuilletage $\tilde{\beta}$ possède les mêmes singularités que β avec les mêmes orientations. De plus $\tilde{\beta} = \beta$ hors de $U_{y_{\text{std}}}$.

Par ailleurs $d\tilde{\beta} = (1 - b(x)c(y))d\beta - b'(x)\sin(x)dx \wedge dy$. Dans U , au voisinage de $x = -\frac{\pi}{6}$, on a $d\tilde{\beta} > 0$ car $b' \geq 0$ et $\sin(x) < 0$. De même, au voisinage de $x = \frac{13\pi}{6}$, on obtient $d\tilde{\beta} > 0$ car $b' \leq 0$ et $\sin(x) > 0$. Hors de U , on a $d\tilde{\beta} = (1 - b(x)c(y))d\beta$. Par conséquent Γ_A découpe $\tilde{\beta}$.

Enfin

$$\left| \int_{\Gamma_D} \tilde{\beta} \right| \leq \left| \int_{\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, y_{\text{std}}]} \tilde{\beta} \right| + \left| \int_{\{\frac{3\pi}{2}\} \times [0, y_{\text{std}}]} \tilde{\beta} \right| + \left| \int_{\Gamma_D \cap y \geq y_{\text{std}}} \tilde{\beta} \right|$$

or

$$\left| \int_{\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, y_{\text{std}}]} \tilde{\beta} \right| \leq y_{\text{std}}, \quad \left| \int_{\{\frac{3\pi}{2}\} \times [0, y_{\text{std}}]} \tilde{\beta} \right| \leq y_{\text{std}}$$

et $\left| \int_{\Gamma_D \cap y \geq y_{\text{std}}} \tilde{\beta} \right| = (1 - \max(b)\max(c)) \left| \int_{\Gamma_D} \beta \right|$.

En prenant y_{std} petit et $\max(b)$ et $\max(c)$ proches de 1, il vient $\left| \int_{\Gamma_D} \tilde{\beta} \right| \leq \tau$. \square

1.2. Lissage d'un produit. Après la construction d'une équation de contact adaptée sur un voisinage produit d'un anneau muni d'un feuilletage de rocade, il reste à lisser ce produit pour obtenir un modèle de rocade. Lorsqu'on recolle $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ sur S_Z , il y a deux types de coins à lisser : les coins convexes fournis par $\gamma_2 \times \{\pm z_{\text{prod}}\}$ (partie supérieure de la rocade) et les coins concaves fournis par $\gamma_1 \times \{\pm z_{\text{prod}}\}$ (zone de recollement de la rocade sur la variété). Pour lisser la partie supérieure, on considère une fonction lisse

$$l_{\text{sup}} : \mathbb{S}_n \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

vérifiant les propriétés suivantes (voir figure 2) :

- (1) l_{sup} est strictement concave en z , indépendante de la variable x pour $x \notin [-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$ et l_{sup} est tangente à la verticale à tout ordre en $z = \pm z_{\text{prod}}$;
- (2) $l_{\text{sup}}(x, \cdot)$ atteint son maximum en $z = 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$;
- (3) $l_{\text{sup}}(\mathbb{S}_n, 0) = \gamma_2$ et $l_{\text{sup}}([-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}] \times I_{\text{prod}}) \cap (\mathcal{U} \times I_{\text{prod}}) = \emptyset$.

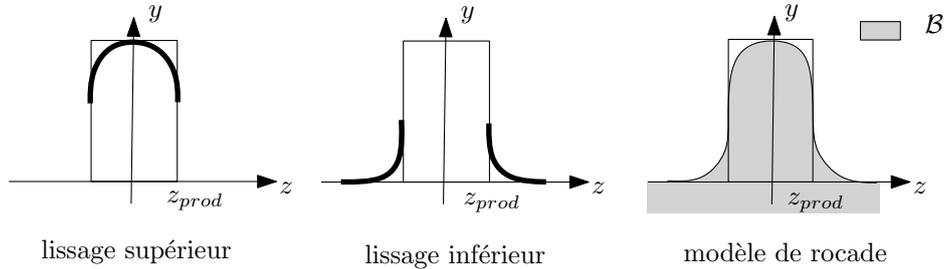


FIGURE 2. Lissages

Pour lisser la partie inférieure de la rocade, on choisit une fonction lisse

$$l_{\text{inf}} : [-z_{\text{max}}, -z_{\text{prod}}] \cup [z_{\text{prod}}, z_{\text{max}}] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

vérifiant les propriétés suivantes (voir figure 2) :

- (1) la restriction l_{inf}^+ de l_{inf} à $[z_{\text{prod}}, z_{\text{max}}]$ est strictement convexe, strictement décroissante sur $[z_{\text{prod}}, z_{\text{lissage}}]$;
- (2) l_{inf}^+ est tangente à la verticale à tout ordre en $z = z_{\text{prod}}$ et nulle sur $[z_{\text{lissage}}, z_{\text{max}}]$;
- (3) $l_{\text{inf}}^-(z) = l_{\text{inf}}^+(-z)$ où l_{inf}^- est la restriction de l_{inf} à $[-z_{\text{max}}, -z_{\text{prod}}]$.

Soient Z une zone de recollement, (\mathcal{A}, β) un feuilletage de rocade et $0 < z_{\text{prod}} < z_{\text{max}}$. Un *lissage* de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ est une variété à bord V' (voir figure 2) contenant V , telle que $V' \setminus V \subset Z$ et

$$V' = V \cup \{(x, y, z) : |z| \leq z_{\text{prod}}, y \leq l_{\text{sup}}(x, z)\} \cup \{(x, y, z) : |z| \geq z_{\text{prod}}, y \leq l_{\text{inf}}(z)\}$$

où l_{inf} et l_{sup} vérifient les propriétés données ci-dessus et $\sup(l_{\text{inf}}) < y_{\text{std}} < \inf(l_{\text{sup}})$. On appelle $\mathcal{B} = V' \cap Z$ un *modèle de rocade*.

LEMME 11.7 (Honda). *L'ensemble Γ_{lissage} des points de tangence entre le champ de Reeb et le bord d'un lissage de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ est une courbe lisse.*

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer le résultat pour le lissage du bord inférieur. Ce lissage a lieu pour $y \leq y_{\text{std}}$ et donc, dans cette zone, la structure de contact est $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$. Le champ de Reeb s'écrit

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Il est tangent à la surface de lissage si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin(x) & 0 & l'_{\text{inf}}(z) \\ \cos(x) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

soit si et seulement si $l'_{\text{inf}}(z) \cos(x) - \sin(x) = 0$.

Si $x \in]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, on obtient $x = \arctan(l'_{\text{inf}}(z)) + k\pi$ qui décrit une courbe lisse. Au voisinage de $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, on reparamètre la surface de lissage en $(y, L_{\text{inf}}(y))$ et la condition de tangence devient $\sin(x) - L'_{\text{inf}}(y) \cos(x) = 0$ soit $x = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)^{-1}(L'_{\text{inf}}(y)) + k\pi$ qui est une courbe lisse.

Considérons maintenant le lissage de la partie supérieure de la rocade. Hors de $([-\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}] \times [0, \infty]) \cap \mathcal{A}$, la démonstration utilisée pour le lissage inférieur s'applique. Dans $([-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}] \times [0, \infty]) \cap \mathcal{A}$, le champ de Reeb est $\frac{\partial}{\partial z}$ au voisinage du bord supérieur et donc les points de tangence sont exactement la courbe $\gamma_2 \times \{0\}$. Enfin, dans

$$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right] \times [y_{\beta}, \infty[\cap \mathcal{A}$$

on a

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\cos(x)f(x) - f'(x)\sin(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ -f'(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

et la condition de tangence s'écrit $l'_{\text{sup}}(z) \cos(x) + f'(x) = 0$. Or la fonction $s \mapsto \frac{f'(x)}{\cos(x)}$ est inversible d'inverse lisse sur $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ et on obtient donc une courbe lisse. Une démonstration analogue s'applique sur $([\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}] \times [y_{\beta}, \infty[\cap \mathcal{A}$. \square

En projection sur le plan des (x, z) , les points de tangence forment les courbes représentées dans la figure 3.

LEMME 11.8. *Soit (V', α) un lissage de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$. Quitte à perturber α de façon C^{∞} -petite au voisinage du bord supérieur $\gamma_2 \times \{0\}$ de $\mathcal{A} \times \{0\}$, le bord de V' est convexe.*

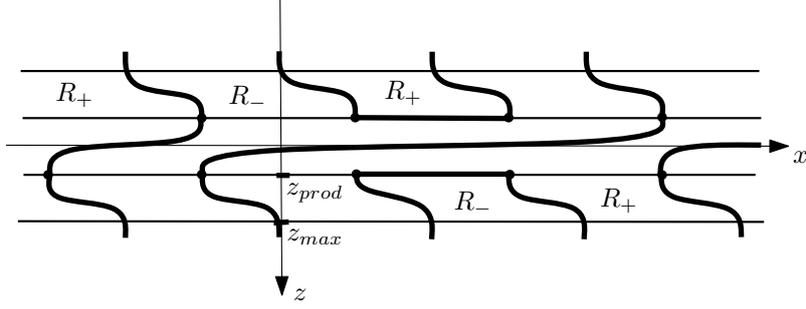


FIGURE 3. Points de tangence entre le champ de Reeb et la rocade

DÉMONSTRATION. Par le lemme 11.7, le champ de Reeb est tangent à $\partial V'$ le long d'une courbe lisse. Par le lemme 1.7, il suffit de montrer que le feuilletage caractéristique est sortant de R_+ , où R_+ est la surface sur laquelle le champ de Reeb est positivement transverse à $\partial V'$. Par construction, cette condition est vérifiée hors de zones de lissage de la rocade.

Dans la zone avec lissage inférieur, $\frac{\partial}{\partial x}$ dirige le feuilletage caractéristique et n'est jamais tangent à Γ_{lissage} : les paramétrages de Γ_{lissage} fournis dans la démonstration de 11.7 montrent que la composante sur $\frac{\partial}{\partial y}$ ou $\frac{\partial}{\partial z}$ de la dérivée est 1. Le feuilletage caractéristique pointe vers R_+ dans la zone non lissée et donc c'est aussi le cas dans la zone avec lissage inférieur.

Dans la zone avec lissage supérieur, hors du voisinage U de $U_0 = [-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}] \times [0, \infty[$ sur lequel $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$, le raisonnement précédent s'applique car Γ_{lissage} est transverse à $\frac{\partial}{\partial x}$. Dans U , la courbe Γ_{lissage} est $\gamma_2 \times \{0\}$ et est donc legendrienne. Pour obtenir un feuilletage caractéristique \mathcal{F} transverse à Γ_{lissage} , on ajoute à α un terme de la forme $\varepsilon(x, y)dx$ où ε est négatif, arbitrairement petit, nul en dehors d'un voisinage de $\gamma_2 \times \{0\} \cap U$ et indépendant de y dans un voisinage de $\gamma_2 \times \{0\} \cap U$. On note α_p l'équation perturbée ainsi obtenue. Pour ε assez petit, la courbe Γ_{lissage} n'est pas perturbée dans la zone où ε est indépendant de y et \mathcal{F} est transverse à Γ_{lissage} dans la zone où ε dépend de y . Dans la zone où ε est indépendant de y , la condition de transversalité de \mathcal{F} et Γ_{lissage} est équivalente à

$$\alpha_p(\Gamma_{\text{lissage}}) \cdot \Gamma'_{\text{lissage}} = \alpha(\Gamma_{\text{lissage}}) \cdot \Gamma'_{\text{lissage}} + \varepsilon(x)(\Gamma'_{\text{lissage}}) \neq 0.$$

Or ce réel est strictement positif car le premier terme est positif et strictement positif hors de $\gamma_2 \times \{0\} \cap U$ par le calcul de la démonstration du lemme 11.7 et le second strictement positif dans $\gamma_2 \times \{0\} \cap U$ car Γ_{lissage} est orienté comme bord de R_+ c'est-à-dire comme l'opposé de l'axe des x dans cette zone (voir figure 3). \square

1.3. Lissage et symétries. On présente ici les symétries du modèle qui seront utilisées par la suite pour étendre à toute la rocade des constructions ou des propriétés obtenues seulement sur une partie.

DÉFINITION 11.9. Un lissage (V', α) de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$ est dit *symétrique* si le bord de V' est symétrique (voir figure 4)

- par rapport au plan $z = 0$;
- par rapport au plan d'équation $z - z_{\text{prod}} - y = 0$ pour $z \geq z_{\text{prod}}$
- par rapport au plan d'équation $z + z_{\text{prod}} + y = 0$ pour $z \leq z_{\text{prod}}$.

Soit V' un lissage symétrique de $\mathcal{A} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$. On pose $z_{\text{std}} = z_{\text{prod}} + y_{\text{std}}$ et on considère la restriction notée \mathcal{B}_{std} de \mathcal{B} à $\mathbb{S}^n \times [-y_{\text{std}}, y_{\text{std}}] \times [-z_{\text{std}}, z_{\text{std}}]$. Dans \mathcal{B}_{std} l'équation de contact est standard et le lissage ne dépend pas de la variable x .

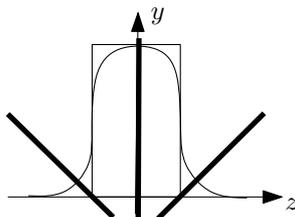


FIGURE 4. Plans de symétries d'un lissage symétrique

On pose

$$(22) \quad \sigma(x, y, z) = \left(-x + \frac{3\pi}{2}, z - z_{\text{prod}}, y + z_{\text{prod}} \right) \text{ si } z > 0$$

$$(23) \quad \sigma(x, y, z) = \left(-x + \frac{\pi}{2}, -z - z_{\text{prod}}, -y - z_{\text{prod}} \right) \text{ si } z < 0.$$

L'application σ vérifie les propriétés suivantes

- (1) $\sigma^* \alpha = -\alpha$;
- (2) σ transporte la courbe de découpage $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ de la surface $z = z_{\text{prod}}$ sur la courbe de découpage $x = (-k+1)\pi$ de la surface $y = 0$;
- (3) σ transporte la courbe de découpage $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ de la surface $z = -z_{\text{prod}}$ sur la courbe de découpage $x = -k\pi$ de la surface $y = 0$.

On note

$$(24) \quad \tau_k^+(x, y, z) = (x + k\pi, y, z) \text{ et } \tau_k^-(x, y, z) = (-x + (k+1)\pi, y, -z).$$

On a alors

$$\tau_k^+ \left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times [z_{\text{prod}}, z_{\text{std}}] \right) = \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times [z_{\text{prod}}, z_{\text{std}}]$$

$$\tau_k^- \left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times [z_{\text{prod}}, z_{\text{std}}] \right) = \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times [-z_{\text{std}}, -z_{\text{prod}}].$$

De plus, $(\tau_k^\pm)^* \alpha = (-1)^k \alpha$ et τ^\pm préserve donc la courbe Γ_{lissage} des points de tangence entre le champ de Reeb et le bord de V' .

2. Contrôle de l'application retour

Pour contrôler les nouvelles orbites périodiques du champ de Reeb lors d'un recollement de rocade, il faut contrôler l'application retour dans la rocade. Par ailleurs, pour obtenir une rocade pré-convexe et par la suite une rocade hyperbolique, on va perturber l'équation construite dans la section précédente. L'objectif de cette section est de donner une borne sur la taille de la perturbation de la structure de contact et sur z_{max} qui garantisse de bonnes propriétés de l'équation de contact. En particulier, on veut localiser de façon stable par petites perturbations les orbites de Reeb qui contribuent aux applications retour entre diverses surfaces et contrôler les temps de retour. Cette section est essentiellement technique. Elle peut être ignorée en première lecture.

2.1. Contrôle de l'application retour pour $y \in [0, y_{\text{std}}]$. Commençons par un contrôle dans la zone avec équation de contact standard. On fixe des réels strictement positifs $\lambda, y_{\text{std}}, y_h, \tau$ et z_{max} . On se place dans les coordonnées

$$(x, y, z) \in \mathbb{S}_n \times [0, y_{\text{std}}] \times I_{\text{max}} = \Omega$$

munies de la structure de contact $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$. On définit S_Z comme précédemment, on note

$$S_{\varepsilon,k} = \left[\frac{k\pi}{2} - \varepsilon, \frac{k\pi}{2} + \varepsilon \right] \times I_{\max}$$

et la surface $S_{\varepsilon,k}$ est incluse dans la surface S_y donnée par le contexte.

LEMME 11.10. *Il existe $\varepsilon_{stab} > 0$ tel que toute ε_{stab} -perturbation de α en norme C^∞ , les orbites parcourent un intervalle sur la coordonnée x de taille inférieure à $\frac{\lambda}{8}$ au cours de leur passage dans Ω .*

DÉMONSTRATION. Le temps de passage dans Ω est borné uniformément pour toutes les orbites. De plus, avant perturbation $R_x = 0$. \square

Le contrôle sur l'application retour sur S_Z recherché dans la définition de rocade hyperbolique (définition 10.6) tient compte de deux situations différentes. Les « petites » cordes de Reeb de S_Z restent dans la zone $y \leq y_{std}$ et contribuent à φ_0 . Les autres cordes de Reeb rencontrent $y = y_{std}$ et contribuent à φ_1 . La définition 11.11 et le lemme 11.12 permettent de contrôler l'application retour dans $\mathcal{B}^{\leq y_{std}}$ sur S_Z et entre S_y et $S_{y_{std}}$, pour $y \leq y_{std}$.

DÉFINITION 11.11. Une partie de Ω munie d'une équation de contact est dite à flot contrôlé par (λ, y_h, X, Y) si son flot de Reeb vérifie les propriétés suivantes (voir figure 5) :

- (1) la fonction (partielle) retour sur S_Z se décompose en applications définies d'un sous-ensemble de $S_{\frac{\lambda}{2}, 2k}$ dans $S_{\frac{\lambda}{2}, 2k}$ dont la coordonnée sur z est strictement décroissante pour k impair et strictement croissante pour k pair ;
- (2) pour tout $y \in [0, y_h]$, la fonction retour pour des temps positifs entre S_y et $S_{y_{std}}$ se décompose en applications d'un sous-ensemble de $X + 2k\pi \subset S_y$ dans $S_{\frac{\lambda}{2}, 4k+1} \subset S_{y_{std}}$;
- (3) pour tout $y \in [0, y_h]$, la fonction retour pour des temps positifs entre $S_{y_{std}}$ et S_y se décompose en applications d'un sous-ensemble de $S_{\frac{\lambda}{4}, 4k+3} \subset S_{y_{std}}$ dans $Y + 2k\pi \subset S_y$.

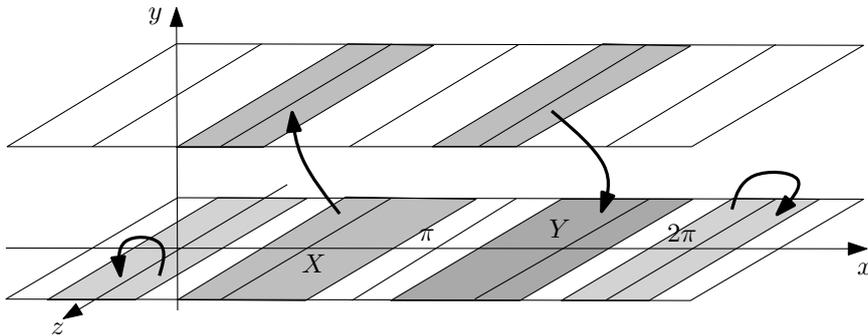


FIGURE 5. Applications retour

Le lemme suivant formalise les deux remarques suivantes. Les arcs de Γ_A reliant deux surfaces $y = \text{cst}$ sont des cordes de Reeb de ces surfaces et ce sont les seules si on prend $z_{\max} = 0$. On veut donc que l'application retour entre S_Z et $S_{y_{std}}$ soit induite par des cordes proches de ces arcs de Γ_A . Par ailleurs, sans perturbation, il

n'y a pas d'application retour sur S_Z . Cependant, la courbe de découpage de S_Z présente une situation dégénérée car le champ de Reeb est tangent à S_Z en ces points. On s'attend donc à ce que des petites perturbations créent une application retour sur S_Z mais on veut garantir que cette application reste localisée au voisinage de la courbe de découpage.

LEMME 11.12. *Il existe $\varepsilon_{stab} > 0$ et z_{max} tels que toute ε_{stab} -perturbation de α en norme C^∞ soit à flot de Reeb contrôlé par $(\lambda, y_h, S_{\frac{\lambda}{4},1}, S_{\frac{\lambda}{2},3})$. De plus, le temps passé par une orbite dans Ω est majoré par $2(y_{std} + z_{max})$.*

DÉMONSTRATION. Avant perturbation la champ de Reeb est

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

On choisit z_{max} assez petit pour que, pour tout $y \in [0, y_h]$, la fonction retour pour entre S_y et $S_{y_{std}}$ se décompose en applications d'un sous-ensemble de $S_{\frac{\lambda}{4},4k+1} \subset S_y$ dans $S_{\frac{\lambda}{4},4k+1} \subset S_{y_{std}}$ pour des temps positifs et en applications d'un sous-ensemble de $S_{\frac{\lambda}{4},4k+3} \subset S_{y_{std}}$ dans $S_{\frac{\lambda}{4},4k+3} \subset S_y$ pour des temps négatifs. Par le lemme 11.10, on vérifie les conditions 2 et 3 de la définition de flot contrôlé (définition 11.11). Pour une perturbation assez petite

- en dehors d'un voisinage de taille $\frac{\lambda}{2}$ autour des segments $x = k\pi$, la coordonnée sur $\frac{\partial}{\partial y}$ du champ de Reeb ne s'annule pas ;
- dans un voisinage de taille 2λ autour des segments $x = k\pi$, la coordonnée sur $\frac{\partial}{\partial z}$ du champ de Reeb ne s'annule pas.

Ainsi, R_y est de signe constant le long de toute orbite issue d'un point de

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi + \frac{\lambda}{2}, (k+1)\pi - \frac{\lambda}{2} \right] \times \{0\} \times I_{max}.$$

Une telle orbite n'est donc pas une corde de S_Z . Par conséquent, toute corde de S_Z a ses extrémités dans un voisinage de taille λ autour des segments $x = k\pi$ et est incluse dans un voisinage de taille $\frac{3\lambda}{2}$ d'après le lemme 11.10. Le long de la corde R_z est non nul, on connaît le sens de variation de la coordonnée z de l'application retour sur S_Z .

Comme toute orbite dans Ω a une coordonnée x qui varie au plus de $\frac{\lambda}{8}$ (lemme 11.10), le long d'une orbite on a soit $|R_y| \geq \frac{1}{2}$ soit $|R_z| \geq \frac{1}{2}$. \square

Si, de plus, l'équation de contact n'est pas perturbée au voisinage de $x = k\pi$, on peut garantir l'absence d'application retour sur S_Z ou $S_{y_{std}}$. Ainsi, la démonstration précédente s'adapte pour donner le résultat suivant.

LEMME 11.13. *Quitte à diminuer ε_{stab} et z_{max} , pour toute structure de contact ε_{stab} telle que de α_{stab} est ε_{stab} -proche de α en norme C^∞ dans $\mathbb{S}_n \times [y_h, y_{std}] \times I_{max}$ et telle que $\alpha_{stab} = \alpha$ dans*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right] \times [y_h, y_{std}] \times I_{max}$$

il n'y a pas de corde de Reeb de $S_{y_{std}}$ incluse $\mathbb{S}_n \times [y_h, y_{std}] \times I_{max}$.

La convexification va perturber fortement la structure de contact au voisinage de $\Gamma_{lissage}$ et donc potentiellement créer de nouvelles cordes de Reeb sur S_Z . Pour contrôler l'application retour après cette opération, il nous faut contrôler les cordes de Reeb de $\Gamma_{lissage}$.

LEMME 11.14. *Quitte à diminuer $\varepsilon_{stab} > 0$, il existe un voisinage $V_{lissage}$ de $\Gamma_{lissage}$ tel que, pour toute structure de contact ε_{stab} -proche de α en norme C^∞ , il n'existe de corde de Reeb entre deux composantes connexes V_1 et V_2 de $V_{lissage}$ que s'il existe k tel que*

$$\begin{aligned} V_1 &\subset \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max} \\ V_2 &\subset \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max} \end{aligned}$$

quitte à permuter V_1 et V_2 . De plus, ces cordes de Reeb sont incluses dans $S_{\frac{\lambda}{4}, 2k} \times [0, y_{std}]$ et orientées de la zone avec $z > 0$ vers la zone avec $z < 0$ pour k impair et de la zone avec $z < 0$ vers la zone avec $z > 0$ pour k pair.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ tel que les orbites issues de

$$\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times [z_{prod} - \varepsilon, z_{max}]$$

soient incluses dans

$$\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times \left[\frac{z_{prod}}{2}, z_{max} \right]$$

avant perturbation. On demande un résultat symétrique pour les coordonnées z négatives. Pour une perturbation assez petite, on peut supposer que toute orbite de Ω parcourt un intervalle en x de longueur au plus $\frac{\varepsilon}{2}$.

Choisissons un voisinage $V_{lissage}$ de $\Gamma_{lissage}$ de rayon inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. Toute composante connexe de $V_{lissage}$ est donc incluse dans

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, k\pi + \frac{\varepsilon}{2} \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$$

ou dans

$$\left[k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}.$$

Traisons le cas de la composante connexe incluse dans $\left[k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, k\pi + \frac{\varepsilon}{2} \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$ (l'autre cas se traite de façon symétrique). Les orbites issues de cette composante sont incluses dans $\left[k\pi - \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$. Donc une orbite atteignant une autre composante connexe de $\Gamma_{lissage}$ est dans $\left[k\pi - \varepsilon, k\pi + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$ ou dans $\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$. Par ailleurs, il ne peut pas y avoir d'orbite dans $\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times I_{max}$ reliant deux composantes connexes de $V_{lissage}$ car pour une perturbation assez petite les orbites issues de

$$\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times [z_{prod} - \varepsilon, z_{max}]$$

sont incluses dans

$$\left[k\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon, k\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \times [0, y_{std}] \times [0, z_{max}]$$

et l'énoncé analogue pour $z < 0$ est aussi vérifié. Enfin, pour une perturbation assez petite, R_z est non nul dans tous les $S_{\frac{\lambda}{2}, 2k} \times [0, y_{std}]$ et le signe de R_z détermine l'orientation des cordes de Reeb. \square

Le lemme 11.10 permet d'obtenir le résultat suivant.

LEMME 11.15. *Quitte à diminuer ε_{stab} et $V_{lissage}$ toute corde de Reeb reliant $V_{lissage}$ et S_Z est incluse dans $\left[(2k-1)\pi - \frac{\lambda}{4}, 2k\pi + \frac{\lambda}{4} \right]$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De même toute corde de Reeb reliant S_Z et $V_{lissage}$ est incluse dans $\left[2k\pi - \frac{\lambda}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{4} \right]$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.*

2.2. Contrôle dans la rocade.

LEMME 11.16. *Soit (\mathcal{B}, α) un modèle de rocade. Quitte à diminuer $\varepsilon_{stab} > 0$, pour toute équation α_{pert} qui est ε_{stab} -proche de α en norme \mathcal{C}^1 et toute perturbation $\partial\mathcal{B}_{pert}$ ε_{stab} -proche² de $\partial\mathcal{B}$ en norme \mathcal{C}^∞ , $\partial\mathcal{B}_{pert}$ est convexe pour α_{pert} . De plus si α_{pert} est ε_{stab} -proche de α en norme \mathcal{C}^∞ , la courbe de découpage est donnée par les points de tangence entre $\partial\mathcal{B}_{pert}$ et le champ de Reeb associé à α_{pert} .*

DÉMONSTRATION. La condition de contact et le critère de convexité sont des conditions ouvertes. De même, la condition de tangence reste vérifiée si $R_{\alpha_{pert}}$ est \mathcal{C}^1 -proche de R_α . \square

Après l'étude de la partie inférieure de la rocade ($y \leq y_{std}$), on s'intéresse maintenant à sa partie supérieure ($y \geq y_{std}$). Si on prend $z_{max} = 0$, la seule corde de $S_{y_{std}}$ est Γ_D . On s'attend donc à ce que, pour z_{max} assez petit et pour une petite perturbation de l'équation de contact, les cordes de $S_{y_{std}}$ restent proches de Γ_D .

LEMME 11.17. *Soient (\mathcal{A}, β) un feuilletage de rocade, S_Z une surface de recollement, $\tau > 0$ et $0 < \lambda < \frac{\pi}{4}$. Quitte à diminuer ε_{stab} et z_{max} , pour tout lissage de rocade et pour toute équation de contact ε_{stab} -proche de α , l'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans $\mathcal{B}^{\geq y_{std}}$ est définie d'un sous-ensemble de $[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}] \times I_{prod}$ dans un sous-ensemble de $[\frac{3\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}] \times I_{prod}$ et le temps de retour est majoré par θ_{max} .*

DÉMONSTRATION. On choisit $\varepsilon < \lambda$ tel que, dans les coordonnées (r, θ) fournies par la définition de feuilletage de rocade, $f|_{[\frac{3\pi}{2}-\varepsilon, \frac{3\pi}{2}+\varepsilon]} = \cos$. Quitte à choisir z_{max} assez petit, l'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans $\mathcal{B}^{\geq y_{std}}$ pour l'équation non perturbée a une source incluse dans $[\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{4}] \times I_{prod}$ et une image incluse dans $[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{4}] \times I_{prod}$. En effet sur $\mathcal{A} \times \{0\}$, la seule corde de $S_{y_{std}}$ est Γ_D . Pour toute perturbation assez petite, la source de l'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans $\mathcal{B}^{\geq y_{std}}$ est incluse dans $[\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}] \times I_{prod}$ et son but inclus dans $[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}] \times I_{prod}$.

De plus, avant perturbation, dans la zone dans laquelle l'application retour est définie, on a

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(r) \\ \cos(r) \end{pmatrix}.$$

Sans perturbation, le temps de retour est strictement majoré par θ_{max} . Pour une perturbation assez petite, ce résultat reste vérifié. \square

3. Modèle de rocade pré-convexe

Dans cette section on décrit la deuxième étape de la construction d'une rocade hyperbolique : la construction d'une rocade *pré-convexe*. Dans le modèle de rocade construit dans la section 1, l'équation de contact n'est pas adaptée au bord. Considérons la composante connexe Γ_0 de $\Gamma_{lissage}$ de coordonnées x dans $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Le long de Γ_0 , le champ de Reeb effectue un quart de tour entre $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial z}$ et pointe vers $\partial\mathcal{B}_-$ (voir figure 6). Pour obtenir une équation adaptée au bord, on va éliminer autant que possible les zones dans lesquelles le champ de Reeb est tangent à la courbe de découpage en le faisant pointer vers $\partial\mathcal{B}_+$ dans la partie supérieure de la rocade et vers $\partial\mathcal{B}_-$ dans la partie inférieure. Pour cela, on perturbe l'équation dans la partie supérieure de la rocade par une fonction k_{sup} et dans la partie inférieure par une fonction k_{inf} . On utilise des modèles analogues au modèle de perturbation permettant de passer de la forme (F1) à la forme (F2) dans le chapitre 8, section 2.1.

2. On voit la perturbation comme un graphe sur $\partial\mathcal{B}$.

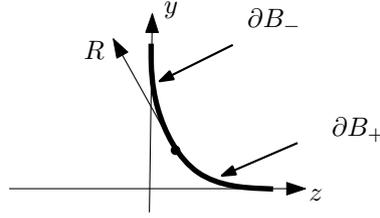


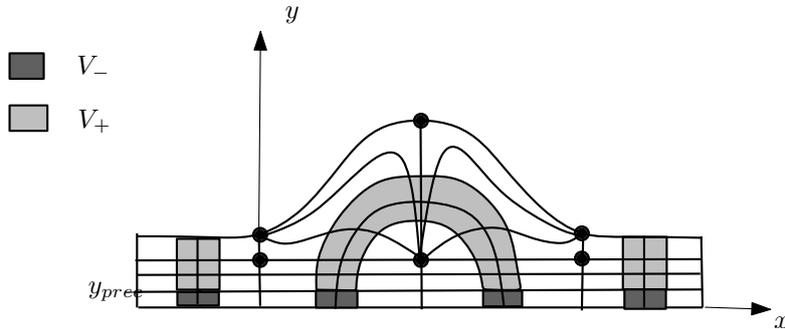
FIGURE 6. Situation concave

La perturbation explicite de la partie inférieure permettra de recoller une zone de convexification dans le chapitre suivant. La perturbation dans la partie supérieure permet de garantir que les images de certaines courbes horizontales de S_Z sur $\{y = y_{\text{std}}, z \geq \pi\}$ s'intersectent transversalement. Cette propriété sera essentielle pour obtenir le comportement décrit dans la figure 14 du chapitre 10.

Notons $y_{\text{lissage}} < y_{\text{std}}$ le réel strictement positif tel que le lissage du bord inférieur ait lieu pour $y \in [0, y_{\text{lissage}}]$. On peut supposer que $y_{\text{lissage}} < \frac{y_{\text{std}}}{2}$. Posons $\Gamma_A^+ = \Gamma_A \times \{z_{\text{prod}}\}$ et $\Gamma_A^- = \Gamma_A \times \{-z_{\text{prod}}\}$ et $\Gamma_A^\pm = \Gamma_A^- \cup \Gamma_A^+$. On utilise des notations analogues pour Γ_D . On note $y_{\text{prec}} = \frac{y_{\text{std}}}{2}$.

DÉFINITION 11.18. Une *perturbation pré-convexe* d'un modèle de rocade symétrique (\mathcal{B}, α_B) est la donnée de deux applications lisses $k_{\text{inf}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $k_{\text{sup}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes (voir figure 7) :

- (1) il existe un voisinage V_+ de $(\Gamma_A^\pm)^{\geq y_{\text{prec}}}$ et un voisinage V_- de $(\Gamma_A^\pm)^{\leq y_{\text{prec}}}$ tels que $k_{\text{sup}} = 1$ en dehors de V_+ et $k_{\text{inf}} = 1$ en dehors de V_- ;
- (2) $\frac{\partial k_{\text{sup}}}{\partial z} > 0$ au voisinage de Γ_A^+ et $\frac{\partial k_{\text{sup}}}{\partial z} < 0$ au voisinage de Γ_A^- ;
- (3) k_{sup} est indépendant de x au voisinage de $\Gamma_A \setminus \Gamma_D$ et indépendant de r au voisinage de Γ_D ;
- (4) $k_{\text{inf}}(x, y, z) = (1 - f_{\text{inf}}(y)\rho z)$ au voisinage de $\Gamma_D^+ \cap \{(x, y, z), x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$ où $\rho > 0$ et $f_{\text{inf}} : [0, y_{\text{std}}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction lisse, nulle au voisinage de 0 et pour $y \geq y_{\text{prec}}$, croissante sur $[0, y_\rho^-]$, constante égale à 1 sur $[y_\rho^-, y_\rho^+]$ et décroissante sur $[y_\rho^+, y_{\text{prec}}]$ avec $y_\rho^- < y_{\text{lissage}} < y_\rho^+$;
- (5) k_{sup} est τ_k^\pm invariante pour $y \in [0, y_{\text{std}}]$ et k_{inf} est τ_k^\pm invariante.

FIGURE 7. Voisinnages V_+ et V_- pour $z = \pm z_{\text{prod}}$

3. ρ est un réel choisi assez petit

On note $\eta(k_{\text{sup}})$ et $\eta(k_{\text{inf}})$ les bornes inférieures des rayons des intervalles centrés en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sur lesquels k_{sup} et k_{inf} ne dépendent pas de x ou r . Au voisinage de $\Gamma_A \setminus \Gamma_D$ on définit la 1-forme α_{prec} par

$$\alpha_{\text{prec}} = (k_{\text{sup}}k_{\text{inf}}) \sin(x)dy + (k_{\text{sup}} \circ \sigma)(k_{\text{inf}} \circ \sigma) \cos(x)dz$$

et au voisinage de Γ_D on pose

$$\alpha_{\text{prec}} = (k_{\text{sup}}k_{\text{inf}}) \sin(r)d\theta + (k_{\text{sup}} \circ \sigma)(k_{\text{inf}} \circ \sigma) \cos(r)dz$$

dans les coordonnées fournies par le lemme 11.4. La 1-forme α_{prec} prolonge l'équation de contact α en dehors de ces voisinages. C'est une équation de contact arbitrairement proche de α sur V pour k_{sup} et k_{inf} assez petits. On a $\sigma^*\alpha_{\text{prec}} = -\alpha_{\text{prec}}$ et $(\tau_k^\pm)^*\alpha_{\text{prec}} = (-1)^k\alpha_{\text{prec}}$ pour $y \in [0, y_{\text{std}}]$. Commençons par vérifier les tangences annoncées entre le champ de Reeb et le bord de la rocade pour une perturbation pré-convexe assez petite.

LEMME 11.19. *Soit \mathcal{B} un modèle de rocade, soit $\eta > 0$. Il existe ε_{inf} et ε_{sup} strictement positifs tels que pour toute perturbation pré-convexe $(k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$ avec $\eta(k_{\text{sup}}) \geq \eta$, $\eta(k_{\text{inf}}) \geq \eta$, $\|k_{\text{sup}}\| < \varepsilon_{\text{sup}}$ et $\|k_{\text{inf}}\| < \varepsilon_{\text{inf}}$, les points de tangence entre le champ de Reeb R_{prec} associé à α_{prec} et $\partial\mathcal{B}$ forment une courbe lisse Γ_{prec} . Le long de Γ_{prec} , R_{prec} pointe vers $\partial\mathcal{B}_+$ pour $y > y_{\text{prec}}$ et vers $\partial\mathcal{B}_-$ pour $y < y_{\text{prec}}$ où $\partial\mathcal{B}_+$ et $\partial\mathcal{B}_-$ sont les zones sur lesquelles le champ de Reeb est respectivement sortant et entrant.*

Les réels ε_{sup} et ε_{inf} dépendent respectivement du lissage du bord supérieur et du bord inférieur.

DÉMONSTRATION. D'après 11.7, les points de tangences entre le champ de Reeb et le bord de \mathcal{B} forment une courbe lisse pour l'équation de contact α . Comme la condition de tangence est ouverte, pour une perturbation assez petite de l'équation de contact, les points de tangences entre le champ de Reeb et le bord de \mathcal{B} forment toujours une courbe lisse.

Hors de $x = k\pi$ et $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, la paramétrisation de Γ_{lissage} donnée dans la preuve du lemme 11.7 permet de montrer que Γ_{lissage} a une composante sur $\frac{\partial}{\partial x}$ non nulle. La courbe Γ_{lissage} ne peut donc pas être colinéaire au champ de Reeb qui est contenu dans les plans $z = \text{cst}$.

On se place au voisinage de $x = k\pi$ et $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ pour $y < y_{\text{prec}}$. Par symétrie, il suffit de considérer le voisinage $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \times [0, y_{\text{prec}}] \times [0, z_{\text{max}}]$. Pour η fixé et pour toute perturbation assez petite, il suffit de vérifier la transversalité dans un voisinage dans lequel k_{inf} est indépendant de x . Le champ de Reeb est alors donné par

$$R_\alpha = \frac{1}{k_{\text{inf}}(y, z)} \begin{pmatrix} -\frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, z) \sin(x) \\ \sin(x) \\ k_{\text{inf}}(y, z) \cos(x) \end{pmatrix}.$$

La condition de tangence s'écrit

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, z) \sin(x) & 1 & 0 \\ \sin(x) & 0 & 1 \\ k_{\text{inf}}(y, z) \cos(x) & 0 & L'_{\text{inf}}(y) \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$k_{\text{inf}}(y, z) \cos(x) - L'_{\text{inf}}(y) \sin(x) = 0$$

où L_{inf} est le paramétrage du lissage inférieur en les variables (x, y) . Ainsi, Γ_{prec} est paramétrée par

$$y \mapsto \left(\left(\frac{\cos}{\sin} \right)^{-1} \left(\frac{L'_{\text{inf}}(y)}{k_{\text{inf}}(y, L_{\text{inf}}(y))} \right), y, L_{\text{inf}}(y) \right) = (x(y), y, z(y)).$$

La condition de tangence entre le champ de Reeb et Γ_{prec} implique

$$x'(y) \sin(x(y)) + \frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, z(y)) \sin(x(y)) = 0$$

soit

$$(25) \quad x'(y) + \frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, z(y)) = 0.$$

Or $\frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, z(y)) < 0$ et $x'(y)$ est positivement colinéaire à

$$-\frac{L''_{\text{inf}}(y)k_{\text{inf}}(y, L_{\text{inf}}(y)) - (L'_{\text{inf}}(y))^2 \frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial z}(y, L_{\text{inf}}(y)) - \frac{\partial k_{\text{inf}}}{\partial y}(y, L_{\text{inf}}(y))L'_{\text{inf}}(y)}{k_{\text{inf}}^2(y, L_{\text{inf}}(y))}$$

qui est du signe de $-L''_{\text{inf}}(y)$ et est donc négatif pour k_{inf} assez proche de 1. Ceci contredit la condition 25.

Intéressons nous au cas $y > y_{\text{prec}}$. Comme dans la situation précédente, pour une perturbation assez petite, il suffit de montrer que le champ de Reeb pointe vers $\partial\mathcal{B}_+$ le long de γ_{prec} dans la zone dans laquelle k_{sup} est indépendant de x . La condition de tangence s'écrit alors

$$(26) \quad k_{\text{sup}}(y, z) \cos(x) - L'_{\text{sup}}(y) \sin(x) = 0.$$

Ainsi, Γ_{prec} est paramétrée comme dans la paragraphe précédent en remplaçant k_{inf} par k_{sup} et L_{inf} par L_{sup} et la condition 26 devient

$$x'(y) + \frac{\partial k_{\text{sup}}}{\partial z}(y, z(y)) = 0.$$

Or $\frac{\partial k_{\text{sup}}}{\partial z}(y, z(y)) > 0$ et $x'(y)$ est du même signe que $-L''_{\text{inf}}(y)$, c'est-à-dire positif. Il n'y a donc pas de points de tangence. \square

Pour simplifier l'étude de flot de Reeb au voisinage de Γ_{prec} , on considère des courbes plus explicites et dont le flot passe au voisinage de Γ_{prec} . Soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma^0$ et γ^1 définies, pour tout $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$, par

$$\begin{aligned} \gamma_0(s) &= (s, -z_{\text{prod}}) \\ \gamma_1(s) &= (\pi - s, z_{\text{prod}}) \\ \gamma^0(s) &= (s + \pi, -z_{\text{prod}}) \\ \gamma^1(s) &= (2\pi - s, z_{\text{prod}}). \end{aligned}$$

On note γ_Z leur réunion et $S_R = [\frac{\pi}{2}, \pi] \times \{y_{\text{std}}\} \times I_{\text{prod}}$. Pour étudier l'application retour sur S_Z dans la rocade, on va s'intéresser aux applications retour entre S_Z et S_R et entre S_R et S_Z et les composer. On note δ_i et δ^i les images sur S_R de γ_i et γ^i .

DÉFINITION 11.20. Soit τ un réel strictement positif. Un *modèle de rocade pré-convexe* sur Z est la donnée de

$$(\mathcal{B}, \alpha, k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$$

où (\mathcal{B}, α) est un modèle de rocade symétrique sur Z et $(k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$ est une perturbation pré-convexe de \mathcal{B} tels qu'il existe des réels strictement positifs $\varepsilon_{S_R}, \varepsilon_{S_Z}$ et θ_{S_R} et une famille de pavés $V_{\Gamma_A} = V_x \times V_y \times [0, y_h]$ centrés en $(\Gamma_A^\pm)^{[0, y_h]}$ où $y_h = \frac{y_{\text{std}} + y_{\text{prec}}}{2}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) l'image de V_{Γ_A} par le flot de Reeb dans la rocade ne rencontre pas $S_{y_{\text{std}}}$;
- (2) $\text{dom}(k_{\text{inf}}) \cap (R_{\frac{\lambda}{2}} \times [0, \infty[) = \emptyset$;
- (3) l'image sur S_Z de $\Gamma_{\lambda_V} = \Gamma_{\text{prec}} \cap (R_{\frac{\lambda_V}{2}} \times [0, \infty[)$ est une courbe $\frac{\varepsilon_{S_Z}}{2}$ -proche de γ_Z où λ_V est le rayon minimal des intervalles V_x ;
- (4) $\left| \int_{\Gamma_{\lambda_V}} \alpha \right| < \tau$;

- (5) l'image sur S_R de toute courbe ε_{S_Z} -proche de γ_i ou γ^i , $i \in \{0, 1\}$ est ε_{S_R} -proche de δ_i ou δ^i ;
- (6) toutes les courbes ε_{S_R} -proches de δ_i et δ^j avec $i \in \{0, 1\}$ et $j \in \{0, 1\}$ s'intersectent en un unique point en formant un angle géométrique supérieur à θ_{S_R} ;
- (7) toutes les courbes ε_{S_R} -proches de δ_i ou δ^i avec $i \in \{0, 1\}$ forment un angle géométrique supérieur à θ_{S_R} avec les droites horizontales;
- (8) le temps de retour entre S_Z et S_R et entre S_Z et S_R est majoré par τ .

La condition 1 permet de fixer une zone ne contribuant pas à l'application retour, c'est dans V_{Γ_A} que l'on va effectuer les opérations imposées par la convexification au cours desquelles le flot de Reeb n'est plus contrôlé. La condition 3 justifie l'étude du flot de Reeb au voisinage de γ_Z à la place de l'étude au voisinage de Γ_{prec} . Le lemme suivant, qui garantit l'existence de modèles de rocade, est démontré dans la section 4.

LEMME 11.21. *Soient Z une surface de recollement, λ et τ des réels strictement positifs. Alors il existe un feuilletage de rocade β sur \mathcal{A} et un modèle de rocade pré-convexe $(\mathcal{B}, \alpha, k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$ construit à partir de ce feuilletage tels que*

- $\|k_{\text{sup}} - 1\|_{C^\infty} < \varepsilon_{\text{stab}}$ et $\|k_{\text{inf}} - 1\|_{C^\infty} < \varepsilon_{\text{stab}}$;
- z_{max} et $\varepsilon_{\text{stab}}$ vérifient les énoncés de la section 2 avec $y_h = \frac{y_{\text{std}} + y_{\text{prec}}}{2}$.

4. Existence d'une rocade pré-convexe

L'objectif de cette section est de démontrer le lemme 11.21.

CONSTRUCTION 11.22. Soient (\mathcal{A}, β) un feuilletage de rocade. Par le lemme 11.6, on peut supposer $\theta_{\text{max}} < \tau$. Par la proposition 11.4, il existe une équation de contact prolongeant α sur $\mathcal{A} \times [-z_{\text{max}}, z_{\text{max}}]$. On applique la section 2, pour obtenir des bornes sur z_{max} et $\varepsilon_{\text{stab}}$. On choisit $\eta < \frac{\lambda}{4}$.

Lissage et perturbation de la zone supérieure.

LEMME 11.23. *Pour tout k_{sup} assez proche de 1 et pour z_{max} assez petit, l'image de γ_Z sur S_R par le flot de Reeb associé à α_{sup} comprend quatre graphes sur I_{prod} en la variable z . Les images de γ_i et γ^j s'intersectent transversalement et le temps de retour est strictement majoré par τ . Les orbites qui contribuent à l'application retour sont incluses dans $\mathcal{A} \times I_{\text{prod}}$.*

DÉMONSTRATION. Pour λ et donc z_{max} assez petits et par les lemmes 11.12, 11.10 et 11.17 toutes les orbites qui contribuent à l'application retour entre S_Z et S_R sont incluses dans le voisinage sur lequel on a $\alpha = \sin(r)d\theta + \cos(r)dz$ et k_{sup} est indépendant de r . Avant perturbation, les images sur S_θ de γ_0 et γ_1 sont les courbes

$$\begin{aligned} \gamma_0^\theta : s &\longmapsto \left(\pi + s, \theta, -\theta \times \frac{\cos(s)}{\sin(s)} - z_{\text{prod}} \right) \\ \gamma_1^\theta : s &\longmapsto \left(2\pi - s, \theta, -\theta \times \frac{\cos(s)}{\sin(s)} + z_{\text{prod}} \right) \end{aligned}$$

dans les coordonnées (r, θ, z) . Quitte à diminuer z_{max} ces deux courbes sont des graphes en z car $\gamma_0^\theta(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, \theta, -z_{\text{prod}})$, $\gamma_1^\theta(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, \theta, z_{\text{prod}})$ et

$$(\gamma_{0,1}^\theta)'(s) = \frac{1}{\sin^2(s)}\theta.$$

Pour k_{sup} assez proche de 1, ces propriétés restent vérifiées. En effet, la condition sur la dérivée est immédiate, de plus, si on se place dans un voisinage de la rocade (muni du prolongement naturel d'équation de contact), $\varphi_t(\frac{\pi}{2}, \theta, z_{\text{prod}})$ a une coordonnée z

strictement supérieure à z_{prod} et l'autre extrémité de la courbe reste à l'extérieur de la rocade : on obtient donc un graphe sur I_{prod} .

Une démonstration analogue montre le résultat pour les images de γ^0 et γ^1 . Les images de γ_0 et γ_1 sont des graphes strictement croissants et les images de γ^0 et γ^1 sont des graphes strictement décroissants.

Pour achever la preuve, il reste à montrer que les images de γ_i et γ^j s'intersectent transversalement en un unique point. Par les sens de variation, il y a au plus un point d'intersection et en ce point l'intersection est transverse. Par ailleurs, ces graphes intersectent le segment $\{\frac{3\pi}{2}\} \times]-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}[$. En effet, dans un voisinage de la rocade, la coordonnées sur r de $\varphi_t(\frac{3\pi}{2}, \theta, z_{\text{prod}})$ devient strictement supérieure à $\frac{3\pi}{2}$ et il existe donc un point d'intersection avec le segment $r = \{\frac{3\pi}{2}\}$ dans S_R . Pour montrer que sa coordonnée z est dans $]-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}[$, on remarque qu'avant l'intersection avec le segment $r = \{\frac{3\pi}{2}\}$, la coordonnée en z du champ de Reeb le long de l'orbite est strictement négative.

Les propriétés sur les temps de retour se déduisent des lemmes 11.12 et 11.17 pour z_{max} , y_{std} et θ_{max} assez petits. Comme R_z est de signe constant le long des orbites, celles-ci sont incluses dans $\mathcal{A} \times I_{\text{prod}}$. \square

CONSTRUCTION 11.24. Soit $z_{\text{prod}} < z_{\text{max}}$, on choisit un lissage l_{sup} de la partie supérieure de la rocade. Soit k_{sup} une perturbation pré-convexe de la partie supérieure de la rocade telle $\|k_{\text{sup}} - 1\|_{C^\infty} < \min(\varepsilon_{\text{stab}}, \varepsilon_{\text{sup}})$ et vérifie la condition du lemme 11.23 et telle que $\eta(k_{\text{sup}}) \geq \eta$.

COROLLAIRE 11.25. Il existe ε_{S_R} , ε_{S_R} et θ_{S_R} tels que le modèle épaissi $\mathcal{A} \times]-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}[$ lissé supérieurement par l_{sup} et perturbé par k_{sup} vérifie les conditions 5, 6 et 7 de la définition 11.20.

Construction de V_{Γ_A} . Le lemme suivant permet d'obtenir un voisinage V_{Γ_A} dont le flot ne rencontre pas $S_{y_{\text{std}}}$ ainsi qu'une borne sur les perturbations de la structure de contact permettant de garantir les propriétés de V_{Γ_A} .

LEMME 11.26. Il existe $\varepsilon_\Gamma > 0$ et un voisinage V_{Γ_A} de $\Gamma_A^\pm \cap \{(x, y, z), y \in [0, y_h]\}$ inclus dans

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\lambda}{4}, \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\lambda}{4} \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times I_{\text{max}}$$

tels que pour toute perturbation α' de α_{sup} telle que $\|\alpha' - \alpha_{\text{sup}}\|_{C^\infty} < \varepsilon_\Gamma$, l'image par le flot de Reeb dans $\mathcal{A} \times [-z_{\text{max}}, z_{\text{max}}]$ de V_{Γ_A} ne rencontre pas $S_{y_{\text{std}}}$.

DÉMONSTRATION. Sur un voisinage de la rocade, pour $y > y_{\text{prec}}$, le champ de Reeb est donné par

$$R_\alpha = \frac{1}{k_{\text{sup}}(y, z)} \begin{pmatrix} -\frac{\partial k_{\text{sup}}}{\partial z}(y, z) \sin(x) \\ \sin(x) \\ k_{\text{sup}}(y, z) \cos(x) \end{pmatrix}.$$

On note φ_t son flot. La coordonnée z de $\varphi_t(\frac{\pi}{2}, y, z_{\text{prod}})$ est strictement supérieure à z_{prod} pour tout $t > 0$ et tout $y \in [y_{\text{prec}}, y_h]$. Il existe donc un voisinage V_0 de $\{\frac{\pi}{2}\} \times [0, y_h] \times z_{\text{prod}}$ dont le flot ne rencontre pas $S_n \times \{y_{\text{std}}\} \times [-z_{\text{prod}}, z_{\text{prod}}]$.

Quitte à restreindre V_0 et à considérer une perturbation assez petite, la propriété précédente reste vérifiée. Par symétrie, on effectue une construction analogue au voisinage des autres composantes connexes de Γ_A^\pm . \square

Lissage et perturbation de la zone inférieure.

LEMME 11.27. Il existe un lissage l_{inf} du bord inférieur de la rocade tel que l'image sur S_Z de la restriction Γ de Γ_{lissage} à $R_{\frac{\lambda_Y}{2}} \times [0, \infty[$ soit $\frac{\varepsilon_{S_Z}}{2}$ -proche de la restriction de γ à R_λ et tel que $|\int_\Gamma \alpha| < \tau$.

DÉMONSTRATION. Par la démonstration du lemme 11.7, Γ est paramétré par

$$\begin{aligned} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_V}{2}, \pi - \frac{\lambda_V}{2} \right] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \left(x, l_{\text{inf}} \left((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)) \right), (l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)) \right) \end{aligned}$$

et la projection sur S_Z est

$$x \longmapsto \left(x, 0, (l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)) - \tan(x) \times l_{\text{inf}} \left((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)) \right) \right)$$

et sa dérivée est

$$x \longmapsto \left(1, 0, -\frac{1}{\cos^2(x)} \times l_{\text{inf}} \left((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)) \right) \right)$$

d'où la première condition si on choisit l_{inf} assez petit.

Montrons maintenant la seconde condition, la dérivée de Γ est donnée par

$$x \longmapsto \left(1, \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{l''_{\text{inf}}((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)))}, \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{l''_{\text{inf}}((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)))} \right).$$

Par conséquent,

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_V}{2}}^{\pi - \frac{\lambda_V}{2}} \frac{1}{\cos^3(x)} \times \frac{1}{l''_{\text{inf}}((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x)))} dx.$$

Comme $\cos^3(x)$ est minoré, il suffit de montrer que pour tout $C > 0$, il existe un lissage l_{inf} tel que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_V}{2}, \pi - \frac{\lambda_V}{2}]$,

$$l''_{\text{inf}}((l'_{\text{inf}})^{-1}(\tan(x))) > C.$$

Cette condition se réécrit, pour tout $y \in [\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_V}{2}), \tan(\pi - \frac{\lambda_V}{2})]$,

$$l''_{\text{inf}}((l'_{\text{inf}})^{-1}(y)) > C.$$

On construit l_{inf} comme primitive d'une fonction lisse

$$f :]0, 1] \longrightarrow]-\infty, 0]$$

telle que

- f est strictement croissante ;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |f^{(k)}(x)| = \infty$;
- $\left| \int_0^1 f \right| = c$;
- $f'((f)^{-1}(y)) > C$ pour tout $y \in [\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_V}{2}), \tan(\pi - \frac{\lambda_V}{2})]$.

Et une telle fonction existe pour tous c et C strictement positifs. \square

CONSTRUCTION 11.28. On choisit l_{inf} donnée par le lemme ci-dessus et tel que $2y_{\text{lissage}} < y_{\text{std}}$. Soit k_{inf} tel que $\text{dom}(k_{\text{inf}}) \cap \left(R_{\frac{\lambda}{2}} \times [0, \infty[\right) = \emptyset$, $\eta(k_{\text{inf}}) \geq \eta$, $\|1 - k_{\text{inf}}\|_{C^\infty} < \min(\varepsilon_{\text{inf}}, \varepsilon_{\text{stab}}, \varepsilon_\Gamma)$ et $(k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$ soit une perturbation pré-convexe de (\mathcal{B}, α) .

Pour une perturbation assez petite, les propriétés de la courbe de découpage décrite dans le lemme 11.27 et les propriétés de γ_Z et δ_Z décrites dans le lemme 11.23 et le corollaire 11.25 restent vérifiées pour $\frac{\varepsilon_{S_Z}}{2}$, $\frac{\varepsilon_{S_R}}{2}$ et $\frac{\theta_{S_R}}{2}$. La construction précédente fournit donc un modèle de rocade pré-convexe.

Construction d'une rocade hyperbolique

L'objectif de ce chapitre est la démonstration du théorème 10.8 garantissant l'existence d'un modèle de rocade hyperbolique (V_B, α_B, λ) . C'est la partie la plus technique de la démonstration. La construction de ce modèle hyperbolique repose sur le modèle pré-convexe défini dans le chapitre 11. Il faut rendre l'équation de contact adaptée au bord de la rocade tout en contrôlant l'application retour sur la surface de recollement.

La rocade pré-convexe construite dans la proposition 11.21 est munie d'une équation de contact qui n'est pas adaptée au bord. On va construire une rocade hyperbolique à partir d'une rocade pré-convexe en rendant le champ de Reeb adapté au bord, tout en continuant à contrôler le flot de Reeb dans la rocade. Pour cela on va « convexifier » la rocade en étendant la variété dans un petit voisinage de la zone concave de la courbe de découpage.

Rappelons que, pour une rocade pré-convexe, il n'y a pas d'application retour dans la rocade en restriction à R_λ . Par conséquent c'est l'opération de convexification et la modification de (V_B, α_B) associée qui vont garantir l'existence d'une application retour sur R_λ à travers la rocade. Ainsi, comme la convexification a lieu au voisinage de la courbe de découpage, la seule partie du flot de Reeb dans la rocade (hors convexification) qui joue un rôle dans l'application retour sur R_λ est celle qui est définie au voisinage de l'image de la courbe de découpage (et donc de la courbe γ_Z par la définition de rocade pré-convexe).

Un modèle de rocade pré-convexe fournit

$$(27) \quad 0 < y_\rho^- < y_{\text{lissage}} < y_\rho^+ < y_{\text{prec}} < y_h < y_{\text{std}}$$

où l'équation de contact est standard sur $[0, y_{\text{std}}]$, y_{prec} est la limite entre les zones de perturbations par k_{sup} et par k_{inf} , y_{lissage} est la limite du lissage du bord inférieur, $y_h = \frac{y_{\text{prec}} + y_{\text{conv}}}{2}$ et pour $y \in [y_\rho^-, y_\rho^+]$ on a $k_{\text{inf}}(x, y, z) = 1 - \rho z$ au voisinage de la courbe de découpage. On note Γ_{prec} la courbe de points de tangence entre le champ de Reeb et la bord de la rocade. On pose

$$S_R = [\pi, 2\pi] \times \{y_{\text{std}}\} \times I_{\text{max}}.$$

On fixe aussi y_{int} tel que

$$(28) \quad y_{\text{prec}} < y_{\text{int}} < y_h.$$

Avant de contrôler l'application retour sur S_Z , on commence par contrôler l'application retour entre S_Z et S_R afin de ne traverser qu'une seule fois la future zone de convexification. La proposition suivante permet de garantir l'existence d'une équation de contact adaptée au bord avec retour contrôlé entre S_R et S_Z . Le contrôle cherché est décrit dans la figure 14 du chapitre 10.

PROPOSITION 12.1. *Soient ν, λ, τ, η et A des réels strictement positifs. Soit (\mathcal{B}, α) un modèle de rocade pré-convexe adapté aux paramètres précédents. Il existe \mathcal{B}' avec $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B} \subset S_Z \times]0, y_{\text{prec}}]$ et une équation de contact α' tels que*

- (1) $\alpha' = \alpha$ en dehors d'un voisinage de Γ_{prec} ;
- (2) \mathcal{B}' soit une variété de bord convexe avec α' adaptée au bord ;

- (3) $\mathcal{B}^{[0, y_{std}]}$ soit à flot contrôlé par (λ, y_h, X, Y) (voir définition 11.11);
- (4) il n'y ait pas d'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans $\mathcal{B}^{[0, y_{std}]}$;
- (5) l'application retour entre S_Z et S_R en restriction à R_λ pour des temps positifs se décompose en deux difféomorphismes : $\varphi_0 : R_0 \rightarrow Q_0$ et $\varphi_1 : R_1 \rightarrow Q_1$ où
- R_0 et R_1 sont des rectangles de fibres ν -horizontales et verticales avec $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda]$ et $[\pi + \lambda, \frac{3\pi}{2} - \lambda]$ comme base des fibrés verticaux;
 - Q_0 et Q_1 sont des rectangles de S_R de fibres horizontales et ε_{S_R} -proches de δ_0 et δ_1 avec I_{prod} comme base des fibrés horizontaux;
 - φ_0 et φ_1 préservent les fibres, $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ -dilatent les courbes A -verticales et φ_0^{-1} et φ_1^{-1} $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ -dilatent les courbes θ_{S_R} -éloignées de δ_0 et δ_1 ;
 - l'image par φ_0 et φ_1 de toute courbe A -verticale est ε_{S_R} -proche de δ_0 et δ_1 et l'image par φ_0^{-1} et φ_1^{-1} de toute courbe θ_{S_R} -éloignée de δ_0 et δ_1 est ν -horizontale;
 - le temps de retour entre S_Z et S_R est majoré par 4τ
- (6) l'application obtenue pour des temps négatifs se décompose en difféomorphismes $\varphi'_0 : R'_0 \rightarrow Q'_0$ et $\varphi'_1 : R'_1 \rightarrow Q'_1$ vérifiant des propriétés analogues.

La démonstration de la proposition 12.1 repose sur le procédé de convexification et suit ses étapes pas à pas : choix de coordonnées adaptées obtenues en suivant le flot de Reeb à partir d'une surface transverse puis modification de l'équation de contact dans les nouvelles coordonnées. Dans notre situation, cette construction est compliquée par le fait que la convexification doit être une construction locale et par les contraintes imposées sur l'application retour.

Dans la section 1, on montre comment cette proposition implique le théorème 10.8. La suite du chapitre est consacrée à la démonstration de la proposition 12.1. Pour démontrer cette proposition, on part d'une rocade pré-convexe et on détermine des coordonnées adaptées à la description de la convexification au voisinage de la courbe de découpage Γ_{prec} (section 2). Puis, on décrit le modèle de convexification dans ces nouvelles coordonnées (section 3). On montre ensuite pourquoi la construction précédente démontre bien le lemme 12.1 (section 4) et, dans la section 5, on justifie l'existence d'une paire de convexification dont la construction est une étape de la convexification. Enfin, dans la section 7, on démontre les lemmes nécessaires à la preuve du théorème 8.5 sur l'indice de Conley-Zehnder.

1. Existence d'une rocade hyperbolique

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème 10.8 à partir de la proposition 12.1.

Soient $K > 0$ et Z une zone de recollement munie d'une surface de recollement K -hyperbolique (S_Z, ε_Z) , ε -stable et (μ, ν, τ) -contrôlée. Soient A et η des réels strictement positifs. On applique le lemme 12.1, on va montrer que le modèle de rocade hyperbolique (B', α') obtenu est bien une rocade hyperbolique de paramètres (ν, τ, A, η) .

L'application retour sur S_Z se décompose à l'aide des applications ψ_1 et ψ_2 où ψ_1 est l'application retour dans la rocade tronquée en $S_{y_{std}}$ et ψ_2 est l'application retour obtenue à partir des orbites qui rencontrent $S_{y_{std}}$. Par la proposition 12.1 il n'y pas par d'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans la rocade tronquée. La composante ψ_2 s'obtient en composant l'application entre S_Z et $S_{y_{std}}$ pour des temps positifs, l'application retour sur $S_{y_{std}}$ dans $\mathcal{B}^{\geq y_{std}}$ et l'application entre $S_{y_{std}}$ et S_Z pour des temps positifs.

Les propriétés demandée à ψ_1 s'obtiennent directement par la proposition 12.1 via la définition de flot contrôlé. Par le lemme 11.17, l'application retour sur $S_{y_{std}}$

dans la partie supérieure de la rocade est définie d'un sous-ensemble de

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} \right] \times I_{\text{prod}}$$

dans un sous-ensemble de

$$\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{3\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} \right] \times I_{\text{prod}}.$$

Ainsi, par la proposition 12.1 et la définition de flot contrôlé, l'application retour dans la rocade pour les orbites qui rencontrent $S_{y_{\text{std}}}$ est définie d'un sous ensemble de X dans un sous-ensemble de Y .

Pour obtenir l'application retour en restriction à R_λ , on compose les difféomorphismes φ_i et $\varphi_j'^{-1}$ fournis par la proposition 12.1. Le lemme 10.11 permet alors de garantir les propriétés sur les ensembles de définition et la préservation des fibres. En particulier, les fibres horizontales de $\text{dom}(\varphi_{i,j})$ et $\text{im}(\varphi_{i,j})$ sont ν -horizontales car ce sont les images des fibres verticales de Q_i' et Q_i par les applications φ_i^{-1} et $\varphi_i'^{-1}$. Or ces fibres verticales sont θ_{S_R} -éloignées des courbes γ_j et γ^j ($j \in \{0, 1\}$). De plus l'image d'une courbe A -verticale par φ_i et φ_i' est ε_{S_R} -proche de γ^j ou γ_j ($j \in \{0, 1\}$) et ainsi la courbe image par $\varphi_j'^{-1}$ ou φ_j^{-1} est ν -horizontale. À chaque étape, la courbe est $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ -dilatée et donc l'application retour sur S_Z $\frac{1}{\eta}$ -dilata les courbes A -verticales. Enfin la propriété sur le temps de retour est obtenue en composant les propriétés des deux applications qui entrent en jeu dans la composition.

2. Choix de coordonnées adaptées

On obtient de nouvelles coordonnées en suivant le flot de Reeb à partir d'une surface Σ rencontrant transversalement le bord de la rocade le long de Γ_{prec} .

2.1. Description des nouvelles coordonnées.

CONSTRUCTION 12.2. Soit S_Z une surface de recollement. Soient ν, λ, τ, η et A des réels strictement positifs. On construit deux modèles de rocade pré-convexes $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ pour le même feuilletage de rocade par le lemme 11.21 tels que \mathcal{B}' prolonge \mathcal{B} et que pour $|z| \leq z_{\text{std}}$ et $0 \leq y \leq y_{\text{std}}$ la distance entre $\partial\mathcal{B}'$ et \mathcal{B} soit strictement positive. On peut supposer que le réel ε_{S_Z} associé aux modèles de rocades pré-convexes \mathcal{B} et \mathcal{B}' vérifie $\varepsilon_{S_Z} < \nu$.

La rocade pré-convexe qui sera utilisée par la suite pour construire le modèle hyperbolique est la rocade \mathcal{B} . La rocade \mathcal{B}' n'est présente que pour contrôler le flot de Reeb dans un petit voisinage de \mathcal{B} .

LEMME 12.3. *Il existe $\varepsilon'_{\text{stab}} > 0$ tel que pour toute perturbation de $\partial\mathcal{B}$ de taille inférieure à $\varepsilon'_{\text{stab}}$ en norme \mathcal{C}^∞ , l'équation de contact α_{prec} soit adaptée au bord perturbé pour $y \geq y_{\text{int}}$ (y_{int} est décrit par la condition 28).*

DÉMONSTRATION. On a $y_{\text{int}} > y_{\text{prec}}$ donc l'équation α_{prec} est adaptée au bord pour $y \geq y_{\text{int}}$. Comme cette condition est ouverte, elle est stable par petites perturbations. \square

Le procédé de convexification nécessite le choix de coordonnées adaptées au voisinage de la courbe de découpage Γ_{prec} . On va construire ces coordonnées au voisinage de la composante connexe Γ_0 de Γ_{prec} dans

$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \times [0, y_{\text{std}}] \times [0, z_{\text{std}}].$$

On utilisera ensuite les propriétés de symétries présentées dans la section 1.3 du chapitre 11.

LEMME 12.4. *Il existe une surface Σ munie de coordonnées*

$$(u, v) \in [u_{\min}, u_{\max}] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$$

transverse au champ de Reeb et au bord de la rocade le long de Γ_0 telle que

- (1) $\sigma(i_\Sigma(u, v)) = i_\Sigma(u_{\max} + u_{\min} - u, v)$ où i_Σ l'inclusion de Σ dans \mathbb{R}^3 ;
- (2) $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial z}$ pour y dans un voisinage de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$;
- (3) dans les coordonnées (t, u, v) obtenues en suivant le champ de Reeb à partir de Σ , on ait

$$\alpha_{\text{prec}} = dt + (1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v)dv.$$

On note y_Σ le réel tel que $(\frac{\pi}{2}, y_\Sigma) = i_\Sigma(u_{\max}, 0)$.

DÉMONSTRATION. Soit Σ une surface transverse à S le long de Γ_{prec} , égale au plan engendré par $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ pour y voisin de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$, σ -invariante et munie de coordonnées (u, v) vérifiant les propriétés suivantes :

- $i_\Sigma([-u_{\max}, u_{\max}] \times \{0\}) = \Gamma_{\text{prec}}$;
- pour y dans un voisinage de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$, on a $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial z}$;
- $\sigma(i_\Sigma(u, v)) = i_\Sigma(u_{\max} + u_{\min} - u, v)$;
- $i_\Sigma^* \alpha_{\text{prec}} = g(u, v)dv$ et $g(u, 0) = 1 - \rho z_{\text{prod}}$.

Par construction, $g(u, v) = 1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v$ pour y voisin de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$. En suivant le flot de Reeb à partir de Σ , on obtient des coordonnées (t, u, v) dans lesquelles

$$\alpha_{\text{prec}} = g(u, v)du + dt.$$

On considère l'équation de contact $\alpha_1 = (1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v)du + dt$ définie au voisinage de Γ_{prec} . Les équations α_{prec} et α_1 coïncident le long de Γ_{prec} et pour y voisin de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$. Par une méthode de Moser, on obtient une famille de difféomorphismes φ_s , $s \in [0, 1]$ définis au voisinage de Γ_{prec} et telle que $\varphi_1^* \alpha_1 = \alpha_{\text{prec}}$. Par construction, φ_1 est l'identité le long de Γ_{prec} et pour y dans un voisinage de $[y_\rho^-, y_\rho^+]$. De plus φ_1 préserve Σ . Le nouveau paramétrage de Σ donné par $\varphi_1^{-1} \circ i_\Sigma$ vérifie les conditions demandées dans l'énoncé. En particulier, la condition de symétrie par rapport à σ est vérifiée car $\sigma^* \alpha_{\text{prec}} = -\alpha_{\text{prec}}$ et $\sigma^* \alpha_1 = -\alpha_1$, ce qui implique que le générateur infinitésimal du flot X_s donné par la méthode de Moser vérifie $\sigma^* X_s = X_s$ et donc que $\varphi_1 \circ \sigma = \sigma \circ \varphi_1$. \square

On définit u_ρ^\pm et u_{lissage} comme coordonnées u dans Σ associées au point d'intersection entre Γ_0 et les surfaces $S_{y_\rho^\pm}$ et $S_{y_{\text{lissage}}}$. On note $\psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ le difféomorphisme de changement de coordonnées (t, u, v) vers (x, y, z) . Par construction $\sigma(\psi(t, u, v)) = \psi(-t, u_{\max} + u_{\min} - u, v)$. Soient u^\pm tels que $u_\rho^- < u^- < u^+ < u_\rho^+$. Quitte à restreindre le domaine de définition ψ est définie de \mathcal{U} dans \mathcal{V} et

- (1) $\mathcal{U} = I_t \times I_u \times I_v = [-t_{\max}, t_{\max}] \times [u_{\min}, u_{\max}] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$;
- (2) $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}'$;
- (3) \mathcal{V} est inclus dans $[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{8}, \pi + \frac{\lambda}{8}] \times [0, y_h] \times I_{\max}$ et $\mathcal{V} \subset V_{\text{lissage}}$ (voir lemme 11.14 pour la définition de V_{lissage}) ;
- (4) $\psi([-t_{\max}, t_{\max}] \times [u_{\text{lissage}}, u_{\max}] \times [-v_{\max}, v_{\max}]) \subset V_{\Gamma_A}$;
- (5) $\psi([-t_{\max}, t_{\max}] \times [u^-, u^+] \times [-v_{\max}, v_{\max}])$ est inclus dans la zone dans laquelle $\alpha = (1 - \rho z) \sin(x)dy + \cos(x)dz$.

FAIT 12.5. Pour tout $(t, u, v) \in I_t \times [u^-, u^+] \times I_v$, on a

$$\begin{aligned}\psi(0, u, v) &= \left(\frac{\pi}{2}, y_\Sigma - u_{\max} + u, z_{\text{prod}} + v \right) \\ \psi(t, u, v) &= \psi(t, 0, v) + (0, y_\Sigma - u_{\max} + u, 0) \\ \psi_x(t, u, v) &= \pi - \psi_x(-t, u, v) \\ \psi_z(t, u, v) &= \psi_z(-t, u, v) \\ \psi_y(-t, u, v) &= 2\psi_y(0, u, v) - \psi_y(t, u, v)\end{aligned}$$

On subdivise $[u_{\min}, u_{\max}]$ pour pouvoir convexifier au voisinage de u_{\min} tout en continuant de contrôler l'application retour dans R_λ . Il existe $u_{\min} < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5 < u_{\max}$ (voir figure 1) tels que

- (1) $\psi(I_t \times [u_5, u_{\max}] \times I_v) \subset V_{\Gamma_A}$;
- (2) $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}] \subset \psi_x(I_t \times [u_4, u_{\max}] \times I_v)$;
- (3) $[\frac{\pi}{2} + \frac{3\lambda}{4}, \pi - \frac{3\lambda}{4}] \subset \psi_x(I_t \times [u_3, u_4] \times I_v)$;
- (4) $[\pi - \frac{\lambda}{2}, \pi] \subset \psi_x(I_t \times [u_{\min}, u_1] \times I_v)$.

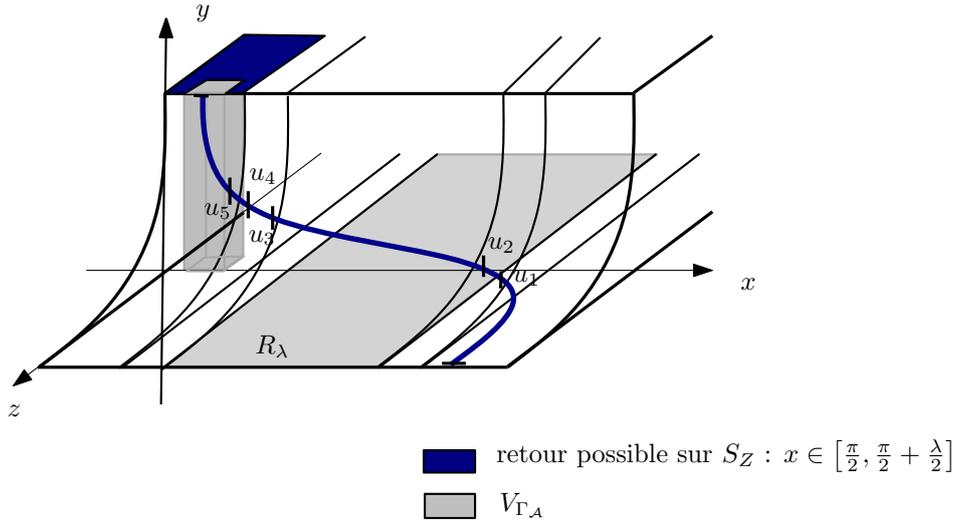


FIGURE 1. Réels u_i

On note $S_B = \psi^{-1}(\partial B)$.

2.2. Premières restrictions du domaines de définition des nouvelles coordonnées. Pour faciliter la construction d'une équation de convexification avec de bonnes propriétés, on commence par choisir \mathcal{U} assez petit. Les lemmes présentés dans cette section permettent de garantir la forme de l'image du bord de la rocade dans les nouvelles coordonnées, des propriétés sur les cordes de Reeb de \mathcal{U} et des propriétés de l'application induite par le flot de Reeb entre S_R , S_Z et des plans de la forme $t = \text{cst}$. Le contrôle des cordes de Reeb de \mathcal{U} permettra de garantir que les orbites de Reeb ne passent pas plusieurs fois dans la même zone de convexification et donc d'étudier leur comportement. Le contrôle de l'application retour entre S_R , S_Z et les plans $t = \text{cst}$ est la première étape dans la décomposition de l'application retour entre S_R et S_Z permettant d'isoler les passages dans la zone de convexification.

LEMME 12.6. *Quitte à restreindre \mathcal{U} , $S_{\mathcal{B}}$ est une surface lisse, incluse dans $\dot{I}_t \times I_u \times [0, v_{\max}]$. Sa restriction au plan $u = \text{cst}$ est une courbe lisse composée de deux graphes sur $[0, v_{\max}]$ qui rencontrent la droite d'équation $t = 0$ en $v = 0$, l'un positif et strictement croissant, l'autre négatif et strictement décroissant (voir figure 2). De plus, dans $[-t_{\max}, t_{\max}] \times [u^-, u^+] \times [-v_{\max}, v_{\max}]$, $S_{\mathcal{B}}$ est u -invariante et symétrique par rapport au plan $t = 0$.*

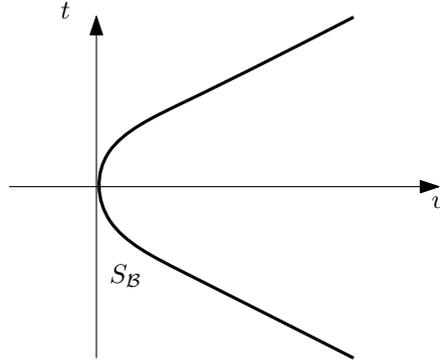


FIGURE 2. Surface $S_{\mathcal{B}}$

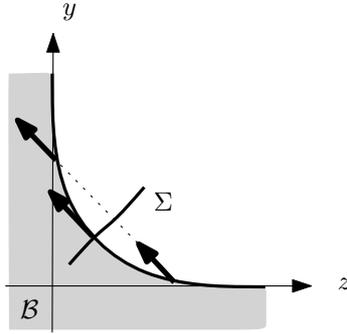
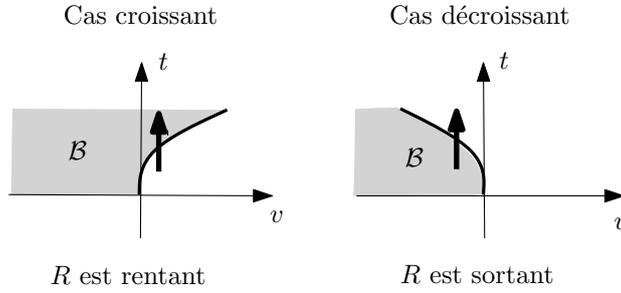
REMARQUE 12.7. Dans les coordonnées (t, u, v) , σ s'écrit $(t, u, v) \mapsto (-t, u_{\max} + u_{\min} - u, v)$. Cette application laisse $S_{\mathcal{B}}$ invariante.

DÉMONSTRATION. Par construction, $S_{\mathcal{B}}$ est une surface lisse, contenant $\{0\} \times [u_{\min}, u_{\max}] \times \{0\}$ et tangente au plan engendré par $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ le long de cette courbe (le champ de Reeb est tangent à $S_{\mathcal{B}}$ le long de la courbe de découpage). Par conséquent $S_{\mathcal{B}}$ est bien transverse aux plans $u = \text{cst}$ quitte à prendre \mathcal{U} assez petit. Par ailleurs, quitte à diminuer v_{\max} , on peut toujours garantir que $S_{\mathcal{B}}$ est inclus dans $\dot{I}_t \times I_u \times I_v$.

Dans les coordonnées (t, u, v) , le champ de Reeb vérifie $R_{\alpha_{\text{prec}}} = \frac{\partial}{\partial t}$. Dans \mathcal{V} , en dehors de Γ_0 , $\partial\mathcal{B}$ est transverse à $\frac{\partial}{\partial t}$, donc son image est composée de deux graphes en les coordonnées (u, v) . Comme le long de $\Gamma_0 \simeq \{0\} \times [u_{\min}, u_{\max}] \times \{0\}$, $S_{\mathcal{B}}$ est tangent à $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle$, un de ces graphes est strictement positif et l'autre strictement négatif. Par transversalité on obtient le même résultat dans les plans $u = \text{cst}$. Le graphe positif correspond aux points pour lesquels $R_{\alpha_{\text{prec}}}$ est rentrant et le graphe négatif aux points pour lesquels $R_{\alpha_{\text{prec}}}$ est sortant (voir figure 3). Or $S_{\mathcal{B}}$ est aussi un graphe sur les coordonnées (t, u) et en dehors de Γ_0 ce graphe n'est jamais tangent à $\frac{\partial}{\partial t}$. Donc, dans un plan $u = \text{cst}$, il est strictement croissant ou strictement décroissant sur $]0, t_{\max}]$. Comme $\{0\} \times [u_{\min}, u_{\max}] \times [-v_{\max}, 0]$ est inclus dans \mathcal{B} , la condition de transversalité garantit que ce graphe est croissant (voir figure 4). On obtient donc que $S_{\mathcal{B}}$ est inclus dans $\dot{I}_t \times I_u \times [0, v_{\max}]$. La u -invariante et la symétrie proviennent du fait 12.5. \square

LEMME 12.8. *Quitte à restreindre \mathcal{U} , il n'y a pas de corde de Reeb sur $\partial\mathcal{U}$ à l'extérieur de \mathcal{U} .*

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer qu'une composante connexe de Γ_{prec} dans $\mathcal{B}^{<y_{\text{prec}}}$ n'a pas de corde de Reeb. En effet, hors de la zone de perturbation, les orbites de Reeb sont incluses dans les plans $x = \text{cst}$ avec $R_z \neq 0$ et Γ_{prec} n'intersecte qu'une fois ces plan. Par symétrie, dans la zone de perturbation on se contente d'étudier le voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$ pour $z > 0$. Dans ce voisinage, $R_x > 0$ et $R_y > 0$. Or, la projection de Γ_{prec} sur le plan (y, x) est strictement décroissante.

FIGURE 3. Propriétés de transversalité du champ de Reeb et de S_B FIGURE 4. Croissance du graphe associé à S_B

Supposons par l'absurde qu'il existe une famille de cordes de Reeb $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ hors d'un voisinage \mathcal{U}_n de diamètre inférieur à $\frac{1}{n}$. Alors, par compacité, les extrémités de γ_n et sa période convergent (le temps passé par les orbites dans la rocade est majoré). Or, comme dans les coordonnées (t, u, v) le champ de Reeb est $\frac{\partial}{\partial t}$, pour n assez grand la période de ces cordes est minorée par la borne t_{\max} associé à \mathcal{U}_1 . Donc le passage à la limite précédent construit une corde de Reeb de Γ_{prec} ce qui est impossible. \square

Par régularité du flot, quitte à restreindre \mathcal{U} on peut supposer que

$$(29) \quad C_\psi = \|\psi(t, u, v) - \psi(0, u, 0)\|_\infty + \|d\psi(t, u, v) - d\psi(0, u, 0)\|_\infty = o(1).$$

Pour contrôler l'application retour dans la rocade, on commence par étudier l'application induite entre S_R et S_Z . Comme les orbites issues de R_λ qui contribuent à cette application rencontrent la zone de convexification, on la décompose en application retour entre S_Z ou S_R et des plans $t = \text{cst}$ dans les nouvelles coordonnées.

LEMME 12.9. *Quitte à restreindre \mathcal{U} , il existe $\varepsilon_B > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout $t_\Sigma \in I_t$, les applications φ_- et φ_+ induites par le flot de Reeb entre $\Sigma = \{(t, u, v), t = t_\Sigma\}$ et S_Z et entre Σ et S_R vérifient :*

- (1) *l'image par φ_- de toute courbe ε_B -horizontale dans $[u_2, u_3] \times I_v$ est ν -horizontale dans R_λ ;*
- (2) *l'image par φ_-^{-1} de toute courbe A -verticale dans R_λ est B -verticale dans $[u_2, u_3] \times I_v$;*
- (3) *l'image par φ_+ de toute courbe ε_B -horizontale dans $[u_4, u_5] \times I_v$ est ε_{S_R} -proche de δ_1 ;*

- (4) l'image par φ_+^{-1} de toute courbe θ_{S_R} -éloignée de δ_i est B -verticale dans $[u_4, u_5] \times I_v$;
- (5) le temps de retour entre S_Z et Σ est majoré τ et le temps de retour entre S_R et Σ est majoré par 2τ .

On note L un majorant de la norme de $d\varphi_\pm$ et $d\varphi_\pm^{-1}$ obtenue en utilisant les coordonnées (x, y, z) sur S_R et S_Z et les coordonnées (t, u, v) pour Σ pour définir les normes.

DÉMONSTRATION. Par la définition de rocade pré-convexe (définition 11.20), l'image par le flot de Reeb de toute courbe ε_{S_Z} -proche de γ_1 est ε_{S_R} -proche de δ_1 . De plus, l'image sur S_R de $\Gamma_{\text{prec}} \cap \left(R_{\frac{\lambda_V}{2}} \times [0, \infty[\right)$ est $\frac{\varepsilon_{S_Z}}{2}$ -proche d'une restriction de γ_1 . (Le réel λ_V est associé à la rocade pré-convexe, voir définition 11.20).

Par définition

$$\Gamma_{\text{prec}} \cap \psi(I_t \times [u_4, u_5] \times I_v) \subset \Gamma_{\text{prec}} \cap \left(R_{\frac{\lambda_V}{2}} \times [0, \infty[\right).$$

Par le lemme 11.12 toutes les orbites de Reeb qui contribuent à l'application retour sur S_R d'une courbe ε_{S_Z} -proche de γ_1 sont issues d'un point dans $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} \right] \times I_{\text{max}}$. De plus, d'après le lemme 11.15, la projection de $\Gamma_{\text{prec}} \cap \psi(I_t \times [u_4, u_5] \times I_v)$ sur S_Z atteint des points de coordonnées x supérieures à $\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}$ pour des points de coordonnée u proche de u_4 . Comme les orbites issues de points de coordonnée u proche de u_5 sortent de la rocade (par définition de V_{Γ_A}), la projection de $\Gamma_{\text{prec}} \cap \psi(I_t \times [u_4, u_5] \times I_v)$ sur S_R rencontre toutes les cordes définissant l'application retour de $\Gamma_{\text{prec}} \cap \left(R_{\frac{\lambda_V}{2}} \times [0, \infty[\right)$ sur S_R .

Choisissons ε_B pour que les courbes ε_B -proches de $\Gamma_{\text{prec}} \cap \psi(I_t \times [u_4, u_5] \times I_v)$ se projettent sur des courbes ε_{S_Z} -proches de γ_1 . On prend \mathcal{U} assez petit pour que toutes les droites parallèles à l'axe des t dans $I_t \times [u_4, u_5] \times I_v$ soient ε_B -proches de $\Gamma_{\text{prec}} \cap (I_t \times [u_4, u_5] \times I_v)$. On obtient alors le point 1 car $\varepsilon_{S_Z} < \nu$ et le point 3.

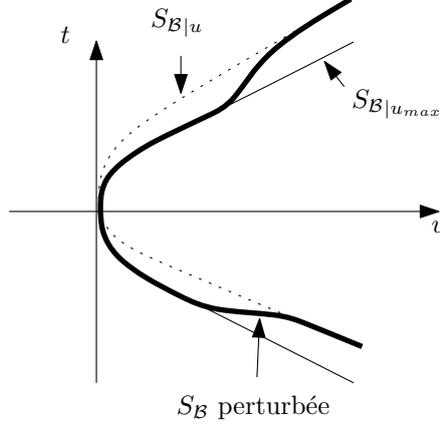
Par le point 3, l'image d'une courbe A -verticale n'est pas ε_B -horizontale et donc il existe B tel que ces courbes soient toutes B -verticales. On obtient alors le point 2. Le point 4 se montre de la même manière.

La propriété 5 sur les temps de retour entre S_Z et Σ est une conséquence du lemme 11.12. Le temps de retour entre Σ et S_R découle des lemmes 11.12 et 11.17. \square

CONSTRUCTION 12.10. On perturbe le bord de \mathcal{B} (voir figure 5) pour garantir l'existence de $v_0 \in]0, v_{\text{max}}[$ tel que sur $[0, v_0] \subset I_v$, on ait $S_{\mathcal{B}|u} = S_{\mathcal{B}|u_{\text{max}}}$ et que le champ de Reeb sorte de $\partial\mathcal{B}_+$, rentre dans $\partial\mathcal{B}_-$ et pointe vers $\partial\mathcal{B}_-$ le long de Γ_{prec} (ce sont les conditions au bord garanties par le lemme 11.19 avant perturbation de $\partial\mathcal{B}$). Par le lemme 12.6, il n'est pas nécessaire de perturber $S_{\mathcal{B}}$ dans la zone $u \in [u_{\text{min}}, u_1]$ et dans la zone $u \in [u_5, u_{\text{max}}]$. On note \mathcal{B} la nouvelle rocade. Quitte à diminuer la taille de \mathcal{U} , la perturbation est de taille inférieure à $\varepsilon_{\text{stab}}$ et $\varepsilon'_{\text{stab}}$ fournis par la section 2 du chapitre 11 et le lemme 12.3. Dans toute la suite on restreint $I_v = [-v_0, v_0]$ (et on pose $v_{\text{max}} = v_0$).

3. Description de la convexification

Lors de la convexification, on recolte une variété à bord dans un voisinage de la partie concave de la courbe de découpage. Dans cette section, on va décrire la partie ajoutée dans les coordonnées (t, u, v) . Pour cela, il faut fixer le nouveau bord de la variété et le prolongement de l'équation de contact.

FIGURE 5. Perturbation de la surface S_B

3.1. Modèle de perturbation du bord de la rocade. La convexification a lieu au voisinage de la zone concave de la rocade. Hors d'un voisinage du bord de la zone concave, la convexification suit la construction décrite dans [18] (présentée dans la section 2 du chapitre 1) et au voisinage du bord on interpole entre le modèle concave convexifié et le modèle convexe. Dans la zone d'interpolation le nouveau bord de la rocade est un graphe en les coordonnées (x, y) .

Soit \mathcal{H} l'ensemble des fonctions lisses

$$h : \left[\frac{\pi}{2} - x_{\max}^h, \frac{\pi}{2} + x_{\max}^h \right] \times [y_{\rho}^-, y_h] \rightarrow \mathbb{R}$$

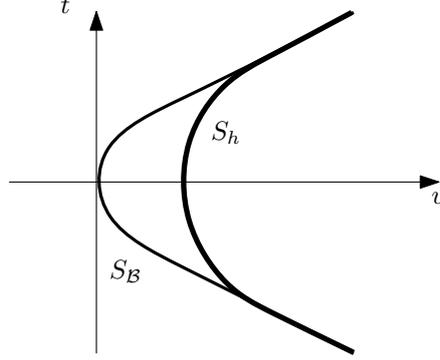
vérifiant les propriétés suivantes

- (1) $\|h\|_{C^\infty} < \varepsilon_{\text{stab}}$ et $\|h'\|_{C^\infty} < \varepsilon'_{\text{stab}}$ (voir section 2 du chapitre 11 et lemme 12.3);
- (2) $h = 0$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{2} \pm x_{\max}^h$ et de $y = y_h$;
- (3) $h(-x, y) = h(x, y)$;
- (4) h est indépendant de y pour $y \in [y_{\rho}^-, y_{\text{int}}]$;
- (5) $\tilde{S}_h = \{(x, y, z_{\text{prod}} + h(x)), x \in [\frac{\pi}{2} - x_{\max}^h, \frac{\pi}{2} + x_{\max}^h], y \in [y_{\rho}^-, y_{\text{conv}}]\}$ est inclus dans \mathcal{V} .
- (6) pour $y \in [y_{\rho}^-, y_{\text{int}}]$, h est croissante pour $x < 0$, décroissante pour $x > 0$ et constante au voisinage de 0.

On note S_h l'image de \tilde{S}_h dans les coordonnées (t, u, v) , $z_h = z_{\text{prod}} + \max(h)$ et x_{plat}^h le réel maximal tel que h soit constante sur $[\frac{\pi}{2} - x_{\text{plat}}^h, \frac{\pi}{2} + x_{\text{plat}}^h]$. Le minimum de S_h sur l'axe des v est atteint pour $t = 0$ et vaut $\max(h) = v_h$ (voir figure 6). De plus, l'ensemble \mathcal{H} est non vide. Soit $v_{\mathcal{H}} = \sup\{\max(h), h \in \mathcal{H}\}$. Par construction $v_{\mathcal{H}} > 0$ et pour tout $0 < v < v_{\mathcal{H}}$ il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $\max(h) = v$. Enfin, pour $\max(h)$ fixé, on peut rendre x_{plat}^h arbitrairement petit.

LEMME 12.11. *La surface S_h est u -invariante. De plus, dans les plans $u = \text{cst}$, elle est composée de deux graphes sur $[v_h, v_{\max}]$ nuls en v_h , lisses sur $]v_h, v_{\max}[$, symétriques, l'un positif et strictement croissant, l'autre négatif et strictement décroissant.*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 11.17, les points de tangences entre le champ de Reeb et la surface \tilde{S}_h forment une courbe lisse. Par la forme du champ de Reeb cette courbe est le segment $\{\frac{\pi}{2}\} \times [y_{\rho}^-, y_{\text{conv}}] \times z_h$. Ainsi le champ de Reeb est

FIGURE 6. Surface S_h

sortant de \tilde{S}_h pour tout $x < \frac{\pi}{2}$ et rentrant pour tout $x > \frac{\pi}{2}$ (\tilde{S}_h est orienté comme le bord de la rocade). On utilise des arguments analogues à ceux de la preuve du lemme 12.6 pour conclure. \square

On prolonge la surface S_h dans les coordonnées (t, u, v) par translation. Par abus de langage, on note toujours S_h la surface obtenue. Par symétrie, cette surface se recolle à l'image de \tilde{S}_h par σ . En effet, tout point de S_h au voisinage de u_{\max} s'écrit $(l_{\pm}(v), u, v)$ où l_{\pm} sont les graphes définis dans le lemme 12.6. Par conséquent,

$$\sigma(\psi(l_{\pm}(v), u, v)) = \psi(l_{\mp}(v), u_{\max} + u_{\min} - u, v).$$

La restriction sur la taille de \mathcal{U} fournie par le lemme suivant permet de garantir des propriétés du changement de variables qui seront utilisées pour étudier les « petites » cordes de Reeb de S_Z .

LEMME 12.12. *Il existe $t'_{\max} < t_{\max}$, $v'_{\max} < v_{\max}$, $u_{\lambda} < u_{\text{lissage}}$, $\Delta > 0$ et v_{Δ} tels que*

- (1) $0 < v_{\Delta} < v'_{\max}$ et v_{Δ} est arbitrairement petit ;
- (2) $[\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} + \lambda] \subset \psi_x(I'_t \times [u_{\lambda}, u_{\max}] \times I'_v)$;
- (3) pour tous points $p = (t, u, v)$ et $p' = (t', u', v')$ dans $I_t \times [u_{\lambda}, u_{\max}] \times I_v$ avec $t' - t > \Delta$ et $u' \leq u$, on a $\psi_y(p) < \psi_y(p')$ et $\psi_x(p') - \psi_x(p) \leq \frac{\lambda}{12}$;
- (4) les plans $t = \pm\Delta$ intersectent S_0 pour $v \leq v_{\Delta}$.

La condition 3 est la condition permettant d'étudier les petites cordes de Reeb. La condition 2 fournit le domaine d'application de l'étude. La condition 4 garantit que si p_e et p_s sont sur S_B et vérifient $v \geq v_{\Delta}$ et $v' \geq v_{\Delta}$ alors $t' - t > \Delta$ et le point 3 s'applique. Dans toute la suite, on va s'attacher à ne pas perturber α_{pert} pour $v \leq v_{\Delta}$.

DÉMONSTRATION. On suppose que λ est choisi assez petit pour garantir que $1 - \sin(\frac{\pi}{2} + \lambda) < \frac{1}{8}$. Fixons une borne pour v_{Δ} . On part de $t'_{\max} = t_{\max}$ et $v'_{\max} = v_{\max}$ et on les réduit progressivement. On note I'_t et I'_v les intervalles $[-t'_{\max}, t'_{\max}]$ et $[-v'_{\max}, v'_{\max}]$. Quitte à diminuer t'_{\max} et v'_{\max} on suppose qu'il existe $u_{\lambda} < u_{\text{lissage}}$ tel que

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}\right] \subset \psi_x(I'_t \times [u_{\lambda}, u_{\max}] \times I'_v) \subset \left[\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} + \lambda\right].$$

On choisit Δ assez petit pour que, quitte à restreindre t'_{\max} et v'_{\max} , on ait

- $t'_{\max} = 4\Delta$;
- $v'_{\max} < \frac{\Delta}{8M}$ où $M = \left\| \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial \psi_x}{\partial v} \right\|_{\infty}$;

- $v'_{\max} < \frac{\lambda}{24M}$;
- $t'_{\max} < \frac{\lambda}{48M}$;
- v'_{\max} est inférieur à la borne fixée pour v_{Δ} ;
- les plans d'équation $t = \pm\Delta$ intersectent $S_{\mathcal{B}}$ pour $v \leq v_{\max}$.

Alors, pour tout $(t, u, v) \in [0, t'_{\max}] \times [u_{\lambda}, u_{\max}] \times [-v'_{\max}, v'_{\max}]$,

$$\psi_y(0, u, v) + t \sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) \leq \psi_y(t, u, v) \leq \psi_y(0, u, v) + t$$

et

$$\psi_y(0, u, 0) - v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \right\|_{\infty} \leq \psi_y(0, u, v) \leq \psi_y(0, u, 0) + v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \right\|_{\infty}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi_y(t', u', v') - \psi_y(t, u, v) &\geq \psi_y(0, u', 0) - \psi_y(0, u, 0) - 2v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \right\|_{\infty} \\ &\quad + \Delta + t' (\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) - 1) \\ &\geq 0 - \frac{\Delta}{4} + \Delta - \frac{\Delta}{2} \\ &\geq \frac{\Delta}{4} > 0. \end{aligned}$$

De façon analogue on obtient

$$\begin{aligned} \psi_x(0, u, 0) - v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_x}{\partial v} \right\|_{\infty} - 2t'_{\max} \left\| \frac{\partial k_{\inf}}{\partial z} \right\|_{\infty} &\leq \psi_x(t, u, v) \\ \psi_x(t, u, v) &\leq \psi_x(0, u, 0) + v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_x}{\partial v} \right\|_{\infty} + 2t'_{\max} \left\| \frac{\partial k_{\inf}}{\partial z} \right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\psi_x(p') - \psi_x(p) \leq \psi_x(0, u', 0) - \psi_x(0, u, 0) + 2v'_{\max} \left\| \frac{\partial \psi_x}{\partial v} \right\|_{\infty} + 4t'_{\max} \left\| \frac{\partial k_{\inf}}{\partial z} \right\|_{\infty}$$

or $\psi_x(0, u', 0) - \psi_x(0, u, 0) \leq 0$. \square

CONSTRUCTION 12.13. En appliquant le lemme 12.12, on construit $t'_{\max} < t_{\max}$, $v'_{\max} < v_{\max}$, $u_{\lambda} < u_{\text{issage}}$, $\Delta > 0$ et v_{Δ} tels que $v_{\Delta} < v_{\mathcal{H}}$. On choisit ensuite $h_0 \in \mathcal{H}$ tel que $v_{\Delta} < \max(h) < v_{\max}$ et tel que le plan d'équation $v = v'_{\max}$ intersecte S_{h_0} hors de l'image de la zone plate de \tilde{S}_{h_0} .

Le lemme suivant fournit une taille de perturbation de l'équation de contact qui garantit la transversalité de \tilde{S}_h et du champ de Reeb hors de la zone plate centrale.

LEMME 12.14. *Soient $(\mathcal{B}, \alpha, k_{\text{sup}}, k_{\text{inf}})$ une rocade pré-convexe et $h \in \mathcal{H}$. Il existe $\varepsilon_{\text{pert}}^h$ tel que pour toute perturbation $\varepsilon_{\text{pert}}^h$ -proche de α_{prec} en norme \mathcal{C}^1 le champ de Reeb soit transverse à \tilde{S}_h pour tout x tel que $x_{\text{plat}}^h \leq |x - \frac{\pi}{2}| \leq x_{\text{max}}^h$.*

DÉMONSTRATION. Le champ de Reeb associé à α_{prec} est transverse à \tilde{S}_h pour $x_{\text{plat}}^h \leq |x - \frac{\pi}{2}| \leq x_{\text{max}}^h$ donc ce résultat est stable par petites perturbations. \square

3.2. Modèle de convexification. On construit le modèle de convexification pour $y \in [y_{\rho}^-, y_{\text{conv}}]$, on interpole avec le modèle convexe pour $y \in [y_{\text{conv}}, y_{\text{int}}]$ et de fait disparaître la partie ajoutée pour $y \in [y_{\text{int}}, y_h]$ (voir les équations 27 et 28 pour les définitions des différents réels). Dans cette section, on construit une perturbation de l'équation de contact qui prolonge α_{prec} dans \mathcal{V} . Soit $z_0 > 0$, on pose

$$\begin{cases} \Phi_{z_0}(z) = \exp\left(-\frac{1}{z-z_0}\right) & \text{si } z > z_0 \\ \Phi_{z_0}(z) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les coordonnées (x, y, z) pour $y \in [y_{\rho}^-, y_{\rho}^+]$, l'équation de contact perturbée d'un modèle pré-convexe s'écrit au voisinage de la courbe de découpage

$$\alpha_{\text{prec}} = k_{\text{inf}}(z) \sin(x) dy + \cos(x) dz$$

avec $k_{\text{inf}}(z) = 1 - \rho z$. On modifie l'équation en

$$(30) \quad \alpha_{\text{conv}} = k_{\text{conv}}(z) \sin(x) dy + \cos(x) dz$$

avec $k_{\text{conv}}(z) = k_{\text{inf}}(z) + A\Phi_{z_0}(z)$ où A est un réel strictement positif.

Le modèle décrit ci-dessus est bien adapté à l'interpolation avec la zone convexe $y > y_{\text{prec}}$ car il est explicite dans les coordonnées (x, y, z) . En revanche dans les coordonnées (t, u, v) ce n'est pas exactement un modèle de convexification (au sens de [18]). La définition 12.15 décrit un modèle de convexification un peu affaibli et la proposition 12.16 garantit que l'on peut mettre bout à bout ces deux modèles tout en garantissant que l'équation est adaptée au bord.

DÉFINITION 12.15. Soit J_u tel que $[u_1, u_5] \subset J_u \subset I_u$. Deux fonctions

$$f : I_t \times J_u \times I_v \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$g : I_t \times J_u \times I_v \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

forment une *paire de convexification* pour \mathcal{B} si

- (1) $f = 1$ et $g(t, u, v) = 1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v$ au voisinage de $\partial\mathcal{B}$ et pour $v \geq v'_{\text{max}}$;
- (2) f et g sont indépendantes de u pour $u \in [u_1, u_5]$;
- (3) $\frac{\partial f}{\partial v} \geq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial v} > 0$ au voisinage de $(0, v_h)$;
- (4) dans les plans $u = \text{cst}$ pour u dans un voisinage de $[u_1, u_5]$ le champ de vecteurs $X_g = \left(-\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial t}\right)$ est sortant de S_h pour $t < 0$, tangent à S_h pour $t = 0$ et rentrant pour $t > 0$ (voir figure 7).

PROPOSITION 12.16. Si les réels strictement positifs ρ et C_ψ sont assez petits, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}$, il existe $\varepsilon_{z_0}(h) > 0$ et tel que pour tout ρ_0 assez petit et tout $z_h - \varepsilon_{z_0}(h) < z_0 < z_h$, il existe une équation de contact α et (f, g) une paire de convexification sur $J_u = [u_-, u_{\text{max}} + u_{\text{min}} - u_-]$ vérifiant les propriétés suivantes

- (1) le champ de Reeb vérifie $R_s \geq 0$, R est sortant de S_h pour $t < 0$, entrant pour $t > 0$ et tangent et pointant vers la zone $t < 0$ en $t = 0$;
- (2) $\sigma^* \alpha = -\alpha$;
- (3) $\alpha = \alpha_{\text{prec}}$ pour $v \geq v'_{\text{max}}$ et $v \leq v_\Delta$;
- (4) $\alpha = f(t, u, v) dt + g(t, u, v) du$ sur $I_t \times J_u \times I_v$;
- (5) dans un voisinage de $\{\frac{\pi}{2}\} \times [y_{\text{conv}}, y_\rho^+] \times \{z_{\text{prod}}\}$ on a

$$\psi^{-1*} \alpha = k_{\text{conv}}(z) \sin(x) dy + \cos(x) dz$$

$$\text{avec } k_{\text{conv}}(z) = k_{\text{inf}}(z) + A\Phi_{z_0}(z) \text{ et } k'_{\text{conv}}(z_h) = \rho_0.$$

REMARQUE 12.17. On a $\|k_{\text{conv}}\|_{C^1} \leq \rho_0$.

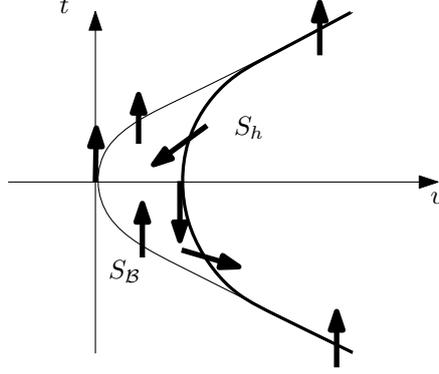
La section 5 est consacrée à la démonstration de la proposition 12.16.

3.3. Perturbation de la convexification. L'équation de contact donnée par la proposition 12.16 est bien adaptée au bord mais ne permet pas de garantir les conditions sur l'application induite par le flot de Reeb.

On note $\Sigma_\pm = \{(\pm t_{\text{max}}, u, v), u \in I_u, v \in I_v\}$ et Φ l'application induite par le flot de Reeb de α_{conv} entre Σ_- et Σ_+ .

PROPOSITION 12.18. Soient f et g données par le lemme 12.16. Quitte à perturber α au voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$, on peut supposer que la structure de contact obtenue vérifie, en plus des propriétés du lemme 12.16, les propriétés suivantes

- (1) Φ envoie toute courbe B verticale de Σ_- dans $[u_2, u_3] \times I_v$ sur une courbe ε_B horizontale de Σ_+ dans $[u_4, u_5] \times I_v$;

FIGURE 7. Surface S_h et champ de Reeb

- (2) Φ envoie toute courbe B -verticale de Σ_+ dans $[u_4, u_5] \times I_v$ sur une courbe ε_B -horizontale de Σ_- dans $[u_2, u_3] \times I_v$;
- (3) Φ et Φ^{-1} $\frac{L^2}{\eta}$ -dilatent les courbes B -verticales de $[u_2, u_3] \times I_v$ et $[u_4, u_5] \times I_v$ respectivement ;
- (4) le temps de retour de $(u, v) \in [u_2, u_3] \times I_v$ est inférieur à τ .

Cette proposition sera démontrée dans la section 6.

CONSTRUCTION 12.19. On applique le lemme 12.16 avec $\rho_0 \leq \varepsilon_{\text{pert}}^h$ puis le lemme 12.18.

3.4. Prolongement de la convexification. Pour obtenir une nouvelle variété de contact à bord, il faut décrire le comportement de la structure de contact entre le bord de la rocade non convexifiée et \hat{S}_h pour $y \in [y_{\text{conv}}, y_{\text{std}}]$.

CONSTRUCTION 12.20. Pour $y \in [y_{\text{conv}}, y_{\text{std}}]$, considérons la 1-forme

$$\alpha = \alpha_{\text{prec}} + Al(y)\Phi_{z_0}(z) \sin(x)dy$$

où l est décroissante, $l(y) = 1$ pour y proche de y_{conv} et $l(y) = 0$ pour $y \in [y_{\rho}^+, y_{\text{int}}]$. La 1-forme α est bien une équation de contact par le lemme 11.16 et l'étape de construction 12.19, de plus elle se prolonge à toute la variété par α_{prec} . On prolonge cette convexification aux autres zones à convexifier en utilisant les symétries décrites dans la section 1.3 du chapitre 11.

On note $\mathcal{B}_{\text{conv}}$ la variété obtenue et α_{conv} la structure de contact associée. On appelle *zone de convexification* le fermé $\mathcal{C} = \mathcal{B}_{\text{conv}} \setminus \hat{\mathcal{B}}$. On appelle *zone de perturbation* et on note \mathcal{P} la zone de $\mathcal{B}_{\text{conv}}$ dans laquelle $\alpha_{\text{conv}} \neq \alpha_{\text{prec}}$. Dans les coordonnées (x, y, z) au voisinage de Γ_0 , l'ensemble \mathcal{P} est décrit par l'équation $z \geq z_0$. Dans les coordonnées (t, u, v) , l'ensemble \mathcal{P} est entre S_B et S_h et ses coordonnées v vérifient $v_{\Delta} < v < v'_{\text{max}}$ (par la condition 3 de la proposition 12.16 et par la construction 12.13 qui garantit $v_{\Delta} < \max(h)$).

COROLLAIRE 12.21 (Corollaire du lemme 12.12). *Soit γ une orbite de Reeb qui intersecte la zone de perturbation. On suppose que γ entre dans \mathcal{C} en un point $p_e = (x_e, y_e, z_e)$ tel que $x_e \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{4}]$ et $z_e > 0$. Alors le point de sortie de \mathcal{C} , noté $p_s = (x_s, y_s, z_s)$, vérifie $x_s \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{3}]$ et $y_s > y_e$.*

DÉMONSTRATION. Si γ rencontre la zone de perturbation alors par la condition 3 de la proposition 12.18 et par définition de v_{Δ} on a $t_s - t_e \geq \Delta$, $p_e \in I'_t \times I_u \times I'_v$ et $p_s \in I'_t \times I_u \times I'_v$. De plus $R_u \geq 0$ et donc $u_s - u_e \geq 0$. On peut donc appliquer le lemme 12.12. \square

Par symétrie, on déduit des versions du corollaire précédent au voisinage de chaque extrémité de Γ_{prec} .

4. La construction précédente convient

Dans cette section, on démontre la proposition 12.1.

L'équation de contact est adaptée au bord. Comme les hypothèses des lemmes 11.16 et 11.19 sont vérifiées, en dehors de \mathcal{P} et de la courbe de découpage, le champ de Reeb est bien transverse à $\partial\mathcal{B}_{\text{conv}}$ (la perturbation pré-convexe, et les perturbations de $\partial\mathcal{B}$ sont de taille inférieures à $\varepsilon_{\text{stab}}$). Par définition de perturbation pré-convexe, hors de \mathcal{C} , le champ de Reeb est tangent à $\partial\mathcal{B}_{\text{conv}}$ le long de Γ_{prec} et pointe vers $(\partial\mathcal{B}_{\text{conv}})_+$.

Par symétrie, il reste à montrer que le champ de Reeb est tangent à la courbe de découpage et pointe vers $\partial(\mathcal{B}_{\text{conv}})_+$ le long de celle-ci dans $\partial\mathcal{B}_{\text{conv}} \cap \mathcal{C}$ au voisinage de Γ_0 .

- Pour $y \geq y_{\text{int}}$ on a $\alpha_{\text{conv}} = \alpha_{\text{prec}}$ et $\|h\|_{\mathcal{C}^\infty} < \varepsilon'_{\text{stab}}$. Par le lemme 12.3 on obtient le résultat.
- Pour $y \leq y_{\text{conv}}$ et $z \leq y_{\text{conv}} + z_{\text{prod}}$, on se place dans les coordonnées (t, u, v) et le lemme 12.16 permet de conclure.
- Pour $y \in [y_{\text{conv}}, y_{\text{int}}]$ et $x_{\text{plat}}^h \geq |x - \frac{\pi}{2}|$, comme $\|\alpha_{\text{conv}} - \alpha_{\text{prec}}\| < \varepsilon_{\text{pret}}^h$ le lemme 12.14 permet de conclure.
- Pour $y \in [y_{\text{conv}}, y_{\text{int}}]$ et $|x - \frac{\pi}{2}| < x_{\text{plat}}^h$, on a, par la construction 12.20,

$$\alpha_{\text{conv}} = ((1 - f_{\text{inf}}(y)\rho z)k_{\text{sup}}(z) + Al(y)\Phi_{z_0}(z)) \sin(x)dy + \cos(x)dz$$

et h est constante et vaut $h(0)$. Dans cette zone, R_z est positivement colinéaire à

$$(k_{\text{inf}}(z)k_{\text{sup}}(z) + Al(y)\Phi_{z_0}(z)) \cos(x),$$

donc R_z est nul seulement pour $x = \frac{\pi}{2}$, positif pour $x < \frac{\pi}{2}$ et négatif pour $x > \frac{\pi}{2}$. Les points de tangence entre le champ de Reeb R associé à α_{conv} et \tilde{S}_h sont donc donnés par l'équation $x = \frac{\pi}{2}$. De plus, le long de cette courbe, R_x est positivement colinéaire à

$$-f_{\text{inf}}(y)\rho + Al(y)\Phi'_{z_0}(z_h)$$

qui est minoré par $-\rho + A\Phi'_{z_0}(z_h) > 0$ pour $y \leq y_{\text{prec}}$ ($k_{\text{sup}} = 1$) et positivement colinéaire à

$$k'_{\text{sup}}(z_h) + cg(y)\Phi'_{z_0}(z_h)$$

qui est strictement positif pour $y \geq y_{\text{prec}}$ ($k_{\text{inf}} = 1$). Le champ de Reeb pointe donc vers $\partial(\mathcal{B}_{\text{conv}})_+$;

- Par symétrie, on obtient les propriétés de la zone $z \leq y_{\text{conv}} + z_{\text{prod}}$.

Par conséquent l'équation α_{conv} est adaptée au bord.

Application retour dans la rocade tronquée en $S_{y_{\text{std}}}$. Soit γ une orbite qui contribue à l'application retour dans la rocade tronquée. Si γ ne rencontre pas la zone de perturbation \mathcal{P} , alors, par le lemme 11.12, γ relie dans la rocade les points $p_e = (x_e, z_e)$ et $p_s = (x_s, z_s)$ avec $x_e \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$, $x_s \in [k\pi - \frac{\lambda}{2}, k\pi + \frac{\lambda}{2}]$ et $z_s < z_e$.

On suppose maintenant que γ rencontre la zone de perturbation. On note p_e^S et p_s^S les points d'entrée et de sortie de S_Z . Par symétrie, on peut supposer que γ rencontre la composante connexe de \mathcal{P} associée à Γ_0 en premier. On note p_e et p_s les points d'entrée et de sortie de la zone de convexification \mathcal{C} .

Si γ ne rencontre pas d'autre composante connexe de \mathcal{P} alors, par le lemme 11.15, après le point p_s , γ est inclus dans $[\pi - \frac{\lambda}{4}, \pi + \frac{\lambda}{4}] \times [0, y_{\text{std}}] \times I_{\text{max}}$. Donc $x_s \in [\pi - \frac{\lambda}{4}, \pi + \frac{\lambda}{4}]$ et $x_e^S \in [\pi - \frac{\lambda}{4}, \pi + \frac{\lambda}{4}]$. Par le corollaire 12.21, $x_e \in [\pi - \frac{\lambda}{3}, \pi + \frac{\lambda}{3}]$

et $z_e > z_s$. Comme $R_z < 0$, on obtient que $z_e^S > z_e > z_s > z_s^S$. De plus par le lemme 11.10, $x_e^S \in [\pi - \frac{\lambda}{2}, \pi + \frac{\lambda}{2}]$.

Si γ rencontre \mathcal{P} après le point p_s , alors par les lemmes 11.14 et 12.8, γ rencontre la composante connexe associée à $[\pi, \frac{3\pi}{2}] \times [0, y_{\text{std}}] \times [-z_{\text{std}}, 0]$. On note p'_e et p'_s les points d'entrée et de sortie de cette composante connexe. Entre p_s et p'_e , γ est inclus dans $[\pi - \frac{\lambda}{4}, \pi + \frac{\lambda}{4}] \times [0, y_{\text{std}}] \times I_{\text{max}}$ (par le lemme 11.14) et donc $x_s \in [\pi - \frac{\lambda}{4}, \pi + \frac{\lambda}{4}]$ d'où, par le corollaire 12.21, $x_e \in [\pi - \frac{\lambda}{3}, \pi + \frac{\lambda}{3}]$ et $z_e > z_s$ ainsi par le lemme 11.10, $x_e^S \in [\pi - \frac{\lambda}{2}, \pi + \frac{\lambda}{2}]$. Comme γ ne rencontre pas \mathcal{P} avant p_e et que $R_z < 0$, on obtient $z_e^S > z_e > z_s > z'_e$. En appliquant le corollaire 12.21, on obtient que $x'_s \in [\pi - \frac{\lambda}{3}, \pi + \frac{\lambda}{3}]$ et $z'_e > z'_s$. Comme γ ne rencontre pas \mathcal{P} après p'_s (par le lemme 11.14) et que $R_z < 0$, on obtient $z_e^S > z_e > z_s > z'_e > z'_s > z_s^S$ et $x_s^S \in [\pi - \frac{\lambda}{2}, \pi + \frac{\lambda}{2}]$ (par le lemme 11.10).

Par conséquent, la condition 1 de la définition de flot contrôlé 11.11 associée à la condition 3 de la proposition 12.1 est vérifiée.

Application induite entre S_Z et $S_{y_{\text{std}}}$. On se place dans $\mathcal{B}_{\text{conv}}^{\leq y_{\text{std}}}$. Comme \mathcal{B}' est une rocade pré-convexe vérifiant les hypothèses du lemme 11.12 l'application retour en restriction aux orbites qui ne rencontrent pas \mathcal{P} est contrôlée par $(\lambda, y_h, S_{\frac{\lambda}{4}, 1} \subset X, S_{\frac{\lambda}{2}, 3} \subset Y)$ et on donc les conditions 2 et 3 de la définition de flot contrôlé sont vérifiées.

Soit γ une orbite périodique qui contribue à l'application retour entre S_Z et $S_{y_{\text{std}}}$. Supposons que γ rencontre \mathcal{P} , on note p_e^S et p_s^S les points d'entrée dans S_Z et de sortie de $S_{y_{\text{std}}}$. L'image sur S_Z de \mathcal{P} par le flot de Reeb est incluse dans $X + 2\pi\mathbb{Z}$ donc il existe k tel que $p_e^S \in X + 2k\pi$. Le premier point d'intersection avec \mathcal{P} a une coordonnée x dans $[2k\pi - \frac{\lambda}{8}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{8}]$.

Si γ ne rencontre qu'une seule fois \mathcal{P} , le point de sortie de \mathcal{P} a une coordonnées x dans $[2k\pi - \frac{\lambda}{3}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{3}]$ (par le corollaire 12.21) et donc le point d'intersection de γ avec $S_{y_{\text{int}}}$ est dans $[2k\pi, (2k+1)\pi] \times I_{\text{max}}$.

De même si γ rencontre deux fois \mathcal{P} , le premier point de sortie a une coordonnée x dans $[2k\pi - \frac{\lambda}{8}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{8}]$ (par définition de \mathcal{V} , voir p.136). Le second point d'entrée a une coordonnée x dans $[2k\pi - \frac{\lambda}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{4}]$ (par le lemme 11.10) et le point de sortie une coordonnée x dans $[2k\pi - \frac{\lambda}{3}, (2k+1)\pi + \frac{\lambda}{3}]$ (par le corollaire 12.21). Donc le point d'intersection de γ avec $S_{y_{\text{int}}}$ est dans $[2k\pi, (2k+1)\pi] \times I_{\text{max}}$.

Dans tous les cas, par le lemme 11.12, on obtient que γ intersecte $S_{y_{\text{std}}}$ dans $[\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} + 2k\pi] \times I_{\text{max}}$ car $y_{\text{int}} < y_h$. Le même raisonnement permet de conclure pour l'application retour entre $S_{y_{\text{std}}}$ et S_Z .

On a ainsi montré la condition 3 de la proposition 12.1 : dans $\mathcal{B}^{[0, y_{\text{std}}]}$ le flot est contrôlé par (λ, y_h, X, Y) .

Application retour sur $S_{y_{\text{std}}}$. Par le lemme 11.13, si γ contribue à l'application retour sur $S_{y_{\text{std}}}$ dans $\mathcal{B}_{\text{conv}}^{\leq y_{\text{std}}}$ alors γ rencontre S_{y_h} . Notons p_e^S et p_s^S les extrémités de γ sur $S_{y_{\text{std}}}$. Alors par le lemme 11.12, $x_e^S \in [\frac{3\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} + 2k\pi]$ et $x_s^S \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2k'\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2} + 2k'\pi]$. Par le lemme 11.10, γ rencontre \mathcal{P} . Par symétrie, on peut supposer que $k' = 0$. Par le lemme 11.14, $\gamma \subset [\pi - \frac{\lambda}{2}, 2\pi + \frac{\lambda}{2}]$ car γ ne peut rencontrer qu'une seule composante connexe de \mathcal{P} . On obtient donc une contradiction. On montre ainsi la condition 4 de la proposition 12.1 : il n'y a pas d'application retour sur $S_{y_{\text{std}}}$ dans $\mathcal{B}_{\text{conv}}^{\leq y_{\text{std}}}$.

Application retour en restriction à R_λ . Soit δ une courbe de

$$\left[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda\right] \times I_{\text{max}}.$$

Par le lemme 11.12, les seuls points de δ qui interviennent dans l'application retour sur S_R sont les points dont les orbites rencontrent \mathcal{P} et donc Σ_- et Σ_+ . De plus par le lemme 11.12, les seuls points de Σ_+ qui interviennent dans l'application retour sont les points dans $[u_4, u_5] \times I_v$. Par construction, les images de δ sur Σ_- sont dans $[u_2, u_3] \times I_v$. Supposons que δ est un segment vertical, alors par le lemme 12.9 l'image de δ sur Σ_- est B -verticale et son image sur $[u_4, u_5] \times I_v$ dans Σ_+ est ε_B -horizontale. Par conséquent son image sur S_R est ε_{S_R} -proche de δ_1 . Donc les images des segments verticaux de $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ et les segments horizontaux de S_R s'intersectent transversalement en un unique point en formant un angle supérieur à θ_{S_R} (par la définition de rocade pré-convexe). Ainsi, on obtient un rectangle sur la source et l'image de l'application retour entre $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ et S_R et l'application retour préserve les fibres. Les fibres verticales du rectangle de S_R sont les images des segments verticaux et sont donc ε_{S_R} -proches de δ_1 . Les fibres horizontales du rectangle dans $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ sont les images inverses des segment horizontaux de S_R et donc ν -horizontales par le lemme 12.9 et le lemme 12.18.

L'application retour entre $[\frac{\pi}{2} + \lambda, \pi - \lambda] \times I_{\max}$ et S_R s'écrit $\varphi_+ \circ \Phi \circ \varphi_-$. Comme φ_- et φ_+ et leurs inverses sont L -lipschitziennes et que Φ et Φ^{-1} $\frac{L^2}{\sqrt{\eta}}$ -dilatent les fibres B -verticales. On obtient que $\varphi_+ \circ \Phi \circ \varphi_-$ et son inverse $\frac{1}{\eta}$ -dilatent respectivement les courbes A -verticales et les courbes θ_{S_R} -éloignées de δ_1 . Les propriétés des autres applications de la décomposition de l'application retour se démontrent de manière analogue.

La propriété sur le temps de retour vient des lemmes 12.9 et 12.18. On a ainsi montré les conditions 5 et 6 de la proposition 12.1.

5. Existence d'une paire de convexification

La démonstration de la proposition 12.16 s'articule ainsi. On part de la forme donnée à α pour $u \in [u_5, u_{\max}]$ et on la prolonge pour tout u . Pour cela on commence par étudier l'influence du changement de variable sur cette équation de contact puis on voit comment construire f et g . La preuve est essentiellement calculatoire.

5.1. Propriétés du changement de variable. Rappelons que l'on note $\varphi^t(x, y, z)$ le flot du champ de Reeb et ψ le changement de variable obtenu en suivant le flot de Reeb à partir de Σ (voir section 2).

FAIT 12.22. Pour tout $(t, u, v) \in I_t \times [u^-, u^+] \times I_v$,

$$d\psi(t, u, v) = \begin{pmatrix} R_x(\psi(t, u, v)) & 0 & \frac{\partial \psi_x}{\partial v}(t, u, v) \\ R_y(\psi(t, u, v)) & 1 & \frac{\partial \psi_y}{\partial v}(t, u, v) \\ R_z(\psi(t, u, v)) & 0 & \frac{\partial \psi_z}{\partial v}(t, u, v) \end{pmatrix}.$$

En particulier pour tout $(u, v) \in [u^-, u^+] \times I_v$,

$$d\psi(0, u, v) = \begin{pmatrix} R_x(\frac{\pi}{2}, u, v) & 0 & 0 \\ R_y(\frac{\pi}{2}, u, v) & 1 & 0 \\ R_z(\frac{\pi}{2}, u, v) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LEMME 12.23. Pour tout $(t, u, v) \in I_t \times [u^-, u^+] \times I_v$, on a

$$\psi^* \alpha_{prec}(t, u, v) = dt + k_0 du$$

et

$$\begin{cases} k_{inf}(\psi_z) \sin(\psi_x) = k_0 \\ k_{inf}(\psi_z) \sin(\psi_x) \frac{\partial \psi_y}{\partial v} + \cos(\psi_x) \frac{\partial \psi_z}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

où $k_0(v) = k_{inf}(v + z_{prod})$.

DÉMONSTRATION. Dans $I_t \times [u^-, u^+] \times I_v$, on a $R_{\psi^* \alpha_{\text{prec}}} = \frac{\partial}{\partial t}$ donc $\psi^* \alpha_{\text{prec}}$ est t -invariante. Ainsi

$$\psi^* \alpha_{\text{prec}}(t, u, v) = dt + i_{\Sigma}^* \alpha_{\text{prec}} = dt + k_0(v) du.$$

Par ailleurs, par calcul on obtient

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_{\text{prec}} &= k_{\text{inf}}(\psi_z) \sin(\psi_z) \left(R_y(\psi) dt + du + \frac{\partial \psi_y}{\partial v} dv \right) \\ &\quad + \cos(\psi_x) \left(R_z(\psi) dt + \frac{\partial \psi_z}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(k_{\text{inf}}(\psi_z) \sin(\psi_z) R_y(\psi) + \cos(\psi_x) R_z(\psi) \right) dt + k_{\text{inf}}(\psi_z) \sin(\psi_z) du \\ &\quad + k_{\text{inf}}(\psi_z) \sin(\psi_z) \frac{\partial \psi_y}{\partial v} + \cos(\psi_x) \frac{\partial \psi_z}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Le coefficient devant dt vaut 1 car $R_y(\psi) = \frac{1}{k_{\text{inf}}} \sin(\psi_x)$ et $R_z(\psi) = \cos(\psi_x)$. \square

LEMME 12.24. *Pour tout $(t, u, v) \in I_t \times [u^-, u^+] \times I_v$, on a*

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_{\text{conv}} &= \left(\frac{k_{\text{conv}}(\psi_z)}{k_{\text{inf}}(\psi_z)} \sin^2(\psi_x) + \cos^2(\psi_x) \right) dt + k_{\text{conv}}(\psi_z) \sin(\psi_x) du + \\ &\quad \left(k_{\text{conv}}(\psi_z) \sin(\psi_x) \frac{\partial \psi_y}{\partial v} + \cos(\psi_x) \frac{\partial \psi_z}{\partial v} \right) d\tau \end{aligned}$$

ce qui se reformule en

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_{\text{conv}} &= \left(\left(\frac{k_{\text{conv}}(\psi_z)}{k_{\text{inf}}(\psi_z)} - 1 \right) \sin^2(\psi_x) + 1 \right) dt + \frac{k_{\text{conv}}(\psi_z)}{k_{\text{inf}}(\psi_z)} k_{\text{inf}} du + \\ &\quad \left((k_{\text{conv}}(\psi_z) - k_{\text{inf}}(\psi_z)) \sin(\psi_x) \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \right) d\tau \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Un calcul analogue à celui de la démonstration précédente, on montre que

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_{\text{conv}} &= \left(k_{\text{conv}}(\psi_z) \sin(\psi_z) R_y(\psi) + \cos(\psi_x) R_y(\psi) \right) dt + k_{\text{conv}}(\psi_z) \sin(\psi_z) du \\ &\quad + k_{\text{conv}}(\psi_z) \sin(\psi_z) \frac{\partial \psi_y}{\partial v} + \cos(\psi_x) \frac{\partial \psi_z}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

La formule de l'énoncé s'obtient en exploitant que $R_y(\psi) = \frac{1}{k_{\text{inf}}} \sin(\psi_x)$ et $R_z(\psi) = \cos(\psi_x)$ et en appliquant les identités du lemme 12.23. \square

5.2. Construction de f et g . Dans les coordonnées (x, y, z) , on a

$$\alpha_{\text{conv}} = k_{\text{conv}}(z) \sin(x) dy + \cos(x) dz.$$

Dans les coordonnées (t, u, v) , on écrit

$$\alpha_{\text{conv}} = f_1(t, v) dt + g_1(t, v) du + h_1(t, v) dv$$

où f_1 , g_1 et h_1 ne dépendent pas de u . Remarquons de plus que $f_1(-t, v) = f_1(t, v)$, $g_1(-t, v) = g_1(t, v)$ et $h_1(-t, v) = -h_1(t, v)$ (voir le fait 12.5). Soient $u^- < u'_0 < u'_1 < u^+$. On considère alors $p : [u'_0, u'_1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p = 0$ au voisinage de u'_0 et $p = 1$ au voisinage de u'_1 . On transforme α_{conv} en une équation vérifiant les hypothèses du modèle de convexification (voir 1.12) loin de u^+ en posant

$$\alpha = f_1(t, v) dt + g_1(t, v) du + p(u) h_1(t, v) dv.$$

LEMME 12.25. *Pour ρ et C_ψ assez petit et pour tout z_0 assez proche de z_h , α est une équation de contact.*

DÉMONSTRATION. La différentielle de α est

$$d\alpha = \frac{\partial f_1}{\partial v} dv \wedge dt + \frac{\partial g_1}{\partial v} dv \wedge du + \frac{\partial g_1}{\partial t} dt \wedge du + p' h_1 du \wedge dv + p \frac{\partial h_1}{\partial t} dt \wedge dv.$$

La condition de contact s'écrit donc

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial v} f_1 + p h_1 \frac{\partial g_1}{\partial t} dt + p' h_1 f_1 - p \frac{\partial h_1}{\partial t} g_1 > 0.$$

La suite de la démonstration est une estimation fine de chacun des termes de cette expression. Dans tout ce qui suit la notation O ne dépendra que de la forme de l'équation et de bornes larges sur les fonctions considérées vérifiées par tous les modèles utilisés. En particulier, on suppose que f_1 , g_1 et h_1 sont à image dans $[\frac{1}{2}, 2]$. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} k_{\text{conv}}(z) - k_{\text{inf}}(z) &= A\Phi_{z_0}(z) = (z - z_0)^2 A\Phi'_{z_0}(z) \\ \frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}}(z) - 1 &= \frac{A\Phi_{z_0}(z)}{k_{\text{inf}}(z)} = \frac{(z - z_0)^2 A\Phi'_{z_0}(z)}{k_{\text{inf}}(z)} = (z - z_0)^2 A\Phi'_{z_0}(z) O(1) \\ \left(\frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}}\right)'(z) &= \frac{A\Phi'_{z_0}(z)}{k_{\text{inf}}(z)} + \frac{\rho A\Phi_{z_0}(z)}{(k_{\text{inf}}(z))^2} = A\Phi'_{z_0}(z) \left(\frac{1}{k_{\text{inf}}(z)} + \frac{\rho(z - z_0)^2}{(k_{\text{inf}}(z))^2} \right). \end{aligned}$$

Par définition

$$f_1(t, v) = \left(\frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}}(\psi_z) - 1 \right) \sin^2(\psi_x) + 1$$

d'où

$$(31) \quad f_1(t, v) = 1 + A\Phi'_{z_0}(\psi_z)(\psi_z - z_0)^2 O(1).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial v} &= 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \cos(\psi_x) \sin(\psi_x) \left(\frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}}(\psi_z) - 1 \right) + \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \left(\frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}} \right)'(\psi_z) \sin^2(\psi_x) \\ &= A\Phi'_{z_0}(\psi_z) \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} \frac{\sin^2(\psi_x)}{k_{\text{inf}}(z)} + \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \frac{\sin^2(\psi_x) \rho (\psi_z - z_0)^2}{(k_{\text{inf}}(z))^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\cos(\psi_x) \sin(\psi_x) (\psi_z - z_0)^2}{k_{\text{inf}}(z)} \right) \\ &= A\Phi'_{z_0}(\psi_z) \left(1 + \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} - 1 \right) \frac{\sin^2(\psi_x)}{k_{\text{inf}}(z)} + (\sin^2(\psi_x) - 1) \frac{1}{k_{\text{inf}}(z)} + \frac{1}{k_{\text{inf}}(z)} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \frac{\sin^2(\psi_x) \rho (\psi_z - z_0)^2}{(k_{\text{inf}}(z))^2} + 2 \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\cos(\psi_x) \sin(\psi_x) (\psi_z - z_0)^2}{k_{\text{inf}}(z)} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$(32) \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = A\Phi'_{z_0}(\psi_z) (1 + O(\rho) + O(C_\psi) + (\psi_z - z_0)^2 O(1))$$

où $C_\psi = \|\psi(t, u, v) - \psi(0, u, 0)\|_\infty + \|d\psi(t, u, v) - d\psi(0, u, 0)\|_\infty$. En particulier pour ρ , C_ψ , $z_h - z_0$ assez petits, $\frac{\partial f_1}{\partial v} \geq 0$ et $\frac{\partial f_1}{\partial v}(0, v_h) > 0$. De même

$$g_1 = \frac{k_{\text{conv}}(\psi_z) k_0}{k_{\text{inf}}(\psi_z)} = 1 + k_{\text{conv}} \left(\frac{k_0}{k_{\text{inf}}(\psi_z)} - 1 \right) + k_{\text{conv}} - 1$$

et par conséquent

$$(33) \quad g_1(t, v) = 1 + O(\rho) + (z - z_0)^2 O(1) + O(C_\psi).$$

On veut aussi estimer les dérivées partielles de g_1 par rapport à v et à t , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial v} &= \frac{\partial \psi_z}{\partial v} \left(\frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}} \right)' (\psi_z) k_0 - \rho \frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}} \\ &= -\rho + A\Phi'_{z_0}(\psi_z) \left(\frac{-\rho(\psi_z - z_0)^2}{k_{\text{inf}}} + \frac{\partial \psi_z}{\partial v} \frac{k_0}{k_{\text{inf}}} + \frac{\partial \psi_z}{\partial v} \frac{\rho(\psi_z - z_0)^2 k_0}{(k_{\text{inf}})^2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$(34) \quad \frac{\partial g_1}{\partial v} = -\rho + A\Phi'_{z_0}(\psi_z) (1 + (\psi_z - z_0)^2 O(1) + O(\rho) + O(C_\psi))$$

et

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{\partial \psi_z}{\partial t} k_0 \frac{k_{\text{conv}}}{k_{\text{inf}}}$$

d'où

$$(35) \quad \frac{\partial g_1}{\partial t}(t, v) = A\Phi'_{z_0}(\psi_z) O(C_\psi).$$

Enfin, il nous reste à estimer h_1 et sa dérivée par rapport à la variable t , on a

$$h_1 = \sin(\psi_x) \frac{\psi_y}{\partial v} (k_{\text{conv}}(\psi_x) - k_{\text{inf}}(\psi_x))$$

d'où

$$(36) \quad h_1(t, v) = A\Phi'_{z_0}(\psi_z) (\psi_z - z_0)^2 O(1).$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \cos(\psi_x) (k_{\text{conv}}(\psi_x) - k_{\text{inf}}(\psi_x)) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial v \partial t} \sin(\psi_x) (k_{\text{conv}}(\psi_x) - k_{\text{inf}}(\psi_x)) \\ &\quad + \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial v} \sin(\psi_x) (k'_{\text{conv}}(\psi_x) - k'_{\text{inf}}(\psi_x)) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}(t, v) = A\Phi'_{z_0}(\psi_z) ((\psi_z - z_0)^2 O(1) + O(C_\psi))$$

Par conséquent la condition de contact devient

$$(37) \quad \rho + A\Phi'_{z_0}(\psi_z) (O(\rho) + (\psi_z - z_0)^2 O(1) + O(C_\psi)) > 0.$$

Comme $A\Phi'_{z_0}(z) < 2\rho$ car $k'_{\text{conv}}(z_h) = \rho_0$, il existe des bornes sur ρ et sur C_ψ indépendantes du modèle choisi et une borne inférieure sur z_0 garantissant que la condition de contact soit vérifiée. \square

LEMME 12.26. *Pour ρ et C_ψ assez petits et pour tout z_0 assez proche de z_h et pour tout ρ_0 assez petit, le champ de Reeb vérifie $R_s \geq 0$, de plus R est sortant de S_h pour tout $t < 0$, entrant pour tout $t > 0$ et tangent et pointant vers la zone $t < 0$ en $t = 0$;*

DÉMONSTRATION. Par u -invariance, il suffit de vérifier le résultat dans les plans $u = \text{cst}$. Dans ces plans, le champ de Reeb est positivement colinéaire à

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g_1}{\partial v} + p'(u)h_1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial t} \end{pmatrix}$$

dans les coordonnées (t, v) . Pour $p = 1$, Y vérifie bien les conditions de transversalité requises (voir section 4).

La condition de tangence en $t = 0$ est toujours vérifiée car $h_1(0, v) = 0$. Paramétrons par l_+ et l_- la surface S_h dans le plan $u = \text{cst}$ en dehors de $t = 0$. La condition de transversalité s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} 1 & Y_v \\ l'_\pm & Y_t \end{vmatrix} > 0$$

soit

$$(38) \quad -\frac{\partial g_1}{\partial v} + p'(u)h_1 - l'_\pm \frac{\partial g_1}{\partial t} > 0.$$

Dans la zone où h est non plate, la conditions de tangence est vérifiée avant perturbation par k_{conv} . Or $\|k_{\text{conv}} - k_{\text{inf}}\|_{C^1} \leq \rho_0$, donc pour ρ_0 assez petit, la condition de transversalité reste vérifiée après perturbation par k_{conv} dans la zone non plate de S_h .

Il reste à vérifier le résultat dans la zone plate de S_h . Notons $\rho_0 = s_0\rho$. Par les calculs de la preuve précédente on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial v} &= -\rho + A\Phi'_{z_0} + A\Phi'_{z_0}(\psi_z) \left(\frac{-\rho(\psi_z - z_0)^2}{k_{\text{inf}}} + \frac{\partial\psi_z}{\partial v} \frac{k_0}{k_{\text{inf}}} - 1 + \frac{\partial\psi_z}{\partial v} \frac{\rho(\psi_z - z_0)^2 k_0}{(k_{\text{inf}})^2} \right) \\ \frac{\partial g_1}{\partial t} &= A\Phi'_{z_0}(\psi_z) k_0 \cos(\psi_x) \left(\frac{1}{k_{\text{inf}}} + \frac{\rho(\psi_z - z_0)^2}{(k_{\text{inf}})^2} \right) \\ h_1 &= A\Phi'_{z_0}(\psi_z) (\psi_z - z_0)^2 \sin(\psi_x) \frac{\partial\psi_y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Le long de la zone plate de S_h , $A\Phi'_{z_0}(\psi_z) = (1 + s_0)\rho$ et la condition de transversalité se réécrit pour $p' = 0$

$$-s_0\rho + \rho(1 + s_0)a(t, u, v) > 0$$

soit

$$(39) \quad a(t, u, v) + s_0(a(t, u, v) - 1) > 0$$

La fonction a ne dépend pas du choix de s_0 et il existe s_{max} tel que la condition 39 soit vérifiée pour tout $s_0 \in]0, s_{\text{max}}]$. On obtient par conséquent $a > \frac{s_{\text{max}}}{1 + s_{\text{max}}}$. Pour z_0 assez proche de z_h , on peut supposer

$$\left| p'(u)(\psi_z - z_0)^2 \sin(\psi_x) \frac{\partial\psi_y}{\partial v} \right| < \frac{s_{\text{max}}}{2(1 + s_{\text{max}})}.$$

Pour $s \leq \frac{s_{\text{max}}}{2}$, la condition de transversalité dans le cas général s'écrit

$$a(t, u, v) + p'(u)(\psi_z - z_0)^2 \sin(\psi_x) \frac{\partial\psi_y}{\partial v} + s(a(t, u, v) - 1) > 0$$

Or

$$a(t, u, v) + s(a(t, u, v) - 1) > \frac{s_{\text{max}}}{1 + s_{\text{max}}} - \frac{s_{\text{max}}}{2(1 + s_{\text{max}})} = \frac{s_{\text{max}}}{2(1 + s_{\text{max}})}.$$

La condition de transversalité est par conséquent vérifiée. \square

5.3. Démonstration de la proposition 12.16. Choisissons ρ , c_ψ , $z_h - z_0$ et ρ_0 assez petits pour que les lemmes 12.25 et 12.26 s'appliquent. L'équation α ainsi obtenue se prolonge naturellement à \mathcal{U} par $\alpha = f_1 dt + g_1 du$ pour $u \in [u_{\text{min}} + u_{\text{max}} - u^-, u^-]$ et en utilisant $-\sigma^* \alpha$ sur $I_t \times [u_{\text{min}}, u_{\text{min}} + u_{\text{max}} - u^-] \times I_v$. Seule la condition 3 de la proposition 12.16 ($\alpha = \alpha_{\text{prec}}$ pour $v \geq v'_{\text{max}}$ et $v \leq v_\Delta$) n'est pas directement impliquée par la construction. Or, la zone où

$$(f_1(t, v), g_1(t, v)) \neq (1, 1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v)$$

est comprise entre la surface S_{z_0} qui correspond au points $z = z_0$ et S_h . La surface S_{z_0} vérifie des propriétés analogues à celles vérifiées par S_B décrites dans le lemme 12.6. En particulier, la coordonnée z de tout point de S_{z_0} vérifie $v \geq z_0 - z_{\text{prod}} > v_\Delta$

quitte à diminuer $z_h - z_0$ car, par la construction 12.13, on a $z_h - z_{\text{prod}} > v_\Delta$. De plus S_{z_0} intersecte S_h dans sa zone non plate et, pour z_0 arbitrairement proche de z_h , ces points sont arbitrairement proches des extrémités de la zone plate. Donc, par l'étape de construction 12.13 (qui impose que le plan $\{v = v'_{\text{max}}\}$ intersecte S_h hors de la zone plate), ces points ont une coordonnées v inférieure à v'_{max} . La condition 3 est donc vérifiée si $z_h - z_0$ est assez petit.

6. Modification d'une paire de convexification

Dans cette section on démontre la proposition 12.18. L'équation de contact fournie par le lemme 12.16 est de la forme $\alpha = f(t, u, v)dt + g(t, u, v)du$ avec f et g indépendants de v au voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$. Dans ce voisinage le champ de Reeb est donné par

$$(40) \quad R_\alpha = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que Φ vérifie bien les propriétés demandées, on va garantir que, quitte à modifier f et g , l'écart entre les coordonnées u de deux orbite augmente lors du passage dans la zone de convexification. Pour cela il faut essentiellement contrôler $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ et garantir que les orbites qui contribuent à l'application retour traversent une zone avec $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ assez grand. Commençons par voir dans quelles conditions on peut modifier f et g .

FAIT 12.27. Soit (f_1, g_1) une paire de convexification (définition 12.15) vérifiant les hypothèses du lemme 12.16 sur $I_t \times J_u \times I_v$. Si (f_1, g_2) vérifie ces mêmes hypothèses alors il existe une paire de convexification (f_1, g) vérifiant les hypothèses du lemme 12.16 et telle que $g = g_1$ en dehors d'un voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$, $g = g_2$ dans un voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$.

De même, si (f_2, g_1) vérifie les hypothèses du lemme 12.16 et $f_2 = f_1$ au voisinage de S_h , il existe une paire de convexification (f, g_1) vérifiant les hypothèses du lemme 12.16 et telle que $f = f_1$ en dehors d'un voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$, $f = f_2$ dans un voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$.

Pour garantir que les orbites qui contribuent à l'application retour sont dans un domaine contrôlé, on va utiliser la remarque informelle suivante : si $\frac{\partial f}{\partial v}$ n'est pas trop grand et $|\frac{\partial g}{\partial v}|$ pas trop petit, la coordonnée u des orbites ne va pas beaucoup augmenter et donc les orbites ne vont pas contribuer à l'application retour. À l'inverse si $\frac{\partial f}{\partial v}$ est assez grand et $|\frac{\partial g}{\partial v}|$ borné, la coordonnée u des orbites va beaucoup augmenter et donc les orbites ne vont pas contribuer à l'application retour. Par ailleurs, en projection sur le plan (t, v) les orbites suivent les lignes de niveau de g . On va découper l'espace en suivant ces lignes de niveau et garantir que, pour des niveaux assez loin du niveau critique, la première situation décrite s'applique et, pour des niveaux proches du niveau critique, c'est la seconde situation qui est présente. Ainsi, seules les orbites « intermédiaires » contribuent à l'application retour. Les énoncés suivant sont une formulation explicite de ces idées. Notons Γ_v la ligne de niveau de issue de $(0, v)$ dans les plans $u = \text{cst}$ pour $u \in [u_1, u_5]$ et $\Gamma_{[v, v']}$ la partie du plan comprise entre Γ_v et $\Gamma_{v'}$, où $v < v'$. Rappelons que v_Δ est fourni par le lemme 12.12 et v_h est le point d'intersection de S_h avec l'axe de v .

COROLLAIRE 12.28. *On peut supposer qu'il existe $v_c \in]v_\Delta, v_h[$ tel que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| > 2 \max \left\{ 4096\rho \frac{u_5 - u_1}{u_4 - u_3}, 4\rho \right\} = 2m_f$$

au voisinage de $\{0\} \times [u_1, u_5] \times \{v_c\}$. On demande de plus $1 \leq f \leq \frac{3}{2}$.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse $\frac{\partial f}{\partial v}(0, v_h) > 0$. On va modifier f au voisinage de $(0, v_h)$ mais pas le long de S_h . Les conditions à préserver sont $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0, v_h) > 0$, $f(-t, v) = f(t, v)$ et la condition de contact $\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f > 0$.

Au voisinage de $(0, v_h)$, on a $g_1 > 0$ et $\frac{\partial g_1}{\partial v} > 0$. Dans un voisinage de $(0, v_h)$ sur lequel $\frac{\partial f}{\partial v} > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction f_1 avec $|f - f_1| < \varepsilon$ et $\frac{\partial f_1}{\partial v} > \frac{\partial f}{\partial v} - \varepsilon$, la condition $\frac{\partial f_1}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f_1 > 0$ soit vérifiée. Dans un petit voisinage d'un point $(0, v_c)$ de ce voisinage, on peut rendre $\frac{\partial f}{\partial v}$ arbitrairement grand tout en vérifiant les deux conditions précédentes. \square

COROLLAIRE 12.29. *Quitte à modifier g au voisinage de $I_t \times [u_1, u_5] \times I_v$, on peut supposer qu'il existe v_0 et t_1 tels que (voir figure 9)*

- (1) $v_\Delta < v_0 < v_c$;
- (2) $\frac{1}{2} \leq g \leq 1$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| \leq \rho$;
- (3) $g(-t, v) = g(t, v)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \geq 0$ et $\frac{\partial g}{\partial v} < 0$ pour $v < v_c$;
- (4) $(0, v_c)$ soit un point selle de g et les niveaux issus de $\{0\} \times [v_c, v_h]$ ne rencontrent pas Σ_+ et Σ_- (voir figure 8) ;
- (5) pour tout (t, u, v) avec $|t| \leq t_1$, $u \in [u_1, u_5]$ et $(t, v) \in \Gamma_{[v_0, v_c]}$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial v}(t, v) \right| > 2m_f$;
- (6) pour (t, u, v) tel que $u \in [u_1, u_5]$, $|t| \geq t_1$ et $v \in I_v$, on ait $g(t, u, v) = 1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v$;
- (7) pour tout $(t, v) \in \Gamma_{[v_0, v_c]}$ et tel que $|t| \leq \frac{t_1}{2}$, on ait $\left| \frac{\partial g}{\partial v}(t, v) \right| < M_g$ où $M_g = \frac{m_f t_1}{8(u_5 - u_1)}$ et $M_g < m_f$;
- (8) avant Γ_{v_0} , on ait $\left| \frac{\partial g}{\partial v}(t, v) \right| > \frac{M_g}{2}$.

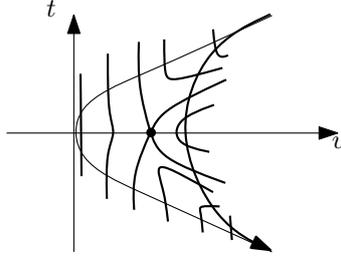
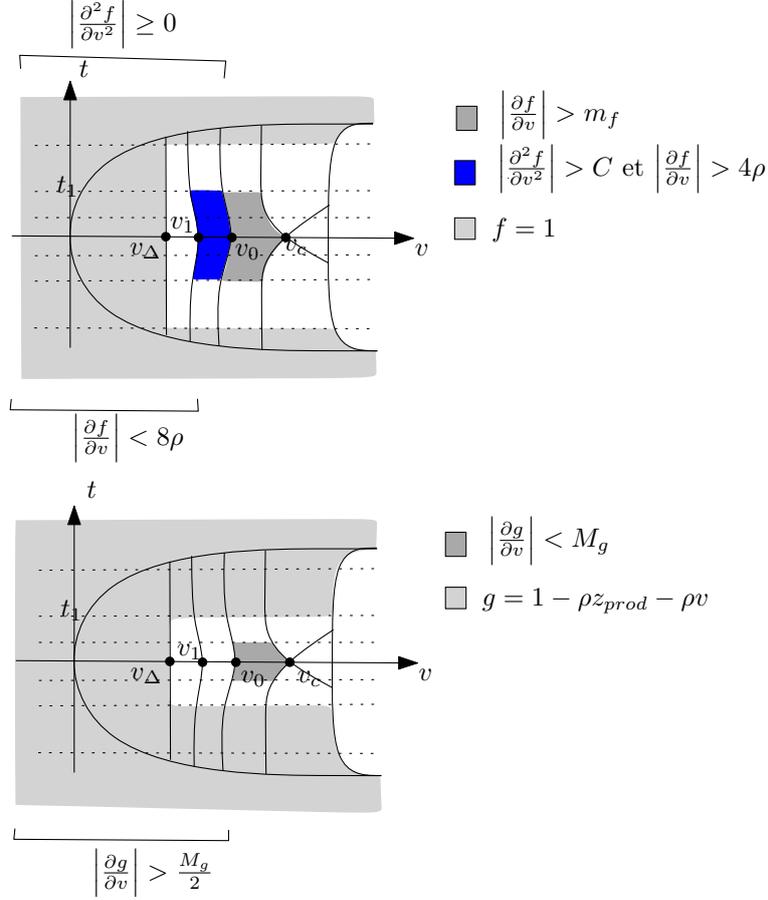


FIGURE 8. Niveaux de g

DÉMONSTRATION. Il suffit de construire une fonction g adaptée à f et vérifiant les conditions précédentes puis d'appliquer le fait 12.27. On commence par choisir t_1 et v_0 vérifiant la condition 5. Quitte à diminuer t_1 , on peut supposer que $\rho > \frac{M_g}{2}$. On peut alors construire g vérifiant les conditions demandées (quitte à augmenter v_0). Pour vérifier la condition de contact, on choisit g tel que les points avec $\frac{\partial g}{\partial v} > 0$ soient contenus dans la zone $\frac{\partial f}{\partial v} > 0$ et tel que $\max \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)$ soit petit. \square

LEMME 12.30. *Soit (f, g) une paire de convexification telle que g vérifie les hypothèses du corollaire 12.29 et que $\left| \frac{\partial f}{\partial v}(t, v) \right| > m_f$ pour tout (t, u, v) avec $|t| \leq t_1$, $u \in [u_1, u_5]$ et $(t, v) \in \Gamma_{[v_0, v_c]}$. Alors, il n'y a pas d'orbite contribuant à l'application*

FIGURE 9. Conditions sur les fonctions f et g

retour entre $\{-t_{max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ et $\{t_{max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$ rencontrant $\{0\} \times [u_1, u_5] \times [v_0, v_h]$.

DÉMONSTRATION. Toute orbite contribuant à l'application retour suit les niveaux de g , par conséquent elle ne peut pas rencontrer $\{0\} \times [u_1, u_5] \times [v_c, v_h]$ par la condition 4 du corollaire précédent.

Il reste à traiter le cas des orbites rencontrant $\{0\} \times [u_1, u_5] \times [v_0, v_c]$. Supposons par l'absurde qu'une telle orbite existe. Montrons que l'intervalle en u parcouru est strictement supérieur à $u_5 - u_1$. En projection sur (t, v) une telle orbite suit une ligne de niveau de g . Elle traverse donc la zone avec $|t| \leq t_1$, $u \in [u_1, u_5]$ et (t, v) entre Γ_{v_0} et Γ_{v_c} . Comme dans cette zone, $|\frac{\partial f}{\partial v}(t, v)| > m_f$ et $|\frac{\partial g}{\partial v}(t, v)| < M_g$, le temps que l'orbite de Reeb y passe est minoré par

$$\frac{t_1}{\max(R_t)} \geq \frac{t_1 m_f}{2M_g}$$

car

$$\frac{\partial f}{\partial v} g - \frac{\partial g}{\partial v} f \geq \frac{\partial f}{\partial v} g \geq \frac{m_f}{2} \text{ et } |R_t| = \left| \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v} g - \frac{\partial g}{\partial v} f} \right| \leq \frac{2M_g}{m_f}.$$

Ainsi l'intervalle u parcouru est minoré par

$$\min |R_u| \times \frac{t_1 m_f}{2M_g} \geq \frac{2}{5} \times \frac{t_1 m_f}{2M_g} = \frac{t_1 m_f}{5M_g} > u_5 - u_1$$

car

$$\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f \leq \frac{5}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \text{ et } |R_u| = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f} \right| \geq \frac{2}{5}.$$

On obtient donc une contradiction. \square

Soit $C > 0$. En utilisant le fait 12.27, on peut supposer que, quitte à modifier f , il existe $v_\Delta < v_1 < v_0$ tel que voir figure 9)

- (1) pour tout (t, u, v) tel que $u \in [u_1, u_5]$, $|t| \leq t_1$ et $(t, v) \in \Gamma_{[v_1, v_0]}$, on ait $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t, u, v) > C$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(t, u, v) > 4\rho$;
- (2) avant Γ_{v_1} , $\frac{\partial f}{\partial v}(t, u, v) < 8\rho$;
- (3) $f(t, u, v) = 1$ pour tout (t, u, v) avec $u \in [u_1, u_5]$, $|t| \geq 2t_1$ et (t, v) avant Γ_{v_1} ;
- (4) dans $\Gamma_{[v_0, v_c]}$, on a $\frac{\partial f}{\partial v}(t, u, v) > m_f$;
- (5) avant Γ_{v_0} , on ait $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t, u, v) \geq 0$.

LEMME 12.31. *La projection sur le plan (t, v) des orbites contribuant à l'application retour entre $\{-t_{\max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ et $\{t_{\max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$ est contenue entre Γ_{v_1} et Γ_{v_0} .*

DÉMONSTRATION. Par le lemme 12.30 et le corollaire 12.28, il reste à montrer que les orbites qui contribuent à l'application retour ne rencontrent pas $\{0\} \times [u_1, u_5] \times [-v_{\max}, v_1]$. Or avant Γ_1 , on a $\left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| > \frac{M_g}{2}$ et $\frac{\partial f}{\partial v} < 8\rho$. Le temps de retour entre $-2t_1$ et $2t_1$ est donc majoré par

$$\frac{4t_1}{\min(R_t)} \leq \frac{32t_1}{M_g}$$

car

$$\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f \leq 9\rho \leq 4 \text{ et } |R_t| = \left| \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f} \right| \geq \frac{M_g}{8}$$

pour $\rho < \frac{1}{10}$. Ainsi l'intervalle u parcouru est majoré par

$$8\rho \times \frac{32t_1}{M_g} < u_4 - u_3.$$

De plus, pour $|t| \geq 2t_1$, la coordonnées en u ne varie pas car $f = 1$. Donc les orbites passant par $\{0\} \times [u_1, u_5] \times [-v_{\max}, v_1]$ ne peuvent pas contribuer à l'application retour. \square

Il reste maintenant à vérifier que les conditions imposées sur f et g permettent de démontrer la proposition 12.18.

LEMME 12.32. *Pour C assez grand, les conditions 1, 2 et 3 de la proposition 12.18 sont vérifiées.*

DÉMONSTRATION. Commençons par estimer les effets sur la coordonnées u du passage de différentes orbites dans la zone convexifiée. Considérons deux points $(-t_{\max}, u, v)$ et $(-t_{\max}, \tilde{u}, \tilde{v})$ deux points de $\{-t_{\max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ sources de cordes contribuant à l'application retour entre $\{-t_{\max}\} \times [u_3, u_4] \times I_v$ et $\{t_{\max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$ et tels que $\tilde{v} > v$. Les projections des deux cordes de Reeb associées sont comprises entre Γ_{v_1} et Γ_{v_0} . Avant Γ_{v_0} , on renormalise le champ de Reeb en

$$Y = \left(1, -\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial g}{\partial v}}, -\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{\frac{\partial g}{\partial v}} \right)$$

et on paramètre par $t \mapsto (-t_{\max} + t, u(t), v(t))$ et $t \mapsto (-t_{\max} + t, \tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ les orbites de Y issues de points $(-t_{\max}, u, v)$ et $(-t_{\max}, \tilde{u}, \tilde{v})$. On a

$$\frac{\partial Y_u}{\partial v} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v}}{\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2} \geq \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\frac{\partial g}{\partial v}}.$$

donc $\frac{\partial Y_u}{\partial v} \geq 0$ et $\tilde{u} - u$ est une fonction croissante. De plus, pour tout $|t| \leq \frac{t_1}{2}$ on a

$$\frac{\partial Y_u}{\partial v} \geq \frac{2C}{M_g}.$$

Ainsi

$$\tilde{u}(t_{\max}) - u(t_{\max}) \geq \tilde{u} - u + \frac{2C}{M_g} \min_{|t| \leq \frac{t_1}{2}} (\tilde{v}(t) - v(t)).$$

Les deux orbites de Y considérées correspondent à deux niveaux de g et donc pour tout $t \in [-t_{\max}, t_{\max}]$

$$(v(\tilde{t}) - v(t)) \min \left(\left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| \right) \leq g(-t_{\max}, v) - g(-t_{\max}, \tilde{v}) \leq (v(\tilde{t}) - v(t)) \max \left(\left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| \right).$$

Par conséquent

$$v(\tilde{t}) - v(t) \geq \frac{\tilde{v} - v}{2}$$

car $\frac{M_g}{2} \leq \left| \frac{\partial g}{\partial v} \right|$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial v} \right| \leq M_g$ pour $|t| \leq \frac{t_1}{2}$. Ainsi

$$(41) \quad \tilde{u}(t_{\max}) - u(t_{\max}) \geq \tilde{u} - u + \frac{Ct_1(\tilde{v} - v)}{M_g}.$$

Montrons que les conditions 1 et 2 sont bien vérifiées. Soit $v \rightarrow \gamma(v)$ une courbe B -verticale de $\{-t_{\max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ (par définition $|\gamma'(v)| \leq B$). On note $v \rightarrow \delta(v)$ son image sur $\{t_{\max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$. Par symétrie des niveaux de g , si elle est bien définie, l'image du point $(-t_{\max}, \gamma(v), v)$ est le point $(t_{\max}, \delta(v), v)$. Par 41, on obtient

$$(42) \quad \delta'(v) \geq \gamma'(v) + \frac{Ct_1}{M_g} \geq -B + \frac{Ct_1}{M_g} = D.$$

Par conséquent pour C assez grand, on a $D \geq \frac{1}{\varepsilon_B}$ et on obtient la propriété 1. La condition 2 se montre de la même manière.

Montrons maintenant 3. Soient $p = (-t_{\max}, u, v)$ et $\tilde{p} = (-t_{\max}, \tilde{u}, \tilde{v})$ deux points de $\{-t_{\max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ sur une courbe B -verticale ayant une image sur $\{t_{\max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$. On a

$$d(p, \tilde{p}) \leq \sqrt{1 + B^2} |\tilde{v} - v|.$$

Comme $\delta'(v) \geq D$ (par 42) et que les coordonnées en v de $\Phi(p)$ et $\Phi(\tilde{p})$ sont v et \tilde{v} , on a

$$d(\Phi(p), \Phi(\tilde{p})) \geq \sqrt{1 + D^2} |\tilde{v} - v| \geq \frac{\sqrt{1 + D^2}}{\sqrt{1 + B^2}} d(p, \tilde{p}).$$

On obtient la condition de dilatation cherchée pour D (et donc C) assez grand. \square

LEMME 12.33. *Le temps de retour entre $\{-t_{\max}\} \times [u_2, u_3] \times I_v$ et $\{t_{\max}\} \times [u_4, u_5] \times I_v$ est majoré par $(u_5 - u_1) + 4t_{\max}$.*

DÉMONSTRATION. Pour $|t| \geq t_1$,

$$|R_t| = \left| \frac{-\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v} g - \frac{\partial g}{\partial v} f} \right| \leq 2$$

car $g(t, u, v) = 1 - \rho z_{\text{prod}} - \rho v$ et le temps de retour est donc inférieur à $4t_{\text{max}}$. Pour $|t| \leq t_1$, on a

$$|R_u| = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v}g - \frac{\partial g}{\partial v}f} \right| = \frac{1}{g} \left| \frac{1}{1 - \frac{\frac{\partial g}{\partial v}f}{\frac{\partial f}{\partial v}g}} \right|$$

or

$$\left| \frac{\frac{\partial g}{\partial v}f}{\frac{\partial f}{\partial v}g} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $|R_u| \geq \frac{4}{3}$. Comme l'orbite parcourt un intervalle en u de longueur au plus $u_5 - u_1$, le temps de retour est majoré par $\frac{3}{4}(u_5 - u_1)$ \square

On peut donc conclure sur le temps de retour pour t_{max} assez petit et en utilisant la condition $u_5 - u_1 \leq |\int \Gamma_{\lambda_V} \alpha| < \tau$ fournie par la définition de rocade pré-convexe.

7. Indice de Conley-Zehnder

Cette section est consacrée à la preuve de la proposition 10.23. Soit c une corde de Reeb de S_Z dans la rocade contenue dans une orbite périodique $\gamma_{\mathbf{a}}$. On note c_+ et c_- les extrémités de c . On construit un anneau S_c ayant c pour âme et tel que toute corde de S_Z issue de la même courbe verticale de S_Z que c_+ et proche de c ne rencontre pas S_c . En recollant un collier obtenu par S_c aux colliers associés aux cordes de Reeb dans la variété, on obtient le collier $S_{\gamma_{\mathbf{a}}}$ annoncé.

On choisit S_c tel que

- (1) entre S_Z et la zone de convexification, S_c soit tangent à $\frac{\partial}{\partial x}$;
- (2) dans la zone de convexification, S_c soit tangent à $\frac{\partial}{\partial u}$;
- (3) dans la partie supérieure de la rocade, S_c soit tangent à $\frac{\partial}{\partial r}$.

On lisse la surface ainsi construite. Une corde issue de la même verticale que c_+ ne rencontre pas S_c comme expliqué à la figure 10. Dans cette figure, S_c est transversale

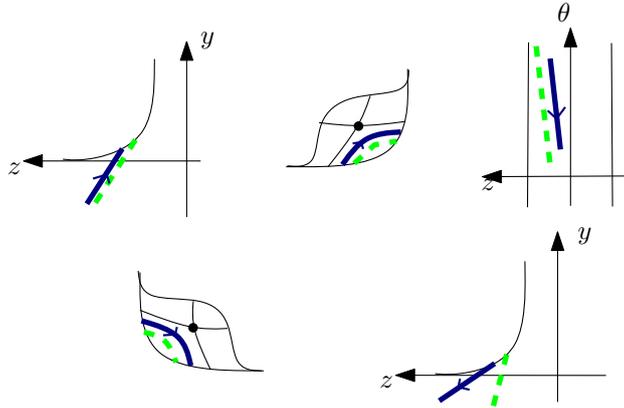


FIGURE 10. Cordes de Reeb et anneau S_c

au plan de projection, la corde c est en trait plein et l'autre corde en pointillé.

Bibliographie

- [1] Michèle Audin. *The topology of torus actions on symplectic manifolds*. Birkhäuser, 1991.
- [2] Michèle Audin and Jacques Lafontaine, editors. *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1994.
- [3] Daniel Bennequin. Entrelacement et équations de Pfaff. In *IIIe Rencontre de Géométrie du Schnepfenried*, volume 1 of *Astérisque*, pages 87–161, 1983.
- [4] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot, and Joan Porti. *Geometrization of 3-manifolds*, volume 13 of *Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society, 2010.
- [5] Frédéric Bourgeois. *A Morse-Bott approach to Contact Homology*. PhD thesis, Stanford University, 2002.
- [6] Frédéric Bourgeois. A Morse-Bott approach to contact homology. <http://homepages.ulb.ac.be/~fbourgeo/Articles.html>, 2002.
- [7] Frédéric Bourgeois. Introduction to contact homology. Summer School in Berder, <http://homepages.ulb.ac.be/~fbourgeo/Articles.html>, June 2003.
- [8] Frédéric Bourgeois and Vincent Colin. Homologie de contact des variétés toroïdales. *Geometry and Topology*, 9:299–313, 2005.
- [9] Frédéric Bourgeois, Tobias Ekholm, and Yakov Eliashberg. Effect of Legendrian surgery. arXiv:0911.0026, 2009.
- [10] Frédéric Bourgeois, Yakov Eliashberg, Helmut Hofer, Kris Wysocki, and Eduard Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geometry and Topology*, 7:799–888, 2003.
- [11] Frédéric Bourgeois and Klaus Mohnke. Coherent orientations in symplectic field theory. *Mathematische Zeitschrift*, 248(1):123–146, 2003.
- [12] Frédéric Bourgeois and Alexandru Oancea. Fredholm theory and transversality for the parametrized and for the S^1 -invariant symplectic action. *Journal of European mathematical Society*, 12(5):1181–1229, 2010.
- [13] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 1988.
- [14] Yuri Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Inventiones Mathematicae*, 150:441–483, 2002.
- [15] Kai Cieliebak and Alexandru Oancea. Non-equivariant contact homology. In preparation.
- [16] Vincent Colin. Recollement de variétés de contact tendues. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 127(1):43–69, 1999.
- [17] Vincent Colin. Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 76(2):353–372, 2001.
- [18] Vincent Colin, Paolo Ghiggini, Ko Honda, and Michael Hutchings. Sutures and contact homology I. arXiv:1004.2942v1, 2010.
- [19] Vincent Colin and Ko Honda. Constructions contrôlées de champs de Reeb et applications. *Geometry and Topology*, 9:2193–2226, 2005.
- [20] Vincent Colin and Ko Honda. Reeb vector fields and open book decomposition. arXiv:0809.5088v1, 2008.
- [21] Charles C. Conley and Eduard Zehnder. Morse-type index theory for flows and periodic solutions of Hamiltonian equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 37:207–253, 1984.
- [22] Dragomir Dragnev. Fredholm theory and transversality for non compact pseudoholomorphic curves in symplectisations. *Communications on pure and applied mathematics*, 57:726–763, 2004.

- [23] Yakov Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 98(3):623–637, 1989.
- [24] Yakov Eliashberg. Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet’s work. *Annales de l’institut Fourier*, 42:165–192, 1992.
- [25] Yakov Eliashberg, Alexander Givental, and Helmut Hofer. Introduction to symplectic field theory. *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, Special volume, Part II:560–673, 2000.
- [26] Yakov Eliashberg and Mikhaïl Gromov. Convex symplectic manifolds. In *Several complex variables and complex geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, pages 135–162, 1991.
- [27] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, volume 66-67 of *Astérisque*. Société mathématique de France, seconde edition, 1991. Séminaire Orsay.
- [28] Alexander Fel’shtyn. *Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory and Reidemeister torsion*, volume 147 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [29] Kenji Fukaya and Kaoru Ono. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants. *Topology*, 38:933–1048, 1999.
- [30] David Gabai. Foliations and the topology of 3-manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 18:445–503, 1983.
- [31] Hansjörg Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [32] Emmanuel Giroux. Convexité en topologie de contact. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 66(4):637–677, 1991.
- [33] Emmanuel Giroux. Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg). *Astérisque*, (216):No. 760, 3, 7–33, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.
- [34] Emmanuel Giroux. Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 141:615–689, 2000.
- [35] Emmanuel Giroux. Structures de contact sur les variétés fibrées en cercles au-dessus d’une surface. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 76:218–262, 2001.
- [36] Roger Godement. *Théorie des faisceaux*, volume 1252 of *Actualités scientifiques et industrielles*. Hermann, Paris, 1973.
- [37] Roman Golovko. The cylindrical contact homology of universally tight sutured contact solid tori. arXiv:1006.4073v3, 2010.
- [38] Roman Golovko. The embedded contact homology of sutured solid tori. *Algebraic & Geometric Topology*, 11:1001–1031, 2011.
- [39] John Gray. Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, 69:421–450, 1959.
- [40] Mikhaïl Gromov. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82:307–347, 1985.
- [41] Helmut Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectization with applications to the Weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114:515–563, 1993.
- [42] Helmut Hofer. Polyfolds and a general Fredholm theory. arXiv:0809.3753, September 2008. To appear in Proceedings of the 2008 Clay research conference.
- [43] Helmut Hofer, Kris Wysocki, and Eduard Zehnder. Applications of polyfold theory II : The polyfolds of symplectic field theory. In preparation.
- [44] Helmut Hofer, Kris Wysocki, and Eduard Zehnder. Applications to polyfold theory I : The polyfolds of Gromov-Witten theory. arXiv:1107.2097, July 2011.
- [45] Ko Honda. On the classification of tight contact structures I. *Geometry and Topology*, 4:309–368, 2000.
- [46] Ko Honda. On the classification of tight contact structures II. *Journal of Differential Geometry*, 55(1), 2000.
- [47] Ko Honda, Will Kazez, and Gordana Matić. Tight contact structures and taut foliations. *Geometry and Topology*, 4:219–242, 2000.
- [48] Michael Hutchings. An index inequality for embedded pseudoholomorphic curves in symplectizations. *Journal of European Mathematical Society*, 4:313–361, 2002.
- [49] Michael Hutchings and Michael Sullivan. Rounding corners of polygons and the embedded contact homology of T^3 . *Geometry and Topology*, 10:169–266., 2006.

- [50] Michael Hutchings and Clifford Henry Taubes. Gluing pseudoholomorphic curves along branched covered cylinders I. *Journal of Symplectic Geometry*, 5:43–137, 2007.
- [51] Michael Hutchings and Clifford Henry Taubes. Gluing pseudoholomorphic curves along branched covered cylinders II. *Journal of Symplectic Geometry*, 7:29–133., 2009.
- [52] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [53] Wilhelm Klingenberg. *Riemannian Geometry*, volume 1 of *Studies in mathematics*. Gruyter and Co, Berlin, 1982.
- [54] Krystyna Kuperberg. A smooth counterexample to the Seifert conjecture in dimension 3. *Annals of Mathematics*, 140:723–732, 1994.
- [55] Janko Latschev and Chris Wendl. Algebraic torsion in contact manifolds. arXiv:1009.3262v2, 2010. With an appendix by Michael Hutchings. To appear in *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*.
- [56] François Laudenbach. Symplectic geometry and Floer homology. *Ensaïos Mathematicos*, 7:1–50, 2004.
- [57] Gang Liu and Gang Tian. Floer homology and Arnold conjecture. *Journal of Differential Geometry*, 49:1–74, 1998.
- [58] Patrick Massot. *Sur quelques propriétés riemanniennes des structures de contact en dimension 3*. Thèse de doctorat, ENS Lyon, 2008.
- [59] Daniel Mathews. *Chords diagrams, contact-topological quantum field theory, and contact categories*. PhD thesis, Stanford University, 2009.
- [60] Dusa McDuff. Singularities and positivity of intersections of J -holomorphic curves. In Audin and Lafontaine [2]. With an appendix by Gang Liu.
- [61] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, volume 52 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [62] Mark McLean. The growth rate of symplectic homology and affine varieties. arXiv:1011.2542v3, 2010.
- [63] John Milnor. A note on curvature and fundamental group. *Journal of Differential Geometry*, 2:1–7, 1968.
- [64] John Milnor and James Stasheff. *Characteristic classes*, volume 76 of *Annals of mathematics studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [65] Jürgen Moser. On the volume elements on a manifold. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 286–294, 1965.
- [66] Paul Seidel. A biased view of symplectic cohomology. *Current Developments in Mathematics*, 2006:211–253, 2008.
- [67] Clifford Henry Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry & Topology*, 11:2117–2202., 2007.
- [68] William Thurston. Three-dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, 6(3):357–391, 1982.
- [69] William Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, 1998.
- [70] Mei Lin Yau. Vanishing of the contact homology of overtwisted contact 3-manifolds. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series)*, 1(2):211–229, 2006. With an appendix by Yakov Eliashberg.

Index

- \mathcal{A} , 115
- \mathcal{H} , 141
- Q_ε , 98
- R_ε , 98
- S_B , 137
- S_h , 141
- \mathcal{U} , 136
- \mathcal{V} , 136
- X , 101
- $X^{[y_0, y_1]}$, 98
- $X^{\geq y_0}$, 98
- $X^{\leq y_0}$, 98
- Y , 101
- Γ_{lissage} , 119
- Γ_{prec} , 127
- Σ , 136
- α_{prec} , 127
- α_{conv} , 144
- ε_{inf} , 127
- ε_{sup} , 127
- ε_Γ , 130
- $\eta(k_{\text{inf}})$, 127
- $\eta(k_{\text{sup}})$, 127
- $\tilde{\mu}$, 78
- l_{inf} , 118
- l_{sup} , 118
- v_Δ , 142
- y_{lissage} , 126
- y_{prec} , 126
- y_h , 128

- aire de contact, 36
- application
 - contractante, 99
 - dilatante, 99
 - préservant les fibres, 98
 - renversant les fibres, 98
- arc d'attachement, 26
- augmentation, 42
 - tiré en arrière, 42

- champ de Reeb, 19
- champ de vecteurs de contact, 19
- classe de Nielsen, 70
- condition de contact, 19
- contactomorphisme, 19
- convexification, 23
- coordonnées horizontale, 98
- coordonnées verticale, 98

- courbe
 - ε -horizontale, 98
 - ε -verticale, 98
- courbe de découpage, 21
- courbe legendrienne, 20
- courbe pseudo-holomorphe, 35
 - négativement asymptote à une orbite de Reeb, 36
 - positivement asymptote à une orbite de Reeb, 36
- courbe transverse, 20
- croissance
 - exponentielle, 43
 - polynomiale, 43
- cylindre trivial, 36

- diagramme de cordes, 32

- énergie de Hofer, 36
- enroulement, 29
- équation de Cauchy-Riemann, 35
- équation de contact, 19
 - adaptée, 23
 - hypertendue, 19
 - Morse-Bott, 55

- feuilletage caractéristique, 20
- feuilletage de rocade, 115
- fibre horizontale, 98
- fibre verticale, 98
- flot contrôlé, 122
- forme (F), 22
- forme (F1), 79
- forme (F2), 80
- forme de contact, 19

- homologie de contact, 39
 - taux de croissance, 44
 - croissance, 44
 - cylindrique, 41
 - linéarisée, 42
 - Morse-Bott, 56
 - partielle, 42
 - suturée, 49
 - taux de croissance, 46
 - totale, 39
- hypothèse H, 40

- indice de Conley-Zehnder, 25

- lemme de réalisation, 21
- lissage
 - symétrique, 120
- méthode de Moser, 20
- modèle de rocade, 119
- orbite périodique
 - bonne, 26
 - dégénérée, 25
 - elliptique, 26
 - hyperbolique, 26
 - mauvaise, 26
 - non dégénérée, 25
- paire de convexification, 144
- perturbation pré-convexe, 126
- point périodique
 - non dégénéré, 70
- position de recollement, 77
- positivité d'intersection, 37
- propriété (P), 87
- pseudo-Anosov, 69
- recollement de rocade, 27
 - K -hyperbolique, 103
- rectangle, 98
- rocade, 26
 - pré-convexe, 128
 - lissée, 116
 - lissage, 119
 - triviale, 27
 - vrillée, 27
- rocade convexe hyperbolique, 101
 - contrôlée, 102
- singularité
 - elliptique, 26
 - hyperbolique, 26
 - négative, 26
 - positive, 26
- structure de contact, 19
 - S^1 -invariante, 29
 - cloisonnée, 29
 - conjugaison, 19
 - hypertendue, 19
 - isotopie, 19
 - tendue, 20
 - universellement tendue, 20
 - virtuellement vrillée, 20
 - vrillée, 20
- structure presque complexe, 35
 - adaptée, 36
- surface K -hyperbolique, 99
 - contrôlée, 100
 - stable, 100
- surface concave, 23
- surface convexe, 21
- surface de recollement, 77
- suture, 49
- symplectisation, 36
- système inductif, 44
 - isomorphisme, 44
 - morphisme, 44
- taux de croissance, 43
- théorème de Gray, 19
- tore incompressible, 38
- variété close, 8
- zone de recollement, 77

Résumé : Le sujet de cette thèse est la géométrie de contact, en particulier l'étude des orbites périodiques du champ de Reeb. Colin et Honda ont conjecturé que sur une variété hyperbolique munie d'une structure de contact universellement tendue, le nombre d'orbites périodiques de Reeb croît exponentiellement avec la période. Dans les cas non hyperboliques, ils prédisent un comportement polynomial de l'homologie de contact. On montre dans ce texte qu'une variété possédant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle porte une infinité de structures de contact non isomorphes pour lesquelles le nombre d'orbites périodiques de tout champ de Reeb non dégénéré croît exponentiellement avec la période. Ce résultat s'obtient grâce à un résultat de croissance de l'homologie de contact. De plus, on calcule l'homologie de contact et sa croissance dans un cas non hyperbolique : celui des structures universellement tendues non transversales aux fibres sur un fibré en cercles. Enfin, on étudie l'effet d'un recollement de rocade sur les orbites périodiques de Reeb. Cette opération décrit une modification élémentaire de la structure de contact. Elle consiste en l'attachement d'un demi-disque vrillé le long d'un arc legendrien contenu dans le bord de la variété. On montre que les orbites de Reeb créées s'expriment comme mots en les cordes de Reeb de l'arc d'attachement. On calcule l'homologie de contact d'un voisinage produit d'une surface convexe après recollement de rocade ainsi que de certaines structures sur le tore plein.

Mots clés : Géométrie de contact - Champ de Reeb - Homologie de contact - Croissance- Dynamique hyperbolique.

Summary : We study contact geometry, and focus on the study of periodic orbits of the Reeb vector field. It is a conjecture of Colin and Honda that for universally tight contact structures on hyperbolic manifolds, the number of Reeb periodic orbits grows exponentially with respect to the period, and they speculate further that the growth rate of contact homology is polynomial on non-hyperbolic manifolds. Along the lines of the conjecture, for manifolds with a hyperbolic component that fibers on the circle, we prove that there are infinitely many non-isomorphic contact structures for which the number of periodic orbits of any non degenerate Reeb vector field grows exponentially. Our result hinges on the exponential growth of contact homology which we derive as well. We also compute contact homology in some non hyperbolic cases that exhibit polynomial growth, namely those of universally tight contact structures non transverse to the fibers on a circle bundle. Finally we study consequences on Reeb periodic orbits of a bypass attachment, an elementary change of the contact structure consisting in attachment of half an overtwisted disc along a Legendrian arc. We describe new periodic orbits in terms of Reeb chords of the attachment arc, we compute contact homology of a product neighborhood of convex surfaces after a bypass attachment and we compute contact homology for some contact structures on solid tori.

Key words : Contact geometry - Reeb vector field - Contact homology - Growth rate - Hyperbolic dynamics.