

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences Pour l'Ingénieur Géosciences Architecture

Année 2014

Développements méthodologiques à partir de formes
d'ondes multicomposantes en vue de l'imagerie sismique
quantitative de la proche surface :
modélisation physique à échelle réduite, traitements et in-
version de la polarisation.

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Sciences de la Terre et de l'Univers
Spécialité : Géophysique

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Raphaël VALENSI

Le 29 Septembre 2014 , devant le jury ci-dessous

Président	Hervé CHAURIS,	professeur des universités,	École des Mines PARISTECH
Rapporteurs	Hervé CHAURIS, Philippe ROUX,	professeur des universités, directeur de recherche,	École des Mines PARISTECH CNRS
Examineurs	Romain BROSSIER, Yann CAPDEVILLE, Dimitri KOMATITSCH,	maître de conférence, chargé de recherche HDR, directeur de recherche,	Université Grenoble Alpes CNRS CNRS
Invité	François BRETAUDEAU,	Dr. Chercheur,	BRGM

Directeur de thèse : Philippe CÔTE, directeur de recherche, IFSTTAR

Co-encadrement : Donatienne LEPAROUX, chargée de recherche, IFSTTAR

I don't need time, I need a deadline.

- Duke Ellington

Remerciements

NOTE : Dans cette section (et uniquement cette section !) les points de suspensions signifient : « je ne cite pas tout le monde excusez-moi ». Enfin de manière générale, je m'excuse par avance pour celles et ceux que j'ai oubliés !

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants **Donatienne Leparoux** et **Philippe Côte**. Alors que je venais d'un milieu différent de celui de la géophysique, vous m'avez fait confiance en me proposant cette thèse.

Merci de m'avoir introduit aux problématiques et méthodes de la géophysique, d'avoir été à l'écoute, ainsi que d'avoir encadré ce travail tout en me laissant une grande liberté.

Aussi, vous avez fait en sorte que durant mes années de thèse je puisse principalement me consacrer à mes travaux de recherche. Ainsi, j'ai pu pour partir en mission ou en congrès ou demander à mettre en place de coûteuses évolutions du matériel expérimental sans réellement me soucier des éventuelles difficultés financières que cela a pu générer.

Encore **Donatienne**, je te remercie aussi pour ce que tu as entrepris afin que je puisse participer aux enseignements. Ce fut pour moi une expérience réellement enrichissante.

Je dois aussi mentionner deux personnes essentielles dans l'encadrement et l'avancement de cette thèse : **Olivier Durand** et **Romain Brossier**.

Tout d'abord **Olivier**, un grand merci pour tout ! Rien n'était gagné à l'avance, combien d'heures passées dans le labo où l'on se demandait pourquoi ça ne fonctionnait pas ? Merci pour la transmission de tes connaissances et savoir-faire, ton professionnalisme, ta persévérance et ton degré d'exigence, pour les précieuses discussions et idées qui m'ont parfois permis de me sortir de situations parfois délicates. Je peux dire, que si tu n'avais pas été là, la mesure la composante horizontale et même le banc de mesure MUSC ne seraient pas ce qu'ils sont actuellement. En plus des aspects technico-scientifiques mentionnés, un grand merci aussi pour ton amitié et ton support humain sans faille ! A ce propos, je ne veux surtout pas oublier ta famille : ta femme et tes enfants que je remercie pour leur grande gentillesse.

Je remercie aussi **Romain Brossier** pour sa gentillesse et son expertise scientifique. Déjà, merci Romain pour m'avoir fourni tes codes de calcul (avec le support !). Malgré ton emploi du temps généralement très chargé et notre éloignement géographique, même dans les moments les plus critiques, tu as su m'encadrer sur les questions liées à l'inversion des formes d'ondes avec beaucoup d'attention et d'efficacité. Aussi merci pour m'avoir accueilli plusieurs fois à Grenoble. Enfin merci pour ta confiance et ton soutien lorsque j'ai commencé à sortir des sentiers battus.

Je voudrais aussi remercier particulièrement **François Bretaudeau**. François dont j'ai dans une certaine mesure poursuivi les travaux de thèse et qui tout au long de ma thèse (malgré ses diverses migrations) aura fait le maximum pour me faire partager son expérience et me donner de précieux conseils. C'est simple, j'ai l'impression que dès que tu pouvais m'aider, tu m'as aidé ! A toi et ta famille, je vous souhaite bonne route.

Afin, parmi le groupe AI d'autres personnes m'ont aussi apporté une réelle aide technique et morale. Je voudrais remercier en particulier :

Fabien Tresseyde pour ces conseils et pour son assistance pour les questions de modélisation semi-analytique. Ce fut un réel plaisir de discuter avec toi de tout un tas de choses, en particulier des élégantes méthodes modales dans des guides plus ou moins ouverts.

Vincent Baltazart pour les nombreuses discussions notamment sur la polarisation et les divers aspects liés au bruit. Merci aussi de m'avoir conseillé de très bonnes références bibliographiques sur la polarisation. Certaines furent essentielles au développement des idées que j'ai proposées dans cette thèse.

Laurent Laguerre pour les nombreuses discussions plus ou moins scientifiques (notamment sur les méthodes semi-analytiques) et les différents conseils. Ta curiosité scientifique m'a permis de pratiquer de nombreuses fois l'exercice d'expliquer mes travaux à un scientifique extérieur à mes recherches. Ainsi juste pour le mentionner, l'idée d'utiliser les géodésiques de la sphère de Poincaré pour inverser la polarisation m'est venue lorsque l'on discutait en allant à la cantine !

Enfin mon ancien collègue de bureau **Khac-Long Nguyen** avec qui il était toujours intéressant de discuter de divers points mathématiques. Bonne chance à toi Khac-Long dans la recherche.

Le travail expérimental exploitant l'interféromètre laser a été réalisé en collaboration avec la société **BOSSA NOVA TECH** qui est à l'origine du prototype d'interféromètre laser multicomposantes TEMPO 2D. Bien que l'éloignement géographique et les décalages horaires n'ont pas facilité la tâche, je pense que cette collaboration fut fructueuse pour l'ensemble des parties.

Je tiens tout particulièrement à remercier **Brunot Pouet** pour ses explications, pour avoir été à l'écoute de nos retours d'expérience (et diverses galères) et enfin pour avoir tenté de proposer des solutions pour répondre à certaines de nos exigences techniques.

Je tiens aussi à remercier **Alexis Wartelle** pour avoir apporté à l'interféromètre laser certaines modifications qui ont permis d'améliorer la qualité des mesures et la facilité d'acquisition.

En plus de Romain Brossier, je dois remercier un certain nombre de personnes liées de près ou de loin au consortium **SEISCOPE**.

Je remercie **Jean Virieux** pour ses conseils et les discussions constructives que l'on a pu avoir tout au long de ma thèse.

Je remercie vivement **François Lavoué** pour les nombreuses discussions constructives et conseils avisés... ainsi que les « runs de vérification », ses routines, autres routines variées ... Je te souhaite François tout simplement de bien naviguer dans le monde académique !

Je tiens aussi à remercier **Michel Dietrich** pour les discussions, conseils sur les méthodes semi-analytiques ainsi que pour m'avoir fourni son code SKB2.

Je remercie aussi **Ludovic Métivier** pour les discussions, conseils (en particulier pour les discussions sur les dérivées de fonctionnelles).

Je remercie aussi **Stéphane Operto** pour les discussions que l'on a eues ensemble en début de thèse. Je remercie **Vincent Prioux** pour m'avoir initié à l'utilisation de Jade au début de cette thèse.

Certains collègues venant de différents laboratoires/entreprises doivent aussi être remerciés :

Many thanks to **Karel van Dalen** for all the interesting discussions about surface wave polarisation and analytical methods. You were the first person who suggested me to use some properties of the polarization of the Rayleigh waves.

Merci à **Jérôme idier** pour ses conseils d'ordre général et les discussions concernant les probabilités, statistiques, les problèmes inverses et les méthodes bayésienne.

Merci à **Vincent Devlaminck** pour les discussions sur ma proposition de distance entre les états de polarisation et les diverses références bibliographiques. La première discussion que l'on a eu fut essentielle car elle m'a confirmée que ce j'avais proposé allait dans la bonne direction !

Merci à **Xavier Pennec** pour la discussion sur les distances géodésiques et les subtilités associées aux statistiques sur des variétés différentielles. En plus du mérite d'avoir éclairci certains points,

cette discussion m'aura permis d'envisager des extensions qui malheureusement ne figurent pas de le manuscrit, mais que je ne désespère pas de pouvoir développer prochainement !

Merci à **Thomas Bodin** pour les discussions sur certains aspects du traitement de la polarisation (qui n'apparaissent pas dans le manuscrit).

Merci à **Marc Wathelet** pour les discussions sur l'inversion des rapports H/V, en particulier pour les applications orientées risque sismique.

Merci à **Gilles Grandjean** pour m'avoir fait partagé son point de vue lors des quelques discussions que l'on a pu avoir.

Merci à **Olivier Poncelet, Eric Ducasse, Philippe Gatignol et Julien Diaz** pour les discussions sur les solutions exactes et en particulier la méthode de Cagniard-de Hoop.

Many thanks to **Thomas Forbriger, Lisa Groos and Martin Schäfer** for the interesting discussions.

I would also like to thank **Stewart Greenhalgh** for the discussions and for providing some nice references.

Aussi merci à un certain **Bruno** pour avoir fait une relecture supplémentaire de mon chapitre 3.

Je tiens à vivement remercier mon **jury de thèse**. En particulier mes rapporteurs **Hervé Chauris** et **Philippe Roux** pour avoir réalisé ce lourd travail ainsi que les autres membres du jury pas encore remerciés à savoir **Yann Capdeville et Dimitri Komatitsch** pour l'ensemble de leurs remarques constructives et leurs encouragements.

Pour conclure cette partie des remerciements « professionnelle », je tiens à remercier l'ensemble des équipes administratives et de support.

Je remercie **les membres de l'atelier de mécanique** (dont **Fabrice Blaineau**) qui apportèrent plusieurs fois leur expertise en conception mécanique.

Je remercie **les membres de la documentation** pour les emprunts d'ouvrages dans les bibliothèques extérieures.

Je remercie **Nathalie Nedellec** pour sa disponibilité et son efficacité dans la gestion des questions administratives.

Pour la gestion du matériel informatique, comptes divers et variés de l'IFSTTAR, je remercie particulièrement **Odile Coffec et Eric Chevessier**.

J'ai bénéficié des moyens de calcul intensifs du **CINES** et en particulier du calculateur Jade.

Je remercie **les équipes du CINES** qui malgré les difficultés rencontrées sous JADE ont toujours été à l'écoute de mes questions/requêtes et ont toujours tenté d'y répondre au mieux.

Je dois aussi mentionner que j'ai principalement utilisé durant cette thèse des **logiciels ayant des licences libres** (Linux, Octave, Seismic Unix, Gnuplot, gfortran, LibreOffice Draw, Inkscape ...).

A titre plus personnel, je voudrais remercier l'ensemble des membres du groupe AI et les doctorants de l'IFSTTAR pour leur sympathie.

Je pense notamment à **Yannick, Amandine, Géraldine, Raelize, Anaëlle, Clara, Benoit, Pierre, Vincent, Xiaoting, Chiara, Sergio, Odile, Jose, Antoine, Farouk ...**. Je souhaite bon courage à ceux qui sont encore en thèse.

Je voudrais aussi particulièrement remercier **Zheng Li** d'une manière générale pour son amitié.

Aussi le chef de groupe **Xavier**, que j'espère ne pas trop avoir agacé avec mes étourderies de badgeuse (et autres Igor) !

Je remercie mes amis nantais qui m'auront permis de sortir un peu la tête de cette thèse : **Ben, Pim, Gégé, Irma, Mathilde, Julien, Noémie, Philippe, Thibault, Lindsay, Mirdhim, Hugues ...**

Ceux d'ailleurs mais qui sont (encore plus ou moins) en France **Léo, Mathilde, Miguel, Richard, Juliette, Nicolas, Maabur, Olivier ...**

Und auf keinen fall, soll nicht die alte freunde aus Deutschland und Österreich vergessen : **Bernhard, Cathl, Henri, Pad, Matthias, Pierre, Hannah, Vincent, Harold, David, Steffi, Fathi usw ...**

De manière générale je remercie **ma famille**, même si l'éloignement de ces dernières années n'a pas favorisé les retrouvailles.

Enfin et surtout je remercie du fond du cœur **mes parents** qui m'ont supporté de manière infallible durant ces longues années et qui furent les premières personnes à me donner goût à la connaissance et au questionnement.

Résumé

Dans le cadre de l'Inversion de la Forme d'Onde sismique pour l'imagerie du proche sous-sol, l'acquisition de données multicomposantes ouvre de nouvelles perspectives. Ce travail de thèse propose d'explorer les potentiels de l'inversion des deux composantes du champ dans une configuration P-SV pour l'auscultation des milieux superficiels où les ondes de surface dominent. L'approche met en jeu des développements formels, des tests numériques et des développements expérimentaux en laboratoire. Dans un premier temps, une nouvelle forme de fonction objectif pour l'inversion de la polarisation est définie à partir d'une métrique intrinsèque dans l'espace des états de polarisation. Dans un second temps, en adaptant un code d'inversion fréquentiel (FWT2D-PSV), les bénéfices et limites associées sont investigués numériquement en ciblant les différentes sources d'erreurs possibles sur les paramètres de densité, l'atténuation et les effets couplage sources/récepteurs. L'application à un modèle présentant une interface de profondeur variable permet ensuite de mettre en œuvre les nouveaux développements en contexte d'imagerie de la subsurface. Puis, en vue d'une validation expérimentale, la troisième phase de l'approche concerne l'extension d'un banc de mesures (MUSC) pour la modélisation physique à échelle réduite vers des dispositifs multicomposantes. Les performances d'un interféromètre-laser innovant intégré au banc de mesure sont déterminées quantitativement en incluant les observables de polarisation. Enfin, deux applications à des problématiques de proche surface sont présentées : la détection de cavités souterraines et l'imagerie d'un milieu à interface latéralement variable.

Abstract

Within the framework of Seismic Full Waveform Inversion (FWI) applied to near surface imaging, multicomponent data open new prospects. In this thesis, the potential of bi-component measurements in a 2D/P-SV configuration is investigated for shallow media where surface waves dominate signal. This approach combines formal developments, numerical tests and laboratory experiments. First, using an intrinsic metric in the polarization states space, a new kind of cost-functions for the polarization inversion is introduced. Then, with an adapted version of the FWI code FWT2D-PSV, several numerical experiments are conducted in order to investigate the limits of this approach with different sources of bias as erroneous a priori concerning the density or the attenuation parameters and source/receivers coupling effects. The new methodological developments are then evaluated in case of a near surface configuration with variable depth shallow interfaces. With a view of experimental validation, the third step concerns the upgrade of a reduced scale physical modelling bench (MUSC) in order to model multicomponent seismic acquisitions. Performances of the laser interferometer integrated in the measurement bench are quantitatively determined, especially for several polarization observables. Finally, two applications of this experimental facility to near-surface configuration are presented : shallow cavity detection and laterally varying interfaces.

Table des matières

0	Introduction générale	1
0.1	De l'expérimentation à échelle réduite multicomposantes à l'inversion de la polarisation ¹	1
0.2	Particularités et problématiques de l'imagerie de proche surface	2
0.2.1	Les différents échelles de l'imagerie sismique	2
0.2.2	Définition générale des problématiques et particularités de la proche surface	3
0.3	Méthodes d'imagerie sismique conventionnellement employées pour la proche surface	4
0.3.1	Bref aperçu des méthodes classiquement utilisées dans le monde industriel	4
0.4	Une méthode émergente pour la proche surface : l'inversion des formes d'ondes et introduction de la polarisation	7
0.4.1	Rapide historique de l'inversion des formes d'ondes et tendances actuelles en proche surface	7
0.4.2	Utilisation de la polarisation en proche surface et extension pour tenir compte du champ complet	9
0.5	Modélisation physique à échelle réduite multicomposantes	10
0.6	Plan du manuscrit	11
1	Éléments généraux pour le problème direct et le problème inverse	13
1.1	Description physique du problème : équations visco-élastodynamiques et méthodes choisies pour les résoudre	14
1.1.1	Hypothèses et équations de propagation	14
1.1.2	Quelques types d'ondes	16
1.1.3	Notions sur la paramétrisation du mouvement particulaire	16
1.1.4	Méthodes numériques utilisées	17
1.2	Principe et intérêt de l'inversion de la forme d'onde	19
1.2.1	Quelques notations et définitions	20
1.2.2	Estimation de la signature de la source pour l'inversion des formes d'onde	21
1.2.3	Estimation des paramètres structuraux par minimisation d'une fonctionnelle d'erreur quadratique	22
1.2.4	Calcul du gradient à l'aide de l'état adjoint	24
1.2.5	Coûts numériques pour le calcul et l'inversion du Hessien	26
1.2.6	Quelques approximations de la méthode de Gauss-Newton	27
1.3	Nature mal posée du problème inverse : régularisation et information <i>a priori</i>	28

1. Cette section n'était pas présente dans la première version du manuscrit. Suite à la soutenance elle a été ajoutée afin d'apporter des informations supplémentaires permettant de clarifier l'organisation du mémoire et les liens entre les différents développements exposés.

1.4	Conclusion du chapitre	31
-----	----------------------------------	----

2 Inversion de la polarisation : formulation théorique et adaptation de l'inversion des formes d'onde **33**

2.1	Introduction	35
2.2	Multicomponent data misfit functions in the frequency domain	38
2.2.1	Some notations, conventions and assumptions	38
2.2.2	Conventional FWI misfit function and derived misfit functions	39
2.2.3	Phase and amplitude decompositions of misfit functions in the space-frequency domain	40
2.2.4	Conventional misfit functions expressed in a polar form to make explicit the polarization terms	41
2.3	Polarization description	44
2.3.1	Concepts of wavefront polarization, apparent polarization and polarization states	44
2.3.2	Stokes' parameters description of polarization	45
2.3.3	The intrinsic "world" of pure polarization states : the Poincaré Sphere	47
2.3.4	Geometrical interpretation of the Poincaré Sphere, Pauli's Spin Matrices and Stokes' Coefficients for bi-component measurements	48
2.3.5	Definition of a distance between polarization states	50
2.3.6	A cost function based on the Poincaré distance	53
2.4	Discussion on the relation between the Poincaré distance based cost functions and other polarization cost functions	54
2.5	Full waveform inversion and gradient computation	57
2.5.1	Gradient computation using the Lagrange's multipliers formalism	58
2.5.2	Source and receivers coupling effects	61
2.6	Wavefield analysis and interpretation of polarization observables for geometrical phases	63
2.6.1	Wavefield decomposition method and wavefront computation	63
2.6.2	Analysis of the relationship between polarization observation and wavefronts	64
2.7	Comparison of the Poincaré distance based objective function with conventional objective functions	80
2.7.1	Cost functions at 20 Hz	80
2.7.2	Cost functions at 100 Hz	82
2.7.3	Cost functions for the bandwidth from 100 to 200 Hz	84
2.7.4	Partial conclusion of the cost-function convexity analysis	84
2.8	Polarization sensitivity kernels	86
2.8.1	Methodology	86
2.8.2	Sensitivity kernels for compressive wave velocity variations	88
2.8.3	Sensitivity kernels for shear wave velocity variations	89
2.8.4	Partial conclusion on polarization related sensitivity kernels	89
2.9	Numerical inversion results	92
2.9.1	Inversion results	92
2.9.2	Discussion on the relative evolution of misfit functions and associated null-spaces	97
2.10	Appendix	98
2.10.1	An extremely brief introduction to the Dirac's braket formalism	98
2.10.2	Some functional derivatives used for the gradient derivation	99

2.10.3	Gradients of misfit functions	100
2.10.4	Interpretation of component weighting operator in conventional FWI as polarization state filtering	101
2.10.5	Derivation of the sensitivity kernels for tilt and ellipticity angles	101
2.11	Fonctions objectif alternatives pour la prise en compte de données multicomposantes	102
2.12	Conclusion du chapitre	103
3	Apports de l'inversion de la polarisation pour différents biais et application à l'inversion des ondes de surface	105
3.1	Introduction	106
3.2	Sensibilité aux erreurs d'ondelette, d'atténuation et de densité	106
3.2.1	Introduction et rappels sur la configuration expérimentale	106
3.2.2	Résultats d'inversion sans sources de biais	107
3.2.3	Erreur sur l'ondelette source	108
3.2.4	Erreur sur l'ondelette source et avec une sous-estimation de la densité	111
3.2.5	Erreurs sur l'ondelette source et sur les facteurs de qualité	113
3.2.6	Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sous-estimation des facteurs de qualité	117
3.2.7	Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sur-estimation des facteurs de qualité	117
3.3	Résultats d'inversion pour un fort contraste	120
3.4	Inversion des ondes de surface	122
3.4.1	Introduction	122
3.4.2	Analyse des données	122
3.4.3	Choix et stratégies d'inversion	129
3.4.4	Résultats d'inversion	132
3.5	Conclusion du chapitre	138
4	Développements méthodologiques pour la modélisation physique multicomposantes à échelle réduite	139
4.1	Introduction à l'article : Reduced scale seismic measurement : characterization and quantitative assessment of a new facility for multi-component acquisition and application to the observation of regularized polarization attributes	140
4.2	Summary of the article	141
4.3	Introduction	141
4.4	Principles of reduced scale modeling and presentation of the MUSC measurement bench	144
4.4.1	General description of the MUSC measurement bench	144
4.4.2	Description of the multicomponent measurement process of the laser interferometer	144
4.5	Measurement noise study	146
4.5.1	Assumptions and analysis	146
4.5.2	Noise power spectrum density	147
4.5.3	Statistical noise correlations and noise polarization	148
4.5.4	Noise statistical distributions	153
4.5.5	Conclusion on noise analysis	155
4.6	Surface wave polarization analysis	155
4.6.1	Experimental settings and raw signals	156

4.6.2	Signal pre-processing	157
4.6.3	Observed polarization of the Rayleigh wave in the frequency domain	160
4.7	Full wavefield reconstruction	161
4.7.1	Description of the forward modeling tool	162
4.7.2	Methodology used for the source spectrum estimation	163
4.7.3	Comparison between synthetic and experimental raw signals for each component	168
4.7.4	Comparison of the instantaneous polarization attributes	170
4.8	Towards realistic multicomponent physical modeling : shallow cavity detection by polarization perturbation analysis	175
4.8.1	Presentation of the physical model and experimental acquisition	176
4.8.2	Illustration of some benefits of multicomponent data for shallow cavity detection	176
4.8.3	An initial attempt to use multicomponent measurements for shallow cavity detection	180
4.9	Conclusions and perspectives	183
4.10	Acknowledgements	184
4.11	Appendix	186
4.11.1	Statistical properties of the noise table	186
4.11.2	Mechanical properties of physical model materials	187
4.11.3	Riedel's based multitaper method with sinusoidal tapers	187
4.12	Acquisition de données multicomposantes sur maquette	188
4.12.1	Présentation de l'acquisition et de la maquette	188
4.12.2	Résultats préliminaires des mesures	190
4.13	Conclusion du chapitre	193
5	Conclusions et perspectives	195
5.1	Conclusions générales de ce travail de thèse	195
5.1.1	Contributions à l'inversion des formes d'ondes multicomposantes	195
5.1.2	Contribution à l'expérimentation à échelle réduite	197
5.2	Perspectives	197
5.2.1	Perspectives liées à l'inversion des formes d'ondes multicomposantes	197
5.2.2	Perspectives liées à l'expérimentation à échelle réduite	199
	Références bibliographiques	201
	Annexes	i
A	Résultats d'inversion avec différents facteurs de qualité	iii
A	Résultats d'inversion pour $Q_p = Q_s = 10$ (connus)	iii
B	Résultats d'inversion avec $Q_p = Q_s = 1000$ (connus)	iv
C	Synthèse	iv
B	Caractérisations supplémentaires du bruit de l'interféromètre laser	vii
A	Introduction	vii
B	Characterization of the "Full aperture" channel for the measurement of the vertical component	vii
B.1	Introduction and motivations of the "Full aperture channel"	vii

B.2	Noise analysis and comparison	viii
C	Supplementary histograms	ix
C	Adaptation de la transformée $p - \omega$ pour tenir compte de la polarisation des ondes	xv
D	Introduction simplifiée à la fonction coût \mathcal{E}_P pour le cas bi-composantes	xvii
A	Introduction	xvii
B	Résumé	xvii
C	Résumé étendu	xvii

Liste des symboles utilisés

Conventions générales

Que la quantité désignée représente directement une quantité « physique » ou non, si cette quantité est nombre scalaire alors celle-ci sera représentée par des caractères « *italiques* », si par contre il s'agit d'un vecteur, d'un tenseur ou d'une matrice alors celle-ci sera écrite en caractères « gras ».

Symboles se référant directement à des quantités physiques

Symbole	Type	Unité usuelle	Description	Remarques
t	Scalaire	s	Temps	
ρ	Scalaire	kg.m ⁻³	Masse volumique	Parfois appelé "densité" par abus de langage
\mathbf{r}	Vecteur	m	Vecteur position d'un point matériel	Référentiel lié à la Terre (considéré galiléen)
\mathbf{u}	Vecteur	m	Vecteur déplacement particulaire	
\mathbf{v}	Vecteur	m	Vecteur vitesse particulaire	
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur	N.m ⁻²	Tenseur des contraintes	
\mathbf{C}	Tenseur	N.m ⁻²	Tenseur d'élasticité	
λ, μ	Scalaire	N.m ⁻²	Coefficients de Lamé	
E	Scalaire	N.m ⁻²	Module de Young	
ν	Scalaire	Adimensionnel	Coefficients de Poisson	
ω	Scalaire	rad.s ⁻¹	Pulsation	
f	Scalaire	Hz	fréquence	
Q	Scalaire	Adimensionnel	Coefficient d'atténuation intrinsèque	
V_i	Scalaire	m.s ⁻¹	Vitesse des ondes type i	Peut-être complexe si atténuation intrinsèque
$\mathbf{Z}_{\mathbf{m},f}$	Matrice/Opérateur		Matrice impédance paramétrisée par rapport au paramètre \mathbf{m}	Pour une fréquence f donnée
α_i	Scalaire	selon l'observable physique	i coefficient de Stokes	Conventions utilisées en Optique
\mathbf{n}_α	Ensemble scalaires	de selon l'observable physique	« vecteur » des paramètres de Stokes	Conventions utilisées en Optique

Symbole	Type	Unité usuelle	Description	Remarques
\mathcal{S}_i	Matrice	i matrice de Spin de Pauli	Adimensionnel	Conventions utilisées en Optique

TABLE 1: Description des différents symboles référant à des quantités physiques

Symboles se référant à des objets mathématiques

Symbole	Type	Description	Remarques
\mathbb{D}	Espace vectoriel	Espace des données du problème (correspond physiquement aux grandeurs mesurées)	
\mathbf{d}	Vecteur ou Matrice	Vecteur observables	\mathbf{d}_{obs} pour les observables mesurées
\mathbf{s}	Vecteur ou Matrice	Vecteur « excitation » (input) du modèle	
\mathbb{M}	Espace vectoriel	Espace des paramètres du modèle	
\mathbf{m}	Vecteur ou Matrice	Paramètres du modèle	\mathbf{m} pour les paramètres exacts, $\tilde{\mathbf{m}}$ pour les paramètres estimés
$P(\mathbf{i})$	Fonction	Distribution de probabilité de la variable aléatoire \mathbf{i}	Fonction dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$
$p(\mathbf{i})$	Fonction	Réalisation de la variable \mathbf{i}	
$\mathbf{Cov}(\mathbf{i})$	Matrice	Matrice de covariance	Fonction de la distribution $P(\mathbf{i})$
\cdot^*	Opérateur matriciel	Opérateur conjugaison	
\cdot^t	Opérateur matriciel	Opérateur transposition	
\cdot^\dagger	Opérateur fonctionnel/matriciel	Opérateur adjoint	Lorsque l'opérateur est exprimé par une matrice dans un repère orthonormé, ceci revient à transposer et conjuguer la matrice
$\langle \mathbf{a} \mathbf{W} \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{a} \mathbf{b} \rangle_{\mathbf{W}}$	Forme bilinéaire	Produit scalaire pondéré par \mathbf{M}	\mathbf{W} matrice symétrique, définie positive, si non précisée $\mathbf{W} = \mathbf{I}$
ℓ_n	Norme	Désigne le type de norme	

Symbole	Type	Description	Remarques
$\ \bullet\ _n$	Scalaire	Norme ℓ_n appliquée à \bullet	
\mathcal{E}	Fonctionnelle	Fonctionnelle d'erreur	
\mathcal{H}	Opérateur	Hessien	\mathcal{H}_A : Hessien réduit
\mathcal{G}_m	Opérateur	par définition : $\mathbf{d} = \mathcal{G}_m(\mathbf{m})$	par définition : $\widetilde{\mathbf{m}} = \mathcal{G}_m^{-1}(\mathbf{d})$
\mathbf{G}	Distribution	fonction de Green de l'équation d'onde	scalaire pour le cas acoustique, tensorielle pour le cas élastique
\mathcal{F}	Opérateur fonctionnel	Transformée de Fourier	$\text{signal}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{signal}(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$
\mathcal{F}^{-1}	Opérateur fonctionnel	Transformée de Fourier inverse	$\text{signal}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{signal}(\omega) \cdot e^{i2\pi ft} dt$
grad_M	Vecteur/Matrice	Gradient	
$\partial_x f(x, \dots)$	Opérateur différentiel	Dérivée partielle de la fonction $f(x, \dots)$ suivant la variable x	

TABLE 2: Description des différents symboles référant à des objets mathématiques

Chapitre 0

Introduction générale

Ces travaux de thèse traitent de l'emploi de mesures multicomposantes à des fins d'imagerie quantitative par inversion des formes d'ondes sismiques ainsi que de l'extension d'un banc de mesure à échelle réduite pour la reproduction d'acquisitions multicomposantes sismiques à échelle réduite.

0.1 De l'expérimentation à échelle réduite multicomposantes à l'inversion de la polarisation ¹

Quelques éléments sur la « genèse » des différents travaux présentés dans ce manuscrit permettent de mieux comprendre les liens entre les parties traitant de l'inversion de données multicomposantes et celles traitant de modélisation à échelle réduite. À l'origine, ces travaux étaient motivés par l'intégration d'une technologie de mesure laser à un banc de mesure à échelle réduite (banc MUSC) ainsi que l'utilisation de la méthode d'inversion des formes d'onde (FWI) dans un contexte de proche surface avec des données multicomposantes.

L'étude des signaux multicomposantes acquis expérimentalement m'a amené à m'intéresser à divers observables de polarisation ainsi qu'à m'interroger sur les diverses sources de biais limitant la fidélité des simulations dans un contexte d'inversion des formes d'ondes. J'ai remarqué que les observables de polarisation présentent un certain nombre de propriétés permettant potentiellement de s'affranchir de certaines difficultés rencontrées lors de l'utilisation des formes d'ondes complètes dans l'inversion (connaissance de l'ondelette source, connaissance du modèle d'atténuation, phénomènes de sauts de cycles cinématiques...). Ceci a motivé l'idée d'utiliser la polarisation comme un observable explicite dans le cadre de l'inversion des formes d'ondes. Ces travaux sont présentés dans **la première partie** du manuscrit.

Les travaux concernant la modélisation de données multicomposantes à échelle réduite sont présentés en **seconde partie** du manuscrit bien qu'ils soient pour la plupart antérieurs aux travaux sur l'exploitation de la polarisation pour l'inversion.

L'objectif du **présent chapitre** est d'introduire ces développements dans le contexte de la géophysique de proche-surface et de l'expérimentation sismique à échelle réduite.

1. Cette section n'était pas présente dans la première version du manuscrit. Suite à la soutenance elle a été ajoutée afin d'apporter des informations supplémentaires permettant de clarifier l'organisation du mémoire et les liens entre les différents développements exposés.

0.2 Particularités et problématiques de l'imagerie de proche surface

Dans cette section nous évoquerons les particularités et les problématiques liées à l'imagerie de la proche surface. Pour ce faire nous allons tout d'abord évoquer les différentes échelles géologiques pour lesquelles les méthodes d'imagerie géophysique peuvent intervenir.

Dans un premier temps, nous allons faire la distinctions entre les méthodes d'imagerie qualitatives et quantitatives.

0.2.1 Les différents échelles de l'imagerie sismique

Suivant les domaines d'application, l'imagerie sismique traite de problèmes avec des ordres de grandeurs spatio-temporels très différents. Bien que les principes généraux des méthodes d'imagerie peuvent être indépendant de l'échelle, les méthodes expérimentales et l'exploitation des mesure peuvent considérablement différer car les objectifs, les rapports d'échelles et les phénomènes physiques dominants seront différents suivant les applications.

De façon générale, nous pouvons distinguer trois échelles :

- l'imagerie de la proche surface ;
- l'imagerie pour les grandes profondeurs ;
- l'imagerie globale et régionale.

L'**imagerie proche surface** a pour objectif d'imager le proche sous-sol, c'est-à-dire la zone comprise entre la surface et quelques dizaines (voire centaines) de mètres en dessous de celle-ci. Il s'agit du type d'imagerie auquel nous nous intéresserons principalement.

L'**imagerie des grandes profondeurs** traite des profondeurs de l'ordre de plusieurs centaines de mètres à quelques kilomètres. Typiquement les applications correspondantes sont la prospection pétrolière ou gazière.

L'**imagerie globale et régionale** a pour objectif d'imager les zones entières du globe terrestre (ou d'une autre planète) de la croûte terrestre aux différentes interfaces du manteau ou du noyau. Pour cette échelle, les sources sismiques sont principalement des sources naturelles (séismes).

L'objectif de l'**imagerie quantitative** est d'obtenir une représentation spatiale de différents paramètres physiques (comme par exemple la densité, paramètres de Lamé ...) tandis que l'**imagerie qualitative** représente les contrastes entre paramètres physiques et non directement leurs valeurs, permettant notamment d'imager des discontinuités.

En imagerie sismique, les différents types de sources peuvent être classés suivant qu'elles soient actives ou passives. Les méthodes actives utilisent généralement des sources d'origine anthropique (explosion, chute de poids, frappe à la masse, pots vibrants ...) dont la position, l'énergie et la forme de l'ondelette source peuvent être plus ou moins bien contrôlées.

Les méthodes passives utilisent des sources non contrôlées telles que les événements sismiques majeurs ou des sources diffuses, comme par exemple le bruit de fond provenant de sources « aléatoires » naturelles ou anthropiques. L'application des sources passives à la sismique de proche surface est récente et reste un domaine émergeant (Gouèdard, 2008). Dans le cadre de ces travaux, nous ne considérons que des sources actives.

0.2.2 Définition générale des problématiques et particularités de la proche surface

L'imagerie de la proche surface implique une grande variété de milieux et suivant le contexte expérimental et la nature physique de la quantité imagée, plusieurs types de méthodes peuvent être appliqués à des contextes de proche surface.

Nous pouvons par exemple citer les méthodes basées sur la mesure des champs sismiques que nous décrirons plus en détails dans la section suivante ; les méthodes basées sur les phénomènes électromagnétiques allant du courant quasi-continu pour la tomographie de résistivité jusqu'aux fréquences de quelques dizaines de Gigahertz pour le radar géologique e.g. (Leparoux, 1997; Jol, 2008; Bouchedda *et al.*, 2012); les méthodes basées sur les mesures du champ de gravité e.g. (La Porte, 1963). On peut remarquer que certaines méthodes peuvent être combinées, comme par exemple le proposent Hermans *et al.* (2011) ou Bouchedda *et al.* (2012).

Dans le cadre de cette thèse, nous ne traiterons que des méthodes sismiques même si le formalisme proposé peut s'étendre sans difficulté à un panel de méthodes beaucoup plus large. Si l'on essaie de regrouper de manière non exhaustive certaines applications des méthodes d'imagerie sismique à la proche surface, on peut notamment citer :

- **la détection des risques naturels ou anthropiques** : il s'agira par exemple de la détection de glissement de terrains (Romdhane, 2010; Grandjean *et al.*, 2012); de la détection de cavités souterraines (Grandjean & Leparoux, 2004) qui devient un enjeu majeur de sécurité publique dans les zones urbanisées, ou encore de l'auscultation des digues (Fargier, 2011)
- **la reconnaissance géologique de très haute résolution** peut se diviser en applications géotechniques pour la construction ou la maintenance d'ouvrages d'arts ou la détermination des couches superficielles de la lithographie dans l'objectif d'améliorer l'imagerie de cibles profondes (comme par exemple pour les applications pétrolières ou minières).
- **les applications environnementales** : il s'agira par exemple de déterminer la présence de fluides ou matières polluantes dans le sous-sol.

Les exemples cités ne sont pas exhaustifs mais montrent l'importante disparité des applications de l'imagerie sismique de proche surface. Cependant, on peut essayer de donner quelques caractéristiques communes aux différentes configurations de proche surface qui diffèrent des applications de sismique profonde :

1. **les rapports entre longueurs d'ondes, la distance de propagation et la taille des cibles** : généralement les cibles imagées ont des dimensions comparables avec les longueurs d'ondes propagées, ce qui peut poser des difficultés pour obtenir une résolution suffisante. D'autre part, à cause des matériaux particulièrement atténuants les longueurs de propagations exploitables peuvent être réduites ;
2. **l'atténuation intrinsèque du milieu** : du fait de la nature peu compacte des milieux de la proche surface, ceux-ci présentent généralement une atténuation assez élevée. Il peut être fréquent de rencontrer des facteurs de qualité inférieurs à 20. De plus, si l'on compare aux grandes profondeurs ou à l'imagerie globale, les fréquences générées à la source sont beaucoup plus élevées. Par exemple, en prospection pétrolière les fréquences maximales exploitables sont de l'ordre de quelques dizaines de Hertz tandis que pour la géophysique de proche surface celles-ci peuvent monter jusqu'à quelques centaines de Hertz. Par conséquent du fait de l'atténuation intrinsèque du sol, les parties les plus élevées du spectre seront particulièrement atténuées. Aussi,

comme il a déjà été mentionné une forte atténuation peut limiter les distances de dépôts (offsets) limitant ainsi l'illumination ;

3. **L'importance des ondes de surface** : l'utilisation de sources à la surface excite de manière très énergétique certains modes propagatifs comme par exemple les modes de Rayleigh (comme le montre Miller & Pursey (1955) pour un demi-espace avec une source ponctuelle). Ces ondes interagissent avec les couches superficielles du milieu de propagation et donc si elles sont correctement interprétées elles peuvent s'avérer très utiles dans un contexte d'imagerie de proche surface (alors que conventionnellement pour l'imagerie de grandes profondeurs les ondes de surface sont traitées comme une forme bruit parasitant les ondes de volume). De plus, la proximité des milieux imagés avec la surface libre rend le filtrage dans le domaine temporel de ces modes particulièrement délicat ;
4. **la présence potentielle de forts contrastes** : pour certaines applications, les contrastes de vitesses ou d'impédances peuvent être très marqués (comme par exemple lorsque l'on considère une fondation en béton située dans les deux premiers mètres d'un milieu naturel (Vautrin, 2011; Roques, 2012)).

Ainsi, du fait des caractéristiques évoquées ci-dessus, souvent les méthodes d'imagerie développées pour les grandes profondeurs (exploration) ne peuvent pas être appliquées directement à l'imagerie proche surface. Leur application exige souvent certaines adaptations. Certaines méthodes d'imagerie sismique conventionnellement utilisées pour l'imagerie de la proche surface sont présentées dans la section suivante.

0.3 Méthodes d'imagerie sismique conventionnellement employées pour la proche surface

0.3.1 Bref aperçu des méthodes classiquement utilisées dans le monde industriel

Pour traiter les données sismiques de proche surface afin d'en inférer les propriétés du sous-sol, plusieurs méthodes dites « conventionnelles » sont utilisées depuis plusieurs années. Aucune de ces méthodes ne traite l'ensemble du signal mesuré mais chacune se focalise sur un type d'événement physique. Ainsi, la sismique réfraction et la tomographie sismique utilisent les premières arrivées, les méthodes de type MASW utilisent les ondes de surface et la sismique réflexion s'intéresse aux événements réfléchis en profondeur. Nous allons décrire les principes de chacune de ces méthodes et nous donnerons certaines des limitations associées.

0.3.1.a La sismique réfraction

La sismique réfraction est l'une des méthodes les plus employées en imagerie sismique de la proche surface. Cette méthode repose sur la mesure des temps de premières arrivées qui, pour un milieu stratifié à vitesses croissantes, sont réfractées le long de l'interface (e.g. Magnin & Bertrand (2005)). Cette méthode peut être étendue au cas de milieux présentant plusieurs interfaces avec des pentages non horizontaux. Cependant, pour que cette méthode puisse fonctionner, il est indispensable que les deux hypothèses suivantes soient vérifiées :

1. le milieu doit présenter des contrastes de vitesses suffisants entre ses différentes couches (supposées planes) et les vitesses doivent être croissantes avec la profondeur.

2. afin d'atteindre une profondeur donnée, il est indispensable d'avoir un dispositif suffisamment long afin que les ondes réfractées par l'interface les plus profondes puissent atteindre plusieurs géophones. Ceci impose aussi que l'énergie sismique émise par la source doit être assez importante afin d'obtenir un rapport signal sur bruit suffisant en bout de dispositif (d'autant plus si le milieu est fortement atténuant).

0.3.1.b La tomographie des temps de premières arrivées

On peut considérer que la tomographie des temps de premières arrivées comme un développement de la sismique réfraction présentée au paragraphe précédent. Cette méthode repose sur la détermination des vitesses des ondes de compressions en cherchant un ensemble de paramètres qui explique « au mieux » les temps de premières arrivées des signaux mesurés (déterminés par des pointés manuels ou automatisés). En représentant la propagation par des rayons déduits de la résolution de l'Eikonal, cette méthode permet d'imager des milieux avec des variations « lisses » (alors que la sismique réfraction considère des milieux à stratifications). En effet, la modélisation par une équation Eikonal est une approximation haute fréquence de l'équation d'onde qui est valable pour les milieux « suffisamment lisses ».

Pour déterminer le modèle de vitesse correspondant, il existe des méthodes d'inversion reposant sur des processus itératif déterministes (comme par exemple Abraham *et al.* (1998); Jones (2010b) ou une exploration plus globale de l'espace des paramètres en utilisant des approches stochastiques (e.g. Patella & Patella (2009)). Les processus déterministes itératifs reposent généralement sur une linéarisation du problème inverse (Jones, 2010b), ce qui peut induire une convergence vers des minimum locaux si le milieu initial n'est pas suffisamment proche du « véritable » milieu.

Les principales limitations associées à la tomographie des temps de premières arrivées sont :

- la faible résolution due à l'approximation Eikonal qui néglige les effets de diffractions. Williamson (1991); Marquering *et al.* (1999) estiment que la résolution d'une image est de l'ordre de grandeur de sa première zone de Fresnel ;
- la couverture limitée induite par des rayons infiniment fin, ce qui implique que l'on doit avoir une densité de rayons suffisante pour les zones imagées. Pour des dispositifs de surface, il est donc nécessaire d'avoir des milieux avec des vitesses des ondes de compressions croissantes avec la profondeur. Certaines zones du modèle peuvent ne pas être traversées par des rayons et de ce fait ne peuvent pas être imagées ;
- la possibilité de converger vers un minimum local ou d'avoir plusieurs modèles équivalents par rapport aux données (indétermination) ;
- la précision de la méthode dépend aussi fortement de la qualité des pointés, comme cela est illustré dans Romdhane (2010) ;
- la résolution de l'Eikonal n'est pas toujours aisée lorsque l'on rencontre certains phénomènes comme par exemple les caustiques.

On pourra trouver dans Jones (2010a) de plus amples informations par rapport à la tomographie des premières arrivées ainsi que concernant les évolutions récentes de cette méthode.

0.3.1.c L'inversion de la dispersion des ondes de surface

Cette méthode utilise la dispersion des ondes de surface pour déterminer les propriétés mécaniques de la proche surface (Socco & Strobbia, 2004). Lorsque l'excitation et les mesures sont réalisées à partir de la surface libre, les ondes de surface dominent les signaux mesurés et leur atténuation

géométrique est moins importante que celle des ondes de volume (Aki & Richards, 1980). Cependant, la profondeur de pénétration de ces ondes décroît rapidement (ondes évanescentes selon la direction verticale) selon les fréquences d'excitations. Afin d'exploiter la dispersion des ondes de surface, généralement on considère séparément les différents modes propagatifs et on étudie les courbes de dispersion correspondantes qui peuvent être évaluées analytiquement ou semi-analytiquement (Gilbert & Backus, 1966). La méthode d'analyse spectrale des ondes de surfaces repose sur une hypothèse d'invariance du milieu dans les directions radiales, ce qui permet de ramener l'étude d'un problème d'imagerie tri-dimensionnelle à celle d'un problème uni-dimensionnel. Si cette invariance n'est pas respectée alors la méthode ne permet plus de déterminer les paramètres mécaniques du sous-sol comme par exemple interfaces trop inclinées (pendages) comme le montre Bodet (2005).

Bien que théoriquement les courbes de dispersion puissent être sensibles aux paramètres de vitesses de compression, de densité et d'atténuation, il s'avère en pratique que l'influence de ces paramètres est faible comparée à celle des ondes de cisaillement. Aussi, étant donné que la profondeur de pénétration de l'énergie sismique des ondes de surface diminue avec la fréquence, les profondeurs investiguées dépendent des fréquences propagées ainsi que des modes propagatifs étudiés. L'une des principales sources d'erreur provient de l'extraction des courbes de dispersion correspondant aux différents modes propagatifs excités par la source. Les mesures sont généralement transformées dans l'espace fréquences nombres d'ondes ($f - k$) ou dans l'espace des lenteurs-fréquences ($p - \omega$) (McMechan & Yedlin, 1981), puis les courbes de dispersions sont déduites en suivant les maxima des champs transformés.

Deux difficultés peuvent alors rendre délicate la détermination des courbes dispersion :

- la diminution de la précision des courbes de dispersion pour les basses fréquences empêchant un pointé précis de la dispersion ;
- la difficulté d'extraire les différents modes lorsque plusieurs modes sont excités dans une même gamme de fréquence avec des courbes de dispersion « proches » .

Cependant, l'inversion des ondes de surface reste un domaine de recherche assez actif et certaines solutions ont été proposées pour étendre les hypothèses d'applications de la méthode (Socco & Strobbia, 2004).

Il s'avère néanmoins que quatre difficultés pratiques persistent :

- la présence d'hétérogénéités locales trop importantes ou une variation latérale de la géométrie des interfaces peut complètement fausser les résultats de l'inversion (Bodet, 2005). Ces dernières années, plusieurs auteurs ont proposé des méthodologies d'imagerie pour investiguer des milieux avec des variations latérales plus ou moins prononcées comme celles proposées par Boiero & Socco (2014) et Bergamo & Socco (2014).
- le risque de mauvaise identification des modes (Boaga *et al.*, 2013)
- la présence de couches avec des vitesses plus rapides en surface rend l'application de la méthode délicate (Lu *et al.*, 2007).
- la profondeur d'auscultation est très dépendante du spectre de la source de par la nature même des ondes de surface.

0.3.1.d La sismique réflexion/haute-résolution

La sismique réflexion haute-résolution utilise des événements réfléchis pour reconstruire des interfaces et des hétérogénéités du sous-sol. Généralement comme ces événements arrivent plus tard, il est nécessaire de filtrer les ondes de surface et les ondes réfractées pour ensuite pouvoir traiter par

migration les ondes de volumes réfléchies aux interfaces. Cette méthode est particulièrement utilisée en sismique grandes profondeurs pour l'exploration de matières premières (Özdoğan Yilmaz, 1987).

Le principe de la migration a été formulé par Claerbout (1970), Claerbout (1971), il consiste à faire propager « numériquement » les champs émis, ainsi que les « retournées » temporelles des champs mesurés au travers du milieu supposé et pour chaque instant réaliser le produit de ces champs (corrélation). Le résultat de cette opération présente des maxima qui peuvent correspondre aux positions des réflecteurs à condition que pour chaque événement rétro-propagé, on dispose d'un modèle de vitesse suffisamment précis.

Il existe de nombreuses variantes de cette méthode, suivant que les sources soient « rétropropagées » indépendamment ou sommées, que l'on applique des termes correctifs pour corriger les artefacts (déconvolution) ou suivant le modèle physique utilisé pour la rétropropagation des ondes (par exemple suivant que l'on utilise des rayons ou des approches à fréquences finies). Il existe aussi diverses variantes reposant sur des « conditions d'imagerie » différentes. Une aperçu global de ces méthodes est présenté par Sava & Hill (2009).

Par ailleurs, pour les configurations de proche surface, il est généralement délicat de séparer les différents événements (par exemple, les ondes de surface et les différentes ondes de volume), ce qui rend la migration des ondes de volume plus délicate. Cependant pour des sources et des récepteurs excitant/mesurant tangentiellement selon sa direction d'invariance le milieu (configuration SH, où seulement un type d'ondes transversales existe) cette méthode montre des résultats particulièrement encourageants (Krawczyk *et al.* , 2012).

0.3.1.e Bilan des méthodes conventionnelles

Au travers de ces descriptions, on remarques que les méthodes traditionnelles utilisent généralement qu'un unique type d'évènement (ondes réfractées pour la tomographie , ondes de surfaces pour l'inversion des ondes de surface et onde réfléchies pour la sismique haute résolution) et chaque méthode a un domaine de validité restreint. Face à ces limites, l'inversion des formes d'ondes cherche à tenir compte de l'ensemble des événements composant les signaux afin de proposer une méthode de reconstruction plus générale.

0.4 Une méthode émergente pour la proche surface : l'inversion des formes d'ondes et introduction de la polarisation

0.4.1 Rapide historique de l'inversion des formes d'ondes et tendances actuelles en proche surface

L'inversion des formes d'ondes est apparue dans la communauté géophysique au milieu des années 80 (Lailly, 1983; Tarantola, 1984). Contrairement, aux méthodes précédemment évoquées, elle peut traiter l'ensemble du champ d'ondes et déduire de manière quantitative les paramètres du milieu, à condition que le problème soit correctement posé et le milieu initial puisse permettre à l'optimisation locale de converger vers un unique minimum global (Mulder & Plessix, 2008).

La première application bidimensionnelle a été réalisée par Gauthier *et al.* (1986). Actuellement l'extension pour les configurations tridimensionnelles est un sujet de recherche actif (Morgan *et al.* , 2013) et des applications 3D à partir de données terrain commencent à apparaître (Sirgue *et al.* , 2011; Vigh *et al.* , 2014) .

Avec le développement des capacités des calculateurs, les mesures à large déport ainsi que la formulation de la méthode dans le domaine fréquentiel (Pratt, 1990), cette méthode est devenue plus

accessible et les exemples d'applications se sont multipliés. Plusieurs études ont montré des résultats concluant à partir de mesures terrain pour des grandes profondeurs, comme par exemple les travaux de Operto & All (2004); Kamei *et al.* (2013). Il est intéressant de noter que jusqu'à maintenant certains auteurs tels Kamei & Pratt (2013) préfèrent la robustesse d'une formulation acoustique avec un fenêtrage adéquat des premières arrivées à une formulation élastique permettant de tenir compte d'un panel plus large d'événements.

Pour la proche surface, cette méthode a connu un développement plus tardif que pour l'échelle de l'exploration profonde. Cependant, actuellement de plus en plus de groupes de recherche s'intéressent à l'application de cette méthode à des configurations de proche surface. Je présente dans ce paragraphe un rapide tour d'horizon des travaux réalisés jusqu'à maintenant. Je me limiterai aux travaux pour des configurations avec une surface libre, en particulier je ne traiterai pas des travaux avec des configurations de transmission en puits.

Pour se faire, je vais essayer de classer les différentes applications de l'inversion des formes d'onde suivant plusieurs catégories :

1. les approches utilisant la formulation en fréquence proposée par Pratt (1990) avec une approximation acoustique (Sheng *et al.* , 2006; Gao *et al.* , 2007; Smithyman *et al.* , 2009; Ellefsen, 2009; Smithyman & Clowes, 2012; Yu & Hanafy, 2014; Adamczyk *et al.* , 2014). Généralement ces approches se focalisent sur les ondes de compression réfractées (généralement isolées dans les données par fenêtrages temporels et par l'utilisation de fréquences complexes) car ces phases sont reproduites (avec plus ou moins de fidélité) par l'approximation acoustique du problème direct. On pourra noter que les travaux de Ellefsen (2009) exploitent une configuration d'imagerie de type SH (où idéalement uniquement les ondes de cisaillement sont présentes) avec un inversion de la phase ;
2. les approches basées sur une formulation du champ élasto-dynamique par des équations intégrales : Kaslilar (2007), Campman & Dwi Riyanti (2007), Riyanti & Herman (2005) ;
3. les approches en fréquence en considérant la visco-élasticité : Bretaudeau (2010), Gélis (2005), Gélis *et al.* (2007), Romdhane (2010), Romdhane *et al.* (2011), Latzel (2010), Bretaudeau *et al.* (2013) ;
4. les approches basées sur la modélisation élastique en temps et utilisant des fonctions coûts exprimées en temps. On pourra citer les travaux de Tran *et al.* (2013). On pourra aussi citer Groos (2013) dont les travaux présentent la particularité de tenir compte de la visco-élasticité au travers d'un modèle rhéologique et la fonction coût (calculée en temps) utilise une normalisation des données mesurées et calculées (les différentes composantes sont normalisées indépendamment) ;
5. les approches basées sur une modélisation élastique en temps mais considérant des fonctions coûts dans le domaine des nombres d'ondes/lenteurs afin de se rapprocher de l'inversion de la dispersion des ondes de surface. On pourra citer par exemple Masoni *et al.* (2013); Perez Solano *et al.* (2014).

Très clairement, la non prise en compte de l'élasticité dans certaines approches pose un problème pour l'inversion des ondes de surface puisque celles-ci ne peuvent être reproduites sans prise en compte des effets élastiques.

Pour les approches utilisant un problème direct élastique, les paramètres inversés sont généralement les vitesses de compression V_p et les vitesses de cisaillement V_s . Il ressort que la sensibilité de l'inversion est beaucoup plus grande pour le paramètre V_s que pour le paramètre V_p et les autres

paramètres « non cinématiques » (la densité et l'atténuation). Cependant, on pourra noter que Bretaudeau (2010) tenta l'inversion des facteurs de qualité et Romdhane (2010) de la densité (particulièrement utile pour la détection de vides). Pour notre part, nous considérons que notre paramètre d'intérêt est V_s mais nous inverserons simultanément le paramètre V_p afin d'éviter de le figer à une valeur qui perturberait l'inversion de V_s . Ce point a été discuté dans les travaux de thèse de Groos (2013). Donc le **premier parti pris** est de considérer que l'inversion des paramètres V_p et V_s seulement, sans inverser les paramètres l'atténuation et la densité.

L'une des difficultés principales de l'inversion des formes d'onde reste la dépendance au problème initial liée à l'utilisation d'une optimisation locale. C'est pour cette raison que Masoni *et al.* (2013); Perez Solano *et al.* (2014) ont proposé des fonctions coûts alternatives afin d'obtenir une inversion plus robuste par rapport au modèle initial.

D'autre part, l'inversion de données normalisées (Groos, 2013), de la phase (Ellefsen, 2009) ou de la dispersion semble être des alternatives intéressantes afin de rendre l'inversion moins dépendante aux amplitudes. Effectivement, dans des conditions d'imagerie de proche surface les phénomènes suivant rendent la prise en compte de l'amplitude délicate :

- un mauvais *a priori* sur l'atténuation du milieu ;
- un mauvais *a priori* sur la densité ;
- la mauvaise connaissance de l'ondelette source et de la réponse instrumentale des capteurs ;
- l'hypothèse d'une propagation en 2 dimensions.

Par conséquent, le **second parti pris** dans cette thèse est de proposer des méthodologies d'inversion qui soient indépendantes des amplitudes absolues des signaux mesurés.

D'autre part certains auteurs Gélis (2005); Bretaudeau (2010); Groos (2013) ont essayé d'évaluer l'apport de données multicomposantes dans des configurations de proche surface. Globalement, ces résultats tendent à montrer que les résultats d'inversion diffèrent sensiblement selon que l'on considère la composante verticale ou la composante horizontale. Lorsque celles-ci sont combinées par simple sommation des fonctions coûts de chaque composante individuelle, on peut alors obtenir une inversion combinant de manière simple les deux composantes. Le **troisième parti pris** de ces travaux de thèse sera de considérer des données multicomposantes et de proposer des formulations alternatives afin d'exploiter cette information de manière alternative à une simple sommation de fonction coûts. L'idée sous-jacente étant d'essayer de compenser la non prise en compte des amplitudes absolues par l'utilisation de plusieurs composantes et la prise en compte explicite de la cohérence entre les différentes composantes.

C'est dans ce contexte que je propose d'exploiter de manière explicite la polarisation comme une observable alternative pour l'inversion des formes d'ondes.

0.4.2 Utilisation de la polarisation en proche surface et extension pour tenir compte du champ complet

Dans l'objectif d'imager la proche surface, la polarisation s'avère présenter certains avantages potentiels car selon Boore & Toksöz (1969) celle-ci est sensible aux couches superficielles et relativement peu sensible à l'atténuation qui comme je l'ai mentionné nous avons pris le parti de ne pas inverser. Dans un contexte d'inversion des formes d'onde, la polarisation présente au moins deux autres avantages potentiels. Tout d'abord la mesure de la polarisation est insensible à l'ondelette source (et sous certaines conditions à la réponse instrumentale des capteurs) et d'autre part celle-ci ne considère pas la phase « cinématique » donc elle n'est pas assujettie au même phénomène de sauts de phases (cycle skipping) générant des minimum locaux dans les fonctions coûts « conventionnelles » .

Cependant, l'observable de polarisation utilisé classiquement pour l'inversion des ondes de surface (Scherbaum *et al.*, 2003; Arai & Tokimatsu, 2004, 2005) est le rapport d'amplitude de la composante horizontale sur la composante verticale (appelé ici rapport HV ou HVSR) mais il s'est avéré que cet observable est mal adapté pour imager milieux non tabulaires. Ceci m'a poussé à reformuler le problème de l'inversion de la polarisation pour des contextes plus généraux.

0.5 Modélisation physique à échelle réduite multicomposantes

Dans l'objectif d'évaluer les nouvelles méthodes d'imagerie développées tout en évitant de se retrouver dans une configuration de crime inverse, l'expérimentation à échelle réduite peut être une précieuse étape entre l'inversion de données synthétiques et de données acquises sur le terrain. Les travaux de Bretaudeau *et al.* (2011) ont abouti à la mise en place d'un banc de mesure (MUSC) permettant de simuler avec une grande fidélité des configurations d'acquisition sismique multi-sources/multi-récepteurs. L'expérimentation à échelle réduite intégrant une mesure multicomposantes est un sujet relativement vierge dans la littérature. On pourra mentionner les travaux de Pant & Greenhalgh (1989c) exploitant plusieurs capteurs piézoélectriques pour mesurer le champ de force dans plusieurs directions. De Cacqueray (2013) dans ces travaux de doctorat testa plusieurs protocoles (voir figure 1) pour permettre la modélisation à échelle réduite multicomposantes. Il a retenu un procédé de mesure où l'on réalise de petites inclusions à la surface du modèle (fig 1d) pour créer un plan vertical à la surface duquel une mesure de composante vertical du champ de vitesses est réalisée permettant ainsi d'estimer la composante horizontale.

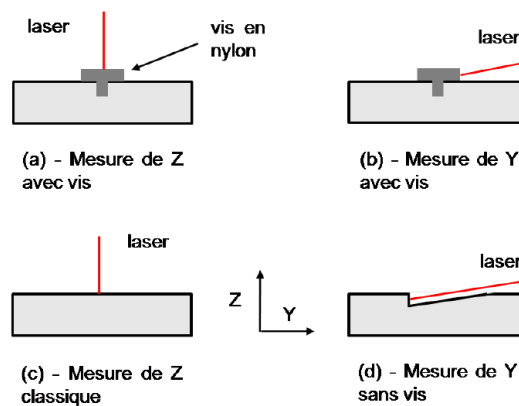


FIGURE 1 – Illustration issue des travaux de thèse de De Cacqueray (2013) où différentes méthodes furent expérimentées pour réaliser des mesures multicomposantes sans contact à la surface de modèles réduits. La mesure de la composante verticale est réalisée par un interféromètre laser Ométron VQ 500 (Bruel et Kjaer) basé sur une technologie Doppler. (a) : mesure de la composante verticale où une vis est utilisée au point de mesure ; (b) : mesure de la composante horizontale en focalisant le laser sur la face verticale de la vis. Il a été noté que le couplage généré par la vis limite l'obtention d'une mesure cohérente en terme d'amplitudes entre les composantes verticales et horizontales. (c) : mesure de la composante verticale directement à la surface du modèle (gel) ; (d) : mesure de la composante horizontale à l'aide d'une entaille à la surface du modèle (supposée petite par rapport aux longueurs d'ondes propagées).

Pour notre part, nous avons bénéficié du développement récent d'une technologie d'interférométrie laser (Blum & van Wijk, 2010) permettant l'acquisition simultanée des composantes horizontales et verticales de manière simultanée.

Afin de pouvoir obtenir des mesures multicomposantes de haute fidélité pour l'expérimentation physique à échelle réduite, nous avons entrepris l'intégration ainsi que la validation dans le banc MUSC d'un prototype d'interféromètre laser utilisant la technologie proposée par Blum & van Wijk (2010). L'objectif visé étant de reproduire des mesures multicomposantes avec des acquisitions multi-sources/multi-récepteurs sur des maquettes représentant des modèles géologiques à échelle réduite. L'intégration de cette technologie soulève un certain nombre de difficultés instrumentales pour obtenir une mesure suffisamment robuste et reproductible de la composante horizontale. À ces difficultés s'ajoutent celle de la synchronisation des voies horizontales et verticales afin de permettre la mesure d'attributs de polarisation avec précision. Enfin, les spécifications sur les modèles établis pour la mesure de la composante verticale nécessitent aussi d'être revues pour permettre la mesure de la composante horizontale.

0.6 Plan du manuscrit

Comme il a été expliqué en début de chapitre, les contributions à l'imagerie et à l'expérimentation pour la modélisation à échelle réduite seront traitées séparément.

Dans la première partie de la thèse, j'exposerai les développements liés à l'inversion de données multicomposantes. Le premier chapitre décrit les éléments techniques composant le problème direct et le principal code d'inversion utilisé dans cette thèse.

Le second chapitre présentera la formulation théorique de l'inversion de la polarisation à partir d'un formalisme adapté. Je me suis attaché à fournir l'ensemble des éléments permettant de développer et comprendre le formalisme aboutissant à une nouvelle famille de fonctions objectifs. Ensuite, j'expose le calcul du gradient par l'état adjoint. Une analyse du comportement des fonctions coûts dans des configurations canoniques est entreprise ainsi que la dérivation des noyaux de sensibilités associés aux observables de polarisation.

Les résultats d'inversion pour une perturbation simple sont présentés et comparés aux résultats issus d'autres fonctions coûts. Finalement, une discussion sur la formulation de fonctions coûts tenant compte simultanément de la phase absolue et de la polarisation est proposée.

Le troisième chapitre présente l'application numérique des développements exposés dans le chapitre précédent. Trois formulations de fonctions coûts sont comparées : la fonction coût de moindres carrés (L2) classique pour des données multicomposantes, une fonction coût de moindres carrés mais où données et calculées sont normalisées et enfin la fonction coût développée dans le chapitre précédent pour l'inversion de la polarisation.

Le quatrième chapitre traite de modélisation physique à échelle réduite. Dans ce chapitre, je présente tout d'abord une étude approfondie de la qualité des mesures obtenues sur un modèle physique de référence. Pour ce faire, divers paramètres sont étudiés : le bruit de mesure, la polarisation et la reproduction des signaux mesurés à l'aide d'un code semi-analytique développé à cet effet.

Des mesures multicomposantes, sur un modèle physique contenant une cavité très proche de la

surface sont ensuite présentées et une définition robuste des attributs instantanés de polarisation est appliquée au traitement de ces mesures.

Ce chapitre se conclura par une présentation de mesures multicomposantes pour une configuration multi-sources/multi-récepteurs sur un modèle physique présentant un milieu tabulaire avec une variation latérale.

Enfin, les conclusions générales de ce travail et diverses perspectives seront présentées.

Chapitre 1

Eléments généraux pour le problème direct et le problème inverse

L'objectif de ce chapitre est de fournir les éléments généraux concernant le problème direct et le problème inverse. La physique du problème direct et les méthodes de résolution utilisées dans le cadre de cette thèse sont décrits de manière succincte dans la première partie du chapitre. La seconde partie de chapitre fournit certains éléments concernant le problème inverse en se focalisant plus particulièrement sur la méthode d'inversion des formes d'ondes.

Sommaire

1.1	Description physique du problème : équations visco-élastodynamiques et méthodes choisies pour les résoudre	14
1.1.1	Hypothèses et équations de propagation	14
1.1.2	Quelques types d'ondes	16
1.1.3	Notions sur la paramétrisation du mouvement particulaire	16
1.1.4	Méthodes numériques utilisées	17
1.1.4.a	Méthode des éléments finis de Galerkin discontinus	18
1.1.4.b	Méthodes des différences finis en temps	19
1.1.4.c	Méthodes semi-analytiques pour les milieux tabulaires	19
1.2	Principe et intérêt de l'inversion de la forme d'onde	19
1.2.1	Quelques notations et définitions	20
1.2.2	Estimation de la signature de la source pour l'inversion des formes d'onde .	21
1.2.3	Estimation des paramètres structuraux par minimisation d'une fonctionnelle d'erreur quadratique	22
1.2.3.a	Recherche d'un minimum local à l'aide du gradient et du Hessien	22
1.2.3.b	Expression du gradient et du Hessien à l'aide de la matrice de sensibilité	23
1.2.4	Calcul du gradient à l'aide de l'état adjoint	24
1.2.5	Coûts numériques pour le calcul et l'inversion du Hessien	26
1.2.6	Quelques approximations de la méthode de Gauss-Newton	27
1.2.6.a	Calcul du « pseudo-Hessien » et son inversion	27
1.2.6.b	Méthodes de quasi-Newton et BFGS	27
1.2.6.c	Approche de Newton-tronqué	27
1.3	Nature mal posée du problème inverse : régularisation et information <i>a priori</i> .	28

1.3.0.d	Méthode bayésienne et interprétation de la régularisation	28
1.3.0.e	Quelques méthodes de régularisation classiques utilisées en pratique	30
1.3.0.f	Régularisation de Tikhonov	30
1.3.0.g	Utilisation de norme alternatives : cas de la norme ℓ_1	31
1.3.0.h	Le choix des hyper-paramètres	31
1.4	Conclusion du chapitre	31

1.1 Description physique du problème : équations visco-élastodynamiques et méthodes choisies pour les résoudre

1.1.1 Hypothèses et équations de propagation

Durant cette thèse, on considérera plusieurs hypothèses quand à la propagation des ondes sismiques :

1. le régime des déplacements est le régime des petits déplacements ;
2. on ne considérera que des matériaux élastiques ou visco-élastiques, c'est-à-dire que les lois de comportements seront considérées comme linéaires ;
3. on ne considérera que des matériaux isotropes, c'est-à-dire dont les propriétés mécaniques ne varient pas suivant les directions de l'espace ;
4. on considérera que les matériaux ne sont pas pré-contraints.

Pour un volume de contrôle V , à partir des équations du mouvement de Newton et des lois de comportement visco-élastique, on obtient le système d'équations couplées du premier ordre (Achenbach, 1973) suivant :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \mathbf{v} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v}\end{aligned}\quad (1.1)$$

avec \mathbf{C} le tenseur d'élasticité et la densité ρ , $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{f}_{ext} les forces de volume exercées dans le volume V et \mathbf{v} le vecteur vitesse particulaire.

A ces équations doivent être associées des conditions aux limites sur les valeurs de \mathbf{v} et $\boldsymbol{\sigma}$ sur les bords du volume.

La mécanique des milieux continus (Salençon, 2005) nous enseigne que sous les hypothèses de milieu élastique isotrope, le tenseur d'élasticité ne dépend que de deux paramètres indépendants le coefficient de Lamé λ et le module de cisaillement μ .

Dans le cadre de ces travaux de thèse, la géométrie du domaine de propagation est bi-dimensionnelle. C'est-à-dire que pour un domaine « réel » en 3 dimensions, on obtient une configuration équivalente la configuration bi-dimensionnelle si la physique du problème (milieu, excitation et acquisition) est invariante sur l'une des dimensions (généralement orientée par un vecteur \mathbf{e}_y). En considérant un des plans orthogonaux à \mathbf{e}_y on peut définir les vecteurs unitaires orthogonaux \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z . On orientera le vecteur \mathbf{e}_z de sorte à ce qu'il « pointe » vers le centre de la Terre (voir figure 1.2).

Dans cette configuration, les équations elasto-dynamiques 1.1 se réduisent à 5 équations du premier ordre couplées, qui s'expriment sur la base \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\rho \partial_t v_x &= \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} + f_x \\
\rho \partial_t v_z &= \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz} + f_z \\
\rho \partial_t \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_z v_z \\
\rho \partial_t \sigma_{zz} &= \lambda \partial_x v_x + (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z \\
\rho \partial_t \sigma_{xz} &= \mu (\partial_x v_z + \partial_z v_x)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

avec f_z et f_x la projection de \mathbf{f}_{ext} sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z ; v_x et v_z les projections de la vitesse particulières sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z .

En utilisant la transformée de Fourier temporelle définie selon, $\text{signal}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{signal}(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$, on peut remplacer l'opérateur de dérivation temporelle ∂_t par $i\omega$ ce qui permet de ré-écrire :

$$\begin{aligned}
i\rho\omega v_x &= \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} + f_x \\
i\rho\omega v_z &= \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz} + f_z \\
i\rho\omega \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_z v_z \\
i\rho\omega \sigma_{zz} &= \lambda \partial_x v_x + (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z \\
i\rho\omega \sigma_{xz} &= \mu (\partial_x v_z + \partial_z v_x)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans le cas d'un modèle numérique limité dans une ou plusieurs dimensions de l'espace (éléments finis, différences finies), l'utilisation de couche absorbantes de type PML (Perfectly Matched Layers) peut être employé pour reproduire des conditions de rayonnement infini. A l'intérieur de la couche PML (Chew & Weedon, 1994), les équations de propagation sont modifiées en transformant les opérateurs de dérivation ∂_r dans la direction \mathbf{r} par

$$\frac{1}{1 + \frac{i\gamma_r}{\omega}} \partial_r \tag{1.4}$$

où γ_r est nul dans le domaine de calcul et augmente progressivement à mesure que l'on s'éloigne du domaine de calcul suivant la direction r . Dans les équations 1.3, la direction r est soit la direction x et z .

L'utilisation d'une formulation fréquentielle permet d'inclure l'atténuation de manière simple par l'intermédiaire de vitesses c_p et c_s à valeurs complexes. Dans le cadre de ces travaux de thèse, une vitesse de propagation V_{prop} et un facteur de qualité Q correspond une vitesse complexe associée V_{cplx} définie selon :

$$c_{cplx} = c_{prop} \left(1 + \frac{i}{2Q} \right) \tag{1.5}$$

Dans l'ensemble de la thèse, les facteurs de qualités sont considérés indépendants de la fréquence ¹.

1. Bien que cela ne soit pas forcément physiquement réalisable à cause du non respect de la causalité (relations de Kramer-Kronig dans le régime fréquentiel) avec des facteurs de qualité constants en fréquence (Aki & Richards, 1980)

1.1.2 Quelques types d'ondes

Dans le cas de milieu homogènes (ou homogènes par morceaux), le système d'équations 1.3 peut s'écrire sous forme d'un système du second ordre (en déplacement par exemple) et l'on peut séparer les contributions des ondes de compression et de cisaillement à l'aide potentiels longitudinaux et transversaux. On identifiera alors $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ à la vitesse des ondes de compression et le terme $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ à la vitesse des ondes de cisaillement. Les déplacements générés par ces ondes suivant leur direction de propagation sont représentés aux figures 1.1a.

Afin de modéliser l'interface air-sol, nous ferons l'approximation que la densité de l'air est infiniment faible par rapport à celle du sol, ce qui amène à considérer que pour un vecteur \mathbf{n} normal à la surface : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$. Par conséquent, la surface libre est un réflecteur très important.

Dans le cas d'un milieu tabulaire, en ré-écrivant les équations de l'elastodynamique à l'aide de potentiels et en passant dans le domaine de Fourier spatial selon la composante \mathbf{x} (ou la composante radiale dans le cas tri-dimensionnel axisymétrique), et en exprimant les conditions aux limites (conditions de continuité entre les différentes couches et conditions aux limites/rayonnement aux bords du domaine), on arrive à un système d'équations aux dérivées ordinaires dans la direction z et dont la dépendance latérale est exprimée en fonction du nombre d'onde k_x (ou k_r pour le cas tri-dimensionnel axisymétrique). J'ai explicité l'expression de l'intégrale obtenue dans le cas d'un demi-espace (section 4.7.1) avec une excitation de type piston. La solution dans le domaine spatial s'obtient par résolution de l'équation aux dérivées ordinaires en z et ensuite par transformée de Fourier (ou de Hankel pour le cas tri-dimensionnel axisymétrique) inverse en k_x (ou k_r). Un certain nombre de pôles sont présents dans l'intégrande de la transformée de Fourier/Hankel spatiale inverse, les pôles respectant les conditions de radiation (ceux situés sur le feuillet de Riemann choisi) correspondent aux modes propagatifs.

Dans la configuration P-SV, les modes propagatifs (modes de Rayleigh) correspondent physiquement à une combinaison d'ondes de compression et de cisaillement évanescentes telles que les conditions de continuité entre couches et la condition de surface libre soient respectés (Aki & Richards, 1980; Malischewsky, 1987).

Du fait que cette onde ne se propage pas en profondeur sa décroissance géométrique est moindre que celle des ondes de volume dans sa direction de propagation.

De manière générale, pour des milieux stratifiés tabulaires non dissipatifs, les ondes de surface ont un comportement dispersif et les axes de leurs ellipses de polarisation sont alignés avec l'axe de la stratification. Par conséquent, la différence de phase entre les composantes verticales et horizontales pour les modes propagatifs est de $\pm 90^\circ$. Une illustration des déplacements particuliers générés par ces ondes est représentée à la figure 1.1b.

1.1.3 Notions sur la paramétrisation du mouvement particulier

Afin de faciliter la compréhension du chapitre suivant, nous allons introduire quelques notions élémentaires permettant de décrire les caractéristiques du mouvement particulier d'un point matériel. Dans le cas d'une onde mono-chromatique (de pulsation ω), le mouvement particulier a une trajectoire en forme d'ellipse.

Le mouvement particulier d'une onde mono-chromatique dans le plan $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ est représenté à la figure 1.2. Pour une mesure bi-composante normalisée, cette ellipse peut être entièrement décrite avec

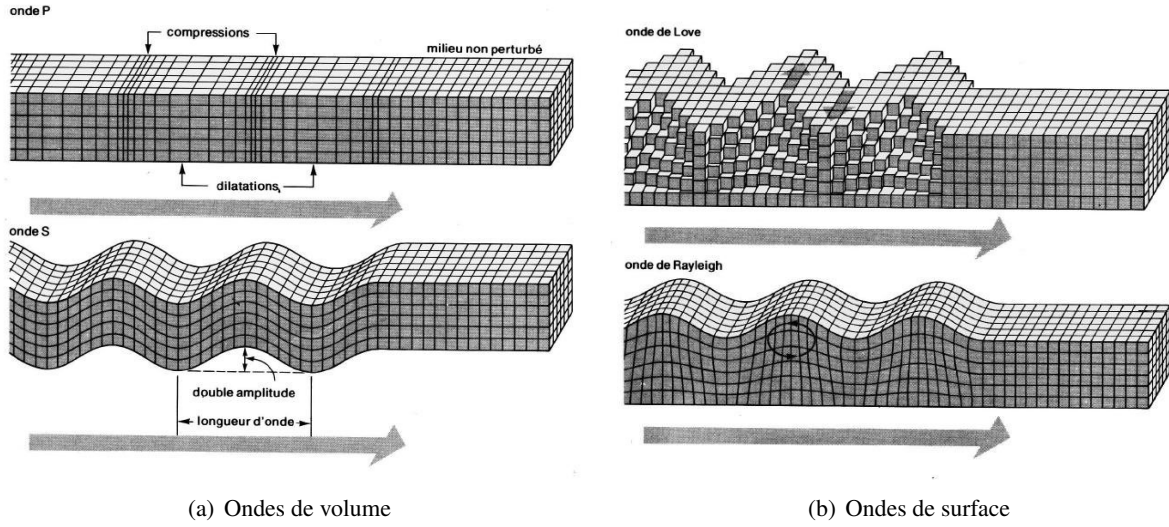


FIGURE 1.1 – Illustration de différents types d’ondes se propageant dans les milieux isotropes. (a) : Ondes de volume ; (b) : Ondes de surface. Les flèches grises indiquent la direction et le sens de propagation des ondes. Illustration adaptée de Bolt (1976).

les angles d’inclinaison ξ et d’ellipticité ψ représentés sur la figure 1.2.

Si l’on considère les transformées de Fourier $u_x(\omega)$ et $u_z(\omega)$ des composantes verticales et horizontales (que l’on note u_x et u_z), on peut montrer que l’expression de l’angle d’inclinaison est :

$$\xi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\Re [u_x^* u_z]}{|u_x|^2 - |u_z|^2} \right) \quad (1.6)$$

que l’expression de l’angle d’ellipticité

$$\psi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\Im [u_z^* u_x]}{|u_x|^2 + |u_z|^2} \right) \quad (1.7)$$

L’angle inclinaison ξ est compris entre 0° et 180° tandis que l’angle d’ellipticité ψ est compris entre -45° et 45° . Le signe de l’angle d’ellipticité indique la direction du mouvement particulière (représenté par les flèches bleues sur la figure 1.2).

Pour une description géométrique plus générale de la polarisation utilisant les tenseurs de polarisation, le lecteur est renvoyé à Samson & Olson (1980).

Dans le cas bi-composantes la polarisation peut aussi être décrite (de manière imparfaite) à l’aide du rapport de la composante verticale sur la composante horizontale (ou d’autres variantes).

On peut aussi mentionner le formalisme proposé par Morozov & Smithson (1996) basé sur une extension du concept de signal analytique pour des signaux multicomposantes, ce formalisme est exposé dans la section 4.7.

1.1.4 Méthodes numériques utilisées

Durant cette thèse, j’ai été amené à utiliser plusieurs codes de calcul. Je ne rentrerai pas dans les détails des méthodes associées à ces codes, je renverrai le lecteur vers des références adéquates.

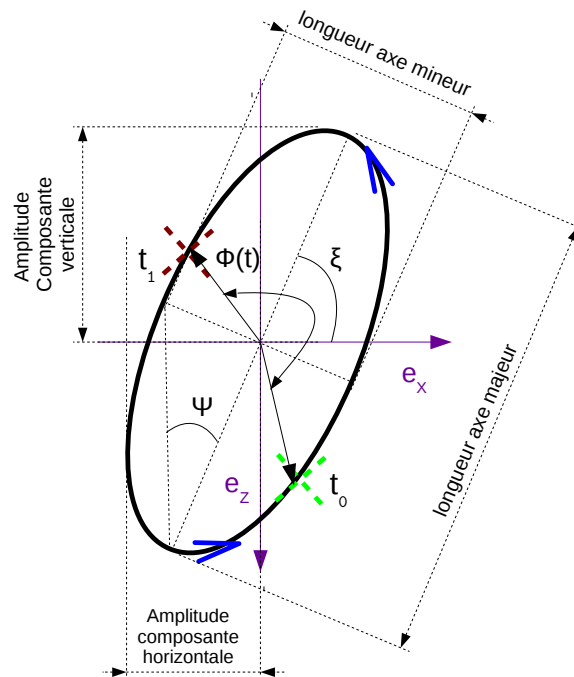


FIGURE 1.2 – Illustration du mouvement particulaire apparent d’une onde mono-chromatique. Les axes mineurs et majeurs de l’ellipse sont représentés en pointillés. La direction du mouvement particulaire est représentée par les flèches bleues. L’angle d’inclinaison de l’ellipse ξ correspond à l’angle entre l’axe horizontal et l’axe majeur de l’ellipse. La phase à l’origine est indiquée par la croix verte et au moment t_1 , la phase vaut $\phi(t_1)$.

1.1.4.a Méthode des éléments finis de Galerkin discontinus

Pour les simulations et les inversions dans des milieux non-tabulaires tenant compte de la visco-élasticité, j’ai principalement utilisé un code de calcul bi-dimensionnel (FWT2D-PSV) basé sur la méthode des éléments finis de Galerkin discontinus (GD).

Une explication pédagogique de la méthode (GD) dans le cas d’un domaine mono-dimensionnel est proposée dans le manuscrit thèse de Etienne (2011) et la formulation utilisée est détaillée dans le manuscrit thèse de Brossier (2009).

La méthode de Galerkin discontinue utilisée (Brossier *et al.*, 2008) repose sur une formulation faible des équations de l’électrodynamique (obtenue à partir des équations 1.3). Dans le cas présent, pour chaque élément les fonctions champs et tests sont interpolées à l’aide de polynômes d’interpolation d’ordres peu élevés (P0, P1 ou P2).

Les champs entre les différents éléments sont liés par des conditions de flux (dans le cas présent l’approximation des flux centrés est utilisée) entre les frontières de chaque élément.

Tout comme les éléments finis conventionnels, cette méthode permet une adaptation spatiale du maillage (h-adaptivité) permettant notamment d’adapter celui-ci à la topographie ou aux différentes vitesses/contrastes du milieu. Cependant par rapport aux éléments finis conventionnels (continus), la méthode GD présente quelques différences notables :

- les discontinuités des champs entre les éléments peuvent être prises en compte (comme dans le cas de la contrainte tangentielle à une interface liquide-solide) ;

– il est possible de faire varier dans un même domaine l'ordre des éléments (p-adaptivité).

J'ai principalement utilisé pour mes simulations des éléments d'ordre 0 sur un maillage régulier, avec en surface une couche non structurée très fine associée à des éléments d'ordre 1 (afin de mieux reproduire la répartition spatiale d'une source ponctuelle).

Dans le domaine fréquentiel, après discrétisation par la méthode GD d'une forme faible des équations 1.3, on obtient un système d'équations linéaires de la forme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{u} \quad (1.8)$$

où \mathbf{u} est le vecteur contenant les degrés de liberté (vitesses et contraintes), $\mathbf{Z}(\omega)$ une matrice impédance dépendant des paramètres du milieu et \mathbf{s} pour les termes sources.

La matrice $\mathbf{Z}(\omega)$ est factorisée sous forme triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (factorisation LU) de manière à ensuite permettre une rapide résolution l'équation pour de multiples sources.

1.1.4.b Méthodes des différences finis en temps

De manière plus anecdotique (principalement pour valider les gradients/noyaux de sensibilités basées sur des fonctions coûts originales par différences finies ou pour faire des tests numériques à partir de signaux large bandes), j'ai utilisé un code de calcul (code Toy2D) en temps basé principalement sur deux types de Stencils de différences finies (DF) proposés par Virieux (1986) et Levander (1988). Ces codes ont été principalement développés par Romain Brossier.

1.1.4.c Méthodes semi-analytiques pour les milieux tabulaires

Par ailleurs, afin de reproduire de manière quasi-exacte des configurations tri-dimensionnelles avec des sources étendues, j'ai développé un code numérique semi-analytique basé sur l'intégration (possiblement dans le plan complexe) des équations d'ondes dans le domaine spectral. Une discussion sur le cas du demi-espace est proposée à section 4.7.1. Outre l'efficacité de la méthode pour des configurations particulières (milieux tabulaires), cette approche à l'avantage de permettre de mieux comprendre la physique de la propagation et le passage d'une propagation P-SV (bi-dimensionnelle) à une propagation axisymétrique se fait de manière très rapide.

Étant donné que ce code de calcul n'était pas arrivé à maturité pour les milieux multicouches (expressions dans le domaine $f - k$ obtenues à l'aide de la méthode des « Stiffness matrices » proposée par Kausel & Roësset (1981)), j'ai utilisé un code de calcul (SKB2, (Dietrich, 1988)) développé par Michel Dietrich pour l'étude des fonctions coûts et l'évaluation des sensibilités. Ce code calcule les champs dans le domaine $f - k$ à partir d'une méthode proposée par Kennett (1974).

Enfin, pour obtenir les courbes de dispersion et la polarisation des modes propagatifs, j'ai utilisé le code Geopsy développé par Wathelet (2005).

1.2 Principe et intérêt de l'inversion de la forme d'onde

Dans un premier temps, nous allons exposer le principe général de l'inversion de la forme d'onde puis nous discuterons du processus de minimisation de la fonction coût. Enfin nous aborderons la nature mal posée du problème inverse et du rôle de la régularisation.

Dans l'introduction, nous avons remarqué dans la partie concernant les méthodes d'imagerie conventionnelles utilisées que ces techniques n'utilisent seulement qu'une partie des signaux mesurés (temps de premières arrivées, ondes réfléchies, dispersion des ondes de surface ...). L'idée générale de l'inversion des formes d'onde est de pouvoir utiliser l'ensemble du signal. Si l'on ne présuppose pas de symétries particulières au milieu, la modélisation des signaux doit se faire à l'aide d'une méthode numérique suffisamment générale comme par exemple en utilisant des méthodes du type différences finies ou éléments finis.

Il existe plusieurs manières de réaliser une inversion d'un champ d'onde complet. Certaines méthodes utilisent directement de la relation Lippmann-Schwinger, décrivant la perturbation de la fonction de Green lorsque le milieu est modifié. Pour résoudre cette équation et ainsi remonter à la perturbation du milieu, il est par exemple possible d'utiliser des séries de Neumann jusqu'à un certain ordre (e.g. Weglein *et al.* (2003)).

Une manière différente de formuler le problème de l'imagerie quantitative est d'utiliser une fonctionnelle d'erreur (Tarantola, 2005; Chen, 2011) que l'on cherche à minimiser afin de trouver le modèle le plus « réaliste ». Cette manière de faire permet non seulement de tenir compte de l'ensemble des phénomènes physiques présents dans la propagation des ondes élastiques mais aussi d'introduire un traitement probabiliste du problème fournissant un cadre théorique pour introduire de l'information *a priori* et permettant d'intégrer l'information concernant le bruit des données expérimentales (voire même les erreurs introduites par une modélisation approximative).

Les principes de l'inversion des formes d'ondes ont été formulés au milieu des années 80 par Lailly (1983) et Tarantola (1984). Avec le développement des capacités des calculateurs et la formulation de la méthode dans le domaine fréquentiel par Pratt (1990), la méthode devint plus accessible et les exemples d'applications se multiplièrent. La première application numérique bidimensionnelle a été réalisée par Gauthier *et al.* (1986), la formulation élastique par Mora (1987) et des reconstructions tridimensionnelles à partir de données terrain commencent à apparaître dans des contextes industriels (Sirgue *et al.*, 2011).

Pour notre part, la formulation utilisée est une formulation entièrement fréquentielle en deux dimensions. Après la définition de quelques notations, nous exposerons les principes de la méthode.

1.2.1 Quelques notations et définitions

Nous appellerons « observables » les quantités physiques qui peuvent être directement mesurées. Dans le cas présent il s'agira des vitesses particulières (dans le cas où on utilise des géophones) ou des déplacements particuliers (cas des mesures réalisées avec le banc de mesures MUSC). Nous appellerons « paramètres du milieu » les différents coefficients présents dans les équations de propagation des ondes sismiques. Il pourra par exemples s'agir de la distribution des vitesses de ondes de compression ou de cisaillement, des densités ou des facteurs de qualité. Dans une problématique de proche surface, il est fréquent de chercher à estimer les vitesses de compression et de cisaillement du milieu (ou ensemble de paramètres fournissant une paramétrisation équivalente). L'ensemble de ces paramètres seront rassemblés dans le vecteur \mathbf{m} tandis que l'ensemble des observables seront rassemblés dans un vecteur \mathbf{d} , la dépendance par rapport aux paramètres étant implicite mais dans certains cas afin d'insister sur cette dépendance, nous écrirons $\mathbf{d}(\mathbf{m})$.

Pour modéliser la dépendance entre les observables et les paramètres du milieu, on utilisera l'opérateur \mathcal{G} (non-linéaire par rapport à \mathbf{m}) :

$$\mathbf{d} = \mathcal{G}(\mathbf{m}) \tag{1.9}$$

D'autre part, puisque l'on utilise une modélisation fréquentielle du problème direct, on peut écrire la forme discrétisée de celui-ci suivant :

$$\mathbf{s} = \mathbf{Z}_{\mathbf{m},\omega} \mathbf{u} \quad (1.10)$$

avec \mathbf{s} le vecteur contenant des termes sources et \mathbf{u} les observables pour l'ensemble des degrés de liberté et $\mathbf{Z}_{\mathbf{m},\omega}$ la matrice impédance.

Pour la suite, nous omettrons la dépendance de Z_m en \mathbf{m} et en fréquence (pulsation ω) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés possibles.

Comme l'ensemble des observables n'est pas connu dans l'ensemble du milieu mais seulement aux endroits où les mesures sont réalisées, nous définissons à l'instar de Brossier (2009) un opérateur **Proj** de restriction du champ aux positions des récepteurs. Cet opérateur projette le champ complet aux seules positions des mesures (on donnera un sens légèrement différent à cet opérateur lors de l'inversion de la polarisation au chapitre suivant). Ainsi nous avons : $\mathbf{d} = \mathbf{Proj}[\mathbf{u}]$.

Dans l'objectif d'alléger les notations, il est important de noter que pour l'ensemble du chapitre, le formalisme est introduit pour une unique source sismique. Cependant, la généralisation à plusieurs sources sismiques est immédiate : pour obtenir la fonction coût globale, il suffit de sommer les différentes fonctions coûts calculées pour chacune des sources du dispositif. Ainsi du fait de la linéarité de l'opérateur gradient, le gradient correspondant aux contributions de toutes les sources s'obtient en sommant les gradients obtenus individuellement avec les différentes sources.

D'autre part dans le cadre de mes travaux, j'utiliserai la notation de Dirac. Une brève introduction à cette notation est présentée dans la section 2.10.

1.2.2 Estimation de la signature de la source pour l'inversion des formes d'onde

En pratique étant donné que l'ondelette source effective n'est pas connue précisément² il est nécessaire pour chaque source³ d'estimer sa « signature » fréquentielle $s(\omega)$ définie suivant : $\mathbf{s}(\omega) = \mathbf{s}'(\omega)s(\omega)$, où $\mathbf{s}'(\omega)$ correspond à l'excitation « spatiale » exacte de la source mais avec une dépendance fréquentielle $s(\omega)$ plus ou moins bien connue.

La section 2.5.2 propose une rapide revue des différentes stratégies pour la prise en compte l'estimation de l'inversion de la source dans le cadre de la méthode FWI.

L'approche « conventionnelle » proposée par Pratt & Shipp (1999) est utilisée dans l'ensemble du manuscrit. Elle consiste à estimer l'ondelette source alternativement avec l'inversion des paramètres du milieu en résolvant un problème inverse linéaire consistant pour une fréquence donnée à trouver $s(\omega)$ minimisant la fonctionnelle :

$$\left(\sum^{\text{src}} \right) \left\| \mathbf{d}_{\text{obs}}(\omega) - \mathbf{Proj} \mathbf{Z}_{\mathbf{m},\omega}^{-1} \mathbf{s}'(\omega) s(\omega) \right\|^2 \quad (1.11)$$

Étant donné que dans l'équation 1.11 on estime seulement les coefficients de l'ondelette source $s(\omega)$ (on ne cherche pas à estimer simultanément les paramètres du milieu), il s'agit d'un problème inverse linéaire de dimensions modestes et une solution est facilement calculable numériquement (d'autant que l'on peut retrouver simplement $\mathbf{Proj} \mathbf{Z}_{\mathbf{m},\omega}^{-1} \mathbf{s}'(\omega)$ à partir des simulations des données

2. Dans certains cas, on ne peut pas contrôler la forme de l'ondelette source (comme par exemple avec des explosifs ou un tir à la masse) et souvent dans les cas où l'on contrôle électroniquement l'ondelette source celle-ci ne correspond pas à l'ondelette source effective du fait des effets de couplages mécaniques de la source avec le milieu (ce point est discuté plus en détails dans la partie 4.7.2).

3. Si l'on estime que la source est reproductible pour l'ensemble des tirs réalisés, on peut alors estimer une unique ondelette source.

acquises). Une discussion détaillée sur la résolution de l'équation 1.11 est proposée dans la partie 4.7.2 où l'on estime l'ondelette source à partir de données expérimentales à l'aide d'un filtrage de Wiener.

On doit noter que l'inversion de la source peut considérablement étendre l'espace nul du problème inverse (estimation des paramètres structuraux) et poser des problèmes de convergence.

1.2.3 Estimation des paramètres structuraux par minimisation d'une fonctionnelle d'erreur quadratique

L'objectif premier est de définir une fonction $\mathcal{E}(\mathcal{G}(\mathbf{m}), \mathbf{d}_{\text{obs}})$ permettant de mesurer l'adéquation entre les données mesurées \mathbf{d}_{obs} et les données calculées $\mathcal{G}(\mathbf{m})$ en fonction du vecteur de paramètres \mathbf{m} . On définira cette fonctionnelle \mathcal{E} de sorte à ce qu'elle soit minimale lorsque les paramètres estimés correspondent aux paramètres plus « vraisemblables »⁴.

Il existe plusieurs manières de définir cette fonction, en s'appuyant sur des considérations probabilistes (formalisme bayésien (Kaipio & Somersalo, 2005; Tarantola, 2005)) mais aussi suivant des considérations pratiques (pour quelques exemples en géophysique voir Scales & Gersztenkorn (1988); Crase *et al.* (1990); Brossier *et al.* (2010a)) ayant pour objectif de rendre l'estimation du paramètre \mathbf{m} plus robuste.

Dans cette partie, nous formulerons le problème inverse pour une fonctionnelle d'erreur quadratique puis nous introduirons progressivement différents développements que l'on retrouve dans la littérature géophysique.

Dans un premier temps, la fonctionnelle d'erreur considérée s'écrit comme un produit des vecteurs résidus conjugués pondéré par une matrice hermitienne définie positive \mathbf{W}_D :

$$\mathcal{E}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|_{\mathbf{W}_D} = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^\dagger \mathbf{W}_D (\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) \quad (1.12)$$

Dans ce manuscrit, nous utiliserons aussi la notation de Dirac :

$$\mathcal{E}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \rangle_{\mathbf{W}_D} \quad (1.13)$$

Dans l'ensemble du document, si l'on ne précise pas \mathbf{W}_D ceci signifie implicitement que l'on considère que $\mathbf{W}_D = \mathbf{I}$. Dans les développements qui suivent afin d'alléger les notations, on considérera sans perte de généralité que $\mathbf{W}_D = \mathbf{I}$.

On peut noter qu'une discussion sur les problèmes inverses non-linéaires formulés à l'aide de fonctions coûts quadratiques est proposée dans Tarantola & Valette (1982).

1.2.3.a Recherche d'un minimum local à l'aide du gradient et du Hessien

Étant donné le nombre important de paramètres estimés dans les problèmes d'imagerie quantitative (surtout pour des géométries bi ou tri-dimensionnelles) et le coût numérique associé à la résolution d'un problème direct « réaliste » seules les méthodes d'optimisation locales sont abordables numériquement à l'heure actuelle.

Si l'on approxime (1.13) à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 autour du vecteur paramètre \mathbf{m}_0 , on obtient :

$$\mathcal{E}(\mathbf{m}) = \mathcal{E}(\mathbf{m}_0) + \langle \mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}_0)) | (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \rangle + \langle \mathbf{m} - \mathbf{m}_0 | \mathbf{H}_{\mathcal{E}(\mathbf{m}_0)} | \mathbf{m} - \mathbf{m}_0 \rangle + \mathcal{O}(\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|^3) \quad (1.14)$$

4. Ceci peut être justifié dans le cadre du formalisme Bayésien (section 1.3.0.d)

Si on suppose que le reste de l'équation est négligeable (ce qui serait vrai si l'opérateur \mathcal{G}_m était linéaire), et que la matrice Hessienne est strictement définie positive, alors une condition nécessaire pour que le vecteur \mathbf{m}_{\min} soit un minimum local de la fonctionnelle est que $\mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}_{\min})) = \mathbf{0}$ est que :

$$\mathbf{m}_{\min} = \mathbf{m}_0 - [\mathbf{H}(\mathcal{E}(\mathbf{m}_0))]^{-1} (\mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}_0))) \quad (1.15)$$

Si la matrice Hessienne n'est pas strictement définie positive mais définie simplement positive, il est possible qu'il existe plusieurs minima (locaux ou globaux). Même si la matrice est strictement définie positive mais conditionnée (rapport des valeurs propres extrêmes) (Idier, 2011) alors le problème de minimisation peut-être instable.

Comme la dépendance de la fonctionnelle d'erreur à \mathbf{m} n'est pas quadratique (car l'opérateur \mathcal{G}_m est non-linéaire), on peut utiliser un processus de minimisation itératif basé sur une approximation d'ordre 2. La condition indispensable permettant la convergence de ce type de processus de minimisation locale vers un maximum global est que le vecteur paramètre initial soit situé dans une zone où la fonction coût soit convexe. Ceci montre l'importance du choix du modèle initial et de la largeur des domaines de convexité lorsque l'on emploie des méthodes d'optimisation locales.

Dans ce processus itératif, nous notons $\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^{(k)}$ le vecteur associé à l'itération k et ainsi la valeur initiale des paramètres $\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^0$. L'idée générale du processus itératif est de déduire $\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^{(k+1)}$ à partir de $\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^{(k)}$. Comme dans pour les équations précédentes, nous supposons donc que $\Delta_{\widetilde{\mathbf{m}}}^{(k)} = \mathbf{d}_{\widetilde{\mathbf{m}}}^{(k+1)} - \mathbf{d}_{\widetilde{\mathbf{m}}}^{(k)}$ est suffisamment petit pour réaliser un développement limité de la fonctionnelle d'erreur à l'ordre 2, ce qui aboutit à :

$$\Delta_{\widetilde{\mathbf{m}}}^{(k+1)} = - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^{(k)})}{\partial \mathbf{m}^2} \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}^{(k)})}{\partial \mathbf{m}} \quad (1.16)$$

Si la dépendance de $\mathcal{G}(\mathbf{m})$ aux paramètres du milieu était linéaire alors le problème de minimisation de la fonctionnelle 1.12 serait quadratique et donc la convergence vers un minimum serait assurée en une unique itération (résolution de l'expression 1.16). Cependant comme $\mathcal{G}(\mathbf{m})$ dépend non-linéairement de \mathbf{m} , il est nécessaire de réaliser plusieurs itérations et de pondérer de l'incrément $\Delta_{\widetilde{\mathbf{m}}}^{(k+1)}$ par un pas de descente (facteur réel positif). Une méthode consiste (Gélis, 2005; Virieux & Operto, 2009) à choisir deux vecteurs paramètres « un peu » différents et supposer une variation parabolique de la fonction coût. La valeur du pas sera alors déterminée en cherchant une paramétrisation locale de la fonction coût par une parabole. Il s'agit aussi de la méthode employée dans le code d'inversion FWT2D-PSV utilisé durant cette thèse.

1.2.3.b Expression du gradient et du Hessien à l'aide de la matrice de sensibilité

Dans les expressions précédentes, l'opérateur du problème direct n'apparaît pas explicitement dans l'expression du gradient ni dans l'expression du Hessien. Afin de faire apparaître cet opérateur, nous allons introduire la matrice de sensibilité (aussi appelée matrice des dérivées de Fréchet). Considérant la dérivée de la fonctionnelle d'erreur, il est simple de montrer que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m})) &= \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \\
&= -\Re \left[\left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right)^\dagger \Delta \mathbf{d}_m \right] \\
&= -\Re \left[\mathbf{J}^\dagger \Delta \mathbf{d}_m \right]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

\mathbf{J} étant la matrice de Fréchet, définie par $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$ et $\Delta \mathbf{d}_m$ le résidu de la fonction coût tel que $\Delta \mathbf{d}_m = \mathbf{d}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}$

On peut aussi facilement établir l'expression du Hessien en fonction des matrices de sensibilité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m &= \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} \\
&= \underbrace{\Re \left[\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} \right]}_{\mathbf{H}_A} + \underbrace{\Re \left[\frac{\partial \mathbf{J}^\dagger}{\partial \mathbf{m}} \Delta \mathbf{d}_m \right]}_{\mathbf{H}_B}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

On peut noter que l'expression complète du Hessien (1.19) fait apparaître les dérivées des matrices jacobiennes dans l'expression dans le terme \mathbf{H}_B . Dans le cas d'un opérateur $\mathcal{G}(\mathbf{m})$ linéaire, ces dérivées seront forcément nulles et donc $\mathbf{H} = \mathbf{H}_A$. Dans ce cas, la solution du problème inverse peut-être exprimée à partir des dérivées de Fréchet :

$$\mathbf{m}_{\min} = \mathbf{m}_0 + \Re \left[\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} \right]^{-1} \Re \left[\mathbf{J}^\dagger \Delta \mathbf{d}_m \right] \tag{1.19}$$

1.2.4 Calcul du gradient à l'aide de l'état adjoint

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les calculs du gradient et du Hessien peuvent demander d'évaluer la matrice Jacobienne voire même la dérivée par rapport aux paramètres de cette matrice (pour le Hessien complet). La méthode de l'état adjoint permet d'obtenir une évaluation exacte du gradient à un coût numérique particulièrement économique (Vogel, 2002). On notera que c'est cette formulation qui a permis de rendre numériquement accessible l'inversion de la forme d'onde avec les capacités de calculs actuelles. Pour la sismique, ce formalisme a été introduit par Lailly (1983) et Tarantola (1984).

Il existe plusieurs manières d'obtenir l'expression du gradient par le formalisme de l'état adjoint (Virieux & Operto, 2009). On peut notamment redéfinir le problème inverse sous la forme d'une minimisation sous contraintes et utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange (Bunks *et al.*, 1995; Plessix, 2006). J'ai utilisé cette méthode pour obtenir les expressions de plusieurs gradients pour des fonctions coût « non conventionnelles ». Pour la fonction coût présentée dans cette section, il existe une autre méthode basée sur une hypothèse d'indépendance de la source au milieu et la réciprocité proposée par Pratt *et al.* (1998).

Si nous supposons que la source est indépendante du milieu, la dérivée de celle-ci par rapport à une variation infinitésimale d'un paramètre du milieu ∂m_j doit être nulle, ce qui implique :

$$\frac{\partial(\mathbf{Z}\mathbf{u})}{\partial m_j} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u} + \mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_j} = 0$$

d'où :

$$\mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{m})}{\partial m_j} = -\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u}(\mathbf{m}) \quad (1.20)$$

En comparant de manière formelle l'équation (1.20) et l'expression (1.10), on peut identifier dans l'équation précédente le terme $-\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u}(\mathbf{m})$ à un terme source (opposé à la variation ∂m_j) et le terme $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_j}$ au champ induit par le terme source précédent. De plus si on remarque que le terme $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{m})}{\partial m_j}$ correspond à la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice de Fréchet et comme nous ne considérons pas l'ensemble du champ mais seulement les observations réalisées aux positions des mesures, on obtient alors :

$$\mathbf{J}_j = -\mathbf{Proj} \left[\mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u}(\mathbf{m}) \right] \quad (1.21)$$

En insérant (1.21) dans l'expression (1.17), on peut déduire une nouvelle expression du gradient $\mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}), j)$ correspondant à une variation ∂m_j de la $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}), j) &= -\Re \left[\mathbf{J}_j^\dagger \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*} \right] \\ &= \Re \left[\left(\mathbf{Proj} \left[\mathbf{Z}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right) \mathbf{u} \right] \right)^t \Delta \mathbf{d}(\mathbf{m})^* \right] \quad (\text{d'après (1.20)}) \\ &= \Re \left[\mathbf{u}^t \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right)^t \mathbf{Z}^{-1t} \mathbf{Proj}^t \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*} \right] \\ &= \Re \left[\mathbf{u}^t \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right)^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*} \right] \quad (\text{symétrie de la matrice } \mathbf{Z}) \quad (1.22) \end{aligned}$$

Si on considère l'ensemble des n_{para} perturbations ∂m_j de \mathbf{m} on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m})) &= \sum_{j=1}^{n_{para}} \mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}), j) \\ &= \sum_{j=1}^{n_{para}} \Re \left[\mathbf{u}^t \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right)^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*} \right] \\ &= \Re \left[\mathbf{u}^t \sum_{j=1}^{n_{para}} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right)^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*} \right] \quad (1.23) \end{aligned}$$

On peut « physiquement » interpréter le gradient (Tarantola, 1986) pour chaque couple source-récepteur comme une quantité proportionnelle au champ émis par la source \mathbf{u} corrélé (sans décalage temporel) par le résidu rétro-propagé à la position du récepteur dans le milieu estimé $\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{m}^*}$ (et lui même multiplié par la matrice $\sum_{j=1}^{n_{para}} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j}$). Pour chaque perturbation, la matrice $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j}$ peut s'interpréter comme la perturbation de la matrice impédance \mathbf{Z} due à une variation ∂m_j du paramètre m_j . Notons que pour calculer le gradient, il n'est pas explicitement demandé de calculer les matrices de sensibilité \mathbf{J} .

Si on analyse l'expression (1.23), on remarquera que pour un couple source-récepteur donné il est nécessaire de résoudre uniquement deux problèmes directs pour évaluer le gradient.

1.2.5 Coûts numériques pour le calcul et l'inversion du Hessien

Suivant l'expression (1.19), le hessien peut s'exprimer comme la somme de deux termes : un terme \mathbf{H}_a directement calculable par un produit des dérivées de Fréchet tel que :

$$\mathbf{H}_a(\mathcal{E}(\mathbf{m})) = \Re \left(\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} \right) \quad (1.24)$$

et un terme \mathbf{H}_b qui demande de connaître la dérivée de \mathbf{J} :

$$\mathbf{H}_b(\mathcal{E}(\mathbf{m})) = \Re \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{m}} \right)^\dagger \Delta \mathbf{d}_m^* \quad (1.25)$$

Si on approxime le Hessien par le terme \mathbf{H}_a on parle de méthodes de Gauss-Newton.

Si on reprend l'expression (1.20) et que l'on l'insère dans l'expression du premier terme du gradient (1.24), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{a,j,k}(\mathcal{E}(\mathbf{m})) &= \Re \left[\left(\mathbf{Proj} \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u}_m \right)^\dagger \left(\mathbf{Proj} \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_k} \mathbf{u}_m \right) \right] \\ &= \Re \left[\mathbf{u}^{*t} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \right)^{*t} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t \mathbf{Proj} \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_k} \mathbf{u}_m \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

D'après l'expression 1.26, il est nécessaire de calculer la matrice $\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Proj}^t$, ce qui revient donc à calculer autant de problèmes directs qu'il y a d'éléments non nuls dans l'opérateur \mathbf{Proj} . Ceci revient à calculer (pour une source donnée) autant de problèmes directs que le nombre de récepteurs multiplié par le nombre de composantes mesurées.

Néanmoins, les méthodes de Gauss-Newton présentent plusieurs avantages :

- pour une fonctionnelle quasi-quadratique la convergence est généralement plus rapide que pour des méthodes de type gradient-conjugué (Bierlaire, 2006; Nocedal & Wright, 1999) ;
- elles permettent dans une certaine mesure de corriger les artefacts générés par la bande passante limitée des sources/récepteurs et la couverture angulaire incomplète (Pratt *et al.*, 1998) ;
- lorsque l'inversion simultanée de plusieurs paramètres (comme par exemple les vitesses et densité) est importante (comme c'est le cas pour la proche surface), le Hessien permet d'ajuster l'importance relative des différents paramètres (Brossier *et al.*, 2009) ;
- le Hessien peut être utile pour obtenir la matrice de covariance associée aux paramètres inversés.

Si on utilise dans l'inversion le Hessien complet, on parle alors de méthode de Full-Newton. Pour évaluer le terme \mathbf{H}_b , d'après Pratt *et al.* (1998) en utilisant le formalisme de l'état adjoint il est alors nécessaire d'évaluer n_{para} problèmes directs supplémentaires par rapport à la méthode de Gauss-Newton. Pratt *et al.* (1998) illustrent l'intérêt de cette méthode sur un cas particulier où les effets de diffractions multiples sont importants. Néanmoins, outre le calcul de problèmes de n_{para} problèmes directs la méthode Full-Newton présente un autre inconvénient. En effet, on ne peut pas assurer que le Hessien soit défini positif (Pratt *et al.*, 1998) ce qui peut induire des difficultés pour converger vers un minimum.

Autant pour les méthode de Gauss-Newton que de Full-Newton étant donné que le nombre de paramètres n_{para} à estimer est élevé et que la matrice hessienne est de taille $n_{para} \times n_{para}$ l'inversion de la matrice Hessienne devient rapidement numériquement prohibitive.

Pour les raisons évoquées, il est particulièrement intéressant de chercher des approximations économiques permettant d'estimer l'effet du Hessien.

1.2.6 Quelques approximations de la méthode de Gauss-Newton

1.2.6.a Calcul du « pseudo-Hessien » et son inversion

Afin d'éviter le calcul des problèmes directs nécessaires à l'évaluation explicite de $\mathbf{H}_{a,j,k}(\mathcal{E}(\mathbf{m}))$ (eq. 1.26), Shin *et al.* (2001) propose d'approximer le Hessien par :

$$\mathbf{H}_{a,j,k}(\mathcal{E}(\mathbf{m})) \approx \Re \left[\left(\mathbf{Proj} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u} \right)^\dagger \left(\mathbf{Proj} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j} \mathbf{u} \right) \right] \quad (1.27)$$

Les matrices $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial m_j}$ étant très creuses, l'évaluation du Hessien devient alors très peu coûteuse numériquement, cependant il reste le problème de l'inversion de $\mathbf{H}_{a,j,k}(\mathcal{E}(\mathbf{m}))$.

Une manière peu coûteuse mais particulièrement approximative d'évaluer l'inverse du Hessien peut consister à utiliser l'expression 1.27 et n'inverser que la diagonale de cette matrice. Cette méthode pourra aussi servir de méthode d'initialisation ou de préconditionnement pour des méthodes itératives plus précises comme le propose Brossier (2011) avec la méthode l-BFGS.

1.2.6.b Méthodes de quasi-Newton et BFGS

La méthode BFGS (Nocedal & Wright, 1999; Bierlaire, 2006) utilise les évaluations des précédents gradients afin d'approximer de manière efficace et peu coûteuse l'inverse de la matrice Hessienne. Il existe plusieurs variantes de cette méthode, le principe général consiste en une estimation itérative du Hessien à l'aide des gradients précédents à l'aide d'une méthode de la sécante.

Cette méthode permet aussi d'estimer l'inverse du Hessien à l'itération $k + 1$ (que l'on appelle $\mathbf{H}^{-1(k+1)}$) sans inversion de matrices à l'aide du lemme d'inversion matricielle (à partir de $\mathbf{H}^{-1(k)}$). En terme de mémoire, cette méthode demande tout de même de stocker la matrice hessienne ce qui s'avère prohibitif pour les problèmes inverses de grandes dimensions.

Il existe une variante de la méthode BFGS appelée méthode l-BFGS (Liu & Nocedal, 1989) qui permet directement d'évaluer la contribution du Hessien sur le gradient à l'itération $k + 1$, c'est à dire d'obtenir directement la matrice $\mathbf{H}^{-1(k+1)} \mathbf{grad}(\mathcal{E}(\mathbf{m}^{(k+1)}))$. Ce calcul est réalisé de manière économique (sans inversion de la matrice Hessienne) et en ne stockant qu'un nombre réduit de vecteurs de dimensions n_{para} . Il s'agit de la méthode d'optimisation employée dans le code développé par Brossier (2011) et utilisée dans l'ensemble du manuscrit.

1.2.6.c Approche de Newton-tronqué

Cette approche proposée par Métivier *et al.* (2013) permet d'évaluer de manière économique la contribution du Hessien complet (comprenant les contributions non-linéaires \mathbf{H}_b) par la résolution de quelques problèmes linéaires. Des nets bénéfices de cette méthode ont été montrés notamment pour des milieux avec de forts contrastes (Métivier *et al.*, 2013, 2014) où les diffractions multiples sont particulièrement présentes.

1.3 Nature mal posée du problème inverse : régularisation et information *a priori*

Les problèmes d'imagerie sismique qualitative correspondent généralement à des problèmes mal posés, c'est à dire (Snieder, 1998; Idier, 2011) :

- la solution du problème tel qu'il est posé n'existe pas ;
- la solution du problème n'est pas unique (manque d'information pour contraindre le problème) ;
- la solution du problème (paramètres imagés) varie fortement par rapport aux données, ce qui pose un problème lorsque les données expérimentales sont affectées par du bruit ou lorsque la résolution du problème direct est approximative (comme pour les méthodes numériques).

Le premier point n'est généralement pas un problème pratique, car d'après Snieder (1998) le fait que le problème direct soit réalisable physiquement implique que admette une solution. Afin de résoudre les deux derniers points, on se propose de poser un nouveau problème inverse dit « régularisé » au lieu de résoudre le problème inverse initial.

La formulation du problème régularisé pour être obtenue à l'aide d'un ajout d'information *a priori*. L'apport de l'information *a priori* peut se faire en introduisant par des contraintes dites « dures » (e.g. Carrion (1989)) qui restreignent explicitement l'espace de recherche des paramètres \mathbb{M} tandis que l'apport de contraintes « molles » (e.g. (Charara *et al.*, 1996; Scales, 2002)) modifiera la formulation de la fonction coût pour introduire l'information *a priori* de manière plus souple.

1.3.0.d Méthode bayésienne et interprétation de la régularisation

L'approche bayésienne permet de considérer l'identification des paramètres dans un cadre beaucoup plus large que celui exposé préalablement et permet de donner une interprétation probabiliste aux différentes méthodes de régularisations. Nous allons brièvement exposer le cadre de l'inversion bayésienne et donnerons une interprétation des fonctionnelles d'erreur quadratiques (1.36). Pour plus approfondir les aspects bayésiens des problèmes inverses, nous renvoyons le lecteur vers les ouvrages de Kaipio & Somersalo (2005) et de Tarantola (2005) ainsi que l'article de Scales (2002).

Au lieu de considérer la détermination de valeurs précises pour l'ensemble de paramètres \mathbf{m} , le formalisme bayésien décrit les paramètres et les observables comme des variables aléatoires. Par conséquent, l'information recherchée est donc beaucoup plus riche que dans les précédents cas. On va tout d'abord formuler le problème inverse à l'aide du théorème de Bayes et on traitera ensuite d'un cas particulier. Si on cherche à identifier la distribution de probabilité $P(\mathbf{m})$ des paramètres représentés dans \mathbf{m} en fonction des observations \mathbf{d} d'après le théorème de Bayes on a :

$$P(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) = \frac{P_{\text{prior}}(\mathbf{m})P(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})}{P(\mathbf{d}_{\text{obs}})} \quad (1.28)$$

avec :

$P(\mathbf{d}_{\text{obs}})$, la densité de probabilité de la variable \mathbf{d}_{obs} , (on suppose dans (1.28) que $P(\mathbf{d}_{\text{obs}}) \neq 0$),

$P_{\text{prior}}(\mathbf{m})$, la densité de probabilité *a priori* du vecteur aléatoire \mathbf{m} ,

$P(\mathbf{d}_{\text{obs}}|\mathbf{m})$, la densité de probabilité conditionnelle de \mathbf{d}_{obs} connaissant \mathbf{m} (on la nommera la vraisemblance)

Si on fait, l'hypothèse que les variables aléatoires \mathbf{m} et \mathbf{d} sont liées par :

$$\mathbf{d} = \mathcal{G}_m + \mathbf{B} \quad (1.29)$$

où la variable aléatoire \mathbf{B} représente un bruit additif ayant pour densité de probabilité : $P_{\mathbf{B}}$. Si les variables \mathbf{B} et \mathbf{m} sont indépendantes et que l'on utilise la formule (1.29) dans (1.28), on peut alors déduire que :

$$P(\mathbf{m}|\mathbf{d}_{\text{obs}}) \propto P_{\text{prior}}(\mathbf{m})P_{\mathbf{B}}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathcal{G}_m) \quad (1.30)$$

Il se pose la question du choix des densités de probabilités pour P_{prior} et pour $P_{\mathbf{B}}$. On se propose d'utiliser des densités de probabilité Gaussiennes, ce choix étant justifié par :

- les densités gaussiennes peuvent être de bonnes approximations de distributions non-gaussiennes lorsque les observables sont la somme d'un nombre important d'expériences aléatoires indépendantes ;
- du point de vue de la résolution du problème inverse, lorsque l'opérateur \mathcal{G}_m est linéaire alors le problème de la détermination du maximum *a posteriori* est aussi linéaire (car la fonctionnelle d'erreur est quadratique) ;
- les densités de probabilités gaussiennes ne nécessitent qu'un vecteur moyenne et une matrice de covariance pour être complètement caractérisées.

Ainsi dans l'espace des paramètres et des mesures, on supposera les densités de probabilité suivantes :

$$P_{\text{prior}}(\mathbf{m}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\text{prior}}, \sigma_{\mathbf{M}}) \quad (1.31)$$

$$P_{\mathbf{B}}(\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathcal{G}_m) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{\mathbf{D}}) \quad (1.32)$$

Si on insère les expressions (1.31) et (1.32) dans (1.30), on obtient alors :

$$\begin{aligned} P(m|\mathbf{d}_{\text{obs}}) &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} | \sigma_{\mathbf{M}}^{-1} | \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} \rangle\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{d}_{\text{obs}} | \sigma_{\mathbf{D}}^{-1} | \mathbf{d}_{\text{obs}} \rangle\right) \\ &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}(\langle \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} | \sigma_{\mathbf{M}}^{-1} | \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} \rangle + \langle \mathbf{d}_{\text{obs}} | \sigma_{\mathbf{D}}^{-1} | \mathbf{d}_{\text{obs}} \rangle)\right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Souvent, on recherche le maximum *a posteriori* \mathbf{m}_{map} ce qui revient donc à trouver \mathbf{m}_{map} qui maximise $P(m|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ mais d'autres estimateurs peuvent être intéressants comme par exemple l'espérance *a priori* (dans le cas de densité de probabilité gaussiennes ces deux estimateurs sont égaux). Maximiser $P(m|\mathbf{d}_{\text{obs}})$ revient dans l'équation (1.33) à minimiser :

$$(\langle \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} | \sigma_{\mathbf{M}}^{-1} | \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}} \rangle + \langle \mathbf{d}_{\text{obs}} | \sigma_{\mathbf{D}}^{-1} | \mathbf{d}_{\text{obs}} \rangle). \quad (1.34)$$

Pour conclure sur cette exemple, si l'opérateur $\mathcal{G}(\mathbf{m})$ est linéaire, alors le calcul de la matrice de covariance *a posteriori* donne

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{m}}_{\text{est}}) = \left(\mathcal{G}(\mathbf{m})^\dagger \sigma_{\mathbf{D}}^{-1} \mathcal{G}(\mathbf{m}) + \sigma_{\mathbf{M}}^{-1}\right)^{-1} \quad (1.35)$$

Encore une fois, on pourra faire la parallèle avec la matrice inverse de (1.37) et donc avec la matrice Hessienne.

1.3.0.e Quelques méthodes de régularisation classiques utilisées en pratique

Il existe plusieurs méthodes de régularisation (Mojabi & LoVetri, 2009). D'un point de vue pratique le choix d'une méthode est dicté par exemple par :

- par l'information sur le modèle *a priori* disponible (par exemple les propriétés spatiales des distribution des paramètres ...);
- la qualité des données mesurées (bruit et incertitudes expérimentales) et l'information sur les diverses sources d'erreurs (par exemple la distribution stochastique d'un bruit donné);
- la convergence de la méthode d'optimisation avec la fonctionnelle « régularisée » (propriété de linéarité, convexité ...) et le nombre d'itérations que l'on s'autorise en pratique.

Nous allons rapidement évoquer quelques méthodes « déterministes » de régularisation.

Afin de conserver les propriétés des fonctionnelles quadratiques (Scales, 2002), il peut être intéressant d'utiliser une forme de fonction coût composée de deux termes quadratiques. Le premier portant sur le respect du modèle aux données mesurées et le second portant sur le respect du modèle à un modèle *a priori* :

$$\mathcal{E}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} | \mathbf{W}_{\mathbf{D}} | \mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon \langle \mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}_{\text{prior}} | \mathbf{W}_{\mathbf{M}} | \mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}_{\text{prior}} \rangle \quad (1.36)$$

Les matrices $\mathbf{W}_{\mathbf{D}}$ et $\mathbf{W}_{\mathbf{M}}$ sont des matrices symétriques définies positives dont on peut donner une interprétation lorsque à l'aide du formalisme Bayésien. Aussi le paramètre réel ε est un paramètre de pondération entre la contrainte d'adéquation aux données et au modèle *a priori*. Il s'agit de ce que l'on appelle un hyper-paramètre et doit être ajusté « manuellement » (voir session suivante). Notons que la solution (linéarisée) minimisant (1.36) s'exprime de la manière suivante :

$$\Delta_{\widetilde{\mathbf{m}}} = \Re \left[\mathbf{J}^{\dagger} \mathbf{W}_{\mathbf{D}} \mathbf{J} + \varepsilon \mathbf{W}_{\mathbf{M}} \right]^{-1} \Re \left[\mathbf{J}^{\dagger} \mathbf{W}_{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{d}_{\widetilde{m}} \right] \quad (1.37)$$

On peut aussi montrer à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières que cette solution « atténuée » progressivement les faibles valeurs propres de l'opérateur inverse, ce qui rend la solution moins sensible aux bruit.

On peut aussi noter que si l'on définit $\mathbf{W}_{\mathbf{M}}$ par l'opérateur identité, on retrouve la formulation bien connue de Levenberg-Marquard.

Une étude concernant l'introduction d'information *a priori* pour l'inversion des formes d'ondes a été proposée par Asnaashari *et al.* (2013).

1.3.0.f Régularisation de Tikhonov

Une formulation particulière de la formulation précédente appelée régularisation de Tikhonov est communément utilisée pour régulariser le problème inverse en pénalisant la fonctionnelle d'adéquation aux données (1.36) en choisissant un second terme qui pénalise les variations spatiales du modèle (Greenhalgh *et al.*, 2006). Ce choix peut par exemple être de choisir une matrice $\mathbf{W}_{\mathbf{D}}$ qui représente un filtre passe-haut (comme un produit d'opérateurs de différences fines). On peut aussi noter que cet opérateur n'est pas forcément isotrope et invariant par rapport aux dimensions spatiales mais peut aussi être paramétré pour présenter des propriétés anisotropes selon à différentes positions (Kaipio *et al.*, 1999). Cette formulation permet de privilégier les solutions ayant des variations douces par rapport aux solutions ayant des variations rapides, il s'agit d'une approche particulièrement populaire dans la communauté géophysique.

1.3.0.g Utilisation de norme alternatives : cas de la norme ℓ_1

Comme nous le verrons dans la partie concernant la formulation bayésienne, le choix de la norme est théoriquement dicté par les distributions de paramètres connues *a priori*. Cependant, d'un point de vue pratique, pour le premier terme de la fonctionnelle (adéquation aux données), il a été remarqué que certaines normes sont beaucoup plus sensibles que d'autres par rapport aux larges erreurs dans les données (Crase *et al.*, 1990; Pyun *et al.*, 2009; Brossier *et al.*, 2010b), l'exemple le plus cité étant celui de la norme ℓ_2 qui est généralement considéré comme étant moins robuste que la norme ℓ_1 . Théoriquement, la norme ℓ_1 n'est pas différentiable à l'origine mais en pratique comme le résidu n'est jamais strictement nul cela ne pose pas de problème. Une norme combinant la nature quadratique au voisinage de zéro et la robustesse de la norme ℓ_1 par rapport aux larges déviations a été proposée par Huber (1964) et employée dans le contexte de l'inversion des formes d'ondes par Brossier *et al.* (2010b).

D'autre part, certains auteurs proposent au lieu d'une norme ℓ_2 dans l'espace des paramètres d'utiliser une norme ℓ_1 (« total variation », (Vogel, 2002)) afin par exemple de promouvoir les milieux contenant des interfaces nettes (Loris *et al.*, 2010; Burstedde & Ghattas, 2009), la détermination de frontières d'objets (Pelekanos *et al.*, 2003; Mojabi & LoVetri, 2009). Une application de ce type de régularisation à l'inversion des formes d'ondes dans un contexte géophysique a été proposée par Guitton (2012).

1.3.0.h Le choix des hyper-paramètres

Lorsque des hyper-paramètres interviennent dans la formulation des fonctionnelles d'erreur, leur détermination est particulièrement importante et délicate (notamment lorsqu'il y en a plusieurs), (Idier, 2011). En pratique, un hyper-paramètre est rarement déterminé avec une précision mais on recherche plutôt à déterminer son ordre de grandeur. Cela s'explique d'une part, à cause du fait que la détermination de l'hyper-paramètre est généralement assez empirique, ce qui aboutit à des recherches pouvant être délicates et d'autre part, souvent les variations de l'hyper-paramètre deviennent significatives lorsque l'on change seulement d'ordre de grandeur. Un outil communément utilisé en problème inverse est la « L-curve » (Hansen, 1992) mais cet outil dispose de deux inconvénients majeurs (Idier, 2011) :

- il se peut que de nombreux tests soient nécessaires pour obtenir une estimation raisonnable des hyper-paramètres ;
- il peut se montrer non-adéquat dans le cas de problème avec de fortes non-linéarités.

Concrètement, la détermination des hyper-paramètre semble être l'une des étapes les plus laborieuses et cruciales pour bien régulariser le problème inverse. Nous renvoyons le lecteur intéressé à cette question à l'ouvrage (Vogel, 2002) où un chapitre est consacré aux différentes méthodes de détermination des hyper-paramètres.

1.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai évoqué les méthodes utilisées pour résoudre le problème direct et le problème inverse dans le cadre de l'inversion des formes d'ondes en me focalisant plus particulièrement sur les éléments utilisés dans le code d'inversion FWT2D-PSV.

L'une des difficultés avec les méthodes d'optimisation locales provient de leur sensibilité aux minima locaux pour des fonctions coûts non convexes. Généralement, le domaine de convexité des

fonctions coûts diminue à mesure que l'on augmente les fréquences (Virieux & Operto, 2009), ce qui conduit à faire débiter les inversions avec des fréquences plus basses. Un axe actif de la recherche actuelle en imagerie sismique consiste à la définition de fonctions coûts plus robustes que les fonctions coûts quadriques classiques et ayant des domaines de convexité plus larges. On pourra par exemple citer les travaux de Chauris & Noble (2001); Symes (2008); Van Leeuwen & Mulder (2008); Biondi & Almomin (2014).

Dans le cadre de mes travaux de thèse, je me suis attaché à reformuler le problème de l'inversion des formes d'ondes afin d'inverser explicitement la polarisation des ondes. Comme nous allons le voir dans le prochain chapitre, ceci conduit à une formulation ayant une forme très différente de la fonction coût classique basée sur la norme ℓ_2 (eq. 1.12). Néanmoins, l'optimisation de cette nouvelle fonction coût peut se faire en conservant l'ensemble des « infrastructures » développées dans le cadre de l'inversion des formes d'ondes pour les fonctions coûts « conventionnelles » évoquées dans ce chapitre.

Chapitre 2

Inversion de la polarisation : formulation théorique et adaptation de l'inversion des formes d'onde

Dans ce chapitre, je présente les développements méthodologiques que j'ai réalisés dans l'objectif d'utiliser explicitement la polarisation dans le cadre de l'inversion des formes d'onde¹.

Les propriétés recherchées pour une fonction objectif mesurant les écarts entre les états de polarisation sont notamment :

- la fonction objectif doit être invariante si on multiplie le signal par un facteur multiplicatif complexe non nul (phase globale et amplitude) ;
- la fonction objectif doit être invariante suivant le choix d'orientation des axes des capteurs ;
- la fonction objectif doit être sensible à l'ensemble des propriétés du mouvement particulière ;
- les valeurs prises par la fonction objectif doivent rester finies ;
- la fonction objectif doit pouvoir être généralisée à un nombre quelconque de composantes.

Comme aucune des fonction coûts proposées dans la littérature géophysique ne respecte l'ensemble de ces propriétés, j'ai proposé une nouvelle forme de fonctions objectifs utilisant la distance intrinsèque sur la sphère de Poincaré. Ensuite, j'ai adapté la méthode de d'inversion des formes d'ondes (FWI) pour les fonctions objectifs proposées. Enfin je propose une première analyse des limites et avantages de l'utilisation des observables de polarisation dans le cadre de l'inversion des formes d'ondes. Cette analyse sera étendue dans le prochain chapitre.

Le chapitre est essentiellement composé d'une publication initialement préparée pour la revue *Geophysical Journal International* dont je suis le premier auteur² ainsi qu'un complément traitant brièvement d'une forme différente de fonctions objectifs.

Il convient aussi de mentionner que pour le cas de données bi-composantes, la fonction coût basée sur la distance de « Poincaré » peut être introduite de manière plus simple comme il est expliqué dans l'annexe A.

1. on entend par « inversion des formes d'ondes » une méthode de tomographie quantitative utilisant un modèle direct « arbitrairement réaliste » ainsi que le formalisme de l'état adjoint pour l'évaluation du gradient de la fonction objectif. Certains auteurs préféreraient le terme « tomographie adjointe »

2. Après la soutenance, pour des raisons de longueur il a été décidé répartir les résultats de ce chapitre dans plusieurs publications.

Sommaire

2.1	Introduction	35
2.2	Multicomponent data misfit functions in the frequency domain	38
2.2.1	Some notations, conventions and assumptions	38
2.2.2	Conventional FWI misfit function and derived misfit functions	39
2.2.3	Phase and amplitude decompositions of misfit functions in the space-frequency domain	40
2.2.4	Conventional misfit functions expressed in a polar form to make explicit the polarization terms	41
2.3	Polarization description	44
2.3.1	Concepts of wavefront polarization, apparent polarization and polarization states	44
2.3.2	Stokes' parameters description of polarization	45
2.3.3	The intrinsic "world" of pure polarization states : the Poincaré Sphere	47
2.3.4	Geometrical interpretation of the Poincaré Sphere, Pauli's Spin Matrices and Stokes' Coefficients for bi-component measurements	48
2.3.5	Definition of a distance between polarization states	50
2.3.6	A cost function based on the Poincaré distance	53
2.4	Discussion on the relation between the Poincaré distance based cost functions and other polarization cost functions	54
2.5	Full waveform inversion and gradient computation	57
2.5.1	Gradient computation using the Lagrange's multipliers formalism	58
2.5.2	Source and receivers coupling effects	61
2.6	Wavefield analysis and interpretation of polarization observables for geometrical phases	63
2.6.1	Wavefield decomposition method and wavefront computation	63
2.6.2	Analysis of the relationship between polarization observation and wavefronts	64
2.6.2.a	The background media : homogeneous media	66
2.6.2.b	Gaussian acoustic perturbations	66
2.6.2.c	Analysis of the perturbations generated by an elastic cylinder	73
2.6.2.d	Partial conclusion of analysis of the relationship between polarization and wavefronts	80
2.7	Comparison of the Poincaré distance based objective function with conventional objective functions	80
2.7.1	Cost functions at 20 Hz	80
2.7.2	Cost functions at 100 Hz	82
2.7.3	Cost functions for the bandwidth from 100 to 200 Hz	84
2.7.4	Partial conclusion of the cost-function convexity analysis	84
2.8	Polarization sensitivity kernels	86
2.8.1	Methodology	86
2.8.2	Sensitivity kernels for compressive wave velocity variations	88
2.8.3	Sensitivity kernels for shear wave velocity variations	89
2.8.4	Partial conclusion on polarization related sensitivity kernels	89
2.9	Numerical inversion results	92
2.9.1	Inversion results	92

2.9.2	Discussion on the relative evolution of misfit functions and associated null-spaces	97
2.10	Appendix	98
2.10.1	An extremely brief introduction to the Dirac's braket formalism	98
2.10.2	Some functional derivatives used for the gradient derivation	99
2.10.3	Gradients of misfit functions	100
2.10.3.a	Gradient conventional L2 misfit function	100
2.10.3.b	Gradient of the complex polarization ratio misfit functions	100
2.10.3.c	Gradient normalized wavefield misfit functions	100
2.10.4	Interpretation of component weighting operator in conventional FWI as polarization state filtering	101
2.10.5	Derivation of the sensitivity kernels for tilt and ellipticity angles	101
2.11	Fonctions objectif alternatives pour la prise en compte de données multicomposantes	102
2.12	Conclusion du chapitre	103

2.1 Introduction

Tomographic methods aim to recover the spatial distribution of physical properties of non-accessible media from indirect measurements. In seismology measured quantities are for instance ground particle velocity, acceleration or displacement and more recently it has been proposed measure rotational motions of the earth (Cochard *et al.*, 2006). From these measurements observables are extracted and used as input in the tomographic process. These observables may either be the complete recorded waveforms or only partial information from the measurements. Commonly used observables are for instance : arrival times (e.g. Aki & Lee (1976)), frequency phases (e.g. Bednar *et al.* (2007)), amplitudes (e.g. Pyun *et al.* (2007)), dispersion (e.g. Cara & L ev eque (1987); Fichtner *et al.* (2008); Perez Solano *et al.* (2014))...

Since multicomponent data are becoming routinely used at the different scales of seismology, the exploitation of the information content provided by the measured full particle displacement is a topical issue. In geophysics, the different methods dedicated to the multicomponent data processing may be ranked into two categories : the methods dedicated to filter or enhance particular events and the quantitative/qualitative imaging methods taking advantage of the multicomponent acquisitions. In this paper, our concern is to derive a new quantitative imaging method to explicitly invert the apparent particle motion polarization. In order to better understand the scientific interest of the presented formulation of the polarization misfit function, a small review of the existing imaging methods employing multicomponent seismic data is proposed.

The seismic methods exploiting multicomponent measurements may be divided into 2 categories. The first category is composed of the methods taking advantage of the multicomponent records based on refinements/extensions of migration techniques and migration velocity analysis methods (Wapeenaar *et al.*, 1990; Esmersoy, 1990; Shieh & Herrmann, 1990; Zhe & Greenhalgh, 1997; Zhu *et al.*, 1999; Agnihotri & McMechan, 2007; Yan & Sava, 2008; Chung *et al.*, 2012; Shang *et al.*, 2012; Vasconcelos, 2013). These methods are not directly related to the inversion of polarization observables but rather take advantage of multicomponent data for wavefield separation and for defining new imaging conditions. For that reason, strictly speaking these methods are not employing the particle motion polarization as an observable.

The second category of tomography methods is composed of the methods employing the particle motion observables as an explicit observable in the tomographic inverse problem. In the seismological community, different approaches to express the particle motion observable for the inverse problem have been proposed, we will shortly review them and underline their respective limitations.

To the authors knowledge, the first imaging approach explicitly using polarization as an observable was the receiver function methods proposed by Phinney (1964) and Vinnik (1977) to process converted teleseismic waves. Expressed in the time domain, this approach consists of defining the “receiver function” as an observable composed of the vertical component divided by one of the radial component. Edme & Singh (2008) proposed a formulation of the receiver functions adapted for exploration seismology purposes. Recently a noticeable reformulation of the problem to avoid difficulties related to the deconvolution has been proposed by Bodin *et al.* (2014). However, this new formulation depends on the amplitudes of the particle motions. A similar observable to receiver functions is the Horizontal over Vertical Spectral Ratio (HVSr). Whereas the receiver functions are used with teleseismic waves (quasi-plane volume waves) in order to enhance discontinuities, the HVSr ratio is mainly employed with seismic noise dominated by surface waves. Since in non-dissipative laterally invariant media the axis of propagative modes particle motion are aligned along the vertical and radial components. In the particular case of a well identified surface wave, the HVSr ratio corresponds to the ellipticity of the surface wave. However, often the HVSr ratio is calculated from microtremors vibrations making the physical interpretation more complicated. It is commonly associated with a mixture of ellipticities of the surface waves (Arai & Tokimatsu, 2004) composing the ambient vibrations but recently Sánchez-Sesma *et al.* (2011) proposed a physical interpretation using a diffuse field model, allowing to account for surface waves as well as body-wave contribution in the HVSr.

Originally, the HVSr ratio has been developed in seismological natural hazard community by Nogoshi & Igarashi (1971) and promoted by Nakamura (1989) (Nakamura’s ratio became synonym of HVSr) to estimate some resonance frequencies to study the site effect.

Boore & Toksöz (1969) studied the sensitivity of Rayleigh wave ellipticity and phase velocity in case of shallow structures. They concluded that the ellipticity provides complementary information to the phase velocity, with a greater sensitivity to near-surface velocity layer and a relatively low influence of attenuation. These properties make the ellipticity an observable of choice to invert near surface shear wave profiles.

Since then, successful attempts to infer subsurface properties from HVSr have been presented about 30 years later by Scherbaum *et al.* (2003); Arai & Tokimatsu (2004, 2005) who used the HVSr alone or in complement to surface waves dispersion analysis. Last years, different definitions of alternative polarization spectral ratios have been proposed. Muyzert (2007) applied for marine exploration purposes 4 different definitions of polarization spectral ratios (horizontal over vertical, vertical over horizontal, horizontal over total particle displacement and vertical over total particle displacement spectral ratios) in order to estimate shear wave velocities profiles from the Scholte waves. Among the tested definitions, the Vertical over Total particle displacement Spectral Ratio (VTSr) has been preferred by this author. For larger scale Seismology, Tanimoto & Rivera (2008) promote for structural inversion the use of the vertical over horizontal components instead of the HVSr in order to remove peaks effects due to the vertical component cancellation. Recently, Marañón *et al.* (2012) proposed to use the ellipticity angle for inverting surface waves instead of using a polarization ratio.

At the regional scale, Lin *et al.* (2012) confirmed the complementarity between phase velocity and ellipticity observables when dealing with surface waves inversion already noticed by Boore & Toksöz (1969) furthermore asses that the combination of these two observables enables to resolve density and V_p/V_s variations and Valensi *et al.* (2013) showed the well-behaved properties of ellipticity cost

functions in case of surface waves inversion compared to the phase observable.

Despite these advantages, the receivers functions and the polarization spectral ratios used as observables for general configuration present several limitations when used for general configurations. First, with the exception of the VTSR and the ellipticity angle, polarization observables increase towards infinite when the component of the denominator becomes small. This may have 2 potential dramatic consequences for the inversion : the amplification of the measurement noise and the dominance of the high amplitude observables in the misfit functions. In order to mitigate these problems, two practical methods are used in practice : the addition of a small constant to denominator (“water level” parameter) and a specific weighting in the cost function in order to mitigate the dominance of the highest polarization ratios. But these solutions are mostly empirical and they need some extra parameters tuning.

Second, often only the amplitudes of the spectral ratio are considered (e.g. Scherbaum *et al.* (2003); Arai & Tokimatsu (2004)). Consequently the information about the relative phase differences between the different components is disregarded. These losses of information may have a detrimental effect since it creates more ambiguities between the observables and the inverted parameters.

Third, with the exception of the formulations proposed by Maranò *et al.* (2012) and Bodin *et al.* (2014), the resulting misfit functions have no physical intrinsic meaning : their values change according to the choice of orientation of sensors.

The second category of observable used for polarization inversion in seismology are the observables related to the tilt angles. With the works of Hu & Menke (1992); Hu *et al.* (1994) measured tilt angles has been recognized as providing useful complementary information to the first arrival travel times in order to better constrain the inversion of high frequency body-waves. Employing also the ray formalism, Farra & Le Bégat (1995); Le Bégat & Farra (1997); Farra (2001) have showed the interest of tilt angle for the inversion of anisotropy parameters. In case of surface waves traveling at the Earth surface, the tilt angle of surface waves is exploited in order to estimate the variations of “arrival angles” of surface waves (Laske *et al.* , 1994; Laske & Masters, 1996, 1998; Larson & Ekström, 2002). Using a single-scattering approximation Zhou *et al.* (2004) computed finite frequency sensitivity kernels associated with different surface wave observables and in particular for perturbation associated with “arrival angles”. The tilt angle are not always well-defined : the more the particle motion is becoming circular, the less the tilt angle is well-defined. Furthermore, the tilt angle alone totally disregards the information about the ellipticity of the particle motion.

As we noticed, both ellipticity and tilt angles present two interesting properties : the resulting misfit functions do not depend on the choice of the orientation of the sensors axis and their values are restricted to limited intervals. However, we have noticed that both angles need to be considered to fully described the particle motion (in case of bi-dimensional measurements). Furthermore, in a misfit function these angles can not vary independently to each other. A clear illustration of dependency is the lack of definition of the tilt angle in case of perfectly circular particle motion. In case of more than 2 components more parameters have to be considered to fully describe the polarization particle motion in a consistent manner. A general formalism allowing for defining a well defined distance between all the possible polarization states for an arbitrary number of components is presented in this article. To do so, we will employ the formalism originally developed in optics (Stokes Matrix) and take advantage of the operator manipulation formalism of the Dirac’s Brackets as used in quantum mechanics.

The second aim of this article is to detail the implementation of this new cost function in a Full

Waveform Inversion (FWI) method. As a quantitative imaging method, the FWI method developed by Lailly (1983) and Tarantola (1984) is a method of choice to deal with general configurations because it allows to use arbitrary accurate forward modeling codes. Up to the authors knowledge, multicomponent data has already been employed in FWI methods by several authors Mora (1987); Sears *et al.* (2008); Brossier (2009); Barnes & Charara (2010); Operto *et al.* (2013); Vigh *et al.* (2014) but in a straightforward manner since in the cost function the different components measurements are considered independently or only related by off-diagonal terms of data covariance). Jin *et al.* (1992) demonstrated using a linearized ray asymptotic approach that we need to consider multicomponent data in order to properly invert the V_P and V_S parameters simultaneously. Shen *et al.* (2008), Silvestrov & Tcheverda (2011) and Manukyan *et al.* (2012) performed the sensitivity studies for multicomponent measurements and Valensi *et al.* (2012) illustrated the benefits of using multicomponent measurements for near surface using a FWI method. All these cited references concerning the introduction of an horizontal component in the elastic FWI method converge to the conclusion that the multicomponent measurements help to better constrain the inversion (especially in case of multiparamter inversion) and enable a more uniform wavenumber coverage. However from multicomponent measurements, it is possible to define polarization observables having new properties useful for the inversion and we take advantage of “intrinsic” polarization cost formulation formulation to introduce the polarization observable inversion the FWI method.

2.2 Multicomponent data misfit functions in the frequency domain

In this section, we briefly review the introduction of the conventional misfit in the frequency domain, as for instance used for the FWI method. Then, we will show how the conventional misfit function for multicomponent may be decomposed into several terms depending of the amplitudes, the phase and the polarization. Each one of these terms might be isolated and used as an alternative observable.

2.2.1 Some notations, conventions and assumptions

Concerning mathematical conventions, the linear operators and the matrix representations are used interchangeably in all the paper. Vectors are written with **bold** characters, $\|\mathbf{vector}\|$ is the euclidean norm of **vector** defined with the usual (without weight) scalar product and $\|\mathbf{vector}\|_{\mathbf{W}}$ is norm computed with the euclidean metric represented by the hermitian positive definite matrix \mathbf{W} , i.e. : $\|\mathbf{vector}\|_{\mathbf{W}} = \sqrt{\langle \mathbf{vector} | \mathbf{W} | \mathbf{vector} \rangle}$. Multiple indexes are used, especially the letter “ i ” is used as an index which should be distinguished to the character i which denotes the pure imaginary unit number. Furthermore, the Einstein’s convention is not employed for repeated indexes. The subscripts “ t ”, “ $*$ ” and “ \dagger ” mean respectively the transposed, the complex conjugate and the adjoint.

The analysis of the cost functions and the formalism for the polarization is presented in the frequency domain by applying the following Fourier transform definition to the “ $\text{signal}(\omega)$ ”.

$$\text{signal}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{signal}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

All the formalism is derived in the frequency domain because, firstly it is easier to define polarization observables in this domain (the formalism is introduced in the next part). Secondly since (Pratt, 1990), the frequency domain approach is widely used in FWI methods : for the efficiency of frequency solvers in case of multiple sources (at least in 2 dimensions) and the simplification of the

memory management when storing the gradient only for a few frequencies. Discussions about the respective interest of using time or frequency or mixed implementations of the FWI method is beyond the scope of this article and for more information, we invite the reader to read the article of Virieux & Operto (2009).

In this article, the basic multicomponent observable are denoted by the vector \mathbf{u} , in seismology it might be particle acceleration, velocity, or displacement. However all the presented formalism may be extended in a straight forward manner to any kind of vector multicomponent fields (as for instance electromagnetic fields). Each element of \mathbf{u} is a complex scalar quantity $u_{i,j,k}$ with i, j and k respectively used to mention the corresponding component, receiver and source. The observables are composed of n_{comp} orthogonal components, n_{rec} receivers and the number of source is n_{src}

In this article, the formalism is presented for noise free data and for sake of mathematical simplicity a L2 norm in the data space is used and a weighting matrix \mathbf{W} , which corresponds to an auto-adjoint strictly positive definite operator. The matrix associated to \mathbf{W} has a block structure : to each source/receiver indexes j, k is associated a $n_{comp} \times n_{comp}$ positive definite matrix called $\mathbf{W}^{j,k}$ which is used to weight the different component of the wavefield. The (i, i') component of the matrix $\mathbf{W}^{j,k}$ is written as $\mathbf{W}_{i,i'}^{j,k}$

Since the formalism is introduced for noise free data, the interpretation of the weighting matrix is not essential for the understanding of the polarization inversion but in appendix A is provided an interpretation of $\mathbf{W}^{j,k}$ in terms of polarization tensor analysis.

The observed data (measurements) are indicated by the subscript obs : $\mathbf{u}_{obs}(\omega)$. The model parameters (structural properties) are denoted by the variable \mathbf{m} and the computed observables \mathbf{u} with the parameters \mathbf{m} is written $u_{model}(\omega, \mathbf{m})$. Since the formalism is presented for monochromatic wavefields, the pulsation argument “ ω ” may be avoided without generating confusions.

2.2.2 Conventional FWI misfit function and derived misfit functions

The conventional FWI method in the frequency-space domain (Pratt, 1990) aims to estimate the model parameters “ \mathbf{m} ” by minimizing the following cost-function :

$$\mathcal{E}_{conv}(\mathbf{m}) = \langle \mathbf{u}_{obs}(\omega) - \mathbf{u}_{model}(\omega) | \mathbf{W} | \mathbf{u}_{obs}(\omega) - \mathbf{u}_{model}(\omega) \rangle \quad (2.2)$$

where the subscripts **obs** and **model** stand for observed and estimated data respectively. If the matrix \mathbf{W} is the inverse of the data covariance matrix, the cost function 2.2 corresponds to a squared Mahalanobis distance (Mahalanobis, 1936) and its global minimum corresponds to the maximum of the posterior probability density $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ (Tarantola, 2005).

When the different components are considered uncoupled in the weighting operator \mathbf{W} , then the sub-matrices $\mathbf{W}_{j,k}$ have a diagonal structure which leads to write the general cost function into a sum of single component cost-functions :

$$\mathcal{E}_{conv}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_{comp}} \mathcal{E}_{conv,i}(\mathbf{m})$$

with

$$\mathcal{E}_{conv,i}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W_{i,i}^{j,k}|^2 |u_{obs}(\omega)_{j,k} - u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k}|^2 \quad (2.3)$$

where the global cost function $\mathcal{E}_{conv}(\omega)$ by adding the various mono-component misfit functions $\mathcal{E}(i)_{conv}$.

Up to the author knowledge, in the current literature the only case where off-diagonal terms in the matrices $\mathbf{W}_{j,k}$ are explicitly set-up to a value different of zero is Barnes & Charara (2010). The interpretation of such weighting in terms of projection on polarized states is provided in the appendix 2.10.4.

2.2.3 Phase and amplitude decompositions of misfit functions in the space-frequency domain

The aim of the decomposition is to separate observables into amplitude and phase observables. Several authors studied the question of either inverting the total field, phase, or only the amplitudes or proposed combined approaches (Pratt & Worthington, 1988; Bednar *et al.*, 2007; Pyun *et al.*, 2007; Kamei *et al.*, 2014). Recently Kennett & Fichtner (2012) have proposed a framework to describe in a unified way these data decomposition.

From the equation 2.3, an amplitude only misfit function \mathcal{E}_{amp} is expressed as ³:

$$\mathcal{E}_{amp}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_{comp}} \mathcal{E}_{amp,i}(\mathbf{m})$$

with

$$\mathcal{E}_{amp,i}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W_{i,i}^{j,k}|^2 \left(|u_{obs}(\omega)_{i,j,k}| - |u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{i,j,k}| \right)^2 \quad (2.5)$$

And a phase only misfit function \mathcal{E}_{phase} may be defined as :

$$\mathcal{E}_{phase}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_{comp}} \mathcal{E}_{phase,i}(\mathbf{m})$$

with

$$\mathcal{E}_{phase,i}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W_{i,i}^{j,k}|^2 \left| \Im \left\{ \log \left(\frac{u_{obs}(\omega)_{i,j,k}}{u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{i,j,k}} \right) \right\} \right|^2 \quad (2.6)$$

For both phase and amplitude misfit, as in equation 2.3 the different wavefields components are processed independently and them summed into a unique cost function.

3. In order to be consistent with the Rytov approximation and invariant with respect to scaling factors, the amplitude misfit function $\mathcal{E}_{amp,i}(\mathbf{m})$ can be also defined as :

$$\mathcal{E}_{amp,i}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W_{i,i}^{j,k}|^2 \left| \Re \left\{ \log \left(\frac{u_{obs}(\omega)_{i,j,k}}{u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{i,j,k}} \right) \right\} \right|^2 \quad (2.4)$$

An alternative to phase only amplitude has been proposed by Choi & Alkhalifah (2012) which consists of normalizing of seismograph in order to reduce the dependency to “true” amplitudes. As mentioned by Choi & Alkhalifah (2012) this method is equivalent to maximize the cross-correlation between normalized observed and calculated data. In the particular case of mono-frequency inversion, it corresponds to a minimization of the phase misfit. In that case, the following equation may be used as an alternative to the equation 2.6 :

$$\mathcal{E}_{norm}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_{comp}} \mathcal{E}_{norm,i}(\mathbf{m})$$

with

$$\mathcal{E}_{norm,i}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W_{i,i}^{j,k}|^2 \left| \frac{u_{obs}(\omega)_{i,j,k}}{|u_{obs}(\omega)_{i,j,k}|} - \frac{u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{i,j,k}}{|u_{model}(\omega, \mathbf{m})_{i,j,k}|} \right|^2 \quad (2.7)$$

The normalization is done according to each component i independently to the other ones.

All the discussed misfit functions presented in equations 2.3 , 2.5 , 2.6 and 2.7 handle multicomponent data by simply summing-up monocomponent misfit functions.

In the next session, we will show how the polarization plays a role as an explicit observable in the conventional cost-functions.

2.2.4 Conventional misfit functions expressed in a polar form to make explicit the polarization terms

We propose to rewrite the classical cost-function 2.2 in order to bring-out explicitly the polarization terms. In this goal, multicomponent data are expressed in a polar form :

$$\mathbf{u} = A_u \mathbf{p}_{\phi(\mathbf{u})} e^{i\phi(\mathbf{u})} \quad (2.8)$$

where A_u is the amplitude of the vector \mathbf{u} , i.e. $|\mathbf{u}| = A_u$ and $\phi(\mathbf{u})$ is the global “phase” of the vector \mathbf{u} . Note that the “global” phase of a complex multicomponent vector cannot be defined alone but always with respect to one vector called the polarization state vector (Jones’ vector in electromagnetism) : $\mathbf{p}_{\phi(\mathbf{u})}$. The terms $\phi(\mathbf{u})$ and $\mathbf{p}_{\phi(\mathbf{u})}$ are related according to :

$$\mathbf{p}_{\phi(\mathbf{u})} \cdot e^{i\phi(\mathbf{u})} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega)}{A_u} \quad (2.9)$$

The polarization state vector describes an intrinsic property of data and the information contained in this vector should not change according to the definition of the phase.⁴ As shown in figure 2.1, for a mono-chromatic field the definition of the “global” phase does not influence the particle motion itself but only the definition of the reference for the phase (indicated by a green cross).

3. the vector \mathbf{p} is named Jones’ vector in analogy to the terminology used in electromagnetism (Born & Wolf, 1999). However in case of electromagnetic wave propagation the polarization vectors (of the electric/magnetic fields are perpendicular to the direction of propagation whereas in elastodynamics the vector might have the same direction as the propagation direction (for instance P-waves in P-SV configuration))

4. Conceptually, Morozov & Smithson (1996) drew an analogy between the “global” phase of the field and the gauge variables occurring in some equations of physics (as for instance in electromagnetism).

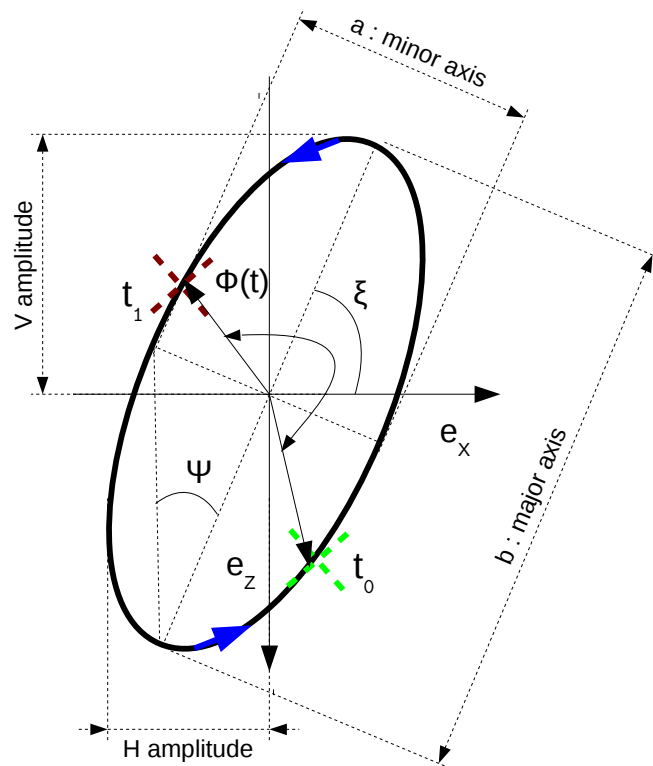


FIGURE 2.1 – Particle motion of a mono-chromatic wavefield for bi-component displacements. Minor and major axis of the polarization ellipse are plotted with dashed lines. The direction of the particle motion is indicated with the blue arrows. The tilt angle ξ is the angle between the horizontal axis and the major axis. The origin of the phase is indicated by the green cross and at time t_1 the “global phase” is denoted by $\phi(t)$

So finally, the polarization state vector, is a normed vector defined up to a multiplicative phase factor $e^{i\phi(\mathbf{u})}$. From the formulation of equation 2.8, multicomponent observed and computed data may be written as :

$$\mathbf{u}_{\text{obs}} = A_{u_{\text{obs}}} \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{u}_{\text{obs}})} e^{i\phi(\mathbf{u}_{\text{obs}})} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}_{\text{model}} = A_{u_{\text{model}(m)}} \mathbf{P}(\mathbf{m})_{\phi(\mathbf{u}_{\text{model}(m)})} e^{i\phi(\mathbf{u}_{\text{model}(m)})} \quad (2.11)$$

Using this vectorial formulation of \mathbf{u}_{obs} and $\mathbf{u}_{\text{model}}$ the classical cost function defined in equation 2.2 brings us :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{vect}}(\mathbf{m}) &= \langle \mathbf{u}_{\text{obs}}(\omega) - \mathbf{u}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m}) | \mathbf{W} | \mathbf{u}_{\text{obs}}(\omega) - \mathbf{u}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m}) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\text{src}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{rec}}} \left\| \mathbf{u}_{\text{obs}}^{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\omega) - \mathbf{u}_{\text{model}}^{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{m}) \right\|_{W^{j,k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\text{src}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{rec}}} \left\| A_{u_{\text{obs}}} \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{u}_{\text{obs}})} e^{i\phi(\mathbf{u}_{\text{obs}})} - A_{u_{\text{model}(m)}} \mathbf{P}(\mathbf{m})_{\phi(\mathbf{u}_{\text{model}(m)})} e^{i\phi(\mathbf{u}_{\text{model}(m)})} \right\|_{W^{j,k}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

To remove the influence of the amplitudes from the misfit function in eq. 2.12, we can define normalized computed and observed vectorial displacements as : $\mathbf{u}_{\text{obs}}^{(\text{normed})} = \mathbf{u}_{\text{obs}}/A_{d_{\text{obs}}}$ and $\mathbf{u}_{\text{calc}}^{(\text{normed})} = \mathbf{u}_{\text{obs}}/A_{u_{\text{calc}}}$ and introduce them in a least-square cost function :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{normed vect}}(\omega, \mathbf{m}) &= \sum_{k=1}^{n_{\text{src}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{rec}}} \left\| \mathbf{u}_{\text{obs}}^{(\text{normed})}(\omega)_{j,k} - \mathbf{u}_{\text{model}}^{(\text{normed})}(\omega, \mathbf{m})_{j,k} \right\|_{W^{j,k}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\text{src}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{rec}}} \left\| \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{\text{obs}}(\omega)_{j,k})} e^{i\phi(\mathbf{d}_{\text{obs}}(\omega)_{j,k})} - \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} e^{i\phi(\mathbf{d}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} \right\|_{W^{j,k}}^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

It is important to distinguish the cost-functions defined in equations 2.7 and 2.13. The difference between these two formulations concerns the normalization term. In equation 2.7, the normalization is done for each component independently whereas in equation 2.13 the normalization is performed according to the norm of the complete particle motion (all the components). In fact, in equation 2.7, the normalization removed in the residuals both effects of data amplitudes and polarizations whereas with a normalization according to the global particle motion 2.13 the information about the polarization is conserved in the residuals. Up to the authors knowledge, the cost function $\mathcal{E}^{\text{normed vect}}(\omega, \mathbf{m})$ with a “vectorial normalization” has not yet been used in the literature.

In the cost functions 2.12 and 2.13, a polarization vector \mathbf{p} appears, and we propose a new cost function enabling to use it alone as an observable for the inversion. As opposed to the previous polarization cost functions mentioned in introduction, this formulation is always well defined for any kind of polarization and it is invariant with sensors reference frame choice. Furthermore, this cost function is defined for any multicomponent measurements with an arbitrary number of components.

There are several ways to introduce the new cost function but to enable an easy extension to an arbitrary number of field components, the Stokes’ parameters formalism is introduced in the following sections.

2.3 Polarization description

The description of the polarization presented in this section is general, it can be used for different kind of physics (electromagnetism, elastodynamics ...) and for an arbitrary number of n_{comp} (also written n) orthogonal field components. When we consider the wavefield for an arbitrary receiver, source and frequency in order to avoid clutter indexes are omitted otherwise we follow the same conventions as defined in section 2.2.1.

2.3.1 Concepts of wavefront polarization, apparent polarization and polarization states

When applied to wavefields, the concept of polarization may have two different but related meanings.

The “polarization of a wavefront” is the relationship between the particle motion with respect to the wavefront direction. Since, the direction of the wavefront (for isotropic smooth enough media, (Cerveny, 2005) for more details) is provided by the spatial gradient of the phase and the quantity $\frac{(\mathbf{grad}(\phi_{\mathbf{u}}), \mathbf{u})}{\|\mathbf{grad}(\phi_{\mathbf{u}})\| \cdot \|\mathbf{u}\|}$ indicates the orthogonal projection coefficient of the particle motion in the direction of the wavefront. If this quantity equals zero, it means that the wavefront is purely transverse (shear waves), and if it equals one, it means that wave is fully polarized in the direction of the wavefront (longitudinal waves).

The second meaning of the vocable polarization can be the “apparent (particle motion) polarization”. The “apparent polarization” is related to the particle displacement as seen from a multicomponent sensor having a particular orientation without any consideration about the direction of propagation of the wavefronts, this concept relates the different components of the field in different directions. In case of mechanical waves, the (Jones) polarization vector \mathbf{p} is the quantity containing all the information about the material particle trajectory (fig. 2.1). In this article, we consider only normalized (according to the L2 norm) vectors \mathbf{p} . The polarization states vector is also known in Optics as the Jones vector (Born & Wolf, 1999) and a formal analogy can be drawn with the spinors of Quantum Physics (Torres del Castillo & Rubalcava Garcia, 2011; Fano, 1957). Furthermore, the polarization vector is a normalized vector defined up to a phase term, as wave functions in quantum mechanics. This last remark justifies the use of the vocable “polarization state” which refers to the whole class of particle motions having equivalent (up to a “global” phase multiplicative constant) polarization vector \mathbf{p}

Finally, we can note that “wavefront polarization” and “apparent polarization” are related when projecting the vector $\mathbf{P}_{\phi(\mathbf{u})}$ onto the wavefront direction instead of projecting it onto the direction of the sensor axis. For the rest of the article, we use the vocable “polarization” to mention the “apparent polarization”.

The formalism used in this article to describe the polarization has been first developed by Stokes (1851) to analyze electromagnetic waves. An extensive literature on that topic is available (Poincaré, 1892; Wiener, 1930; Born & Wolf, 1999; Samson & Olson, 1981). For high frequency electromagnetic waves (as in optics), it is easier to measure the field intensities than the field itself. For that reason, Stokes (1851) proposed a description based on field intensities instead of field values. Then, the formalism developed for quantum mechanics has been used to revisit the classical concept of polarization Fano (1957) in an elegant and systematic way. Samson (1973) has introduced this formalism in geophysics. We will only describe the most useful concepts of this formalism in order to enable to derive our cost function and avoiding most of the technical difficulties. For that reason, we introduce a comprehensive approach using the Dirac’s Bracket notations, for a discussion about the mathematical aspects the reader is invited to refer to Samson & Olson (1981). If the reader is not familiar with the Dirac’s Bracket formalism some elements are recalled in appendix 2.10.1.

2.3.2 Stokes' parameters description of polarization

In this section are introduced some elements of the Stokes' description of polarization. This formalism can be used to describe the polarization for an arbitrary number of components measurements components. More details can be found in Samson (1973). As mentioned, as for the wave functions in quantum mechanics, the norm and the global phase of polarization vectors does not have any physical meaning. For that reason, the mathematical tools used to manipulate quantum wave functions are also relevant to analyze the polarization.

The Stokes' parameter description developed in optics is based on the construction of "coherency matrices", which are also called polarization tensors in this article. These matrices are the same mathematical objects as the density states matrices used in Quantum Physics. To introduced this concept, we consider one polarization state represented equivalently the vectors \mathbf{p}_1 or the \mathbf{p}_2 . These vectors only differ from a multiplicative phase factor (phasor). Then, using the dyadic product with the Dirac notation, it is possible to construct the following operators :

$$\mathcal{P}_1 = |\mathbf{p}_1\rangle \langle \mathbf{p}_1| \quad , \quad \mathcal{P}_2 = |\mathbf{p}_2\rangle \langle \mathbf{p}_2| \quad (2.14)$$

When developing the calculations, it is easy to see that in the resulting matrices the information about the absolute phase of the originals polarization vectors is removed and the operators \mathcal{P}_1 and \mathcal{P}_2 are equal. The result of a dyadic product is a 2nd order tensor which might be represented with a singular hermitian positive definite matrix. In such a case, densities matrices correspond to "pure state" : the unique eigenvector (defined up to a complex multiplicative constant) of the density matrices is simply the polarization vector used in the computation of the dyadic product (\mathbf{p}_1 or \mathbf{p}_2 eq. 2.14).⁵

For the rest of the article, we will adopt the following convention : the density matrix associated to a polarization state vector \mathbf{p}_a is written \mathcal{A} .

It is also noteworthy that density matrices have other algebraic properties which can be related to the description of the particle motion trajectories. A detailed discussion about these properties is proposed in (Samson & Olson, 1980).

It is convenient to decompose polarization tensors into sums of orthogonal polarization tensors, to do so a scalar product needs to be defined. For two polarization tensors \mathcal{U}_1 and \mathcal{U}_2 , the analog to scalar product in the space of dyads (Samson & Olson, 1981) is :

$$\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \rangle = \text{trace}(\mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{U}_2) \quad (2.16)$$

And in our case, since our polarization tensors correspond to pure states, this product takes a particular form :

5. In Optics, the properties of the coherency matrices are quite different. Due to experimental setup, in order to reduce the noise effect, these operators are generally constructed by averaging the operators resulting from different measurements. For example if we consider a set of m measurements \mathbf{u}_j , the the density coherency matrix equals :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\mathbf{u}_j\rangle \langle \mathbf{u}_j| \quad (2.15)$$

So in in optics with conventional experimental conditions, coherency matrices obtained from averaging are not singular.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \rangle &= \text{trace}(\mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{U}_2) \\
 &= \text{trace}(|\mathbf{u}_1\rangle \langle \mathbf{u}_1| |\mathbf{u}_2\rangle \langle \mathbf{u}_2|) \\
 &= \text{trace}(|\mathbf{u}_1\rangle \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle \langle \mathbf{u}_2|) \\
 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \text{trace}(|\mathbf{u}_1\rangle \langle \mathbf{u}_2|) \\
 &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \\
 &= |\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle|^2
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Taking advantage of the definition of the inner product over the space of polarization tensors, the orthogonality relationship between two density matrices \mathcal{P}_j and \mathcal{P}_i is :

$$\text{trace}(\mathcal{P}_i^\dagger \mathcal{P}_j) = \delta_{ij}, \text{ (orthogonality relation)} \tag{2.18}$$

Using the fact that the density matrices are hermitian, a complete basis with real coefficients can be generated using n_{comp}^2 orthogonal hermitian matrices. This basis may be uniquely determined since one matrix of the basis is given (other matrices generated by an orthogonalization process as for instance the Gram-Schmidt process). Physically the most natural choice is to select the matrix \mathcal{P}_0 such that $\text{trace}(\mathcal{P}_0^\dagger \mathcal{U})$ is proportional to total energy of the multicomponent measurement \mathbf{u} , i.e. $\text{trace}(\mathcal{P}_0^\dagger \mathcal{U}) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$. Since $\text{trace}(\mathcal{P}_0^\dagger \mathcal{U}) = \langle \mathbf{u} | \mathcal{P}_0 | \mathbf{u} \rangle$ (see appendix 2.10.1) we have :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u} | \mathcal{P}_0 | \mathbf{u} \rangle &\propto \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \text{ for all the } \mathbf{u}, \text{ which implies :} \\
 \mathcal{P}_0 &\propto \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

where \mathbf{I} is a $n_{comp} \times n_{comp}$ second order identity tensor. The normalization coefficient “ γ ” defined as $\mathcal{P}_0 = \gamma \mathbf{I}$ and chosen by convention as a real positive number, is determined from the orthogonality relations (eq. 2.18)

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_0 \rangle &= \text{trace}(\mathcal{P}_0^\dagger \mathcal{P}_0) \\
 &= |\gamma|^2 \text{trace}(\mathbf{I}) \\
 &= |\gamma|^2 n_{comp}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$= 1, \text{ according to the orthogonality condition} \tag{2.21}$$

From equations 2.20 and 2.21 and following the convention $\gamma \in \mathfrak{R}^+$, we get $\gamma = \frac{1}{\sqrt{n_{comp}}}$ and finally the matrix representation of \mathcal{P}_0 is :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{n_{comp}}} \tag{2.22}$$

So finally, we can define a complete orthogonal basis for generating any pure state polarization tensor from the following orthogonal matrices set : $\{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{n_{comp}^2-1}\}$. These matrices are called the Pauli Spin matrices⁶.

6. Since \mathcal{P}_0 is provided, the expressions of the other Pauli-Spin matrices can be deduced from an orthogonalization process (e.g. Gram-Schmidt process). However, the Pauli matrices indexing may change depending on the communities. In this article we adopt the conventions used in the optics .

From the definition of the matrix \mathcal{S}_0 and the trace summation formula, we can demonstrate that for all indexes greater than zero, $\text{trace}(\mathcal{S}_l) = 0$.

The definition of Pauli spin matrices has a very practical consequences, firstly it allows any polarization tensor \mathcal{U} resulting from multicomponent measurements to be decomposed on an orthogonal basis :

$$\mathcal{U} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \mathcal{S}_j \quad (2.23)$$

with $\text{trace}(\mathcal{S}_i^\dagger \mathcal{S}_j) = \delta_{ij}$ and α_j are real numbers called the Stokes' coefficients.

Perhaps the most interesting property for our purpose is the simplification of the inner product of dyads into the sum of the product of the Stokes' coefficients :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle &= \sum_{j=0}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A})^* \cdot \alpha_j(\mathcal{B}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B}) \quad (\text{since Stokes' coefficients are real numbers}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

And the j Stokes' coefficient corresponding to the polarization tensor \mathcal{A} may be calculated using :

$$\alpha_j(\mathcal{A}) = \text{trace}(\mathcal{S}_j^\dagger \mathcal{A}) \quad (2.25)$$

In particular, from the latter relationship and the equation 2.22, we can derive a general formula for the first Stokes' parameter. For a measured field \mathbf{u} of n_{comp} orthogonal components having \mathcal{U} as polarization tensor we have :

$$\alpha_0(\mathcal{U}) = \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{n_{comp}}} \quad (2.26)$$

The Stokes' coefficients are gathered in a n_{comp}^2 length real vector called the Stokes' vector, namely for a polarization state "a" :

$$\alpha(a) = \begin{pmatrix} \alpha_{a,0} \\ \vdots \\ \alpha_{a,n_{comp}^2-1} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

2.3.3 The intrinsic "world" of pure polarization states : the Poincaré Sphere

If we consider a pure polarization state A represented by the polarization tensor \mathcal{A} with the corresponding Stokes' vector $\alpha(A)$ according to the equation 2.24 :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle &= \sum_{j=0}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A})^2 \\
&= \alpha_0(\mathcal{A})^2 + \sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A})^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

On the other hand from equation 2.17 we have :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle &= |\langle \mathbf{u}_a | \mathbf{u}_a \rangle|^2 \\
&= n_{comp} \alpha_0(a)^2 \text{ (from equation 2.26)}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Combining equations 2.28 with 2.29, it yields :

$$(n-1)\alpha_0^2 = \sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j^2 \tag{2.30}$$

The Stokes coefficients solution of the equation 2.30 have the property to be located on the surface of a hypersphere of radius $\alpha_0 \sqrt{n_{comp}^2 - 1}$, embedded in a $(n_{comp}^2 - 1)$ space. This sphere is called in optics the Poincaré Sphere and in Bloch Sphere in Condensed Matter Physics (Bloch, 1946). The Poincaré is very useful for our purpose since it defines a smooth hypersurface (called a differential manifold in mathematics) on which all the polarization states are uniquely positioned without ambiguity.

It is noteworthy that the Poincaré Sphere representation can be derived for 2 components measurements from another formalism by Bolinder (1967) using the spectral polarization ratios. The fact that the pure polarization states are located on an hypersphere clearly shows that the euclidean distances are not well suited to consider the polarization, rather non-euclidean geometries need to be considered for the representation of the polarization states.

A the geometrical interpretation of the Poincaré Sphere in terms of particle motion is provided in the next section.

2.3.4 Geometrical interpretation of the Poincaré Sphere, Pauli's Spin Matrices and Stokes' Coefficients for bi-component measurements

For bi-component measurements, the geometrical meaning of the Poincaré Sphere and related concepts of Pauli's Spin Matrices and Stokes' Coefficients are easily representable since in that case the Poincaré sphere is embedded in a 3 dimensional space.

We consider the axis : e_x and e_z and the each field component is defined according to $u_x = \langle \mathbf{e}_x | \mathbf{u} \rangle$ and $u_z = \langle \mathbf{e}_z | \mathbf{u} \rangle$. The polarization tensor \mathcal{U} associated to the polarization state of \mathbf{u} has the following form :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= |\mathbf{u}\rangle \langle \mathbf{u}| \\
&= \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^* & u_z^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_x^* u_x & u_x u_z^* \\ u_z u_x^* & u_z^* u_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |u_x|^2 & u_x u_z^* \\ (u_x u_z^*)^* & |u_z|^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

In the equation 2.31, we can notice that the diagonal terms are pure positive real numbers corresponding to the energy measured on each component. The anti-diagonal terms are conjugated complex numbers.

By definition, the first Pauli Spin matrix \mathcal{S}_0 are defined in such a way that the associated Stokes' coefficient equals the energy of the particle motion, in the bi-component case, this yields :

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

And using an orthogonalization process, we may obtain the other matrices :

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

From the definition of these matrices and the formula eq. 2.25 the Stokes' coefficients are given by :

$$\alpha_0(u_x, u_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x^* u_x + u_z^* u_z) \quad , \tag{2.34a}$$

$$\alpha_1(u_x, u_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x^* u_x - u_z^* u_z) \quad , \tag{2.34b}$$

$$\alpha_2(u_x, u_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_x^* u_z + u_z^* u_x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \Re[u_x^* u_z] \quad , \tag{2.34c}$$

$$\alpha_3(u_x, u_z) = \frac{i}{\sqrt{2}}(u_z^* u_x - u_x^* u_z) = \frac{2}{\sqrt{2}} \Im[u_x^* u_z] \quad , \tag{2.34d}$$

It is noteworthy that for the indexes higher than 0, the indexes of Pauli matrices and Stokes' coefficients may be permuted according to the authors definitions of Pauli matrices , so in the literature depending of the authors some differences may occur. In this article, we adopt the convention of the optical community.

According to the proposed definitions of Pauli's spin matrices and Stokes' coefficients any polarization tensor developed in along the e_x and e_z axis (eq. 2.31) can be written in terms of Stokes' coefficients as follows :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} \alpha_0(u_x, u_z) + \alpha_1(u_x, u_z) & \alpha_2(u_x, u_z) - i\alpha_3(u_x, u_z) \\ \alpha_2(u_x, u_z) + i\alpha_3(u_x, u_z) & \alpha_0(u_x, u_z) - \alpha_1(u_x, u_z) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} \alpha_0(u_x, u_z) + \alpha_1(u_x, u_z) & \alpha_2(u_x, u_z) - i\alpha_3(u_x, u_z) \\ (\alpha_2(u_x, u_z) - i\alpha_3(u_x, u_z))^* & \alpha_0(u_x, u_z) - \alpha_1(u_x, u_z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A geometrical interpretation of the Stokes' coefficient and the properties relating the Poincaré sphere to the observed polarization ellipse are illustrated in figure 2.2. The space in which the Poincaré sphere is embedded is described by orthogonal axis e_1 , e_2 and e_3 . These axis correspond respectively the value of the Stokes' coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. For instance, in figure 2.2 a polarization state A (red cross) having the polarization tensor \mathcal{P}_a is located in the space described with 3 coordinates : the values of the first (α_1), second (α_2) and the third (α_3) Stokes' coefficients. With this representation, it is possible to relate the spherical coordinate to the properties of the particle motion trajectory (fig. 2.1). Since we are dealing with pure states, the radial distance is proportional to the particle motion energy (first stokes' coefficient).

In the "northern" hemisphere are included all the particle motions rotating clockwise (as the left circular polarization (LC) state located at the "north" pole) whereas in the "southern" hemisphere are included particle motions rotating anti-clockwise (as the right circular polarization (RC) state placed at the "south" pole).

Polarization states located in the equatorial plane (as for instance LH, LV, 45L , 135L in figure 2.2) are linearly polarized states meaning that their particle motions are strictly rectilinear.

In figure 2.2, the azimuth angle is measured by the angle "2 ξ " where ξ corresponds to the tilt angle of the polarization ellipse in figure 2.1. The polar angle is indicated by the angle "2 Ψ " which can be directly related to the ellipticity angle of the particle motion in figure 2.1.

The curvature of the Poincaré sphere manifold prevents the ellipticity angle and the tilt angle to vary independently. A very clear consequence of this is the loss of meaning when of the tilt angle when dealing with perfectly circular particle motion ($\Psi \pm 45^\circ$ for the particle trajectory or states located at the poles in the current Poincaré sphere representation), in that case we see that the tilt angle can not be defined on the Poincaré sphere.

2.3.5 Definition of a distance between polarization states

Since, we have a Riemannian manifold (the Poincaré Sphere) well suited to represent the polarization, we take advantage of it to define an intrinsic distance. In differential geometry, geodesics define the shortest path on a manifold connecting one point to another, extending the concept of distance to non flat spaces. For instance, at the surface a spherical Earth, the geodesic distance between two points is the minor-arc between these points. So we define the distance between two polarization states by computing the geodesic distance on the Poincaré sphere. Fortunately, since the Poincaré sphere has a simple geometry (constant positive curvature), it makes possible to avoid the use of analytical methods from differential geometry for computing geodesics by only using simple geometrical arguments. To reach that aim, we consider two vectorial fields measurements " \mathbf{u}_a " and " \mathbf{u}_b " with the associated polarization vectors \mathbf{p}_a and \mathbf{p}_b , and Stokes' vectors : $\alpha(a)$ and $\alpha(b)$.

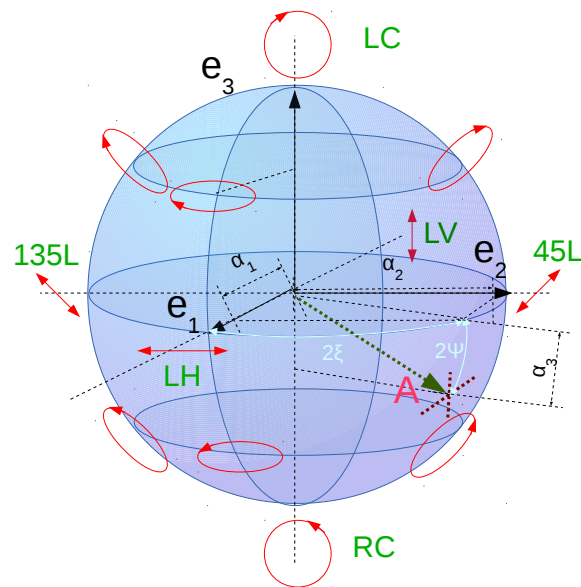


FIGURE 2.2 – Poincaré sphere representation for normalized bi-component fields measurements . Along axis e_1, e_2 and e_3 are located the Stokes' parameters α_1, α_2 and α_3 . The red cross with “A” indicates the location of a polarization state with the corresponding Stokes' parameters α_1, α_2 and α_3 . Azimuth and polar angles are 2ξ and 2Ψ . Particle motions corresponding to unique Stokes parameters are plotted with the red figures. Figure redrawn and adapted from Boerner (2007)

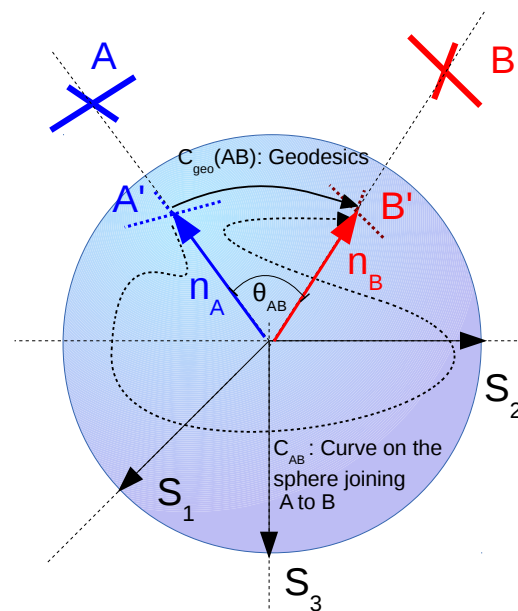


FIGURE 2.3 – Illustration of the Poincaré distance for bi-component measurements. The states A and B (blue and red crosses) are projected on the unit Poincaré sphere (blue and red dashed crosses) and according to their normal vectors the angle θ_{AB} is computed. The arc on the Poincaré sphere corresponding to the θ_{AB} is $C_{geo}(AB)$ and there is no shorter path on the Poincaré sphere joining the points A' and B' .

If the Stoke's vectors are normalized with respect to their first Stokes' coefficient then it is possible to associate to any polarization state, a unique location at a Poincaré hypersphere having a radius equals to the unity (in figures 2.3 polarization states A and B are normalized to A' and B' respectively). So to a polarization state "a", is associated a point on the Poincaré sphere and to this point, it is possible to define a radial vector $\mathbf{n}_r(a)$ which is normal to the surface of the sphere.

In the Stokes' parameters framework, this vector has $n_{comp}^2 - 1$ real components which correspond actually to the coordinates of the normalized Stokes' vector excluding the first Stokes parameters (which is used for the normalization) :

The expression of $\mathbf{n}_r(a)$ is :

$$\mathbf{n}_r(a) = \frac{1}{\alpha_{a,0} \sqrt{n_{comp}^2 - 1}} \begin{pmatrix} \alpha_1(a) \\ \vdots \\ \alpha_{n_{comp}^2 - 1}(a) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Furthermore, if we consider the vectors $\mathbf{n}_r(a)$ and $\mathbf{n}_r(b)$ the angle between these two vectors is defined according to :

$$\cos(\theta_{a,b}) = \frac{\langle \mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b \rangle}{\|\mathbf{n}_a\| \cdot \|\mathbf{n}_b\|} \quad (2.37)$$

Since the geodesic distance between two points a and b located on a unit sphere corresponds to the angle between these points, one way to define the geodesic distance on the hypersphere (called $d_{Poincare}(a, b)$), is to compute the angle between the normal vectors \mathbf{n}_a and \mathbf{n}_b , which yields :

$$\begin{aligned} d_{Poincare}(a, b) &= \frac{|\theta_{a,b}|}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{n}_r(a), \mathbf{n}_r(b) \rangle}{\|\mathbf{n}_r(a)\| \cdot \|\mathbf{n}_r(b)\|} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cos^{-1} (\langle \mathbf{n}_r(a), \mathbf{n}_r(b) \rangle) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\sum_{j=1}^{n_{comp}^2 - 1} \alpha_j(a) \cdot \alpha_j(b)}{\alpha_0(a) \cdot \alpha_0(b) \cdot (n - 1)} \right) \quad (2.39)$$

In the equation 2.39, the function \cos^{-1} is the arc cosine function mapping from interval $[-1, 1]$ to the interval $[0, \pi]$.

Finally, the "Poincaré distance" is a mapping from any polarization state to the interval $[0, \pi]$.

By combining the expressions 2.24 and 2.17, we get :

$$\sum_{j=0}^{n_{comp}^2 - 1} \alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B}) = |\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b \rangle|^2 \quad (2.40)$$

$$= A_a^2 A_b^2 |\langle \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \rangle|^2 \quad (2.41)$$

Where A_a and A_b are the amplitudes of the vectors \mathbf{u}_a and \mathbf{u}_b .

The left-hand terms might be decomposed into the following form :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B}) &= \alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B}) + \sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B}) \\ &= \alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B}) \left(1 + \sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \frac{\alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B})}{\alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B})} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

If we insert the last term of eq. 2.42 in eq. 2.41 with a little algebra, it gives :

$$\sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \frac{\alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B})}{\alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B})} = \left(\frac{|\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b \rangle|^2}{\alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B})} - 1 \right) \quad (2.43)$$

If we use the expression of the first Stokes' coefficient provided in 2.26, the equation 2.43 becomes :

$$\sum_{j=1}^{n_{comp}^2-1} \frac{\alpha_j(\mathcal{A}) \cdot \alpha_j(\mathcal{B})}{\alpha_0(\mathcal{A}) \cdot \alpha_0(\mathcal{B})} = n_{comp} |\langle \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \rangle|^2 - 1 \quad (2.44)$$

$$= \left(n_{comp} \frac{|\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b \rangle|^2}{\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_a \rangle \langle \mathbf{u}_b, \mathbf{u}_b \rangle} - 1 \right) \frac{1}{n_{comp} - 1} \quad (2.45)$$

Finally, by inserting the expression 2.45 in equation 2.39 we can get a general expression of the Poincaré distance between the field vectors \mathbf{u}_a and \mathbf{u}_b having n_{comp} orthogonal components :

$$d_{Poincare}(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b \rangle|^2}{\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_a \rangle \langle \mathbf{u}_b, \mathbf{u}_b \rangle} - 1 \right) \right) \quad (2.46)$$

2.3.6 A cost function based on the Poincaré distance

As a first approach, since we are dealing with noise-free data there is no particular statistical argument to promote a specific norm for the data residual. In order to prone the mathematical simplicity, we just take the quadratic norm.

Finally our proposal for polarization based misfit function with n_{comp} components noise free data, expressed in terms of Stokes' parameters is :

$$\mathcal{E}_P(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \left| \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^{(n_{comp}^2-1)} \alpha_i^{obs} \cdot \alpha_i^{model}(\mathbf{m})}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}(\mathbf{m})} \right) \right|^2 \quad (2.47)$$

with α_i^{obs} and $\alpha_i^{model}(\mathbf{m})$ respectively the indexed Stokes' parameters for the observed data and for the data computed with the parameters \mathbf{m} , and $W^{j,k}$ some user defined source/receivers weights.

Also, this misfit function may directly been expressed in terms of fields :

$$\mathcal{E}_P(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \left| \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |\langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{model}(\mathbf{m}) \rangle|^2}{\langle \mathbf{u}_{model}(\mathbf{m}) | \mathbf{u}_{model}(\mathbf{m}) \rangle \langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{obs} \rangle} - 1 \right) \right) \right|^2 \quad (2.48)$$

with \mathbf{u}_{obs} and $\mathbf{u}_{model}(\mathbf{m})$ respectively standing for fields computed and measured vectorial fields and the computed field data from the parameters vector \mathbf{m} .

In order to consider multiple frequencies, a multi-frequency misfit function can be considered by simply summing-up mono-frequency misfit functions, as in the following equation :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{m}) = \sum_{l=1}^{n_{frq}} \mathcal{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{m}, \omega_l) \quad (2.49)$$

2.4 Discussion on the relation between the Poincaré distance based cost functions and other polarization cost functions

The discussion of the relationship between the polarization based cost function proposed in the literature and the proposed cost function (based on the Poincaré distance) is restricted to the case of bi-component measurements.

The interpretation with the Poincaré sphere of tilt angle based misfit functions (e.g. Hu & Menke (1992)) is very intuitive : the difference of tilt angle between two polarization states A and B simply equals two times the angle between the azimuthal cut planes C_{ξ_A} and C_{ξ_B} . In figure 2.4 these planes are respectively named C_{ξ_A} and C_{ξ_B} and the angle between these planes is $2\Delta\xi_{AB}$.

The objective function based on ellipticity angle residuals as proposed by Marandò *et al.* (2012) has also an immediate geometrical interpretation on the Poincaré sphere since it is the double of the angle between the polar planes C_{ψ_A} and C_{ψ_B} . In figure 2.4 these planes are respectively named C_{ψ_A} and C_{ψ_B} and the angle between these planes is $2\Delta\psi_{AB}$.

Clearly, the Poincaré sphere representation enables to completely characterize the particle motion polarization with an unified framework combining both ellipticity and tilt angle residuals distance. Furthermore, the particular Poincaré sphere topology enables to define always consistent polarization residuals distance (for instance due to the sphere curvature the tilt angle is less accounted as the ellipticity angles increases).

The second family of polarization observables concerns the polarization ratios. Among the different definitions, only the horizontal over vertical component polarization ratio is discussed. Instead of only considering only the amplitude of polarization ratio we consider the more general case of the complex polarization ratio defined as :

$$\beta_{H/V} = \frac{u_x}{u_z} \quad (2.50)$$

To discuss the mapping between $\beta_{H/V}$ and the Poincaré sphere, it should be first noticed (fig. 2.2) that the polarization states corresponding to the linear horizontal particle motion and vertical particle motion have the following coordinates on the Poincaré sphere $(1, 0, 0)$ and $(-1, 0, 0)$ when using the same coordinate system as described in section 2.3.4 (fig. 2.2).

It can be demonstrated (Bolinder, 1967) that for a given polarization state represented on the Poincaré sphere a mapping of the the Poincaré sphere to ratio $\beta_{H/V}$ can be geometrically represented by a stereographic projection having for projective node the point $(1, 0, 0)$. An illustration of this mapping is proposed in figure 2.5, where A and B are two polarization states located on the Poincaré

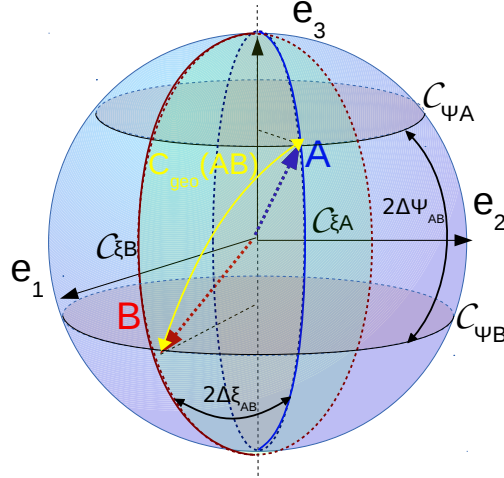


FIGURE 2.4 – Illustration of the relation between the Poincaré distance, the tilt angle difference and ellipticity angle difference in case of bi-component measurements. A and B are two (pure) polarization states located at the surface of the Poincaré sphere. The Poincaré (geodesic) distance between these states is $C_{geo}(AB)$. The difference of tilt angle is $\Delta\xi_{AB}$ and the difference of ellipticity angle is $\Delta\psi_{AB}$. From polar and azimuthal cuts, several slices may be associated to each points : C_{ξ_A} and C_{ξ_B} are the planes defined from the polar cuts of points A and B. C_{ψ_A} and C_{ψ_B} are the planes defined from azimuthal cuts of points A and B.

sphere with the corresponding complex polarization ratios $\beta_{H/V}(A)$ and $\beta_{H/V}(B)$ obtained from stereographic projection.

The “Euclidean distance” between the complex polarization ratios is depicted in figure 2.5 (green segment) and is computed according to :

$$d_{(\beta_{h/v}(B), \beta_{h/v}(A))} = \sqrt{(\beta_{h/v}(B) - \beta_{h/v}(A)) * (\beta_{h/v}(B) - \beta_{h/v}(A))} \quad (2.51)$$

The values of the $\beta_{h/v}$ are growing indefinitely when the particle motion is converging to a linear motion, which makes the distance $d_{(\beta_{h/v}(B), \beta_{h/v}(A))}$ meaningless in such a case. To mitigate this problem, weights can be heuristically applied to the different terms $d_{(\beta_{h/v}(B), \beta_{h/v}(A))}$ in order to reduce the contributions of the highest values of the polarization ratios

The classical HVRS ratio misfit functions have often the following form : $d_{(|\beta_{h/v}(model)|, |\beta_{h/v}(obs)|)}^2$ where $|\beta_{h/v}(model)|$ and $|\beta_{h/v}(obs)|$ are absolute values of the HVRS ratio for respectively the computed data and the observed data.

Removing the phase, of the polarization ratios creates an ambiguity of polarization state. This is illustrated in figure 2.5, where all the equivalent polarization states corresponding to $|\beta_{h/v}(A)|$ and $|\beta_{h/v}(B)|$ are represented in the complex plane with the curves $C_{iso\ h/v}(|\beta_{h/v}(A)|)$ and $C_{iso\ h/v}(|\beta_{h/v}(B)|)$ and on the Poincaré sphere with the curves $C_{iso-poinc}(|\beta_{h/v}(A)|)$ and $C_{iso-poinc}(|\beta_{h/v}(B)|)$. The distance between the amplitude only polarization ratios $d_{(|\beta_{h/v}(B)|, |\beta_{h/v}(A)|)}$ is represented by the pink segment in figure 2.5.

Also, we can notice that :

$$d_{(|\beta_{h/v}(B)|, |\beta_{h/v}(A)|)} \leq d_{(\beta_{h/v}(B), \beta_{h/v}(A))} \quad (2.52)$$

Furthermore, the values of $d_{(|\beta_{h/v}(model)|, |\beta_{h/v}(obs)|)}^2$ (or $d_{(\beta_{h/v}(model), \beta_{h/v}(obs))}^2$) vary with respect to the choice of sensors orientation whereas the Poincaré distance is strictly invariant.

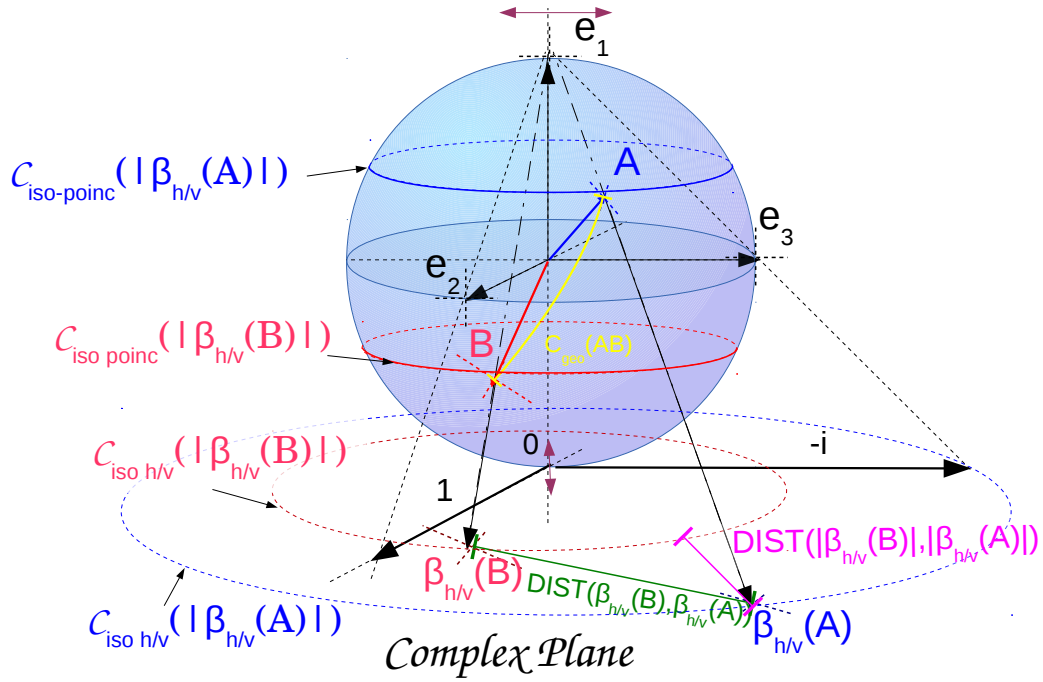


FIGURE 2.5 – Illustration of the relation between the Poincaré distance and the complex ratio between the horizontal and vertical components. A special attention has to be paid to the axis on the Poincaré sphere : the “north pole” corresponds in this figure to the first Stokes’ coefficient. A and B are polarization states located on the polarization sphere. The polarization ratios $\beta_{h/v}(A)$ and $\beta_{h/v}(B)$ corresponding to the states A and B are obtained from a stereographic projection from the pole e_1 of the Poincaré sphere onto the complex plane.

Bodin *et al.* (2014) proposed an alternative to the complex polarization ratios, with the cost-function $\mathcal{E}_{bodin}(\mathbf{m})$ which can be expressed in the frequency domain as :

$$\mathcal{E}_{bodin}(\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 |u_{x,model} u_{z,obs} - u_{z,model} u_{x,obs}|^2 \quad (2.53)$$

We consider alternative observations \mathbf{u}'_{obs} and \mathbf{u}'_{model} having the same polarization but different amplitudes, defined as :

$$\mathbf{u}'_{model} = A'_{model} \mathbf{u}_{model} \text{ and } \mathbf{u}'_{obs} = A'_{obs} \mathbf{u}_{obs} \quad (2.54)$$

with A'_{model} and A'_{obs} two real positive factors.

Then, the value $\mathcal{E}_{bodin}(\mathbf{m}')$ of the cost function calculated with \mathbf{u}'_{model} and \mathbf{u}'_{obs} is :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{bodin}(\mathbf{m}') &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 |u'_{x,model} u'_{z,obs} - u'_{z,model} u'_{x,obs}|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 |A'_{model}|^2 |A'_{obs}|^2 |u_{x,model} u_{z,obs} - u_{z,model} u_{x,obs}|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 |A'_{model}|^2 |A'_{obs}|^2 \mathcal{E}_{bodin}(\mathbf{m})
\end{aligned} \tag{2.55}$$

However, one can notice when comparing equations 2.55 with 2.53 that this cost-function depends on amplitudes : it not strictly speaking a measure of the polarization misfit. To obtain an amplitude independent cost function, observed and computed data need to be normalized by their amplitude in the expression 2.53. Furthermore, the extension of this cost-function for more than 2 components configurations is not straightforward. One should notice that this objective function has the advantage of being easy to relate to Bayesian estimators.

Apart from the geophysical community, to the author knowledge there is no strictly equivalent use of the Poincaré sphere for structural parameter identification purposes. The closest example in the literature seems to be the works of Devlaminck & Terrier (2010); Devlaminck *et al.* (2011) in optics. Using the Lie-group theory (exponential and logarithm maps), Devlaminck & Terrier (2010) define a distance between non-singular polarization tensors and then they use this geodesic distance between mixed state to estimate optical properties (Devlaminck *et al.*, 2011). However, this distance is not suitable for pure polarization states, indeed it increases towards infinite when one of the eigenvalues of the polarization is getting close to zero (wich is the case of a pure state polarization tensor).

A similar formalism was proposed in computational anatomy by Arsigny *et al.* (2007) in order to deal with statistics in tensors spaces.

Also, for purposes of polarization-sensitive optical cohenrence tomography Park *et al.* (2006) studied the effect of attenuation and anisotropy parameters on trajectories on the Poincaré sphere. However, for estimation of these parameters Kemp *et al.* (2005); Park *et al.* (2009) have used a misfit function based residual which is a simple subtraction of the normalized Stokes' vectors (observed and computed with the estimated parameters).

Finally, in quantum physics the distance between quantum states which is equivalent to the Poincaré distance proposed here is known has the Fubini-Study metric geodesic distance (Bengtsson & Życzkowski, 2006).

2.5 Full waveform inversion and gradient computation

In this section is introduced the framework used for the inversion and the mathematical material needed for implementing for the proposed cost function (eq. 2.47). The form of cost function is general and not directly related to a particular optimization method. In practice due to limited computational resources, there is a compromise between the complexity involved in the forward problem and the size of the parameter region explored in the inverse problem. In this study, we solve directly the visco-elastodynamic equations of propagation with a Discontinuous Galerkin (DG) finite elements method and the cost function optimization is based on a local (differential) methods based on the LBFGS method. The cost function gradient might be efficiently computed by taking advantage of the

adjoint-state formalism. All the implementations have been done in a 2D FWI code developed in the framework of the SEISCOPE consortium (Brossier, 2011). This massively parallelized FWI code is integrally formulated in the frequency domain which allows flexible implementations of attenuation laws, efficient solving for multiple sources and as well as efficient memory management for gradient storing in case of the inversion of a few limited frequencies.

In the current derivation, the vector containing all the computed fields variables is called $\mathbf{u}(\omega)_{calc}$. The associated discretized source term vector is written $\mathbf{s}(\omega)$. In the frequency domain, the discretized forward problem is written as :

$$\mathbf{s}(\omega) = \mathbf{Z}(\mathbf{m}, \omega)\mathbf{u}(\omega)_{calc}, \text{ where } \mathbf{u} \text{ contains the full multicomponent wavefield} \quad (2.56)$$

where $\mathbf{Z}(\mathbf{m}, \omega)$ is the impedance matrix resulting from the discretization of the forward problem with the vector parameter \mathbf{m} at the pulsation ω .

Since in this section the formalism for the inversion is developed for independent frequencies, we can omit the dependence on the pulsation term ω .

Projection matrices \mathbf{Proj} , \mathbf{Proj}_x and \mathbf{Proj}_z are used to reduce the computed fields $\mathbf{u}(\mathbf{m}, \omega)_{calc}$ to the velocities at the locations of measured field components projected respectively for all the components, for the horizontal components only and vertical components only.

From this notations, we can replace $\mathbf{u}_{model}(\mathbf{m})$ in the cost function expressions into two explicit formulations related to the forward modeling :

$$\mathbf{u}_x^k(\mathbf{m}) = \mathbf{Proj}_x \mathbf{u}(\omega)_{calc} = \mathbf{Proj}_x \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s}_k \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u}_z^k(\mathbf{m}) = \mathbf{Proj}_z \mathbf{u}(\omega)_{calc} = \mathbf{Proj}_z \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s}_k \quad (2.58)$$

In order to avoid difficulties related to vector functions manipulations, we may decompose $\mathbf{u}_x(\mathbf{m})$ and $\mathbf{u}_z(\mathbf{m})$ to consider each receiver independently. Then different contributions are accounted by summing all the individual gradient contributions obtained for the different couples of sources and receivers. In that aim, we extent the definition of projection operators with \mathbf{Proj}^j , \mathbf{Proj}_x^j and \mathbf{Proj}_z^j which respectively sample all the components, horizontal only and vertical only particle velocities at the location of the j receiver :

$$u_x^{j,k}(\mathbf{m}) = \mathbf{Proj}_x^j \mathbf{u}(\omega)_{calc} = \mathbf{Proj}_x^j \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s}_k \quad (2.59)$$

$$u_z^{j,k}(\mathbf{m}) = \mathbf{Proj}_z^j \mathbf{u}(\omega)_{calc} = \mathbf{Proj}_z^j \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s}_k \quad (2.60)$$

The first paragraph is dedicated to the derivation of the gradient formulation.

2.5.1 Gradient computation using the Lagrange's multipliers formalism

In this section, only the gradient of the cost function corresponding to the ‘‘Poincaré’’ distance is derived but in appendixes cost function gradients corresponding to the polarization ratio and normalized wavefields based cost functions are provided . To obtain the expression of the adjoint state gradient expression, perturbation methods with reciprocity conditions can be used Lailly (1983); Tarantola (1984); Pratt *et al.* (1998) or the Lagrange's multipliers methods Bunks *et al.* (1995); Plessix (2006); Liu & Tromp (2006). For our purpose, we employ the Lagrange's multipliers method. The first step of the Lagrange's multipliers method is to define the Lagrangian expression which corresponds to the cost function associated with all the constrains. The aim of this method is to determine stationary

points for the cost-function respecting all the constrains. In the presented case, the Lagrangian is based on the cost function expression 2.47 and on the Stokes parameters for bi-component measurements provided provided in eq. 2.34.

The full Lagrangian has the following expression :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{u}_{obs}, \mathbf{m}, \Lambda_l, \dots) &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \cos^{-1}(T^{i,j}) \right)^2 \right. \\
&+ \Re \left(\left\langle T^{i,j} - \frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \middle| \Lambda_1 \right\rangle \right) \\
&+ \Re \langle \alpha_0^{model} - (u_x^* u_x + u_z^* u_z) \middle| \Lambda_2 \rangle \\
&+ \Re \langle \alpha_1^{model} - (u_x^* u_x - u_z^* u_z) \middle| \Lambda_3 \rangle \\
&+ \Re \langle \alpha_2^{model} - (u_x^* u_z + u_z^* u_x) \middle| \Lambda_4 \rangle \\
&+ \Re \langle \alpha_3^{model} - i(u_z^* u_x - u_x^* u_z) \middle| \Lambda_5 \rangle \\
&+ \Re \langle u_x - \mathbf{Proj}_x^j \mathbf{u} \middle| \Lambda_6 \rangle \\
&+ \Re \langle u_z - \mathbf{Proj}_z^j \mathbf{u} \middle| \Lambda_7 \rangle \\
&+ \left. \Re \langle \mathbf{Z}(\mathbf{m}) \mathbf{u} - \mathbf{s}_k \middle| \Lambda_8 \rangle \right\} \tag{2.61}
\end{aligned}$$

with Λ_l for $l \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ being the Lagrange multipliers. In the expression of the Lagrangian, all the terms not varying with respect to the vector parameter \mathbf{m} are considered as constant numbers and not developed with corresponding Lagrange multipliers. When analyzing the Lagrangian, it is obvious that the terms $T^{i,j}, \Lambda_l \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ are real numbers since in the scalar products the corresponding left handed terms are real and only the real part of the scalar products matters.

The second step is to differentiate the Lagrangian with respect to all the variables depending of the model parameters \mathbf{m} . To avoid lengthy derivations and mathematical technicalities some required results of functional derivatives are presented in appendix 2.10.2.

$$\partial_T \mathcal{L} = |W^{j,k}|^2 \frac{-1}{\sqrt{1-T^2}} \frac{2 \cos^{-1}(T^{i,j})}{\pi^2} + \Lambda_1 \tag{2.62}$$

$$\partial_{\alpha_0^{model}} \mathcal{L} = \Lambda_2 + \Lambda_1 \left(\frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}^2} \right) \tag{2.63}$$

$$\partial_{\alpha_1^{model}} \mathcal{L} = \Lambda_3 - \left(\frac{\alpha_1^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \tag{2.64}$$

$$\partial_{\alpha_2^{model}} \mathcal{L} = \Lambda_4 - \left(\frac{\alpha_2^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \tag{2.65}$$

$$\partial_{\alpha_3^{model}} \mathcal{L} = \Lambda_5 - \left(\frac{\alpha_3^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \tag{2.66}$$

$$\partial_{u_x} \mathcal{L} = -2u_x(\Lambda_2 + \Lambda_3) + 2u_z(-\Lambda_4 + i\Lambda_5) + \Lambda_6, \text{ considering that for } l \in \llbracket 1, 5 \rrbracket, \Lambda_l \in \mathbb{R} \tag{2.67}$$

$$\partial_{u_z} \mathcal{L} = 2u_z(-\Lambda_2 + \Lambda_3) - 2u_x(\Lambda_4 + i\Lambda_5) + \Lambda_7, \text{ considering that for } l \in \llbracket 1, 5 \rrbracket, \Lambda_l \in \mathbb{R} \quad (2.68)$$

$$\partial_{\mathbf{u}^k} \mathcal{L} = \mathbf{Z}^\dagger \Lambda_8 - (\mathbf{Proj}_x^j)^t \Lambda_6 - (\mathbf{Proj}_z^j)^t \Lambda_7 \quad (2.69)$$

$$\partial_{\mathbf{m}} \mathcal{L} = \Re \left(\left(\partial_{\mathbf{m}} (\mathbf{Z}(\mathbf{m})) \mathbf{u}^k \right)^\dagger \right) \Lambda_8 \quad (2.70)$$

For matter of convenience, the equation 2.70 may be written as :

$$\partial_{\mathbf{m}} \mathcal{L} = \Re \left(\mathbf{u}^{k^t} \partial_{\mathbf{m}} (\mathbf{Z}(\mathbf{m}))^t \Lambda_8^* \right) \quad (2.71)$$

The last expression corresponds to the gradient of the cost function with respect of the model parameters. To determine the stationary point, we need to solve $\partial_{\mathcal{L}} = 0$ for all the constrains. This allows finally to express all the Lagrange multipliers in terms of problem variables and then get the explicit expression of Λ_8 .

In equation 2.62, $\partial_T \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_1 = -|W^{j,k}|^2 \frac{-1}{\sqrt{1-T^2}} \frac{2\cos^{-1}(T^{i,j})}{\pi^2} \quad (2.72)$$

In equation 2.63, $\partial_{\alpha_0^{model}} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_2 = -\Lambda_1 \left(\frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}^2} \right) \quad (2.73)$$

In equation 2.64, $\partial_{\alpha_1^{model}} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 \left(\frac{\alpha_1^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \quad (2.74)$$

In equation 2.65, $\partial_{\alpha_2^{model}} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_4 = \Lambda_1 \left(\frac{\alpha_2^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \quad (2.75)$$

In equation 2.66, $\partial_{\alpha_3^{model}} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_5 = \Lambda_1 \left(\frac{\alpha_3^{obs}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right) \quad (2.76)$$

In equation 2.67, $\partial_{u_x} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_6 = 2u_x(\Lambda_2 + \Lambda_3) - 2u_z(-\Lambda_4 + i\Lambda_5) \quad (2.77)$$

In equation 2.68, $\partial_{u_z} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_7 = -2u_z(-\Lambda_2 + \Lambda_3) + 2u_x(\Lambda_4 + i\Lambda_5) \quad (2.78)$$

In equation 2.69, $\partial_{\mathbf{u}^k} \mathcal{L} = 0$ leads to :

$$\Lambda_8^* = (\mathbf{Z}^t)^{-1} \left((\mathbf{Proj}_x^j)^t \Lambda_6^* + (\mathbf{Proj}_z^j)^t \Lambda_7^* \right) \quad (2.79)$$

The most important modification for the implementation of this new cost function compared to a conventional FWI code concerns the implementation of new adjoint source terms for the gradient computations. By replacing the Lagrange multipliers one after one, it can be deduced that the retro-propagated term $u_x^{\text{Poinc}_{adj}}$ on the horizontal component is :

$$u_x^{\text{Poinc}_{adj}} = C(\mathbf{m}) \left(u_x \left(-\frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{model}} + \alpha_1^{obs} \right) - u_z (\alpha_2^{obs} + i\alpha_3^{obs}) \right) \quad (2.80)$$

And the adjoint term $u_z^{\text{Poinc}_{adj}}$ needed to be retro-propagated on the z component is :

$$u_z^{\text{Poinc}_{adj}} = C(\mathbf{m}) \left(u_z \left(\frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{model}} - \alpha_1^{obs} \right) + u_x (-\alpha_2^{obs} + i\alpha_3^{obs}) \right) \quad (2.81)$$

For both equations 2.80 and 2.81, the factor $C(\mathbf{m})$ is :

$$C(\mathbf{m}) = \frac{4|W^{j,k}|^2}{\pi^2} \frac{\cos^{-1} \left(\frac{\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model}}{\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model}} \right)}{\sqrt{(\alpha_1^{obs} \cdot \alpha_1^{model} + \alpha_2^{obs} \cdot \alpha_2^{model} + \alpha_3^{obs} \cdot \alpha_3^{model})^2 - (\alpha_0^{obs} \cdot \alpha_0^{model})^2}} \quad (2.82)$$

2.5.2 Source and receivers coupling effects

For practical applications of conventional FWI methods, the knowledge of the source wavelet is a critical issue. Delprat-Jannaud & Lailly (2005) discussed how in a non-linear inverse wave propagation problems, small errors in the source signature may generate strong disturbance in the model space.

Some authors proposed practical solutions to mitigate the influence of the source signature or to infer it. When the initial model is closed enough, Pratt (1999) proposed to estimate a source coupling coefficient from the observed data and the initial model, later Zhou & Greenhalgh (2003) used the same estimation approach but estimating the source coupling coefficient between each inversion iteration of the structural parameters. Zhou & Greenhalgh (2003) and Lee & Kim (2003) proposed source independent methods based on trace normalization by a reference trace but it has been noticed that these methods without source estimations are effected by the effect of the noise on the reference trace.

Furthermore, Xu *et al.* (2006) studied several FWI strategies with or without source inversion, and they preferred FWI with source estimation algorithms. Recently the variable projection scheme has been applied to the FWI with the source coupling coefficient considered as an inverted parameter (Li *et al.*, 2013).

Also, Maurer *et al.* (2012) proposed to invert simultaneously the source and receiver coupling coefficients.

One cited advantage of polarization inversion is the independence of the polarization to the signature of the source wavelet. Furthermore, it is possible to demonstrate that under the condition of equivalent coupling of the different components of multicomponent receivers, the inversion of the polarization is also not affected by the receivers coupling.

First to demonstrate the insensitivity to the source signature, we defined a source coupling coefficient $C_{src}(\omega)$ in the frequency domain in a such way that it models the effect of distortions between the estimated $\mathbf{s}^{est}(\omega)$ and the “true” source wavelet $\mathbf{s}^{true}(\omega)$:

$$\mathbf{s}_{est}(\omega) = C_{src}(\omega)\mathbf{s}_{true}(\omega) \quad (2.83)$$

In the expression 2.48, we replace the term $\mathbf{u}_{model}(\mathbf{m})$ by $\mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_k^{true}(\omega)$ it yields :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{P}(\mathbf{m})} &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |\langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_k^{est} \rangle|^2}{\langle \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_k^{est} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_k^{est} \rangle \langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{obs} \rangle} - 1 \right) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k} \frac{1}{\pi}|^2 \\ &= \left| \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |\langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} C_{src}(\omega) \mathbf{s}_{true} \rangle|^2}{\langle \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} C_{src}(\omega) \mathbf{s}_{true} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} C_{src}(\omega) \mathbf{s}_{true} \rangle \langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{obs} \rangle} - 1 \right) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |C_{src}|^2 |\langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} \rangle|^2}{|C_{src}|^2 \langle \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} \rangle \langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{obs} \rangle} - 1 \right) \right) \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{n_{comp} - 1} \left(\frac{n_{comp} |\langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} \rangle|^2}{\langle \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} | \mathbf{Proj}^j \mathbf{Z}(\mathbf{m})^{-1} \mathbf{s}_{true} \rangle \langle \mathbf{u}_{obs} | \mathbf{u}_{obs} \rangle} - 1 \right) \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Finally in the equation 2.84, it is shown that the source wavelet has no influence on the inversion of the polarization.

The demonstration of the insensitivity to the receivers coupling is based on the same principle but applied to a tensorial coupling operator $\mathbf{C}_{rec}(\omega)$ defined as :

$$\mathbf{u}_{obs,distor}(\omega) = \mathbf{C}_{rec}(\omega)\mathbf{u}_{obs,true}(\omega) \quad (2.85)$$

where $\mathbf{u}_{obs,true}(\omega)$ are multicomponent observations observed without receivers coupling and $\mathbf{u}_{obs,distor}(\omega)$ are the measurements affected by the source coupling effects.

The condition of equivalent coupling between all components implies that the $\mathbf{C}_{rec}(\omega)$ has the following form :

$$\mathbf{C}_{rec}(\omega) = C_{rec}(\omega)\mathbf{I} \quad (2.86)$$

where $C_{rec}(\omega)$ is a coupling coefficient, and \mathbf{I} is the identity matrix. By following the same approach as for the source insensitivity derivation, it can be easily demonstrated that the polarization cost-function is invariant when the receivers coupling is the same for all the components (isotropic instrumental response).

2.6 Wavefield analysis and interpretation of polarization observables for geometrical phases

This section is dedicated to the analysis of the polarization observables on some canonical cases. As it will be shown that the polarization observables have a different behavior compared to “more” kinematic observables (as for instance the phase).

The following analysis is based on the assumption that the media are isotropic, elastic and smooth at least by part. The aim of the analysis is to show how in such media, the observed polarization can directly be related to the properties of the longitudinal/transversal wavefronts.

The elastic field is computed using a finite difference time domain modeling code based on the 4th order precision in space, 2nd order precision in time Levander’s stencil (Levander, 1988). Perfectly Matched Layers (PML) type absorbing boundaries conditions are used to emulate radiation conditions in infinite domains.

2.6.1 Wavefield decomposition method and wavefront computation

In order to enable an easier interpretation of the perturbation of the wavefields, the elastic wavefield is decomposed into transverse and longitudinal fields. Decomposition method based on the divergence and curl differential operators are limited by smoothness constrains, for that reason a decomposition process based in the wavenumber domain is preferred. We consider a multicomponent wavefield recorded in a spatial domain \mathcal{D} . In the presented case, the spatial domain \mathcal{D} is bi-dimensional grid used for the computations (including the PML).

The transformed expression of each scalar i component of the vectorial wavefield $\mathbf{u}(x, z, \omega)$ is obtained from the following spatial Fourier transform :

$$u_i(k_x, k_z, \omega) = \int_{\mathcal{D}} u_i(x, z, \omega) \cdot e^{i2\pi(k_x x + k_z z)} dx dz \quad (2.87)$$

In practice, the transformation is computed using a bi-dimensional fast-Fourier transform. For this computation, it is not necessary to include tapers because PML layer act as smooth wavefield tapers.

By definition (Appel, 2007), the longitudinal wavefield $\mathbf{u}_{\parallel}(k_x, k_z, \omega)$ expressed in the spectral domain is :

$$\mathbf{u}_{\parallel}(k_x, k_z, \omega) = \frac{|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k} | \mathbf{u}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z, \omega) \rangle}{\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle} \quad (2.88)$$

and the transversal wavefield is defined in the spectral domain as :

$$\mathbf{u}_{\perp}(k_x, k_z, \omega) = \mathbf{u}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_z, \omega) - \mathbf{u}_{\parallel}(k_x, k_z, \omega) \quad (2.89)$$

In our two dimensional case, we can furthermore define the scalar quantities (analog to pressure and shear wave elastic potentials) : $u_{\parallel}(k_x, k_z, \omega)$ and $u_{\perp}(k_x, k_z, \omega)$ such that :

$$|\mathbf{u}_{\parallel}(k_x, k_z, \omega)\rangle = u_{\parallel}(k_x, k_z, \omega) |\mathbf{k}_{norm}\rangle \quad (2.90)$$

$$|\mathbf{u}_\perp(k_x, k_z, \omega)\rangle = u_\perp(k_x, k_z, \omega) |\mathbf{k}_{norm\perp}\rangle \quad (2.91)$$

where \mathbf{k}_{norm} is defined as : $\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle}}$ and $\mathbf{k}_{norm\perp}$ obtained from an anti-clockwise rotation of \mathbf{k}_{norm} (consequently : $\langle \mathbf{k}_{norm}, \mathbf{k}_{norm\perp} \rangle = 0$ and $\langle \mathbf{k}_{norm\perp}, \mathbf{k}_{norm\perp} \rangle = 1$).

By employing inverse Fourier transforms, we can express longitudinal and transversal wavefields in the space domain and in the time domain.

In this article we call “wavefronts” the iso-surfaces of the phase of a monochromatic wavefield. For a given scalar monochromatic, the gradient of the phase indicates the direction of the wavefronts.

For the wavefield $u_{//}(x, z, \omega)$, vector fields indicating the directions of the longitudinal and transversal wavefronts are :

$$\mathbf{WF}_{//}(\mathbf{u}) = \mathbf{grad}(\arg(u_{//}(x, z, \omega))) \quad : \text{for the longitudinal wavefield ,} \quad (2.92a)$$

$$\mathbf{WF}_\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{grad}(\arg(u_\perp(x, z, \omega))) \quad : \text{for the transversal wavefield .} \quad (2.92b)$$

The orientation angles of the particle displacements with respect to the axis \mathbf{e}_x of the longitudinal and transversal wavefronts are defined according to :

$$\angle \mathbf{WF}_{//}(\mathbf{u}) = \tan^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{e}_z | \mathbf{WF}_{//}(\mathbf{u}) \rangle}{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{WF}_{//}(\mathbf{u}) \rangle} \right) \quad : \text{orientation angle of the longitudinal wavefield ,} \quad (2.93a)$$

$$\angle \mathbf{WF}_\perp(\mathbf{u}) = \tan^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{WF}_\perp(\mathbf{u}) \rangle}{\langle \mathbf{e}_z | \mathbf{WF}_\perp(\mathbf{u}) \rangle} \right) \quad : \text{orientation angle of the transversal wavefield .} \quad (2.93b)$$

Actually, $\angle \mathbf{WF}_{//}(\mathbf{u})$ corresponds to the apparent direction of arrival of the longitudinal wavefield and $\angle \mathbf{WF}_\perp(\mathbf{u})$ is perpendicular to the apparent direction of arrival of the transversal wavefield.

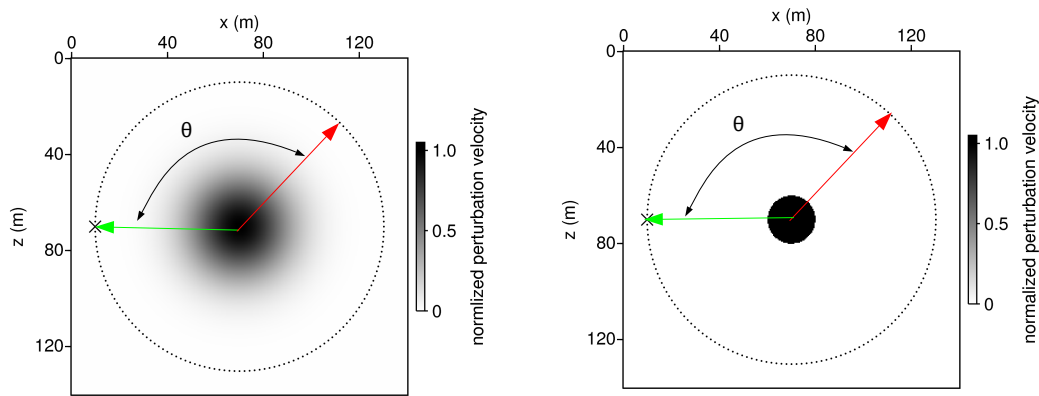
2.6.2 Analysis of the relationship between polarization observation and wavefronts

The initial medium is an homogeneous medium and different perturbations of the parameters V_p (and for some cases V_s) are applied. Different kind of perturbations are considered but for all of them the absolute value of velocity contrast perturbation is 50%. In all the cases, the density is homogeneous and equals 1700 kg/m^3 .

In order to discuss the observations of the polarization with an increasing order of complexity, firstly smooth acoustic perturbations are studied and then elastic media with a cylindrical perturbation. In both cases, slow and fast anomalies are considered. The different cases are summarized in table 2.1.

In figures 2.6 the two perturbations patterns and the acquisition are depicted.

Experimental configuration is a squared area of $140\text{m} \times 140\text{m}$ with an explosive source located at the left hand side of the model. The source wavelet is a Ricker shaped source wavelet with a central frequency of 50Hz. For all the studied configurations, the medium and the acquisition are symmetrical with respect to the axis $z=70\text{m}$. Thus the wavefield is also symmetrical with respect to this axis. As a consequence, we only need to consider the receivers included in the arc of a circle within the angle range : $\theta \in [0, 180^\circ]$.



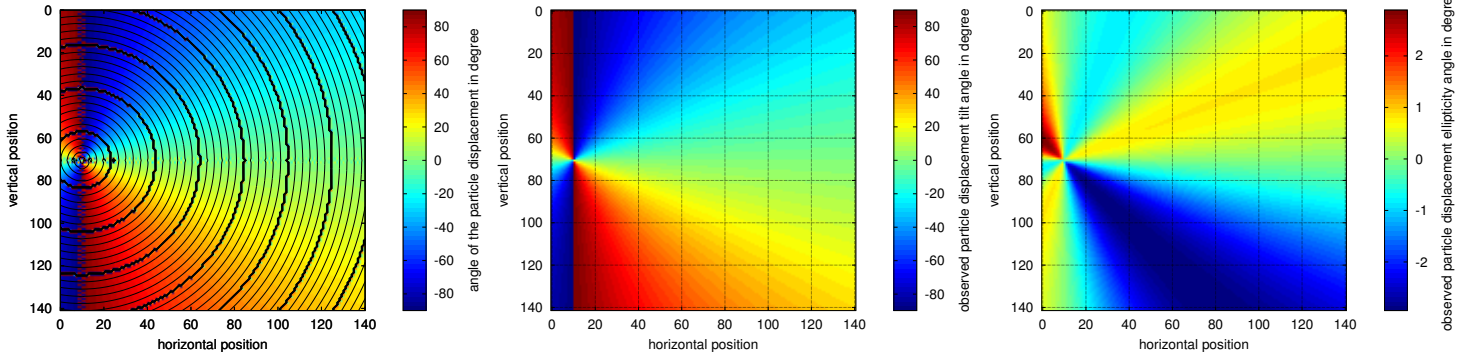
(a) Normalized smooth gaussian perturbation, with correlation length of 10m

(b) Normalized sharp cylindrical perturbation, with radius of 10m

FIGURE 2.6 – A representation of the normalized perturbations and the acquisition setup. The cross indicates the location of the explosive source and the dots the multicomponent receivers locations. The receivers are located in a circle centred in the middle of the medium, with a radius of 60m. The receivers positions are parameterized by the radial angle θ between the source and the receivers in the clockwise direction

Properties	V_p back.	V_s back.	V_p pert. max	V_s pert. max	V_p true	V_s true
Acoustic Gaussian positive perturbation	1000 m/s	0 m/s	2000 m/s	0 m/s	1000-1500 m/s	0 m/s
Acoustic Gaussian negative perturbation	2000 m/s	0 m/s	1000 m/s	0 m/s	1000-1500 m/s	0 m/s
Elastic cylinder positive perturbation	1000 m/s	500 m/s	2000 m/s	1000 m/s	1500 m/s	750 m/s
Elastic cylinder negative perturbation	2000 m/s	1000 m/s	1000 m/s	500 m/s	1500 m/s	750 m/s

TABLE 2.1 – Summary of the tests used to analyze the evolution of the polarization



(a) Longitudinal wavefront and angle of the associated particle displacement

(b) Tilt angle

(c) Ellipticity angles

FIGURE 2.7 – Wavefronts and polarization observables for the medium without perturbation (homogeneous, $V_p = 1000m/s$) associated to the fast perturbation (50 Hz).

2.6.2.a The background media : homogeneous media

Since an explosive source in an homogeneous media radiates only pressure waves, we can consider that the propagation is acoustic. As noticed in table 2.1, in order to get the same amplitude of relative of perturbations for the negative and positive perturbations, two different reference media are considered. Actually, these two background media only differ by a scaling factor. This induces similar wavefronts and the polarization attributes. For this reason, we only need to present (figures 2.7) the attributes for the background media used for the positive perturbation. In figure 2.7-a is depicted the wavefronts corresponding to the longitudinal wavefield (black lines) and the associated particle displacement angle (background color).

As expected for an homogeneous medium : the wavefronts are spherical and the angles of the associated particle motion follow the radial angle (from the source to the measurement point). The tilt angle is depicted in figure 2.7-b and as for the angle of the particle motion, the tilt angle values follow the radial angle. The ellipticity angle is depicted in figure 2.7-c. The maximum absolute values of ellipticity angle is less than 3° whereas the analytic solution in homogeneous media has an ellipticity of 0 degrees. This small values are attributed to small numerical errors in the modeling.

2.6.2.b Gaussian acoustic perturbations

As mentioned above, we first applied negative and positive gaussian perturbations to their reference media. We first discuss the results of the slow perturbation and then the results of the fast perturbation.

In case of smooth gaussian perturbations, wavefield and residual maps are only presented for a unique frequency (100 Hz) because in the considered frequency range [20 Hz ; 100 Hz] analogue phenomena were observed (for the whole frequency range the perturbations are smooth).

As expected for a fast perturbation, compared to the homogeneous media (2.12a), the wavefront in the perturbed media (2.12b) is traveling faster where the perturbation is the highest (center of the model) which creates a wavefront distortion.

The difference in arrival times and direction of arrivals is also noticeable when comparing the seismograms for the unperturbed media (fig. 2.8) and for the perturbed media (fig. 2.14).

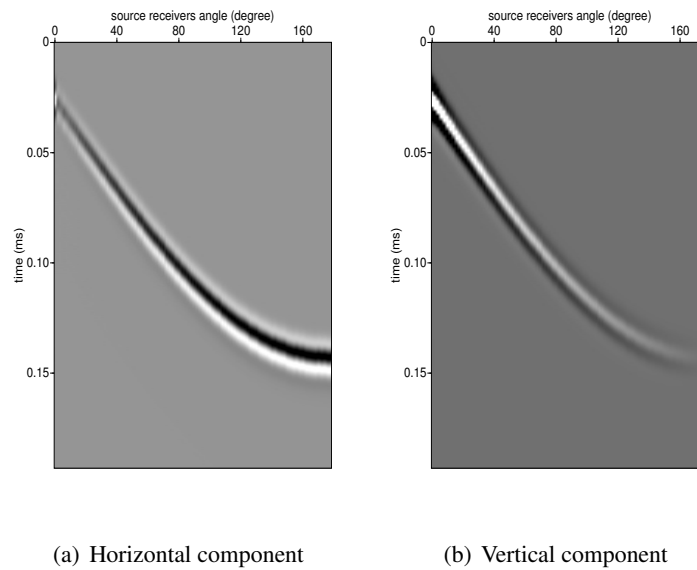


FIGURE 2.8 – Seismograms in the unperturbed media used for the fast (positive) gaussian anomaly

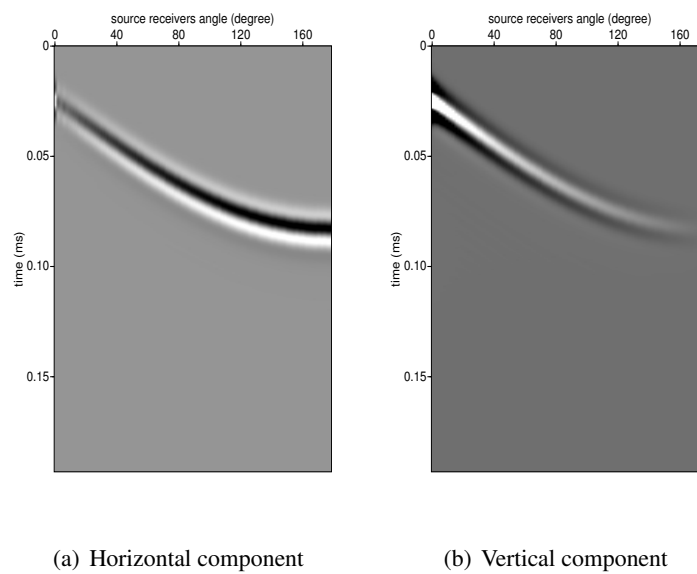


FIGURE 2.9 – Seismograms in the unperturbed media used for the slow (negative) gaussian anomaly

The wavefront maps for the fast anomaly (at 100 Hz, fig. 2.10a-d) also show that wavefronts are effectively distorted by the anomaly (fig. 2.10-a) and that apparent particle motion angle associated to the longitudinal wavefield (background color in fig. 2.10-a) and the tilt angle (fig. 2.10-c) are in very good agreement.

Since the amplitudes of the observed ellipticity (fig. 2.10-c) are not significantly larger than in case of the homogeneous media, these variations are probably resulting from small numerical errors. The polarization residuals (according to the Poincaré's distance and taking as reference media the associated unperturbed media) are depicted in figure 2.10-d. Since, the ellipticity angles are negligible, the polarization residual is mainly influenced by the perturbation of the tilt angle. The polarization residuals are the largest where the perturbations of the directions of arrival are the largest (i.e. for an angle θ of about $\pm 135^\circ$) and absolutely zero for pure transmission angles (i.e. $\theta = 180^\circ$).

The slow anomaly creates a lens effect where the wavefront is "delayed" (fig. 2.13). This difference in arrival times and slopes is visible on seismograms for the unperturbed media (fig. 2.9) and for the perturbed media (fig. 2.15). Furthermore, a supplementary event is visible in fig. 2.15 for angles between 120° and 180° . This event is explained by a rapid variation of velocity, which creates a secondary wavefront (triplication). The wavefronts of the longitudinal wavefield (fig. 2.11a) present positive and negative variations of the curvature. There is a very good agreement between the apparent particle motion angles of the longitudinal wavefield (background color in fig. 2.11a) and the tilt angle (fig. 2.11b).

As opposite to the fast anomaly case, the values of the apparent ellipticity (fig. 2.11c) are not negligible, especially where the change of sign of the wavefront curvature occurs ($\theta \approx \pm 160^\circ$). Indeed, even for a "pure" longitudinal, the superposition of wavefronts with different directions of arrival generates an apparent ellipticity.

The polarization residual (fig. 2.11d) shows that the larger residuals ($\theta \approx \pm 160^\circ$) are located where the wavefronts have the stiffest variation of curvature.

It is important to note that triplications and caustics do not exclusively occur in case slow anomaly, if the contrast of fast anomaly is larger such phenomena can also be encountered.

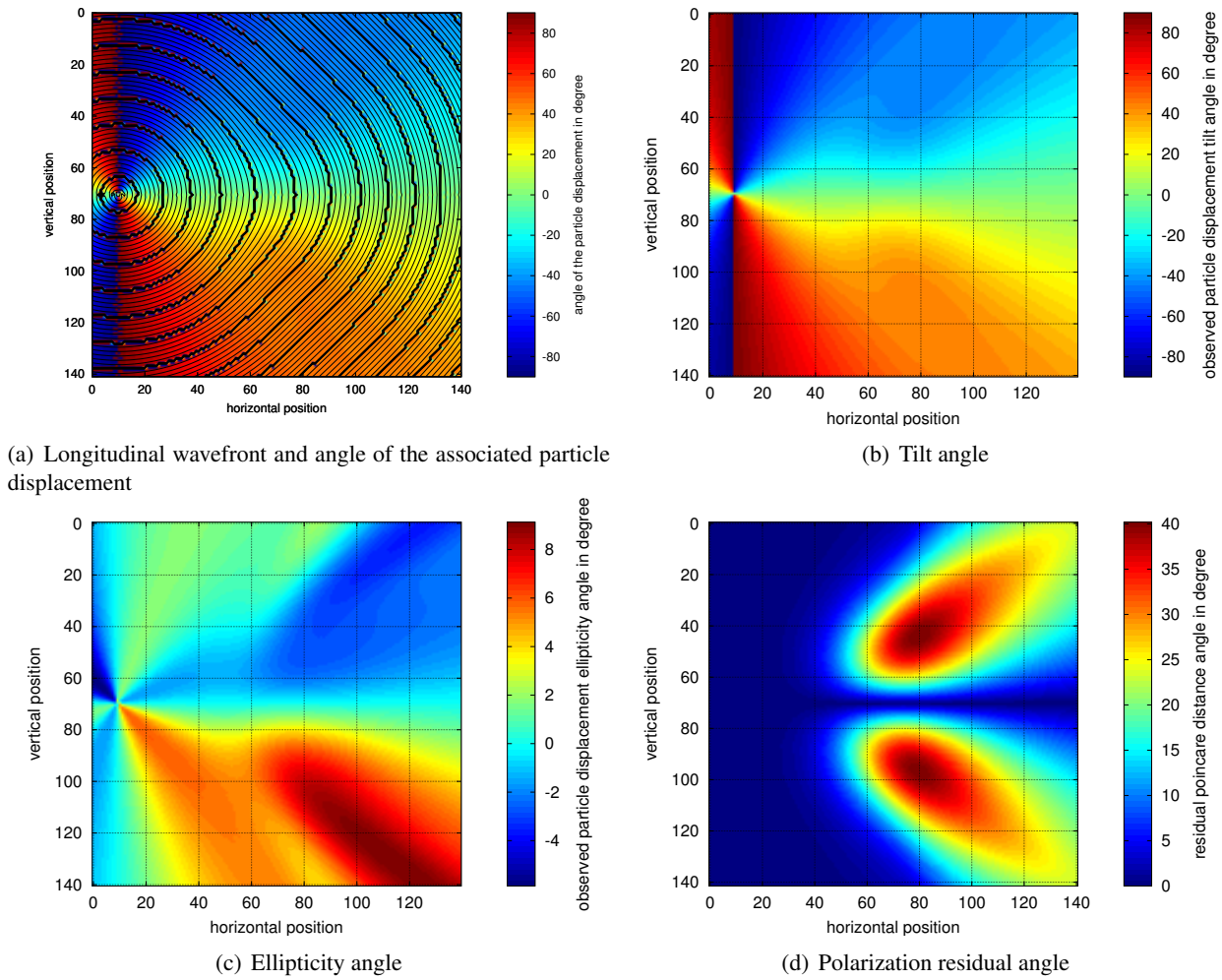
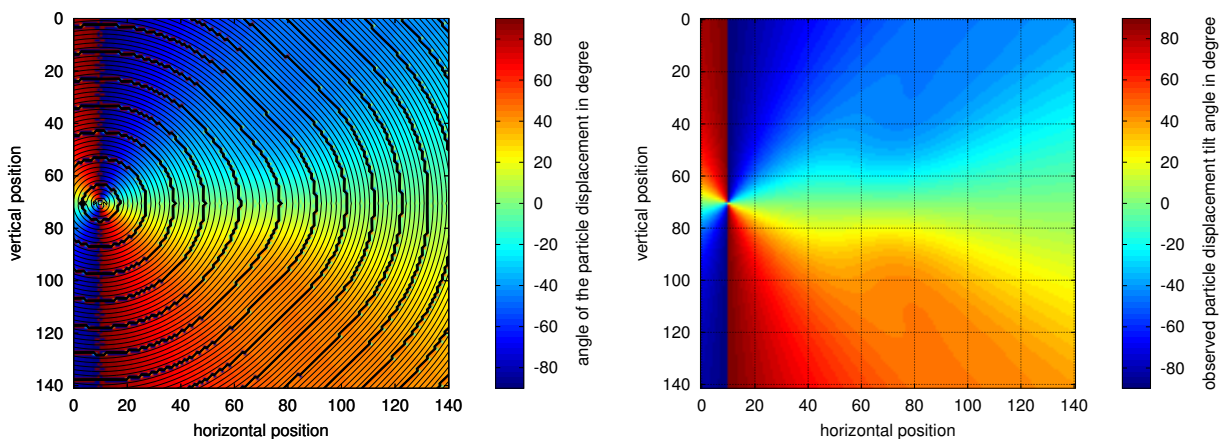
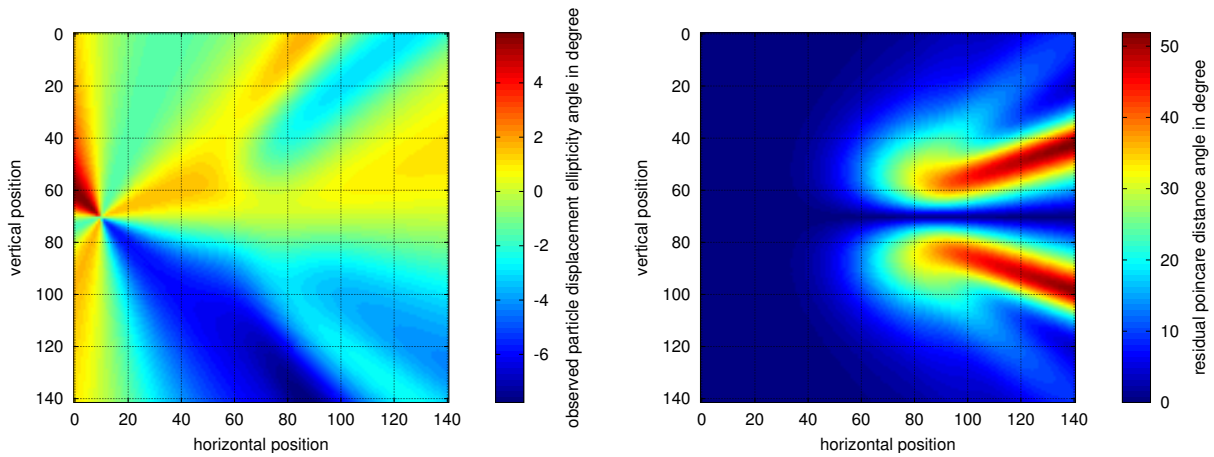


FIGURE 2.10 – Wavefronts and polarization observables in case of the 50 % gaussian fast anomaly at a frequency of 100 Hz



(a) Longitudinal wavefront and angle of the associated particle displacement

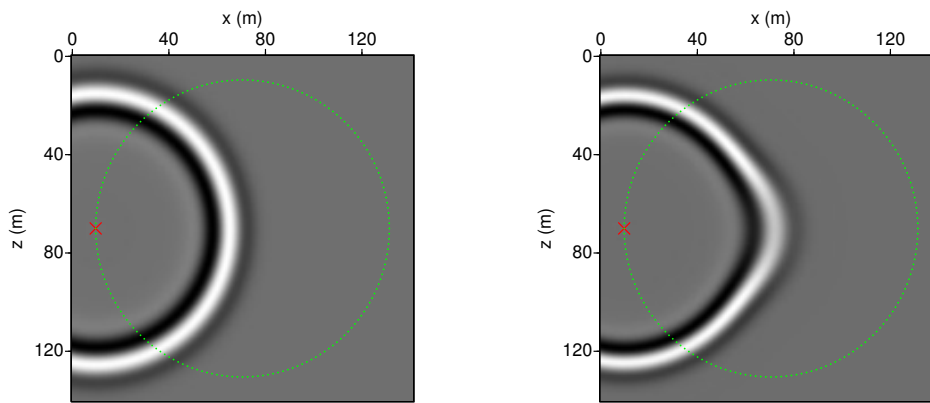
(b) Tilt angle



(c) Ellipticity angle

(d) Polarization residual

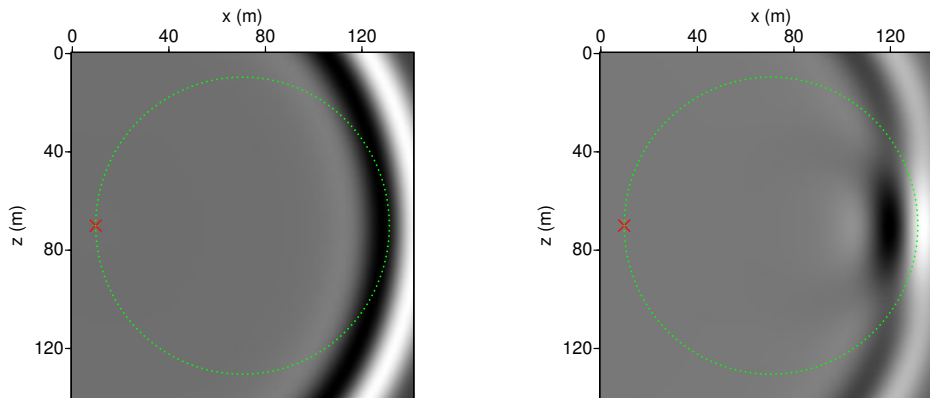
FIGURE 2.11 – Wavefronts and polarization observables in case of the 50 % gaussian slow anomaly at a frequency of 100 Hz



(a) Unperturbed media

(b) Positive 50% gaussian perturbation

FIGURE 2.12 – Longitudinal field at time $t=0.08432s$ for the positive (fast) 50% gaussian perturbation and the associated background media. The cross indicates the location of the explosive source, the dots the multicomponent receivers positions.



(a) Unperturbed media

(b) Negative 50% gaussian perturbation

FIGURE 2.13 – Longitudinal field at time $t=0.08432s$ for the negative (slow) 50% gaussian perturbation and the associated background media. The cross indicates the location of the explosive source, the dots the multicomponent receivers positions.

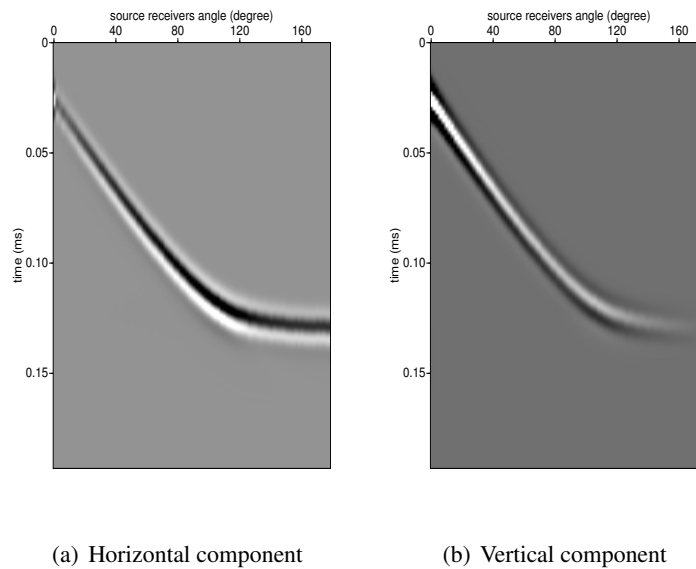


FIGURE 2.14 – Seismograms in the perturbed media for the 50% positive gaussian perturbation anomaly. To be compared to figures 2.8 (corresponding to the unperturbed case).

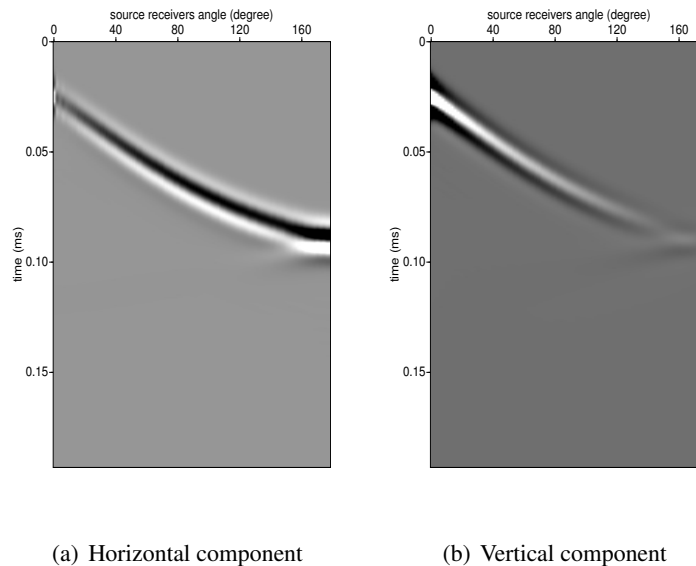


FIGURE 2.15 – Seismograms in the perturbed media for the 50% negative gaussian perturbation anomaly. To be compared to figures 2.9 (corresponding to the unperturbed case).

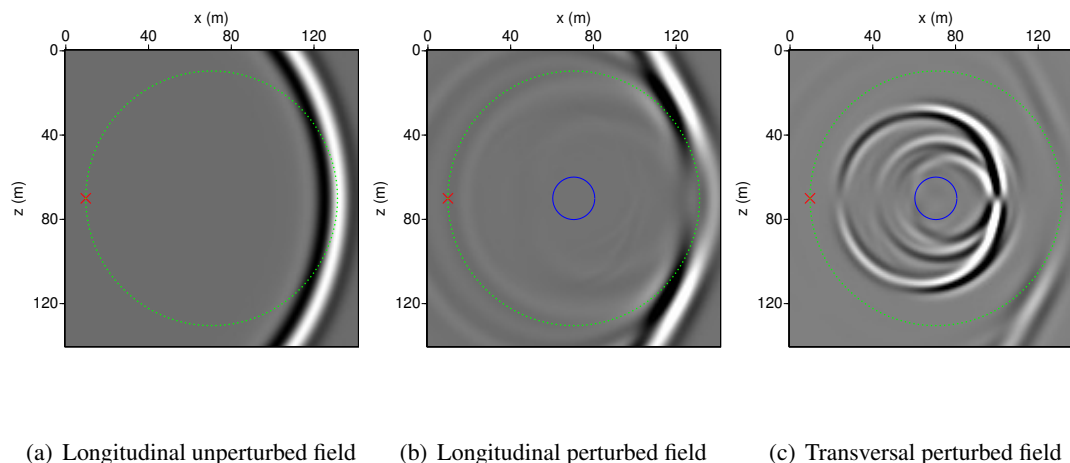


FIGURE 2.16 – Longitudinal and transversal fields at time $t=0.1509s$ for the elastic cylindrical positive 50% perturbation and the associated background media. The cross indicates the location of the explosive source, the dots the multicomponent receivers positions and the blue line the boundaries of the perturbation

2.6.2.c Analysis of the perturbations generated by an elastic cylinder

The elastic cylinder and the associated acquisition are depicted in figure 2.6-b. Both slow and fast anomalies are considered, the values of the V_p and V_s parameters in the cylinder corresponding to perturbations of $\pm 50\%$ of background media (values provided in table 2.1).

In case of the elastic cylindrical perturbations, the wavefields present qualitative differences according to the frequency. For that reason, we present an analysis of the polarization residual at 20 Hz and 100 Hz. The first frequency corresponds to the lowest part of the source spectrum and second one to the highest frequency part of the source spectrum.

For the fast anomaly, the longitudinal wavefield (fig. 2.16-b) presents a main wavefront with a slight time advance after traveling through the anomaly. Concentric low amplitude events corresponding to diffractions and multiscattered waves are also visible. Since the explosive source does not generate shear waves (at the exception of very limited numerical artifacts) the transversal wavefield (fig. 2.16-c) is only generated after the interaction of the incident longitudinal wavefront with the anomaly. The multiscattered waves (coda) are mainly of transversal nature.

For the positive perturbation at 20 Hz, the longitudinal field (fig. 2.17-a) presents a pattern which shares similarities with the pattern of the fast gaussian anomaly (fig. 2.10-a) discussed in the previous section. At this frequency, the longitudinal wavefronts do not exhibit strong distortions. However, as opposite to the acoustic case we need to account for the contribution of the transversal wavefield (fig. 2.17-b) which has a very different pattern compared to the longitudinal field. The transversal wavefronts are centered around the cylindrical perturbation. Due to the contributions of both longitudinal and transversal wavefields, the relationship between the wavefronts and the observed polarization attributes (fig. 2.17-c-d) are more complex than in the acoustic case. The polarization residual map has a strong directionality : the residuals is larger for “transmission angles” ($\theta \in \pm[135^\circ; 175^\circ]$) than for “reflection angles” $\theta \in \pm[0^\circ; 90^\circ]$). The resulting polarization residual map (fig. 2.17-f) shows a zero residual in pure transmission regime ($\theta = \pm 180^\circ$) and the maximums are located near the cylinder.

If we consider the wavefields at the frequency 100 Hz (fig. 2.18-a-f), the wavefronts (fig. 2.18-a) of the longitudinal wavefield present much stiffer curvature variations than for the frequency 20 Hz. The wavefronts of the transversal wavefield (fig. 2.18-b) are still centered around the cylinder. Tilt and ellipticity angles (fig. 2.18-c-d) present both similar directivity patterns and they are more oscillatory than for the frequency 20 Hz. Finally, the polarization residuals at 100 Hz exhibit a very strong directionality (largest residuals are located for $\theta \approx \pm 170^\circ$) with radially oscillating patterns. These radial oscillations are the effects of the contributions of transversal field to the observed particle motion. We can also notice that the residual remains zero for the opposite direction of the source ($\theta = \pm 180^\circ$).

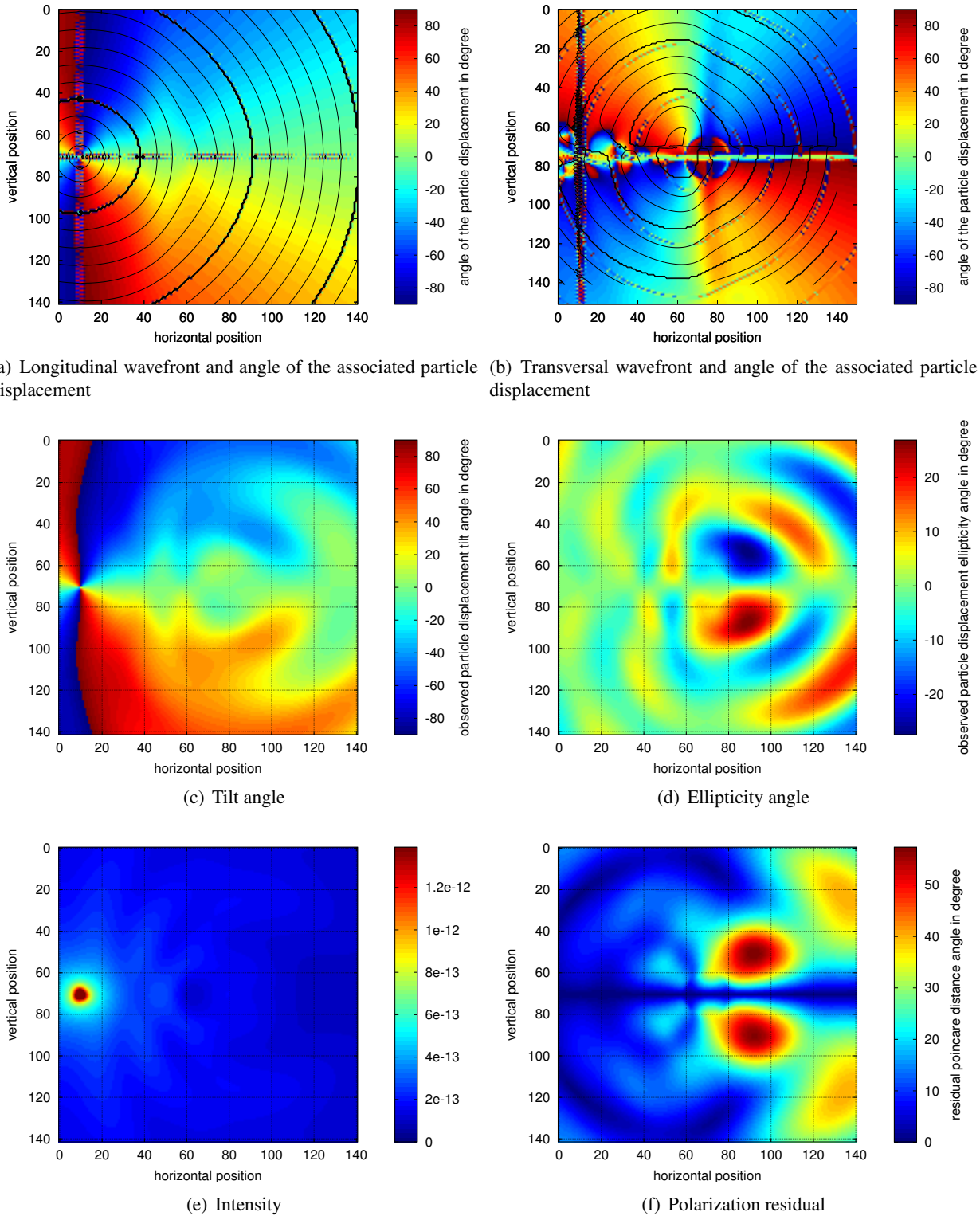


FIGURE 2.17 – Wavefronts and polarization observables for the elastic cylindrical perturbation of 50 % at the frequency 20Hz

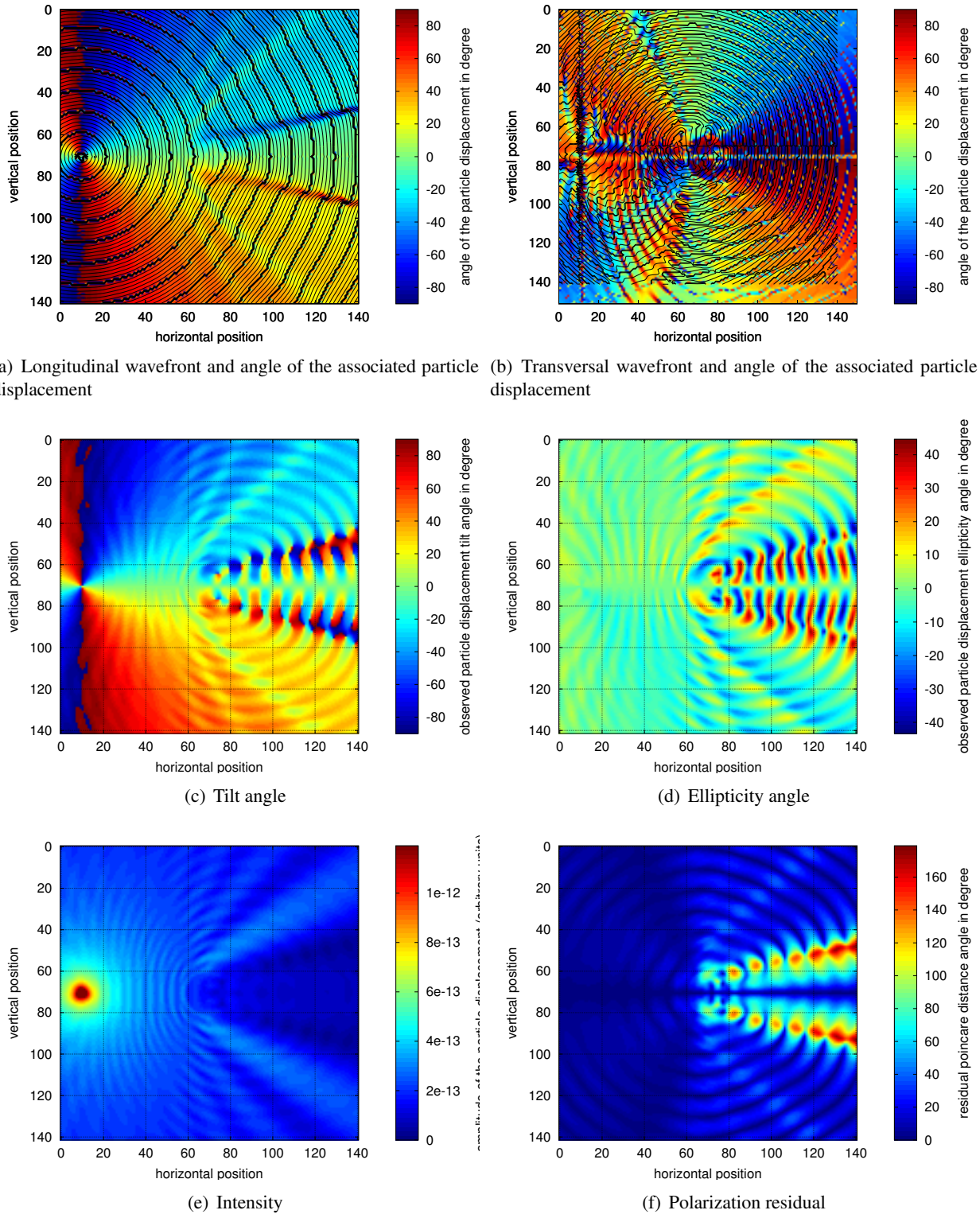
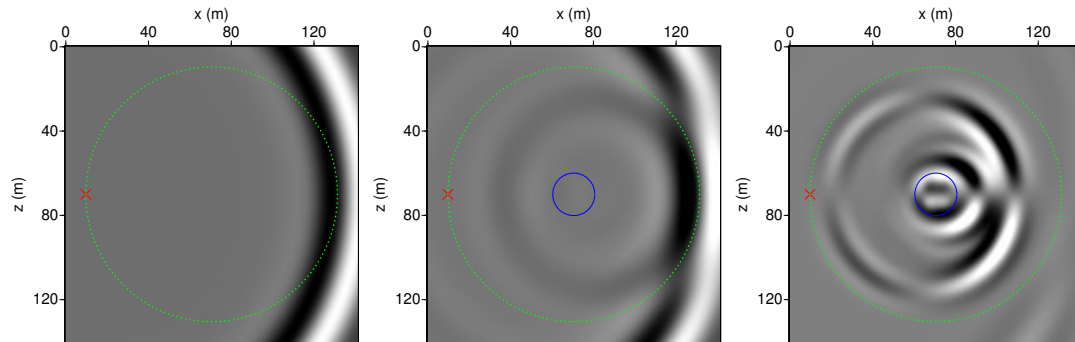


FIGURE 2.18 – Wavefronts and polarization observables for the positive elastic cylindrical perturbation of 50 % at the frequency 100Hz



(a) Longitudinal unperturbed field (b) Longitudinal perturbed field (c) Transversal perturbed field

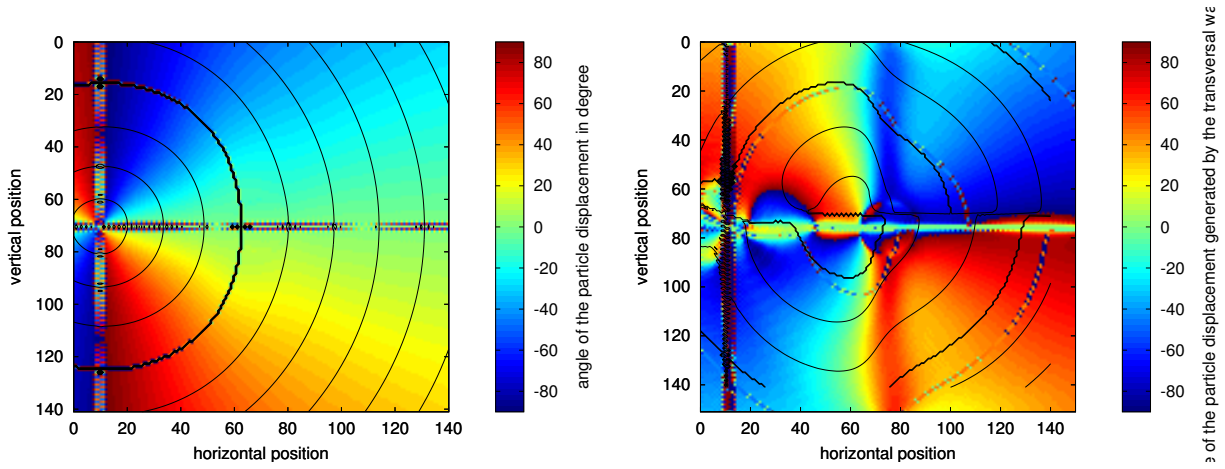
FIGURE 2.19 – Longitudinal and transversal fields at time $t=0.1509$ s for the elastic cylindrical negative 50% perturbation and the associated background media. The cross indicates the location of the explosive source, the dots the multicomponent receivers positions and the blue line the boundaries of the perturbation

For the slow elastic cylindrical anomaly, the depicted longitudinal wavefield (fig. 2.19-b) has two main visible phenomena : a time delay perturbation of the incident wavefront and secondary wavefronts resulting from the diffraction and multiscattering of the incident wavefield. As for the fast anomaly case, the transversal waves (fig. 2.19-c) are exclusively generated by the anomaly and the multi-scattered waves (coda) is mainly composed of shear waves.

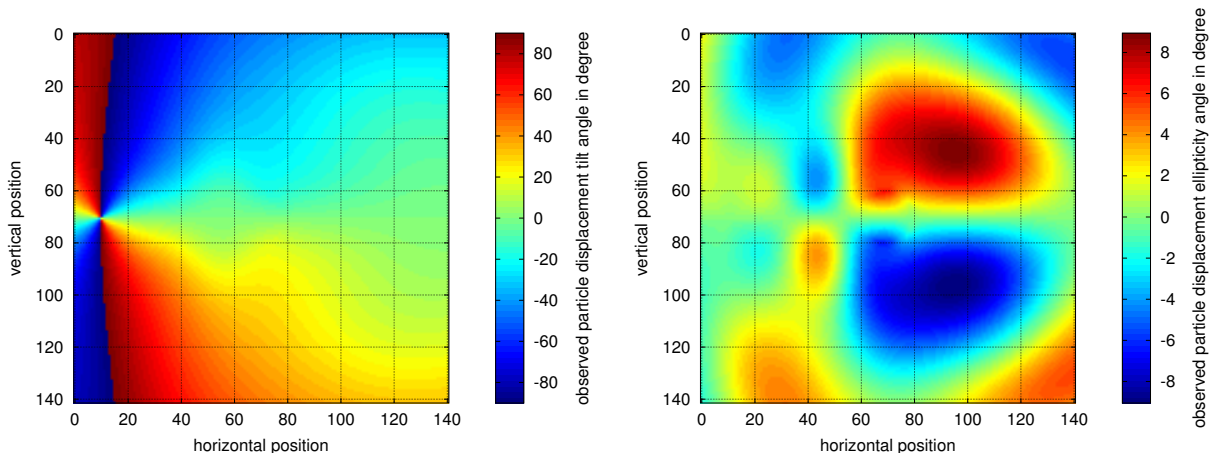
For the slow anomaly, at 20 Hz the transversal wavefront (fig. 2.20-a) has no visible stiff curvature variations and the transversal wavefronts (fig. 2.20-b) are smooth and centered at the location of the perturbation.

The tilt angles (fig. 2.20-c) seem to be mainly influenced by the contribution of the longitudinal wavefield and the ellipticity angles (fig. 2.20-d) seem to be mainly influenced by the contribution of the transversal wavefield. Finally, the polarization residual map (fig. 2.20-f) exhibits rather smooth patterns which are quite similar to those of the ellipticity angle map (fig. 2.20-d).

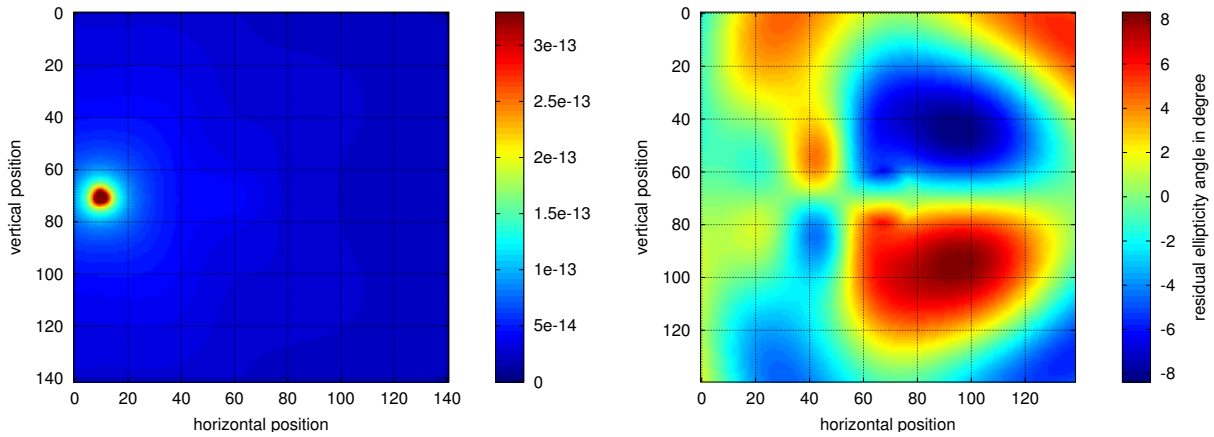
At 100 Hz in case of slow anomaly perturbation, the transversal wavefronts (fig. 2.21-a) present some stiff variations of curvature similar to those observed in case of the slow gaussian perturbation (fig. 2.11-a) for the angle θ around $\pm 160^\circ$. The transversal wavefronts (fig. 2.21-b) are centered at the location of the perturbation. As for the case of the fast cylindrical perturbation, the tilt and ellipticity angles (fig. 2.21-c-d) are both influenced by the transversal and longitudinal wavefields contributions. In tilt, ellipticity angles and polarization residuals maps (fig. 2.21c,d,f) we can identify qualitatively the contribution of the longitudinal wavefield. Indeed, the longitudinal field generates a pattern similar to the case of the slow gaussian perturbation : a field with stiff wavefront curvature variations and a pronounced directivity. On the other hand, the influence of the transversal field is visible in the tilt, ellipticity angles and polarization residuals maps with the radial oscillations.



(a) Longitudinal wavefront and angle of the associated particle displacement (b) Transversal wavefront and angle of the associated particle displacement

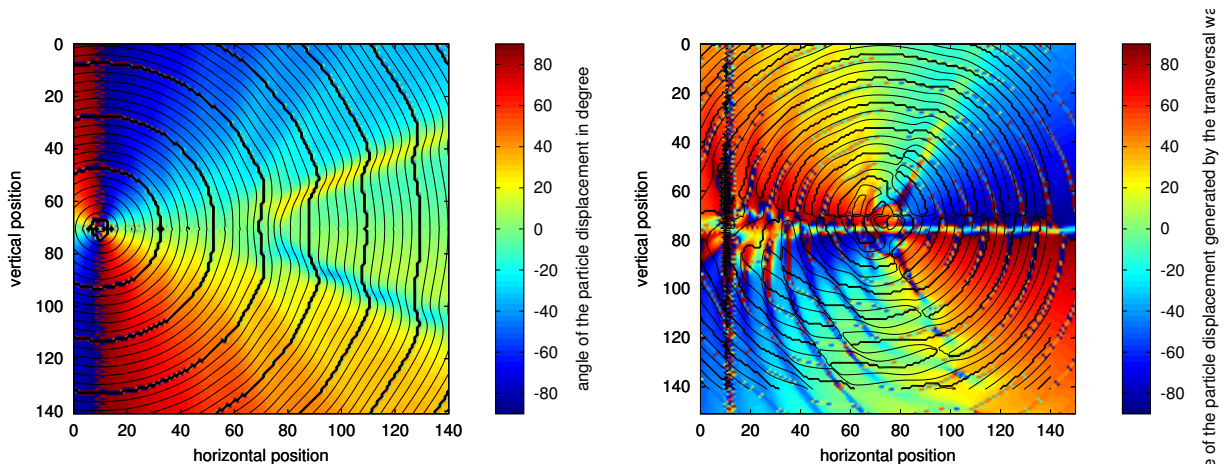


(c) Tilt angle (d) Ellipticity angle

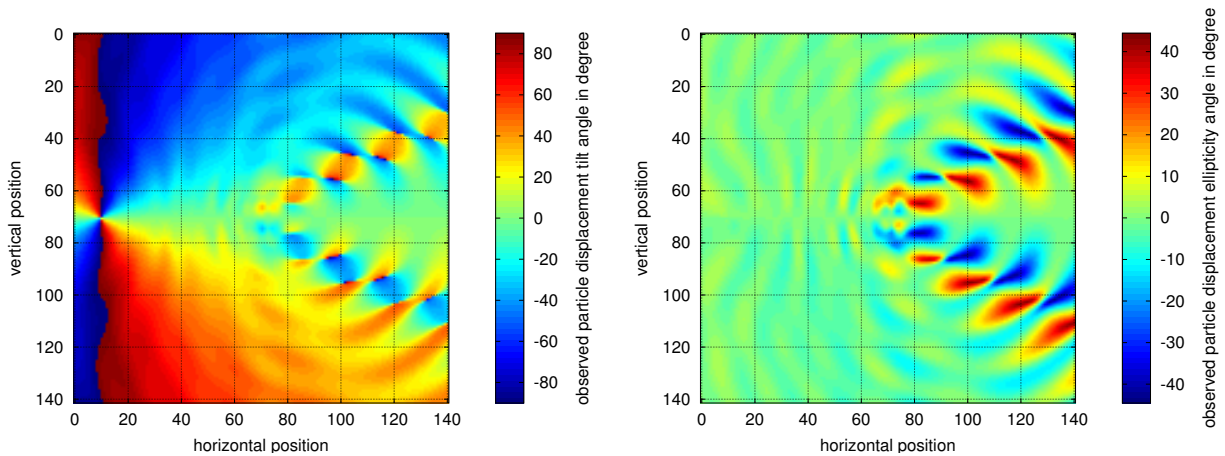


(e) Intensity (f) Polarization residual

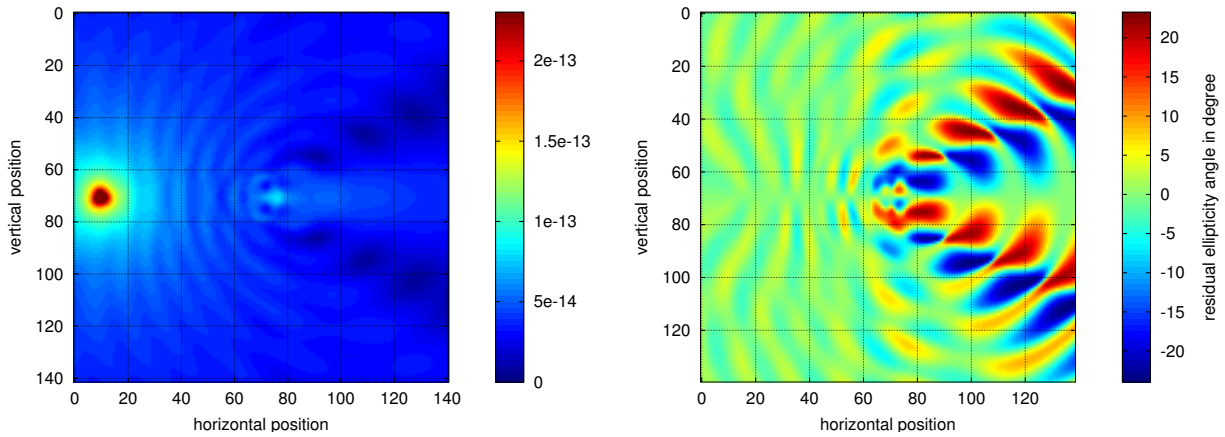
FIGURE 2.20 – Wavefronts and polarization observables for the elastic cylindrical negative perturbation of 50 % at the frequency 20Hz



(a) Longitudinal wavefront and angle of the associated particle displacement (b) Transversal wavefront and angle of the associated particle displacement



(c) Tilt angle (d) Ellipticity angle



(e) Intensity (f) Polarization residual

FIGURE 2.21 – Wavefronts and polarization observables for the elastic cylindrical positive perturbation of 50 % at the frequency 100Hz

2.6.2.d Partial conclusion of analysis o the relationship between polarization and wavefronts

Polarization observables and residuals have been studied with 4 canonical cases. In case of acoustic propagation (or negligible contribution of the transversal/longitudinal field), there is a direct relationship between the perturbations of the wavefronts and the polarization observables (tilt and ellipticity angles). In case of elastic media, when both longitudinal and transversal wavefields need to be considered this relationship becomes more complicated.

Furthermore, in the studied cases the shear waves are first generated from the interaction of direct P-wave (generated by an explosive source) with the elastic perturbation and then from multi-scattering. For the longitudinal wavefield the coda contribution is very small compared to the contribution of the direct P-wave and first orders diffractions due to the cavity. This generates very different behaviors for the longitudinal and the transversal wavefields. Since polarization observables and residuals are influenced by both fields, it creates complex polarization observables and residuals patterns. It is not obvious to generalize this analysis to more general cases but it is expected that in many cases shear waves have a major contribution to the coda (Aki (1992)).

The next section is dedicated to the analysis of the behavior of polarization based cost-functions based on the examples discussed in this section.

2.7 Comparison of the Poincaré distance based objective function with conventional objective functions

In this section, we propose to analyze the behavior of the cost function associated to the polarization observables and to compare it to more conventional misfit functions.

We consider the same media as in the 4 previous examples (fast and slow acoustic gaussian and elastic cylindrical anomalies) and we perform a one degree of freedom grid analysis with respect to the perturbation amplitude. The acquisition is identical to the acquisition depicted in figures 2.6. The cost functions are computed by summing-up all the different source-receivers contributions.

Considering the 4 previous cases (fast/slow acoustic gaussian perturbations, fast/slow elastic cylindrical perturbations), the reference media ("true media") are defined with maximal perturbations 50% of velocity of corresponding homogeneous media (numerical values are provided in table 2.1). In case of elastic media, both V_p and V_s parameters are perturbed considering a constant ratio $\frac{V_p}{V_s} = 2$.

The cost functions considered in this study are the conventional bi-component L2 cost functions ($\mathcal{E}_{conv,multi}$) as defined in eq. 2.2, the cost functions based on the phase of the horizontal component ($\mathcal{E}_{phase,x}$) and on phase of the vertical component ($\mathcal{E}_{phase,z}$) both defined according to the equation 2.6), the polarization cost function based on the Poincaré distance (\mathcal{E}_P) defined in eq. 2.47.

These cost-functions are studied for different 2 frequencies groups : 20 Hz, 100 Hz and a frequency group containing all the frequencies included in the frequency band $[100Hz, 200Hz]$.

2.7.1 Cost functions at 20 Hz

The cost functions for the frequency 20 Hz are depicted in figures 2.22a-d. For this frequency 20 Hz, all the cost functions present a convex behavior and no local minimum are visible in these figures.

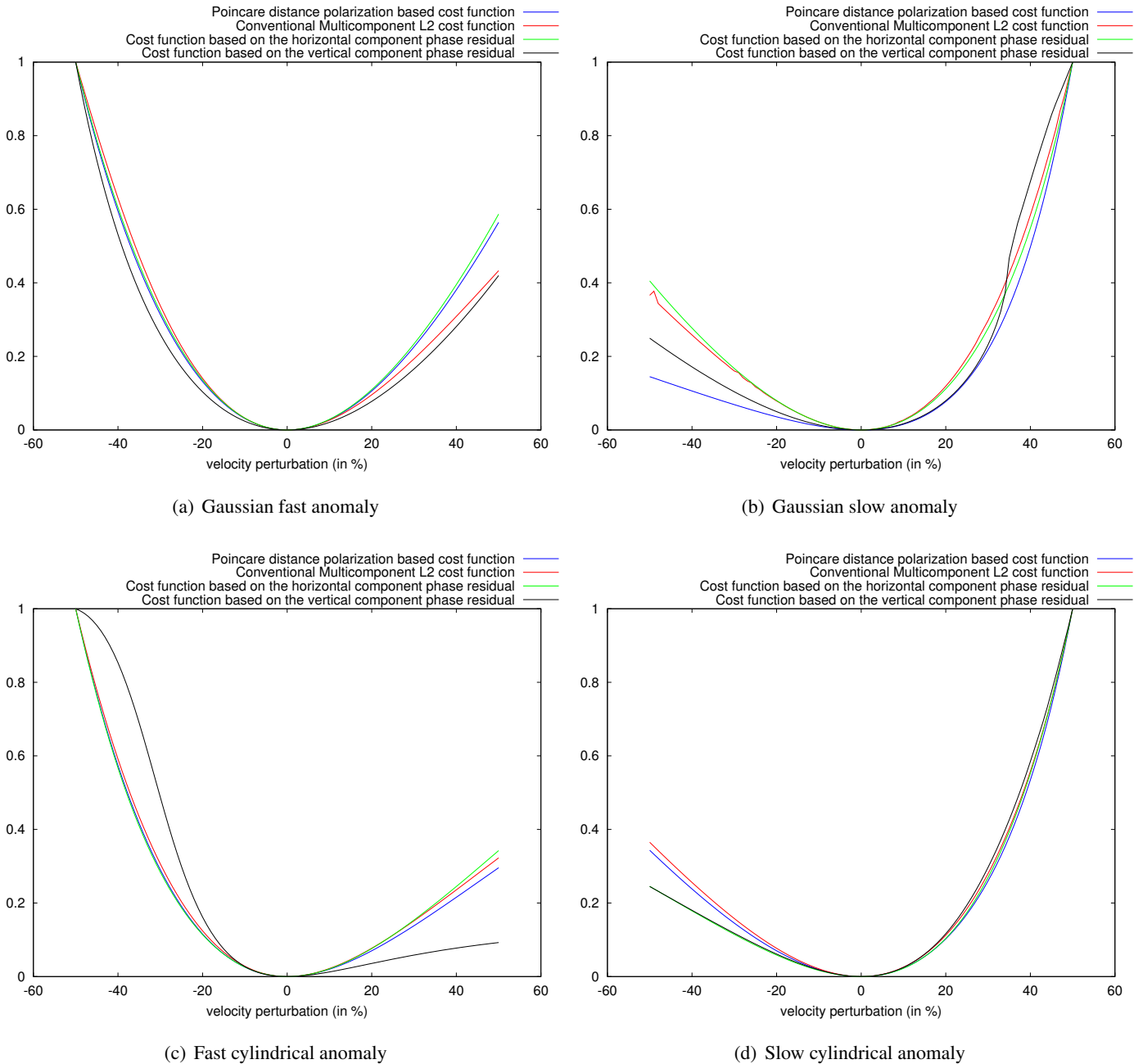


FIGURE 2.22 – Cost functions at 20Hz for different kinds of perturbations. All cost functions are normalized according to their maximum value. The blue line correspond to the cost function \mathcal{E}_P , the red line to the cost function $\mathcal{E}_{conv,multi}$, the green line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,x}$ and the black line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,z}$

2.7.2 Cost functions at 100 Hz

The cost functions for the frequency 100 Hz are depicted in figures 2.23a-d.

The cost function associated to the fast gaussian anomaly is depicted in figure 2.23a. In that case, the cost functions $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{phase,x}$ present at least 2 local minima corresponding to perturbation levels of about -45% and 25%. Clearly these local minima are associated to cycle-skipping effects. However, the cost function $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ does not present any local minima for the whole perturbation range.

The cost functions associated to the gaussian slow anomaly are depicted in figure 2.23-b. Again, local minima are visible from the curves associated with the cost functions $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{phase,x}$. The cost function associated to the polarization observables ($\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$) has no clear local minima even if its shape is more oscillatory than for the fast anomaly (fig. 2.23a). According to the analysis of the polarization observables provided in the previous section, the main qualitative difference in terms of wavefronts between the slow and fast gaussian perturbations corresponds to the formation of a caustic. The caustic generates a secondary wavefront inducing a more complex relationship between the wavefronts perturbation and the observed polarization.

In case of the fast cylindrical anomaly 2.23-c, the phases only based cost functions ($\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{phase,x}$) are suffering from a local minimum which is clearly related to a cycle-skipping phenomenon.

These local minimum are not observed for the cost-function $\mathcal{E}_{conv,multi}$. A possible explanation is that in case of cost function $\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{phase,x}$, residuals are not weighted by amplitude related weight, so cycle-skipped residuals contribute equally to cost functions whatever they are associated to larger or small amplitudes (Mulder & Plessix, 2008). In case of a conventional L2, if cycle-skipped residuals have small amplitudes compared to non cycle-skipped residuals then the cost-function $\mathcal{E}_{conv,multi}$ can still remain convex. The polarization based cost function presents (fig. 2.23-c) a small local minimum for perturbation level of about 15%.

For the slow cylindrical anomaly case (fig. 2.23-d), all the cost functions present local minima. The cost function $\mathcal{E}_{phase,x}$ and $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ have a local minimum located for 45% perturbation, this local minimum is related to cycle skipping.

The misfit functions $\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{conv,multi}$ show also for about 35% perturbation a local minimum. The polarization based cost function exhibits a non-convex trend for perturbation smaller than -40% and slight local minimum for about 35 % level of perturbation.

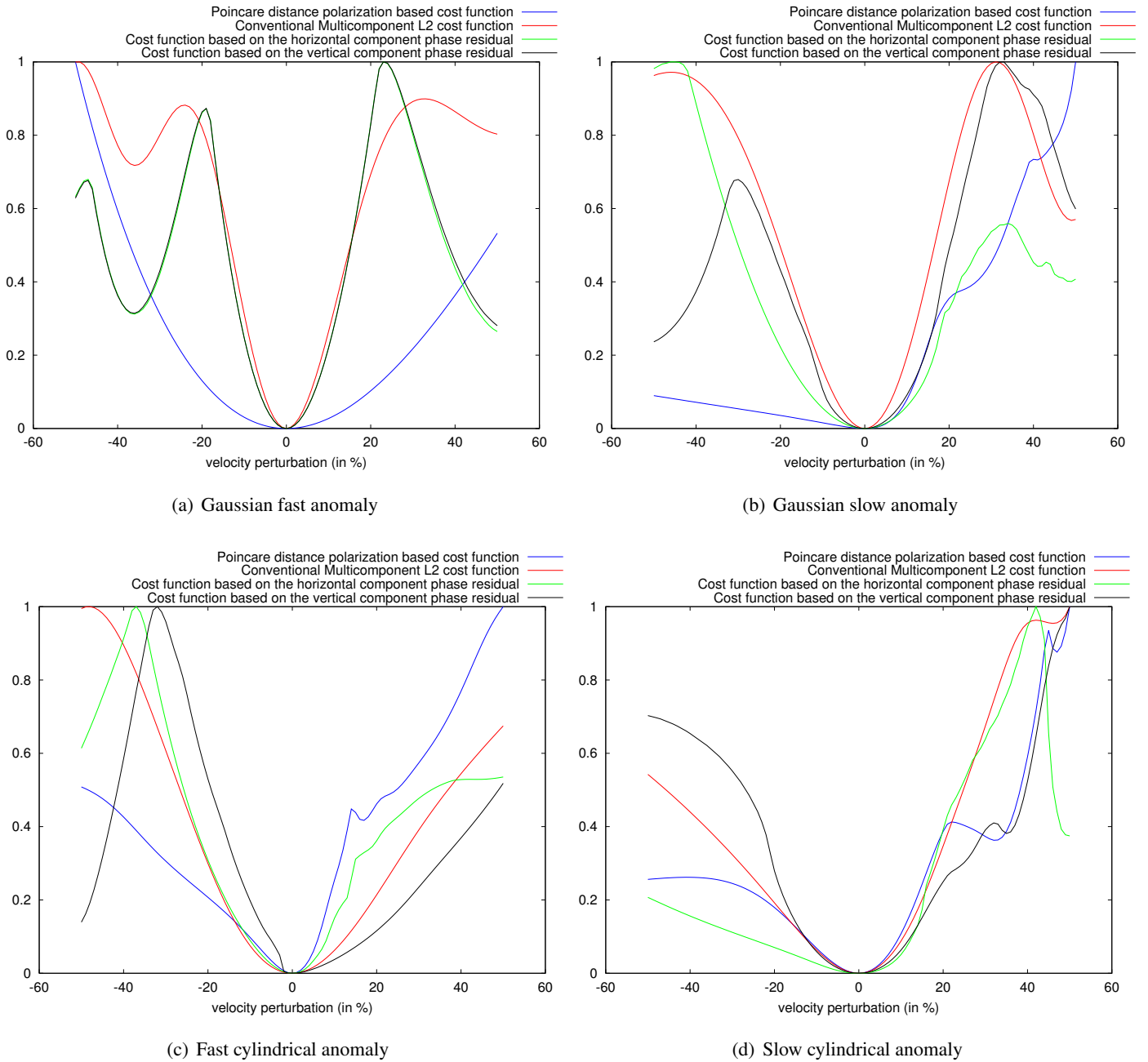


FIGURE 2.23 – Cost functions at 100Hz for different kinds of perturbations. All cost functions are normalized according to their maximum value. The blue line correspond to the cost function \mathcal{E}_P , the red line to the cost function $\mathcal{E}_{conv,multi}$, the green line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,x}$ and the black line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,z}$

2.7.3 Cost functions for the bandwidth from 100 to 200 Hz

We analyze the cost functions in the bandwidth 100 to 200 Hz, in order to investigate if enlarging the bandwidth can eventually enhance the cost function convexity compared to the case of frequency 100 Hz alone. In order to consider multiple frequencies the individual mono-frequency cost-functions are simply summed-up.

In case of the gaussian fast anomaly (fig. 2.24-a), a larger bandwidth does not induce an improvement for the local minima present at 100 Hz . This result is expected since observed local minima are associated to cycle-skipping phenomena and higher frequencies should be even more affected by cycle-skipping. For that reason the bandwidth to the upper part of the spectrum is inefficient when simply summing-up different frequency contributions. A possible way to reduce these local minima is to perform phase unwrapping. The cost-function $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ is already convex for 100Hz and its convexity is not affected by the extension of the bandwidth.

Similar conclusions can be drawn in case of the slow gaussian anomaly (fig. 2.24-b) : local minima due to cycle skipping phenomena are not reduced by bandwidth extension. However, the enlargement of the bandwidth has a beneficial effect on the polarization cost function since the associated curve looks smoother than in case of the frequency 100 Hz alone.

For the fast cylindrical anomaly (fig. 2.24-c), the extension of the bandwidth does not significantly improve nor degrade the cost functions $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,x}$ and $\mathcal{E}_{phase,z}$. Concerning the misfit function $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ the local minimum noticed for a perturbation of about 15% at 100Hz (2.23-c) disappears when the bandwidth is extended.

For the slow cylindrical anomaly (fig. 2.24-d), the bandwidth extension does not modify qualitatively the behavior of the cost functions $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,x}$. For both cost-functions $\mathcal{E}_{phase,z}$ and $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$, the local minima previously located for perturbations of level of 30 % (2.23-d) is removed with the extension extension of the bandwidth.

2.7.4 Partial conclusion of the cost-function convexity analysis

As partial conclusion, we have seen on canonical examples that the behavior of the polarization based cost function ($\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$) differs considerably to the behavior of other cost functions sensitive to the “global” kinematic phase ($\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,x}$, $\mathcal{E}_{phase,z}$).

Indeed the cost function $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ does not suffer from kinematic cycle skipping effect as $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}_{phase,x}$ and $\mathcal{E}_{phase,z}$ cost-functions. It has been seen that in case of a single arrival, the domain of convexity of the cost function $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$ can be considerably larger than the convexity domain of cost-functions sensitive to the kinematic phase.

However, in case of multiple arrivals due to diffractions, multiple scattering or triplication the domain of convexity of the polarization based cost functions tends to be reduced. This can be related to the observations in the previous section : when the wavefronts become complex then the complexity of the polarization observables increases. Furthermore, for elastic media, polarization observations may be difficult to relate to wavefront perturbations since both transversal and longitudinal wavefronts contributes to the polarization observations. Both wavefront shape complexity and contributions of longitudinal and transverse wavefields tend to increase the complexity of the relationship between

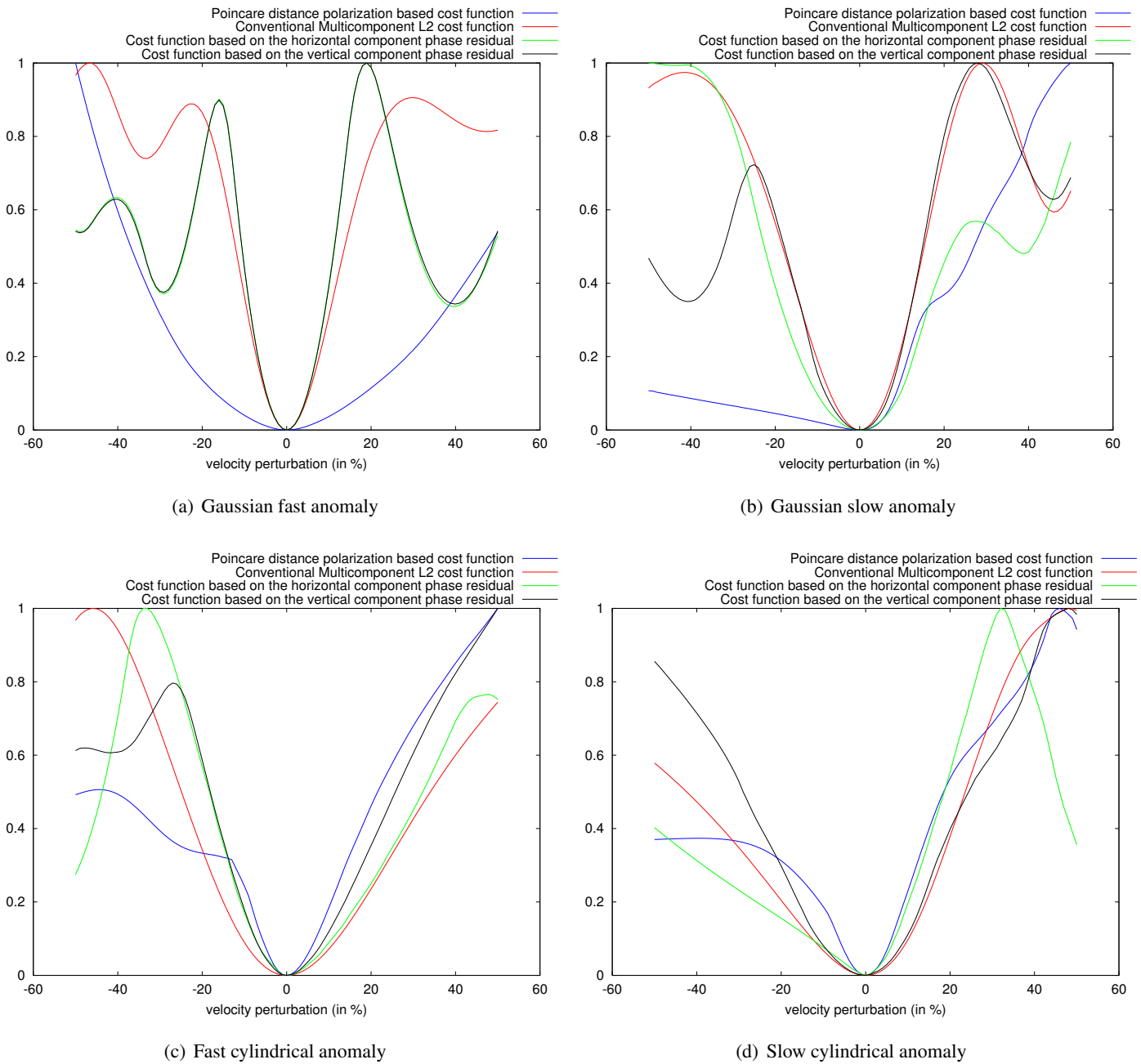


FIGURE 2.24 – Cost functions in the bandwidth 100 to 200 Hz for different kinds of perturbations. All cost functions are normalized according to their maximum value. The blue line correspond to the cost function $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$, the red line to the cost function $\mathcal{E}_{conv,multi}$, the green line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,x}$ and the black line to the cost function $\mathcal{E}_{phase,z}$

the polarization observables and the medium structural properties. This complexity likely reduces the domain of convexity of the cost-function $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$.

Extension of the bandwidth of the inverted signals could be an effective way to reduce local minima of the Poincaré based distance polarization misfit function.

A possible way to take advantage of polarization misfit functions can be to isolate and process well identified events.

An important point, not discussed in our polarization analysis is the null space associated to the polarization cost function compared to more conventional phase-based cost-functions. For acoustic body waves (in far-field), we have seen in the previous section that for a single event the polarization is related to the wavefronts directions. So, if two different media have similar wavefronts (as for instance in 2 different homogeneous media with different velocity parameters) then they can be indistinguishable with polarization observables.

2.8 Polarization sensitivity kernels

In this section, the sensitivity kernels of the polarization observables are defined and computed in order to compare them to more conventional sensitivity kernels (Rytov approximation). Even if the sensitivity kernels are not explicitly used in FWI approaches, they are the backbone of many linearized inversion methods and they provide precious information about the model coverage and the reachable resolution.

2.8.1 Methodology

By definition, a sensitivity kernel relates the perturbation of an observable (in the general meaning, directly measurable or not) to a perturbation of some structural parameter. If we consider a scalar observable $d(m)$ function of the scalar parameter m and a perturbation Δm of m , then the sensitivity kernel is defined by the first order Taylor series of $d(m + \Delta m)$:

$$d(m + \Delta m) = d(m) + J(m)\Delta m + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.94)$$

In most conventional cases, in seismology the most usual observables are displacements, velocities, accelerations, strain, stress . . .

Since for mechanical waves, polarization observables are not directly measurable they must be deduced from measurable observables. We have seen in section 2.3.3 that vector $\mathbf{n}_r(a)$ contains all the information needed to uniquely and completely describe a polarization state “a”. So, in case of the polarization the equation 2.94 becomes :

$$n^i(m + \Delta m) = n^i(m) + J_{n^i}(m)\Delta m + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.95)$$

where n^i is the i component of the vector $\mathbf{n}_r(\mathbf{m})$, which corresponds basically to the i Stokes coefficient normalized by the first stokes coefficient ($\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$) In a vectorial form the equation 2.95 becomes :

$$\mathbf{n}_r(m + \Delta m) = \mathbf{n}_r(m) + \mathbf{J}_{\mathbf{n}_r}(m)\Delta m + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.96)$$

The geometrical interpretation of the polarization sensitivities can be described with the figure 2.25. In this figure, the red arrow points towards the Poincaré sphere location corresponding to the polarization state computed with the parameter m_0 For any arbitrary small perturbation Δm of the parameter m_0 , the resulting polarization states is described by the Stokes' vector $\mathbf{n}_r(m_0 + \Delta m)$ (blue arrow).

The difference between the Stokes' vector corresponding to the original state $\mathbf{n}_r(m_0)$ and $\mathbf{n}_r(m_0 + \Delta m)$ corresponding to the perturbed state (residual) lies in the tangent plane $T(m_0)$ (fig. 2.95), so that the residual is orthogonal to Stokes' vector $\mathbf{n}_r(m_0)$:

$$\langle \mathbf{J}_n(m_0), \mathbf{n}_r(m_0) \rangle = 0 \quad (2.97)$$

Since Stokes parameters are not immediate to interpret, we prefer to study the polarization sensitivities for bi-components configurations with two other observables : the tilt angle ($\xi(\mathbf{m})$) and ellipticity angle ($\psi(\mathbf{m})$) observables which are much easier to relate to the particle motion than the Stokes' parameters.

In that particular case, the equation 2.95 becomes :

$$\xi(m + \Delta m) = \xi(m) + J_\xi(m)\Delta m + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.98)$$

and the sensitivity of the ellipticity angle as :

$$\psi(m + \Delta m) = \psi(m) + J_\psi(m)\Delta m + \mathcal{O}(m^2) \quad (2.99)$$

The expression of the tilt and ellipticity angles with respect to the Stokes' parameters are the followings :

For the tilt angle :

$$\xi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \quad (2.100)$$

and the ellipticity angle :

$$\psi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_0} \right) \quad (2.101)$$

The residual of the tilt angle $\Delta\xi(m_0)$ and the residuals of the ellipticity angle $\Delta\psi(m_0)$ are illustrated in figure 2.25. It can be associated to these residuals a tilt angle sensitivity $J_\xi(m)$ and an ellipticity angle sensitivity $J_\psi(m)$.

Finally, using the expressions eq. 2.100 and 2.99 and the chain rule of differentiation, the tilt and ellipticity angle sensitivity kernels can be expressed in terms of Stokes' parameters and then in terms of field observables using the expressions eq. 2.34. Details about the calculations are provided in appendix 2.10.5.

To illustrate the sensitivity kernels, only one source-receiver couple is used. The source is an explosive source located at the same position as in previous section (cross in fig. 2.6), the receiver is a multicomponent receiver located at the position of the green point (fig. 2.6) straight on the opposite side of the source ($\theta_{src-rec} = 180^\circ$). The propagating media is homogeneous with the same structural parameters as those of the background of the fast cylindrical anomaly (third row in table 2.1). All sensitivity kernels have been computed for a frequency of 50 Hz.

We take advantage of the Rytov's formulation (Woodward, 1992) in order to separate the contributions of amplitudes to the contributions of the phases. In the formulation of the tomography inverse problem, the residual r^{rytov} is defined as :

$$\begin{aligned} r^{rytov} &= \ln \left(\frac{u_{model}(m)}{u_{obs}} \right) \\ &= \Re \{ \ln(|u_{model}(m)|) - \ln(|u_{obs}|) \} + \mathbf{i} \cdot \Im \left\{ \ln \left(\frac{u_{obs}(\omega)}{u_{model}(m)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.102)$$

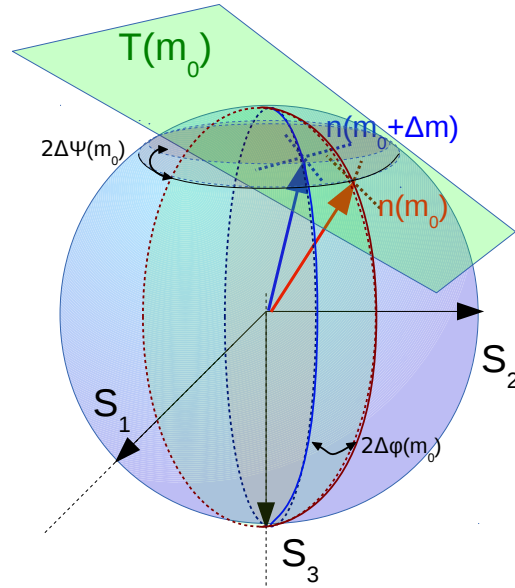


FIGURE 2.25 – Illustration of the description of polarization observable sensitivities on Poincaré sphere for bi-component measurements. The unperturbed normalized Stokes’ vector is $\mathbf{n}_r(m_0)$ and the perturbed Stokes’ vector is $\mathbf{n}_r(m_0 + \Delta m)$. The tangent space to sphere at the location indicated by $\mathbf{n}_r(m_0)$ is $T(m_0)$. Residuals are decomposed in terms : tilt angle residuals $\Delta\xi(m_0)$ and ellipticity angle residuals $\Delta\psi(m_0)$.

In equation 2.102, the real part corresponds to the amplitudes contributions whereas the imaginary term correspond to the phase contributions. Using this expression, we can define amplitude and phase sensitivity kernels.

Since all the presented observables (amplitude, phase and polarization) are fully described with the components u_x and u_z of the field, the corresponding sensitivity kernels can be expressed as linear combinations of the “Born” sensitivity kernels of the different components ($\partial_m(u_x)$ and $\partial_m(u_z)$).

2.8.2 Sensitivity kernels for compressive wave velocity variations

The sensitivity kernels for the Vp parameter are presented in figures 2.26. Rytov phase and amplitude sensitivity kernels (fig. 2.26a-d) are displayed for comparison. Since these kernels have already been extensively studied in the literature (e.g. Woodward (1992)) only general remarks are recalled here. Firstly, Rytov (phase and amplitude) kernel patterns considerably differ when we consider the horizontal or the vertical component of the receivers. Secondly, for both components the sensitivity of the phase kernels is small on the ray path for the horizontal component (fig. 2.26c) and almost null for the vertical component (fig. 2.26d), in three dimensions this phenomenon is documented as banana-doughnut phenomenon (Marquering *et al.*, 1999). Along the vertical line crossing the receiver ($x=130m$), the sensitivity of the Rytov (phase and amplitude) kernels of the horizontal component are almost null whereas for the vertical component the sensitivities are maximum in this region.

Tilt angle and ellipticity angle sensitivities (fig. 2.26e-f) present similar patterns. They are both null on the ray path but the tilt angle kernels seem to have a greater sensitivity in the neighbourhood of the receiver. As for the vertical component rytov kernels, they both are maximal near receivers and have decreasing amplitudes near to the source.

2.8.3 Sensitivity kernels for shear wave velocity variations

The V_s parameter sensitivity kernels are presented in figures 2.27a-f. The pattern of these sensitivity kernels is significantly more oscillatory than for the V_p sensitivities presented above. This can be explained by a more oscillatory radiation pattern of the V_s anomaly (Forgues, 1996) and by shorter propagated wavelengths. As for the parameter V_p , the ellipticity and tilt angle sensitivity kernels (fig. 2.27e-f) along the ray path are null. Ellipticity and tilt angle kernel patterns are quite similar. It can be noticed that the tilt angle kernel has a greater sensitivity near the source and the sensitivity of the tilt angle kernel is greater near the receiver. Again, there is a clear similarity between polarization sensitivity kernels and Rytov (phase and amplitude) sensitivity kernels on the vertical component.

2.8.4 Partial conclusion on polarization related sensitivity kernels

As partial conclusion, we have seen for one particular case that tilt and ellipticity angles sensitivity kernels share quite similar patterns. They also share some qualitative properties with the Rytov sensitivity kernels for the component perpendicular to the ray path (vertical component in the presented case). So we can expect that linearized algorithms based on the polarization observables can have comparable resolution to algorithms based on phase or amplitude observables of the vertical component. It is also noteworthy that in our case polarization sensitivity kernels are null on the ray path. A possible physical interpretation might be that first order perturbations (in terms of size and amplitude) has a very little influence on the wavefronts along the ray-path (Marquering *et al.* , 1999). Then according to the discussions of the section 2.6 for smooth media, polarization perturbations can be related to wavefront deformations. More numerical investigations or theoretical studies are needed to extend these conclusions to more general cases.

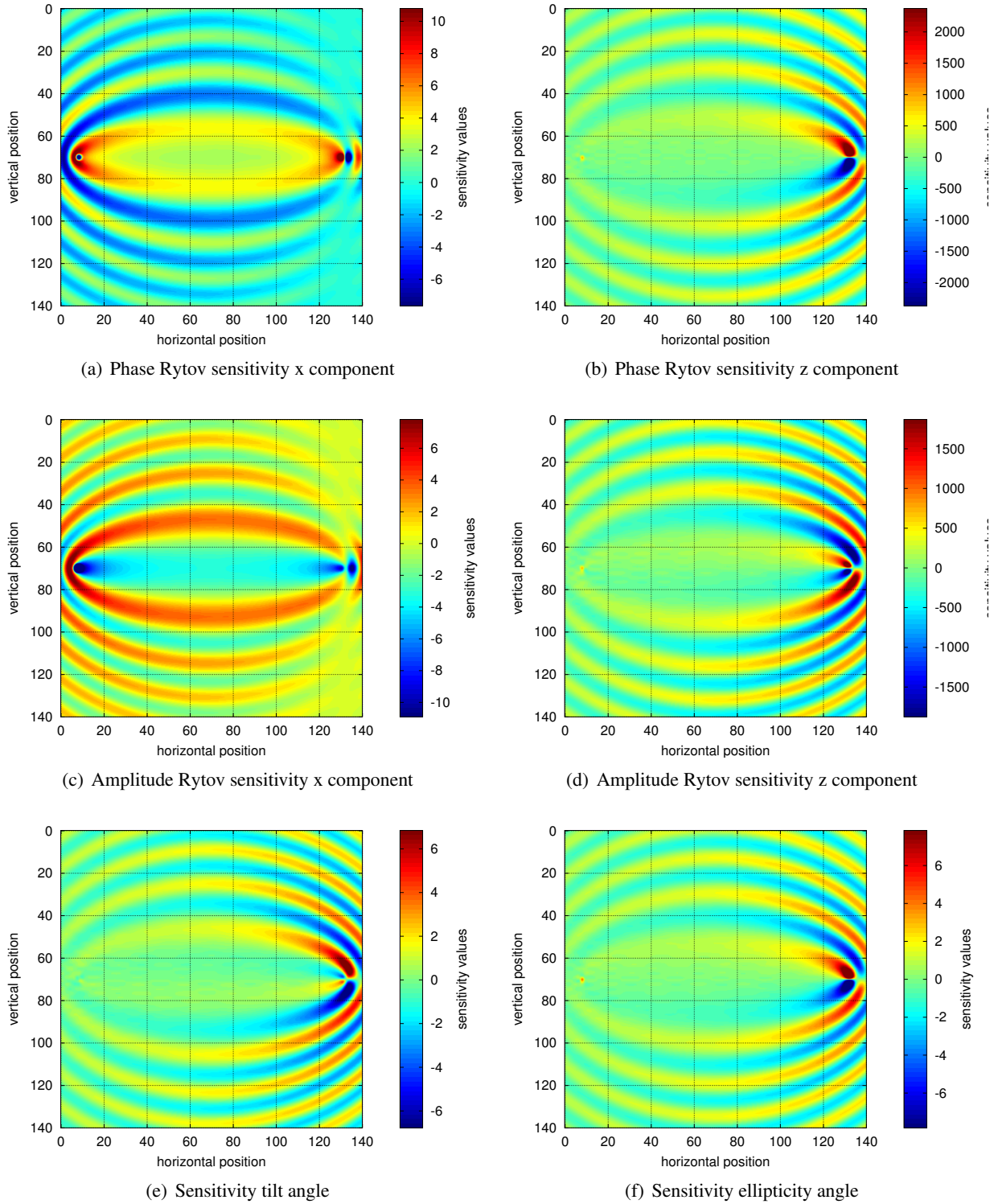


FIGURE 2.26 – Sensitivity kernels of the V_p parameter for a frequency of 50 Hz. Values of the sensitivities are displayed in arbitrary units proportional to true values (up to a real positive factor).

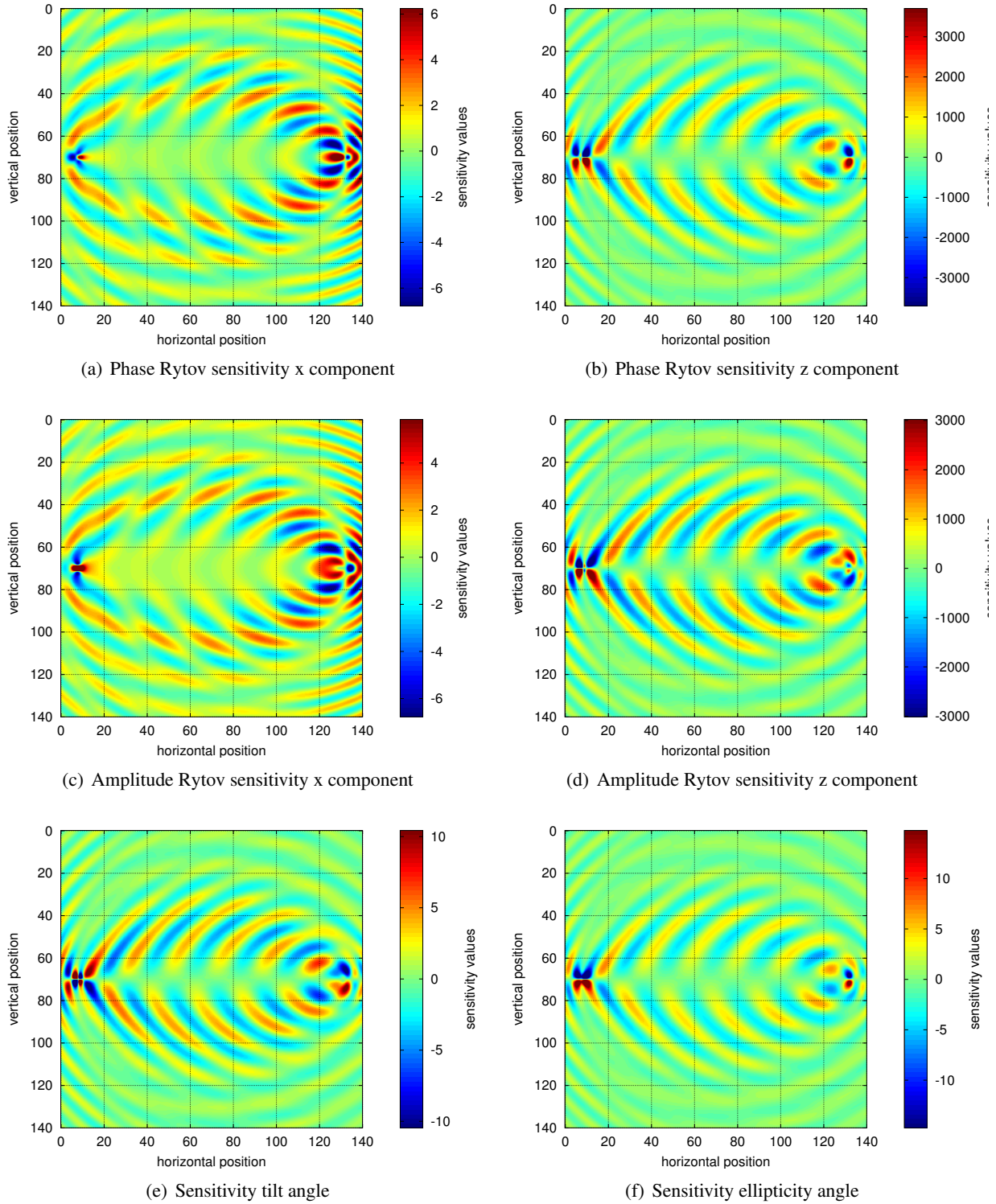


FIGURE 2.27 – Sensitivity kernels of the V_s parameter for a frequency of 50 Hz. Values of the sensitivities are displayed in arbitrary units proportional to true values (up to a real positive factor).

2.9 Numerical inversion results

This numerical investigation aims to compare the inversion results obtained from conventional misfit functions to the polarization based cost function. The different cost functions are 1) the conventional L2 bi-component misfit function ($\mathcal{E}_{conv, multi}$) defined in equation 2.2, the normalized (with respect to the observed and calculated particle motion amplitude) bi-component misfit function ($\mathcal{E}^{normed\ vect}$) defined in equation 2.13, and the proposed Poincaré distance based cost function ($\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$) defined in equation 2.47.

The model (fig. 2.28) is composed of an homogeneous media with a cross shaped perturbation located in the middle. The structural parameters values of the background medium (without the cross) are : $V_p=1000\text{m/s}$, $V_s=500\text{m/s}$ and $\rho=1500\text{kg/m}^3$ and the attenuation $Q_p = Q_s=100$.

The V_p and V_s values of the cross are 25% higher than values of the background media, and the Q_p , Q_s and ρ parameters are the same as for the background media.

The V_p and V_s parameters are inverted simultaneously, density and attenuation parameters are not inverted. The acquisition is composed of 144 receivers (represented by dots in figure 2.28) and 48 sources (not represented) both regularly spaced and completely surrounding the model.

The source is a Ricker shaped wavelet with a central frequency of 50 Hz. Model dimensions, frequencies and the velocities are chosen to approach near surface field conditions. The inversion is carried-out for 7 discrete frequencies from 20 Hz to 100 Hz. Frequencies are processed one by one from low to high frequencies, with a maximum number of 40 iterations per frequencies.

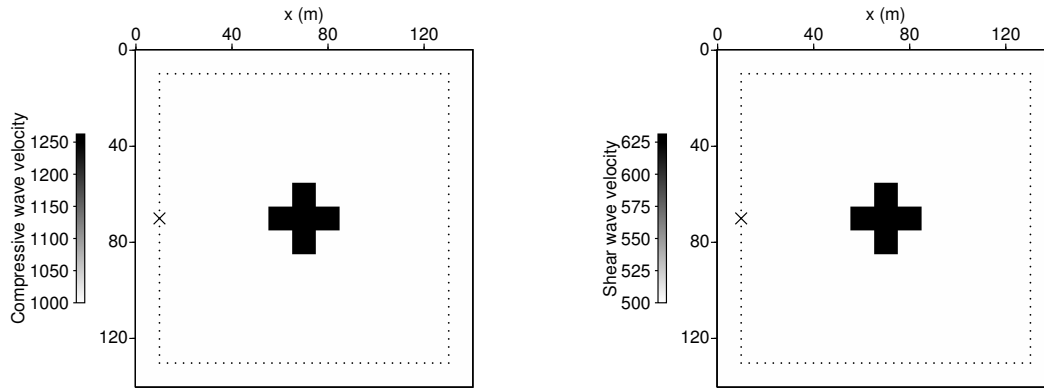
Forward problem modeling is performed with frequency domain Galerkin's discontinuous elements (zero order elements). Perfectly Matched Layers (PML) placed on each side of the model to emulate infinite media radiation conditions. Details about the modeling method are provided in (Brossier *et al.*, 2008).

Gradients have been computed with the adjoint state formalism. The estimation of the Hessian operator effect is performed with a l-BFGS algorithm. Further details about the implementation can be found in (Brossier, 2011). In order to avoid a "perfect inverse crime" configuration, numerical noise has been added to synthetic data. The noise is generated in order to statistically have a signal to noise ratio of 40 dB and to be isotropic (for each receiver component the noise is uncorrelated and follows the same statistical law).

2.9.1 Inversion results

The results for the three different cost functions are presented in figures 2.29, 2.30 and 2.31 for the V_p and V_s parameters.

From a global point of view, for the 3 studied cost functions, the V_p and V_s parameters reconstructions (fig. 2.29, 2.30 and 2.31) do not present striking differences. All inversions clearly recover the shape of the cross starting from frequency 50 Hz and the quantitative results at 100 Hz are in good agreement with the "true model" (green line on log curves). However, the $\mathcal{E}_{conv, multi}$ cost function provides slightly better results : the oscillations outside the cross are smaller for the $\mathcal{E}_{conv, multi}$ misfit function based reconstructions than for the reconstructions based on the $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ and $\mathcal{E}_{\mathbf{P}}$. Fur-

(a) V_p parameter(b) V_s parameterFIGURE 2.28 – V_p and V_s parameters of the 25% cross perturbation model.

thermore, velocity logs clearly show that the velocity of the perturbation is better recovered in case of the $\mathcal{E}_{conv, multi}$.

It is not surprising that the best inversion results are provided by the $\mathcal{E}_{conv, multi}$ misfit function.

Firstly, this cost function considers all the content of the measured signal, whereas the other misfit functions do not consider some information : the “absolute” amplitudes are removed with the cost function $\mathcal{E}^{normed\ vect}$; the “absolute” phase and amplitudes are disregarded with the misfit function \mathcal{E}_P . Removing data content can lead to less well constrained inverse problems.

The second reason of the superiority of reconstructions from $\mathcal{E}_{conv, multi}$ to other misfit function reconstructions can come from the fact that only this misfit function is consistent with noise model (according to the Bayesian framework). The other misfit functions need to be reformulated in order to correspond to maximum likelihood estimators (for one given noise model). However in the present configuration, all three cost-functions lead to V_p and V_s parameter reconstructions with good accuracy.

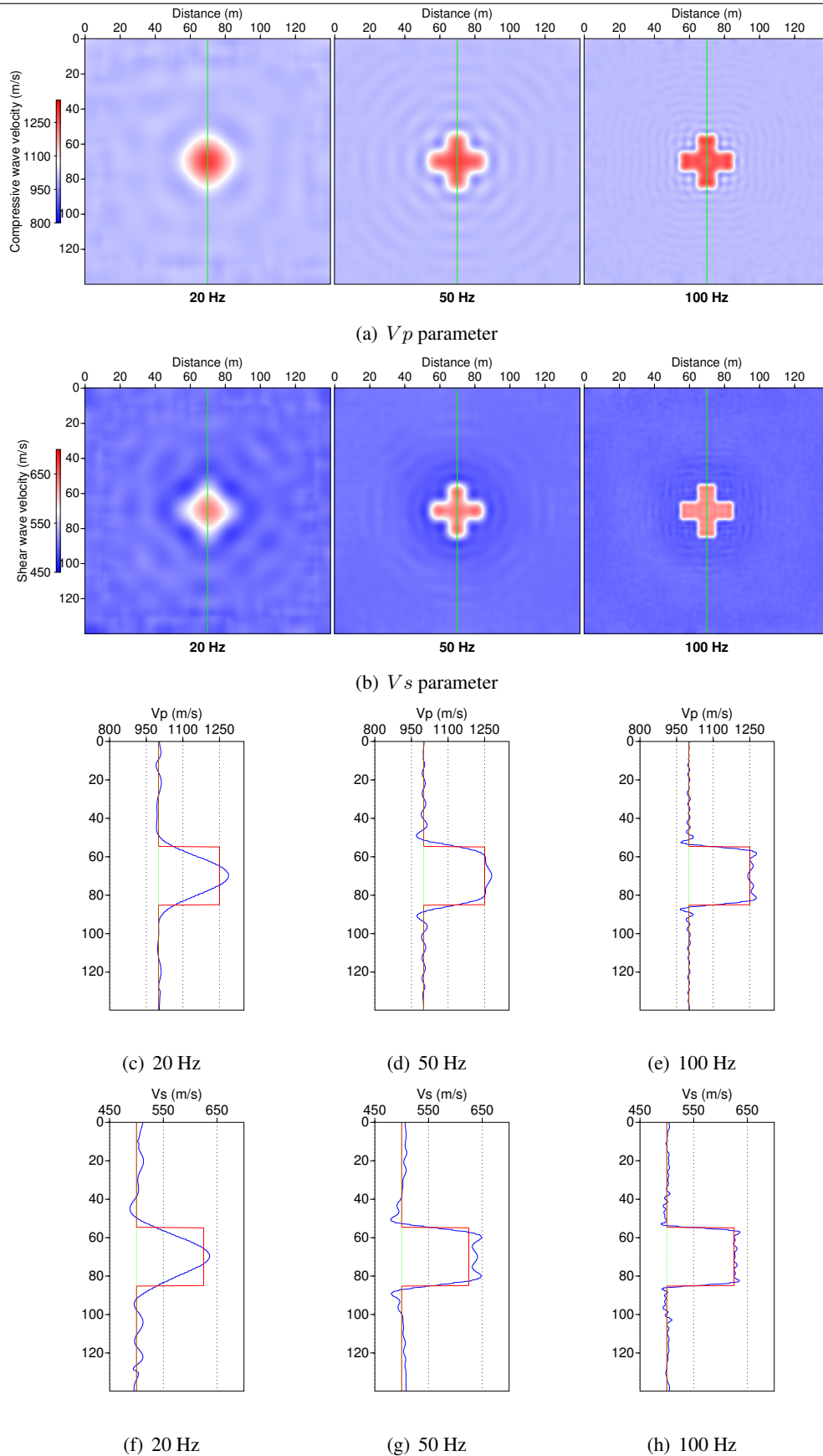


FIGURE 2.29 – Inversion results for V_p and V_s parameters with 25% cross perturbation with the cost function $\mathcal{E}_{conv,multi}$. In part a, the green line represents the path of the log curves b-c-d. In log curves b-c-d, the initial model used for the inversion is represented with a tilted green line, the reference model with the continuous red line and the result from inversion with the blue line.

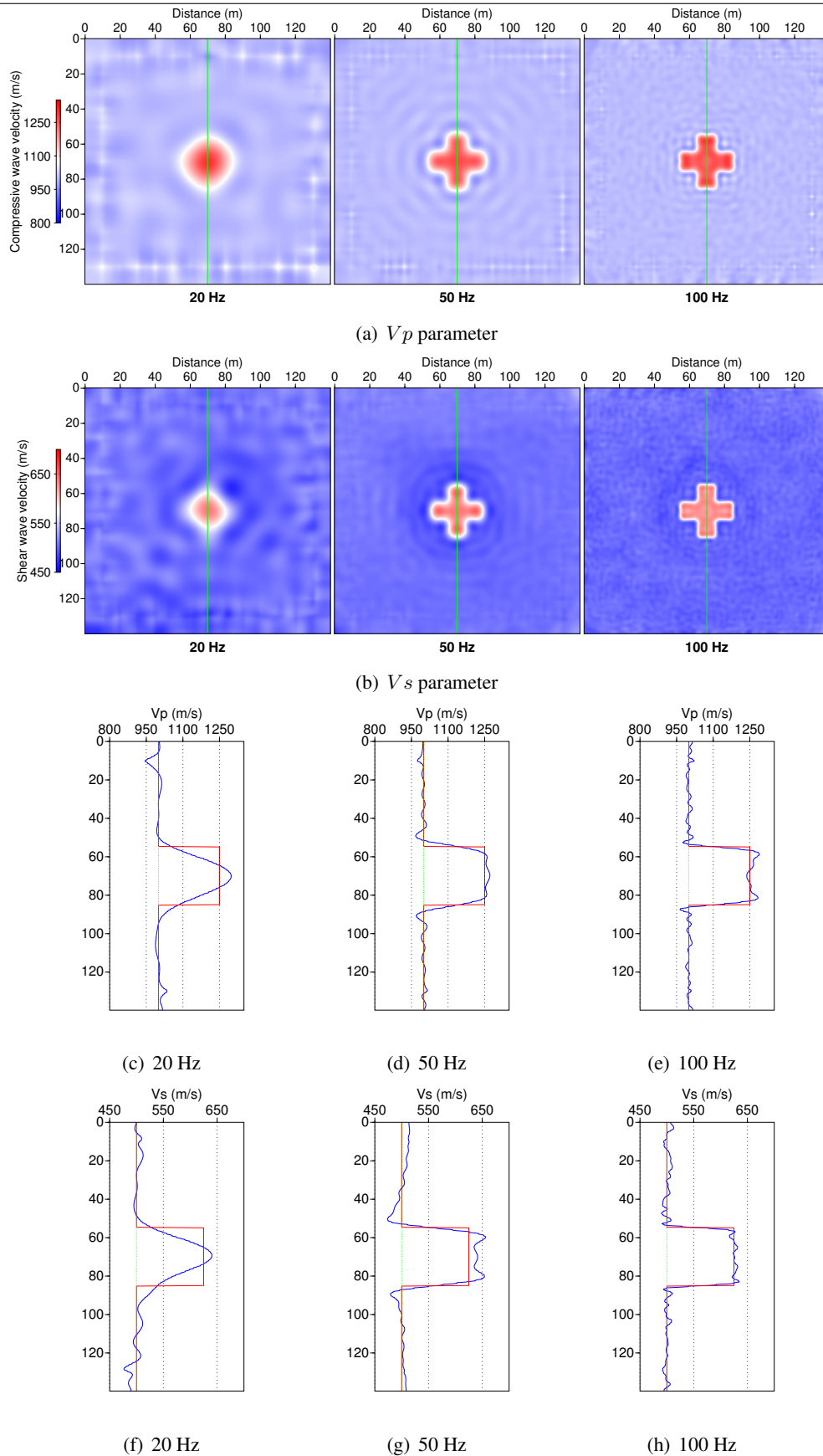


FIGURE 2.30 – Inversion results for V_p and V_s parameters with 25% cross perturbation with the cost function $\mathcal{E}^{normed\ vect}$. In part a, the green line represents the path of the log curves b-c-d. In log curves b-c-d, the initial model used for the inversion is represented with a tilted green line, the reference model with the continuous red line and the result from inversion with the blue line.

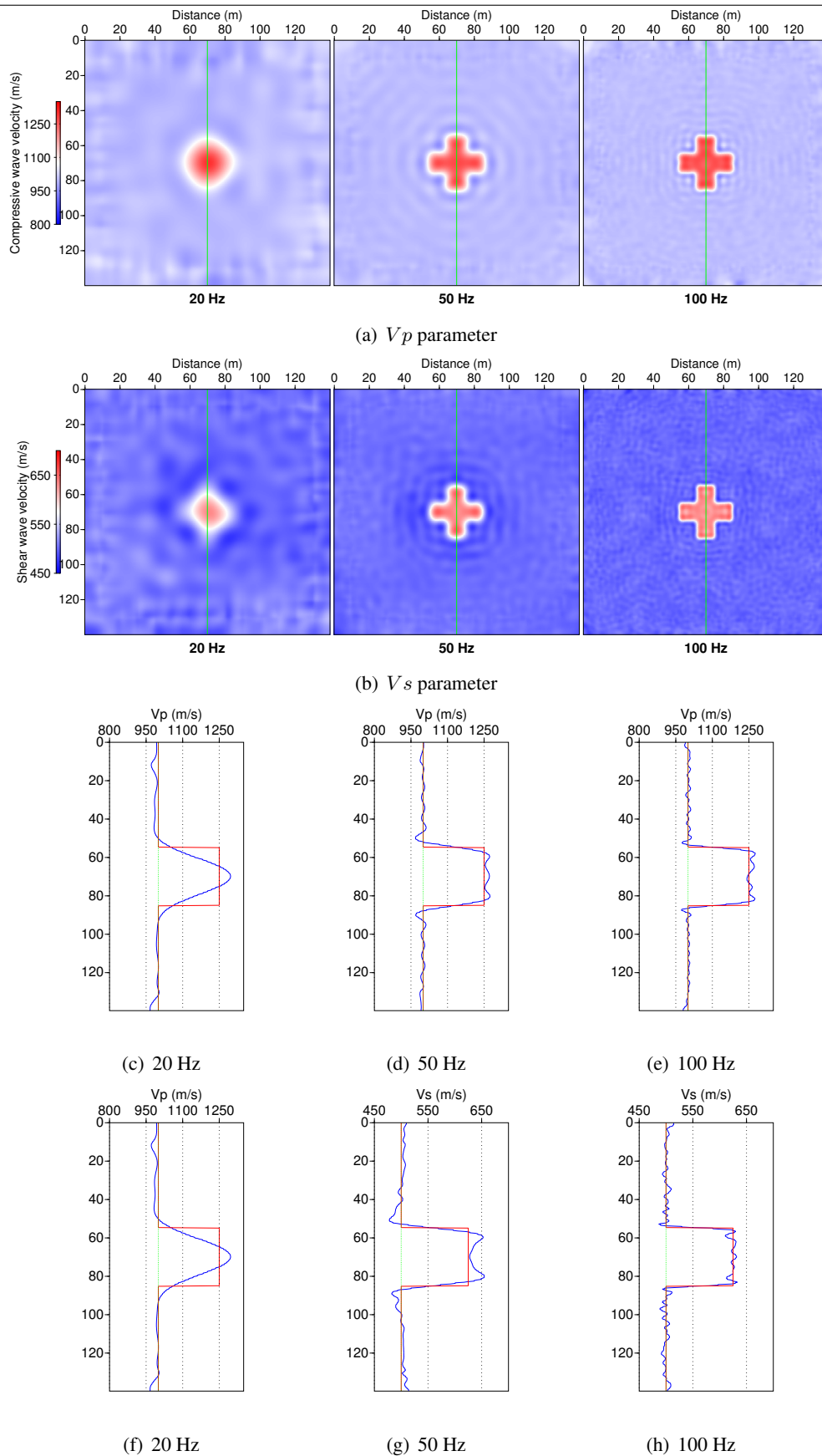


FIGURE 2.31 – Inversion results for V_p and V_s parameter with 25% cross perturbation with the cost function \mathcal{E}_P . In part a, the green line represents the path of the log curves b-c-d. In log curves b-c-d, the initial model used for the inversion is represented with a tilted green line, the reference model with the continuous red line and the result from inversion with the blue line.

2.9.2 Discussion on the relative evolution of misfit functions and associated null-spaces

The evolution of the cost functions during the inversion is depicted in figures 2.32a-c. Each figure depicts several cost-function ($\mathcal{E}_{conv, multi}$, $\mathcal{E}_{conv, multi}$ and $\mathcal{E}^{normed vect}$). In each figure the optimization is driven for a different cost-function, but other cost-functions are recomputed from the results of the optimization. As mentioned in the previous section, 7 frequencies are inverted sequentially. In figures 2.32a-c the inversion of a new frequency can be deduced from a strong discontinuity.

Figure 2.32a depicts the different cost-functions when the inversion is driven by the minimization of the cost function $\mathcal{E}_{conv, multi}$. In that case, we can see that the cost function $\mathcal{E}_{conv, multi}$ has a regular decrease and during the inversion the cost-functions $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ and $\mathcal{E}^{normed vect}$ are following nearly the same evolution.

In case of the optimization of the cost function $\mathcal{E}^{normed vect}$ (fig. 2.32b), this cost-function presents also a regular decrease, and the misfit function $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ is globally decreasing with some secondary oscillations. It is noteworthy that for the 1st, 2nd and 6th frequencies $\mathcal{E}_{conv, multi}$ increases whereas inversion results converge towards the “true” model.

In figure 2.32c misfit functions are represented when the optimization aims to minimize $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$. In that case, we can see that the cost function $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ presents a regular decrease but for some frequencies the cost-functions $\mathcal{E}_{conv, multi}$ and $\mathcal{E}^{normed vect}$ have a significantly different behavior. For instance, for the 2nd and the 5th frequencies both $\mathcal{E}_{conv, multi}$ and $\mathcal{E}^{normed vect}$ cost-functions are rather increasing whereas the inversion results converge well to the reference model.

In order to explain the divergent behavior between the $\mathcal{E}_{conv, multi}$, $\mathcal{E}^{normed vect}$ and $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ cost-functions, we can propose an explanation based on the null space associated to each cost function. The null space associated to the cost-function $\mathcal{E}^{normed vect}$ is larger than the null space associated to \mathcal{E} : due to the normalization in the expression of cost-function $\mathcal{E}^{normed vect}$ the “absolute amplitude” information content of signals is disregarded in $\mathcal{E}^{normed vect}$. On the other hand, the cost-function $\mathcal{E}^{normed vect}$ accounts for the “global” phase information whereas $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ neglects it, so the null space associated with $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ includes the null space associated with $\mathcal{E}^{normed vect}$. “absolute To summarize, if we call $\mathbf{N}_{null}(\mathcal{E})$ the null space of the inverse problem associated to the misfit function \mathcal{E} , we have :

$$\mathbf{N}_{null}(\mathcal{E}_{conv, multi}) \subset \mathbf{N}_{null}(\mathcal{E}^{normed vect}) \subset \mathbf{N}_{null}(\mathcal{E}_{\mathcal{P}}) \quad (2.103)$$

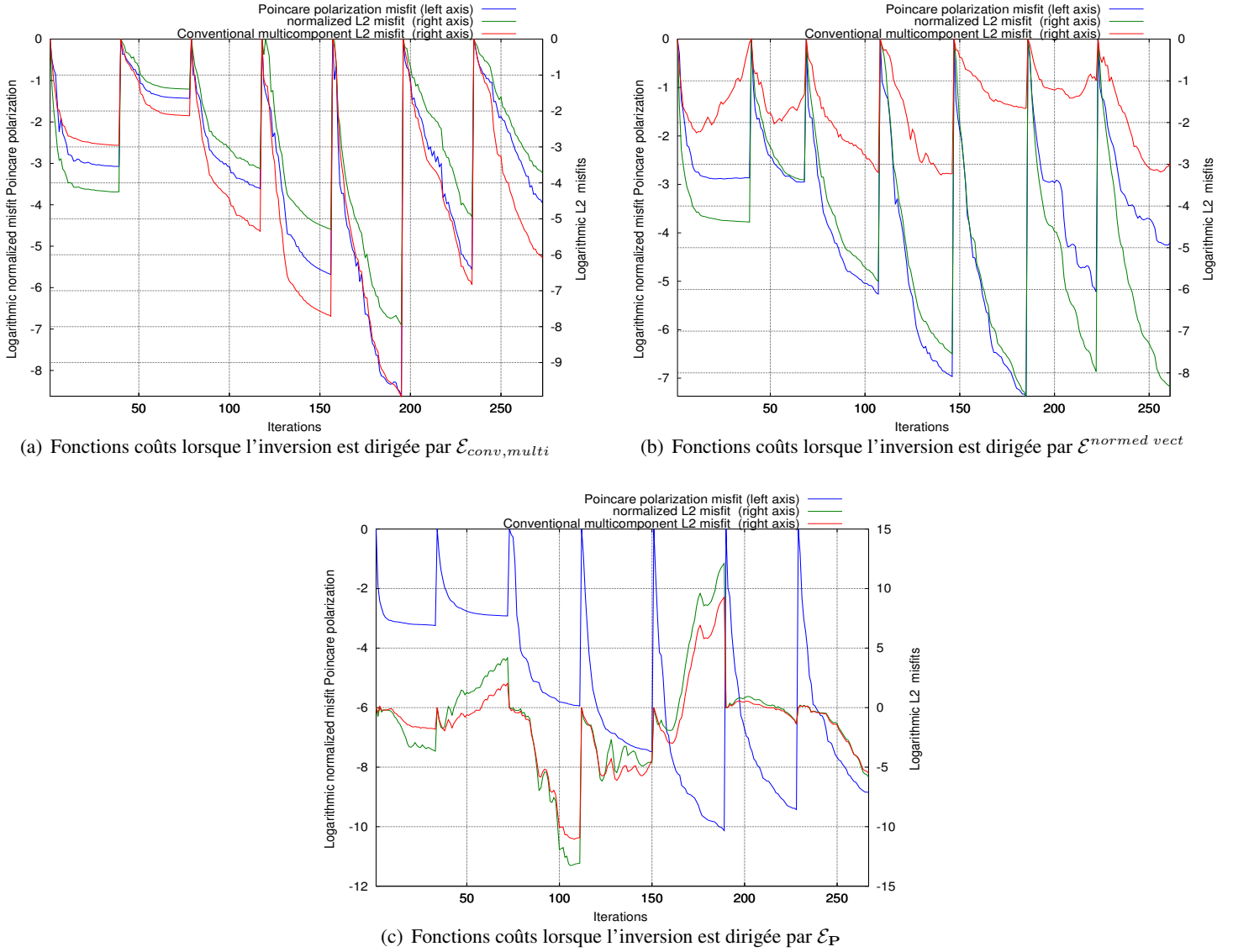


FIGURE 2.32 – Cost functions computed when the inversion is driven by different cost-functions. All the cost functions are normalized by their value at the first iteration of each frequency group (creating apparent discontinuities). The $\mathcal{E}_{conv, multi}$ cost function is depicted with the red lines and the $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ cost-function by the green lines. The logarithmic values of these cost-functions are indicated on the right-hand side y-axis. The $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ cost-function is displayed with blue curves and the associated logarithmic values are indicated on the left-hand side y axis.

2.10 Appendix

2.10.1 An extremely brief introduction to the Dirac's bracket formalism

The Dirac's "bracket" (bra-ket) formalism is extensively used in this article, it is a very practical notation to easily obtain formulas when dealing with vectors and self-adjoint operators in Hilbert spaces. It is used to manipulate operators in the Lagrangian and also it makes derivation of the polarization properties more comprehensive.

In this article, the field observables vector \mathbf{u} is identified to an element in an Hilbert space : \mathbb{H} . The scalar product between two elements \mathbf{a} and \mathbf{b} belonging to \mathbb{H} , may be either written $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ or $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$. The squared Euclidean norm of \mathbf{u} is simply $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$. If $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = 0$, we say that the states represented by the vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} are orthogonal. According to this notation, since $|\mathbf{b}\rangle$ is an element of \mathbb{H} , $\langle \mathbf{a} |$ is a linear form (which is also called adjoint vector of $|\mathbf{a}\rangle$) belonging to the dual space of \mathbb{H} , the adjoint operator of \mathbb{H} is written \mathbb{H}^\dagger . The operation $|\mathbf{b}\rangle \langle \mathbf{b} |$ is called the dyadic product.

Furthermore, if we consider an operator \mathcal{H} mapping \mathbb{H} to \mathbb{H} , then we define the adjoint operator \mathcal{H}^\dagger as following : $\langle \mathbf{a} | \mathcal{H} \mathbf{b} \rangle = \langle \mathcal{H}^\dagger \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$. When dealing with orthogonal components representations, we can write $\langle \mathbf{a} |$ as \mathbf{a}^{*t} and \mathcal{H}^{*t} . Also, if the $\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}$ we say that \mathcal{H} is hermitian.

The operator defined by $|\mathbf{u}\rangle \langle \mathbf{u} |$ is an hermitian positive definite operator, having a unique eigenvalue $\langle \mathbf{b} | \mathbf{b} \rangle$ associated with the eigenfunction/eigenvector \mathbf{u} . If $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 1$ then this operator is called an (orthogonal) projector. The orthogonal projection of \mathbf{u} on the axis \mathbf{e}_i is $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{u} \rangle$.

Considering an hermitian positive definite operator \mathcal{D} such that $\mathcal{D} = |\mathbf{d}\rangle \langle \mathbf{d} |$, the quantity $\langle \mathbf{u} | \mathcal{D} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{d} | \mathbf{u} \rangle$. Furthermore, it can be demonstrated that : $\text{trace}(\mathcal{D} | \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} |) = \langle \mathbf{u} | \mathcal{D} | \mathbf{u} \rangle$. The latter formula may be interpreted as a quantity proportional (the coefficients are actually the squared eigenvalues of \mathcal{D}) to the power of the projection of \mathbf{u} onto the vector \mathbf{d} .

2.10.2 Some functional derivatives used for the gradient derivation

In order to derivate the gradients, it was necessary to derivate some results concerning the derivative of some functionals with respect to a complex variable. The authors have judged useful to recall these results since they did not find them in the literature and they are useful for gradient derivations.

In all the presented results, x, z, C are complex numbers, and \mathbf{x}, \mathbf{z} complex vectors in \mathbb{H} . Λ is a complex scalar number (representing a Lagrange multiplier), \mathcal{A} is an operator and \mathbf{m} is a vector composed of real numbers. Then, we have :

$$\partial_x \Re(\langle \mathcal{A} \mathbf{x} | \Lambda \rangle) = \mathcal{A}^\dagger(\Lambda) \quad (2.104)$$

$$\partial_x \Re(\langle x x^* + z z^* | \Lambda \rangle) = 2x \Re(\Lambda) \quad (2.105)$$

$$\partial_x \Re(\langle x^* z + z^* x | \Lambda \rangle) = 2z \Re(\Lambda) \quad (2.106)$$

$$\partial_x \Re(\langle i(x^* z + z^* x) | \Lambda \rangle) = -2iz \Re(\Lambda) \quad (2.107)$$

$$\partial_x \Re\left(\left\langle \frac{C}{x} \middle| \Lambda \right\rangle\right) = -\left(\frac{C}{x^2}\right)^* \Lambda \quad (2.108)$$

$$\partial_x \Re\left(\left\langle \sqrt{x x^* + z z^*} \middle| \Lambda \right\rangle\right) = \frac{x \Re(\Lambda)}{2 \sqrt{x x^* + z z^*}} \quad (2.109)$$

$$\partial_{\mathbf{m}} \Re(\langle \mathcal{A}(\mathbf{m}) \mathbf{x} | \Lambda \rangle) = \Re\left(\left(\partial_{\mathbf{m}} \mathcal{A}(\mathbf{m}) \mathbf{x}\right)^\dagger \Lambda\right) \quad (2.110)$$

$$= \Re\left(\mathbf{x}^t \left(\partial_{\mathbf{m}} \mathcal{A}(\mathbf{m})\right)^t \Lambda^*\right), \text{ if the elements of } \mathbf{m} \text{ are in } \Re \quad (2.111)$$

2.10.3 Gradients of misfit functions

In this section are provided the expression of some misfit function gradients employed in this article. To the best of the authors knowledge, adjoint state expressions of the $\beta_{H/V}$ misfit function gradient has not yet been published and the gradient of the normalized wavefield cost function has not yet been provided in the frequency domain (a time domain expression is provided in (Choi & Alkhalifah, 2012)). All the misfit functions proposed have gradients sharing similar structure, only the adjoint sources change.

In a general form by employing the notations defined in section 2.5, for a the cost-function $\mathcal{E}_{\text{COST}}(\mathbf{m})$ is associated the gradient : $\mathbf{grad}(\mathbf{m})_{\mathcal{E}_{\text{COST}}}$ which as the following form :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{m})_{\mathcal{E}_{\text{COST}}} = \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} |W^{j,k}|^2 \sum_{i=1}^{n_{comp}} \Re \left(\mathbf{u}_{k,calc}^t (\partial_{\mathbf{m}} \mathbf{Z}(\mathbf{m}))^t \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{P}_i^{j,t} u_{i,j,k}^{\text{COST}adj*} \right) \quad (2.112)$$

Where $u_{i,j,k}^{\text{COST}adj}$ is the ‘‘adjoint source’’ which needs to be ‘‘retro-propagated’’ on the i component from the j receiver for the gradient computation.

Since for all the presented cost functions the expressions of the gradients may be obtained in a similar manner as presented in section 2.5.1 and the most difficult part concerns the functional derivative provided in appendix 2.10.2, only the expressions of the adjoint source terms are provided.

2.10.3.a Gradient conventional L2 misfit function

Many publications (for instance (Pratt *et al.* , 1998; Plessix, 2006)) provide the derivation of the gradient of the misfit function defined in equation 2.3. We recall that the expression of the adjoint source terms for the i component are :

$$u_{i,j,k}^{\text{conv}adj} = u_{obs,i,j,k} - u_{model}(\mathbf{m})_{i,j,k} \quad (2.113)$$

2.10.3.b Gradient of the complex polarization ratio misfit functions

We consider only the complex polarization ratio polarization $\beta_{H/V}$ as defined in expression 2.50 and the misfit function defined in section ...

$$u_{x,j,k}^{\text{HV}adj} = \frac{\beta_{H/V,obs}^{j,k} - \beta_{H/V,model}^{j,k}(\mathbf{m})}{u_{z,model}(\mathbf{m})_{j,k}^*} \quad (2.114)$$

$$u_{z,j,k}^{\text{HV}adj} = \left(\beta_{H/V,obs}^{j,k} - \beta_{H/V,model}^{j,k}(\mathbf{m}) \right) \left(\frac{u_{z,model}(\mathbf{m})_{j,k}}{u_{z,model}(\mathbf{m})_{j,k}^2} \right)^* \quad (2.115)$$

2.10.3.c Gradient normalized wavefield misfit functions

Prior of providing the adjoint source terms to make their expressions more tractable we define the following quantities :

Observed particle motion norm :

$$N_{obs}^{j,k} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{comp}} u_{obs,i,j,k}^* u_{obs,i,j,k}} \quad (2.116)$$

Computed particle motion norm :

$$N_{model}^{j,k}(\mathbf{m}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{comp}} u_{model i,j,k}(\mathbf{m})^* u_{model i,j,k}(\mathbf{m})} \quad (2.117)$$

The normalized residuals :

$$\text{RES}_{i,j,k}^{\text{NORM}}(\mathbf{m}) = \frac{u_{obs i,j,k}}{N_{obs}^{j,k}} - \frac{u_{model i,j,k}(\mathbf{m})}{N_{model}^{j,k}(\mathbf{m})} \quad (2.118)$$

Using the notations defined above the adjoint source term for the computation of the cost function are the followings :

$$u_{i,j,k}^{\text{NORM}adj} = \frac{N_{obs}^{j,k}}{N_{model}^{j,k}(\mathbf{m})} \left(\text{RES}_{i,j,k}^{\text{NORM}}(\mathbf{m}) - \frac{u_{model i,j,k}(\mathbf{m}) \Re \left(\sum_{i=1}^{n_{comp}} (u_{model i,j,k}(\mathbf{m})^* \text{RES}_{i,j,k}^{\text{NORM}}(\mathbf{m})) \right)}{N_{model}^{j,k}(\mathbf{m})^2} \right) \quad (2.119)$$

2.10.4 Interpretation of component weighting operator in conventional FWI as polarization state filtering

As mentioned in the session 2.2, Barnes & Charara (2010) applied different weights to the different components. In this section, we interpret the effect of this weights using the formalism described in section 2.3. Actually Barnes & Charara (2010) proposed a method to build a matrix $\mathbf{W}^{j,k}$ according to some properties of the signal. We will not discuss the method to built $\mathbf{W}^{j,k}$, we will show that this is equivalent to filter some polarization states.

As discussed in section 2.3, the weights applied to the global misfit function are represented by the tensor \mathbf{W} . The sub-matrix $\mathbf{W}^{j,k}$ of \mathbf{W} corresponds to the weight applied to the components the j indexed receiver (for the k indexed source).

In case of n_{comp} measurements, the $\mathbf{W}^{j,k}$ is a $n_{comp} \times n_{comp}$ hermitian positive definite matrix (to be fulfill the metric tensor properties). Since this matrix is hermitian positive definite, it is possible to build a basis of orthogonal normalized eigenvectors $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n_{comp}}\}$ with the corresponding real positive eigenvalues $\{v_1, \dots, v_{n_{comp}}\}$. From the normalized eigenvectors, by performing the dyadic product of each eigenvector by itself, a basis of projectors can be built-up : $\{|\mathbf{V}_1\rangle \langle \mathbf{V}_1|, \dots, |\mathbf{V}_{n_{comp}}\rangle \langle \mathbf{V}_{n_{comp}}|\}$. It follows that the matrix $\mathbf{W}^{j,k}$ can be expressed as :

$$\mathbf{W}^{j,k} = \sum_{l=1}^{n_{comp}} v_l |\mathbf{V}_l\rangle \langle \mathbf{V}_l| \quad (2.120)$$

Clearly, the last equation may be interpreted as a weighted sum of projections onto the polarization vectors $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n_{comp}}\}$. From this interpretation, it is clear that it is possible to “setup” the sub-matrix $\mathbf{W}^{j,k}$ in order to select one specified polarization states.

2.10.5 Derivation of the sensitivity kernels for tilt and ellipticity angles

To compute the tilt angle kernel (eq. 2.98) or the ellipticity angle kernel (eq. 2.99) ; we decompose the expression of partial derivative $\partial_m \phi(m)$ (or in a similar way $\partial_m \psi(m)$) using the chain rule of differentiation :

$$\begin{aligned}\partial_m \xi(m) &= \partial_m \left(\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\alpha_2(m)}{\alpha_1(m)} \right) \right), \text{ according to expression 2.100} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2} \left(\frac{\partial_m(\alpha_2(m))\alpha_1(m) - \partial_m(\alpha_1(m))\alpha_2(m)}{\alpha_1(m)^2} \right)\end{aligned}\quad (2.121)$$

$$\begin{aligned}\partial_m \psi(m) &= \partial_m \left(\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\alpha_3(m)}{\alpha_0(m)} \right) \right), \text{ according to expression 2.101} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_0} \right)^2}} \left(\frac{\partial_m(\alpha_3(m))\alpha_0(m) - \partial_m(\alpha_0(m))\alpha_3(m)}{\alpha_0(m)^2} \right)\end{aligned}\quad (2.122)$$

With :

$$\partial_m \alpha_0(m) = \sqrt{2} \Re [(\partial_m u_x)^* u_x + (\partial_m u_z)^* u_z] \quad , \quad (2.123a)$$

$$\partial_m \alpha_1(m) = \sqrt{2} \Re [(\partial_m u_x)^* u_x - (\partial_m u_z)^* u_z] \quad , \quad (2.123b)$$

$$\partial_m \alpha_2(m) = \sqrt{2} \Re [(\partial_m u_x)^* u_z + (\partial_m u_z)^* u_x] \quad , \quad (2.123c)$$

$$\partial_m \alpha_3(m) = -\sqrt{2} \Im [(\partial_m u_z)^* u_x + (\partial_m u_x)^* u_z] \quad , \quad (2.123d)$$

The computation of terms $\partial_m u_z$ and $\partial_m u_x$ is carried-out numerically by taking advantage of the adjoint state formulation.

2.11 Fonctions objectif alternatives pour la prise en compte de données multicomposantes

Une discussion sur le rôle des différents observables de phase, d'amplitude et de polarisation est présentée dans le paragraphe 2.2. Le but de cette section est d'introduire une autre fonction coût alternative permettant de mesurer l'écart autant en terme de polarisation qu'en terme de « phase absolue ». Comme il a été mentionné dans la partie 2.13, lorsque l'on considère la normalisation des données mesurées et calculées par la norme du mouvement particulière (multicomposantes), on obtient la fonction coût suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{normedvect}(\omega, \mathbf{m}) &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} \left\| \mathbf{u}_{\text{obs}}^{(\text{normed})}(\omega)_{j,k} - \mathbf{u}_{\text{model}}^{(\text{normed})}(\omega, \mathbf{m})_{j,k} \right\|_{W^{j,k}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} \left\| \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{\text{obs}}(\omega)_{j,k})} e^{i\phi(\mathbf{d}_{\text{obs}}(\omega)_{j,k})} - \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} e^{i\phi(\mathbf{d}_{\text{model}}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} \right\|_{W^{j,k}}^2\end{aligned}\quad (2.124)$$

Du fait de la normalisation, cette fonction coût $\mathcal{E}^{normedvect}$ ne considère pas l'amplitude, mais elle est sensible à la phase cinématique « absolue » ainsi qu'à la polarisation. Il est important de noter que si la normalisation se fait indépendamment pour chaque composante en prenant leur valeur absolue alors on « détruit » l'information sur la polarisation.

Si on développe cette expression 2.124, comme par définition les vecteurs de polarisation sont normalisés, on trouve alors que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{normedvect}(\omega, \mathbf{m}) &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} \left\| \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} e^{i\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} - \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} e_{j,k}^{i\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m}))} \right\|_{W^{j,k}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} W^{j,k} \left(2 - 2\Re \left[e^{i(\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k}) - \phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k}))} \langle \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} | \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} \rangle \right] \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_{src}} \sum_{j=1}^{n_{rec}} W^{j,k} \left(2 - 2\Re \left[\langle \mathbf{u}_{obs}^{(normed)}(\omega)_{j,k} | \mathbf{u}_{model}^{(normed)}(\omega, \mathbf{m}) \rangle \right] \right) \quad (2.126)$$

Dans l'équation 2.125, on voit clairement que la fonction coût avec une donnée normalisée dépend de deux termes : d'une part d'un résidu phase « globale » $e^{i(\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k}) - \phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k}))}$ et d'autre part d'un terme dépendant du degré de polarisation entre les états de polarisations mesurés et calculés : $|\langle \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} | \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} \rangle|$. Comme il a été démontré dans la partie 2.3.2, ce dernier terme est invariant suivant une rotation du phase cinématique (phasor), ce terme dépend uniquement des états de polarisation⁷.

Lorsque les états de polarisations sont identiques alors $|\langle \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} | \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} \rangle| = 1$, et donc on retrouve une fonction coût équivalente à celle d'une phase pour une mesure mono-composante.

Par contre, si la distance entre les états de polarisation est maximale alors $|\langle \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} | \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} \rangle| = 0$ et donc la fonction coût $\mathcal{E}^{normedvect}$ devient insensible à la phase cinématique.

Cela m'a amené à définir un résidu homogène à un angle en utilisant la formule suivante :

$$\theta_{multi}(\omega, \mathbf{m}) = \arccos \left(\Re \left(\langle \mathbf{u}_{obs}^{(normed)}(\omega)_{j,k} | \mathbf{u}_{model}^{(normed)}(\omega, \mathbf{m}) \rangle \right) \right) \quad (2.127)$$

Lorsque les états observés et calculés ont la même polarisation alors on retrouve la définition d'une différence de phases calculée à partir de la projection du mouvement particulière (normalisé) sur le vecteur de polarisation. Par contre, lorsque les états de polarisation sont totalement dé-corrélés ($\langle \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{model}(\omega, \mathbf{m})_{j,k})} | \mathbf{P}_{\phi(\mathbf{d}_{obs}(\omega)_{j,k})} \rangle = 0$), on obtient alors $\theta_{multi}(\omega, \mathbf{m}) = \frac{\pi}{2}$ invariablement quelque soit la phase cinématique entre les états calculés et mesurés. A partir de ce résidu, on peut définir une fonction coût $\mathcal{E}^{\theta_{multi}}(\omega, \mathbf{m})$ en prenant par exemple la somme des carrés des résidus. Le gradient de cette dernière fonction coût a été calculé et implémenté dans le code que j'utilisais, il s'est avéré que les résultats obtenus sont très similaires à ceux calculés à l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}^{normedvect}(\omega, \mathbf{m})$. Ce résultat est prévisible dans la mesure où ces deux fonctions coûts (eq. 2.127 et eq. 2.125) dépendent toutes deux du même terme : $\Re \left(\langle \mathbf{u}_{obs}^{(normed)}(\omega)_{j,k} | \mathbf{u}_{model}^{(normed)}(\omega, \mathbf{m}) \rangle \right)$.

2.12 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai formulé et étudié une nouvelle méthode pour inverser la polarisation apparente dans des configuration générales. L'objectif premier de cette reformulation était d'obtenir une

7. Il s'agit d'ailleurs de la variable que l'on retrouve dans la fonction coût basée sur la distance de Poincaré.

fonction coût ayant de bonnes propriétés (comme par exemple ne devenant pas infinie pour certains états de polarisation et dépendant pas du choix d'orientation des capteurs multicomposantes).

Pour ce faire, je me suis inspiré d'un formalisme employé en électromagnétisme (optique, télédec- tion...) ou en mécanique quantique afin de définir une distance « intrinsèque » des états de polarisation des ondes sismiques. La principale différence entre l'utilisation de mesures sismiques et les méthodes utilisées en optique/électromagnétiques provient du fait que pour ces dernières, les matrices de cohérence sont généralement sommées pour différents états de polarisation (ce qui aboutit généralement à des matrices non singulières) tandis que dans le cas présent on déduit les matrices de cohérence à partir d'une unique mesure (ou d'une moyenne de mesures correspondant au même état de polarisa- tion).

Le formalisme employé fait apparaître de manière naturelle une distance entre états de polarisation ayant les propriétés recherchées. Je me suis attaché à montrer la relation entre la nouvelle fonction coût proposée et les fonctions coûts employées pour inverser la polarisation dans la communauté géophysique. J'ai ensuite obtenu l'expression du gradient de cette nouvelle fonction coût et que j'ai implémentée dans le code FWT2D-PSV.

D'autre part, j'ai étudié le comportement des observables de polarisation et de la nouvelle fonction coût proposée sur des cas canoniques, ainsi que les noyaux de sensibilité des observables de polarisation. Finalement, j'ai comparé sur un cas simple, les résultats d'inversion pour une fonction coût multicomposantes conventionnelle avec ceux obtenus avec les nouvelles fonctions objectifs.

Avant une éventuelle application sur des données réelles, il me semble nécessaire étudier l'effet du bruit de mesure sur l'inversion de la polarisation. Autant l'effet d'une erreur d'orientation des capteurs est clair puisque cela crée directement un biais dans l'orientation de l'angle de l'ellipse de polarisation (tilt), autant l'effet du bruit semble plus complexe.

Chapitre 3

Apports de l'inversion de la polarisation pour différents biais et application à l'inversion des ondes de surface

Sommaire

3.1	Introduction	106
3.2	Sensibilité aux erreurs d'ondelette, d'atténuation et de densité	106
3.2.1	Introduction et rappels sur la configuration expérimentale	106
3.2.2	Résultats d'inversion sans sources de biais	107
3.2.3	Erreur sur l'ondelette source	108
3.2.4	Erreur sur l'ondelette source et avec une sous-estimation de la densité	111
3.2.5	Erreurs sur l'ondelette source et sur les facteurs de qualité	113
3.2.5.a	Erreur sur l'ondelette source et sous-estimation du facteur de qualité	113
3.2.5.b	Erreur sur l'ondelette source et sur-estimation des facteurs de qualité	115
3.2.5.c	Synthèse des effets sur les erreurs sur les paramètres d'atténuation	115
3.2.6	Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sous-estimation des facteurs de qualité	117
3.2.7	Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sur-estimation des facteurs de qualité	117
3.3	Résultats d'inversion pour un fort contraste	120
3.4	Inversion des ondes de surface	122
3.4.1	Introduction	122
3.4.2	Analyse des données	122
3.4.2.a	Domaine temps-espace	122
3.4.2.b	Dispersion et polarisation apparentes	123
3.4.2.c	Milieu avec damier	126
3.4.3	Choix et stratégies d'inversion	129
3.4.3.a	Choix des fréquences et l'acquisition	129
3.4.3.b	Choix du modèle initial et régularisation	130
3.4.4	Résultats d'inversion	132
3.4.4.a	Résultats d'inversion sans erreur sur l'atténuation	132

3.4.4.b	Résultats d'inversion avec sous-estimation de l'atténuation . . .	134
3.4.4.c	Résultats d'inversion avec sur-estimation de l'atténuation	136
3.5	Conclusion du chapitre	138

3.1 Introduction

La formulation théorique des fonctions coûts pour la prise en compte de données multicomposantes a été abordée dans le chapitre précédent et plusieurs éléments de compréhension ont été dégagés pour l'interprétation des résidus des observables de polarisation. L'objectif de ce chapitre est de faire ressortir certains bénéfices et limites potentiels de l'inversion de la polarisation à l'aide d'une série de tests numériques.

La première partie du chapitre aborde l'étude de la robustesse des fonctions coûts multicomposantes vis à vis de différentes sources d'erreurs à partir de configurations identiques à celles utilisées à la section 2.9. Une seconde partie compare les différentes approches pour l'inversion d'un milieu fortement contrasté et la troisième partie aborde l'inversion d'ondes de surface pour un milieu de proche surface comportant une variation latérale.

L'ensemble de l'étude a été menée pour plusieurs formulations de fonctions coûts mais afin de synthétiser la discussion, nous ne retiendrons que trois formulations de fonctions coûts :

1. la fonction coût multicomposante conventionnelle appelée $\mathcal{E}_{conv, multi}$, et définie selon l'équation 2.2 ;
2. la fonction coût multicomposante normalisée par rapport à l'amplitude du déplacement particulaire globale appelée $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et définie selon l'équation 2.13 ;
3. la fonction coût basée sur l'inversion de la polarisation à partir de la distance de Poincaré appelée \mathcal{E}_P et définie selon l'équation 2.47 ;

Quelques soient les tests présentés dans le chapitre certains paramètres sont gardés constants afin de permettre une comparaison des résultats d'inversion.

Tout d'abord les paramètres V_p et V_s sont inversés de manière simultanée, à l'aide de l'algorithme l-BFGS avec stockage des 6 précédents gradients. Une constante ayant pour valeur 10% de la valeur maximale du hessien estimée est ajoutée pour stabiliser l'inversion et le nombre maximal d'itérations par fréquence est de 20 itérations.

3.2 Sensibilité aux erreurs d'ondelette, d'atténuation et de densité

3.2.1 Introduction et rappels sur la configuration expérimentale

Dans cette section, les paramètres V_p et V_s sont inversés en ajoutant diverses sources d'erreurs concernant les paramètres de densité, d'atténuation ou les effets couplage sources/récepteurs. Nous appellerons ces sources d'erreurs : les « perturbations parasites » .

Le milieu étudié est identique à celui présenté dans la partie 2.9 . Il s'agit d'un milieu élastique de dimension 140m par 140m avec des conditions absorbantes de type PML ajoutées de chaque côté du domaine pour émuler les conditions de rayonnement à l'infini. L'acquisition permet une illumination complète à l'aide 48 sources explosives et 144 géophones multicomposantes entourant l'ensemble du dispositif.

L'objectif de l'imagerie est de reconstruire une perturbation des paramètres V_p et V_s en forme de croix placée au centre du dispositif et ayant des arêtes de 5m (figures 2.28). Lors de l'inversion

les paramètres V_p et V_s sont inversés simultanément. La gamme de fréquences a été choisie en rapport avec les fréquences et les dimensions rencontrées dans un contexte d'imagerie géotechnique. On considère 7 fréquences réparties entre 18Hz et 97Hz (18 Hz, 26 Hz, 30 Hz, 44 Hz, 58 Hz, 75 Hz, 97 Hz).

Dans le cas de l'inversion avec des perturbations en formes de croix, les gradients (paramètres V_p et V_s) sont filtrés à chaque itération par un filtre gaussien ayant pour valeur de corrélation le quart de la longueur d'onde locale des ondes de compression.

Comme la prise en compte du bruit dans le problème inverse de la polarisation est particulièrement complexe et à l'heure actuelle pas assez mature, uniquement dans le but d'éviter de considérer des problèmes inverses instables, nous ajoutons aux données simulées un bruit gaussien isotrope de faible énergie afin d'obtenir statistiquement pour chaque donnée un rapport sur bruit de 40 dB.

Le choix du dispositif et de la gamme de fréquences permet de réaliser de l'imagerie dans des conditions très favorables par rapport aux conditions que l'on pourrait rencontrer en pratique. Ce choix a été motivé par la « philosophie » de ces tests qui consiste dans un premier temps à se rapprocher des conditions optimales (tout en évitant de se retrouver dans une configuration de crime inverse parfait) afin de pouvoir dans un premier temps cerner les limites « propres » de ces méthodes sans avoir par exemple à inclure les éventuels effets d'une acquisition incomplète ou d'un modèle de bruit particulier.

3.2.2 Résultats d'inversion sans sources de biais

Les résultats d'inversion pour des configurations sans sources d'erreurs (autres que le bruit additif déjà évoqué) ont été présentés dans le chapitre précédent (figures 2.29, 2.30 and 2.31).

J'ai aussi réalisé des inversions avec les fonctions coûts basées sur les rapports spectraux de polarisation (rapport H/V complexes définies par l'équation 2.51) ainsi que la formulation présentée par Bodin *et al.* (2014) définie à l'équation 2.53.

Pour ce qui est des rapports spectraux de polarisation, l'inversion ne converge pas du tout (même sans aucune source biais) et même pour des inversions mono-paramètres V_p ou V_s (fig . 3.1). Par conséquent, nous avons jugé inutile de poursuivre les investigations sur cette fonction coût. L'échec de l'inversion pourrait s'expliquer par la dépendance de cette fonction coût au choix d'orientation des capteurs. Selon le choix d'orientation, cette fonction coût peut être très petite ou alors infiniment grande. Effectivement, dans le cas où l'une des composantes du champ observé ou calculée est petite devant l'autre alors l'un des rapports dans l'équation 2.51 peut devenir négligeable ou alors infiniment grand. Comme on peut passer d'un cas à l'autre (pour ainsi dire d'un extrême à l'autre) par une simple rotation de 90° des capteurs (avec une inversion de signe), donc cette fonction coût est considérée comme étant physiquement « non intrinsèque » .

En ce qui concerne la fonction coût proposée par Bodin *et al.* (2014), contrairement aux fonctions coûts basées sur les rapports spectraux de polarisation cette fonction présente une propriété d'invariance par choix de l'orientation des capteurs. Cependant, il a été expliqué que celle-ci tient aussi compte de l'amplitude des champs calculés et observés (au paragraphe 2.4). Des tests numériques similaires à ceux qui ont été réalisés dans ce chapitre pour tester les sensibilités des fonctions coûts aux biais sur l'atténuation et la densité ont montré une faible robustesse de cette fonction coût par rapport aux fonctions coûts \mathcal{E}_P et $\mathcal{E}^{normed\ vect}$. Cette fonction coût est alors particulièrement sensible aux mauvais *a priori* sur l'atténuation.

Une solution consisterait à normaliser la fonction coût par les amplitudes calculées et observées. Cependant, cette expression « avec normalisation » complique considérablement l'expression du gradient ce qui rend cette fonction coût beaucoup moins attractive par rapport à la fonction coût \mathcal{E}_P .

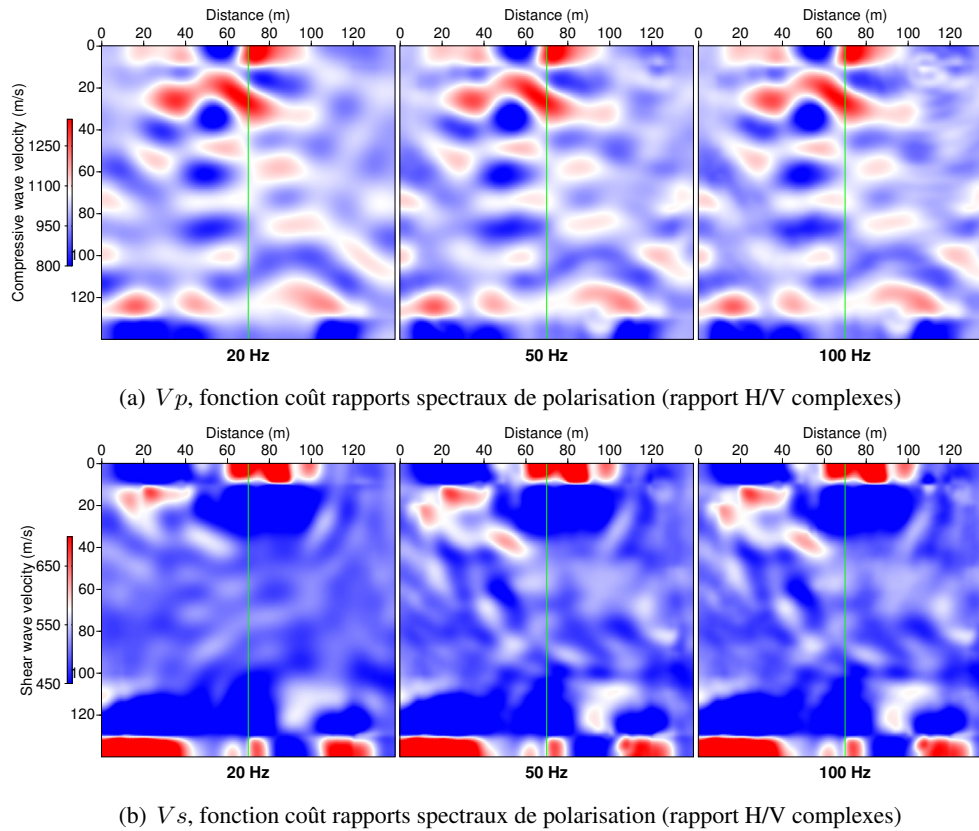


FIGURE 3.1 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s à l'aide d'une fonction coût basée sur les rapports spectraux de polarisation

3.2.3 Erreur sur l'ondelette source

Il a été démontré (paragraphe 2.5.2) que la fonction coût basée sur la polarisation est théoriquement insensible aux erreurs d'ondelette ainsi qu'à la réponse instrumentale du capteur si cette dernière est identique pour les différentes composantes mesurées. En introduction de la démonstration, il a été rapidement évoqué un état de l'art de l'inversion de l'ondelette source dans le cadre de la FWI. Nous ne reviendrons pas sur cet état de l'art, on rappellera seulement que l'inversion de l'ondelette est nécessaire si celle-ci est inconnue ou si elle a été distordue par des effets de couplage de source ou de réponse instrumentale. L'inversion séquentielle de l'ondelette et des paramètres du milieu est possible à condition que le modèle utilisé pour calculer les données soit suffisamment proche du modèle initial. Pour cette étude, nous allons comparer les fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv, multi}$ et $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ avec inversion ondelette source pour chaque tir avec les résultats de l'inversion de la fonction coût \mathcal{E}_P .

L'ondelette effective et l'ondelette supposée sont représentées à la figure 3.2. Le choix de la distortion de l'ondelette a été fait de sorte à simuler un système résonnant autour de la fréquence principale (50 Hz) et avec un retard pouvant résulter d'un délai de déclenchement de la source (ou du trigger si on utilise une source de type masse). Suivant les enchaînements entre les itérations de l'inversion de l'ondelette (déconvolution sans régularisation) et l'inversion des paramètres du milieu, on remarquera que ce qui importe pour la reconstruction de l'ondelette source n'est pas tant l'ondelette initialement estimée (donc ici la source de type Ricker) que la compatibilité du modèle initial (au sens de la FWI).

Les résultats d'inversion sont présentés sur les figures 3.3. Les résultats d'inversion obtenus à

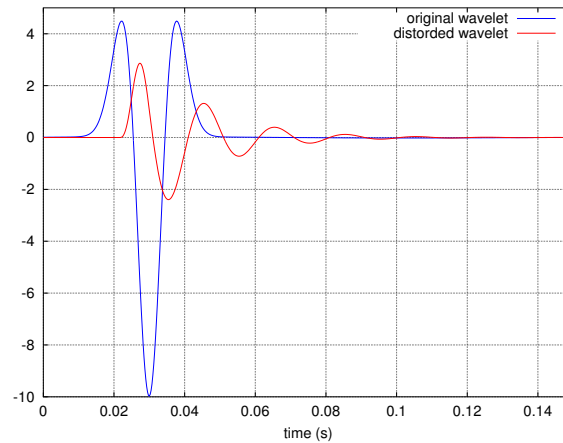


FIGURE 3.2 – Illustration de l'ondelette donnée à l'inversion (courbe bleue) et de l'ondelette source effective (courbe rouge)

l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ (colonne de gauche fig. 3.3) sont très similaires aux résultats sans inversion de la source pour le paramètre Vp tandis que l'on remarquera sur le log de vitesse une légère différence pour le paramètre Vs au niveau de la reconstruction de la perturbation.

Pour ce qui est de la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (colonne centrale fig. 3.3) aussi bien pour le paramètre Vp que pour le paramètre Vs , des artefacts apparaissent au niveau des positions des sources et récepteurs lors de l'inversion de la source. Pour ce qui est de la reconstruction de la perturbation, on retrouvera de manière tout à fait analogue que pour la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ une reconstruction légèrement plus lisse au niveau de la perturbation par rapport au cas où l'ondelette est connue (et non inversée).

Les résultats d'inversion pour la fonction coût \mathcal{E}^P sont représentés par les figures situées dans les colonnes de droite. On ne remarquera pas de différence visible par rapport au cas où l'ondelette est connue (et non inversée).

Pour conclure par rapport à ces tests sur l'effet de l'inversion de l'ondelette source, on pourra conclure que les résultats pour les fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv,multi}$ et $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ sont très légèrement dégradés tandis que pour la fonction coût \mathcal{E}^P aucune différence visible n'est discernable, en accord avec les arguments théoriques de non sensibilité de la polarisation à l'ondelette source.

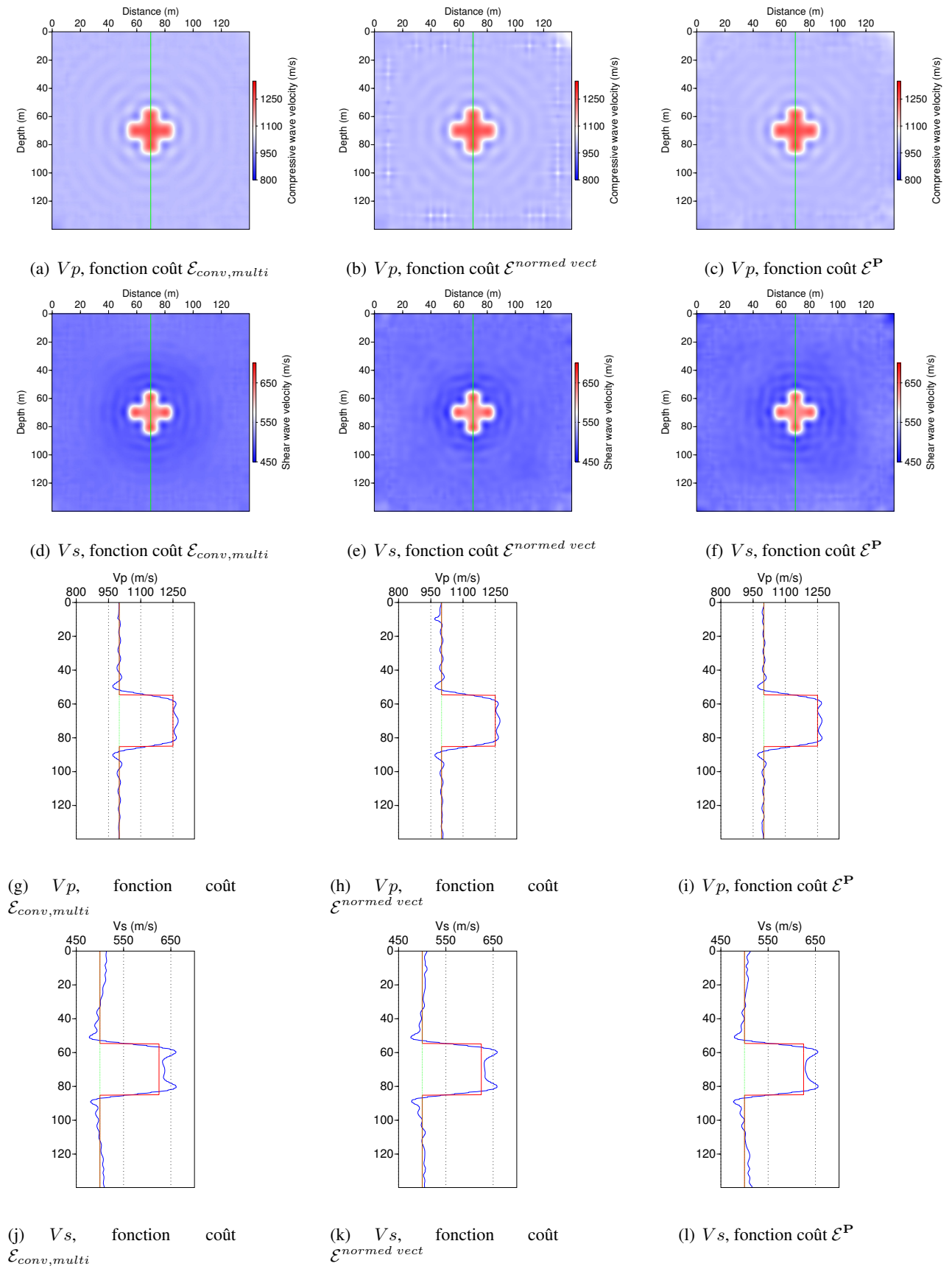


FIGURE 3.3 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.2.4 Erreur sur l'ondelette source et avec une sous-estimation de la densité

Les résultats d'inversion combinant une erreur sur la densité avec une erreur sur l'ondelette source (identique à la section 3.2.3) sont représentés par les figures 3.4.

Les données simulées ont été générées avec une sur-estimation de la densité de 25% (1750 kg/m^3) pour la croix tandis que dans l'inversion la densité est fixée à 1500 kg/m^3 pour l'ensemble du milieu.

Les résultats d'inversion obtenus à l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ (colonne de gauche fig. 3.4) sont contaminés par un effet d'oscillations (« ringing effect ») autant pour le paramètre V_p que pour le paramètre V_s . De plus, on remarquera que le paramètre V_s est légèrement sur-estimé pour la perturbation.

Pour ce qui est de la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (colonne centrale fig. 3.4), comme pour la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ un effet d'oscillations parasites est aussi présent autour de la croix. D'autre part, l'amplitude des artefacts situés au niveau des sources/récepteurs est plus grande par rapport au cas où seule l'ondelette source est perturbée. Là encore, une légère surestimation de V_s est visible pour l'anomalie.

En ce qui concerne les reconstructions obtenues avec la fonction coût \mathcal{E}^P (colonne de droite fig. 3.4), celles-ci semblent plus impactées par l'erreur sur la densité par rapport aux deux autres fonctions coûts. Autour et au niveau de la perturbation, on remarquera que les oscillations parasites sont bien plus importantes que dans le cas où seule l'ondelette source est perturbée.

Pour conclure sur ces tests concernant l'effet de l'inversion de l'ondelette source combinée à une erreur (positive) de 25% sur la densité de l'anomalie, on notera que toutes les inversions subissent des oscillations parasites beaucoup plus prononcées que les cas précédents où seule l'ondelette était perturbée.

Étant donné qu'une perturbation de densité change l'impédance mais pas les vitesses, on s'attend donc à ce que la fonction coût tenant compte des amplitudes $\mathcal{E}_{conv,multi}$ soit particulièrement impactée. Ceci est vérifié par les tests numériques mais on remarquera aussi que les inversions obtenues à l'aide de l'inversion de la polarisation \mathcal{E}^P sont tout aussi affectées.

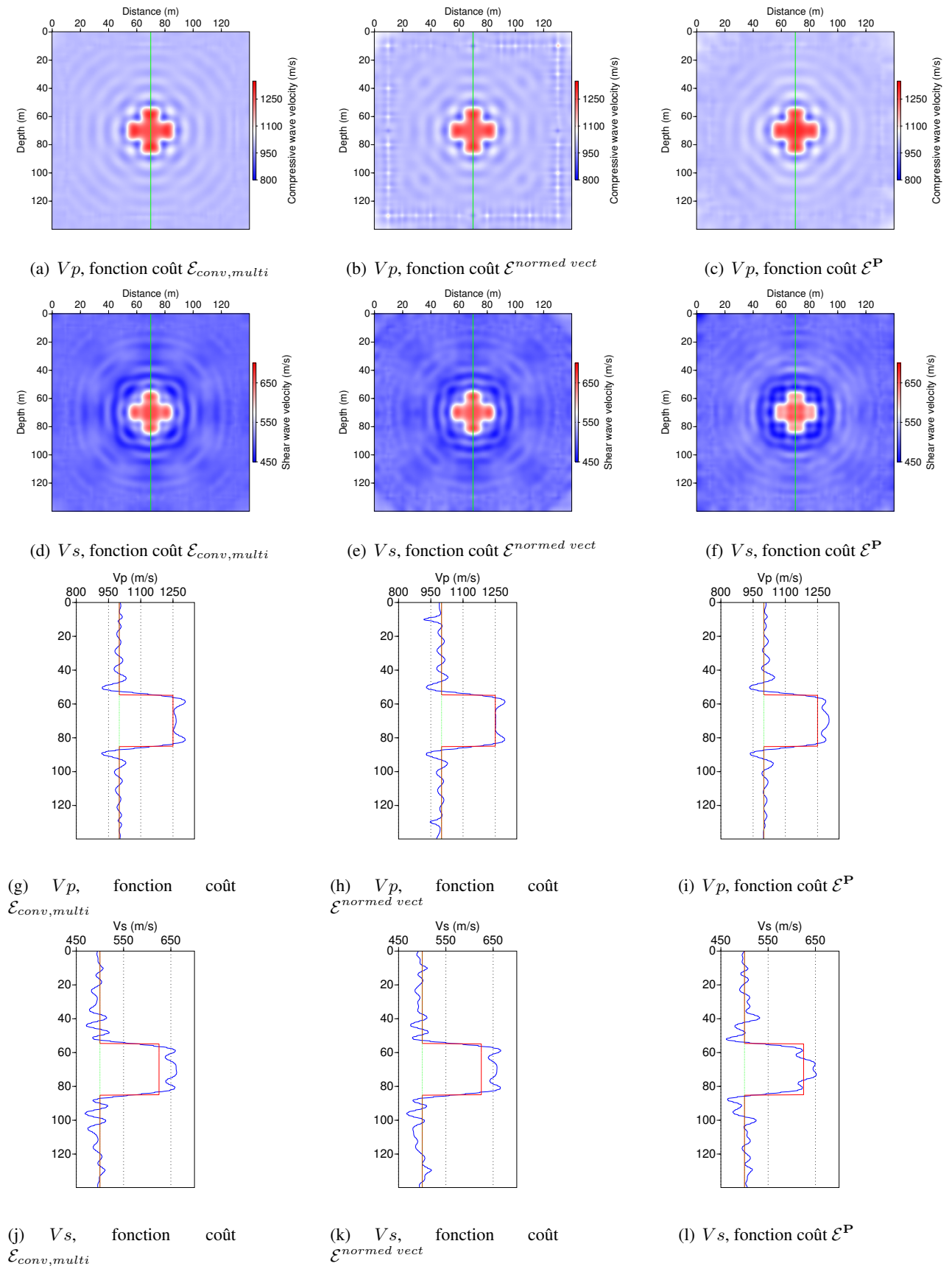


FIGURE 3.4 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue et une erreur de densité sur la croix de 25%, pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.2.5 Erreurs sur l'ondelette source et sur les facteurs de qualité

On considère que le facteur de qualité est homogène à l'ensemble du milieu (identique pour la perturbation en croix et ainsi que son « encaissant »). Des tests numériques ont aussi été réalisés en perturbant uniquement le facteur de qualité pour la croix mais comme l'effet est bien plus faible que pour une erreur uniforme, nous nous sommes focalisé sur le cas d'erreurs de facteur de qualité uniformes sur l'ensemble du milieu. Pour l'ensemble des tests, la valeur de l'atténuation sera fixée pour l'inversion à $Q_p = Q_s = 100$ dans l'ensemble du milieu tandis que les données inversées seront générées avec des facteurs de qualités $Q_p = Q_s = 1000$ ou $Q_p = Q_s = 10$.

Avant d'analyser l'effet des mauvais *a priori* de facteurs de qualité, il peut être intéressant d'étudier les résultats d'inversion des facteurs de qualité utilisés pour générer les données.

Ces résultats sont discutés de manière plus détail dans l'annexe (A).

Pour le cas du faible facteur de qualité ($Q_p = Q_s = 10$) même si l'atténuation est connue précisément, elle peut quand même avoir un effet néfaste sur les résultats d'inversion par rapport au cas de référence ($Q_p = Q_s = 100$). Les résultats d'inversion pour $Q_p = Q_s = 10$ connus sont présentés dans l'annexe A avec les figures C.1. Pour un facteur de qualité très élevé ($Q_p = Q_s = 1000$) connu, les résultats d'inversion (figures C.2) sont très similaires au cas de référence $Q_p = Q_s = 100$.

3.2.5.a Erreur sur l'ondelette source et sous-estimation du facteur de qualité

Les figures 3.5 présentent l'effet d'une sous-estimation de facteur de qualité, c'est à dire que l'on fixe les facteurs de qualité Q_p et Q_s à 100 pour l'inversion alors que les « vraies » valeurs sont $Q_p = Q_s = 1000$. Comme mentionné dans le paragraphe précédent, lorsque les facteurs de qualité sont connus, on ne retrouve pas de différence significative entre les résultats d'inversion obtenus pour $Q_p = Q_s = 1000$ ou $Q_p = Q_s = 100$. Par conséquent, dans ce cas les erreurs sur les résultats d'inversion pourront être attribués uniquement aux mauvais *a priori* sur le facteur de qualité.

Les résultats correspondant à la fonction coût $\mathcal{E}_{conv, multi}$ sont disposés dans la colonne de gauche des figures 3.5. Mis à part au niveau des positions des sources et des récepteurs, les résultats de reconstruction du paramètre V_p (fig. 3.5a,g) semblent relativement peu affectés par l'erreur sur l'atténuation. Par contre, la reconstruction du paramètre V_s est bien plus dégradée (fig. 3.5d,j) par des oscillations d'amplitude d'environ un quart de la valeur de l'anomalie et centrées autour de celle-ci.

Les résultats correspondant à la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ sont disposés dans la colonne au centre des figures 3.5. Pour le paramètre V_p (fig. 3.5b,h) par rapport à la reconstruction avec le « bon » coefficient de qualité, on remarquera seulement une très légère amplification des artefacts au niveau des sources. Le paramètre V_s (fig. 3.5e,k) montre aussi une légère augmentation des oscillations parasites et une reconstruction de la valeur de la perturbation légèrement sur-estimée.

Les résultats représentant les inversions pour la fonction coût \mathcal{E}^P sont représentés par les figures disposées à l'extrémité droite des figures 3.5. On ne remarquera pas de différence notable par rapport au cas sans mauvais *a priori* sur l'atténuation.

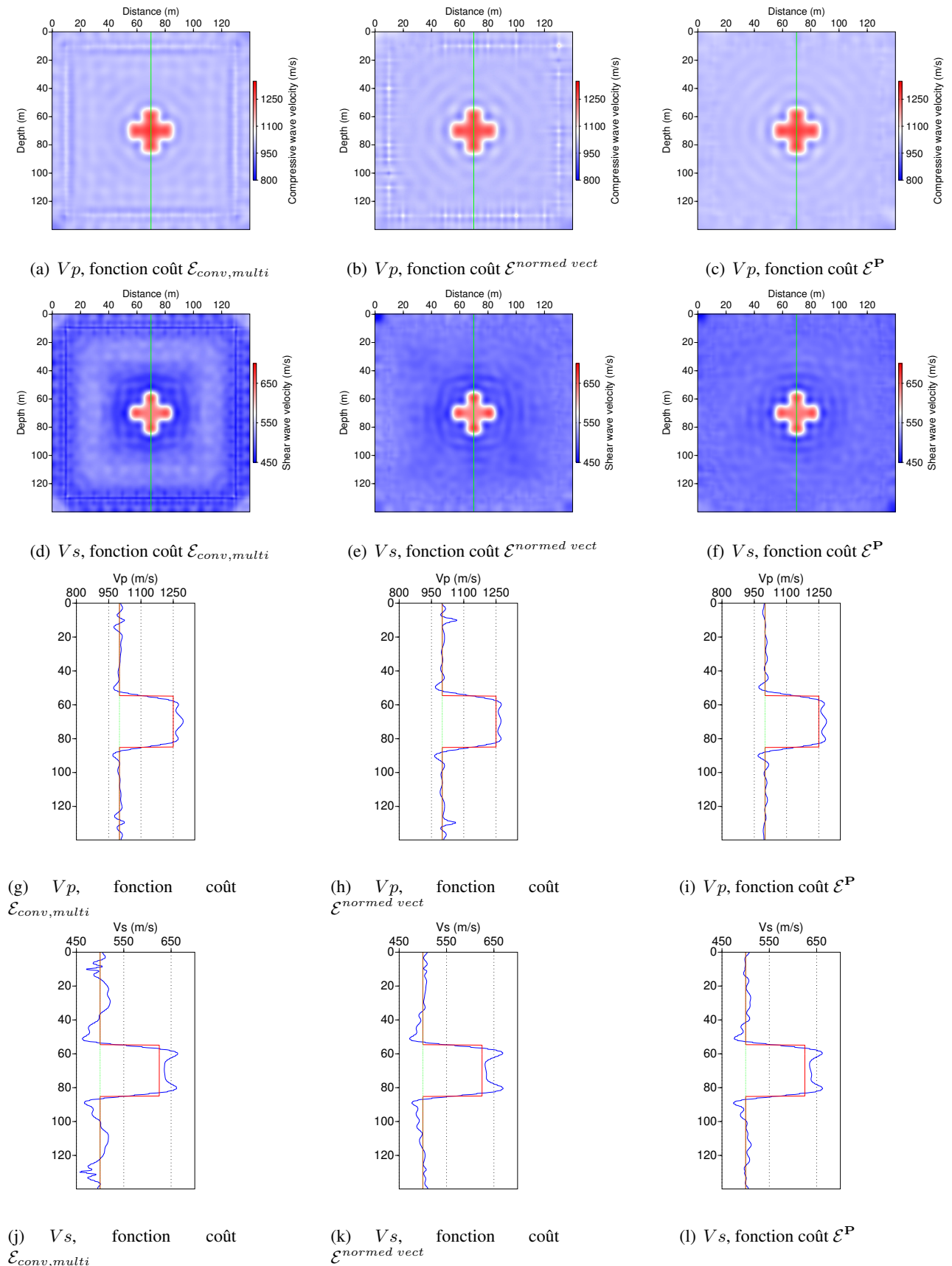


FIGURE 3.5 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue et une erreur sur le facteur de qualité ($Q_p = Q_s = 1000$ fixés pour l'inversion, données générées pour $Q_p = Q_s = 100$), pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.2.5.b Erreur sur l'ondelette source et sur-estimation des facteurs de qualité

Les figures 3.6 représentent les résultats d'inversion lorsque que le facteur de qualité est sur-estimé, c'est à dire que l'on fixe les facteurs de qualité pour l'inversion à $Q_p = Q_s = 100$ alors que les « vraies » valeurs sont $Q_p = Q_s = 10$.

Les résultats correspondant à la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ sont disposés dans la colonne de gauche des figures 3.6. Pour cette fonction coût on remarquera que de très larges artefacts, d'une amplitude égale voire supérieure à l'anomalie détériorent l'inversion des paramètres V_p et V_s . Les valeurs de V_p et V_s sont aussi largement sur-estimées.

Les résultats correspondant à la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ sont disposés dans la colonne au centre des figures 3.6. Pour le paramètre V_p (fig. 3.5b,h) par rapport à la reconstruction avec le « bon » coefficient de qualité, on remarquera une très nette perte de résolution. Cette perte de résolution semble être plus importante que pour les inversions obtenues avec la vraie valeur de l'atténuation (c'est à dire $Q_p = Q_s = 10$, figures en annexe A). Étonnamment, les résultats d'inversion de V_p ne montrent pas d'artefacts au niveau des sources/récepteurs (contrairement au cas $Q_p = Q_s = 1000$). On peut aussi remarquer une perte nette de résolution du paramètre V_s (fig. 3.6e,k). Si l'on compare ces figures avec les inversions obtenues en ayant la vraie valeur des paramètres d'atténuation (fig. C.1), on ne retrouvera pas la même « sorte » d'artefacts : dans les figures C.1b,h, l'inversion du paramètre V_s présente d'important artefacts autour de l'anomalie que l'on ne retrouve pas dans les figures 3.6e,k. Par contre, la valeur de l'anomalie en V_s est bien moins bien reconstruite que dans le cas où le facteur de qualité est connu.

Les résultats représentant les inversions pour la fonction coût \mathcal{E}^P sont représentés par les figures disposées à l'extrémité droite des figures 3.6. De manière assez similaire à la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$, autant pour les paramètres V_p et V_s les résultats d'inversion présentent très peu d'oscillations mais une perte de résolution notable même si l'on compare aux résultats d'inversion où les facteurs de qualité sont faibles mais connus ($Q_p = Q_s = 10$, figures dans la colonne de droite de la figure en annexe fig. 3.6). A l'instar de la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$, les valeurs des paramètres V_p et V_s sont (légèrement) sous-estimées.

3.2.5.c Synthèse des effets sur les erreurs sur les paramètres d'atténuation

Si l'on synthétise les remarques précédentes, on remarquera qu'à la différence du cas où l'atténuation est connue (avec précision), la norme la moins robuste est la norme $\mathcal{E}_{conv,multi}$. Une explication plausible concerne la prise en compte des amplitudes « absolues » qui sont ignorées avec les normes $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et \mathcal{E}^P . Pour les normes $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et \mathcal{E}^P , une sous-estimation d'un facteur de qualité élevé ($Q_p = Q_s = 1000$) n'induit que peu d'erreurs dans les reconstructions. Par contre, une sur-estimation d'un facteur de qualité faible ($Q_p = Q_s = 10$) a un effet « catastrophique » avec la fonction coûts $\mathcal{E}_{conv,multi}$ et se traduit par une perte de résolution importante associée à une sous-estimation des vitesses. Cette sous-estimation peut être relativement importante (environ 20% d'erreur) pour le paramètre V_s obtenu à l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$. On remarquera que pour l'atténuation, les fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et \mathcal{E}^P fournissent pour les cas étudiés des résultats présentant des caractéristiques qualitatives similaires.

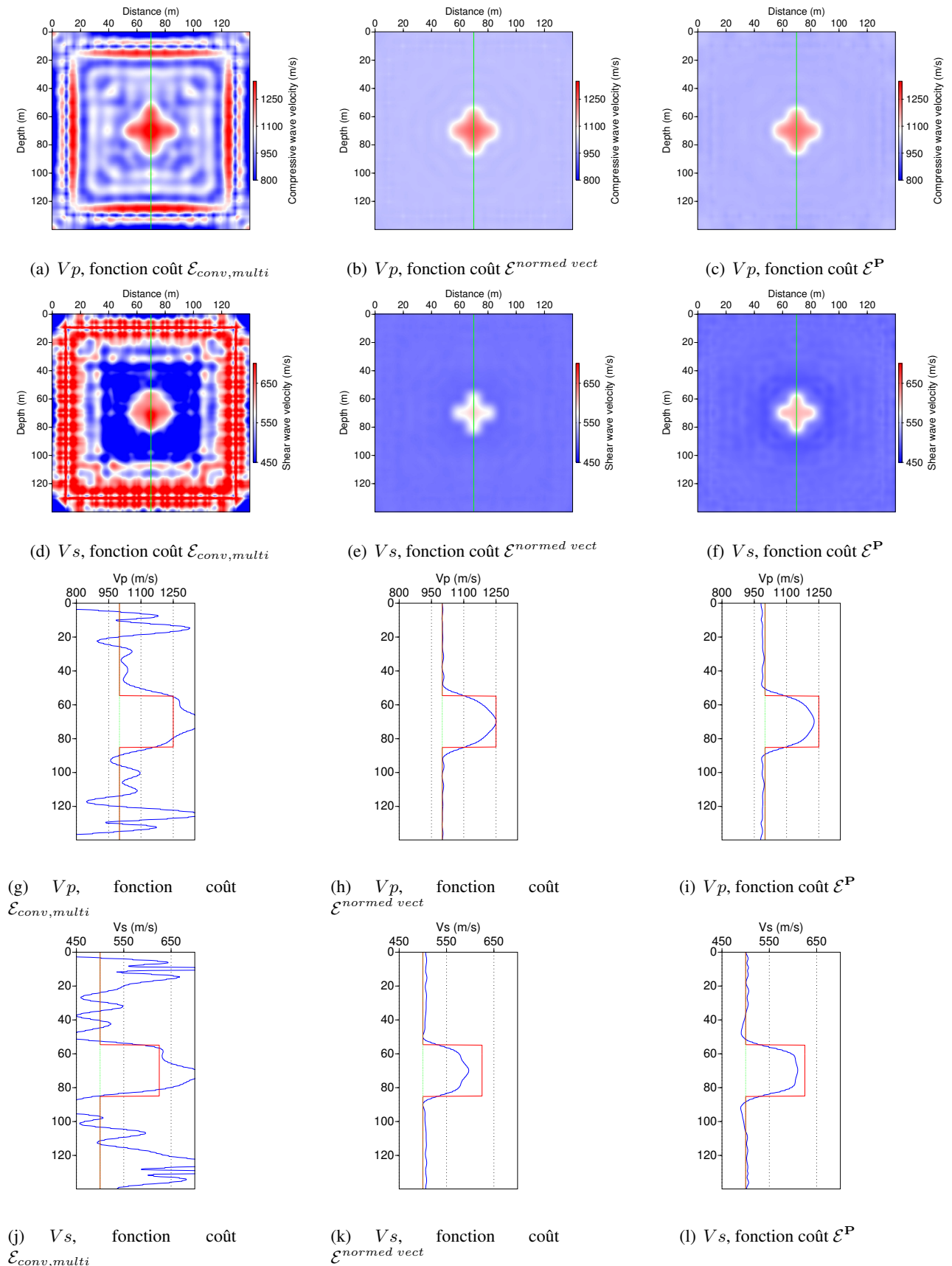


FIGURE 3.6 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue et une sur estimation du facteur de qualité (données générées avec $Q_p = Q_s = 10$ et pour l'inversion $Q_p = Q_s = 100$), pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.2.6 Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sous-estimation des facteurs de qualité

On combine une sous-estimation du facteur de qualité similaire à la sous-section 3.2.5.a (données générées avec $Q_p = Q_s = 1000$ et dans l'inversion $Q_p = Q_s = 100$) avec une erreur de densité similaire (25 % sur la perturbation en croix) à celle présentée à la sous-section 3.2.4.

D'une manière globale, que ce soit pour les fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ ou \mathcal{E}^P , si l'on compare les résultats des inversions avec erreurs cumulées sur la densité et les facteurs de qualité (fig. 3.7), on trouvera nettement plus de similarités avec les résultats issus de l'erreur de densité (fig. 3.4) que ceux avec la sous-estimation des facteurs de qualité (fig. 3.5). Cette remarque est d'autant plus vraie lorsqu'il s'agit des inversions issues des fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv,multi}$, $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ ou \mathcal{E}^P qui sont peu sensibles à l'erreur de sous-estimation des facteurs de qualité (dans le cas où celui-ci est élevé).

Pour synthétiser, lorsque le facteur de qualité est élevé et sous estimé, l'erreur sur la densité a une empreinte dominante sur les résultats d'inversion.

3.2.7 Erreur sur l'ondelette source, sous-estimation de la densité et sur-estimation des facteurs de qualité

A l'erreur de sur-estimation du facteur de qualité présentée à la section 3.2.5.b, on cumule l'erreur sur la densité présentée à la sous-section 3.2.4.

Très clairement, si l'on compare les résultats d'inversion avec la sur-estimation des facteurs de qualité et l'erreur sur la densité (fig. 3.8), pour l'ensemble des fonctions coûts étudiées on trouvera nettement plus de similarités avec les résultats obtenus avec un facteur de qualité sur-estimé (fig. 3.6) qu'avec les résultats obtenus avec une sous-estimation de la densité (fig. 3.4).

La seule exception notable concerne l'inversion du paramètre V_s avec la fonction coût \mathcal{E}^P , présentée figures 3.8f,l. Pour les figures 3.6f,l on avait remarqué peu d'oscillations (ringing effect) alors que sur les figures 3.8f,l on remarque d'importantes oscillations avec des amplitudes de l'ordre de 20% de la valeur de l'anomalie. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que la fonction coût \mathcal{E}^P semble être moins robuste aux erreurs sur la densité (fig. 3.2.4f,k) que la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et par conséquent l'erreur sur la densité serait plus marquée pour cette fonction coût dans le cas où l'erreur sur la densité et l'atténuation sont combinées.

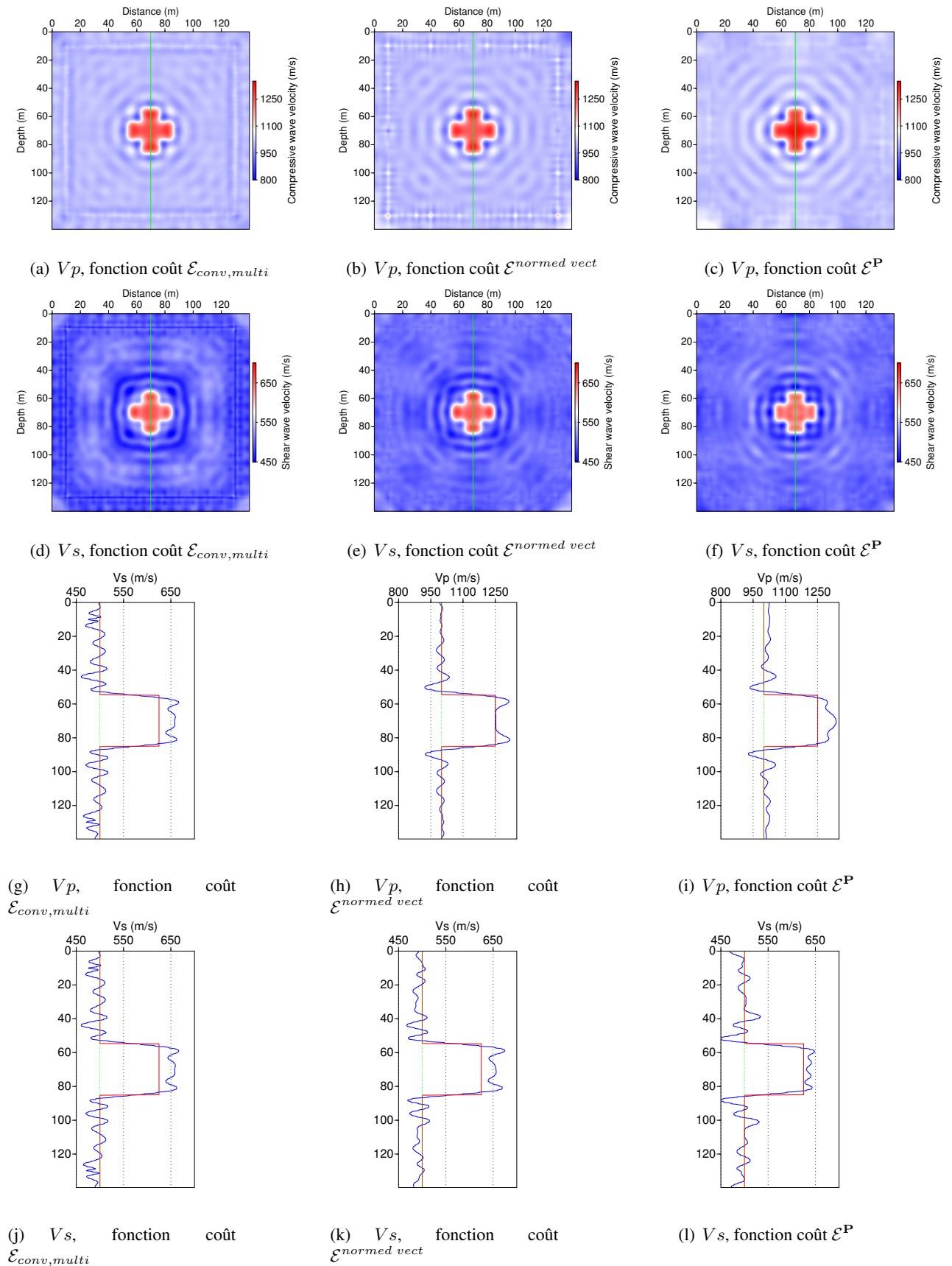


FIGURE 3.7 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue, une sous-estimation du facteur de qualité (données générées avec $Q_p = Q_s = 1000$ et pour l'inversion $Q_p = Q_s = 100$ fixés) et une sous-estimation de la densité de la perturbation (25%), pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

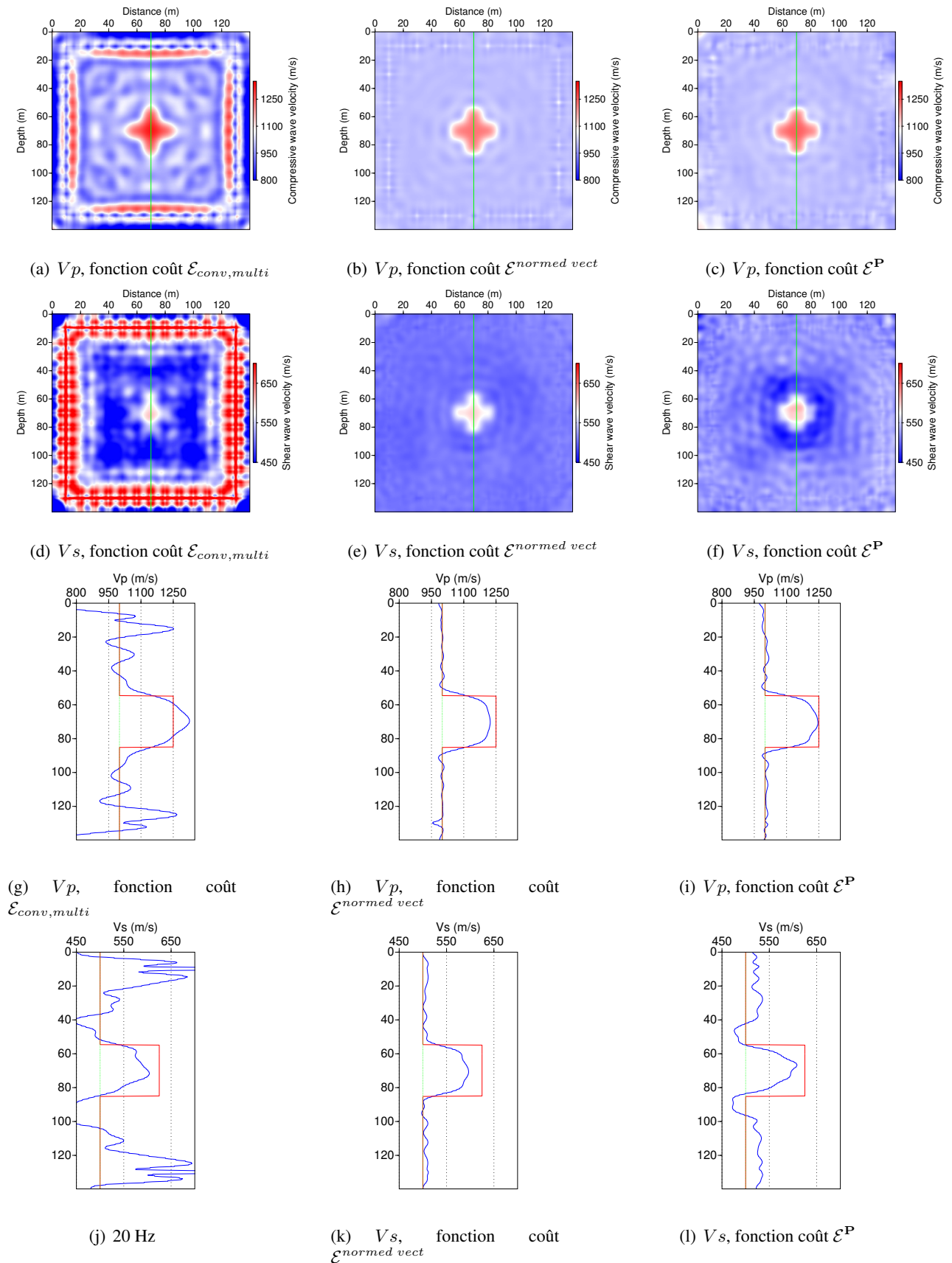


FIGURE 3.8 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue, une sur-estimation du facteur de qualité (données générées avec $Q_p = Q_s = 10$ et pour l'inversion $Q_p = Q_s = 100$ fixés) et une sous-estimation de la densité de la perturbation (25%), pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.3 Résultats d'inversion pour un fort contraste

Afin de comparer la convexité des trois fonctions coûts sélectionnées pour les tests, nous avons réalisé une étude sur un milieu fortement contrasté en essayant de déterminer la fréquence minimale nécessaire pour faire converger la fonction coût. Le milieu présenté a un milieu de fond (encaissant) avec les mêmes propriétés mécaniques que le milieu utilisé pour les tests précédents (croix) mais avec un contraste de 100 % en V_p et V_s pour la croix. Par conséquent pour la perturbation (croix) on a les vitesses : $V_p = 2000\text{m/s}$ et $V_s = 1000\text{m/s}$. Parmi les fréquences utilisées dans l'inversion, la fréquence maximale pour laquelle les inversions utilisant les fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et $\mathcal{E}_{conv,multi}$ convergent vers un minimum globale est 30 Hz tandis que l'inversion basée sur la fonction coût \mathcal{E}^P converge vers un minimum global jusque pour une fréquence de 44 Hz.

Les résultats des inversions pour une fréquence minimale de 44 Hz sont représentés par les figures 3.9.

Pour les fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv,multi}$ (résultats dans les colonnes de gauche), on remarquera que le paramètre V_p (fig. 3.9-a,g) semble être reconstruit de manière satisfaisante avec au plus quelques oscillations autour de la perturbation tandis que la reconstruction du paramètre V_s (fig. 3.9-d,j) indique clairement une convergence vers un minimum local.

Les résultats d'inversion pour la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (résultats dans les colonnes au centre) semblent montrer une reconstruction d'une perturbation V_p (fig. 3.9-b,h) dont les valeurs sont du même ordre que celles de la « vraie » perturbation en V_p mais la reconstruction de la perturbation en V_s (fig. 3.9-e,k) montre que l'optimisation n'a pas convergé vers un minimum global.

Les résultats d'inversions utilisant la fonction coût \mathcal{E}^P sont présentés dans les figures placées dans la colonne de droite (fig. 3.9). Les résultats d'inversion du paramètre V_p (fig. 3.9-c,i) montrent une bonne reconstruction de la perturbation. Le paramètre V_s (fig. 3.9-l,f) est bien reconstruit. La reconstruction de V_s présente des oscillations rapides de faibles amplitudes concentriques à la perturbation et une oscillation au centre de la perturbation.

Pour conclure sur ce test numérique, on remarquera que toutes les fonctions coûts reconstruisent de manière plus ou moins satisfaisante le paramètre V_p tandis que seule la fonction coût \mathcal{E}^P reconstruit bien le paramètre V_s . Il a déjà été remarqué lors de l'étude des résidus de polarisation (cas du cylindre élastique partie 2.6.2.c) que le champ multi-diffracté (coda) est essentiellement transversal. On peut donc supposer que l'inversion du paramètre V_s est plus non-linéaire que l'inversion du paramètre V_p .

Le résultat quant au domaine de convexité de la fonction coût \mathcal{E}^P par rapport aux fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et $\mathcal{E}_{conv,multi}$ est encourageant même si une étude plus poussée est nécessaire. Tout d'abord, ce résultat peut sembler en désaccord avec l'analyse des fonctions coûts (section 2.7) qui tendait à montrer que la fonction coût avait un domaine de convexité d'autant plus réduit quand le signal mesuré était composé de plusieurs événements avec des polarisations différentes. Il serait donc nécessaire d'étendre cette étude afin de premièrement mieux caractériser les domaines de convergence des fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et $\mathcal{E}_{conv,multi}$ et \mathcal{E}^P avec des milieux ayant diverses caractéristiques (milieux élastiques/acoustiques, lisses ou avec des variations rapides) et pour divers angles sources récepteurs. Lors de l'étude des fonctions coûts, il a été noté que la fonction coût \mathcal{E}^P pouvait avoir un domaine de convexité accru lorsque l'on considère une large gamme de fréquences inversées simultanément. Il serait intéressant de vérifier ce point à partir d'inversions numériques.

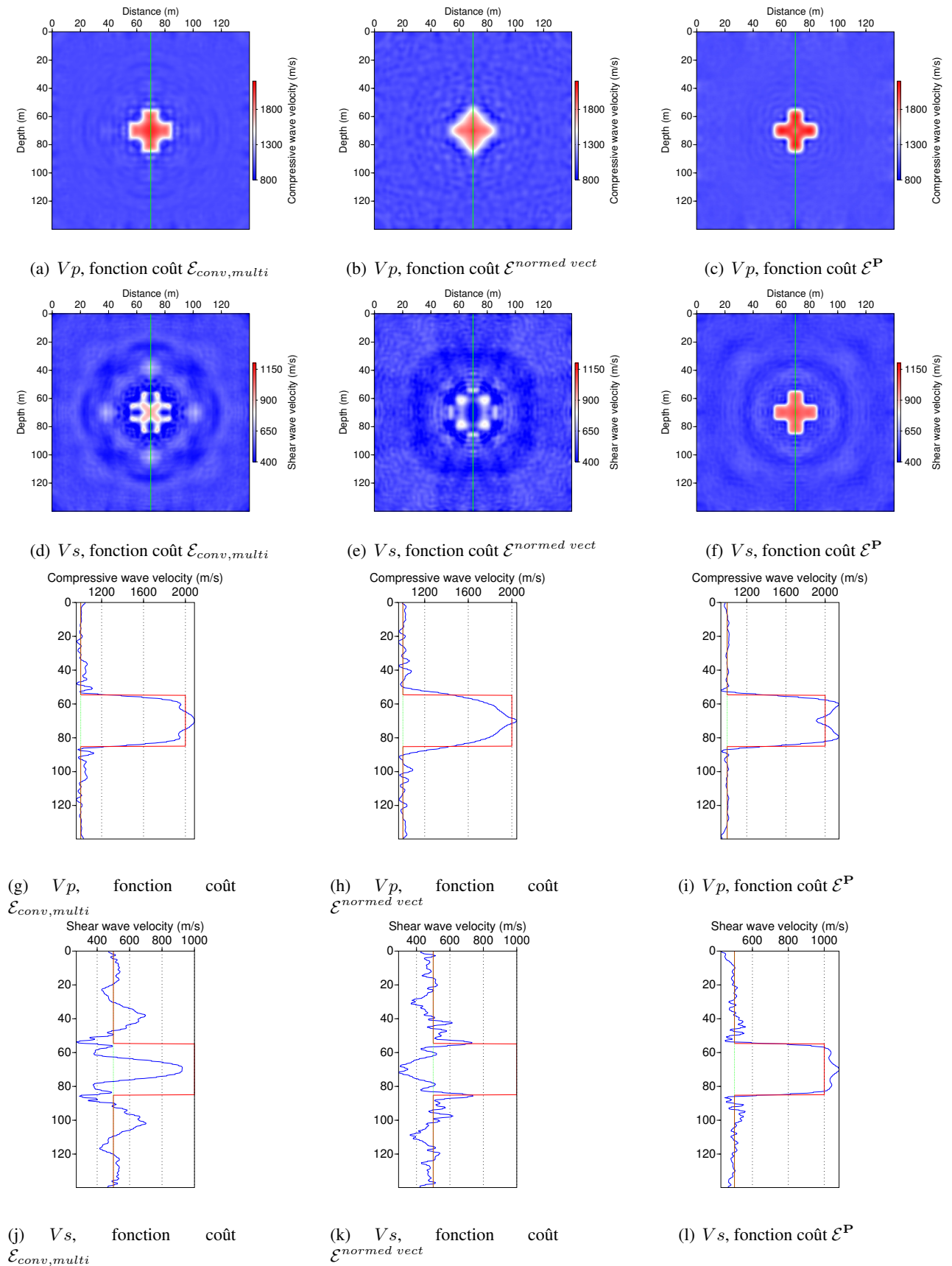


FIGURE 3.9 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une fréquence de 100 Hz et une perturbation en V_p et V_s de 100%. Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

3.4 Inversion des ondes de surface

3.4.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de comparer les performances des fonctions coûts sur un cas synthétique reproduisant une configuration de proche surface. Cette configuration a été choisie afin de correspondre à une maquette pour l'expérimentation à échelle réduite conçue durant ma thèse (présentée à la section 4).

La longueur totale du milieu considéré pour l'inversion est de 126m. Le milieu est composé de deux couches tabulaires par morceau avec une transition latérale sur 10m, passant d'une profondeur de 8m à 5m.

Le milieu de référence est représenté dans les figures 3.10.

Les vitesses du milieu pour la couche supérieure sont $V_p = 2300m/s$ et $V_s = 1170m/s$ tandis que pour la couche inférieure $V_p = 2300m/s$ et $V_s = 1050m/s$. Un damier avec des variations de $\pm 1\%$ sur les valeurs de V_s et $\pm 2\%$ sur les valeurs de V_p a été superposé afin d'évaluer la résolution et la couverture des reconstructions. Afin de simplifier l'analyse des inversions, nous supposons la densité uniforme avec pour valeur $\rho = 1700kg/m^3$ et connue pour l'ensemble du milieu. Les facteurs de qualité ont été fixés pour ces tests à $Q_p = Q_s = 50$.

Nous discuterons plus en détails l'acquisition et le choix des fréquences inversées, mais on peut déjà noter que nous utiliserons une source de type Ricker avec pour fréquence centrale 100 Hz.

Afin d'éviter que les variations générées par le damier ne soient noyées dans le bruit, je n'ai pas ajouté de bruit aux données calculées et utilisées pour l'inversion. Par contre, je n'ai pas utilisé le même maillage pour la génération des données et pour le problème inverse.

Si on applique un rapport d'échelle de 0.5 aux vitesses et aux fréquences, on retrouve une configuration analogue à ce que l'on pourrait rencontrer dans une situation de terrain.

3.4.2 Analyse des données

Afin de faciliter notre analyse, dans un premier temps nous analyserons les données pour le milieu sans le damier et pour un milieu sans atténuation, ce milieu est représenté à la figure 3.11.

3.4.2.a Domaine temps-espace

Les sismogrammes de la composante horizontale pour le milieu de référence sans damier (fig. 3.11) sont présentés aux figures 3.12c,d respectivement pour les positions de tirs $x=10m$ et $x=110m$. Les sismogrammes de la composante horizontale pour des milieu tabulaires avec des couches à 5m et 8m (correspondant respectivement à la partie gauche et à la partie droite du milieu (fig. 3.11) pour un milieu de longueur 126m sont présentés aux figures 3.12a,b . Suivant la même présentation, on retrouve les signaux mesurés sur la composante verticale dans les figures 3.13a-d. Afin de mettre en évidence les événements de petites amplitudes, un degré de saturation élevé a été appliqué à ces images (perc=90%).

Si l'on compare ces figures, on remarquera tout d'abord que la signature de la variation latérale est plus marquée pour les tirs situés « du côté » gauche de la variation latérale (fig. 3.12c pour la composante horizontale et fig. 3.13c) pour la composante verticale), c'est à dire lorsque l'onde de surface « remontant » l'interface latérale. Certains auteurs comme Malischewsky (1987) expliquent ce phénomène en employant un formalisme de modes locaux et de couplage de modes.

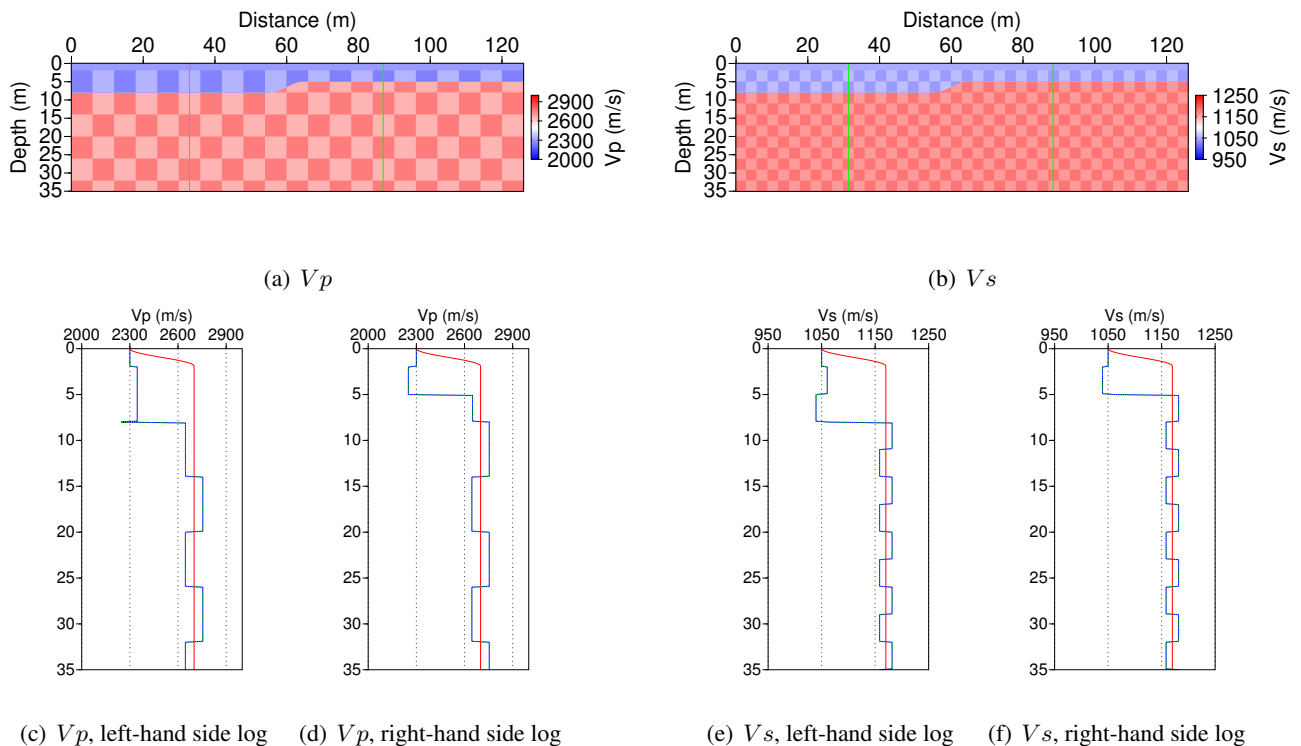


FIGURE 3.10 – Milieu de référence pour les paramètres V_p et V_s . Pour les logs de vitesse, la courbe bleue représente le milieu « vrai », la courbe rouge le milieu initial.

Nous remarquerons aussi que les effets de la variation latérale affectent l'onde de volume P rasante à la surface (onde de tête) ; ce qui est visible par des hyperboles de diffractions pour les figures

Cependant, si l'on estime l'énergie correspondant à la diffraction de l'onde de surface due à la variation latérale pour le cas où celle-ci est la plus importante (tir à la position $x=10\text{m}$), il s'avère que les amplitudes des diffractions sont très faibles. Par exemple, la figure 3.14 représente l'énergie totale du champ (somme des carrés des composantes verticales et horizontales). Dans ce cas, si l'on considère à partir de la figure 3.14 que l'énergie (normalisée par le maximum du champ) est de l'ordre de -27 dB et que l'amplitude de la diffraction est de l'onde de -52 dB , on a donc une différence de l'ordre de 25 dB entre la diffraction due à la variation latérale et l'onde de surface incidente.

On notera toutefois que la densité entre la couche supérieure et la couche inférieure est constante, mais si elle varie de sorte à augmenter le contraste d'impédance alors l'amplitude des réflexions due à la variation latérale augmente.

3.4.2.b Dispersion et polarisation apparentes

Il peut être aussi intéressant d'analyser l'effet de la variation latérale dans le domaine des nombres d'ondes/fréquences, ou comme dans le cas présent dans le domaine des vitesses de phase apparentes/fréquences. Les figures 3.15 présentent différentes observables du champ multicomposantes observé calculées dans le domaine des vitesses de phase/fréquence.

La transformée utilisée est une adaptation pour le cas multicomposantes de la transformée $p - \omega$ classiquement utilisée en sismique de proche surface pour l'analyse de dispersion des ondes de surface. Cette transformée est définie en annexe C.

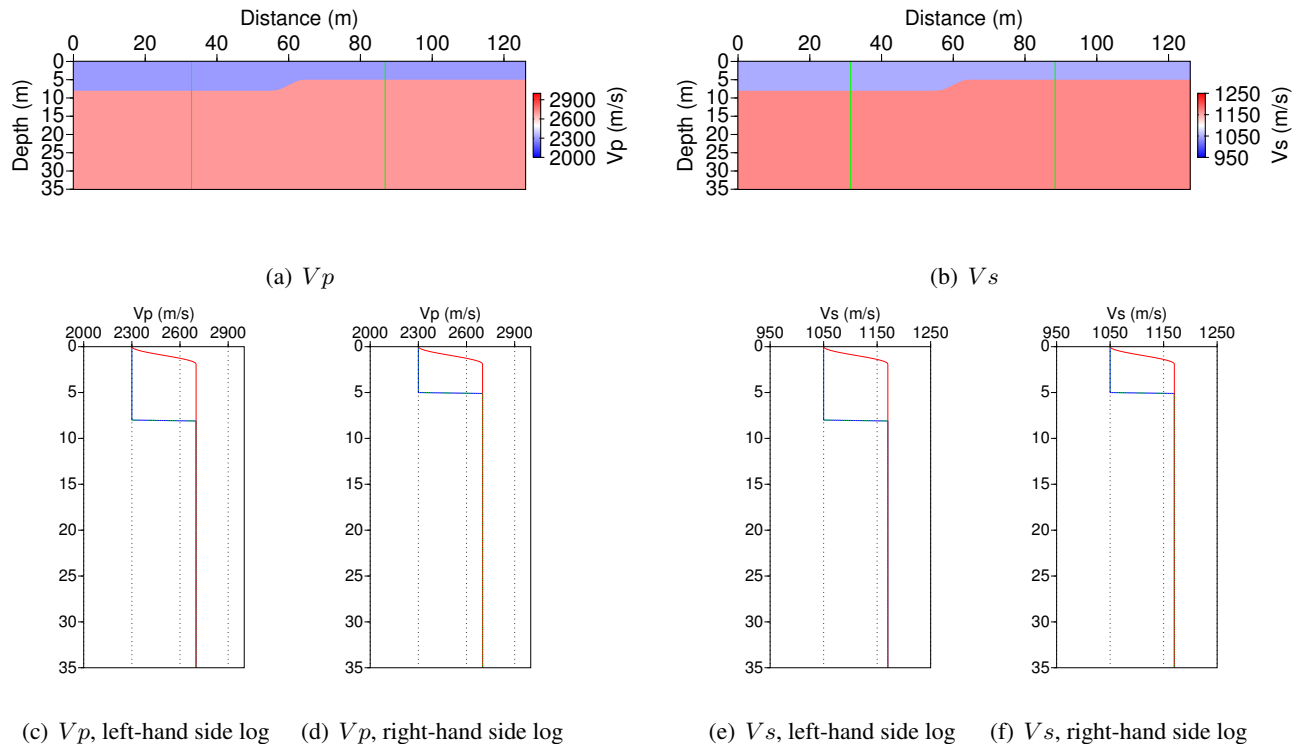


FIGURE 3.11 – Milieu de référence sans le damier pour les paramètres V_p et V_s . Pour les logs de vitesse, la courbe verte en pointillés représente le milieu « vrai », la courbe rouge le milieu initial.

Les figures situées dans la colonne de gauche correspondent aux transformées obtenues à partir des tirs réalisés à la position $x=10\text{m}$ sur le modèle présenté aux figures 3.12 (données présentées dans les sismogrammes 3.12c et 3.12c). Les figures situées dans la colonne de droite représentent les résultats des transformées obtenues à partir des mesures réalisées à la position de tir $x=110\text{m}$ (données présentées dans les sismogrammes 3.12d et 3.12d).

Sur chacune des figures, les courbe de dispersion du mode fondamental de Rayleigh pour chaque partie latéralement invariante du milieu (interface à 5m et 8m) sont tracées. La courbe blanche en pointillés correspond à la dispersion du mode fondamental pour un milieu avec une interface à 8m tandis que la courbe en traits pleins correspond à un milieu avec une interface à une profondeur de 5m. Si l'on observe ces courbes théoriques, on remarque les courbes théoriques pour les interfaces à 5m et 8m sont très proches sauf pour les fréquences entre 35Hz et 125Hz. Pour les fréquences supérieures les deux courbes de dispersion convergence vers la même vitesse. Ceci s'explique par le fait que la profondeur de pénétration de l'onde de surface décroît avec la fréquence et donc à partir d'une certaine profondeur celle-ci devient uniquement sensible à la couche superficielle.

Si l'on compare l'amplitude des champs transformés (fig .3.15a,b), on remarque que les diagrammes de dispersion sont très proches pour le mode fondamental pour les deux positions de tir et donc il est difficile de discerner l'effet de la variation latérale sur ces diagrammes.

L'observation de l'angle d'inclinaison (tilt) (fig. 3.15c,d) ne permet pas plus clairement de discerner les deux tirs une différence sur l'onde de surface mais on remarquera que dans le domaine

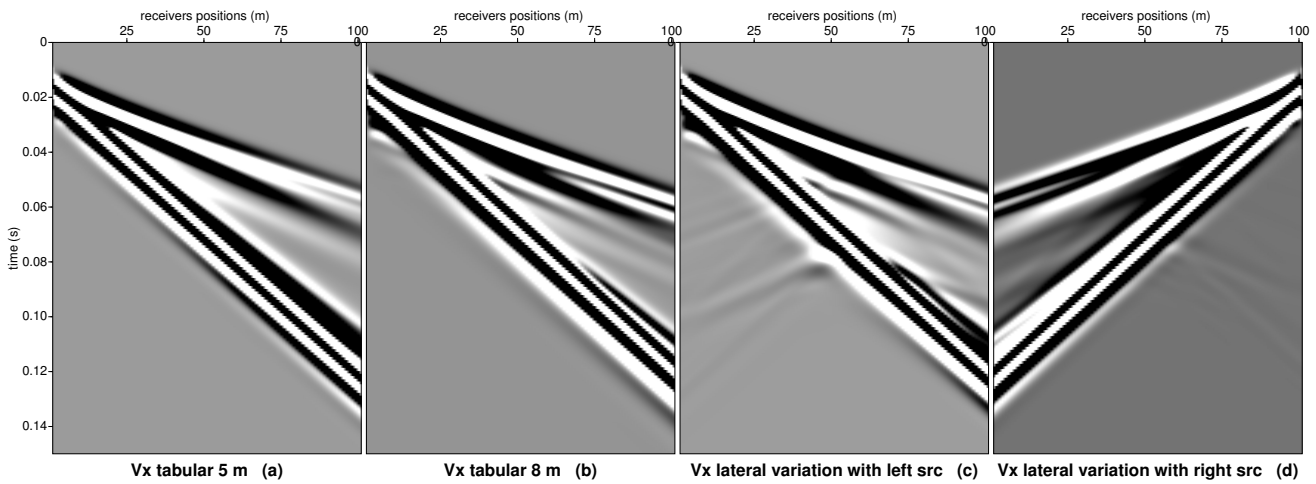


FIGURE 3.12 – Sismogrammes pour la composante horizontale. Les figures (a) et (b) correspondent à des tirs à la position $x=10\text{m}$ sur des milieux sans variations latérales. Les figures (c) et (d) correspondent à des tirs aux positions $x=10\text{m}$ et $x=110\text{m}$ pour le milieu présenté dans la figure 3.11. Notons que le degré de saturation utilisé dans les images est très élevé (perc=90%)

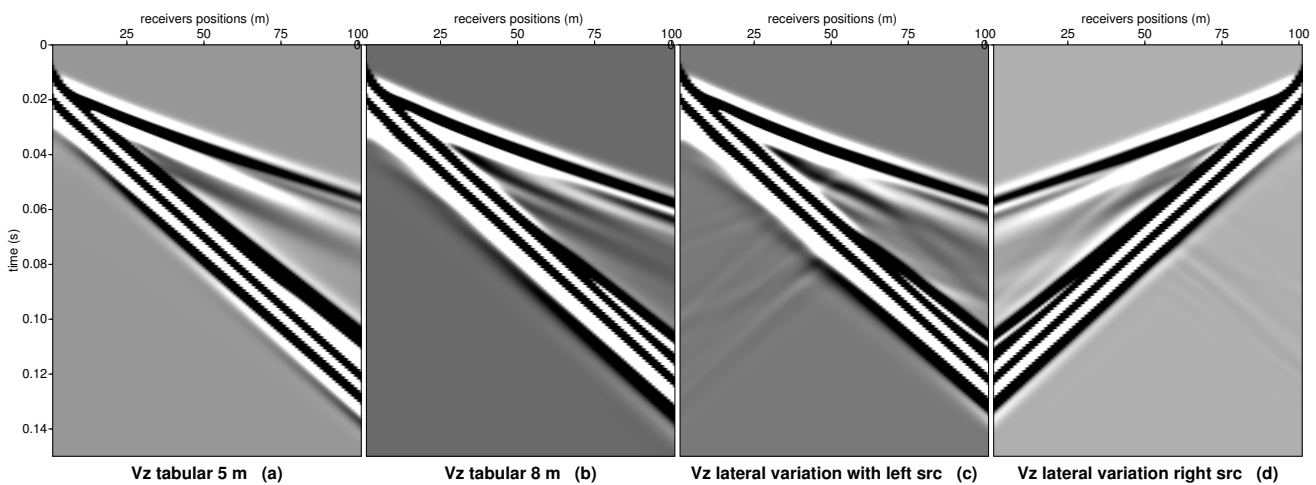


FIGURE 3.13 – Sismogrammes pour la composante verticale. Les figures (a) et (b) correspondent à des tirs à la position $x=10\text{m}$ sur des milieux sans variations latérales. Les figures (c) et (d) correspondent à des tirs aux positions $x=10\text{m}$ et $x=110\text{m}$ pour le milieu présenté dans la figure 3.11. Notons que le degré de saturation utilisé dans les images est très élevé (perc=90%)

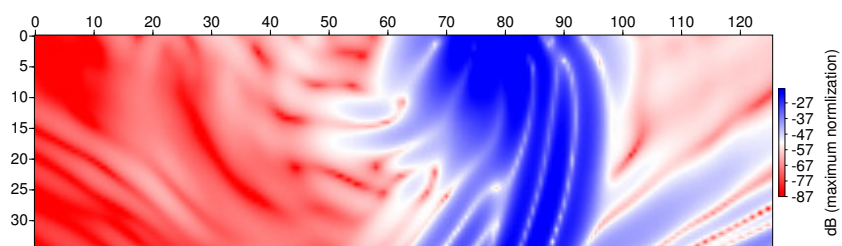


FIGURE 3.14 – Énergie totale (deux composantes) du champ normalisée (par son maximum) dans le milieu à l'instant $t=0.089\text{s}$. La variation latérale est située entre les positions horizontale $x=55\text{m}$ et $x=65\text{m}$

compris entre 150 Hz-200 Hz et 2500 m/s-3000 m/s des différences considérables entre ces deux tirs. Ces différences ne peuvent pas correspondre à des modes propagatifs puisque les modes supérieurs ont une vitesse de phase trop faible ou alors une fréquence de coupure trop élevée pour pouvoir correspondre à ces événements. Par conséquent, ces événements pourraient correspondre à l'onde de tête P convertie en S au niveau de la surface libre (onde de tête) ainsi que les réflexions associées. Lorsque l'on observe l'angle d'ellipticité (fig. 3.15e,f), on retrouve les mêmes phénomènes observés avec l'angle d'inclinaison.

D'autre part, la figure 3.16 présente l'ellipticité théorique du mode fondamental. La courbe noire décrit l'ellipticité pour le milieu avec l'interface à 5m tandis que la courbe rouge celle du milieu avec une interface à 8m. Ces deux courbes ont une allure assez proche et atteignent les mêmes valeurs extrémales. On pourra remarquer que la courbe rouge peut apparaître comme une version dilatée de la courbe noire selon l'axe des fréquences. L'ordre de grandeur de la différence entre ces deux courbes est très faible car inférieur au degré mais on remarque qu'elles sont bien séparées en fréquence.

Dans le cas présent, l'effet de la variation latérale dans le domaine des vitesses apparentes-fréquences pour deux tirs située à chaque extrémités de celle-ci est difficilement perceptible sur le mode fondamental (en dispersion comme en ellipticité). Par contre, à l'aide d'une adaptation de la transformée $p - \omega$ donnant accès à des observables de polarisation, on remarque une très nette différence entre les deux tirs lorsque l'on regarde les attributs de polarisation pour des vitesses apparentes supérieures. Ceci confirme l'importance des ondes de têtes et l'intérêt du traitement proposé pour les données multicomposantes afin de faire ressortir les ondes ayant différentes polarisation.

3.4.2.c Milieu avec damier

Les analyses précédentes ont été réalisées sur les milieu sans damier (fig. 3.11) alors que l'on le milieu utilisé comme milieu de référence pour les inversion contient un damier (fig. 3.10) avec de petites variations sur les paramètres V_p et V_s (respectivement $\pm 2\%$ et $\pm 1\%$) ainsi que de l'atténuation ($Q_p = Q_s = 50$). Les figures 3.17b,d montrent que l'effet des variations du damier masquent quasiment l'effet de la signature de la variation latérale sur l'onde de Rayleigh. Par contre, l'effet du damier sur l'onde de tête est moins marquée et on peut reconnaître certains éléments de la signature de la variation latérale.

Le choix du milieu initial sera discuté dans la prochaine section mais on peut déjà discuter les signaux issus de ce modèle (fig. 3.17a,c). Le milieu initial est composé d'une variation lisse de V_p et V_s sur une profondeur de 2m, commençant par les valeurs de la couche inférieure vers les valeurs de la couche supérieure. Les sismogrammes correspondant sont présentés aux figures 3.17a,c. On ne distingue pas de dispersion de l'onde de Rayleigh sur les sismogrammes mais par contre l'onde de tête semble présenter une certaine dispersion (plus visible pour la composante horizontale).

Si l'on compare les signaux obtenus avec milieu initial (fig. 3.17a,c) et le vrai milieu (fig. 3.17b,d), on remarque que le milieu initial est cinématiquement relativement précis (on n'observe pas de cycle-skipping) pour l'onde de tête et pour l'onde de Rayleigh.

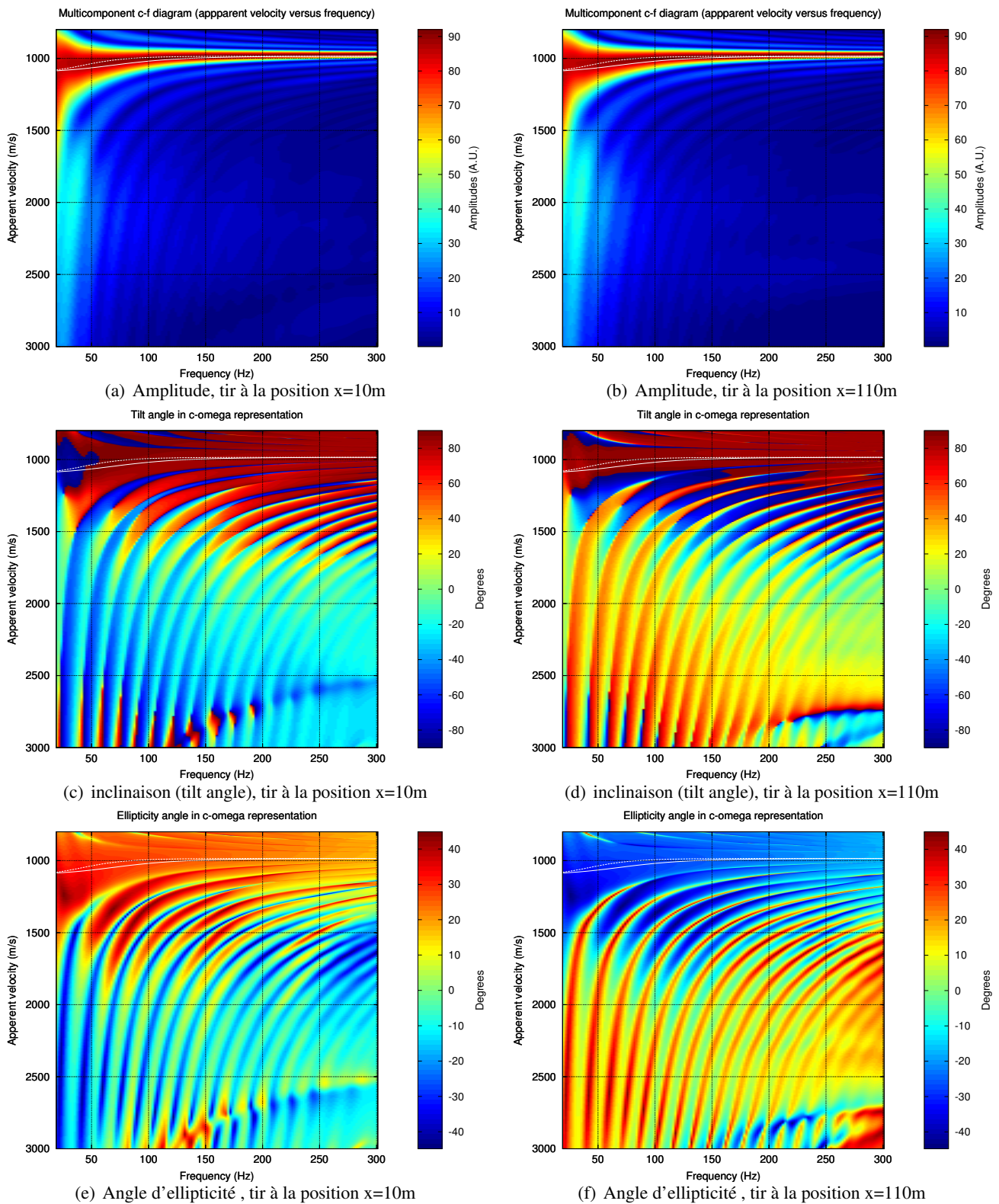


FIGURE 3.15 – Transformées des champs dans le domaine $c - \omega$ obtenues pour des tirs de chaque côté de la variation latérale. Les courbes blanches en pointillées représentent la dispersion théorique du mode fondamental pour un milieu latéralement invariant avec une interface à 8m et la courbe blanche en traits continus pour un milieu avec une interface à 5m

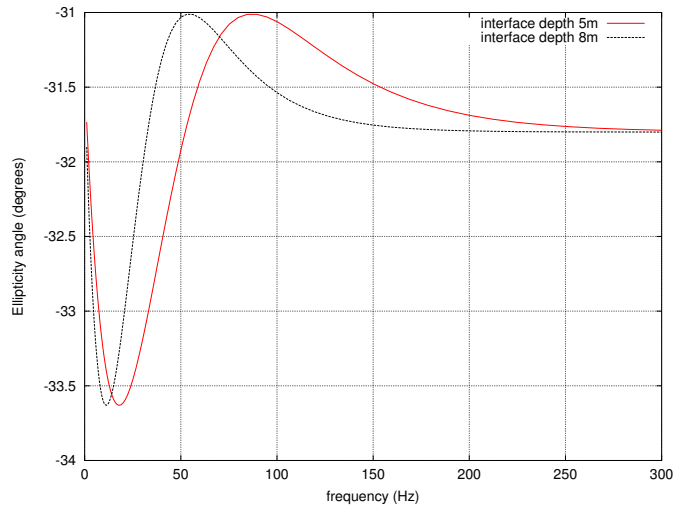


FIGURE 3.16 – Angle d'ellipticité calculé du mode fondamental pour un milieu latéralement invariant avec une interface à 5m (courbe rouge) et un milieu interface à 8 m (courbe noire) ayant les propriétés mécaniques décrites dans la section 3.4.1.

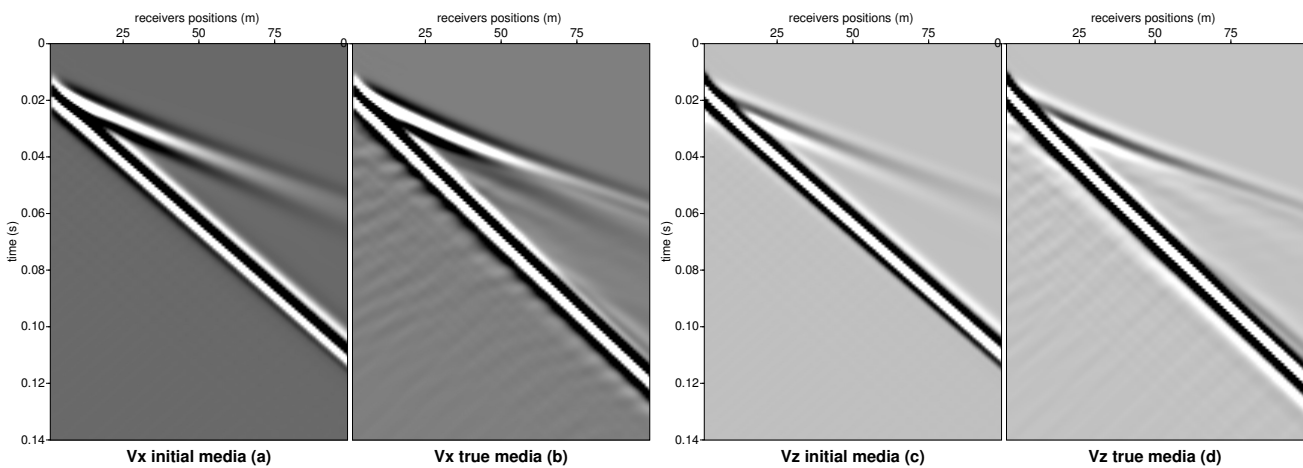


FIGURE 3.17 – Sismogrammes obtenus pour le milieu initial utilisé pour l'inversion et le milieu « vrai » (avec damier) pour une position de tir $x=10\text{m}$.

Groupe de fréquences	fréquence (Hz)
1	50
2	50, 70
3	50, 70, 101
4	50, 70, 101, 129
5	50, 70, 101, 129, 164,
6	50, 70, 101, 129, 164, 201

TABLE 3.1 – Fréquences utilisées pour l’inversion du modèle avec variation latérale

3.4.3 Choix et stratégies d’inversion

Dans cette partie, j’explique les choix réalisés pour configurer l’inversion et choisir le dispositif expérimental.

3.4.3.a Choix des fréquences et l’acquisition

Le choix des fréquences a été effectué en considérant que la plus basse fréquence exploitable correspond à la moitié de la fréquence centrale, c’est à dire $f_{min} = 50Hz$ et la fréquence la plus élevée utilisable pour pour l’inversion au double de la fréquence centrale, donc $f_{max} = 200Hz$. A l’aide de tests numériques, j’ai remarqué que l’échantillonnage en fréquence donné par le critère de Laurent Sirgue (2004) est généralement trop optimiste. D’autre part, de nombreux tests numériques ont confirmé que l’approche où l’on conserve les fréquences d’un groupe à l’autre (Bunks *et al.*, 1995) est plus stable pour inverser les ondes de surface qu’une approche où l’on considère l’inversion des fréquences de manière isolée et séquentielle. Ceci pourrait s’expliquer par la dépendance de la profondeur de sensibilité des ondes de surface par rapport à la fréquence. Ainsi, dans une approche fréquentiel séquentielle si l’on s’affranchit des basses fréquences, les zones les plus profondes du modèle se retrouvent non contraintes ce qui peut occasionner des instabilités dans l’inversion.

Finalement, le choix des fréquences a été établi suivant ces considérations et à l’aide de tests numériques (en utilisant la norme conventionnelle ℓ_2). Le choix définitif des groupes de fréquences est synthétisé dans le tableau 3.1.

J’ai fait le choix d’exploiter toute l’étendue du domaine physique de mesure, générant un déport maximal est de 126m. Comme le modèle initial est suffisamment précis et que la première fréquence suffisamment basse, cela ne pose pas de problème de cycle-skipping sur les longs déports.

Si l’on raisonne en terme d’onde planes, on remarque que lors du calcul du gradient pour éviter tout aliasing spatial, on doit respecter un critère d’échantillonnage spatial sur les champs propagés (donc les sources) et rétropropagés (donc les récepteurs), ce qui impose d’avoir une distance inter-source et inter-récepteur d’au moins la moitié de la longueur d’onde apparente. Le cas de la proche surface est particulièrement défavorable puisque le mode dominant (le mode fondamental de Rayleigh) a des vitesses de phase légèrement inférieures celles des ondes de cisaillement et avec des vecteurs d’ondes (propagatifs) totalement horizontaux. Pour respecter ces considérations sur l’aliasing spatial, j’ai choisi une distance inter-source et inter-récepteurs de 2m, ce qui nécessite au total 65 sources et

65 récepteurs.

Puisque le champ proche contient des ondes évanescentes et qu'il est particulièrement sensible à la forme de source, il m'a semblé souhaitable de limiter son effet dans l'inversion. Pour ce faire, j'ai ajouté un critère de pondération dépendant de la fréquence et de l'offset afin d'éliminer les traces situées à des dépôts inférieurs ou égaux à une demie longueur d'onde.

3.4.3.b Choix du modèle initial et régularisation

Le choix du modèle initial est crucial pour la convergence de l'inversion. Je suis parti du principe que l'on pouvait déterminer un modèle initial très lisse à partir de la vitesse des ondes V_s et V_p du milieu inférieur. D'autre part, j'ai considéré que l'on pouvait avoir une estimation assez précise de la vitesse des ondes de cisaillement de la couche superficielle à l'aide de l'analyse des diagrammes de dispersion dans les fréquences élevées.

La principale difficulté pour ce type configuration provient des instabilités de l'inversion pour les couches les plus superficielles. Il est courant qu'à proximité des sources et des récepteurs, l'inversion crée une couche superficielle artificielle qui peut amener à l'échec de l'inversion pour l'ensemble du milieu.

La solution la plus simple pour éviter cela consiste à « bloquer » le milieu dans la partie la plus superficielle. Pour cela, on peut aussi réaliser une régularisation en incluant un certain *a priori* sur la couche superficielle mais comme je compare des fonctions coûts différentes, pour ne pas biaiser les tests il est préférable de ne pas ajouter de terme de régularisation modifiant l'expression des fonctions coûts.

Une autre méthode assez commune en inversion des formes d'onde consiste à ne pas calculer le gradient dans une couche superficielle. Afin d'éviter la formation de couches artificielles entre les endroits où le gradient est bloqué et les autres zones du modèle, on laisse le lissage du gradient « déborder » sur la couche bloquée. Dans le cas présent, cette méthode est nécessaire mais délicate d'emploi car si la profondeur de la couche « bloquée » est comparable à la profondeur de la première interface cela limite fortement l'intérêt de ces inversions (dans un contexte de proche surface).

Compte tenu de ces diverses considérations, j'ai proposé un milieu initial commençant à la valeur exacte du milieu superficiel mais avec une transition progressive (portion de cosinus) sur les deux premiers mètres vers la valeur exacte du milieu inférieur. Une coupe verticale du milieu initial est représentée par la courbe rouge aux figures 3.10c-f. Sur les deux premiers mètres, le gradient n'est pas calculé mais la valeur des paramètres peut évoluer par lissage des couches inférieures.

Le lissage du gradient est basé sur la vitesse locale des ondes de cisaillement (filtre gaussien avec un coefficient de corrélation de 0.3) et un terme d'amortissement sur le hessien estimé est ajouté (10% de la plus grande valeur contenue dans le Hessien estimé). Pour ces inversions, l'optimisation l-BFGS conserve en mémoire jusqu'à 6 gradients et le nombre maximum d'itérations est de 20. Pour chacun des cas (sauf pour la fonction coût \mathcal{E}_P où cela est inutile), l'ondulette source a été inversée pour chaque tir.

Si l'on analyse les résidus (au sens de la différence des signaux) pour chacune des composantes (figures 3.18), on remarque alors que les contributions des ondes de surface dominant les résidus.

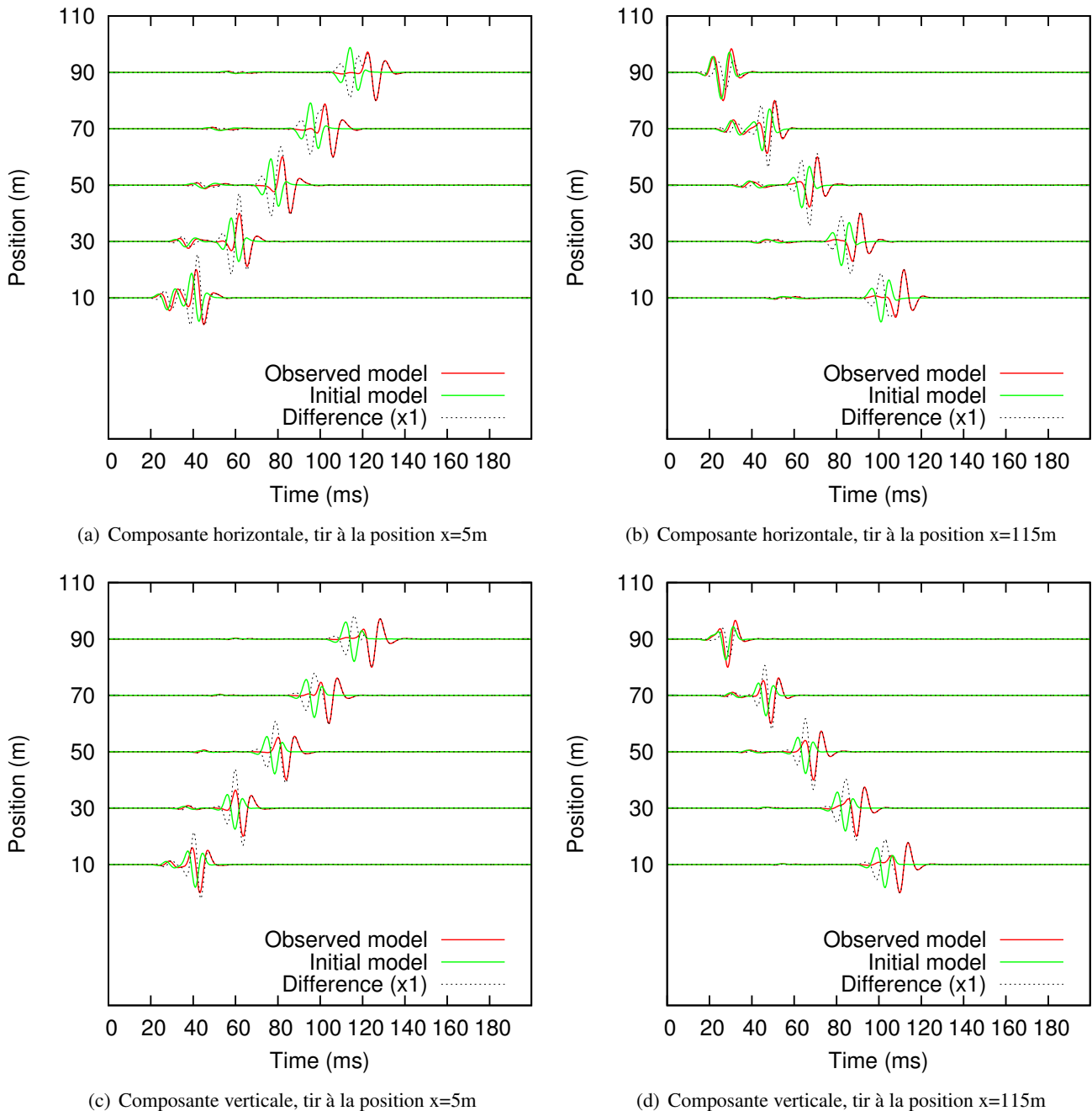


FIGURE 3.18 – Signaux obtenus pour le milieu initial (courbes vertes), pour le milieu exact (courbes rouges) et les résidus initiaux (calculés par simple différence, courbes noires en pointillés) pour des tirs situés aux deux extrémités du modèle.

3.4.4 Résultats d'inversion

Les fonctions coûts seront évaluées par trois séries de tests. Le premier test consistera à inverser :

1. les données avec un facteur de qualité connu ;
2. avec une sous-estimation du facteur de qualité ;
3. avec sur-estimation du facteur de qualité. Pour chaque résultat, on présentera seulement la dernière itération du dernier groupe de fréquences.

3.4.4.a Résultats d'inversion sans erreur sur l'atténuation

Le résultat de l'inversion réalisée avec la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ sont présentés par les figures 3.19, ceux pour la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ par les figures 3.20 et ceux pour la fonction coût \mathcal{E}_P par les figures 3.21. De manière globale, les paramètres V_p et V_s sont inversés de manière satisfaisante pour ce qui est de la détermination des valeurs des différentes couches et l'empreinte du damier est clairement visible pour les trois fonctions coûts. On remarque que le damier est moins visible au delà de 20m, ce qui correspond approximativement à la valeur de la plus grande longueur d'onde de surface ($\approx 20m$). Néanmoins, on remarquera que la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ est celle qui semble le mieux contraindre en profondeur l'inversion ainsi que celle qui suit le mieux les variations du damier pour le milieu inférieur (jusqu'à une profondeur maximale d'environ 20m). La fonction coût \mathcal{E}_P fournit les valeurs de reconstruction du paramètre V_s de la couche supérieure les plus précises.

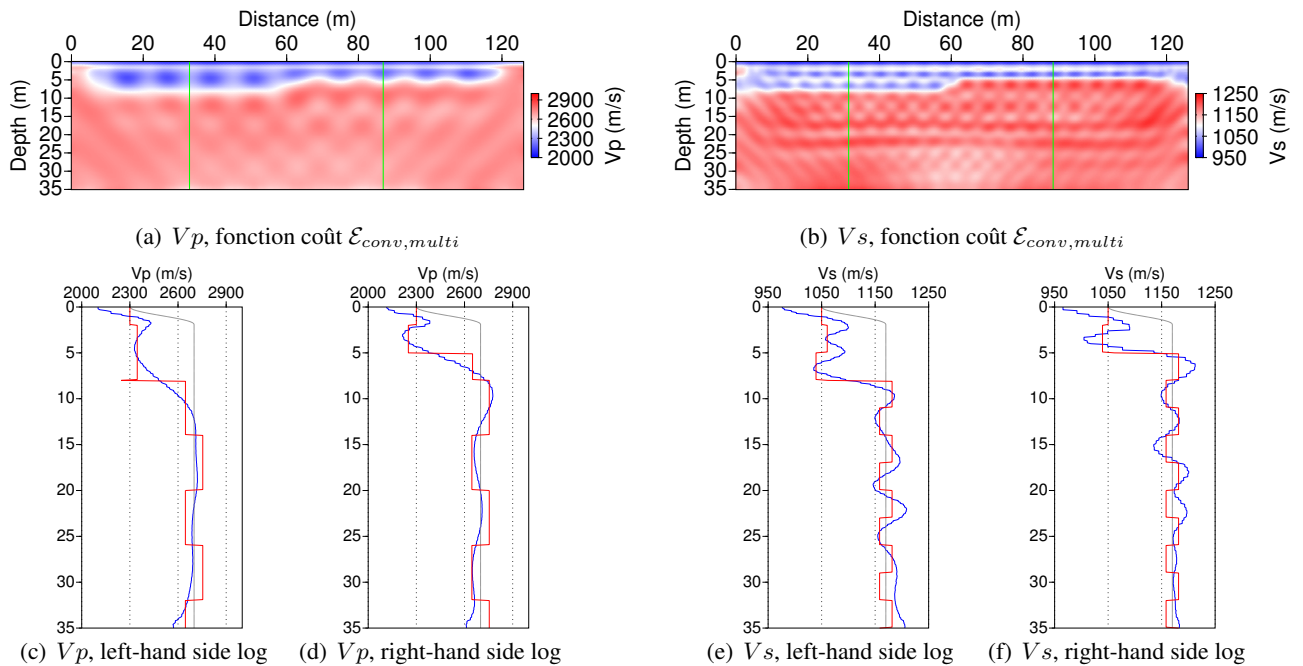


FIGURE 3.19 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ pour un milieu sans erreur sur l'atténuation. Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

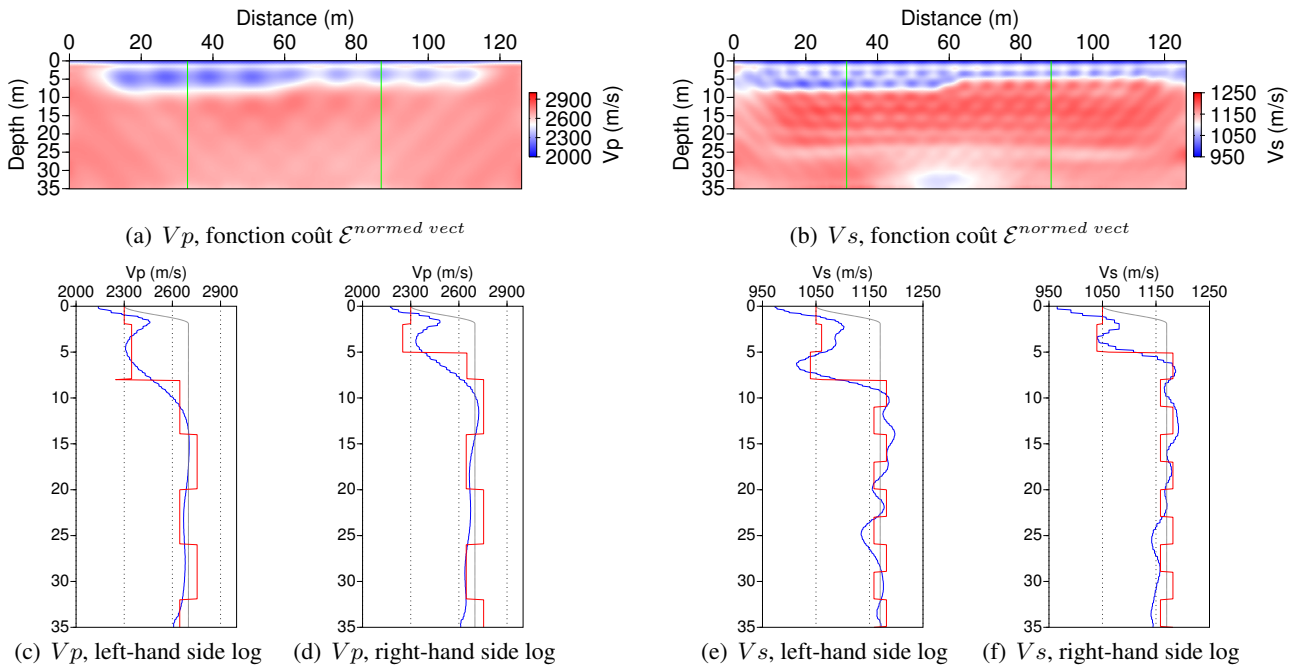


FIGURE 3.20 – Résultats de l’inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ pour un milieu sans erreur sur l’atténuation. Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l’inversion.

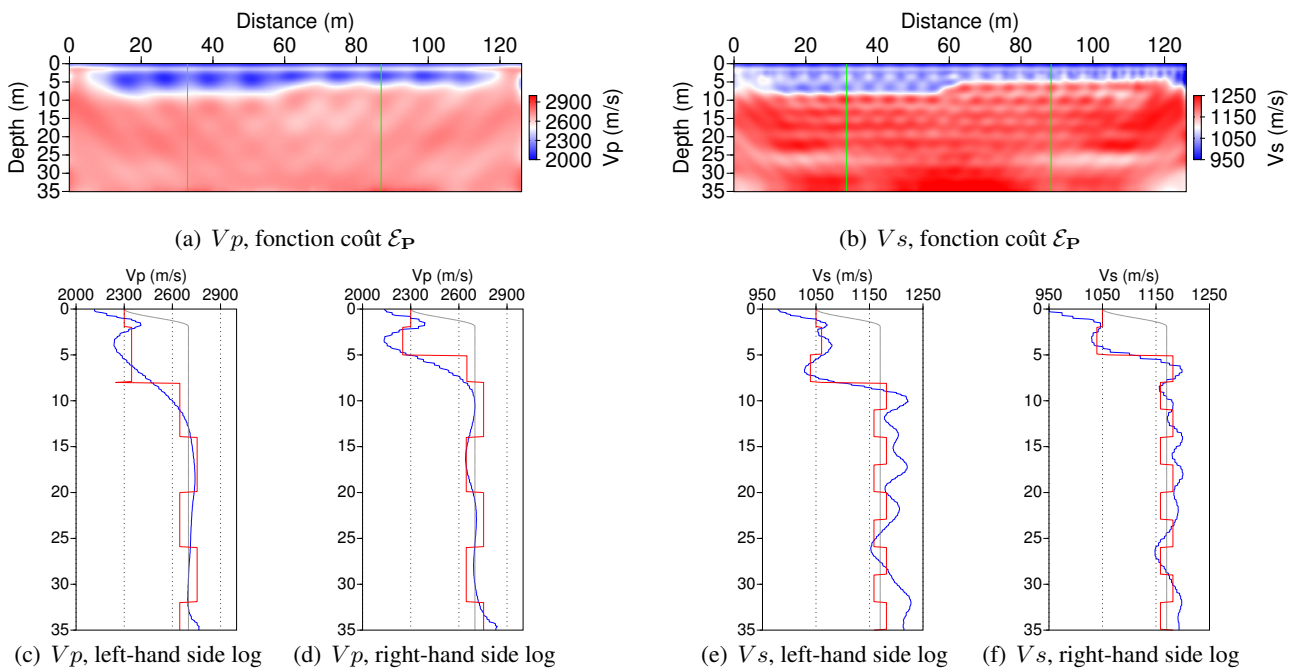


FIGURE 3.21 – Résultats de l’inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût \mathcal{E}_P pour un milieu sans erreur sur l’atténuation. Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l’inversion.

3.4.4.b Résultats d'inversion avec sous-estimation de l'atténuation

Afin de créer une erreur de sous-estimation de l'atténuation, les données du modèle vrai ont été générées avec des facteurs de qualité $Q_p = Q_s = 200$ mais pour l'inversion on a fixé l'atténuation à $Q_p = Q_s = 50$.

Par rapport au cas sans erreur d'atténuation, on remarquera que pour la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ (fig. 3.22), l'inversion du paramètre V_p est peu affectée (fig. 3.22c-d). Pour ce qui est du paramètre V_s (fig. 3.22e-f) celui-ci est affecté en profondeur : sur les log. de vitesse on remarquera que la valeur de V_s est précise jusqu'à environ une quinzaine de mètres mais devient largement sur-estimée au-delà de cette profondeur.

Les résultats d'inversion pour les fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (fig. 3.23) et \mathcal{E}_P (fig. 3.24) sont nettement moins affectés par l'erreur sur l'atténuation. On remarquera néanmoins une dégradation de l'inversion du paramètre V_p inversé avec la fonction coûts \mathcal{E}_P ainsi qu'une divergence plus rapide en profondeur pour le paramètre V_s .

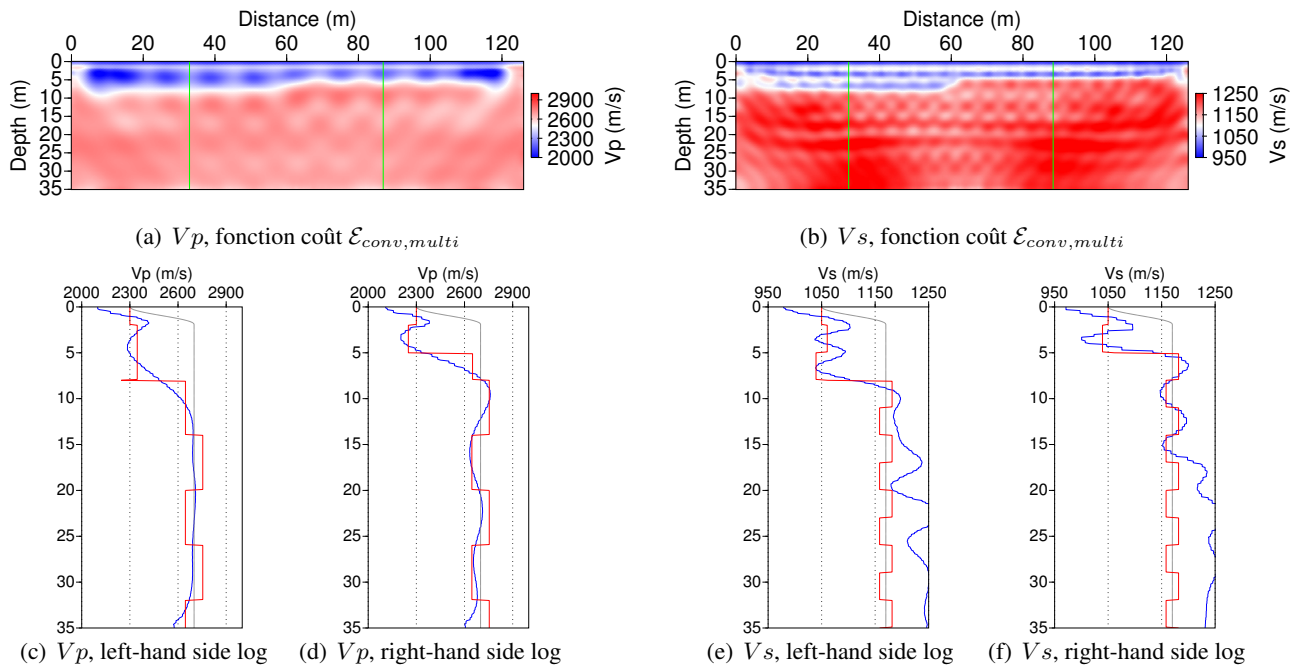


FIGURE 3.22 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquence avec la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ pour un milieu avec une sous-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion 50 mais données générées avec $Q_p = Q_s = 200$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

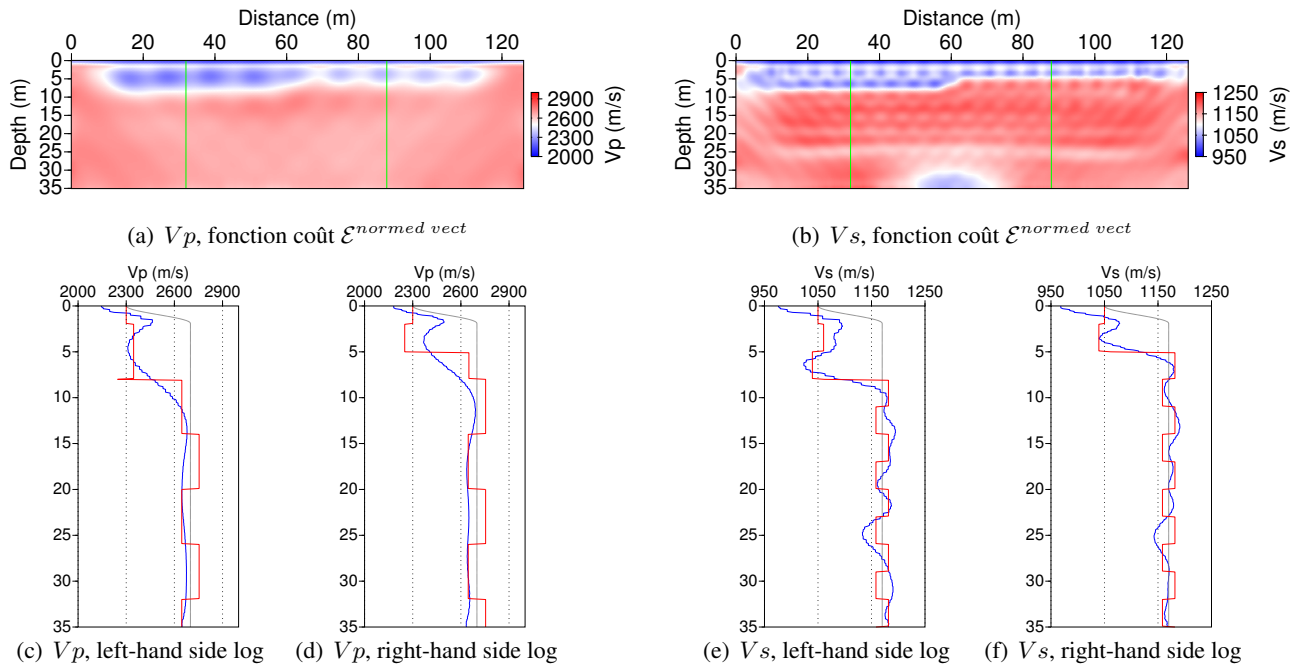


FIGURE 3.23 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ pour un milieu avec une sous-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion 50 mais données générées avec $Q_p = Q_s = 200$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

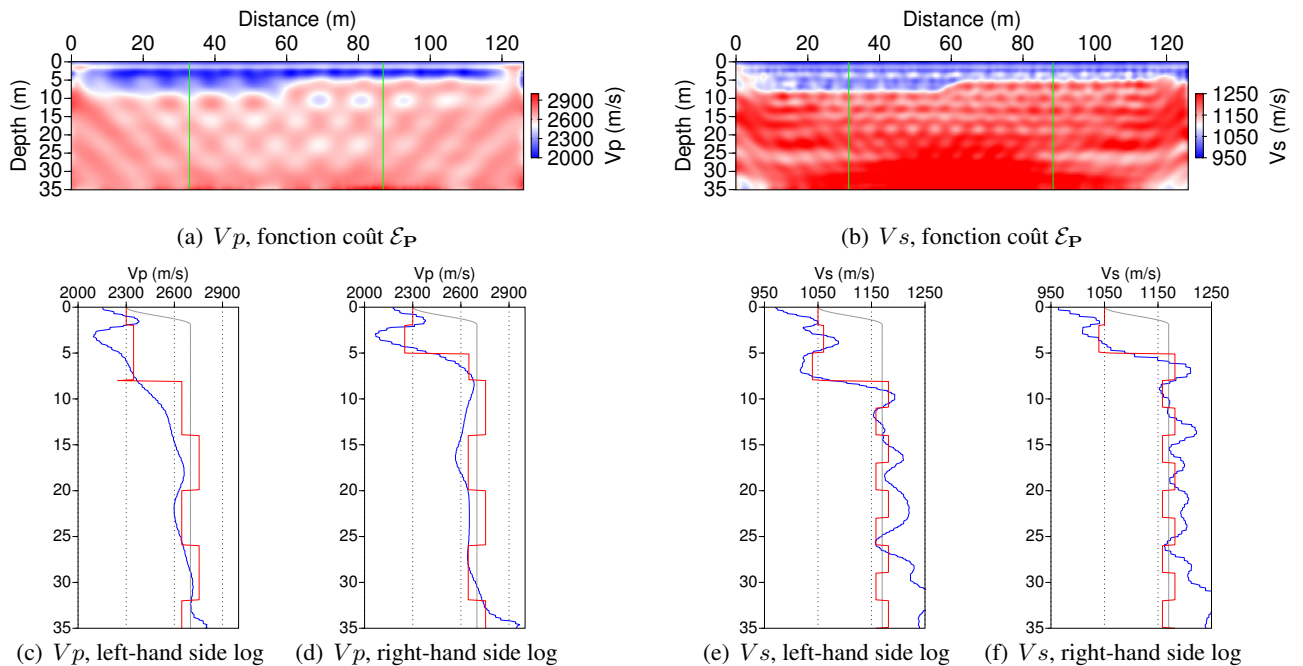


FIGURE 3.24 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût \mathcal{E}_P pour un milieu avec une sous-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion 50 mais données générées avec $Q_p = Q_s = 200$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

3.4.4.c Résultats d'inversion avec sur-estimation de l'atténuation

Afin de créer une erreur de sur-estimation de l'atténuation, les données du modèle vrai ont été générées avec des facteurs de qualité $Q_p = Q_s = 20$ mais pour l'inversion on a fixé l'atténuation à $Q_p = Q_s = 50$.

Dans ce cas, le résultat d'inversion du paramètre V_s par la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ (fig 3.25b,e,f) est dramatiquement dégradé : la structure du milieu n'est plus reconnaissable sur la carte de V_s (fig 3.25b) et les valeurs de V_s sont très largement sous estimées pour la couche inférieure (fig 3.25e,f). La reconstruction du paramètre V_p (fig 3.25a,c,d) est beaucoup moins impactée et les valeurs estimées sont relativement précises.

Les résultats d'inversion pour la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (fig. 3.26) sont peu impactés par l'erreur sur les facteurs de qualité, les seules différences visibles avec le cas sans erreur sur l'atténuation sont une légère divergence du paramètre V_s en profondeur et une reconstruction du paramètre V_p légèrement moins précise (perte de résolution).

Les reconstructions (fig. 3.27) obtenues avec fonction coût \mathcal{E}_P présentent une perte de résolution notable sur l'inversion du paramètre V_p . La reconstruction du paramètre V_s reste remarquablement précise pour la couche superficielle mais on observe (fig. 3.27b) une légère dégradation pour les zones du modèle les moins bien illuminées (bords et profondeur).

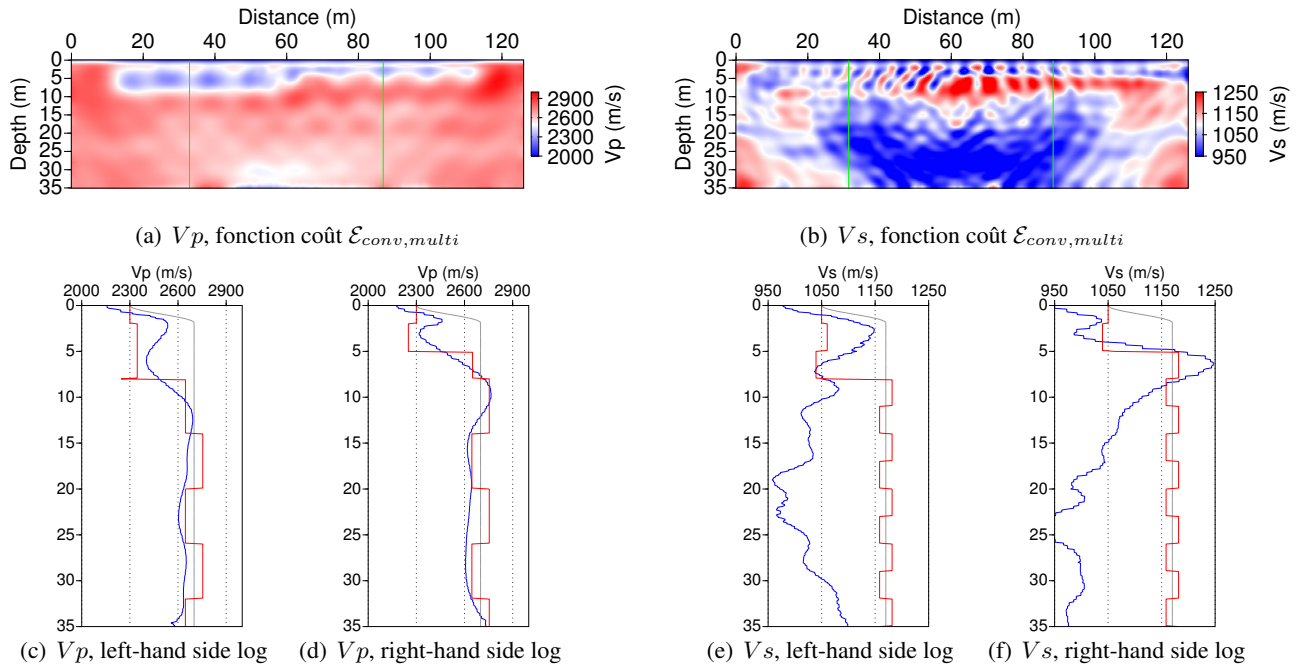


FIGURE 3.25 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquences avec la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ pour un milieu avec une sur-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion à 50 mais les données sont générées avec $Q_p = Q_s = 20$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

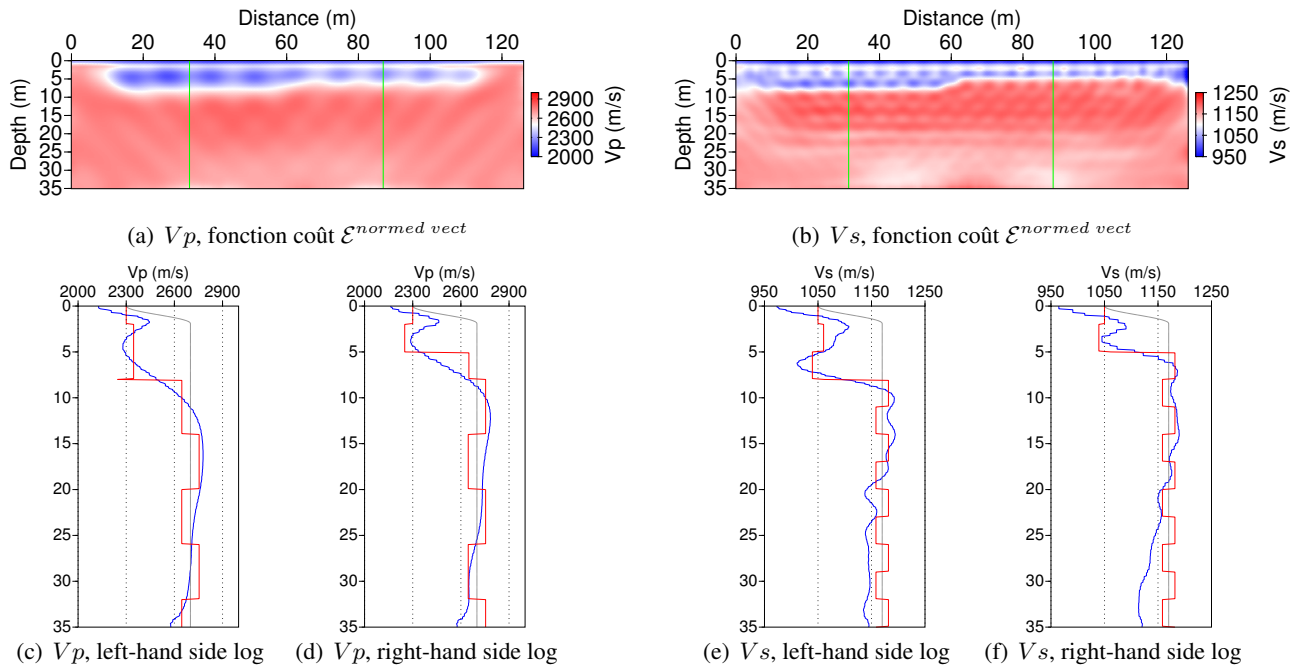


FIGURE 3.26 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquence avec la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ pour un milieu avec une sur-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion à 50 mais les données sont générées avec $Q_p = Q_s = 20$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

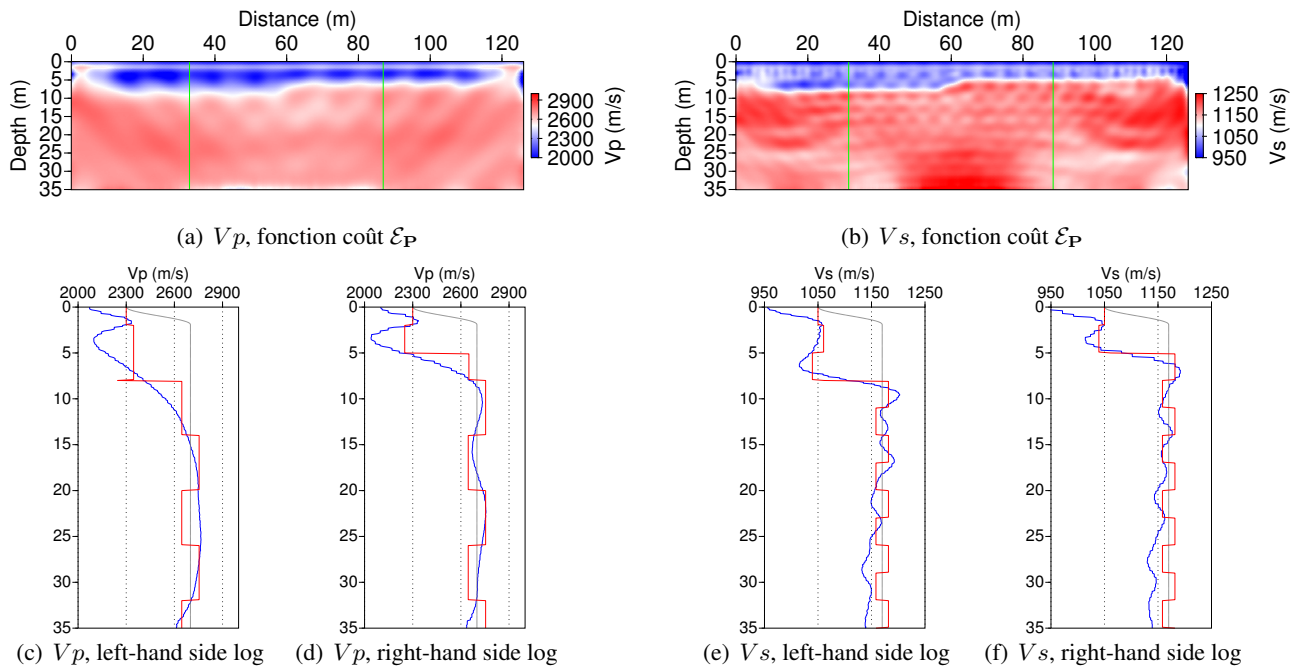


FIGURE 3.27 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s au 6^{ème} groupe de fréquence avec la fonction coût \mathcal{E}_P pour un milieu avec une sur-estimation de l'atténuation ($Q_p = Q_s$ fixé pour l'inversion à 50 mais les données sont générées avec $Q_p = Q_s = 20$). Sur les logs de vitesse, la courbe rouge représente le milieu « vrai », la courbe grise le milieu initial et la courbe bleue le résultat de l'inversion.

3.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, des tests numériques ont été menés afin d'évaluer la robustesse de trois fonctions coûts :

1. la fonction coût multicomposantes conventionnelle $\mathcal{E}_{conv, multi}$;
2. la fonction coût multicomposantes normalisée par rapport à l'amplitude du déplacement particulière globale appelée $\mathcal{E}^{normed\ vect}$;
3. la fonction coût basée sur l'inversion de la polarisation à partir de la distance de Poincaré appelée $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$;

Pour l'ensemble des cas étudiés, l'ondelette source était estimée à chaque itération et pour chaque tir.

Lorsque l'on fixe l'atténuation avec une erreur sur l'*a priori* de l'atténuation, il s'avère que les reconstructions issues de la fonction coût $\mathcal{E}_{conv, multi}$ peuvent être très dégradées. Les fonctions coûts $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ sont beaucoup plus robustes mais on a néanmoins observé pour l'inversion d'onde de volume (croix) et d'ondes de surface (milieu avec variations latérales) une perte de résolution pour des milieux fortement atténuants. D'autre part, il a été observé que l'effet cumulé des erreurs sur les *a priori* d'atténuation et de densité peut considérablement dégrader la qualité des inversions pour les trois fonctions coûts étudiées.

Dans le chapitre précédent une étude de la convexité de la fonction coût $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ avait été entreprise et il est ressorti que dans certains cas cette fonction coût pouvait avoir des propriétés intéressantes. A l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$, on a remarqué sur le cas d'une cible élastique avec un fort contraste de vitesse (croix avec contraste en V_p et V_s de 100%) que l'inversion pouvait converger en partant de fréquences plus élevées que pour les fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et $\mathcal{E}_{conv, multi}$. Cela mériterait une étude plus approfondie pour évaluer à partir d'inversions numériques les propriétés de convexité de la fonction coût basée sur la polarisation.

Il a été aussi remarqué que dans le cas d'une interface très proche de la surface que la fonction coût $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ permet d'inverser la couche superficielle avec sensiblement plus de précision que les autres fonctions coûts mais elle contraint moins l'inversion du milieu en profondeur. Néanmoins quelque soit la fonction coût utilisée, on doit éviter d'inverser le milieu sur une couche superficielle afin d'éviter d'éventuelles instabilités. Il serait intéressant d'étendre cette étude concernant l'inversion des ondes de surface avec des milieux ayant des contrastes plus prononcés et avec des milieux initiaux moins favorables.

Chapitre 4

Développements méthodologiques pour la modélisation physique multicomposantes à échelle réduite

Ce chapitre traite des développements expérimentaux entrepris pour permettre d'étendre le banc de mesure MUSC (Mesures Ultrasonores Sans Contact) afin de permettre de réaliser des mesures multicomposantes dans une configuration P-SV. Le chapitre est principalement composé d'une publication soumise à la revue *Geophysical Journal international*¹, ainsi que d'une seconde partie traitant de mesures multi-sources et multi-récepteurs réalisées sur une maquette. Des informations supplémentaires² concernant la caractérisation du dispositif sont proposées dans l'annexe B.

Sommaire

4.1	Introduction à l'article : Reduced scale seismic measurement : characterization and quantitative assessment of a new facility for multi-component acquisition and application to the observation of regularized polarization attributes	140
4.2	Summary of the article	141
4.3	Introduction	141
4.4	Principles of reduced scale modeling and presentation of the MUSC measurement bench	144
4.4.1	General description of the MUSC measurement bench	144
4.4.2	Description of the multicomponent measurement process of the laser interferometer	144
4.5	Measurement noise study	146
4.5.1	Assumptions and analysis	146
4.5.2	Noise power spectrum density	147
4.5.3	Statistical noise correlations and noise polarization	148
4.5.4	Noise statistical distributions	153
4.5.5	Conclusion on noise analysis	155
4.6	Surface wave polarization analysis	155

1. Dans la version finale de la publication certaines données pourront légèrement différer sans pour autant remettre en question les conclusions du chapitre. En effet, les paramètres mécaniques du bloc d'aluminium ont été sensiblement ré-évalués et j'ai corrigé une erreur apparente de l'ordre de 0.86mm concernant la position de la source piezo-électrique.

2. Le matériel supplémentaire proposé dans la version finale de la publication sera plus étendu que celui proposé dans l'annexe.

4.6.1	Experimental settings and raw signals	156
4.6.2	Signal pre-processing	157
4.6.3	Observed polarization of the Rayleigh wave in the frequency domain	160
4.7	Full wavefield reconstruction	161
4.7.1	Description of the forward modeling tool	162
4.7.2	Methodology used for the source spectrum estimation	163
4.7.3	Comparison between synthetic and experimental raw signals for each component	168
4.7.4	Comparison of the instantaneous polarization attributes	170
4.7.4.a	Regularized definitions of polarization instantaneous attributes	170
4.7.4.b	Comparison of instantaneous attributes between simulated and experimental signals	172
4.8	Towards realistic multicomponent physical modeling : shallow cavity detection by polarization perturbation analysis	175
4.8.1	Presentation of the physical model and experimental acquisition	176
4.8.2	Illustration of some benefits of multicomponent data for shallow cavity detection	176
4.8.3	An initial attempt to use multicomponent measurements for shallow cavity detection	180
4.9	Conclusions and perspectives	183
4.10	Acknowledgements	184
4.11	Appendix	186
4.11.1	Statistical properties of the noise table	186
4.11.2	Mechanical properties of physical model materials	187
4.11.3	Riedel's based multitaper method with sinusoidal tapers	187
4.12	Acquisition de données multicomposantes sur maquette	188
4.12.1	Présentation de l'acquisition et de la maquette	188
4.12.2	Résultats préliminaires des mesures	190
4.13	Conclusion du chapitre	193

4.1 Introduction à l'article : Reduced scale seismic measurement : characterization and quantitative assessment of a new facility for multicomponent acquisition and application to the observation of regularized polarization attributes

Cette article traite de la validation de la mesure multicomposantes ainsi que des potentialités ouvertes par la modélisation physique multicomposantes pour la détection de cavités a été soumis à la revue *Geophysical Journal International* (auteurs R. Valensi, D. Leparoux, O. Durand, F. Bretaudeau et P. Côte). La première partie de l'article traite des principes physique de la mesures multicomposantes utilisée par l'interféromètre laser. La seconde partie ainsi que le supplément de l'article détaillent la caractérisation du bruit de mesure. La qualité des mesures de polarisation des ondes de Rayleigh est étudiée et une comparaison des mesures à un modèle semi-analytique est menée. Enfin, de nouvelles définitions « robustes » des attributs de polarisations sont introduites et appliquées à la détection de cavités.

4.2 Summary of the article

Reduced scale physical modeling is a useful intermediate step for filling in the gap between field measurements and numerical simulations. In many different areas of seismology, multicomponent measurements are now commonly recorded and processed. However, up to now, laboratory facilities providing the flexible and accurate reproduction of large multicomponent seismic experiments have not reached maturity. Within this context, we present an improvement of a measurement facility (MUSC) developed previously to enable the flexible and versatile reproduction of seismic experiments at reduced scale. This new measurement bench provides simultaneous measurements of the vertical and the horizontal components of seismic wavefields by taking advantage of recent developments in laser ultrasonic sensing technologies. Reference measurements on an aluminum block are carried-out in order to quantitatively evaluate multicomponent measurements. Noise characterization, surface wave ellipticity analysis and waveform comparisons with a semi-analytical model are presented. To enable the simultaneous comparison of phase and polarization attributes, we also introduce a regularized version of the polarization attributes and apply it to synthetic and experimental data. The comparisons provided demonstrate that high fidelity multicomponent reduced scale physical modeling is possible with this new facility. An illustrative example of shallow target detection is then presented. Multicomponent measurements are carried-out on a reduced scale model containing a shallow cavity. The time domain multicomponent data and instantaneous polarization attributes are analyzed. In this case, the use of multicomponent measurements and regularized instantaneous polarization attributes helps to enhance and interpret the weak signature of the cavity. By assessing the reliability of the MUSC measurement facility in the performance of massive high quality multicomponent data acquisition at the laboratory scale, this study highlights the interesting potentialities of reduced scale modeling of seismic wave propagation for a large variety of applications.

4.3 Introduction

In parallel to the development of numerical modeling methods during the last decade, reduced scale physical modeling for seismic wave studies has been developed continuously as it is complementary to analytical/numerical modeling methods and an intermediate step between computer simulations and field measurements.

The benefits of physical modeling for studying wave propagation phenomena in seismology are numerous. First, the complexity of numerical modeling methods generally increases as a function of the heterogeneity of the medium, whereas in physical modeling, measurement accuracy does not depend on the complexity of the propagating medium (for instance highly heterogeneous media), but only on the experimental setup. Furthermore, seismic waves naturally propagate in the three dimensions of space although brute-force numerical modeling in a 3D medium can be very costly. In contrast to field conditions, in the laboratory environmental conditions can be maintained stable, the major measurement parameters are controlled and experimental artifacts may be identified accurately. Indeed, even for an active seismic source, the variability of measurements can vary considerably due to variations in experimental conditions while some parameters can be difficult to control or even estimate (e.g. source/receiver coupling, knowledge of the propagating medium). Lastly, the results obtained from reduced physical scale modeling require far less cumbersome experimental setups and fewer human resources than for field measurements. The progress of reduced scale seismology has mainly been driven by the development of sensing technologies. To situate the works presented in this paper, we recall several major steps in the development of physical modeling.

In their pioneering works, Rieber (1936) and Howes *et al.* (1953) studied the wave propagation phenomenon in laboratory by employing sensing methods based on ultra high-speed photographic techniques and small hydrophones. However, since then different ultrasonic sensing technologies have been employed. Currently, the two main technologies are piezoelectric based and laser based. Piezoelectric technology was used for reduced scale modeling by Olivier *et al.* (1954); Press *et al.* (1954) and then for several other purposes.

O'Brien (1955); Pant *et al.* (1992) studied propagation in isotropic media using this technology, which was also used to evaluate the accuracy of numerical modeling methods (Hilterman, 1970; Chen & McMechan, 1993; Favretto-Cristini, 2012) and reconstruction algorithms (French, 1974; Lo *et al.* , 1988; Pant & Greenhalgh, 1989b,a; Pratt & Worthington, 1988, 1990; Pant *et al.* , 1992; Dessa & Pascal, 2003; Jocker *et al.* , 2006; Campman & Dwi Riyanti, 2007). For several decades, there has been growing interest in using seismology to study the effects of cracks and anisotropy on wave propagation, and several authors Hsu & Schoenberg (1990); Rathore *et al.* (1991); Ass'ad *et al.* (1996); Brown *et al.* (1991); Cheadle *et al.* (1991); Chang *et al.* (1994); Luo *et al.* (2007); Ekanem *et al.* (2013) have applied reduced scale modeling methods based on piezoelectric sensors to study these effects.

Buddensiek *et al.* (2009); Fukushima (2009) highlighted and discussed several key issues related to piezoelectric sensors. First, the mechanical coupling between the sensor and the sample makes the measurement results dependent on the mechanical properties of the sample and on the mechanical load applied to the sensor. Also, their transfer function bandwidth may not be flat and resonance frequencies may generate strong ringing effects. Lastly, the contact surface of piezo-electric sensors can be comparable to or larger than field wavelengths, whereas under real field conditions the measuring areas of sensors (geophones, hydrophones and seismometers) are much smaller than the wavelengths.

For all these reasons, laser interferometry (Dewhurst & Shan, 1999) is an interesting alternative to piezoelectric sensors. Laser interferometry technology is based on the optical interactions of a laser beam with a vibrating surface. These measurements are contact-free, thus mechanical coupling effects are avoided. Other advantages of laser interferometry in comparison to piezoelectric technologies are that they have a much smaller sensing area and are capable of measuring amplitudes of the order of fractions of nanometers (Blum *et al.* , 2010; Bretaudeau *et al.* , 2011). Furthermore, for some applications it might be interesting to take advantage of quantitative measurements of surface particle displacement and particle velocity, in order, for example to estimate source strength. Several authors have applied laser interferometry to simulate seismic wave propagating phenomena at the laboratory scale.

Mention can be made of Nishizawa *et al.* (1997); Scales & van Wijk (1999, 2001); Scales & Malcolm (2003); Chekroun *et al.* (2009) who showed how laser interferometry can be used as a highly efficient experimental tool for studying wave propagation in heterogeneous media and multi-scattering effects. Laser ultrasonic sensing technologies have also been employed to evaluate signal processing algorithms such as in van Wijk (2006) and Mikesell *et al.* (2012), who studied correlation methods (Green's function retrieval) using datasets measured at reduced scale by laser interferometry, De Cacqueray *et al.* (2011) applied the double beam-forming method to laboratory scale data in order to separate different kinds of wave. Bodet *et al.* (2005) and Campman & Dwi Riyanti (2007) evaluated inversion algorithms using data obtained from laser-based physical modeling measurements. Bretaudeau *et al.* (2011) presented an experimental facility called MUSC (French acronym for Mesures Ultrasonores Sans Contact) dedicated to the high precision reproduction of massive seismic surveys at reduced scale. This facility incorporates a laser interferometer in a measurement bench employing designed for deducing the variance versatile multi-receivers and multi-source acquisitions. Bretaudeau *et al.* (2013) employed it to provide high quality experimental input in the study of the full waveform

inversion method in a near surface context.

In all the works mentioned above, only the vertical component of the particle displacement/velocity field was measured. Currently, multicomponent measurements are increasingly used on a routine basis under field conditions (Stewart, 2009; Hardage *et al.*, 2011) and dedicated signal processing/imaging methods have been developed to benefit from the vectorial nature of these measurements. However, only a few authors have tried to transpose multicomponent measurements to the context of controlled laboratory experiments. Sorge (1965) performed measurements of Rayleigh wave particle motion using piezoelectric sensors and Pant & Greenhalgh (1989c) proposed a measurement setup enabling vectorial measurements using different piezoelectric sensors for each component. Similar experimental setups have been used to evaluate signal processing algorithms, such as wave separation algorithms (Pant & Greenhalgh, 1991; Ruttly & Greenhalgh, 1993), and to discriminate out-of-plane reflections (Ebrom *et al.*, 1992). To the authors knowledge, the relatively limited development of multicomponent measurements at the ultrasonic scale is mainly due to the limitation imposed by piezoelectric technology. Indeed, Pant *et al.* (1992) showed that calibration must be done carefully to obtain good polarization measurements with piezoelectric sensors. By adapting several laser sensing technologies (Doppler velocimetry, multicomponent two-wave mixing technology), it is now possible to perform multicomponent measurements to fully characterize vectorial particle motion on the surface of a sample. These laser multicomponent measurements have been performed using different methods. For example, Monchalin *et al.* (1989), Bayón & Rasolofosaon (1993), Bayón & Rasolofosaon (1996) and Yamawaki & Saito (1996) employed technologies using two symmetrical incident laser beams in order to deduce the horizontal component from the scattered light intensity measured by a vertical photodetector. However, these technologies must control and focus several incident laser beams very accurately at the surface of the sample measured, which is a major drawback for physical modeling. A simpler way of measuring multicomponent data was demonstrated by Kim *et al.* (1994). It consists in measuring the vertical component of particle velocity using ultrasonic laser Doppler velocimeters with different angles of incidence. This method was then applied by Fukushima *et al.* (2003) for rock physics studies, by Ayers *et al.* (2011) to study Lamb wave polarization, and by Lebedev *et al.* (2011) to estimate elastic constants for anisotropic rocks. Blum *et al.* (2010), Blum & van Wijk (2010) presented a new setup to record multicomponent data by employing optical surface speckle to perform multicomponent measurements with only one incident laser beam. It was then applied to study elastic scattering due to fractures Blum *et al.* (2011). In order to design a multicomponent measurement bench dedicated to small scale physical seismic simulation, we upgraded the MUSC (French acronym for “Mesures Ultrasonores Sans Contact”) bench first built by Bretaudeau *et al.* (2011), by integrating a customized version of the laser interferometer presented in (Blum *et al.*, 2010). Thus the main aim of the study presented here is to assess the multicomponent measurement capabilities of this new tool applied to the physical modeling of seismic wave propagation phenomena. To achieve this, a detailed characterization of noise and measurement quality is performed, and an experimental test is conducted to illustrate the potentialities offered by multicomponent data for cavity detection.

The first part of this article is dedicated to the presentation of the MUSC measurement bench, with special emphasis given to the measurement principles of the new laser interferometer dedicated to multi-component measurement. Then, a study of the properties of the measurement noise of the bench is proposed. In the third part, the experimental data used for characterizing the quantitative measurements are presented and the polarization of surface waves is analyzed in the frequency domain. The fourth part of the article is dedicated to the comparison between synthetic measurements and experimental data. Special attention is paid to the description of the modeling method and the methodology used to estimate the source wavelet. Seismograms and instantaneous polarization attributes obtained from simulations and measurements are compared. To do this, original regularized

versions of instantaneous polarization attributes are introduced. The last part of the article presents an example of the advantage of multicomponent data for detecting shallow cavities using regularized instantaneous polarization attributes. Finally, conclusions and perspectives are presented.

4.4 Principles of reduced scale modeling and presentation of the MUSC measurement bench

Reduced scale physical modeling is based on scaling laws deduced from a dimensional analysis of the wave propagation equations. Basically, from dimensional analysis it can be shown that wave propagation is identical when spatial dimensions are divided by a given factor and frequencies are multiplied by the same factor. This property is used in reduced scale physical modeling to reproduce field measurements at a smaller scale. In the case of physical modeling with the MUSC measurement bench, the physical models are scaled in such a way that the frequencies propagated are between 40kHz and 1 MHz. More details are given in Bretaudeau *et al.* (2011).

4.4.1 General description of the MUSC measurement bench

The MUSC facility dedicated to physical scale modeling is composed of three key elements : 1) a seismic source and all the associated devices used to move it ; 2) a reduced scale physical model and several external elements used to support it ; 3) sensors and all the associated devices used to control and move them.

The interferometer and source displacements are electronically controlled with a displacement accuracy of respectively $8 \mu m$ and $100 \mu m$. Due to the high sensitivity of the laser interferometer (Ångstrom order displacements can be measured), the entire measurement bench is mounted on a specific damping system to isolate the sample under investigation from external vibrations.

Compared to previous works by Bretaudeau *et al.* (2011, 2013), the main improvement concerns the integration of a new sensing instrument (laser interferometer) in the MUSC measurement bench. The new laser interferometer enables the acquisition of massive multicomponent measurement data sets and this article mainly focuses on the new opportunities provided by the instrument. Elements 1) and 2) have already been presented and the reader can refer to the works of Bretaudeau *et al.* (2011) for more details.

4.4.2 Description of the multicomponent measurement process of the laser interferometer

The sensing element in the MUSC laboratory for recording surface particle displacement is an innovative laser interferometer (Tempo-2D, Bossa-Nova Tech) which can measure the horizontal (in-plane) and vertical (out-of-plane) components of particle displacement simultaneously. It is an updated version of the prototype device described by (Blum & van Wijk, 2010).

The sensing principle is based on two-wave mixing using photorefractive crystal technology with specific adaptations to measure the horizontal and vertical components simultaneously (Blum & van Wijk, 2010). This technology uses the optical speckle produced by the roughness of the surface under measurement. Once the incident laser beam hits the surface of the sample being measured (fig. 4.1), the beam is backscattered in several directions around the incident direction (speckle effect). The reflected laser beams first pass through a focal lens, then through an optical system and finally through

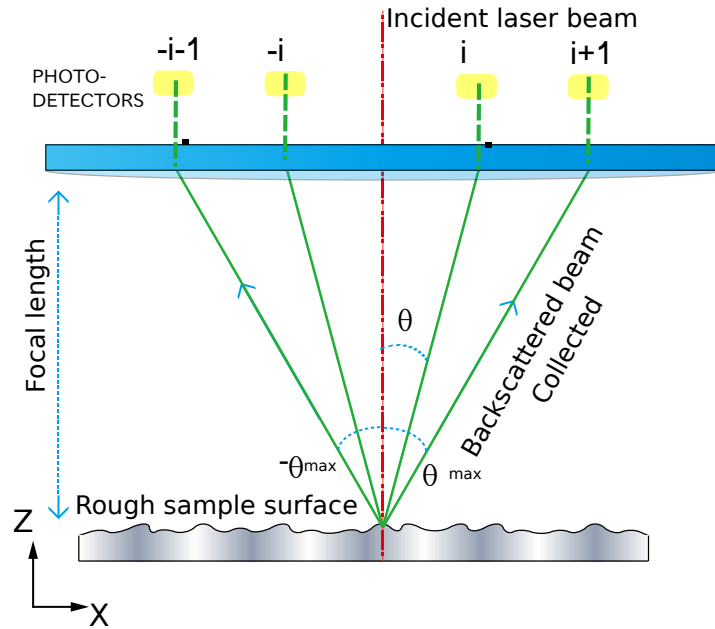


FIGURE 4.1 – Illustration of the back-scattered laser beams measurement from sample surface

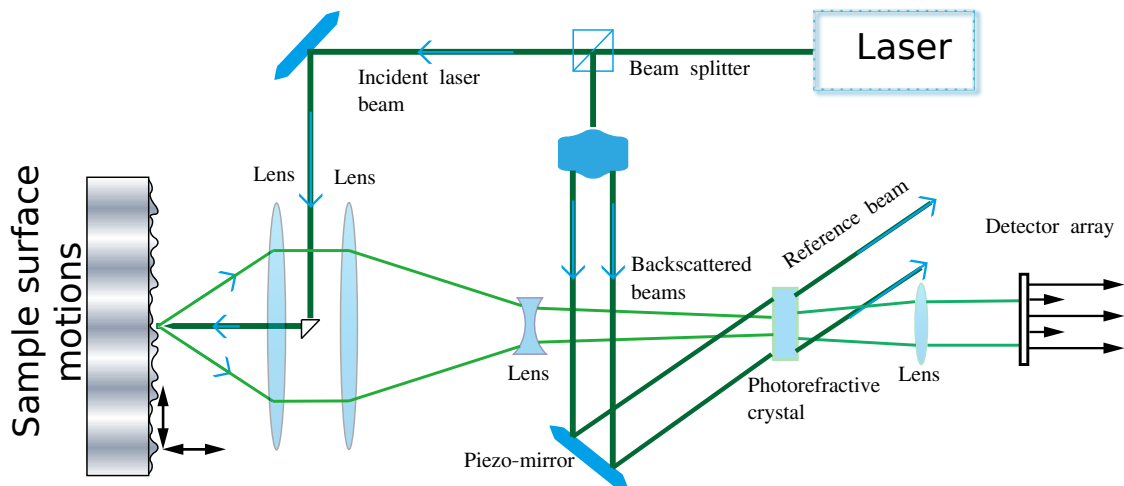


FIGURE 4.2 – Simplified principles of the two waves mixing laser interferometry (adapted from TEMPO Serie Performance Update Report (2009))

a photorefractive crystal (fig. 4.2). The reflected beams and the reference beam interact in the photorefractive crystal. The physical properties of the photorefractive crystal cause these two incoming laser beams to generate local variations of the index of refraction (dynamic hologram). These variations of the index of refraction lead to a refracted “new reference beam” with a similar front matching the backscattered beams. This process enables correcting the variations of the back-scattered beams due to surface roughness and ambient vibrations (low frequency content of the backscattered beam signals). The optical intensities of the sum of the outgoing “new reference beam” and the transmitted backscattered laser beams are finally measured by 16 photodiodes (fig. 4.1) in order to capture the laser beams with different scattered angles (θ in fig. 4.1) with an effective aperture up to $\theta_{max} = 31^\circ$. Finally the particle displacement is deduced by homodyne detection.

By considering a couple of symmetric laser photodetectors (see fig. 4.1 in which the indexes used for symmetric photodetectors are $-i$ and i), the vertical and horizontal displacements of the vibrating surface, respectively denoted by U_{out} and U_{in} can be deduced from the following formula :

$$\text{Int}_{-i} - \text{Int}_{+i} \propto \left(\frac{4\pi U_{in}}{\lambda} \right) \sin(\theta), \text{ for the in-plane displacement } U_{in} \quad (4.1)$$

$$\text{Int}_{-i} + \text{Int}_{+i} \propto \left(\frac{4\pi U_{out}}{\lambda} \right) \cos(\theta), \text{ for the out-plane displacement } U_{out} \quad (4.2)$$

where $\text{Int}_i +$ is the optical intensity measured by the photodetector i , θ are the angle between the photodetector and the incident laser beam, respectively (fig. 4.1), and λ is the optical wavelength associated with the laser beam (in the case presented $\lambda = 532 \text{ nm}$). In order to create enough speckle (to enhance backscattered laser beams with large incidence angles θ) the reflected surface of the samples must be sandpapered.

As shown in the equation 4.1 the factors $\sin(\theta)$ and $\cos(\theta)$ weight the measurement of each component, respectively. This explains why horizontal component measurements are mainly influenced by the photodetectors located at the extremity of the aperture whereas the out-of-plane component measurements are dominated by photodetectors located in the center of the array.

It is noteworthy that the interferometer can provide measurements in absolute displacements.

Furthermore, since the formula 4.1 involves a difference of the optical intensities which is less robust than the sum in equation 4.2, the horizontal component is expected to be much more sensitive than the vertical component to errors in optical focalization and to defects in sample surface sandpapering (inducing inhomogeneous speckle). The symmetry of the intensity of backscattered light (after time averaging or without sample surface motion) provides an indication of in-plane measurement quality. This indicator is called the In-Plane-Error-Indicator (IPEI).

4.5 Measurement noise study

The following part is dedicated to the study of the noise affecting the measurements from the laser interferometer, especially to characterize the source independent noise in order to better interpret the outputs from the measurements.

4.5.1 Assumptions and analysis

The laser interferometer measurements are assumed to be affected by four categories of error :

E1 : noise and errors due to the laser interferometer ;

E2 : errors from measurement bench positioning ;

E3 : external sources (vibrations, electromagnetic perturbations, thermal noise ...);

E4 : errors resulting from the acquisition chain and signal digitalization.

Note that the errors of the last category (E4) are investigated apart and the level of statistical variations is several orders of magnitude lower than the other sources of noise.

To characterize the noise, the following assumptions are made :

A1 : it is assumed that the noise and the signal are non-correlated, so that the noise is additive to the measurements ;

A2 : the signal is perfectly reproducible and the noise can be described as a stationary ergodic process with independent realizations.

Regarding the latter assumptions, in order to characterize the noise, the measurements are recorded under the same conditions as the conventional measurements, but by removing any controlled mechanical source. Under these conditions, statistical variations mainly stem from the laser interferometer (E1) and external source perturbations (E3).

Each random statistical sampling is a time series measurement with a duration of 0.12 ms at a sampling frequency of 10 MHz (resulting in 12000 points per time series). Three different measurement locations at the surface of the sample are considered and for each of them, 5120 time series are measured for the in-plane and out-of-plane components simultaneously.

4.5.2 Noise power spectrum density

The first stage of the noise characterization consists in evaluating the power of the noise in the spectral domain for the two component channels independently, by performing power spectrum density (PSD). For each time series, the following data processing is applied :

- 1) The average signal is removed to obtain the AC signal ;
- 2) a Hanning window apodization is applied to the temporal series to mitigate the spectral leakage from the windowing and windowed data are weighted by a factor equal to 2 (to correct the power losses due to the Hanning window) ;
- 3) Discrete Fourier transforms are computed after zero-padding to obtain 2^{14} (16384) signals points.

The resulting frequency step size is about 305 Hz. For the frequency f the spectral density is computed by the following formula :

$$\text{PSD}(\text{signal}(t), f) = \frac{2 \cdot \Delta_t |FFT(\text{signal}(t), f)|^2}{N_{\text{signal}}} \quad (4.3)$$

where $|FFT(\text{signal}(t), f)|$, N_{signal} , Δ_t stand for the modulus of the fast Fourier transform (FFT) at frequency f , the number of points of the time signal (without zero padding), and the time sampling interval of the signal, respectively. Prior to computing the PSD in decibels, the values of the noise level are normalized by $1 \text{ nm}^2/\text{kHz}$.

In order to estimate the convergence of the statistical estimators with respect to the data set dimensions, a data set has been split into two buffers : one buffer containing odd indexed realizations and the other buffer even indexed realizations. Estimations of the PSD described above has been carried out for the odd and even indexed data buffers independently. Since each realization is supposed independent but follows the same statistical law, for large enough number of realization, the PSD estimators

should converge. In the figures 4.3 and 4.4 are depicted PSD curves computed with odd, even and all indexed realizations (respectively in green, red and blue). In both figures, the shapes of PSD curves are very closed, even for peaks. However, one may notice that the variance of the PSD seems to be larger for the horizontal component (fig. 4.4) than for the vertical component (fig. 4.3).

Then, a comparison of the PSD for the data sets corresponding to different positions is carried-out. For all three positions, the PSD curves obtained from the vertical component (fig. 4.5) present similar qualitative behaviors, with the main difference between them stemming from a multiplicative factor (constant offset on the vertical axis in the decibel units). However, for a horizontal component (fig. 4.6), even if the PSD curve shapes are the same for positions 1 and 2 (red and green curves), the shape of the PSD for position 3 is clearly different. The variations of PSD curves in comparison to the measurement positions are obviously related to the local aspects (surface sandpapering) of the surface under measurement which may have a strong influence on the speckle. Since the measurement process of in-plane components involves subtractions of the optical intensities measured from the photodetectors located at the extremities of the array (eq. 4.1) as opposed to the out-of-plane component measurement process (eq. 4.2), it is obvious that the in-plane component is much more sensitive to speckle variations than the vertical component (especially when the speckle is inhomogeneous). This greater sensitivity of the horizontal component to speckle makes the noise of the horizontal component more variable regarding measurement positions compared to the vertical component.

However, the PSD curves for all the positions share common properties : the noise level of the vertical channel is clearly much lower than for the horizontal channel. On both channels, the noise PSD presents amplitude peaks restricted to a small bandwidth (with the current processing the width of the peaks is about 4 kHz) and the level of noise decreases with frequency.

4.5.3 Statistical noise correlations and noise polarization

The PSD noise analysis presented considered the vertical and the horizontal channels independently. In the case of polarization measurements, the linear correlations between the noise from each channel as well as the polarization of the noise can have a considerable influence on the particle motion observed (De Meersman *et al.* , 2006). Pearson's product-moment coefficient (PPCM) can be used to evaluate the linear correlation level between two signals (Heyer, 1982). The estimation of the PPCM is computed according to steps 1) and 2) from the PSD computation process for both channels and then the following formula is applied :

$$PPCM(f, \text{signal}(t)_{out}, \text{signal}(t)_{in}) = \frac{\mathbb{E} [FFT(\text{signal}(t)_{out}, f)^* \cdot FFT(\text{signal}(t)_{in}, f)]}{\sqrt{\mathbb{E} [|FFT(\text{signal}(t)_{out}, f)|^2] \cdot \mathbb{E} [|FFT(\text{signal}(t)_{in}, f)|^2]}} \quad (4.4)$$

where \mathbb{E} , signal_{out} , signal_{in} are respectively standing for the averaging operator, the in-plane and out-of-plane time series resulting from the processing steps 1) and 2) of the PSD.

The real and the imaginary part of the PPCM are shown in figures 4.7 and 4.8. In these figures, the peaks correspond to the noise peaks already mentioned in the previous part. Whereas the real part of the PPCM has a magnitude almost equal to 1, the amplitude of the imaginary part has a maximal magnitude of 0.04. The very low amplitude of the imaginary part of the PPCM reveals that the noise affecting the horizontal and the vertical channels are statistically in phase.

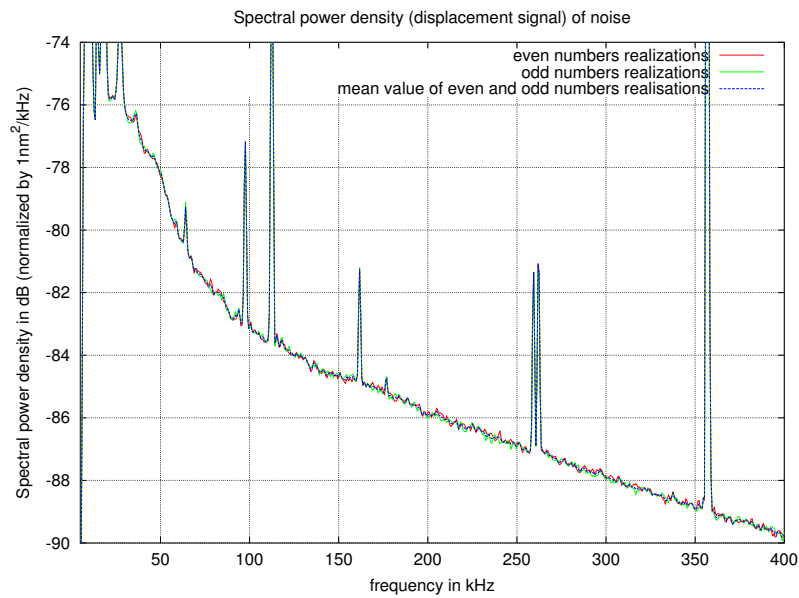


FIGURE 4.3 – Comparison PSD estimators for the vertical component from 5 kHz to 400 kHz

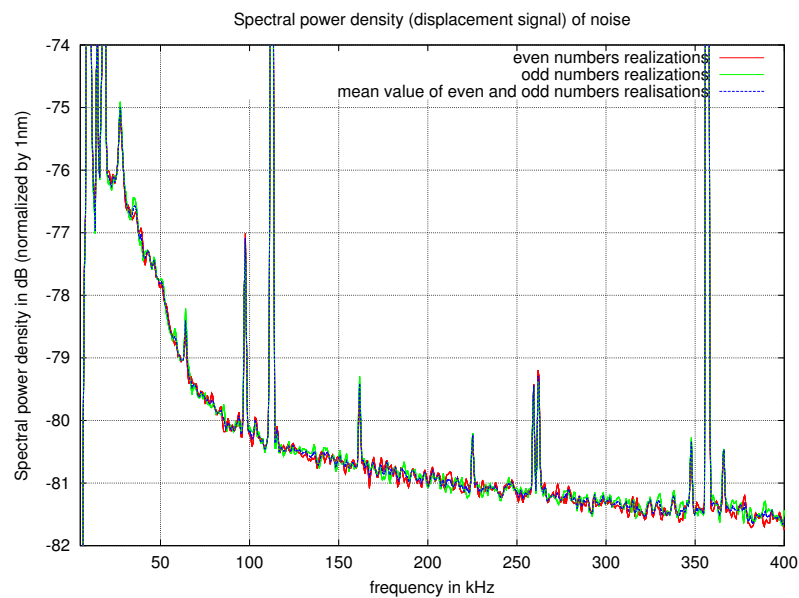


FIGURE 4.4 – Comparison PSD estimators for the horizontal component from 5 kHz to 400 kHz

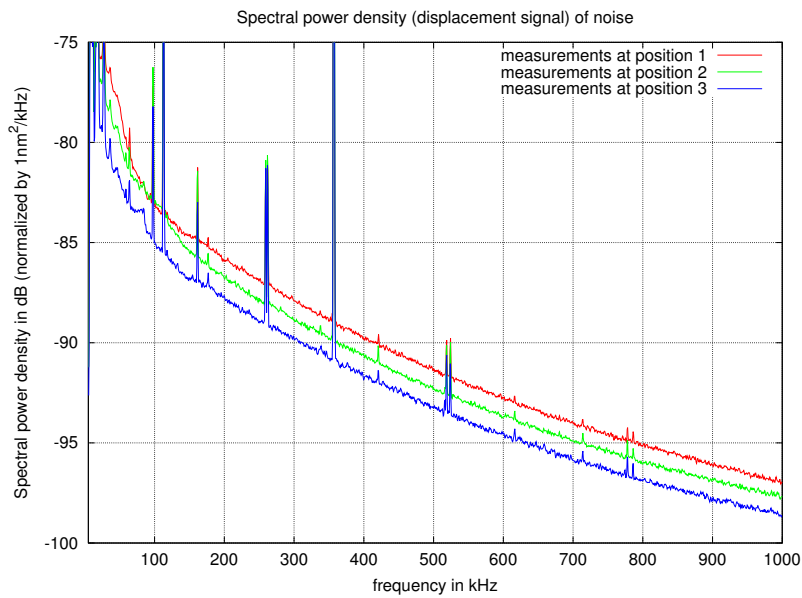


FIGURE 4.5 – Comparison PSD noise estimators vertical component for different positions

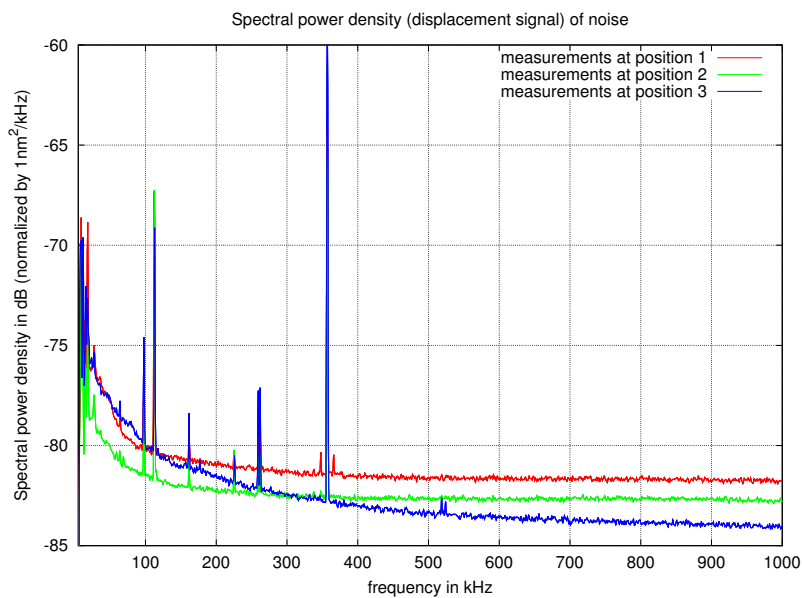


FIGURE 4.6 – Comparison PSD noise estimators horizontal component for different positions

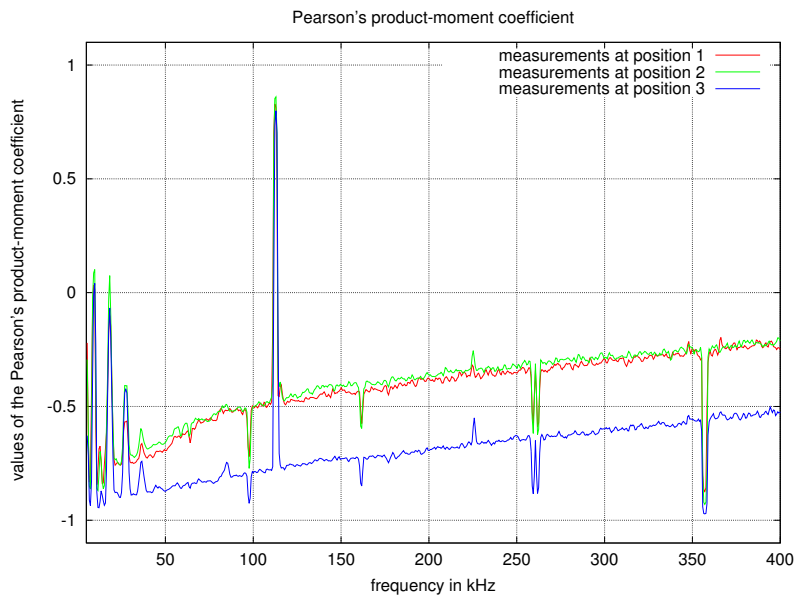


FIGURE 4.7 – Real part of the PPCM of the noise for three different positions

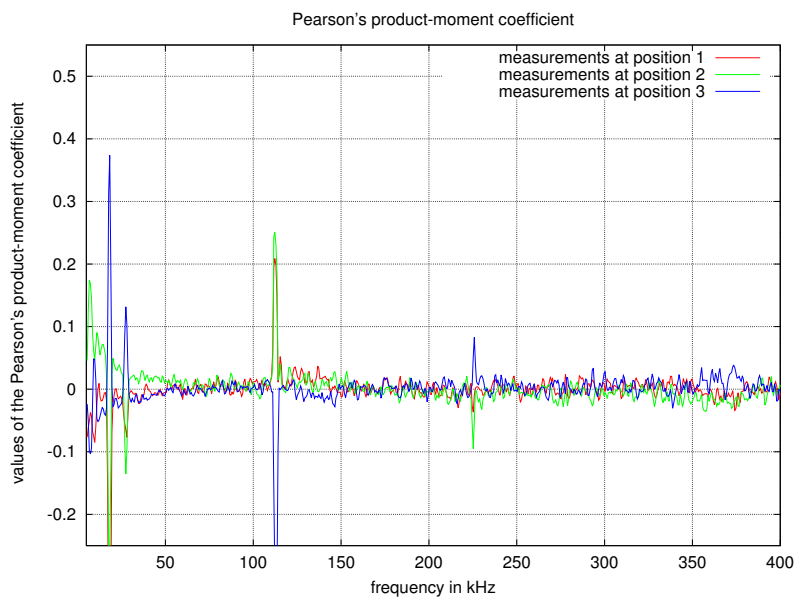


FIGURE 4.8 – Imaginary part of the PPCM of the noise for three different positions

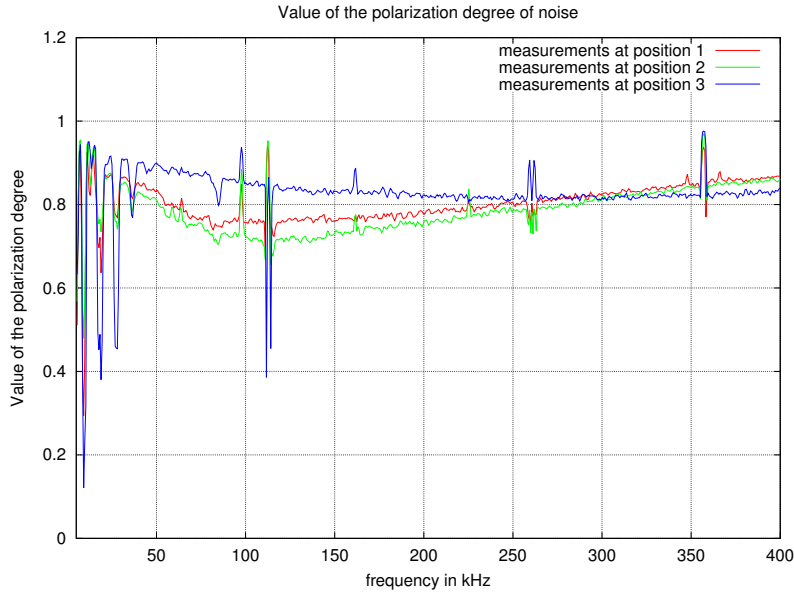


FIGURE 4.9 – Degree of polarization (DOP) of the noise for three different positions

Another relevant indicator for the polarization analysis is the degree of polarization (DOP). Samson (1977) proposed and applied a definition of the DOP to the seismic data. The degree of polarization corresponds to the degree of mixing the different polarization states composing a signal. For instance, a mixture of energetically equivalent polarization states leads to a DOP close to zero whereas if a signal is composed of only one polarization state then the DOP equals 1. From steps 1) and 2) of the PSD estimation, a correlation matrix $\mathbf{S}(f)$ is built-up for each realization and frequency, then the average matrix $\langle \mathbf{S}(f) \rangle$ over all the realization is computed. From this matrix, the degree of polarization according to Samson (1977) is computed from the following formula :

$$\text{DOP}(\mathbf{S}(f)) = \sqrt{\frac{2 \cdot \text{trace}(\mathbf{S}(f)^2) - (\text{trace}(\mathbf{S}(f)))^2}{\text{trace}(\mathbf{S}(f))^2}} \quad (4.5)$$

Figure 4.9 depicts the DOP for three different measurement positions. As with the correlation coefficients and the PSD of the horizontal component measurements, the DOP curves presented for positions 1 and 2 are similar whereas the DOP for the position 3 behaves differently. However, for all the positions, the DOP values are centered around 0.8 (with the exception of frequencies corresponding to noise peaks), tending to prove that the noise is strongly polarized. Furthermore, since the imaginary part of the correlation coefficients is negligible compared to the real part, we can deduce that the dominant polarization states of the noise are linearly polarized motion states with a tilt angle.

4.5.4 Noise statistical distributions

In this part of the article, we take advantage of the large number of realizations to analyze the statistical distributions of the noise in greater depth.

The previous study of the PSD provided information on the amplitude of the noise affecting the measurements, which is the sum of two terms : one related to the average noise value of the noise (corresponding to the first term in the equation 4.6) and its variance.

$$\text{PSD}_{\text{noise}(f)} = |\mathbb{E}[\text{noise}(f)]|^2 + \sigma_{\text{noise}(f)} \quad (4.6)$$

In equation 4.6 the term $\sigma_{\text{noise}(f)}$ is introduced for the variance : “Var[noise(f)]”.

When averaging similar measurements $n_{\text{realizations}}$ times to reduce the noise level, the two terms of the right-hand side in the equation 4.6 influence the measurements in two different ways. Since realizations of the noise are assumed to be independent, the variance of the noise $\sigma_{\text{noise}(f)}$ is expected to decrease as in $\frac{\sigma_{\text{noise}(f)}}{n_{\text{realizations}}}$ whereas the squared average of the noise term $|\mathbb{E}[\text{noise}(f)]|^2$ converges to the square mean value of the noise distribution, called $|\mu_{\text{noise}(f)}|^2$. If the mean value of the noise distribution $\mu_{\text{noise}(f)}$ differs from zero, the noise will induce a bias in the measurements and the PSD does not equal the variance of the noise. Another reason for analyzing the statistical distributions is to check the Gaussian nature of the noise distributions.

A noise analysis was conducted for 8 frequencies defined from the previous results : 4 frequencies corresponding to “pathologic” frequency peaks : 113, 162, 260, 357 kHz and 4 “regular” frequencies corresponding to 50, 150, 500, and 800 kHz.

Only the results for 2 representative frequencies are reported in this paper but details concerning other frequencies are available in the supplementary material proposed herein. The frequencies 113 kHz and 150 kHz were also selected because they correspond to frequencies in the bandwidth of typical reduced scale measurements.

In the frequency domain, since the Fourier decomposition yields statistical distributions of complex numbers, these distributions can either be represented in Cartesian coordinates (considering the real and imaginary parts) or in polar coordinates (modules and arguments). Figures 4.11-4.10 show that the histograms of the phase of the noise are almost flat, meaning that the noise statistics do not favor any particular phase. In this case, the distribution obeys the circular probability law. Since noise statistics are phase independent, it is possible to fully characterize the statistical distribution according to only one direction in the complex plane and we choose to study the real part.

Figures 4.12-4.13 show the histogram of the real part of the noise realization and the normal distribution computed from the empirical mean and variance. According to the realization values the data are ranked into 35 bins (blue rectangles) and the normal distributions estimated from the empirical statistical parameters are plotted in red. The empirical and mean variances are grouped in tables 4.1-4.2 in the appendix. In order to study whether the resulting noise distributions can be considered as normal distributions, a Lilliefors test (modification of the Kolmogorov-Smirnov’s test to evaluate the normality for a distribution with unknown variance and mean, (Lilliefors, 1967)) is performed with the null hypothesis : “the realizations follow a composite normality statistical distribution” and the level of significance of 0.05. The Lilliefors test validates the assumption of normality for the noise of the vertical component at a frequency of 150 kHz, but rejects it for the noise peak at 113 kHz. For the horizontal component, the assumption of normality is not validated at a frequency of 150 kHz or at a frequency of 113 kHz. However, it is important to bear in mind that measurements are often averaged to improve the signal to noise ratio and in the case of sufficiently large numbers of averages, according to the central limit theorem, the averaged realizations converge to a normal distribution.

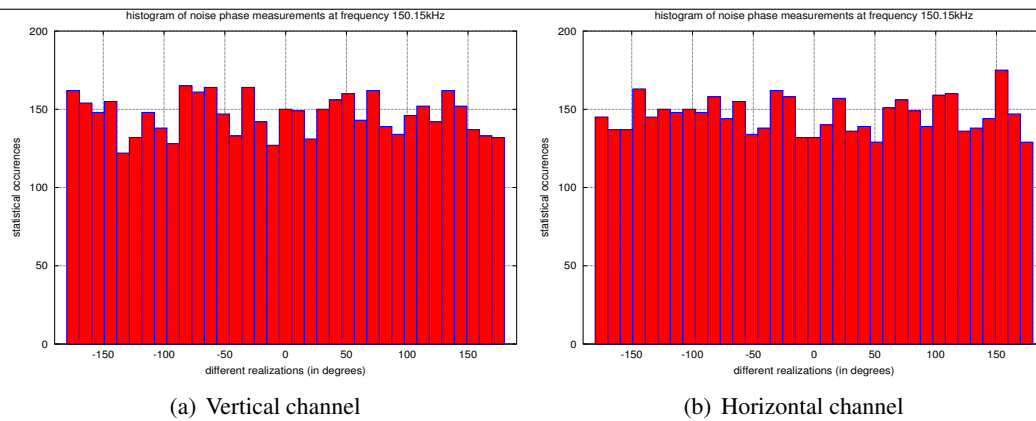


FIGURE 4.10 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 150 kHz (“regular frequency”)

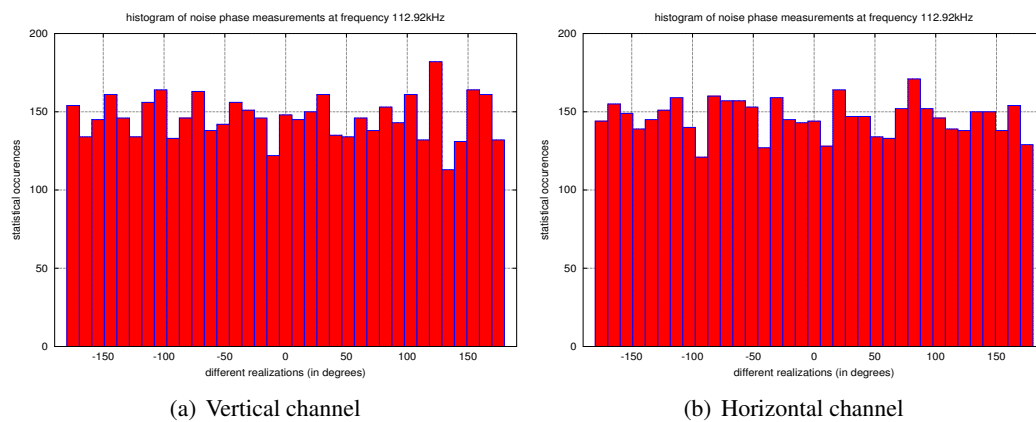


FIGURE 4.11 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 113 kHz (“pathological frequency”)

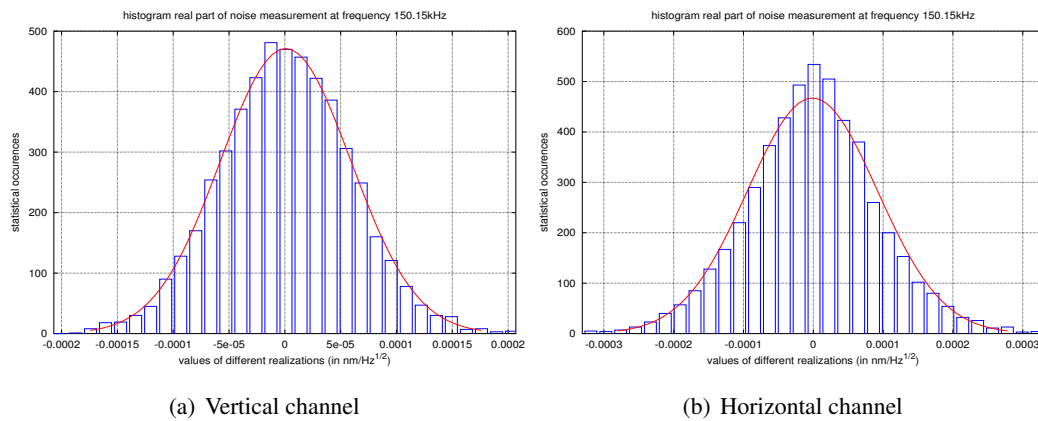


FIGURE 4.12 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 150 kHz

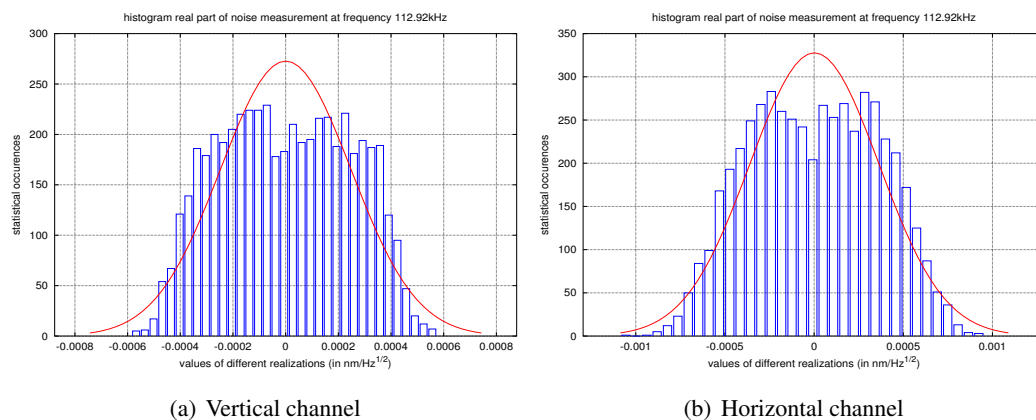


FIGURE 4.13 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 113 kHz

The empirical variances, standard deviations and means are evaluated for all the frequencies studied for both measurement channels and summarized in tables 4.2 and 4.1. As detailed above, equation 4.6 can be used to explain the PSD as the sum of two terms, the first related to the variance of the noise (interpreted as a measurement of the statistical scattering term) and the second related to the square of the average (interpreted as a measurement bias). The values in tables 4.1 and 4.2, show that when frequency peaks are avoided, the mean noise value is at least 2 orders of magnitude less than the standard deviation. First, if we return to the interpretation of the equation 4.6, it means that for “regular” frequencies, the measurement noise can be reduced efficiently by averaging and, secondly, that a good approximation can be obtained for deducing the variance of the noise from the PSD.

4.5.5 Conclusion on noise analysis

Here we provide a partial conclusion concerning the study of noise and several properties of the source independent noise affecting the measurements are highlighted. For both components, the PSD of the noise is strongly frequency dependent, with several very stiff and narrow peaks (about 4kHz wide with the processing presented). The level of noise affecting the measurements of the horizontal component is higher than the noise affecting those of the vertical component. Even if the number of positions studied is too small to enable conclusions, it is clear that the noise affecting the measurements varies much more along the measurement positions for the horizontal component than for the vertical component. As mentioned already, the origin of this phenomenon stems from the local variations of surface roughness causing local changes of the optical speckle. In fact, since the measurements of the horizontal component are much more sensitive to speckle than the vertical component, this means that the horizontal component is more strongly dependent on local variations of the optical surface.

The noise distribution between the vertical and the horizontal channels is statistically correlated and the degree of polarization of the noise is relatively high (also presenting variations with the speckle). The statistical distributions of noise clearly show that for regular frequencies (outside the peak frequencies), the mean noise values are much smaller than the standard deviation, confirming the efficiency of measurements averaging. Moreover, when averaging the measurements, although the noise is not normally distributed for all the frequencies, the noise statistics converge to the normal distribution. Furthermore, since the noise level is expressed in terms of displacement amplitudes, it is possible to evaluate the number of averages needed to reach a given signal-to-noise ratio (SNR) for a given magnitude of particle displacement.

4.6 Surface wave polarization analysis

Since the version of the MUSC bench presented enables measuring the horizontal and the vertical components of the particle displacement simultaneously, it is possible to evaluate the polarization observables. Apparent polarization observables can be intuitively understood as non-dimensional physical quantities describing the relative relationship between the components of a signal. First in optics (Stokes, 1851), then in quantum physics (Fano, 1957) and later in geophysics several formalisms have been employed to describe the polarization of wave fields, such as those proposed by Boore & Toksöz (1969); Samson (1977, 1983); René *et al.* (1986); Vidale (1986); Morozov & Smithson (1996); De Meersman *et al.* (2006); Kulesh *et al.* (2007). When dealing with two orthogonal component measurements, the simplest polarization observable is the ratio between the measured components. In the case of the spectral ratio between the horizontal and vertical component (HVSR), this quantity has the advantage of having already undergone analytical study for simple configurations (Malischewsky

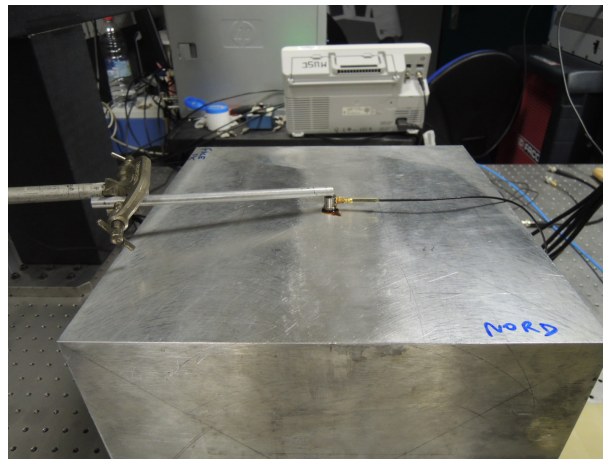


FIGURE 4.14 – Aluminum block with the piezo-electric source used for performance assessment of multicomponent measurements of the MUSC measurement bench. In the middle of the top face, an area has been sanded to get obtain homogeneous enough speckle diffusion of laser light in order to enable horizontal particle displacement measurements

& Scherbaum, 2004; van Dalen *et al.* , 2011). In the current section, our objective is to study the Rayleigh wave polarization measured at the surface of a homogeneous aluminum block and to quantify the limits of such measurements with the latest updates in the MUSC measurement bench.

4.6.1 Experimental settings and raw signals

Blum *et al.* (2010) presented polarization measurements by using a prototype version of the laser interferometer. From their results, they observed small time delays between the two channels, i.e. the two components, which significantly deteriorate the polarization parameters. Here, we propose a detailed study of the polarization measurements obtained with the new version of the interferometer integrated in the measurement bench. We evaluate polarization measurement capabilities from the measurements performed on the surface of an aluminum sample with 300 mm sides (4.14). The mechanical properties of the aluminum block are considered well-known since P-wave and S-wave velocities had been estimated accurately from independent measurements in several transmission configurations. The parameter values are summarized in appendix 4.11.2. In the frequency range considered (i.e. about [20 KHz ; 800 KHz]), the intrinsic attenuation in aluminum is considered low enough to be neglected.

The source is a piezo-electric transducer with an effective diameter of 1/4 inch. The electrical signal sent to the source is a Ricker shaped wavelet with a central frequency of 250 kHz ; however, this signal is distorted by the transfer function of the transducer and the associated coupling effects. Measurements were performed on each side of the source with a maximal offset of 105 mm and a spatial sampling of 1 mm.

The measurements of the vertical and horizontal components contain two parts : a “pre-trigger” part prior to source triggering (only noise recording as in the previous section) with a duration of 0.6 ms, followed by a “post-trig” part where the source is active and the propagating signal is recorded. All the signals are recorded with a sampling frequency of 10 MHz and each signal is an average of 256 measurements with a time delay of 0.25s between each measurement.

Raw data are presented in figures 4.15-a and -b. To enhance weak events, a clip percentile of

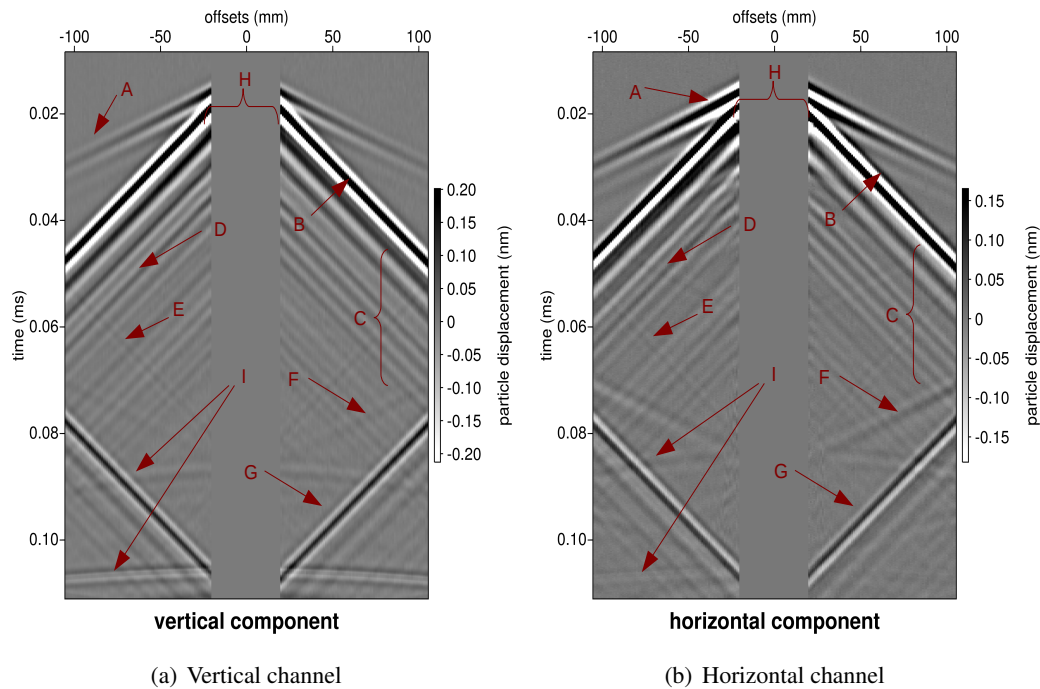


FIGURE 4.15 – Raw data with first arrivals, A : P-wave at the surface, B : Rayleigh wave, C : Ringing effect due to the source transfer function, D : converted P-P waves, E : converted P-S waves, F : converted Rayleigh-P, G : converted Rayleigh-Rayleigh, H : muted offset (distorted since too close to the source), I : reflections from the bottom and the sides of the model

99.85 % was used to edit these figures. As expected, the signals recorded on the vertical component are symmetrical in relation to the source position whereas the signals of the horizontal component are anti-symmetrical on each side of the source. The “P-wave” with a grazing incidence at the surface is clearly visible on these figures as is the Rayleigh wave (arrows A and B). The piezo-electric source generates a strong ringing effect indicated by the bracket indicated by C. Multiple converted waves are also visible despite their weak amplitudes : several reflections and converted waves from lateral boundaries are indicated by arrows D, E, F and G and the reflections from the bottom of the sample are indicated by arrow I.

4.6.2 Signal pre-processing

As already mentioned, HVRS is probably the simplest tool for studying polarization observations. However, great attention must be paid to the separation of different kinds of waves before polarization analysis. The following paragraphs provide details concerning the processing used for selecting the Rayleigh wave, in view to performing quantitative polarization analysis.

Although slowness and wavenumber domains can provide convenient representations for extracting different kinds of wave, when working in these domains, the measurement positions are weighted and summed-up so that the discrepancies between receivers are no longer visible. Another option would have been to separate different waves according to their slowness and perform polarization analysis in the space-frequency domain. This option was studied but the limited offsets cause windowing effects that generate undesirable artifacts. The block dimensions allow suitable acquisition offsets facilitating the separation of P-waves and Rayleigh waves and the elimination of the multiple reflections from boundaries, by simply time-windowing the data. For these reasons, most of the raw

data pre-processing was performed in the space-time domain and then in the space-frequency domain for polarization analysis.

In the time domain, great care was paid when extracting the different seismic phases, since windowing in the time domain becomes a convolution in the frequency domain, which cannot be removed by dividing one component by another. If the events of interest share the same bounded time support, an efficient distortion-free solution consists in applying the same time window for all channels. However with the current data set, the strong ringing effect from the source extends the duration of the source wavelet. This makes it difficult to define a bounded time support for the extraction of the Rayleigh wave which is not contaminated by boundary reflected waves. In particular, two kinds of problem occur. Firstly, as mentioned particular attention must be given to selecting a time window not affected by other events. A second difficulty is that of using the same time window for the vertical and the horizontal components on the Rayleigh wave. Indeed, Rayleigh waves present an inherent phase quadrature (van Dalen *et al.*, 2011) between the vertical and the horizontal components. For oscillating events this phase delay prevents the vertical and horizontal components from reaching a zero value at the same time. Thus it makes it difficult to use the same time window on both components without causing signal distortions. To mitigate these problems, a solution based on pre-processing in the frequency domain is proposed.

The principle of this processing consists in partially compensating the ringing effects of the source in order to obtain less oscillating wavelets with more bounded time support. As it is not strictly a source deconvolution, this processing could be considered more as a “wavelet compression”. The principle is to multiply frequency domain signals for both components by coefficients such that when returning to the time domain, the support of the events of interest is more bounded. In practice, a “compression wavelet” is defined from the expected wavelet in the frequency domain. The choice of the “compression wavelet” is arbitrary, the main property of interest is the capability to reduce the time support of the event in comparison to the original seismograms. In the case presented here, the selection of the “compression” wavelet was performed by isolating an event corresponding to the Rayleigh wave. Then a filter was defined so that the original Rayleigh wavelet selected became a Ricker shaped signal (as sent to the piezo-electric source). This “wavelet compression” process is particularly suitable for polarization analysis because both components are multiplied by the same factor in the frequency domain, so it is removed naturally when dividing one component by the other..

After, this pre-processing, only receiver positions located at a distance between 69mm and 74mm from the source are not affected by the P-P reflections from the lateral boundaries. Figure 4.16 presents the isolated waveform for the vertical and the horizontal components.

In the bandwidth considered, between 210 kHz and 410 kHz, for the isolated Rayleigh events, the signal to noise ratio (SNR) for the horizontal component varies between 24 dB and 43 dB, while for the vertical component it varies from 34 dB to almost 50 dB. In order to compute the PSD estimators of each channel, since only one realization of the noise is given by position (using the pre-trigger part of the traces), we use a multi-taper method based on Riedel’s tapers (Riedel & Sidorenko, 1995) to reduce the variance of the PSD estimators. More details are given in appendix 4.11.3.

Note that the decrease of amplitude due to geometrical spreading can be observed on the overall data set. However, locally, on the horizontal component, amplitudes can present slight oscillations of about $\pm 4\%$, as shown in figure 4.17. These oscillations correlate well with the fluctuations of the noise root mean square values computed from the pre-trigger (black curve in fig. 4.17). As has already been mentioned for the variations of the noise PSD of the horizontal channel, these oscillations are probably related to slight inhomogeneities of the sandpapered surface, which modifies the optical speckle from one measurement point to another.

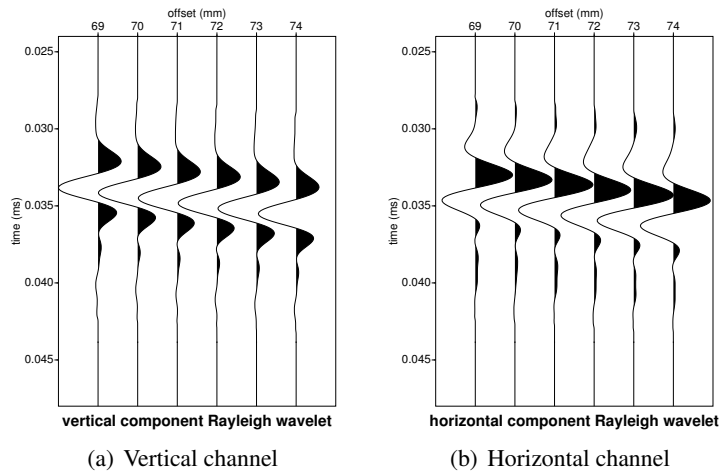


FIGURE 4.16 – Rayleigh wavelet extracted after pre-processing

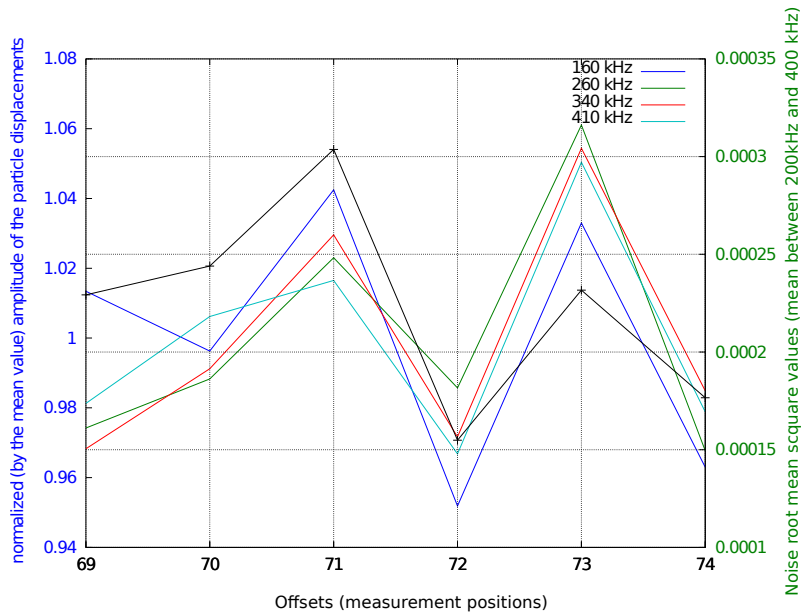


FIGURE 4.17 – Color curves depict the amplitude of surface waves with respect to the offsets for different frequencies. The root mean square value of the horizontal component noise PSD is depicted by the black curve

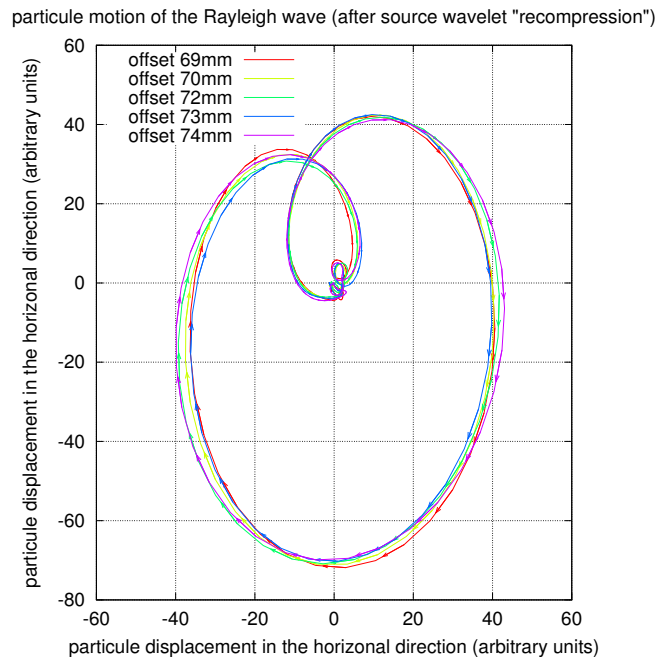


FIGURE 4.18 – Measured particle motions of the Rayleigh wave in the time domain. The different curves are representing different offsets

4.6.3 Observed polarization of the Rayleigh wave in the frequency domain

As already mentioned, the polarization of the Rayleigh wave in case of half-space configurations is well established theoretically (Auld, 1973; Malischewsky & Scherbaum, 2004; van Dalen *et al.*, 2011) and used in our context to evaluate the feasibility and the fidelity of polarization measurements obtained from the MUSC measurement bench. Figure 4.18 shows the particle motion obtained from the signal after pre-processing (fig. 4.16) in the time domain. In this figure, the arrow indicates the direction of the particle motion for increasing times, since the wave is propagating. In order to evaluate the fidelity of the polarization measurements quantitatively, the ratio between the horizontal component to the vertical component (HVSR) is compared to theoretical values in the frequency domain.

Based on the mechanical properties of the aluminum (table 4.2 in the appendix) and on the ellipticity formula for Rayleigh waves (Malischewsky & Scherbaum, 2004; van Dalen *et al.*, 2011), the absolute value of the HVSR is equal to 0.6367 and the phase -90° . Since the aluminum sample is surrounded by air, in the strict meaning Rayleigh waves become pseudo-Rayleigh waves (Roever *et al.*, 1959). However, since the contrast between the impedance of air and aluminum is very high, energy radiations in the air are very weak and analytical computations showed that traction free boundary condition assumption generates a negligible error on the polarization. Figures 4.19 a-c present the particle motions at different offsets and different frequencies. To allow the comparison between different measurement positions, the amplitudes were normalized as a function of the correct values of displacement (considering the norm of the vectorial displacement). It can be seen that the motions of particles from different positions are in good agreement with the predicted motions (black dotted lines in fig. 4.19 a-c) but some variations occur. Considering the very high levels of SNR, these variations are more likely due to the variations of the amplitude of the horizontal component in relation to the

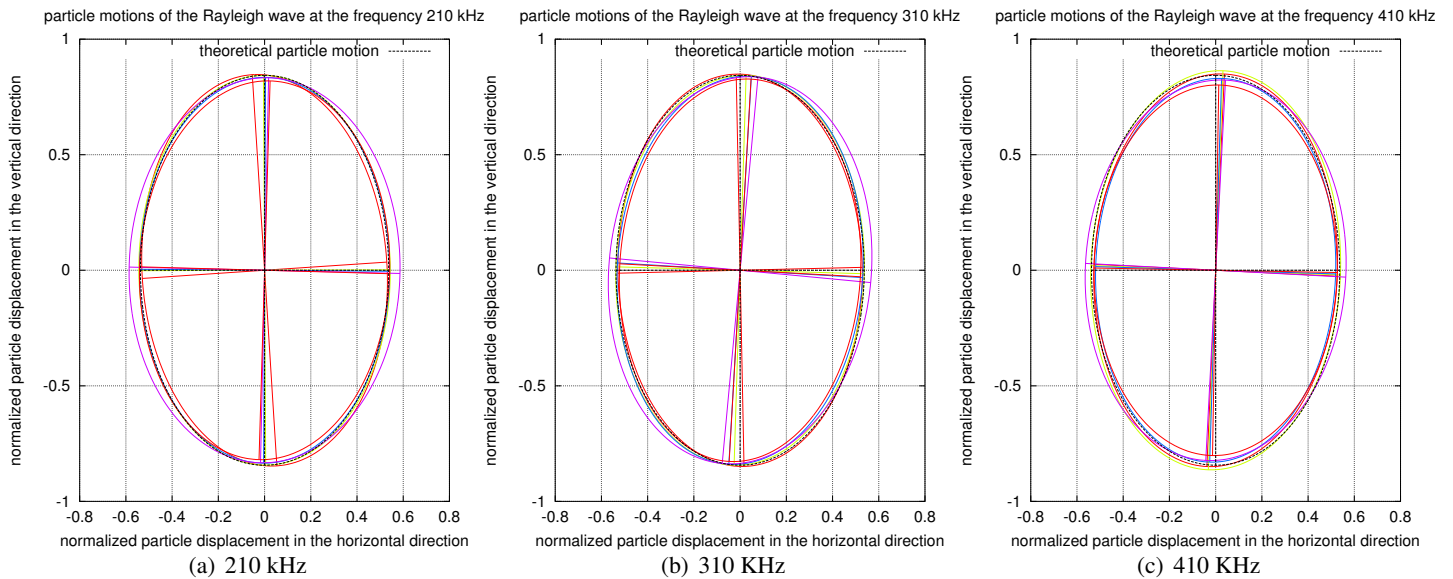


FIGURE 4.19 – Particle motion of the Rayleigh after pre-processing. Different colors are used to distinguish the different measurement positions. The black dashed curve represents the theoretical particle motion

position (as discussed in the previous section) than to the direct effect of noise. The orientations of the major axis of the ellipses of the particle motion show a slight tendency to rotate a few degrees clockwise (tilt angle). In order to quantify these observations, extrinsic means of the polarization vector were computed according to the method proposed by Samson (1983) and De Meersman *et al.* (2006). The basic principle of this method is to compute the singular value decomposition from several signals having the same polarization and to select the polarization vector corresponding to the largest eigenvalue of the covariance matrix. When applying this method to the signals measured for frequencies between 200 kHz to 410 kHz, it was found that phases of the HVSr generally present a positive bias from several tens of degrees up to about 2.5 degrees. This bias confirms the difference in tilt angle observed when comparing the measurements to the theoretical values in figures 4.19. The mean amplitudes of the HVSr for the whole frequency range varied between 0.6145 and 0.6679 which corresponds to deviations from -3.5% to 4.9 % from the theoretical value. As explained above, these variations of ellipticity are more likely due to the variations of the horizontal component measurement resulting from the speckle changes at different measurement positions of the model. Since these biases on polarization observables are small, they have a limited influence on the particle motions observed.

4.7 Full wavefield reconstruction

In the previous part of the article the accuracy of surface wave polarization measurements was assessed. The next step is to compare full wavefields obtained from simulations to measurements. To do this, the same dataset as that presented for the polarization analysis is used. In the case presented here, the main unknown parameters are the source stress distribution and the source signature. Bretaudeau *et al.* (2011) circumvented the issue of estimating the source wavelet through 2D source signature inversion based on a finite element modeling code (Brossier *et al.*, 2008). In the experimental context of Bretaudeau *et al.* (2011), small sources (with respect to the propagated wavelength) were used, making it possible to consider sources as point source terms in the modeling code. In these experiments, the small sources available did not provide satisfactory mechanical coupling with aluminum,

so that the wavefield amplitudes were too small to enable high quality measurements. Consequently, a source with a larger diameter was used. The ratio between the diameter of the source and the smallest propagated wavelength is about 0.1. As explained in the next section, we use a semi-analytical modeling method to accurately simulate the propagation of the wavefield from the extended finite source in an elastic half space. Then, the source inversion methodology is presented and a comparison between the measurements and the simulated results is provided.

4.7.1 Description of the forward modeling tool

Semi-analytical methods based on the resolution of the elastodynamics equations in the spectral domain (wavenumber/pulsation) are efficient in the case of homogeneous and stratified media. They provide results without numerical dispersion effects and the implementation of extended finite source is straightforward. The time domain elastodynamics equations with associated boundary conditions are transformed in the spectral domain using Fourier and Hankel transforms. These equations can be resolved directly in the spectral domain. Several integrals must be evaluated to evaluate the inverse Fourier-Hankel transforms in order to obtain solutions in the space domain. This method was applied first by Lamb (1904) who provided a far field approximation. In case of a half-space with a piston type source located at the surface, the exact wavefields that can be computed from the integrals are presented in equations 4.7 and 4.8. Regarding the details of the derivation and the properties of these integrals, readers can refer to Miller & Pursey (1954) and Achenbach (1973). Based on this method, a semi-analytical code using complex plane integrations and complex frequencies was developed to evaluate wavefield propagation from extended finite sources.

$$U_z(\omega, r) = S(\omega) \int_0^\infty \frac{S_k(\xi, a) \sqrt{\xi^2 - k_P^2}}{V_p \cdot F(\xi)} \left(2\xi^2 e^{-z\sqrt{\xi^2 - k_S^2}} + (k_S^2 - 2\xi^2) e^{-z\sqrt{\xi^2 - k_P^2}} \right) J_0(\xi r) d\xi \quad (4.7)$$

$$U_r(\omega, r) = S(\omega) \int_0^\infty \frac{\xi \cdot S_k(\xi, a)}{V_p \cdot F(\xi)} \left(2\sqrt{\xi^2 - k_P^2} \sqrt{\xi^2 - k_S^2} e^{-z\sqrt{\xi^2 - k_S^2}} + (k_S^2 - 2\xi^2) e^{-z\sqrt{\xi^2 - k_P^2}} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (4.8)$$

with : $S_k(\xi, a) = \frac{a J_1(\xi a)}{\xi}$, the weight function corresponding to piston type source in the wavenumber domain

$$(4.9)$$

and with : $F(\xi) = (2\xi^2 - k_S^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{(\xi^2 - k_P^2)(\xi^2 - k_S^2)}$, the Rayleigh's function

$$(4.10)$$

In equations 4.7 and 4.8, U_z and U_r are respectively the particle displacement in the depth and in the radial direction. Parameters a, V_p, k_P, k_S stand for the source radius, the compression wave velocity, the absolute values of wavenumbers associated with compression, and shear waves, respectively. J_0 and J_1 are Bessel functions of the first kind.

The roots of function $F(\xi)$ lead to singularities corresponding, physically, to leaking and Rayleigh modes. Since the attenuation is very low, some of these roots are located very close to the real axis. In order to account for the effects of modes and the mitigating effect of singularities, we used complex frequencies (Mallick & Frazer, 1987; Dietrich, 1988), which “switch” poles naturally along the imaginary axis.

One advantage of the spectral domain is to transform temporal and spatial convolutions from the source effects into simple multiplications, with frequency and wavenumber transformed expressions of the excitation, $S(\omega)$ and $S_k(\xi, a)$, respectively. Expression 4.9 models a normal piston source, i.e. the excitation stress-field is a uniform traction within a radius a . The source stress field is probably not perfectly uniform but since we do not know its spatial distribution, a piston source approximation was chosen as the simplest model. The sensitivity of the field modeled with respect to the source diameter was evaluated by several numerical tests with different source diameters in the range of the a-priori possible source diameters.

The second unknown parameter is the source spectrum $S(\omega)$. The electrical waveform (in terms of difference of electrical potential) sent to the piezo-electric transducer is known, but since coupling effects occur this waveform may be distorted. The following paragraph describes the methodology used to estimate the source spectrum in order to reconstruct the wavefield.

4.7.2 Methodology used for the source spectrum estimation

The piezo-electric source transducers may generate stress-fields which are distorted versions of the electric signal sent to the sensor. If we consider the transducer as a linear time invariant system, the distorted wavelet can be modeled by the transfer function of the transducer. However, the transfer function of the transducer may vary according to the mechanical properties of the sample. In this paper we call this phenomenon “the mechanical coupling of the transducer”. Since the mechanical properties of the media are known precisely, it is possible to simulate the wavefield measured and estimate an effective wavelet that minimizes the discrepancies between the measured signals and the simulated signals as in Bretaudeau *et al.* (2011). The data used for the source inversion are measured by the laser interferometer which can have a uniform frequency response. This effect will also be corrected in the wavelet inversion, thus generating an effective source wavelet which includes the effect of the laser interferometer. However, in case of the MUSC measurement bench, since the laser interferometer is calibrated accurately, most of the spectrum distortions are assumed to originate from the coupling effects of the source.

In the case of the aluminum block measurements, the wavefield modeling is based on the semi-analytical code described in the previous section and the estimation process is based on a Wiener filter.

To account for the noise effect in the source wavelet estimation, based on assumptions (A1) and (A2), the relationship between the measured signal and the source is described by the following equation :

$$U_{meas}(r, \omega) = G(r, \omega)(S(\omega)) + n(\omega) \quad (4.11)$$

In equation 4.11, $U_{meas}(r, \omega)$, $G(r, \omega)$, $S(\omega)$ and $n(\omega)$ respectively represent the measured displacement (for one or several components), the forward problem operator computed from the integration of the integrals in expressions 4.8 and 4.7, the source spectrum and the noise.

In the case of a known propagating medium with linear wave propagation, the estimation of the source spectrum “ $S(\omega)$ ” is a linear deconvolution problem. Bretaudeau *et al.* (2011) used an estimation of the source spectrum based on a linear deconvolution, but in this work we extend this approach by adopting a Wiener filter (Wiener, 1949).

The Wiener filtering leads to minimal mean square error solutions when measuring uncorrelated noise. In the frequency domain, the Wiener filter can be written as follows :

$$S_{est}(\omega) = \left(\langle G(r, \omega), G(r, \omega) \rangle + \frac{1}{\text{SNR}_{\text{WIENER}}(\omega)} \right)^{-1} \langle G(r, \omega), U_{meas}(r, \omega) \rangle \quad (4.12)$$

where S_{est} stands for the estimated spectrum of the source, and the bracket expression $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ means the scalar product between \mathbf{a} and \mathbf{b} .

Since Bretaudeau *et al.* (2011) had already validated the measurement of the vertical component of particle displacement, it was possible to use only this component to obtain an estimate of the source spectrum independently of the measurements of the horizontal component. Furthermore, to mitigate the near-field discrepancies resulting from the source shape assumption (piston type source), only traces corresponding to the longest offset were selected. The signals selected were 18 records corresponding to vertical component measurements located in offsets from 85mm to 105mm.

It is noteworthy that the term $\text{SNR}_{\text{WIENER}}$ in eq. 4.12 equals the “true” source signal power “ $|S_{true}(\omega)|^2$ ” divided by the power of noise “ $|n(\omega)|^2$ ” and has the physical dimensions of the square of a force divided by a displacement. Previously, in this article the SNR had no physical dimension since it corresponded to a displacement divided by a displacement. Furthermore, we remark that if the noise is strictly null, eq. 4.12 leads to the unregularized least-squares deconvolution (as Bretaudeau *et al.* (2011) used) whereas if the SNR is very low, the formulation becomes proportional to a correlation between the forward modeling operator $G(r, \omega)$ and the measured data $U(r, \omega)$. In our experimental case, the power of the source spectrum “ $|S_{true}(\omega)|^2$ ” is not known directly but is assumed to be proportional to the power of the measured signals. Thus, we propose to estimate the term SNR' such that $\text{SNR}' \propto \text{SNR}_{\text{WIENER}}$ and then assess the proportionality factor “ α ” a-posteriori.

The coefficient “ α ” can be interpreted here as a conversion factor between the measured displacements and the source stress (i.e. the mechanical input from the source).

Inserting this SNR' term in eq. 4.12 yields :

$$S_{est}(\omega) = \left(\langle G(r, \omega), G(r, \omega) \rangle + \frac{\alpha}{\text{SNR}'(\omega)} \right)^{-1} \langle G(r, \omega), U_{meas}(r, \omega) \rangle \quad (4.13)$$

Also, the parameter α in equation 4.13 can be considered as a hyper-parameter for the regularization of the inverse problem of estimating the source spectrum (Kaipio & Somersalo, 2005; Tarantola, 2005).

The estimation of the term SNR' is done through the two-step process described below.

To estimate the term SNR' , first the noise power is evaluated from the pre-trigger part of each trace, i.e. the recorded signal without any (controlled) mechanical source. In order to improve the robustness of this estimation, a multitaper method (see Appendix 4.11.3) has been used with 4 tapers, and the power spectrum corresponding to different traces are averaged. The figure 4.20-a depicts the noise power spectrum $P'_n(\omega)$ resulting from this estimation. Then, the power spectrum of the m $P'_S(\omega)$ is computed after windowing the traces (to select the P-wave at the surface and the Rayleigh wave) and averaged over the different traces. This spectrum is depicted in figure 4.20-b. In a final step the term SNR' is estimated by taking the ratio : $\text{SNR}' = \frac{P'_S(\omega)}{P'_n(\omega)}$ and the term SNR'^{-1} is depicted in figure 4.20-c.

To estimate the term SNR' , the noise power is first evaluated from the pre-trigger part of each trace, i.e. the recorded signal without any (controlled) mechanical source. In order to improve the robustness of this estimation, a multitaper method (see Appendix 4.11.3) with 4 tapers was used, and the power spectrum corresponding to different traces was averaged. The figure 4.20-a shows the noise

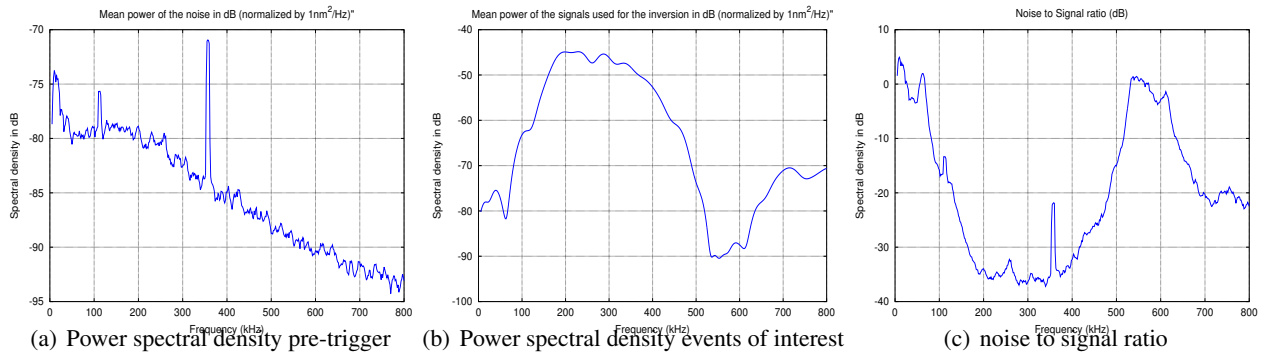


FIGURE 4.20 – Evaluation of the term SNR^{-1} in the Wiener filter to vertical component measurements

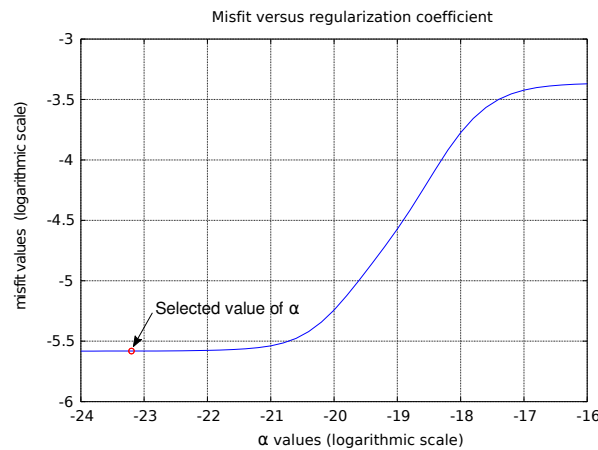


FIGURE 4.21 – Misfit versus regularization coefficient curve

power spectrum $P'_n(\omega)$ resulting from this estimation. Then, the power spectrum of the m $P'_S(\omega)$ is computed after windowing the traces (to select the P-wave at the surface and the Rayleigh wave) and averaged over the different traces. This spectrum is shown in figure 4.20-b. In a final step the term SNR' is estimated by taking the ratio : $\text{SNR}' = \frac{P'_S(\omega)}{P'_n(\omega)}$ and the term SNR'^{-1} is depicted in figure 4.20-c.

The value of α is critical and several methods such as the L-curve method (Hansen, 1992) have been proposed to estimate it. Several inversions are performed with different values of α and the selection of the “best” α parameter is done first by analyzing the evolution of the misfit versus the α values curve (figure 4.21). Most of the variations of this curve are for α values between 10^{-24} and 10^{-16} . Since the curve presents monotonous variations, the optimal value of α is expected to be located in this interval.

Then, the α value of $10^{-23.4}$ was selected by analyzing the inversion results, especially for causality, stability and fidelity to the data. The resulting wavelet is illustrated in figure 4.22 and several oscillations remain before $t=0.009$ ms. The amplitude of these oscillations varies with respect to the α coefficient and the bandwidth selected for the inversion, thus they seem to come from bandwidth truncation effects. As we will see, in the reconstructed signals (fig. 4.24 to 4.26) these “non-causal” oscillations of the source wavelet generate very small artifacts whose amplitudes are comparable to the root mean square values of the noise ; however, in the case of the analysis of instantaneous attributes they will have a detrimental effect on the attributes. Therefore an apodization window is defined to re-

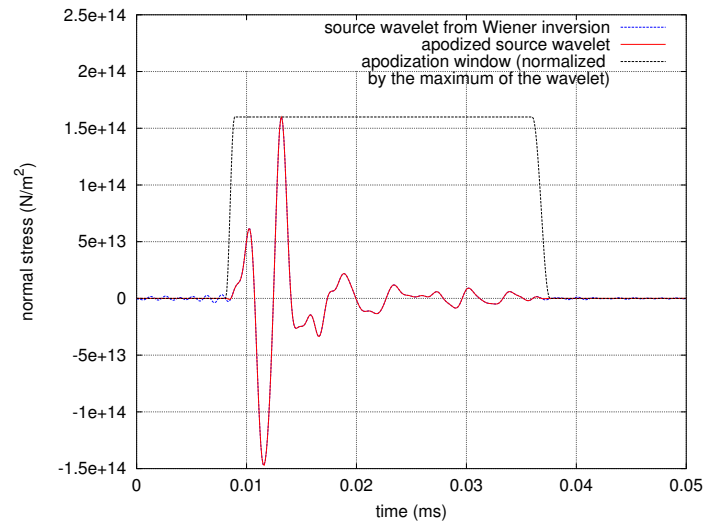


FIGURE 4.22 – Inverted wavelet and truncated wavelet

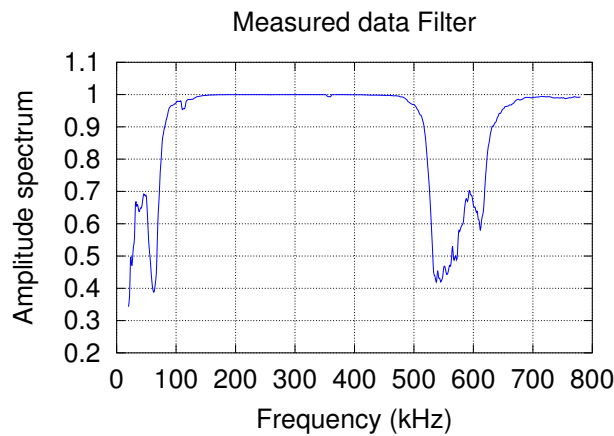


FIGURE 4.23 – Filter applied to measurements to mimic frequency weighting effect from Wiener Filtering

move the permanent oscillations of source wavelet. The shape apodization window is shown by black dashed lines in figure 4.22 and the resulting wavelet after apodization is represented by the red curve. This apodized wavelet will only be used to compare measured instantaneous polarization attributes with reconstructed attributes.

For the comparison of the experimental measurement and the simulated data, the estimated wavelet is then used as a source signal to generate complete seismograms for both the seismic components.

To compare the experimental and simulated data without bias, it is necessary to apply a filter “ $F(\omega)$ ” on the measured data that mimics the frequency filtering effect of the regularization term in the source inversion. This filter $F(\omega)$ was derived from the Wiener filter formulation as follows :

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{SNR}^1(\omega)}} \quad (4.14)$$

It is first applied in the frequency domain before transformation in the data time-domain. It does

not affect the phase of the signals since $\text{SNR}(\omega)^{-1}$ is a real number. The shape of its amplitude is almost flat from 90 kHz to 500 kHz (see figure 4.23) with a slight decrease localized around 113 kHz and 336 kHz, as expected from results of the noise study .

4.7.3 Comparison between synthetic and experimental raw signals for each component

Figures 4.24 to 4.26 display synthetic (red curves) and filtered experimental (blue curves) plots. To illustrate the level of noise, the width of the green lines equals the root mean square values of the noise computed from the pre-trigger signals. Globally, the comparison shows that experimental and synthetic data are in good agreement for both components. The quality of the fit is better for the Rayleigh wave than for the P-wave. Indeed, for both components the amplitude of the P-wave is always underestimated and the waveform of the P-wave oscillates more in the case of the experimental data than for the synthetic data. Since the waveforms of the Rayleigh waves are in good agreement, the discrepancy in the P-wave waveforms cannot be explained by an error in the source wavelet estimation. Other possible explanations have been investigated, such as using slightly different mechanical properties or sources with different radii but none of them provide a quantitative explanation of the discrepancies observed. One other possible reason may come from the stress distribution of the real source which is more complex than the modeled source which is assumed to be a uniform piston. This plausible explanation is also consistent with the fact that the fit of the Rayleigh waves is better in far offsets than in the nearest ones. This may be due to the influence of the source shape approximation which is more pronounced in the near field than in the far field.

In the source wavelet inversion, the data were selected by time-windowing to avoid interferences with boundary reflections. Due to this windowing process, some late oscillations of the source wavelet were not taken into account in the inverted source wavelet. This explains why after $t=0.05\text{ms}$, $t=0.06\text{ms}$ and $t=0.07\text{ms}$ for figures 4.24, 4.25 and 4.26 late oscillations of the experimental measurements do not appear in the synthetic traces. As noted when analyzing the source wavelet after the Wiener filter inversion (fig. 4.22), the source wavelet presents small oscillations before $t=0.09\text{ms}$, interpreted as frequency filtering artifacts from the Wiener filter. In the reconstructed seismograms, these artifacts are visible as very small oscillations before the P-waves. The amplitude of these oscillations is of the same order as the noise root mean square values (width of the green lines in figures 4.24 - 4.26).

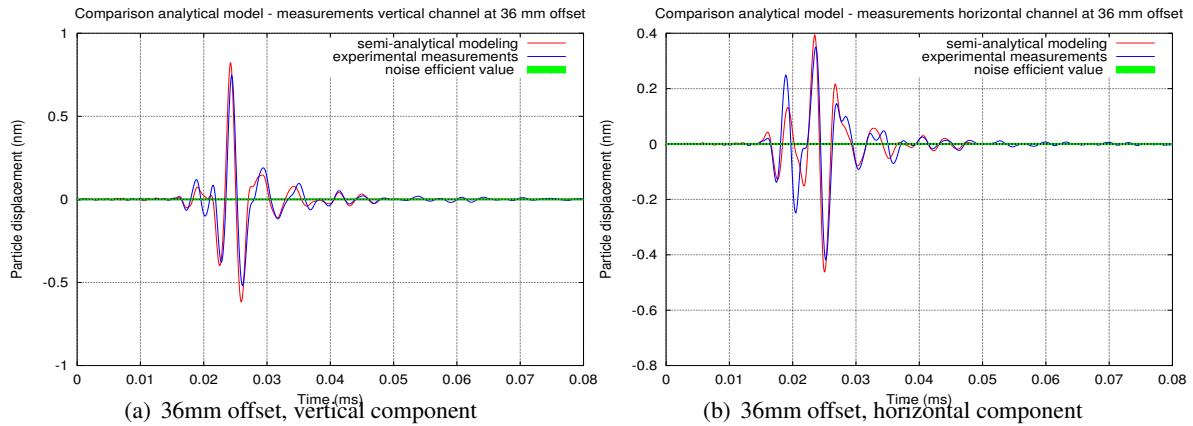


FIGURE 4.24 – Comparison modeled and experimental signals for the vertical and horizontal component for an offset of 36 mm. Experimental signals filtered using the Wiener filter (eq. 4.14). Oscillations of experimental measurements after $t=0.0$ ms are not reproduced in the simulated signal since the source wavelet has been estimated from time windowed seismograms and boundary reflections are not accounted in this model

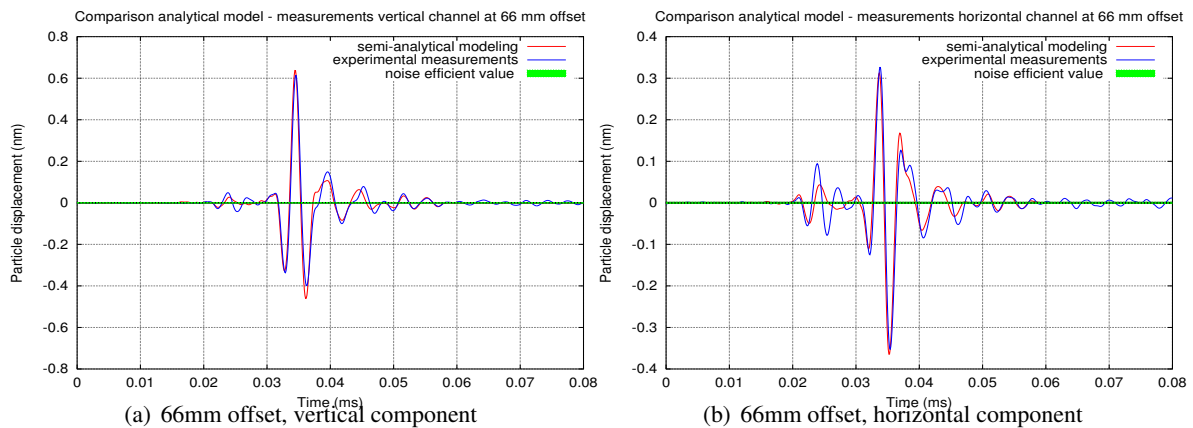


FIGURE 4.25 – Comparison modeled and experimental signals for the vertical and horizontal component for an offset of 66 mm. Experimental signals filtered using the Wiener filter (eq. 4.14). Oscillations of experimental measurements after $t=0.06$ ms are not reproduced in the simulated signal since the source wavelet has been estimated from time windowed seismograms and boundary reflections are not accounted in this model

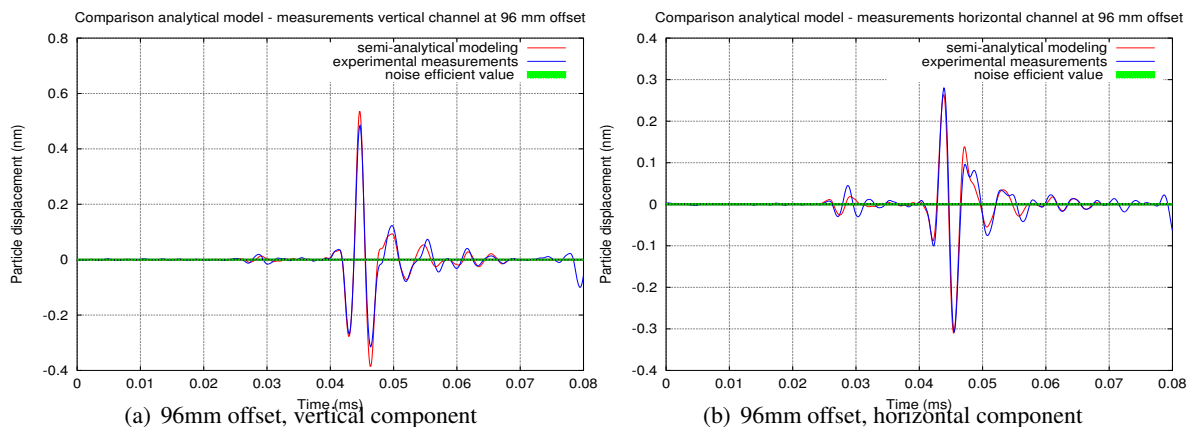


FIGURE 4.26 – Comparison modeled and experimental signals for the vertical and horizontal component for an offset of 96 mm. Experimental signals filtered using the Wiener filter (eq. 4.14). Oscillations of experimental measurements after $t=0.07$ ms are not reproduced in the simulated signal since the source wavelet has been estimated from time windowed seismograms and boundary reflections are not accounted in this model

4.7.4 Comparison of the instantaneous polarization attributes

Instantaneous attributes have been commonly used to analyze seismic data for several decades in geophysics (Taner *et al.*, 1979). The extension of instantaneous seismic attributes to two component measurements was presented by René *et al.* (1986) and then for three component measurements by Vidale (1986). Morozov & Smithson (1996) proposed an elegant formalism based on a variational formulation in order to generalize the use of instantaneous polarization attributes to an arbitrary number of components without using Stokes' parameters or performing matrix diagonalization. In our case, we use and adapt it heuristically to define robust instantaneous observables for our measurements.

4.7.4.a Regularized definitions of polarization instantaneous attributes

In the case of a real time series $u(t)$ having as Fourier transform $U_F(\omega)$, the associated analytic signal $u_c(t)$ may be computed from :

$$u^c(t) = 2 \cdot \mathcal{F}^{-1} (\Re (H(\omega) \cdot U_F(\omega))) \quad (4.15)$$

where \mathcal{F}^{-1} , \Re and H stand respectively for the inverse Fourier transform, the real part and the Heaviside function.

The real and imaginary components of $u^c(t)$ are in quadrature and it has the following polar representation :

$$u^c(t) = A_{u^c(t)} e^{i\phi_{u^c(t)}} \quad (4.16)$$

$$\text{with } A_{u^c(t)} = |u^c(t)|, \text{ the instantaneous amplitude (envelope)} \quad (4.17)$$

$$\text{with } \phi_{u^c(t)} = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(u^c(t))}{\Re(u^c(t))} \right), \text{ the instantaneous phase} \quad (4.18)$$

To fully control the sampling of the analytic signals, instead of using an inverse fast-Fourier transform to obtain the analytic signals we used the chirp z-transform (Rabiner *et al.*, 1969).

Note that the equation 4.15 written in the time domain involves a convolution product (see for instance eq. 2 in Morozov & Smithson (1996)) with a non-local convolution kernel (even with an infinite time support). In particular, in the case of closely spaced wavetrains, interferences in the instantaneous attributes may occur, removing their "instantaneous" meaning, in which case pre-processing and extraction of the interesting parts of the signal can be useful.

The conceptual generalization of the horizontal to vertical component spectral ratio (HVSR) to analytic signals (HVAR) is straightforward, since it is necessary to only divide the analytic signal from the horizontal component $u_x^c(t)$ by the analytic signal from the vertical component $u_z^c(t)$. However, this definition cannot be used in practice. Firstly, when both component analytic signals equal zero, for example, when signals are muted before the first seismic phases, then the ratio is undefined. Furthermore, measurements often contain pre-arrival noise, making the value of the instantaneous attributes highly oscillatory and these effects can be amplified when dividing one analytic signal by another one. In this article, a pragmatic solution is proposed : before dividing the analytic signal from one component by the analytic signal of the other component, small numbers ϵ_x and ϵ_z are added to the horizontal and the vertical component, respectively. The expression of the horizontal over vertical analytic signals becomes :

$$\text{HVAR}(u_x^c(t), u_z^c(t)) = \frac{u_x^c(t) + \epsilon_x}{u_z^c(t) + \epsilon_z} \quad (4.19)$$

To obtain homogeneous definitions, the following conventions were chosen $|\text{HVAR}(0,0)| = 1$ and $\tan^{-1}\left(\frac{\Im(\text{HVAR}(0,0))}{\Re(\text{HVAR}(0,0))}\right) = 0$. From these two conditions and the equation 4.19, it yields to $\epsilon_x = \epsilon_z$ and so for lighter notations the quantity ϵ_{HVAR} is defined such as $\epsilon_{\text{HVAR}} = \epsilon_x = \epsilon_z$. This definition of HVAR is biased but it converges to the original one if the SNR is high, since in that case it is possible to define a value of ϵ_{HVAR} such that its amplitude is much bigger than the root mean square values of the noise and much smaller than the values of the signals, making the bias negligible.

Another description of polarization may be defined based on the semi-minor and semi-major axes of the elliptical particle motion from the factorized form of the analytic signal (eq. 4.16). Two quantities may be defined to completely characterize the normalized particle motion (Born & Wolf, 1999) : the tilt angle ξ , which is the angle between the semi-major axis of the ellipse and a given axis (often the horizontal axis of the sensors) ; and the reciprocal ellipticity η , which is the ratio between the semi-minor axis and the semi-major axis. Information on the rotation direction of the particle motion can be integrated in the ellipticity parameter according to the sign of η .

By following the approach of Morozov & Smithson (1996), the polarization parameters are obtained from the maximization or minimization of the phase invariant functional. In the case presented here, this functional is called $\kappa(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t))$ and written as :

$$\kappa(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t)) = [\Re(e^{i\phi}(u_x^c(t)))]^2 + [\Re(e^{i\phi}(u_z^c(t)))]^2 \quad (4.20)$$

In the development below, the notations $\mathbf{u}_{\text{minor}}(t)$ and $\mathbf{u}_{\text{major}}(t)$ are used and refer to one direction of the semi-minor axis and one direction of the semi-major axis. The values of ϕ that make κ minimal (maximal) are denoted ϕ_{min} and ϕ_{max} , respectively, and are defined with an angular modulo of π radians. Semi-minor and semi-major vectors can be computed according to :

$$\mathbf{u}_{\text{minor}}(t) = \Re(e^{i\phi_{\text{min}}}[u_x^c(t), u_z^c(t)]^t) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{u}_{\text{major}}(t) = \Re(e^{i\phi_{\text{max}}}[u_x^c(t), u_z^c(t)]^t) \quad (4.22)$$

Note that these definitions of $\mathbf{u}_{\text{minor}}(t)$ and $\mathbf{u}_{\text{major}}(t)$ are not unique since $-\mathbf{u}_{\text{minor}}(t)$ and $-\mathbf{u}_{\text{major}}(t)$ also correspond to the minimum (maximum) of $\kappa(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t))$. Also, as in Morozov & Smithson (1996) noted that in the case of equal signals on both components, the functional $\kappa(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t))$ is constant for any value of ϕ . To stabilize the functional in such case, they proposed to add a regularization term $\chi(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t))$ having the form :

$$\chi(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t)) = [\Re(e^{i\phi}(u_x^c(t) + u_z^c(t)))]^2 \quad (4.23)$$

And finally in case of bi-component measurements, the functional $\kappa^{\text{regul}}(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t))$ to minimize (maximize) becomes :

$$\kappa^{\text{regul}}(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t)) = \kappa(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t)) + \epsilon_\kappa \cdot \chi(\phi, u_x^c(t), u_z^c(t)) \quad (4.24)$$

where ϵ_κ is a positive regularization parameter.

Parameters ξ and η may be computed from the estimation of the semi-major and semi-minor axis vectors. Alternative ‘‘regularized’’ definitions of these parameters are introduced below. To the authors knowledge, these definitions are original and so are discussed in detail.

The following “relaxed” formula for the computation of the reciprocal ellipticity :

$$\eta = \text{sign}(\Im(u_z^c(t) \cdot u_x^c(t)^*)) \cdot \left[\frac{\|\mathbf{u}_{minor}(t)\| \cdot \|\mathbf{u}_{major}(t)\|}{\|\mathbf{u}_{major}(t)\|^2 + \epsilon_\eta^2} \right] \quad (4.25)$$

where ϵ_η is a small regularization parameter useful in regions where vertical and horizontal components are almost the same (as for instance null signal) or too weak and dominated by noise.

The argument in the sign is chosen for a surface wave propagating along the positive direction of the horizontal axis, $\eta > 0$ means that the wave has a retrograde particle motion, and if $\eta < 0$, the particle motion is prograde.

Morozov & Smithson (1996) mentioned the problem of defining the tilt angle due to the sign reversal of ellipse semi-axes. Instead of plotting the tilt angle directly, they proposed to use a function (eq. 10b in Morozov & Smithson (1996)) with no angular discontinuity. This function is in fact the square of the projection of the normalized semi-major axis onto a given unit vector \mathbf{u}_0 . In the case presented, another function was preferred since it makes overlapping events more visible and it signifies an angle.

The aim is to estimate the angle $\xi(\mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0)$ between the semi-major axis and a given vector by using the definition of the scalar product :

$$\xi(\mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0 \rangle}{\|\mathbf{u}_{major}(t)\|} \right) \quad (4.26)$$

This definition is more numerically stable than those employing the \tan^{-1} function and easy to stabilize. Indeed, a regularized definition consistent with the condition $\xi([0, 0]^t, \mathbf{u}_0) = 0$ is preferred :

$$\xi(\mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{u}_0, (\mathbf{u}_{major}(t) \cdot \text{sign}(\langle \mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0^\perp \rangle) + \epsilon_\xi \mathbf{u}_0^\perp) \rangle}{\|\mathbf{u}_{major}(t) + \epsilon_\xi \mathbf{u}_0^\perp\|} \right) \quad (4.27)$$

where ϵ_ξ is a very small positive regularization constant and \mathbf{u}_0^\perp is obtained from a clockwise orthogonal rotation of \mathbf{u}_0 .

The angle $\xi(\mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0)$ is defined in the interval $[0; 180[$ degrees. If \mathbf{u}_0 has the same direction as the semi-major axis of the phases observed, then $\xi(\mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0) = 0$. The regularization term $\epsilon_\xi \mathbf{u}_0^\perp$ has been added to obtain $\xi = 90^\circ$ when both component amplitudes are small. In this case, if a noise with small amplitude compared to $\|\mathbf{u}_0^\perp\|$ is added, then ξ oscillates in a continuous manner around 90° . Furthermore, in the scalar product the term $\mathbf{u}_{major}(t)$ is weighted by $\text{sign}(\langle \mathbf{u}_{major}(t), \mathbf{u}_0^\perp \rangle)$ in order to overcome the semi-axis ambiguity problem of rotation at 180 degrees. Without this weight, artificial phase jumps of 180 degrees occur frequently.

4.7.4.b Comparison of instantaneous attributes between simulated and experimental signals

Since noise has a negative effect on the polarization observables, experimental traces are muted before the arrival of the first wavetrain. The “Wiener filter” defined in eq. 4.14 is applied to the traces to mitigate the effect of frequency components having lower SNR.

For the HVAR attributes, as the noise power may vary from one measurement position to another, a different value of ϵ_{HVAR} is defined for each trace. Through trial and error it was found that

the best setting of the ϵ_{HVAR} value is about 3% of the maximal magnitude measured in each trace (horizontal component). Furthermore, to make the attributes from experimental and numerical data more comparable, ϵ_{HVAR} is the same in both cases. As shown in figures 4.27 and 4.28 the experimental and synthetic HVAR attributes are in very good agreement. The HVAR attribute enhances the very weak reflections from the boundaries which are not reproduced in the synthetic attributes since the half space propagation model does not consider them. All the boundary reflections are clearly visible except the P-P reflection traveling along the free-surface.

The polarization ellipse parameters presented in figures 4.29-a-b provide a more intuitive interpretation of polarization than the HVAR attributes. The regularization parameters ϵ_{κ} , ϵ_{η} , ϵ_{ξ} are tuned and they represent 4%, 1.5% and 1%, respectively, of the maximal value of the horizontal component recorded for each trace. Figure 4.29 shows the reciprocal ellipticity attributes η . This attribute appears less sensitive to small reflections from the boundaries than the HVAR attributes. However, it presents a significant ellipticity value for the grazing P-wave (bracket B). This phenomenon can be explained physically, since as a longitudinal wave propagates, a refracted transversal wave is generated from the free-surface interaction (see for instance chapter 19 in (Bruneau & Potel, 2009) for a discussion on wave-front propagation in half-space using the Cagniard-De Hoop method). Also, a reversal of sign of ellipticity between the direct Rayleigh wave (bracket C) and the reflected Rayleigh wave (G arrows) may be observed. Figure 4.29-b displays the tilt angle obtained with the horizontal axis as the reference vector. Even when employing the relaxed definition of tilt angles (eq. 4.27), the tilt angle attribute appears to be very sensitive to noise and signal interference. This clearly reveals the very small amplitudes of the reflected P-P wave (D arrows in fig. 4.15 and in fig. 4.27-b) which is much more difficult to observe with other polarization attributes.

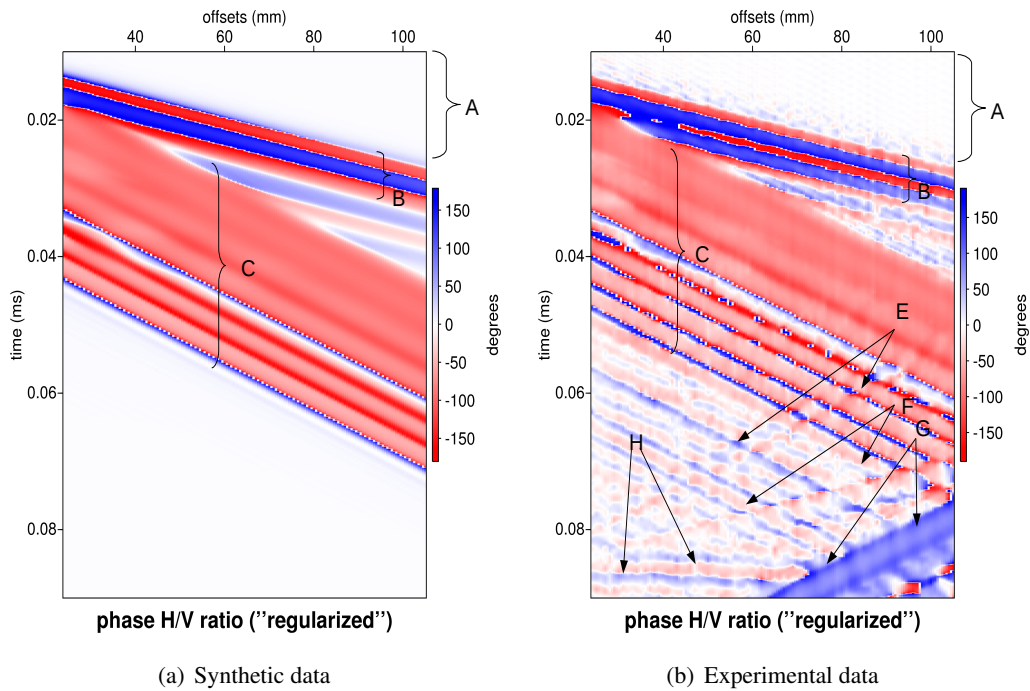


FIGURE 4.27 – Comparison of the phase of the HVAR from reconstructed synthetic and experimental data. A : pre-arrival noise, B : P-wave at the surface, C : Rayleigh wave with ringing effect, E : converted P-S waves, F : converted Rayleigh-P, G : converted Rayleigh-Rayleigh, H : reflections from the bottom of the model

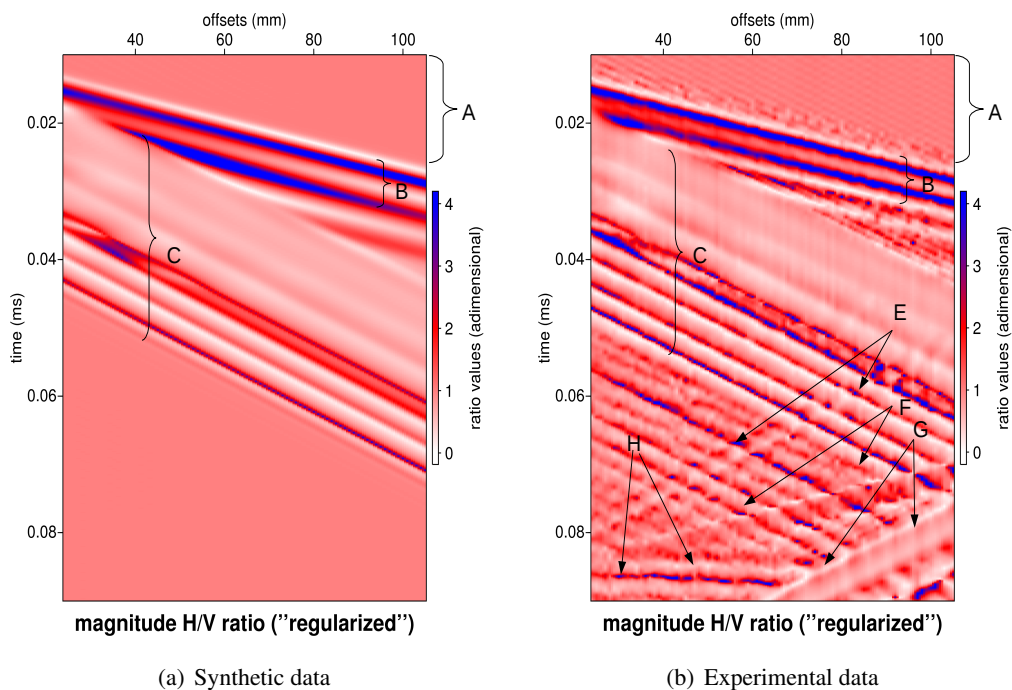
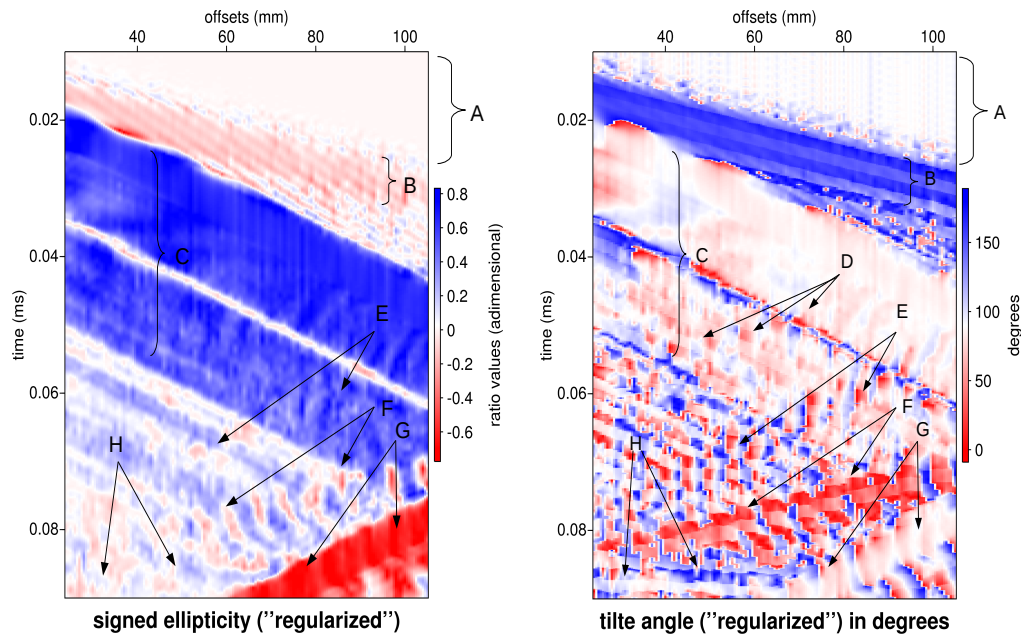


FIGURE 4.28 – Comparison of the amplitude of the HVAR from reconstructed synthetic and experimental data. A : pre-arrival noise, B : P-wave at the surface, C : Rayleigh wave with ringing effect, E : converted P-S waves, F : converted Rayleigh-P, G : converted Rayleigh-Rayleigh, H : reflections from the bottom of the model



(a) Signed reciprocal ellipticity from experimental data

(b) Tilt angle from experimental data

FIGURE 4.29 – Polarization ellipse parameters. A : pre-arrival noise, B : P-wave at the surface, C : Rayleigh wave with ringing effect, D : converted P-P waves, E : converted P-S waves, F : converted Rayleigh-P, G : converted Rayleigh-Rayleigh, H : reflections from the bottom of the model

4.8 Towards realistic multicomponent physical modeling : shallow cavity detection by polarization perturbation analysis

Experiments on an aluminum block were conducted to assess the performances of the MUSC bench for multicomponent measurements. However, this configuration is far removed from any realistic geophysical modeling issue. The detection and characterization of underground cavities like tunnels, mines, karsts and others natural or human voids is an important issue in near surface studies, but it is also a difficult task. Depending on the depth, size, geometry, and geological context, the response provided by geophysical methods can vary. In some cases it is difficult to select an efficient method from the large array of available geophysical techniques, although they could be adapted in other cases. For example, the penetration depth of the Ground Penetrating Radar technique is dramatically reduced in the presence of conductive sediments like clays. The microgravimetric method becomes hazardous in urban environments due to the noise and 3D effects caused by the presence of cellars and basements under buildings. In order to offer a wider array of methods for treating cavity imaging problems, it is necessary to develop alternative and complementary methods, such as seismic techniques, capable of operating in a wider range of conditions. Of the latter, refracted waves and high resolution seismic reflection using the masking effect of a void above an underlying reflector proved to be efficient in various cases for detecting and localizing underground cavities (Cook, 1965; Piwakowski *et al.*, 1998). However those techniques are efficient only for relatively deep cavities (30 - 50 m) and in the presence of a detectable reflector under the cavity. In the present case, we focus on the detection of shallow cavities with surface waves. After achieving little success using the impact echo technique applied to field data, Leonard (1999) advised trying surface wave perturbations caused by local heterogeneity. In synthetic experiments, Leparoux *et al.* (2000) observed the interactions of elas-

tic waves with a void and showed that the frequency filtering effect of a cavity on the Rayleigh wave can be related to its size and depth. Since then, several studies such as those of Grandjean & Leparoux (2004); Nasser-Moghaddam *et al.* (2007); Xia *et al.* (2007); Chai *et al.* (2012) have been carried out to analyze the interaction of surface waves with shallow cavities. Following the developments of the full waveform inversion method (Lailly, 1983; Tarantola, 1984; Pratt, 1990), Gélis (2005); Bretaudeau (2010) employed this method to image cavities quantitatively. To investigate the effect of cavities on experimental data but in a controlled environment (Bretaudeau *et al.*, 2009, 2011), employed the MUSC facility to reproduce at reduced scale a cavity included in a half-space. However, to the best of the authors knowledge of the current literature, no study proposes using multicomponent data to analyze the polarization perturbations induced by cavities. In this section we present multicomponent measurements performed on a reduced scale model, associated with synthetic data and take advantage of the regularized instantaneous polarization attributes defined in the previous section to enhance the perturbation of the cavity on the measurements.

4.8.1 Presentation of the physical model and experimental acquisition

Bretaudeau *et al.* (2011) presented reduced scale measurements on a horizontally drilled polypropylene model representing a homogeneous medium with a 5m diameter shallow cavity located between 10 and 15m depth. The mechanical properties of this model are provided in appendix 4.11.2 and the geometrical configuration is described in figure 4.30. In this paper we present the extension of the measurements presented by Bretaudeau *et al.* (2011) to multicomponent data and a data analysis based on instantaneous polarization attributes, as defined in the previous section.

The dataset presented is composed of one common source, where the source is located at an offset of 6 mm from the cavity and the receivers are uniformly and symmetrically spread along the source between -6mm to 6mm offsets. Contrary to the experiments on the aluminum sample, the dimensions of the source are small enough compared to the propagated wavelength to model it as a point source. Since, the main interest of these measurements is the study of the interactions between the surface waves with the cavity, low frequencies play a considerable role in enabling the penetration depth of surface waves to reach the cavity. Consequently, the wavelet sent to the source is a Ricker shaped waveform with a central frequency of 120 kHz. It is noteworthy that polypropylene presents high attenuation at the frequency range considered, attenuating the higher frequencies of the spectrum and the propagation on long offsets. To characterize the dimensions of the model in terms of dimensionless quantities, at the central frequency the ratio between the diameter of the cavity and the surface wave is about 0.5 and the depth of the cavity is about one surface wave.

Firstly, several advantages of multicomponent data are analyzed for numerical simulations after which measurements are presented.

4.8.2 Illustration of some benefits of multicomponent data for shallow cavity detection

Bretaudeau *et al.* (2011) numerically simulated the measurements using a 2D viscoelastic frequency-domain discontinuous Galerkin finite-element code (Brossier *et al.*, 2008) developed within the consortium SEISCOPE. External boundaries of the physical model were not considered in this model and Perfectly Matched Layers (PML) have been used to emulate radiation conditions. Figures 4.32-a-b depict the simulated particle velocities for vertical and horizontal components, respectively. In these figures, the cavity generates visible perturbations of the incident P-wave and the Rayleigh waves, but the amplitude of these perturbations is small compared to the incident wavefield.

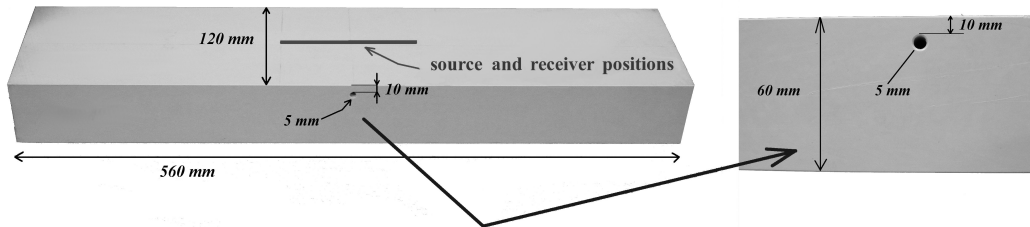


FIGURE 4.30 – Polypropylene small scale model used to represent an homogeneous media with a shallow cavity

It can be seen that these perturbations are more visible on the horizontal component (fig. 4.32-b) than on the vertical component (4.32-a).

The use of multicomponent data enables the study of instantaneous polarization attributes, as defined in the previous section. Figures 4.33 and 4.34 show the reciprocal ellipticity attributes and the tilt angle attributes, respectively. A comparison of the reciprocal ellipticity attributes computed from signals with and without cavity is presented in figures 4.33-a-b. Although the amplitudes of the perturbation are small, the effect on the reciprocal ellipticity is very clear and this attribute highlights the diversity of the events.

The tilt angle computed with a reference angle of 45 degrees in order to highlight surface waves is presented in figures 4.34). As for the reciprocal ellipticity, the effect of the perturbation is clearly visible on the variations of the title angle and furthermore perturbation shaped hyperbolas from different kind of waves are distinguishable. However, it should be noticed that the different patterns originating from the cavity perturbation are much more visible on offsets smaller than 60mm than for longer offsets where several events are overlapping.

In the example proposed, using 2D numerical simulations, multicomponent measurements have demonstrated several advantages for cavity detection, especially when using the instantaneous polarization attributes defined in the section 4.7.4.a. In the next section, an initial attempt to reproduce this configuration with the MUSC is presented.

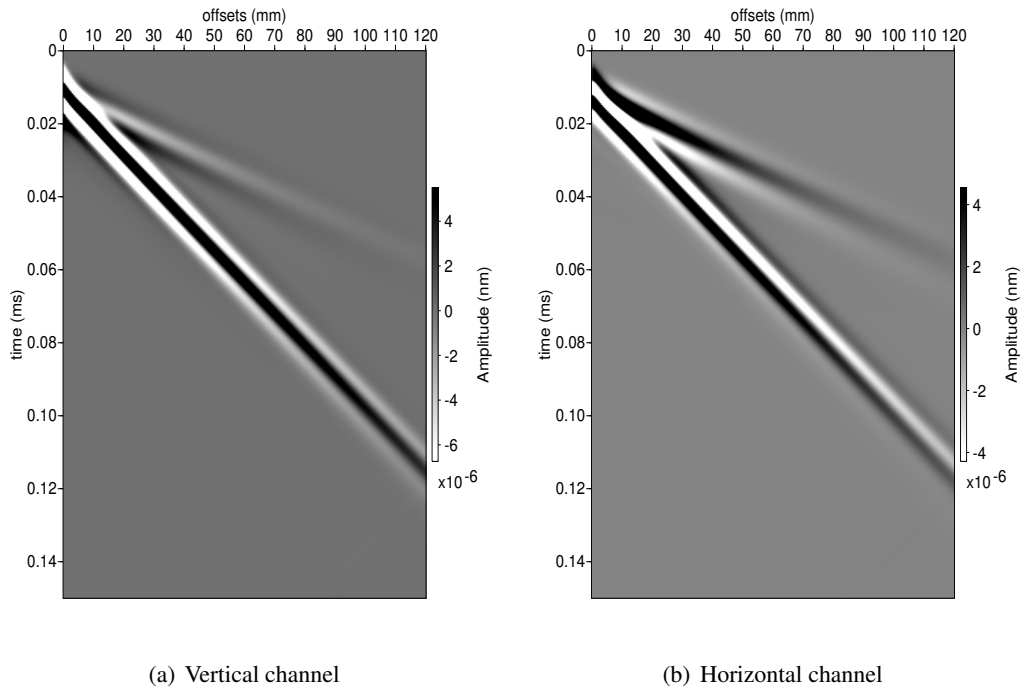


FIGURE 4.31 – Simulated seismograms obtained on a homogeneous polypropylene model at a central frequency of 120 kHz without void (half-space). Only the grazing P-wave and the Rayleigh wave are clearly visible.

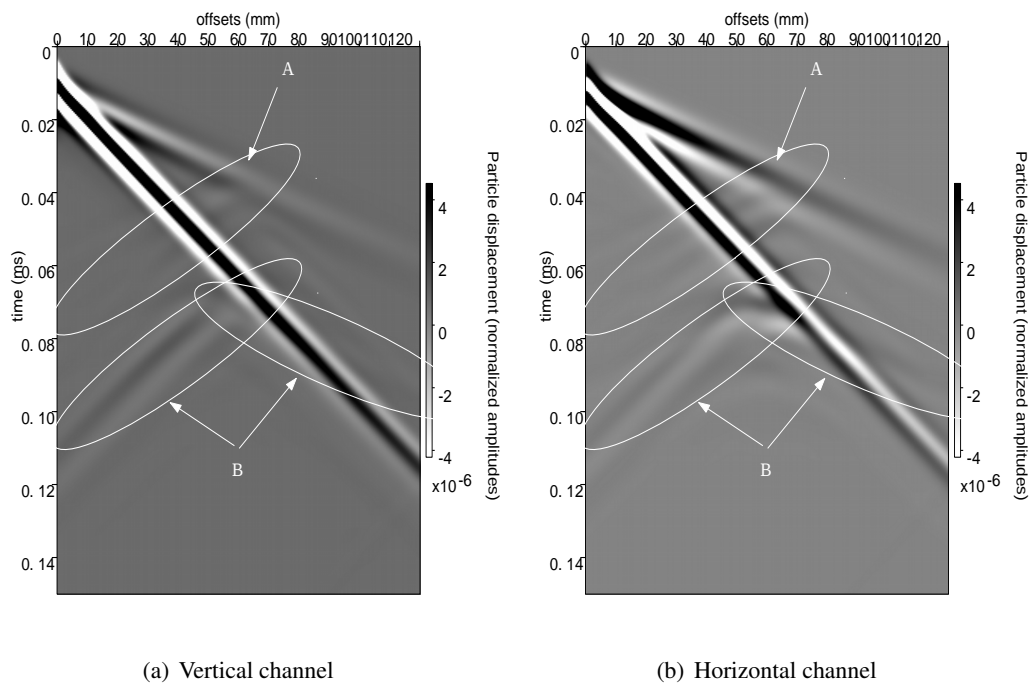


FIGURE 4.32 – Simulated seismograms obtained on a homogeneous polypropylene model with a cylindrical void at 120 kHz. The perturbation of the grazing P-wave (arrows A) as well as the perturbation of the Rayleigh wave (arrows B) are clearly more visible on the horizontal component. Measurements are displayed on a gray scale with a clip percentile of 98.7 %

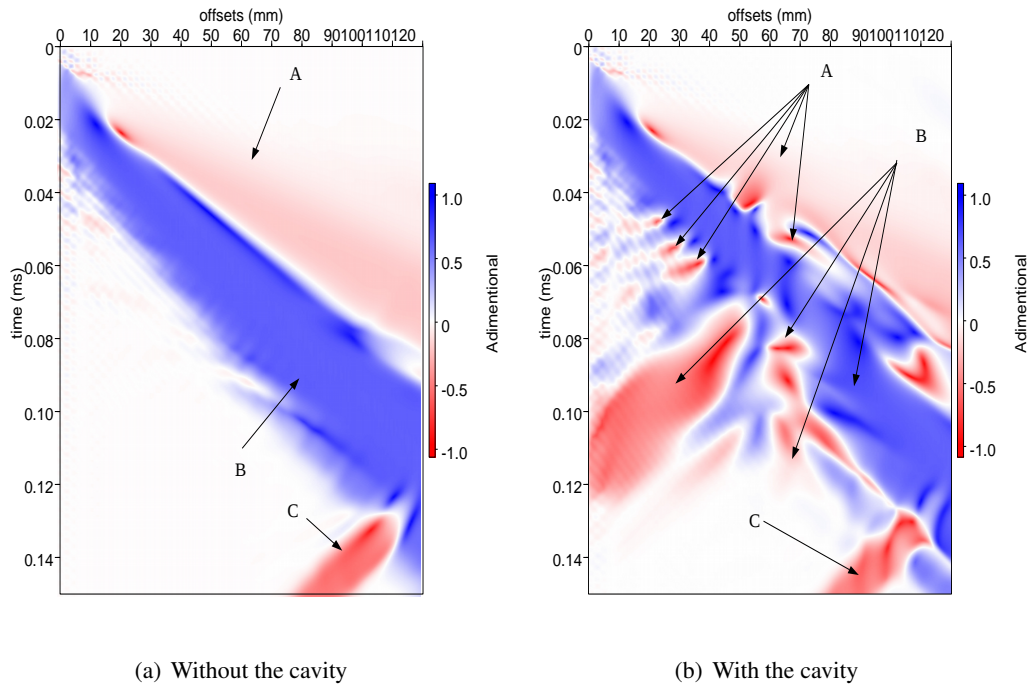


FIGURE 4.33 – Signed ellipticity computed from synthetic seismograms corresponding to a homogeneous polypropylene model with a cylindrical void at 120 kHz. The perturbation of the grazing P-wave (arrows A) as well as the perturbation of the Rayleigh wave (arrows B) are clearly more visible on the horizontal component. The imperfections of the PML are also enhanced by the instantaneous polarization attribute (arrow C).

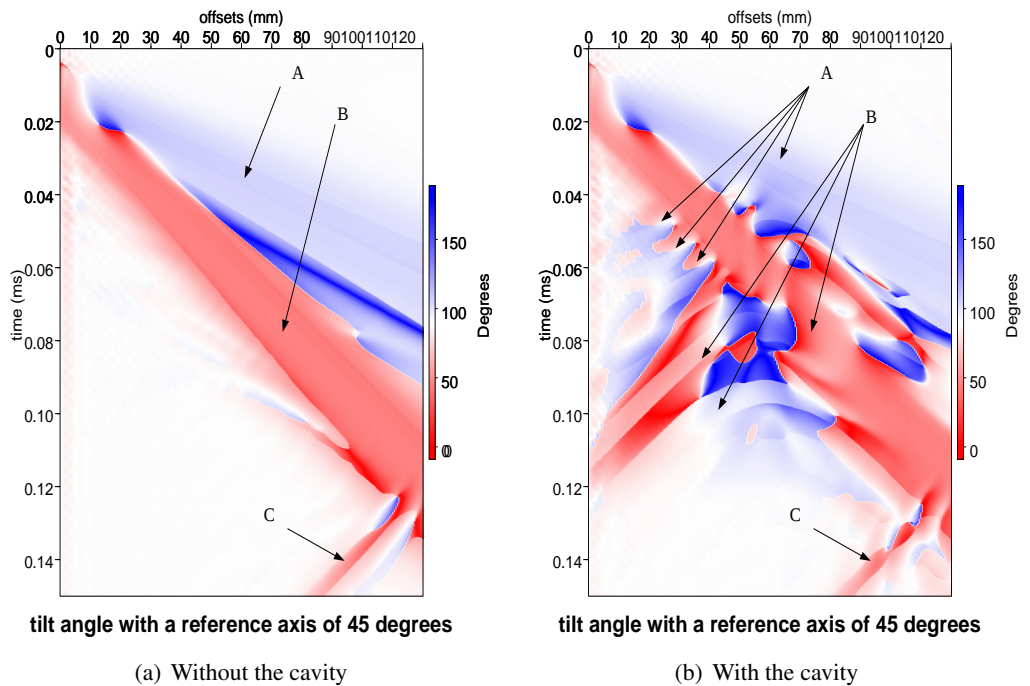


FIGURE 4.34 – Tilt angle computed from synthetic seismograms corresponding to a homogeneous polypropylene model with a cylindrical void at 120 kHz. The perturbation of the grazing P-wave (arrows A) as well as the perturbation of the Rayleigh wave (arrows B) are clearly more visible on the horizontal component. The imperfections of the PML are also enhanced by the polarization instantaneous attribute (arrow C)

4.8.3 An initial attempt to use multicomponent measurements for shallow cavity detection

Measurements were performed under conditions similar to those described in Bretaudeau *et al.* (2011). However, taking into account an optical lens update for multicomponent measurements and the dimensions of the ultrasonic source, the smallest reachable offset for this measurement configuration is 41.5 mm. To better distinguish the effect of model boundaries, measurements with and without cavity were performed. Each trace is an average of 512 measurements.

It should also be noted that the simulated results presented in the previous section do not have true amplitudes compared to the experiments since they are based on a 2D model. Furthermore, model boundaries effects are not considered in these simulations.

Pre-processing consisted of only trace muting before the first arrivals have been performed, and a pass-band filter between 30 and 225 kHz were applied.

The vertical component measurements are presented in figures 4.35a-b and the horizontal measurements in figures 4.36a-b. The high attenuation of polypropylene at the frequency range considered induces considerable energy decay with the offsets and the resulting small measured amplitudes render visible the measurement noise on the seismograms. Unfortunately, boundary reflections (arrows E) mask most of the weak boundary perturbations from the cavity visible in numerical seismograms. However, the perturbations of the grazing P-wave is clearly visible for both components (arrows E in figures 4.35-b and 4.36-b). The perturbation of the Rayleigh wave is much more pronounced for the horizontal component seismograms than for the vertical component.

As for the synthetic data, the reciprocal ellipticity and the tilt angle were computed according to the method described in section 4.7.4.a. The reciprocal ellipticity for the models with and without cavity are presented in figures 4.37. The instantaneous reciprocal ellipticity attributes for the models without the cavity (fig. 4.37-a) and with the cavity present strong similarities, with the exception of the positions indicated by arrows E and F. Arrow E indicates the perturbation of the grazing-P wave induced by the cavity which presents an hyperbola-shaped pattern. Several perturbations of the Rayleigh wave can be seen but since these perturbations interfere with larger amplitude boundary reflections, no particular pattern can be recognized anymore.

The tilt angle is computed with a reference angle having an inclination of 45 degrees (fig. 4.38a-b). As for the reciprocal ellipticity, the most noticeable perturbation of the cavity is the perturbation of the grazing P-wave (arrow E). A perturbation of the Rayleigh wave is also visible but the boundary reflections make the pattern observed more difficult to interpret. It is also noteworthy that the tilt angle helps to distinguish the different boundary reflections (arrows D).

This initial attempt to study the effects of a cavity on polarization measurements illustrates the potentialities provided by the MUSC measurement bench and the advantages of using regularized instantaneous polarization observables. Further experimental developments are needed to assess the benefits of regularized instantaneous polarization observables for seismic imaging purposes. Firstly, the size of the model should be increased to separate in the time domain interactions induced by the cavity with boundary reflections. These reflections are highly detrimental when they overlap weak cavity perturbations. The second direction of improvement for this work is to consider experiments on less attenuating materials in order to obtain higher amplitude particle displacements and thus improve the signal to noise ratio. Lastly, it was noted on numerical simulations that the short offset signals are easier to interpret with instantaneous polarization observables since less events overlap. Due to the

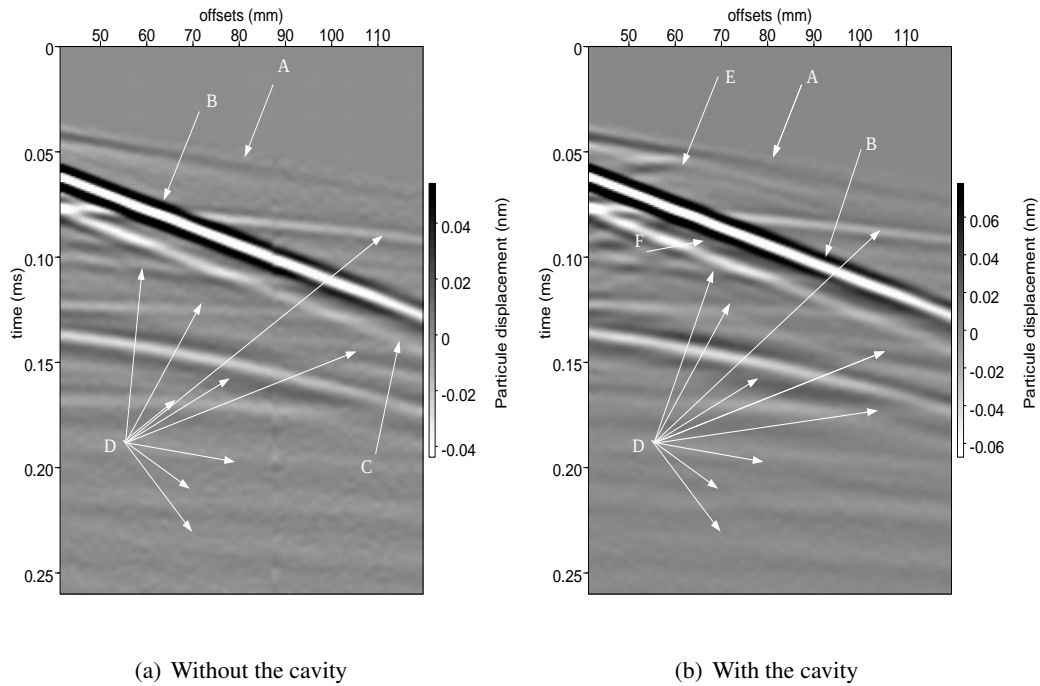


FIGURE 4.35 – Vertical component measurements with and without a cavity. On both figures, arrows A, B and D point to the grazing P-wave, the Rayleigh wave and the reflections from the physical model boundaries, respectively. Arrows E and F in figure b indicate a perturbation of the grazing P-wave and the Rayleigh wave due to interactions with the cavity. Arrow C indicates the source wavelet secondary oscillations visible on the Rayleigh waves.

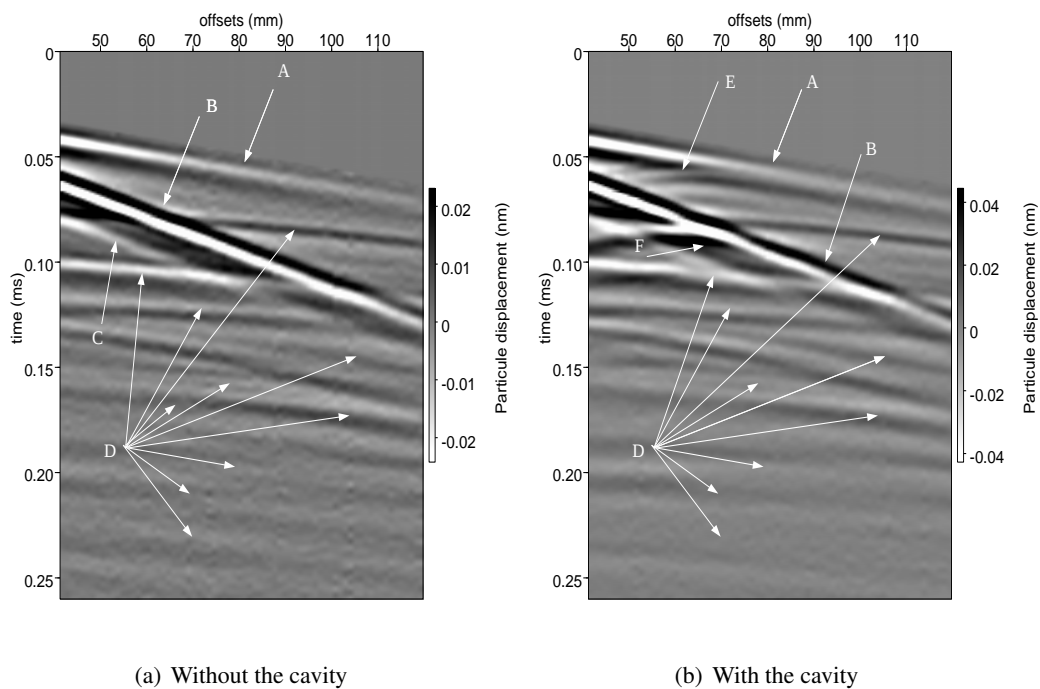


FIGURE 4.36 – Horizontal component measurements with and without a cavity. On both figures, arrows A, B and D are respectively pointing to the grazing P-wave, the Rayleigh wave and the reflections from physical model boundaries. The arrows E, F in figure b show some perturbation of the grazing P-wave and Rayleigh wave due to the interactions with the cavity. The arrow C is pointing to source wavelet secondary oscillations visible on the Rayleigh waves.

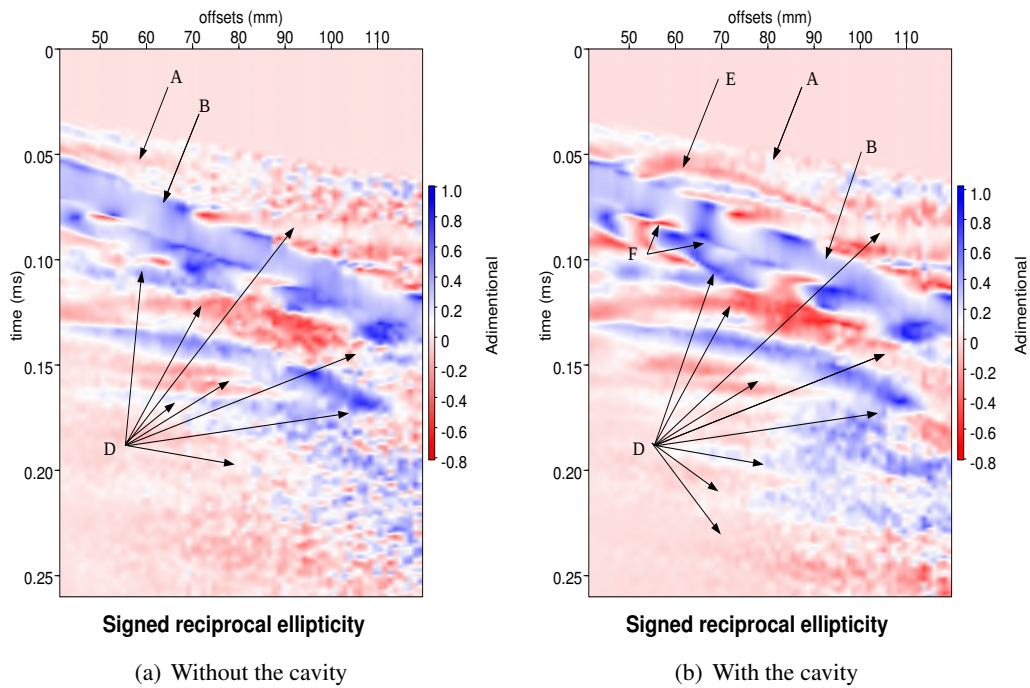


FIGURE 4.37 – Signed reciprocal ellipticity obtained from measurements with and without a cavity. On both figures, arrows A, B and D are respectively pointing to the grazing P-wave, the Rayleigh wave and the reflections from physical model boundaries. The arrows E, F in figure b show some perturbation of the grazing P-wave and Rayleigh wave due to the interactions with the cavity.

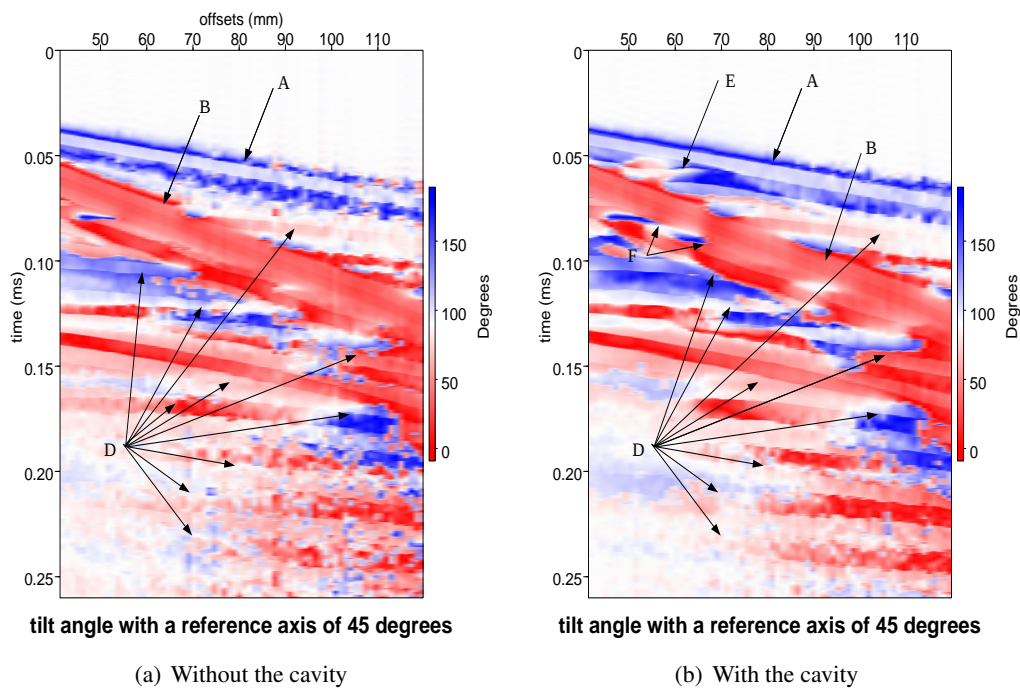


FIGURE 4.38 – Tilt angle obtained from measurements with and without a cavity. The reference angle used for the computation of the tilt angle has 45 degrees inclination with horizontal axis. On both figures, arrows A, B and D are respectively pointing to the grazing P-wave, the Rayleigh wave and the reflections from physical model boundaries. The arrows E, F in figure b show some perturbation of the grazing P-wave and Rayleigh wave due to the interactions with the cavity.

size of the source used for these experiments, they could not be measured on the dataset presented, since the shortest offset was 41.5 mm (equivalent to 41.5 m if transposed at full scale). However, for further investigations a smaller source will allow smaller offset measurements and thus make cavity diffraction effects more visible on reduced-scale experimental data.

4.9 Conclusions and perspectives

This article described the integration of a novel laser interferometric multicomponent sensing technology in a versatile reduced scale physical modeling bench. The accuracy of the measurements was characterized in several ways, alternative definitions of regularized instantaneous polarization were introduced and an illustration of the relevance of multicomponent physical modeling taking advantage of these attributes to detect cavities was given.

Firstly, a study of the noise affecting each channel was presented. The main properties of the noise such as its power density, anisotropy and degree of polarization were characterized. We highlighted that the properties of the noise included two very sharp power peaks in narrow frequency bands, that the noise affecting the horizontal component was generally stronger than for the vertical component, that the noise affecting the horizontal component was very variable according to the measurement positions (different local speckle patterns) and that the degree of polarization of the noise was generally high. The statistical distribution of the noise was also analyzed, showing that the bias from the noise was negligible and that the normality assumption was justified. This information characterizing the noise is important for designing experiments and for integrating a suitable noise model in signal processing algorithms.

The second step of the characterization concerned polarization measurements of surface waves on an aluminum block. Pre-processing was applied to the measurements in order to mitigate possible biases. The comparison to theoretical particle motion showed very good agreement. The main discrepancies observed were small biases (up to a few degrees less) on the Horizontal to Vertical Spectral Ratio (HVSR), and small variations of the amplitude of the HVSR. The latter were related to small perturbations of the normalization of the horizontal component due to local variations of the optical speckle on the surface of the model. The maximal deviation observed of the amplitude of the HVSR was 4.9% but the number of measurement positions considered was not large enough to enable representative conclusions.

Then, to further assess the quality of the measurements, a comparison between the simulations and the measurements was conducted. A semi-analytical model was developed to fully account for wave propagation in three dimensions and for the finite size of the source. Particular attention was given to using a small number of traces with only the vertical component to avoid inferring the source wavelet from the horizontal component, and a Wiener filtering method was applied to stabilize the inversion. The results of the inversion showed a very good fit for the Rayleigh waves with both components, but the grazing P-wave waveforms exhibited significant differences. Regarding the synthetic data, the amplitude of this wave was systematically too small compared to the experimental data, and the waveform was more oscillatory for the experimental data than for the simulations. A possible explanation for this discrepancy might come from the assumption in the model that the source had a uniform spatial stress distribution.

Next, in order to simultaneously check the agreement of the phase and polarization between the measurements and simulations, comparisons of instantaneous polarization attributes were conducted. Two different kinds of polarization attributes were studied : the extension of the HVSR to analytical signals, based on the works of Morozov & Smithson (1996); and the introduction of regularized

definitions of the tilt angle and reciprocal ellipticity. Very good agreement of HVSR attributes with experimental and synthetic data was observed and the regularized definitions of polarization attributes provided a useful interpretation tool for detecting and interpreting the different events.

The last part of this article focused on an example of the advantage of applying multicomponent measurements to the detection of very shallow cavities. As shown with synthetic 2D data, the amplitudes of perturbations from the cavity were very small. Some of them could be observed on both component synthetic seismograms. The regularized definitions of the tilt angle and the reciprocal ellipticity were also applied to the synthetic data and they may contribute to the detection and interpretation of the different events (especially for very small amplitude events), provided that there are not too many overlapping events. Multicomponent measurements on a physical model were carried out and it was noted that one perturbation of the Rayleigh wave was difficult to detect on the measurements of the vertical component. However, it was much clearer on the horizontal component of the experimental seismograms. The definitions of regularized polarization attributes were applied to the experimental data and they highlighted the perturbation of the grazing P-wave. Since other perturbations overlapped with larger amplitude boundary reflections, the instantaneous polarization attributes did not highlight them adequately.

In conclusion, the latest upgrade of the laser interferometer integrated in the MUSC measurement bench allowed accurate, reliable simultaneous measurements of the horizontal and vertical components of particle displacements. Advantage was taken of the other elements of the MUSC measurement bench to achieve high fidelity and flexible multicomponent reduced scale physical modeling of seismic experiments with large multi-source and multi-receiver configurations.

The works presented lead to several perspectives. Firstly, to avoid the problems of variations of the horizontal component, the model surface must be ground with greater care to obtain more homogeneous speckling for the different measurement positions. Secondly, new sources are currently being studied in order to obtain a smaller offset with the interferometer in a multicomponent measurement configuration. Thirdly, the scientific potentialities provided by this new tool go beyond cavity detection alone. For instance, multicomponent physical modeling could be applied to several areas of seismology such as the study of the shear-wave splitting phenomenon (Crampin & Chastin, 2003; Crampin & Peacock, 2008) and the interpretation of the H/V ratio to study site effects (Fäh *et al.*, 2001; Sánchez-Sesma *et al.*, 2011). Furthermore multicomponent physical modeling may be useful for assessing imaging methods since an increasing number of imaging algorithms have been proposed to handle multicomponent data in recent years (for instance Esmersoy (1990); Shieh & Herrmann (1990); Zhe & Greenhalgh (1997); Zhu *et al.* (1999); Agnihotri & McMechan (2007); Sears *et al.* (2008); Yan & Sava (2008); Barnes & Charara (2010); Chung *et al.* (2012)).

4.10 Acknowledgements

The authors would like to thank Bruno Pouet and Alexis Wartelle for their advice and the constant improvements made to the laser interferometer. We are grateful to Vincent Baltazart for their introduction to polarization analysis formalism, and for numerous and insightful discussions on statistics and probability. Jérôme Idier and Thomas Bodin are also acknowledged for their discussions on probability and statistics. The authors are grateful to Karel van Dalen for bringing the polarization properties of surface waves to our attention and for discussions on the physical interpretations of analytical equations. Many thanks, also, to Fabien Treysede, Laurent Laguerre, Michel Dietrich and Khac-Long Nguyen for providing help and cross-validations during the development of the semi-analytical mod-

eling tool. The authors thank Olivier Poncelet, Eric Ducasse, Philippe Gagnol and Julien Diaz for discussions on closed form solutions for wave propagation problems. Romain Brossier, Jean Virieux and Stéphane Operto are acknowledged for providing the discontinuous Galerkin finite element modeling code and for their assistance in using it. Zheng Li is acknowledged for his talents in vectorial drawing. This work was granted access to the HPC resources of [CINES] under the allocation 2013-[C2013046837] made by GENCI

4.11 Appendix

4.11.1 Statistical properties of the noise table

Statistical properties of the noise at the position 1 are summarized in the following tables :

Frequency	Empirical mean V channel	Standard deviation channel V	Gaussianity	Noise peak frequency
50 kHz	$2,83 \cdot 10^{-07} - 2,51 \cdot 10^{-07}i$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	no	no
113 kHz	$2,28 \cdot 10^{-07} - 2,53 \cdot 10^{-06}i$	$2,48 \cdot 10^{-4}$	no	yes
150 kHz	$7,4 \cdot 10^{-07} + 3,05 \cdot 10^{-07}i$	$5,84 \cdot 10^{-05}$	yes	no
162 kHz	$2,28 \cdot 10^{-07} - 3,76 \cdot 10^{-07}i$	$8,62 \cdot 10^{-05}$	no	yes
260 kHz	$4,08 \cdot 10^{-07} - 1,05 \cdot 10^{-06}i$	$6,35 \cdot 10^{-05}$	no	yes
357 kHz	$-6,65 \cdot 10^{-07} + 2,24 \cdot 10^{-06}i$	$7,23 \cdot 10^{-7}$	no	yes
500 kHz	$1,69 \cdot 10^{-07} + 4,44 \cdot 10^{-07}i$	$2,71 \cdot 10^{-05}$	yes	no
800 kHz	$-2,46 \cdot 10^{-07} + 3,17 \cdot 10^{-08}i$	$1,77 \cdot 10^{-05}$	yes	no

TABLE 4.1 – Summary of the statistical properties of the vertical component noise (means and the standard deviation units are in $\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$)

Frequency	Empirical mean H channel	Standard deviation channel H	Gaussianity	Noise peak frequency
50 kHz	$1,75 \cdot 10^{-06} - 7,35 \cdot 10^{-07}i$	$1,31 \cdot 10^{-4}$	no	no
113 kHz	$1,71 \cdot 10^{-06} - 2,92 \cdot 10^{-07}i$	$3,63 \cdot 10^{-4}$	no	yes
150 kHz	$-1,2 \cdot 10^{-06} - 3,53 \cdot 10^{-07}i$	$9,31 \cdot 10^{-05}$	no	no
162 kHz	$6,77 \cdot 10^{-07} + 4,02 \cdot 10^{-07}i$	$1,07 \cdot 10^{-4}$	no	yes
260 kHz	$1,7 \cdot 10^{-06} + 1,3 \cdot 10^{-06}i$	$9,49 \cdot 10^{-05}$	no	yes
357 kHz	$7,17 \cdot 10^{-07} - 7,66 \cdot 10^{-06}i$	$6,22 \cdot 10^{-4}$	no	yes
500 kHz	$-2,79 \cdot 10^{-07} - 6,43 \cdot 10^{-07}i$	$8,36 \cdot 10^{-05}$	no	no
800 kHz	$5,51 \cdot 10^{-07} + 1,11 \cdot 10^{-06}i$	$8,34 \cdot 10^{-05}$	no	no

TABLE 4.2 – Summary of the statistical properties of the horizontal component noise (means and the standard deviation units are in $\text{nm}/\sqrt{\text{Hz}}$)

4.11.2 Mechanical properties of physical model materials

The mechanical properties of the models are gathered in the following table.

Material	V_p	V_s	ρ	Q_p	Q_s
Aluminum	6320 m/s	3130 m/s	2700 kg/m ³	20000	20000
Polypropylene	2750 m/s	1221 m/s	910 kg/m ³	25	11

TABLE 4.3 – Table of the mechanical properties of models used in the article

4.11.3 Riedel's based multitaper method with sinusoidal tapers

The multi-taper method is a method used to reduce the variance in the estimation of power spectrums first introduced by Slepian (1978); Thomson (1982) and later employed in geophysics by Park *et al.* (1987). The basic idea of this method is to compute the PSDs of signals with different windows (tapers) and then average the different PSDs obtained from the various tapers. Slepian (1978) proposed using discrete prolate spheroidal sequences, such as the taper family, since they form the solution that minimizes the variances of the PSDs in the estimates. However, in this paper we preferred to use the sinusoidal tapers proposed by Riedel & Sidorenko (1995) for two reasons. Firstly for the sake of simplicity since these tapers can be expressed in a closed form as opposed to Slepian functions which need the resolution of Fredholm integral eigenvalue equations and, secondly, they are asymptotic approximations of the minimum bias tapers, as shown by Riedel & Sidorenko (1995). Considering a time series $\{s_i\}$ with $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ with a sampling interval Δ_t , the m indexed normalized sinusoidal taper W_m compatible with the proposed definition of the PSD (eq. 4.3) has the following expression :

$$W_m(i) = \sqrt{\frac{2}{N\Delta_t}} \sin\left(\frac{\pi m(i-1)}{N}\right) \quad (4.28)$$

4.12 Acquisition de données multicomposantes sur maquette

4.12.1 Présentation de l'acquisition et de la maquette

Dans cette section, je présente les acquisitions multicomposantes que nous avons réalisées sur un modèle réduit représentant deux milieux tabulaires ayant leurs interfaces situées respectivement à 8 mm et à 5 mm de profondeur. La jonction entre ces deux interfaces est réalisée par une zone de transition latérale de 10 mm. Nous désignerons cette maquette par : maquette SB1.

Un plan de la maquette ainsi que les repères associés à l'acquisition sont représentés à la figure 4.39. Une photographie en coupe de la partie superficielle de la maquette est présentée à la figure 4.40.

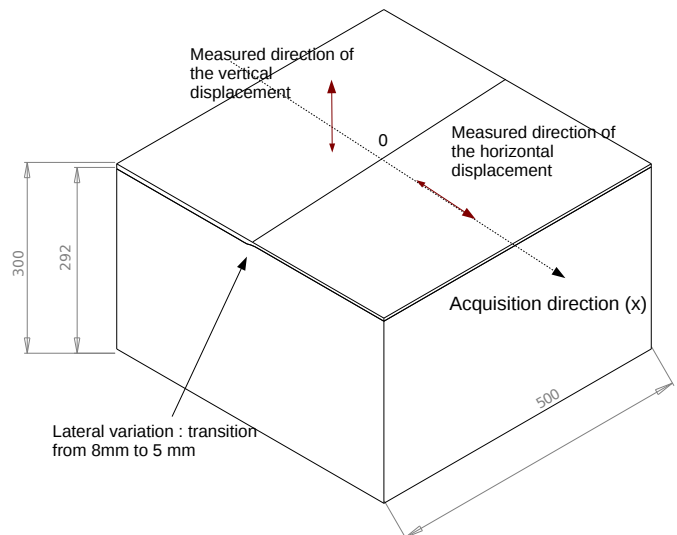


FIGURE 4.39 – Plan de la maquette SB1 avec variation latérale. L'origine (0) coïncide le centre de la variation latérale.

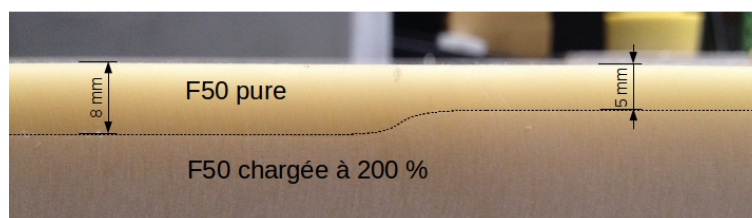


FIGURE 4.40 – Zoom sur la variation latérale de la maquette SB1. La ligne en pointillés indiquent l'interface entre les couches supérieures et inférieures

Les propriétés mécaniques estimées des matériaux composant la maquettes sont fournies dans le

Matériau	V_p	V_s	ρ	Q_p	Q_s
Résine F50 (couche supérieure SB1)	2300 m/s	1050 m/s	1300 kg/m ³	50	50
Résine F50 chargée (couche inférieure SB1)	2700 m/s	1170 m/s	1700 kg/m ³	50	50

TABLE 4.4 – Propriétés mécaniques de la maquette SB1

tableau 4.4.

Afin de permettre la mesure de la composante horizontale, il a été nécessaire de respecter des spécifications de géométrie plus strictes que pour les modèles destinés à la mesure de la composante verticale uniquement. On notera notamment qu' une variation maximale de 0.05mm de hauteur sur l'ensemble de la surface est tolérée.

A la surface de la maquette est positionné un ruban réfléchissant qui est abrasé de manière à créer une surface suffisamment rugueuse pour permettre la diffusion du laser incident (speckle optique).

Le dispositif d'acquisition simulé est composée de 32 sources espacées de 4mm. Les sources aux extrémités du dispositifs sont situées aux positions $x=-59$ mm et $x=65$ mm.

Afin de permettre à l'optique du laser de passer sous la source, nous avons dû modifier le support de la source et utiliser une source suffisamment petite. Il s'agit ici d'une source de surface 1/4 pouce dont la fréquence centrale (pour une utilisation standard) est de 2.25 MHz mais que nous utilisons à une fréquence centrale de 100 kHz (donc très largement hors de son spectre d'utilisation normale). Pour obtenir une surface de contact suffisamment réduite pour reproduire une source ponctuelle, un adaptateur en forme de cône en polypropylène a été utilisé.

Si on divise les fréquences par un facteur 2000 et si on multiplie les distances par un coefficient 1000, alors on retrouve des distances et des fréquences correspondant à une configuration de sismique de proche surface. Par ailleurs en appliquant ces rapports d'échelle, les vitesses de la maquette deviennent deux fois plus faibles que celles décrites dans le tableau 4.4.

Les mesures sont réalisées afin de reproduire un dispositif de mesure composé de 66 capteurs multicomposantes espacés de 2 mm. Les positions de mesures aux extrémités du dispositif sont -65 mm et 65 mm. Chaque mesure est une moyenne de 512 mesures élémentaires. Afin de limiter les incertitudes sur la mesure de la composante horizontale liées l'état de surface optique (abrasion du ruban réfléchissant), chaque mesure a été répétée 5 fois en changeant de ruban réfléchissant. Au total le ruban adhésif a dû être changé 10 fois pour obtenir le jeu de données complet (car pour réaliser l'ensemble des mesures sans revenir sur les positions déjà poinçonnées par la source il est nécessaire d'utiliser deux rubans réfléchissants). Parmi ces mesures, les traces présentant les meilleurs indicateurs de mesures ont ensuite été sélectionnées pour former un jeu de données définitif. Afin de présenter une première analyse, nous avons simplement moyenné les mesures obtenues pour les différents rubans réfléchissants.

4.12.2 Résultats préliminaires des mesures

Deux tirs situés de part et d'autre de la variation latérale sont présentés pour les figures 4.41 à 4.44. Le premier tir est situé du côté où l'interface est la plus profonde pour une position de source $x=-59$ mm et le second tir du côté où l'interface est la plus superficielle à la position source $x=65$ mm. Nous utiliserons comme élément de comparaison des simulations bidimensionnelles provenant du code FWM2D-PSV (Seiscope, principal auteur R. Brossier). Les mesures sont présentées par les figures 4.41 à 4.44. On remarquera que les temps d'arrivées des données expérimentales et numériques ne correspondent pas car un recalage des données est nécessaire afin de déterminer le délai de la source (constant pour toutes les mesures). Ceci peut être soit réalisé manuellement par des pointés de temps d'arrivées ou à l'aide d'une inversion de l'ondelette source (Bretaud, 2010). Par ailleurs, pour l'ensemble des sismogrammes simulés, on remarquera des réflexions provenant des extrémités du modèle. Ces réflexions proviennent des imperfections des couches absorbantes (PML). Leurs amplitudes sont très faibles (de l'ordre du 1% de l'amplitude de l'onde de Rayleigh) mais elles sont visibles du fait du degré élevé de saturation employé dans l'affichage des sismogrammes.

Sur les figures 4.41 et 4.42 présentant respectivement les composantes horizontales et verticales pour un tir réalisé à la position -59 mm (partie du modèle où l'interface est la plus profonde), on remarquera tout d'abord que l'ondelette est beaucoup plus oscillante pour les mesures expérimentales que pour les données simulées. Ces oscillations sont d'autant plus prononcées du fait que l'on utilise le capteur hors de sa plage fréquentielle d'usage et que l'on utilise un adaptateur conique.

Pour la composante horizontale (fig. 4.41), au niveau de l'onde P à la surface (ondes de tête) on retrouve pour les données mesurées une interaction avec la variation latérale similaire à ce que l'on peut observer sur les simulations. On peut aussi noter sur les données simulées (fig. 4.41a) plusieurs diffractions nettes de l'onde de Rayleigh sur la variation latérale dont on peut retrouver la trace sur les données mesurées. Cependant, certains événements situés entre l'onde de tête et l'onde de Rayleigh sont plus difficilement identifiables entre les données mesurées et les simulations.

Pour la composante verticale (fig. 4.42), on peut noter une certaine similarité dans l'allure générale de l'onde de Rayleigh mais on notera aussi quelques différences. La diffraction l'onde de tête due à la variation latérale est beaucoup plus visible sur les données numériques que sur les données expérimentales et on observe un événement présent dans les données mesurées entre l'onde de tête et l'onde de Rayleigh mais qui semble absent des données calculées. Cet événement plus rapide que l'onde de Rayleigh (mode fondamentale) pourrait éventuellement correspondre à la contribution d'un mode supérieur.

Les figures 4.43 et 4.44 représentent respectivement les composantes horizontales et verticales pour un tir réalisé à la position 65 mm (partie du modèle où l'interface est la plus superficielle). Étant donné que l'on observe qualitativement les mêmes différences entre les données mesurées et les données calculées pour les deux composantes, on commentera les données pour les deux composantes simultanément.

On peut remarquer un bon accord sur l'allure générale de l'onde de tête entre les données calculées et les données mesurées. Par contre, on notera certaines différences pour les événements plus tardifs. Tout comme pour le cas du tir à la position $x=65$ mm, on remarque un événement plus rapide que l'onde de Rayleigh (mode fondamental) apparaissant entre l'onde de tête (P à la surface) et l'onde de Rayleigh. D'autre part, on remarquera que l'effet de la variation latérale est plus visible sur les données simulées numériquement que sur les données mesurées.

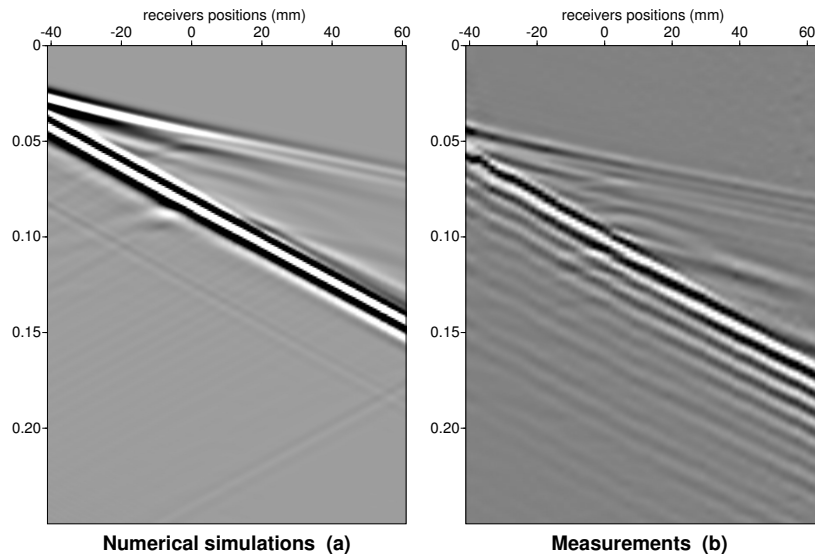


FIGURE 4.41 – Sismogrammes de la composante horizontale, calculée (a) et mesurée (b) pour une source placée à la position -59mm. La position du centre de la variation latérale est à $x=0$ mm. On notera que ces figures ont été réalisées avec un degré de saturation élevé (perc=97)

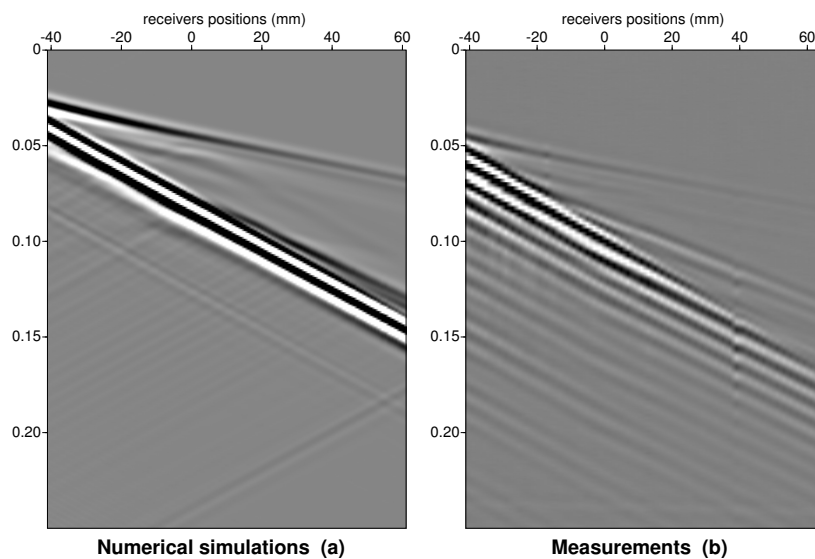


FIGURE 4.42 – Sismogrammes de la composante verticale calculée (a) et mesurée (b) pour une source placée à la position -59mm. La position du centre de la variation latérale est à $x=0$ mm. On notera que ces figures ont été réalisées avec un degré de saturation élevé (perc=97)

Pour conclure cette première analyse de données multicomposantes mesurées sur la maquette SB1, on a remarqué certaines correspondances entre les signaux simulés et mesurés mais aussi certaines disparités non expliquées. Des simulations tri-dimensionnelles pourraient notamment permettre

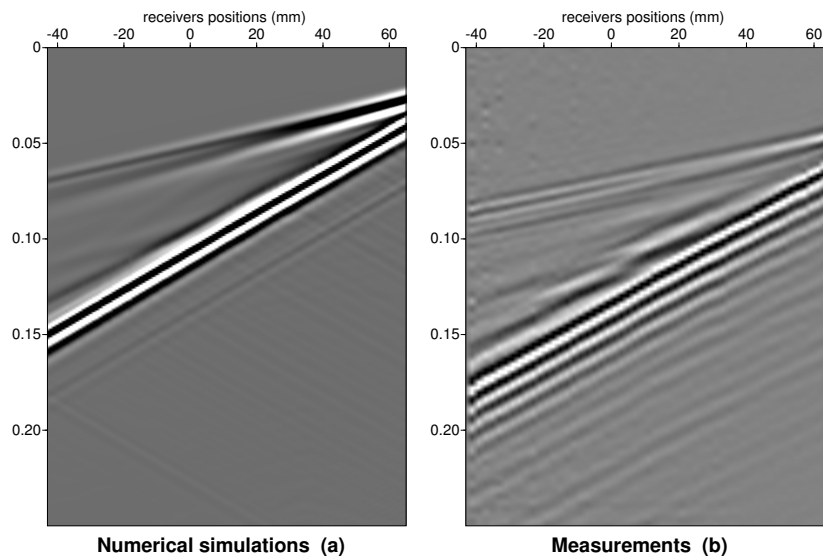


FIGURE 4.43 – Sismogrammes de la composante horizontale ; calculée (a) et mesurée (b) pour une source placée à la position 65mm. La position du centre de la variation latérale est à $x=0$ mm. On notera que ces figures ont été réalisées avec un degré de saturation élevé (perc=97)

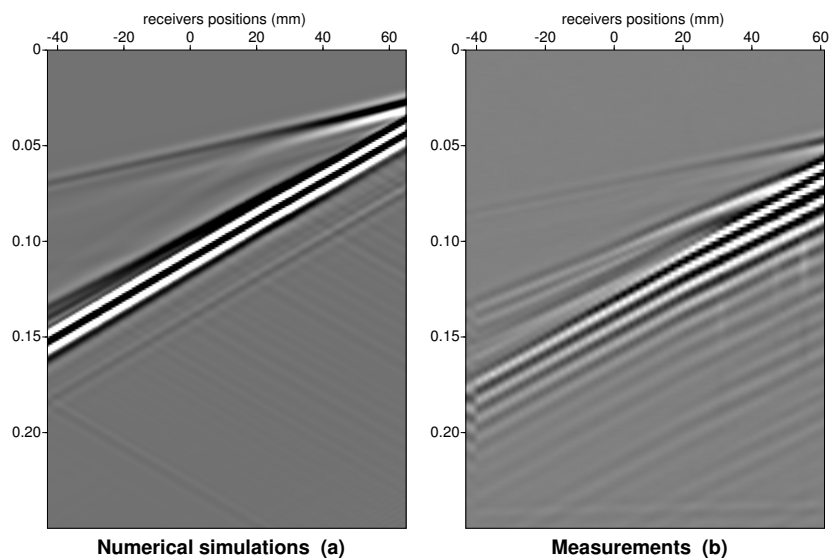


FIGURE 4.44 – Sismogrammes de la composante verticale calculée (a) et mesurée (b) pour une source placée à la position 65mm. La position du centre de la variation latérale est à $x=0$ mm. On notera que ces figures ont été réalisées avec un degré de saturation élevé (perc=97)

de mieux simuler la configuration expérimentale utilisée. Par ailleurs, des traitements plus fins des données sont nécessaires afin de pouvoir extraire les meilleures traces et permettre une interprétation plus poussée des signaux mesurés. Enfin, il sera éventuellement envisageable de réaliser une inversion des signaux mesurés à l'aide de la méthode d'inversion des formes d'ondes.

4.13 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, j'ai présenté mes travaux liés à l'expérimentation à échelle réduite pour l'acquisition de données multicomposantes. L'intégration d'un prototype d'interféromètre laser a été réalisée dans le banc de mesure MUSC et la qualité de la mesure multicomposantes a été évaluée sur un modèle de référence en aluminium. Les niveaux de bruit et la polarisation des ondes de surface ont été étudiés. Une comparaison des signaux à l'aide d'un code semi-analytique (développé à cet effet) a montré une bonne correspondance entre les données calculées et simulées à l'exception de l'onde de P à la surface (onde de tête).

Une première application de la mesure multicomposantes a été réalisée à un modèle physique contenant une cavité proche de la surface et les mesures ont été traitées à l'aide d'une version modifiée des attributs instantanés de polarisation.

La seconde application concerne la mesure sur un modèle représentant une configuration avec deux milieux tabulaires situés avec une variation latérale. Une acquisition complète de données multi-sources et multi-récepteurs a été réalisée. Dans un premier temps, il est nécessaire de mieux estimer les propriétés mécaniques des matériaux utilisés et réaliser une estimation de la source. Ensuite, un important travail de sélection, de traitement et d'analyse des signaux doit être entrepris afin de permettre l'exploitation de ces données.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions générales de ce travail de thèse

De manière globale, on peut classer mes principales contributions suivant qu'il s'agisse de travaux liés à l'inversion ou de l'expérimentation à échelle réduite.

5.1.1 Contributions à l'inversion des formes d'ondes multicomposantes

La principale contribution par rapport à l'inversion aura consisté à reformuler le problème de minimisation de l'inversion des formes d'ondes de manière à inverser la polarisation explicitement.

L'inversion de la polarisation pour des configurations relativement générales demande la formulation d'une fonction coût permettant de traiter la polarisation comme une quantité « intrinsèque ». J'entends par « intrinsèque » une fonction coût qui quelque soit l'état de polarisation mesuré reste bien définie (par exemple qui ne devienne pas infinie) et qui ne dépend pas du choix d'orientation du système de mesure multicomposantes.

Pour ce faire, j'ai employé le formalisme utilisé en électromagnétisme (optique, télédection...) ou en mécanique quantique afin de décrire les états de polarisation des ondes sismiques. La principale différence dans mon usage de ce formalisme par rapport à l'usage qui en est fait classiquement consiste dans le fait que l'on traite d'états dits « purs » tandis qu'en optique on réalise des moyennes qui aboutissent à des états dits mixtes. Il apparaît naturellement dans ce formalisme une distance permettant de mesurer de manière intrinsèque l'écart entre deux états de polarisation. Il s'agit de la distance que j'ai employée pour formuler une famille de fonction coûts répondant à certaines propriétés. En référence à la sphère de Poincaré, j'ai appelé cette distance « distance de Poincaré ».

Dans le but de réaliser une optimisation locale économique du gradient, j'ai dérivé à l'aide du formalisme des multiplicateurs de Lagrange l'expression du gradient de cette fonctionnelle (par l'état adjoint) et je l'ai implémentée dans le code FWT2D-PSV. En parallèle, j'ai aussi calculé et implémenté les gradients d'autres fonctions coûts basées sur la polarisation jusqu'alors non utilisées dans le cadre de l'inversion des formes d'ondes. Je peux par exemple citer la fonction coût basée sur les rapports (complexes) de polarisation et la fonction alternative proposée par (Bodin *et al.*, 2014), les fonctions coûts où les observables (calculées et mesurées) sont normalisés par rapport à l'ensemble du mouvement particulière ... Je me suis aussi attaché à expliciter le lien entre ces fonctions coûts et la formulation basée sur la distance de Poincaré. Étant donné que l'inversion de la polarisation est particulièrement « déroutante » en partie par le fait que la notion de phase « absolue cinématique » disparaît, j'ai proposé une étude du comportement de cette fonction coût sur des cas canoniques. Les

noyaux de sensibilité associés aux observables de polarisation ont aussi été calculés.

Le chapitre 3 propose de tester numériquement les limites et avantages de l'inversion de la polarisation suivant le formalisme décrit dans le chapitre précédent. Cette étude a porté sur deux type de milieux, un milieu « simple » composé d'une perturbation élastique en forme de croix et un milieu représentant une configuration de proche surface. La première série de tests vise à comprendre le comportement de l'inversion des paramètres V_p et V_s lorsque plusieurs paramètres dans l'inversion sont biaisés. Il s'agit généralement de paramètres mal-connus et mal contraints par les données mesurées donc fréquemment non inversés, nous avons sélectionné comme paramètres l'atténuation et la densité. Par ailleurs, j'ai aussi rajouté à cette étude les erreurs sur l'ondelette source.

Parmi l'ensemble des fonctions coûts testées, seules trois d'entre elles sont présentées : 1) la fonction coût « conventionnelle » multicomposante basée sur une norme ℓ_2 , 2) la fonction coût basée sur une norme ℓ_2 mais où données calculées et observées sont normalisées par la norme du déplacement particulaire et enfin 3) la fonction permettant d'inverser la polarisation basée sur la distance de Poincaré. Il ressort que les résultats d'inversion obtenus avec l'inversion de la polarisation basée sur une distance de Poincaré et la fonction coût avec les observables classiques normalisées permettent des inversions beaucoup plus robustes par rapport aux erreurs sur l'atténuation que la norme conventionnelle ℓ_2 multicomposantes. Néanmoins, on remarquera que l'effet cumulé des erreurs sur l'ondelette source, sur l'atténuation (surtout lorsque l'atténuation est importante) et sur la densité dégradent fortement l'inversion des résultats d'inversion même pour les fonctions coûts basées sur la polarisation ou les observables classiques normalisées.

Le second cas étudié consiste en un milieu fortement contrasté où l'on a testé la fréquence minimale nécessaire pour faire converger l'inversion. Il s'est avéré que l'inversion de la polarisation basée sur la distance de Poincaré converge pour des fréquences plus élevées que pour les autres fonctions coûts testées.

La troisième cas étudié est une configuration se rapprochant de conditions de sismique de proche surface. Le but étant de réaliser une première phase d'étude de l'inversion de la polarisation pour ce type de milieu. Le choix du milieu a été orienté pour correspondre à une maquette expérimentale. L'analyse de données montre une très faible signature de la variation latérale noyée dans un bruit géologique structuré (damier). Lors de l'analyse de la dispersion, l'extension de la transformée $p - \omega$ au cas des données multicomposantes a été introduit (formalisme en annexes). Pour ce cas, j'ai adapté la stratégie d'inversion afin de tenir compte des particularités de la proche surface et comparé les résultats d'inversion provenant des trois fonctions coûts déjà mentionnées.

Il ressort que les trois fonctions coûts génèrent des résultats relativement proches dans le cas où l'atténuation est précisément connue mais la fonction coût conventionnelle ℓ_2 multicomposante présente des résultats fortement dégradés si l'atténuation est mal-connue. On a aussi remarqué que l'inversion de la polarisation présente une bonne sensibilité aux couches très fines en surface. Ceci permet d'imager avec une certaine précision les interfaces très proches de la surface mais par ailleurs cette fonction coût a une tendance plus prononcée que les autres formulations testées à créer des zones artificielles avec des forts contrastes dans la proximité immédiate de la surface libre. Pour palier à ce problème, j'ai utilisé une solution heuristique classique qui consiste à bloquer sur une certaine profondeur à proximité de la surface tout en laissant librement le lissage du gradient « déborder » sur cette zone afin d'éviter la création d'interfaces artificielles à la fin de celle-ci. Dans le cas présent, cette solution peut être justifiée par une analyse préalable de la dispersion et de la polarisation des ondes de surface pour les fréquences les plus élevées.

5.1.2 Contribution à l'expérimentation à échelle réduite

La seconde contribution importante de ce travail de thèse concerne l'extension d'un banc de mesures ultrasonores pour permettre la modélisation physique de dispositifs multisources-multirécepteurs avec mesure de données multicomposantes. Il s'est avéré que la mesure pour la composante horizontale est nettement plus difficile et délicate que pour la composante verticale. Afin de permettre d'éviter les délais électroniques entre les voies mesurant les composantes verticale et horizontales, nous avons dû en collaboration avec le fabricant du prototype utiliser une voie alternative pour la mesure composante verticale de sorte à avoir une synchronisation entre les voies verticales et horizontales. Toujours dans l'objectif d'obtenir des mesures consistantes d'une voie à l'autre, nous avons vérifié l'ensemble de la chaîne d'acquisition et réalisé les changements adaptés.

Nous avons évalué les performances en termes de bruit de mesures, reconstruction du champ d'onde et polarisation du nouveau dispositif de mesures à l'aide d'un bloc test en aluminium. Suivant ces indicateurs, la mesure de la composante horizontale s'avère précise mais délicate. La principale difficulté provenant des variations locales de l'état surface optique suivant le point de mesure et dans une moindre mesure de sources de perturbations extérieures. Nous avons établi un protocole de mesures afin de définir les conditions expérimentales à respecter pour optimiser la robustesse et la qualité des mesures. Ces conditions expérimentales exigent notamment des spécifications plus strictes sur la géométrie des modèles physiques que pour la mesure de la composante verticale seule.

Une première application de ce nouveau protocole de mesures concerne des mesures pour la caractérisation de cavités en proche surface est présentée. Une version « régularisée » des attributs instantanés de polarisation ont aussi été appliqués à ces mesures.

Enfin, je présente les résultats de mesures multicomposantes réalisées sur une maquette représentant un milieu de subsurface et pour une acquisition multi-sources/multi-récepteurs.

5.2 Perspectives

Je reprendrais l'organisation utilisée dans le paragraphe précédent pour énoncer les différentes perspectives. Pour chacune des parties, je diviserai mes perspectives selon qu'il s'agisse de conclusions envisageables dans le court terme-moyen terme ou dans un futur plus lointain.

5.2.1 Perspectives liées à l'inversion des formes d'ondes multicomposantes

5.2.1.a Perspectives envisageables à court ou moyen terme

L'inversion de la polarisation a été formulée et testée à partir d'exemples numériques mais certaines inconnues demeurent quant à l'application sur données « réelles ». Une première étape à mon avis consisterait à approfondir l'étude des effets du bruit et des erreurs d'orientation des capteurs sur l'inversion de la polarisation. Afin d'évaluer la robustesse de la méthode, une étude numérique peut-être envisageable dans un premier temps. Par ailleurs, les développements expérimentaux réalisés dans la thèse en modélisation physique à échelle réduite permettraient de fournir un jeu de mesures réalisées dans un contextes contrôlé.

D'autre part, les tests numériques proposés dans la thèse peuvent être étendus afin de considérer des cas moins « idéaux ». Je pense notamment à la décimation des acquisitions et à des erreurs plus prononcées sur les modèles initiaux. Il serait aussi intéressant à mon avis d'investiguer numériquement les bénéfices et limites de l'incorporation de l'inversion de la polarisation (seule ou conjointement avec d'autres observables) pour l'inversion de l'anisotropie.

De plus, le formalisme que j'ai proposé est assez général : il ne considère pas un nombre de composantes données ou une physique particulière. Ainsi, il pourrait être utilisé pour des méthodes électromagnétiques comme par exemple le radar géologique ou des mesures de champs électromagnétiques basses fréquences. Par ailleurs, j'ai appliqué cette formulation dans le cadre de l'inversion de paramètres structuraux mais il pourrait aussi être employé pour l'estimation des paramètres de sources en sismologie. Je pense aussi que la nature intrinsèque de la fonction coût pourrait avantageusement être utilisée pour reformuler le problème inverse de l'inversion des rapports spectraux de polarisation (différentes variantes des rapports H/V) utilisés en prévention du risque sismique conjointement avec des observables de dispersion des ondes de surface. Toujours dans l'optique d'une extension à d'autres domaines que ceux de la proche surface ou de l'exploration, il pourrait être envisageable de reformuler le problème des fonctions-récepteurs suivant le formalisme que je propose pour l'inversion de la polarisation. Par ailleurs, l'expression de la polarisation est plus aisée dans le domaine fréquentiel que temporel mais l'expression dans le domaine des nombres d'ondes ne pose aucune difficulté, ce qui permettrait une application immédiate à des méthodes d'imagerie dans des domaines comme celui des fréquences-nombres d'ondes.

D'autre part, il pourrait être intéressant de combiner soit au sein d'une même fonction coût ou à l'aide d'inversions alternées plusieurs fonctions coûts présentant des caractéristiques complémentaires comme par exemple une fonction coût basée sur la polarisation et une fonction coût basée sur la phase (ou les vitesses de phases apparentes), afin de mieux contraindre l'inversion et peut-être permettre à l'optimisation de s'extraire de minimums locaux. Utiliser plusieurs observables est d'autant plus nécessaire dans un contexte de proche surface car la réponse des milieux tabulaires dans les limites basses et hautes-fréquences convergence vers celle de demi-espaces. Or dans ce cas, la polarisation des ondes de Rayleigh dépend uniquement du coefficient de Poisson, ce qui génère une indétermination entre les paramètres V_p et V_s .

5.2.1.b Perspectives envisageables à moyen ou long terme

Il me semble que l'application du formalisme pour l'inversion de la polarisation à des données réelles pourra être envisagée lorsque l'on aura suffisamment d'éléments quant à la robustesse de cette méthode.

Pour ce qui est de l'application à la proche surface outre les considérations expérimentales sur la qualité des mesures réalisables et l'adéquation de la méthode d'inversion, il me semble assez important de souligner une des difficultés rencontrées. Dans les configurations de sismique de proche surface, les rapports des distances, profondeurs investiguées et longueurs d'ondes peuvent être critiques suivant la profondeur imagée.

Pour éviter que ces zones superficielles ne perturbent l'inversion de l'ensemble du domaine, il est fréquent de ne pas inverser (par l'ajout d'un terme de régularisation ou en ne calculant pas le gradient) les premiers mètres en dessous de la surface. Pour pouvoir réaliser cela, il est nécessaires d'avoir un a-priori sur le milieu superficiel « suffisamment bon » sinon ceci revient à ajouter une information *a priori* fautive. Il peut donc sembler contradictoire d'imager des interfaces très superficielles si justement, on demande une bonne connaissance du milieu superficiel afin de « le bloquer ». Une reformulation du problème inverse pour par exemple le rendre moins sensible à la connaissance de la couche superficielle pourrait être une solution. Dans ce cadre, la théorie de l'homogénéisation (Capdeville & Marigo, 2008) pourrait peut-être fournir une base théorique intéressante pour mieux appréhender ces phénomènes et peut-être proposer une solution. Une autre solution pourrait être d'intégrer différentes méthodes d'imageries basées afin de mieux contraindre l'inversion sans nécessairement avoir besoin de plus d'information *a priori*.

Bien que l'application de l'inversion des forme d'ondes devient de plus en plus courantes pour des configurations tri-dimensionnelles aux échelles de l'exploration, régionales ou globales celle-ci n'a pas encore été appliquée à la proche surface. Autant les formulations conventionnelles que l'inversion de la polarisation proposée sont transposables au cas tridimensionnel (moyennant les implémentations et moyens informatiques nécessaires) , il me semble que l'acquisition de données de proche surface pour faire de l'imagerie tri-dimensionnelle est encore relativement peu courante bien que pour des milieux géologiquement complexes cela soit nécessaire.

5.2.2 Perspectives liées à l'expérimentation à échelle réduite

5.2.2.a Perspectives envisageables à court ou moyen terme

Une acquisition de données multicomposantes pour une configuration multi-sources et multi-récepteurs a été réalisée. Afin d'augmenter la probabilité d'avoir un ensemble de tirs exploitables pour la composantes horizontale, chaque mesure a été refaite plusieurs fois (5 fois) en changeant le ruban adhésif réfléchissant. Dans le cadre de la rédaction du manuscrit, les mesures ont été normalisées et moyennées afin d'effectuer une première analyse. En considérant l'ensemble des paramètres de mesures, un contrôle qualité plus fin est envisagé pour ne sélectionner que les meilleures mesures et appliquer des traitement n'ayant pas a posteriori d'effet néfaste pour une analyse ultérieure de la polarisation. Outre les opérations de sélection et moyennage des traces, des traitement de suppressions des réflexions parasites, de recompression ou d'inversion de l'ondelette sources peuvent être nécessaires si l'objectif est d'exploiter ces données pour réaliser de l'imagerie par inversion des formes d'ondes.

Du point de vue du matériel de mesure, étant donné l'étroite collaboration entre le fabricant de l'interféromètre laser et le laboratoire AI, l'interféromètre fait régulièrement l'objet d'améliorations. Suite à un changement de la source laser, l'ensemble du circuit optique va être revu et peut-être que cela permettra de comprendre l'origine du léger biais de phase observé entre la composante horizontale et la composante verticale. D'autre part, afin de rendre la mesure moins sensible à l'état optique local du ruban réfléchissant, le constructeur envisage d'élargir le taille de la tâche focale.

5.2.2.b Perspectives envisageables à moyen ou long terme

Une perspective envisagée consiste à mettre en place des dépôts métallisés directement à la surface des maquette afin de s'affranchir du ruban adhésif réfléchissant et des opérations d'abrasion (effectuées dans le but d'obtenir un speckle optique satisfaisant). Si cette solution n'aboutit pas, il est envisagé de définir un protocole afin d'obtenir des opérations d'abrasion du ruban contrôlées et reproductibles.

Une limitation dans les mesures réalisées vient du déport (offset) minimum. Comme il a été mentionné, cette limitation est plus importante dans le cas de la mesure de la composante horizontale puisque celle-ci utilise une focale très basse laissant ainsi que peu de place pour le capteur. En modifiant le support du capteur et en utilisant un capteur de taille réduite, nous avons réussi pour le jeu de données acquises sur la maquette à permettre au capteur de pouvoir passer sous la focale de l'interféromètre. D'une part ceci est limitant quant au choix du capteur et d'autre part pour les réflexions du speckle optique nécessaire à la bonne mesure de la composante horizontale. Éventuellement une source laser pourrait être utilisée en remplacement des sources piezo-électriques afin de réaliser des acquisitions à des déports plus courts. Cependant l'utilisation de sources laser en modélisation sismique à échelle réduite nécessite des précautions de sécurité plus importantes et pose certaines questions en terme fidélité par rapport aux acquisitions aux échelles du terrain.

Dans ces travaux de thèse, la configuration P-SV a été privilégiée car il s'agit de la configuration la plus fréquemment rencontrée lors de mesures de terrain. Cependant, la configuration actuelle de MUSC permettrait de réaliser des mesures dans une configuration SH à condition d'utiliser des sources ultrasonores adaptées. Il existe des sources générant une excitation tangentielle mais celles-ci demanderaient à être caractérisées préalablement avant leur intégration dans le banc de mesure MUSC.

Dans un futur plus lointain, il a été envisagé de modifier l'interféromètre laser afin de permettre des mesures simultanées des deux composantes tangentielles, permettant ainsi de connaître l'ensemble du champ de déplacements pour chaque point de mesure. En effet, en toute rigueur dans une configuration P-SV pour un milieu non-tabulaire, il n'y a pas de symétrie radiale du milieu par rapport à la source donc il est nécessaire de mesurer les deux composantes tangentielles pour connaître l'ensemble du champ.

Bibliographie

- Abraham, O., Slimane, K. Ben, & Cote, Ph. 1998. Factoring anisotropy into iterative geometric reconstruction algorithms for seismic tomography. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **35**(1), 31 – 41.
- Achenbach, J. D. 1973. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam : North-Holland.
- Adamczyk, A., Malinowski, M., & Malehmir, A. 2014. High-resolution near-surface velocity model building using full-waveform inversion - a case study from southwest Sweden. *Geophysical Journal International*, **197**(3), 1693–1704.
- Agnihotri, Y., & McMechan, G. 2007. Parsimonious migration of 3-C 3D VSP data. *Geophysics*, **72**(6), S205–S213.
- Aki, K., & Richards, P.G. 1980. *Quantitative Seismology*. University Science Books.
- Aki, Keiiti. 1992. Scattering conversions P to S versus S to P. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82**(4), 1969–1972.
- Aki, Keiiti, & Lee, W. H. K. 1976. Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrival times from local earthquakes : 1. A homogeneous initial model. *Journal of Geophysical Research*, **81**(23), 4381–4399.
- Appel, Walter. 2007. *Mathematics for Physics and Physicists*. Princeton University Press.
- Arai, Hiroshi, & Tokimatsu, Kohji. 2004. S-Wave Velocity Profiling by Inversion of Microtremor H/V Spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **94**(1), 53–63.
- Arai, Hiroshi, & Tokimatsu, Kohji. 2005. S-Wave Velocity Profiling by Joint Inversion of Microtremor Dispersion Curve and Horizontal-to-Vertical (H/V) Spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **95**(5), 1766–1778.
- Arsigny, Vincent, Fillard, Pierre, Pennec, Xavier, & Ayache, Nicholas. 2007. Geometric means in a novel vector space structure on symmetric positive-definite matrices. *SIAM journal on matrix analysis and applications*, **29**(1), 328–347.
- Asnaashari, A., Brossier, R., Garambois, S., Audebert, F., Thore, P., & Virieux, J. 2013. Regularized seismic full waveform inversion with prior model information. *Geophysics*, **78**(2), R25–R36.
- Ass'ad, J. M., McDonald, J. A., Tatham, R. H., & Kusky, T. M. 1996. Elastic Wave Propagation In A Medium Containing Oriented Inclusions With A Changing Aspect Ratio : A Physical Model Study. *Geophysical Journal International*, **125**(1), 163–172.

- Auld, B. A. 1973. *Acoustic fields and elastic waves in solids*. Vol. II. New York : John Wiley.
- Ayers, James, Apetre, Nicole, Ruzzene, Massimo, & Sabra, Karim. 2011. Measurement of Lamb wave polarization using a one-dimensional scanning laser vibrometer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **129**(2), 585–588.
- Barnes, C., & Charara, M. 2010. Constrained Full-waveform Inversion of Multi-component Seismic Data. In : *Proceedings 72nd EAGE Conference and Exhibition, Barcelona*.
- Bayón, A., & Rasolofosaon, P. N. J. 1996. Three-components recording of ultrasonic transient vibration by optical heterodyne interferometry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **99**(2), 954–961.
- Bayón, Ana I., & Rasolofosaon, Patrick N. J. 1993. Three components seismic physical modeling using laser ultrasonics. *Pages 930–933 of : SEG Technical Program Expanded Abstracts 1993*.
- Bednar, J. B., Shin, Changsoo, & Pyun, Sukjoon. 2007. Comparison of waveform inversion, part 2 : phase approach. *Geophysical Prospecting*, **55**(4), 465–475.
- Bengtsson, I., & Zyczkowski, K. 2006. *Geometry of Quantum States : An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press.
- Bergamo, P., & Socco, L. 2014. Detection of sharp lateral discontinuities through the analysis of surface-wave propagation. *Geophysics*, **79**(4), EN77–EN90.
- Bierlaire, Michel. 2006. *Introduction à l'optimisation différentiable*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Biondi, B., & Almomin, A. 2014. Simultaneous inversion of full data bandwidth by tomographic full-waveform inversion. *Geophysics*, **79**(3), WA129–WA140.
- Bloch, F. 1946. Nuclear Induction. *Phys. Rev.*, **70**(Oct), 460–474.
- Blum, T.E., Snieder, R., van Wijk, K., & Willis, M.E. 2011. Theory and laboratory experiments of elastic wave scattering by dry planar fractures. *J. Geophys. Res.*, **116**, B08218.
- Blum, Thomas E, & van Wijk, Kasper. 2010. Advances in laboratory modeling of wave propagation. *Pages 2491–2495 of : SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010*. Society of Exploration Geophysicists.
- Blum, Thomas E., van Wijk, Kasper, Pouet, Bruno, & Wartelle, Alexis. 2010. Multicomponent wave-field characterization with a novel scanning laser interferometer. *Review of Scientific Instruments*, **81**(7), 073101.
- Boaga, J., Cassiani, G., Strobbia, C., & Vignoli, G. 2013. Mode misidentification in Rayleigh waves : Ellipticity as a cause and a cure. *Geophysics*, **78**(4), EN17–EN28.
- Bodet, L. 2005. *Limites théoriques et expérimentales de l'interprétation de la dispersion des ondes de Rayleigh : apport de la modélisation numérique et physique*. Ph.D. thesis, Ecole centrale de Nantes.

- Bodet, Ludovic, van Wijk, Kasper, Bitri, Adnand, Abraham, Odile, Côte, Philippe, Grandjean, Gilles, & Leparoux, Donatienne. 2005. Surface-wave inversion limitations from laser-Doppler physical modeling. *Journal of Environmental & Engineering Geophysics*, **10**(2), 151–162.
- Bodin, Thomas, Yuan, Huaiyu, & Romanowicz, Barbara. 2014. Inversion of receiver functions without deconvolution - application to the Indian craton. *Geophysical Journal International*, **196**(2), 1025–1033.
- Boerner, Wolfgang-Martin. 2007. *Basic Concepts in radar polarimetry - PolSARpro v3.0 Lecture Notes*.
- Boiero, D., & Socco, L. 2014. Joint inversion of Rayleigh-wave dispersion and P-wave refraction data for laterally varying layered models. *Geophysics*, **79**(4), EN49–EN59.
- Bolinder, E. 1967. Geometric analysis of partially polarized electromagnetic waves. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **15**(1), 37–40.
- Bolt, Bruce A. 1976. *Nuclear Explosions and Earthquakes : The Parted Veil*. W H Freeman & Co.
- Boore, David M, & Toksöz, M Nafi. 1969. Rayleigh wave particle motion and crustal structure. *Bulletin of the seismological Society of America*, **59**(1), 331–346.
- Born, M, & Wolf, E. 1999. *Principles of Optics*. 7th edn. Cambridge University Press.
- Bouchedda, Abderrezak, Chouteau, Michel, Binley, Andrew, & Giroux, Bernard. 2012. 2-D joint structural inversion of cross-hole electrical resistance and ground penetrating radar data. *Journal of Applied Geophysics*, **78**(0), 52 – 67. Developments in GPR and near-surface seismics - New applications and strategies for data integration, inversion, and modelling.
- Bretaudeau, F. 2010. *Modélisation physique à échelle réduite pour l'adaptation de l'inversion des formes d'ondes sismiques au génie civil et à la subsurface*. Ph.D. thesis, Université de Nantes.
- Bretaudeau, F., Leparoux, D., Brossier, R., & Abraham, O. 2009. Small Scale Modeling, a Tool to Assess Subsurface Imaging Methods - Application to Seismic Full Waveform Inversion. In : *Proceedings of the 71st EAGE Conference and Exhibition*.
- Bretaudeau, F., Brossier, R., Leparoux, D., Abraham, O., & Virieux, J. 2013. 2D elastic full waveform imaging of the near surface : Application to a physical scale model. **11**(3), 307–316.
- Bretaudeau, François, Leparoux, Donatienne, Durand, Olivier, & Abraham, Odile. 2011. Small-scale modeling of onshore seismic experiment : A tool to validate numerical modeling and seismic imaging methods. *Geophysics*, **76**(5), T101–T112.
- Brossier, R. 2011. Two-dimensional frequency-domain visco-elastic full waveform inversion : Parallel algorithms, optimization and performance. *Computers & Geosciences*, **37**(4), 444 – 455.
- Brossier, R., Virieux, J., & Operto, S. 2008. Parsimonious finite-volume frequency-domain method for 2-D P-SV-wave modelling. *Geophysical Journal International*, **175**(2), 541–559.
- Brossier, Romain. 2009. *Imagerie sismique à deux dimensions des milieux visco-élastiques par inversion des formes d'ondes : développements méthodologiques et applications*. Ph.D. thesis, Université Nice-Sophia Antipolis.

- Brossier, Romain, Operto, Stéphane, & Virieux, Jean. 2009. Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, **74**(6), WCC105–WCC118.
- Brossier, Romain, Operto, Stéphane, & Virieux, Jean. 2010a. Robust frequency-domain full-waveform inversion using the L1 norm. *Geophysical Research Letters*, **36**, L20310.
- Brossier, Romain, Operto, Stéphane, & Virieux, Jean. 2010b. Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion ? *Geophysics*, **75**(3), R37–R46.
- Brown, R. James, Lawton, Don C., & Cheadle, Scott P. 1991. Scaled physical modelling of anisotropic wave propagation : multioffset profiles over an orthorhombic medium. *Geophysical Journal International*, **107**(3), 693–702.
- Bruneau, M., & Potel, C. 2009. *Materials and Acoustics Handbook*. ISTE-WILEY.
- Buddensiek, M., Krawczyk, C., Kukowski, N., & Oncken, O. 2009. Performance of piezoelectric transducers in terms of amplitude and waveform. *Geophysics*, **74**(2), T33–T45.
- Bunks, Carey, Saleck, Fatimetou, M., Zaleski, S., & Chavent, G. 1995. Multiscale seismic waveform inversion. *GEOPHYSICS*, **60**(5), 1457–1473.
- Burstedde, Carsten, & Ghattas, Omar. 2009. Algorithmic strategies for full waveform inversion : 1D experiments. *Geophysics*, **74**, WCC.37–WCC46.
- Campman, Xander, & Dwi Riyanti, Christina. 2007. Non-linear inversion of scattered seismic surface waves :. *Geophys. J. Int*, **171**, 1118–1125.
- Capdeville, Y., & Marigo, J.-J. 2008. Shallow layer correction for Spectral Element like methods. *Geophysical Journal International*, **172**(3), 1135–1150.
- Cara, M., & Lévêque, J. J. 1987. Waveform inversion using secondary observables. *Geophysical Research Letters*, **14**(10), 1046–1049.
- Carrion, Philip M. 1989. Generalized non-linear elastic inversion with constraints in model and data spaces. *Geophysical Journal International*, **96**(1), 151–162.
- Cerveny, V. 2005. *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press.
- Chai, Hua-You, Phoon, Kok-Kwang, Goh, Siang-Huat, & Wei, Chang-Fu. 2012. Some theoretical and numerical observations on scattering of Rayleigh waves in media containing shallow rectangular cavities. *Journal of Applied Geophysics*, **83**(0), 107 – 119.
- Chang, C., Gardner, G., & McDonald, J. 1994. A physical model of shear-wave propagation in a transversely isotropic solid. *Geophysics*, **59**(3), 484–487.
- Charara, Marwan, Barnes, Christophe, & Tarantola, Albert. 1996. Constrained waveform inversion of seismic well data. *Pages 98–112 of* : Jacobsen, Bo, Mosegaard, Klaus, & Sibani, Paolo (eds), *Inverse Methods*. Lecture Notes in Earth Sciences, vol. 63. Springer Berlin / Heidelberg.
- Chauris, H., & Noble, M. 2001. Two-dimensional velocity macro model estimation from seismic reflection data by local differential semblance optimization : applications to synthetic and real data sets. *Geophysical Journal International*, **144**(1), 14–26.

- Cheadle, S., Brown, R., & Lawton, D. 1991. Orthorhombic anisotropy : A physical seismic modeling study. *Geophysics*, **56**(10), 1603–1613.
- Chekroun, M., L. Le Marrec, Abraham, O., Durand, O., & Villain, G. 2009. Analysis of coherent surface wave dispersion and attenuation for non-destructive testing of concrete. *Ultrasonics*, **49**.
- Chen, H., & McMechan, G. 1993. 3-D physical modeling and pseudospectral simulation of seismic common-source data volumes. *Geophysics*, **58**(1), 121–133.
- Chen, Po. 2011. Full-Wave Seismic Data Assimilation : Theoretical Background and Recent Advances. *Pure and Applied Geophysics*, **168**(10), 1527–1552.
- Chew, W. C., & Weedon, W. H. 1994. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *IEEE Trans. Microwave Opt. Technol. Lett.*, **7**, 599–604.
- Choi, Yunseok, & Alkhalifah, Tariq. 2012. Application of multi-source waveform inversion to marine streamer data using the global correlation norm. *Geophysical Prospecting*, **60**(4), 748–758.
- Chung, Wookeun, Pyun, Sukjoon, Bae, Ho Seuk, Shin, Changsoo, & Marfurt, Kurt J. 2012. Implementation of elastic reverse-time migration using wavefield separation in the frequency domain. *Geophysical Journal International*, **189**(3), 1611–1625.
- Claerbout, Jon F. 1970. Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics*, **35**(3), 407–418.
- Claerbout, Jon F. 1971. Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, **36**, 467–481.
- Cochard, Alain, Igel, H., Schuberth, B., Suryanto, W., Velikოსeltsev, A., Schreiber, U., Wassermann, J., Scherbaum, F., & Vollmer, D. 2006. Rotational Motions in Seismology : Theory, Observation, Simulation. *Pages 391–411 of : Teisseyre, Roman, Majewski, Eugeniusz, & Takeo, Minoru (eds), Earthquake Source Asymmetry, Structural Media and Rotation Effects*. Springer Berlin Heidelberg.
- Cook, J.C. 1965. Seismic mapping of underground cavities using reflection amplitudes. *Geophysics*, **30**(4), 527–538.
- Crampin, Stuart, & Chastin, Sebastien. 2003. A review of shear wave splitting in the crack-critical crust. *Geophysical Journal International*, **155**(1), 221–240.
- Crampin, Stuart, & Peacock, Sheila. 2008. A review of the current understanding of seismic shear-wave splitting in the earth crust and common fallacies in interpretation. *Wave Motion*, **45**(6), 675 – 722.
- Crase, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J., & Tarantola, A. 1990. Robust elastic nonlinear waveform inversion : Application to real data. *Geophysics*, **55**(5), 527–538.
- De Cacqueray, Benoit. 2013. *Dispositifs géophysiques en laboratoire : Ondes de surface, traitement d'antennes et hautes densité spatiale*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble.
- De Cacqueray, Benoit, Roux, Philippe, Campillo, Michel, Catheline, Stefan, & Boue, Pierre. 2011. Elastic-wave identification and extraction through array processing : An experimental investigation at the laboratory scale. *Journal of Applied Geophysics*, **74**(2â3), 81 – 88.

- De Meersman, K., van der Baan, M., & Kendall, J.-M. 2006. Signal Extraction and Automated Polarization Analysis of Multicomponent Array Data. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **96**(6), 2415–2430.
- Delprat-Jannaud, F., & Lailly, P. 2005. A fundamental limitation for the reconstruction of impedance profiles from seismic data. *Geophysics*, **70**(1), R1–R14.
- Dessa, J.-X., & Pascal, G. 2003. Combined traveltimes and frequency-domain seismic waveform inversion : a case study on multi-offset ultrasonic data. *Geophysical Journal International*, **154**(1), 117–133.
- Devlaminck, V., & Terrier, P. 2010. Geodesic distance on non-singular coherency matrix space in polarization optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, **27**(8), 1756–1763.
- Devlaminck, Vincent, Terrier, Patrick, & Charbois, Jean-Michel. 2011. Characterization of a medium by estimating the constituent components of its coherency matrix in polarization optics. *Optics express*, **19**(22), 21665–21672.
- Dewhurst, R J, & Shan, Q. 1999. Optical remote measurement of ultrasound. *Measurement Science and Technology*, **10**(11), R139.
- Dietrich, M. 1988. Modeling of marine seismic profiles in the t-x and tau-p domains. *Geophysics*, **53**(4), 453–465.
- Ebrom, D., McDonald, J., & Tatham, B. 1992. Sideswipe in a 3-D, 3-C model survey. *The Leading Edge*, **11**(11), 45–51.
- Edme, Pascal, & Singh, Satish C. 2008. Receiver function method in reflection seismology. *Geophysical Prospecting*, **56**(3), 327–340.
- Ekanem, A.M., Wei, J., Li, X.-Y., Chapman, M., & Main, I.G. 2013. P-wave attenuation anisotropy in fractured media : A seismic physical modelling study. *Geophysical Prospecting*, **61**, 420–433.
- Ellefsen, Karl J. 2009. A comparison of phase inversion and traveltimes tomography for processing near-surface refraction traveltimes. *Geophysics*, **74**, WCB11–WCB24.
- Esmersoy, C. 1990. Inversion of P and SV waves from multicomponent offset vertical seismic profiles. *Geophysics*, **55**(1), 39–50.
- Etienne, Vincent. 2011. *Modélisation de la propagation d ondes sismiques*. Ph.D. thesis, Université Nice-Sophia Antipolis.
- Fäh, Donat, Kind, Fortunat, & Giardini, Domenico. 2001. A theoretical investigation of average H/V ratios. *Geophysical Journal International*, **145**(2), 535–549.
- Fano, U. 1957. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. *Rev. Mod. Phys.*, **29**(Jan), 74–93.
- Fargier, Yannick. 2011. *Développement de l'Imagerie de Résistivité électrique pour la reconnaissance et la surveillance des Ouvrages Hydrauliques en Terre*. Ph.D. thesis, Université de Nantes.
- Farra, Véronique. 2001. High-order perturbations of the phase velocity and polarization of qP and qS waves in anisotropic media. *Geophysical Journal International*, **147**(1), 93–104.

- Farra, Véronique, & Le Bégat, Soazig. 1995. Sensitivity of qP-wave traveltimes and polarization vectors to heterogeneity, anisotropy and interfaces. *Geophysical Journal International*, **121**(2), 371–384.
- Favretto-Cristini, Nathalie. 2012. Laboratory benchmarks vs. Synthetic modeling of seismic wave propagation in complex environments (BENCHIE Project), ACOUSTICS 2012, Nantes (FR). In : *SFA-Institut of Acoustics-EAA*.
- Fichtner, Andreas, Kennett, Brian L. N., Igel, Heiner, & Bunge, Hans-Peter. 2008. Theoretical background for continental and global scale full-waveform inversion in the time-frequency domain. *Geophys. J. Int.*, **175**(2), 665–685.
- Forgues, E. 1996. *Inversion linéarisée multi-paramètres via la théorie des rais*. Ph.D. thesis, Institut Français du Pétrole - Université PARIS VII.
- French, W. 1974. Two-dimensional and three-dimensional migration of model experiment reflection profiles. *Geophysics*, **39**(3), 265–277.
- Fukushima, Y. 2009. A performance study of a laser Doppler vibrometer for measuring waveforms from piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, **56**(7), 442–450.
- Fukushima, Yo, Nishizawa, Osamu, Sato, Haruo, & Ohtake, Masakazu. 2003. Laboratory Study on Scattering Characteristics of Shear Waves in Rock Samples. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **93**(1), 253–263.
- Gao, Fuchun, Levander, Alan, Pratt, R. Gerhard, Zelt, Colin A., & Fradelizio, Gian-Luigi. 2007. Waveform tomography at a groundwater contamination site : Surface reflection data. *Geophysics*, **72**(5), G45–G55.
- Gauthier, Odile, Virieux, Jean, & Tarantola, Albert. 1986. Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms : Numerical results. *Geophysics*, **51**(7), 1387–1403.
- Gélis, C., Virieux, J., & Grandjean, G. 2007. Two dimensional elastic full waveform inversion using Born and Rytov formulations in the frequency domain. *Geophysical Journal International*, **168**(2), 605–633.
- Gélis, Céline. 2005. *Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux-dimensions. Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadres de la détection de cavités souterraines*. Ph.D. thesis, Université Nice-Sophia Antipolis.
- Gilbert, Freeman, & Backus, George E. 1966. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**(2), 326–332.
- Gouédard, Pierre. 2008. *Techniques de corrélation : aspects méthodologiques et applications à la sub-surface*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Grandjean, G., Bitri, A., & Krzeminska, D. M. 2012. Characterisation of a landslide fissure pattern by integrating seismic azimuth tomography and geotechnical testing. *Hydrological Processes*, **26**(14), 2120–2127.

- Grandjean, Gilles, & Leparoux, Donatienne. 2004. The potential of seismic methods for detecting cavities and buried objects : experimentation at a test site. *Journal of Applied Geophysics*, **56**(2), 93 – 106.
- Greenhalgh, Stewart A, Bing, Zhou, & Green, Alan. 2006. Solutions, algorithms and inter-relations for local minimization search geophysical inversion. *Journal of Geophysics and Engineering*, **3**(2), 101.
- Groos, Lisa. 2013. *2D full waveform inversion of shallow seismic Rayleigh waves*. Ph.D. thesis, Karlsruher Instituts fuer Technologie.
- Guitton, Antoine. 2012. Blocky regularization schemes for Full-Waveform Inversion. *Geophysical Prospecting*, **60**(5), 870–884.
- Hansen, Per Christian. 1992. Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve. *SIAM Review*, **34**(4), 561–580.
- Hardage, Bob A., DeAngelo, Michael V., Murray, Paul E., & Sava, Diana. 2011. *Multicomponent Seismic Technology*. Society of Exploration Geophysicists.
- Hermans, T., Caterina, D., Martin, R., Kemna, A., Robert, T., & Nguyen, F. 2011. How to Incorporate Prior Information in Geophysical Inverse Problems - Deterministic and Geostatistical Approaches. In : *Near Surface 2011 - the 17th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*.
- Heyer, H. 1982. *Theory of Statistical Experiments*. (Second edition of *Mathematische Theorie Statistischer Experimente*, Springer-Verlag 1973.).
- Hilterman, F. 1970. Three-Dimensional seismic modeling. *Geophysics*, **35**(6), 1020–1037.
- Howes, E.T., Tejada-Flores, L.H., & Randolph, L. 1953. Seismic model study. *Journal of the Acoustical Society of America*, **25**(5), 915–921.
- Hsu, C., & Schoenberg, M. 1990. *Characterization of anisotropic elastic wave behavior in media with parallel fractures*. Pages 1410–1412.
- Hu, Ge, & Menke, William. 1992. Formal inversion of laterally heterogeneous velocity structure from P-wave polarization data. *Geophysical Journal International*, **110**(1), 63–69.
- Hu, Ge, Menke, William, & Powell, Christine. 1994. Polarization tomography for P wave velocity structure in southern California. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **99**(B8), 15245–15256.
- Huber, Peter J. 1964. Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, **35**(1), 73–101.
- Idier, J. 2011. *Problèmes inverses, cours école centrale de Nantes*.
- Jin, Side, Madariaga, Raul, Virieux, Jean, & Lambaré, Gilles. 1992. Two-dimensional asymptotic iterative elastic inversion. *Geophysical Journal International*, **108**(2), 575–588.
- Jocker, J., Spetzler, J., Smeulders, D., & Trampert, J. 2006. Validation of first-order diffraction theory for the traveltimes and amplitudes of propagating waves. *Geophysics*, **71**(6), T167–T177.

- Jol, H.M. 2008. *Ground Penetrating Radar Theory and Applications*. Elsevier Science.
- Jones, Ian F. 2010a. *An introduction to velocity model building*. EAGE Publications.
- Jones, Ian F. 2010b. Tutorial : Velocity estimation via ray-based tomography. *first break*, **28**(2).
- Kaipio, J P, Kolehmainen, V, Vauhkonen, M, & Somersalo, E. 1999. Inverse problems with structural prior information. *Inverse Problems*, **15**(3), 713.
- Kaipio, Jari, & Somersalo, E. 2005. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer.
- Kamei, R., & Pratt, R. G. 2013. Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, **194**(2), 859–884.
- Kamei, R., Pratt, R. G., & Tsuji, T. 2013. On acoustic waveform tomography of wide-angle OBS data strategies for pre-conditioning and inversion. *Geophysical Journal International*, **194**(2), 1250–1280.
- Kamei, Rie, Pratt, R. Gerhard, & Tsuji, Takeshi. 2014. Misfit functionals in Laplace-Fourier domain waveform inversion, with application to wide-angle ocean bottom seismograph data. *Geophysical Prospecting*, n/a–n/a.
- Kaslilar, A. 2007. Inverse scattering of surface waves : imaging of near-surface heterogeneities. *Geophys. J. Int*, **171**, 352–367.
- Kausel, Eduardo, & Roësset, José Manuel. 1981. Stiffness matrices for layered soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **71**(6), 1743–1761.
- Kemp, Nate J, Park, Jesung, Zaatari, Haitham N, Rylander, H Grady, & Milner, Thomas E. 2005. High-sensitivity determination of birefringence in turbid media with enhanced polarization-sensitive optical coherence tomography. *JOSA A*, **22**(3), 552–560.
- Kennett, B.L.N. 1974. Reflections, rays and reverberations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **64**, 1685–1696.
- Kennett, Brian L. N., & Fichtner, Andreas. 2012. A unified concept for comparison of seismograms using transfer functions. *Geophysical Journal International*, **191**(3), 1403–1416.
- Kim, M., Kanai, H., & Chubachi, N. 1994. Non-contact measurement particule velocity distrubution ultrasonic waves along elastic bar. *J. Acoust. Soc. Jpn.*, **15**(1), 339–343.
- Krawczyk, Charlotte M., Polom, Ulrich, Trabs, Stefan, & Dahm, Torsten. 2012. Sinkholes in the city of Hamburg. New urban shear-wave reflection seismic system enables high-resolution imaging of subrosion structures. *Journal of Applied Geophysics*, **78**(0), 133 – 143. Developments in GPR and near-surface seismics - New applications and strategies for data integration, inversion, and modelling.
- Kulesh, M., Diallo, M. S., Holschneider, M., Kurennaya, K., Krüger, F., Ohrnberger, M., & Scherbaum, F. 2007. Polarization analysis in the wavelet domain based on the adaptive covariance method. *Geophysical Journal International*, **170**(2), 667–678.

- Kurzmann, A., Przebindowska, A., Köhn, D., & Bohlen, T. 2013. Acoustic full waveform tomography in the presence of attenuation : a sensitivity analysis. *Geophysical Journal International*, **195**(2), 985–1000.
- La Porte, M. 1963. Calcul de la forme d'une structure homogène à partir de son champ gravimétrique. *Geophysical Prospecting*, **11**(3), 276–291.
- Lailly, Patrick. 1983. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. In : *Proceedings of the international conference on "Inverse Scattering, theory and applications"*, Tulsa, Oklahoma. SIAM.
- Lamb, Horace. 1904. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, **203**(359-371), 1–42.
- Larson, Erik W. F., & Ekström, Göran. 2002. Determining surface wave arrival angle anomalies. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B6), ESE 7–1–ESE 7–15.
- Laske, G., & Masters, G. 1996. Constraints on global phase velocity maps from long-period polarization data. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **101**(B7), 16059–16075.
- Laske, G., & Masters, G. 1998. Surface-wave polarization data and global anisotropic structure. *Geophysical Journal International*, **132**(3), 508–520.
- Laske, G., Masters, G., & Zürn, W. 1994. Frequency-dependent polarization measurements of long-period surface waves and their implications for global phase-velocity maps. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **84**(1-4), 111 – 137.
- Latzel, Sabine. 2010. *2.5D elastic modelling and sensitivity investigations directed towards near surface seismic waveform analysis*. Ph.D. thesis, ETH Zürich.
- Laurent Sirgue, R. Gerhard Pratt. 2004. Efficient waveform inversion and imaging : A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, **69**, 231–248.
- Le Bégat, Soazig, & Farra, Véronique. 1997. P-wave traveltimes and polarization tomography of VSP data. *Geophysical Journal International*, **131**(1), 100–114.
- Lebedev, M., Bona, A., Pevzner, R., & Gurevich, B. 2011. Elastic anisotropy estimation from laboratory measurements of velocity and polarization of quasi-P-waves using laser interferometry. *Geophysics*, **76**(3), WA83–WA89.
- Lee, K., & Kim, H. 2003. Source-independent full-waveform inversion of seismic data. *Geophysics*, **68**(6), 2010–2015.
- Leonard, C. 1999. *Détection de cavités souterraines par sismique réflexion haute résolution et par Impact - écho*. Ph.D. thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- Leparoux, D., Bitri, A., & Grandjean, G. 2000. Underground cavity detection : A new method based on seismic Rayleigh waves. *Journal of Environmental & Engineering Geophysics*, **5**, 33–53.
- Leparoux, Donatienne. 1997. *Mise au point de Méthodes Radar pour l'Auscultation Structurale et Texturale de Milieux Géologiques très Hétérogènes (Modélisation, Migration, Expérimentation)*. Ph.D. thesis, Université de Rennes 1.

- Levander, A.R. 1988. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, **53**, 1425–1436.
- Li, M., Rickett, J., & Abubakar, A. 2013. Application of the variable projection scheme for frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, **78**(6), R249–R257.
- Lilliefors, Hubert W. 1967. On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. *Journal of the American Statistical Association*, **62**(318), 399–402.
- Lin, Fan-Chi, Schmandt, Brandon, & Tsai, Victor C. 2012. Joint inversion of Rayleigh wave phase velocity and ellipticity using USArray : Constraining velocity and density structure in the upper crust. *Geophysical Research Letters*, **39**(12), n/a–n/a.
- Liu, Dong C, & Nocedal, Jorge. 1989. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical programming*, **45**(1-3), 503–528.
- Liu, Qinya, & Tromp, Jeroen. 2006. Finite-Frequency Kernels Based on Adjoint Methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **96**(6), 2383–2397.
- Lo, T., Toksöz, M., Xu, S., & Wu, R. 1988. Ultrasonic laboratory tests of geophysical tomographic reconstruction. *Geophysics*, **53**(7), 947–956.
- Loris, I., Douma, H., Nolet, G., Daubechies, I., & Regone, C. 2010. Nonlinear regularization techniques for seismic tomography. *Journal of Computational Physics*, **229**, 890–905.
- Lu, Laiyu, Wang, Chenghao, & Zhang, Bixing. 2007. Inversion of multimode Rayleigh waves in the presence of a low-velocity layer : numerical and laboratory study. *Geophysical Journal International*, **168**(3), 1235–1246.
- Luo, M., Takanashi, M., Nakayama, K., & Ezaka, T. 2007. Physical modeling of overburden effects. *Geophysics*, **72**(4), T37–T45.
- Magnin, O., & Bertrand, Y. 2005. *Cahier de l'AGAP numéro 2 : Guide sismique réfraction*.
- Mahalanobis, P. C. 1936. On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India* 2, 49–55.
- Malischewsky, P. 1987. *Surface Waves and Discontinuities*. Developments in Solid Earth Geophysics Series. Elsevier Science Limited.
- Malischewsky, Peter G., & Scherbaum, Frank. 2004. Love's formula and H/V-ratio (ellipticity) of Rayleigh waves. *Wave Motion*, **40**(1), 57–67.
- Mallick, S., & Frazer, L. 1987. Practical aspects of reflectivity modeling. *Geophysics*, **52**(10), 1355–1364.
- Manukyan, E., Latzel, S., Maurer, H., Marelli, S., & Greenhalgh, S. 2012. Exploitation of data-information content in elastic-waveform inversions. *Geophysics*, **77**(2), R105–R115.
- Maranò, Stefano, Reller, Christoph, Loeliger, Hans-Andrea, & Fäh, Donat. 2012. Seismic waves estimation and wavefield decomposition : application to ambient vibrations. *Geophysical Journal International*, **191**(1), 175–188.

- Marquering, Henk, Dahlen, F.A., & Nolet, Guust. 1999. Three-dimensional sensitivity kernels for finite-frequency traveltimes : the banana-doughnut paradox. *Geophysical Journal International*, **137**(3), 805–815.
- Masoni, I., Brossier, R., Virieux, J., & Boelle, J.L. 2013. Alternative Misfit Functions for FWI Applied to Surface Waves. In : *75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2013 - London 2013*. EAGE.
- Maurer, H., Greenhalgh, S., Manukyan, E., Marelli, S., & Green, A. 2012. Receiver-coupling effects in seismic waveform inversions. *Geophysics*, **77**(1), R57–R63.
- McMechan, George A., & Yedlin, Mathew J. 1981. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. *Geophysics*, **46**(6), 869–874.
- Métivier, L., Brossier, R., Virieux, J., & Operto, S. 2013. Full Waveform Inversion and the Truncated Newton Method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **35**(2), B401–B437.
- Métivier, L., Bretaudeau, F., Brossier, R., Operto, S., & Virieux, J. 2014. Full waveform inversion and the truncated Newton method : quantitative imaging of complex subsurface structures. *Geophysical Prospecting*, n/a–n/a.
- Mikesell, T. Dylan, van Wijk, Kasper, Blum, Thomas E., Snieder, Roel, & Sato, Haruo. 2012. Analyzing the coda from correlating scattered surface waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(3), EL275–EL281.
- Miller, G. F., & Pursey, H. 1954. The Field and Radiation Impedance of Mechanical Radiators on the Free Surface of a Semi-Infinite Isotropic Solid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **223**(1155), 521–541.
- Miller, G. F., & Pursey, H. 1955. On the Partition of Energy between Elastic Waves in a Semi-Infinite Solid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **233**(1192), 55–69.
- Mojabi, P., & LoVetri, J. 2009. Overview and Classification of Some Regularization Techniques for the Gauss-Newton Inversion Method Applied to Inverse Scattering Problems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **57**(9), 2658–2665.
- Monchalain, J.-P., Aussel, J.-D., Héon, R., Jen, C.K., Boudreault, A., & Bernier, R. 1989. Measurement of in-plane and out-of-plane ultrasonic displacements by optical heterodyne interferometry. *Journal of Nondestructive Evaluation*, **8**, 121–133.
- Mora, Peter. 1987. Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data. *Geophysics*, **52**, 1211–1228.
- Morgan, Joanna, Warner, Michael, Bell, Rebecca, Ashley, Jack, Barnes, Danielle, Little, Rachel, Roele, Katarina, & Jones, Charles. 2013. Next-generation seismic experiments : wide-angle, multi-azimuth, three-dimensional, full-waveform inversion. *Geophysical Journal International*.
- Morozov, I., & Smithson, S. 1996. Instantaneous polarization attributes and directional filtering. *Geophysics*, **61**(3), 872–881.

- Mulder, W.A., & Plessix, R-E. 2008. Exploring some issues in acoustic full-waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, **56**, 827–841.
- Muyzert, E. 2007. Seabed property estimation from ambient-noise recordings : Part 2 - Scholte-wave spectral-ratio inversion. *Geophysics*, **72**(4), U47–U53.
- Nakamura, Y. 1989. A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *Quarterly Report of the Railway Technical Research Institute*, **30**(1), 25–30.
- Nasserri-Moghaddam, A., Cascante, G., Phillips, C., & Hutchinson, D.J. 2007. Effects of underground cavities on Rayleigh waves-Field and numerical experiments. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **27**(4), 300 – 313.
- Nishizawa, Osamu, Satoh, Takashi, Lei, Xinglin, & Kuwahara, Yasuto. 1997. Laboratory studies of seismic wave propagation in inhomogeneous media using a laser doppler vibrometer. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **87**(4), 809–823.
- Nocedal, J., & Wright, S. 1999. *Numerical Optimization*.
- Nogoshi, M., & Igarashi, T. 1971. On the amplitude characteristics of microtremor (part 2). *Journal of seismological Society of Japan*, **24**, 26–40. in Japanese with english abstract.
- O'Brien, P.N.S. 1955. Model seismology - The critical refraction of elastic waves. *Geophysics*, **20**(2), 227–242.
- Olivier, J., Press, F., & Ewing, M. 1954. Two-dimensional model seismology. *Geophysics*, **19**(1), 202–219.
- Operto, S., & All. 2004. Quantitative imaging of complex structures from dense wide-aperture seismic data by multiscale travelttime and waveform inversions : a case study. *Geophysical Prospecting*, **52**, 625–651.
- Operto, S., Gholami, Y., Prioux, V., Ribodetti, A., Brossier, R., Metivier, L., & Virieux, J. 2013. A guided tour of multiparameter full-waveform inversion with multicomponent data : From theory to practice. *The Leading Edge*, **32**(9), 1040–1054.
- Özdoğan Yilmaz. 1987. *Seismic Data Processing*. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- Pant, D. R., & Greenhalgh, S. A. 1989a. Blocking surface waves by a cut Physical seismic model results. *Geophysical Prospecting*, **37**(6), 589–605.
- Pant, D. R., & Greenhalgh, S. A. 1989b. Lateral Resolution In Seismic Reflection - A Physical Model Study. *Geophysical Journal International*, **97**(2), 187–198.
- Pant, D. R., & Greenhalgh, S. A. 1989c. Multicomponent seismic reflection profiling over an ore-body structure - A scale model investigation. *Geophys. Res. Lett.*, **16**(10), 1089–1092.
- Pant, D. R., & Greenhalgh, S. A. 1991. Multicomponent seismic reflection profiling : some scale model experiments. *Exploration Geophysics*, **22**, 515–523.

- Pant, D. R., Greenhalgh, S. A., & Zhou, B. 1992. Physical and numerical model study of diffraction effects on seismic profiles over simple structures. *Geophysical Journal International*, **108**(3), 906–916.
- Park, C.B., Miller, R.D., & Xia, J. 1999. Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, **64**(3), 800–808.
- Park, Jeffrey, Lindberg, Craig R., & Vernon, Frank L. 1987. Multitaper spectral analysis of high-frequency seismograms. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **92**(B12), 12675–12684.
- Park, Jesung, Kemp, Nate J, Zaatari, Haitham N, Rylander III, H Grady, & Milner, Thomas E. 2006. Differential geometry of normalized Stokes vector trajectories in anisotropic media. *JOSA A*, **23**(3), 679–690.
- Park, Jesung, Kemp, Nate J, Rylander, H Grady, & Milner, Thomas E. 2009. Complex polarization ratio to determine polarization properties of anisotropic tissue using polarization-sensitive optical coherence tomography. *Optics express*, **17**(16), 13402–13417.
- Patella, Domenico, & Patella, Sergio Maria. 2009. Geophysical Tomography in Engineering Geological Applications : A Mini-Review with Examples. *The Open Geology Journal*, **3**, 30–38–2834.
- Pelekanos, George, Abubakar, Aria, & van den Berg, Peter M. 2003. Contrast source inversion methods in elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **114**(5), 2825–2834.
- Perez Solano, C. A., Donno, D., & Chauris, H. 2014. Alternative waveform inversion for surface wave analysis in 2-D media. *Geophysical Journal International*, **198**(3), 1359–1372.
- Phinney, Robert A. 1964. Structure of the Earth's crust from spectral behavior of long-period body waves. *Journal of Geophysical Research*, **69**(14), 2997–3017.
- Piwakowski, B., Watelet, J.M., & Moreaux, D. 1998. High resolution seismic prospecting of old gypsum mines - Evaluation of detection possibilities. *European Journal of Environmental & Civil Engineering*, **2**(2).
- Plessix, R.-E. 2006. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, **167**(2), 495–503.
- Poincaré, H. 1892. *Théorie mathématique de la lumière*. Gauthier-Villars.
- Pratt, Gerhard, Shin, Changsoo, & Hicks. 1998. Gauss-Newton and full Newton methods in frequency space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, **133**(2), 341–362.
- Pratt, R., & Worthington, M. 1988. The application of diffraction tomography to cross-hole seismic data. *Geophysics*, **53**(10), 1284–1294.
- Pratt, R. Gerhard. 1990. Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 2 : Elastic wave Equation method. *Geophysical Prospecting*, **38**, 311–329.
- Pratt, R. Gerhard. 1999. Seismic waveform inversion in the frequency domain part 1 : Theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, **64**, 888–901.
- Pratt, R. Gerhard, & Shipp, Richard M. 1999. Seismic waveform inversion in the frequency domain part 2 : Fault delineation in sediments using cross-hole data. *Geophysics*, **64**, 902–914.

- Pratt, R. Gerhard, & Worthington, M. H. 1990. Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1 : Acoustic Wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, **38**, 287–310.
- Press, F., Olivier, J., & Ewing, M. 1954. Seismic model study of refractions from a layer of finite thickness. *Geophysics*, **19**(3), 388–401.
- Pyun, S., Son, W., & Shin, C. 2009. Frequency-domain waveform inversion using an l1-norm objective functions. *Exploration Geophysics*, **40**, 227–232.
- Pyun, Sukjoon, Shin, Changsoo, & Bednar, J. B. 2007. Comparison of waveform inversion, part 3 : amplitude approach. *Geophysical Prospecting*, **55**(4), 477–485.
- Rabiner, Lawrence R., Schafer, Ronald W., & Rader, Charles M. 1969. The Chirp z-Transform Algorithm and Its Application. *Bell System Technical Journal*, **48**(5), 1249–1292.
- Rathore, J., Fjaer, E., Holt, R., & Renlie, L. 1991. *Experimental versus theoretical acoustic anisotropy in controlled cracked synthetics*. Pages 687–690.
- René, R., Fitter, J., Forsyth, P., Kim, K., Murray, D., Walters, J., & Westerman, J. 1986. Multicomponent seismic studies using complex trace analysis. *Geophysics*, **51**(6), 1235–1251.
- Rieber, F. 1936. Visual presentation of elastic wave patterns under various structural conditions. *Geophysics*, **1**, 196–218.
- Riedel, K.S., & Sidorenko, A. 1995. Minimum bias multiple taper spectral estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**(1), 188–195.
- Riyanti, Christina D., & Herman, Gérard C. 2005. Three dimensional elastic scattering by near-surface heterogeneities. *Geophysical Journal International*, **160**(2), 609–620.
- Roever, W. L., Vining, T. F., & Strick, E. 1959. Propagation of Elastic Wave Motion from an Impulsive Source along a Fluid/Solid Interface. III. The Pseudo-Rayleigh Wave. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **251**(1000), 455–523.
- Romdhane, Anouar, Grandjean, Gilles, Brossier, Romain, Rejiba, Fayçal, Operto, Stéphane, & Virieux, Jean. 2011. Shallow-structure characterization by 2D elastic full-waveform inversion. *Geophysics*, **76**(3), R81–R93.
- Romdhane, Mohamed Anouar. 2010. *Apport de l'inversion des formes d'onde sismique - approximation 2D élastique - à la caractérisation des milieux de la proche surface : cavités souterraines, glissements de terrain*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Roques, Aurélien. 2012. *Imagerie sismique appliquée à la caractérisation géométrique des fondations de pylônes électriques très haute tension*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble.
- Rutty, M. J., & Greenhalgh, S. A. 1993. The correlation of seismic events on multicomponent data in the presence of coherent noise. *Geophysical Journal International*, **113**(2), 343–358.
- Salençon, J. 2005. *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*. Mécanique des milieux continus. L'École polytechnique.

- Samson, J., & Olson, J. 1981. Generalized Stokes Vectors and Generalized Power Spectra for Second-Order Stationary Vector-Processes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **40**(1), 137–149.
- Samson, J. C. 1973. Descriptions of the Polarization States of Vector Processes : Applications to ULF Magnetic Fields. *Geophysical Journal International*, **34**(4), 403–419.
- Samson, J. C. 1977. Matrix and Stokes vector representations of detectors for polarized waveforms : theory, with some applications to teleseismic waves. *Geophysical Journal International*, **51**(3), 583–603.
- Samson, J. C. 1983. Pure states, polarized waves, and principal components in the spectra of multiple, geophysical time-series. *Geophysical Journal International*, **72**(3), 647–664.
- Samson, J. C., & Olson, J. V. 1980. Some comments on the descriptions of the polarization states of waves. *Geophysical Journal International*, **61**(1), 115–129.
- Sánchez-Sesma, Francisco J., Rodríguez, Miguel, Iturrarán-Viveros, Ursula, Luzón, Francisco, Campillo, Michel, Margerin, Ludovic, Garcá-Jerez, Antonio, Suarez, Martha, Santoyo, Miguel A., & Rodríguez-Castellanos, Alejandro. 2011. A theory for microtremor H/V spectral ratio : application for a layered medium. *Geophysical Journal International*, **186**(1), 221–225.
- Sava, P.C., & Hill, S. 2009. Overview and classification of wavefield seismic imaging methods. *The Leading Edge*, **28**, 170–183.
- Scales, John A. 2002. *Imaging and inversion with acoustic and elastic waves*. Academic Press. Chap. 1.8.1, pages 1–15.
- Scales, John A., & Gersztenkorn, Adam. 1988. Robust methods in inverse theory. *Inverse Problems*, **4**, 1017–1091.
- Scales, John A., & Malcolm, Alison E. 2003. Laser characterization of ultrasonic wave propagation in random media. *Phys. Rev. E*, **67**(Apr), 046618.
- Scales, John A., & van Wijk, Kasper. 1999. Multiple scattering attenuation and anisotropy of ultrasonic surface waves. *Applied Physics Letters*, **74**(25), 3899–3901.
- Scales, John A., & van Wijk, Kasper. 2001. Tunable multiple-scattering system. *Applied Physics Letters*, **79**(14), 2294–2296.
- Scherbaum, Frank, Hinzen, Klaus-G., & Ohrnberger, Matthias. 2003. Determination of shallow shear wave velocity profiles in the Cologne, Germany area using ambient vibrations. *Geophysical Journal International*, **152**(3), 597–612.
- Sears, T.J., Singh, S.C., & Barton, P.J. 2008. Elastic full waveform inversion of multi-component OBC seismic data. *Geophysical Prospecting*, **56**(6), 843–862.
- Shang, Xuefeng, de Hoop, Maarten V., & van der Hilst, Robert D. 2012. Beyond receiver functions : Passive source reverse time migration and inverse scattering of converted waves. *Geophysical Research Letters*, **39**(15), n/a–n/a.
- Shen, Yang, Zhang, Zhigang, & Zhao, Li. 2008. Component-Dependent Fréchet Sensitivity Kernels and Utility of Three-Component Seismic Records. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **98**(5), 2517–2525.

- Sheng, Jianming, Leeds, Alan, Buddensiek, Maïke, & Schuster, Gerard T. 2006. Early arrival waveform tomography on near-surface refraction data. *Geophysics*, **71**, U47–U57.
- Shieh, C., & Herrmann, R. 1990. Ground roll : Rejection using polarization filters. *Geophysics*, **55**(9), 1216–1222.
- Shin, Changsoo, Jang, Seonghyung, & Min, Dong-Joo. 2001. Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical Prospecting*, **49**(5), 592–606.
- Silvestrov, Ilya, & Tcheverda, Vladimir. 2011. SVD analysis in application to full waveform inversion of multicomponent seismic data. *Journal of Physics : Conference Series*, **290**(1), 012014.
- Sirgue, Laurent, Denel, Bertrand, & Gao, Fuchun. 2011. Integrating 3D full waveform inversion into depth imaging projects. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, **30**(1), 2354–2358.
- Slepian, D. 1978. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty. V - The discrete case. *AT&T Technical Journal*, **57**(June), 1371–1430.
- Smithyman, Brendan, & Clowes, Ronald M. 2012. Waveform tomography of field vibroseis data using an approximate 2D geometry leads to improved velocity models. *Geophysics*, **77**(1), R33–R43.
- Smithyman, Brendan, Pratt, Gerhard, & Hayles, John. 2009. Detecting near-surface objects with seismic waveform tomography. *Geophysics*, **74**, WCC119–WCC127.
- Snieder, R. 1998. The Role of Nonlinearity in Inverse Problems. *Inverse Problems*, **14**, 387–404.
- Socco, L.V., & Strobbia, C. 2004. Surface-wave method for near-surface characterization : a tutorial. *Near Surface Geophysics*, 165–185.
- Sorge, W. 1965. Rayleigh wave motion in an elastic half-space. *Geophysics*, **30**(1), 97–101.
- Stewart, R. 2009. The measure of full motion : Multicomponent seismic exploration and its value. *CSEG Recorder*, **34**(10), 34–38.
- Stokes, G. 1851. On the Composition and Resolution of Streams of Polarized Light from different Sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **9**, 399.
- Symes, William W. 2008. Migration velocity analysis and waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, **56**(6), 765–790.
- Taner, M., Koehler, F., & Sheriff, R. 1979. Complex seismic trace analysis. *Geophysics*, **44**(6), 1041–1063.
- Tanimoto, T., & Rivera, L. 2008. The ZH ratio method for long-period seismic data : sensitivity kernels and observational techniques. *Geophysical Journal International*, **172**(1), 187–198.
- Tarantola, A. 1984. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, **49**(8), 1259–1266.
- Tarantola, Albert. 1986. A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, **51**, 1893–1903.
- Tarantola, Albert. 2005. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM.

- Tarantola, Albert, & Valette, Bernard. 1982. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, **20**(2), 219–232.
- TEMPO Serie Performance Update Report. 2009. *TEMPO Serie Performance Update*.
- Thomson, D. J. 1982. Spectrum estimation and harmonic analysis. *Proceedings of the IEEE*, **70**(9), 1055–1096.
- Torres del Castillo, G.F., & Rubalcava Garcia, I. 2011. The Jones vector as a spinor and its representation on the Poincare sphere. *Revista Mexicana de Fisica*, **57**, 406–413.
- Tran, K., McVay, M., Faraone, M., & Horhota, D. 2013. Sinkhole detection using 2D full seismic waveform tomography. *Geophysics*, **78**(5), R175–R183.
- Valensi, R., Leparoux, D., Durand, O., Bretaudeau, F., Brossier, R., & Cote, P. 2012. Benefits of the horizontal component in quantitative imaging of near-surface interfaces with lateral variations : synthetic model inversion and reduced scale modeling. *In : Near Surface 2012 - 18th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Paris (FR)*. EAGE.
- Valensi, R., Brossier, R., Leparoux, D., Bretaudeau, F., & Cote, P. 2013. Benefits of Polarization Observables For Imaging Very Shallow Media By Full Waveform Inversion. *In : 75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2013 - London 2013*. EAGE.
- van Dalen, K. N., Drijkoningen, G. G., Smeulders, D. M. J., Heller, H. K. J., Glorieux, C., Sarens, B., & Verstraeten, B. 2011. Medium characterization from interface-wave impedance and ellipticity using simultaneous displacement and pressure measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **130**(3), 1299–1312.
- Van Leeuwen, T., & Mulder, W.A. 2008. Velocity analysis based on data correlation. *Geophysical Prospecting*, **56**(6), 791–803.
- van Wijk, K. 2006. On estimating the impulse response between receivers in a controlled ultrasonic experiment. *Geophysics*, **71**(4), SI79–SI84.
- Vasconcelos, I. 2013. Source-receiver, reverse-time imaging of dual-source, vector-acoustic seismic data. *Geophysics*, **78**(2), WA123–WA145.
- Vautrin, Denis. 2011. *Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylones*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes.
- Vidale, John E. 1986. Complex polarization analysis of particle motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **76**(5), 1393–1405.
- Vigh, D., Jiao, K., Watts, D., & Sun, D. 2014. Elastic full-waveform inversion application using multicomponent measurements of seismic data collection. *Geophysics*, **79**(2), R63–R77.
- Vinnik, L.P. 1977. Detection of waves converted from P to {SV} in the mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **15**(1), 39 – 45.
- Virieux, J. 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **51**(4), 889–901.

- Virieux, J., & Operto, S. 2009. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, **74**(6), WCC127–WCC152.
- Vogel, Curtis R. 2002. *Computational Methods for Inverse Problems*. SIAM.
- Wapenaar, C. P. A., Herrmann, P., Verschuur, D. J., & Berkhout, A. J. 1990. Decomposition of multicomponent seismic data into primary P- and S-wave responses. *Geophysical Prospecting*, **38**(6), 633–661.
- Wathelet, Marc. 2005. *Array recordings of ambient vibrations : surface-wave inversion*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble.
- Weglein, Arthur B, Araújo, Fernanda V, Carvalho, Paulo M, Stolt, Robert H, Matson, Kenneth H, Coates, Richard T, Corrigan, Dennis, Foster, Douglas J, Shaw, Simon A, & Zhang, Haiyan. 2003. Inverse scattering series and seismic exploration. *Inverse problems*, **19**(6), R27.
- Wiener, N. 1949. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. New York : John Wiley & Sons.
- Wiener, Norbert. 1930. Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica*, **55**(1), 117–258.
- Williamson, P.R. 1991. A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography. *Geophysics*, **56**, 202–207.
- Woodward, M. 1992. Wave equation tomography. *Geophysics*, **57**(1), 15–26.
- Xia, Jianghai, Nyquist, Jonathan E., Xu, Yixian, Roth, Mary J.S., & Miller, Richard D. 2007. Feasibility of detecting near-surface feature with Rayleigh-wave diffraction. *Journal of Applied Geophysics*, **62**(3), 244 – 253.
- Xu, K., Greenhalgh, S., & Wang, M. 2006. Comparison of source-independent methods of elastic waveform inversion. *Geophysics*, **71**(6), R91–R100.
- Yamawaki, Hisashi, & Saito, Tetsuya. 1996. Detection of Ultrasonic Longitudinal and Shear Waves Using Optical Heterodyne Interferometer. *Japanese Journal of Applied Physics*, **35**(Part 1, No. 5B), 3222–3225.
- Yan, J., & Sava, P. 2008. Isotropic angle-domain elastic reverse-time migration. *Geophysics*, **73**(6), S229–S239.
- Yu, H., & Hanafy, S.M. 2014. An application of multiscale early arrival waveform inversion to shallow seismic data. *Near Surface Geophysics*. In Press.
- Zhe, J., & Greenhalgh, S. 1997. Prestack multicomponent migration. *Geophysics*, **62**(2), 598–613.
- Zhou, B., & Greenhalgh, S. 2003. Crosshole seismic inversion with normalized full-waveform amplitude data. *Geophysics*, **68**(4), 1320–1330.
- Zhou, Ying, Dahlen, F. A., & Nolet, Guust. 2004. Three dimensional sensitivity kernels for surface wave observables. *Geophysical Journal International*, **158**(1), 142–168.
- Zhu, X., Altan, S., & Li, J. 1999. Recent advances in multicomponent processing. *The Leading Edge*, **18**(11), 1283–1288.

Annexe A

Résultats d'inversion avec différents facteurs de qualité

Dans cette annexe, sont présentés les résultats d'inversion des paramètres V_p et V_s avec les mêmes facteurs de qualité que ceux utilisés pour l'étude des biais en atténuation présentée dans la section 3.2. Mais, à la différence des résultats présentés dans cette section, on considère que la « vraie » valeur de l'atténuation est connue. C'est à dire que les facteurs de qualité utilisés pour générer les données sont identiques à ceux fixés pour l'inversion. La densité est aussi connue et est considérée homogène pour l'ensemble du milieu ($\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$). Le seul paramètre inconnu est l'ondelette source. Le but de ces tests est de fournir des éléments afin de pouvoir comparer les effets des facteurs de qualités (avec des valeurs très élevées ou très faibles) dans le cas où ils sont connus au cas où ils sont fixés à une valeur donnée (pour les tests présentés $Q_p = Q_s = 100$).

A Résultats d'inversion pour $Q_p = Q_s = 10$ (connus)

Les reconstructions avec un facteur de qualité $Q_p = Q_s = 10$ sont présentées par les figures C.1. Globalement, on remarquera pour les 3 fonctions coûts traitées une perte de résolution similaire à un effet de filtrage passe-bas au niveau de la perturbation (croix). De manière plus détaillée, pour chacune des fonctions coûts, nous pouvons faire les remarques suivantes.

Comparé à l'inversion avec un facteur de qualité « moyen » de $Q_p = Q_s = 100$ (fig. 3.3), les résultats d'inversion obtenus à l'aide de la fonction coût $\mathcal{E}_{conv,multi}$ pour un faible facteur de qualité (figures placées dans la colonne de gauche de fig. C.1) sont reconstruits sans dégradation substantielle pour paramètre V_p si ce n'est une perte de résolution. Pour la reconstruction du paramètre V_s , on retrouvera un effet de lissage de la perturbation ainsi qu'une sous-estimation de celle-ci (alors que pour un facteur de qualité supérieur (dans le cas de référence $Q_p = Q_s = 100$), celle-ci était légèrement sur-estimée).

Pour ce qui est de la fonction coût $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ (colonne centrale fig. C.1), en plus du lissage, des artefacts apparaissent aux positions des sources/récepteurs pour la reconstruction du paramètre V_p avec des oscillations (« ringing effect ») plus marquées que pour un facteur qualité de 100. La reconstruction du paramètre V_s est significativement détériorée par des artefacts hors de la perturbation ainsi qu'une reconstruction moins précise de la vitesse de la perturbation.

En ce qui concerne les reconstructions obtenues avec la fonction coût \mathcal{E}^P (colonne de droite fig. C.1), celles-ci semblent plus impactées par le faible facteur de qualité. Plus particulièrement pour le

paramètre V_s autour et sur la perturbation, on remarquera que les oscillations parasites sont bien plus importantes que celles observées pour les inversions obtenus avec les fonctions coût $\mathcal{E}_{conv, multi}$ et $\mathcal{E}^{normed\ vect}$. Il peut aussi être intéressant de noter que contrairement aux autres fonctions coûts, la reconstruction de la perturbation en V_s est sur-estimée.

B Résultats d'inversion avec $Q_p = Q_s = 1000$ (connus)

Contrairement au cas du faible facteur de qualité ($Q_p = Q_s = 10$), les reconstructions pour un facteur de qualité élevé (fig. C.2) sont très proches de celles obtenu pour un facteur qualité de 100 (fig. 3.3) pour chacune des 3 fonctions coûts étudiées.

C Synthèse

On remarquera donc que si les facteurs de qualité sont connus, les résultats d'inversion sont plus dégradés pour les faibles facteurs de qualités. Ceci n'est pas étonnant si l'on considère l'effet de l'atténuation sur les pertes énergétiques qui ont pour conséquence une perte de résolution au niveau du gradient (Kurzmann *et al.*, 2013). Étant donné que le bruit synthétique a été introduit de manière à maintenir un rapport signal sur bruit statistiquement constant (40 dB), on ne peut pas attribuer les dégradations à une réduction du rapport signal sur bruit.

Dans le cas d'un faible facteur de qualité connu, les fonctions coûts dont les reconstructions sont les fonctions coûts $\mathcal{E}_{conv, multi}$, $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et \mathcal{E}^P (par qualité de reconstruction décroissantes). On remarquera par ailleurs que pour les reconstructions obtenues avec les fonctions coûts $\mathcal{E}^{normed\ vect}$ et \mathcal{E}^P pour de faibles facteurs de qualités des artefacts plus prononcés sur les reconstructions du paramètre V_s que pour le paramètre V_p .

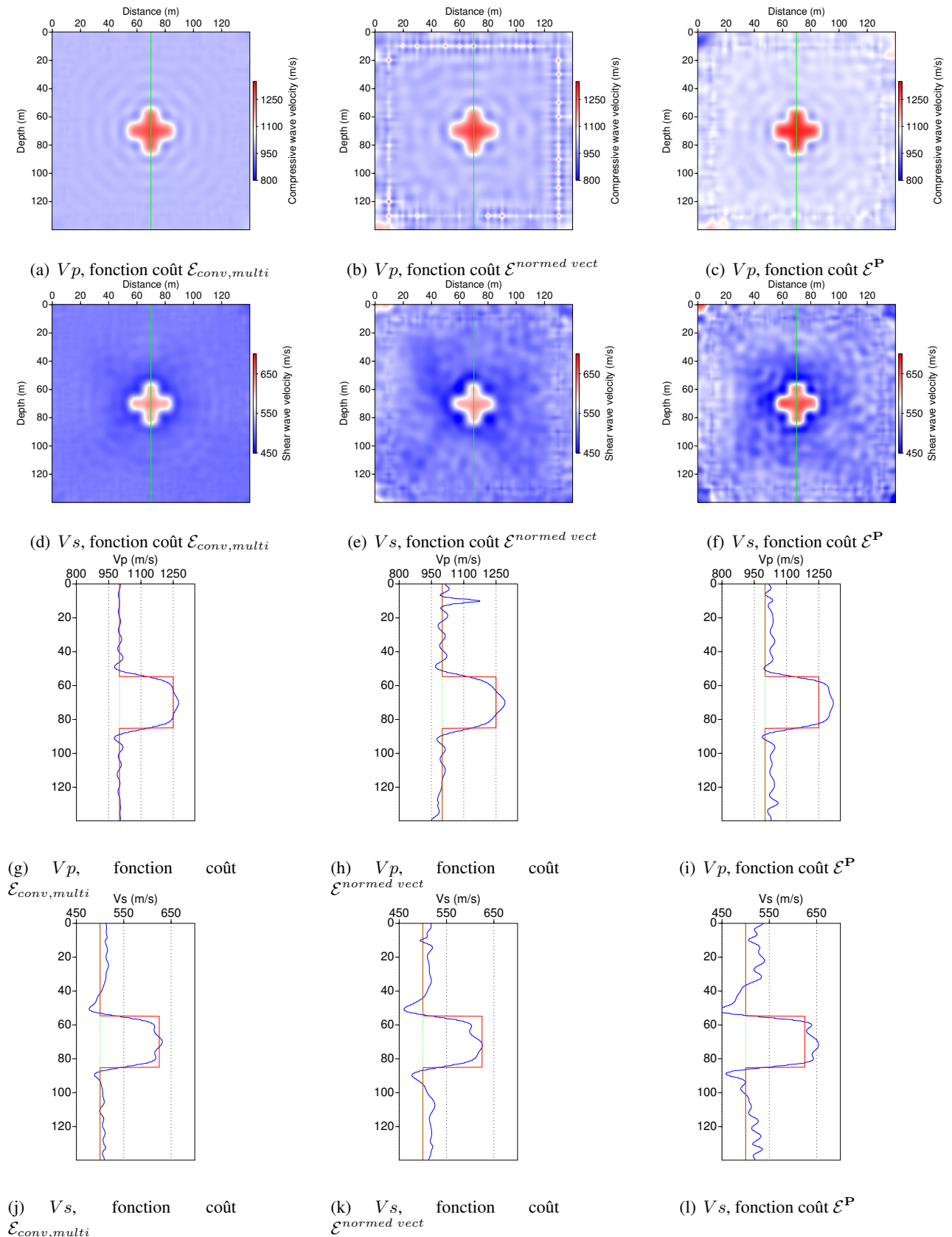


FIGURE C.1 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue et des facteurs de qualité « $Q_p = Q_s = 10$ » (connu) à la fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

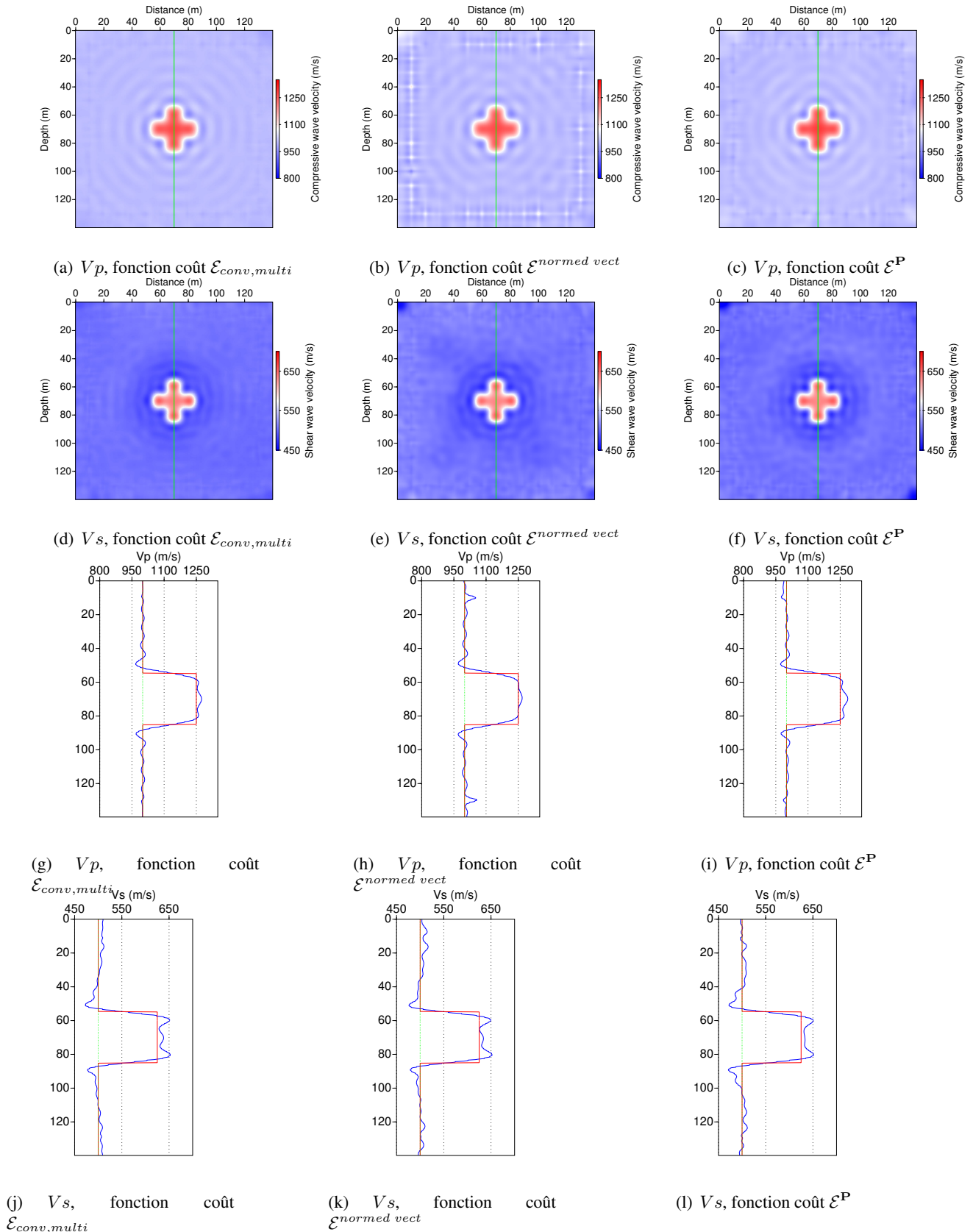


FIGURE C.2 – Résultats de l'inversion des paramètres V_p et V_s pour une ondelette source distordue et des facteurs de qualité « $Q_p = Q_s = 1000$ » (connu) pour une fréquence de 50 Hz (4^{ième} fréquence). Les logs présentés sont réalisés par des forages le long des lignes vertes (figures a-f)

Annexe B

Caractérisations supplémentaires du bruit de l'interféromètre laser

Cette annexe comprend les mesures des niveaux de bruit de la voie verticale utilisée lorsque l'on réalise de mesures mono-composantes (voie non synchronisée), des histogrammes du bruit pour des fréquences supplémentaires et un tableau récapitulatif d'une étude du bruit de mesure en fonction de l'intensité du rayon laser incident. Une partie de ces résultats font l'objet d'un supplément à l'article présenté dans le chapitre 4.

A Introduction

This supplementary aims to complete some elements concerning the characterization of the Laser interferometer (Tempo-2D, Bossa-Nova Tech) used in the article. It is composed of 2 parts :

- the characterization of the "full aperture" channel (CH4 channel).
- histograms of noise distributions for supplementary frequencies.

B Characterization of the "Full aperture" channel for the measurement of the vertical component

B.1 Introduction and motivations of the "Full aperture channel"

The "full aperture" channel (CH4 channel) corresponds to a channel used for the measurements of the vertical particle displacement. In the main article, another channel (multi-V) has been used for measuring the vertical displacements, in order to ensure to have strictly the same processing between the horizontal and the vertical channel in case of polarization observations. The multi-V channel has been added during the last update of the Laser interferometer and it has been designed to mitigate as much as possible the electronic time delays between the horizontal and the vertical channels already observed by Blum *et al.* (2010). As the horizontal channel measurements are dominated by the photodetectors located at the extremities of the photodetectors array (in main article equation 4.1), only 8 photodetectors corresponding to the largest apertures are used for the multi-V channel. The CH4 channel takes advantage of all of the 16 photodetectors composing the photodetectors array. Since photodetectors located in the center of the aperture are not used for the measurement of the vertical component with the multi-V channel, this induces a loss of signal quality compared to the CH4 channel. However, since electronic

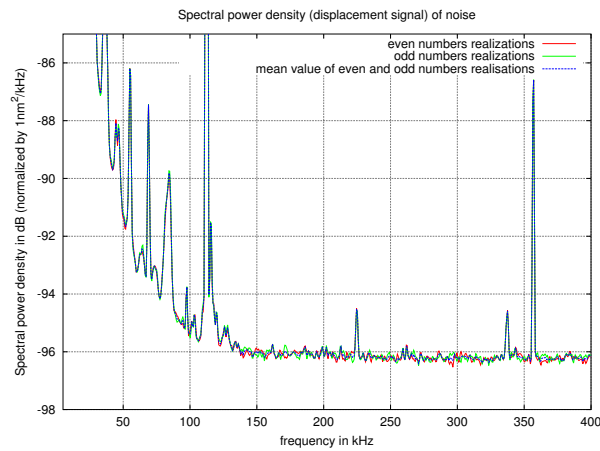


FIGURE B.1 – Comparison PSD estimators for the vertical component from 5 kHz to 400 kHz

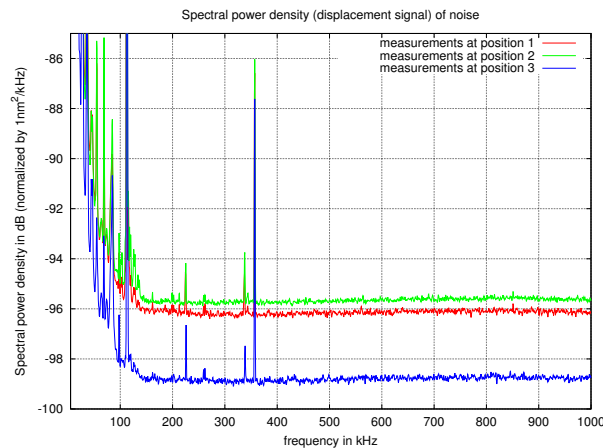


FIGURE B.2 – Comparison PSD noise estimators vertical component for different positions

processing of the CH4 channel differs to the processing of the horizontal component channel, there is no guaranty that these channels are synchronized. With the recording system used with the MUSC measurement bench, there is no technical restriction to record the CH4, the multi-V and the horizontal channels simultaneously.

B.2 Noise analysis and comparison

When independent source noise measurements have been performed, the CH4 channel has also been recorded and similar statistical analysis as presented in section 4.5 of the main article have also been conducted in order to characterize the level of noise of the CH4 channel. For more details on the methodological aspects, the reader is invited to refer to the main article.

The result of the convergence analysis of noise estimators is presented in figure B.1 : a very good agreement between PSD estimators corresponding odd and even indexed data noise realizations is noticeable. This confirms that the data set is large enough to have a convergence of the estimators. The shape of the noise spectrum of the CH4 channel (fig. B.2) presents similar amplitude peaks at the same frequencies as the “multi-V” channel . Also the same kind of variations of the noise PSD with

respect to the measurement positions (as previously noticed for 2 other channels) might be noticed. However, the level of noise is much smaller for the CH4 channel than for the multi-V channel, so in case of measurements of vertical component only, it is advised to favour the use of the CH4 channel

C Supplementary histograms

In the main article, only 2 frequencies (113 kHz and 150 kHz) have been selected to illustrate the statistical distribution of the noise. In this section supplementary histograms corresponding to supplementary frequencies are provided in order to illustrate the properties of the noise summarized in the table A1 and A2 in appendix of the main article. The vertical component noise histograms correspond have been recorded using the multi-V channel.

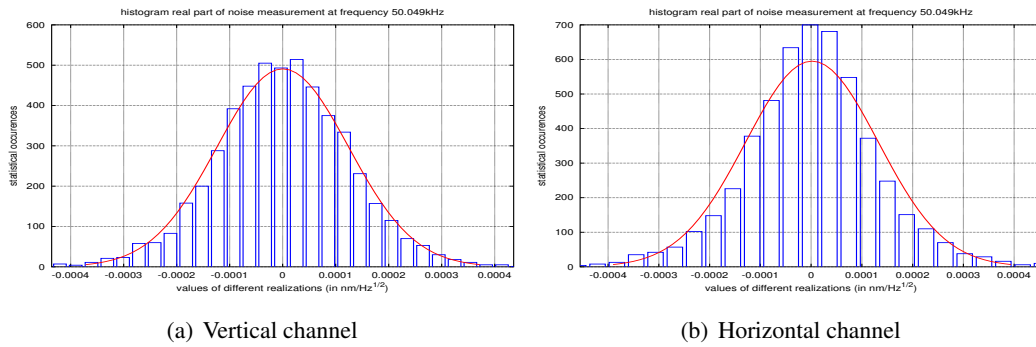


FIGURE C.1 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 50 kHz

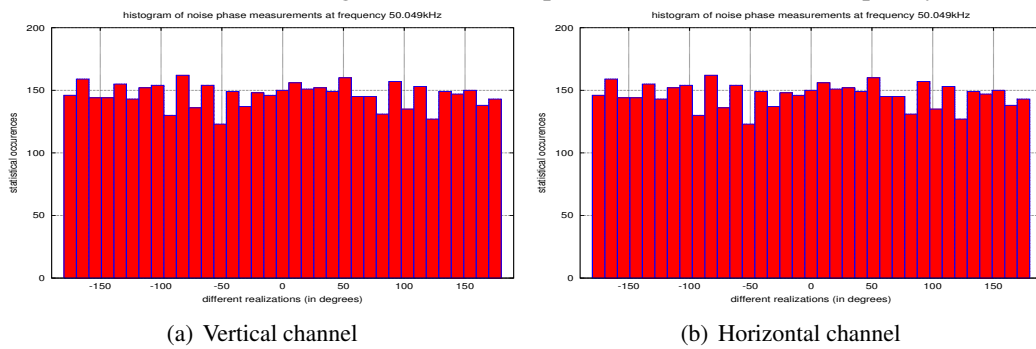


FIGURE C.2 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 50 kHz

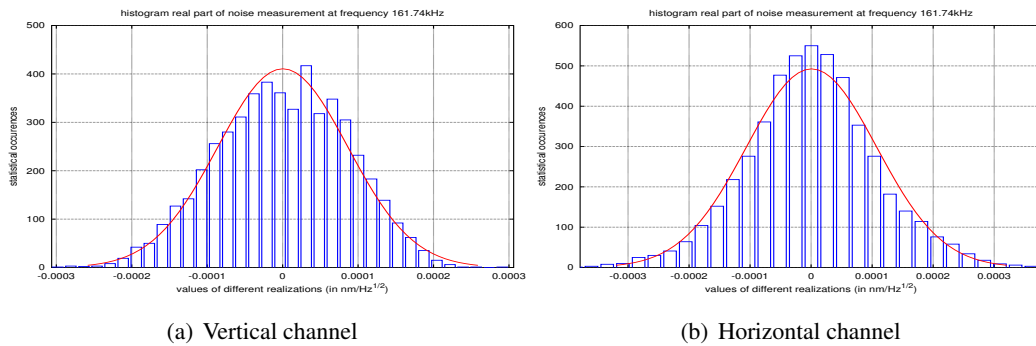


FIGURE C.3 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 162 kHz (“pathological” frequency)

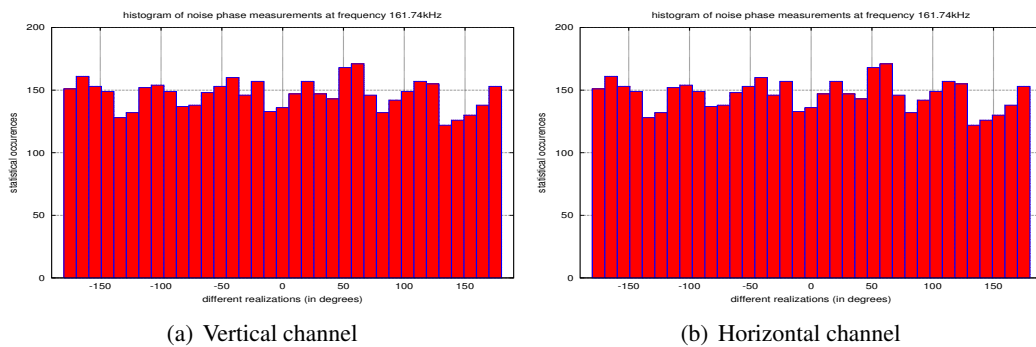
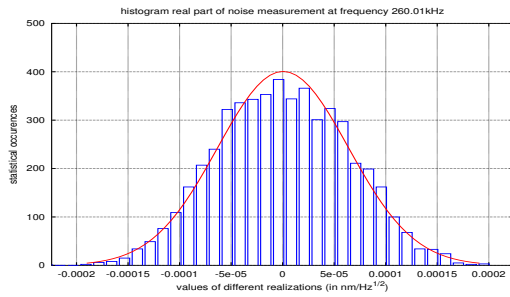
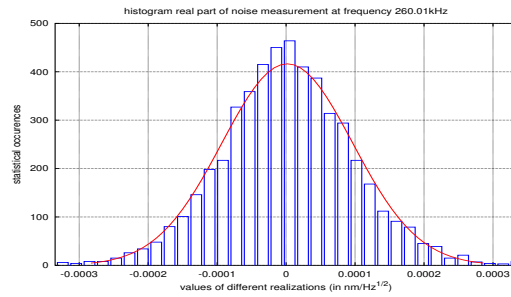


FIGURE C.4 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 162 kHz (“pathological” frequency)

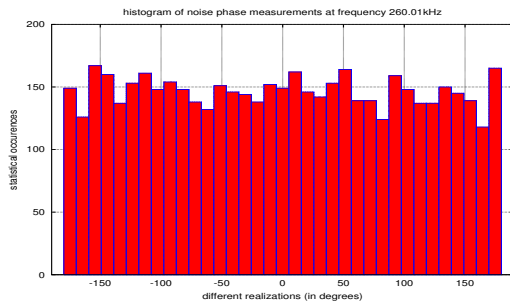


(a) Vertical channel

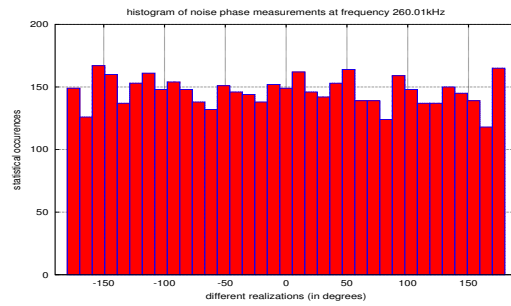


(b) Horizontal channel

FIGURE C.5 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 260 kHz (“pathological” frequency)

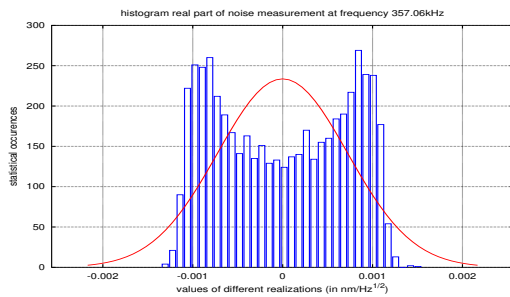


(a) Vertical channel

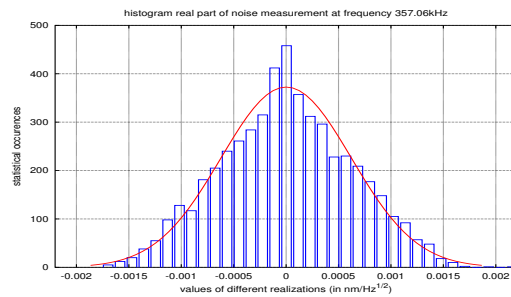


(b) Horizontal channel

FIGURE C.6 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 260 kHz (“pathological” frequency)

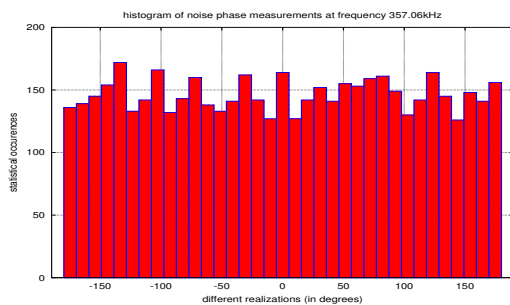


(a) Vertical channel

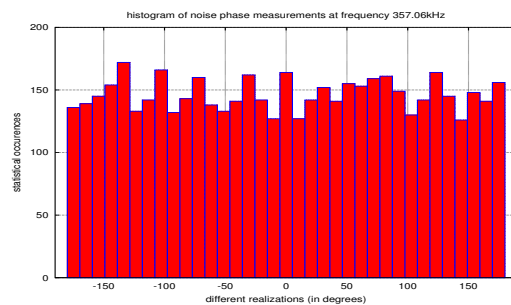


(b) Horizontal channel

FIGURE C.7 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 357 kHz (“pathological” frequency)

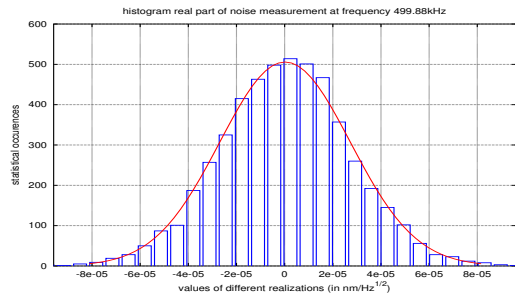


(a) Vertical channel

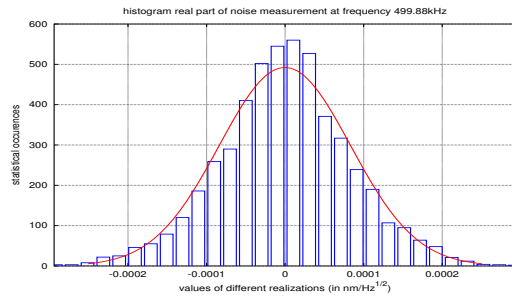


(b) Horizontal channel

FIGURE C.8 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 357 kHz (“pathological” frequency)

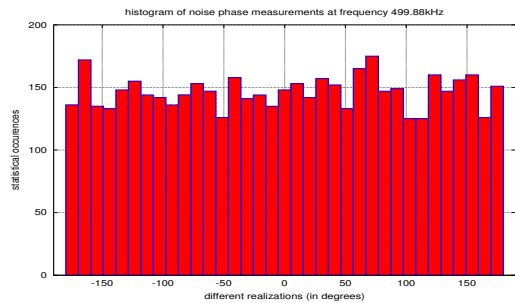


(a) Vertical channel

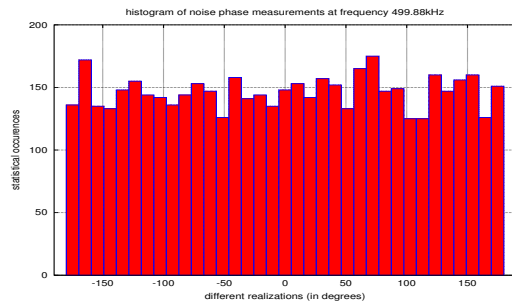


(b) Horizontal channel

FIGURE C.9 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 500 kHz

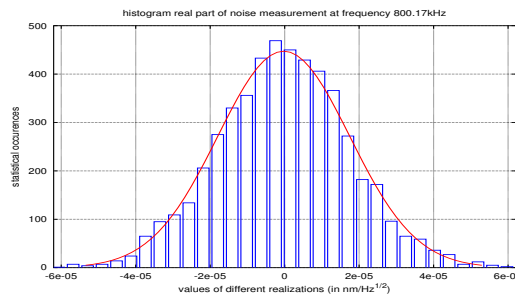


(a) Vertical channel

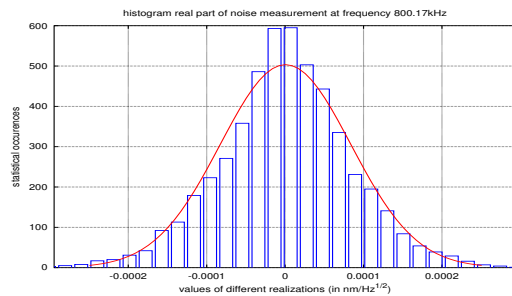


(b) Horizontal channel

FIGURE C.10 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 500 kHz

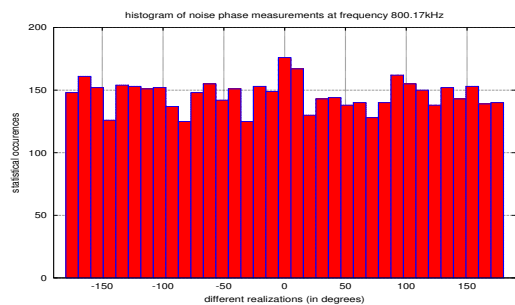


(a) Vertical channel

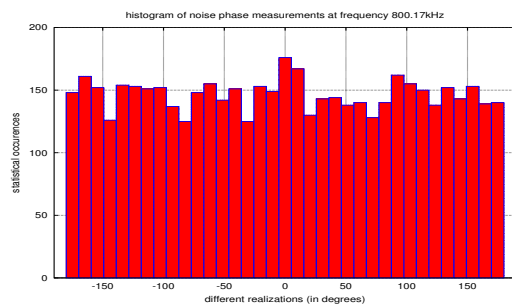


(b) Horizontal channel

FIGURE C.11 – Histograms of the real part of the noise for the frequency 800 kHz



(a) Vertical channel



(b) Horizontal channel

FIGURE C.12 – Histograms of the phase of the noise for the frequency 800 kHz

DC level	650 mV		835 mV		1000 mV		1720 mV	
Sensitivity level	37 nm/mV		49 nm/mV		65 nm/mV		80 nm/mV	
Composante	Horiz.	Vert.	Horiz.	Vert.	Horiz.	Vert.	Horiz.	Vert.
Average SNR	30.68 dB	31.92 dB	31.10 dB	30.80 dB	31.16 dB	30.04 dB	26.64 dB	28.89 dB
Standard deviation SNR	0.65 dB	1.64 dB	1.77 dB	1.49 dB	1.01 dB	1.49 dB	1.51 dB	1.68 dB
Average Noise Power (in nm²/Hz)	$1.28 * 10^{-3}$	$8.96 * 10^{-4}$	$1.22 * 10^{-3}$	$1.21 * 10^{-3}$	$1.24 * 10^{-3}$	$1.46 * 10^{-3}$	$3.70 * 10^{-3}$	$1.90 * 10^{-3}$
Std Noise Power (in nm²/Hz)	$2.11 * 10^{-4}$	$3.85 * 10^{-4}$	$6.12 * 10^{-4}$	$3.70 * 10^{-4}$	$3.09 * 10^{-4}$	$4.88 * 10^{-4}$	$1.28 * 10^{-3}$	$7.03 * 10^{-4}$
Average Signal Power (in nm²/Hz)	1.50	1.39	1.58	1.46	1.62	1.48	1.70	1.47
Std Signal Power (in nm²/Hz)	$9.01 * 10^{-3}$	$1.00 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$	$9.94 * 10^{-3}$	$1.80 * 10^{-2}$	$6.45 * 10^{-3}$	$3.12 * 10^{-2}$	$1.76 * 10^{-2}$

TABLE B.1 – Noise and Signal properties with different levels of DC

Annexe C

Adaptation de la transformée $p - \omega$ pour tenir compte de la polarisation des ondes

Dans la communauté géophysique de proche surface, les diagrammes de dispersion des ondes de surface sont généralement estimés à l'aide de pointés réalisés sur d'une transformée (non réversible) permettant de faire apparaître les vitesses de phases (Park *et al.*, 1999). On appellera cette transformée la "transformée $c - \omega$ ". Ici, je propose d'adapter sa formulation afin de tirer parti des données multicomposantes et d'analyser la polarisation.

L'objectif de cette transformée est d'obtenir l'énergie (ou la valeur efficace) des signaux dans le plan (ω, c) où c est la vitesse de phase apparente dans la direction de la ligne de géophones.

Pour un tir donné g composé de N traces $g_j(\omega)$, l'énergie $E(\omega, c)$ de la transformée se calcule à l'aide de l'expression suivante :

$$E(\omega, c) = \left| \sum^{traces} e^{i(-\frac{\omega}{c})r_j} W_j \frac{g_j}{|g_j|} \Delta_x \right|^2 \quad (C.1)$$

avec r_j le déport de la trace j , Δ_x l'espacement inter-trace et W_j le coefficient d'appodization correspondant au déport de la trace j .

Dans l'équation C.1, si les données ne sont pas normalisées on obtient une transformée réversible analogue à celle proposée par McMechan & Yedlin (1981).

L'extension au cas multicomposantes avec n_{comp} composantes se fait en évaluant la transformée $\hat{g}_i(\omega, c)$ pour la composante i de la manière suivante :

$$\hat{g}_i(\omega, c) = \sum^{traces} e^{i(-\frac{\omega}{c})r_j} W_j \frac{g_{(j,i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{comp}} |g_{(j,i)}|^2}} \Delta_x \quad (C.2)$$

C'est à dire qu'au lieu de normaliser les données par $|g_j|$ comme pour le cas mono-composante (eq. C.1), chaque composante est normalisée par la norme du mouvement particulière : $\sqrt{\sum_{i=1}^{n_{comp}} |g_{(j,i)}|^2}$

Afin de calculer la dispersion apparente dans le plan (ω, c) en tenant compte de toute l'information multicomposantes, il suffit alors de sommer les énergies des signaux transformés : $|\hat{g}_i(\omega, c)|^2$ obtenues pour les différentes composantes.

Enfin, on peut aussi calculer les paramètres de polarisation dans le plan $c - \omega$. Par exemple dans le cas de mesures cas bi-composantes, l'angle d'ellipticité $\psi(\omega, c)$ dans le plan (ω, c) se calcule alors suivant :

$$\psi(\omega, c) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2\Im [\hat{g}_z(\omega, c)^* \hat{g}_x(\omega, c)]}{|\hat{g}_x(\omega, c)|^2 + |\hat{g}_z(\omega, c)|^2} \right) \quad (\text{C.3})$$

Tandis que l'angle d'inclinaison $\xi(\omega, c)$ peut se calculer suivant :

$$\xi(\omega, c) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\Re [\hat{g}_x(\omega, c)^* \hat{g}_z(\omega, c)]}{|\hat{g}_x(\omega, c)|^2 - |\hat{g}_z(\omega, c)|^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

Annexe D

Introduction simplifiée à la fonction coût \mathcal{E}_P pour le cas bi-composantes

A Introduction

Ce résumé étendu s'intitulant : « A new kind of Polarization-based misfit function : theoretical formulation and application to full waveform inversion » soumis pour la conférence EAGE 2015 reprend en grande partie l'explication fournie lors de la soutenance de thèse pour introduire la fonction objectif \mathcal{E}_P basée sur la distance de Poincaré. Cette explication simplifiée est valide pour le cas bi-composantes mais pour un nombre plus important de composantes il est nécessaire d'utiliser l'approche que j'ai développée au chapitre 2.

B Résumé

Multicomponent are becoming routinely used in seismology and they open new prospects for seismic tomography purposes. Especially, polarization observables are observables of choice for the seismic tomography. However, the polarization observables and their associated misfit functions used in geophysical literature are not optimal for tomography purposes. In this contribution, we propose to define a new kind of polarization misfit function based on an "intrinsic" distance in the polarisation states space. Then, the gradient of the proposed misfit function is computed by taking advantage of the adjoint state formalism and integrated in an existing full waveform inversion program. Finally, a numerical example is proposed to compare the results from the proposed polarization misfit function with the conventional L2 multicomponent cost-function and the polarization spectral ratios.

C Résumé étendu



Introduction

The developments of multicomponent seismic acquisition technology lead to investigate more and more the use of multicomponent data for seismic imaging purposes.

Among the information contained in multicomponent data, the polarization is an observable of choice for tomography : 1) the polarization observables are independent to the knowledge of the source wavelet and the instrumental response (for the later if the receiver coupling is the identical in all directions); 2) the polarization observables are independent to the global amplitudes which may be difficult to numerically reproduce; 3) according to Boore and Nafi Toksoz (1969), the polarization has a lower sensitivity to attenuation parameters than for other structural parameters (as for instance velocities) which is interesting when attenuation parameters are neither inverted nor known; 4) in context of inversion methods based on local optimization methods, the polarization has the advantage to be independent of the global phase and so to potentially mitigate the cycle skipping effects; 5) in context of near surface imaging, Boore and Nafi Toksoz (1969) showed that the polarization can be sensitive to the shallow structures.

Polarization observables as horizontal over vertical spectral ratios (e.g. Scherbaum et al. (2003)), ellipticity angles (e.g. Maranò et al. (2012)) and tilt angles (e.g. Hu and Menke (1992)) have been used for quantitative tomography purposes. However, in the geophysical literature the associated misfit functions suffer from different drawbacks. For instance these misfit functions are either not well-posed (as in case of polarization spectral ratios which are infinite for some polarization states and not invariant with the choice of the sensors orientation or in case of the tilt angle values for circular particle motions) or they do not account for all the properties of the observed polarization (ellipticity or tilt angles used alone).

In this study, we introduce an intrinsic distance to measure the distance between two polarization states, leading to the definition of a well-posed misfit function for tomography and enabling to completely account for all the properties of the particle motion polarization (unifying all the mentioned misfit functions). Then, the gradient of the proposed misfit function is computed by taking advantage of the adjoint state formalism and integrated in an existing full waveform inversion program. Finally, a numerical example illustrates the advantage of the proposed misfit function compared to the more conventional spectral ratios.

The concept of polarization state

In order to propose a simplified derivation with as little mathematical technicalities as possible, we consider a multicomponent field (as for instance the particle velocities) composed of only 2 components. We also express physical quantities in the Fourier domain (we can omit the frequency dependency since we consider each frequency independently). We consider a particle motion \mathbf{u} at one given location. In order to make explicit the polarization, we can express \mathbf{u} in a polar form $\mathbf{u} = A_u \mathbf{p}_{u,\phi} e^{i\phi}$ where A_u is the absolute amplitude (positive real number), $\mathbf{p}_{u,\phi}$ a unit complex vector ($\langle \mathbf{p}_{u,\phi} | \mathbf{p}_{u,\phi} \rangle = 1$) always defined up to a multiplicative constant (phasor) and $\phi \in [0, 2\pi[$ is the “absolute/global” phase (phasor). It is noteworthy that the vectors $\mathbf{p}_{u,\phi}$ are equivalent up to a complex phase term (as wave-functions in quantum physics).

The first purpose of this study is to introduce a distance between an observed polarization state $\mathbf{p}_{u_{obs},\phi}$ and a computed polarization states $\mathbf{p}_{u_{comp}(\mathbf{m}),\phi}$ function of model parameters \mathbf{m} . To do so, we need to introduce a convenient geometrical representation of the different polarization states.

Poincaré sphere representation and intrinsic distance between polarization states

In order to get ride of the amplitudes, we can first define the normalized particle motion as :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{A_u} = \mathbf{p}_{u,\phi} e^{i\phi} \quad (1)$$



Then, for convenience we will use the the bra-ket Dirac's formalism and express $|\tilde{\mathbf{u}}\rangle$ in the basis $(|\mathbf{e}_x\rangle, |\mathbf{e}_z\rangle)$ as :

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{u}}\rangle &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} = \tilde{u}_x |\mathbf{e}_x\rangle + \tilde{u}_z |\mathbf{e}_z\rangle \\ &= e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{e}_x\rangle + e^{i(\phi+\beta)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{e}_z\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

where $\phi \in [0, 2\pi[$ and $(\phi + \beta) \in [0, 2\pi[$ are the phases of \tilde{u}_x and \tilde{u}_z . It follows that $\beta \in [0, 2\pi[$. $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ and $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ are corresponding to the amplitudes of \tilde{u}_x and \tilde{u}_z . Since $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ and $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \in [0, 1]$ then $\theta \in [0, \pi]$. When, if we factorize eq. 2 by $e^{i\phi}$ then we get :

$$|\tilde{\mathbf{u}}\rangle = e^{i\phi} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{e}_x\rangle + e^{i\beta} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) |\mathbf{e}_z\rangle \right) \quad (3)$$

According to equation 1, we can formally identify ϕ in eq. 3 as a “global phase” term. Then, using a dyadic product one can compute the polarization tensor \mathcal{U} as :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= |\tilde{\mathbf{u}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{u}}| = e^{i\phi} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\beta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} e^{-i\phi} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\beta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & \cos(\beta) \sin(\theta) - i \sin(\beta) \sin(\theta) \\ \cos(\beta) \sin(\theta) + i \sin(\beta) \sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} (\mathcal{I} + \cos(\theta) \mathcal{S}_1 + \cos(\beta) \sin(\theta) \mathcal{S}_2 + \sin(\beta) \sin(\theta) \mathcal{S}_3) \quad (5)$$

Actually, it can be shown that there is a one-to-one mapping between the (pure) polarization states and the (rank one) polarization tensors. It is worthwhile to note that expression 4 shows that the tensor \mathcal{U} does not depend on the “global phase” term ϕ . In expression 5, \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 and \mathcal{S}_3 are the Pauli Spin matrices associated to different weights which can be gathered in a real vector called the Stokes' vector. This vector is defined as $\mathbf{n}_r = (\cos(\theta), \cos(\beta) \sin(\theta), \sin(\beta) \sin(\theta))^t$. In this expression of the Stokes' vector, we can recognize the expression in cartesian coordinates of a point located at the surface of a unit sphere with an inclination angle θ and an azimuth angle β . From this remark, we can show that there is a one-to-one mapping between (pure) polarization states and points at the surface of a unit sphere. This sphere is named the Poincaré sphere in optics (also called Bloch sphere in quantum mechanics). An illustration of some polarization states with the corresponding locations at the surface of the Poincaré sphere is proposed in figure 1-a.

The Poincaré sphere provides a geometric representation of the polarization states and we take advantage of this representation in order to define the distance between different polarization states. If we consider two polarization states A and B (Fig. 1-b), with the corresponding Stokes' vectors $\mathbf{n}_r(A)$ and $\mathbf{n}_r(B)$, a natural choice is to define the distance between these states as the length of the geodesic curve joining them at the surface of the Poincaré sphere. According to the geometrical properties of a sphere of unity radius, the angle $\theta_{AB} \in [0, \pi]$ between the vectors $\mathbf{n}_r(A)$ and $\mathbf{n}_r(B)$ corresponds to the length of the geodesic $C_{geo}(A, B)$. For that reason, we can express the geodesic as $C_{geo}(AB) = \arccos(\langle \mathbf{n}_r(A) | \mathbf{n}_r(B) \rangle)$

Polarization inversion : misfit functions and gradients from adjoint-method

In order to define a misfit function which is always positive and to promote mathematical simplicity we first define our misfit function as the square of the Poincaré distance between the observed and the computed polarization states :

$$\mathcal{E}_{polar}(\mathbf{m}) = \left[\arccos(\langle \mathbf{n}_r(obs) | \mathbf{n}_r(\mathbf{m}) \rangle) \right]^2 \quad (6)$$

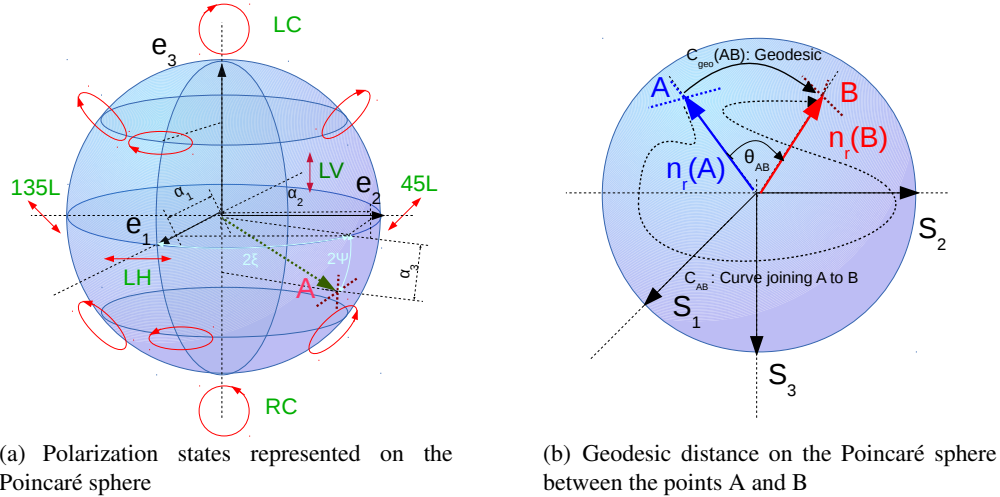


Figure 1 Illustration of the polarization states and the geodesic distance on the Poincaré sphere for bi-component measurements. a) On the Poincaré sphere, the azimuth angle ξ is 2 times the particle motion tilt angle and the latitude angle ψ is 2 times the particle motion ellipticity angle; b) The distance between the states A and B is defined as the length of the geodesic $C_{geo}(A, B)$ joining A and B at the surface the Poincaré sphere.

where $\mathbf{n}_r(obs)$ and $\mathbf{n}_r(\mathbf{m})$ are the Stokes' vectors obtained respectively from the observed data and from the synthetic data computed with the structural parameters \mathbf{m} .

This misfit function is implemented in the framework of the full-waveform inversion (Tarantola, 1984; Virieux and Operto, 2009) to reconstruct the structural parameters Vp and Vs . The associated gradient is computed by taking advantage of the adjoint formalism and implemented in the code developed by Brossier (2011). For comparison, we also use the conventional ℓ_2 multicomponent misfit function $\mathcal{E}_{conv}(\mathbf{m})$ defined by simply adding each component ℓ_2 misfits :

$$\mathcal{E}_{conv}(\mathbf{m}) = |u_{obs,x} - u_{model,x}(\mathbf{m})|^2 + |u_{obs,z} - u_{model,z}(\mathbf{m})|^2 \quad (7)$$

and another polarization based cost-function using the conventional spectral complex ratio which is defined as :

$$\mathcal{E}_{hv}(\mathbf{m}) = \left| \frac{u_{obs,x}}{u_{obs,z}} - \frac{u_{model,x}(\mathbf{m})}{u_{model,z}(\mathbf{m})} \right|^2 \quad (8)$$

For the polarization based cost-function (eq. 6 and eq. 8), the main modifications of the inversion code consist in changing the adjoint sources used for the computation of the gradient (adjoint state formalism).

Numerical test

The model is composed of an homogeneous media with a cross shaped perturbation located in the middle. The structural parameters values of the background medium (without the cross) are : $Vp=1000\text{m/s}$, $Vs=500\text{m/s}$ and $\rho=1500\text{kg/m}^3$ and the attenuation $Qp = Qs=100$. The Vp and Vs values of the cross are 25% larger than values of the background media, and the Qp , Qs and ρ parameters are the same as for the background media. The Vp and Vs parameters are inverted simultaneously, density and attenuation parameters are not inverted. The acquisition is composed of 144 receivers and 48 sources both regularly spaced and completely surrounding the model. A synthetic isotropic noise has been added to the data in order to statistically get a signal to noise ratio of 40 dB. In the inversion, frequencies (18, 26, 30,44 ,58 ,75 Hz) are processed sequentially, with a maximum number of 40 iterations per frequency. The optimization employs an l-BFGS method a the storage of 6 gradients.

The inversion results of the Vs obtained with the $\mathcal{E}_{conv}(\mathbf{m})$ objective function (fig. 2a) recover accurately the cross-shaped perturbation. However, the inversion from the $\mathcal{E}_{hv}(\mathbf{m})$ cost-function fails completely

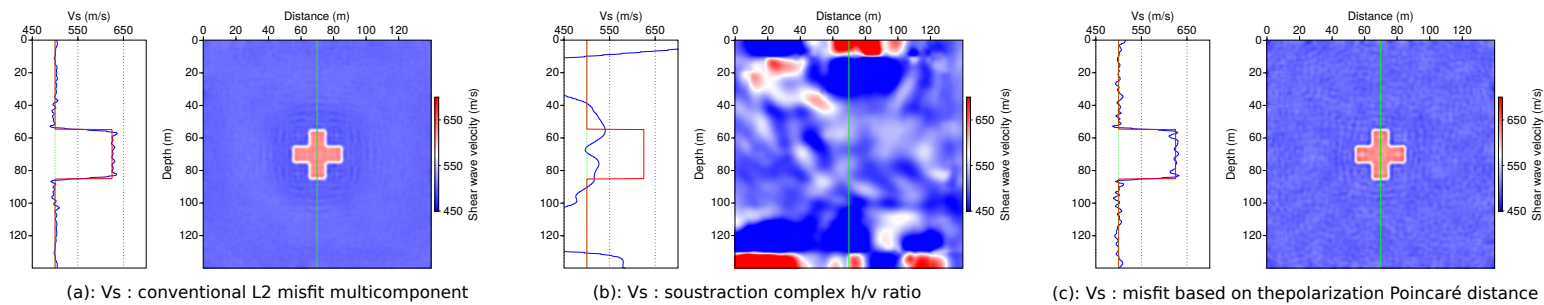


Figure 2 Inversion results of the V_s parameter. On velocity maps velocity logs are depicted by the green line and represented on the left-hand side. In the velocity logs, the green curves correspond to the initial models, the blue curves the inverted parameters and the red curves the “true” models.

(fig. 2b). The very large amplitude variations of the h/v ratio depending of the orientation of the source-receivers couple can possibly explain this failure. The inversion results obtained with the cost function $\mathcal{E}_{polar}(\mathbf{m})$ (fig. 2c) are comparable with those obtained from the conventional misfit function $\mathcal{E}_{cov}(\mathbf{m})$, the perturbation is quantitatively well recovered.

Conclusions

We proposed a new kind of cost function for the inversion of the polarization which is based on the geodesic distances on the Poincaré sphere. We implemented this new misfit function in a FWI modeling code in order to enable high-resolution inversion of the polarization observables. In the proposed example, due to the not well-posed nature of the polarization spectral ratios, the inversion failed with these polarization observables but with the proposed misfit function the inversion results are comparable to those obtained with a conventional ℓ_2 multicomponent misfit function. We think that the benefits of this new formulation for the polarization inversion go beyond the context of the FWI method. It can for instance be interesting to investigate the potential benefits when reformulating receiver-function or spectral ratio based imaging methods with the proposed formalism.

Acknowledgements

Discussions with Ludovic Métivier were useful for derivation of the gradients of the different objective functions as well as we benefited from discussions with Jean Virieux. This work was granted access to the HPC resources of [CINES] under the allocation 2013-[C2013046837] made by GENCI

References

- Boore, D.M. and Nafi Toksoz, M. [1969] Rayleigh wave particle motion and crustal structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**(1), 331–346.
- Brossier, R. [2011] Two-dimensional frequency-domain visco-elastic full waveform inversion: Parallel algorithms, optimization and performance. *Computers & Geosciences*, **37**(4), 444 – 455, ISSN 0098-3004, doi:10.1016/j.cageo.2010.09.013.
- Hu, G. and Menke, W. [1992] Formal inversion of laterally heterogeneous velocity structure from p-wave polarization data. *Geophysical Journal International*, **110**(1), 63–69, doi:10.1111/j.1365-246X.1992.tb00713.x.
- Maranò, S., Reller, C., Loeliger, H.A. and Fäh, D. [2012] Seismic waves estimation and wavefield decomposition: application to ambient vibrations. *Geophysical Journal International*, **191**(1), 175–188, doi:10.1111/j.1365-246X.2012.05593.x.
- Scherbaum, F., Hinzen, K.G. and Ohrnberger, M. [2003] Determination of shallow shear wave velocity profiles in the cologne, germany area using ambient vibrations. *Geophysical Journal International*, **152**(3), 597–612, doi:10.1046/j.1365-246X.2003.01856.x.
- Tarantola, A. [1984] Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, **49**(8), 1259–1266.
- Virieux, J. and Operto, S. [2009] An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, **74**(6), WCC127–WCC152.