

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE

Année 2012

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Convection mantellique, topographie et géoïde sur Mars et Vénus

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline: Sciences de la Terre et de l'Univers
Spécialité: Planétologie

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Olivia GOLLE

Le 22 Mai 2012, devant le jury ci-dessous

Président	M. Christophe SOTIN, Professeur, LPGN, Nantes
Rapporteurs	Mme. Luce FLEITOUT, Directrice de recherche, École Normale Supérieure, Paris M. Pascal ROSENBLATT, Maître de conférence, Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles
Examineurs	Mme. Catherine THORAVAL, Chargé de recherche CNRS, Géoscience Montpellier M. Ondřej ČADEK, Professeur, Department of Geophysics, Prague
Invitée	Mme. Caroline DUMOULIN, Maître de conférence, LPGN, Nantes

Directeur de thèse: M. Gaël CHOBLET, Chargé de recherche, LPGN, Nantes

Remerciements

Je remercie d'abord ceux sans qui tout ceci n'aurait jamais vu le jour, mes encadrants. Gaël et Caroline, je vous exprime toute la gratitude que vous méritez. Vous avez toujours été présents et disponibles et pour autant j'ai eu le degré de liberté nécessaire à un développement intellectuel et scientifique indépendant, grâce aux erreurs que j'ai pu commettre, à la réécriture permanente des paragraphes de l'article, des chapitres du manuscrit, à la reprise incessante des figures, ... C'est comme ça qu'on apprend et j'ai vraiment le sentiment d'avoir appris. Merci également à Ondřej qui m'a accueillie d'abord une semaine puis deux mois et qui m'a guidé au milieu de l'immensité des harmoniques sphériques avec une patience indispensable. Et encore merci d'avoir fait le déplacement jusqu'ici pour assister à la présentation.

Je tiens également à remercier les membres du jury qui ont accepté de faire partie de cette aventure et d'évaluer ce travail. Merci à Luce Fleitout et à Pascal Rosenblatt d'avoir lu l'intégralité de ce manuscrit. Merci également à Christophe Sotin, Catherine Thoraval et Ondřej Čadek pour avoir répondu présents en tant qu'examineurs.

Enfin, je remercie l'ensemble des membres permanents du laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes ainsi que tous les membres non-permanents de l'unité.

Table des matières

Introduction	1
1 Les planètes telluriques	7
1.1 Topographie, gravité et grandeurs spectrales	8
1.1.1 Les harmoniques sphériques	9
1.1.2 Représentation spectrale et représentation discrète	12
1.1.2.1 Reconstruction d'un champ scalaire sur une grille à partir des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques (synthèse)	12
1.1.2.2 Reconstruction des coefficients d'harmoniques sphériques d'un champ scalaire à partir de ses valeurs discrètes sur une grille (analyse)	13
1.1.3 Spectre de puissance, corrélation et admittance	13
1.1.4 Topographie, potentiel et équipotentielle de gravité et modèles de compensation	14
1.1.4.1 Absence de compensation	16
1.1.4.2 Compensation isostatique	16
1.1.4.3 Compensation par flexure - modèle de lithosphère élastique	19
1.1.4.4 Compensation dynamique - modèle d'un panache sous-jacent	20
1.2 La Terre	25
1.2.1 Structure interne	25
1.2.2 Topographie, gravité et géoïde sur Terre	28
1.2.2.1 Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde	28
1.2.2.2 Spectres de puissance, corrélation et admittance	28
1.2.2.3 Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes	33
1.3 Mars	37
1.3.1 Structure interne	37

1.3.2	Topographie, gravité et géoïde sur Mars	43
1.3.2.1	Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde	43
1.3.2.2	Spectres de puissance, corrélation et admittance	47
1.3.2.3	Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes	47
1.4	Vénus	58
1.4.1	Structure interne	59
1.4.2	Topographie, gravité et géoïde sur Vénus	62
1.4.2.1	Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde	62
1.4.2.2	Spectres de puissance, corrélation et admittance	64
1.4.2.3	Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes	65
2	Convection mantellique et déformation de la lithosphère	73
2.1	Rhéologie	73
2.1.1	Déformation élastique	74
2.1.2	Déformation visqueuse	75
2.2	Sources d'énergie, observations et convection sur les planètes	76
2.2.1	Sources d'énergie pour les corps du Système Solaire	76
2.2.2	Observations et hypothèses de convection dans les manteaux planétaires	77
2.3	Mars	81
2.4	Vénus	85
2.5	Transferts thermiques dans les manteaux planétaires	89
2.5.1	Conduction	90
2.5.2	Convection	90
2.5.2.1	Équations de la convection	91
2.5.2.2	Nombres caractéristiques	92
2.5.2.3	Régimes de convection	93
2.6	La modélisation numérique de la convection mantellique	96
2.6.1	Modèles numériques 3D sphériques	96
2.6.2	<i>Oedipe</i> : Outil d'Étude de la Dynamique Interne des Planètes et de leur Évolution	97
2.6.2.1	Maillage et système de coordonnées 3D	99
2.6.2.2	Réécriture des équations dans le système de coordonnées sphériques	100
2.6.2.3	Méthode multigrille	102
2.6.2.4	Parallélisation	102
2.7	Modélisation de la lithosphère élastique	103

2.7.1	Le modèle de flexure élastique - approximation de couche mince	103
2.7.2	Modèle de déformation de la lithosphère élastique	104
2.7.2.1	Équations de la déformation	105
2.7.2.2	Décomposition spectrale des grandeurs - étape 1	106
2.7.2.3	Décomposition spectrale des opérateurs, des équations de conservation et formation du système d'équations linéaires - étapes 1 et 2	107
2.7.2.4	Discrétisation du domaine et résolution du système d'équations linéaires - étape 3	109
2.8	Modèle hybride : couplage entre le modèle de convection visqueuse dans le manteau (<i>Oedipe</i>) et le modèle de déformation élastique de la lithosphère	109
2.8.1	Relation géométrique entre <i>Oedipe</i> et le code de déformation de la lithosphère	110
2.8.2	Conditions mécaniques à la profondeur R_m dans <i>Oedipe</i> - Conditions mécaniques à la base du modèle de déformation élastique	111
2.8.2.1	Choix de la condition mécanique au rayon R_m	111
2.8.2.2	Évaluation des contraintes dans <i>Oedipe</i>	113
2.8.2.3	Évaluation des contraintes dans la coquille élastique	116
2.8.3	Condition au sommet de la coquille élastique	117
2.8.4	Détermination des filtres liés à la compensation élastique et calcul des observables synthétiques (topographies et géoïde) .	118
2.8.4.1	Détermination du filtre appliqué à la traction purement radiale	118
2.8.4.2	Détermination des filtres appliqués aux deux composantes de la traction (radiale et tangentielle)	119
2.8.4.3	Calcul et dimensionnement de la topographie et du géoïde	120
2.8.5	Approches similaires	123
3	Topography and geoid induced by a convecting mantle beneath an elastic lithosphere	125
3.1	Introduction	126
3.2	Model description and numerical methods	129
3.2.1	Conservation of energy	130
3.2.2	Flow in the viscous shell	131
3.2.3	Deformation of the elastic shell	134
3.2.4	Dynamic topography and geoid	136
3.3	Results	141

3.3.1	Elastic filtering of dynamic topography for planetary bodies	141
3.3.2	Lithospheric filtering	144
3.3.3	Application to cases with thermal convection	145
3.4	Discussion	153
3.5	Conclusions	156
4	Applications, discussions et perspectives	159
4.1	Généralités sur les calculs	159
4.2	Convection thermique dans un fluide où la viscosité dépend de la température et de la pression	168
4.2.1	Simulation de référence - simulation REF	168
4.2.2	Influence d'une diminution de la dépendance en pression dans la loi de viscosité - simulation P	172
4.2.3	Influence d'un saut de viscosité au milieu du manteau - simulation J	183
4.2.4	Influence du nombre de Rayleigh sur la convection - simulations Ra^- et Ra^+	193
4.2.5	Influence du mode de chauffage dans le manteau sur la convection - simulation H	210
4.3	Synthèse, Discussion et Perspectives	224
4.3.1	Synthèse	224
4.3.2	Comparaison avec Vénus	228
4.3.3	Discussions et Perspectives	232
4.3.3.1	Variations de l'épaisseur élastique dans le temps et dans l'espace	232
4.3.3.2	Influence de l'auto-gravitation et de la compressibilité sur les observables de surface	233
	Conclusion	235
	Références	239
	Annexe A : Écriture discrète des équations de conservation dans une cellule d'<i>Oedipe</i>	267
	Annexe B : Spherical harmonics, vectors and tensors	273

Table des figures

1.1	a) Géoïde schématique issu d'une compensation complète du type isostatique avec $N_{\ell m}(R_0)$ les coefficients en harmoniques sphériques du géoïde. b) <u>Modèle de compensation isostatique</u> : Diagramme schématique montrant la relation entre la topographie de surface et la topographie de la racine crustale avec R_0 le rayon moyen de la planète, ρ_{surf} la masse volumique à la surface, ρ_m la masse volumique du manteau, $\Delta\rho_{MOHO}$ la différence de masse volumique entre la racine et le manteau environnant ($\Delta\rho_{MOHO} = \rho_{surf} - \rho_m$), D l'épaisseur normale de croûte, R_{comp} le rayon correspondant à la profondeur de compensation, $h_{\ell m}^{MOHO}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de la racine (qui correspond à un approfondissement du Moho) et $h_{\ell m}^{surf}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de surface.	17
1.2	a) Géoïde schématique issu d'une compensation complète de la topographie de surface par flexure élastique de la lithosphère avec $N_{\ell m}(R_0)$ les coefficients d'harmoniques sphériques du géoïde. b) <u>Modèle de compensation par flexure élastique de la lithosphère</u> : Diagramme schématique montrant la relation entre topographie de surface et topographie à la base de la lithosphère élastique, avec $h_{\ell m}^{surf}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de surface, $w_{\ell m}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de la base de la partie élastique, ρ_{surf} la masse volumique de la surface, $\Delta\rho$ la différence entre la masse volumique de la lithosphère élastique (ρ_{surf}) et celle du manteau environnant (ρ_m) et D l'épaisseur de la lithosphère élastique.	19

- 1.3 a) Géoïde schématique issu d'une compensation complète de la topographie par des mouvements d'anomalies thermiques dans le manteau avec $N_{\ell m}(R_0)$ les coefficients en harmoniques sphériques du géoïde. b) Modèle de compensation dynamique : Diagramme schématique de la relation entre topographie (à la surface et à la CMB) et mouvements de convection dans le manteau avec en rouge les anomalies de masse négatives (anomalies thermiques chaudes) et en bleu les anomalies de masse positives (anomalies thermiques froides). $h_{\ell m}^{surf}$ sont les coefficients d'harmoniques sphériques de la topographie à la surface et $h_{\ell m}^{CMB}$ ceux de la topographie à la CMB. 21
- 1.4 Évolution de l'admittance théorique en fonction du degré d'harmonique ℓ pour trois modèles de compensation dans le cas de topographies parfaitement corrélées au géoïde. Avec $R_0 = 6378$ km le rayon de la planète considérée, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² la constante de gravitation, $g_0 = 9,81$ m·s⁻² la pesanteur, $\rho_{surf} = 2700$ kg·m⁻³ la masse volumique de surface, $\rho_m = 3300$ kg·m⁻³ la masse volumique dans le manteau, $D = 50$ km la profondeur de compensation du modèle isostatique et du modèle de flexure, C_ℓ^{de} le degré de compensation calculé grâce à l'équation (27) de Turcotte et al. (1981). 23
- 1.5 Structure interne de la Terre (gauche) déduite du premier modèle de vitesses des ondes sismiques, le PREM (Dziewonski et Anderson, 1981, à droite). Sur le graphique de droite, en rouge sont représentées les vitesses sismiques des ondes P et en bleu celles des ondes S. En noir apparaît le profil de masse volumique de la Terre déduit de la vitesse de propagation des ondes. 27
- 1.6 Profils radiaux de la viscosité pour la Terre. En pointillés épais, la viscosité moyenne du manteau inférieur et supérieur et en pointillés fins la discontinuité sismique à 670 km (Kaufmann et Lambeck, 2000). 28
- 1.7 Carte de la topographie terrestre globale jusqu'au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques de la mission SRTM. Données disponibles sur http://topex.ucsd.edu/WWW_html/srtm30_plus.html. 29
- 1.8 Carte des anomalies radiales de gravité de la Terre jusqu'au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la combinaison des données des missions GRACE et LAGEOS. Données disponibles sur http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005_eigen_gl04c_coef. 30

1.9	Carte des anomalies de géoïde terrestre jusqu'au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la combinaison des données des missions GRACE et LAGEOS. Données disponibles sur http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005_eigen_gl04c_coef	31
1.10	Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) terrestre jusqu'au degré 100.	31
1.11	Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l'anomalie radiale de gravité pour la Terre.	32
1.12	Carte de l'épaisseur élastique de la lithosphère terrestre après compilation de jeux de données de plusieurs études, d'après Watts (2007).	36
1.13	Photographie des deux faces de Mars. À gauche, une mosaïque de Mars centrée sur Vallès Marineris et à droite, une mosaïque de l'hémisphère opposé avec le vaste cratère Schiaparelli (près du centre). Crédits :NASA/JPL/Caltech	37
1.14	Profils de viscosité pour Mars (en bleu) et Vénus, proposés par Steinberger et al. (2010) sur la base d'un profil de température calculé dans leur étude.	40
1.15	Exemple de structure interne possible pour Mars déduite d'une synthèse de modèles de masse volumique (différentes courbes à droite) de Sohl et Schubert (2007). Ces trois modèles de masse volumique sont les résultats d'un modèle où la teneur en sulfure du noyau varie. En vert, un noyau de fer pur, en bleu un noyau composé uniquement de sulfure de fer et en rouge, un modèle intermédiaire avec la même proportion de fer pur que de sulfure de fer (le lecteur pourra se rapporter à l'étude Babeyko et Zharkov (2000) pour plus de détails).	42
1.16	Carte de la topographie martienne globale obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par l'instrument MOLA de la sonde MGS. Données disponibles sur http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/mgs/shadr.html	44
1.17	Carte des anomalies radiales de gravité à la surface de Mars jusqu'au degré 84 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par la sonde MGS. Données disponibles sur http://pds-geosciences.wustl.edu/geo/mgs-m-rss-5-sdp-v1/mors_1002/sha/	45

1.18	Carte des anomalies du géoïde martien (aréoïde) jusqu'au degré 84 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par la sonde MGS. Données disponibles sur http://pds-geosciences.wustl.edu/geo/mgs-m-rss-5-sdp-v1/mors_1002/sha/ .	46
1.19	Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) jusqu'au degré 84.	48
1.20	Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l'anomalie radiale de gravité pour Mars jusqu'au degré 84.	48
1.21	Modèle d'épaisseur crustale issu de l'utilisation (inversion) de la décomposition en harmoniques sphériques de la topographie et de la gravité pour des degrés compris entre 1 et 85 (Neumann et al., 2004). En haut à gauche, la carte de l'épaisseur crustale au niveau de la calotte polaire Nord et à droite, celle du pôle Sud.	51
1.22	Mosaïque de Vénus centrée sur 180°E obtenue par la sonde Magellan. Crédits : NASA/JPL	58
1.23	Modèle de structure interne de Vénus résultant du modèle de masse volumique proposé par Yoder (1995) construit à partir d'une remise à l'échelle du modèle de Terre interne (PREM) proposé par Dziewonski et Anderson (1981).	61
1.24	Carte de la topographie de Vénus jusqu'au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).	62
1.25	Carte des anomalies radiales de gravité sur Vénus jusqu'au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).	63
1.26	Carte des anomalies de géoïde de Vénus jusqu'au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).	63
1.27	Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) jusqu'au degré 148.	64
1.28	Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l'anomalie radiale de gravité jusqu'au degré 148.	65

1.29	Carte de l'épaisseur de la croûte (a), de l'épaisseur élastique de la lithosphère (b) et des différents modes de compensation du relief vénusien selon Anderson et Smrekar (2006).	70
2.1	Production cumulée d'énergie par impacts et chauffage par désintégration radioactive ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$) en fonction du temps depuis la formation du Système Solaire. Les croix correspondent aux impacteurs les plus petits, les cercles sont des impacteurs de la taille d'embryons planétaires et les carrés sont les impacts géants de la dernière étape de l'accrétion. La ligne en trait plein montre l'énergie cumulée associée à la décroissance des éléments radioactifs ^{26}Al , ^{60}Fe et ^{40}K ayant des demi-vies respectives de 0,73 Ma, 1,5 Ma et 1,25 Ga (Rubie et al., 2007).	77
2.2	Régimes de convection définis en fonction du nombre de Rayleigh à la base de la boîte ($\log_{10}Ra_1$) et du contraste de viscosité ($\log_{10}e^p$) (Solomatov, 1995). I : le régime de faible contraste de viscosité. II : Régime de couvercle mobile (ou <i>sluggish regime</i>) et III : le régime de couvercle stagnant (ou <i>stagnant lid</i>). À gauche, cas d'une rhéologie Newtonienne, les contours en pointillés représentent le domaine d'étude de Hansen et Yuen (1993), les tiretés celui de Christensen (1984) et le domaine en trait plein correspond au domaine supposé pour le manteau terrestre. À droite, le cas d'une rhéologie non-Newtonienne. Les carrés noirs représentent les résultats de l'étude de Solomatov (1995) et les triangles représentent le comportement supposé d'un manteau terrestre constitué d'olivine hydratée (triangle vide) ou d'olivine sèche (triangle plein).	95
2.3	Représentation classique du maillage d'une sphère selon méridiens et parallèles. On remarque la particularité d'un tel maillage au niveau des pôles, la surface de chaque maille diminue depuis l'équateur jusqu'au pôle, jusqu'à ce que les rectangles de l'équateur deviennent des triangles aux pôles.	97

2.4	Représentation des différents maillages d'une sphère utilisés par les programmes de modélisation de la dynamique des fluides. a) Maillage utilisé dans <i>Terra</i> par Baumgardner (1985) puis Hsui et al. (1995) avec un découpage en icosaèdres. b) Maillage du programme <i>CIT-COMs</i> , découpant la sphère en 12 blocs contenant des cellules quasi-rectangulaires (Zhong et al., 2000). c) Maillage en "Ying-Yang" de Kageyama et Sato (2004) découpant la sphère comme une balle de tennis (en deux blocs identiques). d) Maillage de <i>GAIA</i> utilisant les cellules de Voronoi (Huettig et Stemmer, 2008).	98
2.5	Représentation du maillage complet des six blocs "cubiques".	99
2.6	Représentation de la projection d'un cube sur la sphère avec le système de coordonnées r, ξ, η . Le point M sur la sphère de rayon r est référencé par les coordonnées angulaires ξ et η associés à deux grands cercles correspondant. La région étudiée représentée par les lignes solides constitue $\frac{1}{6}$ de la sphère. Elle est définie par les gammes suivantes de coordonnées pour ξ et pour $\eta : \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ Les coordonnées du système cartésien (x, y, z) sont également représentées comme référence.	99
2.7	Représentation schématique de la discrétisation radiale du modèle. À gauche, la position des interfaces (r) et entre les interfaces (s) et à droite la position des inconnues σ et u	110
2.8	Couplage géométrique du modèle hybride. (G) représente la coquille visqueuse simulant la convection dans le manteau (basée sur la méthode des volumes finis) et (S) représente la coquille élastique, simulant la déformation de la lithosphère (basée sur une méthode spectrale).111	111
2.9	Les fonctions réponse présentées ici sont calculées à partir du profil de viscosité issu de modèle GIA (a) de Mitrovica et Forte (2004). Fonction réponse de la gravité pour une condition de surface de free-slip (b) ou pour une condition de no-slip (c). Fonction réponse de la topographie de surface pour une condition de free-slip (d) ou de no-slip (e). Fonction réponse de la topographie à la CMB pour une condition de free-slip (f) ou de no-slip (g) (Forte, 2007).	114
3.1	The hybrid model we propose couples a viscous shell mimicking the viscous part of the lithosphere together with the underlying mantle to an elastic shell at its surface mimicking the elastic part of the lithosphere. (G) refers to a grid-based method, whereas (S) indicates a semi-spectral method.	130

- 3.2 Influence of the elastic thickness on normalized surface topography (left) and geoid (right) response functions obtained for a viscous shell overlain by an elastic shell of thickness 0, 53, 106, or 159 km for degrees $\ell = 2$ (black) and 16 (grey). Filled circles indicate HM (Hybrid Method) results while lines refer to the SSM (reference Semi-Spectral Method). Crosses denote the results obtained with the IVF-TES (Instantaneous Viscous Flow with Thin Elastic Shell) model (see e.g., Zhong, 2002). Viscosity is 10^6 above the dashed line, 1 below. 139
- 3.3 Elastic filter coefficients C_ℓ (top) and S_ℓ (bottom) as functions of harmonic degree ℓ (see eqs. 3.30, 3.32) computed for three generic bodies : Venus-like (light grey lines), Mars-like (grey) and Dione-like (black). Two different thicknesses d_e of the elastic lithosphere are considered for each body. Values of g , μ and ρ_m for Mars and Venus are listed in Table 3.3. In the case of Dione, $g = 0.22 \text{ m s}^{-2}$, $\mu = 9 \text{ GPa}$ and $\rho_m = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ 143
- 3.4 Influence of the mechanical coupling on normalized surface topography (top) and geoid (bottom) response functions for a viscous shell overlain by an elastic shell of thickness 106 km for harmonic degrees $\ell = 2, 8$ and 16. Dashed lines correspond to results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details). Grey lines indicate the case without an elastic lithosphere ($d_e = 0 \text{ km}$), for comparison. Viscosity is 10^6 above the horizontal dotted line, 1 below. 146
- 3.5 Horizontally averaged viscosity profiles associated with the two thermal convection cases (Mars-like and Venus-like body). 148
- 3.6 Topography (left column) and geoid (right column) obtained for the Venus-like convection case (see Table 3.3). (Top) No elastic lithosphere. (Middle) elastic thickness of 46 km in the radial approximation. (Bottom) elastic thickness of 46 km with full coupling. See text for more details on mechanical coupling. 150
- 3.7 Power spectra of surface topography and geoid obtained for the Venus-like convection case (see Table 3.3) with a 46 km thick elastic lithosphere. Dashed lines indicate results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details). Grey lines indicate the case without an elastic lithosphere ($d_e = 0 \text{ km}$). 151

3.8	Geoid obtained for the Mars-like convection case (see Table 3.3). The uppermost panel corresponds to a case with no elastic lithosphere. Below, cases with elastic thicknesses of 52, 104, 156 km are presented. (Right) Full coupling. (Left) Radial approximation. See text for more details on mechanical coupling.	152
3.9	Geoid power spectra obtained for the Mars-like convection case (see Table 3.3). Dashed lines indicate results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details).	153
4.1	Comparaison des deux lois viscosité associées au profil de température moyen de la simulation de référence en bleu (REF - que nous détaillerons par la suite). En noir, le profil de viscosité calculé par l'approximation Frank-Kamenetskii et en rouge le profil de viscosité de type Arrhénius. La ligne verticale en pointillés représente le contraste de viscosité maximum imposé (<i>cutoff</i>).	161
4.2	Méthode de calcul de la température interne moyenne T_i à partir des flux diffusif et advectif pour la simulation de référence.	163
4.3	Simulation de référence (REF). a) Représentation 3D de l'isotherme 0,629 (2327 K, à gauche) et de l'isotherme 0,575 (2127 K, à droite). b) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge). La ligne pontillée verticale représente la séparation entre la simulation avec une résolution de 6×32^3 et la simulation en 6×64^3 . c) Profils de température moyenne adimensionnée (noir) et de viscosité moyenne adimensionnée (rouge). d) Profils des flux de chaleur adimensionnés advectif (noir) et diffusif (rouge) moyens. e) Profils des vitesses radiales moyennes maximum adimensionnées ascendantes (rouge) et descendantes (noir). La ligne horizontale en pointillés sur les profils c), d) et e) représente la base du couvercle, d'environ 300 km d'épaisseur.	171
4.4	Simulation avec une diminution de la dépendance avec la profondeur de la loi de viscosité ($\Delta\eta_P=20$). a) Représentation 3D des isothermes 0,7 (2589 K, à gauche) et de 0,645 (2386 K, à droite). b, c, d et e) Profils moyens adimensionnés de la température, de la viscosité, des flux de chaleur et des vitesses radiales moyennes. Les profils marrons sont ceux de la simulation REF, voir la Figure 4.3 pour plus de détails. La ligne pointillée horizontale représente la base du couvercle défini dans la simulation REF.	173

4.5	a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour la simulation de référence (REF, à gauche) et pour la simulation où la dépendance en profondeur a été diminuée (P, à droite). La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 185 km de profondeur et c) Champ de température à la demi-cellule au-dessus de la CMB.	176
4.6	Cartes de la topographie dynamique de surface pour la simulation de référence à gauche et pour la simulation P à droite. En haut : sans lithosphère élastique (topographie dynamique purement visqueuse) et en bas : avec une lithosphère élastique de 46,3 km.	178
4.7	Cartes du géoïde associé à la simulation de référence à gauche et à la simulation P à droite. En haut : cartes du géoïde associé à une topographie dynamique purement visqueuse (sans coquille élastique) et en bas : cartes du géoïde associé à une topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km.	179
4.8	a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour le dernier pas de temps, sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations P (trait plein) et REF (trait pointillés). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations P (trait plein) et REF (trait pointillés).	181
4.9	Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique de surface des simulations REF (en rouge) et P (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la topographie dynamique pour la simulation P et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	182
4.10	Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF (en rouge) et P (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle du géoïde pour la simulation P et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	182
4.11	Admittances moyennes entre topographie dynamique de surface et géoïde associés de la simulation P (en noir) et de la simulation REF (en rouge). La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de l'admittance pour la simulation P et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	183

4.12	Simulation avec une viscosité stratifiée (saut de viscosité au milieu du manteau, simulation J). a) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge). b) Représentation 3D de l'isotherme 0,66 (2441 K, à gauche) et de l'isotherme 0,605 (2238 K, à droite) à l'instant 8. c) Profils de la température moyenne adimensionnée pour les huit instantanés analysés et en pointillés noirs, celui de la simulation REF. d) Profils de la viscosité moyenne adimensionnée pour les huit instantanés analysés et en pointillés noirs, celui de la simulation REF.	185
4.13	Cartes de la décomposition en harmoniques sphériques du champ de température pour les huit instantanés, à quatre profondeurs : juste au-dessus de la CMB (3062,4 km), à 3039 km, à 278 km et enfin à 232 km.	188
4.14	Cartes de la topographie dynamique de surface (cadre rouge) et du géoïde (cadre bleu), associés aux huit instantanés, sans lithosphère élastique (gauche) ou avec une lithosphère de 46,3 km (droite).	189
4.15	a) Identification des huit instantanés sur l'évolution temporelle de la température. b) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface purement visqueuse pour les huit instantanés, avec un agrandissement entre les degrés 2 et 8. c) Spectres de puissance du géoïde associé aux huit instantanés avec un agrandissement entre les degrés 2 et 8.	190
4.16	Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique des simulations REF (en rouge) et J (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la topographie dynamique pour la simulation J entre les points 1 et 8 et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	191
4.17	Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF (en rouge) et J (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle du géoïde pour la simulation J entre les 8 instantanés et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	192
4.18	Admittances moyennes entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé pour les simulations J (en noir) et REF (en rouge). La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de l'admittance pour la simulation J et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.	192

4.19	Simulation avec une modification du nombre de Rayleigh (Ra^- , REF et Ra^+). a) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge) moyennés sur toute la coquille sphérique. Les flèches et les numéros associés identifient les instantanés des Figures 4.22 et 4.23 et l'étiquette <i>dpt</i> identifie le dernier pas de temps, correspondant aux Figures 4.27 et 4.28. b) Profils de la température (pointillés) et de la viscosité (trait plein) adimensionnées et moyennés dans le temps à partir de l'instant 1, pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). d) Profils des flux advectifs moyens (trait plein) et diffusifs moyens (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). e) Profils des vitesses radiales moyennes maximum ascendantes (trait plein) et descendantes (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu).	195
4.20	Représentation 3D des isothermes pour les simulations Ra^- (a), REF (b) et Ra^+ (c).	198
4.21	a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ . La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 626 km de profondeur (Ra^-), 255 km (REF) et 209 km (Ra^+) et c) Champ de température de la demi-cellule au-dessus de la CMB (3062,4 km de profondeur).	200
4.22	Cartes de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé de la simulation Ra^- pour les quatre instantanés identifiés sur la Figure 4.19a, sans lithosphère élastique.	202
4.23	Cartes de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé de la simulation Ra^+ pour les sept instantanés identifiés sur la Figure 4.19a, sans lithosphère élastique.	203
4.24	Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique de surface des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu) sans lithosphère élastique. Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle de la topographie dynamique de chaque simulation.	204
4.25	Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu) associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse. Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle du géoïde de chaque simulation.	204

4.26	Admittances moyennes entre la topographie dynamique de surface purement visqueuse et le géoïde des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle de l'admittance de chaque simulation.	205
4.27	Cartes de la topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et filtrée par une lithosphère élastique de 46,3 km (droite) pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ au dernier pas de temps (<i>dpt</i> sur la Figure 4.19a).	207
4.28	Cartes du géoïde associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et filtrée par une lithosphère élastique de 46,3 km (droite) pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ au dernier pas de temps (<i>dpt</i> sur la Figure 4.19a).	208
4.29	a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour le dernier pas de temps, sans lithosphère élastique (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (trait pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu).	209
4.30	Simulation avec ajout de chauffage interne (simulation H). a) Représentation 3D des isothermes 0,92 (3403 K, à gauche) et 0,875 (3237, à droite). b) Évolution temporelle de la température et des nombres de Nusselt à la base et au sommet. c), d) et e) Profils de la température moyenne, de la viscosité moyenne, des flux de chaleur moyens et des vitesses radiales moyennes. Les profils marrons sont ceux de la simulation REF.	213
4.31	a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour la simulation de référence (REF, à gauche) et pour la simulation avec un chauffage interne (H, à droite) au dernier instant respectif des simulations. La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 185 km de profondeur et c) Champ de température à 23,1 km au dessus de la CMB (demi-cellule au-dessus) pour la simulation REF et à 185 km au dessus de la CMB pour la simulation H.	215
4.32	Cartes de température à 4568 km de profondeur (gauche) et à 463 km de profondeur (droite) pour le dernier pas de temps de la simulation H.	216

-
- 4.33 Cartes de la topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et du géoïde associé (droite) des 9 instantanés de la simulation H. 218
- 4.34 Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique des simulations REF et H sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF. 219
- 4.35 Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF et H associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF. 219
- 4.36 Admittances moyennes entre topographie dynamique de surface purement visqueuse et géoïde de la simulation H (noir) et REF(rouge). La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF. 220
- 4.37 Cartes de la topographie dynamique de surface pour la simulation de référence à gauche et pour la simulation H à droite. En haut : cartes de la topographie dynamique sans lithosphère élastique (topographie purement visqueuse) et en bas : cartes de la topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km. 221
- 4.38 Cartes du géoïde associé à la simulation de référence à gauche et à la simulation H à droite. En haut : cartes du géoïde associé à une topographie dynamique purement visqueuse (sans coquille élastique) et en bas : cartes du géoïde associé à une topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km. 222
- 4.39 a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour l'instantané 3 de la simulation H (trait plein) et du dernier pas de temps de la simulation REF (pointillés), sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations REF (pointillés) et H (traits pleins). 223

4.40	En haut : spectres de puissance de la topographie dynamique, du géoïde associé et admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde pour les différentes simulations sans lithosphère élastique et pour le dernier instantané (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km d'épaisseur (en pointillés). En bas : spectres de puissance moyens et enveloppes temporelles de la topographie dynamique, du géoïde associé et des admittances des différentes simulations sans lithosphère élastique. En noir (trait épais) sont représentés les spectres de puissance et l'admittance de Vénus.	231
4.41	a) Fonctions réponse du géoïde pour les degrés 2 et 10 incluant l'auto-gravitation (trait plein) ou sans auto-gravité (pointillés) (Ribe, 2007). Fonctions réponse du géoïde (b) et de la topographie dynamique de surface (c) pour un fluide isovisqueux compressible (trait pleins) ou incompressible (pointillés), d'après Forte et Peltier (1991).	234
42	Schéma d'une cellule \mathcal{C}_{ijk} d' <i>Oedipe</i> . Les vitesses sont évaluées au centre des faces du cube alors que la température et la pression sont évaluées au centre de la cellule.	268

Liste des tableaux

1.1	Critères d'orthonormalité des fonctions harmoniques sphériques, facteur de normalisation de ces fonctions, définitions des fonctions harmoniques sphériques normalisées et fonctions de Legendre associées normalisées. $Y_{\ell m'}^*(\theta, \varphi)$ sont les fonctions harmoniques sphériques complexes conjuguées de $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ et δ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\ell\ell'} = 0$ si $\ell \neq \ell'$ et $\delta_{\ell\ell} = 1$ si $\ell = \ell'$), Ces notations sont utilisés par exemple par Čadek (1989) et Wieczorek (2007).	10
1.2	Synthèse de l'estimation de l'épaisseur élastique d_e , du gradient thermique $\frac{\partial T}{\partial z}$ et du flux de chaleur q en fonction de la masse volumique de la charge ρ_l (de surface : $f = 0$ et/ou de sub-surface : $f \neq 0$) de McGovern et al. (2004) et de Belleguic et al. (2005). Les exposants concernent exclusivement l'étude de McGovern et al. (2004) avec : ^c la masse volumique crustale est égale à $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ^f la masse volumique de la croûte est égale à la masse volumique de la charge et ^g une charge de sub-surface est ajoutée.	57
3.1	List of variables, parameters and corresponding symbols.	132
3.2	Errors on surface topography and geoid response functions obtained with our method. The error is the maximum difference between the models obtained by our hybrid method (HM) and the reference semi-spectral method (SSM) normalized by the maximum absolute value obtained by SSM for a given response function.	140
3.3	Parameter values used in the two convection calculations. Symbols are described in Table 3.1.	148

4.1	Relations Nu-Ra. 1D, 2D, 3D, 3Ds (géométrie sphérique) fait référence à la géométrie du modèle utilisé, f représente le rapport d'aspect, LRa indique un nombre de Rayleigh local, B indique un chauffage par la base et I un chauffage interne. Ce tableau est modifié d'après de l'étude de Wolstencroft et al. (2009) dans laquelle vous trouverez plus de détails.	167
4.2	Listes et valeurs des paramètres utilisés pour les différentes simulations et des résultats des simulations Ra_i , η_0 , η_i et T_i . Les variables a_{vis} , b_{vis} et c_{vis} sont constantes dans toutes les simulations et sont égales à 12,15 - 0,25 et 10^9	167
4.3	Listes et valeurs des paramètres utilisés pour le dimensionnement. . .	168
4.4	Écart maximum entre les enveloppes temporelles et la valeur moyenne au degré 2.	201
4.5	Résultats des différentes simulations avec \bar{T} la température adimensionnée moyennée dans le temps et sur toute la sphère, $\bar{\eta}$ (Pa·s) et \bar{T} (K) la viscosité et la température moyennées dans le temps à 4497,7 km de rayon, \overline{Nu}_{haut} et $\overline{Nu}_{bas} \cdot f^{-2}$ les nombres de Nusselt au sommet et à la base (corrigé du facteur géométrique f) moyennés dans le temps et sur toute la sphère, $\bar{q}_{cond.}$ et $\bar{q}_{conv.}$ les flux diffusif et advectif adimensionnés et moyennés dans le temps à 4497,7 km de rayon, $h_{couv.}$ l'épaisseur du couvercle évaluée au point d'égalité des flux de chaleur en surface, $\bar{V}_r^{asc.}$ et $\bar{V}_r^{desc.}$ les vitesses moyennes radiales adimensionnées ascendantes et descendantes maximum.	227
4.6	Évaluation des observables des différentes simulations pour les instantanés présentés dans le texte. La topographie et le géoïde sont en mètres et l'admittance en km/m.	227
7	List of non-zero elements of matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} , eq. (3.17)	278
8	List of elements of matrices \mathbf{T} and \mathbf{U} , eqs (3.19)-(3.20)	279

Introduction

La connaissance de la structure interne de la Terre est tirée de l'étude approfondie des ondes sismiques qui la parcourent et dont l'analyse révèle de précieuses informations. Ainsi, Dziewonski et Anderson (1981) établissent le premier modèle radial de vitesses des ondes sismiques qui caractérise la structure interne de la Terre : le PREM (*Preliminary Reference Earth Model*). Associée à ce premier modèle, l'étude des phénomènes qui perturbent l'équilibre hydrostatique de la Terre permet de définir une gamme de profils de viscosité possibles pour la Terre. La plupart des informations géophysiques internes dont nous disposons sont principalement déterminées par ces méthodes.

Sur les autres planètes telluriques du Système Solaire, la Lune mise à part, nous n'avons pour l'instant aucune donnée sismologique permettant une telle investigation de la structure interne. Les seules informations sont fournies par (1) les météorites martiennes, (2) les mesures géodésiques (champ de topographie et champ de gravité) et les mesures du champ magnétique ou (3) par l'utilisation du modèle PREM remis à l'échelle de la planète considérée. La majorité des études fondée sur l'analyse de la topographie et de la gravité sur des planètes comme Mars ou Vénus concerne la résolution du problème inverse. La première méthode de résolution consiste en un modèle très contraint qui associe un mode de compensation des reliefs imposé *a priori* à une topographie et une gravité mesurée par les sondes en orbite (que l'on relie grâce à l'admittance). Une masse volumique et/ou l'épaisseur de la croûte ainsi que la masse volumique du manteau sont également imposées. La résolution de ce problème inverse aboutit à une valeur unique de l'épaisseur élastique de la lithosphère (ou de l'épaisseur de la croûte). La seconde méthode considère également un mode de compensation des reliefs *a priori* mais échantillonne cette fois-ci une gamme de valeur d'épaisseur élastique de la lithosphère, d'épaisseur de la croûte et éventuellement de masse volumique. Une méthode de résolution inverse est alors utilisée et des couples de valeurs pour ces paramètres sont jugés préférentiels lorsque la différence entre la topographie générée par le modèle et celle qui est réellement enregistrée par les sondes en orbite est minimum. Les solutions que ces études pro-

posent sont alors souvent non-unique. La nature de la compensation choisie varie selon la longueur d'onde des reliefs considérés. De manière classique, pour les reliefs de longueurs d'ondes intermédiaires, le mode de compensation souvent invoqué est d'origine lithosphérique (flexure élastique) et la compensation de type isostatique (crustale) est un cas extrême de la compensation par flexure élastique, lorsque la rigidité est nulle. Enfin, les structures topographiques de plus grande longueur d'onde sont généralement associées à la présence d'un panache mantellique et le terme "dynamique" est attribué à la topographie générée.

Pour Mars, en considérant une compensation des reliefs par isostasie, les études d'inversion des données de topographie et de gravité proposent des gammes d'épaisseur de la croûte variables mais qui semblent converger vers une valeur aux alentours de 50 km (McGovern et al., 2004; Wieczorek et Zuber, 2004; Neumann et al., 2004) (qui peut varier fortement selon les régions). Ces épaisseurs suggérées sont en profond désaccord avec les résultats invoqués par l'analyse des météorites SNC qui proposent une épaisseur de croûte 2 à 5 fois plus grande (Sohl et Spohn, 1997), dont le maintien dans le temps reste cependant énigmatique. En considérant cette fois une compensation des reliefs par flexure élastique de la lithosphère, certains auteurs suggèrent des épaisseurs élastiques de 100 kilomètres, jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres localement (McGovern et al., 2004; Belleguic et al., 2005; Phillips et al., 2008). Ces épaisseurs élastiques de la lithosphère semblent compatibles avec les épaisseurs calculées par les modèles d'évolution thermique de Mars (Grott et Breuer, 2010). À partir du profil de température lithosphérique du modèle d'évolution thermique, les auteurs déterminent un isotherme qui marque la base de la lithosphère mécanique que McNutt (1984) propose de relier simplement à la lithosphère élastique. La particularité de la planète Mars réside dans la présence de structures topographiques de grandes longueurs d'ondes (la dichotomie crustale et le dôme de Tharsis) où une première hypothèse de soutien fait intervenir la convection mantellique dont l'étude procède cette fois du problème direct (par exemple Harder, 2000). La seconde hypothèse suggère que Tharsis est une simple construction volcanique maintenue par flexure élastique de la lithosphère sous-jacente (Banerdt et Golombek, 2000). Des études récentes suggèrent une double contribution, celle d'un panache mantellique et la présence d'une lithosphère élastique. La topographie dynamique ainsi générée ne représente plus qu'une petite part de la topographie réelle enregistrée (Zhong et Roberts, 2003; Roberts et Zhong, 2004).

Concernant Vénus, nous n'avons ni données sismologiques ni météorites. Il existe un modèle de structure interne fondé sur l'utilisation du PREM (Yoder, 1995) mais

la topographie, la gravité et le géoïde sont les seuls observables géophysiques disponibles pour obtenir une quelconque information sur l'intérieur de la planète. D'autre part, la température élevée interdit l'enregistrement par les roches de surface d'un champ magnétique rémanent qui pourrait être mesurable en orbite. Spectres, corrélation et admittance sur Vénus semblent pencher pour une origine dynamique des structures de surface, au moins pour les degrés les plus faibles et jusqu'au degré 40 (Pauer et al., 2006; Wieczorek, 2007). Ainsi, pour les degrés les plus élevés, l'utilisation des données de surface, associées à un modèle de compensation isostatique du relief pour le problème inverse, conduit à une épaisseur de croûte aux alentours de 40 km (Arkani-Hamed, 1996). La considération d'un soutien de la topographie par flexure élastique de la lithosphère conduit à des épaisseurs élastiques variables, de 10 km (McGovern et Solomon, 1992) à une centaine de kilomètres (Lawrence et Phillips, 2003) mais avec une valeur récurrente proche de 50 km (Anderson et Smrekar, 2006).

Mise à part les études concernant le soutien de la topographie de Tharsis et le géoïde associé, les travaux mentionnés ci-dessus relèvent du principe des problèmes inverses pour lesquels des données acquises par des sondes sont comparées à des modèles d'intérieur simples, par le biais d'hypothèses sur la nature de la compensation. Notre approche est ici complémentaire et concerne donc le problème direct : elle vise au calcul de "données" synthétiques associées à des modèles d'écoulements convectifs au sein des manteaux planétaires, combinés à un modèle de déformation de la lithosphère dont une partie est considérée élastique. Trois facteurs s'opposent clairement à l'obtention d'une topographie dynamique exactement similaire à celle des planètes. Le premier vient du fait que nous sommes incapable de déterminer précisément la part de topographie dynamique sur le signal de topographie totale enregistré en surface. Le second concerne la méconnaissance de la valeur des paramètres déterminant pour la convection : le nombre de Rayleigh, le profil de viscosité et le taux de chauffage interne. Enfin, le dernier facteur limitant est relatif à tous les ingrédients potentiels qui ne sont pas pris en compte dans notre modèle : transitions de phases, variation de composition, présence de croûte, variation de son épaisseur ou de celle de la lithosphère élastique ... Quand bien même l'ensemble de ces obstacles serait surmonté, il ne serait pas raisonnable d'espérer obtenir exactement les structures topographiques que l'on observe aujourd'hui à la surface. Conserver des amplitudes et un nombre de structures topographiques similaires est encore le mieux que nous puissions faire pour une comparaison raisonnable avec les planètes.

Tout ce qui concerne (1) le formalisme mathématique associé à la méthode spectrale pour la représentation et l'utilisation des champs de topographie et de gravité, (2) les grandeurs spectrales utiles à la caractérisation de ces champs et de leurs relations (spectre, corrélation, admittance) et enfin (3) les différents modes de compensation des reliefs ainsi que les caractéristiques spectrales associées est présenté dans la première partie du chapitre I. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la structure interne, la topographie, la gravité et leur utilisation pour les planètes Terre, Mars et Vénus.

Le deuxième chapitre traite dans un premier temps des deux rhéologies concernées par l'étude (visqueuse et élastique) puis des sources d'énergies disponibles pour la convection avant de regarder plus précisément les caractéristiques thermiques des planètes Mars et Vénus. La deuxième partie de ce chapitre se concentre sur les lois physiques qui régissent la convection mantellique visqueuse et sa modélisation numérique puis sur celles de la déformation élastique de la lithosphère. L'outil de modélisation numérique 3D sphérique de convection visqueuse dans le manteau utilisé pour l'étude, *Oedipe*, a été développé par Choblet (2005) et résout les équations aux dérivées partielles de ce problème par une méthode de type volumes finis/différences finies. Il permet l'obtention de champs de contraintes à l'origine d'une topographie dynamique. Nous considérerons à la fois la topographie engendrée par une lithosphère purement visqueuse et celle, partiellement filtrée, obtenue pour une lithosphère dont la partie la plus froide (la plus visqueuse) a un comportement élastique. Le calcul de la déformation élastique de la lithosphère, des champs de topographie et de gravité ainsi que des grandeurs spectrales associées (spectres, corrélation et admittance) font appel à un outil de calcul indépendant que j'ai mis en oeuvre et qui utilise une méthode semi-spectrale de résolution des équations de déformation. Le deuxième chapitre se termine par la présentation du couplage entre ces deux modèles qui donne alors naissance à un nouvel outil dit "hybride".

La validation de cet outil hybride (qui utilise deux méthodes de résolution des équations et qui caractérise deux comportements rhéologiques distincts) s'effectue dans un premier temps par comparaison avec un modèle entièrement semi-spectral développé par Ondřej Čadek. Ce modèle est également conçu pour le calcul de la topographie dynamique synthétique purement visqueuse et/ou soutenu par une lithosphère élastique. Bien que d'une précision supérieure à celle que procure un modèle en volumes finis, ce dernier ne prend pas en compte les variations latérales de viscosité, primordiales pour la convection thermique (contrairement au modèle hybride). Les résultats du modèle hybride que je propose ont également été confron-

tés aux résultats du modèle visco-élastique de Zhong (2002). Le modèle hybride tel qu'il a été conçu permet la distinction des différents comportements (visqueux et élastique), ce que ne permet pas le modèle de Zhong. Toutes les comparaisons ainsi présentées utilisent le calcul de fonctions réponses de la topographie et du géoïde pour une planète ayant des paramètres proches de ceux de Mars. Les fonctions réponses indiquent les amplitudes de la topographie et du géoïde associées à une contrainte générée par une anomalie de densité d'amplitude unitaire et de profondeur imposée. La comparaison des fonctions réponses d'un modèle à l'autre révèle une adéquation quasiment parfaite, validant ainsi définitivement notre modèle, ce qui fait l'objet du troisième chapitre. Ce troisième volet se termine par une série de résultats préliminaires d'application à des corps de la taille de Mars et Vénus pour lesquels des calculs de convection thermique ont été effectués. La différence majeure avec les fonctions réponses provient de la prise en compte des variations latérales de viscosité qui conduisent à des disparités importantes comme par exemple des variations de l'épaisseur latérale du couvercle rigide de surface qui influence directement la structure thermique du manteau supérieur.

Les applications sont rassemblées dans le quatrième et dernier chapitre, entièrement consacré à l'influence de certains paramètres sur le mode de convection et sur les observables de surface associés. Le nombre de Rayleigh, le profil de viscosité et le taux de chauffage radioactif sont les paramètres que j'ai choisi de tester. La description des champs de température, de viscosité, de vitesses et de flux de chaleur est associée, dans chacune des simulations, à une analyse du champ de topographie, du géoïde, des spectres et des admittances correspondants, pour un instantané de la convection ou de façon à mettre en évidence une évolution temporelle de ces structures.

Chapitre 1

Les planètes telluriques

Les planètes sont d'un intérêt particulier pour le géophysicien (spécialement les planètes telluriques) car leur comparaison avec notre propre planète nous permet une meilleure compréhension des phénomènes terrestres. Le raisonnement inverse est encore plus vrai, c'est sur la base de ce que nous connaissons de la Terre que les investigations vers les autres corps du Système Solaire sont menées. Les différents processus internes (convection dans le noyau, convection dans le manteau, déformation de la lithosphère ...) ou de surface (présence d'eau liquide, présence de glace, climat ...) au sein de ces planètes sont contraints par leur composition, leur taille ou encore leur place dans le Système Solaire. L'étude et la compréhension de ces processus commencent souvent par l'observation de ces corps puis par la recherche de modèles (analogiques ou numériques) permettant d'expliquer un(des) phénomène(s). Si les observables terrestres sont nombreux (et offrent des contraintes d'étude), il n'en est pas de même pour les autres corps du Système Solaire où les observations sont plus rares. Les paramètres orbitaux, le champ magnétique, les images de la surface ainsi que les champs de topographie et de gravité sont souvent les seules données disponibles.

Il serait long et hors sujet de traiter ici de toutes les méthodes d'observation des corps du Système Solaire. Je me concentrerai donc dans un premier temps sur les observables qui font l'objet d'une grande partie de ce travail de thèse, c'est à dire la topographie, la gravité et le géoïde des planètes telluriques. Cependant, le lecteur curieux trouvera dans Sohl et Schubert (2007) une synthèse à propos des méthodes d'observation des planètes. Après une courte synthèse à propos du développement mathématique nécessaire à la représentation et au traitement des champs de topographie, de gravité et du géoïde (équipotentielle de gravité), je développerai les connaissances acquises sur les planètes Terre, Mars et Vénus. Je structurerai mon exposé pour chacune d'entre elles de la manière suivante : présentation générale, structure interne (comment y accède-t-on et que savons-nous), topographie, anoma-

lies de gravité et géoïde (à quoi ressemblent-ils et que nous apportent-ils).

1.1 Topographie, gravité et grandeurs spectrales

Les planètes telluriques Mercure, Vénus, la Terre et Mars possèdent une masse et un rayon relativement petit mais une masse volumique moyenne élevée comparée aux géantes gazeuses du Système Solaire externe. Elles sont chimiquement et rhéologiquement différenciées en un noyau riche en fer, un manteau silicaté et une croûte rocheuse résultant de la fusion partielle du manteau. Ces grandes caractéristiques des planètes telluriques qui les distinguent des géantes gazeuses sont déduites des mesures de rotation et de leurs variations, du moment d'inertie, du champ magnétique, des données sismologiques (quand elles sont disponibles), de la caractérisation des structures géologiques, des compositions de la surface et des propriétés des matériaux (terrestres ou météoritiques). Le détail de ces différentes méthodes d'observation se trouve par exemple dans Sohl et Schubert (2007) ainsi que dans Lognonné et Johnson (2007) qui consacrent un chapitre entier à la sismologie en planétologie, méthode la plus aboutie dans l'analyse des structures internes.

Les champs topographiques des corps comme la Lune, Mars, Vénus ou Mercure ont été obtenus par observation radar basée sur Terre (Harmon et al., 1986; Margot et al., 1999) et surtout par des données d'altimétrie obtenues par les sondes en orbite autour des corps (Zuber et al., 1994; Smith et al., 1999a; Rappaport et al., 1999). Quant aux autres satellites que la Lune, il est très rare que les sondes en orbite possèdent des instruments d'altimétrie. Par exemple, la topographie d'Europe est déterminée grâce aux images de la surface et par photoclino-métrie qui consiste à reproduire un objet par les variations de lumière observées à la surface (Nimmo et Manga, 2009). Le champ gravitationnel des corps planétaires est mesuré par les sondes en orbite autour de ces corps. La technique utilisée est fondée sur l'effet Doppler des signaux radio transmis depuis la Terre vers la sonde en orbite puis de la sonde vers la Terre. Le décalage en fréquence du signal radio reçu par la Terre par rapport à celui de départ traduit une modification de la vitesse du satellite, directement reliée aux anomalies de masses de la planète qu'il survole (par exemple Rosenblatt, 2010).

En l'absence de données sismologiques (c'est à dire dans tout les cas sauf sur Terre et dans une moindre mesure sur la Lune), la topographie et la gravité sont très souvent les seuls observables géophysiques disponibles avec le champ magnétique. Lorsque les données d'anomalies gravimétriques sont couplées à la topographie et

que certaines hypothèses géologiques sont émises (modes de compensation des reliefs, masses volumiques de la croûte et/ou du manteau, ...), il est possible d'obtenir des informations géophysiques importantes telles que l'épaisseur crustale, l'épaisseur de la lithosphère élastique, le gradient thermique associé ou encore le profil de viscosité du manteau. Selon la longueur d'onde que l'on choisit d'étudier, ces observables géophysiques fournissent des informations de surface (propriétés de la croûte) mais aussi de sub-surface (caractéristiques de la lithosphère) et également de profondeur (quand ils sont le résultat de la convection mantellique). La principale difficulté dans la détermination de ces caractères réside dans le fait que l'utilisation des champs de gravité et de topographie aboutit à des interprétations non-unique.

Puisque les corps du Système Solaire sont sphériques (en première approximation), une méthode mathématique utilisée pour la représentation d'un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) est une méthode spectrale fondée sur les fonctions harmoniques sphériques. Les grandeurs spectrales associées à cette méthode représentent la base du traitement et de l'interprétation de la topographie et des anomalies de gravité (ou du géoïde). Elles permettent par exemple de mettre en évidence la longueur d'onde dominante du signal (spectre de puissance) ou la relation qui existe entre les différents champs (la corrélation et l'admittance).

L'utilisation d'une méthode spectrale ne saurait se passer d'un certain formalisme mathématique que je vais présenter ci-dessous et qui aboutira à la présentation des outils spectraux destinés à la représentation et à l'interprétation des champs de topographie, de gravité et de géoïde des planètes telluriques.

1.1.1 Les harmoniques sphériques

Le développement mathématique présenté ci-dessous concerne les scalaires tels que la topographie ou le géoïde mais le même développement appliqué aux vecteurs et aux tenseurs se trouve dans le Chapitre 2 et dans l'Annexe B. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra également se reporter à Jones (1985) ou à Varshalovich et al. (1988).

Les fonctions les plus appropriées pour le calcul de grandeurs sur une sphère sont les harmoniques sphériques. Ces fonctions sont construites grâce au produit de la base orthogonale $e^{im\varphi}$ et des fonctions de Legendre associées et se définissent comme $Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = P_{\ell m}(x) e^{im\varphi}$, avec ℓ le degré d'harmonique, m l'ordre, $P_{\ell m}(x)$ les fonctions de Legendre associées, $x = \cos\theta$, θ et φ respectivement la co-latitude et la longitude. Ces fonctions harmoniques sphériques répondent à un critère d'orthonormalité qui varie selon les auteurs (Tableau 1.1).

	Čadek (1989) (coefficients réels)	Wieczorek (2007) (coefficients complexes)
Critère d'orthonormalité	$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (1.1)$	$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell m}(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (1.2)$
Facteur de normalisation	$\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} \quad (1.3)$	$\sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \quad (1.4)$
Définition de la fonction harmonique sphérique normalisée	$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell m}(x) e^{im\varphi} \quad (1.5)$	$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell m}(x) \cos(m\varphi) \quad (m \geq 0) \quad (1.6)$ $Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell- m)!}{(\ell+ m)!}} P_{\ell m }(x) \sin(m \varphi) \quad (m < 0)$
Fonctions de Legendre associées normalisées	$\overline{P}_{\ell m}(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell m}(x) \quad (1.7)$	$\overline{P}_{\ell m}(x) = \sqrt{(2-\delta_{0m})(2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell m}(x) \quad (1.8)$

TAB. 1.1 – Critères d'orthonormalité des fonctions harmoniques sphériques, facteur de normalisation de ces fonctions, définitions des fonctions harmoniques sphériques normalisées et fonctions de Legendre associées normalisées. $Y_{\ell' m'}^*(\theta, \varphi)$ sont les fonctions harmoniques sphériques complexes conjuguées de $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ et δ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\ell\ell'} = 0$ si $\ell \neq \ell'$ et $\delta_{\ell\ell} = 1$ si $\ell = \ell'$), Ces notations sont utilisés par exemple par Čadek (1989) et Wieczorek (2007).

Il existe une propriété importante qui associe la fonction harmonique sphérique à son complexe conjugué ainsi que la relation qui lie un champ à son complexe conjugué (les coefficients de ce champ étant réels) :

$$Y_{\ell m}^* (\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell -m} (\theta, \varphi), \quad (1.9)$$

$$a (\theta, \varphi) = a^* (\theta, \varphi), \quad (1.10)$$

avec $Y_{\ell m}^* (\theta, \varphi)$ les fonctions harmoniques sphériques complexes conjuguées de $Y_{\ell m} (\theta, \varphi)$ et $a^* (\theta, \varphi)$ le complexe conjugué de $a (\theta, \varphi)$.

La normalisation choisie dans les pages qui suivent est celle utilisée par Čadek (1989) fondé sur des coefficients réels, avec $P_{\ell m} (x)$, les fonctions de Legendre associées telles que :

$$P_{\ell m} (x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell} (x), \quad (1.11)$$

et $P_{\ell} (x)$, les polynômes de Legendre de degré ℓ qui s'expriment selon la formule de Rodrigues :

$$P_{\ell} (x) = \frac{1}{2^{\ell} \cdot \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}. \quad (1.12)$$

Indépendamment de la normalisation choisie, le calcul des fonctions de Legendre associées normalisées fait intervenir une formule de récurrence permettant d'obtenir une valeur de cette fonction de degré ℓ et d'ordre m grâce à la valeur des fonctions d'ordre et de degré inférieurs. Il existe, dans la littérature, de nombreuses relations de récurrence portant sur ces fonctions, voici celle que j'ai choisie :

$$\begin{aligned} \overline{P}_{\ell m} (x) &= \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(2\ell - 1)}{(\ell - m)(\ell + m)}} x \overline{P}_{(\ell-1) m} (x) \\ &- \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m - 1)(\ell + m - 1)}{(2\ell - 3)(\ell - m)(\ell + m)}} \overline{P}_{(\ell-2) m} (x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

associée aux conditions initiales suivantes :

$$\overline{P}_{mm} (x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^m (2i + 1)}{\prod_{i=1}^m (2i)}} (1 - x^2)^{m/2}, \quad (1.14)$$

$$\overline{P}_{(m+1) m} (x) = \sqrt{2m + 3} x \overline{P}_{mm} (x). \quad (1.15)$$

1.1.2 Représentation spectrale et représentation discrète

Dans le cas de l'étude numérique présentée ici, un champ $a(\theta, \varphi)$ est représenté soit en une série d'harmoniques sphériques dont les coefficients peuvent être réels ou complexes, soit par des valeurs discrètes sur une grille. La représentation de ce champ peut alors se faire de deux façons différentes. Soit à partir des coefficients d'harmoniques sphériques reconstitués sur une grille, on parle de *synthèse*, soit depuis des données discrètes sur une grille vers des coefficients en harmoniques sphériques, on parle alors d'*analyse*.

1.1.2.1 Reconstruction d'un champ scalaire sur une grille à partir des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques (synthèse)

La reconstruction d'un champ scalaire $a(\theta, \varphi)$ sur une grille à partir de ses coefficients en harmoniques sphériques $a_{\ell m}(r)$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$a(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (1.16)$$

On verra dans le Chapitre 2 que d'autres coordonnées peuvent être utilisées.

On peut alors décomposer l'équation principale de représentation d'un champ scalaire complexe sur une grille (équation 1.16) en trois termes :

$$a(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[a_{\ell 0}(r) Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) + \sum_{m=-\ell}^{-1} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \right]. \quad (1.17)$$

En utilisant les équations 1.9 et 1.10, on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{m=-\ell}^{-1} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}^*(r) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi), \quad (1.18)$$

permettant de s'affranchir des ordres négatifs ($m < 0$). L'expression générale du champ sous la forme de coefficients d'harmoniques sphériques s'en voit ainsi simplifiée :

$$a(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell 0}(r) Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}^*(r) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \right). \quad (1.19)$$

Les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques sont complexes et $a_{\ell m}^*(r) + a_{\ell m}(r) = 2Re(a_{\ell m})$, la représentation sur la grille du champ a à partir de ses coefficients en harmoniques sphériques devient :

$$a(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[a_{\ell 0}(r) Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) + 2Re \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \right) \right]. \quad (1.20)$$

1.1.2.2 Reconstruction des coefficients d'harmoniques sphériques d'un champ scalaire à partir de ses valeurs discrètes sur une grille (analyse)

À l'inverse, les coefficients harmoniques sphériques $a_{\ell m}(r)$ sont obtenus en calculant l'intégrale suivante :

$$a_{\ell m}(r) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.21)$$

Dans le cas où l'on connaît le champ sur la sphère grâce à ses coefficients discrets :

$$a_{\ell m}(r) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2M} a(\theta_i, \varphi_j) Y_{\ell m}^*(\theta_i, \varphi_j) \Delta, \quad (1.22)$$

avec M le nombre de points sur la grille dans la direction θ et Δ le facteur traduisant les variations latitudinales des éléments de surface de la sphère au niveau des pôles ($\Delta = \frac{\pi^2}{M^2} \sin \theta_i$).

1.1.3 Spectre de puissance, corrélation et admittance

Calcul des spectres de puissance Le spectre de puissance d'une fonction indique la contribution de chaque longueur d'onde (chaque degré d'harmonique $-\ell$) à cette fonction. Il dépend de la normalisation choisie et se calcule de la façon suivante :

$$S_{\ell} = a_{\ell 0}(r) a_{\ell 0}^*(r) + 2Re \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) a_{\ell m}^*(r) \right). \quad (1.23)$$

Calcul de la corrélation La corrélation entre les champs a et b traduit, pour chaque degré, la correspondance linéaire entre les coefficients d'harmoniques sphériques de ces champs :

$$c_{\ell} = \frac{a_{\ell 0}(r) b_{\ell 0}(r) + 2Re \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) b_{\ell m}^*(r) \right)}{\sqrt{\left[a_{\ell 0}^2(r) + 2Re \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) a_{\ell m}^*(r) \right) \right] \times \left[b_{\ell 0}^2(r) + 2Re \left(\sum_{m=1}^{\ell} b_{\ell m}(r) b_{\ell m}^*(r) \right) \right]}}. \quad (1.24)$$

Calcul de l'admittance Contrairement au spectre, l'admittance présente l'avantage de ne pas dépendre de la normalisation choisie. L'admittance γ_ℓ est la fonction de transfert qui permet de passer d'un champ scalaire (a) à un autre (b) telle que les coefficients d'harmoniques sphériques de ces champs satisfassent la relation :

$$a_{\ell m}(r) = \gamma_\ell b_{\ell m}(r) + I_{\ell m}, \quad (1.25)$$

où les $I_{\ell m}$ représentent les coefficients d'harmoniques sphériques de la part du champ scalaire a qui ne sont pas linéairement liés au champ b . Ainsi :

$$\gamma_\ell = \frac{a_{\ell 0}(r) b_{\ell 0}^*(r) + 2\text{Re} \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) b_{\ell m}^*(r) \right)}{a_{\ell 0}^2(r) + 2\text{Re} \left(\sum_{m=1}^{\ell} a_{\ell m}(r) a_{\ell m}^*(r) \right)}. \quad (1.26)$$

L'utilisation de la topographie, du potentiel de gravité ou du géoïde pour la détermination des paramètres internes des planètes requière certaines hypothèses de départ, notamment sur le mode de compensation d'un relief. Nous allons maintenant voir quels sont ces modes de compensation et leur signification en termes de topographie, de potentiel de gravité (ou de géoïde) et d'admittance.

1.1.4 Topographie, potentiel et équipotentielle de gravité et modèles de compensation

Comme évoqué précédemment, le champ de gravité à la surface d'une planète est sensible aux anomalies de masses présentes en surface et en profondeur. Le potentiel de gravité (qui traduit l'influence de ces masses en un point de l'espace) s'écrit de la façon suivante pour une sphère de rayon R_0 :

$$V(r, \theta, \varphi) = G \int_0^{R_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r', \theta', \varphi')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi', \quad (1.27)$$

avec G la constante de gravitation, $\rho(r, \theta, \varphi)$ la masse volumique, \mathbf{r} le vecteur entre le centre de la planète et le point d'observation, \mathbf{r}' le vecteur entre le centre de la planète et le point où se situe l'anomalie de masse considérée. En utilisant la décomposition en harmoniques sphériques du champ de densité :

$$\rho(r', \theta', \varphi') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \rho_{\ell m}(r') Y_{\ell m}(\theta', \varphi'), \quad (1.28)$$

en se servant du théorème additionnel qui permet d'écrire la décomposition en harmoniques sphériques de $\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$ et en appliquant le critère d'orthonormalité (Équa-

tion 1.1), on obtient les coefficients d'harmoniques sphériques issus de la décomposition du potentiel de gravité :

$$V_{\ell m}(r) = \frac{4\pi G}{r(2\ell+1)} \int_0^{R_0} \left(\frac{r}{r'}\right)^\ell \rho_{\ell m}(r') r'^2 dr'. \quad (1.29)$$

Si l'on considère une répartition en couches concentriques de la densité, on remplace l'intégrale sur le rayon total R_0 par une somme des anomalies de masses sur toutes les couches :

$$\int_0^{R_0} \left(\frac{r'}{r}\right)^\ell \rho_{\ell m}(r') r'^2 dr' = \sum_{i=1}^M \left(\frac{r_i}{r}\right)^\ell \rho_{\ell m}^i r_i^2 \Delta r_i, \quad (1.30)$$

avec i l'indice de la couche considérée, M le nombre de couches, $\rho_{\ell m}^i$ les coefficients d'harmoniques sphériques de la densité de la $i^{\text{ème}}$ couche, r_i^2 le rayon moyen de la couche considérée et Δr_i l'épaisseur de la couche.

Les coefficients en harmoniques sphériques du géoïde à la surface (au rayon R_0), comme équipotentielle de gravité s'expriment donc de la façon suivante :

$$N_{\ell m}(R_0) = \frac{V_{\ell m}(R_0)}{g_0(R_0)} = \frac{4\pi G}{R_0 g_0(2\ell+1)} \sum_{i=1}^M \left(\frac{r_i}{R_0}\right)^\ell \rho_{\ell m}^i r_i^2 \Delta r_i, \quad (1.31)$$

avec g_0 la pesanteur.

Le terme "anomalies de masses" au sein d'une planète regroupe en fait la topographie de surface, la topographie à la CMB et les anomalies de masse volumique internes, termes qui contrôlent le potentiel de gravité (et l'équipotentielle), ce qui conduit à l'expression générale des coefficients d'harmoniques sphériques du géoïde :

$$N_{\ell m}(R_0) = \frac{4\pi G}{g_0 R_0(2\ell+1)} \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{r_i}{R_0}\right)^\ell \rho_{\ell m}^i r_i^2 \Delta r_i + h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf} R_0^2 + \left(\frac{r_{CMB}}{R_0}\right)^\ell h_{\ell m}^{CMB} \Delta \rho_{CMB} r_{CMB}^2 \right]. \quad (1.32)$$

Comme nous allons le voir par la suite, certains termes de cette équation générale peuvent être précisés en faisant l'hypothèse d'un mode de compensation des reliefs. L'un des principaux facteurs qui détermine l'état de compensation d'un relief est sa taille. Dans les années 1970, les techniques spectrales se sont développées (par exemple Dorman et Lewis, 1970), ce qui a permis de quantifier le degré de compensation des reliefs sur Terre. Ces techniques utilisent le fait que la relation entre la gravité (le géoïde) et la topographie change avec la longueur d'onde des reliefs et avec le mode de compensation considéré. Sur Terre et sur les autres planètes (comme nous allons le voir dans les sections suivantes), les reliefs de courte longueur d'onde

ne sont pas compensés. Les reliefs de longueurs d'onde intermédiaires semblent compensés par des processus superficiels crustaux (compensation isostatique) ou par des processus relatifs aux propriétés mécaniques de la lithosphère (par exemple, compensation par flexure élastique de la lithosphère) (cf. Parsons et Daly, 1983; Kido et Čadek, 1997) alors que les reliefs de grande longueur d'onde semblent être supportés par les écoulements de convection sous-jacents (par exemple Parsons et Daly, 1983; Ricard et al., 1984; Richards et Hager, 1984).

1.1.4.1 Absence de compensation

Dans le cas d'un relief non compensé, il n'y a pas d'anomalies de masse en profondeur. Les coefficients en harmoniques sphériques de l'équipotentielle de gravité à la surface sont directement reliés à ceux de la topographie de surface :

$$N_{lm}(R_0) = \frac{4\pi G}{R_0 g_0 (2\ell + 1)} h_{lm}^{surf} \rho_{surf} R_0^2. \quad (1.33)$$

L'admittance comme fonction de transfert entre le géoïde et la topographie s'obtient soit par le rapport des coefficients en harmoniques sphériques des champs lorsqu'ils sont connus (Équation 1.26) soit théoriquement par la relation suivante (en supposant que la topographie et le géoïde sont parfaitement corrélés - terme I_{lm} de l'équation 1.25 nul) :

$$\gamma_\ell = \frac{4\pi G R_0}{g_0 (2\ell + 1)} \rho_{surf}. \quad (1.34)$$

Par opposition à un relief entièrement non compensé, on distingue trois modèles de compensation pour un relief : la compensation isostatique (modèles de Pratt ou d'Airy), la compensation par flexure élastique (modèle de flexure en approximation de couche mince) et la compensation dynamique (les anomalies de masses dans le manteau à l'origine du processus de convection entraînent des mouvements qui créent une topographie alors dite "dynamique").

1.1.4.2 Compensation isostatique

Le concept de l'isostasie est fondé sur l'hypothèse selon laquelle la pression lithostatique à une profondeur est latéralement homogène (appelée profondeur de compensation). Dans ce modèle de compensation, les charges en surface sont compensées par des variations de l'épaisseur d'une croûte de masse volumique uniforme : la racine crustale (modèle d'Airy - Figure 1.1). Par opposition, le modèle de Pratt considère qu'une charge de surface est accompagnée de variations latérales de la masse volumique dans la croûte (d'épaisseur constante).

Lorsque la topographie de surface est faible devant la longueur d'onde du relief, compenser un relief par isostasie revient à ramener l'anomalie de masse à l'interface où elle devrait se trouver. C'est à dire que l'on ramène la topographie de surface $h_{\ell m}^{surf}$ à l'interface R_0 et la topographie de la racine crustale $h_{\ell m}^{MOHO}$ à l'interface $R_0 - D$ (Figure 1.1). Ainsi, le principe d'isostasie nous indique :

$$h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf} + h_{\ell m}^{MOHO} \Delta \rho_{MOHO} = 0 \quad (1.35)$$

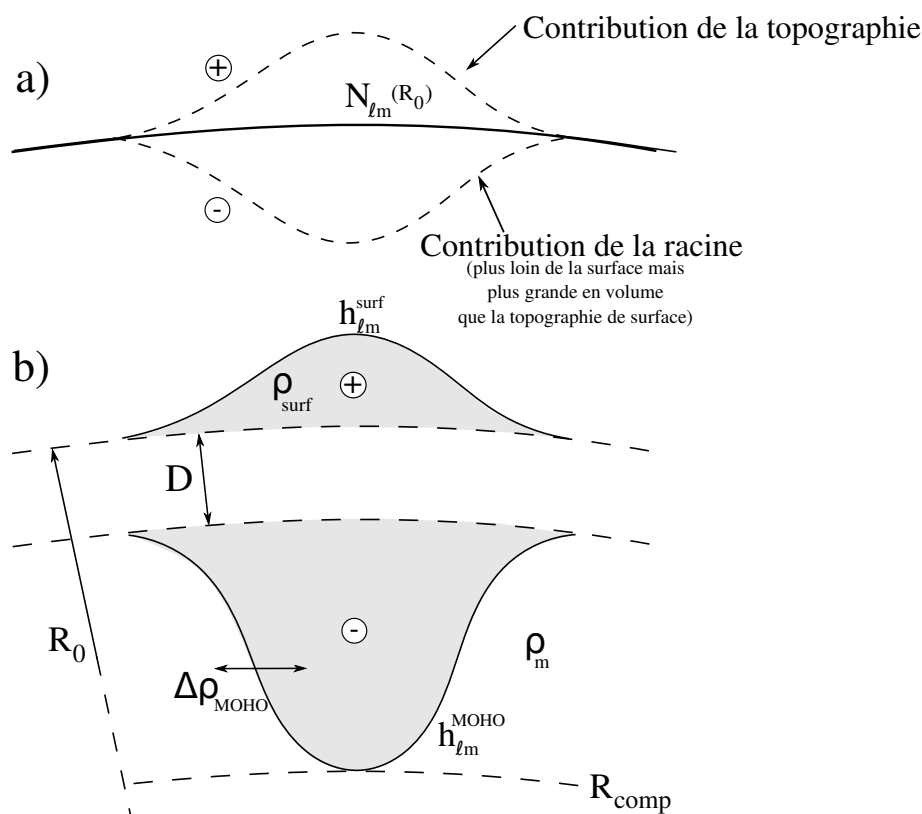


FIG. 1.1 – a) Géoïde schématisé issu d'une compensation complète du type isostatique avec $N_{\ell m}(R_0)$ les coefficients en harmoniques sphériques du géoïde. b) Modèle de compensation isostatique : Diagramme schématisé montrant la relation entre la topographie de surface et la topographie de la racine crustale avec R_0 le rayon moyen de la planète, ρ_{surf} la masse volumique à la surface, ρ_m la masse volumique du manteau, $\Delta \rho_{MOHO}$ la différence de masse volumique entre la racine et le manteau environnant ($\Delta \rho_{MOHO} = \rho_{surf} - \rho_m$), D l'épaisseur normale de croûte, R_{comp} le rayon correspondant à la profondeur de compensation, $h_{\ell m}^{MOHO}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de la racine (qui correspond à un approfondissement du Moho) et $h_{\ell m}^{surf}$ les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de surface.

Si l'on s'attarde sur l'effet d'une topographie compensée de façon isostatique et que l'on formule les approximations suivantes : (1) on néglige la topographie à la CMB (qui semble être une approximation justifiée seulement si la convection ne déforme pas cette interface), (2) on ramène l'anomalie de masse à une charge linéaire, c'est à dire que l'on identifie $h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf}$ en R_0 et $h_{\ell m}^{MOHO} \Delta \rho_{MOHO}$ en $R_0 - D$ (qui est une approximation justifiée uniquement si les topographies ainsi générées sont petites devant la longueur d'onde du relief) et (3) on néglige toute anomalie de masse plus profonde (dans le manteau par exemple), l'équation des coefficients en harmoniques sphériques de l'équipotentielle de gravité (Équation 1.32) devient alors :

$$N_{\ell m}(R_0) = \frac{4\pi G}{g_0 R_0 (2\ell + 1)} \left[\left(\frac{R_0}{R_0} \right)^\ell h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf} R_0^2 + h_{\ell m}^{MOHO} \Delta \rho_{MOHO} \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^\ell (R_0 - D)^2 \right]. \quad (1.36)$$

En appliquant l'équilibre lithostatique (Équation 1.35), on obtient :

$$N_{\ell m}(R_0) = \frac{4\pi R_0 G}{g_0 (2\ell + 1)} h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf} \left[1 - \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2} \right]. \quad (1.37)$$

Aux bas degrés, $\left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2}$ est proche de 1, seul un faible pourcentage de la topographie de surface contribue au signal du géoïde.

Par exemple, pour $\ell = 2$, $R_0 = 6371$ km et $D = 30$ km, $\left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2} = 0,986$, moins de 2% de la topographie contribue au signal du géoïde. Plus le degré augmente, plus la contribution de la topographie de la surface est importante ($\sim 5\%$ au degré 10 par exemple).

L'admittance entre la topographie et le géoïde, en supposant que ces derniers soient parfaitement corrélés (terme $I_{\ell m}$ de l'équation 1.25 nul), s'écrit :

$$\gamma_\ell = \frac{4\pi G R_0}{g_0 (2\ell + 1)} \rho_{surf} \left[1 - \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2} \right]. \quad (1.38)$$

Le terme $1 - \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2}$ est compris entre 0 et 1. Ainsi pour les grandes longueurs d'ondes (les degrés les plus petits), ce terme est proche de 0, l'admittance sera la plus faible. *A contrario*, pour les courtes longueurs d'onde (les degrés les plus grands), l'admittance sera la plus élevée. Cependant, le facteur $\frac{4\pi G R_0}{g_0 (2\ell + 1)}$ engendre le comportement inverse (Figure 1.4).

1.1.4.3 Compensation par flexure - modèle de lithosphère élastique

Le modèle de flexure élastique de la lithosphère est fondé sur des hypothèses fortes qui simplifient le comportement de la lithosphère. La plus importante consiste à considérer la croûte et le sommet du manteau supérieur comme des matériaux parfaitement élastiques durant le chargement et le déchargement d'une plaque. On peut donc représenter la lithosphère comme une couche élastique fine qui compenserait un relief de surface (ou de sub-surface) par une flexure (Figure 1.2). Un développement complet de la théorie du modèle de flexure élastique de la lithosphère se trouve dans Turcotte et al. (1981) et je l'aborderai dans le Chapitre 2.

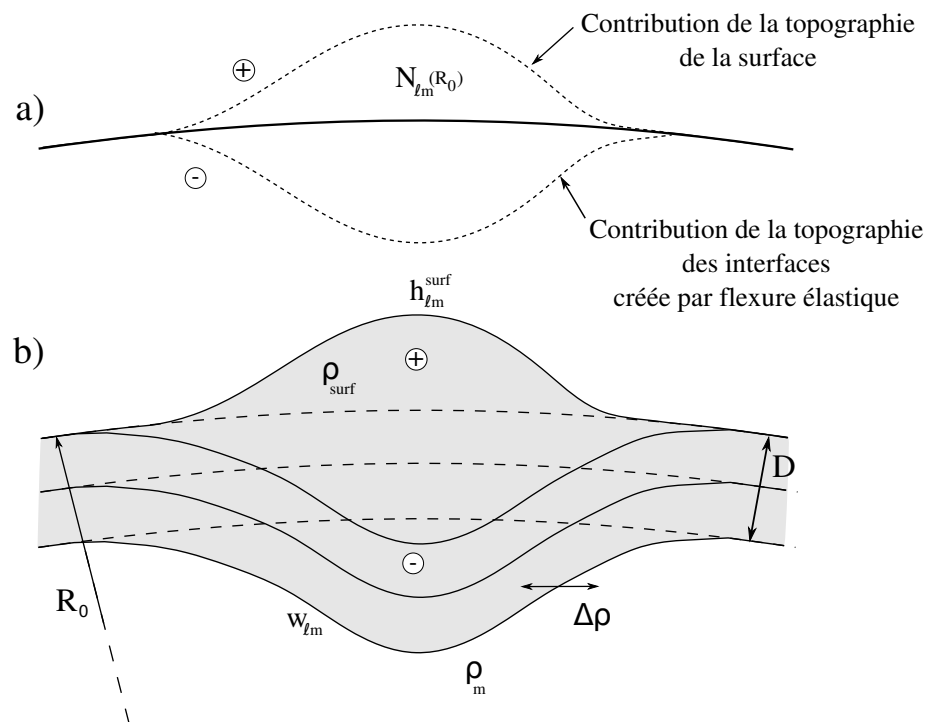


FIG. 1.2 – a) Géométrie schématisée issue d'une compensation complète de la topographie de surface par flexure élastique de la lithosphère avec $N_{lm}(R_0)$ les coefficients d'harmoniques sphériques du géoïde.

b) Modèle de compensation par flexure élastique de la lithosphère : Diagramme schématisé montrant la relation entre topographie de surface et topographie à la base de la lithosphère élastique, avec h_{lm}^{surf} les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de surface, w_{lm} les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie de la base de la partie élastique, ρ_{surf} la masse volumique de la surface, $\Delta\rho$ la différence entre la masse volumique de la lithosphère élastique (ρ_{surf}) et celle du manteau environnant (ρ_m) et D l'épaisseur de la lithosphère élastique.

Dans l'utilisation du modèle de compensation par flexure élastique de la litho-

sphère, la formulation de l'équilibre lithostatique (Équation 1.35) devient :

$C_\ell^{de} \rho_{surf} h_{\ell m}^{surf} + \Delta \rho w_{\ell m} = 0$ et fait intervenir le terme de degré de compensation C_ℓ^{de} introduit par Turcotte et al. (1981). Le coefficient C_ℓ^{de} traduit la rigidité de la lithosphère (sa capacité à résister à une charge) et dépend de son épaisseur élastique d_e (entres autres). Lorsque $C_\ell^{de} = 0$, la lithosphère est purement rigide, on se trouve dans une configuration de relief entièrement non-compensé. *A contrario*, une lithosphère purement élastique ($C_\ell^{de} = 1$) revient à une compensation de type isostatique (modèle d'Airy). Ainsi, en s'inspirant de l'équation 1.37, l'expression des coefficients en harmoniques sphériques du géoïde à la surface est la suivante :

$$N_{lm}(R_0) = \frac{4\pi G R_0}{g_0 (2\ell + 1)} h_{\ell m}^{surf} \rho_{surf} \left[1 - C_\ell^{de} \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2} \right], \quad (1.39)$$

L'admittance correspond donc à :

$$\gamma_\ell = \frac{4\pi G R_0}{g_0 (2\ell + 1)} \rho_{surf} \left[1 - C_\ell^{de} \left(\frac{R_0 - D}{R_0} \right)^{\ell+2} \right]. \quad (1.40)$$

1.1.4.4 Compensation dynamique - modèle d'un panache sous-jacent

Lorsque les trois approches précédentes ne permettent pas d'expliquer les admittances observées sur les planètes (notamment pour les longueurs d'ondes les plus élevées), une compensation de la topographie par des mouvements de convection dans le manteau est alors invoquée (par exemple, Ricard et al., 1984; Richards et Hager, 1984; Pauer et al., 2006; Steinberger et al., 2010). Les anomalies thermiques du manteau sont à l'origine d'un écoulement fluide du manteau. Cet écoulement déforme les différentes interfaces du manteau, on parle de topographie dynamique. Le géoïde résultant porte la signature de ces topographies (topographie de surface en premier lieu, topographie de chacune des interfaces déformées dans le cas d'un manteau hétérogène, et topographie de la CMB dans une moindre mesure) et porte également la signature des anomalies de masses dans le manteau générées par les anomalies thermiques (plus l'anomalie thermique est loin de la surface, plus son impact sur le géoïde sera faible) (Figure 1.3).

Dans un cas général, les coefficients en harmoniques sphériques de la topographie et du géoïde associés à la convection étant des fonctions non-linéaires de la viscosité et linéaires de la densité, on peut les exprimer en terme de fonctions réponses (ou kernel). Dans le calcul de la fonction réponse, on considère la réponse en terme de topographie (dynamique) et de géoïde associé à une charge unitaire (anomalie de densité) de degré ℓ et d'ordre m localisée à une profondeur r_0 , dans un manteau ou un profil de viscosité est imposé *a priori*. Les réponses \mathcal{H} et \mathcal{N} (kernels de la topographie et du géoïde respectivement) expriment à la fois la signature de

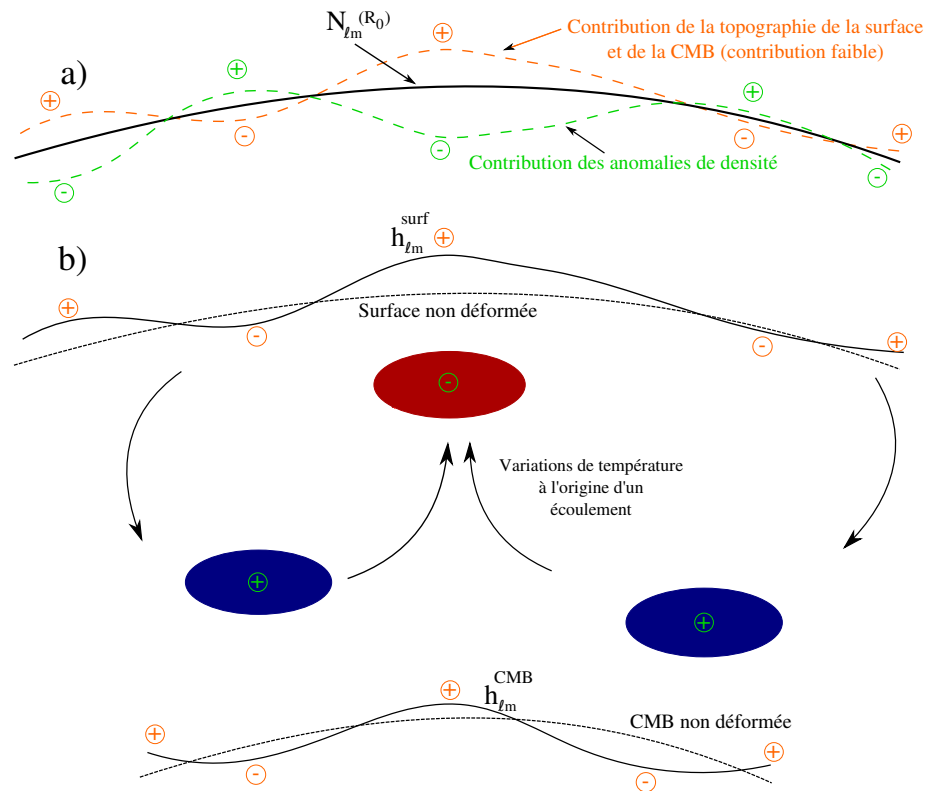


FIG. 1.3 – a) Géoïde schématique issu d’une compensation complète de la topographie par des mouvements d’anomalies thermiques dans le manteau avec $N_{\ell m}(R_0)$ les coefficients en harmoniques sphériques du géoïde. b) Modèle de compensation dynamique : Diagramme schématique de la relation entre topographie (à la surface et à la CMB) et mouvements de convection dans le manteau avec en rouge les anomalies de masse négatives (anomalies thermiques chaudes) et en bleu les anomalies de masse positives (anomalies thermiques froides). $h_{\ell m}^{surf}$ sont les coefficients d’harmoniques sphériques de la topographie à la surface et $h_{\ell m}^{CMB}$ ceux de la topographie à la CMB.

l'anomalie de masse relative à l'anomalie de densité interne et de la déformation des interfaces (topographie dynamique). Ainsi,

$$\begin{cases} h_{\ell m} = \delta m_{\ell m} \mathcal{H}(\eta(r)) \\ N_{\ell m} = \delta m_{\ell m} \mathcal{N}(\eta(r)) \end{cases} \quad (1.41)$$

avec $\delta m_{\ell m}$ une anomalie de densité prescrite *a priori* à une profondeur imposée, \mathcal{H} et \mathcal{N} les fonctions réponses de la topographie et du géoïde qui ne dépendent que du profil de viscosité radial $\eta(r)$. Une utilisation possible de ces fonctions réponses se trouve dans le Chapitre 3.

Comme nous le verrons dans la suite, la considération d'un soutien dynamique de la topographie permet à certains auteurs de déterminer les profils de viscosité et les paramètres internes des planètes en appliquant des méthodes inverses. Dans le cas de la Terre où le profil de densité est connu *a priori* grâce au PREM, les variations de viscosité peuvent être retrouvées (par exemple Hager et Clayton, 1989; Čadek et Fleitout, 1999). Pour les autres planètes, nous n'avons qu'une très vague idée du profil de densité. Il y a alors deux possibilités pour déterminer les profils de densité ou de viscosité. Soit en utilisant la modélisation numérique de la convection pour contraindre la relation entre anomalies de masse plus ou moins profondes, topographie et géoïde (méthode directe) (Kiefer et Hager, 1991; Moresi et Parsons, 1995; Solomatov et Moresi, 1996; Kiefer et Kellogg, 1998) soit en considérant une distribution des anomalies de masse en profondeur, ainsi que des valeurs (aléatoires ou pas) de l'épaisseur de la croûte, de sa masse volumique, de la masse volumique du manteau, ... et ainsi explorer la gamme de profils de viscosité qui permet d'expliquer la topographie et le géoïde observés (méthode inverse) (par exemple, pour Vénus : Kiefer et al., 1986; Simons et al., 1994; Pauer et al., 2006; Steinberger et al., 2010).

La figure 1.4 présente trois admittances théoriques pour chacun de ces modèles de compensation ou en l'absence de compensation (calculées avec les équations 1.34, 1.38 et 1.40). Les hypothèses fortes émises ici sont : (1) le géoïde (parfaitement corrélé à la topographie) est calculé uniquement à partir de la topographie de surface (associée à son mode de compensation) (2) la profondeur de compensation du modèle isostatique est égale à celle du modèle de flexure élastique de la lithosphère (dans un souci de comparaison des différents modèles). Les paramètres du modèle ainsi que l'équation pour le calcul des degrés de compensation C_{ℓ}^{de} utilisés sont ceux de Turcotte et al. (1981) dans le cas de la Terre et sont listés dans la légende de la figure 1.4.

L'admittance comme fonction de passage du géoïde à la topographie traduit l'ampleur de la topographie sur le signal du géoïde. Dans le cas d'un relief non-

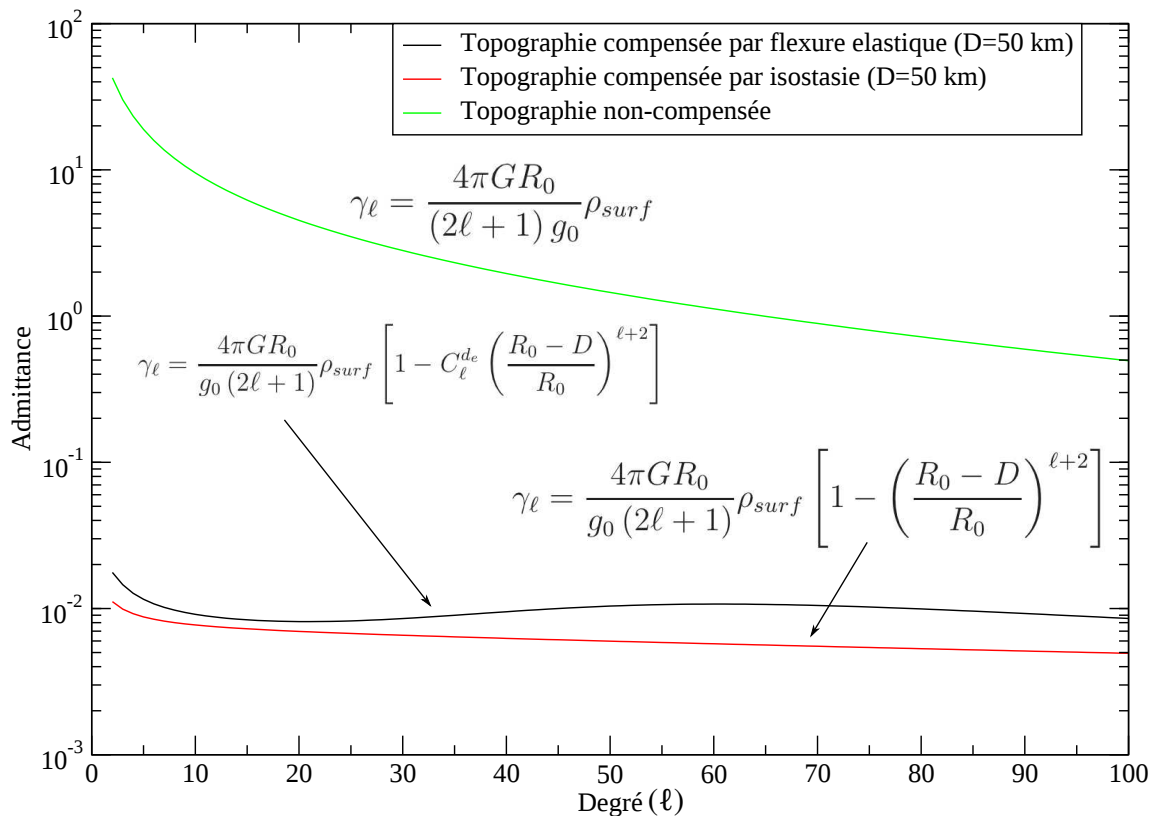


FIG. 1.4 – Évolution de l'admittance théorique en fonction du degré d'harmonique ℓ pour trois modèles de compensation dans le cas de topographies parfaitement corrélées au géoïde. Avec $R_0 = 6378$ km le rayon de la planète considérée, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation, $g_0 = 9,81$ $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ la pesanteur, $\rho_{surf} = 2700$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de surface, $\rho_m = 3300$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique dans le manteau, $D = 50$ km la profondeur de compensation du modèle isostatique et du modèle de flexure, C_ℓ^{de} le degré de compensation calculé grâce à l'équation (27) de Turcotte et al. (1981).

compensé, il n'y a pas d'anomalies de masse en profondeur, le géoïde correspond directement à la topographie de surface, l'admittance est élevée (courbe verte de la figure 1.4). Dans le cas de la compensation isostatique, le relief est entièrement compensé par une racine crustale responsable d'une nouvelle anomalie de masse très importante en volume (la racine). Le géoïde porte à la fois la signature de la topographie et la signature de cette anomalie de masse, l'admittance est beaucoup plus faible que dans le cas d'une compensation nulle (courbe rouge de la figure 1.4). Dans le cas de la compensation par flexure élastique, le degré de compensation C_ℓ^{de} traduit la rigidité de la lithosphère. Dans un cas de rigidité intermédiaire ($C_\ell^{de} \neq 0, 1$), l'anomalie de masse présente dans le cas isostatique (la racine crustale) s'y trouve toujours mais est d'amplitude moindre. La signature de la topographie de surface sur le géoïde est un peu plus importante que dans le cas de la compensation de type isostatique, l'admittance est donc un peu plus grande (courbe noire de la figure 1.4). Dans le cas d'une compensation dynamique des reliefs, il est difficile de connaître la relation entre la topographie et le géoïde tant les contributions au signal du géoïde sont nombreuses et variées (positions des interfaces, champ de densité, champ de viscosité et profondeur de l'anomalie de masse). Souvent fondés sur l'étude de McNutt et Shure (1986), certains auteurs proposent néanmoins de déterminer la proportion de l'admittance qui est due à la présence d'un bombement topographique générée par un panache sous-jacent (par exemple Smrekar, 1994) dans un formalisme très différent du notre.

1.2 La Terre

La Terre est de loin la planète la plus observée et la plus connue du Système Solaire. La présence d'eau liquide à sa surface, une activité superficielle importante (la tectonique des plaques) et le développement de la vie en font une planète remarquable mais particulièrement complexe. Grâce aux mouvements de convection de son noyau externe, la Terre possède un champ magnétique puissant qui lui apporte une protection vitale contre les rayonnements solaires, permettant ainsi de conserver une atmosphère et de développer la vie, ce qui la rend unique dans le Système Solaire. Située entre Mars et Vénus, un rayon moyen de 6371 km, une masse d'environ $6 \cdot 10^{24}$ kg et une masse volumique moyenne de $5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ lui confèrent une pesanteur moyenne de $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.2.1 Structure interne

La sismologie est jusqu'à présent la méthode la plus aboutie pour contraindre structure et composition des intérieurs planétaires. En 1981, Dziewonski et Anderson établissent le PREM (*Preliminary Reference Earth Model*), premier modèle de vitesses des ondes sismiques qui permettra de définir la structure interne de la Terre en terme de densité et de localisation des différentes interfaces. La Figure 1.5 présente la structure interne radiale de la Terre déduite des profils de vitesses sismiques et de masses volumiques déterminés par le PREM. À chaque discontinuité importante dans ces profils radiaux correspond une transition entre deux milieux découpant ainsi la Terre en grandes entités : le noyau interne solide (la graine), d'un rayon de 1261 km surmonté d'un noyau liquide de 2210 km d'épaisseur, un manteau inférieur de 2230 km, un manteau supérieur de 470 km d'épaisseur et enfin une croûte d'une épaisseur variant entre 6 et 30 km. Une partie du manteau supérieur et l'intégralité de la croûte constituent la lithosphère d'épaisseur variant de quelques kilomètres (dorsales) à 250 km (au niveau des cratons) (nous verrons par la suite qu'il existe plusieurs définitions de la lithosphère).

Le profil de masse volumique issu du PREM met en évidence des sauts majeurs au sein du manteau à 200 km, 400 km, 670 km (à la base du manteau inférieur) et à 2900 km (à la frontière entre le manteau inférieur et le noyau). Certaines de ces discontinuités sont interprétées comme des changements de phases minéralogiques. L'effet des changements de phase dans le manteau sur la convection a été étudié pour le cas de la Terre par Schubert et al. (1975) ou Tackley (2007). Selon la nature endothermique ou exothermique du changement de phase, le passage d'un courant convectif sera ralenti ou au contraire accéléré par la transition de phase de deux

façons : (1) par l'énergie latente associée aux transitions elles-mêmes et (2) par la modification de la flottabilité engendrée par des oscillations de la bordure de ces transitions. Ces fluctuations sont causées par les variations latérales de température (voir par exemple, Schubert et al., 1975; Christensen et Yuen, 1985).

En plus de la masse volumique, le deuxième paramètre primordial relatif à la structure terrestre et ayant une grande influence sur la convection est la viscosité. Le lecteur trouvera une synthèse à propos de la structure visqueuse de la Terre dans Forte (2007). La détermination de la structure visqueuse (radiale) de la Terre utilise plusieurs méthodes qui se focalisent sur les phénomènes à l'origine d'une perturbation de l'équilibre hydrostatique¹ de la planète : modèle de convection dans le manteau, ajustement isostatique d'une charge de surface (charge de glace), changement du niveau marin et modification du champ gravitationnel de la Terre où encore par les études expérimentales du comportement de l'olivine (cf. l'excellent résumé de l'étude de Kaufmann et Lambeck, 2000). Par exemple, une contrainte supplémentaire quant à la viscosité du manteau est apportée par l'étude de Karato et Wu (1993) qui prédit une viscosité entre 10^{19} et 10^{21} Pa·s à la température de référence de 1600 K pour un manteau constitué d'olivine (hydraté ou anhydre). Par une minimisation de la différence entre les observations de ces phénomènes et leurs modèles, Kaufmann et Lambeck (2000) proposent trois profils de la structure visqueuse radiale de la Terre (Figure 1.6).

Ces trois profils ont en commun une variation de la viscosité mantellique avec la profondeur de deux ordres de grandeur. La viscosité moyenne (pointillés épais) du manteau supérieur se situe autour de $2\text{-}5\cdot 10^{20}$ Pa·s avec une variation de moins d'un ordre de grandeur et celle du manteau inférieur se trouve autour de $1\text{-}3\cdot 10^{22}$ Pa·s. Nous verrons dans le dernier chapitre quelle est l'influence des structures en viscosité sur la convection dans les planètes.

L'étude de Steinberger et Claderwood (2006) contraint un profil radial de viscosité à quatre ou cinq couches dans le manteau à partir des résultats des études de la physique des minéraux. Ils comparent ainsi leurs profils de viscosité, le géoïde (calculé à partir de l'écoulement du manteau généré par le champ de densité que fournit le modèle PREM) et le flux de chaleur obtenus avec ceux observés. Ainsi, le profil de viscosité qu'ils proposent est caractérisé par une "bosse" dans le manteau inférieur avec une valeur de viscosité de 10^{23} Pa·s juste au-dessus de la couche D'', la viscosité est 100 à 1000 fois inférieure dans le manteau supérieur et la viscosité dans la lithosphère est proche de 10^{22} Pa·s.

¹On définit l'équilibre hydrostatique comme l'état dans lequel un système se trouve lorsque les forces gravitationnelles (générées par le propre poids du système) sont parfaitement contrebalancées par un gradient de pression de direction opposée.

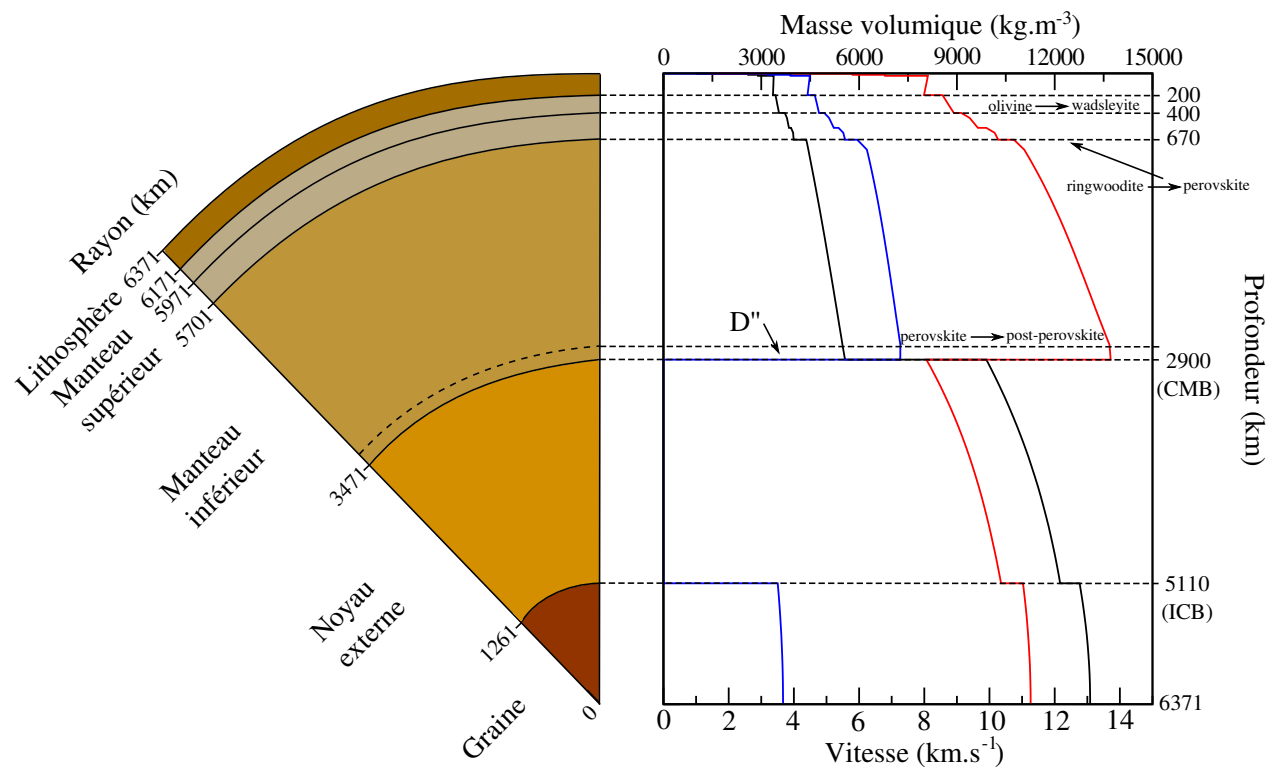


FIG. 1.5 – Structure interne de la Terre (gauche) déduite du premier modèle de vitesses des ondes sismiques, le PREM (Dziewonski et Anderson, 1981, à droite). Sur le graphique de droite, en rouge sont représentées les vitesses sismiques des ondes P et en bleu celles des ondes S. En noir apparaît le profil de masse volumique de la Terre déduit de la vitesse de propagation des ondes.

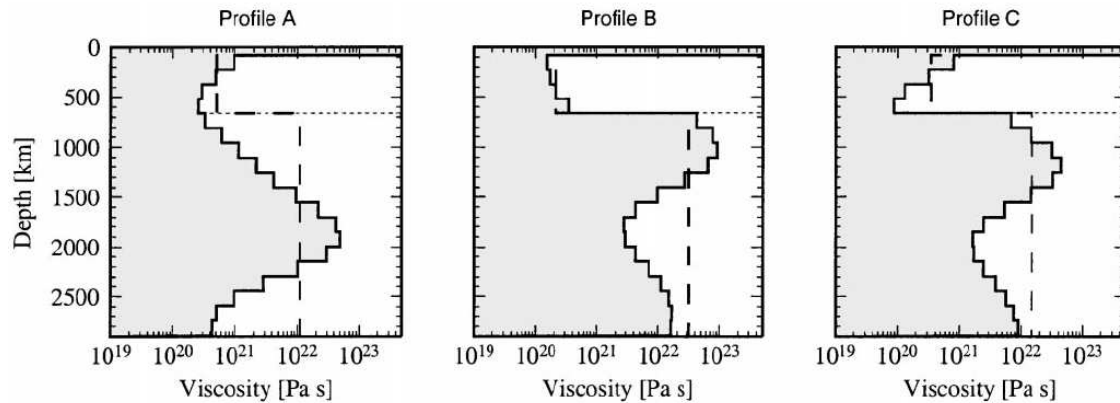


FIG. 1.6 – Profils radiaux de la viscosité pour la Terre. En pointillés épais, la viscosité moyenne du manteau inférieur et supérieur et en pointillés fins la discontinuité sismique à 670 km (Kaufmann et Lambeck, 2000).

1.2.2 Topographie, gravité et géoïde sur Terre

1.2.2.1 Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde

De nombreux modèles de la topographie terrestre avec des sources de données différentes ont vu le jour ces quelques dernières dizaines d'années, par exemple ETOPO5 et ETOPO2 du National Geophysical Data Center (<http://www.ngdc.noaa.gov/>), ou encore GLOBE30 (Hastings et Dunbar, 1999). Le modèle le plus précis aujourd'hui provient des données d'interférométrie radar collectées par *The Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM Rodriguez et al., 2005). La Figure 1.7 présente la topographie terrestre jusqu'au degré 100 à partir des données SRTM. Le champ de gravité terrestre a été obtenu par plusieurs techniques dont des observations par les satellites, des campagnes de mesures au sol et l'altimétrie satellitaire. Les modèles les plus récents de gravité terrestre avec les résolutions les plus grandes sont GGM02C (Tapley et al., 2005) et EIGEN-GL04C (Reigber et al., 2005). Les Figures 1.8 et 1.9 présentent le champ des anomalies de gravité et du géoïde terrestre développé jusqu'au degré 100 à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus d'une combinaison des données provenant des missions GRACE et LAGEOS (Förste et al., 2008). Plus récemment, le champ GOCE (2011) permettra également une cartographie du champ de gravité terrestre à haute résolution.

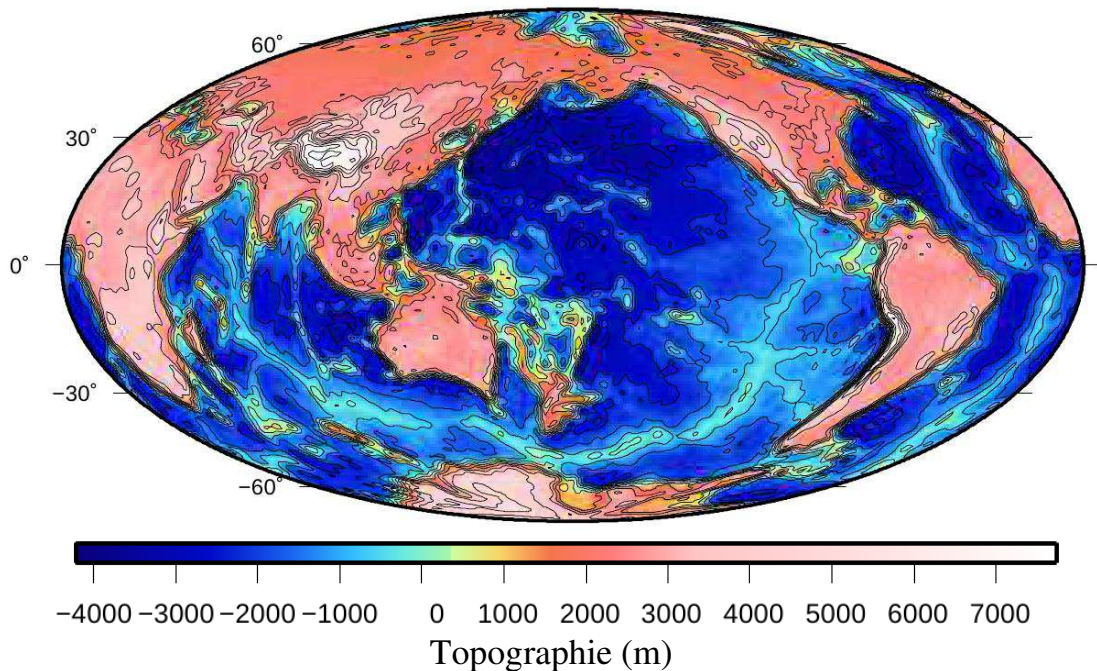


FIG. 1.7 – Carte de la topographie terrestre globale jusqu'au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques de la mission SRTM. Données disponibles sur http://topex.ucsd.edu/www_html/srtm30_plus.html.

1.2.2.2 Spectres de puissance, corrélation et admittance

Avec une forme relativement similaires, le spectre du géoïde apparaît cependant 5 fois inférieur à celui de la topographie (Figure 1.10), ce qui reflète la faible amplitude des ondulations du géoïde (Figure 1.9). On notera également qu'aucun des degrés

Comme je l'ai déjà évoqué, il a été démontré que l'origine des grandes longueurs d'onde du géoïde (faibles degrés) est dominée par l'écoulement du manteau profond (Ricard et al., 1984; Richards et Hager, 1984; Chase, 1985). Un mélange des contributions lithosphériques et dynamiques est supposé pour les longueurs d'ondes du géoïde correspondant à des degrés entre 10 et 30 (Le Stunff et Ricard, 1995). Enfin, des processus purement lithosphériques sont les contributeurs privilégiés pour les degrés supérieurs à 30 du géoïde (Le Stunff et Ricard, 1995).

La corrélation entre topographie et anomalies de gravité (ou géoïde) sur la Terre est relativement faible aux grandes longueurs d'ondes ($\ell < 10$, qui correspond aux longueurs d'onde où les reliefs sont compensés par convection)(Figure 1.11). C'est le cas, par exemple pour Hawaii, l'Afrique de l'Est, la partie centrale de l'Amérique du Nord, l'Est de l'Australie ou l'Himalaya où une topographie dynamique est suggérée (Parsons et Daly, 1983; McNutt et al., 1988; Ebinger et al., 1989; McKenzie et Fairhead, 1997). Ces grandes longueurs d'ondes du géoïde ont été utilisées pour

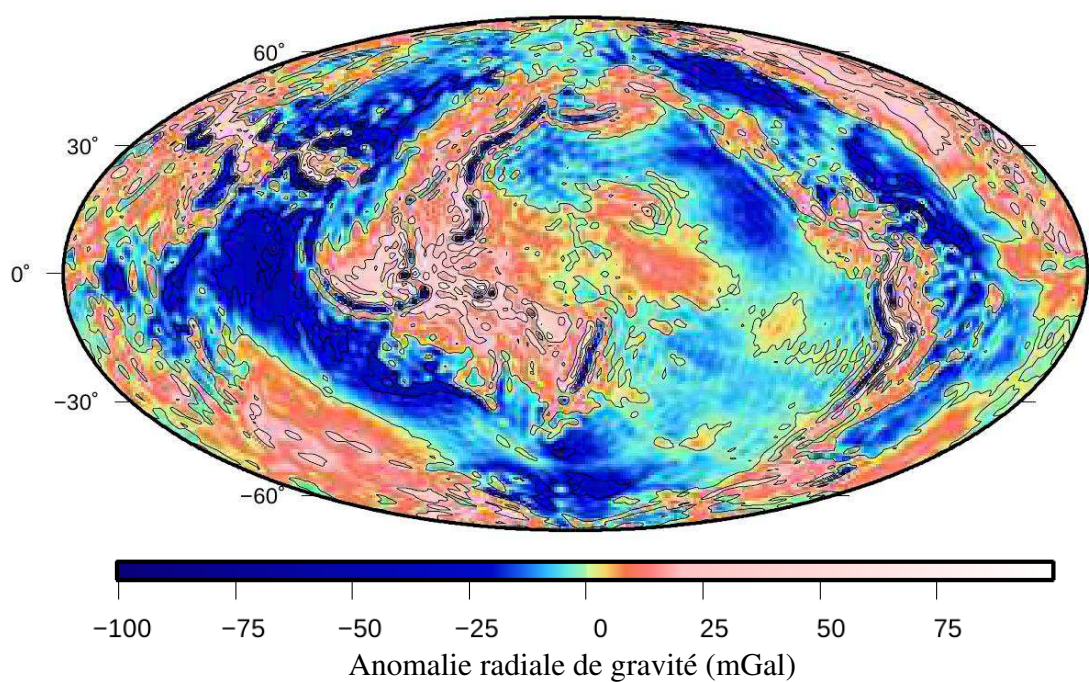


FIG. 1.8 – Carte des anomalies radiales de gravité de la Terre jusqu'au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la combinaison des données des missions GRACE et LAGEOS. Données disponibles sur http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005_eigen_gl04c_coef.

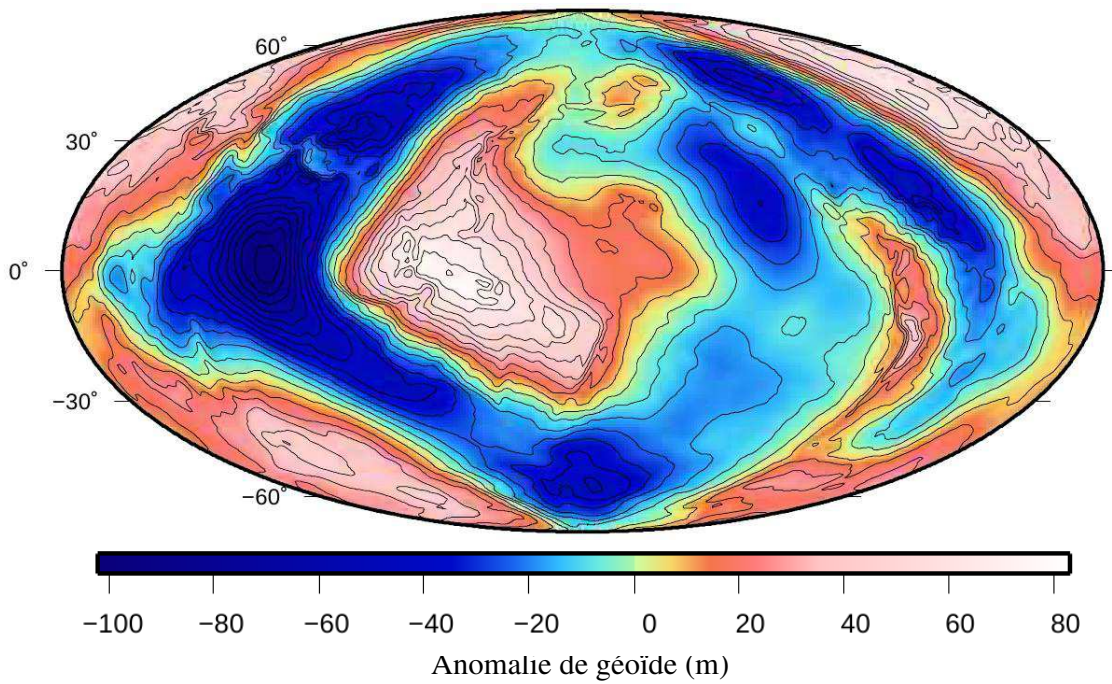


FIG. 1.9 – Carte des anomalies de géoïde terrestre jusqu’au degré 100 obtenue par synthèse à partir des coefficients d’harmoniques sphériques issus de la combinaison des données des missions GRACE et LAGEOS. Données disponibles sur http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g005_eigen_gl04c_coef.

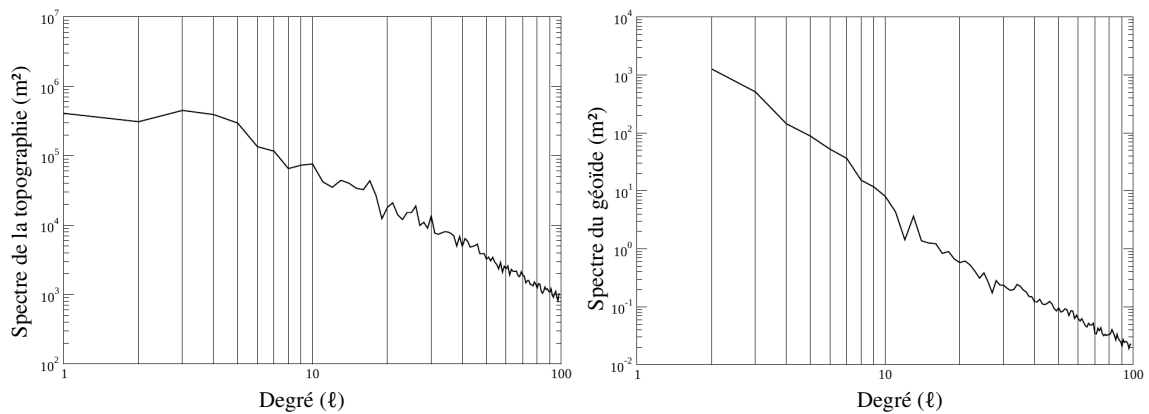


FIG. 1.10 – Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) terrestre jusqu’au degré 100.

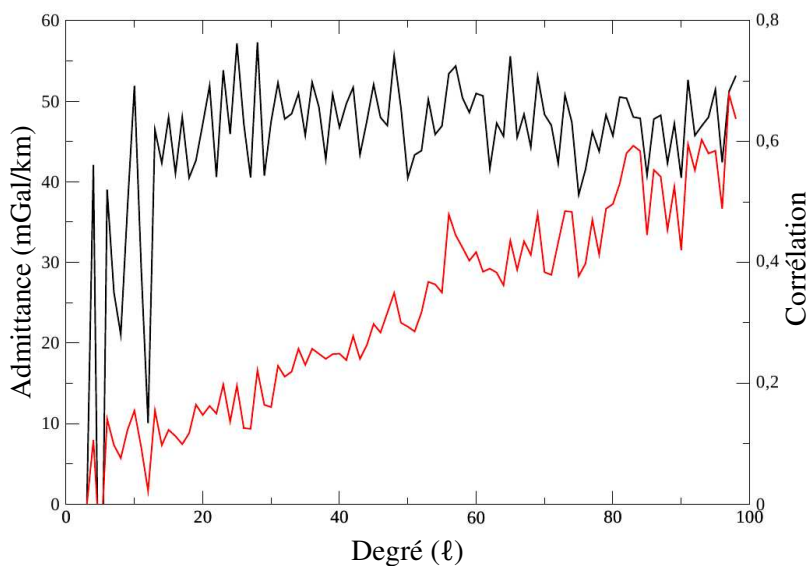


FIG. 1.11 – Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l'anomalie radiale de gravité pour la Terre.

contraindre la température du manteau (Parsons et Daly, 1983), la viscosité du manteau (Thoraval et Richards, 1997; Zhong et Davies, 1999; Panasuyk et Hager, 2000), l'importance des variations latérales de la viscosité (Čadek et Fleitout, 2003), l'effet d'une structure convective en deux couches (séparées par une transition de phase à 660 km) (Le Stunff et Ricard, 1997) et de manière générale, Hager et al. (1985) explorent les différentes contributions sur le géoïde de grande longueur d'onde (contribution du manteau inférieur, du manteau supérieur ...). Au-delà du degré 10, la corrélation est relativement constante et proche de 0,6 jusqu'au degré ~ 65 (puis décroît faiblement au delà du degré 250 : Wiczorek, 2007). Cette corrélation élevée à partir du degré 11-12 est souvent admise comme le signe d'une compensation des reliefs par isostasie (par exemple Phillips et Lambeck, 1980; Macario et al., 1995) ou par flexure élastique de la lithosphère (par exemple, Forsyth, 1985; Ebinger et al., 1989). Toute la difficulté réside dans la distinction des différentes contributions (compensation par isostasie, compensation dynamique, compensation par flexure élastique) en fonction de la longueur d'onde des reliefs. L'analyse de l'admittance fournit un éclairage important sur ce sujet.

Aux plus bas degrés, l'admittance est faible puis augmente progressivement (Figure 1.11). Si la topographie était entièrement non-compensée (ce qui semble être une bonne approximation au delà du degré 200 : Wiczorek, 2007), l'anomalie de gravité serait directement reliée à la topographie par la relation suivante : $g_{\ell m} = 2\pi G\rho h_{\ell m}$. L'admittance entre l'anomalie de gravité et la topographie (différente de l'équation 1.34 qui traite de l'admittance entre topographie et géoïde) serait quasi-constante

et proche de la valeur $2\pi\rho G$ soit $113,4 \text{ mGal}\cdot\text{km}^{-1}$ avec $\rho = 2,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Le fait que l'admittance soit inférieure à cette valeur pour tous les degrés traduit une topographie partiellement compensée, non totalement corrélée au champ de gravité.

1.2.2.3 Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes

Contrairement aux autres planètes telluriques de notre Système Solaire, la topographie et les anomalies de gravité ne sont pas les seuls observables disponibles pour contraindre la structure et la dynamique interne de la Terre. Comme je l'ai déjà mentionné, l'étude de la propagation des ondes sismiques est de loin la méthode d'investigation la plus puissante pour déterminer des paramètres tels que l'épaisseur de la croûte, de la lithosphère ou la structure du manteau. Cependant, en supposant un mode de compensation particulier (cf. Section 1.1.4), le calcul du géoïde et/ou des admittances associées, en utilisant un certain nombre d'hypothèses peuvent déterminer les paramètres de la structure interne de la Terre (l'épaisseur de croûte, l'épaisseur de la partie élastique de la lithosphère, ...).

Épaisseur élastique de la lithosphère Les avancées principales dans la compréhension de la rhéologie de la lithosphère terrestre apparaissent durant la période 1983-1986, et sont fondées sur l'étude des structures de large échelle qui se sont développées dans des contextes tectoniques variés, et sur les réponses mécaniques des lithologies de la croûte et du manteau déterminés expérimentalement (voir Kirby et Kronenberg, 1987, pour un résumé).

La lithosphère dans sa terminologie la plus globale peut avoir plusieurs définitions selon que l'on considère son état thermique, mécanique ou lithologique.

La lithosphère mécanique est définie comme la partie "croûte-manteau" contenant les roches qui ne peuvent pas se déformer de plus de 1% en 10^8 ans pour des contraintes typiques (de l'ordre de 1MPa : Schubert et al., 2001). Cette lithosphère mécanique est décrite par l'enveloppe des contraintes (*yield stress envelope*) qui définit la rigidité de la croûte et du manteau comme une fonction de la profondeur (plus de détails se trouvent dans McNutt, 1984; Burov et Diament, 1995, par exemple).

La lithosphère thermique est définie comme la partie supérieure d'une planète et représente la couche limite thermique froide. La profondeur de la lithosphère thermique est définie comme la limite entre la partie conductive et convective du manteau, la chaleur y est donc transportée principalement par conduction (Schubert et al., 2001). La base de cette lithosphère peut néanmoins devenir instable et participer à la convection dans une zone dite intermédiaire.

La rigidité de la lithosphère autorise également sa flexure en réponse à une charge. Cette partie de la lithosphère capable de fléchir définit la lithosphère élastique dont l'épaisseur dépend de ses caractéristiques internes. L'épaisseur de la lithosphère élastique suit la profondeur d'un isotherme spécifique (que nous allons voir dans le paragraphe suivant) qui marque la base de la lithosphère mécanique. Les variations de cette épaisseur élastique sont principalement contrôlées par (1) l'état thermique de la lithosphère, (2) l'état de l'interface croûte/manteau (découplage de la croûte et du manteau contrôlé par la composition, l'épaisseur et l'état thermique de la croûte) et (3) la contrainte associée à la flexure engendrée par la pression exercée à la surface et en sub-surface. Le comportement mécanique de la lithosphère continentale est compliqué par son hétérogénéité compositionnelle et par son histoire thermique et doit être considéré différemment de la lithosphère océanique.

La détermination de l'épaisseur élastique de la lithosphère océanique par des modèles de flexure est relativement simple puisque ces modèles sont fondés sur la construction de volcans (ou champs volcaniques) isolés. La déduction de l'épaisseur élastique par la modélisation de la topographie et des anomalies de gravité relatives à ces structures conduit à une épaisseur de 45 km (Watts, 2001) (McKenzie et Fairhead, 1997, proposent une épaisseur maximum de 130 km). Cette épaisseur ne dépend que de l'âge de la plaque au moment du chargement et correspond approximativement à la profondeur de l'isotherme 450 °C (Kirby et Kronenberg, 1987, suggèrent un isotherme entre 700 et 800 °C et Burov et Diament, 1995, proposent l'isotherme 600 °C). La différence entre gravité observée et modélisée au niveau des dorsales suggère une compensation par isostasie (Watts, 2007). La comparaison des épaisseurs de croûte mise en jeu révèle une compensation de type Pratt plutôt qu'une compensation fondée sur le modèle d'Airy. Dans le cas des marges, le modèle de compensation d'Airy semble permettre une meilleure description des structures et les anomalies de gravité associées à ce modèle de compensation sont en accord avec celles observées (Watts, 2007). C'est le cas de la marge Atlantique de l'Amérique du Nord par exemple (Haxby et Turcotte, 1978). Lewis et Dorman (1970) puis Forsyth (1985) déterminent une épaisseur élastique de 5 km sous les dorsales et 30 km sous les vieux bassins océaniques.

La détermination de l'épaisseur élastique de la lithosphère continentale est plus problématique. La difficulté provient du fait (1) que l'importance des charges de surface ou de sub-surface n'est pas clair *a priori* et (2) qu'une charge de surface peut donner des résultats identiques à une charge de sub-surface en terme de topographie et d'anomalie de gravité. Dans le cas de la lithosphère continentale, l'épaisseur élastique de la lithosphère suit une loi bi-modale, avec les valeurs les plus hautes entre 70 et 90 km pour les cratons et des valeurs basses entre 10 et 20 km (Watts, 1992; Burov

et Diament, 1995). Forsyth (1985) détermine l'épaisseur élastique en minimisant la différence entre une admittance réelle et une admittance calculée dans le cas d'une compensation par flexure élastique en supposant une charge à la fois en surface et en sub-surface, et en considérant connues et constantes la masse volumique de la croûte, la masse volumique du manteau, la profondeur de l'interface croûte-manteau et le module de rigidité de la plaque (Section 1.1.4.3). Cette méthode de comparaison des admittances a été très largement utilisée par différentes études (par exemple, Burov et Diament, 1995). Cependant, la détermination de l'épaisseur élastique de la lithosphère par cette méthode conduit à des valeurs trop grandes dans les vieilles régions inactives, entre 5 et 134 km (correspondant à un isotherme de 800-1000 °C - McKenzie et Fairhead, 1997). Il existe donc des controverses concernant ces valeurs élevées (Watts et Burov, 2003) et les épaisseurs inhérentes à la méthode de Forsyth (1985) représenteraient la limite supérieure de l'épaisseur élastique possible.

En utilisant la méthode de Forsyth (1985), Ebinger et al. (1989) utilisent la corrélation entre anomalies de Bouguer et topographie pour contraindre l'épaisseur élastique de la lithosphère continentale dans les régions de l'Est africain et des Afars. Ainsi, dans le cas des cratons stables, cette épaisseur est estimée entre 64 et 90 km (valeurs également proposées par Watts, 1992). Des estimations plus basses (43-49 km) ont été obtenues dans les régions non-fracturées proches du Darfour à l'Est du plateau des Afars. Enfin, des épaisseurs élastiques entre 21 et 36 km sont attribuées à des régions volcaniques actives (le Kenya, les rifts centraux et d'Éthiopie) ainsi que des régions inactives adjacentes des rifts. Les grandes longueurs d'onde de la topographie et de la gravité de l'Est du plateau africain ne peuvent pas être expliquées par un simple modèle de compensation isostatique et la convection est invoqué comme origine de la topographie de cette région (Ebinger et al., 1989).

En utilisant la même méthode de calcul de la corrélation que ses prédécesseurs (Forsyth, 1985; Ebinger et al., 1989), McKenzie et Fairhead (1997) estiment que l'épaisseur élastique au niveau de l'Amérique du Nord, l'Est africain, l'Australie, la péninsule indienne et l'ex-URSS ne dépasse pas 25 km (résultats déjà évoqués par Foster et Nimmo, 1996, par exemple). Tiwari et Mishra (1999) ont également estimés l'épaisseur élastique de la lithosphère sous les trapps du Deccan à partir de la corrélation et l'admittance entre topographie et gravité. Ils concluent à une épaisseur de 10 ± 2 km, concordant avec d'autres observations au travers le monde qui déterminent une épaisseur de lithosphère plus petite que la profondeur de l'isotherme $350 \pm 100^\circ\text{C}$.

Dans le cas de la structure volcanique hawaïenne, un modèle de flexure élastique de la lithosphère est proposé par Watts (2007) pour expliquer l'anomalie de gravité observée, avec une épaisseur élastique d'environ 25 km. L'hypothèse de base d'une

compensation par flexure élastique de la lithosphère peut paraître étrange pour la région d'Hawaii car on pourrait s'attendre à un support de la topographie par la présence d'un panache sous-jacent. Sur la base du même modèle de flexure élastique, le plateau tibétain est associé à une épaisseur élastique entre 0 et 20 km (Watts, 2007) alors que McKenzie et Fairhead, 1997 proposent une épaisseur de 42 km pour l'Himalaya avec un soutien dynamique. Watts (2007) propose une compilation des données d'épaisseurs élastiques sous la forme d'une carte issue de différentes études d'inversion des anomalies de gravité et de topographie (Figure 1.12).

Pour résumer, la modélisation de la flexure élastique appliquée à la lithosphère océanique est relativement simple (car la charge de surface n'est représentée que par des volcans ou des champs volcaniques) et conduit à des épaisseurs élastiques de la lithosphère inférieures à 35 km (voir Figure 1.12). L'épaisseur de la partie élastique de cette lithosphère dépend de la profondeur des isothermes $\sim 300-600$ °C (profondeur qui varie avec l'âge de la plaque). L'utilisation de modèles de flexure élastique pour la lithosphère continentale est plus complexe. Bien que des valeurs importantes soient suggérées par Forsyth (1985) ou Ebinger et al. (1989), on retiendra des épaisseurs élastiques de lithosphère entre 5 et 70 km (voir Figure 1.12). Il existe une limite majeure à tous ces modèles de flexure élastique de la lithosphère : contrairement aux autres planètes, la Terre présente une tectonique des plaques, indiquant le caractère fragile de sa partie superficielle (qui n'est pris en compte dans aucun des modèles précédemment cités). Les valeurs de l'épaisseur élastique de la lithosphère sont donc probablement surestimées ici.

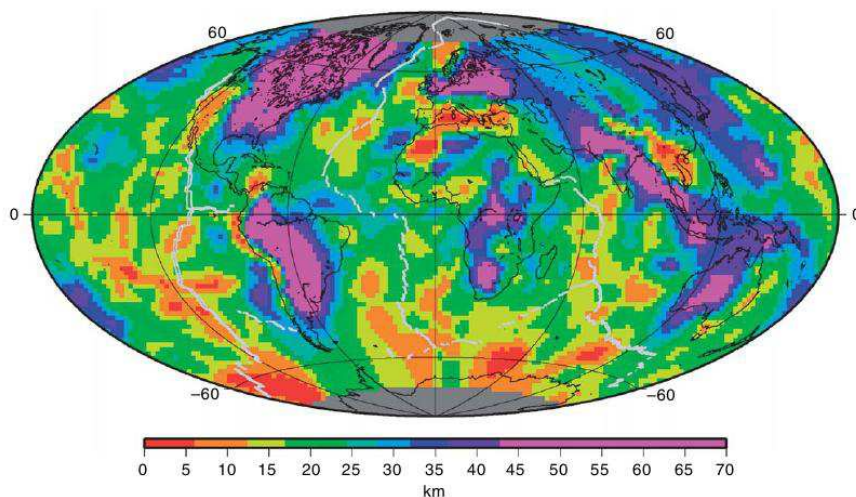


FIG. 1.12 – Carte de l'épaisseur élastique de la lithosphère terrestre après compilation de jeux de données de plusieurs études, d'après Watts (2007).

1.3 Mars

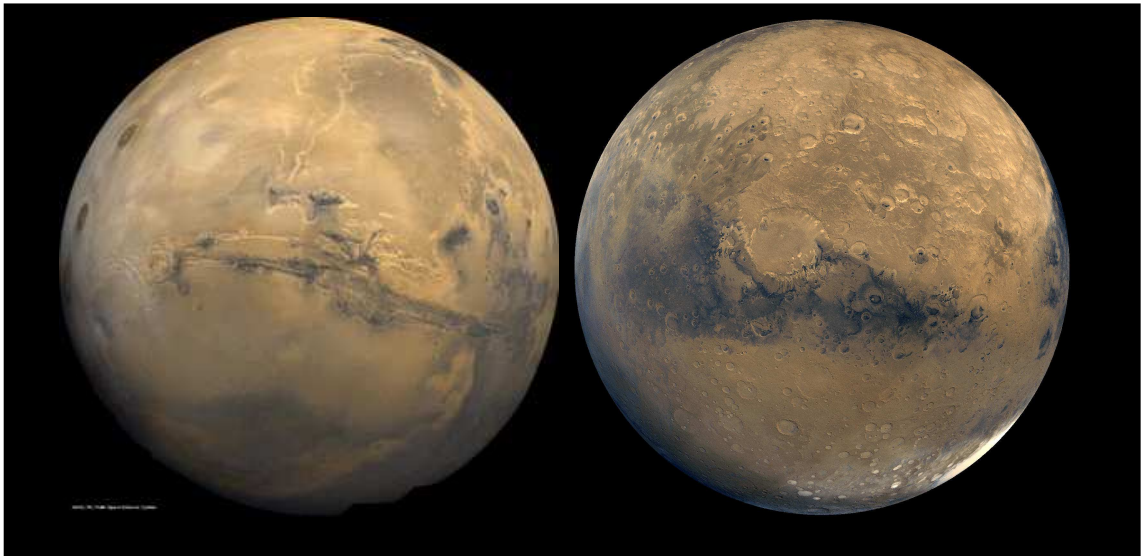


FIG. 1.13 – Photographie des deux faces de Mars. À gauche, une mosaïque de Mars centrée sur Vallès Marinéris et à droite, une mosaïque de l'hémisphère opposé avec le vaste cratère Schiaparelli (près du centre). Crédits :NASA/JPL/Caltech

Mars est deux fois plus petite que la Terre et sa masse représente $1/10^{\text{ème}}$ de la masse terrestre soit un rayon moyen de 3389,5 km pour une masse de $0,6 \cdot 10^{24}$ kg avec une pesanteur moyenne de $3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (identique à Mercure). Parmi toutes les planètes telluriques, Mars possède les conditions environnementales qui se rapprochent le plus de celles de la Terre. Les températures extrêmes de la surface varient de -140°C à 20°C . Tout comme Mercure, la Lune ou Vénus, Mars ne présente pas (ou plus) de tectonique des plaques. Cependant, un simple regard sur sa surface nous laisse entrevoir les traces d'une activité intense avec la présence par exemple d'un canyon de très grande taille (Valles Marineris) ou encore d'une activité volcanique importante caractérisée par la présence de la plus grande structure volcanique du Système Solaire : le dôme de Tharsis.

1.3.1 Structure interne

On ne possède pas de données sismologiques sur Mars qui permettraient une exploration interne profonde fiable. De plus, un manque de données concernant le moment d'inertie ou la masse réelle de la planète limite encore la connaissance de son intérieur profond. Les modèles de structure interne et d'évolution thermique de Mars sont donc principalement dépendants de l'interprétation que l'on fait des

champs de topographie, de gravité, du champ magnétique et de l'analyse des météorites SNC (Shergottites, Nakhiles, Chassigny, considérées comme ayant une origine martienne). Les mesures des paramètres géodésiques par les sondes Mariner (dans les années 60-70), Viking (1976) ou Pathfinder (1996) sont également des éléments primordiaux pour l'établissement de modèles de structure interne. Par exemple, l'étude du potentiel de marée k_2 ² indique que l'intérieur de la planète semble suffisamment chaud pour qu'au moins la partie supérieure du noyau martien soit liquide (entre 1520 et 1840 km : Yoder et al., 2003). Il existe également des modèles de structure interne de Mars fondés sur le modèle terrestre (PREM, Dziewonski et Anderson, 1981) qui permettent ainsi de déduire un profil de masse volumique et la profondeur des interfaces pour les limites croûte/manteau puis manteau/noyau (Figure 1.15) (Sohl et Spohn, 1997; Harder, 1998, par exemple). La structure interne de la Figure 1.15 ne représente qu'une idée de ce à quoi peut ressembler la structure interne de Mars. Il est important de garder en tête que ce sont des suppositions tant dans la position réelle des interfaces que dans la présence des transitions de phases ou de leur épaisseur (non représentées sur la Figure 1.15 dans un souci d'allègement).

Les études qui se sont attelées à l'établissement de modèles de la structure interne de Mars s'appuient soit sur des paramètres chimiques obtenus des SNC soit sur des paramètres géophysiques ou géodésiques mais il semble assez difficile d'obtenir un modèle de structure interne qui respecte simultanément ces deux types de contrainte (Sohl et Spohn, 1997). Des études plus récentes (par exemple Mocquet et al., 2010) proposent une synthèse de plusieurs études sur les structures internes de Mars (entre autres) également fondées sur l'analyse des météorites SNC, sur les mesures géodésiques (moment d'inertie et potentiel de marée) ou encore sur la relation masse-rayon. Ainsi selon les modèles thermiques choisis, le noyau aurait un rayon entre 1600 et 1750 km avec une masse volumique moyenne qui se situe aux alentours de $6500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (Figure 1.15). Avec un modèle de structure interne contraint par la masse volumique, la composition et l'épaisseur de la croûte, la minéralogie du manteau ou la taille et la teneur en sulfure du noyau, l'étude récente de Rivoldini et al. (2011), confirme les résultats précédents par une méthode d'inversion et suggère un noyau de $1794 \pm 65 \text{ km}$.

Les études fondées sur les mesures chimiques sur les SNC permettent d'obtenir une gamme de valeurs de la masse volumique moyenne du manteau martien d'environ $3600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (par exemple Dreibus et Wänke, 1985; Sanloup et al., 1999). Enrichi en fer comparé au manteau terrestre (aux alentours de 18 % sur Mars comparé à

² k_2 est le nombre de Love de degré 2 qui caractérise la variation du potentiel gravitationnel d'un corps due à la redistribution de masse engendrée par une perturbation extérieure, par exemple l'effet marée.

8 % pour les MORB terrestres : Robinson et Taylor, 2001 ; Longhi et al., 1992) le manteau martien pourrait néanmoins contenir des éléments radiogéniques dans les mêmes proportions que sur Terre. D'après les compositions définies par Dreibus et Wänke (1985), Longhi et al. (1992) proposent de découper le manteau martien en un manteau supérieur riche en olivine (avec clinopyroxène et grenat) ayant une masse volumique moyenne de $3520 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et un manteau riche en perovskite (et magnésio-wüstite) avec une masse volumique moyenne de $4170 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (Figure 1.15). Les transitions dans le profil de masse volumique (Figure 1.15) peuvent être associées à des modifications des assemblages minéralogiques des silicates et permettent de dessiner des transitions de phases successives au sein du manteau (par exemple Verhoeven et al., 2005). Comme dans le cas de la Terre, ces transitions de phases ont une influence non négligeable sur la dynamique interne (Weinstein, 1995; Harder et Christensen, 1996; Breuer et al., 1996, 1998). À cause d'un gradient de pression plus faible que sur Terre, les transitions de phases sur Mars apparaissent à des profondeurs significativement plus grandes (Breuer et al., 1998). L'étude de Harder (1998) révèle qu'en utilisant un modèle de masse volumique perturbé de façon aléatoire ainsi qu'une taille du noyau variant avec sa teneur en sulfure, la transition de la phase spinelle à la phase perovskite se situe à un rayon aux alentours de 1910 km. Une couche de perovskite (d'épaisseur préférentielle 100 km) est alors présente dans le manteau martien lorsque le noyau a une taille inférieure à 0,45 fois la taille de la planète. Cette couche de perovskite (si elle est présente) est également un élément déterminant dans le style de convection.

La masse volumique de la croûte martienne serait comprise entre 2700 et 3100 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ avec une épaisseur très variable selon les méthodes que l'on utilise pour sa détermination (comme nous allons le voir par la suite). La borne inférieure de cette gamme de masse volumique représente le pôle de composition andésitique-basaltique obtenu par Pathfinder (1996) (Brücker et al., 2003). La borne supérieure est, elle, représentative d'une composition de shergottite basaltique (Britt et Consolmagno, 2003). Les caractéristiques principales de la croûte martienne nous viennent des études couplées de la topographie et de la gravité qui seront amplement discutées dans la section suivante.

Sur la Terre, le profil de viscosité du manteau (même s'il reste très incertain) est contraint par l'utilisation du rebond de la lithosphère pendant une période post-glaciaire ou par l'utilisation des grandes longueurs d'ondes du géoïde (cf. Section 1.2.1). Pour contraindre la viscosité sur Mars, on dispose des indications fournies par les études expérimentales à propos de l'olivine (par exemple Korenaga et Karato,

2008; Karato, 2008).

Steinberger et al. (2010) se sont fondés sur l'étude de Steinberger et Claderwood (2006) pour dériver un profil de viscosité martien avant de s'en servir pour interpréter les plus bas degrés du spectre de puissance du géoïde comme la présence possible d'un soutien lithosphérique ou mantellique de la topographie (que nous verrons par la suite). En calculant d'abord un profil de masse volumique en fonction de la pression (remis à l'échelle à partir du PREM) puis un profil de température et enfin un profil de viscosité, ils génèrent des fonctions réponses de la topographie dynamique et du géoïde associé. La comparaison du rapport entre topographie et géoïde qu'ils obtiennent avec celui issu des données enregistrées de la topographie et du géoïde sur Mars, leur permet de conclure à un profil de viscosité sur Mars avec une viscosité quasiment constante dans le manteau et à une lithosphère épaisse avec une viscosité de 10^{23} Pa·s (Figure 1.14).

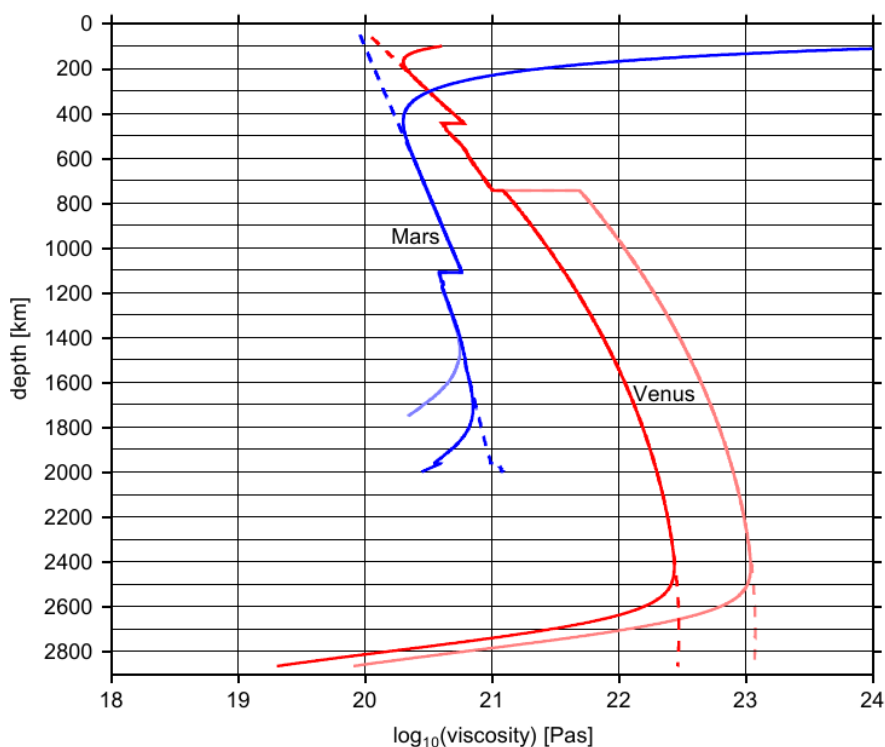


FIG. 1.14 – Profils de viscosité pour Mars (en bleu) et Vénus, proposés par Steinberger et al. (2010) sur la base d'un profil de température calculé dans leur étude.

Mars apparaît aujourd'hui sans tectonique des plaques, elle possède donc une lithosphère suffisamment épaisse pour que les contraintes internes soient suffisamment faibles pour ne pas franchir le seuil de rupture en surface. Cette lithosphère épaisse restreint le mode de convection à un régime de convection de type couvercle stagnant (*stagnant lid*) (type de convection que nous détaillerons dans le Chapitre

2). Ce type de convection s'obtient en présence d'une viscosité fortement dépendante de la température (Davaille et Jaupart, 1993; Solomatov, 1995; Grasset et Parmentier, 1998, par exemple). De plus, la présence de la dichotomie martienne (qui sera présentée dans le détail par la suite) est parfois interprétée comme la preuve d'une convection particulière de faible degré (Zhong et Zuber, 2001; Roberts et Zhong, 2006, par exemple). La réduction du degré de la convection fait intervenir (entre autres) une variation de la viscosité avec la profondeur ainsi qu'une stratification de la viscosité (Zhang et Yuen, 1995; Bunge et al., 1996). Plus récemment, Zhong et Zuber (2001) et Roberts et Zhong (2006) ont montré par des simulations numériques de la convection qu'un contraste de viscosité très prononcé (d'un facteur 500 pour les premiers, 100 pour les seconds) entre le manteau supérieur et le manteau inférieur de Mars pouvait produire une structure de convection de degré 1 (en 100 Ma). La présence d'un affaiblissement de l'asthénosphère engendré par la fusion partielle du manteau supérieur est une justification possible à un tel saut de viscosité (Zhong et Zuber, 2001). Tous ces éléments contraignent fortement le profil de viscosité martien.

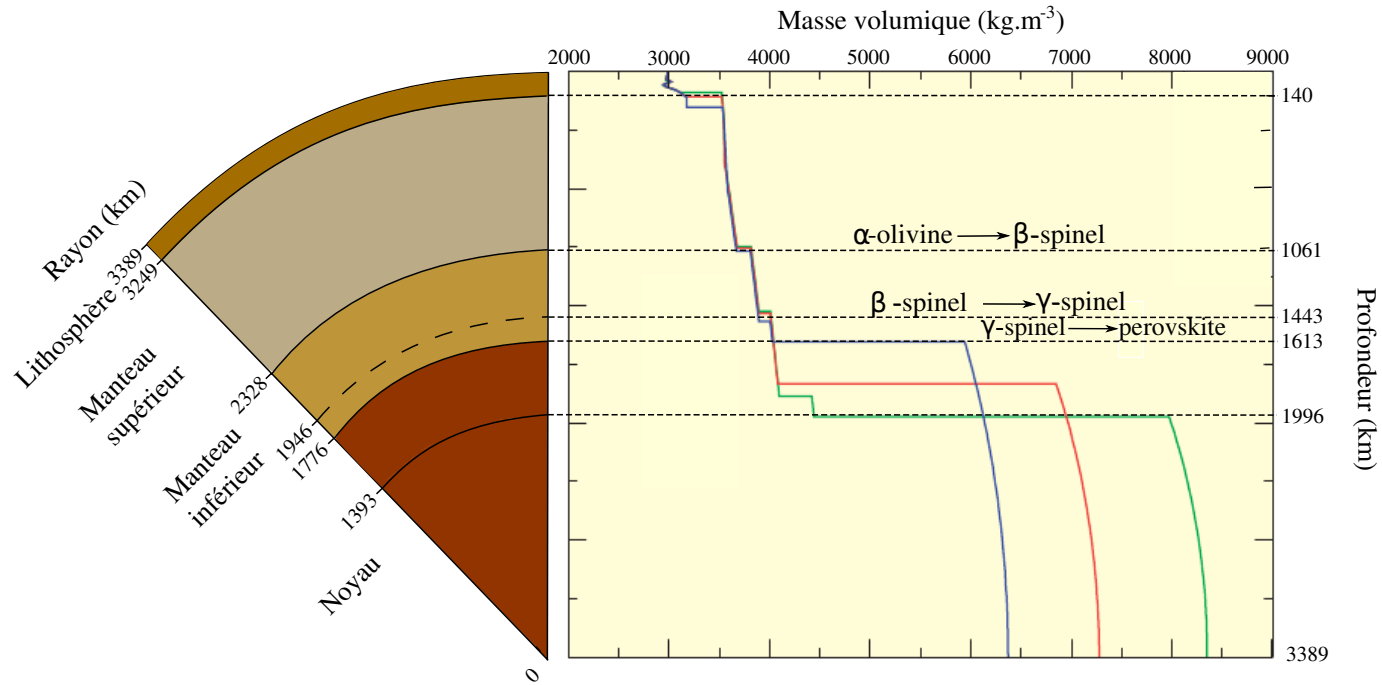


FIG. 1.15 – Exemple de structure interne possible pour Mars déduite d'une synthèse de modèles de masse volumique (différentes courbes à droite) de Sohl et Schubert (2007). Ces trois modèles de masse volumique sont les résultats d'un modèle où la teneur en sulfure du noyau varie. En vert, un noyau de fer pur, en bleu un noyau composé uniquement de sulfure de fer et en rouge, un modèle intermédiaire avec la même proportion de fer pur que de sulfure de fer (le lecteur pourra se rapporter à l'étude Babeyko et Zharkov (2000) pour plus de détails).

1.3.2 Topographie, gravité et géoïde sur Mars

1.3.2.1 Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde

Les coefficients en harmoniques sphériques des champs de la topographie et du géoïde martien (aréoïde) sont disponibles sur le site de la NASA (par l'interface *Planetary Data System*). Ces coefficients (ici jusqu'au degré 84 mais connus jusqu'au degré 719), utilisés pour la représentation du champ de topographie de la Figure 1.16, proviennent des mesures d'altimétrie de l'instrument MOLA (*Mars Orbiter Laser Altimeter*) embarqué sur la sonde MGS (*Mars Global Surveyor*), lancée le 7 novembre 1996. Les coefficients en harmoniques sphériques des anomalies radiales de gravité et du géoïde (utilisés pour les Figures 1.17 et 1.18) sont obtenus grâce aux données radio de Mars Odyssey et MGS et sont connus jusqu'au degré 95 (Konopliv et al., 2006). Plus récemment, Konopliv et al. (2011) ont obtenus les anomalies radiales de gravité jusqu'au degré 110. De nombreux modèles ont utilisé ces coefficients en harmoniques sphériques (pour la construction de cartes et pour le calcul de grandeurs spectrales) afin de décrire les structures topographiques et les anomalies de gravité (ou celles du géoïde) de la surface de Mars (Yuan et al., 2001; Konopliv et al., 2006, par exemple).

La construction des champs de topographie et d'aréoïde (Figure 1.16 et 1.18) permet la description des grandes structures martiennes (Smith et al., 1999a,b; Lemoine et al., 2001). D'un point de vue global, la figure topographique dominante de la surface de Mars est une large dichotomie proche de l'équateur, marquée par une différence d'altitude moyenne de 5 km et séparant les terrains de basse altitude, faiblement cratérisés et plus jeunes au nord (ayant potentiellement subi un "resurfaçage" : Tanaka et al. 2003, Neukum et al. 2010) des terrains au sud, de plus haute altitude, plus fortement affectés par des processus de surface et de sub-surface et plus anciens. Mars présente également une structure volcanique importante qui se situe au niveau de l'équateur et qui semble interrompre la dichotomie, c'est le dôme de Tharsis. Ce dôme est constitué de plusieurs volcans dont le plus élevé du système solaire, Olympus Mons haut de presque 22 km. Associés à Olympus Mons, on trouve également Arsia Mons, Pavonis Mons et Ascraeus Mons. Moins imposant, Elysium Mons est également une structure volcanique remarquable de Mars avec une altitude d'environ 14 km. Très proche du dôme de Tharsis se trouve une structure témoignant de l'activité géologique passée, il s'agit du plus grand canyon du Système Solaire, Valles Marineris, de 3300 km de long, 300 km de large et qui peut atteindre 7000 m de profondeur. La surface martienne (et particulièrement l'hémisphère sud) est également criblée de cratères d'impact souvent de petite taille mais on notera la présence des deux plus imposants, le bassin d'impact Hellas d'un diamètre d'environ 2300 km pour une profondeur de 9 km, et celui d'Argyre.

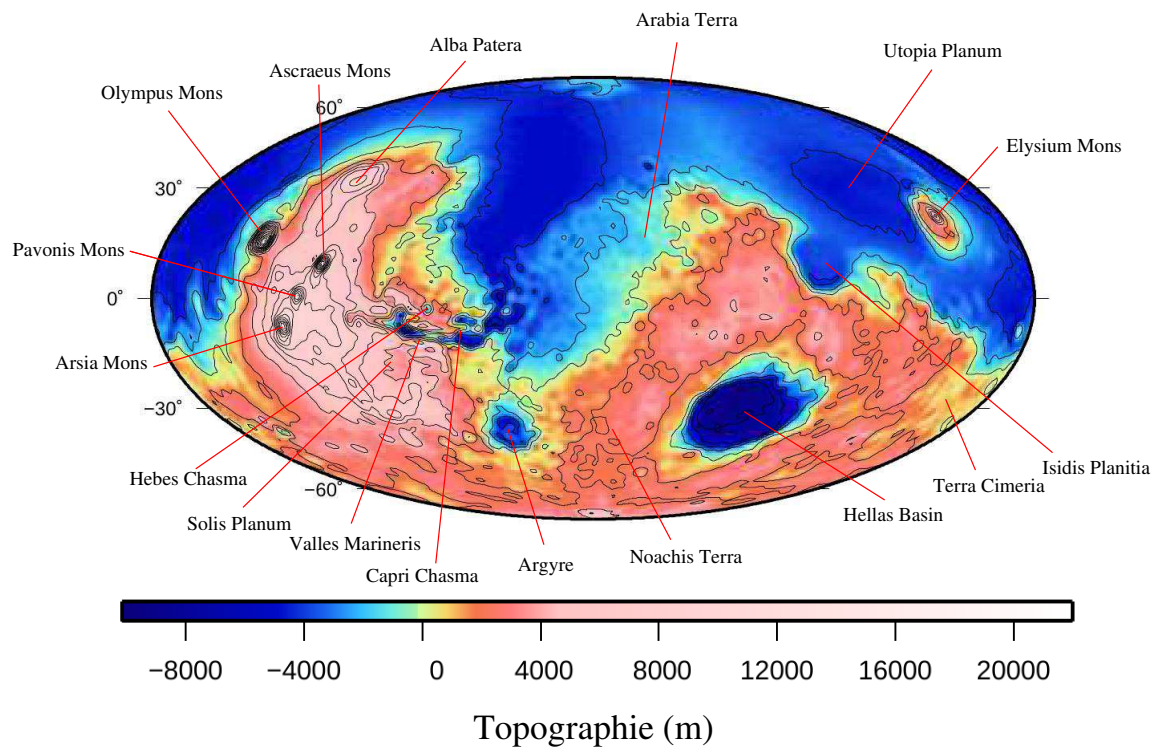


FIG. 1.16 – Carte de la topographie martienne globale obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par l'instrument MOLA de la sonde MGS. Données disponibles sur <http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/mgs/shadr.html>

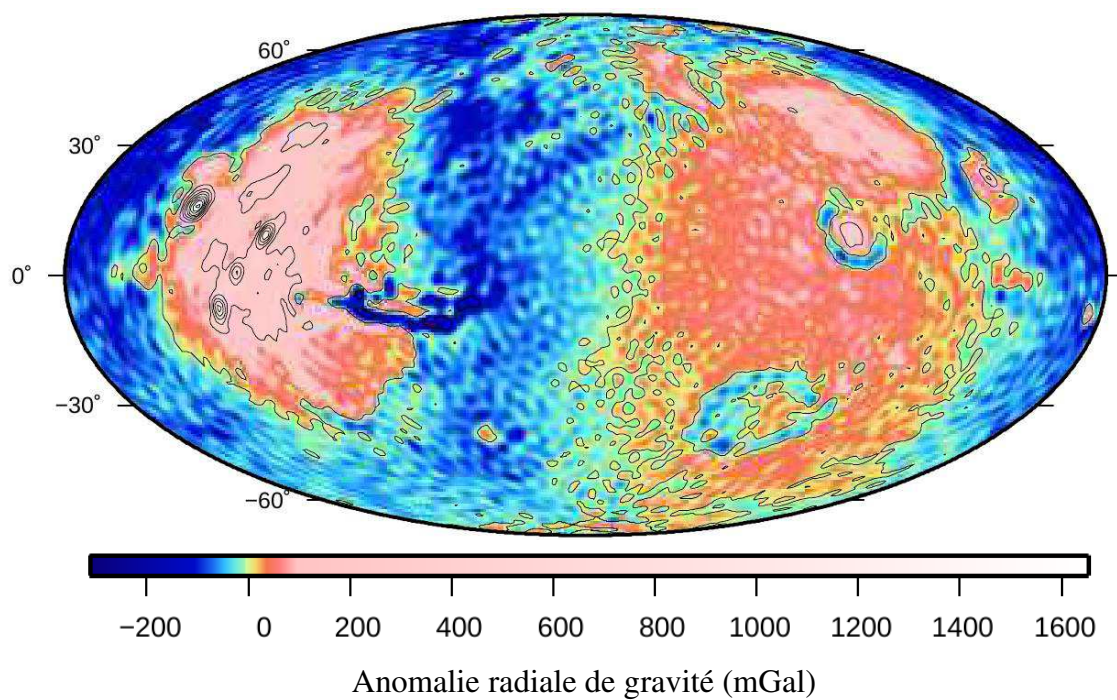


FIG. 1.17 – Carte des anomalies radiales de gravité à la surface de Mars jusqu'au degré 84 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par la sonde MGS. Données disponibles sur http://pds-geosciences.wustl.edu/geo/mgs-m-rss-5-sdp-v1/mors_1002/sha/.

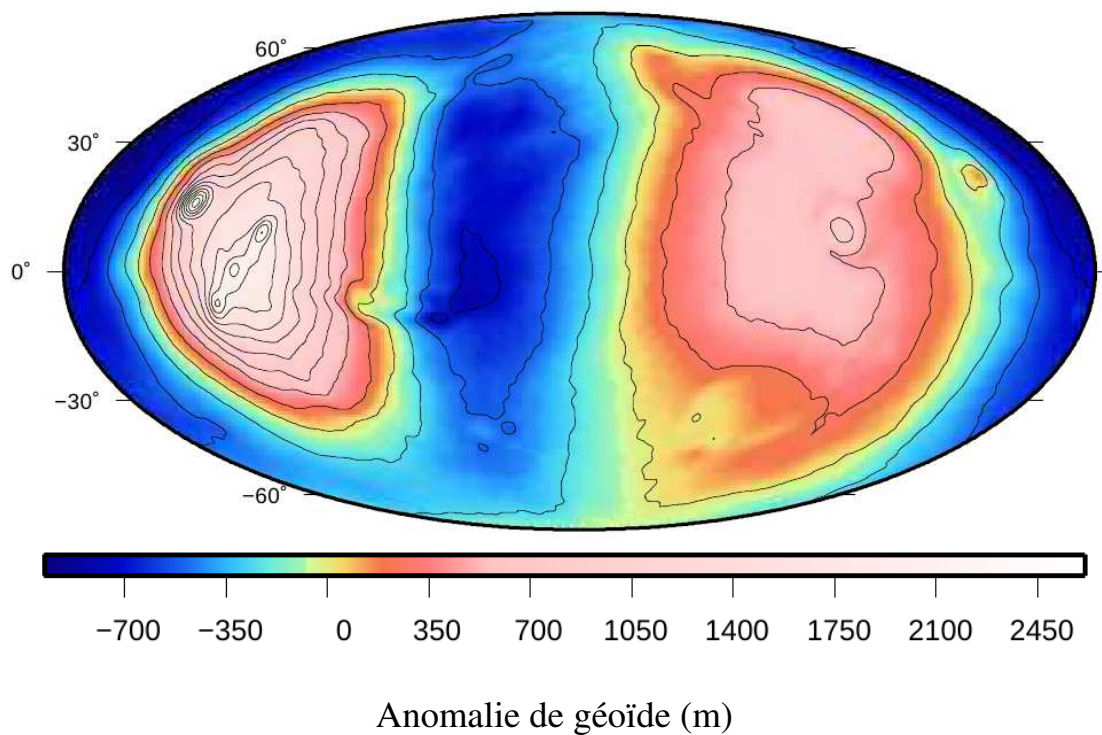


FIG. 1.18 – Carte des anomalies du géoïde martien (aréoïde) jusqu'au degré 84 obtenue par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 84 fournis par la sonde MGS. Données disponibles sur http://pds-geosciences.wustl.edu/geo/mgs-m-rss-5-sdp-v1/mors_1002/sha/.

La structure la plus visible du champ d'anomalies radiales de gravité (Figure 1.17) est associée à la formation volcanique d'Olympus Mons et des Monts du dôme de Tharsis, caractérisée par une forte anomalie positive et encadrée par des anomalies négatives. La zone Est, contenant certains bassins d'impact comme Isidis, Argyre ou Utopia est également caractérisée par une anomalie de gravité positive. Les anomalies négatives sont quant à elles associées au grand rift de Valles Marineris, entourent les bassins, parfois certaines montagnes et certaines structures volcaniques.

L'aréoïde est également dominé par une structure de degré 2 quasi-circulaire (par opposition aux figures topographiques complexes) (Figure 1.18). Le maximum de signal est clairement symétrique par rapport au dôme Tharsis qui est donc entouré par un anneau de signal minimum. La deuxième zone de signal maximum est associée aux impacts majeurs (Hellas) et à la structure volcanique d'Elysium.

1.3.2.2 Spectres de puissance, corrélation et admittance

Les spectres de puissance de la topographie et de l'aréoïde sont dominés par les degrés les plus bas (Figure 1.19). Cette prédominance des grandes longueurs d'onde est la conséquence directe de la présence de structures de large échelle, ici la dichotomie hémisphérique et la province de Tharsis.

La corrélation entre topographie et gravité est relativement élevée avec des valeurs entre 0,6 et 0,8 excepté pour les faibles degrés ($\ell < 10$) et les degrés les plus élevés ($\ell > 65$) (Figure 1.20). Une corrélation faible aux grandes longueur d'onde est associé à une compensation de type isostatique (ou autre). Au contraire, l'absence de compensation ou la compensation dynamique (c'est à dire très profonde) est avancé dans le cas de fortes corrélations. La décroissance de la corrélation au-delà du degré 60 est attribuée à la limite de mesure de l'instrument à bord de MGS (Lemoine et al., 2001; Wiczorek, 2007).

L'admittance entre topographie et anomalie radiale de gravité présente la même forme que la corrélation avec des valeurs qui augmentent avec les degrés dans un premier temps (jusqu'au degré ~ 25) pour atteindre un plateau relativement constant avec une valeur aux alentours de 110 mGal/km jusqu'au degré ~ 60 (Figure 1.20). Comparée à la Terre cette valeur d'admittance particulièrement élevée est en accord avec une faible compensation des reliefs (Phillips et Saunders, 1975; Smith et al., 1999b; Arkani-Hamed, 2000). Enfin, l'admittance diminue progressivement pour atteindre une valeur de 20 mGal/km au degré 84.

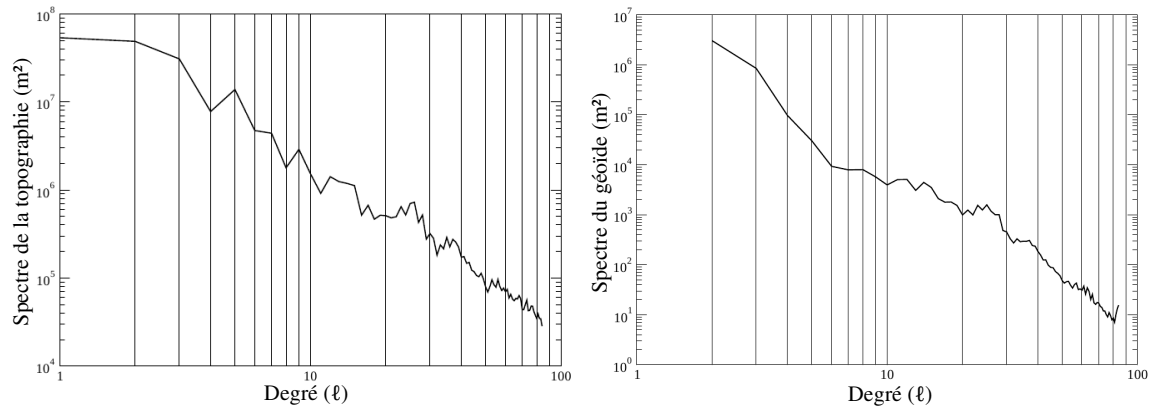


FIG. 1.19 – Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) jusqu'au degré 84.

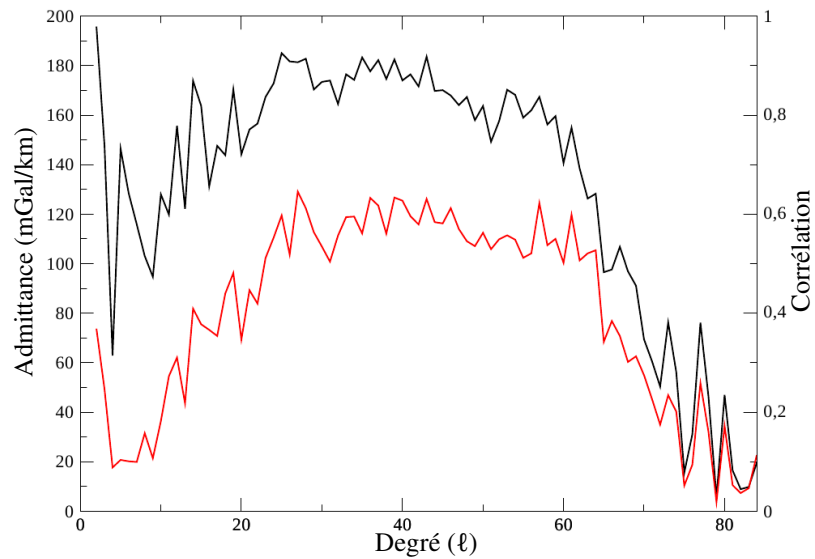


FIG. 1.20 – Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l'anomalie radiale de gravité pour Mars jusqu'au degré 84.

1.3.2.3 Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes

Épaisseur et masse volumique de la croûte Si l'on émet certaines hypothèses géologiques (masse volumique de la croûte, du manteau, épaisseur moyenne de la croûte, composition) et que l'on considère un mode privilégié de compensation des reliefs, il est alors possible d'utiliser les méthodes d'inversion classiques du champ de gravité pour obtenir l'épaisseur moyenne de la croûte (entre autres). Bills et Ferrari (1978) ont été les premiers à utiliser cette méthode pour Mars et obtiennent une épaisseur de croûte de 23 à 32 km (cette gamme de valeurs est issue d'une inversion des données de la sonde Viking).

En considérant une compensation des reliefs de l'hémisphère sud par isostasie de type Airy, et en minimisant l'écart entre le champ de gravité observé et celui modélisé, Phillips et Saunders (1975) obtiennent une épaisseur crustale de moins de 100 km. Cependant, cette étude reste très limitée, d'une part par le faible degré maximum qu'elle utilise ($\ell \leq 8$ - degrés pour lesquels une compensation dynamique est attendue plutôt qu'une compensation isostatique) et ensuite parce qu'elle néglige l'association d'une flexure élastique due à la charge de surface que représente le dôme de Tharsis.

Le premier modèle fiable de structure de la croûte et du manteau supérieur de Mars obtenu à partir des mesures géodésiques depuis l'instrument MOLA à bord de la sonde en orbite MGS est fondé sur une inversion des anomalies de potentiel de Bouguer (Zuber et al., 2000) (méthode utilisée ensuite par Neumann et al., 2004). En supposant une masse volumique moyenne de la croûte constante ($2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), Zuber et al. (2000) estiment une épaisseur moyenne de croûte sur l'ensemble de la planète de 50 km.

En négligeant la possibilité d'un maintien élastique de la topographie au niveau de la dichotomie hémisphérique, en considérant une compensation isostatique (de type Airy) ainsi qu'une gamme de masse volumique de la croûte entre 2800 et 2900 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et une masse volumique du manteau comprise entre 3300 et 3400 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, Nimmo et Stevenson (2001) proposent une épaisseur moyenne de croûte entre ~ 45 et ~ 125 km pour l'hémisphère sud (conduisant à une épaisseur crustale moyenne sur le globe comprise entre 35 et 115 km). Cependant, les gammes de masses volumiques utilisées pour la croûte et pour le manteau sont relativement faibles comparées à celles déduites de la chimie des SNC (Sohl et Spohn, 1997, suggèrent une masse volumique pour le manteau proche de $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$).

Turcotte et al. (2002) utilisent la corrélation entre topographie, anomalies de gravité et aréoïde (fournies par la sonde MGS) qu'ils calculent pour deux régions distinctes de Mars et qu'ils associent à deux mécanismes de compensation différents.

Sur la base de la topographie de la région de Tharsis (considéré ici comme une simple construction volcanique), ils considèrent une compensation par une flexure élastique. Dans le cas du bassin d'Hellas, où la compensation est considérée complète, Turcotte et al. (2002) supposent une compensation isostatique de type Airy. Enfin, en considérant la masse volumique du manteau à $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (suggéré par Sohl et Spohn, 1997), ils proposent une épaisseur de croûte dans une gamme de $90 \pm 10 \text{ km}$ et une masse volumique crustale de $2960 \pm 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

En considérant des reliefs compensés par isostasie (de type Airy), en supposant une masse volumique crustale entre 2700 et $3100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et une masse volumique du manteau de $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et en utilisant le rapport Géoïde/Topographie (*Geoid Topography Ratio*, GTR), Wiczorek et Zuber (2004) suggèrent une épaisseur de croûte moyenne de $57 \pm 12 \text{ km}$. Enfin, en considérant la faible masse volumique de la glace qui constitue les calottes polaires (négligée par Zuber et al., 2000), la masse volumique importante des volcans du dôme de Tharsis (McGovern et al., 2004) et l'aplatissement de la frontière noyau-manteau (suggéré par Yoder et al., 2003), Neumann et al. (2004) proposent un modèle plus complet qui aboutit à une carte de l'épaisseur crustale à l'échelle globale de Mars (Figure 1.21). Leurs hypothèses de base sont les suivantes : (1) en accord avec les études géochimiques des SNC, la masse volumique du manteau est de $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (Sohl et Spohn, 1997), (2) en se servant de ce que la plupart des auteurs obtiennent, la masse volumique de la croûte est fixée à $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (McGovern et al., 2004; Wiczorek et Zuber, 2004). De leur modèle ressort une épaisseur de croûte comprise entre $5,8$ et 102 km et une forte discontinuité d'épaisseur crustale entre l'hémisphère nord et l'hémisphère sud (avec une épaisseur de croûte moyenne de 32 km pour l'hémisphère Nord et de 58 km pour l'hémisphère Sud).

Il existe une grande disparité entre les épaisseurs de croûte évaluées par les méthodes d'inversion des données géodésiques ($\sim 50 \text{ km}$) et celles suggérées par l'analyse des SNC (100 à 250 km) qui révèle un profond désaccord entre les deux méthodes. Cette épaisseur importante soulève la question du maintien de cette croûte à travers le temps. Nimmo et Stevenson (2001) ont utilisé la pente topographique qui caractérise la dichotomie équatoriale pour déterminer l'épaisseur crustale et arrivent à la conclusion suivante : une croûte d'une épaisseur moyenne de 90 km ne peut pas être maintenue durant 4 Gyr (résultats également évoqués par Zuber et al., 2000). De plus, ces valeurs élevées d'épaisseur de croûte s'appuient sur l'origine chondritique de Mars, origine aujourd'hui contestée (Bertka et Fei, 1998). Une épaisseur de croûte de 90 - 100 km sur Mars semble donc improbable. Malgré une incertitude sur l'épaisseur de la croûte martienne en l'absence de données sismiques, les études fondées

sur l'analyse de la topographie et de la gravité (ou du géoïde) semblent converger vers une valeur moyenne de 50 km.

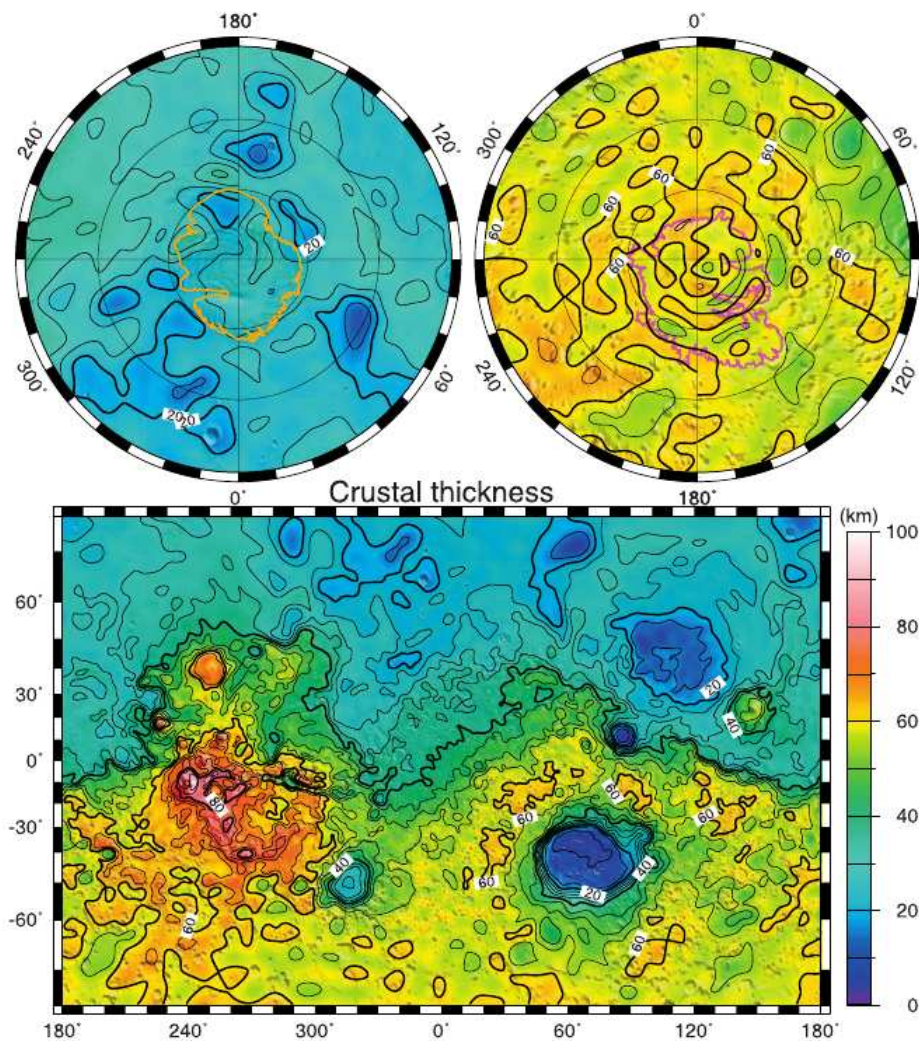


FIG. 1.21 – Modèle d'épaisseur crustale issu de l'utilisation (inversion) de la décomposition en harmoniques sphériques de la topographie et de la gravité pour des degrés compris entre 1 et 85 (Neumann et al., 2004). En haut à gauche, la carte de l'épaisseur crustale au niveau de la calotte polaire Nord et à droite, celle du pôle Sud.

Épaisseur de la lithosphère élastique et gradient thermique De nombreuses études ont estimé l'épaisseur élastique de la lithosphère sur Mars à partir des données de topographie et de gravité couplées à un modèle de flexure élastique de la lithosphère en approximation de couche mince.

Thurber et Toksöz (1978) sont les premiers à avoir utilisé ce modèle pour contraindre l'épaisseur de la lithosphère élastique pour la région de Tharsis. En considérant Tharsis comme un cylindre de 25 km de haut et une masse volumique de la croûte de $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ils comparent la topographie théorique qu'ils obtiennent après la flexure élastique de la lithosphère à la topographie réelle (obtenue par les missions Mariner 9 et Viking) et concluent à une épaisseur élastique de la lithosphère (d_e) de 150 km minimum.

Turcotte et al. (1981) proposent une formulation de la flexure en approximation de couche mince qui sera très largement utilisée par la suite. En considérant une variation de masse volumique entre la croûte et le manteau de $500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et en comparant la relation topographie/géoïde théorique calculée grâce à ce modèle avec celle issue de l'observation de ces champs, Turcotte et al. (1981) suggèrent une épaisseur de lithosphère élastique de 175 km pour la région de Tharsis.

En 1982, Willemann et Turcotte utilisent le même modèle avec les hypothèses de base suivantes : (1) une épaisseur de croûte comprise entre 0 et 60 km, (2) une masse volumique du manteau de $3300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, (3) une masse volumique de la croûte comprise entre 2800 et $3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. En comparant encore une fois la topographie et le géoïde qu'ils obtiennent de façon théorique par rapport aux champs observés (missions Mariner 9), ils concluent à une épaisseur de la lithosphère élastique entre 110 et 260 km.

Comer et al. (1985) utilisent les caractéristiques des grabens comme charges sur une lithosphère élastique pour en déterminer son épaisseur locale : 20-50 km pour les régions de Tharsis Montes, Alba Patera, Elysium Mons (également confirmé par Hall et al., 1986), supérieure à 120 km pour Isidis et enfin une épaisseur élastique supérieure à 150 km pour Olympus Mons.

Anderson et Grimm (1998) proposent une étude intéressante focalisée sur Valles Marineris qui utilise les données de gravité et de topographie fournies par les missions Viking et Mariner 9. Ils considèrent que la topographie est compensée soit par des variations de l'épaisseur crustale (compensation locale du type Airy) soit par une flexure élastique de la lithosphère (compensation régionale) soit par une combinaison des deux. Cette hypothèse de base leur permet de calculer la gravité en fonction d'une épaisseur de croûte et une épaisseur élastique de la lithosphère puis de la comparer avec la gravité mesurée. Ils obtiennent ainsi une épaisseur de croûte comprise entre 30 et 80 km ainsi qu'une épaisseur élastique de la lithosphère inférieure à 30 km. Si l'on considère la base de la lithosphère élastique comme la profondeur du seuil de rupture (profondeur au dessus de laquelle le mécanisme de déformation principal est la rupture, McNutt, 1984), on peut relier l'épaisseur élastique de la lithosphère à l'enveloppe des contraintes dans un premier temps (dépendante du gradient ther-

mique) puis au flux de chaleur. En négligeant la désintégration radioactive comme source de chaleur, Anderson et Grimm (1998) proposent un flux de chaleur minimum pour Valles Marineris de $20 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$.

Après avoir écarté la possibilité de compensation des reliefs martiens par isostasie (en ne conservant que des longueurs d'onde intermédiaires correspondant à un degré compris entre 11 et 50), Arkani-Hamed (2000) utilise la flexure élastique d'une lithosphère soumise à des charges de surface et de sub-surface pour calculer le potentiel de gravité théorique et le comparer au potentiel observé par la sonde MGS. Il estime ainsi l'épaisseur élastique de la lithosphère à 50-100 km pour Olympus Mons et Tharsis Montes et conclut à la présence d'une anomalie de masse de sub-surface sous cette structure, alors que les autres structures de moins grande ampleur (Elysium Mons, Alba Patera et la partie centrale de Valles Marineris) peuvent être expliquées simplement par un modèle de flexure élastique.

McKenzie et al. (2002) utilisent le calcul d'admittance dans le domaine cartésien. Encore une fois, les auteurs minimisent l'écart entre une admittance théorique et une admittance obtenue à partir des données de la mission MGS. Ils déterminent une masse volumique de la croûte ainsi qu'une épaisseur élastique de la lithosphère : pour la région de Tharsis $d_e=70$ km avec une masse volumique de la croûte (ρ_c) de $2970 \pm 40 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, Elysium $d_e = 29$ km et $\rho_c = 2980 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et au niveau de l'hémisphère Sud $d_e = 14,5$ km et $\rho_c = 2970 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pour Valles Maineris, la masse volumique de la croûte est inférieure à celle que Sohl et Spohn (1997) ont obtenu ($2350 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), ce qu'ils expliquent par la présence possible de glace dans la croûte. Pour déterminer l'isotherme correspondant à la profondeur de la partie élastique de la lithosphère associée à chaque région, ils utilisent un modèle d'évolution thermique à deux couches avec les approximations suivantes : (1) on ne connaît pas la répartition des éléments radioactifs sur Mars, (2) l'âge des surfaces martiennes est également incertain et (3) la viscosité interne est influencée par la teneur en eau, la composition et la température, trois paramètres inconnus. Néanmoins, ils déduisent de ce modèle que l'épaisseur de la couche élastique est contrôlée par la profondeur de l'isotherme $340 \text{ }^\circ\text{C}$ sous Tharsis et $270 \text{ }^\circ\text{C}$ sous Elysium.

En utilisant des estimations locales de l'admittance et de la corrélation, McGovern et al. (2004) comparent ces grandeurs (obtenues à partir des champs de topographie et de gravité issues de la sonde MGS) à celles qu'ils obtiennent en considérant un modèle de flexure élastique de la lithosphère fondée sur l'étude de Turcotte et al. (1981) (dans lequel ils considèrent que la charge peut se trouver en surface et/ou en sub-surface). Ils fixent la masse volumique de la croûte à $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, celle du manteau à $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et l'épaisseur de la croûte à 50 km, puis ils ajustent ces valeurs pour obtenir le meilleur accord entre admittance théorique/réelle. Ainsi, McGovern

et al. (2004) évaluent plusieurs épaisseurs élastiques locales qui varient de moins de 10 km à 200 km (Tableau 1.2). En utilisant le formalisme développé par McNutt (1984), ils convertissent l'épaisseur élastique en gradient thermique moyen de la lithosphère ($20 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$, en utilisant l'enveloppe des contraintes) puis en flux de chaleur moyen qui se situe alors dans une gamme de $20\text{-}30 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$ (Tableau 1.2).

De la même manière que l'ont fait McKenzie et al. (2002), en considérant une charge de surface et/ou une charge interne, Nimmo (2002a) estime l'épaisseur élastique de la lithosphère et l'épaisseur de la croûte en minimisant l'écart entre l'admittance théorique et l'admittance issue des données de la sonde MGS. Avec une masse volumique de la croûte de $2500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, l'épaisseur de celle-ci varie de 1 à 75 km et celle de la partie élastique de la lithosphère varie de 37 à 89 km en fonction de l'importance des charges imposées. Les épaisseurs de croûte invoquées ici sont en accord avec celles qui ont été calculées par Nimmo et Stevenson (2001), Zuber et al. (2000), Turcotte et al. (2002). En revanche, l'épaisseur élastique de la lithosphère obtenue par Nimmo (2002a) est très supérieure à celle évoquée par Zuber et al. (2000), McGovern et al. (2004) et McKenzie et al. (2002) (1-20 km, 1-20 km, 15 km respectivement). Il y a une hypothèse forte pour expliquer une telle différence : les études de Zuber et al. (2000) et McKenzie et al. (2002) sous-estiment l'importance de la charge interne (de sub-surface), ce qui conduit à une sous-estimation de l'épaisseur élastique de la lithosphère.

L'étude récente de Steinberger et al. (2010) compare le spectre de puissance de Mars réel et celui qu'ils obtiennent par un modèle de flexure élastique de la lithosphère (avec un degré de compensation identique à celui de Turcotte et al., 1981) en considérant une masse volumique moyenne de $3934 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, une masse volumique de la croûte de $2950 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, une masse volumique du manteau de $3338 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Le meilleur accord entre les deux spectres de puissance est obtenu pour une épaisseur élastique de la lithosphère de 102 km.

En synthèse de ces nombreuses études traitant de l'épaisseur élastique de la lithosphère, on citera Belleguic et al. (2005) qui utilisent (encore une fois) la comparaison entre admittance théorique et admittance réelle en supposant un maintien des structures par flexure de la lithosphère. Les différences majeures avec les études précédentes sont les suivantes : (1) une meilleure méthode pour la prise en compte des charges de sub-surface, (2) la fenêtre spectrale utilisée ici pour focaliser l'étude sur une zone géographique particulière permet de prendre en compte 99% du signal (contre 90% dans les études précédentes) et enfin (3) l'étude de Belleguic et al. (2005) explore de manière systématique un espace des paramètres plus important qu'auparavant contenant l'épaisseur de la croûte, sa masse volumique, l'épaisseur élastique de la lithosphère, la masse volumique de la charge (de surface et/ou de sub-surface)

et la proportion entre les deux. On trouvera en annexe de Belleguic et al. (2005) un résumé des méthodes des études de Turcotte et al. (1981), Banerdt (1986) et McGovern et al. (2004). La compilation des résultats de McGovern et al. (2004) et de Belleguic et al. (2005) se trouve dans le Tableau 1.2. L'une des limites dans les modèles prenant en compte les charges de sub-surface vient du fait que cette charge est proportionnelle à la charge de surface et en phase avec cette dernière (c'est à dire directement à l'aplomb de la charge de surface). Le résultat principal de l'étude de Belleguic et al. (2005) concerne les masses volumiques de la croûte ainsi déterminées. En effet, à l'exception d'Alba Patera, ils obtiennent une valeur de $3200 \pm 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, qui est largement supérieure à ce qui avait été obtenu précédemment (Sohl et Spohn, 1997; McKenzie et al., 2002, par exemple) mais en accord avec McGovern et al. (2004). Lorsque la charge de sub-surface est négligée, l'épaisseur élastique est relativement bien contrainte (cf. Tableau 1.2). Cependant, lorsqu'une telle charge est prise en compte, les incertitudes qu'ils obtiennent sont très grandes. Enfin, ils ont montré que les charges de sub-surface jouent un rôle très important sur le signal de la topographie ou de la gravité.

Les valeurs d'épaisseur élastique de la lithosphère martienne sont relativement variables selon les études et les régions d'investigation. Elles peuvent atteindre localement 300 km (région de la calotte polaire Nord, Phillips et al., 2008) mais sont le plus souvent comprises entre 20 et 150 km. Les valeurs d'épaisseur élastique de la lithosphère issue des études de McGovern et al. (2004) et Belleguic et al. (2005) sont compatibles avec les épaisseurs élastiques déterminées par le modèle d'évolution thermique défini par Grott et Breuer (2010) lorsque le manteau est anhydre. Cependant, un manteau hydraté peut conduire au même résultat si une forte concentration en éléments radiogéniques est considérée dans la croûte. Malgré la valeur surprenante de l'épaisseur élastique proposée par Phillips et al. (2008), les modèles d'évolution thermique de Grott et Breuer (2010) ont confirmé qu'une telle valeur reste possible (localement). Cependant, à l'échelle globale de la planète, une lithosphère élastique de 300 km est définitivement exclue par ces modèles mais permet de souligner la variabilité spatiale et temporelle importante de l'épaisseur de la lithosphère élastique sur Mars. Pour l'estimation du gradient thermique moyen, on retiendra l'étude de McGovern et al. (2004) qui propose un gradient thermique moyen inférieur à $20 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ et un flux de chaleur associé beaucoup plus variable pouvant atteindre localement $140 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$ mais plus généralement dans une gamme de $20\text{-}30 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$. Grott et Breuer (2010) obtiennent une gamme de valeur de flux de chaleur de surface similaire lorsque l'épaisseur élastique de la lithosphère est inférieure à 300 km.

Selon l'étude de Belleguic et al. (2005), les charges de sub-surface jouent un rôle important dans le signal de gravité des régions de Tharsis, Olympus Mons et Ely-

sium. Ce point crucial soulève la question d'un soutien dynamique (par convection dans le manteau) des structures imposantes sur Mars, ce qui nous amène au point suivant : Quelle est l'interprétation possible de la topographie et de la gravité pour la région de Tharsis ?

Cas de Tharsis L'interprétation de la topographie et de la gravité du dôme de Tharsis est un peu particulière. Deux modèles en compétition ont été suggérés pour expliquer la topographie et la gravité actuelle du dôme de Tharsis. Dans le premier modèle, le dôme de Tharsis est principalement formé par constructions volcaniques et intrusions magmatiques (à l'origine d'une flexure élastique de la lithosphère) (Solomon et Head, 1982; Willemann et Turcotte, 1982; Banerdt et Golombek, 2000). La contribution implicite du manteau sur la topographie et la gravité sur Tharsis dans ce modèle est secondaire et il ne considère pas les sources de chaleur responsables de la formation volcanique de Tharsis. Dans le second modèle, la gravité et la topographie de Tharsis sont interprétés comme l'effet dynamique d'un panache mantellique sous Tharsis (Kiefer et Hager, 1989; Kiefer et al., 1996; Harder et Christensen, 1996; Harder, 2000). L'idée principale de ce modèle réside dans le fait que les anomalies de grande longueur d'onde de la gravité dérivent du manteau et que les épisodes volcaniques successifs de Tharsis requièrent des sources profondes de chaleur. Ce modèle de panache reçoit l'appui à la fois des analyses de structures tectoniques (Mège et Masson, 1996) et de nombreuses simulations numériques (Harder et Christensen, 1996; Breuer et al., 1998; Harder, 2000). La modélisation numérique de la convection permet la détermination des forces de flottabilité (par la résolution numérique des équations de conservation, cf. Chapitre 2), responsables de la déformation des interfaces successives depuis la CMB jusqu'à la surface. Associé à la convection dans le manteau, un couvercle de forte viscosité simulant la lithosphère se développe en surface (Kiefer et al., 1996; Harder, 2000; principe hérité des études de la dynamique du manteau terrestre Hager et Richards, 1989). Certaines études prônent une double contribution pour le cas du dôme de Tharsis (Lowry et Zhong, 2003) dont 50 % de la topographie serait dû à la flottabilité interne. Ainsi, Zhong (2002), Zhong et Roberts (2003) et Roberts et Zhong (2004) montrent que l'absence d'une lithosphère élastique conduit à une surestimation de la topographie (qui serait donc d'origine purement dynamique). Si l'on ajoute une lithosphère élastique (d'au moins 150 km pour le cas de Tharsis) au dessus d'un manteau convectif, la topographie dynamique ne représente plus qu'une faible part de celle qui est observée (le géoïde "dynamique" représente moins de 10% de celui qui est observé).

	McGovern et al. (2004)				Belleguic et al. (2005)			
	d_e (km)	$\frac{\partial T}{\partial z}$ (K·km ⁻¹)	q (mW·m ⁻²)	ρ_l (kg·m ⁻³)	d_e (km) (f=0)	d_e (km) (f≠0)	ρ_l (kg·m ⁻³) (f=0)	ρ_l (kg·m ⁻³) (f≠0)
Olympus Mons ^c	> 70	< 8	< 24	3150	93 ±40	> 70	3194±110	3252 ±150
Ascraeus Mons ^c	2-80	5-55	13-140	3250	105 ±40	> 50	3200 ±100	> 2900
Pavonis Mons ^c	< 100	> 5	> 13	3250	> 50	> 50	3266 ±120	-
Arsia Mons ^c	> 20	< 10	< 28	3300	< 30	< 35	3240 ±130	3300 ±100
Alba Patera ^{c,g}	38-65	5,5-16	16-40	2950	66 ±20	73 ±30	< 3100	< 3300
Elysium Rise ^c	15-45	6-13	15-33	3250	56 ±20	< 175	3210 ±180	> 2900
Hebes Chasma ^f	60-120	5-9	17-25	2100-2300	-	-	-	-
Hebes Chasma ^{f,g}	> 60	< 10	< 28	2900	-	-	-	-
Candor Chasma ^{f,g}	> 120	< 6	< 20	2900	-	-	-	-
Candor Chasma ^f	80-200	3-7,5	11-23	2200	-	-	-	-
Capri Chasma ^f	> 100	< 7	< 23	2500	-	-	-	-
Capri Chasma ^{f,g}	> 110	< 6	< 20	2900	-	-	-	-
Solis Planum ^f	24-37	8-14	20-35	2900	-	-	-	-
Hellas south rim ^f	20-31	10-16	25-40	2900	-	-	-	-
Hellas south rim ^{f,g}	40-120	6-11	20-28	2900	-	-	-	-
Hellas west rim ^f	< 20	> 12	> 30	2650	-	-	-	-
Hellas basin ^f	< 13	> 14	> 35	2750	-	-	-	-
Noachis Terra ^f	< 12	> 20	> 50	2800	-	-	-	-
Northeastern Terra Cimmeria ^f	< 12	> 19	> 48	2950-3000	-	-	-	-
Northeastern Arabia Terra ^f	< 16	> 17	> 43	2500	-	-	-	-

TAB. 1.2 – Synthèse de l'estimation de l'épaisseur élastique d_e , du gradient thermique $\frac{\partial T}{\partial z}$ et du flux de chaleur q en fonction de la masse volumique de la charge ρ_l (de surface : $f = 0$ et/ou de sub-surface : $f \neq 0$) de McGovern et al. (2004) et de Belleguic et al. (2005). Les exposants concernent exclusivement l'étude de McGovern et al. (2004) avec : ^cla masse volumique crustale est égale à 2900 kg·m⁻³, ^fla masse volumique de la croûte est égale à la masse volumique de la charge et ^gune charge de sub-surface est ajoutée.

1.4 Vénus



FIG. 1.22 – Mosaïque de Vénus centrée sur 180°E obtenue par la sonde Magellan. Crédits : NASA/JPL

Vénus avec un rayon de 6051,8 km est légèrement plus petite que la Terre, ce qui en fait un analogue de choix, bien que cette petite différence puisse être significative dans l'évolution des intérieurs de ces deux corps. Par exemple, un rayon et une masse plus faible sur Vénus (et donc une pression plus faible) aurait empêché le refroidissement et la solidification du noyau externe, et bloqué la mise en place d'une dynamo (Stevenson et al., 1983; Turcotte et al., 2001). Il existe une autre explication à l'absence de champ magnétique : le manque de tectonique des plaques sur Vénus, indicatif d'une convection mantellique particulière, incapable de refroidir le noyau de façon suffisamment efficace pour la mise en place d'une dynamo (Nimmo et Stevenson, 2000). Dû à son atmosphère épaisse contenant 96,5% de CO₂, l'effet de serre intense conduit à une température moyenne de surface d'environ 737 K. Ajoutée à une pression atmosphérique de 93 bars, soit 93 fois celle de la Terre, toute expérience en surface est périlleuse. Sa masse volumique moyenne de 5400 kg·m⁻³ et sa masse de 4,869·10²⁴ kg conduisent à une pesanteur moyenne de 8,9 m·s⁻².

1.4.1 Structure interne

Le seul modèle de structure interne de Vénus à l'heure actuelle est celui proposé par Yoder (1995) (Figure 1.23) construit à partir d'une remise à l'échelle du modèle de structure interne de la Terre, le PREM. Ainsi, la structure interne de Vénus se décompose de la façon suivante : un noyau de ~ 3000 km de rayon pour une masse volumique comprise entre $10\,000$ et $12\,000$ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, surmonté d'un manteau inférieur d'environ 2344 km d'épaisseur avec une masse volumique moyenne avoisinant les 5000 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ puis un manteau supérieur de 500 km d'épaisseur avec une masse volumique proche de celle du manteau supérieur terrestre (3300 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Enfin, la lithosphère d'environ 250 km pour une masse volumique légèrement inférieure à celle du manteau supérieur comprend une partie du manteau supérieur et la croûte. Grimm et Hess (1997) proposent une étude détaillée de l'histoire et des caractéristiques de la croûte vénusienne. La composition basaltique de la croûte a été suggérée par les données géochimiques obtenues par les landers Venera et Vega ainsi que par les morphologies des plaines volcaniques. Les grandes plaines basaltiques sont l'évidence d'une croûte différenciée mais il est également possible que les grands plateaux représentent différentes "pièces" de croûte de composition différente. Les compositions en isotopes radioactifs K/U et K/Th sont identiques aux rapports martiens ainsi qu'aux météorites de type SNC laissant supposer une origine chondritique.

L'étude de la population des cratères à la surface de Vénus a permis une datation de la surface de quelques centaines à 800 million d'années (Schaber et al., 1992; Basilevsky et al., 1997, par exemple). Comparée aux surfaces des autres planètes, celle de Vénus est relativement jeune. Il est souvent proposé que le rajeunissement de la surface soit le résultat d'un resurfaçage volcanique de Vénus suivi de petits événements volcaniques (Schaber et al., 1992; Strom et al., 1994; Stofan et al., 2005). Ce resurfaçage est sans doute le moyen privilégié par lequel Vénus libère sa chaleur interne. Une méthode efficace de renouvellement surfacique est la submersion globale de la lithosphère lourde, épaisse et relativement froide et son remplacement par du manteau relativement chaud (Turcotte, 1993). Entre deux de ces événements catastrophiques dans l'évolution de Vénus (mais épisodiques), la lithosphère s'épaissit, rendant tout échappement de chaleur difficile depuis l'intérieur, puis devient de nouveau gravitationnellement instable jusqu'à un nouveau resurfaçage. Ces événements contrôleraient l'état thermique et la structure interne de Vénus (et inversement). Comme nous le verrons plus tard, certains auteurs suggèrent que cet âge apparent peut aussi correspondre à la fin d'un processus magmatique global (sans effondrement de la lithosphère dans le manteau, cf par exemple Reese et al., 2007).

Tout comme dans le cas de Mars, on ne connaît pas la viscosité interne de Vénus.

Cependant, il existe deux contraintes permettant aux modèles numériques de considérer un profil de viscosité qui pourrait correspondre à celui de Vénus. La première repose sur l'absence de tectonique des plaques qui conduit à évoquer des modes de convection différents entre Vénus et la Terre (e.g. Turcotte, 1995; Solomatov et Moresi, 1996; Schubert et al., 1997; Veizolainen et al., 2004). L'absence de plaques mobiles est une hypothèse de base en accord avec ce que l'on observe en modélisation numérique ou analogique lorsque l'on considère une loi de viscosité dépendante de la température (Christensen, 1984; Leitch et Yuen, 1991; Davaille et Jaupart, 1993; Tackley, 1993; Solomatov, 1995; Solomatov et Moresi, 1996). Deux types de convection sont alors invoqués pour Vénus : la convection de type couvercle mobile (*sluggish lid*) ou couvercle stagnant, qui associent des mouvements sous la lithosphère, immobile dans sa partie supérieure dans le cas du couvercle stagnant, mais suffisamment mobile dans sa partie basale pour servir de source à des descentes de matériel froid dans le manteau. Ces types de convection (abordés dans le chapitre suivant) impliquent des contrastes de viscosité particuliers. Solomatov (1995) et Solomatov et Moresi (1996) déterminent ainsi que la convection en régime de couvercle s'établit pour un contraste de viscosité de 10^4 au sein du manteau. En évaluant le taux de déformation dans la lithosphère, ils concluent à une viscosité dans le couvercle stagnant comprise entre 10^{29} et 10^{30} Pa·s (supérieure sans doute à la valeur terrestre). La deuxième contrainte s'appuie sur l'épisode de resurfaçage global (il y a environ 500 Ma) et représente une condition importante dans les modèles d'évolution thermique de Vénus qui invoquent un changement de régime de convection au cours de l'histoire thermique de Vénus.

Néanmoins, la meilleure façon et la plus utilisée pour contraindre la viscosité sur Vénus consiste en une inversion de la topographie et du géoïde (ou du champ de gravité). Cette partie sera largement abordée dans la Section 1.4.2.3.

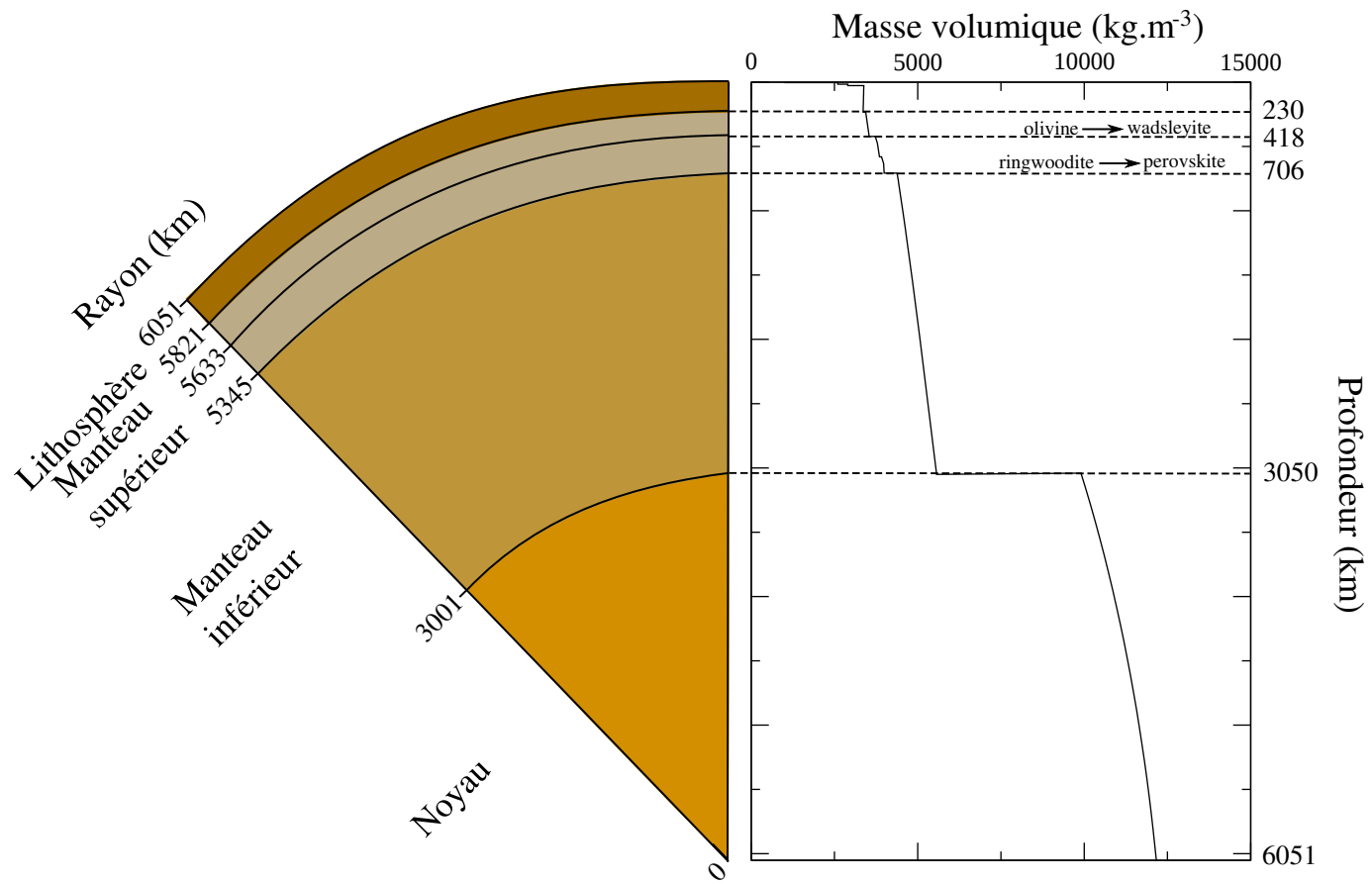


FIG. 1.23 – Modèle de structure interne de Vénus résultant du modèle de masse volumique proposé par Yoder (1995) construit à partir d'une remise à l'échelle du modèle de Terre interne (PREM) proposé par Dziewonski et Anderson (1981).

1.4.2 Topographie, gravité et géoïde sur Vénus

1.4.2.1 Topographie, anomalies radiales de gravité et géoïde

La sonde Magellan a permis d'obtenir la topographie à la surface de Vénus. Rappaport et al. (1999) (par exemple) sont ainsi parvenus à établir un modèle de la topographie jusqu'au degré 360. En plus de Magellan, Pioneer Venus Orbiter a permis d'obtenir le champ quasi-complet de gravité sur Vénus jusqu'au degré 180 (modèle de gravité de Konopliv et al., 1999). Les figures 1.24, 1.25 et 1.26 représentent respectivement la topographie, les anomalies radiales de gravité et les anomalies de géoïde de Vénus à partir des coefficients d'harmoniques sphériques de la sonde Magellan.

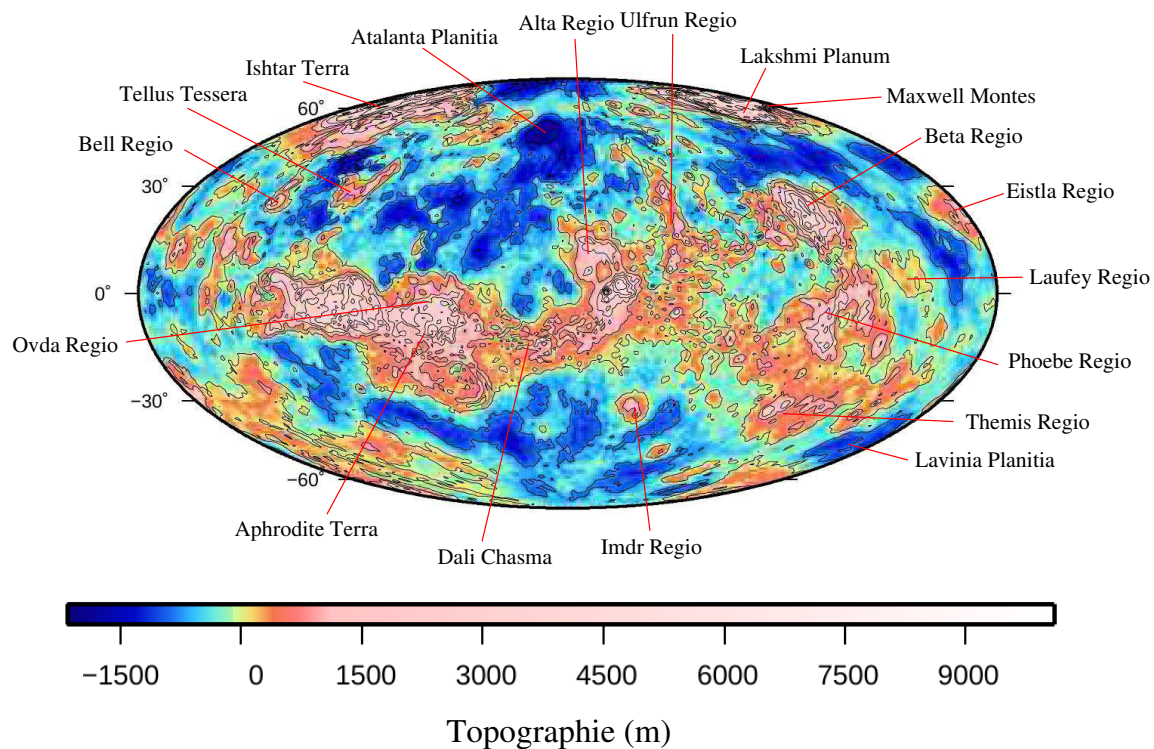


FIG. 1.24 – Carte de la topographie de Vénus jusqu'au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d'harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).

Contrairement à la Terre ou à Mars, la topographie sur Vénus est extrêmement "lissée" et 90 % de la surface se trouve dans une tranche de 3 km en dessous ou au dessus du rayon moyen (par exemple Masursky et al. (1980) ou encore Rosenblatt (1994) avec les données Magellan) (Figure 1.24). Les structures topographiques de Vénus sont moins impressionnantes que celles de Mars et réparties de façon beaucoup plus homogène à sa surface. Ainsi, Vénus est caractérisée par des plaines de faibles

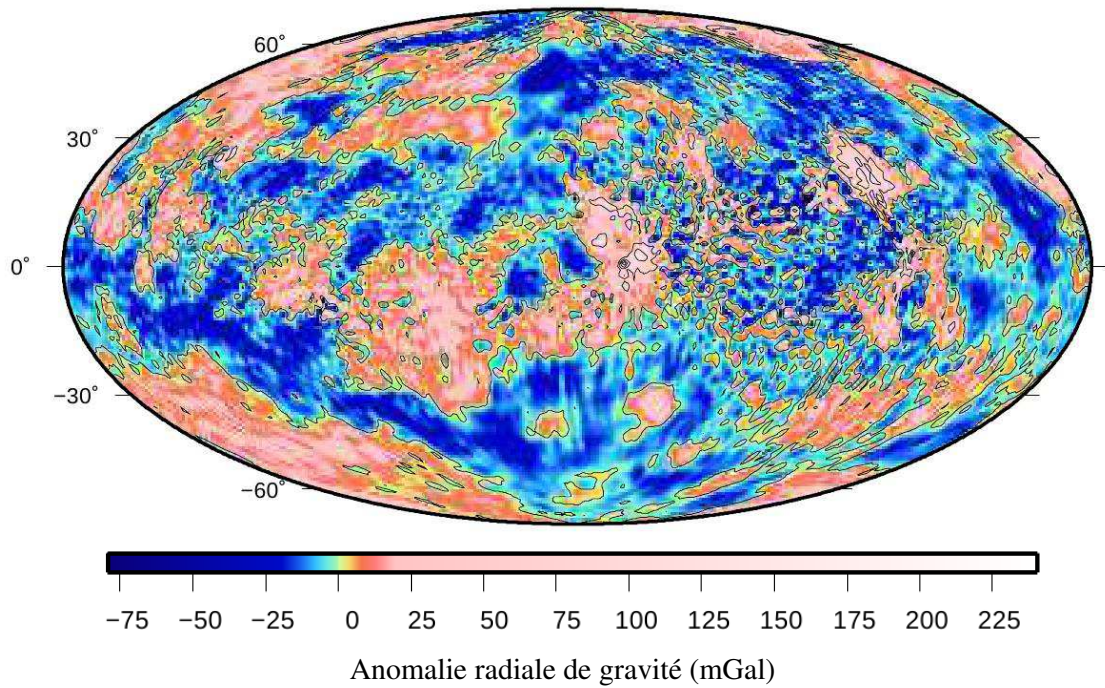


FIG. 1.25 – Carte des anomalies radiales de gravité sur Vénus jusqu’au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d’harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).

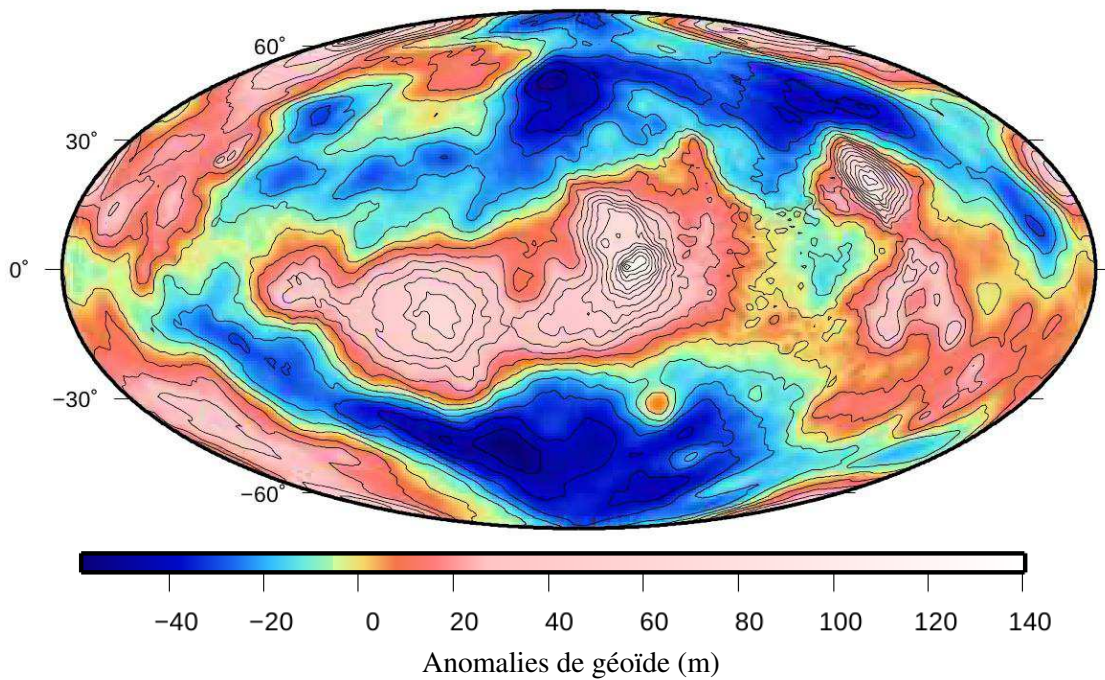


FIG. 1.26 – Carte des anomalies de géoïde de Vénus jusqu’au degré 148 par synthèse à partir des coefficients d’harmoniques sphériques issus de la sonde Magellan (http://pds-geosciences.wustl.edu/missions/magellan/shadr_topo_grav/).

altitudes, des hauts plateaux et des bombements volcaniques. Les structures dominantes de la topographie de Vénus comprennent deux hauts plateaux : Aphrodite Terra qui se situe le long de l'équateur et Ishtar Terra dans les latitudes Nord. Au sein d'Ishtar Terra se trouve la structure volcanique la plus élevée, Maxwell Montes, 10 km au-dessus des plaines environnantes. On notera également la présence de provinces volcaniques possédant de grands rifts : Atla et Beta Regiones.

Les plus grandes anomalies radiales de gravité sont associées aux volcans Maat et Ossa Mons (dans la région d'Atla), à Maxwell Mons, à Beta Regio ainsi qu'aux nombreuses provinces volcaniques (Figures 1.25). Les plus grandes anomalies de géoïde correspondent aux bombements volcaniques d'Atla et Beta Regiones ainsi qu'à Aphrodite et Ishtar Terra. *A contrario*, les plaines de basse altitude sont caractérisées par des anomalies de géoïde négatives (Figure 1.26).

1.4.2.2 Spectres de puissance, corrélation et admittance

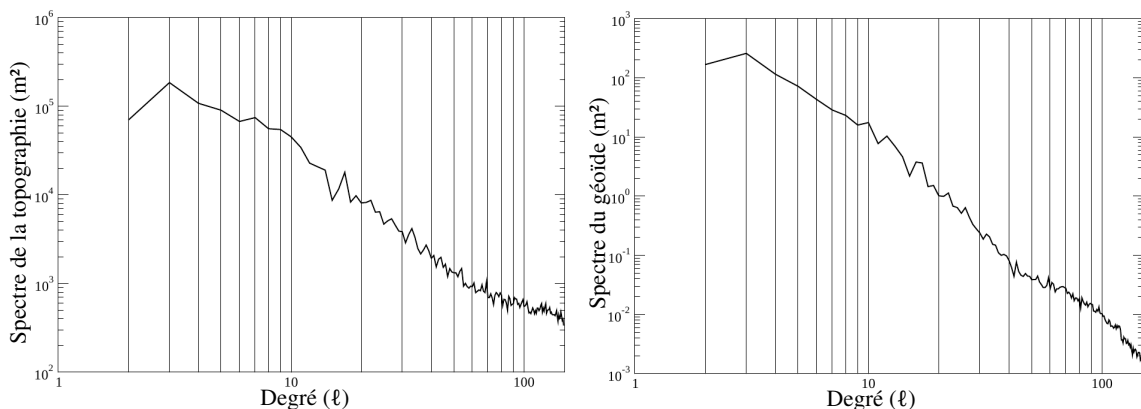


FIG. 1.27 – Spectre de puissance de la topographie (gauche) et du géoïde (droite) jusqu'au degré 148.

Pauer et al. (2006) proposent une analyse des spectres, de la corrélation et de l'admittance pour Vénus. La décroissance du spectre de puissance du géoïde avec l'augmentation du degré n'est pas uniforme et peut être fractionnée en trois intervalles révélateurs de trois mécanismes de compensation des reliefs différents selon la longueur d'onde (Figure 1.27). Pour des degrés entre 10 et 30 deux contributions peuvent être invoquées, lithosphérique et dynamique (convection). Au-delà du degré 30, il est tentant de s'attendre à une compensation essentiellement due à une contribution lithosphérique. Pour les degrés inférieurs à 10, les anomalies de géoïde semblent générées par la dynamique du manteau, comme c'est le cas pour les grandes longueurs d'onde sur Mars (Arkani-Hamed, 1996; Pauer et al., 2006; Wiczorek, 2007, par exemple).

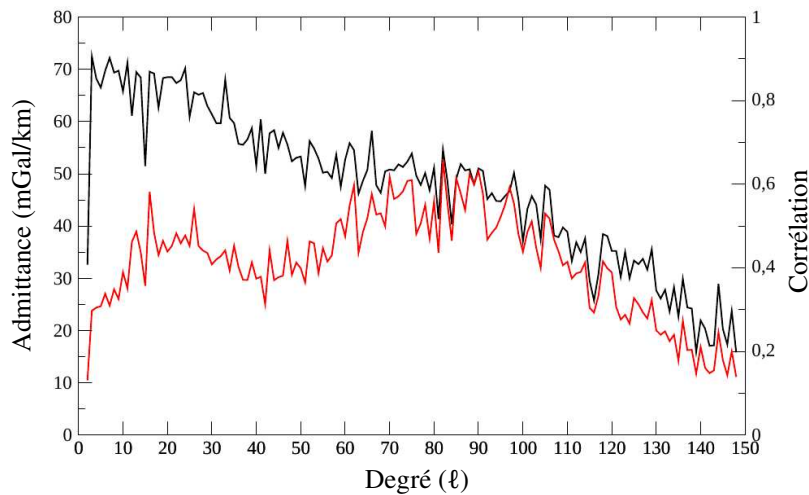


FIG. 1.28 – Admittance (rouge) et corrélation (noir) entre la topographie et l’anomalie radiale de gravité jusqu’au degré 148.

La correspondance entre les hauts plateaux et la localisation des plus grandes valeurs positives des anomalies de géoïde (Figure 1.26) et des anomalies radiales de gravité (Figure 1.25) conduit à l’hypothèse suivante : topographie et gravité (ou géoïde) sont fortement corrélées pour les degrés inférieurs à ~ 100 (caractéristique que l’on retrouve sur la figure 1.28).

La même analyse que celle des changements de pente pour les spectres de puissance peut être faite sur l’admittance entre topographie et anomalies radiales de gravité sur Vénus (Figure 1.28). Les deux changements de pente aux degrés 40 et 90 doivent être interprétés très différemment. Alors qu’au degré 90, ce changement radical est associé à un artéfact lié à la construction du modèle en harmoniques sphériques (Simons et al., 1997; Pauer et al., 2006; Wiczorek, 2007), celui du degré 40 est expliqué comme un changement de mécanisme de création des anomalies de gravité (Pauer et al., 2006) (d’une compensation lithosphérique et/ou dynamique pour les degrés inférieurs à 40 à une compensation crustale pour les degrés supérieurs à 40).

1.4.2.3 Topographie et gravité comme contraintes sur les structures internes

Tout comme pour Mars, l’utilisation de la topographie et de la gravité permet de contraindre la structure interne de Vénus. Les méthodes utilisées sur Mars s’appliquent également sur Vénus avec l’utilisation directe de profils de topographie ou de géoïde mais également avec les calculs d’admittance et de corrélation. Contrairement à Mars, le caractère compensé de la topographie de Vénus et la forte corrélation entre la topographie et les anomalies radiales de gravité simplifient leur interprétation. La relation entre les deux peut être expliquée par des modèles de

compensation des reliefs à différentes longueurs d'onde : compensation par charges de sub-surface (isostasie), compensation par flexure élastique de la lithosphère, compensation dynamique ou par des modèles plus complexes associant plusieurs modes de compensation : flexure élastique et présence de panaches ascendant par exemple.

Épaisseur de la croûte La compensation des reliefs par un modèle impliquant une compensation par racine crustale semble incompatible avec l'admittance de Vénus pour des degrés trop faibles car il conduit à des épaisseurs crustales trop élevées (Kiefer et Hager, 1991; Simons et al., 1994; Pauer et al., 2006). Par exemple, pour un intervalle de degrés compris entre 2 et 40, Pauer et al. (2006) définissent une épaisseur de croûte supérieure à 200 km lorsqu'ils considèrent une compensation de type Airy. En revanche, pour les degrés supérieurs à 40, cette profondeur de compensation atteint une valeur beaucoup plus plausible de 35 km (Arkani-Hamed, 1996; Pauer et al., 2006). Cependant, on ne peut pas exclure définitivement une compensation isostatique pour les degrés entre 2 et 40 mais elle ne peut pas supporter seule la topographie présente (Kiefer et al., 1986; Smrekar et Phillips, 1991; Arkani-Hamed, 1996; Simons et al., 1997). Contrairement à ce qui avait été proposé par Bindschadler et Parmentier (1990), Bindschadler et al. (1990) et Kiefer et Hager (1991), qui préconisaient plutôt un maintien de la topographie par convection, les hauts plateaux et les tesserae (qui occupent 10 % de la surface) peuvent être isostatiquement compensés (modèle d'Airy) par une croûte qui ne dépasse pas 40 km d'épaisseur. *A contrario*, les bombements topographiques associés à un volcanisme (Beta, Atla, Bell, Eistla, Imdr et Themis Regionnes), les plaines et les terrains bas seraient liés à des tractions verticales à la base de la lithosphère qui sont attribuées à de la convection mantellique (hypothèse déjà proposée par Banerdt, 1986; Kiefer et Hager, 1991; Smrekar et Phillips, 1991; Bindschadler et al., 1992; Simons et al., 1994; Smrekar, 1994; Smrekar et Parmentier, 1996; Banerdt et al., Banerdt et al. et plus tard par Lawrence et Phillips, 2003).

L'ensemble de ces études convergent donc vers une épaisseur de croûte de 30-40 km.

Épaisseur élastique de la lithosphère et gradient thermique En comparant les profils topographiques des plaines du Nord à ceux issus d'un modèle de flexure élastique, Solomon et Head (1990) déterminent l'épaisseur élastique de la lithosphère ainsi que le gradient thermique moyen de la lithosphère. Ils obtiennent une épaisseur élastique entre 11 et 18 km. En utilisant la méthode de McNutt (1984) qui consiste à convertir l'épaisseur élastique en un gradient thermique moyen de la lithosphère par l'utilisation de l'enveloppe des contraintes (également utilisée pour Mars), et en considérant une croûte d'épaisseur maximum 10-20 km, ils déterminent un gradient

thermique moyen entre 14 et 23 $\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$, soit un flux de chaleur en surface de 50-70 $\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}$ (correspondant à peu près à celui de la Terre).

En utilisant une méthode similaire pour la comparaison de deux profils topographiques de volcans (Tepev Mons dans la région Beta Regio et un volcan situé aux coordonnées 10°N,275°E), McGovern et Solomon (1992) proposent une épaisseur élastique de la lithosphère entre 10 et 20 km et un gradient thermique de 12-25 $\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$ pour Tepev Mons et de 25 $\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$ pour le deuxième volcan.

Dans son étude, Smrekar (1994) compare les admittances observées (issues de la topographie et des anomalies de gravité fournies par la sonde Magellan) aux admittances théoriques calculées pour trois modèles de compensation : une compensation locale (isostatique), un modèle de flexure élastique et enfin une compensation dynamique. Elle utilise comme constantes : l'épaisseur de la croûte (30 km), sa masse volumique ($2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) et la masse volumique du manteau ($3300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Pour Atla Regio la distinction entre le modèle de point chaud et la flexure élastique pure est difficile car les deux conduisent à une bonne correspondance des admittances. Cependant, le modèle de flexure élastique conduit à une épaisseur élastique de 100 km, ce qui semble relativement élevé (comparé aux études de Solomon et Head, 1990; Sandwell et Schubert, 1992; McGovern et Solomon, 1992). Smrekar (1994) favorise donc un modèle de point chaud comme support de la topographie associée à Atla Regio, ce qui implique une lithosphère élastique de 30 km. Pour Bell Regio, la flexure élastique est le processus de compensation des reliefs le plus probable et conduit à une épaisseur élastique de 50 ± 5 km à grande longueur d'onde (épaisseur actuelle) (confirmé plus tard par Rogers et Zuber en 1998) et de 30 km pour les longueurs d'ondes plus petites (au moment de la mise en place du volcan). Dans cette étude, le modèle de compensation purement isostatique est une nouvelle fois définitivement rejeté car conduisant à des épaisseurs de croûte beaucoup trop importantes. Par une méthode d'inversion, Phillips (1994) puis Simons et al. (1997) confirmeront ces résultats avec une épaisseur élastique de 45 km. Phillips (1994) proposera en plus un gradient thermique de la lithosphère de 10 $\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$ pour Atla Regio avec cette fois-ci un support de la topographie par une combinaison de la flexure élastique et d'un amincissement de la lithosphère dû à la présence d'un panache mantellique.

McKenzie et Nimmo (1997) utilisent les LOS (*Line Of Sight*)³ de la sonde Magellan, supposent un support de la topographie par flexure élastique de la lithosphère et contraignent l'épaisseur élastique en minimisant l'écart entre admittance théorique et admittance réelle de plusieurs régions : de l'ordre de 32,5 km pour Atla, 33 km pour Ulfrun, 27,5 km pour Phoebe et Beta, 20,5 km pour Eistla et 12 km pour Dali.

En minimisant l'écart entre la topographie réelle (issue de profils provenant de la

³Les LOS correspondent aux lignes selon lesquelles les anomalies de vitesse sont dérivées en accélération.

sonde Magellan) et la topographie théorique calculée dans l'approximation de flexure élastique de la lithosphère, en considérant une masse volumique de la croûte de $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ pour une épaisseur de 16 km, une masse volumique pour le manteau de $3300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, Barnett et al. (2002) estiment l'épaisseur élastique de certaines régions de Vénus (entre 10 et 40 km) ainsi qu'une épaisseur moyenne de la lithosphère élastique à l'échelle globale de Vénus de $29 \pm 6 \text{ km}$.

Lawrence et Phillips (2003) proposent une approche légèrement différente des précédentes. Ils génèrent de façon aléatoire une gamme de valeurs pour l'épaisseur de la croûte, l'épaisseur élastique de la lithosphère et la profondeur d'une anomalie de masse possible dans le manteau. À chaque population de valeurs ainsi créées, en utilisant l'approximation de flexure élastique avec une masse volumique de croûte choisie à $2900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et du manteau de $3300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, ils calculent une gravité théorique puis une admittance qu'ils comparent à l'admittance réelle pour des degrés compris entre 20 et 60 (gamme de longueur d'onde ou la combinaison d'une compensation dynamique et d'une flexure élastique est supposée importante sur Vénus). La minimisation de la différence entre ces deux admittances conduit pour Atla Regio à une épaisseur de croûte entre 15 et 42 km pour une épaisseur élastique de 62 à 87 km et une profondeur de l'anomalie dans le manteau comprise entre 147 et 227 km. Pour Atalanta, l'épaisseur de la croûte varie entre 9 et 31 km, celle de l'épaisseur élastique varie de 58 et 80 km et la profondeur de l'anomalie se situe entre 198 et 213 km. Enfin pour Lavinia, l'épaisseur de croûte varie de 19 à 42 km, celle de la lithosphère élastique oscille entre 76 et 88 km et enfin la profondeur de l'anomalie varie de 145 à 189 km.

Les coronae sur Vénus sont des structures uniques qui font l'objet d'études particulières dans l'interprétation de leur topographie et de leur signature de gravité. Certains auteurs proposent que la périphérie de ces coronae soit assimilée aux zones de subduction terrestres (par exemple, Sandwell et Schubert, 1992). Hoogenboom et al. (2004) proposent de déterminer l'épaisseur de la croûte, la profondeur de compensation ainsi que l'épaisseur élastique pour des degrés compris entre 40 et 80. Ils minimisent la différence entre l'admittance théorique de trois modèles de compensation (isostatique, flexure élastique de la lithosphère et compensation profonde par une anomalie de masse dans le manteau) et l'admittance réelle à partir de la topographie et de la gravité fournies par le sonde Magellan (en supposant constantes les masses volumiques de la croûte - $2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ - et du manteau - $3300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ -). 63 % des coronae étudiées révèlent une compensation possible de type "top-loading", c'est à dire soit par flexure élastique de la lithosphère soit par compensation isostatique et 37 % sont compensées par un modèle de type "bottom-loading", c'est à dire à des profondeurs de compensation qui se situent en dessous de la limite croûte-manteau.

Pour les 38 coronaes pour lesquelles le modèle de type "bottom-loading" semble le plus approprié, Hoogenboom et al. (2004) obtiennent des épaisseurs élastiques comprises entre 0 et 73 km avec une moyenne de 39 ± 19 km et une profondeur de compensation entre 30 et 117 km, avec une moyenne de 63 ± 28 km. Pour les 65 coronaes qui répondent à un modèle de type "top-loading", l'épaisseur élastique de la lithosphère varie de 0 à 48 km avec une moyenne de 12 ± 15 et une épaisseur de croûte entre 2 et 69 km, avec une moyenne de 38 ± 19 km. Ces épaisseurs ainsi calculées recouvrent parfaitement d'autres études concernant l'épaisseur de la croûte sur des structures variées (Grimm et Hess, 1997), les épaisseurs élastiques de la lithosphère calculées à partir des profils topographiques le long des coronaes (Sandwell et Schubert, 1992; Johnson et Sandwell, 1994; Brown et Grimm, 1996) ou à partir des admittances (Banerdt et al., 2000, par exemple).

En synthèse à propos de l'épaisseur élastique de la lithosphère vénusienne, on citera le travail plus récent (Anderson et Smrekar, 2006) qui utilise les admittances à l'échelle globale (pour des degrés inférieurs à 80) et permet d'obtenir des cartes de l'épaisseur de la croûte, de l'épaisseur de la lithosphère élastique et de la répartition des modes de compensation des reliefs (Figure 1.29). Ils proposent une étude encore une fois fondée sur la minimisation de la différence entre l'admittance réelle et l'admittance théorique calculée sur la base de plusieurs modèles de compensation de la topographie : "bottom-loading", "top-loading" et "hot-spot" (à la manière de Simons et al., 1997 et de Hoogenboom et al., 2004). Le modèle "top-loading" suppose qu'une anomalie de masse de surface (la topographie) permet à la lithosphère élastique de fléchir, le modèle "bottom-loading" suppose que des anomalies de masses internes (telle que la remonté du manteau par convection) provoque une flexion de la partie élastique de la lithosphère. Enfin, le modèle "hot-spot" (de grande longueur d'onde) combine à la fois une charge de surface (topographie créée par un volcan) et une charge de profondeur (anomalie de masse volumique créée par la présence d'un panache sous-jacent qui alimente en magma le volcan de surface). En utilisant les données de Magellan, ils couvrent 92% de la surface de Vénus. 40% de la surface couverte est représentée par une compensation de type "bottom-loading", 39% correspond à une compensation de type "top-loading", 15% des reliefs de la surface sont compensés par un modèle de point chaud et enfin 6% de la surface couverte ne peut pas être représentées par de tels modèles de compensation. Cependant, lorsque la profondeur de compensation est inférieure à 20 km, la compensation peut aussi bien être isostatique plutôt que par flexure élastique de la lithosphère, ce qui représente 50% de la surface.

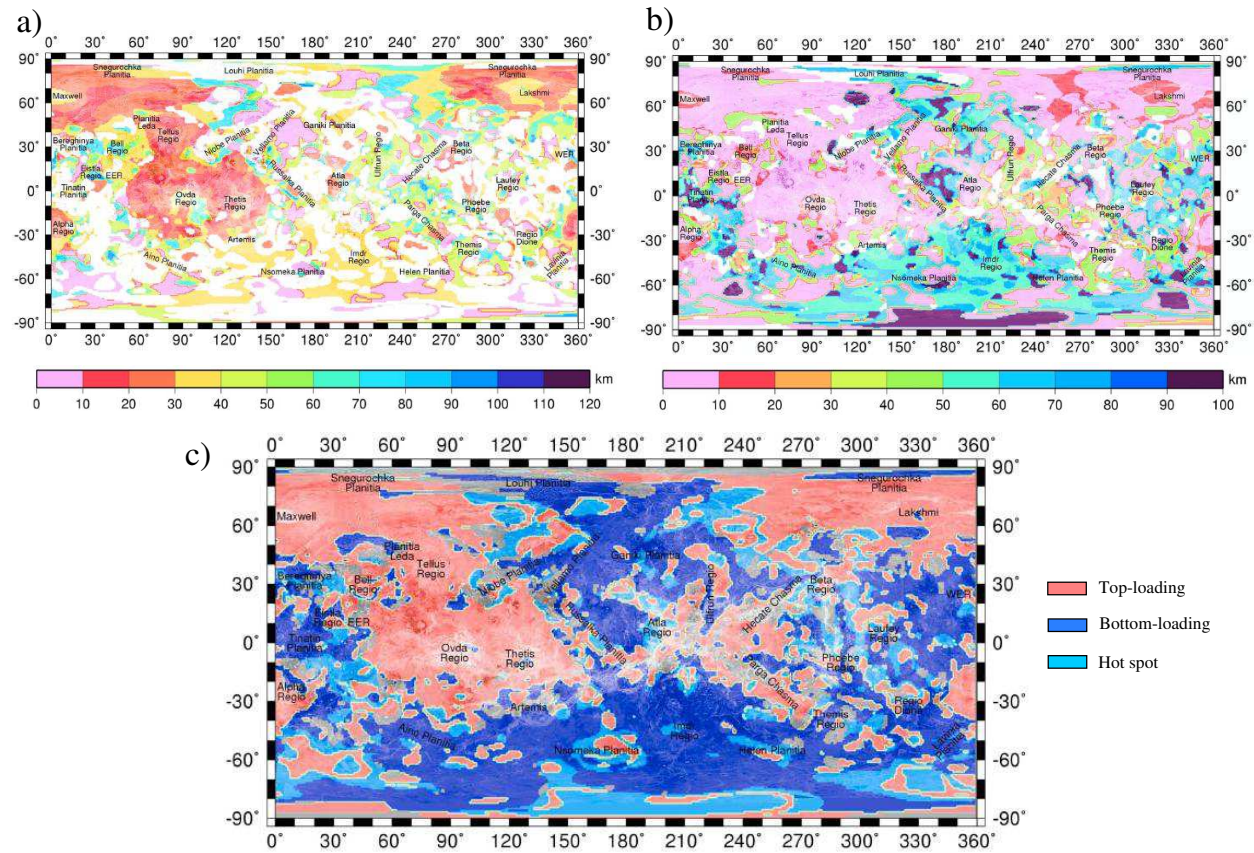


FIG. 1.29 – Carte de l'épaisseur de la croûte (a), de l'épaisseur élastique de la lithosphère (b) et des différents modes de compensation du relief vénusien selon Anderson et Smrekar (2006).

Anderson et Smrekar (2006) caractérisent ainsi chaque type de structure tectonique de la surface de Vénus (Figure 1.29). Les plaines peuvent être compensées à la fois par un modèle de type "top-loading" ou "bottom-loading" avec des valeurs d'épaisseur de croûte et de lithosphère élastique inférieures à 20 km. Cette valeur relativement faible de l'épaisseur élastique de la lithosphère est également compatible avec un modèle de compensation isostatique, suggérant qu'au moment de la formation des plaines, la lithosphère était trop faible pour supporter de manière élastique la charge que représente les plaines. Les plaines de l'hémisphère sud semblent avoir une lithosphère élastique plus épaisse (de 50 à 80 km) et compatible avec un modèle de type "bottom-loading" (déjà évoqué par Lawrence et Phillips, 2003). Les dômes volcaniques peuvent être classés suivant trois groupes selon l'épaisseur de la lithosphère élastique : Atla et Beta Regiones présentent des épaisseurs élastiques de 20 km ou moins. Themis, Bell, Ulfrun et Eistla Regio présentent une épaisseur élastique de 40 km (et moins) et enfin Laufey et Imdr Regiones ont une lithosphère élastique supérieure à 80 km. La croûte de ces trois groupes fait généralement moins de 40 km d'épaisseur sauf pour Themis et Bell Regiones (90 km). La profondeur de compensation de ces volcans est généralement de 175 km et moins sauf pour Laufey Regio ou elle est de plus de 300 km. Les plateaux Lakshmi Planum, Alpha, Ovda, Thetis et Tellus Regiones présentent des signatures similaires entre eux avec une épaisseur faible pour la lithosphère élastique et des valeurs d'épaisseur de croûte entre 10 et 40 km (Figure 1.29). Tous les plateaux ayant des épaisseurs de croûte et de lithosphère élastique faibles sont compatibles avec une compensation de type isostatique (comparable aux études de Simons et al., 1997).

Profil de viscosité de Vénus Comme je l'ai déjà évoqué au début de cette section concernant l'utilisation de la topographie et de la gravité sur Vénus, spectres, corrélation et admittance révèlent un support dynamique de la topographie pour les degrés les plus faibles, particulièrement pour les degrés inférieurs à 10 (Kiefer et Hager, 1991; Pauer et al., 2006, par exemple) permettant de contraindre le profil de viscosité de Vénus.

En utilisant l'admittance de Vénus pour des degrés entre 2 et 18 (qu'ils comparent à l'admittance théorique pour plusieurs mode de compensation), Kiefer et al. (1986) préconisent un profil de viscosité quasi-constant dans le manteau, surmonté d'une lithosphère présentant une viscosité importante.

Kiefer et Hager (1991) utilisent un modèle de convection cylindrique, axisymétrique ainsi que trois profils de viscosité différents pour obtenir les profils de topographie et de géoïde créés par un panache ascendant (méthode directe). Ils comparent ensuite les topographie/géoïde théoriques ainsi obtenus avec la topographie et le géoïde réel des structures de la région équatoriale de Vénus : Atla, Beta, Thetis

et Ovda Regiones. Les profils de viscosité testés présentent une dépendance avec la profondeur uniquement et le nombre de Rayleigh préféré est de 10^6 . Le profil de viscosité privilégié (qui permet d'obtenir la meilleure adéquation entre topographie/géoïde modélisés par un panache et topographie/géoïde réels) est le suivant : il présente une lithosphère thermique de 130 km d'épaisseur avec une forte viscosité puis un manteau supérieur entre 400 et 700 km et enfin le manteau inférieur entre 700 et 2800 km d'un ordre de grandeur plus visqueux que le manteau supérieur. Le résultat intéressant vient du fait qu'un modèle possédant une zone de faible viscosité sous la lithosphère thermique est exclu des profils de viscosité possibles pour Vénus (contrairement à la Terre). Il est donc possible que Vénus ne possède pas d'asthénosphère. Smrekar et Phillips (1991) (en utilisant le rapport entre la topographie et le géoïde) arrivent à la même conclusion : la présence d'une zone de faible viscosité dans le manteau supérieur de Vénus est improbable.

A l'inverse de ce qui a été fait par Kiefer et Hager (1991), Pauer et al. (2006) proposent d'utiliser la méthode inverse et utilisent les fonctions réponses de la topographie et du géoïde entre les degrés 2 et 40 pour contraindre la loi de viscosité du manteau (en minimisant encore une fois la différence entre l'admittance théorique en se basant sur une compensation de type dynamique et l'admittance réelle). Les profils de viscosité privilégiés sont non-unique et trois classes de viscosité sont possibles. Un modèle de viscosité formé de deux couches avec une lithosphère absente et présentant une rhéologie dans son ensemble quasi-isovisqueuse (très peu de variation avec la profondeur et pas de variation avec la température) est aussi représentatif du manteau vénusien qu'un modèle de viscosité de trois couches (ou plus) surmonté d'une lithosphère d'environ 100 km et d'une viscosité qui augmente avec la profondeur. Enfin Pauer et al. (2006) n'excluent pas les profils de viscosité à cinq couches dans lesquels la viscosité augmente graduellement avec la profondeur et où il y a une lithosphère de 100 km d'épaisseur qui surmonte une zone de faible viscosité. Cependant, Pauer et al. (2006) préfèrent le modèle à trois couches car il permet d'obtenir une lithosphère suffisamment importante (en accord avec les modèles de convection thermique qui incluent des rhéologies réalistes).

Comme pour Mars, Steinberger et al. (2010) se sont fondés sur l'étude de Steinberger et Claderwood (2006) pour dériver un profil de viscosité du manteau de Vénus avant de s'en servir pour interpréter les plus bas degrés du spectre de puissance du géoïde comme la présence possible d'un soutien lithosphérique ou mantellique de la topographie (que nous verrons par la suite). La minimisation de la différence entre le rapport entre topographie et géoïde qu'ils obtiennent et celui issu des données enregistrées de la topographie et du géoïde sur Vénus, leur permet de conclure à un profil de viscosité sur Vénus avec une lithosphère fine ayant une viscosité de 10^{23}

Pa·s (bien inférieure à ce que proposent Solomatov et Moresi, 1996). Ils proposent également deux profils de viscosité dont un où le manteau de Vénus ne présente pas d'augmentation de la viscosité dans la zone de transition spinelle-perovskite (Figure 1.14).

Chapitre 2

Convection mantellique et déformation de la lithosphère

Dans ce chapitre, nous aborderons dans un premier temps le comportement des roches soumises à une contrainte, qui voient se développer une déformation que nous considérerons visqueuse dans le manteau et élastique dans la lithosphère. Par la suite, je discuterai des sources d'énergie disponibles depuis la formation des planètes jusqu'à aujourd'hui et qui participent à l'évolution thermique des corps planétaires. Ensuite, nous verrons les différents éléments qui nous permettent d'affirmer la présence d'une convection sur Terre et ceux qui nous amènent à penser qu'il ait pu ou qu'il puisse y en avoir sur les autres planètes. Puis, je tenterais de résumer ce que nous supposons de l'évolution thermique de Mars et de Vénus.

Dans un second temps, je traiterai des caractéristiques de la convection visqueuse du manteau et de sa modélisation numérique en m'appuyant plus particulièrement sur l'outil dont je me suis servie pendant ces trois années : *Oedipe*. Ensuite, j'aborderai brièvement la méthode la plus utilisée pour caractériser le degré de compensation élastique d'un relief par la lithosphère (méthode de l'approximation de couche mince), puis j'exposerai dans le détail le programme que j'ai créé et qui est dédié à la déformation élastique de la lithosphère.

Enfin, je décrirais le couplage entre *Oedipe* et ce modèle de déformation élastique.

2.1 Rhéologie

La rhéologie est le premier facteur qui influe sur le comportement des manteaux planétaires. Pour des échelles de temps très courtes, le manteau adopte un comportement élastique, mais pour des échelles de temps plus longues, une température et une pression suffisante, le manteau se comporte de manière visqueuse. De telles

conditions sont difficilement reproductibles en laboratoire, par conséquent, la rhéologie du manteau est très mal contrainte et ce que l'on sait se résume à une viscosité des roches qui dépend à la fois de la température, de la pression, de la contrainte, de la taille de grain et de la composition.

2.1.1 Déformation élastique

La déformation élastique est une déformation réversible qui disparaît instantanément lorsque la contrainte cesse d'être appliquée. C'est en général la première réponse d'un matériau soumis à une contrainte. C'est le cas par exemple pour les roches des enveloppes solides répondant au passage d'une onde sismique, donc pour des déformations très rapides et des taux de déformations toujours très faibles (qui n'induisent pas de désordre cristallin). L'élasticité est aussi une caractéristique de la lithosphère à grande échelle. Par exemple, les marées terrestres sont des mouvements répétés liés à l'attraction de la Lune. Les contraintes ainsi générées sont accommodées en partie par une déformation élastique de la planète qui induit périodiquement des variations de l'altitude d'un point du globe de plusieurs centimètres (jusqu'à 30-40 cm à l'équateur).

Pour un matériau élastique, si la contrainte appliquée est faible, le matériau suit alors une loi de Hook généralisée : *"Chacune des 6 composantes de la déformation d'un corps en un point est une fonction linéaire des 6 composantes de la contrainte en ce point"* (Love, 1892). Ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma} = M\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations et M le module d'élasticité. Pour un matériau isotrope (mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace), il y a deux types de déformation, une déformation volumique et une déformation cisailante. Avec une écriture tensorielle, la relation contraintes/déformations s'exprime ainsi :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.2)$$

avec

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu, \quad (2.3)$$

λ est la constante de Lamé, K le module élastique d'incompressibilité, μ le module de cisaillement, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et ε_{ij} sont les composantes du tenseur des déformations. Pour une description complète et détaillée de la théorie de l'élasticité, je ne saurais trop recommander au lecteur le travail de Love (1892).

2.1.2 Déformation visqueuse

Le comportement visqueux se caractérise par une déformation irréversible lors de l'accommodation d'une contrainte. Dans le cadre des matériaux planétaires, la déformation visqueuse fait directement appel à la notion de fluage qui peut être de deux sortes, le fluage par diffusion ou par dislocation. Les expériences de laboratoire prédisent que le manteau supérieur, composé principalement d'olivine, se déforme par une combinaison de fluage par diffusion et de fluage par dislocation (Karato et Wu, 1993). Le fluage par diffusion correspond à la migration des atomes à travers le solide en vue d'une accommodation de la contrainte. De ce mécanisme de déformation découle une rhéologie dite Newtonienne avec une viscosité qui dépend de la taille de grain. La viscosité de ce fluide est alors indépendante de la contrainte et la vitesse de fluage (taux de déformation) est proportionnelle à la contrainte : $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{D}/\eta$, avec \boldsymbol{D} la partie déviatorique du tenseur des contraintes et η la viscosité. Dans les manteaux planétaires, ce type de déformation correspond à des conditions de faible contrainte ou pour des températures approchant celles du solidus de la roche (Karato, 2008). La loi de viscosité que l'on utilise suit alors une loi d'Arrhénius (ou une loi d'approximation de type Frank-Kamenetskii, mais ce n'est pas le cas ici) et on écrit :

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{E_a + pV_a}{RT}\right), \quad (2.4)$$

avec η_0 la viscosité de référence, E_a et V_a l'énergie et le volume d'activation respectivement, p la pression, R la constante des gaz parfaits et T la température. La viscosité dépend fortement de la température, pas seulement parce que le terme T apparaît dans l'équation 2.4 mais surtout parce que la diffusion est un processus thermiquement activé.

Pour des contraintes plus élevées, la déformation la plus courante est celle du fluage par déplacement de dislocations. Des défauts linéaires de la structure cristalline migrent alors à travers le solide, engendrant de la déformation. Le fluide est alors dit non-Newtonien et la viscosité dépend de la contrainte et ne sera pas utilisée dans l'étude présente (pour un résumé, voir Ricard, 2007).

Quelle que soit la rhéologie (dépendante de la taille de grain ou dépendante de la contrainte), la viscosité dépend fortement de la température, de la pression, de la présence de produit de fusion, de la concentration en eau, des phases minéralogiques et de la fugacité de l'oxygène (voir par exemple Hirth et Kohlstedt, 1996).

2.2 Sources d'énergie, observations et convection sur les planètes

2.2.1 Sources d'énergie pour les corps du Système Solaire

Lors de leur formation, les planètes acquièrent une grande quantité d'énergie issue des impacts météoritiques. L'accrétion est la source la plus importante de chaleur, au moins dans les premiers temps de formation d'une planète (voir Figure 2.1). Une partie de l'énergie cinétique ainsi délivrée par l'impacteur sert à la fracturation des roches impactées mais la plus grande partie est convertie sous forme de chaleur (Stevenson, 2007). L'énergie thermique ainsi transmise à la planète ne dépend pas de la taille de l'impacteur mais de la taille de l'impacté (Monteux, 2009). Ainsi, pour une planète de la taille de Mars, l'apport thermique pourrait se situer aux alentours de 390 K (Senshu et al., 2002; Monteux et al., 2007).

La décroissance des éléments radioactifs de courte période : ^{26}Al , ^{60}Fe , ^{53}Mn est également une source de chaleur très importante au moment de l'accrétion juste après la formation du Système Solaire (voir Figure 2.1). Environ un million d'années après la formation du Système Solaire, ils fournissaient une énergie de trois ordres de grandeur plus élevée que celle des éléments de longue période. Ce n'est que plus tard que ces éléments de longue période ^{238}U , ^{235}U et ^{232}Th et ^{40}K deviennent prédominants dans la production de chaleur par désintégration. Pour une planète de la taille et de la composition de Mars, la désintégration radioactive de ^{26}Al semble suffisante pour fondre entièrement la planète (Elkins-Tanton et al., 2005).

En fonction de la quantité de chaleur apportée et de la taille des corps impactés, ces sources de chaleur primitives peuvent être à l'origine de la fusion du manteau et des impacteurs et de la formation d'un océan magmatique. Cet océan représenterait 30 à 40% du manteau terrestre profond selon Halliday et Wood (2007). Une fois le processus de fusion entamé, la différenciation et la ségrégation des éléments par instabilités gravitationnelles sont inévitables (Rubie et al., 2007).

Les sources de chaleur discutées précédemment ne sont valables que durant les stades primitifs de la formation des planètes. En considérant les mêmes abondances en isotopes radioactifs que dans les chondrites, la quantité de chaleur délivrée aujourd'hui par la radioactivité sur Terre (croûte et manteau confondus) représente ~ 18 TW (Jaupart et al., 2007) et reste le mécanisme principal de production de chaleur (sur Terre mais probablement sur les autres planètes également).

Le refroidissement du noyau est également source de chaleur et le flux de chaleur émanant de celui-ci est contrôlé par l'efficacité de la convection du manteau sus-jacent (Jaupart et al., 2007). Ce flux de chaleur comprend le refroidissement séculaire et la chaleur latente de cristallisation de la graine. Il est estimé pour la Terre à 8

TW (Jaupart et al., 2007).

Il existe également d'autres sources de chaleur comme la différenciation de la croûte ou les forces de marée qui ne fournissent que très peu d'énergie pour la Terre (respectivement 0,3 et 0,1 TW selon Jaupart et al. (2007)).

Ces différentes sources de chaleur sont à l'origine de l'évolution thermique des planètes. Le manteau (et le noyau) vont évacuer cette chaleur afin de tendre vers un équilibre thermique, soit par une mise en mouvement, c'est le phénomène de convection soit par diffusion de la chaleur, c'est la conduction.

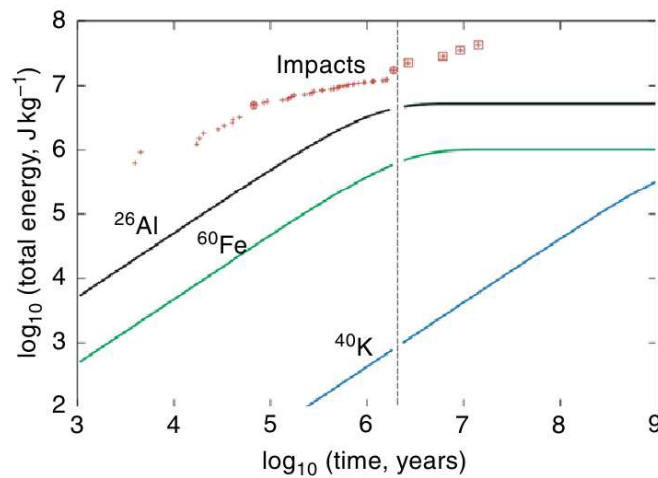


FIG. 2.1 – Production cumulée d'énergie par impacts et chauffage par désintégration radioactive ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$) en fonction du temps depuis la formation du Système Solaire. Les croix correspondent aux impacteurs les plus petits, les cercles sont des impacteurs de la taille d'embryons planétaires et les carrés sont les impacts géants de la dernière étape de l'accrétion. La ligne en trait plein montre l'énergie cumulée associée à la décroissance des éléments radioactifs ^{26}Al , ^{60}Fe et ^{40}K ayant des demi-vies respectives de 0,73 Ma, 1,5 Ma et 1,25 Ga (Rubie et al., 2007).

2.2.2 Observations et hypothèses de convection dans les manteaux planétaires

Observations terrestres de la convection - La révolution en sciences de la Terre commence sérieusement au début du siècle dernier avec l'hypothèse d'une dérive continentale dont l'acceptation ne viendra que dans les années 1960 et évoluera vers la notion de tectonique des plaques. Cette révolution apparaît grâce au développement des connaissances du plancher océanique et particulièrement sur la découverte des dorsales océaniques, apportant une nouvelle contrainte sur la théorie de la dérive des continents (Hess, 1962). C'est au coeur de ce nouveau courant de pensées que réside la compréhension de la dynamique du manteau terrestre.

Grâce aux avancées considérables des programmes spatiaux, les mesures de la topographie par des satellites en orbite et l'établissement de modèles globaux des champs de gravité et du géoïde terrestre fournissent des contraintes importantes sur la structure en densité du manteau associée à la convection. Les anomalies du géoïde et celles des vitesses sismiques sont bien corrélées (au moins jusqu'au degré 12) (Cazenave et al., 1989; Li et Romanowicz, 1996) et les bosses du géoïde et de la topographie à grande longueur d'onde coïncident avec les zones de vitesses sismiques lentes, associées à un courant ascendant. Le géoïde met également en évidence un excès de masse au niveau des zones de subduction, interprété comme la présence de courants froids descendants.

La distribution globale de la sismicité à la surface du globe révèle des systèmes de dorsales océaniques et des zones de subduction qui la découpe en un certain nombre de plaques à l'intérieur desquelles la sismicité est relativement absente. La tomographie sismique, permet d'imager les hétérogénéités de vitesses sismiques qui sont associées à des variations latérales de densité et donc de température ou de composition à travers la totalité du volume du manteau. En particulier, la tomographie sismique a montré par des études localisées que si certaines plaques plongeantes restent bloquées un certain temps dans la zone de transition entre le manteau supérieur et inférieur (Fukao et al., 1992; Van der Hilst et al., 1997), plusieurs d'entre elles passent cette barrière des 660 km. En revanche, la limite de résolution spatiale de ces modèles tomographiques permet difficilement la mise en évidence de courants ascendants, bien que des efforts aient été accomplis (Montelli et al., 2004). En contrepartie, les modèles sismiques anisotropes construits à partir des ondes de surface mettent bien en évidence un excès d'anisotropie verticale sous les dorsales (Montagner et Tanimoto, 1991), qui semble témoigner de la présence d'un courant ascendant dans le manteau supérieur. La rétention des slabs à 660 km peut être engendrée par des changements de la structure cristalline (changement de phase) qui produisent de fortes augmentations de densité et potentiellement une augmentation de la viscosité. Les variations latérales de la profondeur du changement de phase, dues à des différences de température ou de composition, sont à l'origine d'anomalies de densité qui empêchent la pénétration des slabs (par exemple Tackley, 2012, pour une synthèse récente).

La géochimie et la pétrologie du manteau apportent également des contraintes importantes sur la dynamique du manteau (notamment sur la profondeur de fusion) à travers l'analyse des magmas atteignant la surface au niveau des rides océaniques, des îles océaniques, des larges provinces ignées et des arcs de subduction. L'analyse des rapports en éléments chimiques qui caractérisent les basaltes produits au niveau des dorsales océaniques (MORBs) et ceux des points chauds (OIB) implique la né-

cessité d'avoir au moins deux réservoirs sources des magmas distincts, conduisant à l'hypothèse d'une convection dans deux couches séparées (le manteau supérieur et le manteau inférieur, par exemple Jacobsen et Wasserburg, 1979). Ces observations géochimiques ont longtemps semblé être en opposition avec les évidences géophysiques de convection globale mise en évidence par la pénétration des slabs dans le manteau inférieur (Van der Hilst et al., 1997, par exemple).

Dans la vision actuelle, sismologie et géochimie s'accordent à dire qu'il est possible que la convection dans le manteau terrestre (au moins) puisse se faire dans deux couches séparées par une transition qui n'est cependant pas complètement imperméable. À 660 km de profondeur, les slabs pénètrent localement et par intermittence dans le manteau inférieur. Le manteau profond contient des piles de matériel subduit ou de matériel primitif (cristallisation d'un océan magmatique, subduction de croûte primitive, liquide primitif enrichi en éléments incompatibles, voir par exemple Tackley (2012)). Ces piles thermo-chimiques représentent un volume de quelque pour-cents du volume du manteau et se situent vraisemblablement sous le Pacifique et sous le continent Africain (Lassak et al., 2010). Le lecteur intéressé pourra se reporter à la synthèse de Tackley (2012) à propos de la dynamique et de l'évolution du manteau profond et de manière générale à Bercovici (2007) et à Tackley (2008) au sujet de l'observation de la convection.

Observables et hypothèses de convection dans les corps du Système Solaire - Nous l'avons compris, sur Terre, la preuve de la convection mantellique fait intervenir la notion de tectonique des plaques qui se manifeste par les structures actives de grande échelle que sont les dorsales et les zones de subduction. Sur les autres planètes telluriques, certaines formations s'en approchent et des structures similaires se retrouvent sur certains satellites des planètes géantes (comme les rides et les bombements topographiques d'Europe, satellite de Jupiter, ou les geysers du pôle sud d'Encelade, satellite de Saturne).

En l'absence d'observations de tectonique des plaques et surtout de données sismologiques, les hypothèses de convection mantellique sur les autres planètes sont principalement fondées sur notre connaissance des transferts de chaleur au sein des corps. Compte tenu des sources de chaleur évoquées précédemment (communes à toutes les planètes), la convection étant le mécanisme le plus efficace pour l'évacuation de cette chaleur, il est fort probable que ce processus intervienne durant l'histoire thermique d'une planète. L'une des preuves les plus évidentes d'une convection dans le manteau (présente ou passée), pourrait être la présence d'un volcanisme de surface important (par exemple Olympus Mons sur Mars ou Maat Mons sur Vénus).

Mars apparaît tectoniquement et volcaniquement mort aujourd'hui. Cependant, le volcanisme intense durant l'histoire récente de Mars soutient l'hypothèse d'une convection (au moins passée). De plus, la forme des anomalies magnétiques rémanentes confinées dans l'hémisphère Sud avec des inversions de polarité symétriques ne sont pas sans rappeler celles qui se situent au niveau des dorsales terrestres, et représentent une explication possible à la présence d'un régime de tectonique des plaques (passé) et donc de convection dans le manteau (par exemple Connerney et al., 2005).

La dichotomie martienne a d'abord été expliquée par une source endogénique qui suggère que la croûte de l'hémisphère Nord ait été amincie totalement ou partiellement par des processus de convection mantellique (Smith et al., 1999b). À l'inverse, Zhong et al. (2008) et Keller et Tackley (2009) proposent qu'une convection de degré 1 soit à l'origine de la formation de la croûte plus épaisse dans l'hémisphère Sud (grâce à un modèle 3D sphérique de convection dans un fluide ayant une viscosité stratifiée). Comme il a déjà été évoqué dans la Section précédente, l'accrétion, la désintégration des isotopes radioactifs de courte période et la formation du noyau sont à l'origine de la création d'un océan magmatique plus ou moins profond. La remobilisation de cet océan par des processus de mélange puis sa cristallisation peuvent également être à l'origine de la croûte (Elkins-Tanton et al., 2005). Nous reviendrons sur ces processus liés à l'évolution thermique par la suite.

Certains auteurs suggèrent également que le dôme de Tharsis soit le résultat d'un panache mantellique actuel (Schubert et al., 2001; Zuber, 2001) ou passé (par exemple Lowry et Zhong, 2003; Zhong et Roberts, 2003). De plus, Zhong (2008); Šrámek et Zhong (2010, 2012) utilisent un modèle 3D sphérique et expliquent à la fois la présence de Tharsis et la dichotomie en invoquant également une convection de degré 1 associée à une rotation de la lithosphère et à des variations latérales d'épaisseur de cette dernière.

La répartition des altitudes sur Vénus et la datation de sa surface semblent indiquer un resurfaçage global de la planète il y a environ 500 Ma (par exemple Schaber et al., 1992), qui pourrait témoigner de l'existence de la convection sur Vénus dans un régime particulier (que nous aborderons dans la Section 2.4).

De plus, la corrélation significative entre la topographie et le géoïde aux bas degrés, associée à une admittance relativement élevée semblent indiquer qu'une partie significative de la topographie a une origine dynamique (Simons et al., 1997; Pauer et al., 2006).

En utilisant un modèle d'évolution thermique, Phillips (1994), Kucinskis et Turcotte (1994) puis Solomatov et Moresi (1996) ont attribué un amincissement de la

lithosphère thermique responsable des bombements sous les structures volcaniques à une convection avec un large contraste de viscosité dans le manteau de Vénus. Contrairement aux études précédentes, Orth et Solomatov (2011) ne considèrent pas *a priori* de mécanismes de compensation des reliefs pour interpréter la topographie en terme d'épaisseur de la lithosphère. Les résultats de leur modèle de couvercle à l'équilibre isostatique les conduisent à préférer une lithosphère beaucoup plus épaisse (aux alentours de 600 km) pour expliquer la topographie dynamique associée à la convection dans le manteau.

Les coronae à la surface de Vénus ont été apparentés aux zones de subduction terrestres (par exemple Sandwell et Schubert, 1992), et donc à une tectonique des plaques possible, ou à la remontée d'un panache mantellique (Smrekar et Stofan, 1999) et pourraient donc être les observables d'une convection sur Vénus.

2.3 Mars

Un problème fondamental dans l'évolution thermique de Mars concerne le temps de formation et l'origine de la dichotomie crustale. Bien que la dichotomie crustale soit considérée comme une des plus vieilles structures martiennes, l'instant précis de sa formation est encore largement débattu. Les premières études sur les structures tectoniques associées à la dichotomie suggèrent un âge proche de 3,7 Ga (McGill et Dimitriou, 1990). Des études plus récentes proposent une formation de la dichotomie plus ancienne (<3,9 Ga) (Nimmo et Tanaka, 2005, par exemple). Solomon et al. (2005) évoquent également une formation de la croûte et de la dichotomie dans les premiers 50 Ma après la formation du Système Solaire.

La dichotomie martienne a d'abord été expliquée par des processus endogéniques associés (1) à une phase de tectonique des plaques (Sleep, 1994), (2) à l'évolution d'un océan magmatique primitif (Hess et Parmentier, 2001; Elkins-Tanton et al., 2003, 2005) ou (3) à un épisode de convection de degré 1 (Zhong et Zuber, 2001; Keller et Tackley, 2009).

(1) Sleep (1994) a proposé que les terrains de l'hémisphère Nord et le dôme de Tharsis aient été créés de la même manière que le plancher océanique terrestre et qu'une chaîne d'arc volcanique (donc dans un contexte de tectonique des plaques).

(2) La cristallisation hétérogène de l'océan magmatique conduit à une stratification instable. Le manteau solide instable se mélange par phénomènes d'avalanches, les éléments les plus denses alors près de la surface se retrouvent en profondeur et les éléments les plus légers remontent vers la surface subissant une fusion adiabatique à l'origine de la croûte primitive (Elkins-Tanton et al., 2005). L'altitude plus basse

des terrains du Nord correspond à une fusion plus profonde des éléments ascendants et à un volume de produit de fusion deux fois moins important que dans le cas de l'hémisphère Sud (Hess et Parmentier, 2001; Elkins-Tanton et al., 2005).

(3) Un épisode de convection mantellique de grande longueur d'onde après la solidification de l'océan magmatique primitif, dans le contexte d'une viscosité stratifiée a été avancé pour la formation de la dichotomie crustale (par exemple Zhong et Zuber, 2001; Roberts et Zhong, 2006). Le temps nécessaire au développement d'une convection de degré 1 se situe entre 100 Ma et plusieurs centaines de millions d'années et reste cohérent avec la plupart des hypothèses formulées à propos de la durée de formation de la dichotomie (Roberts et Zhong, 2006; Keller et Tackley, 2009).

Il existe une hypothèse alternative, exogénique cette fois, qui propose que la dichotomie martienne soit le résultat d'un bombardement de la planète qui aurait excavé l'intégralité de l'hémisphère Nord (Andrews-Hanna et al., 2008; Marinova et al., 2008; Nimmo et al., 2008). Cette théorie est toutefois en désaccord avec les observations de la sonde MGS dont l'interprétation conduit à des variations graduelles de la topographie (Smith et al., 1999b) et de l'épaisseur de croûte (Zuber et al., 2000) d'un pôle à l'autre de Mars.

L'épaisseur actuelle de la croûte est plus ou moins bien contrainte et les estimations proposent une gamme variable de 40 à 150 km. La borne inférieure correspond à l'inversion des données de topographie et de gravité en supposant un mode de compensation particulier (voir Section 1.3.2.3) et la valeur supérieure provient des modèles de structure interne fondés sur le moment d'inertie et la chimie des SNC (Sohl et Spohn, 1997; Sohl et al., 2005). Les résultats des modèles thermochimiques d'évolution de la croûte proposent qu'elle se soit formée dans les premiers milliard d'années pour atteindre plusieurs dizaines de kilomètre (Spohn, 1991; Breuer et al., 1993; Hauck et Phillips, 2002; Breuer et Spohn, 2003, 2006) ou quelques centaines de kilomètres (Weizman et al., 2001).

Les scénarios proposés pour la formation de la dichotomie ont des implications importantes sur l'évolution thermique de Mars, en particulier son évolution primitive. Aujourd'hui et sans doute les quatre derniers millions d'années, Mars est dans un régime de convection de type couvercle stagnant. Les premiers quelques millions d'années restent cependant incertains et on ne sait pas si une période de tectonique des plaques qui a évolué vers un régime de plaque unique a existé sur Mars ou si elle a toujours été dans un régime de couvercle rigide.

En supposant un régime de convection de couvercle stagnant durant toute l'histoire de Mars, la plupart des modèles montrent un refroidissement continu de l'intérieur. Hauck et Phillips (2002) suggèrent que seul un manteau hydraté avec une température initiale de 1700 K est en adéquation avec la formation d'une croûte du-

rant les premiers millions d'années. Au contraire, Breuer et Spohn (2006) suggèrent qu'un manteau anhydre est également compatible avec l'évolution crustale supposée si la température initiale du manteau après la formation du noyau est suffisamment élevée et si la formation de la croûte primitive est contemporaine de celle du noyau. En s'appuyant sur une température moyenne du manteau inférieure à celle du solide, ces modèles d'évolution suggèrent que la formation de la croûte s'est arrêtée il y a environ 3,5 milliards d'années. Les épaisseurs élastiques de la lithosphère associées à la fin du Noachien (3,5 Ga) semblent en accord avec un manteau préférentiellement anhydre (Grott et Breuer, 2008, 2010). Aujourd'hui, la température supposée du manteau martien peut atteindre 1900-2100 K (Breuer et Spohn, 2003) et les modèles récents qui considèrent un couvercle stagnant parviennent à une lithosphère thermique de 350 à 450 km d'épaisseur (Grasset et Parmentier, 1998; Reese et al., 1998; Redmond et King, 2004; Breuer et Spohn, 2006).

Un épisode primitif de tectonique des plaques sur Mars impliquerait un refroidissement plus efficace de l'intérieur pendant les 100 premiers millions d'années. Dès que la tectonique des plaques cesse, le transfert de la chaleur devient insuffisant et l'intérieur se réchauffe dans un premier temps puis se refroidit de nouveau jusqu'à atteindre la température actuelle, qui ne diffère pas des températures obtenues en régime de couvercle stagnant permanent (Breuer et Spohn, 2003). L'augmentation de température entraîne également une diminution de l'épaisseur de la lithosphère élastique après la cessation de l'épisode tectonique et pendant une longue période de l'évolution martienne. Bien qu'un épisode primitif de tectonique des plaques sur Mars ne puisse pas être définitivement exclu, il est difficile de réconcilier les résultats d'un tel modèle avec les résultats de l'inversion des champs de topographie et de gravité (par exemple Zuber et al., 2000; McGovern et al., 2004) en terme de taux de production crustale, d'évolution de la lithosphère et de mise en place d'une dynamo (Breuer et Spohn, 2003).

L'évolution de l'épaisseur élastique de la lithosphère dérivée de l'analyse de la topographie et de la gravité se caractérise par une augmentation rapide durant le Noachien (jusqu'à 3,5 Ga), puis par une augmentation plus modérée jusqu'à aujourd'hui (Zuber et al., 2000; McGovern et al., 2004, par exemple). Cette tendance générale est confirmée par les modèles d'évolution thermique (Breuer et al., 1993; Breuer et Spohn, 2003, 2006) qui étudient l'évolution de la croûte, qui considèrent un régime de couvercle stagnant tout au long de l'histoire de Mars et qui suggèrent (1) une augmentation rapide de l'épaisseur de la lithosphère durant les premières centaines de millions d'années puis (2) une augmentation plus lente jusqu'à aujourd'hui. Si l'on considère que la lithosphère élastique est limitée par l'isotherme 1050 K, on atteint des valeurs de quelques kilomètres à une centaine de kilomètres durant

les premières centaines de millions d'années puis 130 à 200 km aujourd'hui (Breuer et Moore, 2007). Les épaisseurs élastiques de lithosphère de moins de 16 km proposées par certaines études de la topographie et du champ de gravité (cf. Section 1.3.2.3) sont difficilement explicables à moins que les structures concernées ne datent du Noachien inférieur ($>4\text{Ga}$). En particulier, l'analyse de la topographie dans la région de Thaumasia (Grott et al., 2005, 2007), avec des formations datées de la transition entre le Noachien et l'Hespérien (3,5 Ga), suggère une épaisseur élastique de la lithosphère de 12 km, incompatible avec l'épaississement rapide proposé par les modèles thermiques précédents.

Les longues périodes de volcanisme à l'origine de Tharsis ou d'Elysium peuvent être expliquées par des panaches stables, durables et peu nombreux avec des températures relativement élevées par rapport au manteau environnant (par exemple Li et Kiefer, 2007; Kiefer et Li, 2009; Grott et Breuer, 2010). Cette activité volcanique particulière ainsi que la corrélation entre la topographie associée et les anomalies du champ de gravité sous-entendent un lien fort avec les processus profonds du manteau et la convection invoquée est une convection de faible degré (Schubert et al., 1990; Harder et Christensen, 1996). Cependant, certains auteurs proposent à juste titre que Tharsis ne soit supporté dynamiquement que partiellement ou pas du tout (Zhong, 2002; Lowry et Zhong, 2003; Zhong et Roberts, 2003; Roberts et Zhong, 2004).

Le premier mécanisme possible de génération de tels panaches fait intervenir des transitions de phases endothermiques et exothermiques. Ces transitions de phases constituent des barrières thermiques qui tendent à limiter le nombre de panaches chauds (Schubert et al., 1990). Ces structures sont observées aussi bien en modélisation numérique 2D (Weinstein, 1995) qu'en 3D (Harder et Christensen, 1996; Harder, 1998; Breuer et al., 1998; Harder, 2000; Roberts et Zhong, 2006; Zhong et al., 2008; Keller et Tackley, 2009). La réduction du nombre de panaches la plus efficace s'obtient en présence d'une couche de perovskite proche de la CMB (couche présente tôt dans l'histoire thermique de Mars, lorsqu'elle était encore chaude : Breuer et al., 1998). La présence de cette couche de perovskite dépend de la taille du noyau imposée par sa concentration en soufre (Harder, 1998). Harder et Christensen (1996) ont démontré qu'une couche de perovskite de 120 km d'épaisseur conduit à un panache unique responsable d'une partie de l'anomalie de géoïde (10%) et d'une contrainte tectonique proche de celle qui est observée à la surface de Mars. Cependant, certains modèles incluant des changements de phases ainsi qu'une rhéologie dépendante de la température et de la pression n'aboutissent pas à la formation d'un panache unique (Roberts et Zhong, 2004, 2006).

Le second mécanisme est celui de la formation d'un panache induit par un impact

météoritique également à l'origine de la dichotomie crustale (Lingenfelter et Schubert, 1973; Wise et al., 1979; Reese et al., 2004). Cette hypothèse est à l'opposé de celle de Zhong et al. (2008), Šrámek et Zhong (2010) et Šrámek et Zhong (2012) qui envisagent la formation de ces deux structures remarquables de Mars par la présence d'un panache dont l'origine provient d'une stratification du manteau.

Deux autres mécanismes ont été proposés pour l'obtention d'une convection de faible degré. D'abord, la présence d'une croûte plus épaisse dans l'hémisphère Sud conduit à des températures plus élevées à l'interface croûte/manteau et à un flux de chaleur conductif plus faible en surface. Cette condition thermique localisée conduit à la formation d'un bombement important sous la croûte épaissie, associé à un panache unique dans la modélisation analogique de Wenzel et al. (2004). Ce résultat intéressant amène la question suivante : la dichotomie crustale a-t-elle été créée par un panache unique ou est-elle responsable de la formation de ce panache ? Ensuite, Schubert et al. (1990) proposent qu'un chauffage par la base plutôt que par désintégration radioactif (chauffage volumique) soit plus propice au développement d'une convection de grande longueur d'onde dans le manteau. Cette hypothèse fut largement remise en question par Redmond et King (2004) qui obtiennent un panache unique même avec un taux de chauffage par désintégration de 88% mais un nombre de Rayleigh de 10^6 et une loi de viscosité fortement dépendante de la température.

Une alternative à la formation de produit de fusion par des panaches durables sous les régions volcaniques a été proposée par Schumacher et Breuer (2006). Une fois que la structure principale des larges provinces volcaniques fut établie, les variations latérales d'épaisseur de la croûte ont permis une fusion continue sous ces régions épaissies et peut expliquer la durabilité et le volcanisme récent de Tharsis et d'Elysium. Grott et Breuer (2009) ont également proposé la combinaison entre cette fusion continue et la présence d'un panache sous ces structures volcaniques.

La mise en place d'une dynamo, qui a suivi la formation du noyau pendant les stades primitifs de Mars (qui durera 15 millions d'années - par exemple Kleine et al., 2002) est largement soutenue par la découverte et l'étude de l'aimantation rémanente de la croûte martienne (Acuña et al., 1999; Connerney et al., 2004). Plusieurs modèles se sont succédés dans l'étude de l'histoire du noyau martien mais il semble relativement clair que son évolution soit fortement dépendante de sa teneur en soufre (Schubert et al., 2001). L'hémisphère sud semble avoir acquis son aimantation durant les premiers millions d'années de l'évolution de Mars (Nimmo et Tanaka, 2005) et la dynamo responsable a été maintenue pendant peut être 500 millions d'années. Après cette période, Mars peut s'être refroidi suffisamment pour une cessation complète de la dynamo ou pour que le manteau ne puisse plus produire des laves ayant enregistré le champ magnétique existant (par exemple Acuña et al.,

1999). L'absence d'aimantation crustale près des larges impacts tels qu'Argyre ou Hellas laisse penser à une cessation d'activité de la dynamo il y a 4 milliards d'années (Acuña et al., 1999). L'évidence de la mise en place de la dynamo tôt dans l'histoire de Mars reçoit le soutien de la plupart des modèles d'évolution thermique qui considèrent l'histoire du champ magnétique (par exemple Schubert et Spohn, 1990; Hauck et Phillips, 2002; Breuer et Spohn, 2003, 2006).

Pour conclure, je pense qu'il est important de nuancer la nécessité absolue d'une convection de faible degré pour expliquer la domination des faibles degrés sur les structures de topographie ou de géoïde. En présence d'une lithosphère épaisse, seuls les panaches les plus puissants formeront une topographie en surface (topographie dynamique et/ou formation volcanique). Les panaches plus faibles n'auront que peu d'impact sur la topographie de surface mais l'anomalie de densité associée et la déformation des interfaces plus profondes qu'ils créent devraient être visibles sur le signal du géoïde. Si maintenant on considère une partie élastique de la lithosphère (qui semble relativement épaisse sur Mars, cf Section 1.3.2.3), la topographie créée par ces panaches de faible ampleur peut être totalement relaxée et complètement invisible sur le signal topographique de surface. Seule l'anomalie de densité peut être visible sur le géoïde mais elle peut être également très faible car loin de la surface. De façon synthétique, une topographie dominée par un faible degré n'élimine pas définitivement la possibilité d'une convection de degré plus élevé.

2.4 Vénus

Le contrôle de l'évolution thermique du manteau de Vénus par la convection commence il y a à peu près 4,5 milliards d'années (Schubert et al., 2001). Les phénomènes précédents de refroidissement, de différenciation et de démarrage de la convection sont donc de courte durée en comparaison de l'évolution complète de la planète (Solomatov et Stevenson, 1993). Sur Vénus, la distribution des cratères d'impact conduit à une datation de la surface entre 300 Ma et 1 Ga, ce qui laisse penser qu'un événement majeur a renouvelé l'intégralité de la surface (Schaber et al., 1992; Phillips et al., 1994; Stofan et al., 2005). Cet événement aurait duré environ 100 Ma (Strom et al., 1994). L'absence de tectonique des plaques sur Vénus et la possibilité de resurfaçage global de la surface aboutissent à la proposition de trois modèles d'évolution thermique sur Vénus.

Le premier modèle est fondé sur un équilibre thermique quasi-statique entre la quantité de chaleur produite (par la désintégration radioactive et par le refroidissement séculaire de la planète) et la quantité de chaleur évacuée en surface. En considérant la même quantité d'éléments radioactifs que sur la Terre, en suppo-

sant un gradient thermique conductif linéaire associé à un contraste de température de 850 K à travers la lithosphère, cette dernière présente une épaisseur de 45 km (Schubert et al., 1997). Sans la subduction de lithosphère froide (sans tectonique des plaques), la différence de température entre les matériaux ascendants et descendants doit être moins importante que sur Terre. En revanche, la quantité de chaleur à évacuer étant identique, le nombre de Rayleigh associé à la convection doit être plus élevé et la viscosité moyenne doit être considérablement plus faible que sur Terre. Schubert et al. (2001) proposent alors deux mécanismes d'évacuation de la chaleur : la présence de panaches et la délamination de la lithosphère. La topographie et les anomalies de gravité associées ont été attribuées à de tels panaches par de nombreux auteurs (cf. Section 1.4.2.3). Cependant, la quantité de chaleur totale à évacuer sur Vénus ($Q_V = 2,9 \cdot 10^{13}$ W) implique la présence de 80 panaches de la taille d'Hawaii. En présence d'une lithosphère de 45 km, ces panaches devraient être visibles en surface, ce qui n'est pas le cas (Schubert et al., 1997). Le deuxième mécanisme d'évacuation de la chaleur proposé est celui de la délamination de la lithosphère. L'équilibre thermique entre la quantité de chaleur évacuée par ce mécanisme et celle qui est disponible entraîne une délamination complète de la lithosphère tous les 19 Ma (au maximum), très loin des estimations du dernier épisode de resurfaçage global supposé il y a 500 millions d'années (Stofan et al., 2005).

Le deuxième modèle est celui de la planète différenciée qui propose que la majeure partie des éléments radioactifs soit concentrée dans la croûte et que la chaleur produite soit évacuée par conduction à la surface. Schubert et al. (1997) proposent un modèle de conduction pure où les sources de chaleur sont proches de la surface. Ce modèle respecte une concentration en éléments radioactifs identique à celle de la Terre et qui maintient une température mantellique sous le solidus ainsi que des flux de chaleur compatibles avec les observations de surface. Il requiert cependant de fortes hypothèses de base : (1) un transfert quasi-complet des éléments radioactifs vers la croûte, (2) un refroidissement séculaire de Vénus négligeable et (3) une concentration uniforme en éléments radioactifs au sein de la croûte. Si ce modèle est valide, la croûte vénusienne s'est épaissie au cours du temps avec très peu de recyclage crustal. Dans ce scénario, le manteau est systématiquement appauvri en éléments radioactifs, réduisant ainsi leur quantité dans les principales sources volcaniques et réduisant donc le volcanisme.

Enfin, le troisième modèle, qui semble le plus plausible, est le modèle catastrophique selon lequel la chaleur évacuée n'est pas à l'équilibre avec les sources radioactives et le refroidissement séculaire. Ce modèle implique un renouvellement intégral

de la lithosphère il y a 500 Ma (Stofan et al., 2005). Plusieurs modèles alternatifs ont été proposés pour le resurfaçage de Vénus et on en distingue deux groupes : les modèles de resurfaçage tectonique et les modèles de resurfaçage magmatique.

Dans les modèles de resurfaçage tectonique, le mécanisme invoqué pour le renouvellement de la surface est un recyclage singulier ou épisodique des couches de la surface de Vénus. Turcotte (1993) propose que le renouvellement de la surface représente un épisode brutal de tectonique des plaques durant lequel l'essentiel, voire la totalité de la lithosphère épaisse plonge dans le manteau profond sous l'effet de son propre poids, laissant place à une nouvelle lithosphère qui s'épaissit par conduction. Tant que le couvercle s'épaissit, sa flottabilité diminue, jusqu'à ce qu'il devienne de nouveau enclin à rentrer en subduction et conduise à un nouveau resurfaçage intégral de la surface (Turcotte, 1993; Weinstein, 1996). Solomatov et Moresi (1996), Fowler et O'Brien (1996) et Moresi et Solomatov (1998) confirment la possibilité d'un tel phénomène à partir d'un régime de convection de type couvercle stagnant en considérant le comportement fragile du couvercle. L'apparition de ce comportement fragile suggère une contrainte issue de la convection du manteau plus faible que dans le cas terrestre, c'est à dire un chauffage radioactif plus important ou une lithosphère significativement plus épaisse (Moresi et Solomatov, 1998). Les coronae sont des structures particulières que Sandwell et Schubert (1992) par exemple, ont interprété comme les analogues des zones de subduction terrestres, preuves d'un resurfaçage tectonique au moins local. Cependant, Smrekar et Stofan (1999) remettent sérieusement en question cette possibilité et proposent que les coronae se soient formées préférentiellement au dessus de panaches ascendants.

Dans les modèles de resurfaçage magmatique, la surface de Vénus est immobile et le resurfaçage s'accomplit par un recouvrement magmatique :

(1) Des instabilités périodiques dans une couche appauvrie sous la croûte provoquent un épisode de fusion globale (Parmentier et Hess, 1992; Herrick et Parmentier, 1994). Dans ce scénario, la compétition entre une stratification de composition due à la formation de la croûte et la flottabilité thermique peut être à l'origine de mélanges épisodiques du manteau.

(2) Le resurfaçage est associé à une transition depuis une convection turbulente vers une convection quasi-statique à cause du refroidissement de la planète. Ce refroidissement serait également à l'origine d'une diminution du nombre de Rayleigh (Arkani-Hamed et al., 1993).

(3) Les modèles de resurfaçage magmatique invoquent également un changement dans le mode de convection depuis une convection dans un manteau avec un faible

contraste de viscosité (Turcotte, 1993; Schubert et al., 1997; Moresi et Solomatov, 1998) vers une convection de type couvercle stagnant (Arkani-Hamed et al., 1993; Arkani-Hamed, 1994; Herrick, 1994; Solomatov et Moresi, 1996; Schubert et al., 1997; Reese et al., 1999). La réduction des contraintes issues de la convection au cours du temps peut avoir transformé la déformation dans le couvercle d'une déformation fragile (tectonique des plaques) à une déformation ductile (très peu ou pas de mouvement de surface). De longues périodes de convection de type couvercle stagnant suivent ce renouvellement magmatique de la surface, s'accompagnant d'une augmentation de l'épaisseur de la lithosphère et de l'apparition éventuelle de convection de petite échelle à la base de la lithosphère, (Parmentier et Hess, 1992; Schubert et al., 1997; Dubuffet et al., 2000; Solomatov et Moresi, 2000).

(4) Enfin, certains modèles de resurfaçage magmatique invoquent un changement de régime depuis une convection dans un manteau stratifié par la présence d'une transition de phase endothermique spinelle-perovskite vers une convection globale. Ces changements récurrents du régime de la convection sont à l'origine de réorganisations globales du manteau dont la dernière aurait eu lieu il y a 500 Ma (Steinbach et Yuen, 1992; Schubert et al., 1997). Cette réorganisation du manteau provoque une augmentation de la température du manteau supérieur, à l'origine de sa fusion globale. De la même manière que pour le changement de régime de convection évoqué précédemment, la transition dans le mode de convection précède de longues périodes de convection de type couvercle stagnant, une augmentation de l'épaisseur de la lithosphère et l'apparition d'instabilités convectives à la base de la lithosphère, (Parmentier et Hess, 1992; Schubert et al., 1997; Dubuffet et al., 2000; Solomatov et Moresi, 2000).

Dans les modèles de resurfaçage magmatique de Reese et al. (1999), l'arrêt de la convection et de la fusion sur Vénus est dû à des températures initiales basses dans le manteau ainsi qu'à un épaissement de la couche conductive. Plus récemment, Reese et al. (2007) proposent que la cessation du resurfaçage magmatique soit le résultat (1) d'une diminution de la température du manteau telle qu'elle devienne inférieure à la température du solidus, ou (2) d'un produit de fusion plus dense qui ne peut plus remonter vers la surface ou enfin (3) d'un arrêt de la convection petite échelle et de l'épaississement du couvercle conducteur qui supprime la fusion.

Les modèles orientés sur la présence de panaches conduisent à des épaisseurs de la lithosphère qui diffèrent. Par exemple, Turcotte (1993), Kucinskis et Turcotte (1994), Phillips (1994), Solomatov et Moresi (1996) et Reese et al. (2007) aboutissent à une épaisseur préférentielle de la lithosphère entre 200 et 400 km (qui peut être

amincit au-dessus des panaches pour atteindre 100 km) alors que Smrekar et Phillips (1991), Smrekar (1994), Schubert et al. (1994) et Nimmo et McKenzie (1996) proposent une épaisseur de la lithosphère plus proche de 100 km. Fondés sur des modèles de convection axisymétrique dans un fluide isovisqueux, Nimmo et McKenzie (1996) proposent que l'épaisseur de la lithosphère ne peut pas être supérieure à 200 km pour respecter les taux de production magmatique, les anomalies de gravité et la topographie associée (comme Smrekar et Parmentier, 1996). Récemment, l'étude de Smrekar et Sotin (2012) en incluant de large variations de viscosité dans un modèle 3D sphérique (*Oedipe*), proposent une épaisseur de la lithosphère dans les mêmes ordres de grandeurs. Ces épaisseurs semblent en accord avec celles présentées par les études fondées sur l'analyse de la topographie et de la gravité qui estiment une épaisseur de lithosphère entre 100 et 300 km (Smrekar et Phillips, 1991; Kiefer et Hager, 1992; Smrekar, 1994; Phillips, 1994; McKenzie et Nimmo, 1997; Barnett et al., 2000; Vezolainen et al., 2004; Anderson et Smrekar, 2006).

En plus de l'analyse des données de topographie et de gravité qui identifient 9 régions susceptibles d'être liées à des panaches mantelliques (Stofan et al., 1995; Simons et al., 1997; Smrekar et Stofan, 1999; Anderson et Smrekar, 2006), les données que procurent le spectromètre VIRTIS sur la sonde Venus Express révèlent que 3 d'entre elles sont associées à une anomalie thermique d'émissivité (Smrekar et al., 2011) et donc à une activité relativement récente. En utilisant *Oedipe*, Smrekar et Sotin (2012) obtiennent un nombre de panaches proche de ce que l'on peut attendre sur Vénus lorsque le chauffage interne est négligé. Cependant, ils en obtiennent trop ou plus du tout lorsqu'ils considèrent un chauffage interne mais ils conservent cependant des épaisseurs de couvercle et des taux de fusion proches de ceux de Vénus.

L'absence d'une dynamo actuelle n'implique pas que Vénus n'a jamais eu de champ magnétique intrinsèque bien que nous n'ayons aucune preuve du contraire non plus. La température de surface sur Vénus est proche, voire supérieure à la température de Curie des principaux matériaux conducteurs des planètes telluriques (excepté peut être la température de la croûte superficielle). Donc s'il existe un champ rémanent crustal, conséquence de l'activité d'une dynamo sur Vénus, il doit être faible (Breuer et Moore, 2007). Les modèles d'évolution thermique supposent qu'il y a eu un moment magnétique sur Vénus du même ordre de grandeur que sur la Terre, pendant les trois premiers milliards d'années de l'histoire de Vénus (Stevenson et al., 1983). Ces auteurs indiquent que le flux de chaleur du noyau décroît de façon monotone avec le temps et il y a 1,5 milliards d'années (sans doute par manque de sources de chaleur), la convection dans le noyau ne peut être maintenue et le champ magnétique s'arrête. Un deuxième modèle (Arkani-Hamed, 1994) suggère que l'ab-

sence de champ magnétique est le résultat de la solidification du noyau externe de Vénus par un mécanisme d'évacuation de la chaleur beaucoup plus efficace que sur Terre. Un scénario alternatif suggère également que le champ magnétique de Vénus s'est arrêté au moment de la transition entre le régime de tectonique des plaques et le régime de couvercle stagnant (Stevenson, 2002). Enfin, Nimmo (2002b) propose qu'en l'absence de tectonique des plaques, le manteau ne peut pas se refroidir rapidement pour entraîner une convection dans le noyau et que la dynamo n'est jamais apparue sur Vénus.

2.5 Transferts thermiques dans les manteaux planétaires

Depuis leur formation, les planètes perdent petit à petit la chaleur accumulée ainsi que celle qu'elles produisent continuellement grâce aux différentes sources que nous avons explicité précédemment. Nous allons donc préciser maintenant les mécanismes d'évacuation de la chaleur qui conduisent à leur état actuel. Ils sont au nombre de trois : la conduction, la convection et la radiation. Le troisième étant négligeable devant les deux autres, nous ne le considérerons pas ici.

2.5.1 Conduction

Pour étudier les phénomènes de transfert thermique dans un fluide, une expérience simple consiste à placer un fluide dilatable entre deux plaques horizontales distantes de d et maintenues à des températures imposées T_0 au sommet et $T_0 + \Delta T$ à la base. Dans le régime le plus simple de transfert thermique, la chaleur est transmise entre les deux plaques par conduction pure. L'échange de chaleur se fait sans déplacement de matière, mais par une agitation moléculaire. Le flux de chaleur q_{cond} est alors proportionnel au gradient de température ∇T et l'on écrit :

$$q_{cond} = -k\nabla T, \quad (2.5)$$

k est la conductivité thermique du fluide. Cette équation conduit à une évaluation instantanée des flux de chaleur entrant et sortant d'un volume infinitésimal. En considérant k constante, on obtient ainsi l'équation thermique suivante :

$$k\nabla^2 T + \rho H = 0, \quad (2.6)$$

avec ρ la masse volumique et H le taux de production de chaleur par unité de masse. Puisque l'on parle de phénomène de transfert de chaleur à l'échelle de planètes depuis

leur formation jusqu'à aujourd'hui, l'équation 2.6 peut être transformée pour prendre en compte cette évolution temporelle. La capacité calorifique C_p , représente l'énergie qu'il est nécessaire d'apporter à un élément de masse unitaire pour augmenter sa température d'un degré. Donc, une fraction de matériau d'épaisseur dz requiert un flux de chaleur par unité de temps donné par $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dz$ pour maintenir un changement de température à un taux égal à $\partial T / \partial t$. Donc l'équation 2.6 devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \rho H, \quad (2.7)$$

soit,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{H}{C_p}, \quad (2.8)$$

où κ , la diffusivité thermique est égale à $k/\rho C_p$ et t le temps. κ varie avec la nature des milieux considérés et pour les silicates, κ est de l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2.5.2 Convection

Dans un cas un peu plus complexe, le refroidissement par la surface d'un fluide chauffé par la base (ou par l'intérieur) induit un transfert de chaleur impliquant des mouvements à l'intérieur du milieu concerné. À cause de la dilatation thermique, le fluide est alors plus dense en haut qu'en bas, situation d'autant plus instable que ΔT (différence de température entre la base et le sommet) est grande. Les forces de flottabilité vont alors augmenter avec la température et quand elles deviennent supérieures aux forces qui s'opposent au mouvement (dissipation visqueuse et thermique), la convection thermique s'engage. La mise en mouvement nécessite donc le dépassement d'un seuil.

2.5.2.1 Équations de la convection

La description de la dynamique du manteau repose sur les équations de la mécanique des fluides. Au-delà d'un certain formalisme mathématique, il est intéressant d'analyser les particularités de la dynamique du fluide très visqueux qu'est le manteau. Dans l'étude qui nous intéresse ici, l'approximation de Boussinesq est adoptée, c'est à dire que les paramètres α , k , g et C_p sont constants et indépendants de la température et de la pression. Les variations de masses volumiques dues à la température sont assez faibles pour que l'on puisse les négliger, sauf dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement où les termes faisant intervenir la masse volumique peuvent être importants. La variation de masse volumique, $\delta\rho$, ne dépend alors que de la température et on considère : $\delta\rho = -\rho_0\alpha(T - T_0)$, avec α la diffusivité thermique. De plus, afin de simplifier les équations, dans l'optique d'une résolution numérique simple et efficace, on considérera un nombre de Prandtl infini

(que nous développerons par la suite). La description mathématique complète du phénomène de convection est régi par les trois lois de conservation de la dynamique des fluides :

- L'équation de continuité ou de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.9)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide. Cette première équation décrit comment la masse volumique ρ varie au cours du temps de façon à satisfaire la conservation de la masse lors du transport par un champ de vitesse \mathbf{v} . Dans le cas d'un fluide incompressible (ce qui est supposé ici), l'équation de conservation de la masse devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.10)$$

- L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \delta \rho \mathbf{g}, \quad (2.11)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes liés au cisaillement, \mathbf{g} la gravité et D la dérivée particulaire telle que $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ peut être décomposée en une pression dynamique p' et une partie déviatorique $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ de telle sorte que $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$. En négligeant les termes inertiels et dans l'approximation de Boussinesq, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.11) devient :

$$-\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 \alpha (T - T_0) \mathbf{g} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (2.12)$$

- Enfin, la troisième équation est celle de la conservation de l'énergie :

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{H}{C_p}, \quad (2.13)$$

En modélisation numérique, la résolution des équations de conservation (Équations 2.10, 2.12 et 2.13) utilise leur forme adimensionnée. Le principe d'adimensionnement présente deux intérêts majeurs : (1) il permet de réduire la dynamique des variables numériques par leur normalisation (il évite aux variables d'atteindre des valeurs trop faibles ou trop élevées rendant la résolution numérique moins stable) et (2) il permet l'application du principe de similitude. La résolution des équations peut être faite pour des corps de taille très différentes par exemple. Les facteurs d'échelle utilisés ici sont les suivants :

- $t = \frac{d^2}{\kappa}$ échelle de temps diffusif.
- d l'échelle de longueur. On utilisera ici la taille de la couche convective.
- $\Delta T = T_{ref} - T_{surf}$ avec T_{ref} la température de référence (ici à la base de la couche convective) et T_{surf} la température de surface.

- η_0 la viscosité à la température de référence.
- $H = \frac{d^2}{\kappa C_p \Delta T}$ le chauffage interne adimensionné.

Les équations de conservation deviennent alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \eta \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] - \nabla p' + Ra \mathbf{T} \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} - \nabla^2 \mathbf{T} - H = 0, \quad (2.16)$$

avec $\boldsymbol{\gamma}$ un vecteur radial unitaire et Ra le nombre de Rayleigh.

2.5.2.2 Nombres caractéristiques

Le nombre de Rayleigh exprime la vigueur de la convection. La convection démarre lorsque la diffusion thermique et la viscosité deviennent suffisamment faibles comparées à la force de flottabilité. Cet instant correspond à une valeur seuil du nombre de Rayleigh que l'on appelle le nombre de Rayleigh critique (Ra_c). Dans le cas où la viscosité varie, il y a plusieurs nombres de Rayleigh, selon l'endroit où on le calcule. De façon générale, le nombre de Rayleigh s'exprime ainsi :

$$Ra = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T d^3}{\kappa \eta}, \quad (2.17)$$

avec ρ_0 la masse volumique de référence.

Dans le cas d'un fluide dont la source de chaleur est interne, le nombre de Rayleigh est un peu différent et on obtient le nombre de Rayleigh-Robert :

$$Ra_H = \frac{\alpha \rho_0 H g d^5}{k \kappa \eta}. \quad (2.18)$$

Le nombre de Nusselt rend compte de l'efficacité de la convection par rapport à la conduction. Ainsi, si q_{cond} est le flux de chaleur diffusif que l'on aurait si on n'avait que de la conduction et q_{surf} le flux de chaleur en surface, le nombre de Nusselt est défini comme :

$$Nu = \frac{q_{surf}}{q_{cond}}. \quad (2.19)$$

Le rapport des temps caractéristiques de la diffusion thermique et de la diffusion de la quantité de mouvement introduit une nouvelle quantité adimensionnée, le nombre de Prandtl (Pr) :

$$Pr = \frac{\eta}{\rho \kappa} = \frac{\eta C_p}{\kappa}. \quad (2.20)$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques par rapport celle à des phénomènes dynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé

indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible (exemple : métaux liquides) indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température. Dans le cas d'un manteau silicaté, en supposant $\rho = 3300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\eta = 10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ et $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient $Pr = 10^{23}$.

2.5.2.3 Régimes de convection

Dans les manteaux planétaires, la viscosité est fortement dépendante de la température (et dans une moindre mesure de la pression, de la taille de grain, de la teneur en eau, ...). La conséquence majeure de cette dépendance en température est l'apparition d'une région de forte viscosité en surface, où les températures sont relativement basses. Cette couche de viscosité élevée peut participer de façon très lente et difficile à la convection, on parle d'un couvercle mobile (ou *sluggish lid*) ou elle peut être complètement "gelée" pour former un couvercle immobile (couvercle stagnant ou *stagnant lid*). La distinction entre les deux modes de convection de la couche supérieure visqueuse dépend de l'amplitude du contraste de viscosité, donc de la variation de température le long de la couche convective et du nombre de Rayleigh. Il existe un troisième mode de convection dit à faible contraste de viscosité, similaire à une convection dans un fluide où la viscosité ne dépend pas de la température.

Comme je l'ai expliqué dans les sections 2.3 et 2.4 le régime de convection de type couvercle rigide est celui qui semble le plus représentatif de la convection récente sur Mars et Vénus. La différence avec le système de convection terrestre réside dans l'apparition de mécanismes de déformation cassants dans la lithosphère de cette dernière, permettant la rupture de ce couvercle et la formation de plaques tectoniques.

Les transitions entre les différents régimes de convection dépendent de la condition imposée sur le bord supérieur (rigide ou libre). Ainsi, dans le cas d'une surface rigide, les expériences analogiques de Davaille et Jaupart (1993) avec des fluides dont la viscosité dépend de la température révèlent qu'un saut de viscosité de 100 entre la base et la surface de leur boîte est suffisant pour passer d'un régime à faible contraste de viscosité à un régime de couvercle. En utilisant des modèles numériques de convection 2D et 3D avec une condition de surface de bord rigide et un chauffage interne, Grasset et Parmentier (1998) ont montré que la transition entre le régime de faible contraste de viscosité et un régime de couvercle pouvait avoir lieu pour des nombres de Rayleigh relativement faibles ($10^3 < Ra < 10^4$). Ils confirment également que cette transition peut apparaître dans un fluide ayant un contraste de viscosité faible.

Dans le cas d'une condition de surface libre, les différents régimes peuvent être

distingués en fonction du contraste de viscosité, du nombre de Rayleigh à la base du système et de la rhéologie imposée (newtonienne ou non-newtonienne) (en modélisation numérique 2D : Solomatov, 1995) (Figure 2.2). Dans le cas d'une rhéologie Newtonienne, pour un rapport de viscosité faible ($r_\eta < 10^3$) et pour des nombres de Rayleigh suffisants, la totalité de la couche supérieure froide est encline à participer au phénomène de convection (les vitesses sont non-nulles dans la couche limite supérieure), on parle d'un régime à faible contraste de viscosité (Régime I de la Figure 2.2). Ce premier mode de convection est similaire à un mode de convection où la viscosité ne dépend pas de la température. Lorsque le contraste augmente ($10^3 < r_\eta < 10^4$) la couche supérieure devient progressivement plus visqueuse et participe de moins en moins à la convection sous-jacente. Un régime de couvercle mobile se met en place (Régime II de la Figure 2.2). Si le contraste de viscosité augmente encore ($r_\eta > 10^4$), la partie supérieure du système voit se développer un couvercle rigide qui ne participe plus du tout à la convection (Régime III de la Figure 2.2). Cependant, Deschamps (1997) suggère que la transition entre le régime transitoire et le régime de couvercle (couvercle stagnant) apparaît pour un contraste de viscosité de 10^3 et un nombre de Rayleigh suffisamment faible. Dans la même étude, lorsque le nombre de Rayleigh augmente, la transition entre ces deux régimes de convection n'apparaît que pour des contrastes de viscosité élevés. Dans le cas d'une rhéologie non-Newtonienne, la même analyse peut être faite, les contrastes de viscosité nécessaires aux transitions de régimes de convection sont légèrement plus élevés (Figure 2.2).

En plus d'une dépendance au contraste de viscosité régissant l'ensemble de la zone concernée, les différents régimes de convection présentent des structures de longueurs d'onde différentes (Schubert et al., 2001). La convection dans un régime de faible contraste de viscosité présente des structures de longueur d'onde horizontale du même ordre de grandeur que l'épaisseur convective. Le régime transitoire est à l'origine de structures convectives de longueurs d'onde plus grandes. Enfin, le régime de couvercle rigide produit des longueurs d'onde horizontales plus petites que l'épaisseur de la couche convective. La morphologie des structures convectives diffèrent également d'un régime de convection à un autre (Schubert et al., 2001).

2.6 La modélisation numérique de la convection mantellique

L'utilisation d'une géométrie 3D sphérique pour l'étude de la convection dans les planètes se passe de justifications par la nature même de tels objets. Néanmoins, l'utilisation de cette géométrie dans un contexte réaliste de convection vigoureuse

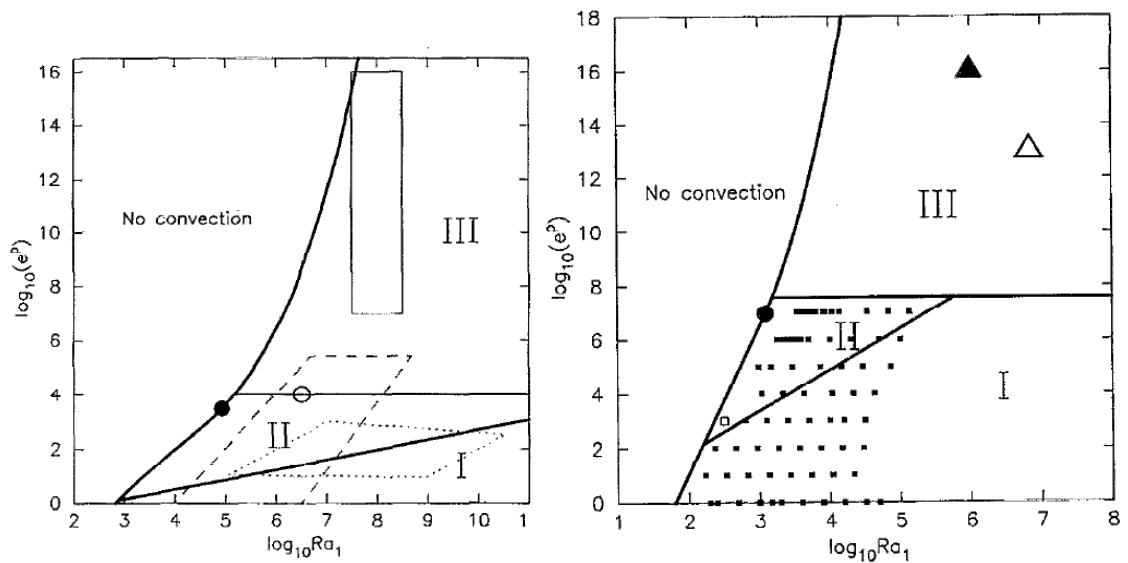


FIG. 2.2 – Régimes de convection définis en fonction du nombre de Rayleigh à la base de la boîte ($\log_{10} Ra_1$) et du contraste de viscosité ($\log_{10} e^p$) (Solomatov, 1995). I : le régime de faible contraste de viscosité. II : Régime de couvercle mobile (ou *sluggish regime*) et III : le régime de couvercle stagnant (ou *stagnant lid*). À gauche, cas d'une rhéologie Newtonienne, les contours en pointillés représentent le domaine d'étude de Hansen et Yuen (1993), les tiretés celui de Christensen (1984) et le domaine en trait plein correspond au domaine supposé pour le manteau terrestre. À droite, le cas d'une rhéologie non-Newtonienne. Les carrés noirs représentent les résultats de l'étude de Solomatov (1995) et les triangles représentent le comportement supposé d'un manteau terrestre constitué d'olivine hydratée (triangle vide) ou d'olivine sèche (triangle plein).

se révèle coûteuse en temps de calcul et d'autres géométries sont encore largement utilisées. Il est pourtant clair que la dynamique d'une planète est une dynamique 3D et que l'étude de la topographie dynamique, des anomalies de gravité et du géoïde ne saurait s'affranchir de l'évaluation des anomalies de masses dans un domaine 3D.

2.6.1 Modèles numériques 3D sphériques

Les équations de conservation requièrent généralement une résolution numérique pour trois raisons : (1) dans l'équation de conservation de l'énergie (Équation 2.13), l'expression de l'advection à travers le couplage entre la température T et la vitesse \mathbf{v} est non-linéaire, (2) la relation qui relie la contrainte et le taux de déformation n'est pas linéaire et la viscosité associée peut dépendre également de la contrainte et du taux de déformation (ce n'est pas le cas ici) (3) Même pour l'écoulement d'un fluide avec une rhéologie linéaire, la variabilité spatiale de la viscosité peut rendre difficile une résolution analytique (Zhong et al., 2007).

Dans le cas d'un traitement explicite de l'évolution temporelle, les différentes étapes de résolution peuvent être résumées de la façon suivante : (1) pour un pas de temps donné, on résout les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour des champs de flottabilité et de viscosité donnés (problème instantané de l'écoulement de Stokes). (2) On calcule la température du pas de temps suivant en résolvant l'équation de conservation de l'énergie en utilisant le nouveau champ de vitesses. (3) On réitère ce processus à chaque pas de temps en revenant à chaque fois à l'étape (1).

L'une des difficultés de résolution de ces équations dans le domaine 3D sphériques réside dans la représentation des pôles. Une simple discrétisation de la sphère selon des parallèles et des méridiens induit la création de singularités aux pôles (les éléments rectangulaires à l'équateur deviennent triangulaires aux pôles) (Figure 2.3).

Les premiers programmes de convection 3D ont vu le jour dans les années 1980 avec le programme de Glatzmaier (1988) utilisant la méthode spectrale pour la résolution des équations. Fondé sur la méthode des éléments finis et une viscosité constante, le programme *Terra* de Baumgardner (1985) représente une petite révolution dans le monde de la modélisation numérique de la convection. Il utilise un découpage icosaédrique de la sphère (Figure 2.4a). Dix ans plus tard et sur la base du programme précédent, Hsui et al. (1995) développent un programme en 3D sphérique cette fois-ci avec une viscosité variable. Dans les années 2000, Zhong et al. (2000) développent *CITCOMs* en 3D sphérique (Figure 2.4b), fondé sur le code 2D cartésien de Moresi et Solomatov (1995) *CITCOM*. Plus récemment sont apparus : le code de Yoshida et Kageyama (2006) utilisant la grille Ying-Yang (Kageyama et Sato, 2004, Figure 2.4c) et *Oedipe* de Choblet (2005) avec un maillage encore diffé-



FIG. 2.3 – Représentation classique du maillage d'une sphère selon méridiens et parallèles. On remarque la particularité d'un tel maillage au niveau des pôles, la surface de chaque maille diminue depuis l'équateur jusqu'au pôle, jusqu'à ce que les rectangles de l'équateur deviennent des triangles aux pôles.

rent de la sphère qui devient alors une sphère-cubique (et que nous allons développer par la suite). Et enfin, le plus récent, le modèle *GAIA* de Huettig et Stemmer (2008) découpe la sphère selon des cellules de Voronoi (Figure 2.4d).

Tous ces maillages s'affranchissent des problèmes de représentation des pôles. Cependant, les maillages de type "Ying-Yang", celui de *CITCOMs* et *Oedipe* (comme nous le verrons par la suite) présentent l'inconvénient d'avoir des blocs séparés, impliquant une discontinuité aux niveaux des frontières entre deux cellules et nécessitant une interpolation. Le maillage continu des codes de Baumgardner (1985) et de Huettig et Stemmer (2008) permet de se défaire de la nécessité d'interpolation et la résolution des équations se fait dans l'ensemble du domaine sphérique. En revanche, ce maillage continu ne permet pas la résolution numérique des équations sur différents processeurs séparés ou pour un bloc unique (réduisant le coût de calcul comme le peuvent les programmes précédents).

2.6.2 *Oedipe* : Outil d'Étude de la Dynamique Interne des Planètes et de leur Évolution

Oedipe est un programme écrit en Fortran77 qui résout les équations de conservation de la dynamique des fluides à viscosité variable, en 3D et dans une coquille sphérique. Comme son nom l'indique, il est dédié à l'étude de l'évolution des intérieurs planétaires. Ce programme est entièrement parallélisé, utilise une méthode des volumes finis ainsi qu'une méthode multi-grille, mais sa particularité (qui est aussi une difficulté supplémentaire d'implémentation) réside dans un maillage fondé sur la sphère-cubique.

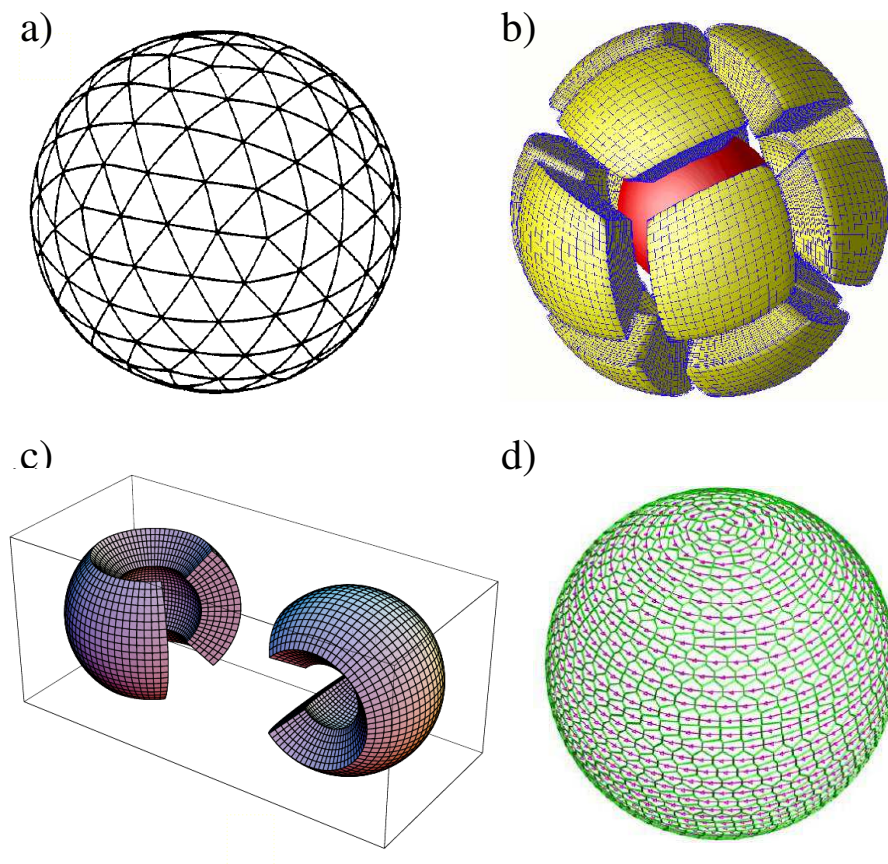


FIG. 2.4 – Représentation des différents maillages d'une sphère utilisés par les programmes de modélisation de la dynamique des fluides. a) Maillage utilisé dans *Terra* par Baumgardner (1985) puis Hsui et al. (1995) avec un découpage en icosaèdres. b) Maillage du programme *CITCOMs*, découpant la sphère en 12 blocs contenant des cellules quasi-rectangulaires (Zhong et al., 2000). c) Maillage en "Ying-Yang" de Kageyama et Sato (2004) découpant la sphère comme une balle de tennis (en deux blocs identiques). d) Maillage de *GAIA* utilisant les cellules de Voronoi (Huettig et Stemmer, 2008).

2.6.2.1 Maillage et système de coordonnées 3D

Ce maillage singulier d'abord proposé par Ronchi et al. (1996) est obtenu par la projection des faces d'un cube sur la surface d'une sphère découpant celle-ci en 6 blocs parfaitement identiques (Figure 2.5). Le nouveau repère ainsi créé par la projection du cube sur la sphère n'est pas orthogonale puisque les grands cercles interceptent de manière orthogonale uniquement l'équateur (Figure 2.6), et on définit les variables angulaires ξ et η , comprises entre $-\pi/4$ et $\pi/4$. Ce maillage est ensuite répété à un rayon $r - \Delta r$ afin de créer un ensemble de sphères concentriques de même discrétisation angulaire et séparées d'une distance radiale Δr . Sauf indication contraire, nos simulations utilisent un maillage de 64 cellules par bloc dans chacune des directions de l'espace soit un maillage total de $6 \times 64 \times 64 \times 64$.

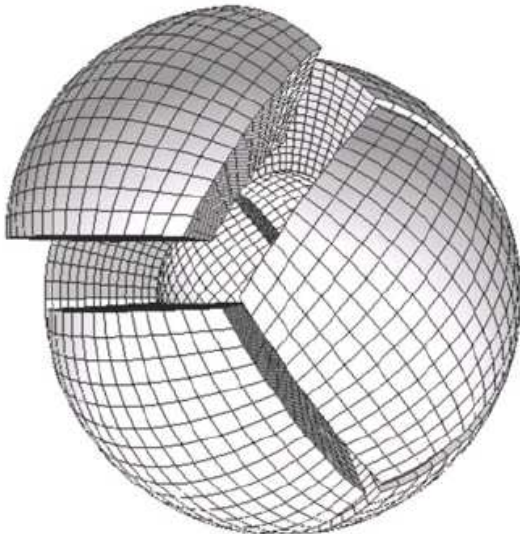


FIG. 2.5 – Représentation du maillage complet des six blocs "cubiques".

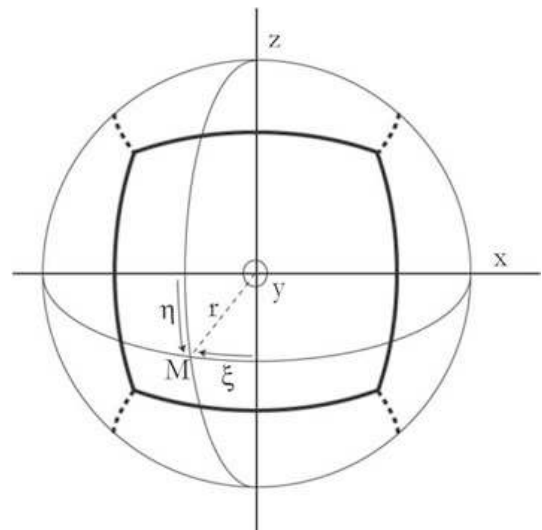


FIG. 2.6 – Représentation de la projection d'un cube sur la sphère avec le système de coordonnées r, ξ, η . Le point M sur la sphère de rayon r est référencé par les coordonnées angulaires ξ et η associés à deux grands cercles correspondant. La région étudiée représentée par les lignes solides constitue $\frac{1}{6}$ de la sphère. Elle est définie par les gammes suivantes de coordonnées pour ξ et pour η : $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Les coordonnées du système cartésien (x, y, z) sont également représentées comme référence.

Ce maillage particulier présente de nombreux avantages : (1) La première étant bien sûr de s'affranchir totalement des singularités polaires précédemment décrites (Figure 2.3). (2) La grille physique définie est assez proche d'une grille uniforme

(Figure 2.5). Les éléments des bords de blocs ne sont pas sensiblement différents de ceux du centre du bloc. (3) Par sa stricte similarité d'un bloc à l'autre, le modèle ainsi défini est parallélisable simplement. (4) D'un bloc à l'autre, la forme générale des équations de conservation est préservée.

Par la projection des faces du cube vers la sphère les coordonnées se complexifient, on introduit alors des variables auxiliaires pour simplifier la notation des opérateurs différentiels en fonction des nouvelles coordonnées, comme le proposent Ronchi et al. (1996) :

$$\begin{cases} X = \tan(\xi) = \frac{y}{x} \\ Y = \tan(\eta) = \frac{z}{x} \\ \delta = 1 + X^2 + Y^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \\ C = \sqrt{1 + X^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ D = \sqrt{1 + Y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{x}\right)^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

2.6.2.2 Réécriture des équations dans le système de coordonnées sphériques

Les équations de la dynamique des fluides (Équations 2.14 à 2.16) avec un nombre de Prandtl infini et en approximation de Boussinesq doivent être ré-écrites dans le nouveau système de coordonnées de la sphère-cubique. Ainsi, l'équation de conservation de la masse après une projection dans le nouveau système de coordonnées devient (cf. Choblet et al., 2007) :

$$\frac{1}{r^2} (r^2 V^r)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{V^\xi}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{V^\eta}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} = 0. \quad (2.22)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :
suivant r ,

$$p_{,r} = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{rr})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\tau^{r\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\tau^{r\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} - RaT, \quad (2.23)$$

suivant ξ ,

$$\frac{1}{r} \left(\frac{XY}{D} p_{,\eta} + D p_{,\xi} \right) = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{\xi r})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\tau^{\xi\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD} \left(\frac{\tau^{\xi\eta}}{D\delta^{1/2}} \right)_{,\eta}, \quad (2.24)$$

suivant η ,

$$\frac{1}{r} \left(\frac{XY}{C} p_{,\xi} + C p_{,\eta} \right) = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{\eta r})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\tau^{\eta\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD} \left(\frac{\tau^{\eta\xi}}{C\delta^{1/2}} \right)_{,\xi}, \quad (2.25)$$

avec V^r , V^ξ et V^η les composantes en coordonnées contravariantes du vecteur vitesse. Les composants contravariantes $\tau^{\bullet\bullet}$ de la partie déviatorique du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\tau^{rr} = 2\mu V_{,r}^r, \quad (2.26)$$

$$\tau^{r\xi} = \mu \left[r \left(\frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{rD} V_{,\eta}^r \right], \quad (2.27)$$

$$\tau^{r\eta} = \mu \left[r \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{rC} V_{,\xi}^r \right], \quad (2.28)$$

$$\tau^{\xi\xi} = 2\mu \left[\frac{XY}{r\delta^{1/2}} \left(\frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^\xi + \frac{C^2 D^2}{r\delta} V^r - \frac{CYD^2}{r\delta} V^\eta \right], \quad (2.29)$$

$$\tau^{\eta\xi} = \mu \left[\frac{CD}{r\delta^{1/2}} \left(\frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{CD}{r\delta^{1/2}} \left(\frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} - \frac{XYCD}{\delta} V_{,r}^r \right], \quad (2.30)$$

$$\tau^{\eta\eta} = 2\mu \left[\frac{XY}{r\delta^{1/2}} \left(\frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^\eta + \frac{C^2 D^2}{r\delta} V^r - \frac{DXC^2}{r\delta} V^\xi \right]. \quad (2.31)$$

Enfin, le schéma d'advection qui décrit l'équation de conservation de l'énergie est donc :

$$\begin{aligned} T_{,t} + T_{,r} V^r + \frac{\delta}{rDC^2} T_{,\xi} V^\xi + \frac{\delta}{rCD^2} T_{,\eta} V^\eta = \\ \frac{1}{r^2} (r^2 T_{,r})_{,r} + \frac{\delta}{r^2} \left[\frac{T_{,\xi\xi}}{C^2} + \frac{T_{,\eta\eta}}{D^2} + \frac{2XYT_{,\xi\eta}}{C^2 D^2} \right] + h. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Oedipe utilise la méthode des volumes finis pour résoudre ces équations. L'utilisation de cette méthode est motivée par la nécessité d'évaluer des différentielles et elle est fondée sur la discrétisation locale des opérateurs de dérivation (gradient, rotationnel, ...). Ainsi, la discrétisation des équations différentielles résulte de l'intégration de l'équation dans un volume de contrôle ou une cellule de contrôle ainsi que de l'approximation des opérateurs différentiels d'ordre réduit aux frontières de cellule. Vous trouverez en Annexe de ce manuscrit le détail de la discrétisation des trois équations de conservation dans une cellule d'*Oedipe*.

2.6.2.3 Méthode multigrille

La résolution des équations de conservation de la masse et du mouvement est découplée de la résolution de l'équation de conservation de l'énergie. De cette façon, le champ de vitesse calculé au temps t est utilisé dans l'advection de la chaleur pour

le calcul du champ de température au temps $t + 1$ comme évoqué en introduction de la Section 2.6.

La résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement utilise une méthode FAS-multigrille (*Full Approximation Storage* multigrille). La méthode multigrille fonctionne par la définition du problème sur différentes échelles : un système de plusieurs grilles qui sont liées les unes aux autres par un noeud commun. La solution progresse sur toutes les grilles en même temps que chaque grille élimine les erreurs à différentes échelle. Il s'agit de lisser les plus grandes longueurs d'onde de l'erreur (issue de l'approximation de la solution) sur des grilles grossières (moins coûteuses en temps de calcul) avant de transmettre la solution ainsi approchée à une grille plus fine (plus coûteuse en temps de calcul mais plus précise).

La méthode de relaxation appliquée dans *Oedipe*, qui réduit l'erreur à chaque niveau courant (chaque taille de grille), est celle de Gauss-Seidel.

Les opérateurs de transfert qui gèrent la restriction ou l'interpolation (passage d'une grille fine à une grille plus grosse et inversement) sont linéaires. Les cycles utilisés dans *Oedipe* sont de type "V" (en référence aux allers-retours de la grille la plus grossière vers la plus fine en passant par toutes les grilles intermédiaires).

2.6.2.4 Parallélisation

Puisque les 6 blocs issus de la projection des faces du cube vers la sphère sont parfaitement identiques, la parallélisation devient alors possible et facilite la résolution du système par une répartition des tâches sur plusieurs processeurs. Ce découpage peut aussi intervenir au sein d'un seul bloc. Ainsi sur chaque bloc, on désigne un nombre de processeurs dans chacune des trois directions r, η, ξ . *Oedipe* utilise les bibliothèques MPI (*Message Passing Interface*) pour la gestion de la communication des variables sur les bords des 6 blocs ou encore sur les bords virtuels créés par le découpage d'un bloc par plusieurs processeurs.

2.7 Modélisation de la lithosphère élastique

2.7.1 Le modèle de flexure élastique - approximation de couche mince

Bien que la lithosphère ait un comportement rhéologique différent sur l'intégralité de son épaisseur, il s'agit ici de se concentrer sur sa partie élastique. La plupart des études qui ont été présentées dans le premier chapitre, et qui ont pour but de

déterminer l'épaisseur élastique de la lithosphère sur les planètes, utilisent le modèle de flexure élastique par approximation de couche mince (*Thin Elastic Shell*).

Ce modèle utilise la flexure de la lithosphère lorsqu'une charge est appliquée (en surface ou en profondeur) pour calculer l'épaisseur de la plaque en flexion (qui correspond à l'épaisseur élastique de la lithosphère - d_e). Inversement, connaissant l'épaisseur élastique de la lithosphère ainsi que l'amplitude d'un relief, la méthode d'approximation de couche mince permet également de quantifier le taux de soutien de ce relief par flexure élastique. Ce concept est fondé sur deux approximations fortes : cette plaque est considérée très fine par rapport à sa longueur ($d_e \ll L$) et la profondeur qu'elle atteint après flexion est très faible ($w \ll L$).

Une fois l'épaisseur élastique déterminée, on peut s'intéresser à la compensation créée par cette partie élastique de la lithosphère. Par exemple, lorsqu'une contrainte visqueuse associée à la convection dans le manteau est appliquée à la base d'une lithosphère élastique, seule une partie de cette contrainte sera transmise en surface pour créer une topographie, l'autre partie sera relaxée élastiquement. De la même manière, une charge en surface suffisamment importante implique un soutien par flexure élastique de la lithosphère. Turcotte et al. (1981) proposent de déterminer un degré de compensation élastique en définissant dans un premier temps le paramètre de rigidité d'une plaque lorsque la résistance à la flexure est négligée (τ) ainsi que le paramètre qui mesure la résistance de la plaque à la flexure (χ) :

$$\tau = \frac{Ed_e}{R^2g(\rho_m - \rho_c)}, \quad (2.33)$$

$$\chi = \frac{D}{R^4g(\rho_m - \rho_c)} = \frac{\tau}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{d_e}{R}\right)^2, \quad (2.34)$$

avec E le module de Young, R le rayon de la plaque, ρ_m la masse volumique du manteau, ρ_c la masse volumique de la croûte, D le module de rigidité et ν le coefficient de Poisson. Ils obtiennent ensuite un degré de compensation, sorte de coefficient de filtrage qui dépend du degré d'harmonique ℓ , des paramètres internes de la lithosphère τ et χ et qui prend en compte l'auto-gravitation (*self-gravitation*, qui consiste à considérer les perturbations du champ de gravité par les anomalies de masses internes que nous discuterons dans le Chapitre 4) :

$$\begin{aligned} C_\ell^{d_e} &= \left[1 - \frac{3\rho_m}{(2\ell + 1)\bar{\rho}} \right] \left[-\frac{3\rho_m}{(2\ell + 1)\bar{\rho}} \right. \\ &+ \frac{\chi [\ell^3 (\ell + 1)^3 - 4\ell^2 (\ell + 1)^2]}{\ell (\ell + 1) - (1 - \nu)} \\ &\left. + \frac{\tau [\ell (\ell + 1) - 2] + \ell (\ell + 1) - (1 - \nu)}{\ell (\ell + 1) - (1 - \nu)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec $\bar{\rho}$ la masse volumique moyenne du corps considéré.

C'est le coefficient qui a été utilisé pour le calcul de l'admittance théorique d'un relief entièrement compensé par flexure élastique (Section 1.1.4.3). Si la lithosphère est entièrement flexible : $\tau \rightarrow 0$ et $\chi \rightarrow 0$ alors $C_\ell^{de} \rightarrow 1$ et la compensation correspond à une compensation isostatique de type Airy. Au contraire, si la lithosphère est entièrement rigide, $\tau \rightarrow \infty$ et $\chi \rightarrow \infty$ alors $C_\ell^{de} \rightarrow 0$ et il n'y a pas de compensation par des processus lithosphériques (pour de plus amples détails le lecteur intéressé pourra se reporter à Turcotte et al., 1981 et Turcotte et Schubert, 1982)

2.7.2 Modèle de déformation de la lithosphère élastique

Afin de prendre en compte la compensation élastique d'un relief par la lithosphère, j'ai construit un modèle de déformation élastique de la lithosphère. Ce programme est écrit en Fortran77 et résout les équations de la déformation par une méthode semi-spectrale, dans un domaine radialement discrétisé. L'élaboration du modèle de déformation élastique de la lithosphère se dissocie en trois grands axes :

- (1) Décomposition en harmoniques sphériques des grandeurs ($\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{u}) et des opérateurs mathématiques classiques (∇ , $\nabla \cdot$ et $\cdot \mathbf{e}_r$).
- (2) Décomposition des équations de la déformation en harmoniques sphériques et formation d'un système d'équations linéaires.
- (3) Chaque couche du domaine créée par discrétisation radiale est caractérisée par un système de 6 équations linéaires de la forme : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode spectrale présente l'avantage d'être beaucoup plus précise que la méthode des différences finies. Même dans le cas d'une résolution radiale fine, elle reste très rentable en temps de calcul. En revanche, la méthode spectrale ne fonctionne que dans le cas de matériaux à propriétés constantes (ou dépendantes de la profondeur mais dans une géométrie simple) et elle ne permet pas le traitement de problèmes de déformation dans le cas d'une variation latérale de viscosité pour étudier la déformation visqueuse ou viscoélastique. La méthode spectrale est également moins aisément parallélisable à cause des fonctions harmoniques sphériques qui sont des fonctions globales. Quoiqu'il en soit, la rapidité de résolution du système d'équations ne justifie pas une parallélisation.

2.7.2.1 Équations de la déformation

Les équations gouvernant les petites déformations pour un corps élastique incompressible sont résolues en considérant certaines approximations justifiées soit par les propriétés des intérieurs planétaires soit par les limites de la méthode spectrale : le module de cisaillement, l'accélération de gravité et l'épaisseur élastique sont constants et imposés *a priori*. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la rhéologie sont donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{D} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad (2.38)$$

avec \mathbf{u} le vecteur déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{D} la partie déviatorique du tenseur des contraintes, μ le module de cisaillement, ρ la masse volumique, \mathbf{g} l'accélération de gravité et \bullet^T le transposé de \bullet . Dans nos simulation, \mathbf{g} est considéré constant, il n'y a donc pas lieu de le décomposer comme un vecteur. Toutes les autres variables $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{u} ainsi que les opérateurs mathématiques ∇ , les produits scalaires, vectoriels et tensoriels sont réécrits dans le domaine spectral.

Contrairement à la topographie, la gravité et le géoïde qui sont des scalaires (Section 1.1.1), le déplacement \mathbf{u} est un vecteur, et la contrainte déviatorique \mathbf{D} est un tenseur. Ils s'expriment donc tous les deux dans des bases d'harmoniques sphériques différentes de $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$, la fonction harmonique sphérique scalaire. On distingue alors deux fonctions harmoniques sphériques supplémentaires : les fonctions harmoniques sphériques vectorielles $\mathbf{Y}_{\ell m}^k$ et les fonctions harmoniques sphériques tensorielles $\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}$. Si l'harmonique sphérique scalaire est le résultat du produit de la base orthogonale $e^{im\varphi}$ et des fonctions de Legendre associées normalisées, les fonctions harmoniques sphériques vectorielles et tensorielles nécessitent l'intervention de deux nouvelles bases \mathbf{e}_μ et $\mathbf{e}_{n\lambda}$ respectivement (Voir en Annexe B la formation de ces nouvelles bases, dans Jones, 1985 ou encore Varshalovich et al., 1988).

2.7.2.2 Décomposition spectrale des grandeurs - étape 1

Décomposition des vecteurs en harmoniques sphériques - La décomposition des vecteurs en harmoniques sphériques fait intervenir la fonction harmonique sphérique vectorielle :

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^k(\theta, \varphi) = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-k}^k C_{k\nu 1\mu}^{\ell m} Y_{k\nu}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\mu, \quad (2.39)$$

avec $C_{k\nu\lambda\mu}^{\ell m}$ les coefficients de Clebsh-Gordan (voir Varshalovich et al., 1988). Cette fonction obéit également à la loi d'orthonormalité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{Y}_{\ell_1 m_1}^{k_1}(\theta, \varphi) [\mathbf{Y}_{\ell_2 m_2}^{k_2}(\theta, \varphi)]^* \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{k_1 k_2}. \quad (2.40)$$

Ainsi, le vecteur déplacement se décompose en harmoniques sphériques de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{k=|\ell-1|}^{|\ell+1|} u_{\ell m}^k(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^k(\theta, \varphi). \quad (2.41)$$

La partie sphéroïdale du vecteur est décrite par les fonctions harmoniques sphériques vectorielles $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}$ et $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}$ et la partie toroïdale par $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell}$. Dans notre cas d'étude, puisqu'il n'y a pas de variations latérales des propriétés élastiques de la lithosphère, la partie toroïdale ne contribue pas à la déformation radiale et n'est donc pas prise en compte dans nos calculs ($\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell} = 0$). Ainsi on peut écrire la décomposition du vecteur déplacement de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [u_{\ell m}^{\ell-1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi) + u_{\ell m}^{\ell+1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)]. \quad (2.42)$$

Décomposition des tenseurs en harmoniques sphériques - La décomposition des tenseurs en harmoniques sphériques fait intervenir la fonction harmonique sphérique tensorielle :

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}(\theta, \varphi) = \sum_{\alpha=-k}^k \sum_{\lambda=-n}^n C_{k\alpha n\lambda}^{\ell m} Y_{k\alpha}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_{n\lambda}, \quad (2.43)$$

avec $C_{k\alpha n\lambda}^{\ell m}$ les coefficients de Clebsh-Gordan (voir Varshalovich et al. (1988)). Cette fonction obéit également à la loi d'orthonormalité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{Y}_{\ell_1 m_1}^{k_1 n_1}(\theta, \varphi) [\mathbf{Y}_{\ell_2 m_2}^{k_2 n_2}(\theta, \varphi)]^* \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{k_1 k_2} \delta_{n_1 n_2}. \quad (2.44)$$

Ainsi, le tenseur des contraintes se décompose en une série de coefficients d'harmoniques sphériques de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{k=|\ell-1|}^{|\ell+1|} \sum_{n=0}^2 \sigma_{\ell m}^{kn}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}(\theta, \varphi). \quad (2.45)$$

La fonction harmonique sphérique tensorielle $\mathbf{Y}_{\ell m}^{k0}(\theta, \varphi)$ décrit la trace du tenseur, $\mathbf{Y}_{\ell m}^{k1}(\theta, \varphi)$ décrit sa partie anti-symétrique et $\mathbf{Y}_{\ell m}^{k2}(\theta, \varphi)$ sa partie symétrique. Puisque le tenseur des contraintes est symétrique, la partie anti-symétrique est nulle $\mathbf{Y}_{\ell m}^{k1}(\theta, \varphi) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r, \theta, \varphi) = & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{k=|\ell-2|}^{|\ell+2|} \left[\sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-2,2}(\theta, \varphi) \right. \\ & + \sigma_{\ell m}^{\ell-1,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1,2}(\theta, \varphi) + \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,2}(\theta, \varphi) \\ & + \sigma_{\ell m}^{\ell+1,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1,2}(\theta, \varphi) + \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+2,2}(\theta, \varphi) \\ & \left. + \sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,0}(\theta, \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Les composantes $\sigma_{\ell m}^{\ell-1,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1,2}(\theta, \varphi)$ et $\sigma_{\ell m}^{\ell+1,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1,2}(\theta, \varphi)$ représentent la partie toroïdale du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, elles ne sont donc pas considérées dans nos calculs. Il ne reste plus que les composantes $\sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r)$, $\sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r)$, $\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r)$, $\sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r)$.

2.7.2.3 Décomposition spectrale des opérateurs, des équations de conservation et formation du système d'équations linéaires - étapes 1 et 2

Maintenant que les grandeurs ont été décomposées en harmoniques sphériques, il reste à décomposer les équations de conservation. Par exemple, l'équation de conservation de la masse ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = & \nabla \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell m}^{\ell-1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi) \right) \\ & + \nabla \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell m}^{\ell+1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi) \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

L'opérateur $\nabla \cdot$ (divergence d'un vecteur) décomposé en harmoniques sphériques est le suivant (Varshalovich et al., 1988) :

$$\nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi) = \frac{\ell}{2\ell+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (2.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi) = -\frac{\ell+1}{2\ell+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (2.49)$$

Ces deux équations ne dépendent plus que de la fonction harmonique sphérique scalaire, elles sont rassemblées en une seule et unique équation :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\ell}{2\ell+1} \frac{du_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{dr} - \frac{\ell}{2\ell+1} (\ell-1) \frac{u_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{r} \\ &- \frac{\ell+1}{2\ell+1} \frac{du_{\ell m}^{\ell+1}(r)}{dr} - \frac{\ell+1}{2\ell+1} (\ell+2) u_{\ell m}^{\ell+1}(r) = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

avec r le rayon d'évaluation des inconnues. Vous trouverez la décomposition en harmoniques sphériques des gradients et autres opérations en Annexe B de ce manuscrit.

En posant $(\nabla \mathbf{u}) = (\nabla^T \mathbf{u})$, en supposant que le tenseur des contraintes n'a pas de partie anti-symétrique ($Y_{\ell m}^{k,1}(\theta, \varphi) = 0$) et que sa trace est nulle ($Y_{\ell m}^{k,0}(\theta, \varphi) = 0$), la rhéologie s'exprime ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + \mu(r) [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}], \quad (2.51)$$

$$\text{donc } \mathbf{D} = 2\mu(r) [\nabla \mathbf{u}]. \quad (2.52)$$

Après avoir décomposé le gradient vectoriel $\nabla \mathbf{u}$ en écriture spectrale, la décomposition spectrale de l'équation rhéologique (Équation 2.38) aboutit à un système de 3 équations linéaires, chacune des équations faisant intervenir des termes tous dépendant d'une seule et même fonction d'harmonique sphérique ($\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-2,2}(\theta, \varphi)$ pour la première équation, $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,2}(\theta, \varphi)$ pour la deuxième et enfin $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+2,2}(\theta, \varphi)$ pour la dernière) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r) - 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \frac{du_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{dr} - 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \ell \frac{u_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{r} = 0, \\ \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r) + 2\mu(r) \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} \frac{du_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{dr} - 2\mu(r) \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} (\ell-1) \frac{u_{\ell m}^{\ell-1}(r)}{r} \\ - 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+3)(2\ell+1)}} \frac{du_{\ell m}^{\ell+1}(r)}{dr} - 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+3)(2\ell+1)}} (\ell+2) \frac{u_{\ell m}^{\ell+1}(r)}{r} = 0, \\ \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r) + 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} \frac{du_{\ell m}^{\ell+1}(r)}{dr} - 2\mu(r) \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} (\ell+1) \frac{u_{\ell m}^{\ell+1}(r)}{r} = 0, \end{array} \right.$$

avec μ constante.

Enfin, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Équation 2.37) (après expression de $\rho \mathbf{g}$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ en harmoniques sphériques) est décomposée en un système de 2 équations linéaires (la première concerne les termes relatifs à $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$ et la deuxième à $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sqrt{\frac{\ell}{3(2\ell+1)}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{\ell}{3(2\ell+1)}} (\ell+1) \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r)}{r} \\ + \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} (\ell-2) \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r)}{r} \\ - \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} (\ell+1) \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r)}{r} \\ - g_0 \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \rho_{\ell m} = 0, \\ \sqrt{\frac{\ell+1}{3(2\ell+1)}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{\ell+1}{3(2\ell+1)}} \ell \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r)}{r} \\ + \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+3)(2\ell+1)}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+3)(2\ell+1)}} \ell \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r)}{r} \\ - \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} \frac{d\sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r)}{dr} - \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} (\ell+3) \frac{\sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r)}{r} \\ + g_0 \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \rho_{\ell m} = 0. \end{array} \right.$$

L'ensemble des trois équations de conservation est donc représenté pour chaque rayon par un système de 6 équations linéaires du type :

$$\mathbf{A}(\ell, \mu) \frac{d\mathbf{x}_{\ell m}}{dr} + \mathbf{B}(\ell, \mu, r) \frac{\mathbf{x}_{\ell m}}{r} = 0, \quad (2.53)$$

avec $\mathbf{A}(\ell, \mu)$ et $\mathbf{B}(\ell, \mu, r)$ deux matrices (réunies en une seule pour une simplification de résolution) contenant les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques et $\mathbf{x}_{\ell m}$ le vecteur des 6 inconnues :

$$\left[u_{\ell m}^{\ell-1}(r), u_{\ell m}^{\ell+1}(r), \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r), \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r), \sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r), \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r) \right].$$

2.7.2.4 Discrétisation du domaine et résolution du système d'équations linéaires - étape 3

Les coefficients de la décomposition en harmonique sphérique sont constants, ne dépendent que du degré ℓ et sont stockés dans une matrice carrée (nombre de couches x nombre d'inconnues)². La discrétisation du modèle est purement radiale, chaque inconnue est alors évaluée à une interface du modèle (r) ou entre deux interfaces (s) et l'ensemble du domaine est divisé en un nombre de couches que l'on peut choisir très grand (Figure 2.7).

2.8 Modèle hybride : couplage entre le modèle de convection visqueuse dans le manteau (*Oedipe*) et le modèle de déformation élastique de la lithosphère

Maintenant que l'on a décrit le modèle 3D sphérique qui nous permettra d'obtenir des champs de contraintes associées à la convection visqueuse dans le manteau

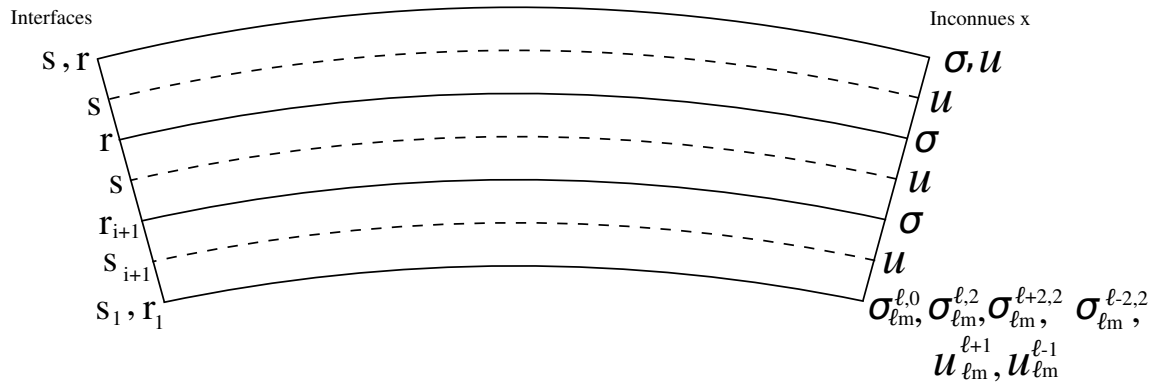


FIG. 2.7 – Représentation schématique de la discrétisation radiale du modèle. À gauche, la position des interfaces (r) et entre les interfaces (s) et à droite la position des inconnues σ et u .

ainsi que le modèle semi-spectral de calcul de la déformation élastique dans la lithosphère, nous allons évoquer le couplage des deux modèles. Le nouveau modèle ainsi créé prendra alors la terminologie de modèle hybride (en référence à l'utilisation de deux méthodes de résolution différentes dédiées à deux comportements mécaniques distincts).

2.8.1 Relation géométrique entre *Oedipe* et le code de déformation de la lithosphère

Comme le montre la Figure 2.8, les équations de conservation de l'énergie et de la masse sont résolues par *Oedipe* sur l'ensemble du domaine, l'advection n'est considérée que dans la partie visqueuse du domaine (jusqu'au rayon R_m) et seule la conduction est considérée entre le rayon R_m et R_s . La condition de bord à la CMB (base du modèle purement visqueux) est une condition de free-slip.

L'interface commune aux deux modèles de déformation se situe au rayon R_m . Ce rayon correspond à la base d'une cellule d'*Oedipe* et à la profondeur de la lithosphère élastique. L'épaisseur de la lithosphère élastique dépend donc de la taille des cellules d'*Oedipe* et son épaisseur effective est un multiple de l'élément radial dr de la sphère-cubique. Par exemple, pour une discrétisation radiale de la sphère-cubique en 64 cellules, si l'on considère un manteau de 1800 km soit $dr = 1800/64 = 28,13$ km, l'épaisseur élastique de la lithosphère sera de 1, 2, 3, ... cellules et son épaisseur élastique effective est un multiple de 28,13 (28,13 km si on considère une seule cellule, 56,25 km pour 2 cellules, 84,44 km pour 3 cellules ...).

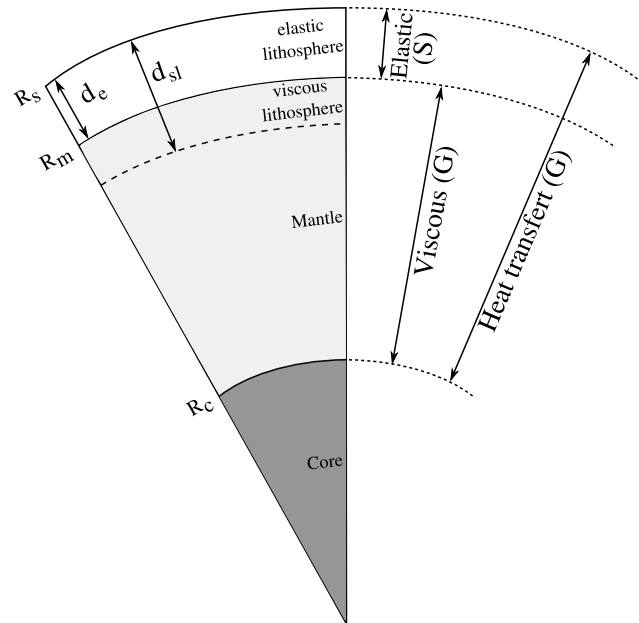


FIG. 2.8 – Couplage géométrique du modèle hybride. (G) représente la coquille visqueuse simulant la convection dans le manteau (basée sur la méthode des volumes finis) et (S) représente la coquille élastique, simulant la déformation de la lithosphère (basée sur une méthode spectrale).

2.8.2 Conditions mécaniques à la profondeur R_m dans *Oedipe* - Conditions mécaniques à la base du modèle de déformation élastique

2.8.2.1 Choix de la condition mécanique au rayon R_m

Comparée à une condition de bords libres (free-slip), une condition de bords rigides (no-slip) en surface du modèle de convection visqueuse engendre les conséquences suivantes sur la convection dans un manteau isovisqueux (Schubert et al., 1990) :

- (1) Au démarrage de la convection, la longueur d'onde des cellules est plus petite et la température interne augmente, réduisant la vitesse de croissance de la couche limite thermique froide.
- (2) Les panaches ascendants sont plus nombreux et ne s'étalent pas aussi facilement en surface. Leur quantité diminue plus lentement au cours du temps.
- (3) Les lignes de matériel froid ont des structures horizontales irrégulières qui se désagrègent plus fréquemment au cours du temps.

Parsons et Daly (1983) ont utilisé un modèle simplifié de convection dans un fluide incompressible isovisqueux dans une couche plane pour évaluer l'importance des conditions de bords du modèle sur les fonctions réponse de la topographie dynamique et du géoïde. Bien qu'il soit simplifié, ce modèle aboutit à la conclusion

suivante : l'influence des conditions de bords est d'autant plus importante que la longueur d'onde du signal est grande. À courte longueur d'onde, les fonctions réponse ont la même forme quelles que soient les conditions de bords. En revanche, à grande longueur d'onde, la réponse de la topographie de surface se linéarise dans le cas de conditions de bord free-slip/free-slip ce qui n'est pas le cas pour les autres conditions de bords.

En 1988, Richards et al. utilisent un modèle 2D (cartésien ou cylindrique à symétrie axiale) fondé sur une méthode d'éléments finis pour l'écoulement de Stokes d'un fluide ayant une rhéologie newtonienne. Ils comparent les observables synthétiques ainsi générés aux observables réels et tentent de lier les anomalies de géoïde terrestres à la présence de panaches. Le fluide qu'ils considèrent présente une rhéologie où la viscosité est radialement discrétisée (à l'image de ce que nous avons utilisé dans le Chapitre 3 pour les tests du modèle hybride). Comme Richards et Hager (1984), Richards et al. (1988) indiquent que le changement de condition de bord depuis un free-slip vers une conditions rigide au sommet n'a que peu d'effet sur la fonction réponse du géoïde (moins de 5%).

Thoraval et Richards (1997) utilisent un modèle d'écoulement d'un fluide compressible, une loi de viscosité newtonienne avec des variations uniquement radiales et aboutissent à des conclusions sensiblement différentes de celles de Richards et al. (1988). La distribution des anomalies de densité qu'ils utilisent sont celles issues de modèles tomographiques globaux (Su et al., 1994; Li et Romanowicz, 1996) et d'un modèle de slab ou les hétérogénéités de masse sont dérivées de la reconstruction du déplacement des plaques dans le passé (Ricard et al., 1993). Ils utilisent deux profils de viscosité stratifiés avec une lithosphère de 80 km, un manteau supérieur entre 80 et 670 km puis un manteau inférieur au delà de 670 km. Les rapports de viscosité entre les différentes couches varient de 0,01 à 100 entre la lithosphère et le manteau supérieur et entre 10 et 100 entre le manteau supérieur et le manteau inférieur. Le second modèle de viscosité présente une zone de faible viscosité supplémentaire entre 80 et 220 km. Les conditions du bord supérieur testées sont une condition de bord libre, une condition de bord rigide et une condition de plaque (condition de vitesse imposée en surface). Le meilleur accord entre le géoïde terrestre observé (jusqu'au degré 8) et leurs résultats est obtenu pour une condition de free-slip associée à une lithosphère épaisse ou une condition de no-slip accompagnée d'une zone de faible viscosité dans le manteau supérieur. Leurs conclusions sont les suivantes : (1) l'influence des conditions de bord augmente avec la longueur d'onde (comme Parsons et Daly, 1983) et (2) la viscosité au sommet du manteau supérieur dépend fortement

de la condition de bord appliquée en surface.

Forte (2007) en utilisant un profil de viscosité particulier issu du modèle GIA (*Glacial Isostatic Adjustment*, Mitrovica et Forte, 2004) révèle que la condition de bord a une importance non négligeable sur les fonctions réponses de la topographie et du géoïde (Figure 2.9).

Contrairement à la Terre, un couvercle conducteur épais est légitimement attendu sur Mars et Vénus (comme nous l'avons vu précédemment), pour une convection dans un régime de couvercle stagnant. Dans le cas d'un tel couvercle, la condition limite au sommet de la couche convective est proche d'un no-slip (par exemple Grasset et Parmentier, 1998). C'est donc cette condition mécanique qui est appliquée au rayon R_m d'*Oedipe*.

2.8.2.2 Évaluation des contraintes dans *Oedipe*

Comme nous l'avons vu en début de Chapitre, *Oedipe* utilise un système de coordonnées très particulier et c'est dans ce contexte que les composantes de la contrainte s'expriment dans un premier temps. Celles qui nous intéressent ici sont les composantes de la traction $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r$. On en distingue trois : τ^{rr} , $\tau^{r\eta}$ et $\tau^{r\xi}$ dans le système de coordonnées de la sphère-cubique (τ^{rr} , $\tau^{r\theta}$ et $\tau^{r\phi}$ dans le système de coordonnées de la sphère). La décomposition de ces composantes en une série de coefficients d'harmoniques sphériques s'effectue directement depuis les valeurs discrètes sur la grille de la sphère-cubique, les coordonnées de la sphère-cubique ayant été au préalable transposées dans le système de la sphère. Pour plus de détails à propos des changements de coordonnées, reportez-vous à Ronchi et al. (1996), Choblet (2005) ou encore Choblet et al. (2007).

Composante radiale de la traction - La composante la plus simple à obtenir dans la sphère-cubique est la composante de la traction radiale τ^{rr} qui est accessible directement dans le système de la sphère cubique et qui est identique dans le domaine de la sphère ($2\mu V_{,r}^r$) :

$$\sigma^{rr} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r = -p + 2\eta V_{,r}^r = (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}, \quad (2.54)$$

avec η la viscosité et $V_{,r}^r$ la dérivée radiale du champ de vitesse radiale. Les $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$ sont les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de la traction radiale (première composante extraite du modèle de convection visqueuse). Ils sont évalués au rayon R_m (voir Figure 2.8).

Composante tangentielle de la traction - L'évaluation des composantes $\tau^{r\eta}$ et $\tau^{r\xi}$ de la traction conduit à deux équations (une équation pour chaque composante)

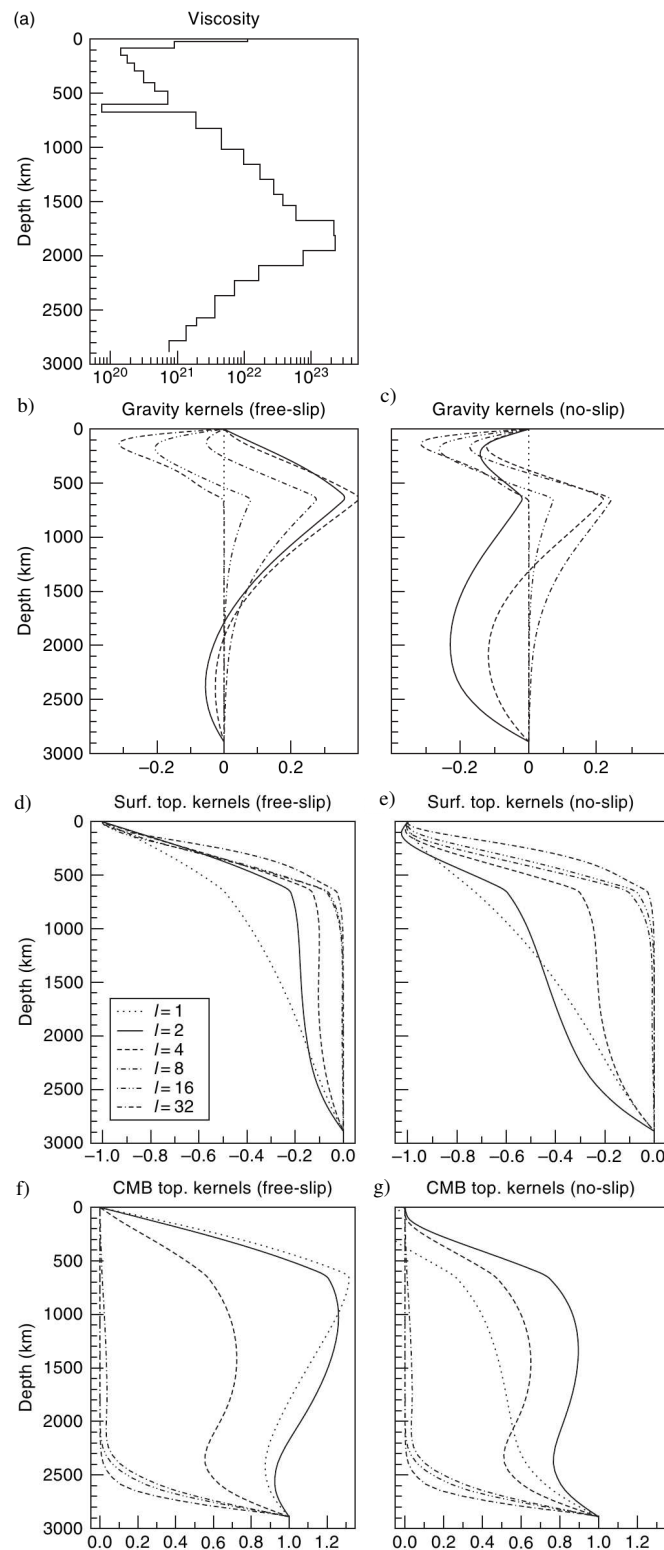


FIG. 2.9 – Les fonctions réponse présentées ici sont calculées à partir du profil de viscosité issu de modèle GIA (a) de Mitrović et Forte (2004). Fonction réponse de la gravité pour une condition de surface de free-slip (b) ou pour une condition de no-slip (c). Fonction réponse de la topographie de surface pour une condition de free-slip (d) ou de no-slip (e). Fonction réponse de la topographie à la CMB pour une condition de free-slip (f) ou de no-slip (g) (Forte, 2007).

soit trois équations pour les conditions de bord (τ^{rr} , $\tau^{r\eta}$, $\tau^{r\xi}$). Plutôt que d'utiliser directement les composantes $\tau^{r\eta}$ et $\tau^{r\xi}$ de la traction, nous avons fait le choix d'utiliser la divergence horizontale de la traction $\nabla_H \cdot \mathbf{T}$. L'utilisation de cette divergence présente l'avantage d'aboutir à une grandeur scalaire plutôt qu'à une grandeur vectorielle, donc une seule équation plutôt que deux équations, ce qui nous permet de conserver une certaine homogénéité avec le code spectral construit grâce à un système de 6 équations à 6 inconnues (dont deux équations relatives aux conditions de bord).

Dans les coordonnées sphériques, la divergence totale s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{r^2} (r^2 \tau^{rr})_{,r} + \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \tau^{r\theta})_{,\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} (\tau^{r\phi})_{,\phi} - \frac{\tau^{\theta\theta} + \tau^{\phi\phi}}{r}. \quad (2.55)$$

Le principe de la divergence horizontale réside dans l'annulation des termes dérivés selon r . De plus, la condition imposée au rayon R_m dans *Oedipe* est une condition de bord rigide ($\mathbf{v} = 0$), le terme $-\frac{\tau^{\theta\theta} + \tau^{\phi\phi}}{r}$ est donc nul sur cette interface. Ainsi :

$$\nabla_H \cdot \mathbf{T} |_{R=R_m} = \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \tau^{r\theta})_{,\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} (\tau^{r\phi})_{,\phi}. \quad (2.56)$$

C'est l'utilisation de l'équation de conservation du mouvement qui nous permet de simplifier une expression de la divergence horizontale de la traction. Si l'on reprend l'équation de conservation des mouvements $-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + f_r = 0$ selon r ainsi que l'équation de la divergence horizontale (Équation 2.56), on peut écrire (toujours en coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{r^2} (r^2 p)_{,r} + \frac{1}{r^2} (r^2 \tau^{rr})_{,r} + \frac{1}{r \sin \theta} (\sin \theta \tau^{r\theta})_{,\theta} \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} (\tau^{r\phi})_{,\phi} + f_r = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\implies -\frac{1}{r^2} (r^2 p)_{,r} + \frac{1}{r^2} (r^2 \tau^{rr})_{,r} + \nabla_H \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (2.58)$$

Ainsi,

$$\nabla_H \cdot \mathbf{T} |_{R=R_m} = \frac{1}{r^2} (r^2 p)_{,r} - \frac{1}{r^2} (r^2 \tau^{rr})_{,r} \quad (2.59)$$

$$= \left(\frac{2p}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \left(\frac{2\tau^{rr}}{r} + \frac{\partial \tau^{rr}}{\partial r} \right) \quad (2.60)$$

$$= p_{,r} - \tau_{,r}^{rr} + \frac{2p}{r} - \frac{2\tau^{rr}}{r} \quad (2.61)$$

$$= -(T^r)_{,r} - \frac{2}{r} (-p + \tau^{rr}), \quad (2.62)$$

avec $(T^r)_{,r} = \tau_{,\theta}^{r\theta} + \tau_{,\phi}^{r\phi}$.

Soit, dans la sphère-cubique :

$$\nabla_H \cdot \mathbf{T} |_{R=R_m} = \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\tau^{r\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\tau^{r\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{2}{r} (p + \tau^{rr}) \quad (2.63)$$

Pour synthétiser, on peut écrire :

$$\nabla_H \cdot \mathbf{T} |_{R=R_m} = \nabla_H \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) = -(T^r)_{,r} + \frac{2}{r}(-p + \tau^{rr}) = (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} \quad (2.64)$$

Les $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}$ représentent les coefficients issus de la décomposition en harmoniques sphériques de la divergence horizontale de la traction associée à la convection et évalués au rayon R_m (voir Figure 2.8).

2.8.2.3 Évaluation des contraintes dans la coquille élastique

Les différentes composantes radiales de la contrainte s'obtiennent par l'expression $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r)$ dont le résultat est un vecteur contenant les composantes de la traction que nous appellerons \mathbf{F} cette fois-ci pour la distinguer de celle d'*Oedipe*. Notez bien qu'il s'agit toujours ici de la traction (que l'on a appelée \mathbf{T} précédemment), seule la notation diffère. La forme générale de l'équation de décomposition du vecteur \mathbf{F} en une série de coefficients d'harmoniques sphériques est la suivante :

$$\mathbf{F} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [F_{\ell m}^{\ell-1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi) + F_{\ell m}^{\ell+1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)] = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r). \quad (2.65)$$

L'expression $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r)$ peut également être décomposée en une série de coefficients d'harmoniques sphériques que l'on peut relier à l'équation 2.65 grâce aux fonctions vectorielles $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$ et $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$ qu'elles ont en commun :

$$\begin{aligned} F_{\ell m}^{\ell-1}(r) &= -\sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r) \sqrt{\frac{\ell}{3(2\ell+1)}} \\ &+ \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(r) \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} - \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r) \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell+1)(2\ell-1)}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} F_{\ell m}^{\ell+1}(r) &= \sigma_{\ell m}^{\ell,0}(r) \sqrt{\frac{\ell+1}{3(2\ell+1)}} \\ &+ \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(r) \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+1)(2\ell+3)}} - \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(r) \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ces deux équations représentent la condition de bord à la base du modèle de déformation élastique et s'insèrent concrètement dans le système d'équations linéaires en remplacement des deux équations de conservation de l'énergie de la première couche (les composantes de la contrainte et de la vitesse ne dépendent donc pas de r mais de R_m).

$$\begin{pmatrix} u_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \\ u_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \\ \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(R_m) \\ \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(R_m) \\ \sigma_{\ell m}^{\ell,0}(R_m) \\ \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(R_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Matrice des coefficients} \\ \text{de la décomposition spectrale} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \\ F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

2.8.3 Condition au sommet de la coquille élastique

À la surface du modèle élastique (au rayon R_s), deux conditions régissant les contraintes sont appliquées. La première contrôle les contraintes radiales et stipule que les forces transmises dans la lithosphère élastique sont contrebalancées par la création d'un déplacement en surface (topographie dynamique) :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) + \rho \mathbf{g} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r) = 0, \quad (2.69)$$

dont la décomposition en une série de coefficients d'harmoniques sphériques aboutit à une équation unique :

$$- \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6\ell(2\ell-1)}} \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(R_s) + \sqrt{\frac{(\ell-1)(2\ell+1)}{\ell(2\ell-1)}} \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(R_s) \quad (2.70)$$

$$- \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_{\ell m}^{\ell,0}(R_s) + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell-1}(R_s) - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell+1}(R_s) = 0. \quad (2.71)$$

La deuxième équation régit le comportement de la contrainte tangentielle, c'est la condition de free-slip :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) - [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r] \mathbf{e}_r = 0, \quad (2.72)$$

qui se décompose également en une série de coefficients d'harmoniques sphériques :

$$\frac{(\ell+1)}{(2\ell+1)} \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \sigma_{\ell m}^{\ell-2,2}(R_s) - \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)(2\ell+1)}} \sigma_{\ell m}^{\ell+2,2}(R_s) \quad (2.73)$$

$$- \sqrt{\frac{3(\ell+1)}{2(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)}} \sigma_{\ell m}^{\ell,2}(R_s) = 0. \quad (2.74)$$

On obtient donc deux équations supplémentaires, qui régissent le comportement de la contrainte dans la couche supérieure de la lithosphère élastique et la combinaison de ces deux équations décrit l'équilibre des forces radiales :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) + \rho \mathbf{g} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r = 0 \quad (2.75)$$

2.8.4 Détermination des filtres liés à la compensation élastique et calcul des observables synthétiques (topographies et géoïde)

Telles que les conditions de bords ont été établies à la base du modèle de déformation élastique et telles que les composantes de la traction sont évaluées dans *Oedipe*, il est possible de calculer un coefficient de compensation élastique qui s'applique uniquement à la composante radiale de la traction $(f_r)_\ell$, ou deux coefficients de compensation élastique $(f_1)_\ell$ et $(f_2)_\ell$ qui s'appliquent respectivement à la composante $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$ et à la composante $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$ de la traction. Le choix entre ces deux modes de compensation est déterminé par la condition imposée à la base du modèle de déformation élastique, c'est à dire par les valeurs que prennent $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m)$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m)$.

2.8.4.1 Détermination du filtre appliqué à la traction purement radiale

Le système d'équations linéaires est résolu en imposant $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}$. Ceci revient à imposer un déplacement unitaire pour chacune des deux composantes du déplacement. Pour la première équation linéaire ($F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}$) : $u_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = 1$ et $u_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = 0$ et inversement dans la deuxième équation. Le filtre $(f_r)_\ell$ qui dépend du degré, des propriétés de la lithosphère élastique et de son épaisseur, est ensuite calculé de la façon suivante :

$$(f_r)_\ell = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell-1}(R_S) - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell+1}(R_S). \quad (2.76)$$

$$(f_1)_\ell = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell-1}(R_S) - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell+1}(R_S). \quad (2.77)$$

$$(f_2)_\ell = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell-1}(R_S) - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} u_{\ell m}^{\ell+1}(R_S). \quad (2.78)$$

On reconnaît sous sa forme spectrale l'équation du déplacement radial $u_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r$ avec les composantes $u_{\ell m}^{\ell-1}(R_S)$ et $u_{\ell m}^{\ell+1}(R_S)$ évaluées en surface (R_S le rayon de la planète - voir Figure 2.8). On notera qu'au rayon $R = R_S$, la topographie est égale à ce déplacement radial. Une interprétation de la notion de filtre $(f_r)_\ell$ tel qu'il est

calculé ici peut être la suivante :

Lorsque l'on applique un déplacement unitaire à la base du modèle de déformation élastique, une partie de ce déplacement est compensée progressivement depuis la base jusqu'à la surface de manière élastique. Le filtre représente la proportion du déplacement radial qui a été relaxée.

$(f_r)_\ell$ est donc compris entre 0 (compensation complète - la topographie dynamique est complètement filtrée) et 1 (pas de compensation - la topographie dynamique à la base du modèle élastique est entièrement restituée en surface) .

Ce filtre s'applique aux coefficients d'harmoniques sphériques de la traction radiale associée à la convection visqueuse $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$ et permet l'obtention des coefficients d'harmoniques sphériques de la traction radiale filtrée.

2.8.4.2 Détermination des filtres appliqués aux deux composantes de la traction (radiale et tangentielle)

Une première résolution du système d'équations linéaires en imposant $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = 1$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = 0$, (imposition d'une traction unitaire, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r$, selon la composante en $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$) fournit les composantes du déplacement \mathbf{u} permettant le calcul d'un premier filtre $(f_1)_\ell$ (à l'aide de l'Équation 2.78). Tel qu'il est calculé ici, une explication de la notion de filtre peut être la suivante :

Lorsque l'on applique une composante unitaire de la traction (composante en $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$) à la base du modèle de déformation élastique, une partie du déplacement radial généré est compensée progressivement depuis la base jusqu'à la surface de manière élastique. Le filtre représente la proportion de ce déplacement radial qui a été relaxée.

Une deuxième résolution du système en imposant la condition complémentaire : $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = 0$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = 1$ permet d'obtenir un deuxième filtre $(f_2)_\ell$. Cette fois-ci la traction unitaire est imposée sur la composante en $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$ mais la notion de filtre reste identique.

Maintenant que nous avons deux filtres $(f_1)_\ell$ et $(f_2)_\ell$ selon les composantes $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$ et $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$ de la traction $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r)$, nous devons faire le lien entre les coefficients d'harmoniques sphériques des composantes de la traction issus d'*Oedipe* $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$ et $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}$ et ceux des composantes de la traction $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m)$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m)$ du modèle de déformation élastique (tous évalués au même rayon R_m). On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_r) \\
&= F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} - F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} = (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \quad (2.79) \\
\nabla_H \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r) &= \nabla_H \cdot \mathbf{F} = \nabla_H \cdot \mathbf{T} \\
&= -F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \frac{(\ell-1)}{r} \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \\
&\quad - F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \frac{(\ell+2)}{r} \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} = (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} \quad (2.80)
\end{aligned}$$

La correspondance ainsi établie entre $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$, $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}$, $F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m)$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m)$ aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} - F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} = (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \\ -F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) \frac{(\ell-1)}{R_m} \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} - F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) \frac{(\ell+2)}{R_m} \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} = (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} \end{cases} \quad (2.81)$$

dont la résolution par substitution conduit à :

$$F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = \frac{(\ell+2)(T_r)_{\ell m}^{(R_m)} - (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} R_m}{\sqrt{\ell(2\ell+1)}} \quad (2.82)$$

$$F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = \frac{-(\ell+1)(T_r)_{\ell m}^{(R_m)} + (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} R_m}{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+1)}} \quad (2.83)$$

C'est grâce à ces deux équations que s'exprime le couplage mécanique entre le modèle de calcul des contraintes associées à la convection visqueuse dans le manteau et le modèle de déformation élastique de la lithosphère.

2.8.4.3 Calcul et dimensionnement de la topographie et du géoïde

Les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de la topographie dynamique (filtrée ou non) et du géoïde associés à la convection visqueuse sont issus du dimensionnement des coefficients d'harmoniques sphériques des contraintes et des anomalies de densité :

$$(\sigma_{rr})_{\ell m} = \frac{(\sigma_{rr})_{\ell m}^* \alpha \rho_m g \Delta T (R_s - R_c)}{Ra}, \quad (2.84)$$

$$(\nabla_H \cdot \mathbf{T})_{\ell m} = \frac{(\nabla_H \cdot \mathbf{T})_{\ell m}^* \alpha \rho_m g \Delta T}{Ra}, \quad (2.85)$$

$$(\rho^i)_{\ell m} = \frac{(\rho^i)_{\ell m}^* \alpha \rho_m \Delta T}{Ra} \left\{ \frac{[r^{i*} (1-f) R_s]}{R_s} \right\}^{\ell+2} \left(\frac{R_s - R_c}{n_{lay}} \right), \quad (2.86)$$

avec $(\sigma_{rr})_{\ell m}^*$ et $(\nabla_H \cdot \mathbf{T})_{\ell m}^*$ les coefficients d'harmoniques sphériques adimensionnés de la contrainte radiale et de la divergence horizontale de la traction respectivement, $(\rho^i)_{\ell m}^*$ les coefficients d'harmoniques sphériques adimensionnés de l'anomalie de masse $\rho_{\ell m}^i$ de la couche i , r^{i*} le rayon adimensionné qui varie de $\frac{f}{1-f}$ à la base à $\frac{1}{1-f}$ au sommet avec f le rapport d'aspect (R_c/R_s) et n_{lay} le nombre de couche du modèle de convection visqueuse (nombre de cellules radiales d'*Oedipe*, 64 dans notre cas).

Les coefficients d'harmoniques sphériques dimensionnés de la topographie de surface s'obtiennent de la façon suivante :

$$t_{\ell m}^s = \frac{(\sigma_{rr})_{\ell m}^{(R_s)}}{\rho_m g}, \quad (2.87)$$

avec, si on considère un filtre par compensation élastique de la traction uniquement radiale $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$:

$$(\sigma_{rr})_{\ell m}^{(R_s)} = (f_r)_\ell \times (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}, \quad (2.88)$$

et si la compensation élastique s'applique à la fois sur la traction radiale $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$ et la traction tangentielle $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}$:

$$(\sigma_{rr})_{\ell m}^{(R_s)} = (f_1)_\ell \times \frac{(\ell + 2) (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} - (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} R_m}{\sqrt{\ell (2\ell + 1)}} \quad (2.89)$$

$$+ (f_2)_\ell \times \frac{- (\ell + 1) (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} + (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} R_m}{\sqrt{(\ell + 1) (2\ell + 1)}}. \quad (2.90)$$

On exprime les coefficients d'harmoniques sphériques dimensionnés de la topographie à la CMB comme :

$$t_{\ell m}^c = \frac{(\sigma_{rr})_{\ell m}^{(R_c)}}{(\rho_c - \rho_m) g}, \quad (2.91)$$

avec $(\sigma_{rr})_{\ell m}^{(R_c)} = (T_r)_{\ell m}^{(R_c)}$ les coefficients d'harmoniques sphériques de la contrainte au rayon R_c (à la CMB) et ρ_c la masse volumique du noyau. Enfin, les coefficients d'harmoniques sphériques dimensionnés du géoïde (qui porte la signature de la topographie de surface, de la topographie à la CMB ainsi que des anomalies de masse du manteau) s'expriment comme :

$$N_{\ell m} = \frac{4\pi G R_s}{g (2\ell + 1)} \left[t_{\ell m}^c (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{R_c}{R_s} \right)^{\ell+2} + \sum_{i=1}^{n_{lay}} \rho_{\ell m}^i + t_{\ell m}^s \rho_m \right], \quad (2.92)$$

avec G la constante de gravité.

Afin de faciliter l'interprétation des résultats que nous avons obtenus en terme de déformation de la lithosphère élastique et qui sont présentés dans les chapitres

suiuants, il est intéressant d'introduire les coefficients de filtrage élastique C_ℓ et S_ℓ selon la composante radiale et selon la partie tangentielle de la traction respectivement. Ils sont obtenus par une combinaison des filtres $(f_1)_\ell$ et $(f_2)_\ell$ qui concernent les composantes en $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi)$ et $\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)$ de la traction. La topographie de surface $t_{\ell m}^s$ générée par les forces $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}$ et $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}$ qui agissent à la base de la lithosphère élastique devient :

$$t_{\ell m}^s \rho_m g = -C_\ell (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} - S_\ell (T_t)_{\ell m}^{(R_m)}. \quad (2.93)$$

En prenant en compte :

$$t_{\ell m}^{s,visc} = -\frac{(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}}{\rho_m g}, \quad (2.94)$$

avec $t_{\ell m}^{s,visc}$ la topographie de surface correspondant à un cas purement visqueux. L'équation 2.93 peut être réécrite comme :

$$t_{\ell m}^s = \left[C_\ell + S_\ell \frac{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_r)_{\ell m}^{(R_m)}} \right] t_{\ell m}^{s,visc}. \quad (2.95)$$

Le coefficient C_ℓ est analogue au coefficient de compensation introduit par Turcotte et al. (1981) afin de décrire la réponse d'une coquille élastique à une charge de surface.

À partir du système d'équation 2.81, on peut faire le lien entre les filtres C_ℓ (propre à la contrainte normale) et S_ℓ (propre à la contrainte tangentielle) et les filtres $(f_1)_\ell$ et $(f_2)_\ell$ tels qu'ils sont calculés réellement dans l'outil d'étude de la déformation élastique de la lithosphère :

$$\begin{cases} F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) = \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \\ F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m) = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \end{cases} \quad (2.96)$$

Pour le calcul de C_ℓ , on impose $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)} = 0$ et $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)} = 1$, soit :

$$C_\ell = \left[(f_1)_\ell \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} - (f_2)_\ell \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \right] \rho g = (f_r)_\ell \quad (2.97)$$

Selon l'équation 2.95, on peut écrire :

$$S_\ell = \frac{t_{\ell m}^s \rho g}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} - \frac{C_\ell (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}}, \quad (2.98)$$

avec $t_{\ell m}^s = [(f_1)_\ell F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m) + (f_2)_\ell F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m)]$.

$F_{\ell m}^{\ell-1}(R_m)$ et $F_{\ell m}^{\ell+1}(R_m)$ sont calculés cette fois en imposant successivement $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)} = 0$ et $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)} = 1$ puis $(T_r)_{\ell m}^{(R_m)} = 1$ et $(T_t)_{\ell m}^{(R_m)} = 0$.

Donc,

$$\begin{aligned}
 S_\ell = & \left\{ (f_1)_\ell \left[\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \right] \right. \\
 & + (f_2)_\ell \left[\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)} - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (T_r)_{\ell m}^{(R_m)} \right] \left. \right\} \frac{\rho g}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} \\
 & - \frac{C_\ell (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} \tag{2.99}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_\ell = & \left[\frac{(f_1)_\ell \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} + \frac{(f_2)_\ell \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} (T_t)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} \right] \rho g \\
 & + \frac{C_\ell (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} - \frac{C_\ell (T_r)_{\ell m}^{(R_m)}}{(T_t)_{\ell m}^{(R_m)}} \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S_\ell = \left[(f_1)_\ell \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} + (f_2)_\ell \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \right] \rho g \tag{2.101}$$

2.8.5 Approches similaires

À ma connaissance, il existe deux approches similaires à celle que je viens de vous présenter. La première est proposée par Marquart et Schmeling (1989) : elle consiste en un modèle de convection mantellique isovisqueuse, dans une cellule rectangulaire, en 2D, en approximation anélastique, surmonté d'un modèle de déformation élastique de la lithosphère (par flexure d'une couche mince - modèle de Turcotte et al., 1981 ; Section 2.7.1). L'épaisseur totale de la lithosphère est fixée à 150 km et la partie élastique varie de 0 à 150 km. Le rapport d'aspect du manteau varie de 0,7 à 3 et le nombre de Rayleigh est compris entre 10^4 et 10^6 . La convection dans le manteau, entre 670 km et 150 km de profondeur, apparaît sous la forme de rouleaux. Le couplage mécanique entre ces deux domaines est modélisé par une condition de no-slip au sommet de la partie convective et la contrainte est considérée comme une charge sous la partie élastique. Une condition de free-slip est imposée sur les bords et à la base de la partie convective. Enfin, une condition de free-surface est appliquée au sommet de la lithosphère élastique, leur permettant de calculer la topographie résultante. Même si la traction horizontale est une sortie de leur modèle de convection, le degré de compensation élastique tel qu'il est calculé dans le modèle de flexure d'une plaque en approximation de couche mince ne peut s'appliquer qu'à la traction radiale. Bien qu'elle soit fondée sur la même philosophie que la notre (contraindre l'importance d'une partie élastique de la lithosphère sur la topographie de surface et le géoïde), cette étude présente de nombreuses différences par rapport à celle que l'on propose, rendant toute comparaison difficile.

La deuxième approche est celle de Zhong (2002), qui tente de faire la distinction entre deux hypothèses de soutien de Tharsis (construction volcanique supportée par une lithosphère élastique ou par un panache sous-jacent, voir Section 1.3.2.3). Il utilise différents modèles, dont un modèle visco-élastique que je ne détaillerais pas ici, mais surtout un modèle hybride résultant du couplage entre un modèle de convection à viscosité variable *Instantaneous Viscous Flow* (IVF) (Harder, 2000) et le modèle de flexure en approximation de couche mince de Turcotte et al. (1981). Le modèle IVF est un modèle 3D sphérique, résolvant les équations de conservation dans un milieu incompressible, en approximation de Boussinesq avec un fluide Newtonien et une viscosité radialement dépendante. Les conditions de bords fixées sont des conditions de stress-free et de température constante. La similitude avec cette approche et les avantages que propose mon modèle hybride seront développés un peu plus dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Topography and geoid induced by a convecting mantle beneath an elastic lithosphere

Olivia Golle¹, Caroline Dumoulin¹, Gaël Choblet¹ et Ondřej Čadek²
Geophysical Journal International (2012), 189, 55-72

In the absence of seismological measurements, observations of the topography and gravity fields of solid planets are the primary constraints on their internal structure. In order to compute the synthetic geoid and topography induced by the dynamics of planetary interiors, we introduce a 3D numerical tool describing mantle convection beneath an elastic lithosphere. While the energy conservation is treated in the whole spherical domain, the deformation aspect is solved using a hybrid technique (finite volume method for the viscous flow, spectral method for elastic deformation). The mechanical coupling is achieved via the imposition of the traction at the surface of the viscous flow as a basal boundary condition for the elastic deformation. We present both response functions and full thermal convection cases computed with our new method for planetary bodies of varying dimensions : the filtering effect of the lithosphere on the dynamic topography and geoid is specific for each planetary body, justifying the importance of such a tool. Furthermore, since our approach specifically focuses on the mechanical coupling at the base of the lithosphere, it will permit future, more elaborate, rheological treatments. It also enables to discriminate between the radial and tangential components of the viscous traction. The latter is found to have a significant influence on the elastic deformation. The effect on geoid is prominent. More specifically, while a thin elastic lithosphere is usually considered to play little role on the dynamic topography and geoid of Venus, a $\sim 35\%$ reduction

¹Laboratoire de Planétologie et Géodynamique, CNRS-UMR6112, Nantes, France

²Department of Geophysics, Faculty of Mathematic and Physics, Charles University, Prague, Czech Republic

is obtained for geoid height in the numerical example we propose. On a planet with thicker elastic lithosphere such as Mars, the consequence of this filtering effect is to rule out the possibility of a dynamical support for the Tharsis rise, even for the lowest admissible values of elastic thickness in this region.

3.1 Introduction

Thanks to the numerous spacecrafts that have orbited planetary bodies in the last decades, the gravity field (derived from radio-tracking of the probes) and topography (measured by onboard altimeters, for example) are both known in great detail for all terrestrial planets but Mercury (see Wiczorek, 2007, for a review of the knowledge on both data sets). These also start to be evaluated for icy moons although still mostly restricted to regional models for topography (e.g., on Europa Nimmo et al., 2003) and to the smallest degrees of the gravitational field (cf. e.g., Iess et al., 2010, for Titan). Because the gravitational acceleration evaluated from the orbit is sensitive to the mass distribution within such bodies, its measurement may be used to invert parameters relevant for the structure of the interior. For this purpose, it is combined to topographic data given that simplifying assumptions are postulated with regard to the deformation processes occurring within the planet. Wiczorek (2007) details how specific tools dedicated to the joint analysis of gravity and topography fields can yield important insight into the knowledge of the interior. This insight can be crucial in the absence of seismic measurements since, in turn, it provides clues on the thermal state : Placing constraints on the internal structure of a planet, together with geological observations such as the evolution and distribution of volcanism helps to reconstruct the history of these solid bodies in terms of melting (including the presumably ancient formation of crust), deep internal processes (including early differentiation or the possible existence of a dynamo), and shallower geological processes.

Because the spatial resolution associated with the gravity probe pertaining to the knowledge of planetary interiors decreases with depth, such studies are often dedicated to the shallower structure (e.g., the crust or the lithosphere) : these include works on Mars (e.g., Neumann et al. 2004, on global variations of crustal thickness ; and on the elastic lithosphere thickness beneath large volcanoes Belleguic et al. 2005), and Venus (e.g., Simons et al. 1994, on the stability of crustal topography ; and on the elastic lithosphere thickness at various locations, Barnett et al. 2002), but also on more distant bodies from very lacunar measurements, Europa (e.g., Nimmo et al., 2003), Thetys (Giese et al., 2007) or Rhea (Nimmo et al., 2010).

Yet, the deeper interior might also contribute to the geoid and topography si-

gnatures at long wavelengths, through internal loading caused by large scale, deeply seated, density anomalies as well as through the viscous flow these may induce. Steinberger et al. (2010) propose that the largest wavelengths in the gravimetry and topography spectra (up to $\ell \simeq 30$ for the Earth and Venus, up to $\ell \simeq 5$ for Mars) are mostly attributable to sublithospheric structures. In this case of a deeper origin related to mantle dynamics and/or to large scale compositional gradients, the rheological structure is a key ingredient. For example, Pauer et al. (2006) demonstrate in the case of Venus that two models explain equally well the data : (1) an isoviscous mantle beneath a strong and thick lithosphere of several hundreds of kms (as proposed by Kiefer et al., 1986), but also (2) a thinner lithosphere (~ 100 km thick) and a viscosity increase with depth (between 10 and 100). Such an increase (either gradual or discontinuous) is also proposed for the Earth's mantle on a comparable basis, in order to account for geoid highs above subduction zones (cf. e.g., the early works of Lago et Rabinowicz, 1984; Hager et al., 1985).

While the studies mentioned above are based on inversion procedures invoking simple assumptions with regard to the deformation of the lithosphere and the underlying mantle, complementary works have computed synthetic observables from direct mantle flow calculations (too complex to be yet introduced in an inversion framework). A first group of studies considered simplified density and viscosity fields in order to understand the geoid above subduction zones for an isoviscous mantle (cf. Zhong et Gurnis, 1992), for a variable viscosity mantle (Moresi et M., 1996) later introducing a 3D spherical model (Zhang et Christensen, 1993; Zhong et Davies, 1999). A second group considered full thermal convection of a mantle whose viscosity is uniform or solely depth-dependent : these include works on Venus' equatorial highlands (Kiefer et Hager, 1991), on the Tharsis Rise (Harder et Christensen, 1996), and, introducing depth-dependent viscosity in a spherical geometry (Harder, 2000), as well as more generic studies such as the application to Earth's hotspots and Venus' coronae by Kiefer et Kellogg (1998). In their numerical investigation of long wavelength geoid above subduction zones, King et Hager (1994) show however that it is important to include temperature-dependent viscosity in the convection experiments. This is further demonstrated by Moresi et Parsons (1995) and Solomatov et Moresi (1996), the latter introducing a detailed description of the convective regimes in the context of temperature-dependent viscosity. Both provide an application to the geoid and topography of Venus. Later investigations of the impact of variable viscosity convection on topography and geoid of planetary bodies include further studies of Mars (Redmond et King, 2004; Kiefer et Li, 2009), a regional study of the uplift in Beta Regio on Venus (Vezolainen et al., 2004) or a possible way of detecting convection at present within Mercury's mantle (Redmond et King, 2007).

In these studies, the topographic signature of mantle flow is computed from the vertical/radial normal stress induced by thermal convection (IVF : Instantaneous Viscous Flow). However, the presence of a thick lithosphere can affect this prediction : in models of flexural loading (cf Turcotte et al., 1981), the surface topography results from the deformation of an elastic shell mimicking the rigidity of the lithosphere (see, Beuthe, 2008, for a synthesis and the introduction of a model of lithospheric flexure for a spherical shell with a variable thickness). Zhong (2002) demonstrates that the IVF approach indeed overestimates the dynamical support of topography for planets with a thick viscous lithosphere : a fully viscoelastic model is systematically compared to the IVF model showing that the steady-state viscous deformation might not be reached in geologically relevant time scales. In the case of Mars, this result implies that the Tharsis Rise is unlikely to be dynamically supported (Zhong, 2002; Zhong et Roberts, 2003; Roberts et Zhong, 2004). In these models, the loading associated with thermal convection is computed indirectly : the distribution of thermal buoyancy associated with a one-plume structure is considered for purely viscous convection (depth-dependent viscosity in Zhong 2002 and Zhong et Roberts 2003 ; temperature-dependent viscosity in Roberts et Zhong in 2004) and the viscoelastic kernels obtained for a similar radial viscosity profile is used a posteriori to compute the geoid and topography spectra.

The most rigorous approach to this problem would therefore involve a fully viscoelastic treatment for mantle convection. Recent numerical progress using finite element methods often dedicated to the deformation of the Earth's lithosphere achieved promising results although these are often restricted to 2D Cartesian geometries (e.g., either in the Eulerian framework Muhlhaus et Regenauer, 2005), or using an hybrid approach, (e.g., Moresi et al., 2002; Beuchert et Podladchikov, 2010) - the very few numerical tools developed in 3D that fulfill such specifications (cf. e.g., Moresi et al., 2007) are probably still too much time consuming for this specific problem where most of the elastic behavior is restricted to a subset of the spacial domain. In the present study, we wish to introduce a new numerical method suited for 3D spherical geometry that directly combines convective flow with large viscosity gradients in the mantle and the elastic deformation of a shell mimicking the lithosphere. This formulation has the advantage of directly describing the time evolution and thermal aspects inherent to the IVF while also taking into account of the elastic filtering at a suitable cost in terms of computation time. For this purpose, we extend the finite volume tool OEDIPUS described in Choblet et al. (2007) in order to take into account the elastic filtering effect on surface topography : this is achieved by the use of a semi-spectral method describing elastic deformation while introducing an appropriate coupling between the two sub-shells with different deformation mecha-

nisms. Since it explicitly describes the mechanical coupling between two subshells with different rheological behavior (contrary to the formalism based on the thin elastic shell loading, cf. Turcotte et al., 1981), this model shall be considered as the first step of an effort that will lead to a more elaborate treatment, i.e. adopting a viscoelastic rheology for the uppermost shell or allowing for lateral variations of its thickness. It resembles the model introduced by Marquart et Schmeling (1989) in order to study geoid and topography caused by small-scale convection under continents. To our knowledge, the method presented by these authors (even though a simpler framework is considered : 2D Cartesian, isoviscous mantle, thin elastic plate approximation), is the only tool comparable to the one we introduce here. In Section 3.2, we describe the physical model and numerical techniques associated with the treatment of the conservation of energy (Section 3.2.1), the Stokes viscous flow in the deeper interior (Section 3.2.2), the elastic deformation in a superficial shell (Section 3.2.3) as well as the spectral evaluation of topography and geoid (Section 3.2.4) (benchmark tests are also presented for this hybrid tool through the computation of response functions and comparison with a reference method). Results are presented in Section 3.3 : the computation of both synthetic coefficients for elastic filtering and response functions for geoid and topography corresponding to various planets' dimensions enables us to focus on the filtering effect of the lithosphere and the importance of the precise mechanical coupling between the viscous and elastic shells (Sections 3.3.1 and 3.3.2). Thermal convection calculations are also presented (Section 3.3.3).

3.2 Model description and numerical methods

The final aim of the tool described here is to produce synthetic observations relevant for the study of solid planetary interiors (namely dynamic topography, geoid) from numerical calculations describing their dynamics on geological timescales. The model we propose considers both convective heat transfer and the associated viscoelastic deformation. The latter is mimicked by juxtaposing a purely elastic shell above a deeper, thicker, viscous shell (see Fig. 3.1) so that each shell is associated to a single, distinct, mechanical behavior. Note that another solution would be to include the elastic shell within the viscous shell. As shown in section 3.4, both approaches lead to similar results. Both deformation mechanisms are handled through distinct numerical methods selected for their efficiency and robustness : the Stokes flow of the mantle involving large viscosity gradients is described with a grid-based multigrid solver, the elastic deformation of the lithosphere is described and solved in the spectral framework permitting an elegant treatment of the problem using the

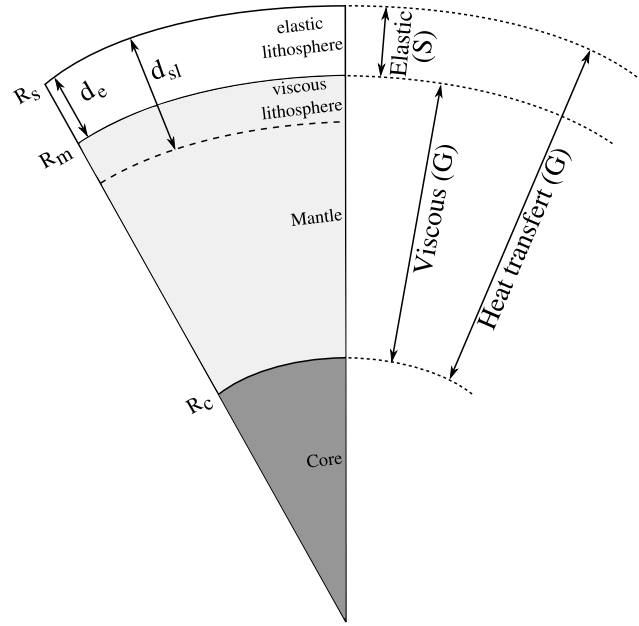


FIG. 3.1 – The hybrid model we propose couples a viscous shell mimicking the viscous part of the lithosphere together with the underlying mantle to an elastic shell at its surface mimicking the elastic part of the lithosphere. (G) refers to a grid-based method, whereas (S) indicates a semi-spectral method.

decomposition into spherical harmonics (the radial direction is modeled in discrete layers of constant thickness). The mechanical coupling is achieved by imposing a traction force emerging from the computation of the viscous flow at the interface between the two sub-shells as a boundary condition to the elastic deformation problem. Note that in this regard, no mechanical feedback is introduced (from the elastic lithosphere to the viscous mantle). While the choice of different modeling procedures (spectral and finite volume methods) leads to a hybrid method for the deformation part of the problem, the treatment of the conservation of energy is homogeneous in the whole domain (elastic shell and viscous shell) : it describes thermal convection under a rigid plate so that, in the uppermost region corresponding to the elastic lithosphere, only thermal conduction is considered.

3.2.1 Conservation of energy

We solve the equation of conservation of energy in the Boussinesq approximation ; viscous dissipation is neglected :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{H}{\rho_m C_p}, \quad (3.1)$$

with T temperature, κ thermal diffusivity, H volumetric heating rate, $\rho_m = \rho(T_0)$ mantle density at reference temperature T_0 and C_p heat capacity (the various symbols are listed in Table 3.1). \mathbf{v} is the velocity field associated with the flow in the viscous shell ($\mathbf{v} = 0$ in the elastic shell where only conductive heat transfer is considered). In the framework of large viscosity variations caused by temperature gradients, this requirement is consistent with the nature of the asymptotic stagnant lid regime (e.g., Solomatov, 1995; Grasset et Parmentier, 1998) where a cold and viscous conductive lid naturally develops in the upper part of the layer. In order to be coherent, the thickness of the elastic shell d_e shall therefore be smaller than the stagnant lid thickness d_{sl} (cf. Fig. 3.1).

Thermal boundary conditions - Eq. (3.1) is solved within the spherical shell extending between radii R_c and R_s (cf. Fig. 3.1). On these two bounding spheres, uniform values of temperature (T_c and T_s) are prescribed, so that $\Delta T = T_c - T_s$ is the (non adiabatic) temperature variation across the whole mantle (elastic lithosphere and viscous mantle).

Numerical method - The treatment of the conservation of energy is included in the finite volume numerical tool OEDIPUS (Choblet, 2005; Choblet et al., 2007) solving thermal convection in the spherical shell. The grid mesh is based on the ‘‘cubed sphere’’ technique (Ronchi et al., 1996) that divides the spherical shell into six identical blocks with a staggered grid approach for discrete variables. A high-resolution flux-limiter method (Superbee, cf. Roe, 1985) is considered for the advection term. A parallel implementation enables efficient computation times. Unless explicitly mentioned, all the simulations presented here are performed using a mesh with $6 \times 64 \times 64$ grid cells.

3.2.2 Flow in the viscous shell

We consider viscous flow in the subdomain bounded by spheres of radii R_c and R_m (Fig. 3.1), i.e. beneath the shallow shell that is treated as an elastic medium (see below, Section 3.2.3). The equations describing conservation of mass and momentum are solved in the Boussinesq approximation :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

Symbol	Associated constant or variable	Unit
C_p	Heat capacity	$\text{J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$
\mathbf{D}	Deviatoric part of stress tensor	Pa
d_e	Thickness of the elastic shell	m
g	Gravitational acceleration	m s^{-2}
\mathbf{F}	Traction force at the surface of the viscous shell	Pa
F_r	Radial component of the traction force	Pa
F_t	Tangential component of the traction force	Pa
G	Gravitational constant	$\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$
H	Volumetric mantle heating	W m^{-3}
N	Geoid height	m
p	Pressure	Pa
r	Radius	m
R_c	Radius at the CMB	m
R_m	Radius at the bottom of the elastic shell	m
R_s	Total radius of the body	m
T	Temperature	K
T_c	Temperature at the base of the viscous shell	K
T_s	Temperature at the surface	K
t	Time	s
t^s	Surface dynamic topography	m
t^c	CMB dynamic topography	m
\mathbf{u}	Displacement	m
\mathbf{v}	Velocity	m s^{-1}
α	Thermal expansivity	K^{-1}
Q	Activation energy	kJ mol^{-1}
κ	Thermal diffusivity	m^2s^{-1}
η	Dynamic viscosity	Pa s
μ	Shear modulus	Pa
ρ	Density	kg m^{-3}
ρ_c	Core density	kg m^{-3}
ρ_m	Reference mantle density	kg m^{-3}
$\boldsymbol{\sigma}$	Stress tensor	Pa

TAB. 3.1 – List of variables, parameters and corresponding symbols.

with \mathbf{f} the body force. $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{D}$ is the stress tensor in this viscous layer with p , pressure, \mathbf{I} the identity tensor, and \mathbf{D} the deviatoric part. Assuming a Newtonian rheology,

$$\mathbf{D} = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t], \quad (3.4)$$

where η is the dynamic viscosity and \bullet^t denotes transposition (see Table 3.1).

Note that self-gravitation is not introduced in Eq. 3.3. Self-gravitation has a non-negligible effect on topographic response, especially at long wavelengths and is therefore included in studies dedicated to topography and geoid (cf. e.g., Zhong et Zuber, 2000; Zhong, 2002; Zhong et al., 2008). As pointed out by Zhong et al. (2008), self-gravitation does not modify the velocity field and can be accounted for easily as a post-processing process in the Stokes flow modeling. It will be included in future applications of the present tool to planetary objects.

In the following we describe results of thermal convection calculations as the final purpose of our method (cf. Section 3.3.3), but we also compute response functions of dynamic topography and geoid in order to test our numerical tool and to address the effect of viscoelastic deformation in a simple way (cf. Sections 3.2.4 and 3.3.2). For cases of thermal convection, the body force corresponds to the buoyancy term $\mathbf{f} = -\alpha\rho_m\mathbf{g}(T - T_0)$ (with α the coefficient of thermal expansion, \mathbf{g} gravity acceleration). The time-evolution aspect is then embedded in the coupling with the conservation of energy (eq. 3.1). In the case of response functions, the flow results from a normalized density anomaly located at a varying depth.

Viscosity is related to temperature as follows :

$$\eta(r, T) = \eta_c \eta(r) \exp \left[\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\Delta T + T_s} \right) \right], \quad (3.5)$$

Q being the activation energy, R the universal gas constant and η_c the viscosity at the bottom of the viscous shell. The radial dependency of viscosity includes either a continuous increase with depth or step-like variations. Note that only the latter is used to compute response functions.

Mechanical boundary conditions - The mechanical boundary conditions are free-slip on the bottom sphere ($r = R_c$) and no-slip at the top of the viscous domain ($r = R_m$) corresponding to the interface with the elastic shell mimicking the elastic part of the lithosphere. At the interface between the two shells ($r = R_m$), the traction force \mathbf{F} is computed in order to be prescribed as a bottom boundary condition for the elastic deformation of the upper shell (see below, Section 3.2.3) :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r, \quad (3.6)$$

with \mathbf{e}_r the radial unit vector.

Numerical method - The viscous flow is solved using a multigrid method with the same tool OEDIPUS as for the conservation of energy. Note however that for the specific, hybrid method described in the present study, the location of the upper boundary for the flow solver ($r = R_m$) is below the boundary used for the temperature field ($r = R_s$) if an elastic shell of thickness $d_e = R_s - R_m$ is introduced (see Fig. 3.1). In the present study, d_e is necessarily a multiple of the discrete layer thickness Δr . Velocity \mathbf{v} is set to zero in the region $R_m < r \leq R_s$. In order to avoid extreme viscosity gradients inherent to the use of eq. (3.5) (especially for very small values of d_e), a cut-off can be prescribed for viscosity so that the global contrast does not exceed a maximum value (typically 10^9) above which the flow solver becomes less efficient.

3.2.3 Deformation of the elastic shell

The elastic shell is located between radii $r = R_m$ and $r = R_s$ (Fig. 3.1). For simplicity, we assume that the material forming the bulk of the lithosphere is incompressible and its properties do not change laterally. This simplification is consistent with the model of mantle flow described above, where both compressibility and self-gravitation are omitted, and allows the effect of the elastic lithosphere on dynamic surface topography to be assessed at low computational expenses. Using the Eulerian representation, the equations governing small deformations of an incompressible elastic body of constant density can be expressed as follows :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.8)$$

The deviatoric part of the incremental stress tensor in the elastic shell $\boldsymbol{\sigma}$ is given by

$$\mathbf{D} = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t], \quad (3.9)$$

where μ is the elastic shear modulus and \mathbf{u} is the displacement (see Table 3.1).

Mechanical boundary conditions - The boundary condition at the deformed upper boundary is approximated by the conditions of the force equilibrium evaluated at $r = R_s$:

$$(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r = \rho_m (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{g}. \quad (3.10)$$

As noted above, the boundary condition at the lower boundary $r = R_m = R_s - d_e$ is formulated in terms of the surface force \mathbf{F} resulting from the viscous flow (cf.

eq. 3.6). Assuming that the density jump between the elastic lithosphere and the underlying mantle is zero, we can write the force equilibrium as follows :

$$(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

In general, \mathbf{F} can be decomposed into toroidal (\mathbf{F}_{tor}) and spheroidal (\mathbf{F}_{sph}) parts satisfying the conditions $\mathbf{F}_{tor} \cdot \mathbf{e}_r = \nabla \cdot \mathbf{F}_{tor} = 0$ and $\mathbf{e}_r \cdot \nabla \times \mathbf{F}_{sph} = 0$, respectively. If the shear modulus and the thickness of the elastic shell do not vary laterally, the toroidal component of \mathbf{F} does not contribute to the radial deformation of the shell and we can restrict our considerations to the spheroidal parts of eqs (3.7)-(3.11). The vector boundary condition (eq. 3.11) can then be replaced by two scalar conditions for the radial and tangential component of the spheroidal part of traction vector $(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r$,

$$[(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r]_r = F_r, \quad (3.12)$$

$$[(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r]_t = F_t, \quad (3.13)$$

where the subscripts r and t refer to radial and tangential components of the spheroidal part of a vector.

Numerical method - The set of eqs (3.7)-(3.10), (3.12) and (3.13) is solved in the spectral domain. We first represent the laterally dependent quantities in these equations by spherical harmonic series truncated at degree ℓ_{max} :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} [u_{\ell m}^{\ell-1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}(\theta, \varphi) + u_{\ell m}^{\ell+1}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}(\theta, \varphi)], \quad (3.14)$$

$$p(r, \theta, \varphi) \mathbf{I} = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} p_{\ell m}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,0}(\theta, \varphi), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{D}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \left[D_{\ell m}^{\ell-2,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-2,2}(\theta, \varphi) + D_{\ell m}^{\ell,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,2}(\theta, \varphi) + D_{\ell m}^{\ell+2,2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+2,2}(\theta, \varphi) \right], \quad (3.16)$$

where $\mathbf{Y}_{\ell m}^k$ and $\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}$ are respectively the vector and tensor spherical harmonics of degree ℓ and order m (see Appendix for definitions) and $u_{\ell m}^k$, $p_{\ell m}$ and $D_{\ell m}^{kn}$ are unknown coefficients depending on r which are to be determined. Introducing the

spectral representations (3.14)-(3.16) to eqs (3.7)-(3.10), (3.12) and (3.13) and applying formulas (A19)-(A26) given in Appendix, we obtain a set of ordinary differential equations in r classified according to degree ℓ and order m . The equations can formally be written as follows (see Appendix for details) :

$$\mathbf{A}(\ell, \mu) \frac{d\mathbf{x}_{\ell m}}{dr} + \mathbf{B}(\ell, \mu, r) \frac{\mathbf{x}_{\ell m}}{r} = 0, \quad (3.17)$$

where $\mathbf{A}(\ell, \mu)$ and $\mathbf{B}(\ell, \mu, r)$ are 6×6 matrices whose non-zero elements are listed in Table 7 in Appendix, and $\mathbf{x}_{\ell m}$ is the vector of the unknown coefficients of degree ℓ and order m ,

$$\mathbf{x}_{\ell m} = \left(u_{\ell m}^{\ell-1}, u_{\ell m}^{\ell+1}, p_{\ell m}, D_{\ell m}^{\ell-2,2}, D_{\ell m}^{\ell,2}, D_{\ell m}^{\ell+2,2} \right)^t. \quad (3.18)$$

Similarly, we can express the spheroidal part of the boundary condition (3.10) at the surface as

$$\mathbf{T}(\ell)\mathbf{x}_{\ell m} = 0, \quad (3.19)$$

and the conditions (3.12) and (3.13) at the bottom boundary of the elastic shell as

$$\mathbf{U}(\ell)\mathbf{x}_{\ell m} = [(F_r)_{\ell m}, (F_t)_{\ell m}]^t, \quad (3.20)$$

where $\mathbf{T}(\ell)$ and $\mathbf{U}(\ell)$ are 2×6 matrices (see Table 8 in Appendix), and $(F_r)_{\ell m}$ and $(F_t)_{\ell m}$ denote the known coefficients in the spherical harmonic expansions of F_r and F_t .

If the thickness of the shell is significantly smaller than its radius ($d_e \ll R_s$), the spectral equations given above can be solved in a membrane approximation (for a careful discussion of this approximation but with different boundary conditions, see Beuthe, 2008). In the present paper, we consider a shell of general thickness and we solve the linear system of ordinary differential eqs (3.17)-(3.20) numerically degree by degree. From the formal point of view, solving these equations is a standard mathematical problem and one can choose from a variety of numerical methods, such as the traditional matrix propagator method or finite differences (used here).

3.2.4 Dynamic topography and geoid

We now describe the evaluation of the synthetic observables (dynamic topography, geoid) induced by the deformations simulated in the model described above. The dynamic topography of a density interface (surface, core-mantle boundary) counterbalances the stress induced by mantle flow and can be expressed in terms of the stress tensor component σ_{rr} as follows (see, e.g., Ricard et al., 1984; Richards et

Hager, 1984) :

$$t^s(\theta, \varphi) = -\frac{\sigma_{rr}(R_s, \theta, \varphi)}{\rho_m g}, \quad (3.21)$$

$$t^c(\theta, \varphi) = \frac{\sigma_{rr}(R_c, \theta, \varphi)}{(\rho_c - \rho_m)g}, \quad (3.22)$$

where superscripts s and c refer to the surface and to the core-mantle boundary (CMB), respectively, σ_{rr} is the radial component of traction, and ρ_c is the density of the core. Note that σ_{rr} is evaluated either in the viscous formalism (at the CMB and, if no elastic shell is introduced, at the surface) or in the elastic formalism (at the surface, for $d_e \neq 0$).

Spectral decomposition - The spherical harmonic coefficients of the dynamic topography can then be computed from the spectral decomposition of σ_{rr} at a given interface :

$$t_{\ell m}^s = -\frac{[\sigma_{rr}(R_s)]_{\ell m}}{\rho_m g}, \quad (3.23)$$

$$t_{\ell m}^c = \frac{[\sigma_{rr}(R_c)]_{\ell m}}{(\rho_c - \rho_m)g}. \quad (3.24)$$

The expression of t^s in terms of σ_{rr} can be used for both viscous and elastic rheology. In the elastic case, however, it is more convenient to express t^s directly in terms of displacement :

$$t_{\ell m}^s = [\mathbf{u}(R_s) \cdot \mathbf{e}_r]_{\ell m}. \quad (3.25)$$

The gravitational potential is given by superposition of the potentials induced by internal density anomalies and corresponding dynamic topographies t^s and t^c . For a layered discretization of the density anomalies, we can evaluate the spherical harmonic coefficients of the geoid height as follows (Choblet et al., 2007) :

$$N_{\ell m} = \frac{4\pi G R_s}{g(2\ell + 1)} \left[\rho_m t_{\ell m}^s + \left(\frac{R_c}{R_s}\right)^{\ell+2} (\rho_c - \rho_m) t_{\ell m}^c + \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{R_s}\right)^{\ell+2} \Delta r \rho_{\ell m}^i \right], \quad (3.26)$$

where G is the gravitational constant, $\rho_{\ell m}^i$ are the spherical harmonic coefficients of the density in the i^{th} layer, r_i is the radius of the center of the layer and n is the number of layers in the model (note that eq. 3.26 is only valid for a constant g).

Normalized quantities for response functions - In order to validate the present method (see Comparison tests below) as well as in Section 3.3.2, we present topography response functions \tilde{t}_ℓ^s and \tilde{t}_ℓ^c which are normalized as follows :

$$\tilde{t}_\ell^s(r) = \frac{\rho_m}{\rho_{\ell m} \Delta r} t_{\ell m}^s(r), \quad (3.27)$$

$$\tilde{t}_\ell^c(r) = \frac{(\rho_c - \rho_m)}{\rho_{\ell m} \Delta r} t_{\ell m}^c(r), \quad (3.28)$$

where $t_{\ell m}^s(r)$ and $t_{\ell m}^c(r)$ are respectively the surface and CMB dynamic topographies (eqs 3.23 and 3.24), induced by a mass anomaly $\rho_{\ell m} \Delta r$ of degree ℓ and arbitrary order m imposed in a layer of thickness Δr centered at radius r (for more details concerning the response functions, see, e.g., Hager et Clayton, 1989).

The geoid response functions \tilde{N}_ℓ are normalized with respect to the geoid induced by a unit mass anomaly of degree ℓ imposed at the surface (without considering the associated surface dynamic topography). They can be easily expressed in terms of topography response functions \tilde{t}_ℓ^s and \tilde{t}_ℓ^c and the power of the ratio r/R_s , where r is the radius of the load :

$$\tilde{N}_\ell(r) = \tilde{t}_\ell^s(r) + \left(\frac{R_c}{R_s}\right)^{\ell+2} \tilde{t}_\ell^c(r) + \left(\frac{r}{R_s}\right)^{\ell+2}. \quad (3.29)$$

Comparison tests - The treatment of the conservation equation for energy (eq. 3.1) has been benchmarked earlier (see Choblet et al., 2007), the only difference in the method presented here being the use of a more precise high resolution method for advection, namely the Superbee flux limiter (Roe, 1985). We thus focus the comparison tests on the deformation part of our tool : the method described above treating the two subshells with different computational techniques (Hybrid Method, HM) is tested here against a numerical tool that solves the Stokes problem using a semi-spectral technique in both viscous and elastic shells (Čadek, 1989) (Semi-Spectral Method, SSM). SSM allows to use a high radial resolution (for example, ~ 3000 layers will be used in the viscous shell, in the following), whereas, because of computational costs, only a limited number of layers (typically 64 or 128) are used in HM (note however that only the latter enables to include lateral viscosity variations). Owing to its better resolution, SSM is considered to be the reference method, and the term “error” in the text below thus mostly refers to the grid-based flow solver in HM (although its results are not strictly compared with an analytical solution). We also compare our method to an approach used in earlier studies to mimic the viscoelastic behavior of planetary bodies over geologically relevant time-scales (cf. e.g., Zhong, 2002). In this method (IVF-TES, Instantaneous Viscous Flow - Thin Elastic Shell), the surface topography obtained for a purely viscous flow with a free-slip surface is applied as a surface load to a thin elastic shell (cf. Turcotte et al., 1981). However, self-gravitation is neglected here while it is considered in Zhong (2002).

The size of the planetary body considered in the following tests corresponds to the size of Mars ($R_c = 1700$ km and $R_s = 3400$ km). The gravitational acceleration

as well as mantle and core densities are also set to Mars-like values (see Table 3.3). While viscosity is set to 1 in the deepest part of the mantle, a high value of viscosity (10^6) is imposed on the top 240 km of the body. We compare response functions obtained with HM and SSM using 4 different configurations of elastic lithosphere : In addition to the purely viscous case ($d_e = 0$), three elastic thicknesses are considered, $d_e = 53, 106$ and 159 km. We remind the reader that, as mentioned in Section 3.2.2, the elastic thickness has to be a multiple of the discrete layer thickness in HM ($\Delta r = (R_s - R_c)/64$, when 64 radial layers are used). The agreement between HM and SSM is illustrated in Fig. 3.2 for harmonic degrees $\ell = 2$ and $\ell = 16$. As in the purely viscous case, the accuracy of HM is found to be rather high (see Table 3.2). Note that the errors on surface topography increase significantly with increasing degree ℓ and increasing elastic thickness d_e . The latter is mostly due to the fact that the error is defined as a difference between HM and SSM response functions normalized by the maximum value of the SSM response function which, for $d_e > 0$, decreases with increasing ℓ and increasing d_e (Fig. 3.2). A similar consequence of this normalization is that the errors of geoid at low degrees increase when the elastic thickness d_e increases (because the maximum for a given response function decreases). For higher degrees, the filtering effect of the elastic lithosphere on the surface topography causes an opposite effect : since the contribution of surface topography to geoid is reduced due to the elastic lithosphere, the error of the associated geoid diminishes. Errors can be significant at high degree (more than 10% for topography at $\ell=64$) due to the chosen grid ($6 \times 64 \times 64 \times 64$). Note finally that the agreement with IVF-TES on topography response function, presented in Fig. 3.2 for the case $d_e = 106$ km and degrees $\ell = 2$ and 16 , is very good.

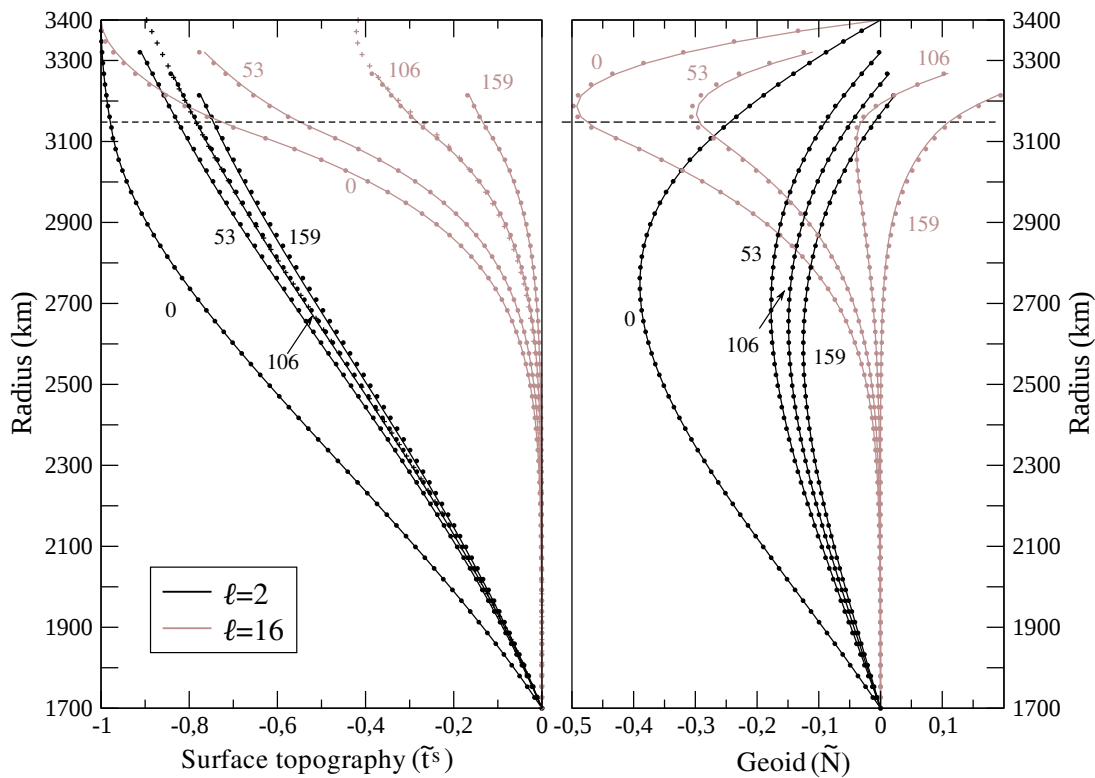


FIG. 3.2 – Influence of the elastic thickness on normalized surface topography (left) and geoid (right) response functions obtained for a viscous shell overlain by an elastic shell of thickness 0, 53, 106, or 159 km for degrees $\ell = 2$ (black) and 16 (grey). Filled circles indicate HM (Hybrid Method) results while lines refer to the SSM (reference Semi-Spectral Method). Crosses denote the results obtained with the IVF-TES (Instantaneous Viscous Flow with Thin Elastic Shell) model (see e.g., Zhong, 2002). Viscosity is 10^6 above the dashed line, 1 below.

Degree	$d_e=0$ km		$d_e=53$ km		$d_e=106$ km		$d_e=159$ km	
	Topography	Geoid	Topography	Geoid	Topography	Geoid	Topography	Geoid
2	0.05 %	0.12 %	0.14 %	0.62 %	0.13 %	0.66 %	0.14 %	0.83 %
4	0.06 %	0.14 %	0.16 %	0.57 %	0.17 %	0.67 %	0.18 %	0.86 %
8	0.21 %	0.58 %	0.27 %	0.89 %	0.31 %	1.16 %	0.33 %	2.23 %
16	0.76 %	2.08 %	0.87 %	3.10 %	0.95 %	1.49 %	1.04 %	0.64 %
32	2.52 %	5.9 %	3.19 %	2.30 %	3.65 %	0.47 %	3.97 %	0.41 %
64	7.26 %	12.5 %	10.82 %	0.74 %	12.5 %	0.38 %	13.29 %	0.63 %

TAB. 3.2 – Errors on surface topography and geoid response functions obtained with our method. The error is the maximum difference between the models obtained by our hybrid method (HM) and the reference semi-spectral method (SSM) normalized by the maximum absolute value obtained by SSM for a given response function.

3.3 Results

3.3.1 Elastic filtering of dynamic topography for planetary bodies

The elastic shell acts on the dynamic surface topography as a low-pass filter with an effect increasing with increasing d_e . In the purely viscous case, the surface topography response function $\tilde{t}_\ell^s(r) \rightarrow -1$ for $r \rightarrow R_s$, i.e. the load imposed at the surface is isostatically compensated. If an elastic shell is imposed atop the viscous mantle, the amplitude of the surface topography due to the viscous flow is always diminished. The consequence of the undercompensated dynamic topography is that the geoid response function does not vanish at the surface but has a positive value. All these aspects have been discussed in detail by Zhong (2002).

In order to guide the interpretation of the results obtained with our method (both in the case of response functions and of full convection calculations), in terms of deformation of the elastic lithosphere, it is enlightening to introduce elastic filter coefficients C_ℓ and S_ℓ describing the relationship between the forces F_r and F_t acting at the base of the shell and the resultant surface topography t^s :

$$t_{\ell m}^s \rho_m g = -C_\ell (F_r)_{\ell m} - S_\ell (F_t)_{\ell m}. \quad (3.30)$$

The linear relationship (3.30) is valid for a laterally homogeneous elastic shell of uniform thickness and the coefficients C_ℓ and S_ℓ only depend on the parameters of the shell, namely R_s , d_e and μ . Taking into account that

$$t_{\ell m}^{s,visc} = -\frac{(F_r)_{\ell m}}{\rho_m g}, \quad (3.31)$$

where $t^{s,visc}$ is the surface topography corresponding to a purely viscous case, eq. (3.30) can be rewritten as

$$t_{\ell m}^s = \left[C_\ell + S_\ell \frac{(F_t)_{\ell m}}{(F_r)_{\ell m}} \right] t_{\ell m}^{s,visc}. \quad (3.32)$$

The coefficient C_ℓ is an analogy of the compensation coefficient introduced by Turcotte et al. (1981) to describe the response of an elastic shell to surface loading. Its value is always positive and smaller than 1 and can be determined from solving eqs (3.17), (3.19) and (3.20) for $(F_r)_{\ell m} = -1/(\rho_m g)$ and $(F_t)_{\ell m} = 0$ (C_ℓ is then directly equal to $(u_r)_{\ell m}$). Similarly, one can determine the coefficient S_ℓ from the solution obtained for $(F_r)_{\ell m} = 0$ and $(F_t)_{\ell m} = -1/(\rho_m g)$.

Radial approximation - In order to evaluate the distinct contributions of lateral F_t and radial F_r components of the traction force to the elastic deformation, we first consider a simplified model of the mechanical coupling between the shells : only F_r

is used to compute the deformation of the elastic shell in the boundary conditions (3.12) and (3.13) while F_t is set to zero (hereinafter, this simplified approach will be referred to as “radial approximation”). In this context, we first discuss coefficient C_ℓ .

Fig. 3.3a shows the fraction of the dynamic topography C_ℓ that remains after elastic filtering, as a function of harmonic degree (see eqs 3.30-3.32). It is worth noting that the filtering effect strongly differs for different solar system bodies. Three generic bodies are considered : two terrestrial planets corresponding in size to Venus and Mars, and a “typical” icy moon orbiting a giant planet corresponding to Dione, a small moon of Saturn ($R_s \simeq 500$ km). Two values of the elastic thickness are considered for each body. While the average thickness of the elastic lithosphere on Venus is probably rather small ($d_e \leq 50$ km) compared to its size (e.g., Pauer et al., 2006), Mars is believed to have a strong elastic lithosphere with a thickness exceeding 100 km at present (e.g., Zhong, 2002). A rough estimate of the elastic thicknesses of various icy satellites was provided from local topography measurements and it usually amounts to a few kilometers (e.g., Nimmo et al., 2003; Giese et al., 2007; Nimmo et al., 2010).

For a Venus-like planet, with a large outer radius and a relatively thin elastic lithosphere, the dynamic surface topography is only weakly modulated by the elastic shell and a purely viscous model with $d_e = 0$ may provide a good first approximation of the dynamic surface topography and the geoid, at least at low degrees. In contrast, even a relatively thin elastic lithosphere can significantly suppress the topography signal due to a viscous flow in the interior of Dione : an elastic lithosphere of 2 km leads to a dynamic topography which is reduced by a factor of two in comparison with the purely viscous case. For a 5 km-thick elastic lithosphere, the signature of mantle convection in dynamic topography of Dione becomes negligible because only a small fraction of the “viscous” dynamic topography can be observed (12% at degree 20). The case of a Mars-like body displays the maximum variation of the filtering effect on the dynamic surface topography : for $d_e = 100$ km, the topography is reduced by $\sim 15\%$ at degree $\ell = 2$ but by more than 70% if $\ell \geq 19$.

Effect of tangential force - Since the mechanical boundary condition at the surface of the viscous mantle (i.e. beneath the elastic lithosphere) is rigid (no-slip), both the normal (or radial, F_r) and shear (or tangential, F_t) tractions are non-zero. The latter component transmits a bending moment to the elastic shell which results in a deflection with a sign opposite to that caused by F_r and thus may provide an additional filtering effect. To our knowledge, the single comparable study proposing such a mechanical coupling between mantle convection and deformation of an elastic lithosphere is proposed by Marquart et Schmeling (1989) in order to study the effect of small-scale convection beneath continents on the geoid and topography. In the

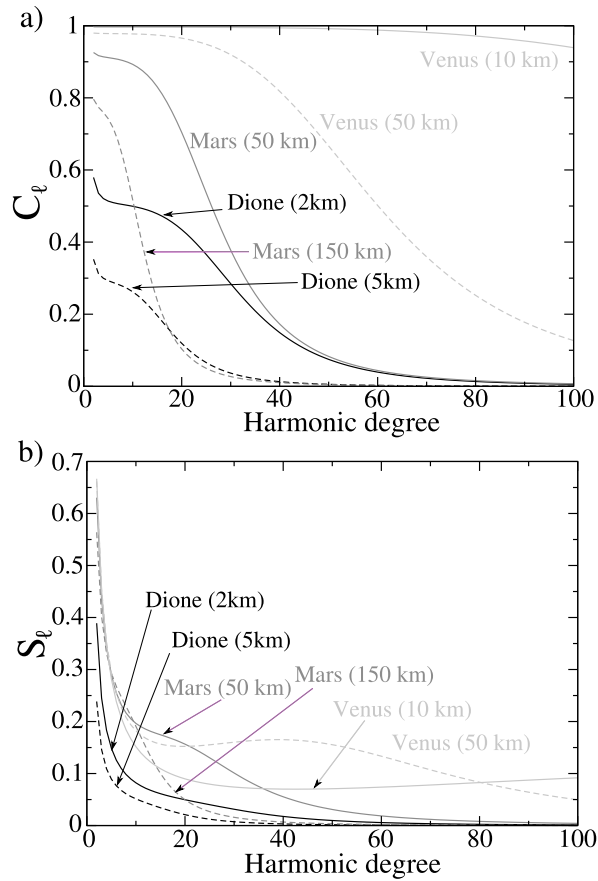


FIG. 3.3 – Elastic filter coefficients C_ℓ (top) and S_ℓ (bottom) as functions of harmonic degree ℓ (see eqs. 3.30, 3.32) computed for three generic bodies : Venus-like (light grey lines), Mars-like (grey) and Dione-like (black). Two different thicknesses d_e of the elastic lithosphere are considered for each body. Values of g , μ and ρ_m for Mars and Venus are listed in Table 3.3. In the case of Dione, $g = 0.22 \text{ m s}^{-2}$, $\mu = 9 \text{ GPa}$ and $\rho_m = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.

framework of eq. (3.32), this contribution is measured by coefficient S_ℓ .

Fig. 3.3b shows the values of the coefficient S_ℓ computed for the same three generic bodies. At low degrees, the values of S_ℓ are smaller than those of C_ℓ but their relative importance increases with increasing degree. S_ℓ decreases with increasing degree for all three bodies, except for Venus that exhibits an almost constant value of S_ℓ (0.15) between degrees 20 to 60 for $d_e = 50$ km and, for $d_e = 10$ km, it even increases for degrees larger than 40. Although the value of S_ℓ is always positive, the tangential force tends to diminish the surface topography for small harmonic degrees (in most cases, the ratio $(F_t)_{\ell m}/(F_r)_{\ell m}$ is negative). In conclusion, for a similar viscous flow, an identical ratio between tangential and radial tractions will induce significantly different topographic responses, depending on the body size and on the degree considered.

3.3.2 Lithospheric filtering

In the hybrid method we propose, the inclusion of an elastic shell of thickness d_e modifies the geometry of the viscous domain. For a given configuration, the viscous flow varies slightly when various values of d_e are considered : first, the no-slip boundary condition is not prescribed at the same depth ; second, the thickness of the high viscosity region varies. Furthermore, the traction force is not evaluated at the same radius either. We term ‘‘lithospheric filtering’’, the effect resulting from both this viscous aspect and the purely elastic filtering discussed in Section 3.3.1 : While coefficients C_ℓ and S_ℓ provide an assessment of the elastic filter, response functions displayed in Figs 3.2 and 3.4 show this lithosphere filtering effect.

Upper panels of Fig. 3.4 display surface dynamic topography response functions for a Mars-like body. They show that, in the radial approximation, the lithospheric filtering is actually very similar to the purely elastic effect for very low degrees : the curves for $\ell = 2$ grossly correspond to what would be obtained if the viscous response functions were scaled globally with the corresponding value of C_ℓ (e.g., ~ 0.85 for $d_e \sim 106$ km). This is because such low degrees are not very sensitive to the viscous effects associated with varying d_e discussed above. For larger degrees, more sensitive to the shallower viscous flow, although the shape of the response function remains similar to the purely viscous response function, topography is systematically larger than predicted by the simple estimation of the C_ℓ coefficient. The lithospheric filtering is thus not as efficient as the purely elastic filtering in the radial approximation.

As predicted above, the amplitude of the surface dynamic topography obtained within the radial approximation is always larger than in the case when both components of traction are included.

In this example corresponding to Mars-like dimensions, introducing F_t in the coupling results in a reduction of the dynamic topography of the surface that can be larger than 20 % of the value in the radial approximation for degree 2 (for larger degrees the relative difference is even larger because the absolute normalized value corresponding to the radial approximation is small). Even more dramatic is the effect on geoid response functions : bottom panels of Fig. 3.4 indicate that the strong decrease of the geoid for small harmonic degrees shall firstly be attributed to the effect of the tangential traction on the elastic shell. For example, while the maximum amplitude of the geoid response function for $\ell = 2$ is reduced of about 75% by the introduction of a 100 km thick elastic lithosphere (from ~ -0.4 for $d_e = 0$ to -0.15 for $d_e = 106$ km), the radial approximation would have predicted a filter of only 25%.

3.3.3 Application to cases with thermal convection

All the results discussed above in the framework of response functions find a confirmation in cases where thermal convection is considered. In these calculations, the resolution of energy conservation (eq. 3.1), which controls the time evolution of the flow, is coupled to the deformation equations (that were considered to produce response functions). One important difference between response functions and convection calculations is that lateral viscosity variations naturally arise in the latter which may result in significant discrepancies : for example, the stagnant lid thickness varies laterally (Solomatov et Moresi, 1996) (e.g., the lid can be eroded by hot plumes impinging on the cold boundary layer), influencing the structure of both the viscosity and density fields in this uppermost region. This is expected to affect the dynamic topography (rheology and buoyancy shaping the viscous flow) as well as the geoid (through the deformation of interfaces and more directly, through the density structure caused by lid thickness variations).

Two numerical experiments are considered in the following for distinct sets of values of the parameters that fully characterize these cases (namely the ratio between inner and outer radii determining the spherical geometry, the bottom Rayleigh number Ra_B , the temperature and depth dependence for viscosity and the volumetric heating rate H). Typical dimensions of two planetary bodies (Venus and Mars) as well as material parameters corresponding to silicates were considered (see Table 3.3) to compute the dynamic topography and geoid. Note that several values are not well constrained for these planets (especially in terms of rheology). For this reason, we have selected two convection cases that grossly resemble Venus and Mars

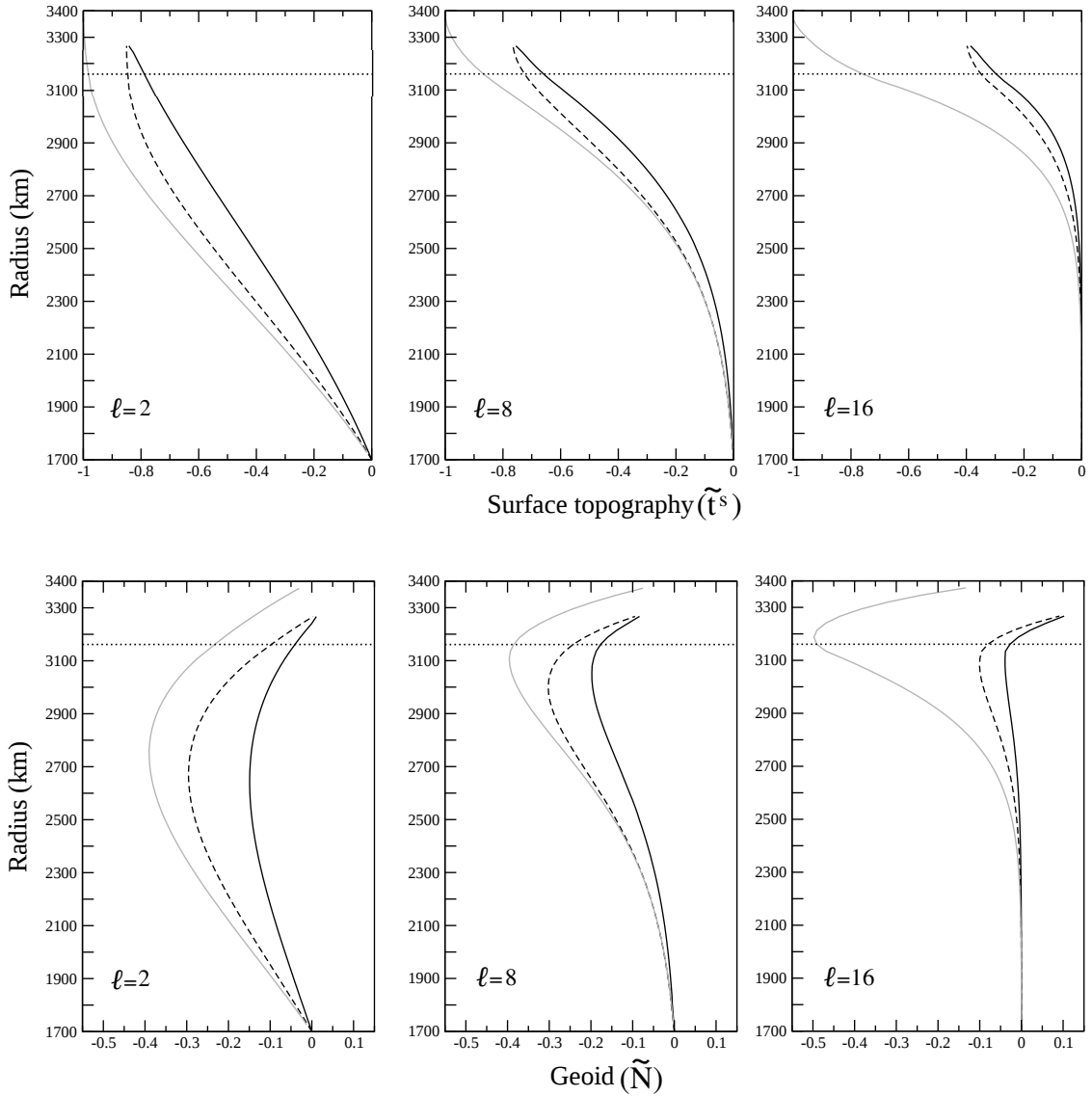


FIG. 3.4 – Influence of the mechanical coupling on normalized surface topography (top) and geoid (bottom) response functions for a viscous shell overlain by an elastic shell of thickness 106 km for harmonic degrees $\ell = 2, 8$ and 16. Dashed lines correspond to results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details). Grey lines indicate the case without an elastic lithosphere ($d_e = 0$ km), for comparison. Viscosity is 10^6 above the horizontal dotted line, 1 below.

in terms of lithosphere thickness and, in the case of Venus, concerning the number of large scale upwelling plumes that might cause the long wavelength features in the observed topography and geoid. In the case of Mars, convection with planforms associated with low harmonic degrees have been invoked to explain early processes : $\ell = 1$ possibly causing the hemispheric dichotomy (cf. e.g., Ke et Solomatov, 2006; Roberts et Zhong, 2006) ; $\ell = 2 - 4$ associated with the Tharsis rise (cf. e.g., Roberts et Zhong, 2004) but it is difficult to relate any surface observation to the planforms associated with the present day convective regime.

Radial viscosity profiles corresponding to the two convection cases are presented Fig. 3.5. The Venus-like simulation includes an exponential increase of the viscosity with depth, as follows :

$$\eta(r) = \exp \left[-\beta \left(\frac{r - R_c}{R_s - R_c} \right) \right], \quad (3.33)$$

the viscosity jump associated with this pressure-like dependence being $\Delta\eta(P) = \exp(\beta)$ (see Table 3.3). This increase corresponds to an augmentation of more than two orders of magnitude. Together with the temperature dependence of the viscosity, this leads to a viscosity structure reaching a minimum of $\sim 10^{20}$ Pa s at the base of the cold boundary layer and a maximum of $\sim 10^{22}$ Pa s above the hot boundary layer. Such values are suggested for Venus by studies that constrain radial viscosity variations from the observed geoid and topography (Pauer et al., 2006; Steinberger et al., 2010). Note however that the thickness of the stagnant lid in our Venus-like simulation (~ 300 km) lies in the upper bound of the range for possible lithospheric thickness for Venus (Anderson et Smrekar, 2006). The case of Mars offers a significantly different application : due to its size, the primordial energy associated with its formation is likely to be smaller, leading to a cooler state at present - in the (certainly simplistic) framework of stagnant lid convection, the cooling rate itself is almost independent of planet size. As a result, the lithosphere thickness is likely to be larger than on Venus which is consistent with elastic thickness values inferred from gravity and topography data modeling : estimations vary from about ~ 15 km for the oldest Noachian features to an average of ~ 70 km for Amazonian features, with maximum values over than 100 km (see McGovern et al., 2004; Belleguic et al., 2005) and even larger than 300 km in polar regions (Phillips et al., 2008). As a consequence, in our Mars-like simulation, viscosity depends strongly on temperature, leading to the formation of a thick stagnant lid (~ 550 km). Variations due to pressure are chosen to be very small.

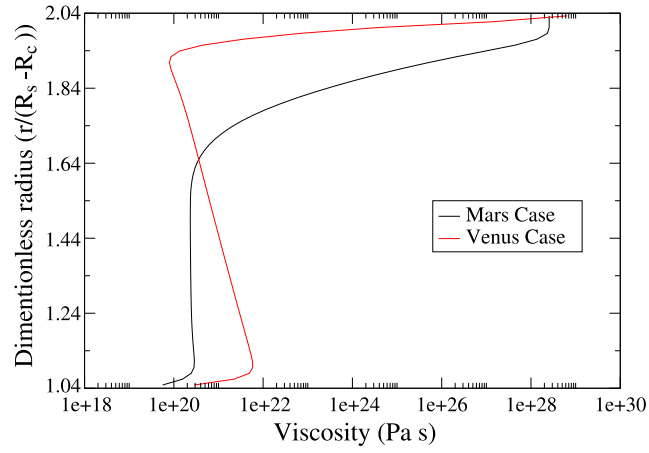


FIG. 3.5 – Horizontally averaged viscosity profiles associated with the two thermal convection cases (Mars-like and Venus-like body).

	<i>Venus – like</i>	<i>Mars – like</i>
R_s	6050 km	3400 km
R_c	3085 km	1734 km
d_e	46 km	156 km
g	8.9 m s^{-2}	3.7 m s^{-2}
μ	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
ρ_c	$10\,000 \text{ kg m}^{-3}$	$10\,000 \text{ kg m}^{-3}$
ρ_m	3300 kg m^{-3}	3300 kg m^{-3}
H	0	0
ΔT	2969 K	1500 K
Q	300 kJ mol^{-1}	346 kJ mol^{-1}
$\Delta\eta(P)$	148	1.2
Ra_B	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^7$

TAB. 3.3 – Parameter values used in the two convection calculations. Symbols are described in Table 3.1.

Venus-like planet - The elastic lithosphere of Venus is often considered to be relatively thin ($\sim 10 - 30$ km, cf. Barnett et al., 2002; Pauer et al., 2006). Therefore although elastic flexure might be an important phenomenon at a regional scale (Barnett et al., 2002), it is often considered to play a limited role on the long wavelength topography and geoid. This is apparently confirmed by the value of the compensation coefficient C_ℓ displayed in Fig. 3.3a : even for $d_e = 50$ km, the filtering is less than 10 % for $\ell < 30$. However, the quantitative effect of bending caused by tangential traction cannot be determined from S_ℓ (Fig. 3.3b) since the knowledge of the ratio F_t/F_r is required (eq. 3.32). A complete description of stagnant lid convection within a Venus-like planet therefore places more realistic constraints on what the effect of a thin elastic shell might be.

Fig. 3.6 shows the surface dynamic topography and geoid obtained for this convective case at a given instant once statistical steady-state has been reached. Three configurations are compared, one where no elastic shell is considered, and in the case of a 46 km thick elastic lithosphere (probably corresponding to a higher end for Venus, note however that the value of d_e evaluated from topography and gravity fields reflects the thickness at the time of loading rather than the present day thickness, see Watts et Zhong, 2000), two cases are considered for the mechanical coupling at the basis of the elastic shell : topography and geoid are first evaluated using the radial approximation (i.e. only normal traction F_r is used) and then using a full coupling (both normal F_r and tangential F_t components are considered).

Note first that the absolute values for both geoid and topography grossly correspond to the magnitude reported for Venus (cf e.g., Wiczorek, 2007) : both geoid and topography highs on Venus are approximately twice larger than the maximum values reported here (however, these are systematically associated with continental plateaus or volcanic swells and almost certainly imply thicker crust, not taken into account in our models).

As expected, the elastic filtering effect is small when the radial approximation is postulated : the maximum difference induced by a case with a 46 km thick elastic lithosphere compared to a case without elastic lithosphere is less than 2 % on surface topography and $\sim 12\%$ on geoid. However, when the full coupling is introduced, the maximum difference amounts to $\sim 8\%$ for topography and over 35 % for geoid. While the lithosphere filtering effect is modest on topography, this deficit causes a significant disequilibrium in the geoid signal that integrates both the contribution of internal density anomalies and the topography (reduced here by the rigidity of the elastic lithosphere). These results demonstrate that the bending effect could be of major importance when considering the geoid of large planets with relatively thin lithospheres.

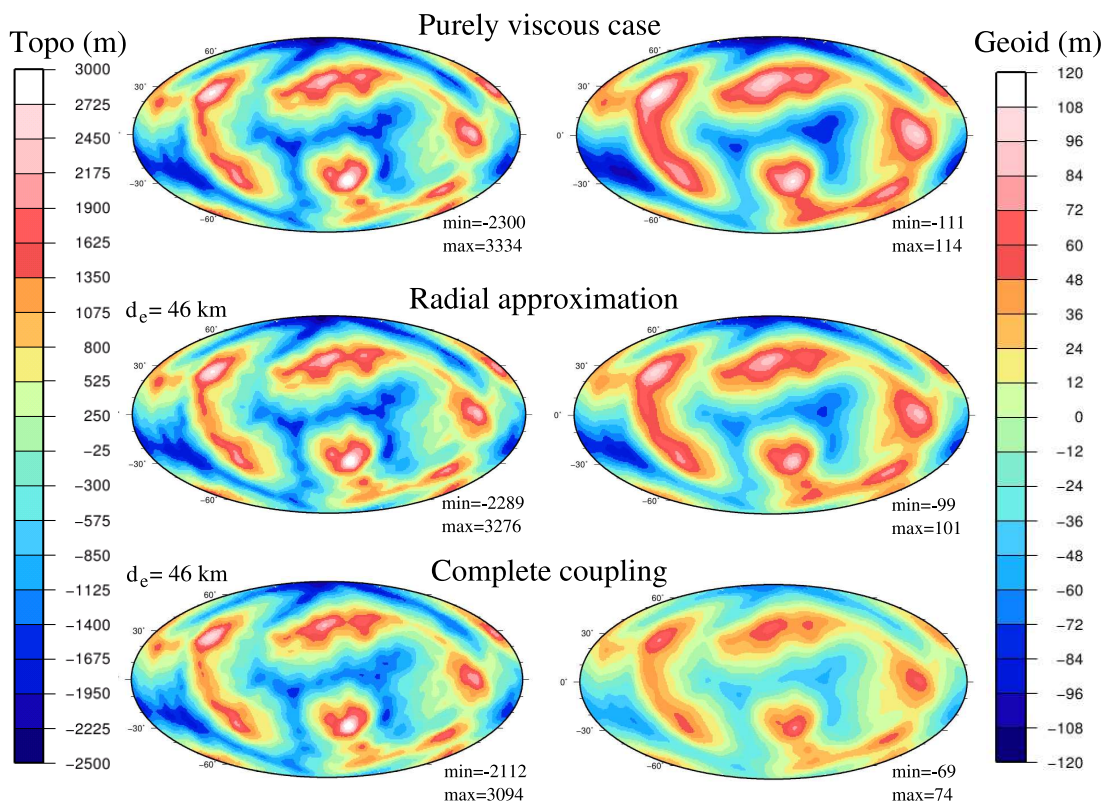


FIG. 3.6 – Topography (left column) and geoid (right column) obtained for the Venus-like convection case (see Table 3.3). (Top) No elastic lithosphere. (Middle) elastic thickness of 46 km in the radial approximation. (Bottom) elastic thickness of 46 km with full coupling. See text for more details on mechanical coupling.

Power spectra for the topography and geoid (Fig. 3.7) further illustrate that while the lithosphere filtering effect is significant for low degrees ($\ell < 15$) it becomes negligible for smaller wavelengths ($\ell > 20$). The radial approximation leads systematically to an underestimation of the filtering effect : the power associated with large harmonic degrees is even larger than in the purely viscous solution (this is caused by the modification of the viscous flow and mostly by the fact that the traction force is not evaluated at the same depth when an elastic shell is included in the uppermost part of the mantle which reduces the thickness of the high viscosity region, see above).

Mars-like planet - Mars being expected to have a much thicker elastic lithosphere than Venus (see above), we compare topographies and geoid issued from the Mars-like case considering three different elastic thicknesses (52, 104 and 156 km,

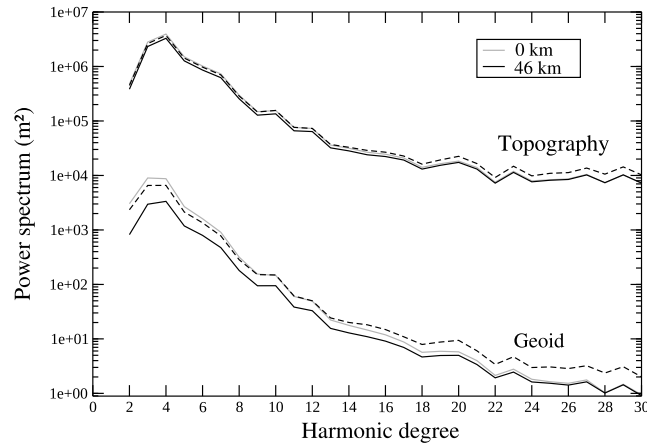


FIG. 3.7 – Power spectra of surface topography and geoid obtained for the Venus-like convection case (see Table 3.3) with a 46 km thick elastic lithosphere. Dashed lines indicate results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details). Grey lines indicate the case without an elastic lithosphere ($d_e = 0$ km).

see snapshot displayed in Fig. 3.8). Since among the two synthetic observations produced from our numerical experiments, the geoid is the most sensitive to the lithosphere filtering effect, Fig. 3.8 does not display dynamic topographies. Contrary to the Venus-like case, the geoid values obtained here cannot be compared to actual observations of the Martian geoid (with a range ~ 2.5 km when the J2 term is neglected, cf. Wiczeorek, 2007). This is most probably caused by the strong domination of the Tharsis rise in this signal (with most of the power associated with harmonic degrees $\ell = 2 - 3$), not present in our model. For this reason, our results cannot be compared directly to Martian data and may only stand comparison with what could be the effect of thermal convection on geoid and topography for a Mars-like planet, at present.

We observe that the lithosphere filtering effect is not negligible, even when the radial approximation is considered : increasing the elastic thickness, the magnitude of the geoid is reduced by about 12 %, 30 % and 50 % for the three values considered. However, introducing the full mechanical coupling (i.e. taking into account tangential traction), gives rise to a significantly stronger reduction of the amplitude of geoid anomalies : 47 %, 61 %, and 77 % for $d_e = 52$, 104 and 156 km, respectively.

Fig. 3.9 displays the geoid power spectral corresponding to Fig. 8. The radial approximation overestimates the geoid especially at low degrees ($\ell \leq 15$ for $d_e = 52$ or 104 km). It is however interesting to note that, when the elastic thickness or the degree increases, the radial approximation tends to produce a geoid that has a spectrum very similar to the one produced using the full coupling, or even smaller ($10 \leq \ell \leq 22$ for $d_e = 156$ km, for example). This phenomenon is due to the change

of sign of the ratio $(F_t)_{lm}/(F_r)_{lm}$.

3.4 Discussion

Rheology of the lithosphere - In this study, we describe the cold lithosphere of planets and satellites by two juxtaposed layers : one purely elastic above one purely viscous. Realistic cases might involve more complex rheological structures. First, the plastic behavior of the lithospheric material could lead to the rupture of at least part of the lithosphere : such a behavior is introduced to mimic plates subduction by considering a yield stress in the viscous lid of the Earth's mantle simulations (cf. e.g., Tackley, 1998a,b). In our model, we assume that this plastic zone is thinner than the stagnant lid : Fowler (1993) showed that in this framework, the stagnant lid solution remains valid and that stresses at the top of the viscous part of the lid control the topographic uplift. A further requirement is that the uppermost plastic zone is also significantly thinner than the elastic shell we consider. This is the case in the convection calculations presented above although Venus is likely to present periods when the relatively low yield stress of rocky material can induce a plastic region thicker than the viscous lid, thus inducing the possibility of subduction initiation (Fowler et O'Brien, 2003; Solomatov, 2004). A second limitation is that the present model assumes an instantaneous compensation while owing to the very large lithospheric viscosity, the steady state compensation should be delayed by a transient rebound, particularly at high degrees (cf. Zhong, 2002). This formalism is valid to study the topography response to present-day internal dynamics (i.e. the current dynamical support of Tharsis, as in Zhong et Roberts, 2003; Roberts et Zhong, 2004). However, the description of a "frozen" topography acquired early during the planet's history over its entire evolution with such a tool is problematic : we therefore plan as a future development to replace the purely elastic behavior of the uppermost shell by a viscoelastic behavior.

Elastic lithosphere thickness - We focus on the introduction of the mechanical filtering effect of the lithosphere on the topography and geoid produced by a convective mantle. The precise nature of the elastic lithosphere is not addressed here but should be included in future applications of our tool. A simple treatment of this problem would consist in the definition of the lithosphere thickness as the depth of a given isotherm (e.g., ~ 800 K as proposed by Roberts et Zhong 2004 following an

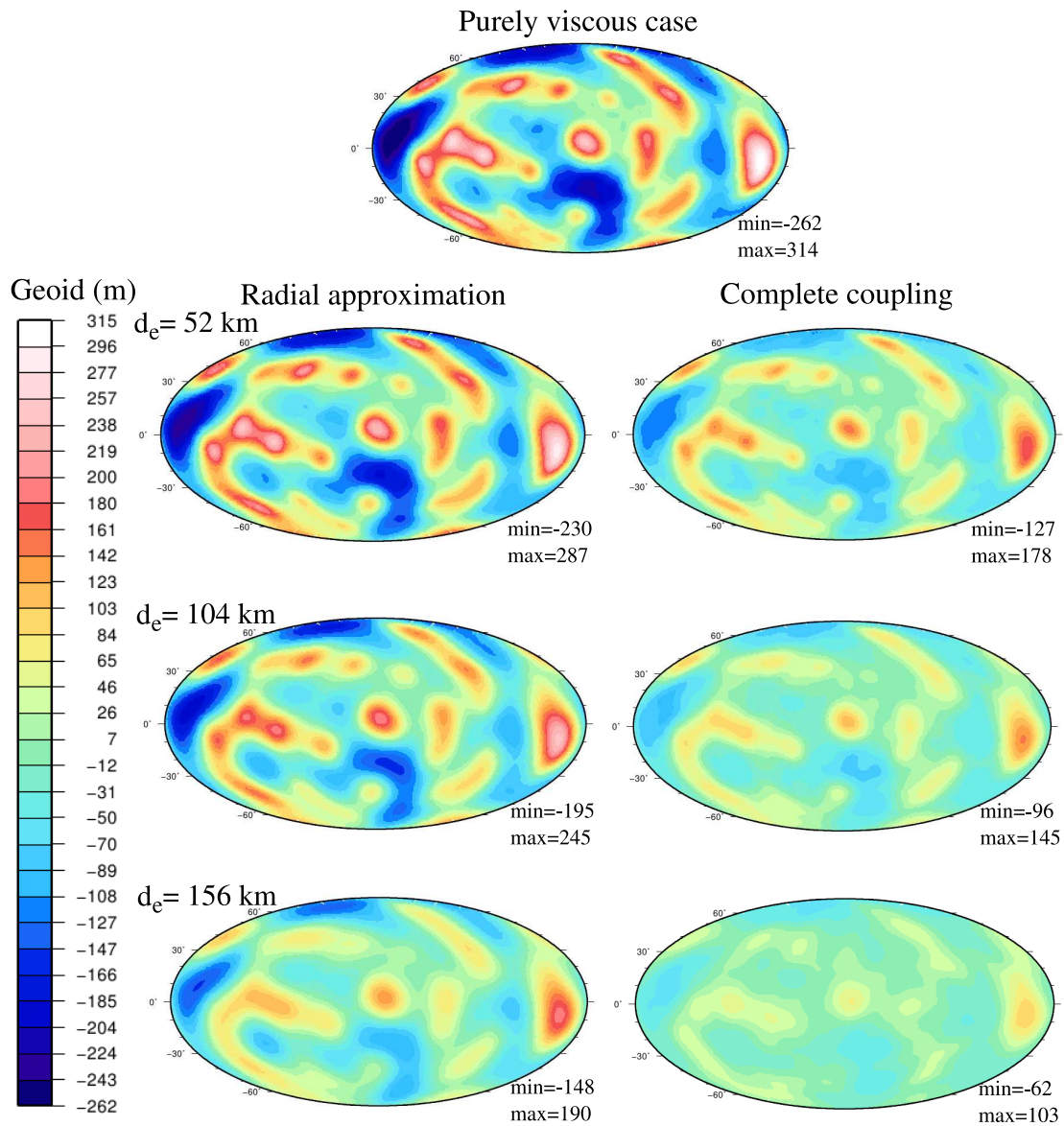


FIG. 3.8 – Geoid obtained for the Mars-like convection case (see Table 3.3). The uppermost panel corresponds to a case with no elastic lithosphere. Below, cases with elastic thicknesses of 52, 104, 156 km are presented. (Right) Full coupling. (Left) Radial approximation. See text for more details on mechanical coupling.

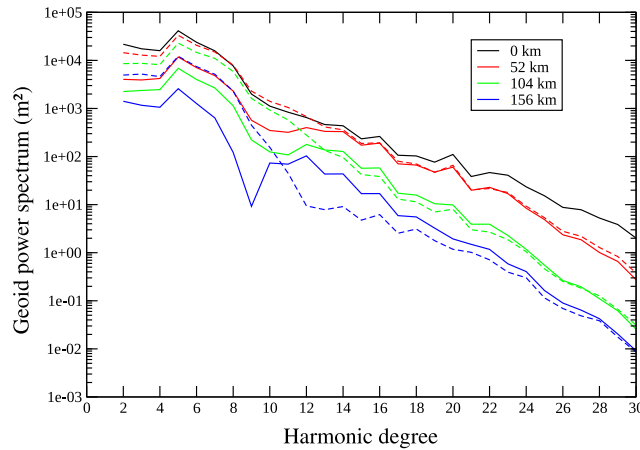


FIG. 3.9 – Geoid power spectra obtained for the Mars-like convection case (see Table 3.3). Dashed lines indicate results obtained in the radial approximation while solid lines correspond to results obtained with the full coupling (see text for more details).

early study by Watts et al. 1980). It has been suggested however from the observation and modeling of continental lithosphere on Earth that a precise definition of the elastic thickness should involve a more complex mechanical aspect that incorporates the rheology of mantle and crust (cf. Burov et Diament, 1995) : the presence of an incompetent layer located in the lower crust for younger and warmer lithospheric regions can lead to a decoupling of the crust/mantle interface. In the framework of our tool, such an effect can be introduced in a straightforward manner using the strength envelope formalism as proposed in the parameterized evolution models proposed by Grott et Breuer (2008), for example. Whether the elastic lithosphere is defined using an isotherm or in a more complex mechanical way, lateral variations of the elastic thickness shall be expected. Such variations cannot be treated with our tool in its present form and will be the subject of a subsequent effort.

Elastic shell above (ESA) or elastic shell within (ESW) ? - The above results clearly show that the bending moment induced by tangential traction from the convective mantle at the base of the elastic shell shall be included in the mechanical coupling. A legitimate question is whether the nature of the mechanical model introduced here (ESA) may partly bias this conclusion : indeed, prescribing a no-slip boundary condition for the viscous flow at the interface between the elastic and viscous shells could affect the stress field in a way that is not realistic when compared to a full viscoelastic simulation (that unfortunately no numerical tool is able to produce at the present day). We therefore have performed additional tests involving a second mechanical setup (ESW). In these supplementary experiments, instead of being confined in the region beneath the elastic shell (Fig. 3.1), the viscous flow develops in the whole spherical shell. The traction prescribed at the basis

of the elastic shell is then computed from the stress field at an appropriate depth within the stagnant lid, in a part of the viscous flow where no specific mechanical boundary condition is prescribed. A different simplification is therefore inherent to this second approach (similar in a way to the IVF-TES method of Zhong (2002)) : the rigidity of the lithosphere is not taken into account when evaluating stresses. We consider that it constitutes an opposite endmember with regard to the treatment of the mechanical interface between the viscous and elastic shells.

Calculations performed for the same parameters as Mars-like convective case (see Table 3.3) when the elastic shell is included in the viscous layer (ESW) lead to synthetic results that differ only slightly with the ones mentioned above (ESA) : the discrepancies on the maximum range of variations for geoid heights associated with elastic thicknesses 52, 104 and 156 km are respectively smaller than 5 %, 2.5 % and 1.5 % (1.5 %, 0.5 % and 0.5 % for topographies). Note that in the ESW calculations, a no-slip condition is applied at the surface of the planet, for the viscous flow. This is known to remove the surface stress boundary layer present in the case of a free-slip boundary (cf. Fowler, 1985; Solomatov, 2004) but has no effect on the stresses at the base of the elastic shell as long as this one is thicker than the stress boundary layer. These additional tests indicate that both technical approaches (juxtaposing the elastic shell above the viscous flow, or including it in the uppermost highly viscous part of the viscous flow) are equally valid.

While we decided here to present the tool with the elastic shell above the viscous shell (ESA), considering that it is a simpler way to introduce two distinct mechanisms, the latter approach (ESW) might constitute a more convenient method in future applications for two main reasons : while the elastic shell thickness is prescribed to be a multiple of the discrete thickness of the grid based method in the radial direction in the case of ESA (otherwise, the efficiency of the multigrid flow solver deteriorates), this requirement is relaxed when case ESW is considered (a simple linear interpolation of the stress field at the appropriate radius is easily performed once the viscous flow is computed); this enables in addition to gradually vary the elastic thickness as the laterally averaged thermal structure evolves with time while in the ESA approach the evolution of the elastic thickness is necessarily performed in a less continuous way. It can be argued, however, that the ESA approach, used in the present study, involves a more realistic coupling between the viscous and elastic shell.

Filtering effects on terrestrial planets - Finally, although the convective cases described above only constitute preliminary results for Venus-like and Mars-like bodies (more calculations are required to dedicate applications to either planet), several aspects may be discussed. In the case of Venus (i.e. a relatively large terrestrial

body with a thin elastic lithosphere), the supposedly small value of the elastic lithosphere usually warrants that elastic filtering is not considered as a major effect. The conclusions inherent to the analysis of the Venus-like convective case shall lead to a reappraisal (at least partial) of this statement : our analysis shows that the contribution of tangential traction is preponderant when considering the reduction of the topography (and even more of the geoid) caused by internal dynamics.

Note that in the case of the Earth, the partition of the lithosphere into numerous plates of strongly variable thickness is likely to modulate the conclusions based on our simple one-plate model, depending on the wavelength. Although models similar to ours have been proposed to explain the stress distribution in the Earth's lithosphere (e.g., Wuming et al., 1992), Ricard et Vigny (1989) have demonstrated for example that correct plate velocities are predicted by a model where instead several rigid and independent plates are considered. Such a framework with numerous plates affects not only the stresses (and therefore topography and geoid), but also the long term dynamics of the mantle and its thermal history (cf. e.g., Labrosse et Jaupart, 2007). We consider that allowing for a laterally variable thickness of the elastic shell (possibly with zones of zero-thickness to delimit the plates) would be a simple way to handle this configuration.

In the case of Mars, our results further emphasize that the Tharsis Rise is unlikely to be dynamically supported at the present-day. While early studies have invoked a plume origin for the elevated Tharsis topography and geoid (Harder et Christensen, 1996; Harder, 2000), the introduction of elastic effects caused by the lithosphere's rigidity on geological timescales later showed to strongly minimize the dynamic contribution to the Tharsis Rise (Zhong, 2002; Zhong et Roberts, 2003; Roberts et Zhong, 2004). We consider that our preliminary results confirm the conclusions drawn by these authors and definitively rule out the possibility of a dynamical support of the Tharsis Rise at present even if the elastic thickness in this region is revised to lower values (as sometimes proposed by recent models, see for instance Grott et Breuer, 2010).

3.5 Conclusions

The main points are as follows :

- (1) We introduce a numerical tool that describes the lithospheric filtering on the geoid and topography predicted from variable viscosity mantle convection in a spherical shell. Two robust and efficient techniques are used to treat two subshells with distinct rheologies : elastic deformation is solved with a semi-spectral method using spherical harmonics decomposition and a discretized radial treatment, and

viscous flow is computed with a multigrid solver with a finite difference approach.

(2) The mechanical coupling between the two subshells is achieved by prescribing the traction force produced by the viscous flow as a boundary condition for the elastic deformation. Additional calculations show that the choice to juxtapose the elastic shell above the viscous mantle (rather than including it in the uppermost part) does not introduce any significant artifact.

(3) Comparison tests performed on response functions indicate that this tool provides an accurate description of topography and geoid at a reasonable computational cost for harmonic degrees of interest to assess the influence of planetary interiors ($\ell < 20$).

(4) The evaluation of synthetic compensation coefficients indicates that, when applied to the dimensions and characteristics of planetary bodies, all possible situations can be expected, ranging from only moderate filtering (Venus-like body) to very strong filtering (Dione-like body). The case of Mars shows that the filtering may vary dramatically within the degree range considered. A careful assessment of the elastic lithosphere effect on the dynamic surface topography is thus needed for each solar system body, which underlines the importance of the numerical tool presented here.

(5) We show that the tangential component of traction in the mechanical coupling could have a significant influence on the elastic deformation, possibly larger than the radial component (the associated bending moment increases the reduction in long wavelength dynamic topography). This statement is proven valid by both the computation of response functions and complete convection experiments.

(6) Finally, several rheological features of real lithospheres are not captured by our tool in its present form. Since it juxtaposes two shells with different rheologies with an explicit mechanical coupling, our tool however permits natural developments such as : (i) allowing for lateral variations of the elastic thickness, (ii) adopting a viscoelastic (instead of purely elastic) formalism for the uppermost shell. These two modifications would enable the treatment of more complex problems such as the long term evolution of planetary topography or the influence of strong lateral variations of the elastic thickness (possibly even the existence of several independent plates). The present tool should thus be considered as a first step towards a more elaborate model.

We thank Yanick Ricard and two anonymous reviewers for their comments and suggestions which substantially improved the manuscript. This work has been partly supported by Czech Ministry of Education Grant MSM0021620860, as well as by the PHC Barrande. This work was granted access to the HPC resources of CINES under the allocation 2010-045093 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

Chapitre 4

Applications, discussions et perspectives

4.1 Généralités sur les calculs

Toutes les simulations que je vais évoquer maintenant ont été effectuées en utilisant le modèle hybride présenté au Chapitre 3. Le dimensionnement de ces simulations a été choisi pour une adéquation maximum avec ce que nous connaissons (ou plutôt ce que nous supposons) des caractéristiques actuelles de Vénus. Dans le but de conserver un rapport précision/temps de calcul correct, la résolution du modèle 3D de convection visqueuse adoptée est de $6 \times 64 \times 64 \times 64$ (qui flirte parfois avec la limite de résolution). 50 couches sont imposées pour la discrétisation radiale du modèle de déformation élastique et le degré de troncature de la décomposition en harmoniques sphériques est de 30.

Sauf indication contraire, les profils de viscosité, de température, des flux de chaleur et des vitesses radiales maximum sont moyennés dans le temps à partir de l'instant où je considère l'état de convergence statistique atteint. L'état de convergence est évalué à partir de l'évolution temporelle de la température moyennée sur tout le volume de la coquille et des nombres de Nusselt moyennés sur la surface appropriée.

Paramétrisation et dimensionnement des simulations La rhéologie utilisée est Newtonienne, la viscosité est indépendante de la contrainte mais dépend de la température et de la pression, et elle suit une loi d'Arrhénius qui se décompose de la façon suivante :

$$\eta = \exp \left\{ \left[a_{vis} \left(\frac{1}{T + b_{vis}} - \frac{1}{1 + b_{vis}} \right) \right] + [d_{vis} (z - 1)] \right\}, \quad (4.1)$$

avec T la température et z la profondeur qui varient entre 0 et 1 (sans dimension) et :

$$\begin{cases} a_{vis} = \frac{Q}{R\Delta T} \\ b_{vis} = \frac{T_0}{\Delta T} \\ d_{vis} = \ln(\Delta\eta_p) \end{cases}$$

avec Q l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits, ΔT le contraste de température dans le manteau, T_0 la température de surface et $\Delta\eta_p$ le contraste de viscosité dû à la variation de pression. Les valeurs associées à chacun de ces paramètres se trouvent dans les Tableaux 4.2 et 4.3. Les paramètres a_{vis} et b_{vis} contrôlent la dépendance de la viscosité en température et le paramètre d_{vis} gouverne la dépendance en pression. Il est également possible d'ajouter un saut de viscosité d'amplitude e_{vis} dans le manteau. Certains auteurs (par exemple Stemmer et al., 2006; Choblet et al., 2007; Orth et Solomatov, 2011) utilisent également une approximation de la loi d'Arrhénus, dite de Frank-Kamenetskii : $\eta(T) = \exp(a_{vis}T)$. La différence entre la loi d'Arrhénus et l'approximation de Frank-Kamenetskii concerne principalement les contrastes de viscosité des couches limites thermiques, particulièrement la couche limite thermique froide où l'utilisation d'une loi d'Arrhénus conduit à des viscosités beaucoup plus grandes que celles obtenues par la loi de Frank-Kamenetskii (Figure 4.1). D'un point de vue numérique, les contrastes de viscosité élevés d'une cellule à l'autre sont sources de problèmes. Il est alors indispensable de limiter la viscosité maximale en haut du modèle visqueux par un contraste de viscosité maximum adimensionné $c_{vis} = \frac{\eta_{surf}}{\eta_{base}}$, imposé dans toutes nos simulations à 10^9 (*cutoff*).

King (2009) utilise un modèle cartésien en éléments finis (ConMan, King et al., 1990) pour un fluide incompressible, avec de larges variations de viscosité pour explorer les conséquences de la troncature de la viscosité ainsi que l'effet des deux lois de viscosité sur la topographie dynamique et le géoïde associé. Il n'est pas surprenant (comme le souligne King, 2009) que la troncature n'ait que très peu d'effet sur les paramètres de la convection (nombre de Nusselt ou rms de la vitesse - *Root Mean Square* -) car cette troncature intervient dans le couvercle rigide, là où les vitesses sont quasi-nulles. Dans le cas d'une convection à l'état d'équilibre (statistique) en contexte de couvercle stagnant, l'approximation de Frank-Kamenetskii aboutit à une solution très proche de celle obtenue par la loi d'Arrhénus (4-5% de différence de température selon Reese et al., 1999 ; moins de 1% de différence sur le flux de chaleur et $\sim 2,5\%$ de différence sur le nombre de Nusselt selon Plesa et al., 2009 pour un modèle 3D sphérique).

En revanche, cette approximation a un effet important sur la topographie dynamique de surface et sur le géoïde qui diffèrent de 50% au-dessus des panaches ascendants et de 330% au-dessus des panaches descendants (King, 2009). Dans le cas d'une convection dépendante du temps et toujours en contexte de couvercle stagnant, l'approximation

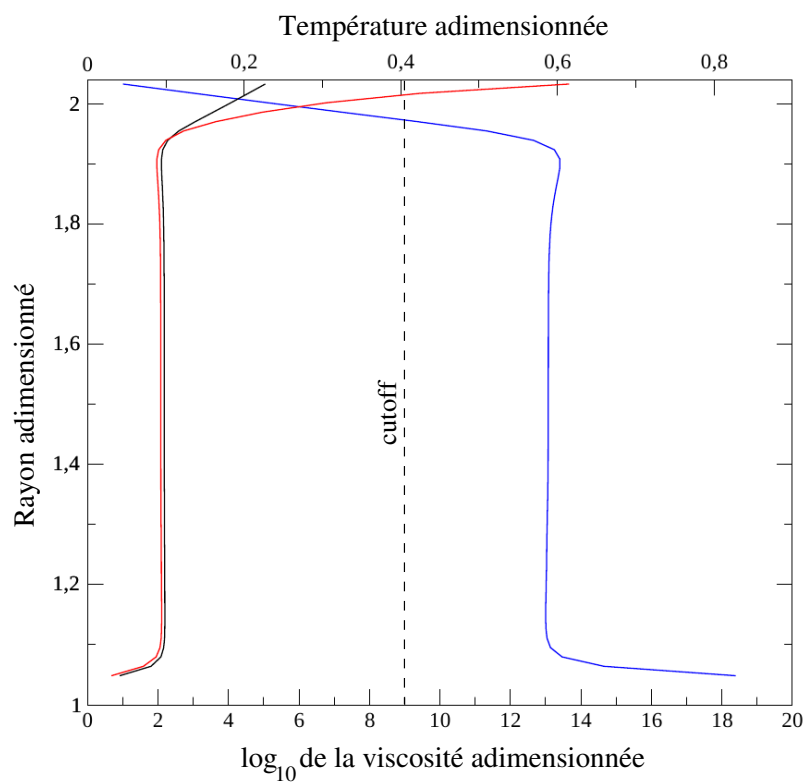


FIG. 4.1 – Comparaison des deux lois viscosité associées au profil de température moyen de la simulation de référence en bleu (REF - que nous détaillerons par la suite). En noir, le profil de viscosité calculé par l'approximation Frank-Kamenetskii et en rouge le profil de viscosité de type Arrhénius. La ligne verticale en pointillés représente le contraste de viscosité maximum imposé (*cutoff*).

mation de Frank-Kamenetskii aboutit cette fois à une solution convective différente du cas où la loi d'Arrhénius est appliquée ($\sim 13\%$ de différence sur le nombre de Nusselt, $\sim 37\%$ sur l'épaisseur du couvercle ainsi qu'une diminution du nombre de Rayleigh interne - Plesa et al., 2009). De plus, Plesa et al. (2009) proposent qu'avec une loi d'approximation de Frank-Kamenetskii, un couvercle mobile se développe en surface alors qu'il s'agit d'un couvercle stagnant fin pour les mêmes paramètres de convection mais dans le contexte d'une loi d'Arrhénius.

Paramétrisation des simulations sans chauffage interne Afin de comparer les simulations les unes avec les autres, je me suis assurée qu'avec des paramètres légèrement différents, elles conservent une taille de couvercle à peu près semblable. Pour satisfaire ce critère, le paramètre que je souhaite équivalent dans les différents calculs est le nombre de Rayleigh interne (Ra_i). Pour déterminer le Rayleigh interne de la simulation de référence, j'ai choisi de considérer une viscosité interne moyenne (η_i) à partir d'une température interne (T_i) qui correspond à la température moyenne du coeur d'une cellule convective (Figure 4.2). Dans un premier temps, j'ai considéré une cellule convective délimitée par l'égalité des flux de chaleur diffusif et advectif moyennés dans le temps. Ensuite, à la cellule ainsi déterminée correspondent des valeurs de températures qui seront moyennées sur l'épaisseur de la cellule pour aboutir à une température interne moyenne T_i (Figure 4.2). Enfin, connaissant la valeur de la température interne moyenne T_i de la simulation de référence et la loi de viscosité utilisée pour chacune des simulations, je suis capable de calculer une viscosité interne moyenne η_i et donc le nombre de Rayleigh interne moyen Ra_i correspondant :

$$\eta_i(T_i, p_i) = \exp \left\{ \left[a_{vis} \left(\frac{1}{T_i + b_{vis}} - \frac{1}{1 + b_{vis}} \right) \right] + [d_{vis} (z_i - 1)] \right\}, \quad (4.2)$$

$$Ra_i = \frac{\alpha \rho_m g \Delta T d^3}{\kappa \eta_i}, \quad (4.3)$$

avec, T_i la température moyenne de la simulation de référence et z_i la profondeur moyenne du milieu de la cellule convective. En supposant que T_i change peu d'une simulation à l'autre, et en considérant correctement la loi de viscosité (d_{vis} et e_{vis} peuvent être modifiés), on obtient $\eta_{i(REF)} \simeq \eta_{i(nouveau)}$ et ce système d'équation fourni le nombre de Rayleigh interne moyen de chaque simulation.

Cependant, le paramètre d'entrée du code visqueux qui régit la dynamique globale du manteau est le nombre de Rayleigh à la base du modèle (Ra_B). J'ai donc modifié ce nombre de Rayleigh de façon à avoir une correspondance avec le nombre

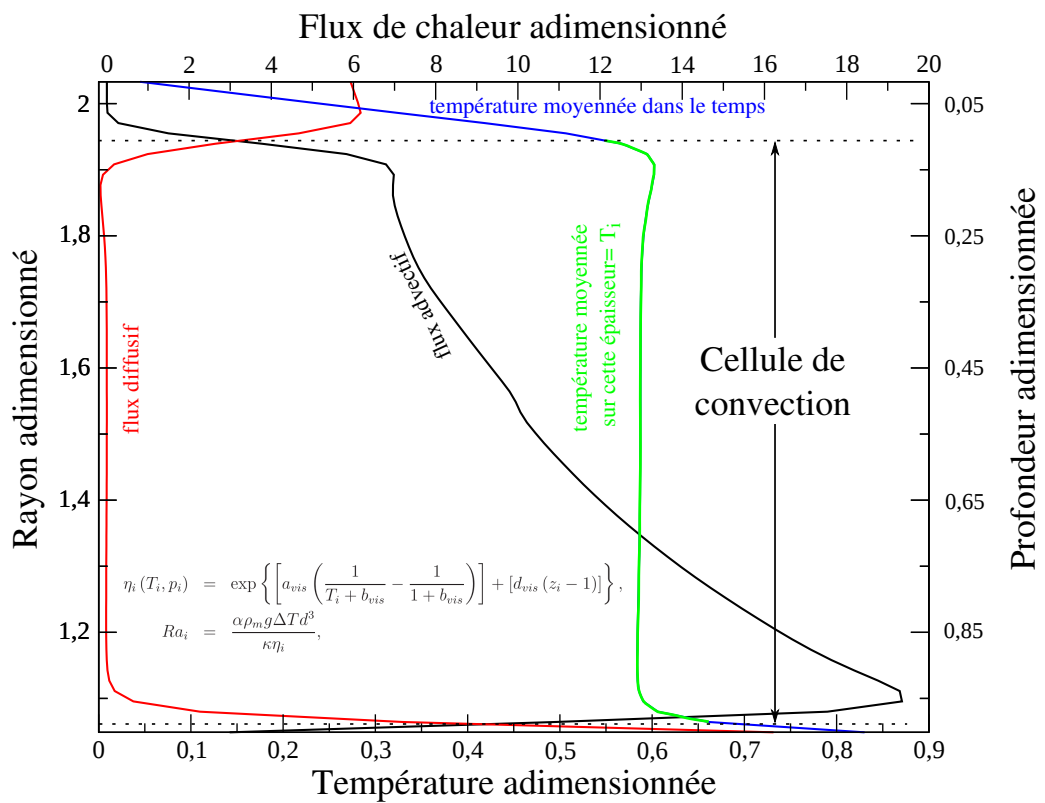


FIG. 4.2 – Méthode de calcul de la température interne moyenne T_i à partir des flux diffusif et advectif pour la simulation de référence.

de Rayleigh interne de chaque simulation par la relation suivante :

$$Ra_{B(\text{nouveau})} = Ra_{i(\text{REF})} \frac{\eta_{i(\text{REF})}}{\eta_{B(\text{nouveau})}}. \quad (4.4)$$

Une série de tests *a priori* a été menée pour chaque simulation de façon à obtenir une valeur de la viscosité à la base ($\eta_{B(\text{nouveau})}$) qui satisfasse cette relation. À la fin de chaque simulation, l'adéquation entre les températures internes, les viscosités internes et les nombres de Rayleigh internes moyennés dans la cellule convective et dans le temps ont été vérifiés et sont rassemblés avec les nouveaux nombres de Rayleigh à la base du modèle dans le Tableau 4.2.

Pour les deux simulations où c'est l'influence d'une modification du nombre de Rayleigh qui a été testée (Ra^- et Ra^+), les nombres de Rayleigh internes sont naturellement très différents du cas de référence et il n'y a pas de similitude recherchée entre ces simulations.

Paramétrisation de la simulation avec chauffage interne Dans la simulation où un chauffage interne a été ajouté (simulation H), j'ai choisi de remplacer 20% du chauffage total de la simulation REF par du chauffage interne. Il faut que le flux de chaleur en surface soit proche de celui de la simulation de référence pour qu'une comparaison soit possible. Le nombre de Rayleigh interne de la nouvelle simulation (avec chauffage interne) est diminué d'autant que nécessaire pour obtenir le même flux de surface. Voici le détail du calcul :

Le flux de chaleur de surface moyenné dans le temps de la simulation de référence est égal à :

$$\bar{q}_{S_{REF}} = \frac{\overline{Nu_{REF}} k \Delta T}{d}, \quad (4.5)$$

$$= 1,867 \cdot 10^{-2} W \cdot m^{-2}, \quad (4.6)$$

$$P_S = 8,587 \cdot 10^{12} W, \quad (4.7)$$

avec $\overline{Nu_{REF}}$ le nombre de Nusselt de surface de la simulation de référence (REF) moyenné dans le temps et P_S la puissance répartie sur toute la surface d'un corps de la taille de Vénus. Les autres valeurs sont rassemblées dans le Tableau 4.3. Pour maintenir le même flux de chaleur de surface entre les deux simulations on peut écrire :

$$q_H = 0,2q_S = \frac{H_0 V_{mant}}{4\pi R_s^2} = 3,734 \cdot 10^{-3} W \cdot m^{-2}, \quad (4.8)$$

$$H_0 = \frac{q_H (4\pi R_s^2)}{V_{mant}} = 1,574 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-3}, \quad (4.9)$$

$$= 4,769 \cdot 10^{-12} W \cdot kg^{-1} \text{ (avec } \rho_m = 3300 \text{ kg} \cdot m^{-3}\text{)}, \quad (4.10)$$

avec q_H le flux de chaleur de surface uniquement dû au chauffage radioactif, H_0 le taux de chauffage radioactif initial (et constant au cours du temps dans notre simulation H), V_{mant} le volume du manteau et R_s le rayon de la planète. La valeur adimensionnée du taux de chauffage radioactif correspond à $H_0^* = \frac{H_0 d^2}{k \Delta T} = 14,116$. Des valeurs proches de taux de chauffage radioactif (dimensionné) ont été proposées par plusieurs études : $2 \cdot 10^{-13} W \cdot kg^{-1}$ pour un chauffage interne de 10% du chauffage total (Schubert et al., 1990) ou $4,8 \cdot 10^{-12} W \cdot kg^{-1}$ (Reese et al., 1999). Smrekar et Sotin (2012) proposent également une étude intéressante à propos du nombre de panaches sur Vénus et le lien avec le chauffage interne pour des valeurs de chauffage légèrement inférieures à la notre.

Dans la simulation proposée ici, le taux de chauffage volumique est constant au cours du temps. Il a été montré que dans un cas quasi-stationnaire, le refroidissement séculaire peut être interprété comme un terme de chauffage supplémentaire (par exemple Davaille et Jaupart, 1993). Le refroidissement uniforme de la surface est à l'origine d'un écoulement à l'état d'équilibre équivalent à celui d'un fluide chauffé par désintégration radioactive avec un taux de chauffage H_0 constant (Choblet et Sotin, 2000). Un chauffage interne constant au cours du temps, utilisé par la plupart des simulations, de façon implicite, est alors justifié.

La détermination du nombre de Rayleigh de la nouvelle simulation, contraignant la correspondance entre les simulations H et REF utilise une loi de Nu-Ra. Toute la difficulté du choix de cette relation provient des raisons suivantes : (1) le modèle utilise une géométrie 3D sphérique, (2) la rhéologie est caractérisée par une viscosité dépendante de la température et de la pression, (3) il s'agit dans cette simulation d'un chauffage mixte, c'est à dire d'un chauffage par la base (CMB) et d'un chauffage volumique et (4) la condition de surface est une condition de bord rigide. Il existe de nombreuses relations Nu-Ra de la forme générale $Nu \propto aRa^\beta$ avec a et β des constantes qui sont déterminées selon la géométrie du modèle, le mode de chauffage (interne, par la base ou mixte), la loi de viscosité utilisée, la gamme de valeurs du nombre de Rayleigh, dont certaines sont résumées dans le Tableau 4.1. Historiquement, les relations Nu-Ra sont dérivées de la théorie des couches limites dans une boîte carrée et l'exposant β est souvent égal à $1/3$ (pour un chauffage uniquement par la base : Turcotte et Oxburgh, 1967). Christensen (1984) suggère que β est plus proche de 0,1 pour des systèmes avec un couvercle supérieur rigide dans le cas où la viscosité dépend fortement de la température. Cependant, Gurnis (1989) avance que la présence de tectonique des plaques sur la Terre permet un refroidissement plus efficace, similaire à une condition de bord libre et β est alors plus proche de 0,3. Plus récemment, Solomatov (1995) et Reese et al. (1999) ont obtenus une relation Nu-Ra pour des cas de convection en régime de couvercle stagnant ou mobile qui

met en évidence un exposant β de $1/3$ pour la sous-couche convective. Dumoulin et al. (1999) utilisent un modèle 2D avec une condition de bord rigide au sommet pour un fluide avec une rhéologie Newtonienne ou non-Newtonienne et obtiennent, pour un régime turbulent un exposant de $1/3$ mais un exposant $1/5$ dans le cas de régime stationnaire. Elles proposent d'ailleurs dans leur étude une très bonne synthèse des différents travaux relatifs à l'établissement de loi Nu-Ra. Iwase et Honda (1997) obtiennent, dans un modèle 3D sphérique de convection d'un fluide isovisqueux chauffé préférentiellement par l'intérieur et pour une gamme de nombre de Rayleigh modérés ($< 10^6$), une relation Nu-Ra avec un exposant plus proche de $1/4$ que de $1/3$. En revanche, pour des nombres de Rayleigh plus élevés, ils prédisent un exposant $1/3$. Korenaga et Jordan (2002) et Korenaga (2003) confirmeront cette valeur de $0,3$ pour un modèle de convection où la viscosité dépend de la température. Avec l'outil numérique *TERRA*, Yanagisawa et Yamagishi (2005) ont obtenus une relation Nu-Ra pour un fluide isovisqueux uniquement chauffé par la base, pour des nombres de Rayleigh élevés ($> 10^8$) et proposent un exposant β de $0,30$. Enfin, Wolstencroft et al. (2009) proposent des relations Nu-Ra en domaine 3D sphérique (avec le modèle *TERRA*) pour des nombres de Rayleigh entre 10^3 et 10^9 avec un chauffage par la base ou un chauffage interne mais en aucun cas un chauffage mixte. Ils obtiennent un exposant $0,33$ pour un fluide exclusivement chauffé en volume. En l'absence d'études plus avancées notamment avec des rhéologies où la viscosité dépend de la température et de la pression dans un fluide chauffé à la fois par la base et en volume (chauffage mixte), un exposant de $1/3$ sera considéré. Puisque 20% du flux total est d'origine radioactive, le flux correspondant au chauffage uniquement par la base est de 80% du flux de chaleur total et l'on peut écrire :

$$Nu_{(H)} = 0,8 Nu_{(REF)}, \quad (4.11)$$

$$a [Ra_{i(H)}]^{1/3} = a 0,8 [Ra_{i(REF)}]^{1/3}, \quad (4.12)$$

$$Ra_{i(H)} = (0,8)^3 Ra_{i(REF)}, \quad (4.13)$$

$$\text{Soit, } Ra_{i(H)} = 0,5 Ra_{i(REF)}, \quad (4.14)$$

avec $Nu_{(H)}$ le nombre de Nusselt de la simulation H, $Ra_{i(H)}$ le nombre de Rayleigh interne correspondant et $Nu_{(REF)}$ le nombre de Nusselt de la simulation de référence associé au nombre de Rayleigh interne $Ra_{i(REF)}$. Le nombre de Rayleigh à la base du modèle de convection visqueuse $Ra_{B(H)}$ est obtenu par la relation suivante :

$$Ra_{B(H)} = 0,5 Ra_{i(REF)} \frac{\eta_{i(H)}}{\eta_{B(H)}}, \quad (4.15)$$

avec $\eta_{i(H)}$ la viscosité interne, $\eta_{B(H)}$ la viscosité à la base du modèle pour la simulation H.

Type	Bords sup.	f	Chauf.	β	Source
1D	libre	1	B	1/3	Turcotte et Oxburgh (1967)
2D	couv. rigide	1	B	0,10	Christensen (1984)
2D	libre	var.	B	0,19-0,34	Hansen et Ebel (1984)
2D	libre	1	B	1/3	Olsen (1987)
3Ds	libre	–	B	0,280	Bercovici et al. (1989)
2D	vit. plaque	1	B	0,3	Gurnis (1989)
Tank	libre	large	B	0,28	Giannandrea et Christensen (1993)
2D	rigide	1	B	1/5	Moresi et Solomatov (1995)
3Ds	libre	–	B/I	0,26	Ratcliff et al. (1996)
2D	rigide/libre	1	B	0,223/0,32	Deschamps (1997)
3Ds	–	–	I	0,24(LRa)	Iwase et Honda (1997)
2D	rigide	4	B (stat./dép. temps)	0,2/1/3	Dumoulin et al. (1999)
2D	libre	1	B	0,3	Korenaga (2003)
3Ds	libre	–	B	0,3	Yanagisawa et Yamagishi (2005)
3Ds	libre	–	B/I	0,29/0,33	Wolstencroft et al. (2009)

TAB. 4.1 – Relations Nu-Ra. 1D, 2D, 3D, 3Ds (géométrie sphérique) fait référence à la géométrie du modèle utilisé, f représente le rapport d'aspect, LRa indique un nombre de Rayleigh local, B indique un chauffage par la base et I un chauffage interne. Ce tableau est modifié d'après de l'étude de Wolstencroft et al. (2009) dans laquelle vous trouverez plus de détails.

Paramètres des simulations Dans les différentes simulations, j'ai souhaité mettre en évidence l'influence d'une diminution de la dépendance en pression de la viscosité (P), d'un saut de viscosité au milieu du manteau (J), de l'augmentation du nombre de Rayleigh à la base (Ra^- et Ra^+), du remplacement d'une partie du chauffage total par un chauffage interne (H) et de l'évolution temporelle des résultats. Dans tous les cas, les caractéristiques de la lithosphère élastique sont constantes avec une épaisseur de 46,3 km et un module de cisaillement de $7 \cdot 10^{10}$ Pa. Les paramètres des différentes simulations se trouvent dans le Tableau 4.2.

Pour le dimensionnement du système, j'ai choisi de me rapprocher le plus de

	REF	P	J	Ra^-	Ra^+	H
d_{vis}	5	3	0	5	5	5
e_{vis}	0	0	25	0	0	0
H_0	0	0	0	0	0	14,12
Ra_B	$3 \cdot 10^8$	$4,9 \cdot 10^8$	$2,76 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^6$
Ra_i	$1,277 \cdot 10^7$	$3,952 \cdot 10^7$	$1,2604 \cdot 10^7$	$1,404 \cdot 10^6$	$9,686 \cdot 10^7$	$6,394 \cdot 10^6$
η_i	$3,555 \cdot 10^{21}$	$1,15 \cdot 10^{21}$	$3,605 \cdot 10^{21}$	$3,235 \cdot 10^{22}$	$4,691 \cdot 10^{20}$	$3,039 \cdot 10^{19}$
η_0	$1,5145 \cdot 10^{20}$	$9,273 \cdot 10^{19}$	$1,646 \cdot 10^{20}$	$1,515 \cdot 10^{21}$	$1,515 \cdot 10^{19}$	$6,478 \cdot 10^{19}$
T_i	0,5895	0,6613	0,6167	0,5940	0,5726	0,89241

TAB. 4.2 – Listes et valeurs des paramètres utilisés pour les différentes simulations et des résultats des simulations Ra_i , η_0 , η_i et T_i . Les variables a_{vis} , b_{vis} et c_{vis} sont constantes dans toutes les simulations et sont égales à 12,15 - 0,25 et 10^9 .

ce que l'on peut trouver dans la littérature pour Vénus. Les valeurs dimensionnées utilisées se trouvent dans le Tableau 4.3. Le dimensionnement des variables suit les relations suivantes :

$$\eta = \eta^* \eta_B, \quad (4.16)$$

$$T = T^* (\Delta T + T_0), \quad (4.17)$$

$$v = v^* \frac{\kappa}{d}, \quad (4.18)$$

avec T^* la température adimensionnée, v^* la vitesse adimensionnée, η^* la viscosité adimensionnée et $\eta_B = \frac{\alpha \rho_m g \Delta T d^3}{\kappa R a_B}$. Par exemple, pour la simulation REF, $\eta_B = 1,515 \cdot 10^{20} \text{Pa}\cdot\text{s}$.

Symboles	Valeurs	Dimension
R_s	6050	km
R_c	3085	km
g	8,9	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
ρ_c	$10 \cdot 10^3$	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ρ_m	$3,3 \cdot 10^3$	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
ΔT	2969	K
T_0	730	K
Q	300	$\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
α	$2,5 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
k	3,3	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
κ	10^{-6}	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

TAB. 4.3 – Listes et valeurs des paramètres utilisés pour le dimensionnement.

4.2 Convection thermique dans un fluide où la viscosité dépend de la température et de la pression

4.2.1 Simulation de référence - simulation REF

La simulation qui va vous être présentée ici servira de référence (REF). Elle est identique à celle du Chapitre 3 (Figure 3.6) mais le calcul a été prolongé dans le temps pour permettre une caractérisation de l'évolution temporelle de la topographie et du géoïde. Cette simulation a d'abord été élaborée avec une résolution pour *Oedipe* de $6 \times 32 \times 32 \times 32$ avec une solution conductive comme condition initiale pour une convergence plus rapide. La solution à l'état d'équilibre statistique de cette première simulation à résolution réduite sert de condition initiale à une nouvelle simulation cette fois avec une résolution de $6 \times 64 \times 64 \times 64$ (Figure 4.3b). Dans ce cas précis, on remarquera que le nombre de points dans la couche limite chaude (par exemple

sur les profils de flux de chaleur de la Figure 4.3d) souligne une résolution limitée dans la direction radiale. Le manteau est exclusivement chauffé par la base avec $Ra_B = 3 \cdot 10^8$, $\Delta\eta_T = 10^9$ (c_{vis}) et $\Delta\eta_P = 148$ ($\ln(\Delta\eta_P) = d_{vis} = 5$) (les paramètres de cette simulation se trouvent dans le Tableau 4.2).

Les premiers stades de la convection (pour une résolution réduite) sont caractérisés par une brusque augmentation de la température qui s'accompagne naturellement d'une augmentation des nombres de Nusselt au sommet et à la base (Figure 4.3b). L'augmentation de la résolution se caractérise par une augmentation puis une diminution de la température moyenne, conduisant à une stabilisation de cette dernière aux alentours de la même valeur que dans le cas d'une résolution plus faible. *A contrario*, l'augmentation de la résolution produit une augmentation des nombres de Nusselt (Figure 4.3b). Dans un domaine cartésien, la température advective moyenne est égale à la température moyenne diffusive (dont le profil est linéaire). Il est intéressant de noter que dans un domaine sphérique la température moyenne advective est différente de la température moyenne diffusive. En effet, à cause de la différence de surface entre la base et le sommet le profil moyen de température est une hyperbole sans chauffage interne et une parabole avec du chauffage interne en domaine sphérique (Choblet, 2010). C'est encore plus vrai lorsque, comme dans le cas présent, un couvercle rigide s'établit en surface (créant une augmentation de la température plus importante dans cette région).

La structure convective du dernier pas de temps avec la résolution maximum (Figure 4.3a) se caractérise par de nombreux panaches ascendants (une quinzaine), de taille variable et par des feuillets de matériel froid qui se rassemblent sous la forme de panaches le long d'une "ride" (Figure 4.3a). Ce rassemblement n'aboutit pas à la formation d'un seul et unique panache descendant mais de plusieurs. Ces structures ont déjà été décrites dans plusieurs études avec des lois de viscosité similaires, par exemple Tackley (1993), Tackley (1996) en modèle 3D cartésien, Ratcliff et al. (1995), Zhong et al. (2000), Stemmer et al. (2006) et Yoshida et Kageyama (2006) en modèle 3D sphérique. Dans le cas d'une viscosité dépendante uniquement de la température, Kellogg et King (1997), Zhong et al. (2000) et Stemmer et al. (2006) notent que le rayon du conduit des panaches ascendants diminue et que leur tête devient plus large que dans le cas d'une convection isovisqueuse. L'ajout d'une dépendance en pression en plus de la dépendance en température conduit à un amincissement encore plus prononcé des panaches (Stemmer et al., 2006). Enfin, selon Zhong et al. (2000), la profondeur à laquelle les feuillets de matériel froid se rassemblent dépend de la vigueur de la convection (plus le nombre de Rayleigh augmente, plus ce rassemblement s'effectue près de la surface).

Les profils de viscosité, de température, de flux de chaleur et de vitesses ra-

diales adimensionnés moyens (Figure 4.3c, d et e) sont relatifs à la simulation en $6 \times 64 \times 64 \times 64$ et toutes les descriptions qui vont suivre ne concernent dorénavant que cette simulation. Sur la Figure 4.3c, le couvercle conductif (qui se développe dans le contexte d'un contraste de viscosité important, voir Section 2.5.2.3) matérialisé par la ligne horizontale en pointillés à environ 5750 km de rayon (soit un peu moins de 300 km d'épaisseur), présente un contraste de température ΔT d'environ 0,55 (2034 K) qui correspond à une augmentation de la viscosité de 9 ordres de grandeur. Entre 5750 et 3460 km de rayon (dans le coeur convectif du système), la température adimensionnée est quasi constante et proche de 0,589 (2181 K) et la viscosité augmente d'environ un ordre de grandeur à cause de la dépendance à la pression, créant une zone de forte viscosité à la base.

La figure 4.3d présente les profils de flux de chaleur diffusif (rouge) et advectif (noir). À l'équilibre thermique, la puissance entrant dans le manteau à la base doit être égale à la puissance totale sortant du manteau au sommet. En géométrie sphérique, pour un rapport d'aspect de 0,51, l'équilibre thermique est maintenu par un flux de chaleur quatre fois plus élevé à la base qu'au sommet. Ainsi, l'expression du nombre de Nusselt de base contient un facteur de correction géométrique supplémentaire f^{-2} pour être comparable au nombre de Nusselt de surface.

La figure 4.3e représente les profils de vitesses radiales moyennes ascendantes (rouge) et descendantes (noir). On remarque une très nette disparité entre les vitesses ascendantes et descendantes avec des courants ascendants près de 10,5 fois plus rapides que les courants descendants. Cette différence de vitesse est directement reliée au caractère sphérique du modèle (elle n'existe pas dans les modèles cartésiens de fluides isovisqueux, incompressibles de Tackley, 1993 et Tackley, 1996), et on la retrouve quelque soit la loi de viscosité utilisée (Zhong et al., 2000; Stemmer et al., 2006; Yoshida et Kageyama, 2006). De plus, cette disparité est accentuée lorsque la viscosité dépend de la température par rapport à un fluide isovisqueux (Stemmer et al., 2006). On notera que dans la fraction du couvercle conductif que l'on considèrera comme la lithosphère élastique (les 46 premiers kilomètres sous la surface), les vitesses radiales moyennes sont nulles.

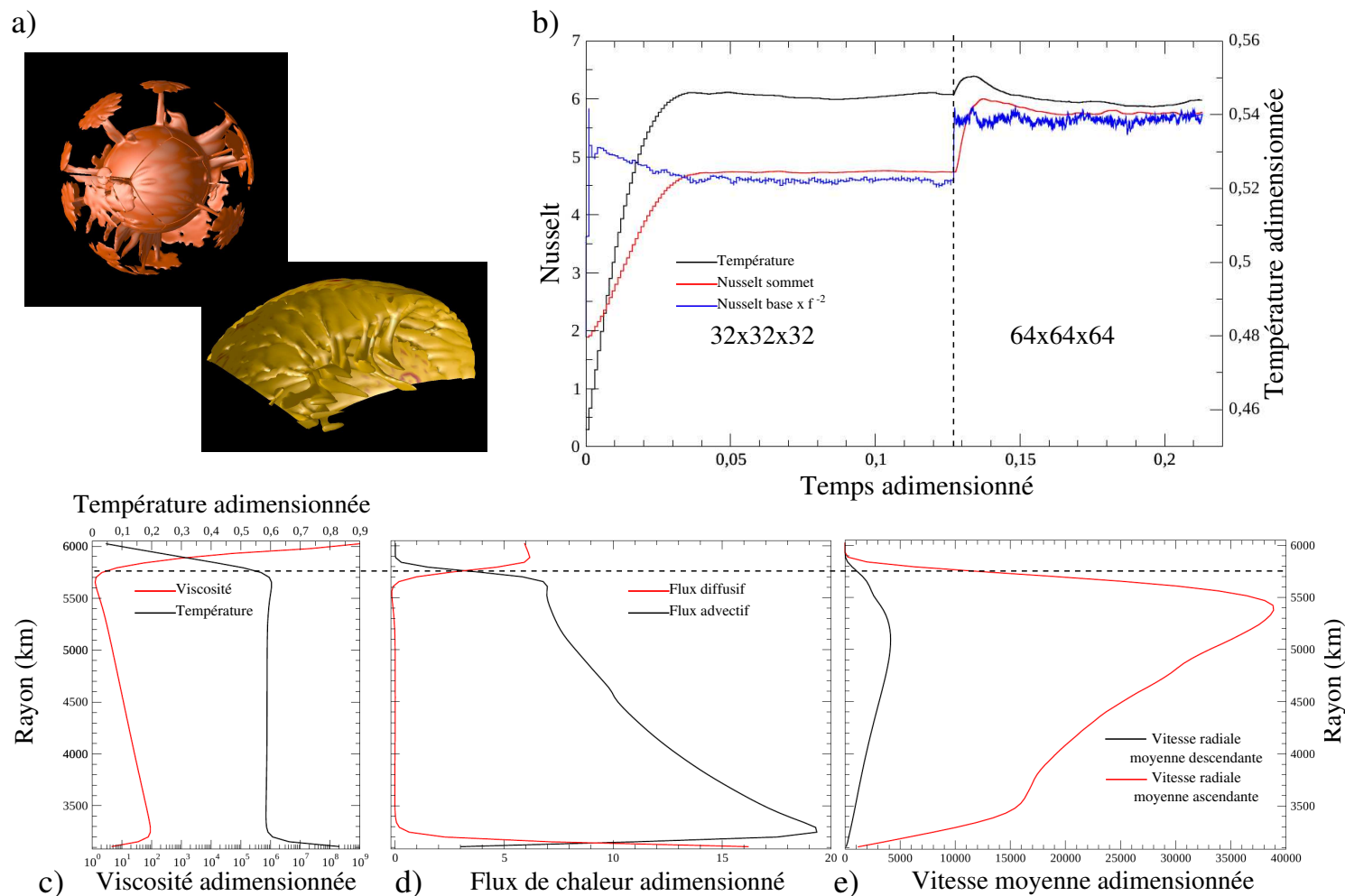


FIG. 4.3 – Simulation de référence (REF). a) Représentation 3D de l'isotherme 0,629 (2327 K, à gauche) et de l'isotherme 0,575 (2127 K, à droite). b) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge). La ligne pontillée verticale représente la séparation entre la simulation avec une résolution de 6×32^3 et la simulation en 6×64^3 . c) Profils de température moyenne adimensionnée (noir) et de viscosité moyenne adimensionnée (rouge). d) Profils des flux de chaleur adimensionnés advectif (noir) et diffusif (rouge) moyens. e) Profils des vitesses radiales moyennes maximum adimensionnées ascendantes (rouge) et descendantes (noir). La ligne horizontale en pointillés sur les profils c), d) et e) représente la base du couvercle, d'environ 300 km d'épaisseur.

4.2.2 Influence d'une diminution de la dépendance en pression dans la loi de viscosité - simulation P

Une nouvelle simulation (P) est produite à partir de la solution convergée de la simulation REF. Comme je l'ai évoqué en introduction de ce Chapitre, le nombre de Rayleigh à la base du modèle a été modifié afin de conserver des nombres de Rayleigh internes proches. Tous les autres paramètres de cette nouvelle simulation sont identiques à ceux de la simulation de référence et seul le paramètre qui définit la dépendance en profondeur de la viscosité ($d_{vis} = \ln(\Delta\eta_P)$) est diminué ($\Delta\eta_P = 148$ pour REF et $\Delta\eta_P = 20$ pour P) (voir le Tableau 4.2).

La figure 4.4b présente l'évolution temporelle de la température moyenne ainsi que des nombres de Nusselt à la base et au sommet pour la simulation P. Une diminution de 86% de la dépendance en profondeur conduit à une augmentation de la température moyenne globale de près de 12%. Cette augmentation a également été mise en évidence avec un modèle 3D cartésien par Tackley (1996) puis avec un modèle 3D sphérique par Stemmer et al. (2006). L'augmentation de la température est également accompagnée d'une augmentation des nombres de Nusselt de la base et du sommet de près de 9%.

Les structures de l'écoulement de cette nouvelle simulation sont très proches de celles de la simulation REF (Figure 4.4a) avec des panaches ascendants nombreux et de tailles variables accompagnés de panaches descendants qui prennent leur origine du rassemblement de lignes d'instabilités froides proches de la surface.

L'augmentation de la température moyenne locale est d'environ 0,07 (265 K) à un rayon de 4500 km alors que la température moyenne dans le couvercle conductif est quasiment identique à la simulation REF (Figure 4.4c). La viscosité du couvercle est presque identique dans les deux simulations puis la différence s'accroît au fur et à mesure de l'augmentation de la profondeur pour atteindre une différence maximum à la base de la couche limite thermique chaude (Figure 4.4c).

Grâce à des nombres de Rayleigh internes quasiment identiques, l'épaisseur du couvercle est conservée par rapport à la simulation REF (matérialisé par la ligne pointillée horizontale sur les Figures 4.4c, d et e). L'augmentation de la température moyenne qui accompagne la diminution de la dépendance en pression conduit à une augmentation du flux advectif d'environ 16% à la base de la couche limite thermique chaude.

Les vitesses radiales moyennes ascendante et descendante montrent une nouvelle fois une très grande disparité (Figure 4.4e) et la diminution de la dépendance en pression provoque une augmentation des vitesses radiales d'environ 55% pour le maximum des vitesses descendantes et de 5% pour les vitesses ascendantes. À partir de 5500 km de rayon jusqu'à la surface, les vitesses radiales moyennes sont très

proches d'une simulation à l'autre.

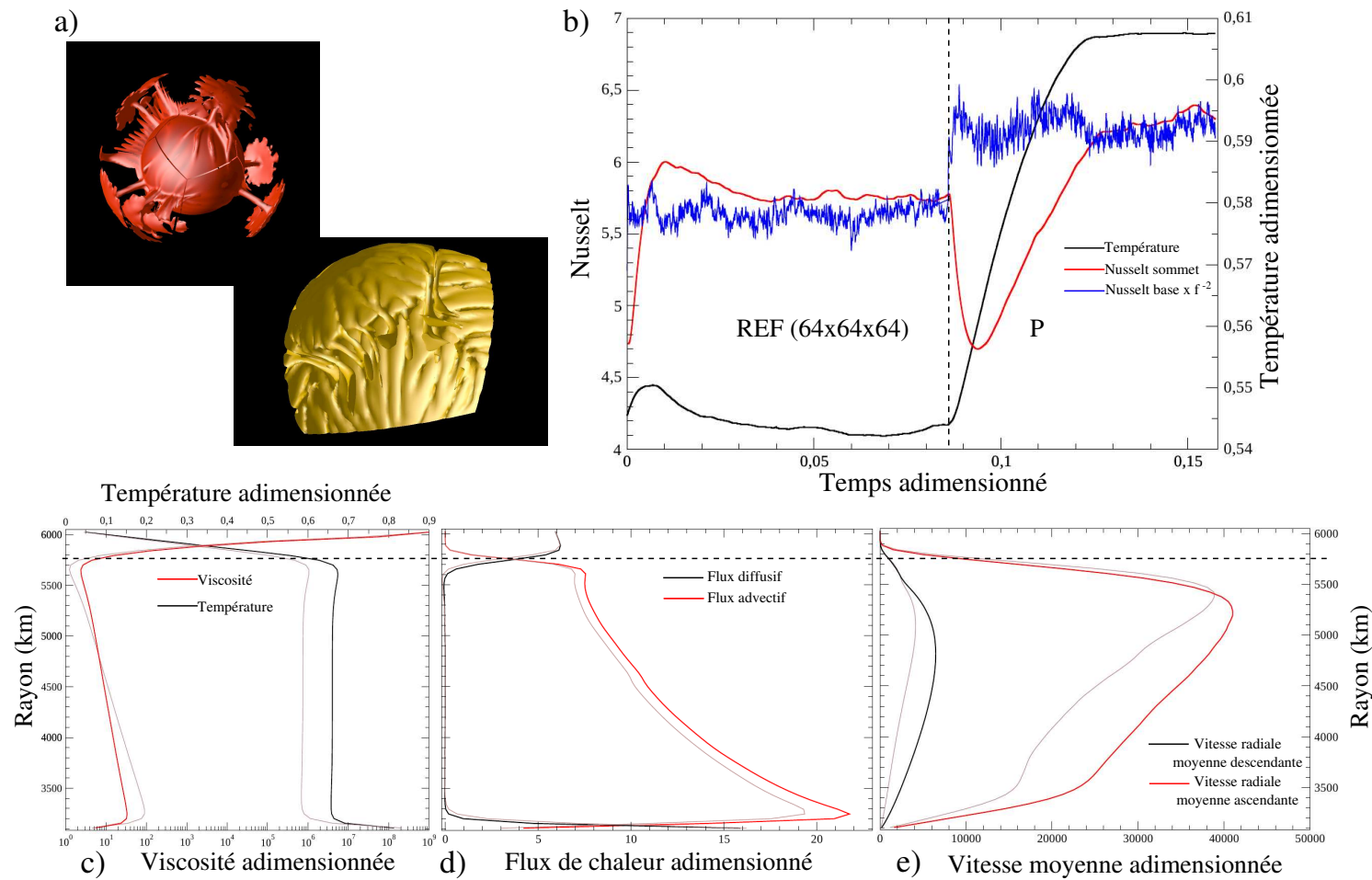


FIG. 4.4 – Simulation avec une diminution de la dépendance avec la profondeur de la loi de viscosité ($\Delta\eta_P=20$). a) Représentation 3D des isothermes 0,7 (2589 K, à gauche) et de 0,645 (2386 K, à droite). b, c, d et e) Profils moyens adimensionnés de la température, de la viscosité, des flux de chaleur et des vitesses radiales moyennes. Les profils marrons sont ceux de la simulation REF, voir la Figure 4.3 pour plus de détails. La ligne pointillée horizontale représente la base du couvercle défini dans la simulation REF.

La figure 4.5a présente les spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour la simulation de référence (REF, à gauche) et de la simulation P (à droite) pour leur dernier pas de temps respectif. Dans la simulation de référence, les degrés dominants proches de la CMB sont les degrés 4, 5 et 6 et les degrés 3, 8 et 10 ont une contribution non-nulle alors que dans la simulation P, seul le degré 3 est dominant à la base du manteau. La différence entre ces deux simulations est particulièrement visible proche de la surface. D'abord, les degrés dominants de la simulation de référence sont les degrés 3 à 6 sur une épaisseur de ~ 278 km et la totalité des degrés (entre 1 et 10) ont une contribution non nulle. Dans la simulation P, les degrés 3, 4 et 5 dominent. De plus, l'amplitude du degré dominant (degré 3) de la simulation P est plus importante que celles des degrés dominants du cas REF (degrés 4 et 5). Les longueurs d'ondes relativement importantes de la structure thermique mises en évidence ici sont le résultat de la dépendance en température de la loi de viscosité, que l'on retrouve en modèle sphérique (Zhang et Yuen, 1995; Ratcliff et al., 1996; Zhong et al., 2000; Yoshida et Kageyama, 2006) et en modèle cartésien (Bunge et al., 1996; Tackley, 1996). Par exemple, Yoshida et Kageyama (2006) proposent une analyse du degré prédominant à chaque profondeur de la décomposition en harmoniques sphériques du champ de température lorsque la viscosité est dépendante de la température ($a_{vis}=13,82$). Ils révèlent ainsi une dominance des degrés $\ell = 6-10$ à travers tout le manteau avec une température moyenne naturellement plus élevée que dans le cas où la viscosité est constante. Les valeurs de leurs spectres de puissance de la température sont normalisées par la valeur maximum à chaque profondeur, ce qui n'est pas notre cas. Cette normalisation limite les variations radiales d'amplitude de la température. La comparaison du modèle de Ratcliff et al. (1996) et celui de Zhong et al. (2000) suggère que cette augmentation de la longueur d'onde des structures ne dépend pas du nombre de Rayleigh imposé. De plus, la diminution du degré dominant avec la diminution de la dépendance en pression a également été mise en évidence dans les simulations de Yoshida et Kageyama (2006) pour un nombre de Rayleigh de 10^7 . En effet, pour $\Delta\eta_P$ de 316, le degré dominant est un degré 2 alors que pour $\Delta\eta_P$ de 30, le degré dominant est un degré 1. Le développement du degré 1 ou 2 dépend du contraste de viscosité impliqué par une dépendance en pression mais ne semble pas être modifié lorsque leur nombre de Rayleigh interne augmente et atteint 10^8 . Nous noterons également que cette modification du degré dominant n'est pas imputable au caractère sphérique du modèle puisqu'on la retrouve dans les modèles cartésiens de Tackley. Cependant, la différence entre les géométries sphérique et cartésienne concerne principalement la base du modèle, là où la dépendance en pression engendre le plus de différence avec la simulation REF dans le profil de viscosité. Aussi, l'analogie avec les travaux

de Tackley en cartésien est à considérer avec précaution.

La ligne horizontale en pointillés sur la figure Figure 4.5a correspond à la profondeur à laquelle sont tracées les cartes de température de la figure 4.5b, soit 185 km de profondeur. Malgré une divergence notable des degrés dominants de la température entre les deux simulations (Figure 4.5a), les structures thermiques semblent relativement identiques dans les deux cas. Enfin, la figure 4.5c réunit les cartes de température à la demi-cellule au-dessus de la CMB (la température adimensionnée vaut 1 à la CMB). On y voit clairement que la naissance des panaches chauds suit un processus de rassemblement de plusieurs feuillets de matériel chaud vers un point commun d'où partent les conduits qui se prolongent jusqu'à la tête du panache en surface. Il semble également que dans la simulation P, les feuillets de matériel chaud soient plus nombreux à converger vers un point commun que dans la simulation REF.

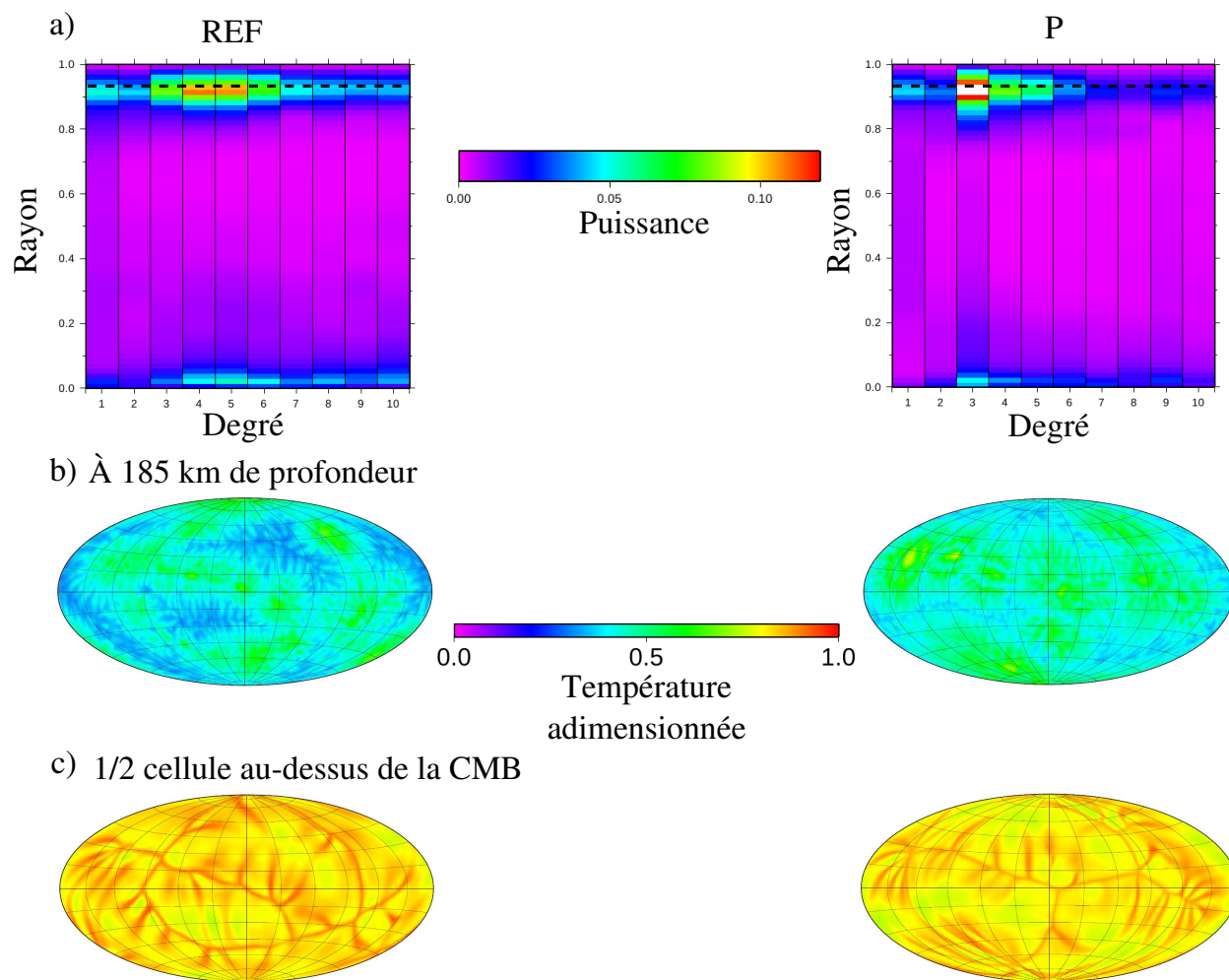


FIG. 4.5 – a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour la simulation de référence (REF, à gauche) et pour la simulation où la dépendance en profondeur a été diminuée (P, à droite). La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 185 km de profondeur et c) Champ de température à la demi-cellule au-dessus de la CMB.

Quand on analyse la topographie et le géoïde d'une planète, nous n'avons accès qu'à un instantané de ces signaux. Il est donc important de discuter des structures associées à la diminution de la dépendance en pression pour le dernier pas de temps des simulations même si les instantanés de ces deux simulations ne concernent pas le même instant précis. Comme nous allons le voir par la suite, l'évolution temporelle de ces structures est importante. La figure 4.6 représente la topographie dynamique associée à la simulation de référence (REF) et à la nouvelle simulation (P) dans un cas sans lithosphère élastique ($d_e = 0$ km) en haut et avec une lithosphère élastique ($d_e = 46,3$ km), en bas. La diminution de la dépendance en pression conduit à une topographie maximum plus grande mais à une topographie minimum plus petite que dans la simulation de référence. Dans les deux simulations, lorsque les 46 premiers km sous la surface sont considérés élastiques, une partie de la topographie dynamique est filtrée. La valeur maximum de la topographie est diminuée de 8% dans la simulation P et de 7% dans la simulation REF. Cette disparité d'amplitude des topographies entre ces deux simulations se retrouve dans le signal du géoïde synthétique associé (Figure 4.7). Si l'effet d'une lithosphère élastique de 46,3 km peut paraître dérisoire sur le signal de la topographie dynamique associée à ces deux simulations, elle a un effet non-négligeable sur le géoïde. En effet, on observe une réduction du géoïde de près de 39% dans la simulation REF et de 35% dans la simulation P.

Les spectres de la topographie dynamique de surface, du géoïde associé et l'admittance (Figure 4.8) sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique (rouge) à un instant donné sont très proches d'une simulation à l'autre. Bien que ces simulations présentent des différences importantes en terme de paramètres interne (température, viscosité et vitesses moyennes), à l'instant étudié, il n'y a pas de franches différences dans les spectres de surface. De plus, l'application d'un filtre élastique ne produit pas de différences notoires d'une simulation à l'autre.

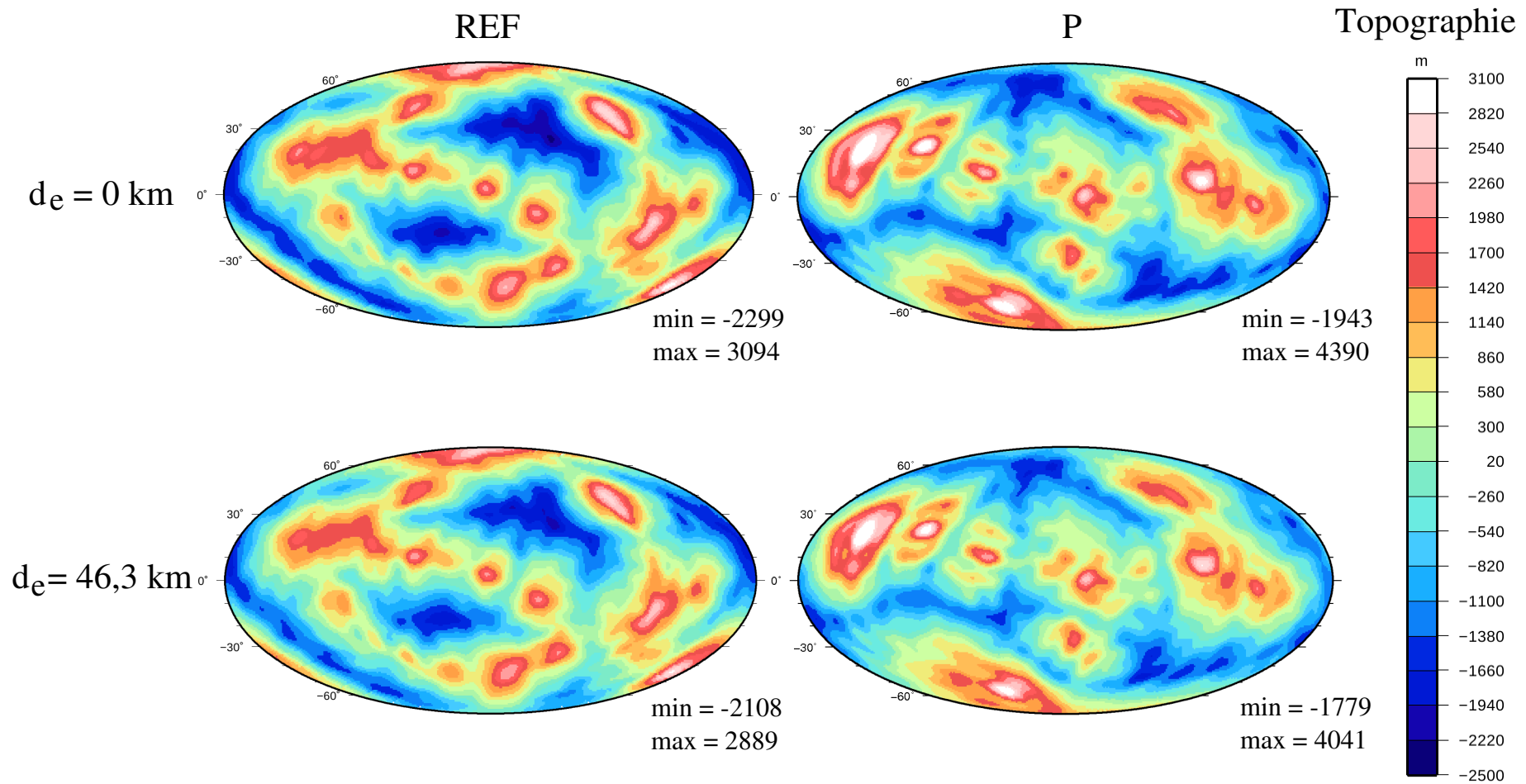


FIG. 4.6 – Cartes de la topographie dynamique de surface pour la simulation de référence à gauche et pour la simulation P à droite. En haut : sans lithosphère élastique (topographie dynamique purement visqueuse) et en bas : avec une lithosphère élastique de 46,3 km.

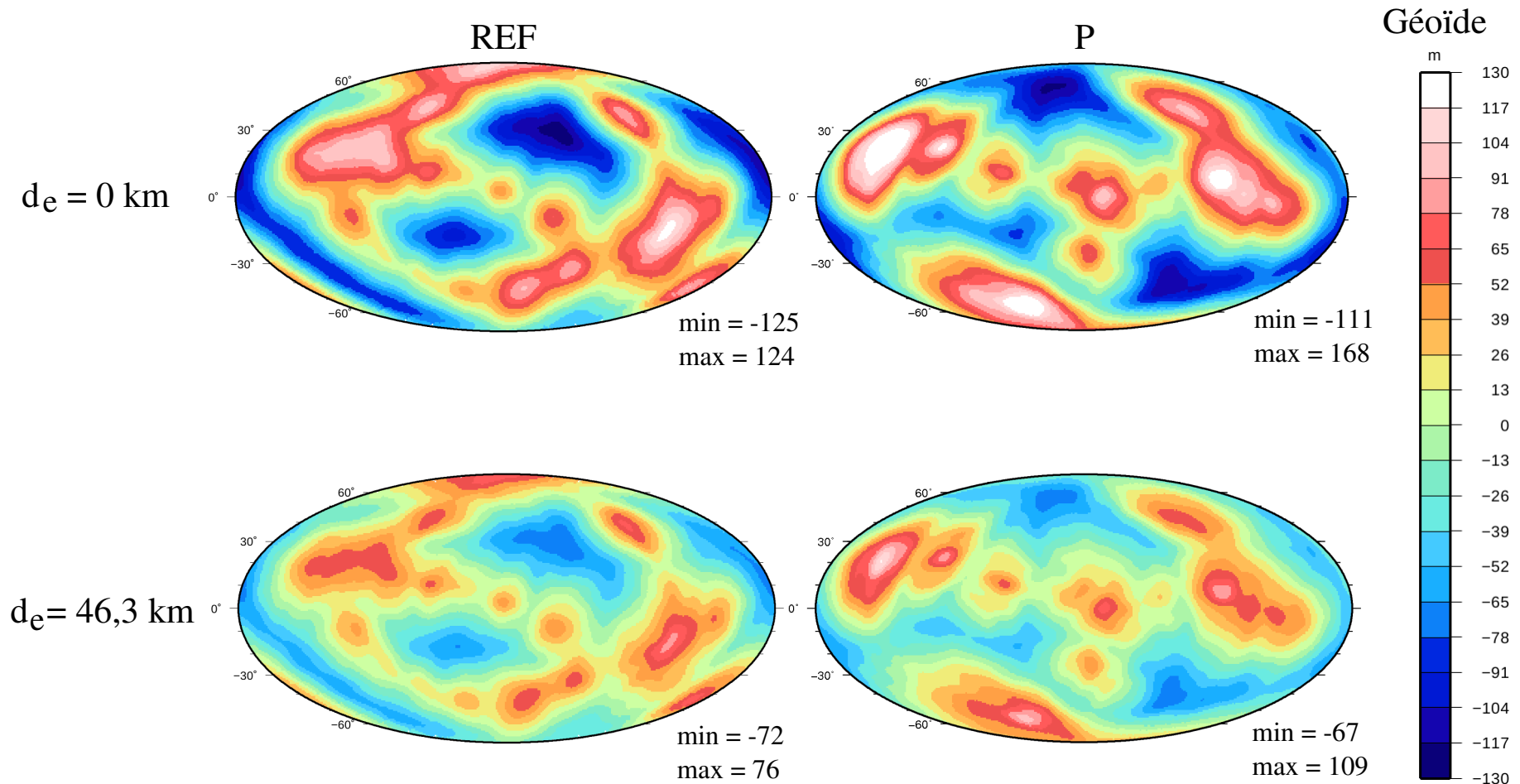


FIG. 4.7 – Cartes du géοide associé à la simulation de référence à gauche et à la simulation P à droite. En haut : cartes du géοide associé à une topographie dynamique purement visqueuse (sans coquille élastique) et en bas : cartes du géοide associé à une topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km.

Évolution temporelle des observables de surface Très peu (voir aucune) des études qui s'intéressent à la topographie dynamique ne prend en compte l'évolution temporelle de la topographie dynamique et du géoïde associé. Comme on vient de le voir, (1) les paramètres dynamiques de la convection associées à une diminution franche de la dépendance en pression sont clairement différentes de la simulation de référence (température moyenne, viscosité moyenne, vitesses radiales maximum moyennes, degrés dominants de la température, ...) et (2) les amplitudes des signaux de surface augmentent avec la diminution de la dépendance en pression à un instant donné. Pourtant, l'évolution temporelle des spectres de puissance de ces signaux nuance les possibilités d'une interprétation radicale de l'effet de la diminution de la dépendance en pression en terme de topographie dynamique et de géoïde. En effet, si l'on regarde l'enveloppe associée à l'évolution des spectres de puissance de la topographie dynamique (Figure 4.9) ou du géoïde associé (Figure 4.10), à partir d'un état d'équilibre statistique, ces spectres ne sont pas si différents d'une simulation à l'autre et les spectres moyens associés (traits pleins) sont très semblables. Les enveloppes du spectre de la topographie dynamique montrent des variations de -33% à +78% par rapport au spectre moyen pour la simulation P au degré 3, et des variations de -28% à +75% pour la simulation REF. On observe également la même variabilité temporelle sur les spectres du géoïde et ces enveloppes se superposent largement d'une simulation à l'autre.

Si les enveloppes temporelles des spectres montrent que la diminution de la dépendance en pression engendre des différences de structure de la convection difficilement interprétables en terme de topographie dynamique, celles des admittances sont tout autre. Les admittances des deux simulations présentent des superpositions d'enveloppes temporelles uniquement pour le degré 2 et au-delà du degré 8 (Figure 4.11). Entre ces degrés, l'admittance de la simulation P est plus élevée que celle de la simulation REF, l'augmentation de topographie dynamique est majoritaire sur le signal du géoïde par rapport à l'augmentation d'amplitude de l'anomalie de densité (au moins à un instant donné, voir Figure 4.5a).

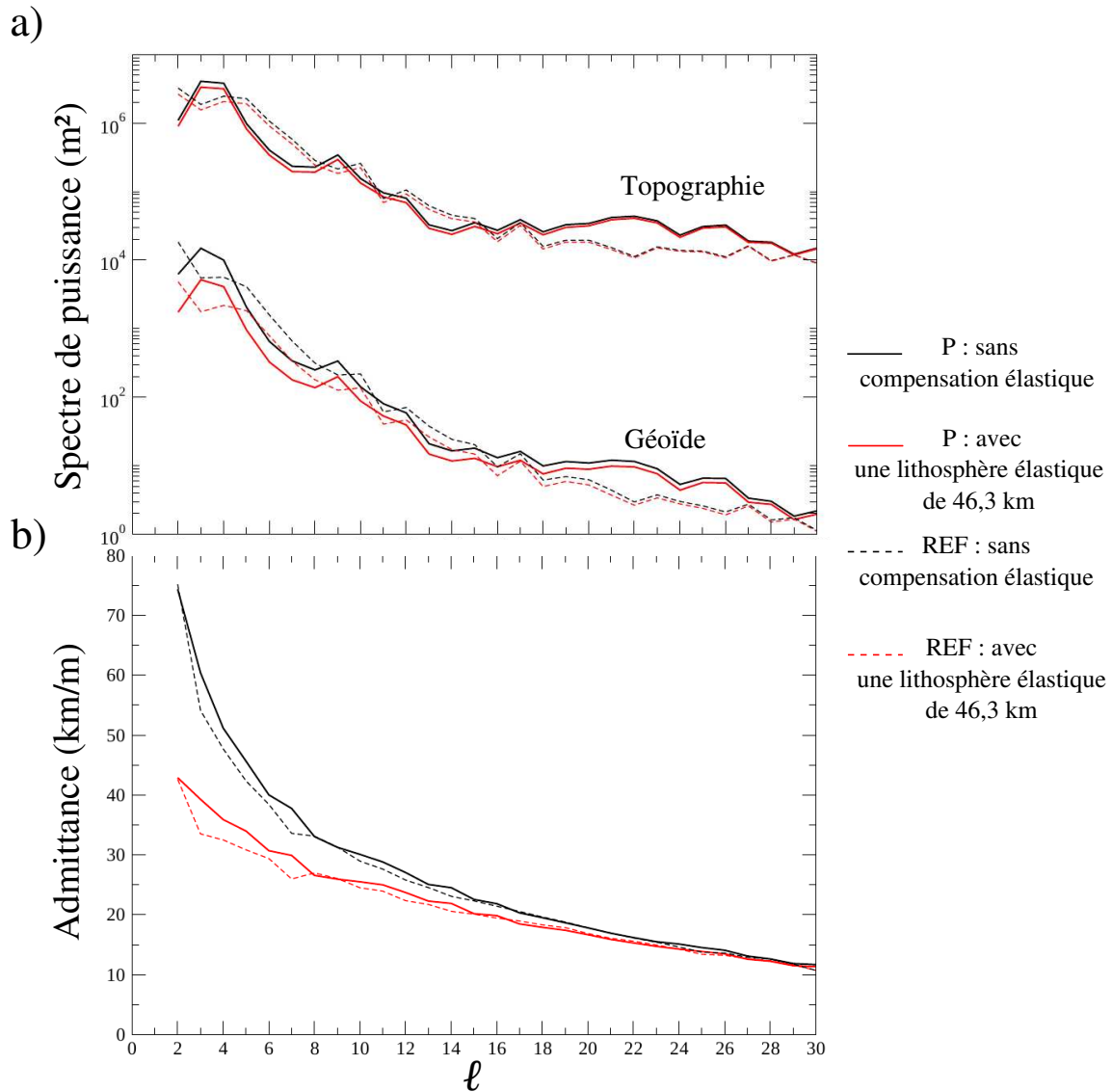


FIG. 4.8 – a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour le dernier pas de temps, sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations P (trait plein) et REF (trait pointillés). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations P (trait plein) et REF (trait pointillés).

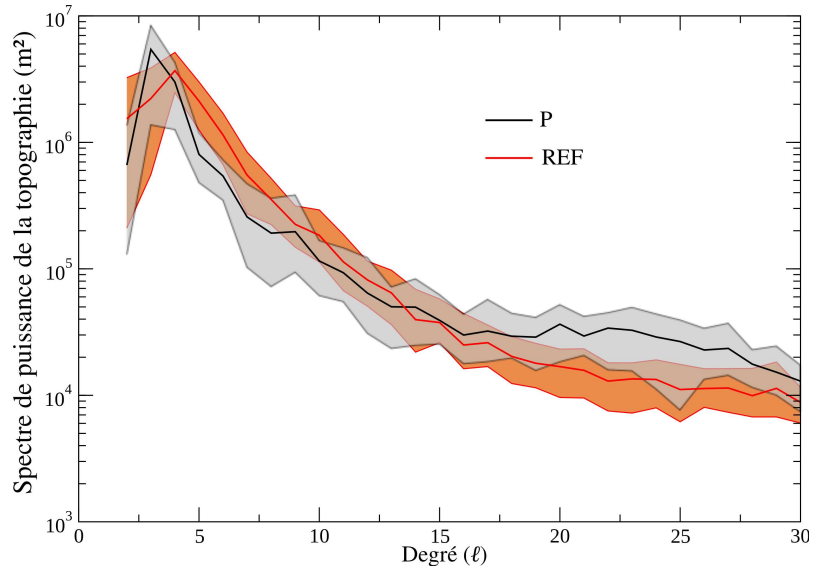


FIG. 4.9 – Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique de surface des simulations REF (en rouge) et P (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l’enveloppe de l’évolution temporelle de la topographie dynamique pour la simulation P et l’enveloppe orange celle de la simulation REF.

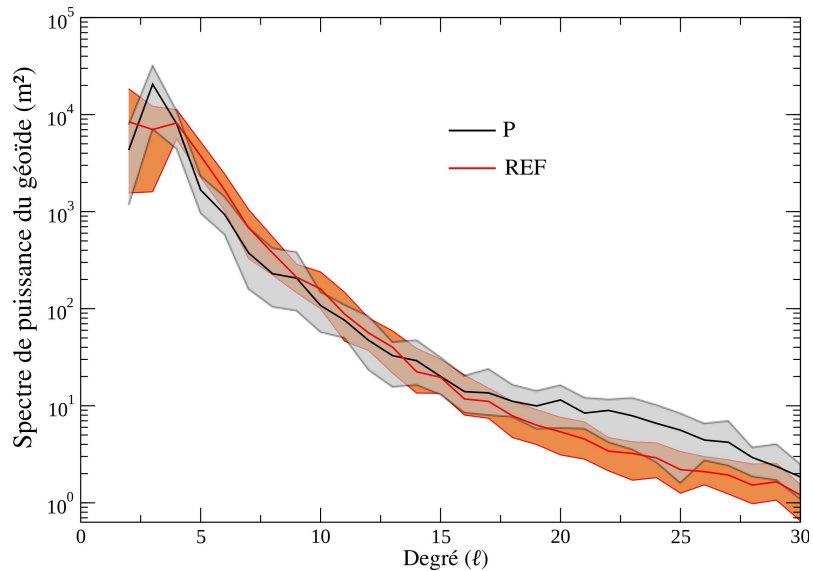


FIG. 4.10 – Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF (en rouge) et P (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l’enveloppe de l’évolution temporelle du géoïde pour la simulation P et l’enveloppe orange celle de la simulation REF.

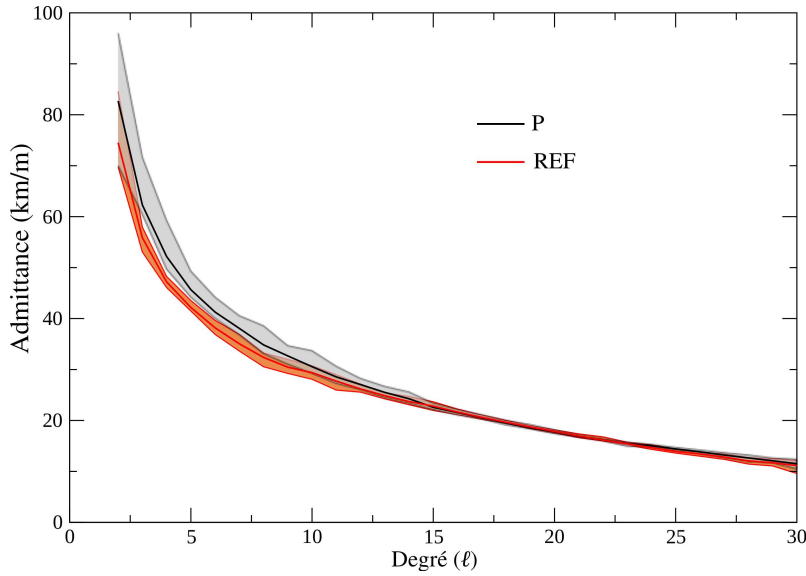


FIG. 4.11 – Admittances moyennes entre topographie dynamique de surface et géoïde associés de la simulation P (en noir) et de la simulation REF (en rouge). La zone grisée représente l’enveloppe de l’évolution temporelle de l’admittance pour la simulation P et l’enveloppe orange celle de la simulation REF.

4.2.3 Influence d’un saut de viscosité au milieu du manteau - simulation J

Même lorsqu’une simulation a atteint l’état d’équilibre statistique, il persiste une dépendance temporelle importante des signaux de surface (Section 4.2.2), rendant leur interprétation problématique. De manière assez intuitive, on imagine que pour des simulations n’ayant pas atteint cette convergence, la variabilité temporelle des signaux ne sera que plus marquée.

La simulation détaillée maintenant présente un saut de viscosité qui génère une viscosité trois fois plus faible dans la moitié supérieure du manteau ($e_{vis} = 25$) et la dépendance en pression de la loi de viscosité est négligée ($d_{vis} = 0$). Les autres paramètres sont identiques à ceux de la simulation REF (voir Tableau 4.2). La figure 4.12a présente l’état de convergence statistique de cette simulation à travers l’évolution temporelle de la température et des nombres de Nusselt moyennés sur toute la coquille sphérique. La présence d’une stratification de la viscosité est à l’origine d’une augmentation de la température moyenne globale et d’une diminution des nombres de Nusselt. À cause du saut de viscosité, une modification du flux de chaleur à la base du modèle ne s’exprime que plus tard en surface. On remarque donc un déphasage entre les maximums (et les minimums) des nombres de Nusselt de la base et du sommet. La convergence de cette simulation est discutable, la température moyenne et les nombres de Nusselt moyens présentent des oscillations (pseudo-périodiques)

très marquées. Les huit instantanés sur lesquels je vais me concentrer sont indiqués sur la fenêtre d'agrandissement associée à l'évolution temporelle de la simulation. La différence maximum de température adimensionnée entre l'instant 1 et l'instant 5 est relativement faible 0,015 (environ 55 K à 4500 km de rayon), mais est associée à des processus importants de réarrangements des structures dynamiques comme nous allons le voir. La figure 4.12b représente la structure 3D de l'isotherme 0,66 (2441 K, à gauche) et de l'isotherme 0,605 (2238 K, à droite) du dernier pas de temps considéré (instant 8). La particularité de cette simulation se situe dans la concentration de matériel que l'on observe sous la discontinuité de viscosité, tant pour les panaches ascendants que descendants. La figure 4.12c présente un agrandissement des différents profils de température adimensionnée des huit instantanés de la figure 4.12a et le profil en tirets noirs est celui de la simulation de référence. D'un instantané à l'autre, l'épaisseur des couches limites thermiques chaude et froide est relativement constante. En revanche, les températures moyennées dans le temps sont différentes quelque soit l'endroit du manteau que l'on considère. La figure 4.12e représente les profils de viscosité associés aux huit instantanés. La différence de viscosité adimensionnée est d'environ 20 (entre les instants 1 et 5) juste au dessus de la discontinuité. La ligne en pointillés noirs représente le profil moyen de viscosité de la simulation REF. La simulation J a été conçu de façon à avoir un nombre de Rayleigh interne proche de celui de la simulation de référence (Tableau 4.2). Cependant, il apparaît clairement sur les profils moyens de la viscosité adimensionnée qu'en dessous de la discontinuité de viscosité ainsi que dans la partie concernée par le couvercle rigide, la viscosité moyenne de la simulation J est supérieure à celle de la simulation REF. Cette viscosité moyenne plus élevée conduit à un nombre de Rayleigh global plus faible que dans la simulation REF et donc à une diminution des flux de chaleur (ou des nombres de Nusselt) et à une augmentation de la température moyenne globale.

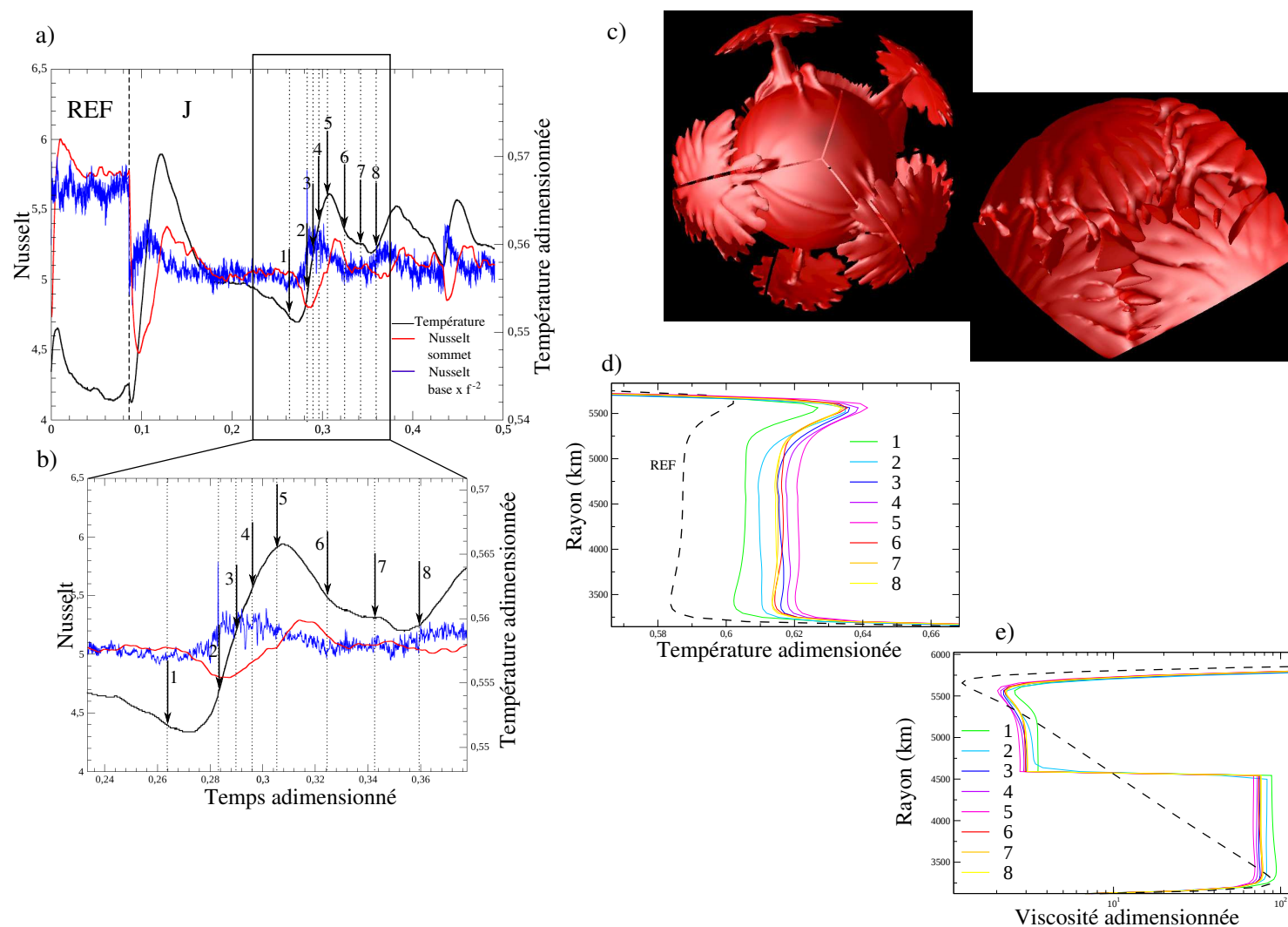


FIG. 4.12 – Simulation avec une viscosité stratifiée (saut de viscosité au milieu du manteau, simulation J). a) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge). b) Représentation 3D de l'isotherme 0,66 (2441 K, à gauche) et de l'isotherme 0,605 (2238 K, à droite) à l'instant 8. c) Profils de la température moyenne adimensionnée pour les huit instantanés analysés et en pointillés noirs, celui de la simulation REF. d) Profils de la viscosité moyenne adimensionnée pour les huit instantanés analysés et en pointillés noirs, celui de la simulation REF.

La figure 4.13 présente les champs de température des huit instantanés à quatre profondeurs différentes. Juste au-dessus de la CMB (3062,4 km), les ramifications autour des points de naissances des panaches chauds à l'instant 1 semblent plus nombreuses et la température moyenne semble plus élevée que pour les autres instantanés. Cette observation montre que si en moyenne sur tout le manteau la température de cet instantané est plus faible que pour tous les autres instantanés (Figure 4.12a et c), localement (juste au-dessus de la CMB en l'occurrence) la température est plus élevée (Figure 4.13). À 3039 km de profondeur, les points de naissance des panaches sont bien individualisés et sont entourés par des ramifications indépendantes les unes des autres. La disparition progressive de ces petites ramifications au profit de grands feuillets de matériel chaud qui joignent les points de naissance des conduits de panaches entre les instants 1 et 5 est accompagnée par une augmentation de la température (moyennée sur toute la sphère ou à un instant précis). Entre les points 5 et 8, les ramifications sont de nouveau un peu plus nombreuses autour des points de naissance des conduits de panaches et s'accompagnent d'une diminution de la température moyenne globale. Aux profondeurs 278 et 232 km, les huit têtes de panaches ascendants de l'instant 1 apparaissent bien individualisées avec des températures plus importantes au centre qu'en périphérie. Encore une fois, la température de l'instant 1 est localement plus élevée que pour les autres instantanés (centre des panaches) mais les températures plus basses autour de cet objet conduisent à une température moyenne plus basse. Au fur et à mesure du temps, jusqu'à l'instant 5, deux des panaches à l'origine bien individualisés (en haut à gauche sur les cartes, soulignés par les cercles pointillés) se séparent en deux panaches plus petits, de sorte qu'au point 5, on en compte désormais 10. Entre les points 5 et 8, on observe une migration progressive des panaches les uns par rapport aux autres jusqu'à la fusion des panaches entre eux. À l'instant 8, il y a de nouveau 8 panaches individualisés et cette agrégation de panaches est associée à une diminution de la température moyenne. Les lignes de matériel chaud entre les points de naissance des conduits de panaches juste au-dessus de la CMB et à 3039 km de profondeur représentent donc les lignes de migration des panaches. Par conséquent, la migration des panaches ne concerne pas uniquement la tête du panache (au dessus de la discontinuité de viscosité) mais bien l'intégralité du panache.

Toute cette description qualitative ne se contente que de relater des phénomènes de séparation, de rassemblement de panaches et de changement de taille relative de ces derniers. Ces modifications sont associées au comportement d'un écoulement instationnaire durant une augmentation ou une diminution de la température moyenne. Cependant, une véritable discussion étayée par une description quantitative du comportement des panaches chauds et des panaches froids (qui sont totalement ignorés

ici) et leur relation avec l'évolution de la température nécessite une méthode de détection automatique des panaches, à l'image de ce que propose Labrosse (2002), Zhong (2005) ou encore Smrekar et Sotin (2012) et doit être accompagné d'un traitement statistique des données.

La séparation puis la migration des panaches est une évolution également visible sur les cartes de topographie dynamique et de géoïde associé (Figure 4.14). Les nouveaux panaches qui apparaissent à partir de l'instant 2, ainsi que les panaches existants à partir desquels ils se forment, présentent des vitesses radiales ascendantes plus faibles et sont donc associés à une amplitude de topographie et de géoïde plus faible que les autres panaches environnants.

Malgré leur taille réduite, l'émergence de ces nouveaux panaches à partir des panaches plus gros s'exprime en surface par la création d'une topographie dynamique et d'un géoïde (de faible amplitude). Lorsque l'on considère une lithosphère élastique de 46,3 km, ces panaches sont toujours visibles même si le signal du géoïde associé devient très faible.

La figure 4.15 présente les spectres de puissance de la topographie dynamique de surface (b) et du géoïde associé pour les huit instantanés (c). De manière générale, les spectres de la topographie dynamique et du géoïde associé sont dominés par le degré 4, quelque soit l'instantané considéré. Si on se concentre sur les agrandissements de ces spectres, l'augmentation de la température (entre les points 1 et 5) provoque une diminution de la contribution du degré 4 au profit du degré 6 (et du degré 8 de façon moins évidente). Pour les points 6 et 7, la diminution de la température est accompagnée d'une augmentation de la contribution du degré 3 et d'une diminution de celle des degrés 6 et 8. L'instantané 8 présente une forme générale de spectre légèrement différente des autres avec une diminution de la contribution du degré 4, accompagnée de l'augmentation de la puissance des degrés 3 et 5. Cette évolution différente du spectre laisse présager une évolution de la structure thermique différente au pas de temps suivant, comme par exemple la fusion des trois panaches centraux qui se sont rapprochés entre les points 7 et 8 .

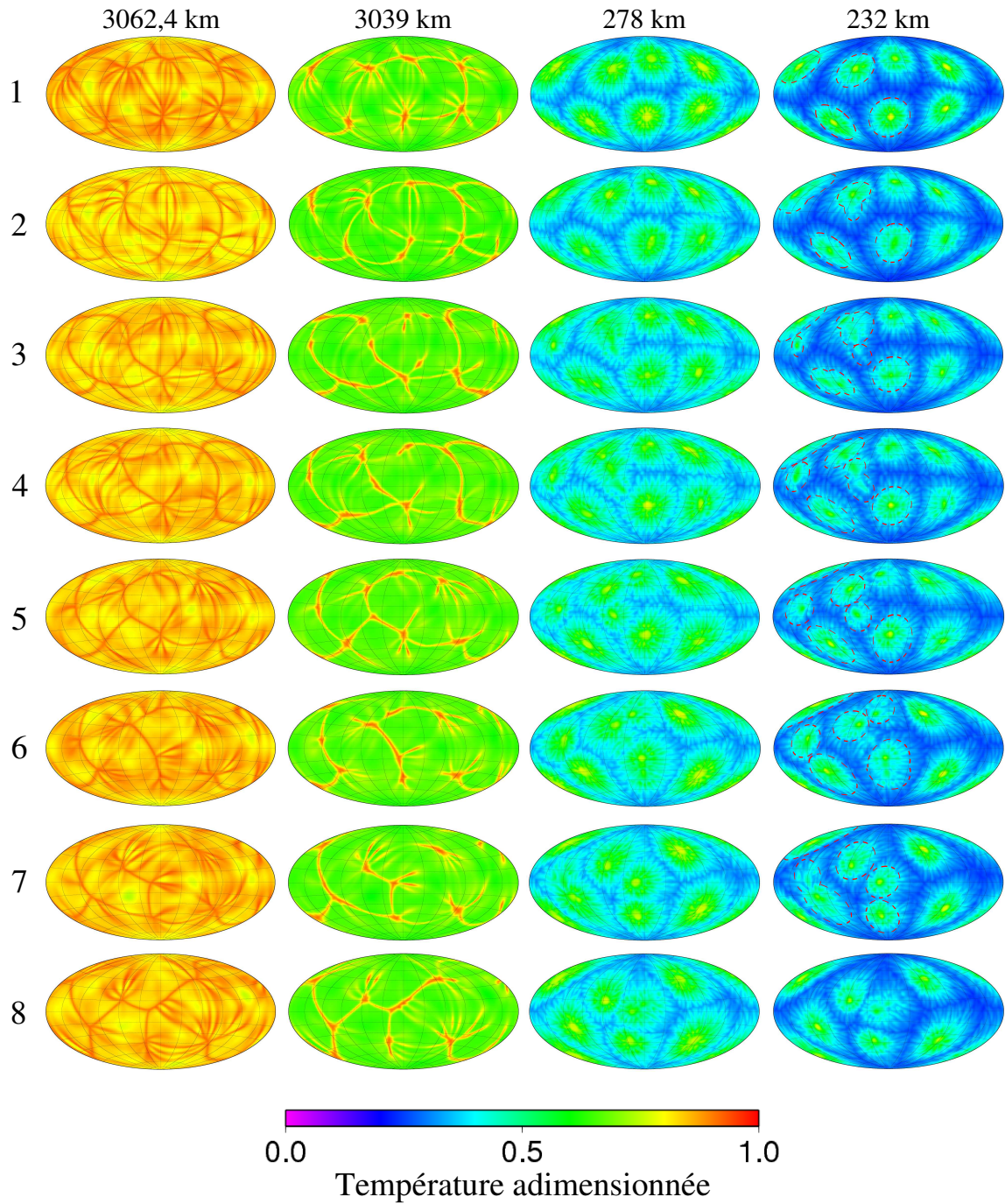


FIG. 4.13 – Cartes de la décomposition en harmoniques sphériques du champ de température pour les huit instantanés, à quatre profondeurs : juste au-dessus de la CMB (3062,4 km), à 3039 km, à 278 km et enfin à 232 km.

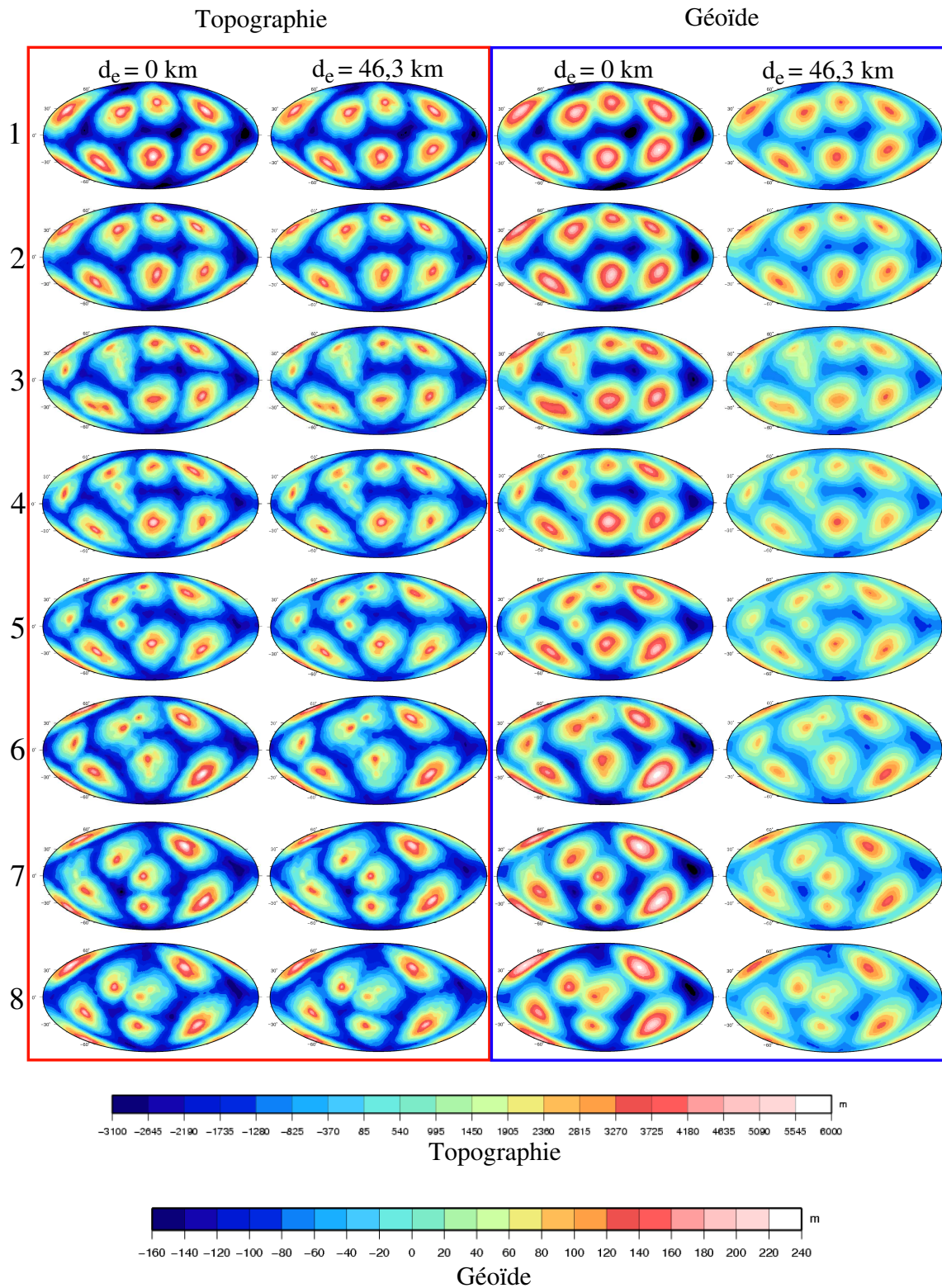


FIG. 4.14 – Cartes de la topographie dynamique de surface (cadre rouge) et du géοide (cadre bleu), associés aux huit instantanés, sans lithosphère élastique (gauche) ou avec une lithosphère de 46,3 km (droite).

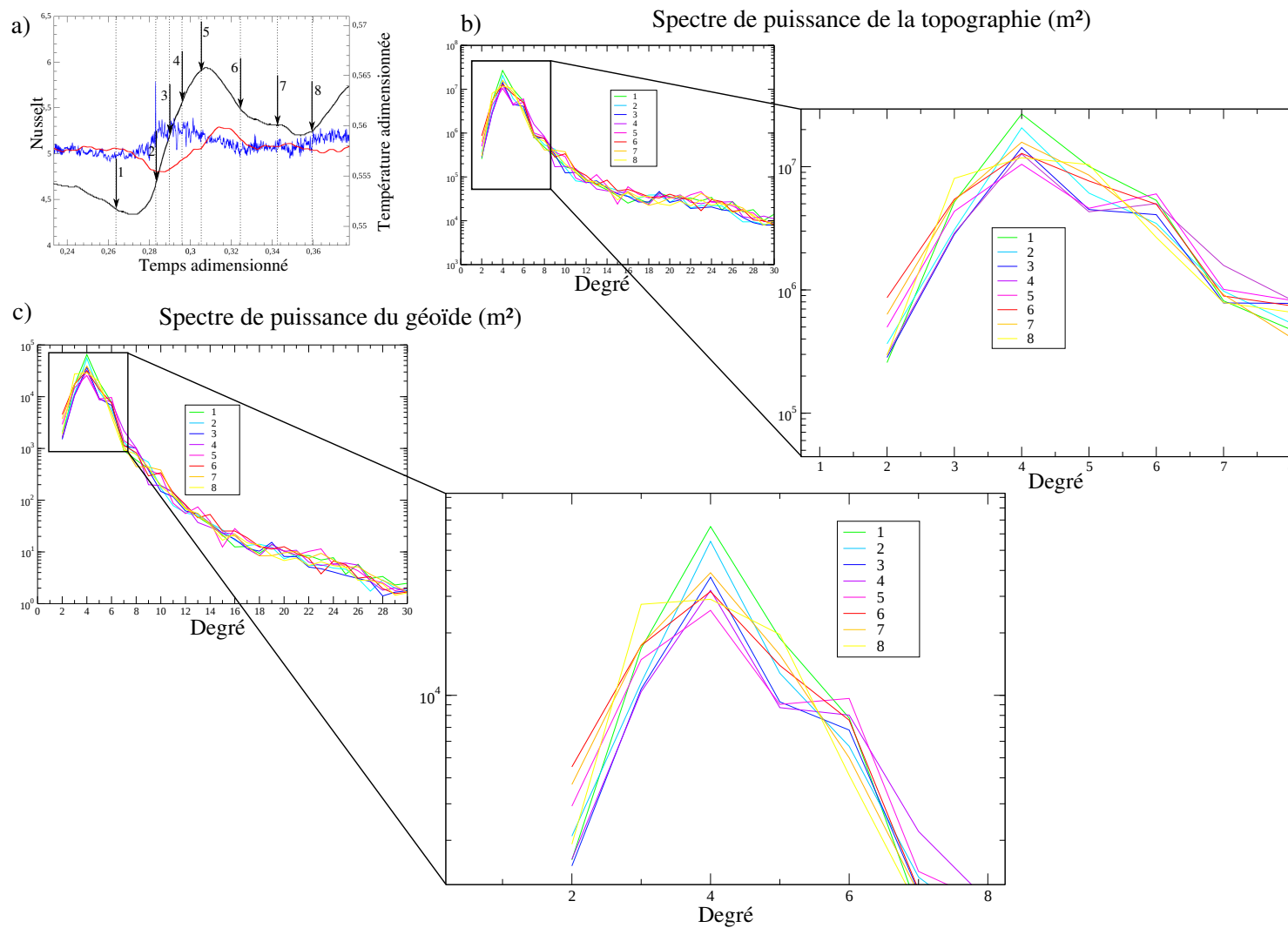


FIG. 4.15 – a) Identification des huit instantanés sur l'évolution temporelle de la température. b) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface purement visqueuse pour les huit instantanés, avec un agrandissement entre les degrés 2 et 8. c) Spectres de puissance du géoïde associé aux huit instantanés avec un agrandissement entre les degrés 2 et 8.

La variation temporelle des solutions de cette simulation est à l'origine d'une forte disparité dans les structures de la convection (en termes de nombre de panaches par exemple) et de fortes variations des spectres de puissance de la topographie (de -50% à +25% par rapport à la valeur du spectre de puissance moyen au degré 4, Figure 4.16). Elle provoque également une évolution temporelle importante du géoïde (de -63% à +93% par rapport à la valeur du spectre de puissance moyen au degré 4, Figure 4.17). Cette forte variabilité temporelle est la cause d'une superposition des spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour les simulations J et REF, excepté entre les degrés 4 et 6 (Figures 4.16 et 4.17). En revanche, les admittances associées (Figure 4.18) se superposent largement, quelque soit le degré ℓ considéré. Tout comme dans la simulation P, la considération d'une lithosphère élastique n'aura pas d'effet intéressant sur le signal de la topographie tant les spectres relatifs à ces deux simulations sont proches les uns des autres.

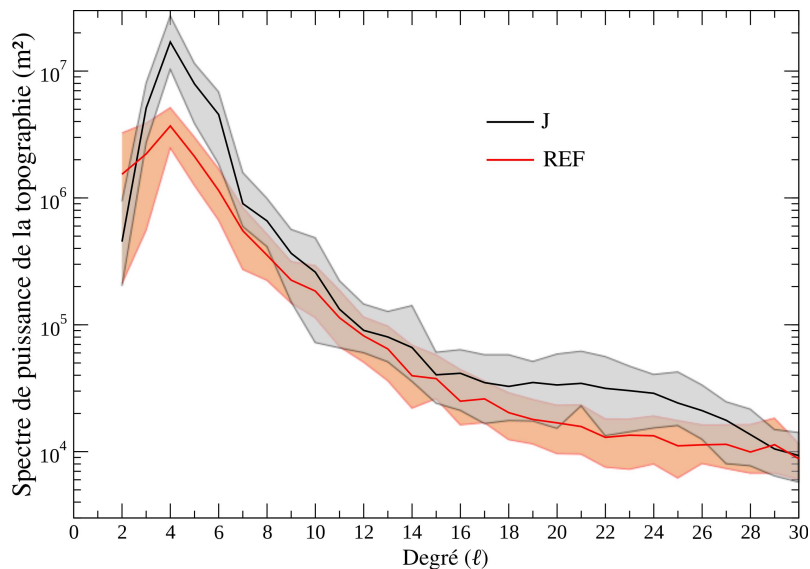


FIG. 4.16 – Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique des simulations REF (en rouge) et J (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la topographie dynamique pour la simulation J entre les points 1 et 8 et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.

Malgré cette forte dépendance temporelle, il semble assez peu probable de voir une convection de faible degré émerger de cette simulation, même en présence d'un saut de viscosité, contrairement à ce qu'obtiennent d'autres études (dans le cadre d'une viscosité stratifiée Bunge et al., 1996; Zhong et al., 2000; McNamara et Zhong, 2005; Yoshida et Kageyama, 2006; Robuchon, 2009, dont les deux derniers concernent la planète Mars). La profondeur du saut de viscosité en est probablement responsable. En effet, Zhong et Zuber (2001) ont montré qu'un saut de viscosité de 500

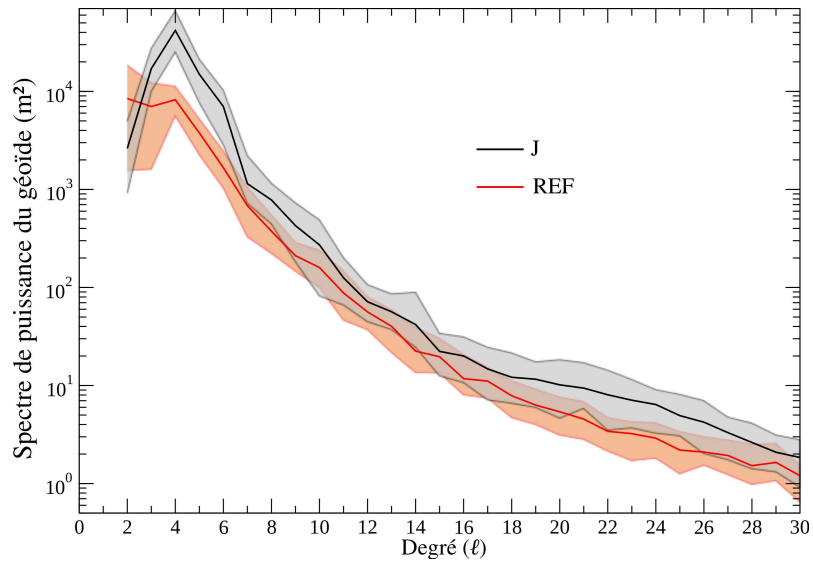


FIG. 4.17 – Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF (en rouge) et J (en noir) sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l’enveloppe de l’évolution temporelle du géoïde pour la simulation J entre les 8 instantanés et l’enveloppe orange celle de la simulation REF.

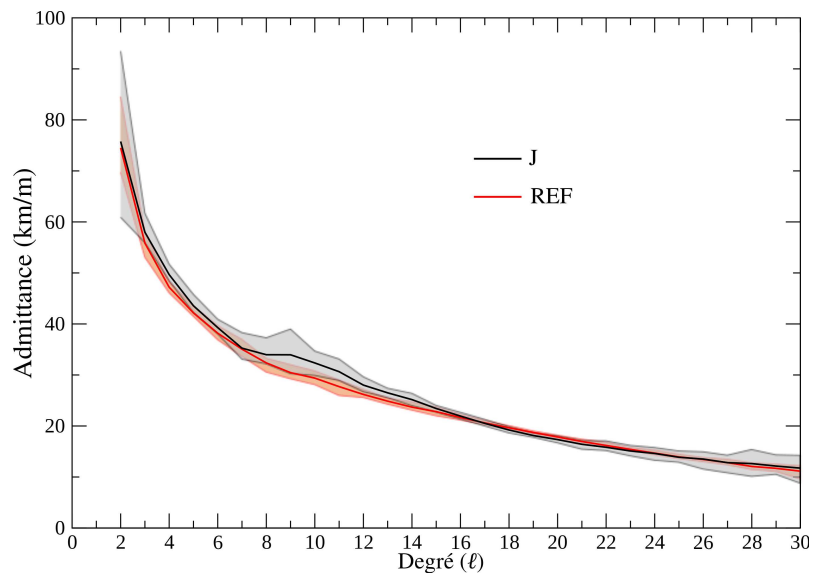


FIG. 4.18 – Admittances moyennes entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé pour les simulations J (en noir) et REF (en rouge). La zone grisée représente l’enveloppe de l’évolution temporelle de l’admittance pour la simulation J et l’enveloppe orange celle de la simulation REF.

entre le manteau inférieur et le manteau supérieur (à ~ 670 km de profondeur) leur permet d'obtenir une convection de faible degré dans un modèle 2D axisymétrique sphérique. Cependant, l'amplitude importante de ce saut de viscosité ne trouve pas de justification auprès des observables géophysiques. En revanche, Roberts et Zhong (2006) obtiennent également une convection de faible degré en utilisant un modèle 3D avec une viscosité dépendante de la température et de la pression avec un saut de viscosité entre 8 et 25 entre le manteau inférieur et le manteau supérieur. L'objectif de cette thèse n'étant pas d'obtenir une convection de plus faible degré, d'autres simulations n'ont pas été effectuées dans ce but.

4.2.4 Influence du nombre de Rayleigh sur la convection - simulations Ra^- et Ra^+

Les simulations suivantes concernent l'effet d'une augmentation du nombre de Rayleigh. Les paramètres de ces simulations se trouvent dans le Tableau 4.2. La dépendance en pression, en température et le contraste de viscosité global de la simulation REF ont été conservées. La figure 4.19a présente l'état de convergence des trois simulations (Ra^- , REF et Ra^+) pour la température et les nombres de Nusselt moyennés sur toute la coquille sphérique.

De manière générale, comme le prédisent les lois de paramétrisation Nu-Ra, l'augmentation du nombre de Rayleigh est à l'origine d'une augmentation des nombres de Nusselt moyennés sur toute la coquille sphérique (Kiefer et Hager, 1992 ; en géométrie cylindrique pour une viscosité dépendante de la température et de la pression, Bercovici et al., 1989 ; Wolstencroft et al., 2009, pour un modèle isovisqueux 3D sphérique, Zhong et al., 2000 ; Stemmer et al., 2006, en géométrie sphérique pour une viscosité dépendante de la température et de la pression).

En revanche, alors que l'on s'attend à une diminution de la température moyenne lors de l'évacuation efficace de la chaleur (grâce à l'augmentation de la vigueur de la convection), l'augmentation du nombre de Rayleigh est à l'origine d'une légère augmentation de la température globale moyenne. Ce résultat contre-intuitif s'explique comme suit : en pratique, la température adimensionnée du coeur isotherme moyennée dans le temps diminue très légèrement lorsque le nombre de Rayleigh augmente (0,0214 - 80 K - entre Ra^- et Ra^+ , Figure 4.19b-profils en pointillés). Ce résultat avait déjà été souligné par Stemmer et al. (2006) dans leur modèle 3D sphérique et par Tackley (1996) en cartésien, avec une viscosité dépendante de la température et de la profondeur dans les deux cas. Puisque l'augmentation du nombre de Rayleigh s'accompagne d'une nette diminution de l'épaisseur du couvercle (diminution d'environ 400 km entre les simulations Ra^- et Ra^+ , la ligne en pointillés noirs de

la Figure 4.19b, c et d représente l'épaisseur du couvercle de la simulation REF), la température moyennée dans le temps à un rayon constant dans le couvercle, augmente (Figure 4.19b). Le couvercle de surface occupant un volume plus important dans la sphère, lorsque les températures sont moyennées sur toute la coquille sphérique, celles du couvercle ont une contribution plus importante que celles du coeur isotherme (et celle de la base), la température moyennée sur toute la coquille sphérique augmente. Ce résultat a également été mis en évidence par Solomatov (1995).

L'augmentation du nombre de Rayleigh s'accompagne d'une oscillation de la température ainsi que des nombres de Nusselt de la simulation Ra^+ (Figure 4.19a), marqueurs du développement d'un écoulement turbulent très dépendant du temps. De ce fait, l'état de convergence statistique de la simulation Ra^+ est discutable. En revanche, les oscillations de la température et des nombres de Nusselt des simulations Ra^- et REF sont moins fortes, indicateurs d'une convection plus stationnaire.

Il apparaît clairement sur l'évolution avec la profondeur des flux de chaleur moyennés dans le temps (Figure 4.19c), que la simulation Ra^- a atteint l'état quasi-stationnaire et est bien décrite par la résolution spatiale adoptée ici (on peut imaginer que le flux total, non représenté ici, serait constant), la simulation REF est à la limite de la résolution nécessaire pour une description optimale des couches limites thermiques et enfin, la simulation Ra^+ présente une résolution insuffisante, comme en témoignent les points en bordure des couches limites thermiques. Quoi qu'il en soit, les flux diffusifs maximum à la CMB et à la surface ainsi que les flux advectifs augmentent lorsque le nombre de Rayleigh augmente, conformément à l'intuition.

En corrélation avec une augmentation de la vigueur de la convection lorsque le nombre de Rayleigh augmente, les vitesses radiales moyennes ascendantes et descendantes augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh (Figure 4.30d). Les vitesses moyennes radiales ascendantes de la simulation Ra^+ sont environ 10 fois supérieures à celles de la simulation Ra^- et les vitesses radiales moyennes descendantes sont environ 30 fois supérieures. Encore une fois, il convient de rester prudent quant à une généralisation de ces valeurs compte tenu du manque de convergence et de résolution de la simulation Ra^+ . On notera également que la profondeur du maximum des vitesses radiales moyennes ascendantes augmente très légèrement lorsque le nombre de Rayleigh augmente (de la même façon que dans l'étude de Stemmer et al., 2006).

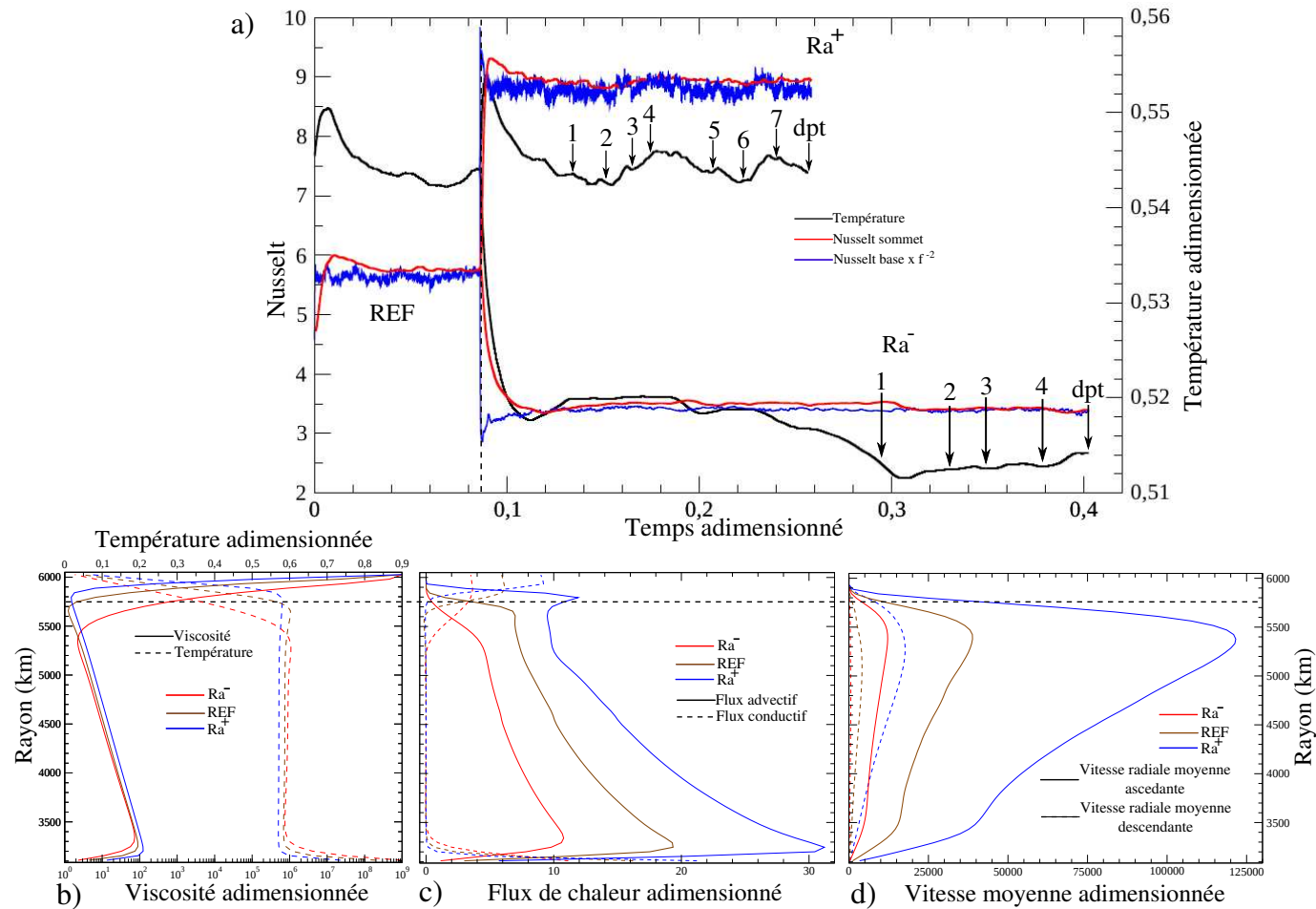


FIG. 4.19 – Simulation avec une modification du nombre de Rayleigh (Ra^- , REF et Ra^+). a) Évolution temporelle de la température (noir) et des nombres de Nusselt à la base (bleu) et au sommet (rouge) moyennés sur toute la coquille sphérique. Les flèches et les numéros associés identifient les instantanés des Figures 4.22 et 4.23 et l'étiquette *dpt* identifie le dernier pas de temps, correspondant aux Figures 4.27 et 4.28. b) Profils de la température (pointillés) et de la viscosité (trait plein) adimensionnés et moyennés dans le temps à partir de l'instant 1, pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). d) Profils des flux advectifs moyens (trait plein) et diffusifs moyens (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). e) Profils des vitesses radiales moyennes maximum ascendantes (trait plein) et descendantes (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu).

La figure 4.20 rassemble les représentations 3D des isothermes des trois simulations pour le dernier pas de temps (dpt sur la Figure 4.19a). À chaque fois, la représentation des panaches descendants correspond à un isotherme situé à la base du couvercle. Lorsque $Ra_i = 1,404 \cdot 10^6$ (simulation Ra^- , figures du haut), les panaches ascendants sont nombreux, de tailles relativement similaires les uns avec les autres, avec des têtes peu découpées en périphérie et ils sont présents sur la sphère de façon homogène avec un espacement relativement constant (isotherme 0,66 - 2441 K). Les panaches descendants s'organisent le long de feuillets qui entourent les panaches ascendants et ne présentent pas de tête significatives (isotherme 0,58 - 2145 K). Lorsque $Ra_i = 1,277 \cdot 10^7$ (simulation de référence, figures du milieu), les panaches ascendants sont de tailles variables avec des têtes dont la périphérie est découpée et s'organisent à peu près sur toute la sphère avec cependant des zones où les panaches ascendants sont absents, l'espacement entre eux est donc variable à l'échelle de toute la sphère (isotherme 0,629 - 2327 K). Les panaches descendants sont plus nombreux et s'organisent le long de lignes d'instabilités froides, ne présentent pas de tête significatives (isotherme 0,575 - 2127 K) et les conduits semblent plus fins. Enfin, pour $Ra_i = 9,686 \cdot 10^7$ (cas Ra^+ , figure du bas), les panaches ascendants sont encore moins nombreux, de tailles variables mais certains peuvent être relativement gros, avec des têtes très découpées et s'organisent cette fois dans des régions précises de la coquille sphérique (isotherme 0,59 - 2182 K). Ces panaches sont liés entre eux par une ride de matériel chaud depuis la CMB jusqu'à la proximité de la tête du panache (comme pour Keller et Tackley (2009) avec des nombres de Rayleigh similaires). La présence de ce feuillet de matériel chaud met en évidence un phénomène de rassemblement de panaches (*clustering*), l'espacement entre les panaches chauds est alors très réduit le long de cette ligne. Les panaches descendants sont plus nombreux que dans les simulations précédentes et semblent révéler des structures plus fines que dans les simulations précédentes.

Dans les simulations présentées ici, il est clair que nous avons atteint des nombres de Rayleigh élevés (pour les simulations REF et Ra^+) qui imposent une variabilité temporelle des structures très marquée. La plupart des modèles ayant contraint l'évolution des structures en fonction du nombre de Rayleigh indiquent une diminution de la longueur d'onde avec l'augmentation du nombre de Rayleigh : Tackley (1996) en 3D cartésien ou Zhong et al. (2000), Yanagisawa et Yamagishi (2005), Wolstencroft et al. (2009), Deschamps et al. (2010) en modèle 3D sphérique, mais tous avec des nombres de Rayleigh internes inférieurs ou égaux à 10^8 . Il aurait été intéressant ici d'avoir une simulation avec un nombre de Rayleigh interne inférieur à 10^6 pour contraindre cette évolution. Cependant, l'étude de Smrekar et Sotin (2012) utilise *Oedipe* pour contraindre le nombre de panaches (entre autres) en fonction du nombre

de Rayleigh interne avec une viscosité uniquement dépendante de la température. Les résultats de cette étude rejoignent ceux de Parmentier et Sotin (2000) qui proposent que le nombre de panaches froids soit proportionnel au nombre de Rayleigh en suivant une loi $Ra^{1/4}$ pour des nombres de Rayleigh entre $3 \cdot 10^6$ et $3 \cdot 10^9$. (avec un chauffage uniquement en volume dans un modèle 3D cartésien isovisqueux). Zhong (2005) en 3D cartésien isovisqueux avec un chauffage par la base propose que le nombre de panaches suive une loi de proportionnalité en $Ra^{0,31}$ et un espacement entre les panaches de $\lambda \sim Ra^{-0,16} \sim \delta^{1/2}$ pour des nombres de Rayleigh interne compris entre $3 \cdot 10^6$ et $3 \cdot 10^7$. En dessous de $3 \cdot 10^6$ ou au dessus de $3 \cdot 10^7$, le nombre de panaches ne dépend plus du nombre de Rayleigh, comme cela semble être le cas ici (pour les simulations Ra^- et Ra^+).

La représentation des isothermes 3D des simulations Ra^- , REF et Ra^+ (Figure 4.20) reflète : (1) un état quasi stationnaire pour un nombre de Rayleigh interne de $1,404 \cdot 10^6$ (Ra^-), (2) une dépendance temporelle importante lorsque le nombre de Rayleigh interne atteint $1,277 \cdot 10^7$ (REF). (3) Pour un Rayleigh interne de $9,686 \cdot 10^7$, au-delà de la limite d'investigations de Zhong (2005) et Smrekar et Sotin (2012), la dépendance temporelle est encore plus marquée. (4) À partir de $Ra_i = 1,277 \cdot 10^7$, le nombre de panaches ascendants paraît indépendant du nombre de Rayleigh. Un autre paramètre semble donc contrôler la longueur d'onde des structures convectives et il apparaît alors que deux grandeurs doivent être considérées :

- La taille du conduit des panaches ascendants semble diminuer lorsque le nombre de Rayleigh augmente. De la même manière, la taille des conduits des panaches descendants diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Ceci dit, une caractérisation rigoureuse de la taille des conduits implique l'utilisation de méthodes de détection et de traitement statistique qui n'ont pas été développées ici. Le lecteur intéressé par ces méthodes trouvera des détails dans les études de Labrosse (2002), Zhong (2005) et Smrekar et Sotin (2012).

- L'espacement entre les panaches. En effet, on observe un phénomène de regroupement de grappes de panaches fins dans des régions localisées de l'écoulement (*clustering*) lorsque le nombre de Rayleigh augmente, de la même manière que dans l'étude de Keller et Tackley (2009) ou le clustering extrême aboutit à la formation d'une ride.

La figure 4.21a représente les spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour les trois simulations au dernier instant de la convection. Encore une fois, l'évolution des degrés dominants du champ de température dépend beaucoup de l'instantané observé et du fait que la simulation Ra^+ n'ait pas atteint l'état stationnaire. Les degrés dominants de la température et leur amplitude reflètent l'expression dominante des panaches ascendants proches de la surface,

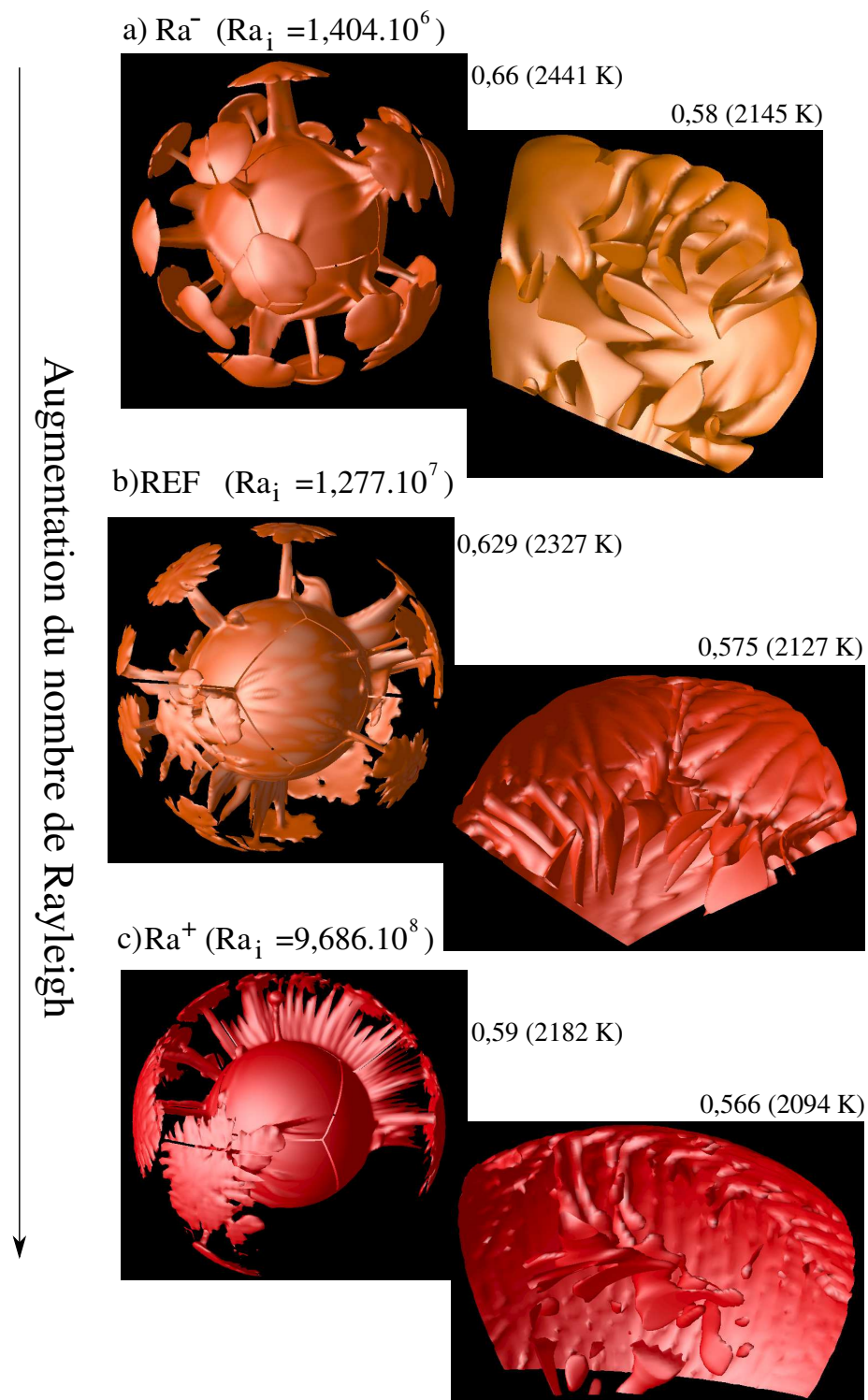


FIG. 4.20 – Représentation 3D des isothermes pour les simulations Ra^- (a), REF (b) et Ra^+ (c).

masquant complètement les petites longueurs d'ondes associées aux panaches descendants. Cette dominance aboutit à la mise en évidence paradoxale d'une diminution du degré dominant (augmentation de la longueur d'onde) avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. En revanche, les cartes de température aux trois profondeurs identifiées par le trait pointillé horizontal de la Figure 4.21a montrent ces structures de petite échelle dont la longueur d'onde caractéristique semble diminuer au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente (Figure 4.21b). Les cartes de température des trois simulations proches de la CMB (Figure 4.21c) montrent également que le nombre de ramifications entre les points de naissance des panaches chauds ascendants augmentent avec le nombre de Rayleigh.

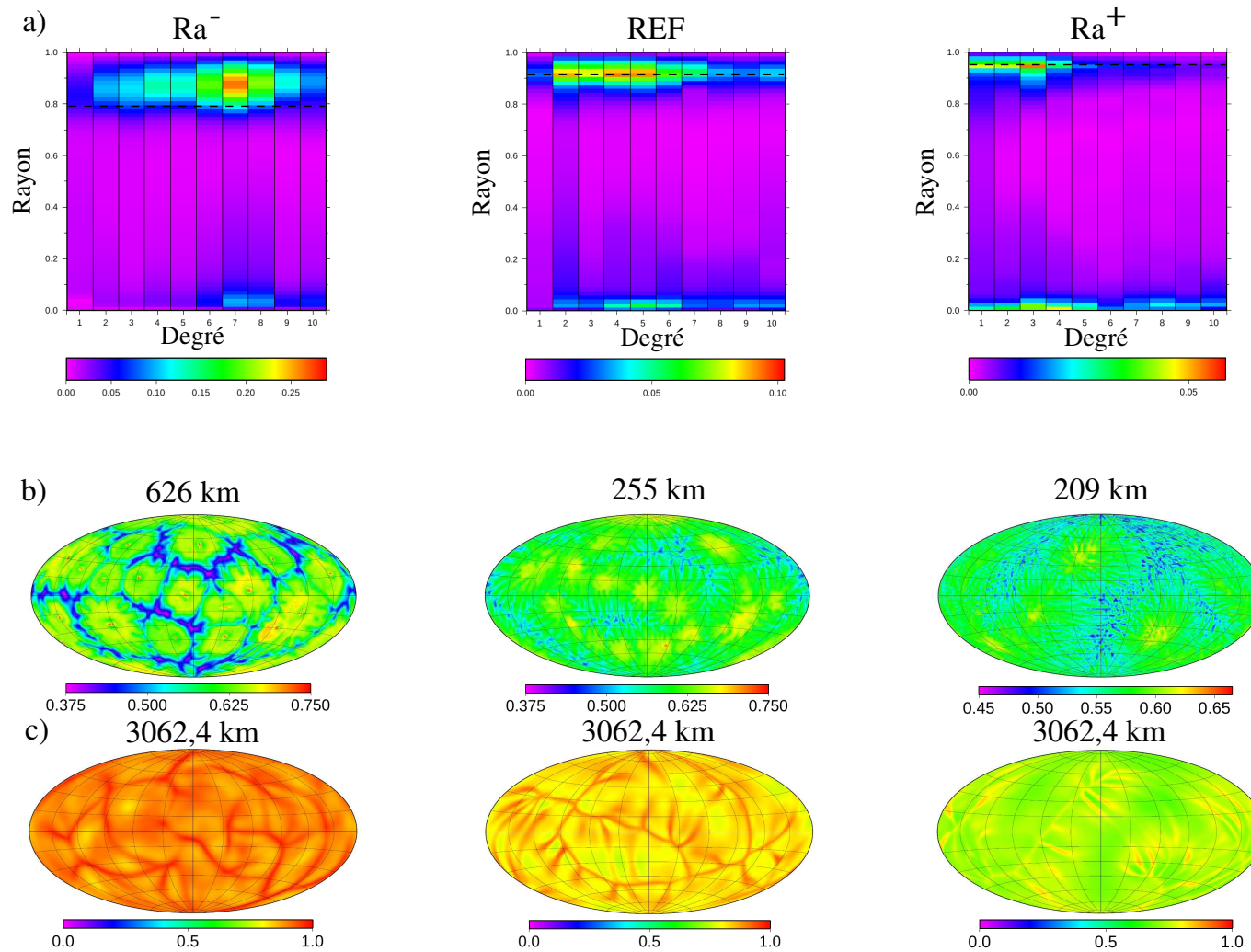


FIG. 4.21 – a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ . La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 626 km de profondeur (Ra^-), 255 km (REF) et 209 km (Ra^+) et c) Champ de température de la demi-cellule au-dessus de la CMB (3062,4 km de profondeur).

	Topographie (%)	Géoïde (%)	Admittance (%)
Ra ⁻	-42,31/+37,09	-36,86/+31,89	-5,54/+7,15
REF	-86,32/+111,31	-81,54/+118,62	-6,42/+13,5
Ra ⁺	-86,68/+119,21	-85,51/+121,18	-6,31/+5,42

TAB. 4.4 – Écart maximum entre les enveloppes temporelles et la valeur moyenne au degré 2.

Évolution temporelle des observables de surface Nous l'avons compris, les simulations REF et Ra⁺ sont dépendantes du temps et seule la simulation Ra⁻ semble avoir atteint un état quasi-stationnaire. Cette évolution de la convection au cours du temps s'exprime naturellement dans les signaux de surface de la topographie dynamique et du géoïde associé. Comme on peut le voir sur la Figure 4.22, les structures de la topographie associées à la simulation Ra⁻ présentent très peu de variations au cours du temps. En revanche, celles de la simulation Ra⁺ (Figure 4.23) montrent des variations d'amplitude, de taille et de position très marquées d'un instantané à l'autre (la position des instantanés de ces deux simulations sont représentés sur la Figure 4.19a).

Dans leur modèle à géométrie axisymétrique cylindrique avec une viscosité dépendante de la profondeur uniquement, Kiefer et Hager (1992) obtiennent des variations du géoïde et de la topographie maximum de 3 à 4% lorsque $Ra_i \leq 10^6$ dans des simulations avec une dépendance temporelle importante. Dans leur modèle 2D sphérique axisymétrique avec une loi de viscosité dépendante de la température et un nombre de Rayleigh interne compris entre 10^6 et 10^7 , Kiefer et Kellogg (1998) obtiennent des fluctuations de 30 à 50% de la topographie et du géoïde par rapport à leur valeur moyenne. Cette fluctuation au cours du temps semble dépendre des conditions initiales et augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect des cellules de convection. Dans nos simulations, le nombre de Rayleigh interne varie de $1,404 \cdot 10^6$ à $9,686 \cdot 10^7$, engendrant des écarts par rapport au spectre de puissance moyen très importants (Figures 4.24 et 4.25). Cet écart varie avec le degré et reste particulièrement marqué au degré 2, comme le montre le Tableau 4.4. Tout comme les isothermes 3D (Figure 4.20) et les champs de température (Figure 4.21), l'évolution temporelle des observables de surface met également en évidence une diminution paradoxale du degré dominant (augmentation de la longueur d'onde) avec l'augmentation du nombre de Rayleigh ($\ell = 7$ pour Ra⁻, $\ell = 4$ pour REF et $\ell = 2-3$ pour Ra⁺).

Même si il y a une grande variabilité dans l'amplitude des spectres de puissance de la topographie dynamique et du géoïde associé, l'augmentation du nombre de Rayleigh interne est associé à une diminution systématique de l'amplitude de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé (Figures 4.24 et 4.25). Ce résultat contre-intuitif (on s'attendrait à voir une topographie plus importante lorsque la

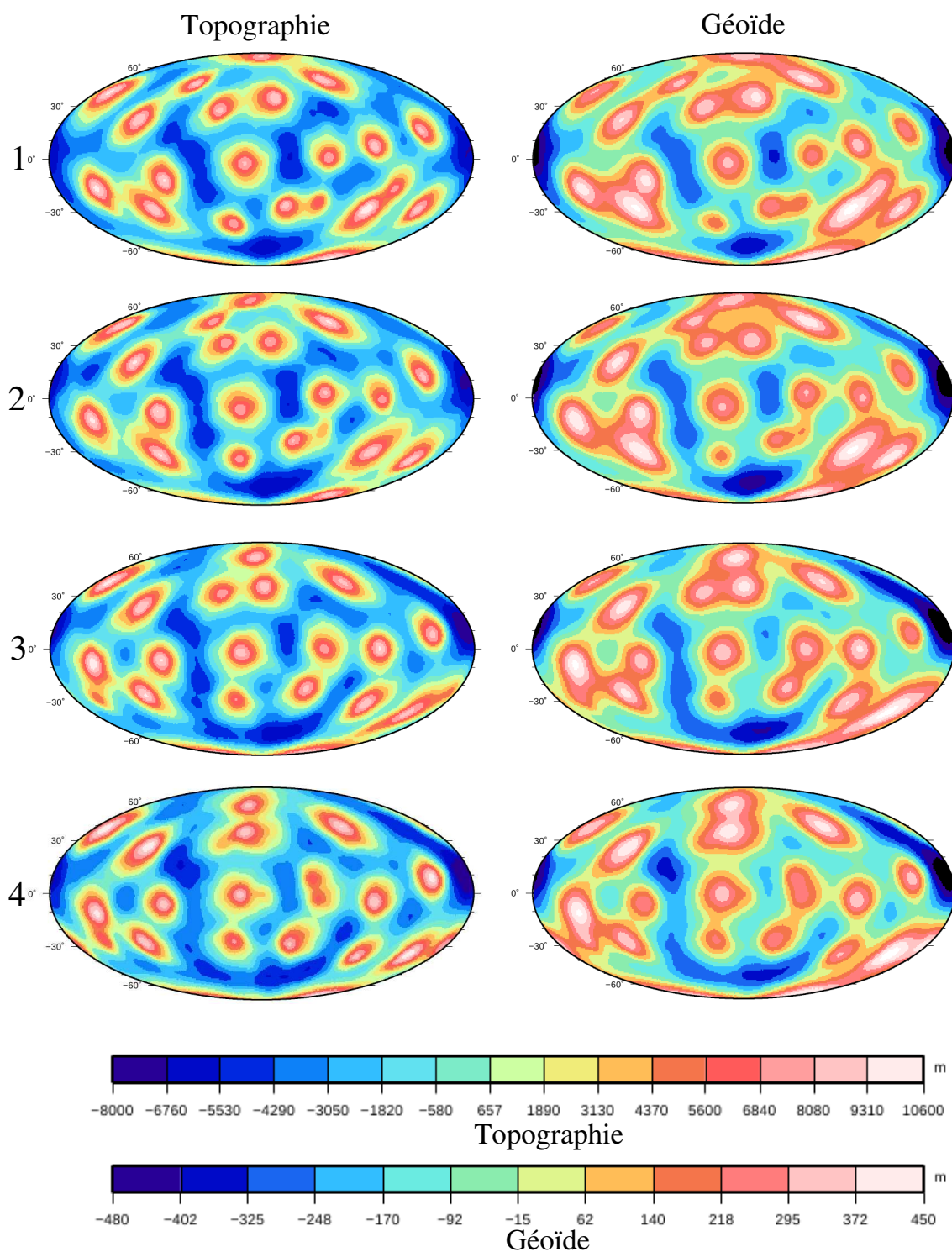


FIG. 4.22 – Cartes de la topographie dynamique de surface et du géοide associé de la simulation Ra^- pour les quatre instantanés identifiés sur la Figure 4.19a, sans lithosphère élastique.

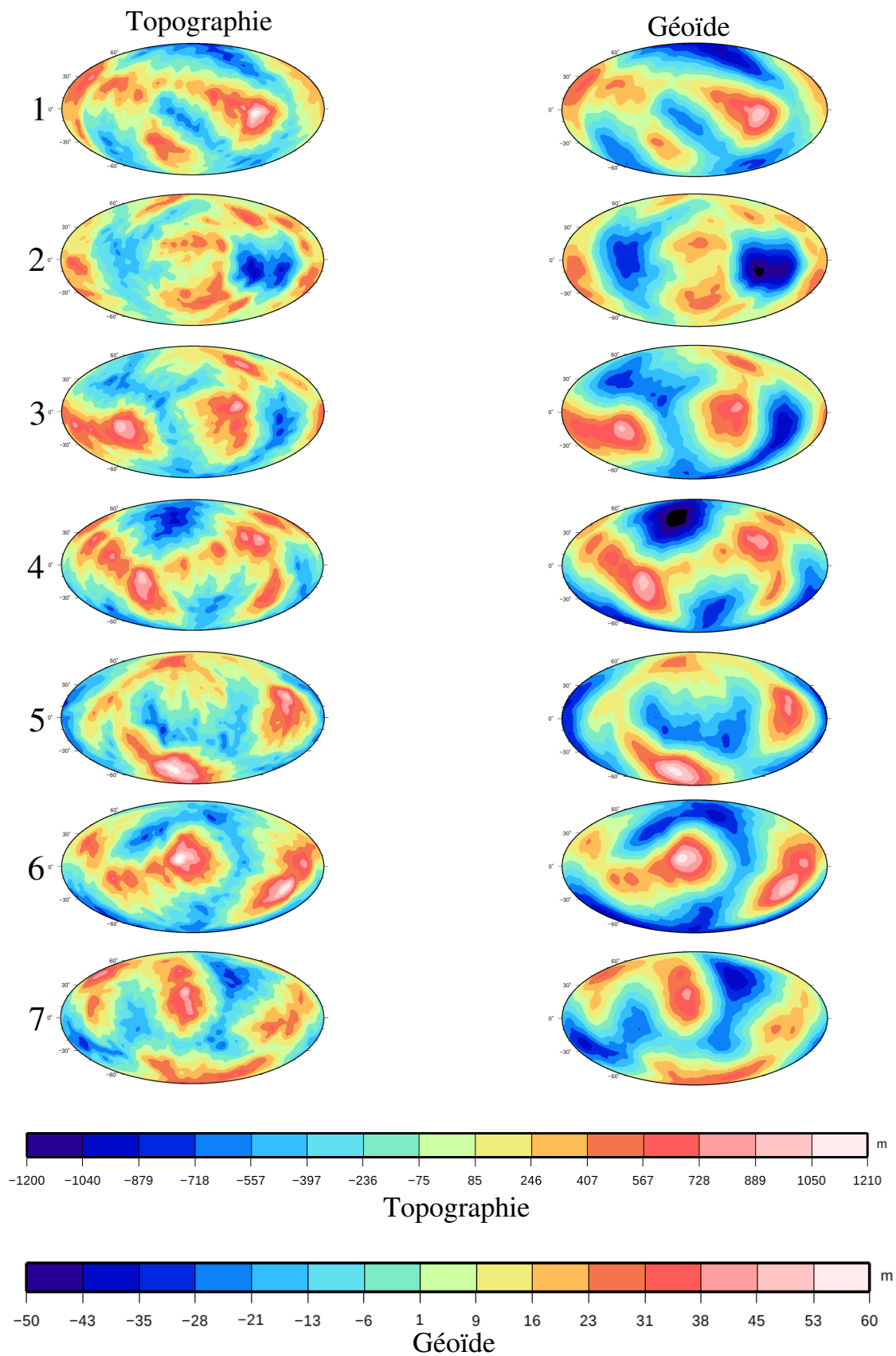


FIG. 4.23 – Cartes de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé de la simulation Ra^+ pour les sept instantanés identifiés sur la Figure 4.19a, sans lithosphère élastique.

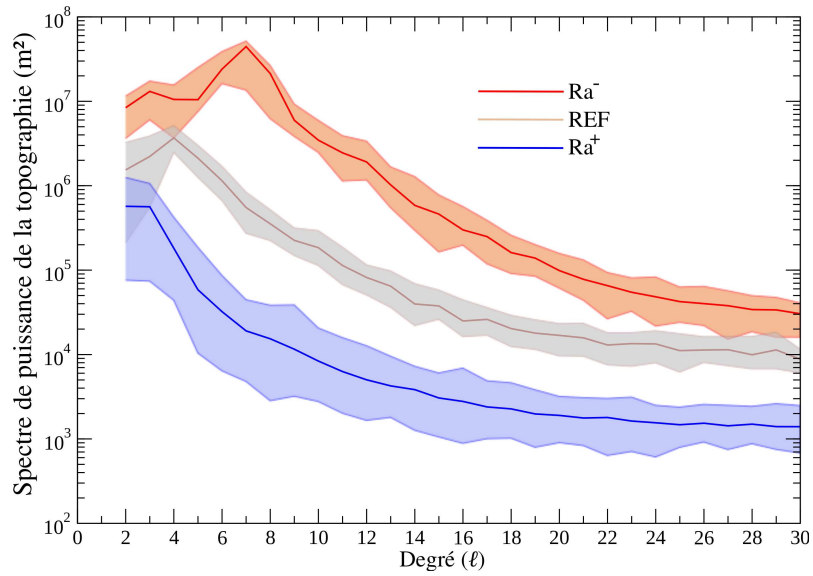


FIG. 4.24 – Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique de surface des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu) sans lithosphère élastique. Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle de la topographie dynamique de chaque simulation.

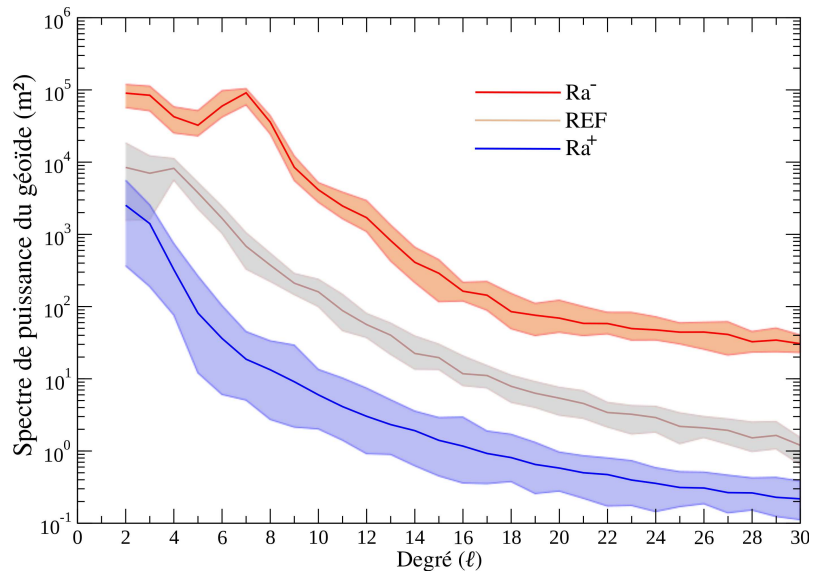


FIG. 4.25 – Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu) associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse. Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle du géoïde de chaque simulation.

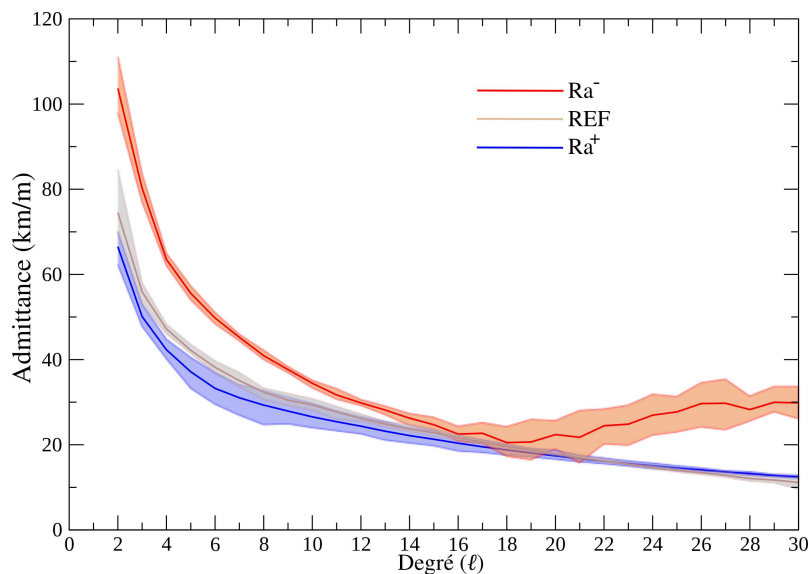


FIG. 4.26 – Admittances moyennes entre la topographie dynamique de surface purement visqueuse et le géoïde des simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). Les zones de couleur représentent les enveloppes de l'évolution temporelle de l'admittance de chaque simulation.

vigueur de la convection est plus grande) s'explique facilement en reprenant les équations 2.84 et 2.85 de dimensionnement des contraintes. Si l'on regarde l'amplitude des contraintes adimensionnées générées par la convection des trois simulations (non montrées ici), l'augmentation du nombre de Rayleigh est bien accompagné d'une augmentation des contraintes. Cependant, le dimensionnement des contraintes qui fait intervenir un terme $\frac{1}{Ra_B}$, avec un nombre de Rayleigh qui augmente, aboutit à une contrainte dimensionnée qui diminue et donc à une diminution de la topographie. Pour les mêmes raisons, Kiefer et Hager (1992) (avec un modèle cylindrique axisymétrique) avancent les mêmes résultats.

Les admittances des simulations REF et Ra^+ sont relativement proches alors que celle de la simulation Ra^- est supérieure aux deux autres (Figure 4.26). On note également une augmentation de l'admittance de la simulation Ra^- pour des degrés supérieurs à 16 qui correspond à une contribution plus marquée de la topographie sur le géoïde à ces longueurs d'ondes. L'admittance associée à chacune des simulations diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh à degré constant, conséquence directe d'une diminution de la topographie dynamique plus importante que la diminution de l'amplitude des anomalies de densité sur le signal du géoïde.

Analyse de la topographie dynamique et du géoïde associé au dernier pas de temps - Les figures 4.27 et 4.28 présentent la topographie dynamique de

surface et le géoïde associé pour les trois simulations lors du dernier pas de temps, sans lithosphère élastique (à gauche) et avec une lithosphère élastique de 46,3 km (à droite). Comme nous l'avons déjà mentionné, l'augmentation du nombre de Rayleigh s'accompagne (1) d'une diminution de l'amplitude de la topographie et du géoïde associé et (2) d'une diminution apparente du nombre de panaches (par agglomération de panaches), donc à des degrés dominants plus bas. L'effet de filtrage par la lithosphère élastique étant plus prononcé pour les grandes longueurs d'ondes (voir Chapitre 3), on retrouve un filtrage de plus en plus efficace avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Ainsi, si la différence est relativement modérée entre les amplitudes maximums de la topographie filtrée et non-filtrée autour de 7% (Figure 4.27), elle est beaucoup plus importante sur le géoïde associé (Figure 4.28) : l'amplitude maximum du géoïde est diminué de 30% pour la simulation Ra^- , 38,7% pour la simulation REF et 48,1% pour la simulation Ra^+ .

La figure 4.29a présente les spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour les trois simulations. Les degrés dominants des spectres de puissance de la topographie et du géoïde associé sont les degrés 6, 7 et 8 pour la simulation Ra^- , 2 à 5 pour la simulation REF et 2 à 4 pour la simulation Ra^+ . On observe donc bien un décalage vers les plus grandes longueurs d'onde des signaux au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

Les admittances entre la topographie et le géoïde sont également très différentes d'une simulation à l'autre (Figure 4.29b). Elles sont plus élevées aux bas degrés quelle que soit la simulation concernée, et pour un degré donné elles diminuent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. L'analyse des relations entre les admittances des différentes simulations de la Figure 4.26 s'applique également au dernier pas de temps. Cependant, un comportement important est à souligner dès à présent : bien que les simulations Ra^- et REF soient différentes en plusieurs aspects (nombre de panaches, température moyenne, viscosité moyenne, amplitude de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé), l'admittance de la simulation Ra^- dans le cas d'une topographie filtrée (courbe en pointillés rouge) est quasiment similaire à l'admittance de la simulation REF pour une topographie purement visqueuse du moins pour les degrés les plus faibles (courbe marron en trait plein). Cette similitude souligne l'importance de la prise en compte d'une lithosphère élastique.

Pour exagérer le propos au maximum, les résultats de l'inversion de l'admittance que l'on pourrait interpréter comme ceux d'une convection avec un nombre de Rayleigh interne de $1,277 \cdot 10^7$ peuvent tout aussi bien correspondre à une convection avec un nombre de Rayleigh interne d'un ordre de grandeur plus faible (ici $1,404 \cdot 10^6$) mais où le signal de surface aurait été diminué par l'effet d'un filtre élastique de 46,3 km. Une implication associée à un nombre de Rayleigh plus faible serait par

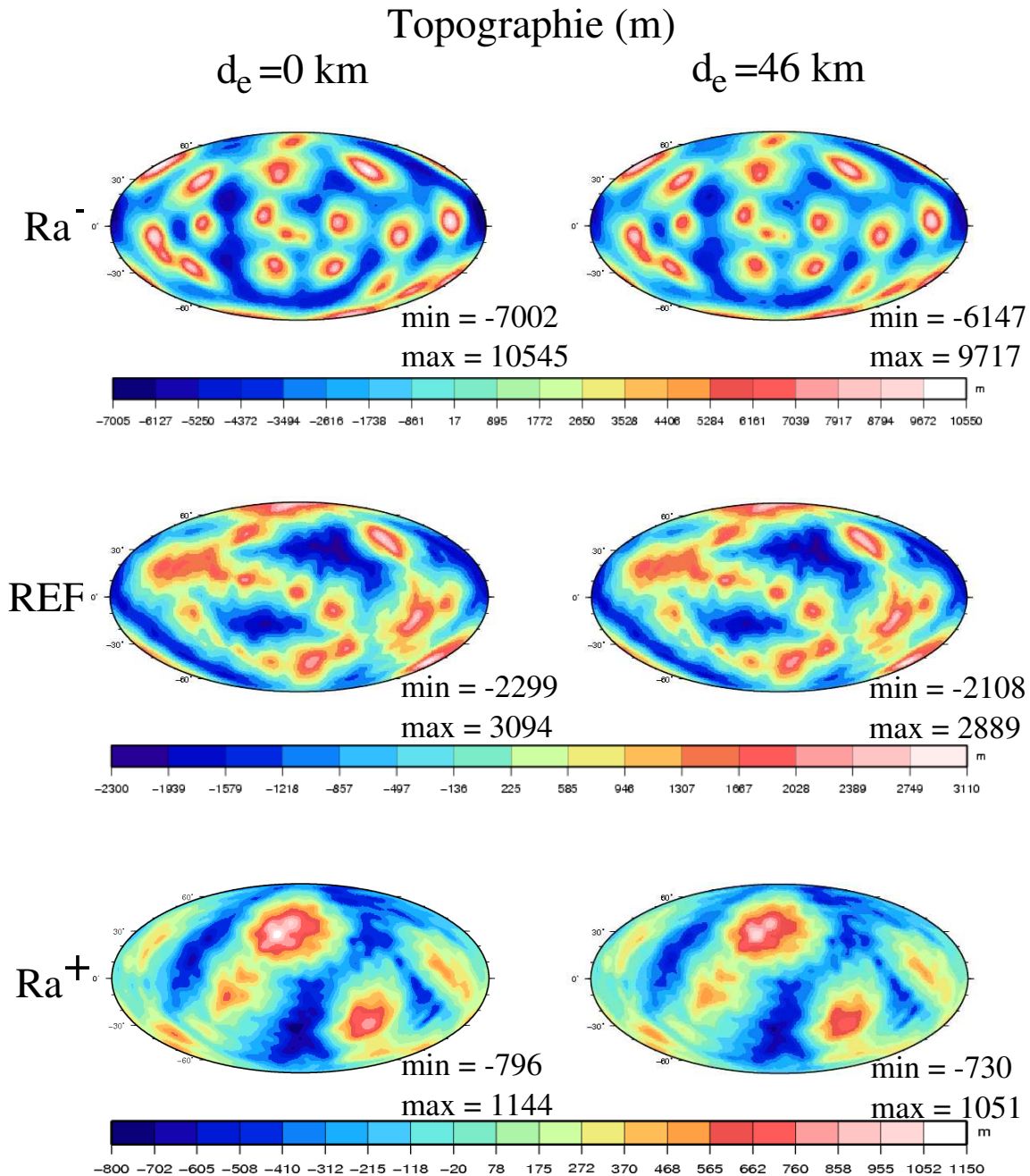


FIG. 4.27 – Cartes de la topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et filtrée par une lithosphère élastique de 46,3 km (droite) pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ au dernier pas de temps (d_{pt} sur la Figure 4.19a).

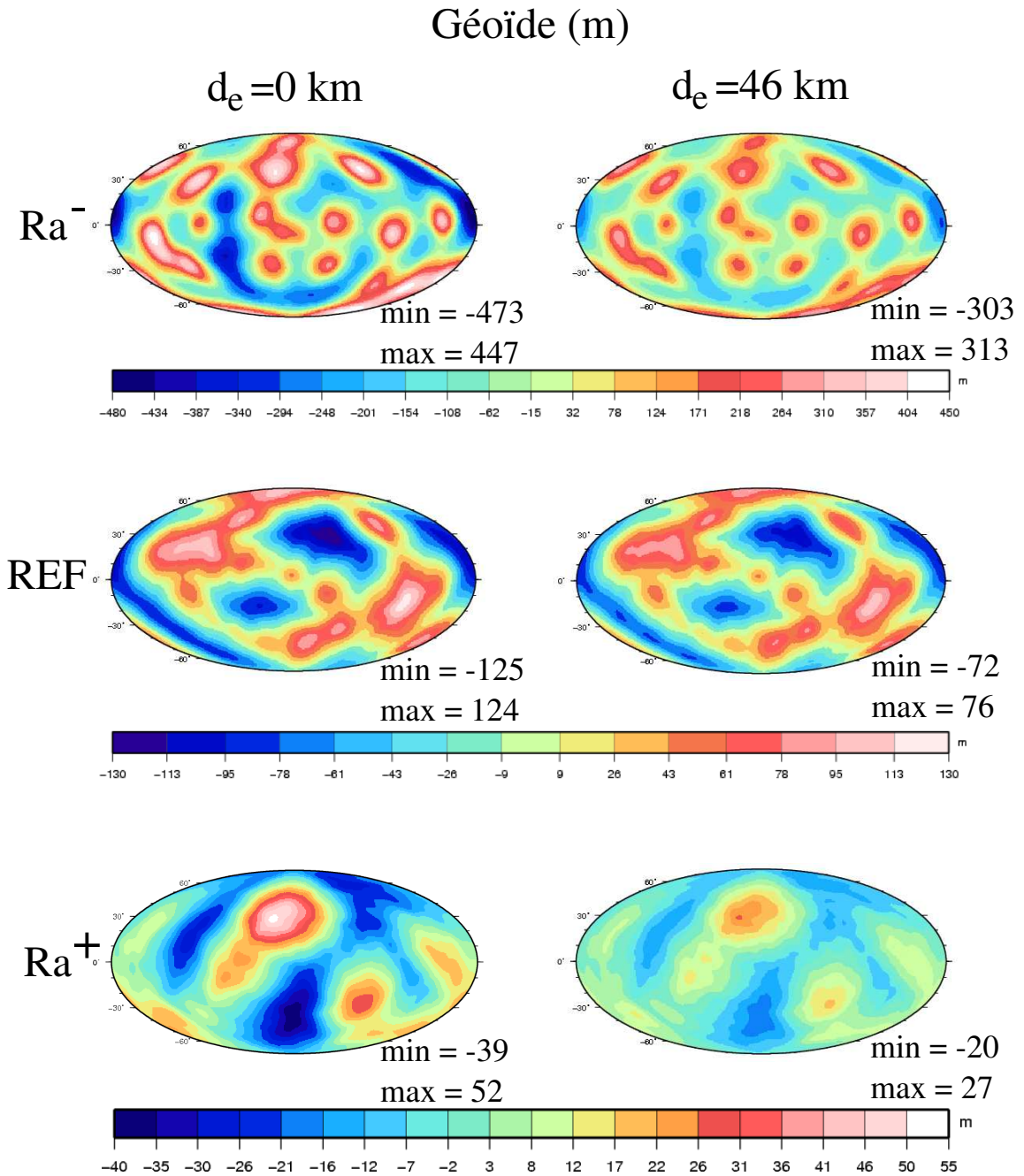


FIG. 4.28 – Cartes du géoïde associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et filtrée par une lithosphère élastique de 46,3 km (droite) pour les simulations Ra^- , REF et Ra^+ au dernier pas de temps (dpt sur la Figure 4.19a).

exemple une épaisseur du couvercle plus grande, qui entrainerait une modification des taux de transfert de chaleur par conduction, une convection moins vigoureuse dans le manteau, une fusion par décompression plus difficile et sans doute un taux de formation de la croûte plus faible (Keller et Tackley, 2009).

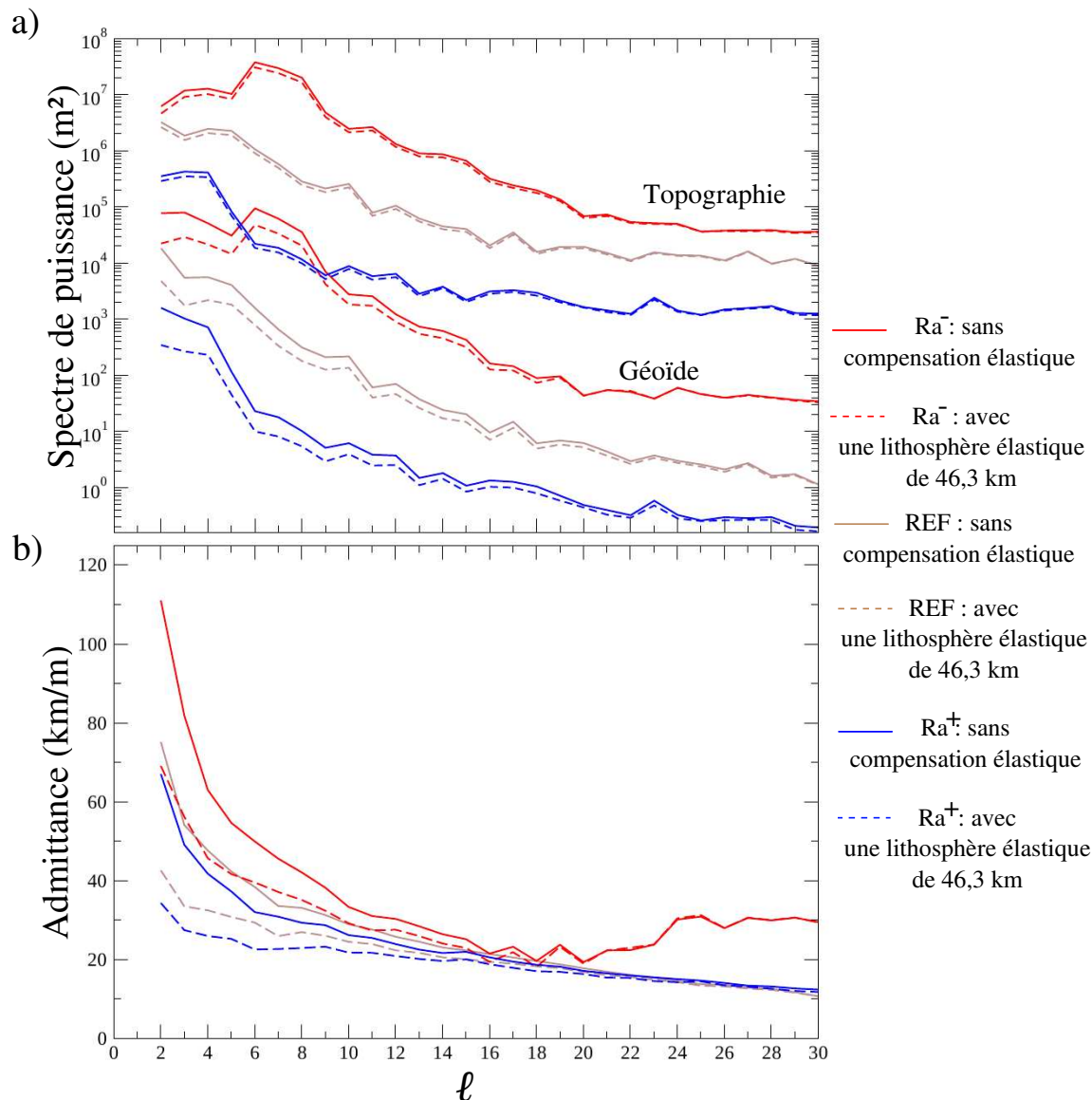


FIG. 4.29 – a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour le dernier pas de temps, sans lithosphère élastique (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (trait pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (pointillés) pour les simulations Ra^- (rouge), REF (marron) et Ra^+ (bleu).

4.2.5 Influence du mode de chauffage dans le manteau sur la convection - simulation H

Il est généralement admis que les planètes sont chauffées à la fois par la base et par désintégrations radioactives (chauffage volumique) (Jaupart et al., 2007). De plus, comme je l'ai évoqué dans la Section 4.1, le refroidissement séculaire peut être interprété dans le cadre d'un écoulement quasi-stationnaire comme un terme supplémentaire de chauffage (par exemple Davaille et Jaupart, 1993; Choblet et Sotin, 2000). Pour la Terre, le chauffage interne est vraisemblablement dominant sur le chauffage par la base (Jaupart et al., 2007) (ce qui n'est pas le cas dans la simulation qui va vous être présentée). Pour une viscosité dépendante à la fois de la température et de la pression, dans un modèle cartésien 3D, Tackley (1996) propose que les longueurs d'ondes des structures associées à la convection sont plus grandes lorsqu'un chauffage interne est ajouté. Il souligne également la forte dépendance temporelle des solutions obtenues. La simulation qui va vous être présentée maintenant tente de mettre en évidence l'effet de l'ajout d'un chauffage volumique. Les paramètres de cette simulation sont rassemblés dans le Tableau 4.2 et la détermination du nombre de Rayleigh à la base est développée dans la Section 4.1. La relation de correspondance entre les simulations H et REF est une loi $Nu-Ra$, elle concerne donc la structure du couvercle. Le couvercle ayant une grande importance sur les observables synthétiques de surface qui nous concerne, c'est la structure que j'ai choisi équivalente dans les deux simulations. Il est cependant difficile avec cette relation d'obtenir une simulation entièrement comparable à celle de référence (sans chauffage interne). Il n'est pas surprenant, comme nous allons le voir, que température, viscosité et vitesses radiales moyennes ne soient pas comparables. En revanche, la taille du couvercle est très proche d'une simulation à l'autre, conformément à l'utilisation de la loi $Nu-Ra$. Cette nouvelle simulation utilise la solution convergée de la simulation REF avec une résolution numérique identique. Le chauffage interne ajouté est réparti de façon homogène au sein du manteau et représente 20% du chauffage total (soit $4,769 \cdot 10^{-12} \text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$).

La figure 4.30a présente les structures 3D ascendantes de l'isotherme 0,92 (3403 K, à gauche) et descendantes de l'isotherme 0,875 (3237 K, à droite). Les structures ascendantes sont peu nombreuses, concentrées dans certaines zones de la coquille sphérique au moins à l'instant présenté (avec un espacement entre les panaches très variable). Ces structures sont imposantes par la taille des conduits et des têtes de panaches qui paraissent très découpées. Certains de ces panaches sont liés entre eux par de grandes structures linéaires chaudes. Contrairement aux autres simulations où les panaches descendants prennent naissance du rassemblement de feuillets de matériel froid, les structures descendantes de cette simulation apparaissent beaucoup

plus indépendantes et sont représentées par de nombreux panaches individuels, de formes variables avec des têtes pas nécessairement individualisées.

Sur la figure 4.30b apparaît l'évolution temporelle de la température et des nombres de Nusselt. Comme nous pouvons le voir sur l'évolution temporelle de la température et sur les nombres de Nusselt moyennés sur toute la sphère, la simulation a atteint l'état d'équilibre statistique. Si l'ajout d'un chauffage interne introduit normalement une forte dépendance temporelle comme le suggèrent par exemple Stemmer et al. (2006), il n'est que de 20% ici, l'évolution temporelle associée est donc très faible. Cependant, comme nous le verrons par la suite, l'introduction d'un chauffage interne augmente considérablement la dépendance temporelle des structures convectives. L'ajout d'un chauffage interne se caractérise par une augmentation drastique de la température moyenne ($\sim 47\%$) avec une stabilisation rapide et franche. Cette augmentation de la température s'accompagne d'une forte augmentation du nombre de Nusselt au sommet (d'environ 52%). Par rapport aux simulations présentées précédemment, le nombre de Nusselt au sommet est 9 fois supérieur au nombre de Nusselt à la base et l'ajout d'un chauffage volumique conduit à une diminution du nombre de Nusselt à la base d'environ 84%.

La figure 4.30c présente les profils de température et de viscosité moyennées dans le temps à partir de l'instant 1 de la figure 4.30a. Comparée à la simulation REF, la différence de température interne adimensionnée entre la simulation REF et H est d'environ 0,3 (soit environ 1100 K à 4500 km de rayon). Si l'épaisseur du couvercle conductif est relativement bien conservée de la simulation de référence à cette simulation, le gradient de température de cette zone est plus élevé que dans la simulation REF. Bien que l'épaisseur du couvercle soit à peu près identique à la simulation REF, les nombres de Rayleigh internes diffèrent d'environ deux ordres de grandeurs. Pour contrebalancer une augmentation de la température interne (qui devrait être accompagnée d'une diminution de la viscosité), le nombre de Rayleigh à la base a été diminué, entraînant une viscosité interne plus élevée que dans la simulation REF mais un gradient de viscosité dans le couvercle à peu près identique.

Les profils des flux advectifs et diffusifs moyens (Figure 4.30d) sont très différents entre les simulations REF et H. Le flux diffusif à la CMB est $\sim 81\%$ plus faible et $\sim 76\%$ plus important en surface pour la simulation H. Dans le coeur convectif, les flux diffusifs sont naturellement identiques et nuls. Le flux advectif à CMB est $\sim 90\%$ plus faible dans la simulation H et contrairement à toutes les simulations présentées jusqu'à maintenant, il augmente progressivement jusqu'à la base du couvercle puis diminue jusqu'à atteindre 0 en surface.

La figure 4.30e présente les vitesses radiales moyennes ascendantes et descendantes qui sont plus faibles dans la simulation H que dans la simulation REF en

raison de la viscosité moyenne plus élevée (respectivement 3,5 fois et 1,3 fois plus faible). Comparé à la simulation REF, la disparité entre les vitesses maximum ascendantes et descendantes est diminuée dans la simulation H par rapport à la simulation REF.

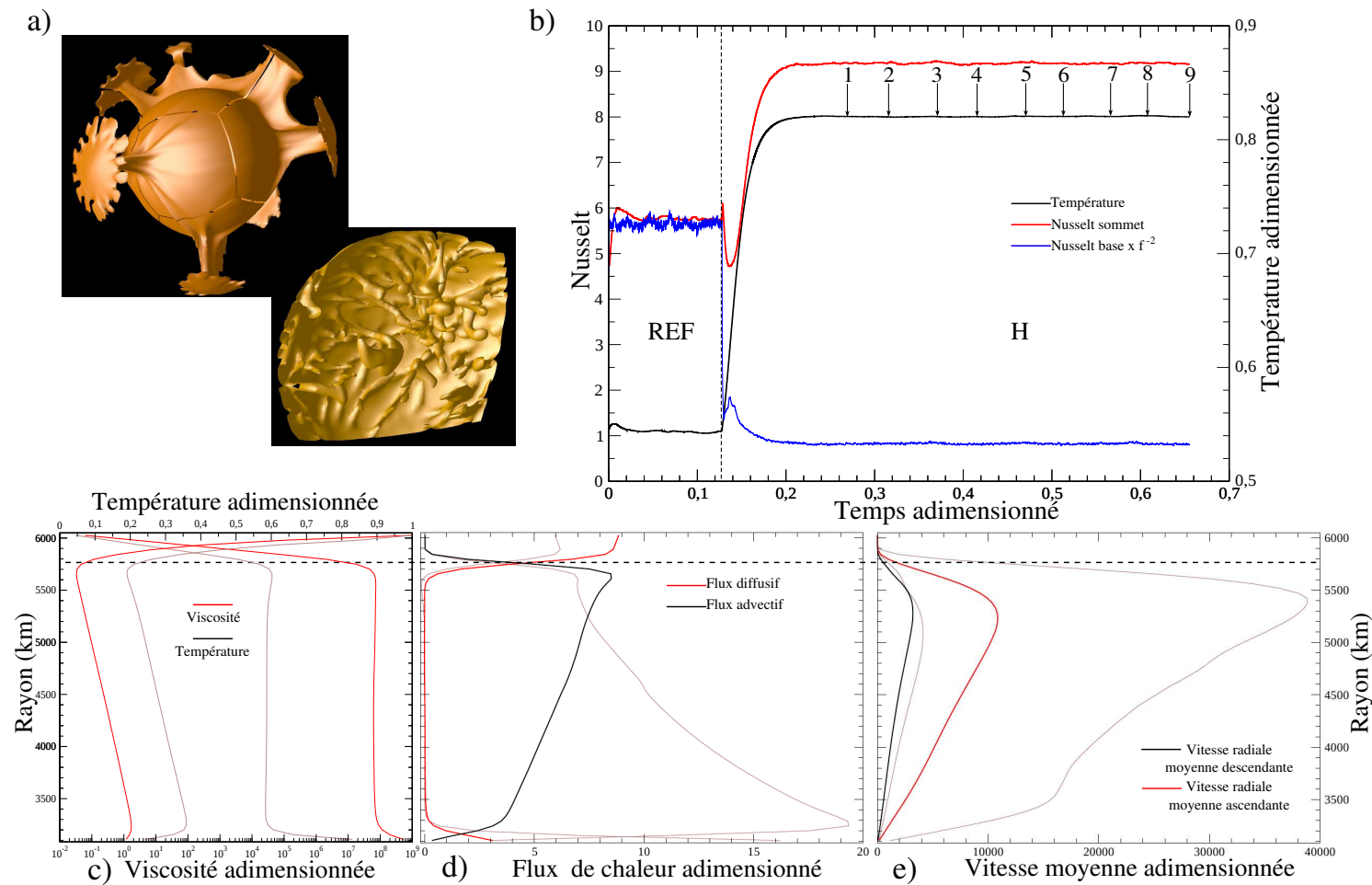


FIG. 4.30 – Simulation avec ajout de chauffage interne (simulation H). a) Représentation 3D des isothermes 0,92 (3403 K, à gauche) et 0,875 (3237, à droite). b) Évolution temporelle de la température et des nombres de Nusselt à la base et au sommet. c), d) et e) Profils de la température moyenne, de la viscosité moyenne, des flux de chaleur moyens et des vitesses radiales moyennes. Les profils marrons sont ceux de la simulation REF.

Les degrés dominants de la décomposition en harmoniques sphériques du champ de température de la simulation H, pour le dernier pas de temps, sont concentrés sur les degrés 2 et 3 (proche de la CMB et proche de la surface) alors que les degrés dominants dans la simulation REF sont les degrés 3, 4, 5 et 6 (Figure 4.31a). De plus, les degrés 2 et 3 de la simulation H ont des amplitudes plus faibles que les degrés dominants de la simulation REF. À 185 km de profondeur, contrairement à la simulation REF où les têtes de panaches sont individualisées et concentrées, celles du cas H sont représentées par des zones ponctuelles de forte température (matérialisant le conduit des panaches) et entourées de structures radiales de même température. Alors que le reste du manteau dans la simulation REF est caractérisé par une structure homogène en température, il est caractérisé par la présence d'endroits ponctuels de température plus élevée dans la simulation H (Figure 4.32). L'individualisation des conduits de panaches ainsi que la structure thermique hétérogène autour de ces panaches est de plus en plus remarquable au fur et à mesure que l'on se rapproche de la surface (par exemple à 463 km de profondeur, Figure 4.32 droite). La température à la demi-cellule au-dessus de la CMB de la simulation H est totalement homogène (valeur très proche de 1 en adimensionné à 3062,4 km de profondeur), elle ne présente pas de structures particulières et j'ai donc choisi de représenter ce champ à 185 km au dessus de la CMB (Figure 4.31c). Contrairement à la simulation de référence où les points d'ancrage des panaches sont entourés de nombreuses ramifications, les points de naissances des panaches de la simulation H sont généralement individualisés et liés entre eux par une ramification unique de matériel plus chaud. Pour une large gamme de nombres de Rayleigh, Wolstencroft et al. (2009) ont montré que (1) la présence d'un chauffage interne unique décale les degrés dominants de la décomposition en harmoniques sphériques du champ de température vers les grandes longueurs d'onde à la CMB et vers les courtes longueurs d'onde près de la surface et (2) qu'en présence d'un chauffage volumique, on observe un étalement des degrés présents entre 0 et 32. Il y a cependant de grandes différences entre cette étude et la notre : (1) leur viscosité est constante, (2) l'effet de la dépendance en température et en pression est peut être supérieur à celui du chauffage interne (surtout que dans le cas présent sa contribution est très modeste, 20% du chauffage total), et (2) la simulation H propose une étude de l'effet d'un mode de chauffage mixte alors que celle de Wolstencroft et al. (2009) concerne un chauffage uniquement interne ou uniquement basal, mais jamais mixte.

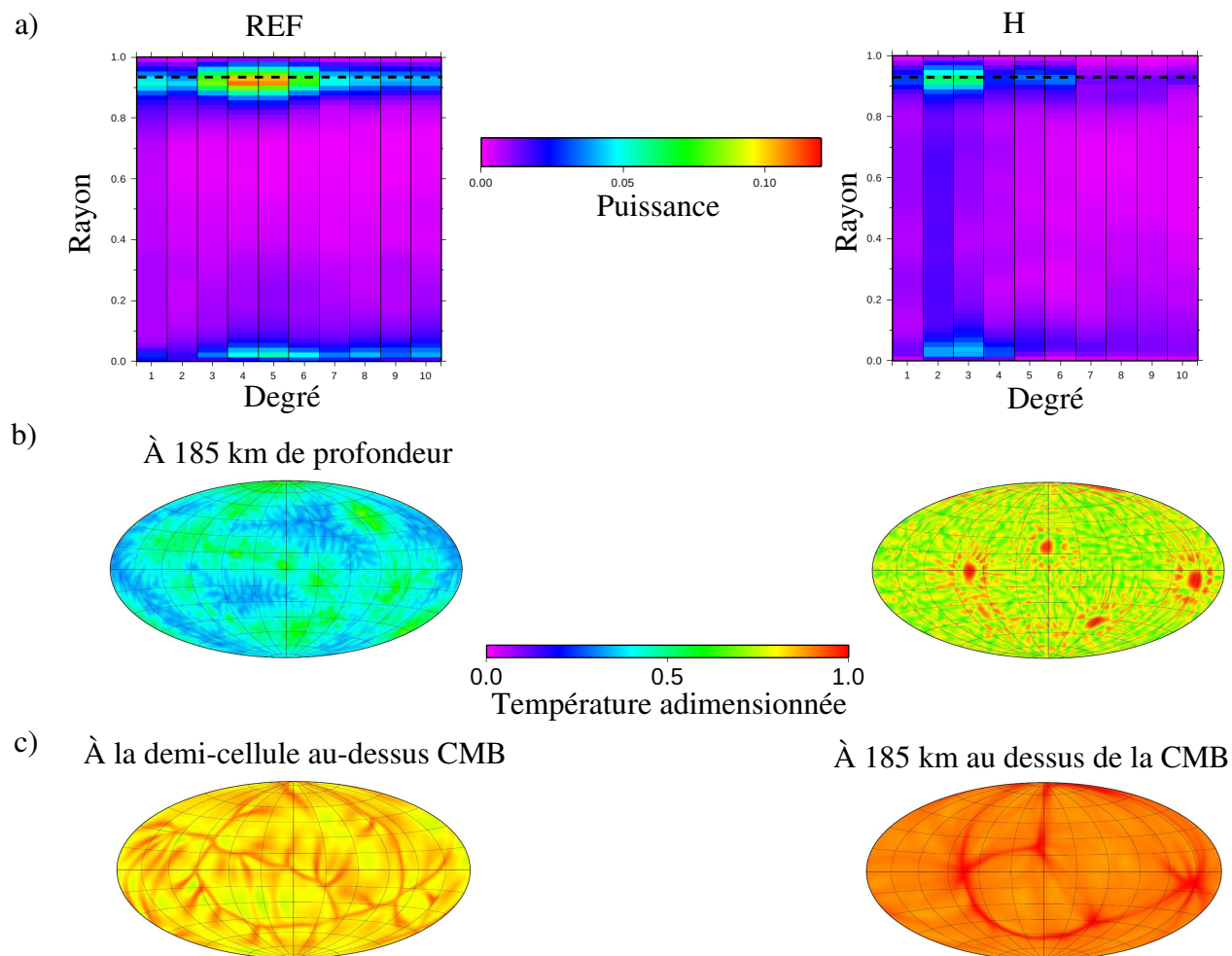


FIG. 4.31 – a) Spectres de puissance du champ de température en fonction de la profondeur pour la simulation de référence (REF, à gauche) et pour la simulation avec un chauffage interne (H, à droite) au dernier instant respectif des simulations. La ligne horizontale représente la profondeur du champ de température représenté en b). b) Champ de température à 185 km de profondeur et c) Champ de température à 23,1 km au dessus de la CMB (demi-cellule au-dessus) pour la simulation REF et à 185 km au dessus de la CMB pour la simulation H.

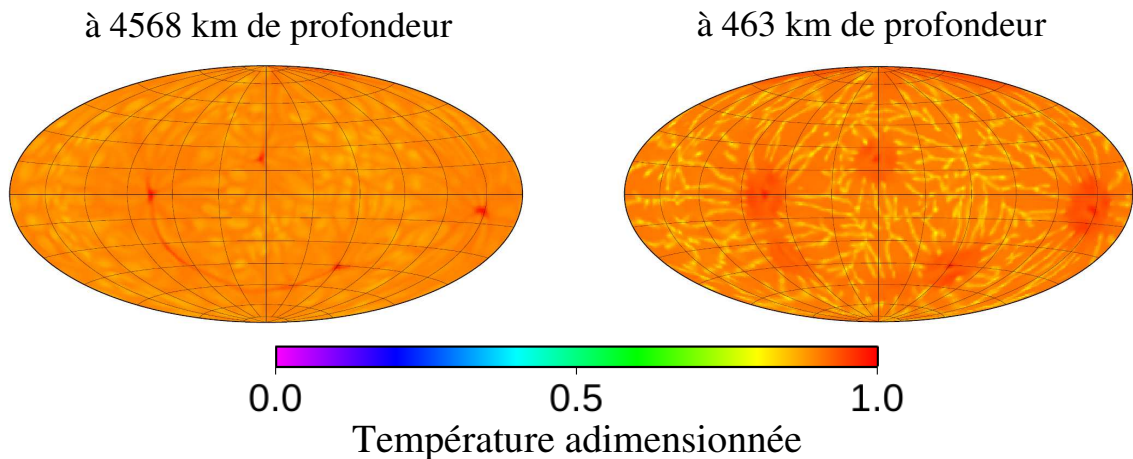


FIG. 4.32 – Cartes de température à 4568 km de profondeur (gauche) et à 463 km de profondeur (droite) pour le dernier pas de temps de la simulation H .

Évolution temporelle des observables de surface Une particularité importante de cette simulation réside dans la dépendance temporelle des structures convectives associée à l'état stationnaire de la température et des flux de chaleur. La quantité de chauffage interne ajoutée semble contrôler l'amplitude de cette dépendance temporelle. Dans un cas où la viscosité ne dépend que de la température, Stemmer et al. (2006) proposent qu'à partir d'une certaine quantité de chaleur interne (40%, le double de ce que je propose), les panaches commencent à migrer et les structures se réarrangent continuellement. Visiblement, il n'est pas nécessaire d'atteindre 40% de chauffage volumique pour obtenir une variabilité temporelle des structures de la convection lorsque la viscosité dépend à la fois de la température et de la pression. En revanche, le taux de chauffage interne semble trop faible ici pour générer une variabilité temporelle de la température et des flux de chaleur. Cette évolution des structures s'observe sur les champs de topographie dynamique et du géoïde associé pour les différents instantanés (Figure 4.33). Les neuf instantanés considérés sont identifiés sur la figure 4.30b. De manière générale, on observe une réorganisation continue des panaches ascendants au cours du temps. En accord avec les champs de température présentés aux Figures 4.31b et 4.32, les conduits de panaches ascendants sont représentés par une amplitude de la topographie dynamique et du géoïde maximum et sont entourés d'une zone concentrique de forte amplitude. Ces structures thermiques particulières associées aux panaches ascendants ne s'expriment pas de la même manière sur le géoïde mais apparaissent sous la forme de simple structures circulaires. En d'autres termes, les structures radiales associées aux panaches ascendants et les panaches descendants (toutes les structures de petite longueur d'onde) sont quasiment invisibles sur le signal de topographie et totalement invisibles sur le

signal du géoïde, malgré leur proximité de la surface (Figure 4.33).

Cette forte variabilité des structures se traduit par des enveloppes temporelles associées aux spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde de forte amplitude (Figures 4.34 et 4.35), soit $-56,97\%/+79,81\%$ de l'enveloppe temporelle du spectre de puissance de la topographie par rapport à sa valeur moyenne au degré 2 et $-55,59\%/+81,04\%$ pour le géoïde associé. Cette variabilité se retrouve également sur les admittances (Figure 4.36 avec une variabilité au degré 2 de $-3,69\%$ à $+3,97\%$ par rapport à l'admittance moyenne de la simulation H). La variabilité importante des spectres de puissance de la topographie dynamique et du géoïde associé ainsi que celle (déjà présentée) de la simulation REF conduit à une superposition des spectres et de leurs enveloppes temporelles entre les degrés 2 et 4 et entre les degrés 11 à 19. Entre les degrés 4 et 11, les spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé (enveloppe temporelle comprises) présentent des valeurs inférieures dans la simulation H par rapport à la simulation REF (Figure 4.34 et 4.35). Au delà du degré 19, les spectres de puissance de la simulation H sont supérieurs à ceux de la simulation REF. De manière générale, du degré 2 au degré 11, les spectres de puissance moyens de la simulation H diminuent. Le degré 2 est alors dominant. La forme des spectres de la simulation H diffère de la simulation REF qui présente une rupture de pente à partir du degré 4. Pour les admittances, seuls les degrés 2 et 3 sont clairement différenciés (pas de superposition) mais sont cependant très proches. Dans cet intervalle, l'admittance de la simulation H est supérieure à celle de la simulation REF : la topographie dynamique est plus importante que l'anomalie de densité dans le signal du géoïde que dans la simulation REF.

Analyse de la topographie dynamique et du géoïde associés au dernier pas de temps - La topographie dynamique de la simulation où du chauffage interne a été incorporé (instantané 3 sur la Figure 4.30b), présente des structures différentes de celles du cas de référence (Figure 4.37). Les conduits des panaches ascendants sont caractérisés par une topographie dynamique locale plus élevée que la simulation REF. La topographie dynamique de surface associée aux structures descendantes présente une amplitude plus faible que dans la simulation REF. Comme pour l'évolution des amplitudes des observables de surface de la simulation Ra^- à la simulation Ra^+ , la contrainte adimensionnée de la simulation H est inférieure à la simulation REF. Le dimensionnement de cette contrainte par un facteur $\frac{1}{Ra_B}$ plus grand pour la simulation H que pour la simulation REF (avec $Ra_B = 3 \cdot 10^6$) conduit à une contrainte dimensionnée plus grande et donc à une topographie de surface plus grande.

La figure 4.38 présente le géoïde associé à la topographie dynamique présentée

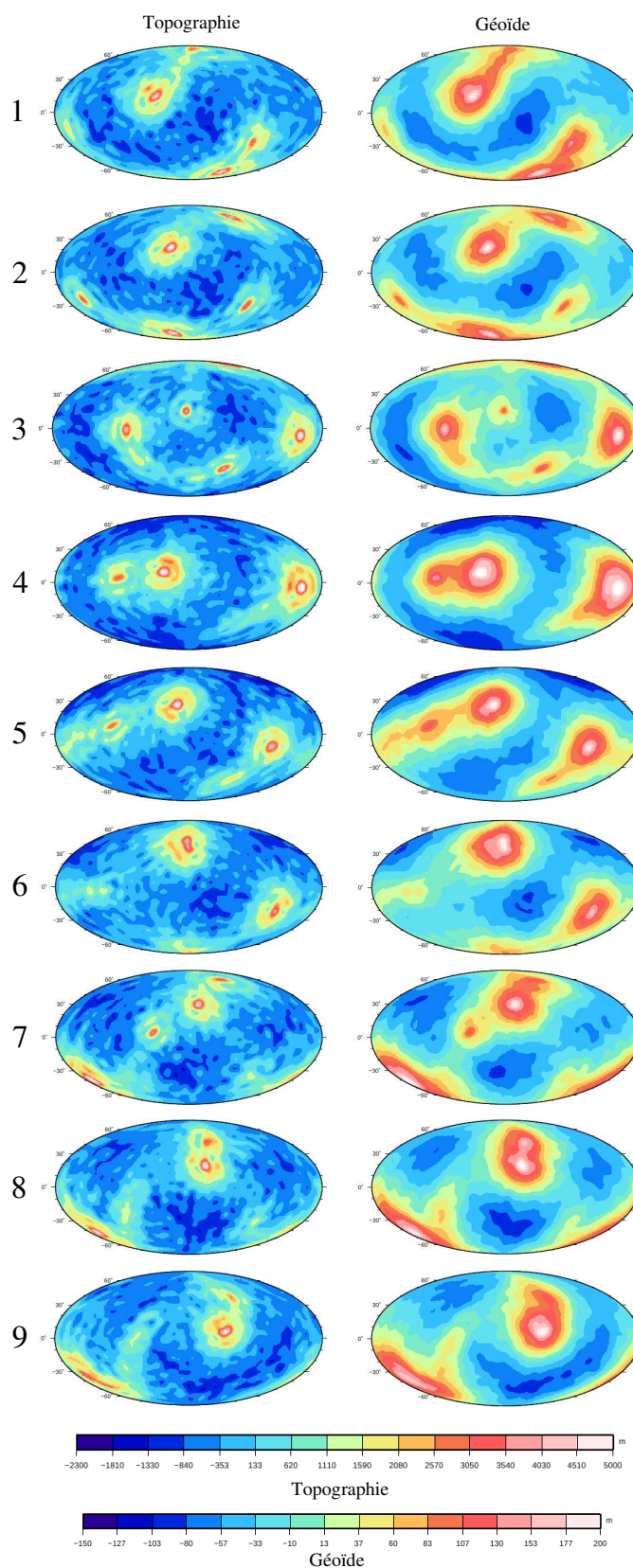


FIG. 4.33 – Cartes de la topographie dynamique de surface purement visqueuse (gauche) et du géοide associé (droite) des 9 instantanés de la simulation H.

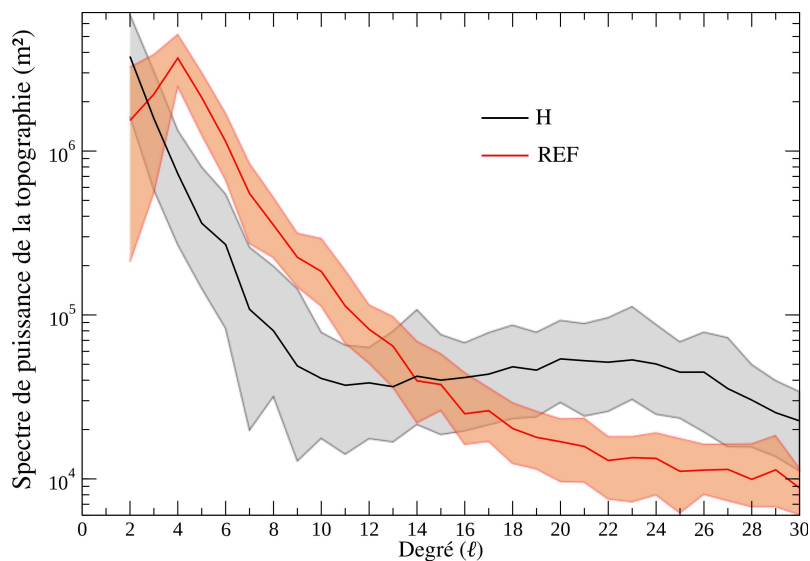


FIG. 4.34 – Spectres de puissance moyens de la topographie dynamique des simulations REF et H sans lithosphère élastique. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.

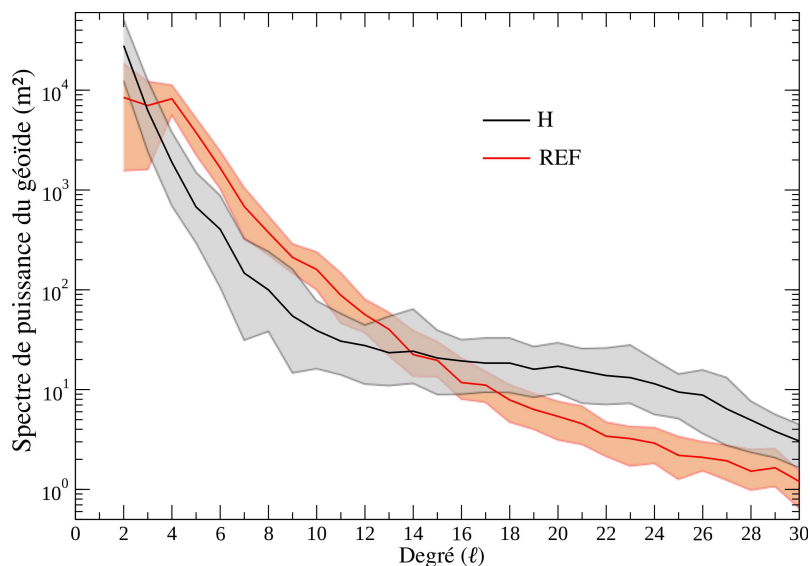


FIG. 4.35 – Spectres de puissance moyens du géoïde des simulations REF et H associé à une topographie dynamique de surface purement visqueuse. La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.

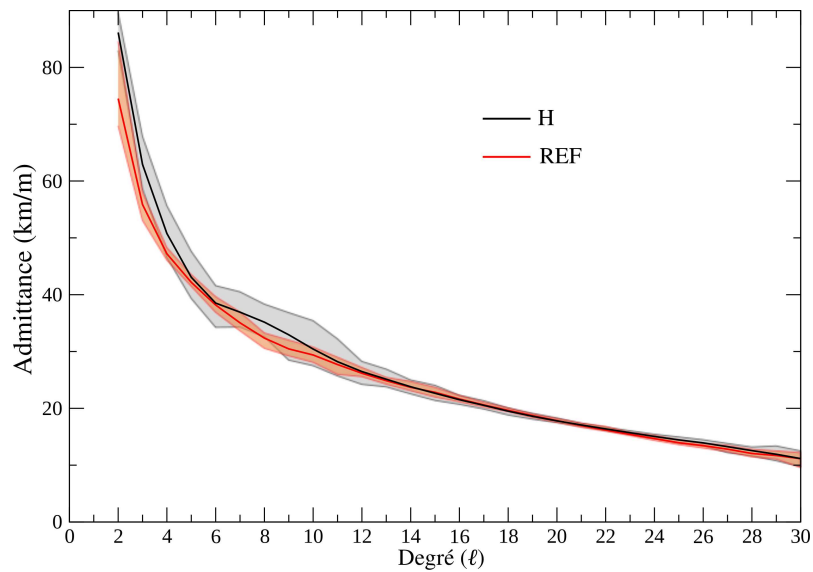


FIG. 4.36 – Admittances moyennes entre topographie dynamique de surface purement visqueuse et géoïde de la simulation H (noir) et REF (rouge). La zone grisée représente l'enveloppe de l'évolution temporelle de la simulation H et l'enveloppe orange celle de la simulation REF.

à la figure 4.37. Tout comme la topographie dynamique, le géoïde présente des pics de valeurs positives à l'aplomb des conduits de panaches ascendants dont les amplitudes sont plus grandes dans la simulation H que dans la simulation REF. Alors que la topographie dynamique associée aux quatre conduits de panaches présentent la même amplitude, les deux panaches centraux présentent un signal du géoïde plus faible que les deux panaches extérieurs. Même filtré, le géoïde reste plus élevé que dans la simulation de référence.

Enfin, l'analyse concernant la relation entre les spectres (et les admittances - Figure 4.39) de la simulation H et de la simulation REF pour le dernier instantané suit celle qui a été faite pour les spectres et les admittances moyens et leurs enveloppes temporelles (Figure 4.34, 4.35 et 4.36). Ici, la présence d'une lithosphère élastique n'aboutit pas à des résultats franchement différents d'une simulation à l'autre tant les spectres et les admittances sont proches.

Topographie

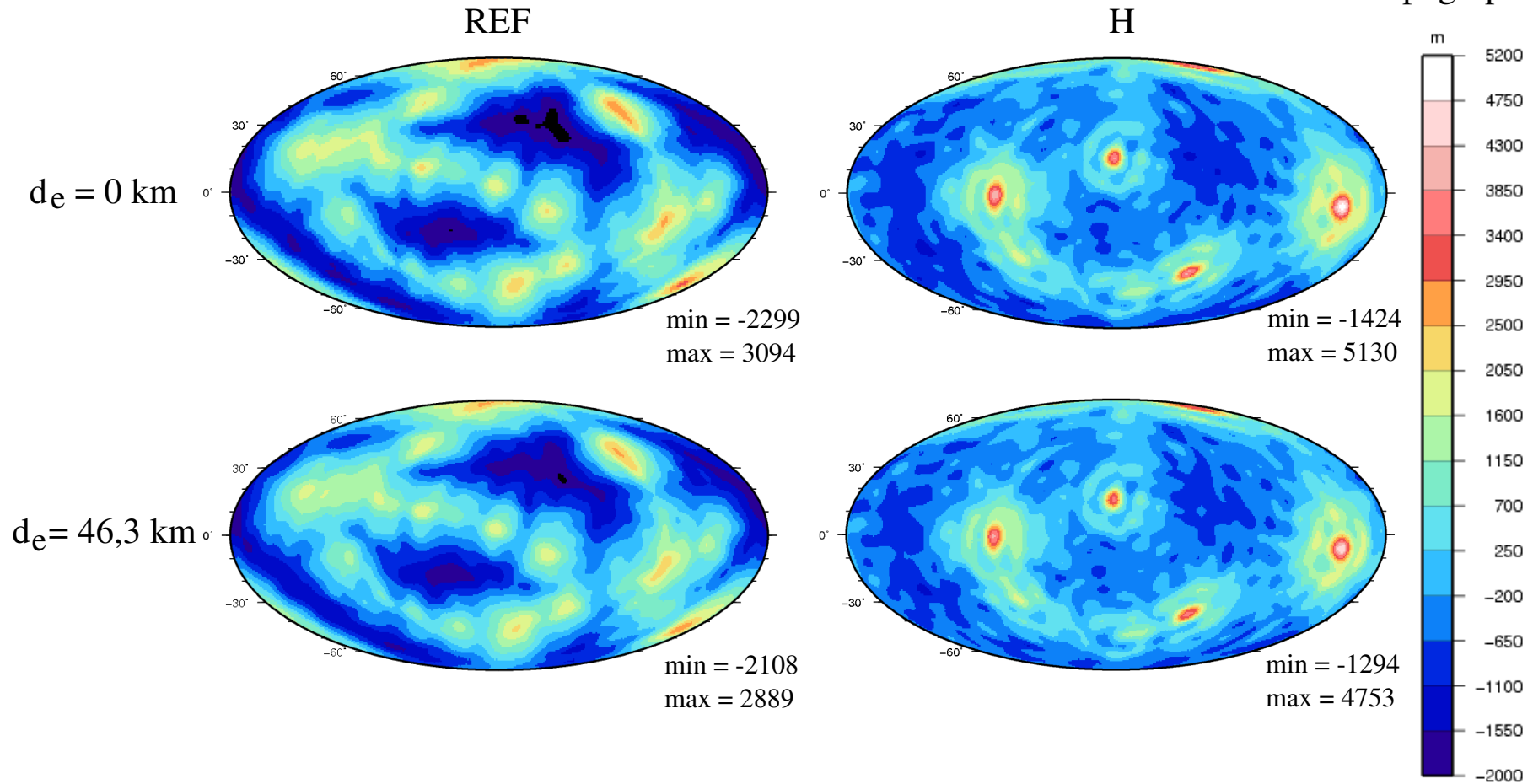


FIG. 4.37 – Cartes de la topographie dynamique de surface pour la simulation de référence à gauche et pour la simulation H à droite. En haut : cartes de la topographie dynamique sans lithosphère élastique (topographie purement visqueuse) et en bas : cartes de la topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km.

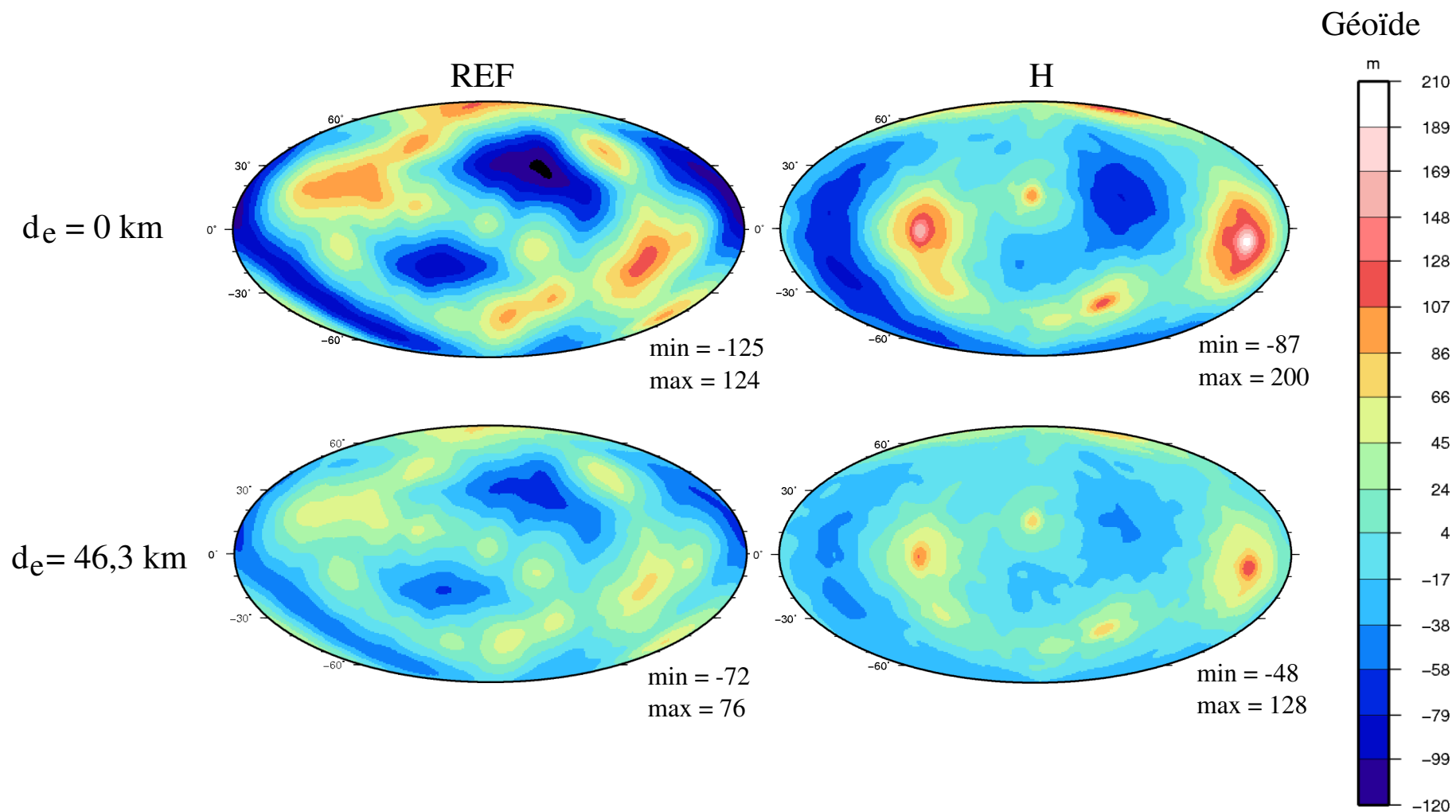


FIG. 4.38 – Cartes du géοide associé à la simulation de référence à gauche et à la simulation H à droite. En haut : cartes du géοide associé à une topographie dynamique purement visqueuse (sans coquille élastique) et en bas : cartes du géοide associé à une topographie dynamique soutenue par une lithosphère élastique de 46,3 km.

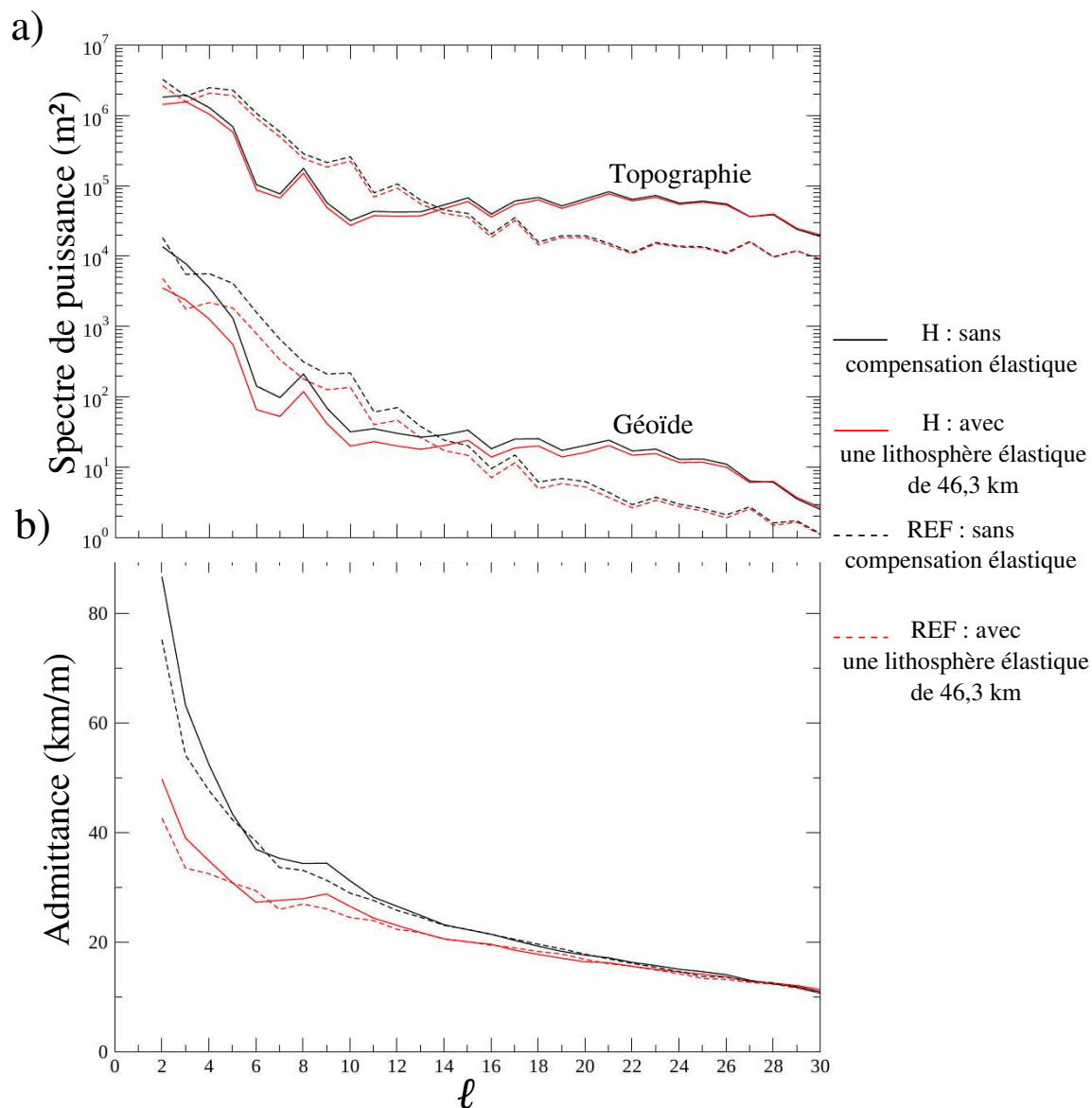


FIG. 4.39 – a) Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde associé pour l'instantané 3 de la simulation H (trait plein) et du dernier pas de temps de la simulation REF (pointillés), sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge). b) Admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde associé : sans lithosphère élastique (noir) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km (rouge) pour les simulations REF (pointillés) et H (traits pleins).

4.3 Synthèse, Discussion et Perspectives

4.3.1 Synthèse

Le tableau 4.5 présente une synthèse des résultats pour les paramètres de la convection (température moyenne, viscosité moyenne, flux moyens, vitesses radiales, ...) et le tableau 4.6 expose ceux des observables dynamiques associés (topographie et géoïde). Les valeurs utilisées pour le dimensionnement sont listées dans le Tableau 4.3 et correspondent aux valeurs supposées pour Vénus.

Une diminution de la dépendance en pression, un saut de viscosité au milieu du manteau, une augmentation du nombre de Rayleigh à la base ainsi que le remplacement de 20% du chauffage total par du chauffage volumique ont été testés. Établir des relations quantitatives entre ces paramètres et les résultats obtenus en terme de nombre de panaches, d'amplitude de la topographie dynamique de surface, du géoïde associé par exemple, aurait nécessité plusieurs simulations dans chaque cas ainsi qu'un traitement statistique rigoureux et automatique des résultats. Par manque de temps, seulement deux simulations sont comparées à chaque fois, sauf pour l'augmentation du nombre de Rayleigh à la base pour laquelle trois simulations ont été effectuées.

Une diminution de la dépendance en pression de 86% dans la loi de viscosité (simulation P) entraîne une dynamique convective différente de la simulation de référence qui se matérialise par une diminution de la viscosité et une augmentation de la température et des vitesses d'écoulement. Cependant, cette simulation aboutit à des observables synthétiques de surface proches de ceux obtenus dans la simulation de référence. Cette similarité entre les observables dynamiques des deux simulations se retrouve (1) sur les spectres de puissance d'un instant donné et (2) particulièrement sur les enveloppes temporelles des signaux avec une superposition de ces enveloppes pour la plupart des degrés. Cette proximité peut être attribuée à deux phénomènes. D'abord, l'épaisseur de la couche limite thermique froide, quasiment identique dans les deux simulations, semble avoir un effet important sur les amplitudes des signaux de surface (ce qui n'est pas forcément visible sur les cartes d'un instantané de la convection). Ensuite, la localisation profonde de la plus grosse différence de viscosité engendrée par une diminution de la dépendance en pression semble se situer trop loin de la surface pour engendrer d'importantes disparités sur les observables (notamment sur le géoïde qui, pour un même degré d'anomalie, est plus sensible aux anomalies de masse proches de la surface). En revanche, les enveloppes temporelles associées aux admittances entre la topographie dynamique et le géoïde montrent des valeurs proches mais pas de recouvrement entre les degrés 2 et 8. Entre ces degrés, il semble que le géoïde soit plus sensible au signal de la

topographie qu'à celui de l'anomalie de densité, conduisant à une admittance plus importante que dans la simulation de référence. Bien qu'une diminution importante de la dépendance en pression ait été appliquée sur la loi de viscosité, il semble que son effet sur les observables de surface soit très modeste. Ce résultat souligne dans un premier temps le caractère non-unique des solutions apportées par l'inversion de la topographie et du géoïde, fréquemment utilisée pour l'obtention de profils de viscosité pour les planètes. Cette nature non-unique est accentuée lorsque l'évolution temporelle des structures dynamiques associées à la convection est prise en compte.

Un saut de viscosité au milieu du manteau, qui engendre une instabilité de l'écoulement, implique des rassemblements et des séparations de panaches les uns avec les autres. La diminution de la longueur d'onde des structures associée à la séparation de panaches chauds se traduit par des panaches plus petits, plus nombreux et sont associés à une augmentation de la température dans le manteau. De nouveau, les enveloppes de l'évolution temporelle des spectres de puissance de la topographie, du géoïde associé et de l'admittance montrent de fortes similitudes avec celles de la simulation REF. Encore une fois, malgré des différences majeures entre les deux simulations en terme de profil de viscosité, de température moyenne et d'amplitude des observables synthétiques, la prise en compte de l'évolution temporelle de ces structures révèle qu'il est difficile de distinguer ces deux simulations sur la base unique des observables synthétiques générés.

L'augmentation du nombre de Rayleigh d'un ordre de grandeur à la base du modèle de convection visqueuse (entre les simulations Ra^- et REF et entre les simulations REF et Ra^+) se traduit, de manière assez intuitive, par une augmentation des flux de chaleur et des vitesses d'écoulement, signe d'une convection plus vigoureuse. De façon moins intuitive, cette augmentation de la vigueur convective s'accompagne d'une augmentation de la température moyenne sur toute la coquille sphérique. Alors que la température moyenne du coeur convectif diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, l'épaisseur du couvercle froid diminue et conduit à une légère augmentation de la température moyennée sur toute la sphère.

À cause de nombres de Rayleigh élevés et à l'instar de ce que proposent les études précédentes, la longueur d'onde dominante des structures thermiques et des observables synthétiques augmente lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Cette augmentation de la longueur d'onde des structures semble s'accompagner d'une diminution de la taille des conduits et de l'augmentation de l'espacement entre les panaches chauds. Néanmoins, les panaches froids (souvent masqués par la prédominance des panaches chauds, responsable d'une augmentation de la longueur d'onde

sur les spectres de puissance du champ de température) présentent des longueurs d'ondes qui diminuent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Alors que l'on s'attend à ce que l'amplitude de la topographie reflète la vigueur de la convection exacerbée par l'augmentation du nombre de Rayleigh, le dimensionnement de la topographie par la viscosité, qui cause l'augmentation du nombre de Rayleigh (tous les autres paramètres représentatifs de Vénus demeurant identiques), conduit à une topographie (et par extension un géoïde) qui diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Puisque l'augmentation du nombre de Rayleigh dans la gamme choisie converge vers une augmentation des longueurs d'ondes dominantes (une diminution des degrés dominants), l'effet de la lithosphère élastique est d'autant plus fort que le nombre de Rayleigh augmente. Contrairement aux simulations présentées précédemment, l'épaisseur du couvercle est cette fois très différente d'une simulation à l'autre et semble être à l'origine de spectres de puissance très différents, même si l'on prend en compte les enveloppes temporelles qui, pour une fois, ne se recouvrent que très localement (pour les degrés les plus bas).

De cette manière, les simulations sont clairement distinguables les unes des autres sur la seule base des observables de surface.

Le remplacement de 20% du chauffage total par un chauffage volumique entraîne une augmentation drastique de la température interne associée à une diminution de la viscosité. La longueur d'onde des structures de l'écoulement augmente par rapport à la simulation de référence. Les spectres de puissance associés aux observables synthétiques de surface sont cette fois clairement séparés pour une certaine gamme de longueurs d'ondes mais sont à comparer aux admittances correspondantes qui présentent des enveloppes temporelles très proches. La loi Nu-Ra permet de conserver la même épaisseur de couvercle que dans la simulation de référence, responsable, sans doute, de la similarité entre les admittances des deux simulations. Là encore, l'analyse seule des admittances ne permet pas de dissociation franche entre les deux simulations.

	\bar{T}	$\bar{\eta}$ (Pa·s) (4497,7 km)	\bar{T} (K) (4497,7 km)	deg. dom. de T	\overline{Nu}_{haut}	$\overline{Nu}_{bas} \cdot f^{-2}$	$\bar{q}_{cond.}$ (4497,7 km)	$\bar{q}_{conv.}$ (4497,7 km)	$h_{cov.}$ (km)	$\bar{V}_r^{asc.}$ max.	$\bar{V}_r^{desc.}$ max.
REF	0,543	$1,688 \cdot 10^{21}$	2172,2	3-6	5,756	5,649	10^{-3}	10,221	~300	38 862	4 133
P	0,608	$8,35 \cdot 10^{20}$	2442,27	3-5	6,264	6,141	10^{-3}	10,901	~325	40 996	6 468
J	0,559	$1,286 \cdot 10^{22}$	2270,07	4-5	5,069	5,091	10^{-3}	9,114	~350	15 860	1489
Ra ⁻	0,517	$1,483 \cdot 10^{22}$	2201,51	2-10	3,467	3,395	10^{-2}	6,10	~450	12 198	603
Ra ⁺	0,544	$2,233 \cdot 10^{20}$	2113,44	3	8,924	8,823	10^{-3}	15,342	~150	121 594	17 319
H	0,801	$5,017 \cdot 10^{22}$	3294,21	2-3	8,776	0,902	10^{-2}	6,192	~325	10 869	3 209

TAB. 4.5 – Résultats des différentes simulations avec \bar{T} la température adimensionnée moyennée dans le temps et sur toute la sphère, $\bar{\eta}$ (Pa·s) et \bar{T} (K) la viscosité et la température moyennées dans le temps à 4497,7 km de rayon, \overline{Nu}_{haut} et $\overline{Nu}_{bas} \cdot f^{-2}$ les nombres de Nusselt au sommet et à la base (corrigé du facteur géométrique f) moyennés dans le temps et sur toute la sphère, $\bar{q}_{cond.}$ et $\bar{q}_{conv.}$ les flux diffusif et advectif adimensionnés et moyennés dans le temps à 4497,7 km de rayon, $h_{cov.}$ l'épaisseur du couvercle évaluée au point d'égalité des flux de chaleur en surface, $\bar{V}_r^{asc.}$ et $\bar{V}_r^{desc.}$ les vitesses moyennes radiales adimensionnées ascendantes et descendantes maximum.

	Topo. max. ($d_e = 0$ km)	Topo. max. ($d_e = 46$ km)	Géoïde max. ($d_e = 0$ km)	Géoïde max. ($d_e = 46$ km)	Admitt. max. ($d_e = 0$ km)	Admitt. max. ($d_e = 46$ km)	Deg. dominant de la topo.	Deg. dominant du géoïde
REF	3 094	2 889	124	76	75	43	2	2
P	4 390	4 041	168	109	74	43	3	3
J	5981	5507	229	150	78	44	4	4
Ra ⁻	10 545	9 717	447	313	111	69	3	2
Ra ⁺	1 144	1 051	52	27	67	34	6	6
H	5 130	4 753	200	128	87	50	3	2

TAB. 4.6 – Évaluation des observables des différentes simulations pour les instantanés présentés dans le texte. La topographie et le géoïde sont en mètres et l'admittance en km/m.

4.3.2 Comparaison avec Vénus

Si l'on regarde l'amplitude des observables de surface associés aux différentes simulations (Tableau 4.6), (1) si l'on simplifie les observations de surface de Vénus, en considérant des amplitudes comprises entre -2000 et 10 000 m pour la topographie (Figure 1.24) et entre -60 et 140 m pour le géoïde (Figure 1.26) et (2) si l'on considère qu'ils représentent l'expression en surface de 9 panaches (Smrekar et Sotin, 2012, par exemple), il apparaît clairement que les observables produits par la simulation Ra^- ont des amplitudes trop élevées et reflètent un nombre de panaches trop grands. En revanche, les autres simulations présentent des amplitudes de topographie et de géoïde dans la gamme de valeurs de Vénus. Comme nous allons le voir, c'est encore plus vrai lorsque l'on considère une lithosphère élastique. Au vue de l'absence de convergence vers un équilibre statistique et du manque de résolution de la simulation Ra^+ , il conviendra d'être très prudent quant à son interprétation.

Instantanés de la convection - En considérant que seuls les degrés les plus faibles de la topographie et du géoïde de Vénus ont une origine dynamique ($\ell \leq 10$, cf. Section 1.4.2.2), seules les simulations H, REF et P ont des formes de spectres proches de ceux de Vénus au moins à l'instant considéré (traits pleins de la Figure 4.40, en haut). Le phénomène de filtrage de la topographie dynamique de surface par une lithosphère élastique (ici de 46,3 km) ne provoque pas une diminution d'amplitude suffisamment importante dans les spectres de puissance de la topographie dynamique pour se rapprocher du spectre de Vénus (traits pointillés sur la Figure 4.40, en haut à gauche). En revanche, son effet est plus marqué sur le géoïde et permet aux simulations H, REF et P de se rapprocher de celui de Vénus (traits pointillés sur la Figure 4.40, en haut au milieu). Les admittances entre la topographie dynamique et le géoïde associé pour les différentes simulations ont des formes différentes (notamment au degré 2) et des amplitudes systématiquement plus élevées que celles de Vénus (traits pleins sur la Figure 4.40 en haut à droite). Le phénomène de filtrage par la lithosphère élastique provoque une franche diminution ainsi qu'un changement de forme de l'admittance pour les degrés les plus bas (traits pointillés sur la Figure 4.40, en haut à droite). Les quatre simulations présentent alors des amplitudes relativement proches de celle de Vénus mais la forme de ces admittances s'en sont légèrement éloignées. Malgré la similitude (relative) entre les admittances des simulations REF, P, H et celle de Vénus, il reste une disparité importante au degré 2 (avec une augmentation importante de l'amplitude entre les degrés 2 et 3 puis une diminution entre les degrés 3 et 30 pour l'admittance réelle de Vénus). Cependant, l'amplitude de l'admittance du degré 2 semble diminuer dans la simulation P lorsque l'on considère une lithosphère élastique de 46,3 km. On peut imaginer qu'en présence

d'une lithosphère élastique plus épaisse, la diminution plus accentuée de l'amplitude du degré 2 de la simulation P puisse conduire à une adéquation plus importante avec Vénus (1) dans l'amplitude du spectre du géoïde et (2) dans l'amplitude et la forme de l'admittance. Il faut cependant garder à l'esprit qu'il s'agit d'un instantané de la convection et qu'il est probable que forme et amplitude aient changé un moment plus tard. L'analyse des résultats a également montré le caractère non-unique de ces solutions. On peut donc aisément envisager la possibilité que d'autres paramètres puissent conduire aux mêmes spectres de puissance.

La simulation qui fournit des observables de surface dont les spectres de puissance et l'admittance sont les plus proches de Vénus est la simulation Ra^+ , qui malheureusement ne présente pas de convergence statistique franche et qui présente une résolution insuffisante. Cette simulation fera l'objet d'un intérêt particulier dans la suite de ces travaux.

Il a souvent été proposé que l'augmentation du taux de chauffage interne décale la convection vers les courtes longueurs d'onde en surface. On peut alors imaginer une diminution significative du signal au grandes longueurs d'ondes en présence d'une lithosphère élastique si le taux de chauffage interne est plus important que celui de la simulation H (il n'est ici que de 20%). Néanmoins, comme pour la simulation P, il ne s'agit ici que de l'instantané d'une convection.

Évolution temporelle des solutions de simulations - Les enveloppes temporelles associées aux différents spectres de puissance (et admittances) pour les modèles choisis ne contiennent jamais l'intégralité des observables de Vénus (Figure 4.40, en bas). Les spectres moyens (ou admittances moyennes) associées revêtent les mêmes formes et les mêmes amplitudes que ceux des instantanés avec cependant un lissage des amplitudes les plus élevées de certains degrés (par exemple, le pic du spectre de la topographie dynamique de surface de la simulation H au degré 8 est inexistant sur le spectre moyen associé - courbe magenta sur la Figure 4.40, à gauche en haut et en bas). Ainsi, les enveloppes temporelles révèlent uniquement une similitude entre les spectres et les admittances des simulations REF, P et H qui sont cependant encore loin des signaux de surface de Vénus. Là encore, la simulation dont l'enveloppe temporelle recouvre le mieux les spectres de puissance de Vénus est la simulation Ra^+ (ce qui est particulièrement visible sur le spectre de puissance du géoïde - Figure 4.40, en bas au milieu).

Notez qu'il aurait été intéressant d'avoir également l'évolution temporelle des observables soutenus élastiquement. L'enveloppe temporelle associée pourrait peut être contenir les spectres et surtout l'admittance réels de Vénus, comme on peut l'imaginer sur la Figure 4.40 à droite pour les simulations P, REF, H et Ra^+ . Cependant,

cela implique de relancer l'intégralité des simulations en spécifiant une épaisseur de lithosphère élastique différente, c'est à dire que la profondeur R_m de la figure 2.8 change et avec elle l'endroit d'application de la condition de rigidité dans *Oedipe*. C'est par manque de temps que je n'ai pas réalisé ces calculs.

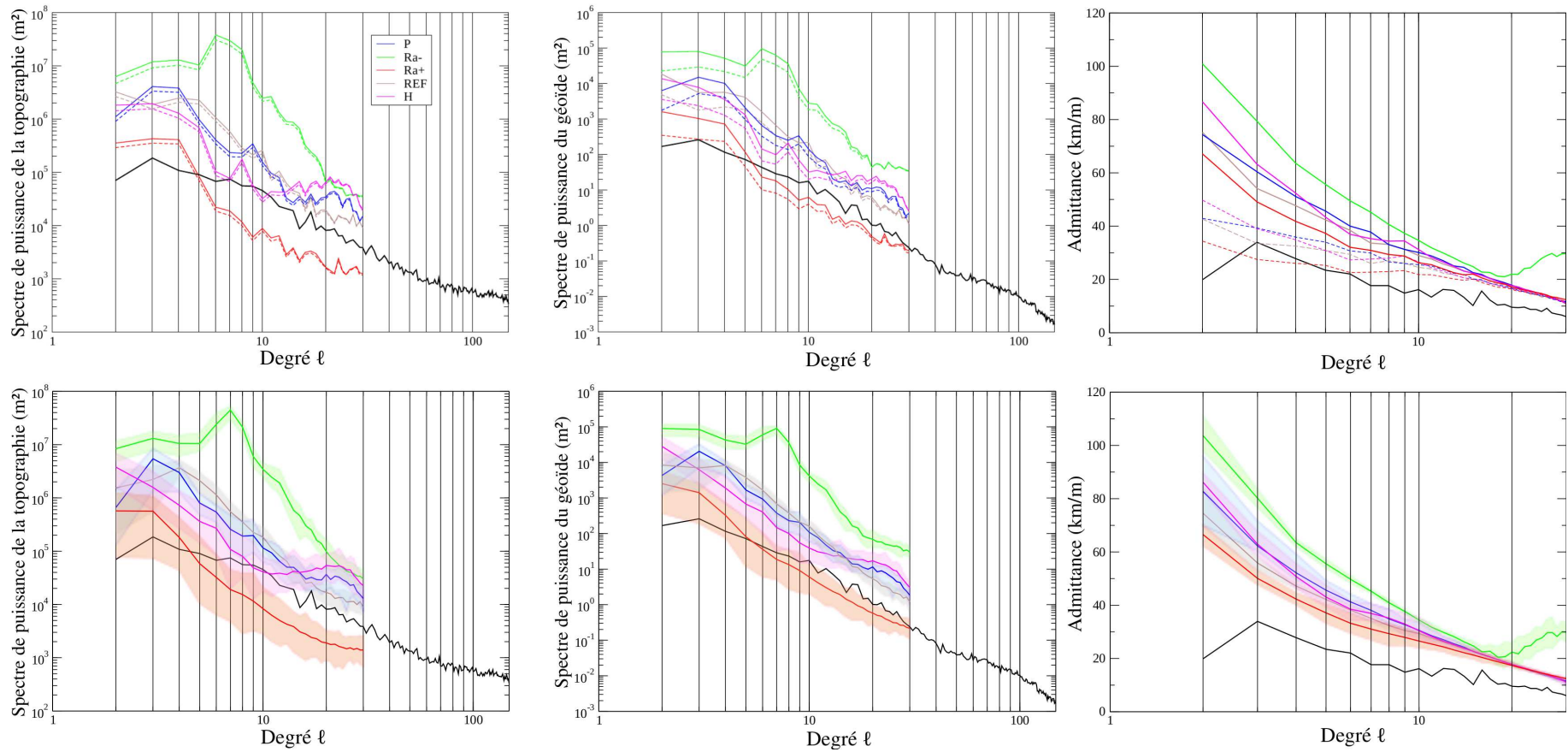


FIG. 4.40 – En haut : spectres de puissance de la topographie dynamique, du géoïde associé et admittances entre la topographie dynamique de surface et le géoïde pour les différentes simulations sans lithosphère élastique et pour le dernier instantané (trait plein) ou avec une lithosphère élastique de 46,3 km d'épaisseur (en pointillés). En bas : spectres de puissance moyens et enveloppes temporelles de la topographie dynamique, du géoïde associé et des admittances des différentes simulations sans lithosphère élastique. En noir (trait épais) sont représentés les spectres de puissance et l'admittance de Vénus.

4.3.3 Discussions et Perspectives

4.3.3.1 Variations de l'épaisseur élastique dans le temps et dans l'espace

Les caractéristiques du couvercle conducteur régissent l'amplitude des observables de surface enregistrés ou modélisés. D'abord, plus le couvercle est épais, plus la transmission des contraintes depuis le manteau jusqu'à la surface est difficile et donc plus la topographie dynamique adimensionnée à la surface sera faible. Comme nous l'avons souligné au moins pour les simulations Ra^- et Ra^+ , le dimensionnement des contraintes (et indirectement celui de la topographie) peut conduire au comportement inverse avec une topographie dimensionnée qui diminue lorsque la taille du couvercle diminue. Ensuite, l'épaisseur élastique de la lithosphère (faisant partie intégrante du couvercle) dépend de l'épaisseur de ce dernier. Autrement dit, plus le couvercle est fin, plus la partie élastique de la lithosphère sera fine et plus la topographie dynamique de surface sera forte. Notez que dans les calculs que je présente, l'épaisseur de la lithosphère élastique n'est pas régie par la taille du couvercle stagnant mais constante dans le temps et d'épaisseur uniforme.

L'utilisation des données de topographie et du géoïde ainsi que les modèles d'évolution thermique de Vénus conduisent à des épaisseurs de couvercle entre 200 et 400 km (Kucinkas et Turcotte, 1994; Phillips, 1994; Smrekar, 1994; Solomatov et Moresi, 1996; Simons et al., 1997) mais qui peuvent être localement plus faibles (cf. Section 1.4.2.3). Récemment, Orth et Solomatov (2011) proposent d'utiliser la topographie et le géoïde de Vénus en considérant le couvercle à l'équilibre isostatique (ISL, *Isostatic Stagnant Lid*) afin de déterminer l'épaisseur de la lithosphère et de la croûte. Leur méthode diffère des précédentes en plusieurs points : (1) ils considèrent un modèle global, par opposition aux modèles régionaux (Kucinkas et Turcotte, 1994; Smrekar et Phillips, 1991; Solomatov et Moresi, 1996; Vezielainen et al., 2004; Anderson et Smrekar, 2006) et (2) ils n'utilisent pas de relations théoriques *a priori* entre topographie, géoïde et convection pour obtenir une adéquation avec les observables réels de Vénus (Kucinkas et Turcotte, 1994; Smrekar et Phillips, 1991). Leurs modèles 2D et 3D avec une viscosité dépendante de la température pour un fluide chauffé par la base ou en volume, un nombre de Rayleigh à la base de 10^7 et un contraste de viscosité de 10^6 conduisent à une épaisseur de lithosphère de 600 km. Cette épaisseur importante peut être associée à une épaisseur élastique de la lithosphère supérieure à 46 km, conduisant à un filtrage plus important de la topographie et éventuellement à une disparition du signal observé pour les structures convectives de plus petite longueur d'onde.

L'épaisseur du couvercle conducteur varie avec le temps et avec lui l'épaisseur de la lithosphère élastique que l'on peut considérer par exemple comme un isotherme ou une limite de l'enveloppe mécanique (par exemple Grott et Breuer, 2008, pour Mars).

Par manque de temps, il n'a pas été réalisé de simulation où l'épaisseur élastique de la lithosphère varie au cours du temps mais le modèle hybride tel qu'il a été conçu permet une telle investigation.

4.3.3.2 Influence de l'auto-gravitation et de la compressibilité sur les observables de surface

L'auto-gravitation (*self-gravitation*) consiste à considérer les perturbations du champ de gravité d'une planète par les anomalies de masses internes. Ainsi, au lieu de considérer le terme simple $\rho_0 g_0$ dans l'expression des forces gravitationnelles, on considère que la densité peut être séparée en une densité moyennée sur le rayon $\rho_0(r)$ (à l'origine du champ de gravité de référence dépendant du rayon : $g_0(r)$) et une perturbation de la densité $\delta\rho$ (à l'origine d'une perturbation du champ de gravité : δg). La force de gravité totale s'exprime alors comme la somme des différentes contributions : $\rho_0 g_0 + \delta\rho g_0 + \rho_0 \delta g$ (Ricard, 2007). Négliger l'auto-gravitation (comme c'est le cas dans toutes les simulations qui vous ont été présentées) revient à ne considérer que les deux premiers termes. Si l'auto-gravitation n'a pas d'effet sur les vitesses d'écoulement comme le montre Zhong et al. (2008), elle affecte l'interprétation de la pression dans l'équation de conservation du mouvement et la formulation de la topographie dynamique (et donc du géoïde). Son effet est d'autant plus grand que le degré est petit. L'auto-gravitation conduit à une augmentation de l'amplitude du géoïde de 50% pour le degré 2 et de 10% pour le degré 10 (Ribe, 2007) (Figure 4.41a). C'est également ce que révèlent les études de Richards et Hager (1984) et Forte et Peltier (1991) (ou l'amplitude est augmentée de 50% au degré 2 et de 14% au degré 5, dans un cas isovisqueux). Pour la comparaison à Vénus, il sera utile de rajouter l'auto-gravitation, mais cela ne change pas vraiment les comparaisons des simulations entre elles.

La prise en compte de la compressibilité ajoute le terme supplémentaire $\chi_T(P - P_0)$ dans l'équation d'évaluation de la masse volumique tel que :

$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \chi_T(P - P_0)]$, avec $\chi_T = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ qui exprime la variation de volume (V) en fonction de la variation de pression (P) à température (T) constante. Cette compressibilité des matériaux conduit à une augmentation de la dissipation visqueuse, du chauffage adiabatique et de la flottabilité dans l'équation de conservation de l'énergie. Selon l'étude de Tackley (1996) en 3D cartésien avec une viscosité qui dépend de la température et de la pression, la compressibilité agit à l'inverse de la dépendance en pression et a tendance à augmenter la taille des cellules convectives par une diminution globale de la vigueur de la convection. Tout comme l'auto-gravitation, la compressibilité a une influence sur les observables de surface.

Par exemple, Forte et Peltier (1991) montrent que la fonction réponse du géoïde dans un fluide isovisqueux est en général environ 10 % plus élevée que dans le cas d'un fluide incompressible (sauf pour le degré 2) (Figure 4.41b-c). Dans le cas d'un fluide isovisqueux compressible du modèle proposé par Forte et Peltier (1991), la vigueur de l'écoulement de surface est augmentée, donnant naissance à une deflection de la surface plus importante, augmentant l'amplitude du géoïde (Figure 4.41b-c).

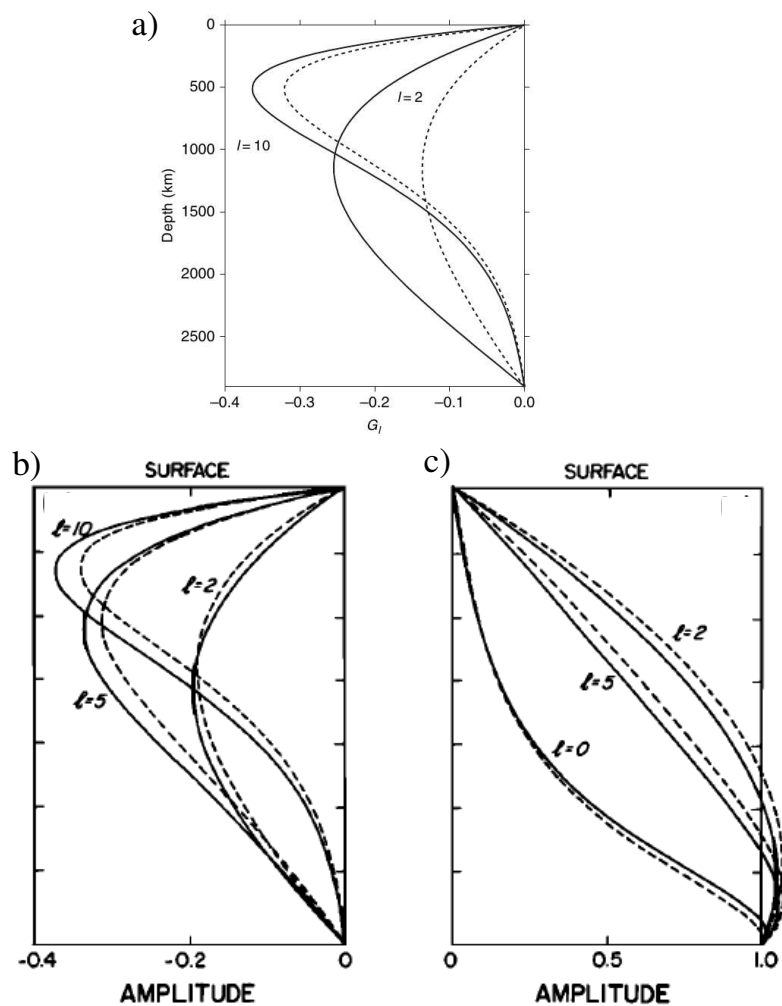


FIG. 4.41 – a) Fonctions réponse du géoïde pour les degrés 2 et 10 incluant l'auto-gravitation (trait plein) ou sans auto-gravité (pointillés) (Ribe, 2007). Fonctions réponse du géoïde (b) et de la topographie dynamique de surface (c) pour un fluide isovisqueux compressible (trait pleins) ou incompressible (pointillés), d'après Forte et Peltier (1991).

Conclusion

La motivation première de cette thèse était d'élaborer un outil permettant de prendre en compte conjointement la déformation visqueuse du manteau et la déformation élastique de la lithosphère dans le but de caractériser la topographie dynamique résultante et le géoïde associé. Les études des champs de topographie et de gravité, les modèles de structure interne et d'évolution thermique des planètes Mars ou Vénus nous ont fourni une partie des paramètres que nous avons intégré à notre modèle. Ainsi, les gammes de valeurs que nous avons considérées pour les épaisseurs élastiques sont celles issues de la résolution du problème inverse et qui nous ont conduit pour Mars à des valeurs de 53, 106 ou 159 km, et pour Vénus à une valeur de 46 km. Ces études, lorsqu'elles portent sur les degrés d'harmoniques sphériques les plus bas, $\ell < 10$ pour Mars ou $\ell < 40$ pour Vénus, attribuent les structures topographiques associées à la présence de panaches, fournissant ainsi des informations à propos de ces structures. Plus encore que ces modèles d'utilisation des observables géophysiques, les modèles de structure interne et d'évolution thermique de Mars et Vénus procurent des informations sur ces panaches et sur la convection en général. Ainsi, la convection pour ces planètes s'effectue sans doute à l'heure actuelle dans un régime de couvercle stagnant épais en surface, où se produit l'essentiel des variations de viscosité au sein du manteau et la vigueur de la convection est caractérisée par un nombre de Rayleigh interne entre 10^6 et 10^8 .

Le comportement visqueux du manteau est décrit ici par un modèle de résolution des équations de la convection thermique par la méthode des volumes finis : *Oedipe*, et le comportement élastique de la lithosphère est pris en compte dans un modèle de résolution semi-spectral. C'est le couplage de ces deux modèles qui a abouti au modèle hybride. Ce modèle a d'abord été confronté à un modèle indépendant de calcul des déformations visqueuse et élastique, semi-spectral, qui ne prend en compte que des variations radiales de viscosité. Il a ensuite été comparé à un outil relativement proche qui couple un modèle de convection visqueuse à un modèle de flexure élastique par approximation de couche mince. Les résultats de la comparaison ont montré une très bonne adéquation avec les deux modèles précédemment évoqués, attestant de sa validation. Comparé au modèle entièrement semi-spectral, il permet

de prendre en compte les variations latérales de viscosité (primordiales pour la dynamique convective du manteau) et conserve en plus le caractère précis de l'utilisation d'une méthode semi-spectrale pour la prise en compte des déformations élastiques de la lithosphère. Les premiers résultats de ce modèle, appliqué à des corps de la taille de Mars ou de Vénus ont révélés que :

(1) Contrairement à l'intégralité des modèles qui utilisent le modèle de flexure élastique en approximation de couche mince, le modèle hybride, tel qu'il a été conçu, permet de distinguer les contributions de chacune des composantes de la traction (radiale et tangentielle).

(2) L'effet de la lithosphère élastique est d'autant plus important que le degré d'harmonique sphérique est grand dans le cas des fonctions réponses (pour une même épaisseur élastique) et que son épaisseur est grande (pour une longueur d'onde donnée). En revanche, il semble que l'effet de la lithosphère élastique soit plus prononcé pour les degrés les plus bas dans les cas de convection thermique.

(3) Pour un corps de la taille de Mars, la lithosphère élastique a un effet important sur les signaux dynamiques de surface. Lorsque la lithosphère élastique est moins épaisse, comme cela semble être le cas sur Vénus, son effet moins spectaculaire reste cependant non-négligeable sur le signal du géoïde.

(4) Pour un rapport constant entre l'épaisseur élastique et le rayon de la planète, le filtrage de la topographie dynamique est plus important lorsque le corps est petit, à l'image de Dione (500 km de rayon), satellite de Saturne, où la topographie dynamique devient négligeable lorsque la lithosphère élastique a une épaisseur de 5 km comme on peut l'envisager pour ce type de corps.

(5) La considération d'un tel couplage et la présence d'une lithosphère élastique même fine conduit à une topographie dynamique trop faible pour être l'unique source de l'anomalie de Tharsis. Cette anomalie importante ne peut définitivement pas avoir une origine uniquement dynamique à l'heure actuelle.

En variant le nombre de Rayleigh, la structure en viscosité et le taux de chauffage interne par rapport à un calcul de référence, les résultats des applications effectuées avec le modèle hybride ont montré que :

(1) Une diminution franche de la dépendance en pression dans la loi de viscosité ne génère pas une différence flagrante ni sur les structures de la convection ni sur les observables de surface. La prise en compte de l'évolution temporelle des spectres de puissance associés a révélé de fortes similitudes entre les deux simulations.

(2) Un saut de viscosité au milieu du manteau est à l'origine d'une convection insurrectionnaire mais ne génère pas, dans notre modèle, de convection de faible degré.

De façon plus spécifique, dans cette simulation, la séparation puis la fusion des panaches s'accompagne respectivement d'une augmentation puis d'une diminution de la température moyenne. Cette simulation encore une fois très différente de la simulation de référence n'engendre pourtant pas de signaux de surface très différents. De plus, l'enveloppe temporelle associée aux grandeurs spectrales indique également des signaux qui se superposent.

(3) Le remplacement de 20% du chauffage total par une composante équivalente de chauffage interne conduit à des structures convectives dépendantes du temps qui se réorganisent continuellement dans une simulation qui a atteint un équilibre statistique. Alors que les enveloppes temporelles des spectres de puissance de la topographie et du géoïde sont différentes de la simulation de référence (elles se superposent très peu), les admittances, elles, se superposent très largement encore une fois.

Pour ces trois simulations ainsi que celle de référence, la conservation de la taille du couvercle stagnant d'une simulation à l'autre conduit à des admittances très proches bien que pour certaines d'entre elles, les amplitudes des signaux de surface soient différentes (simulation H). L'étude a également révélé que l'évolution temporelle des structures de surface est très importante pour chaque simulation, qu'elle ait atteint un état convergé d'équilibre statistique (simulations P et H) ou pas (simulation J) et les enveloppes temporelles associées se superposent très souvent les unes avec les autres, soulignant le caractère non-unique des solutions du problème direct.

(4) Une augmentation de deux ordres de grandeur du nombre de Rayleigh conduit à une augmentation de la longueur d'onde des structures et aboutit à une diminution de l'amplitude des observables de surface à cause d'une diminution de la viscosité. Contrairement aux simulations précédentes, les épaisseurs de couvercle de surface diminuent fortement avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Cette fois-ci, les enveloppes d'évolution temporelle des spectres de puissance et des admittances sont clairement différenciées.

Les résultats de cette série de simulations peuvent être synthétisés de la façon suivante : si on caractérise un cas donné par l'écart maximum entre le profil radial de viscosité associé et celui de la simulation de référence, cet écart maximum est situé au-dessus de la CMB pour les simulations P et H alors qu'il est situé au milieu du manteau pour la simulation J. Dans les simulations Ra^- et Ra^+ , cet écart maximum se trouve proche de la surface car l'épaisseur du couvercle conducteur varie fortement de l'une de ces simulations à l'autre. Il apparaît donc qu'un critère décisif pour caractériser des observables distincts de la simulation de référence est la profondeur de cet écart maximum : lorsque celle-ci est grande (à la CMB pour

les cas P et H, milieu du manteau pour la simulation J), les calculs conduisent à une dynamique interne dont les expressions à la surface sont à peu près identiques en termes de spectre de puissance, admittance et les enveloppes de l'évolution temporelle de ces grandeurs se superposent. Seules les simulations caractérisées par une diminution de l'épaisseur de la lithosphère visqueuse (couvercle de surface) sont à l'origine d'observables de surface réellement distinguables (simulations Ra^- et Ra^+). La taille du couvercle semble donc déterminante dans l'amplitude des observables synthétiques.

Même si cela n'a pas été réalisé dans le cadre de cette thèse, le modèle hybride tel qu'il a été conçu permet de considérer des variations latérale et temporelle de l'épaisseur élastique de la lithosphère. La variation temporelle d'épaisseur élastique de la lithosphère permettrait de quantifier de façon plus rigoureuse l'évolution temporelle des observables de surface, qui est un caractère important des observables, comme nous l'avons mis en évidence. La prise en compte de variations latérales d'épaisseur de la lithosphère élastique a aussi potentiellement un impact important.

La comparaison des observables générés par ces simulations avec ceux enregistrés sur Vénus a révélé que certaines simulations aboutissent à des résultats relativement proches de ceux de Vénus. Même s'il est inespéré d'obtenir la topographie dynamique exacte de Vénus avec ce type de modélisation (1) d'abord parce que la topographie dynamique ne représente qu'une fraction du relief d'une planète et qu'il est aujourd'hui très difficile de l'évaluer et (2) parce qu'on obtiendra au mieux des amplitudes similaires mais pas la géographie Vénusienne. Cependant, on peut imaginer que certains ingrédients supplémentaires ajoutés dans le modèle hybride permettraient de s'en approcher. Même si l'autogravitation n'a pas d'effet sur la dynamique de la convection et qu'elle ne change en rien la comparaison des simulations les unes avec les autres, elle a un effet important sur les observables de surface et doit être considérée pour une comparaison avec Vénus. Ensuite, la considération d'une croûte, de variation de composition, de transitions de phases dans le modèle hybride sont autant d'ingrédients qui sont potentiellement importants pour une meilleure compréhension des liens qui unissent la topographie, le géoïde et la dynamique interne sur Vénus.

Bibliographie

- Acuña, M., Connerney, J., Ness, N., Lin, R., Mitchell, D., Carlson, C., McFadden, J., Anderson, K., Rème, H., Mazelle, C., Vignes, D., Wasilewski, P., and Cloutier, P. (1999). Global distribution of crustal magnetization discovered by the Mars Global Surveyor MAG/ER experiment. *Science*, 284 :790–793.
- Anderson, F. and Grimm, R. (1998). Rift processes at the Valles Marineris, Mars : Constraints from gravity on necking and rate-depending strength evolution. *J. Geophys. Res.*, 103 :11 113–11 124.
- Anderson, F. and Smrekar, S. (2006). Global mapping of crustal and lithospheric thickness on Venus. *J. Geophys. Res.*, 111.
- Andrews-Hanna, J., Zuber, M., and Banerdt, W. (2008). The Borealis basin and the origin of the martian crustal dichotomy. *Nature*, 453 :1212–1216.
- Arkani-Hamed, J. (1994). On the thermal evolution of Venus. *J. Geophys. Res.*, 99 :2019–2033.
- Arkani-Hamed, J. (1996). Analysis and interpretation of the surface topography and gravitational potential of Venus. *J. Geophys. Res.*, 101 :4711–4724.
- Arkani-Hamed, J. (2000). Strength of martian lithosphere beneath large volcanoes. *J. Geophys. Res.*, 105 :26 713–26 732.
- Arkani-Hamed, J., Schaber, G., and Strom, R. (1993). Constraints on the thermal evolution of Venus inferred from Magellan data. *J. Geophys. Res.*, 98 :5309–5315.
- Babeyko, A. and Zharkov, V. (2000). Martian crust : A modelling approach. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 117 :421–235.
- Banerdt, W. (1986). Support of long-wavelength loads on Venus and implications for internal structure. *J. Geophys. Res.*, 91 :403–419.
- Banerdt, W. and Golombek, M. (2000). Tectonics of the Tharsis region on Mars : Insights from MGS topography and gravity. *Lunar Planet. Sci. Conf.*, 31.

- Banerdt, W., McGill, G., and Zuber, M. (1997). *Plains tectonics on Venus*, pages 901–931. In Bougher et al. (1997).
- Banerdt, W., Nimmo, F., and McKenzie, D. (2000). Flexure of Venusian lithosphere measured from residual topography and gravity. *Icarus*, 145.
- Barnett, D., Nimmo, F., and McKenzie, D. (2000). Elastic thickness estimates for Venus using line of sight accelerations from Magellan cycle 5. *Icarus*, 146 :404–419.
- Barnett, D., Nimmo, F., and McKenzie, D. (2002). Flexure of Venusian lithosphere measured from residual topography and gravity. *J. Geophys. Res.*, 107 :E2.5007. doi :10.1029/2000JE001398.
- Basilevsky, A., Head, J., Schaber, G., and Strom, R. (1997). *The resurfacing history of Venus*, pages 1046–1084. In Bougher et al. (1997).
- Baumgardner, J. (1985). Three-dimensional treatment of convective flow in the Earth’s mantle. *J. Stastical Physics*, 39 :501–511.
- Belleguic, V., Lognonné, P., and Wieczorek, M. (2005). Constraints on martian lithosphere from gravity and topography data. *J. Geophys. Res.*, 110.
- Bercovici, D. (2007). Mantle dynamics past, present, and future : An introduction and overview. *Treatise on Geochemistry*, pages 3801–3830.
- Bercovici, D., Schubert, G., and Glatzmaier, G. (1989). Three-dimensional thermal convection in a spherical shell. *J. Fluid Mech.*, 206 :75–104.
- Bertka, C. and Fei, Y. (1998). Density profile of an SNC model Marian interior and the moment-of-inertia factor of Mars. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 157 :79–88.
- Beuchert, M. and Podladchikov, Y. (2010). Viscoelastic mantle convection and lithospheric stresses. *Geophys. J. Int.*, 183 :35–63.
- Beuthe, M. (2008). Thin elastic shells with variable thickness for lithospheric flexure of one-plate planets. *Geophys. J. Int.*, 172 :817–841.
- Bills, B. and Ferrari, A. (1978). Mars topography, harmonics and geophysical implications. *J. Geophys. Res.*, 83 :3497–3508.
- Bindschadler, D. and Parmentier, E. (1990). Mantle flow tectonics : The influence of a ductile lower crust and implications for the formation of topographic uplands on Venus. *J. Geophys. Res.*, 95 :21 329–21 344.

- Bindschadler, D., Schubert, G., and Kaula, W. (1990). Mantle flow tectonics and the origin of Ishtar Terra, Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 17 :1345–1348.
- Bindschadler, D., Schubert, G., and Kaula, W. (1992). Coldspots and hot spots : Global tectonics and mantle dynamics of Venus. *J. Geophys. Res.*, 97 :13 495–13 532.
- Bougher, S., Hunten, D., and Phillips, R. (1997). *Venus II*. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- Breuer, D. and Moore, W. (2007). Dynamics and thermal history of the terrestrial planets, the Moon, and Io. *Treatise on Geophysics*, pages 5264–5313.
- Breuer, D. and Spohn, T. (2003). Early plate tectonics versus single-plate tectonics : Evidence from the magnetic field history and crust evolution. *J. Geophys. Res.*, 108 :269–283.
- Breuer, D. and Spohn, T. (2006). Viscosity of the Martian mantle and its initial temperature : Constraints from crust formation history and the evolution of the magnetic field. *Planetary and Space Science*, 54 :153–169.
- Breuer, D., Spohn, T., and Wänke, U. (1993). Mantle differentiation and the crustal dichotomy of Mars. *Planetary and Space Science*, 41 :269–283.
- Breuer, D., Yuen, D., Spohn, T., and Zhang, S. (1998). Three dimensional models of Martian mantle convection with phase transitions. *Geophys. Res. Lett.*, 25 :229–232.
- Breuer, D., Zhou, H., Yuen, D., and Spohn, T. (1996). Phase transitions in the Martian mantle : implications for the planet’s volcanic evolution. *J. Geophys. Res.*, 101 :7531–7542.
- Britt, D. and Consolmagno, G. (2003). Stony meteorites porosities and densities : A review of the data through 2001. *Meteorit. Planet. Sci.*, 38 :1161–1180.
- Brown, C. and Grimm, R. (1996). Lithospheric rheology and flexure at Artemis Chasma, Venus. *J. Geophys. Res.*, 101 :12 697–12 708.
- Brücker, J., Dreibus, G., Reider, G., and Wänke, H. (2003). Refined data of Alpha-Proton-X-ray spectrometer analyses of soils and rocks at the Mars Pathfinder site : Implications for surface chemistry. *J. Geophys. Res.*, 108 :doi :10.1029/2003JE002060.

- Bunge, H.-P., Richards, M., and Baumgardner, J. (1996). Effect of depth-dependent viscosity on the planform of mantle convection. *Nature*, 379 :436–438.
- Burov, E. and Diament, M. (1995). The effective elastic thickness (d_e) of continental lithosphere : What does it really mean? *J. Geophys. Res.*, 100 :3 905–3 927.
- Čadek, O. (1989). Spherical tensor approach to the solution of the mantle stress problem. *Studia Geoph. Geod.*, 33 :177–197.
- Čadek, O. and Fleitout, L. (1999). A global geoid model with imposed plate velocities and partial layering. *J. Geophys. Res.*, 104 :29,055–29,075.
- Čadek, O. and Fleitout, L. (2003). Effect of lateral variations in the top 300 km on the geoid and dynamic topography. *Geophys. J. Int.*, 152 :566–580.
- Cazenave, A., Souriau, A., and Dominh, K. (1989). Global coupling of Earth surface topography with hotspots, geoid and mantle heterogeneities. *Nature*, 340 :54–57.
- Chase, C. (1985). The geological significance of the Geoid. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 13 :97–117.
- Choblet, G. (2005). Modelling thermal convection with large viscosity gradients in one block of the “cubed sphere”. *J. Comput. Phys.*, 205 :269–291.
- Choblet, G. (2010). *Des modèles pour les Planètes, HDR*. Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes.
- Choblet, G., Čadek, O., Couturier, F., and Dumoulin, C. (2007). OEDIPUS : a new tool to study the dynamics of planetary interiors. *Geophys. J. Int.*, 170 :9–30.
- Choblet, G. and Sotin, C. (2000). 3D thermal convection with variable viscosity : can transient cooling be described by a quasi-static scaling law? *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 119 :321–336.
- Christensen, U. R. (1984). Heat transport by variable viscosity convection and implications for the Earth’s thermal evolution. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 35 :264–282.
- Christensen, U. R. and Yuen, D. A. (1985). Layered convection induced by phase transition. *J. Geophys. Res.*, 90 :10 291–10 300.
- Comer, R., Solomon, S., and Head, J. (1985). Mars : thickness of the lithosphere from the tectonic response to volcanic loads. *Revue of Geophysics*, 23 :61–92.

- Connerney, J., Acuña, M., Ness, N., Kletetschka, G., Mitchell, D., Lin, R., and Reme, H. (2005). Tectonic implications of Mars crustal magnetism. *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 102 :14 970–14 975.
- Connerney, J., Acuña, M., Ness, N., Spohn, T., and Schubert, G. (2004). Mars crustal magnetism. *Space Science Reviews*, 111 :1–32.
- Davaille, A. and Jaupart, C. (1993). Transient high-Rayleigh number thermal convection with large viscosity variations. *J. Fluid Mech.*, 253 :141–166.
- Deschamps, F. (1997). *Convection de Rayleigh-Bénard à viscosité variable. Applications géophysiques et planétologiques*. PhD thesis, Université de Nantes, Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes.
- Deschamps, F., Tackley, P., and Nakagawa, T. (2010). Temperature and heat flux scalings for isoviscous thermal convection in spherical geometry. *Geophys. J. Int.*, 182 :137–154.
- Dorman, L. M. and Lewis, B. T. R. (1970). Experimental Isostasy : 1. Theory of the determination of the Earth's isostatic response to a concentrated load. *J. Geophys. Res.*, 75 :3357–3365.
- Dreibus, G. and Wänke, H. (1985). A volatile-rich planet. *Meteoritics*, 20 :367–382.
- Dubuffet, F., Rabinowicz, M., and Monnereau, M. (2000). Multiple scales in mantle convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 178 :351–366.
- Dumoulin, C., Doin, M.-P., and Fleitout, L. (1999). Heat transport in stagnant lid convection with temperature- and pressure-dependent Newtonien or non-Newtonian rheology. *J. Geophys. Res.*, 104 :12 759–12 777.
- Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary Reference Earth Model. *Phys. Earth and Plan. Inter.*, 25 :297–356.
- Ebinger, C. J., Bechtel, T. D., Forsyth, D. W., and Bowin, C. O. (1989). Effective elastic plate thickness beneath the est African and Afar plateaus and dynamic compensation of the Uplifts. *J. Geophys. Res.*, 94 :2883–2901.
- Elkins-Tanton, L., Zaranek, S., Parmentier, E., and Hess, P. (2005). Early magnetic field and magmatic activity on Mars from magma ocean cumulate overturn. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 236 :1–12.
- Elkins-Tanton, L. T., Parmentier, E., and Hess, P. (2003). Magma ocean fractional crystallization and cumulate overturn in terrestrial planets : Implications for Mars. *Meteoritics and Planetary Science*, 38 :1753–1771.

- Förste, C., Schmidt, R., Stubenvoll, R., Flechtner, F., Meyer, U., König, R., Neumayer, H., Biancale, R., Lemoine, J.-M., Bruinsma, S., Loyer, S., Barthelmes, F., and Esselborn, S. (2008). The GeoForschungZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale satellite-only and combined gravity fields models : EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C. *Journal of Geodesy*, 82 :331–346.
- Forsyth, D. W. (1985). Subsurface loading and estimates of the flexural rigidity of continental lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 90 :12 623–12 632.
- Forte, A. (2007). Constraints on seismic models from other disciplines - Implications for mantle dynamics and composition. *Treatise on Geophysics*, pages 797–850.
- Forte, A. and Peltier, R. (1991). Viscous flow models of global geophysical observables 1. Forwards problems. *J. Geophys. Res.*, 96 :20 131–20 159.
- Foster, A. and Nimmo, F. (1996). Comparisons between the rift systems of East Africa, Earth and Beta Regio, Venus. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 143 :183–195.
- Fowler, A. (1985). Fast thermoviscous convection. *Stud. Appl. Math.*, 72.
- Fowler, A. (1993). Boundary layer theory and subduction. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 459 :2663–2704.
- Fowler, A. and O'Brien, S. (1996). A mechanism for episodic subduction on Venus. *J. Geophys. Res.*, 101 :4755–4763.
- Fowler, A. and O'Brien, S. (2003). Lithospheric failure on Venus. *J. Geophys. Res.*, 98 :21 997–22 005.
- Fukao, Y., Obayashi, M., Inoue, H., and Nishii, M. (1992). Subducting slabs stagnant in the mantle transition zone. *J. Geophys. Res.*, 97 :4809–4822.
- Giannandrea, E. and Christensen, U. (1993). Variable viscosity convection experiments with a stress-free upper boundary and implications for the heat transport in the Earth's mantle. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 78 :139–152.
- Giese, B., Wagner, R., Neukum, G., Helfenstein, P., and Thomas, P. (2007). Tethys : Lithospheric thickness and heat flux from flexurally supported topography at Ithaca Chasma. *Geophys. Res. Lett.*, 3 :doi :10.1029/2007GL031467.
- Glatzmaier, G. (1988). Numerical simulations of mantle convection : time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 43 :223–264.

- Grasset, O. and Parmentier, E. (1998). Thermal convection in a volumetrically heated, infinite Prandtl number fluid with strongly temperature-dependent viscosity : Implications for planetary thermal evolution. *J. Geophys. Res.*, 103 :18 171–18 181.
- Grimm, R. and Hess, P. (1997). *The crust of Venus*, pages 1205–1244. In Bougher et al. (1997).
- Grott, M. and Breuer, D. (2008). The evolution of the martian elastic lithosphere and implications for crustal and mantle rheology. *Icarus*, 193 :503–515.
- Grott, M. and Breuer, D. (2009). Implications of large elastic thicknesses for the composition and current thermal state of Mars. *Icarus*, 201 :540–548.
- Grott, M. and Breuer, D. (2010). On the spatial variability of the martian elastic lithosphere thickness : Evidences for mantle plumes? *J. Geophys. Res.*, 115 :doi10.1029/2009JE003456.
- Grott, M., Hauber, E., Werner, S., Kronberg, P., and Neukum, G. (2005). High heat flux on ancient Mars : Evidence from rift flank uplift at Coracis Fossae. *Geophys. Res. Lett.*, 32 :doi :10.1029/2005GL023894.
- Grott, M., Hauber, E., Werner, S., Kronberg, P., and Neukum, G. (2007). Mechanical modeling of thrust faults in the Thaumasia region, Mars, and implications for the Noachian heat flux. *Icarus*, 186 :517–526.
- Gurnis, M. (1989). A reassessment of the heat transport by variable viscosity convection with plates and lids. *Geophys. Res. Lett.*, 16 :179–182.
- Hager, B. and Clayton, R. (1989). *Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow models, and the geoid*, pages 675–763. Gordon and Breach, New York.
- Hager, B., Clayton, R., Richards, M., Comer, R., and Dziewonski, A. (1985). Lower mantle heterogeneity, dynamic topography and the geoid. *Nature*, 313 :541–545.
- Hager, B. and Richards, M. (1989). Long-wavelength variations in Earth's geoid : physical models and dynamical implications. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 328 :309–327.
- Hall, J., Solomon, S., and Head, J. (1986). Elysium Region, Mars : Tests of lithospheric loading models for the formation of tectonic features. *J. Geophys. Res.*, 91 :11 377–11 392.

- Halliday, A. and Wood, B. (2007). The composition and major reservoirs of the Earth around the time of the Moon-forming giant impact. *Treatise on Geophysics*, pages 4664–4701.
- Hansen, U. and Ebel, A. (1984). Experiments with a numerical model related to mantle convection : boundary layer behaviour of small- and large scale flows. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 36 :374–390.
- Hansen, U. and Yuen, D. (1993). High Rayleigh number regime of temperature-dependent viscosity convection and the Earth's early thermal history. *Geophys. Res. Lett.*, 20.
- Harder, H. (1998). Phase transitions and the three-dimensional planform of thermal convection in the Martian mantle. *J. Geophys. Res.*, 103 :16 775–16 797.
- Harder, H. (2000). Mantle convection and the dynamic geoid of Mars. *Geophys. Res. Lett.*, 27 :301–304.
- Harder, H. and Christensen, U. (1996). A one-plume model of martian mantle convection. *Nature*, 380 :507–509.
- Harmon, J., Campbell, D., Bindschadler, D., Head, J., and Shapiro, I. (1986). Altimetry of Mercury : A preliminary analysis. *J. Geophys. Res.*, 91 :385–401.
- Hastings, D. and Dunbar, P. (1999). *Global Land One-kilometer Base Elevation (GLOBE) Digital Elevation Model*. National Oceanic and Atmospheric Administration, National Geophysical Data Center, Boulder, CO, USA.
- Hauck, S. and Phillips, R. (2002). Thermal and crustal evolution of Mars. *J. Geophys. Res.*, 107 :doi10.1029/2001JE001801.
- Haxby, W. and Turcotte, D. (1978). On isostatic geoid anomalies. *J. Geophys. Res.*, 83 :5473–5478.
- Herrick, R. (1994). Resurfacing of Venus. *Geology*, 22 :703–706.
- Herrick, R. and Parmentier, E. (1994). Episodic large scale overturn of two layer mantle in terrestrial planets. *J. Geophys. Res.*, 99 :2053–2062.
- Hess, H. (1962). *History of Ocean Basins*, pages 599–620. Geological Society of America, New York.
- Hess, P. and Parmentier, E. (2001). Implications of magma ocean cumulate overturn for Mars. *32nd Annual Lunar and Planetary Science Conference*, page abstract no. 1319.

- Hirth, G. and Kohlstedt, D. L. (1996). Water in the oceanic upper mantle : implications for rheology, melt extraction and the evolution of the lithosphere. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 144 :93–108.
- Hoogenboom, T., Smrekar, S., Anderson, F., and Houseman, G. (2004). Admittance survey of type 1 coronae on Venus. *J. Geophys. Res.*, 109 :E03002,doi :10.1029/2003JE002171.
- Hsui, A., Yang, W., and Baumgardner, J. (1995). A preliminary study of the effects of some flow parameters in the generation of poloidal and toroidal energies within a 3D spherical thermal-convection system with variable viscosity. *Pure Appl. Geophys.*, 145 :487–503.
- Huettig, C. and Stemmer, K. (2008). The spiral grid : A new approach to discretize the sphere and its application to mantle convection. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 9.
- Iess, L., Rappaport, N., Jacobson, R., Racioppa, P., Stevenson, D., Tortora, P., Armstrong, J., and Asmar, S. (2010). Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan. *Science*, 327 :1 367–1 369.
- Iwase, Y. and Honda, S. (1997). An interpretation of the Nusselt-Rayleigh number relationship for convection in a spherical shell. *Geophys. J. Int.*, 130 :801–804.
- Jacobsen, J. and Wasserburg, G. (1979). The mean age of mantle and crustal reservoir. *J. Geophys. Res.*, 84 :7411–7429.
- Jaupart, C., Labrosse, S., and Mareschal, J.-C. (2007). Temperatures, heat and energy in the mantle of the Earth. *Treatise on Geophysics*, pages 4051–4101.
- Johnson, C. and Sandwell, D. (1994). Lithospheric flexure on Venus. *Geophys. J. Int.*, 119 :627–647.
- Jones, M. (1985). *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*. Letchworth, England, ed. John Wiley and Sons Inc., New York, Research Studies Press Ltd.
- Kageyama, A. and Sato, T. (2004). Yin-Yang grid : An overset grid in spherical geometry. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 5 :doi :10.1029/2004GC000734.
- Karato, S. (2008). *Deformation of Earth Materials : An introduction to the rheology of solid Earth*. Cambridge University press,.

- Karato, S. and Wu, P. (1993). Rheology of the upper mantle : A synthesis . *Science*, 260 :771–778.
- Kaufmann, G. and Lambeck, K. (2000). Mantle dynamics, postglacial rebound and the radial viscosity profile. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 121 :301–324.
- Ke, Y. and Solomatov, V. (2006). Early transient superplumes and the origin of the Martian crustal dichotomy. *J. Geophys. Res.*, 96 :E10001, doi :10.1029/2005JE002631.
- Keller, T. and Tackley, P. (2009). Towards self-consistent modeling of the martian dichotomy : the influence of one-ridge convection on crustal thickness distribution. *Icarus*, pages 429–443.
- Kellogg, L. and King, S. (1997). The effect of temperature-dependent viscosity on the structure of new plumes in the mantle : Results of a finite element model in a spherical, axisymmetric shell. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 148 :13–26.
- Kido, M. and Čadek, O. (1997). Inferences of viscosity from the oceanic geoid : Implication of a low viscosity zone below the 660-km discontinuity. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 151 :127–137.
- Kiefer, W., Bills, B., and Nerem, R. (1996). An inversion of gravity and topography for mantle and crustal structure on Mars. *J. Geophys. Res.*, 101 :9239–9252.
- Kiefer, W. and Hager, B. (1989). The role of mantle convection in the formation of highland regions on Venus. *Lunar Planet. Sci.*, XX :520–521.
- Kiefer, W. and Hager, B. (1991). A mantle plume model for the equatorial highlands of Venus. *J. Geophys. Res.*, 96 :20 947–20 966.
- Kiefer, W. and Hager, B. (1992). Geoid anomalies and dynamic topography from convection in cylindrical geometry :applications to mantle plumes on Earth and Venus. *Geophys. J. Int.*, 108 :198–214.
- Kiefer, W. and Kellogg, L. (1998). Geoid anomalies and dynamic topography from time-dependent, spherical axisymmetric mantle convection. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 106 :237–256.
- Kiefer, W. and Li, Q. (2009). Mantle convection controls the observed lateral variations in lithospheric thickness on present-day Mars. *Geophys. Res. Lett.*, 36 :doi :10.1029/2009GL039827.

- Kiefer, W., Richards, M., Hager, B., and Bills, B. (1986). A dynamic model for Venus' gravity field. *Geophys. Res. Lett.*, 13 :14–17.
- King, S. (2009). On topography and geoid from 2-D stagnant lid convection calculations. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 10 :Q03002,doi :10.1029/2008GC002250.
- King, S. and Hager, B. (1994). Subducted slabs and the geoid 1. Numerical experiments with temperature-dependent viscosity. *J. Geophys. Res.*, 99 :19 843–19 852.
- King, S., Raefsky, A., and Hager, B. (1990). ConMan : Vectorizing a finite element code for incompressible two-dimensional convection in the Earth's mantle. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 59 :196–208.
- Kirby, S. and Kronenberg, A. K. (1987). Rheology of the lithosphere : selected topics. *Reviews of Geophysics*, 25 :1219–1244.
- Kleine, T., Munker, C., Mezger, K., and Palme, H. (2002). Rapid accretion and early core formation on asteroids and terrestrial planets from Hf-W chronometry. *Nature*, 418 :952–955.
- Konopliv, A., Asmar, S., Folkner, W., Karatekin, O., Nunes, D., Smrekar, S., Yoder, C., and Zuber, M. (2011). Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters. *Icarus*, 211 :401–428.
- Konopliv, A., Banerdt, W., and Sjogren, W. (1999). Venus gravity : 180th degree and order model. *Icarus*, 139 :3–18.
- Konopliv, A., Yoder, C., Standish, E., Yuan, D.-N., and Sjogren, W. (2006). A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, 182 :23–50.
- Korenaga, J. (2003). Energetics of mantle convection and the fate of fossil heat. *Geophys. Res. Lett.*, 30 :1437.
- Korenaga, J. and Jordan, T. H. (2002). Onset of convection with temperature- and depth-dependent viscosity. *Geophys. Res. Lett.*, 29 :doi :10.1029/2002GL015672.
- Korenaga, J. and Karato, S. (2008). A new analysis of experimental data on olivine rheology. *J. Geophys. Res.*, 113 :B02403, doi :10.1029/2007JB005100.
- Kucinskas, A. and Turcotte, D. (1994). Isostatic compensation of equatorial highlands on Venus. *Icarus*, 112 :104–116.

- Labrosse, S. (2002). Hotspots, mantle plumes and core heat loss. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 199 :147–156.
- Labrosse, S. and Jaupart, C. (2007). Thermal evolution of the Earth : Secular changes and fluctuations of plate characteristics. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 260 :465–481.
- Lago, B. and Rabinowicz, M. (1984). Admittance for a convection in a layered spherical shell. *Geophys. J. Int.*, 77 :461–482.
- Lassak, T., McNamara, A., Garnero, E., and Zhong, S. (2010). Core-mantle boundary topography as a possible constraint on the lower mantle chemistry and dynamics. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 289 :232–241.
- Lawrence, K. and Phillips, R. (2003). Gravity/Topography admittance inversion on Venus using niching genetic algorithms. *Geophys. Res. Lett.*, 30 :doi :10.1029/2003GL17515.
- Le Stunff, Y. and Ricard, Y. (1995). Topography and geoid due to lithospheric mass anomalies. *Geophys. J. Int.*, 122 :982–990.
- Le Stunff, Y. and Ricard, Y. (1997). Parital advection of equidensity surfaces : A solution for the dynamic topography problem? *J. Geophys. Res.*, 102 :24 655–24 667.
- Leitch, A. and Yuen, D. (1991). Compressible convection in a viscous Venusian mantle. *J. Geophys. Res.*, 96 :5551–5562.
- Lemoine, F., Smith, D., Rowlands, D., Zuber, M., Neumann, G., Chinn, D., and Pavlis, D. (2001). An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *J. Geophys. Res.*, 106 :23 359–23 376.
- Lewis, B. and Dorman, L. (1970). Experimental Isostasy 2. An isostatic model for the U.S.A. derived from gravity and topographic data. *J. Geophys. Res.*, 75 :3367–3386.
- Li, Q. and Kiefer, W. (2007). Mantle convection and magma production on present-day Mars : Effects of temperature-dependent rheology. *Geophys. Res. Lett.*, 34 :doi :10.1029/2007FL030544.
- Li, X. D. and Romanowicz, B. (1996). Global mantle shear velocity model developed using nonlinear asymptotic coupling theory. *J. Geophys. Res.*, 101 :22 245–22 272.

- Lingenfelter, R. E. and Schubert, G. (1973). Evidence for Convection in Planetary Interiors from First-Order Topography. *Moon*, 7 :172–180.
- Lognonné, P. and Johnson, C. (2007). Planetary Seismology. *Treatise on Geophysics*, pages 5034–5087.
- Longhi, J., Knittle, E., Holloway, J., and Wänke, H. (1992). *The bulk composition, mineralogy and internal structure of Mars*, pages 184–208. University of Arizona Press, Tuscon.
- Love, A. E. H. (1892). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. printed in 1906 by Cambridge University Press, second edition.
- Lowry, R. and Zhong, S. (2003). Surface versus internal loading of the Tharsis rise, Mars. *J. Geophys. Res.*, 108 (E9) :doi :10.1029/2003JE002111.
- Macario, A., Malinverno, A., and Haxby, W. F. (1995). On the robustness of elastic thickness estimates obtained using the coherence method. *J. Geophys. Res.*, 100 :15 163–15 172.
- Margot, J.-L., Campbell, D., Jurgens, R., and Slade, M. (1999). The topography of Tycho Crater. *J. Geophys. Res.*, 104 :11 875–11 882.
- Marinova, M., Aharonson, O., and Asphaug, E. (2008). Mega-impact formation of the Mars hemispheric dichotomy. *Nature*, 453 :1216–1219.
- Marquart, G. and Schmeling, H. (1989). Topography and geoid undulations caused by small scale convection beneath continental lithosphere of variable elastic thickness. *Geophys. J. Int.*, 97 :511–527.
- Masursky, H., Elianson, E., Ford, P., McGill, G., Pettengill, G., Scaber, G., and Schubert, G. (1980). Pioneer Venus radar results : geology from images and altimetry. *J. Geophys. Res.*, 85 :8232–8260.
- McGill, G. and Dimitriou, A. (1990). Origin of the Martian global dichotomy by crustal thinning in the late Noachian or early Hesperian. *J. Geophys. Res.*, 95 :12 595–12 605.
- McGovern, P. and Solomon, S. (1992). Estimates of elastic plate thicknesses beneath large volcanos on Venus. *International Colloquium on Venus*, pages 68–70.
- McGovern, P., Solomon, S., Smith, D., Zuber, M., Simons, M., Wieczorek, M.A. and Phillips, R., Neumann, G., Aharonson, O., and Head, J. (2004). Correction to “Localized gravity/topography admittance and correlation spectra

- on Mars : implications for regional and global evolution". *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2002JE001854.
- McKenzie, D. and Fairhead, D. (1997). Estimates of the effective elastic thickness of the continental lithosphere from Bouguer and free air gravity anomalies. *J. Geophys. Res.*, 102 :27 523–27 552.
- McKenzie, D. and Nimmo, F. (1997). Elastic thickness estimates for Venus from line of sight accelerations. *Icarus*, 130 :198–216.
- McKenzie, D. P., Barnett, D., and Yuan, D. (2002). The relationship between martian gravity and topography. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 195 :1–16.
- McNamara, A. and Zhong, S. (2005). Degree-one mantle convection : dependance on internal heating and temperature-dependent rheology. *Geophys. Res. Lett.*, 32 :1301.
- McNutt, M. K. (1984). Lithospheric flexure and thermal anomalies. *J. Geophys. Res.*, 89 :11 180–11 194.
- McNutt, M. K., Diament, M., and Kogan, M. G. (1988). Variations of elastic plate thickness at continental thrust belts. *J. Geophys. Res.*, 93 :8825–8838.
- McNutt, M. K. and Shure, L. (1986). Estimating the compensation depth of the Hawaiian swell with linear filters. *J. Geophys. Res.*, 91 :13 915–13 923.
- Mège, D. and Masson, P. (1996). A plume tectonics model for the Tharsis province, Mars. *Planet. Space Sci.*, 44 :1499–1546.
- Mitrovica, J. and Forte, A. (2004). A new inference of mantle viscosity based upon joint inversion of convection and glacial isostatic adjustment data. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 225 :177–189.
- Mocquet, A., Rosenblatt, P., Dehant, V., and Verhoeven, O. (2010). The deep interior surface of Venus, Mars and the Earth : A brief review and the need of planetary surface-based measurements. *Plan. and Space Scien.*, doi :10.1016/j.pss.2010.02.002.
- Montagner, J.-P. and Tanimoto, T. (1991). Global upper mantle tomography of seismic velocities and anisotropies. *J. Geophys. Res.*, 96 :20,337–20,351.
- Montelli, R., Nolet, G., Dahlen, F., Masters, G., Engdahl, E., and Hung, S.-H. (2004). Finite-frequency tomography reveals a variety of plumes in the mantle. *Science*, 16 :338–343.

- Monteux, J. (2009). *Modélisation numérique de la formation du noyau terrestre : Contribution des impacts météoritiques*. PhD thesis, Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon.
- Monteux, J., Coltice, N., Dubuffet, F., and Ricard, Y. (2007). Thermo-mechanical adjustment after impacts during planetary growth. *Geophys. Res. Lett.*, 34 :doi :10.1029/2007GL031635.
- Moresi, L., Dufour, F., and Muhlhaus, H. (2002). Mantle convection modeling with viscoelastic/brittle lithosphere : numerical methodology and plate tectonic modeling. *Pure appl. geophys.*, 159 :2 335–2 356.
- Moresi, L. and M., G. (1996). Constraints on the lateral strength of slab from three-dimensional dynamic flow models. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 138 :15–28.
- Moresi, L. and Parsons, B. (1995). Interpreting gravity, geoid and topography for convection with temperature dependent viscosity : Application to surface features on Venus. *J. Geophys. Res.*, 100 :doi :10.1029/95JE01622.
- Moresi, L., Quenette, S., Lemiale, V., Mériaux, C., Appelbe, B., and Muhlhaus, H. (2007). Computational approaches to studying non-linear dynamics of the crust and mantle. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 163 :69–82.
- Moresi, L. and Solomatov, V. (1995). Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations. *Phys. Fluids*, 7 :2154–2162.
- Moresi, L. and Solomatov, V. (1998). Mantle convection with a brittle lithosphere : Thoughts on the global tectonic style of the Earth and Venus. *Geophys. J. Int.*, 133 :669–682.
- Muhlhaus, H. and Regenauer, K. (2005). Towards a self-consistent plate mantle model that includes elasticity : simple benchmarks and application to basic modes of convection. *Geophys. J. Int.*, 163 :788–800.
- Neukum, G., Basilevsky, A., Kneissl, T., Chapman, M., van Gasselt, S., Michael, G., Jaumann, R., Hoffmann, H., and Lanz, J. (2010). The geologic evolution of Mars : episodicity of resurfacing events and ages from cratering analysis of image data and correlation with radiometric ages of Martian meteorites. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 294 :204–222.
- Neumann, G., Zuber, M., Wieczorek, M., McGovern, P., Lemoine, F., and Smith, D. (2004). Crustal structure of Mars from gravity and topography. *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2004JE002262.

- Nimmo, F. (2002a). Admittance estimates of mean crustal thickness and density at the martian hemispheric dichotomy. *J. Geophys. Res.*, 107 :doi :10.1029/2001JE001488.
- Nimmo, F. (2002b). Why does Venus lack a magnetic field? *Geology*, 30 :987–990.
- Nimmo, F., Bills, B., Thomas, B., and Asmar, S. (2010). Geophysical implications of the long-wavelength topography of Rhea. *J. Geophys. Res.*, 115 :doi :10.1029/2010JE003604.
- Nimmo, F., Giese, B., and Pappalardo, R. (2003). Estimates of Europa's ice shell thickness from elastically supported topography. *Geophys. Res. Lett.*, 30 :doi :10.1029/2002GL016660.
- Nimmo, F., Hart, S., Korycansky, D., and Agnor, C. (2008). Implications of an impact origin for the martian hemispheric dichotomy. *Nature*, 453 :1220–1224.
- Nimmo, F. and Manga, M. (2009). *Geodynamics of Europa's icy shell*, pages 381–404. University of Arizona Press.
- Nimmo, F. and McKenzie, D. (1996). Modelling plume-related melting, uplift and gravity on Venus. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 145 :109–123.
- Nimmo, F. and Stevenson, D. (2000). Influence of early plate tectonics on the thermal evolution and magnetic field of Mars. *J. Geophys. Res.*, 105 :11 969–11 979.
- Nimmo, F. and Stevenson, D. (2001). Estimates of martian crustal thickness from viscous relaxation topography. *J. Geophys. Res.*, 106 :5085–5098.
- Nimmo, F. and Tanaka, K. (2005). Early crustal evolution of Mars. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 33 :133–161.
- Olsen, P. (1987). A comparison of heat transfer laws for mantle convection at very high Rayleigh numbers. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 48 :153–160.
- Orth, C. and Solomatov, V. (2011). The isostatic stagnant lid approximation and global variations in the Venusian lithospheric thickness. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 12 :doi :10.1029/2011GC003582.
- Panasuyk, S., V. and Hager, B., H. (2000). Models of isostatic and dynamic topography, geoid anomalies, and their uncertainties. *J. Geophys. Res.*, 105 :28 199–28 209.

- Parmentier, E. M. and Hess, P. (1992). Chemical differentiation of a convecting planetary interior : consequences for one plate planet such as Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 19 :2015–2018.
- Parmentier, E. M. and Sotin, C. (2000). Three-dimensional numerical experiments on thermal convection in a very viscous fluid : Implications for the dynamics of a thermal boundary layer at high Rayleigh number. *Phys. Fluids*, 12 :609–617.
- Parsons, B. and Daly, S. (1983). The relationship between surface topography, gravity anomalies, and temperature structure of convection. *J. Geophys. Res.*, 88 :1129–1144.
- Pauer, M., Fleming, K., and Čadek, O. (2006). Modeling the dynamic component of the geoid and topography of Venus. *J. Geophys. Res.*, 111 :E11012, doi : 10.1029/2005JE002511.
- Phillips, R. (1994). Estimating lithospheric properties at Alta Regio, Venus. *Icarus*, 112 :147–170.
- Phillips, R. and Lambeck, K. (1980). Gravity fields of the terrestrial planets : long-wavelength anomalies and tectonics. *Reviews of geophysics and space physics*, 18 :27–76.
- Phillips, R., Raubertas, R., Arvidson, R., Sakar, I., Herrick, R.R., a. I. N., and Grimm, R. (1994). Impact crater distribution on Venus : Implications for planetary resurfacing history. *J. Geophys. Res.*, 97 :15 923–15 948.
- Phillips, R. and Saunders, R. (1975). The isostatic state of martian topography. *J. Geophys. Res.*, 80 :2893–2898.
- Phillips, R., Zuber, M., Smrekar, E., Mellon, M., Head, J., Tanaka, K., Putzig, N., Milkovic, S., Campbell, B., Plaut, J., Safaeinili, A., Seu, R., Biccari, D., Carter, L., Picardi, G., Orosei, R., Mohit, P., Heggy, E., Zurek, R., Egan, A., Giacomoni, E., Russo, F., Cutigni, M., Pettinelli, E., Holt, J., Leuschen, C., and Marinangeli, L. (2008). Mars North Polar Deposits : Stratigraphy, age, and geodynamical response. *Science*, 320 :1 182–1 185.
- Plesa, A.-C., Hütting, C., and Breuer, D. (2009). Mantle convection in a spherical shell : the problem of using Frank Kamenetskii approximation for the viscosity law in thermal evolution models. *11th International Workshop on Modeling of Mantle Convection and Lithospheric Dynamics*.

- Rappaport, N., Konopliv, A., Kucinskis, A., and Ford, P. (1999). An improved 360 degree and order model of Venus topography. *Icarus*, 139 :19–31.
- Ratcliff, J., Schubert, G., and Zebib, A. (1995). Three-dimensional variable viscosity convection of an infinite Prandtl number Boussinesq fluid in a spherical shell. *Geophys. Res. Lett.*, 22 :2227–2230.
- Ratcliff, J., Schubert, G., and Zebib, A. (1996). Steady tetrahedral and cubic patterns of spherical shell convection with temperature dependent viscosity. *J. Geophys. Res.*, 101 :25 473–25 484.
- Redmond, H. and King, S. (2004). A numerical study of a mantle plume beneath the Tharsis Rise : Reconciling dynamic uplift and lithospheric support models. *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2003JE002228.
- Redmond, H. and King, S. (2007). Does mantle convection currently exist on Mercury. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 164 :221–231.
- Reese, C., Solomatov, V., Baumgardner, J., Stegman, D., and Veizolainen, A. (2004). Magmatic evolution of impact-induced Martian mantle plumes and the origin of Tharsis. *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2003JE002222.
- Reese, C., Solomatov, V., and Moresi, L.-N. (1998). Heat transport efficiency for stagnant lid convection with dislocation viscosity : application to Mars and Venus. *J. Geophys. Res.*, 103 :13 643–13 657.
- Reese, C., Solomatov, V., and Moresi, L.-N. (1999). Non-newtonian stagnant lid convection and magmatic resurfacing on Venus. *Icarus*, 139 :67–80.
- Reese, C., Solomatov, V., and Orth, C. (2007). Mechanisms for cessation of magmatic resurfacing on Venus. *J. Geophys. Res.*, 112 :doi :10.1029/2006JE002782.
- Reigber, C., Schmidt, R., and Flechtner, F. (2005). An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE : EIGEN-GRACE02S. *Journal of Geodynamics*, 39 :1–10.
- Ribe, N. M. (2007). Analytical approaches to mantle dynamics. *Treatise on Geophysics*, pages 3967–4024.
- Ricard, Y. (2007). Physics of mantle convection. *Treatise on Geophysics*, pages 3 831–3 887.
- Ricard, Y., Fleitout, L., and Froideveaux, C. (1984). Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic Earth. *Ann. Geophys.*, 2 :267–285.

- Ricard, Y., Richards, M., Lithgow-Bertelloni, C., and LeStunff, Y. (1993). A geodynamic model of mass heterogeneity. *J. Geophys. Res.*, 98 :21 895–21 909.
- Ricard, Y. and Vigny, C. (1989). Mantle dynamics with induced plate tectonics. *J. Geophys. Res.*, 94 :17 543–17 559.
- Richards, M. and Hager, B. (1984). Geoid anomalies in a dynamic Earth. *J. Geophys. Res.*, 89 :5 987–6 002.
- Richards, M., Hager, B., and Sleep, N. (1988). Dynamically supported geoid highs over hotspots : observation and theory. *J. Geophys. Res.*, 93 :7 690–7 708.
- Rivoldini, A., Van Hoolst, T., Verhoeven, O., Mocquet, A., and Dehant, V. (2011). Geodesy constraints on the interior structure and composition of Mars. *Icarus*, 213 :451–472.
- Roberts, J. and Zhong, S. (2004). Plume-induced topography and geoid anomalies and their implications for the Tharsis rise on Mars. *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2003JE002226.
- Roberts, J. and Zhong, S. (2006). Degree-1 convection in the Marian mantle and the origin of the hemispheric dichotomy. *J. Geophys. Res.*, 111 :doi :10.1029/2005JE002668.
- Robinson, M. and Taylor, G. (2001). Ferrous oxyde in Mercury’s crust and mantle. *Meteorit. Planet. Sci.*, 36 :841–847.
- Robuchon, G. (2009). *Couplage entre dynamique interne et rotation : application à l’évolution de Mercure, Japet et Mars*. PhD thesis, Université de Nantes, Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes.
- Rodriguez, E., Morris, C., Belz, J., Chapin, E., Martin, J., Daffer, W., and Hensley, S. (2005). An assessment of the SRTM topographic products. Technical report, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California. Technical Report JPL D-31639.
- Roe, P. (1985). *Some contributions to the modelling of discontinuous flows*, pages 163–193. Lectures in Applied Math. Am. Math. Soc., Providence, R. I.
- Rogers, P. and Zuber, M. (1998). Tectonic evolution of Bell Regio, Venus : Regional stress, lithospheric flexure, and edifice stresses. *J. Geophys. Res.*, 103 :16 841–16 853.
- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The “cubed sphere” : A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 124 :93–114.

- Rosenblatt, P., a. D. V. (2010). Mars geodesy, rotation and gravity. *Research in Astron. and Astrophys.*, 10 :713–736.
- Rosenblatt, P., a. P. P. a. T. E. (1994). Comparative hypsometric analysis of Earth and Venus. 21 :doi :10.1029/94GL00419.
- Rubie, D., Nimmo, F., and Melosh, H. (2007). Formation of Earth's core. *Treatise on Geophysics*, pages 4702–4741.
- Sandwell, D. T. and Schubert, G. (1992). Flexural ridges, trenches, and outer rises around Venus coronae. *J. Geophys. Res.*, 97 :16 069–16 083.
- Sanloup, C., Jambon, A., and Gillet, P. (1999). A simple chondritic model of Mars. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 112 :43–54.
- Schaber, G., Strom, R., Moore, H., Soderblom, L., Kirk, R., Chadwick, D., Dawson, D., Gaddis, L., Boyce, J., and Russell, J. (1992). Geology and distribution of impact craters on Venus : What are they telling us? *J. Geophys. Res.*, 97 :13 257–13 301.
- Schubert, G., Bercovici, D., and Glatzmaier, G. (1990). Mantle dynamics in Mars and Venus : influence of an immobile lithosphere on three-dimensional mantle convection. *J. Geophys. Res.*, 95 :14 105–14 129.
- Schubert, G., Moore, W., and Sandwell, D. (1994). Gravity over coronae and chas-mata on Venus. *Icarus*, 112 :130–146.
- Schubert, G., Solomatov, V., Tackley, P., and Turcotte, D. (1997). *Mantle convection and the thermal evolution of Venus*, pages 1245–1287. In Bougher et al. (1997).
- Schubert, G. and Spohn, T. (1990). Thermal history of Mars and the sulfur content of its core. *J. Geophys. Res.*, 95 :14 095–14 104.
- Schubert, G., Turcotte, D., and Olson, P. (2001). *Mantle convection in Earth and planets*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Schubert, G., Yuen, D., and Turcotte, D. (1975). Role of phase transitions in a dynamic mantle. *Geophys. J. Int.*, 42 :705–735.
- Schumacher, S. and Breuer, D. (2006). Influence of a variable thermal conductivity on the thermalchemical evolution of Mars. *J. Geophys. Res.*, 111 :E02006.
- Senshu, H., Kuramoto, K., and Matsui, T. (2002). Thermal evolution of a growing Mars. *J. Geophys. Res.*, 107 :5118.

- Simons, M., Hager, B., and Solomon, S. (1994). Global variations in the geoid/topography of Venus. *Science*, 264 :798–803.
- Simons, M., Solomon, S., and Hager, B. (1997). Localization of gravity and topography : constraints on the tectonics and mantle dynamics of Venus. *Geophys. J. Int.*, 131 :24–44.
- Sleep, N. (1994). Martian plate tectonics. *J. Geophys. Res.*, 99 :5639–5655.
- Smith, D., Sjogren, W., Tyler, G., Balmino, G., Lemoine, F., and Konopliv, A. (1999a). The gravity field of Mars : Results from Mars Global Surveyor. *Science*, 286 :94–97.
- Smith, D., Zuber, M., Solomon, S., Phillips, R., Head, J., Garvin, J., Banerdt, W., Muhleman, D., Pettengill, G., Neumann, G., Lemoine, F., Abshire, J., Aharonson, O., Brown, C., Hauck, S., Ivanov, A., McGovern, P., Zwally, H., and Duxbury, T. (1999b). The global topography of Mars and implications for surface evolution. *Science*, 284 :1495–1503.
- Smrekar, S. (1994). Evidence for active hot spots on Venus from analysis of Magellan gravity data. *Icarus*, 112 :2–26.
- Smrekar, S. and Parmentier, E. (1996). Interactions of mantle plumes with thermal and chemical boundary layers : Applications to hot spots on Venus. *J. Geophys. Res.*, 101 :5397–5410.
- Smrekar, S. and Phillips, R. (1991). Venusian highlands : Geoid to topography ratios and their implications. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 107 :582–597.
- Smrekar, S. and Sotin, C. (2012). Constraints on mantle plumes on Venus : Implications for volatile history. *Icarus*, 217 :510–523.
- Smrekar, S. and Stofan, E. (1999). Origin of corona-dominated topographic rises on Venus. *Icarus*, 139 :100–115.
- Smrekar, S., Stofan, E., Mueller, N., Treiman, A., Elkins-Tanton, L., Helbert, J., Piccioni, G., and Drossart, P. (2011). Recent hotspot volcanism on Venus from VIRTIS emissivity data. *Science*, 328 :605–608.
- Sohl, F. and Schubert, G. (2007). Interior structure, composition, and mineralogy of the terrestrial planets. *Treatise on Geophysics*, pages 4992–5033.
- Sohl, F., Schubert, G., and Spohn, T. (2005). Geophysical constraints on the composition and structure of the Martian interior. *J. Geophys. Res.*, 110 :E12008, doi :10.1029/2005JE002520.

- Sohl, F. and Spohn, T. (1997). The interior structure of Mars : implications from SNC meteorites. *J. Geophys. Res.*, 102 :1613–1637.
- Solomatov, V. and Stevenson, D. (1993). Nonfractional crystallization of a terrestrial magma ocean. *J. Geophys. Res.*, 98 :5391–5406.
- Solomatov, V. S. (1995). Scaling of temperature- and stress- dependent viscosity convection. *Phys. Fluids*, 7 :266–274.
- Solomatov, V. S. (2004). Initiation of subduction by small-scale convection. *J. Geophys. Res.*, 109 :B01412, doi :10.1029/2003JB002628.
- Solomatov, V. S. and Moresi, L. (1996). Stagnant lid convection on Venus. *J. Geophys. Res.*, 101 :4 737–4 753.
- Solomatov, V. S. and Moresi, L. (2000). Scaling of time-dependent stagnant lid convection : application to small-scale convection on the Earth and other terrestrial planets. *J. Geophys. Res.*, 105 :21 795–21 818.
- Solomon, S., Aharonson, O., Aurnou, J., Banerdt, W., Carr, M., Dombard, A., Frey, H., Golombek, M., Hauck, S., Head, J., Jakosky, B., Johnson, C., McGovern, P., Neumann, G., Phillips, R., Smith, D., and Zuber, M. (2005). New perspectives on ancient Mars. *Science*, 307 :1214–1220.
- Solomon, S. and Head, J. (1982). Mechanisms for lithospheric heat transport on Venus : Implications for tectonic style and volcanism. *J. Geophys. Res.*, 87 :9 236–9 246.
- Solomon, S. and Head, J. (1990). Lithospheric flexure beneath the Freyja Montes fordeep, Venus : Constraints on lithospheric thermal gradient and heat flow. *Geophys. Res. Lett.*, 17 :1393–1396.
- Spohn, T. (1991). Mantle differentiation and thermal evolution of Mars, Mercury, and Venus. *Icarus*, 90 :222–236.
- Steinbach, V. and Yuen, D. (1992). The effects of multiple phase transitions on Venusian mantle convection. *Geophys. Res. Lett.*, 19 :2243–2246.
- Steinberger, B. and Claderwood, A. (2006). Models of large-scale viscous flow in the Earth's mantle with constraints from mineral physics and surface observations. *Geophys. J. Int.*, 167 :1461–1481.
- Steinberger, B., Werner, S., and Torsvik, T. (2010). Deep versus shallow origin of gravity anomalies, topography and volcanism on Earth, Venus and Mars. *Icarus*, 207 :564–577.

- Stemmer, K., Harder, H., and Hansen, U. (2006). A new method to simulate convection with strongly temperature- and pressure-dependent viscosity in a spherical shell : Applications to the Earth's mantle. *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 157 :223–249.
- Stevenson, D. (2002). Planetary magnetic fields. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 208 :1–11.
- Stevenson, D. (2007). Earth formation and evolution. *Treatise on Geophysics*, pages 4653–4663.
- Stevenson, D., Spohn, T., and Schubert, G. (1983). Magnetism and thermal evolution of the terrestrial planets. *Icarus*, 54 :466–489.
- Stofan, E., Brian, A., and Guest, J. (2005). Resurfacing styles and rates on Venus : assessment of 18 venusian quadrangles. *Icarus*, 173 :312–321.
- Stofan, E., Smrekar, S., Bindschadler, D., and Senske, D. (1995). Large topographic rises on Venus : implications for mantle upwelling. *J. Geophys. Res.*, 100 :23 317–23 327.
- Strom, R., Schaber, G., and Dawson, D. (1994). The global resurfacing of Venus. *J. Geophys. Res.*, 99 :10 899–10 926.
- Su, W. J., Woodward, R. L., and Dziewonski, A. M. (1994). Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle. *J. Geophys. Res.*, 99 :6945–6980.
- Tackley, P. (1993). Effect of strongly temperature-dependent, 3-dimensional models of mantle convection. *Geophys. Res. Lett.*, 20 :2187–2190.
- Tackley, P. (1996). Effect of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles. *J. Geophys. Res.*, 101 :3311–3332.
- Tackley, P. (1998a). Self-consistent generation of tectonic plates in three-dimensional mantle convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 157 :9–22.
- Tackley, P. (1998b). Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection calculation simulations, 1, Pseudoplastic yielding. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 1 :2000GC000036.
- Tackley, P. (2007). Mantle geochemical geodynamics. *Treatise on Geophysics*, pages 4232–4300.
- Tackley, P. (2008). Layer cake or plum pudding? *Nature*, 1 :157–158.

- Tackley, P. (2012). Dynamics and evolution of the deep mantle resulting from thermal, chemical, phase and melting effects. *Earth-Science Reviews*, 110 :1–25.
- Tanaka, K., Skinner, J., Hare, T., Joyal, T., and Wenker, A. (2003). Resurfacing history of the northern plains of Mars based on geologic mapping of Mars Global Surveyor data. *J. Geophys. Res.*, 108 :E4,8043, doi :10.1029/2002JE001908.
- Tapley, B., Ries, J., and Bettadpur, S. (2005). GGM02 - An improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy*, 79 :doi :10.1007/s00190-005-0480-z.
- Thoraval, C. and Richards, M. (1997). The geoid constraint in global geodynamics : viscosity structure, mantle heterogeneity models and boundary conditions. *Geophys. J. Int.*, 131 :1–8.
- Thurber, C. and Toksöz, M. (1978). Martian lithospheric thickness from elastic flexure theory. *Geophys. Res. Lett.*, 5 :977–980.
- Tiwari, V. and Mishra, D. (1999). Estimation of effective elastic thickness from gravity and topography data under the Deccan Volcanic Province, India. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 171 :289–299.
- Turcotte, D. (1993). An episodic hypothesis for venusian tectonics. *J. Geophys. Res.*, 98 :17 061–17 068.
- Turcotte, D. (1995). How does Venus lose heat? *J. Geophys. Res.*, 100 :16 931–16 940.
- Turcotte, D. and Oxburgh, E. (1967). Finite amplitude convective cells and continental drift. *J. Fluid Mech.*, 28 :29–42.
- Turcotte, D., Shcherbakov, R., Malamud, B., and Kucinskis, A. (2002). Is the martian crust also the martian elastic lithosphere? *J. Geophys. Res.*, 107 :doi :10.1029/2001JE001594.
- Turcotte, D., Willemann, R., Haxby, W., and Norberry, J. (1981). Role of membrane stresses in the support of planetary topography. *J. Geophys. Res.*, 86 :3 951–3 959.
- Turcotte, D. L. and Schubert, G. (1982). *Geodynamics*. John Wiley and Sons, New York.
- Turcotte, D. L., Schubert, G., and Olson, P. (2001). *Mantle convection in the Earth and Planets*. Cambridge University Press.

- Van der Hilst, R. D., Widiyantoro, S., and Engdahl, E. R. (1997). Evidence for deep mantle circulation from global tomography. *Nature*, 386 :578–584.
- Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N., and K., K. V. (1988). *Quantum theory of angular momentum*. World Scientific.
- Verhoeven, O., Rivoldini, A., Vacher, P., Mocquet, A., Choblet, G., Menvielle, M., Dehant, V., Van Hoolst, T., Sleewaegen, J., Barriot, J.-P., and Lognonné, P. (2005). Interior structure of terrestrial planets : modelling Mars' mantle and its electromagnetic, geodetic, and seismic properties. *J. Geophys. Res.*, 110 :E04009, doi :10.1029/2004JE002271.
- Vezolainen, A. V., Solomatov, V. S., Basilevsky, A. T., and Head, J. W. (2004). Uplift of Beta Regio : Three-dimensional models. *J. Geophys. Res.*, 109 :doi :10.1029/2004JE002259.
- Šrámek, O. and Zhong, S. (2010). Long-wavelength stagnant lid convection with hemispheric variation in the lithospheric thickness : link between Martian crustal dichotomy and Tharsis. *J. Geophys. Res.*, 115 :doi :10.1029/2010JE003597.
- Šrámek, O. and Zhong, S. (2012). Martian crustal dichotomy and Tharsis formation by partial melting coupled to early plume migration. *J. Geophys. Res.*, 117 :doi :10.1029/2010JE003867.
- Watts, A. B. (1992). The effective elastic thickness of the lithosphere and the evolution of foreland basins. *Basin Research*, 4 :169–178.
- Watts, A. B. (2001). *Isostasy and flexure of the lithosphere*. Cambridge Press.
- Watts, A. B. (2007). An Overview. *Treatise on Geophysics*, pages 3197–3244.
- Watts, A. B., Bodine, J. H., and Ribe, N. M. (1980). Observations of the flexure and geological evolution of the Pacific Ocean basins. *Nature*, 283 :532–537.
- Watts, A. B. and Burov, E. (2003). Lithospheric strength and its relationship to the elastic and seismogenic thickness. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 213 :113–131.
- Watts, A. B. and Zhong, S. (2000). Observations of flexure and the rheology of oceanic lithosphere. *Geophys. J. Int.*, 142 :855–875.
- Weinstein, S. (1995). The effects of a deep mantle endothermic phase change on the structure of thermal convection in silicate planets. *J. Geophys. Res.*, 100 :11 719–11 728.

- Weinstein, S. (1996). The potential role of non-Newtonian rheology in the resurfacing of Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 23 :511–514.
- Weizman, A., Stevenson, D., Prialnik, D., and Podolak, M. (2001). Modeling the volcanism on Mars. *Icarus*, 150 :195–205.
- Wenzel, M., Manga, M., and Jellinek, A. (2004). Tharsis as a consequence of Mars' dichotomy and layered mantle. *Geophys. Res. Lett.*, 31 :L04702.
- Wieczorek, M. (2007). Gravity and topography of terrestrial planets. *Treatise on Geophysics*, page 579.
- Wieczorek, M. and Zuber, T. (2004). Thickness of the Martian crust : Improved constraints from geoid-to-topography ratios. *J. Geophys. Res.*, 109 :E01009, doi :10.1029/2003JE002153.
- Willemann, R. and Turcotte, D. (1982). The role of lithospheric stress in the support of Tharsis Rise. *J. Geophys. Res.*, 87 :9793–9801.
- Wise, D., Golombek, M., and McGill, G. (1979). Tectonic evolution of Mars. *J. Geophys. Res.*, 84 :7934–7939.
- Wolstencroft, M., Davies, J., and Davies, D. (2009). Nusselt-Rayleigh number scaling for spherical shell Earth mantle simulation up to Rayleigh number of 10^9 . *Phys. of the Earth and Planet. Int.*, 176 :132–141.
- Wuming, B., Vigny, C., Ricard, Y., and Froidevaux, C. (1992). On the origin of deviatoric stresses in the lithosphere. *J. Geophys. Res.*, 97 :11 729–11 737.
- Yanagisawa, T. and Yamagishi, Y. (2005). Rayleigh-Bénard convection in spherical shell with infinite Prandtl number at high Rayleigh number. *J. of Earth Simulator*, 4 :11–17.
- Yoder, C. (1995). Venus' free obliquity. *Icarus*, 117 :250–286.
- Yoder, C., Konopliv, A., Yuan, D., Standish, E., and Folkner, W. (2003). Fluid core size of Mars from detection of the solar tide. *Science*, 300 :299–303.
- Yoshida, M. and Kageyama, A. (2006). Low-degree mantle convection with strongly temperature- and depth-dependent viscosity in a three-dimensional spherical shell. *J. Geophys. Res.*, 111 :doi :10.1029/2005JB003905.
- Yuan, D., Sjogren, W., Konopliv, A., and Kucinskis, A. (2001). Gravity field of Mars : A 75th Degree and Order model. *J. Geophys. Res.*, 106 :23 377–23 401.

- Zhang, S. and Yuen, D. (1995). The influence of lower mantle viscosity stratification on 3D spherical-shell mantle convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 132 :157–166.
- Zhang, Y. and Christensen, U. (1993). Some effects of lateral viscosity variations on geoid and surface velocities induced by density anomalies in the mantle. *Geophys. J. Int.*, 114 :547–551.
- Zhong, S. (2002). Effects of lithosphere on the long-wavelength gravity anomalies and their implications for the formation of Tharsis rise on Mars. *J. Geophys. Res.*, 107 :doi :10.1029/2001JE001589.
- Zhong, S. (2005). Dynamics of thermal plumes in three-dimensional isoviscous thermal convection. *Geophys. J. Int.*, 162 :289–300.
- Zhong, S. (2008). Migration of Tharsis volcanism on Mars caused by differential rotation of the lithosphere. *Nature*, 2 :19–23.
- Zhong, S. and Davies, G. F. (1999). Effects of plate and slab viscosities on the geoid. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 99 :15 683–15 695.
- Zhong, S. and Gurnis, M. (1992). Viscous flow model of a subduction zone with a faulted lithosphere : Long and short wavelength topography, gravity, and geoid. *Geophys. Res. Lett.*, 19 :1 891–1 992.
- Zhong, S., McNamara, A., Tan, E., Moresi, L., and Gurnis, M. (2008). A benchmark study on mantle in a 3-D spherical shell using CitcomS. *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 9 :doi :10.1029/2008GC002048,Q10017.
- Zhong, S. and Roberts, J. H. (2003). On the support of the Tharsis rise on Mars. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 214 :1–9.
- Zhong, S., Yuen, D., and Moresi, L. (2007). Numerical methods for mantle convection. *Treatise on Geophysics*, pages 4025–4050.
- Zhong, S. and Zuber, M. (2000). Long-wavelength topographic relaxation for self-gravitating planets and implications for the time-dependent compensation of surface topography. *J. Geophys. Res.*, 105 :4153–4164.
- Zhong, S. and Zuber, M. (2001). Degree-1 mantle convection and the crustal dichotomy on Mars. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 189 :75–84.
- Zhong, S., Zuber, M., Moresi, L., and Gurnis, M. (2000). Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 105 :11 063–11 082.

Zuber, M. (2001). The crust and mantle of Mars. *Nature*, 412 :220–227.

Zuber, M., Smith, D., Lemoine, F., and Neumann, G. (1994). The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission. *Science*, 266 :1839–1843.

Zuber, M., Solomon, S., Phillips, R., Smith, D.E., a. T. G., Aharonson, O., Balmino, G., Banerdt, W., Head, J., Johnson, C., Lemoine, F., McGovern, P., Neumann, G., Rowlands, D., and Zhong, S. (2000). Internal structure and early thermal evolution of Mars from Mars Global Surveyor topography and gravity. *Science*, 287 :1788–1793.

Annexe A : Écriture discrète des équations de conservation dans une cellule d'*Oedipe*

Le découpage de la sphère par deux sets de grands cercles espacés d'un incrément angulaire $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$ puis par une succession de sphère concentriques conduit à la formation de cellules non-uniforme \mathcal{C}_{ijk} (où i, j, k correspondent aux indices dans les directions r, η, ξ) (Figure 42).

Les angles $\xi_j = -\pi/4 + (j + 1/2)\Delta\xi$ et $\eta_k = -\pi/4 + (k + 1/2)\Delta\eta$ et le rayon $r_i = -\pi/4 + (j + 1/2)\Delta\xi r_i$ représentent les coordonnées du centre de la cellule \mathcal{C}_{ijk} où sont évaluées les valeurs discrètes de la pression, de la viscosité et de la température. L'angle $\xi_j^- = \xi_j + \Delta\xi/2$ (respectivement $\eta_j^- = \eta_j + \Delta\eta/2$ et r_i^-) représente la localisation de la paroi verticale de la cellule (respectivement la paroi horizontale) ou la composante V^ξ est défini (respectivement V^η et V^r).

La variable X_j (X_j^-, Y_k et Y_k^-) est la tangente de l'angle ξ_j (ξ_j^-, η_k et η_k^-). De la même manière, C_j (C_j^-, D_k et D_k^-) correspond à l'angle ξ_j (ξ_j^-, η_k et η_k^-). Pour des simplifications de notation, nous utilisons également la variable δ telle que :

$$\begin{cases} \delta_{j,k}^I = 1 + X_j^2 + Y_k^2 \\ \delta_{j,k}^{II} = 1 + X_j^{-2} + Y_k^{-2} \\ \delta_{j,k}^{III} = 1 + X_j^{-2} + Y_k^2 \\ \delta_{j,k}^{IV} = 1 + X_j^2 + Y_k^{-2} \end{cases} \quad (\text{A1})$$

Puisque les viscosités sont localisées au centre de la cellule, *Oedipe* utilise la moyenne géométrique telle que :

$$\begin{cases} \mu_{i,j,k}^{II} = (\mu_{i,j,k} \cdot \mu_{i,j-1,k} \cdot \mu_{i,j,k-1} \cdot \mu_{i,j-1,k-1})^{1/4} \\ \mu_{i,j,k}^{III} = (\mu_{i,j,k} \cdot \mu_{i,j-1,k} \cdot \mu_{i-1,j,k} \cdot \mu_{i-1,j-1,k})^{1/4} \\ \mu_{i,j,k}^{IV} = (\mu_{i,j,k} \cdot \mu_{i,j,k-1} \cdot \mu_{i-1,j,k} \cdot \mu_{i-1,j,k-1})^{1/4} \end{cases} \quad (\text{A2})$$

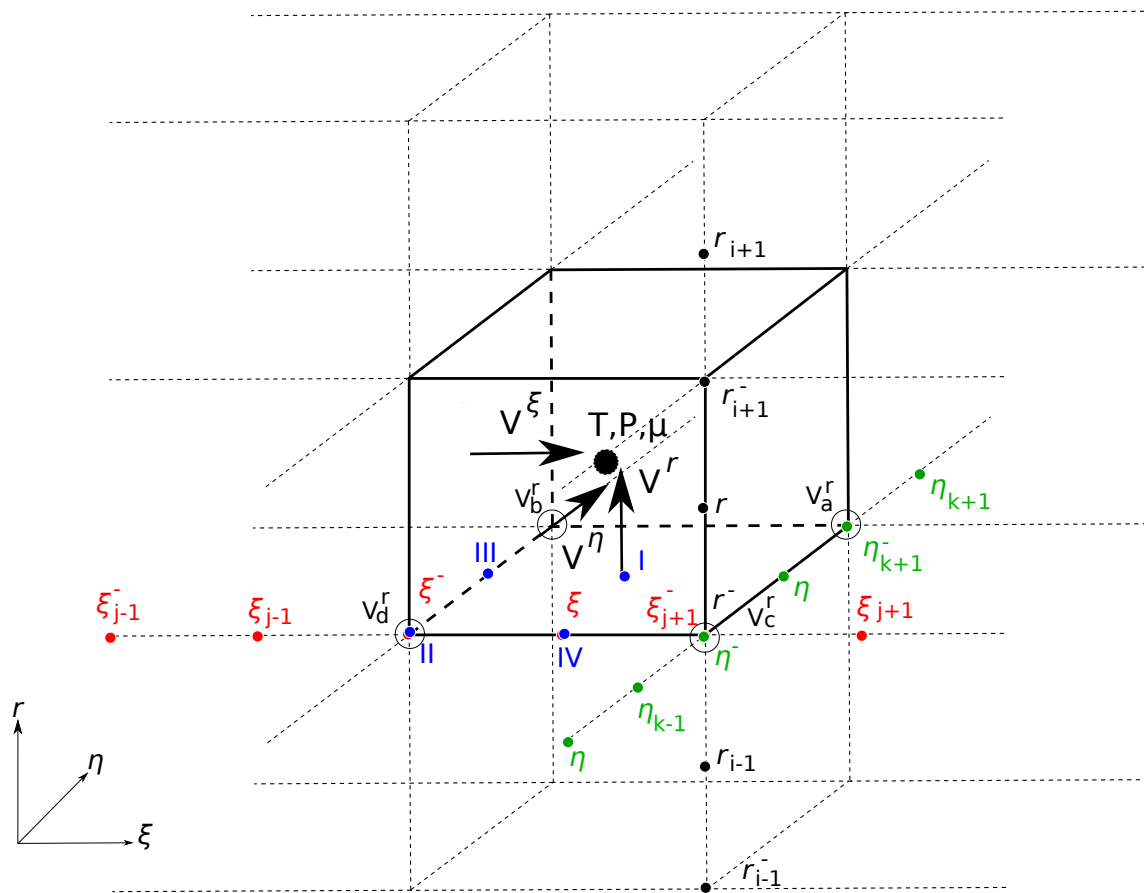


FIG. 42 – Schéma d'une cellule \mathcal{C}_{ijk} d'*Oedipe*. Les vitesses sont évaluées au centre des faces du cube alors que la température et la pression sont évaluées au centre de la cellule.

Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2} (r^2 V^r)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{V^\xi}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{V^\eta}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} = 0, \quad (\text{A3})$$

devient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= \frac{1}{r^2 \Delta r} (r_{i+1}^{-2} V_{i+1}^r - r^{-2} V^r) \\ &+ \frac{\delta^{I3/2}}{rDC^2 \Delta \xi} \left(\frac{V_{j+1}^\xi}{\sqrt{\delta_{j+1}^{III}}} - \frac{V^\xi}{\sqrt{\delta^{III}}} \right) \\ &+ \frac{\delta^{I3/2}}{rCD^2 \Delta \eta} \left(\frac{V_{k+1}^\eta}{\sqrt{\delta_{k+1}^{IV}}} - \frac{V^\eta}{\sqrt{\delta^{IV}}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Équation de conservation du mouvement

Si on considère l'équation de conservation du mouvement dans la direction r sans aucune conditions limites :

$$p_{,r} = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{rr})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\tau^{r\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\tau^{r\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} - RaT \quad (\text{A5})$$

Ainsi que les composants du tenseur des contraintes correspondantes :

$$\tau^{rr} = 2\mu V_{,r}^r, \quad (\text{A6})$$

$$\tau^{r\xi} = \mu \left[r \left(\frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{rD} V_{,\eta}^r \right], \quad (\text{A7})$$

$$\tau^{r\eta} = \mu \left[r \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{rC} V_{,\xi}^r \right]. \quad (\text{A8})$$

En remplaçant les termes du tenseur des contraintes dans l'équation de la conservation du mouvement, j'obtiens :

$$\begin{aligned} p_{,r} &= \frac{1}{r^3} (r^3 2\mu V_{,r}^r)_{,r} \\ &+ \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \left[r \left(\frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{rD} V_{,\eta}^r \right] \right)_{,\xi} \\ &+ \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \left[r \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{rC} V_{,\xi}^r \right] \right)_{,\eta} \end{aligned}$$

Première partie de l'équation :

$$\frac{1}{r^3} (r^3 2\mu V_{,r}^r)_{,r} = \frac{1}{r^{-3}\Delta r} \left[r^{I^3} 2\mu^I \left(\frac{V_{i+1}^r - V^r}{\Delta r} \right) - r_{i-1}^{I^3} 2\mu_{i-1}^I \left(\frac{V^r - V_{i-1}^r}{\Delta r} \right) \right] \quad (\text{A9})$$

Deuxième partie de l'Équation :

$$\frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \left[r \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{rD} V_{,\eta}^r \right] \right)_{,\xi} \quad (\text{A10})$$

Écriture discrète du premier terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left[\frac{\mu r}{\delta^{1/2}} \left(\frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} \right]_{,\xi} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- DC^2 \Delta \xi} \left[\frac{\mu_{j+1}^{III} r^-}{\sqrt{\delta_{j+1}^{III}}} \left(\frac{V_{j+1}^\xi}{r} - \frac{V_{j+1,i-1}^\xi}{r_{i-1}} \right) - \frac{\mu^{III} r^-}{\sqrt{\delta^{III}}} \left(\frac{V^\xi}{r} - \frac{V_{i-1}^\xi}{r_{i-1}} \right) \right] \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

Écriture discrète du deuxième terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \frac{D}{r} V_{,\xi}^r \right)_{,\xi} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- DC^2 \Delta \xi} \left[\frac{\mu_{j+1}^{III} D}{\sqrt{\delta_{j+1}^{III}} r^-} \left(\frac{V_{j+1}^r - V^r}{\Delta \xi} \right) - \frac{\mu^{III} D}{\sqrt{\delta^{III}} r^-} \left(\frac{V^r - V_{j-1}^r}{\Delta \xi} \right) \right] \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

Écriture discrète du troisième terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rDC^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \frac{XY}{rD} V_{,\eta}^r \right)_{,\xi} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- DC^2 \Delta \xi} \left[\frac{\mu_{j+1}^{III} X_{j+1}^- Y}{\sqrt{\delta_{j+1}^{III}} r^- D} \left(\frac{V_a^r - V_c^r}{\Delta \eta} \right) - \frac{\mu^{III} X^- Y}{\sqrt{\delta^{III}} r^- D} \left(\frac{V_b^r - V_d^r}{\Delta \eta} \right) \right] \quad (\text{A13}) \end{aligned}$$

Troisième partie de l'équation :

$$\frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \left[r \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{rC} V_{,\xi}^r \right] \right)_{,\eta} \quad (\text{A14})$$

Écriture discrète du premier terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left[\frac{\mu r}{\delta^{1/2}} \left(\frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} \right]_{,\eta} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- CD^2 \Delta \eta} \left[\frac{\mu_{k+1}^{IV} r^-}{\sqrt{\delta_{k+1}^{IV}}} \left(\frac{V_{k+1}^\eta}{r} - \frac{V_{i-1,k+1}^\eta}{r_{i-1}} \right) - \frac{\mu^{IV} r^-}{\sqrt{\delta^{IV}}} \left(\frac{V^\eta}{r} - \frac{V_{i-1}^\eta}{r_{i-1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Écriture discrète du deuxième terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \frac{C}{r} V^r_{,\eta} \right)_{,\eta} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- CD^2 \Delta \eta} \left[\frac{\mu_{k+1}^{IV} C}{\sqrt{\delta_{k+1}^{IV}} r^-} \left(\frac{V_{k+1}^r - V^r}{\Delta \eta} \right) - \frac{\mu^{IV} C}{\sqrt{\delta^{IV}} r^-} \left(\frac{V^r - V_{k-1}^r}{\Delta \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

Écriture discrète du troisième terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{3/2}}{rCD^2} \left(\frac{\mu}{\delta^{1/2}} \frac{XY}{rC} V^r_{,\xi} \right)_{,\eta} \\ \Rightarrow & \frac{(\delta^I)^{3/2}}{r^- CD^2 \Delta \eta} \left[\frac{\mu_{k+1}^{IV} XY_{k+1}^-}{\sqrt{\delta_{k+1}^{IV}} r^- C} \left(\frac{V_a^r - V_b^r}{\Delta \xi} \right) - \frac{\mu^{IV} XY^-}{\sqrt{\delta^{IV}} r^- C} \left(\frac{V_c^r - V_d^r}{\Delta \xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

avec les moyennes géométriques pour V_a^r , V_b^r , V_c^r et V_d^r :

$$V_a^r = \frac{1}{4} (V^r + V_{k+1}^r + V_{j+1,k+1}^r + V_{j+1}^r) \quad (\text{A18})$$

$$V_b^r = \frac{1}{4} (V^r + V_{j-1}^r + V_{j-1,k+1}^r + V_{k+1}^r) \quad (\text{A19})$$

$$V_c^r = \frac{1}{4} (V^r + V_{j+1}^r + V_{j+1,k-1}^r + V_{k-1}^r) \quad (\text{A20})$$

$$V_d^r = \frac{1}{4} (V^r + V_{k-1}^r + V_{k-1,j-1}^r + V_{j-1}^r) \quad (\text{A21})$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} & T_{,t} + T_{,r} V^r + \frac{\delta}{rDC^2} T_{,\xi} V^\xi + \frac{\delta}{rCD^2} T_{,\eta} V^\eta \\ & = \frac{1}{r^2} (r^2 T_{,r})_{,r} + \frac{\delta}{r^2} \left[\frac{T_{,\xi\xi}}{C^2} + \frac{T_{,\eta\eta}}{D^2} + \frac{2XY T_{,\xi\eta}}{C^2 D^2} \right] + h \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Comme pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on peut décomposer l'équation précédente. Si l'on se concentre dans un premier temps sur les termes de gauche de l'équation :

$$T_{,t} = \frac{T^{t+1} - T^t}{\Delta t}. \quad (\text{A23})$$

Les trois termes suivants, faisant intervenir un terme de température et un terme de vitesse, représentent en fait des flux advectifs. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_{,r}V^r &= \frac{1}{\Delta r} \left[\frac{1}{1 + e^{V^r/2\Delta r}} V_{i+1}^r (T_{i+1} - T) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{V^r/2\Delta r}} \right) V^r (T - T_{i-1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{rDC^2} T_{,\xi} V^\xi &= \frac{\delta}{rC^2 D \Delta \xi} \left[\frac{1}{1 + e^{V^\xi / \left[2 \left(\frac{r_i C_j^2 D_k \Delta \xi}{\delta_{j,k}} \right) \right]}} V_{j+1}^\xi (T_{j+1} - T) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{V^\xi / \left[2 \left(\frac{r_i C_j^2 D_k \Delta \xi}{\delta_{j,k}} \right) \right]}} \right) V^\xi (T - T_{j-1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{rCD^2} T_{,\eta} V^\eta &= \frac{\delta}{rCD^2 \Delta \eta} \left[\frac{1}{1 + e^{V^\eta / \left[2 \left(\frac{r_i C_j D_k^2 \Delta \eta}{\delta_{j,k}} \right) \right]}} V_{k+1}^\eta (T_{k+1} - T) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{V^\eta / \left[2 \left(\frac{r_i C_j D_k^2 \Delta \eta}{\delta_{j,k}} \right) \right]}} \right) V^\eta (T - T_{k-1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

Enfin les termes de droite de l'équation :

$$\frac{1}{r^2} (r^2 T_{,r})_{,r} = \frac{1}{r^2 \Delta r^2} \left[r^{-i+12} (T_{i+1} - T) r^{-2} (T - T_{i-1}) \right] \quad (\text{A27})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{r^2} \left[\frac{T_{,\xi\xi}}{C^2} + \frac{T_{,\eta\eta}}{D^2} + \frac{2XY T_{,\xi\eta}}{C^2 D^2} \right] &+ h \\ &= \frac{\delta^I}{r^2} \left[\frac{T_{j+1} - 2T + T_{j-1}}{C^2 \Delta \xi^2} + \frac{T_{k+1} - 2T + T_{k-1}}{D^2 \Delta \eta^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2XY (T_{j+1,k+1} - T_{j-1,k+1} - T_{j+1,k-1} + T_{j-1,k-1})}{C^2 D^2 \Delta \xi \Delta \eta} \right] \\ &+ \tilde{H} \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

Annexe B : Spherical harmonics, vectors and tensors

Spherical harmonics

The complex spherical harmonics $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ used in this paper are constructed as a product of the orthogonal basis $\{e^{im\varphi}\}$ and the fully normalized associated Legendre functions $P_{\ell m}(\cos \theta)$ (Jones, 1985; Varshalovich et al., 1988) :

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = N_{\ell m} P_{\ell m}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \text{for } m \geq 0 \quad (\text{B1})$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell |m|}^*(\theta, \varphi), \quad \text{for } m < 0 \quad (\text{B2})$$

where the asterisk denotes complex conjugation and $N_{\ell m}$ is a normalization factor,

$$N_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}}. \quad (\text{B3})$$

The spherical harmonics $Y_{\ell m}$ form a complete set of functions and they are orthonormal over the unit sphere,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{\ell_2 m_2}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (\text{B4})$$

where $\delta_{\ell_1 \ell_2}$ is the Kronecker delta, $\delta_{\ell_1 \ell_2} = 0$ if $\ell_1 \neq \ell_2$ and $\delta_{\ell \ell} = 1$. Any sufficiently smooth function f defined on the sphere can thus be expanded in a series of spherical harmonics,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (\text{B5})$$

where

$$f_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{B6})$$

Spherical vectors

Let \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y and \mathbf{e}_z be Cartesian unit vectors. The complex cyclic basis $\{\mathbf{e}_\nu\}$, $\nu = -1, 0, 1$, is defined as follows :

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \quad (\text{B7})$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \quad (\text{B8})$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \quad (\text{B9})$$

The spherical harmonic vectors $\mathbf{Y}_{\ell m}^k$ are constructed as a generalized product of spherical harmonics $Y_{\ell m}$ and the cyclic basis $\{\mathbf{e}_\nu\}$ (Varshalovich et al., 1988) :

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^k(\theta, \varphi) = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-k}^k C_{k\nu 1\mu}^{\ell m} Y_{k\nu}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\mu, \quad (\text{B10})$$

where $C_{k\nu 1\mu}^{\ell m}$ are the Clebsch-Gordan coefficients. The spherical vectors $\{\mathbf{Y}_{\ell m}^k\}$ are orthogonal over the unit sphere,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{Y}_{\ell_1 m_1}^{k_1}(\theta, \varphi) \cdot [\mathbf{Y}_{\ell_2 m_2}^{k_2}(\theta, \varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{k_1 k_2}, \quad (\text{B11})$$

but generally not at a point. A locally orthogonal basis can be constructed eg. by vectors

$$\mathbf{P}_{\ell m} = Y_{\ell m} \mathbf{e}_r, \quad (\text{B12})$$

$$\mathbf{B}_{\ell m} = \frac{r}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \nabla Y_{\ell m}, \quad (\text{B13})$$

$$\mathbf{C}_{\ell m} = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\ell m}, \quad (\text{B14})$$

which are related to basis $\{\mathbf{Y}_{\ell m}^k\}$ through simple matrix multiplication :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\ell m} \\ \mathbf{B}_{\ell m} \\ \mathbf{C}_{\ell m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} & 0 & -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \\ \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} & 0 & \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^\ell \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B15})$$

The vector basis $\{\mathbf{Y}_{\ell m}^k\}$ can be classified into toroidal (vectors $\mathbf{Y}_{\ell m}^\ell$) and spheroidal ($\mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell\pm 1}$) parts. Any spheroidal vector \mathbf{F} can be further decomposed into radial (F_r) and tangential (F_t) components (cf. eq. B11) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (F_r)_{\ell m} \left(\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \right) + \\ & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (F_t)_{\ell m} \left(\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \right), \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

where

$$(F_r)_{\ell m} = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} F_{\ell m}^{\ell-1} - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} F_{\ell m}^{\ell+1}, \quad (\text{B17})$$

$$(F_t)_{\ell m} = \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} F_{\ell m}^{\ell-1} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} F_{\ell m}^{\ell+1}. \quad (\text{B18})$$

Spherical tensors

We define the tensor basis $\{\mathbf{e}_{n\lambda}\}$ according to the prescription (Jones, 1985) :

$$\mathbf{e}_{n\lambda} = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-1}^1 C_{1\mu 1\nu}^{n\lambda} \mathbf{e}_{\mu} \mathbf{e}_{\nu}, \quad (\text{B19})$$

where $n = 0, 1, 2$ and λ is an integer ranging from $-n$ to n . The spherical tensors $\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}$ are then constructed as follows

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}(\theta, \varphi) = \sum_{\alpha=-k}^k \sum_{\lambda=-n}^n C_{k\alpha n\lambda}^{\ell m} Y_{k\alpha}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_{n\lambda}. \quad (\text{B20})$$

The basis $\{\mathbf{Y}_{\ell m}^{kn}\}$ is orthonormal over the unit sphere. Using the above defined tensor base, we can decompose arbitrary tensor into isotropic, antisymmetric and deviatoric parts, represented by spherical tensor series with indices $n = 0, 1$ and 2 , respectively (Jones, 1985). Since the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ is symmetric, the coefficients with $n = 1$ vanish. We can then write

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r, \theta, \varphi) &= -p(r, \theta, \varphi) \mathbf{I} + \mathbf{D}(r, \theta, \varphi) \\ &= -\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell 0}(\theta, \varphi) \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{k=|\ell-2|}^{\ell+2} D_{\ell m}^{k2}(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{k2}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

Formulas for products and derivatives of spherical harmonics, vectors and tensors

In this paragraph we give the formulas needed to evaluate the products and derivatives in eqs (3.7)-(3.13) expressed in terms of the spherical harmonic series (eqs 3.14 - 3.16).

Radial component of a vector (application to product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r$) :

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^k = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} (\sqrt{\ell} \delta_{k,\ell-1} - \sqrt{\ell+1} \delta_{k,\ell+1}) Y_{\ell m}. \quad (\text{B22})$$

Product of a radial unit vector with a symmetric tensor (application to $(-p\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{e}_r$) :

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell 0} = \frac{1}{\sqrt{3(2\ell+1)}} (\sqrt{\ell+1} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} - \sqrt{\ell} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1}), \quad (\text{B23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{k2} = & \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \delta_{k,\ell-2} + \sqrt{\frac{\ell-1}{2(2\ell+1)}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell} \delta_{k,\ell-1} - \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \delta_{k,\ell+2} + \\ & \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{2.3.(2\ell+1)(2\ell+3)}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \delta_{k,\ell} - \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{2.3.(2\ell+1)(2\ell-1)}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \delta_{k,\ell} - \\ & \sqrt{\frac{\ell+2}{2(2\ell+1)}} \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell} \delta_{k,\ell+1} \end{aligned} \quad (\text{B24})$$

Product of a radial unit vector with a scalar field :

$$\mathbf{e}_r Y_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} (\sqrt{\ell} \delta_{k,\ell-1} - \sqrt{\ell+1} \delta_{k,\ell+1}) \mathbf{Y}_{\ell m}^k. \quad (\text{B25})$$

Divergence of a vector (application to $\nabla \cdot \mathbf{u}$) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^k = & \frac{1}{\sqrt{2\ell+1}} \times \\ & \left[\sqrt{\ell} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) \delta_{k,\ell-1} - \sqrt{\ell+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) \delta_{k,\ell+1} \right] f(r) Y_{\ell m}. \end{aligned} \quad (\text{B26})$$

Divergence of a symmetric tensor (application to $\nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mathbf{D}]$) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell 0} = & -\sqrt{\frac{\ell}{3(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \\ & + \sqrt{\frac{\ell+1}{3(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1}, \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{k2} = & \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-2}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \delta_{k,\ell-2} - \\
& \sqrt{\frac{\ell-1}{2(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell} \delta_{k,\ell-1} - \\
& \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1} \delta_{k,\ell} + \\
& \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+1)(2\ell+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \delta_{k,\ell} - \\
& \sqrt{\frac{\ell+2}{2(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell} \delta_{k,\ell+1} - \\
& \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+3}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1} \delta_{k,\ell+2}. \tag{B28}
\end{aligned}$$

Symmetric traceless part of the gradient of a vector (application to $\frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t]$) :

$$\begin{aligned}
& [\nabla f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^k]^{n=2} = \\
& \sqrt{\frac{\ell-1}{2\ell-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-2,2} \delta_{k,\ell-1} - \\
& \sqrt{\frac{(\ell+1)(2\ell+3)}{6(2\ell-1)(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,2} \delta_{k,\ell-1} + \\
& \sqrt{\frac{\ell-1}{2(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell-1,2} \delta_{k,\ell} - \\
& \sqrt{\frac{\ell+2}{2(2\ell+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+1,2} \delta_{k,\ell} + \\
& \sqrt{\frac{\ell(2\ell-1)}{6(2\ell+1)(2\ell+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\ell+2}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell,2} \delta_{k,\ell+1} - \\
& \sqrt{\frac{\ell+2}{2\ell+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\ell+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{\ell m}^{\ell+2,2} \delta_{k,\ell+1}. \tag{B29}
\end{aligned}$$

ij	A_{ij}	B_{ij}
11	$\sqrt{\ell} \Pi_{\ell}^{-1}$	$-(\ell - 1)A_{11}$
12	$-\sqrt{\ell + 1} \Pi_{\ell}^{-1}$	$(\ell + 2)A_{12}$
23	$\sqrt{\ell} \Pi_{1,\ell}^{-1}$	$(\ell + 1)A_{23}$
24	$\sqrt{\ell - 1} \Pi_{\ell-1}^{-1}$	$-(\ell - 2)A_{24}$
25	$-\sqrt{\ell + 1} \Pi_{\ell+1} \Pi_{\ell-1,\ell,\frac{5}{2}}^{-1}$	$(\ell + 1)A_{25}$
33	$-\sqrt{\ell + 1} \Pi_{1,\ell}^{-1}$	$-\ell A_{33}$
35	$\sqrt{\ell} \Pi_{\ell-1} \Pi_{\ell,\ell+1,\frac{5}{2}}^{-1}$	$-\ell A_{35}$
36	$-\sqrt{\ell + 2} \Pi_{\ell+1}^{-1}$	$(\ell + 3)A_{36}$
41	$-2\mu A_{24}$	ℓA_{41}
44	—	r
51	$-2\mu A_{25}$	$-(\ell - 1)A_{51}$
52	$-2\mu A_{35}$	$(\ell + 2)A_{52}$
55	—	r
62	$-2\mu A_{36}$	$-(\ell + 1)A_{62}$
66	—	r
where $\prod_{j,k,\ell\dots} = \sqrt{(2j + 1)(2k + 1)(2\ell + 1)\dots}$		

TAB. 7 – List of non-zero elements of matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} , eq. (3.17)

ij	T_{ij}	U_{ij}
11	$-\rho_m g l \Pi_\ell^{-2}$	—
12	$\rho_m g \sqrt{\ell(\ell+1)} \Pi_\ell^{-2}$	—
13	$\sqrt{\ell} \Pi_{1,\ell}^{-1}$	Π_1^{-1}
14	$\sqrt{\ell-1} \Pi_{\ell-1}^{-1}$	$\sqrt{\ell(\ell-1)} \Pi_{\ell,\ell-1}^{-1}$
15	$-\sqrt{\ell+1} \Pi_{\ell+1} \Pi_{\ell,\ell-1,\frac{5}{2}}^{-1}$	$-\sqrt{2\ell(\ell+1)} \Pi_{1,\ell-1,\ell+1}^{-1}$
16	—	$\sqrt{(\ell+1)(\ell+2)} \Pi_{\ell,\ell+1}^{-1}$
21	$\rho_m g \sqrt{\ell(\ell+1)} \Pi_\ell^{-2}$	—
22	$-\rho_m g(\ell+1) \Pi_\ell^{-2}$	—
23	$-\sqrt{\ell+1} \Pi_{1,\ell}^{-1}$	—
24	—	$\sqrt{(\ell-1)(\ell+1)} \Pi_{\ell-1,\ell}^{-1}$
25	$\sqrt{\ell} \Pi_{\ell-1} \Pi_{\ell,\ell+1,\frac{5}{2}}^{-1}$	$-\sqrt{3} \Pi_{\ell-1,\ell+1,\frac{1}{2}}^{-1}$
26	$-\sqrt{\ell+2} \Pi_{\ell+1}^{-1}$	$-\sqrt{\ell(\ell+2)} \Pi_{\ell,\ell+1}^{-1}$

TAB. 8 – List of elements of matrices \mathbf{T} and \mathbf{U} , eqs (3.19)-(3.20)

Convection mantellique, topographie et géoïde sur Mars et Vénus : Parmi les observables géophysiques disponibles sur les planètes telluriques autres que la Terre, la topographie et le champ de gravité éclairent pertinemment l'intérieur de ces objets et fournissent des contraintes importantes sur la structure interne et la dynamique du manteau. Les panaches mantelliques sont les objets dynamiques invoqués pour le soutien des structures topographiques de plus grande longueur d'onde et les structures de longueur d'onde intermédiaire appellent le soutien d'une lithosphère élastique. Associé à deux rhéologies différentes (visqueuse et élastique), ce travail de thèse présente la conception, la validation et l'application d'un nouveau modèle dit "hybride" qui consiste en deux outils numériques couplés. Le premier (*Oedipe*) résout les équations de conservation de la convection thermique grâce à la méthode des volumes finis pour la convection visqueuse du manteau. Le deuxième outil concerne le calcul de la déformation élastique de la lithosphère par une méthode semi-spectrale. L'application de ce nouveau modèle porte sur l'influence des paramètres tels que le nombre de Rayleigh, le profil de viscosité ou l'ajout de chauffage radioactif sur un corps tel que Vénus. Dans un premier temps, la caractérisation de ces paramètres passe par leur influence sur les structures de la convection (degré dominant, nombre de panaches, température, viscosité, flux de chaleur, vitesse ...) puis surtout sur la topographie dynamique et le géoïde associé (cartes, spectre de puissance et admittance), à un instant de la convection mais également dans leur évolution temporelle.

Mots clés : Modélisation numérique, convection mantellique, lithosphère élastique, Vénus, Mars.

Mantle Convection, topography and geoid on Mars and Vénus : Among the geophysical observables available on terrestrial body other than the Earth, topography and gravity field illuminate the interior as they provide crucial informations about internal parameters and mantle dynamic. Mantle plumes are the dynamical features that are mentioned most often as responsible for the support of the long wavelength topography whereas the intermediate wavelength topographic features are often considered to be supported by lithospheric elastic flexure. Considering two distinct rheologies (viscous and elastic), this work presents the conception, validation and first results of a new hybrid tool to compute topography and geoid above a viscous deforming mantle. It couples two numerical codes. The first one, *Oedipus* solves the equations of thermal convection in the viscous mantle using a finite volume method. The second one is dedicated to the computation of the elastic deformation with a semi-spectral method. We then investigate the influence of parameters such as Rayleigh number, viscosity profile or internal heating on a body such as Venus. We first describe the effect of these parameters on the convective features (dominate degree, number of plumes, temperature, viscosity, heat flux, velocity ...) and then focus on the dynamic topography and the associate geoid (map, power spectrum and admittance), considering both snapshots and time averages.

Key words : Numerical model, mantle convection, elastic lithosphere, Venus, Mars.