UNIVERSITÉ DE NANTES

Unité de Formation et de Recherche

« Médecine et Techniques Médicales »

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2014-2015

MÉMOIRE

pour l'obtention du

CERTIFICAT DE CAPACITÉ D'ORTHOPHONISTE

Présenté par

Émilie PAULIK

Née le 12/05/1989

Problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants scolarisés en CM1

Élaboration et pré-étalonnage d'une grille d'évaluation des compétences en résolution de problèmes arithmétiques

Présidente du Jury : **Sandrine BORIE**
Orthophoniste, enseignante à l'école d'orthophonie de Nantes

Directrice de Mémoire : **Suzanne CALVARIN**
Orthophoniste, enseignante à l'école d'orthophonie de Nantes

Membre du Jury : **Pascale MAZÉ**
Orthophoniste

« Par délibération du Conseil en date du 7 Mars 1962, la Faculté a arrêté que les opinions émises dans les dissertations qui lui seront présentées doivent être considérées comme propres à leurs auteurs et qu'elle n'entend pas leur donner aucune approbation ni improbation. »

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement Mme Calvarin pour ses conseils et le temps qu'elle m'a accordé pour l'élaboration de ce travail. Je remercie également Mme Borie pour ses précieuses lectures et relectures. Merci à Pascale Mazé pour l'intérêt porté à ce mémoire et pour cette année de stage très enrichissante. Merci à vous trois d'avoir bien voulu m'encadrer et m'accompagner pour cette dernière année d'études.

Un grand merci à Nadège Verrier pour sa disponibilité et ses conseils méthodologiques avisés.

Merci à Céline Guillon d'avoir eu la patience d'échanger avec moi, de répondre à mes questions et m'avoir aidée à prolonger son travail. Je te souhaite beaucoup de plaisir dans ta pratique !

Je remercie tout particulièrement les élèves de CM1 pour leur excellente collaboration lors du protocole, ainsi que leurs parents pour leur accord. Merci aux directrices et institutrices des écoles sollicitées pour leurs échanges très enrichissants.

Merci à mes maîtres de stage pour cette belle année, pour avoir enrichi ma pratique orthophonique. Merci à tous les patients que j'ai pu rencontrer, pour leur tolérance face à mes premiers pas dans ce très beau métier.

Un remerciement spécial pour Martine Hincourt et Monique Patoux pour leur écoute, leur incroyable patience et leurs conseils.

Merci à Anne Lafay, ses judicieux conseils et multiples références bibliographiques m'ont beaucoup aidée.

Merci à mes camarades de promo pour ces chouettes années. J'ai hâte que nous partagions nos expériences !

Enfin, un grand merci à ma famille : mes parents, mon frère et ma tante, qui m'ont supportée et soutenue tout au long de l'année. Merci à Bianca et Laska pour leurs câlins et ronronnements d'encouragement.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

a) Poursuite de mémoire

Ce travail s'inscrit dans la continuité de celui de Céline Guillon (2014) et se propose de creuser les pistes de réflexion quant à la tâche de résolution de problèmes arithmétiques. Les 12 problèmes de Mialaret constituent le support de cette étude : Meljac et Siegenthaler y font référence dans une parution de l'A.N.A.E. (2012) et proposent aux praticiens de compléter la batterie de l'UDN-II en faisant passer aux patients ces problèmes. En effet, ces items proposent des énoncés formulés à l'écrit et dont le type d'opération, la démarche opératoire et la phrase de réponse sont fournis par écrit. Un autre mémoire étudie en parallèle ce même support (Hervé, 2014) au sein du CFUO de Nantes.

Ces problèmes sont applicables pour la tranche d'âge de sept à 14 ans, aussi sont-ils proposés aux enfants scolarisés en CM1, afin de procéder à une amorce d'étalonnage. Ce choix s'appuie sur plusieurs arguments :

- l'addition et la soustraction sont généralement bien maîtrisées d'un point de vue opératoire, en cette deuxième année de cycle dit des approfondissements des acquis de CP et CE1 ;
- la multiplication et la division sont abordées dès le CE1, mais sont approfondies en CM1 et en CM2.

D'après le bulletin officiel n°3 paru le 19 juin 2008, le plus actuel à ce jour, les élèves de CM1 doivent être capables d'« utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux ». La résolution de problèmes arithmétiques, liée « à la vie courante », permet aux élèves « d’approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement ».

b) Place des problèmes arithmétiques dans l'enseignement

Les problèmes arithmétiques, « clé de voûte de la construction des connaissances

mathématiques » (Charnay & Hervé, 2005), sont considérés comme étant l'exercice le plus difficile à l'école. Il s'agit d'une activité très liée au contexte scolaire : ces problèmes sont généralement abordés à l'école, dans une situation d'apprentissage et rarement à la maison.
Tout comme l'enfant qui apprend à lire se retrouve seul face à sa feuille et doit déchiffrer un texte, l'enfant confronté à un problème arithmétique doit mettre en œuvre de nombreuses stratégies. Ces mises en situations dans lesquelles l'enfant apprenant doit trouver seul l'interprétation et éventuellement la solution, peuvent susciter certaines craintes de se tromper, voire de l'angoisse. La rigueur que soulèvent les mathématiques accroît cette appréhension : en effet, il peut y avoir plusieurs chemins pour arriver à la solution, mais il n'existe qu'une réponse correcte tolérée.

Certains chercheurs déplorent le fait que cette activité soit présentée aux élèves après l'apprentissage des stratégies de résolution opératoire. Pour eux, il s'agit pourtant d'une mise en application des opérations et les problèmes servent alors à faire sens, puisqu'ils permettent de rattacher domaine arithmétique et monde réel. Fagnant (2013) remarque que ces problèmes verbaux permettent une mise en pratique des outils arithmétiques, par la compréhension des concepts qui leur sont rattachés et l'intégration des usages conventionnels des opérations. Ils suscitent ainsi chez l'enfant le besoin de trouver la bonne opération parmi celles qu'il connaît, dans le but d'aboutir à la solution. Il s'agirait moins, pour la plupart des enseignants, de faire émerger une « recherche de solution » que de se servir de ces problèmes pour « appliquer un algorithme de calcul » (Sarrazy, 1996).

c) Place des problèmes arithmétiques dans la vie quotidienne

Plusieurs recherches ont été menées auprès de populations ne sachant ni lire, ni a priori compter (entendre par là, aucun enseignement scolaire) et qui pour autant peuvent résoudre des calculs portant sur de petites quantités. Posner et Baroody (1979 ; cités par Dasen, 1990) mènent une recherche en Côte d'Ivoire auprès d'enfants non scolarisés et dont les parents sont agriculteurs ou marchands. Ils étudient particulièrement le comptage et la conservation du nombre et il apparaît que les enfants dont les parents sont marchands disposent de compétences numériques bien supérieures à celles des enfants issus de familles d'agriculteurs. Une autre étude (Ginsburg, Posner & Russel, 1981 ; cité par Dasen, 1990) chez ces populations marchandes de Côte d'Ivoire démontre que leurs compétences sont équivalentes à celles d'adultes scolarisés, ce malgré leurs stratégies d'apprentissages informelles. Ces situations d'échanges commerciaux constituent tout à fait des situations problèmes arithmétiques et permettent de faire prendre sens aux opérations et quantités de manière écologique, spontanée. Toutefois, les chercheurs constatent que leur aisance numérique se limite aux quantités que ces populations manipulent au quotidien. Dès lors que les quantités sont supérieures à leur référentiel, ils ne savent résoudre ces situations qui sortent de leur domaine de compétences. Des études similaires ont été menées au Brésil (Carraher, Carraher & Schlieman, 1985 ; cité par Dasen, 1990).

Dans notre société occidentale actuelle, l'enseignement de l'arithmétique se fait principalement à l'école. Le très jeune enfant, pour autant, naît dans un monde numérique : il peut compter ses jouets, le nombre de jours avant les vacances, combien d'années de plus a son cousin, échanger des billes à la récréation, etc. Plus tard, il gagnera en indépendance et apprendra à lire l'heure et se repérer dans le temps, à gérer un budget, à calculer un panier de courses, anticiper la quantité d'aliments à acheter pour une semaine, lire ses factures, etc.

Outre les activités de la vie quotidienne, les mathématiques sont également un outil fondamental dans beaucoup de champs professionnels, telles que l'informatique, l'ingénierie, la comptabilité, la médecine, l'astronomie, etc. Certains champs artistiques sont également concernés, comme l'architecture, la musique, autant de situations où il faut dénombrer, mesurer, comparer, évaluer. Dans nos loisirs quotidiens, les nombres ont également leur place, par exemple l'attribution et le comptage de points, dans certaines règles de jeu de cartes, etc. Pourtant, nous sommes de plus en plus assistés dans ce que nous entreprenons : la carte bancaire nous évite de compter et recompter nos pièces, les appareils « intelligents » anticipent pour nous le temps de cuisson des aliments par rapport à leur poids, calculent beaucoup de choses pour nous. Le sens pratique se perd, pour autant nous rencontrons toujours des situations problèmes dans lesquelles des données numériques sont en jeu et pour lesquelles la technologie actuelle ne saurait apporter de solution.

d) Intérêts de l'étude des problèmes arithmétiques

La psychologie cognitive s'intéresse principalement à l'étude de la résolution de problèmes arithmétiques pour étudier les « processus cognitifs de haut niveau » (Fagnant, 2000) et ils sont, en effet, très nombreux et dépendent d'un large prisme des fonctions exécutives. Puisqu'il s'agit d'un large champ, beaucoup de domaines de recherche s'y intéressent, comme la psychologie, la pédagogie, l'orthopédagogie et les sciences de l'éducation, la neurologie et d'autres branches de la recherche. Il s'agit d'une épreuve se révélant être un bon « indicateur » des capacités de compréhension de lecture et du sens opératoire (Barrouillet, Fayol et Devidal, 1997).

Par ailleurs, les publications sur les problèmes arithmétiques verbaux mettent à jour une grande diversité sur le plan méthodologique. Il peut par exemple exister deux études s'intéressant au même paramètre, mais menées autrement, auprès d'une population, un échantillon ou avec des outils de mesures différents. De fait, ces diverses études aboutissent à des résultats discordants, voire à des conclusions antagonistes. Certains éléments sont communément reconnus dans la résolution de problèmes, tandis que d'autres demeurent encore discutés. Si les résultats de ces divers courants ne sont pas toujours en parfaite adéquation, ils permettent toutefois d'apporter des éléments de réflexion supplémentaires. Il n'existe à ce jour aucune méta-analyse sur le sujet, notamment dû au fait que parmi toutes ces études recensées, très peu sont construites sur le même axe de méthode opératoire. Les conclusions de cette méta-analyse ne regrouperaient pas suffisamment de résultats ou bien seraient en parties biaisées. Les principales hypothèses seront présentées dans la partie théorique.

Après avoir présenté les généralités relatives aux problèmes arithmétiques, nous développerons les aptitudes cognitives engagées dans cette tâche. Les caractéristiques des énoncés de problèmes arithmétiques, puis les stratégies mises en œuvre lors de la résolution seront abordées par la suite. Enfin, quelques éléments complémentaires pour cette étude seront apportés juste avant la partie méthodologie.

Ce travail a pour objectif de faire l'état des lieux des fréquences d'erreurs selon leurs types chez les enfants de CM1 dans la résolution de problèmes arithmétiques écrits. Une grille de cotation a été élaborée à cet effet. Cette étude se propose de faire un échantillonnage systématique, permettant ainsi de fournir des repères statistiques auprès de cette population. Il s'agit d'une amorce d'étalonnage des 12 problèmes élaborés par Mialaret, en vue de compléter la batterie de l'UDN-II, sur le souhait de Meljac et Siegenthaler (2012).

I PARTIE THEORIQUE

1 GENERALITES SUR LES PROBLEMES ARITHMETIQUES

Les travaux de recherche dans le domaine des problèmes arithmétiques sont très nombreux et recoupent beaucoup de champs d'études. En effet, une grande variété de paramètres rentre en jeu, tant sur le plan de la forme des énoncés et des instances cognitives sollicitées. Aussi la présente étude se propose de balayer le large champ de recherche dédié à ce sujet afin d'en dégager les principaux éléments nécessaires à cette recherche.

1.1 Situation-problème

Un problème arithmétique n'en est un que s'il pose fondamentalement problème, autrement dit sa résolution nécessite une réflexion et une mise en action de compétences pour le résoudre. Newell et Simon (1972) estiment qu'un problème émerge dès lors qu'il existe une différence entre la situation initiale et la situation finale. Le dictionnaire du TLFi propose cette définition du mot problème : « question pouvant être résolue à partir des éléments donnés dans l'énoncé, (…) question d'ordre théorique ou pratique qui implique des difficultés à résoudre ou dont la solution reste incertaine ». En effet, dans le cas d'un problème arithmétique, la solution ne se révèle pas d'elle-même au lecteur. Elle ne se vérifie et ne s'admet que par des procédures opératoires, subordonnées par une démarche de raisonnement préalable vis-à-vis de la situation décrite dans l'énoncé. Le sujet va devoir comprendre la situation décrite, les liens établis, puis mettre en œuvre une stratégie opératoire pour aboutir à la solution. Par ailleurs, une situation peut s'avérer problématique pour un individu et ne pas l'être pour un autre, car celui-ci peut potentiellement le résoudre rapidement et efficacement, sans difficulté.

1.2 Problème arithmétique verbal

Un problème arithmétique verbal se définit par une description verbale, en modalité écrite ou orale, de situation-problème, agrémentée d'une ou de plusieurs questions (parfois même non formulées), dont la réponse se trouve dans l'exécution d'une ou de plusieurs opérations arithmétiques mettant en jeu les données numériques de l'énoncé.

D'après Tardif (1997), la principale finalité lors de la résolution d'un problème réside dans la recherche du but à atteindre. Les problèmes arithmétiques verbaux sont composés de trois niveaux : la formulation verbale, les relations arithmétiques sous-jacentes et l'expression symbolique arithmétique de ces relations. Ils diffèrent des problèmes arithmétiques classiques, où sont présentées symboliquement les opérations arithmétiques à résoudre. On distingue alors ce qui constitue la surface d'un énoncé aussi appelée habillage, telle que la trame narrative de l'énoncé, des éléments organisateurs sous-jacents, comme les relations arithmétiques et la traduction arithmétique de ces relations. Chacune de ces variables est déterminante dans la compréhension de la situation décrite. Par exemple, deux problèmes comportant les mêmes relations arithmétiques et la même expression arithmétique mais dont la formulation linguistique de l'énoncé diffère n'induit pas chez un individu les mêmes représentations de la situation décrite. Ce sont ces différences de traitement des énoncés qui ont mené les chercheurs à répertorier les différents types de problèmes.

Tardif (1997) détermine également quatre éléments essentiels constitutifs d'un problème. Il mentionne les données initiales, telles que les données numériques, linguistiques invoquées dans l'énoncé et descriptives de la situation ; les contraintes, caractéristiques de l'essence d'une situation problématique ; la détermination du but final à atteindre, puis enfin la recherche active pour atteindre ledit but, tout en remédiant aux contraintes de l'énoncé.

Cummins, Kintsch, Reusser et Weimer (1988) ont étudié les difficultés rencontrées dans différentes tâches arithmétiques : il en ressort qu’un problème présenté de manière numérique (i.e. : $x + y = z$) demeure plus simple à résoudre qu’un problème arithmétique verbal, autrement dit représenté par des mots et habillé sémantiquement. Cette particularité reste l'écueil le plus souvent rencontré dans la tâche de résolution de problèmes arithmétique : en effet, pour réussir à résoudre un problème, le sujet doit mener un travail de recherche dans l'énoncé afin d'interpréter le problème correctement, dans un contexte linguistique largement dominé par des aspects sémantiques.

Les problèmes arithmétiques verbaux peuvent également être envisagés sous un autre angle : la structure proposée et la structure effective. Ces notions de structures proposées et effectives sont introduites par Fayol (1990). La structure proposée renvoie à la partie sous-jacente de l'énoncé, prédéfinie par l'enseignant ou le chercheur qui a construit le problème : elle est le « résultat des connaissances conceptuelles relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons d'ensembles d'éléments ». La structure effective se manifeste par les démarches de résolution entreprises par l'enfant, qui ne correspondent pas forcément à ce qui est attendu de lui, puisqu'il peut y avoir glissement de sens : il s'agit essentiellement du « résultat des liens que l'enfant a établi entre les termes de l'opération arithmétique pour créer du sens et qu'il utilise effectivement dans sa procédure de résolution ». La relation établie par l'enfant entre structure proposée et structure effective suppose qu'il prenne conscience des attentes de la tâche, qu'il sollicite ses acquis tout en sélectionnant dans l'énoncé ce dont il a besoin pour le résoudre.

1.3 Différences entre problèmes arithmétiques verbaux écrits versus oraux

Un problème présenté en modalité orale engage davantage la mémoire de travail que la modalité écrite. En effet, le sujet doit retenir les données numériques tout comprenant les relations entretenues par les éléments de l'énoncé et ce à quoi ces nombres font référence. Si le sujet ne peut prendre des notes, il mobilise ses connaissances des faits arithmétiques, autrement dit il calcule mentalement. La modalité écrite sollicite moins la mémoire de travail, en revanche elle fait appel à la lecture et à la bonne maîtrise des procédures de calcul écrit. Des difficultés de lecture peuvent mener à des blocages au niveau du sens. De plus, la modalité écrite permet de présenter des problèmes avec des opérandes plus grandes, puisque moins coûteux d'un point de vue mnésique. Aussi, la lecture à voix haute par une tierce personne peut induire des indices prosodiques (appui de l'intonation sur les éléments pertinents, etc.).

La mémoire de travail reste l'élément principal pouvant expliquer des différences de performance relevées entre la présentation écrite et orale de problèmes arithmétiques.

1.4 Point de vue de la psychanalyse

Quelques éléments complémentaires issus de réflexions de la psychanalyse viennent soutenir et étayer les difficultés constatées par la psychologie cognitive. Il est en effet intéressant de noter que ces constats ne se contredisent pas, mais au contraire nourrissent la réflexion portée autour de la résolution de problèmes. Soulié (dans Bacquet, Poujol, Soulié, Decour & Guéritte-Hess, 1996) aborde les difficultés soulevées par les élèves, en recueillant les réactions spontanées d'une classe de CM2. Elle reprend le terme « d'inquiétante étrangeté », faisant-là référence à Freud : cette inquiétante étrangeté traduirait le ressenti des enfants confrontés à un problème arithmétique, face à une énigme, qui peut parfois les mener à la panique et à se réfugier vers une stratégie qui leur est familière, pouvant être inadaptée à la situation. Cette frustration de ne pas réussir à résoudre le problème peut faire écho à leurs expériences précoces d'insatisfaction (absences de la mère mal vécues).

La dimension affective des apprentissages est d'autant plus marquée dans la situation de problème arithmétique : en effet, les énoncés mettent en jeu des relations sociales, des histoires et peuvent ainsi « mobiliser des affects désagréables ». Ces situations inconfortables, dans lesquelles l'enfant est un apprenant qui peut se tromper ou ne pas réussir du premier coup, peuvent faire émerger chez lui des réactions affectives telles que de l'agressivité, de l'angoisse, de l'inhibition ou encore de la régression.

Le renoncement à la toute-puissance consécutif de l'échec de résolution peut induire chez l'enfant un sentiment d'incompétence transitoire et, à terme, amoindrir son estime de soi. L'intrication de la langue des mathématiques et de la langue maternelle, typique des problèmes, peuvent désarçonner l'enfant. Aussi, pour remédier à cette difficulté, ils choisissent parfois d'apprendre par cœur les formules et les stratégies de résolution ou bien se résoudent à abandonner. Soulié (1996) ajoute que ces répétitions d'échec peuvent causer une véritable « blessure narcissique », qui laisse parfois des traces chez les adultes. Elle cite dans son chapitre quelques témoignages de souvenirs douloureux.

Les problèmes arithmétiques impliquent que l'enfant fasse des allers-retours entre le monde imaginaire (interne) et le « réel arithmétique » (externe). Soulié ajoute que cette dimension est fondamentale pour éviter tout état de confusion lors de la résolution et cite Jaulin-Mannoni en qualifiant les opérations de « moyens par lesquels nous prenons connaissance du monde dans lequel nous vivons ».

1.5 Pré requis à la résolution de problèmes arithmétiques

L'activité de résolution de problème arithmétique nécessite l'intégrité des systèmes perceptifs, des capacités mnésiques, de compréhension mais aussi de raisonnement. Les fonctions exécutives sont aussi mises en jeu. Le sujet doit être en mesure de pouvoir considérer les informations pertinentes à utiliser, de planifier, contrôler et réguler son action, afin de s'adapter si besoin à une situation nouvelle. Par ce biais, il accédera à de nouvelles représentations et à des nouvelles interprétations.

1.5.1 Aptitudes cognitives générales sollicitées

Les problèmes arithmétiques mettent en jeu une multitude de savoirs et savoir-faire. De Corte *et al.* (1996) citent différentes aptitudes cognitives fondamentales dans la résolution de problèmes arithmétiques : les connaissances arithmétiques spécifiques, les heuristiques de recherche, les algorithmes, les connaissances métacognitives, les stratégies d'autorégulation et les croyances associées à l'arithmétique et aux problèmes.

1.5.2 Connaissances arithmétiques spécifiques

Ces connaissances englobent la compréhension et application des symboles arithmétiques, des algorithmes, des concepts et règles propres aux nombres, etc. Ces éléments sont détaillés dans les parties 2.4 et 2.5.

1.5.3 Heuristiques de recherche

Du grec *heuriskein* (traduisible par « découvrir », « eurêka »), les heuristiques sont des procédures de résolution applicables à des situations-problèmes non familières ou non routinières. Richard (1998, p. 188) en donne une définition : « Quand les sujets raisonnent en dehors de leur domaine de compétence, ils n'ont à leur disposition que des modes d'inférences dont la validité n'est pas assurée mais qui sont d'utilisation très générale. Ces processus de production d'inférences ne garantissent pas la validité des raisonnements mais ils sont (…) efficaces pour former des hypothèses et faire des choix dont les conséquences permettront d'apporter les corrections nécessaires ». Ainsi, le recours à des stratégies heuristiques peut permettre de mener à la solution, mais pas systématiquement, par exemple avec la démarche de recherche par essai-erreur. La démarche d'analyse fin-moyen est une des heuristiques les plus utilisées : le sujet évalue la distance entre l'état initial du problème et l'état final (Clément, 2009). Dans le cas des problèmes arithmétiques, la recherche peut porter sur l'état initial, l'état final, la transformation ou bien une comparaison, aussi il peut être difficile pour un individu novice d'évaluer ce qui est à rechercher, de se représenter les relations impliquées dans la situation.

1.5.4 Les algorithmes

Ce sont des règles d'action permettant de garantir la solution. Les formules mathématiques, tout particulièrement les tables de multiplication, en sont un exemple : leur application permet de résoudre le problème grâce à un nombre fini d'opérations. La connaissance des tables de multiplication est un pré-requis nécessaire pour pouvoir restituer les résultats (produits) correctement, sans avoir à les calculer au préalable. Les algorithmes sont donc des règles ou des séquences d'étapes qui permettent d'aboutir au résultat, si ces algorithmes sont appliqués correctement. Il s'agit d'une application de procédure, largement automatisée chez l'expert. Par exemple, pour chaque algorithme opératoire (addition, multiplication, etc.), il existe des règles à suivre, telles que le placement dans les colonnes, l'ordre des séquences de calcul à mener, etc. Les algorithmes se différencient des stratégies heuristiques : le traitement d'un problème qui sort du domaine de compétences d'un sujet pourrait se résoudre grâce aux heuristiques, tandis que traiter un problème qui rentre dans son domaine de compétences serait possible à l'aide d'algorithmes. Ces algorithmes sont engrangés en mémoire et employés lorsque la situation de problème s'y rapporte. La découverte de l'algorithme permettant la résolution du problème est un apprentissage qui peut être nécessaire à la résolution du problème.

1.5.5 Connaissances métacognitives

Les connaissances métacognitives correspondent aux savoirs dont dispose un sujet sur son propre fonctionnement cognitif, sur la tâche qu'il a à résoudre et sur ses propres motivations. Cette attitude réfléchie et consciente permet de s'assurer de la vraisemblance de la démarche entreprise, du résultat, vis-à-vis des autres situations problèmes similaires. La prise de conscience des enjeux de la tâche vont particulièrement orienter la démarche de résolution, le choix des stratégies, etc.

Les connaissances métacognitives engagent le sujet dans une démarche de *self-monitoring*, autrement dit il exerce un contrôle de la phase de compréhension, de la phase exécutive et des résultats qu'il obtient.

Montague (1992) distingue les stratégies cognitives des stratégies métacognitives. La première phase d'attaque de l'énoncé, rattachée aux aspects cognitifs purs, comporte sept étapes : la lecture de l'énoncé, la reformulation de la situation, la représentation graphique, le développement du plan de stratégie de résolution, l'estimation de la réponse, l'exécution de la résolution et la vérification finale. Cette procédure est généralement apprise à l'école, encouragée par les conseils et sollicitations des instituteurs. Montague décrit également les aspects métacognitifs impliqués dans la tâche de résolution de problème arithmétique verbal. Elle développe le modèle *Say-Ask-Check*, organisé autour d'autoquestionnement et retours sur la tâche en cours :

– *say* : le sujet prend conscience de la tâche qu'il réalise et de ses attentes. Il analyse le problème, s'assure de l'avoir compris avant de passer à l'étape suivante. Cette étape est verbalisée, elle permet au sujet une prise de recul face à son travail ;
– *ask* : le sujet s'interroge sur ce qu'il doit faire, aussi il dirige son attention et ses capacités vers la tâche en cours. Il questionne en permanence ce qu'il est en train d'entreprendre ;
– *check* : le sujet procède à une vérification permanente de la tâche, les deux précédentes composantes lui permettant d'assurer ce contrôle.

Cette procédure n'est pas toujours abordée à l'école, aussi Montague en souligne l'intérêt potentiel dans l'enseignement des problèmes arithmétiques, car pour elle la démarche *Say-Ask-Check* permet un contrôle métacognitif et un questionnement rétroactif particulièrement bénéfiques dans la tâche de résolution de problèmes arithmétiques.

1.5.6 Stratégies d'autorégulation

Les stratégies d'autorégulation font référence aux facultés d'organisation des fonctions cognitives et gestion des émotions. L'autorégulation se traduit chez un individu par ses capacités d'autonomie de travail, la gestion de sa motivation en cas d'erreur ou d'échec et le recours à des démarches métacognitives. Le sujet reconnaît sa situation d'apprenant, il sait qu'il doit fournir des efforts de compréhension et d'assimilation indispensables. Parmi ces stratégies d'autorégulation, on peut citer les commentaires à voix-haute au fur et à mesure de des étapes de résolution, le temps de réflexion dévolu à la recherche de stratégie de résolution, l'autocorrection lors de la prise de conscience d'une erreur commise, etc. Ces stratégies témoignent d'un niveau de conscience des activités mentales et sont fondamentales dans l'activité de résolution de problèmes arithmétiques (entre autres, Krutetskii, 1976 ; Nelissen, 1987, cités par Crahay *et al.*, 2008). Cette démarche réflexive rentre dans le cadre plus large de la métacognition, citée précédemment.

1.5.7 Croyances associées à l'arithmétique

Ces connaissances s'assimilent dans un contexte social, tel que le contexte d'enseignement inculqué à l'école. La valeur de la tâche est une des croyances les plus influentes dans la résolution de problème. Par exemple, un enfant considère qu'un problème arithmétique proposé par un adulte ou un manuel comporte forcément une réponse ; il considère qu'un énoncé de problème présente obligatoirement toutes les informations nécessaires à sa résolution (Schoenfeld, 1992) et que la solution est inévitablement déterminée par un ou plusieurs calculs. Il sait également que son travail est soumis à une correction, assurée par l'enseignant.

Les enfants scolarisés en école primaire n'envisagent pas encore tous les liens potentiels entre le monde réel et la résolution de problème arithmétique. À cet âge, ils n'ont pas tout à fait envisagé l'utilité et les applications quotidiennes qu'apporte l'arithmétique. Gamo, Nodry et

Sander (2014) remarquent que les enfants scolarisés en zone d'éducation prioritaire éprouvent particulièrement des difficultés dans cette mise en lien entre problèmes du quotidien et problèmes proposés à l'école, plus globalement dans l'articulation de la logique arithmétique et de la logique quotidienne.

2 APTITUDES MISES EN JEU DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

2.1 Capacités de compréhension écrite

Du point de vue étymologique, la compréhension (du latin *comprehendere*) signifie « saisir avec », « saisir par l'intelligence ». Le dictionnaire du TLFi en donne cette définition : « inclure dans sa nature propre ou dans un système telle et telle choses ou personnes ». La compréhension verbale revient alors à une prise du sens à partir d'un *input* oral ou écrit, en s'appuyant sur les connaissances antérieures. Les informations de *l'input* et des concepts acquis sont ensuite mises en réseau.

Comme le souligne Guillon (2014), « la lecture d'un énoncé de problème arithmétique ne diffère que peu de la lecture d'un texte ». Il s'agit d'un récit : en effet, un énoncé de problème arithmétique est constitué d'une succession d'événements, la principale caractéristique se situant dans la présence d'informations numériques. Il s'agit alors pour le sujet de comprendre l'énoncé lu, afin d'en déduire une procédure de résolution. Dans les énoncés de problèmes arithmétiques, les informations ne sont pas toujours explicites, le sujet doit alors mettre en œuvre une compréhension dite inférentielle : elle exige de repérer des informations données implicitement dans l'énoncé et de construire une cohérence entre ces éléments.

D'après Kintsch et Van Dijk (1983), la compréhension écrite se déroule en plusieurs étapes : le sujet accède d'abord à une représentation initiale, permettant l'intégration du stimulus inédit (texte, image, symboles, etc.). Il met ensuite en lien les informations extraites du texte ou du support iconographique avec ses connaissances déclaratives, tout en hiérarchisant ces données : il s'agit de l'étape durant laquelle le sujet se créé « une représentation cognitive des événements, des actions, des individus et de la situation générale évoquée par le texte » (Kintsch & Van Dijk, 1983), autrement dit un modèle de situation est généré. Enfin, le sujet accède à une représentation dite intégrée de la situation, grâce au modèle de situation qu'il a conçu. Ce modèle permet de rendre compte des écarts possibles d'interprétation textuelle, dans la mesure où chacun dispose de son propre lot de connaissances et envisage un texte à sa manière.

D'après Barrouillet, Fayol et Devidal (1997), tout sujet lecteur dispose de connaissances sur les concepts évoqués par le texte, de savoirs sur les conventions linguistiques et sur les exigences de la tâche de lecture en elle-même. Un manque de connaissances particulières à un domaine peut alors mener à un contre-sens ou à une incompréhension. De plus, des difficultés mnésiques peuvent restreindre le temps de maintien des informations en mémoire de travail et l'encodage peut s'avérer difficile si l'empan mnésique est trop limité.

Dans le cadre de leur étude menée auprès d'enfants de 10 ans, Zagar, Fayol et Devidal (1991) remarquent qu'un énoncé n'est pas lu de la même façon en fonction de la finalité de la tâche : lors des passages comportant des données numériques et des calculs à mener, les enfants lisent plus rapidement. En revanche, lorsqu'il s'agit de passages davantage narratifs, ils s'accordent plus de temps pour procéder aux inférences. Pour ces auteurs, cela témoigne du fait que les jeunes enfants s'engagent plus rapidement dans des phases de calcul, en prêtant moins attention à la trame narrative.

Van der Schoot, Reijntjes et Van Lieshout (2011) ont étudié la compréhension écrite chez des enfants de 10-12 ans. Ils constatent que les lecteurs de faible niveau oublient des informations pertinentes en cours de lecture et éprouvent des difficultés à repérer les incohérences, par défaut de représentation de la situation. Ils n'effectuent pas de retours dans le texte, puisqu'ils ne sont pas dérangés par le manque de cohérence interne, contrairement aux lecteurs experts. De fait, si un énoncé est mal compris, la procédure de résolution ne saurait être adéquate.

2.1.1 Importance du changement de point de vue

Le changement de point de vue, en lien avec les capacités de flexibilité représentationnelle, est une composante de la compréhension très influente dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques. Le point de vue, d'après Clément (1996), se caractérise par la représentation de l'évolution de l'état initial vers l'état final. Il comprend la représentation d'objets et les relations établies entre eux (situation), considérés à partir d'un certain angle. Le changement de point de vue se définit comme étant une composante indispensable d'adaptation et d'action sur l'environnement.

Les énoncés arithmétiques mettent en jeu des structures qui varient en fonction du type de problème. Par exemple, les problèmes de « changement d'état » considèrent isolément ces deux états, alors que des problèmes engageant un déplacement, inscrivent l'état initial et l'état final dans une continuité, dans laquelle l'état initial se transforme en l'état final. Aussi, ne disposer que d'un seul point de vue ne permet pas d'apprécier l'intégralité des relations et des caractéristiques de l'énoncé. C'est pourquoi il est nécessaire de savoir articuler ces points de vue pour bien se saisir de la situation. Changer de point de vue consiste alors à une réinterprétation de l'énoncé, fournissant d'autres caractéristiques du problème en question, de sorte à pouvoir envisager d'autres procédures de résolution possibles (Gamo, Nogry & Sander, 2014).

Clément (1996) affirme que la perception et les propriétés utilisées par le sujet sont influencées par ses propres connaissances : il tend à faire des analogies entre la situation qu'il doit traiter et celle qu'il a pu rencontrer auparavant et qu'il a modélisée. L'enfant doit considérer de nouvelles propriétés dans une « situation d'impasse » pour trouver la solution. Le sujet doit être en mesure de saisir et de comprendre les éléments nouveaux pouvant être masqués par l'activation de ses connaissances antérieures.

La résolution de problèmes arithmétiques verbaux écrits ne s'envisage donc pas sans cette étape de compréhension de la situation. Toutefois, il ne s'agit pas du seul critère déterminant dans cette tâche. Comprendre un énoncé fait appel à des connaissances déclaratives, tandis que la procédure de résolution engage en partie des savoirs procéduraux. Les fonctions exécutives, notamment la mémoire de travail, ont également un rôle majeur dans cette tâche.

2.2 Rôle de la mémoire de travail

La mémoire de travail intervient dans différentes mesures, selon la modalité de présentation de l'énoncé problème. En effet, d'après le modèle de Baddeley (2000 ; version actualisée de son modèle princeps en collaboration avec Hitch, élaboré en 1974) fréquemment usité, la mémoire de travail comprend trois sous-systèmes organisés par plusieurs instances :

- l'administrateur central, « superviseur » de la mémoire de travail, dont le rôle majeur est de coordonner et orienter les informations vers les sous-systèmes cités ci-dessous ;
- un sous-système dit fluide, incluant la boucle phonologique (maintien en mémoire temporaire des informations phonologiques, i.e. subvocalisation), le *buffer* épisodique (mise en lien des informations via la mémoire épisodique) et le calepin visuo-spatial (stockage des informations visuelles et spatiales) ;
- un sous-système dit cristallisé, mettant en lien mémoire de travail et mémoire à long terme via le sous-système dit fluide, comprenant une instance dédiée au langage, à la mémoire épisodique et au stock sémantique visuel.

Dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques, la mémoire de travail serait sollicitée durant plusieurs étapes : lors de la rétention et le traitement concomitant d'informations linguistiques, numériques ou encore lors de la mise en lien établie entre ces informations. Un énoncé présenté oralement met davantage la mémoire de travail en jeu, puisque le sujet doit mémoriser et transformer mentalement les informations entendues. Dans le cadre d'un énoncé lu, elle est moins sollicitée mais s'avère tout de même notable, notamment dans l'organisation des informations et la génération de la représentation de la situation décrite. Afin de mettre en valeur l'influence de la mémoire de travail à travers la modalité écrite, certains chercheurs présentent des fiches sur lesquelles sont rédigées séparément les énoncés et les questions (Thévenot, 2008). Les sujets doivent alors mettre en œuvre des stratégies de rétention et de transformation et ces activités dépendent fortement de la mémoire de travail. Il en ressort que les enfants à faible empan mnésique sont moins performants en résolution de problème que ceux disposant d'un empan supérieur. Cet effet est majoré dans le cas de problèmes à plusieurs étapes, nécessitant la mise en place de sous-buts.

Dans l'étude de Passolunghi et Siegel (2001), évaluant la résolution de problème à travers les modalités orales et écrites, les résultats vont également dans le sens d'un déficit général de la mémoire de travail pour le cas des enfants non performants dans la résolution de problèmes verbaux. Les enfants présentant des difficultés arithmétiques ont des scores plus faibles dans le rappel de données numériques et dans des tâches d'empan numériques. Les chercheurs émettent l'hypothèse que cette baisse de performance peut s'expliquer par une lenteur d'accès aux représentations verbales des données numériques (nom des nombres). Enfin, les enfants moins performants en résolution de problèmes produisent également plus d'erreurs de type intrusion que leurs camarades performants, c'est-à-dire qu'ils restituent des informations d'items précédents, non pertinents avec le problème qu'ils ont à traiter à ce moment. Ces constats soutiennent l'hypothèse du déficit de la mémoire de travail en lien avec la difficulté d'inhibition (Passolunghi & Pazzaglia, 2005). En effet, ces difficultés d'inhibition seraient dues principalement à un défaut de sélection des informations pertinentes et d'oubli des informations inutiles. Passolunghi et Siegel (2001) envisagent également le rôle de la gestion attentionnelle parmi les prédicteurs des performances en résolution de problème.

Une étude plus récente de Passolinghi et Mammarella (2012) précise ces liens en analysant finement les sous-systèmes engagés dans la mémoire de travail : chez les enfants moins performants en résolution de problème, ils constatent que leurs difficultés sont majorées dans les épreuves mettant en jeu le calepin visuo-spatial. Plus précisément, ces enfants réussissent les épreuves visuelles, mais échouent aux épreuves nécessitant un traitement spatial. L'influence des performances de traitement spatial a déjà été démontré (Granà, Hofer, & Semenza, 2006 ; Zorzi, Priftis, & Umiltà, 2002, cités par Passolinghi & Mammarella, 2011) et conforte l'hypothèse de la « ligne des nombres » de Dehaene (1992). Cette théorie postule que nous disposons d'une représentation spatiale, semblable à une ligne mentale organisant les valeurs numériques, avec les plus petites valeurs rangées à gauche et les plus grandes sur la droite. Cette composante spatiale serait mise en jeu lorsque nous nous représentons mentalement des transformations, déplacements ou même lorsque nous imaginons la situation. Elle serait donc particulièrement engagée dans la tâche de résolution de problème.

D'autres études ont permis d'émettre des liens possibles entre mémoire de travail et résolution de problème : l'effet facilitateur de la question placée en début d'énoncé (Thévenot, Barrouillet, Fayol, 2004) mettrait en évidence les bénéfices de l'allègement de la charge en mémoire de travail des informations pertinentes et permettrait alors d'améliorer les performances. Ce point est étudié dans une sous-partie ultérieure (cf. sous-partie 3.1.6).

Pour conclure, plusieurs études mènent à la conclusion du rôle prédicteur de réussite de la mémoire de travail dans diverses tâches arithmétiques, notamment la résolution de problèmes : un sujet ayant de bonnes performances en mémoire de travail a de meilleures chances d'être également bon en résolution de problèmes. Toutefois, parmi ces études démontrant certains liens de corrélation, aucune ne permet de fonder un lien de causalité avéré entre mémoire de travail et performances en résolution de problème.

2.3 Connaissances déclaratives et procédurales

Les connaissances procédurales renvoient à un certain savoir-faire, à une maîtrise des procédures organisées à mener pour atteindre un but. Elles se distinguent des connaissances déclaratives qui se rapportent aux savoirs, pouvant être explicités verbalement (« savoir que ») et détachés de leur contexte initial d'apprentissage. Les connaissances procédurales sont régies par des règles d'applications, elles sont automatiquement déclenchées en fonction de la situation, tel que : « si *p*, alors *q* ». Cette distinction a été mise en évidence par les travaux de modélisation informatique menés par Newell et Simon (1972), pionniers en matière d'intelligence artificielle.

Anderson (1983) introduit le modèle *Adaptative Character of Thought* (ACT) et postule que les connaissances procédurales sont assimilées à travers trois étapes successives et grâce au soutien des connaissances déclaratives : tout d'abord le *cognitive stage* ou stade cognitif, puis l'*associative stage* ou stade associatif et, enfin, l'*autonomous stage* ou stade des procédures automatisées. Si l'on choisit l'exemple de l'apprentissage du vélo, il faut d'abord cerner et retenir les coordinations de gestes à entreprendre pour entre autres pédaler et rester en équilibre : cette étape se fait de manière consciente et intentionnelle, puisqu'il s'agit d'un apprentissage (stade cognitif). Ce premier stade est d'ordre déclaratif. Lors du stade associatif, le sujet affine ses gestes et rectifie ses mouvements, notamment grâce à ses essais-erreurs. Le geste n'est pas encore automatisé et demande encore un certain contrôle. Enfin, lors du troisième et dernier stade d'automatisation des procédures, l'exécution est rapide, largement automatisée et ne mobilise que très peu les ressources attentionnelles : cette dernière étape est de nature procédurale.

Dans le cas de la résolution de problème, Anderson (1983) avance que les connaissances spécifiques à cette tâche sont en premier lieu d'ordre déclaratives, puis procédurales, par le biais de l'analogie : en effet, l'enfant part d'un exemple qu'il découvre ou qu'on lui soumet, il repère les spécificités de la situation, procède à des essais-erreurs et en déduit des règles d'applications, puis il étend cette connaissance particulière à d'autres situations par processus analogique. Ainsi, ces deux types de connaissances sont engagées dans la résolution de problèmes arithmétiques : les connaissances déclaratives sont enrôlées dans la compréhension de l'énoncé (connaissances linguistiques), des données numériques (connaissances sur le nombre) et sur les aspects arithmétiques sous-jacents, tandis que les connaissances procédurales vont être mobilisées dans le traitement, dans l'exécution des opérations arithmétiques (retenue, placement dans la bonne colonne, etc.) et en partie dans l'élaboration d'un plan de stratégie résolutive.

Dans cette perspective, un sujet se trouvant en difficulté face une tâche de résolution de problème serait la conséquence d'une compréhension erronée des concepts propres à cette tâche. Si par exemple le concept de partie-tout est mal compris, la procédure opératoire ne saurait être appliquée effectivement, par défaut de compréhension conceptuelle. Toutefois, les connaissances procédurales ne sont pas les seules en jeu dans la résolution de problème et il serait réducteur d'interpréter des erreurs de résolution uniquement par défaut d'application de procédures. En effet, de nombreux facteurs interviennent, notamment les aspects sémantiques, très influents dans cette tâche. Le sujet doit mobiliser ses compétences de compréhension afin d'analyser chaque situation problème au cas par cas. Aussi, le modèle ACT apporte des éléments intéressants, notamment dans l'interprétation de certaines erreurs, mais ne saurait expliquer les mésinterprétations possibles.

2.4 Connaissances numériques

La maîtrise du nombre fait appel à un certaine capacité d'abstraction : un cardinal (par exemple « 7 ») est un concept et reste alors indépendant de la quantité à laquelle il peut renvoyer. Le nombre est également qualifié d'invariant. Si l'on voulait compter le nombre d'objets constitutifs d'une collection, le résultat serait toujours le même, sauf erreur de comptage, à moins qu'il y ait retrait ou ajout à cette même collection. De même, lorsque l'on évoque «7 », la quantité cible sera toujours sept. L'aboutissement de la maîtrise du nombre réside dans la certitude logique de cette stabilité numérique, et non par empirisme (recomptage systématique, erreurs possibles). La classification et la sériation ont également un rôle majeur dans la construction du nombre, ils constituent les prérequis logiques de cet apprentissage. La classification se définit par le fait de pouvoir ranger des objets sous une même catégorie de par leur point commun, ce malgré leur dissemblances, tandis que la sériation revient à savoir ordonnancer une suite d'éléments dans un ordre bien défini et immuable.

D'après la théorie structuraliste issue des travaux de Piaget, l'acquisition du nombre s'établit entre six et sept ans, à travers le développement intellectuel logique. Ce développement s'effectue progressivement par périodes, aussi appelées stades ou paliers. De fait, la genèse des structures logiques émerge à partir du stade préopératoire, puis se développe jusqu'au au stade opératoire concret. Lors du premier stade sensorimoteur, l'enfant de moins de deux ans dispose d'une intelligence dite pratique, centrée sur lui-même et son environnement. À cet âge, l'enfant n'a pas encore, autrement dit ses connaissances se construisent en présence d'objets, de son corps. Il ne peut faire référence à quelque chose ou quelqu'un qui ne soit pas in situ. Le très jeune enfant explore, manipule, fonde ses premières acquisitions logiques. C'est au cours du stade suivant, le stade pré-opératoire, que l'enfant accède à une pensée conceptuelle, encore très dépendante de ses perceptions immédiates. Toutefois, il sait évoquer les choses qui sont absentes de son champ visuel : l'enfant accède à la fonction sémiotique, propre au langage et à la communication. Enfin, entre six et sept ans, l'enfant accède au stade opératoire concret, se détache du percept pour entamer une réflexion intériorisée et prend conscience et connaissance des lois physico-chimiques et mathématiques du monde. Il dépend toutefois de supports matériels pour étayer sa réflexion. Vers 11-12 ans, l'enfant accède au stade opératoire formel, autrement dit il est capable de raisonner de manière abstraite, et peut ensuite accéder à une intelligence dite adulte, acquise autour de 15-16 ans. Ce sens numérique est perfectionné tout au long de la vie ; ainsi, un biologiste se doit de maîtriser les très petites quantités, un astrophysicien les très grands nombres, autant de données numériques qui échappent à notre quotidien.

Cette vision constructiviste est toutefois remise en cause par certains auteurs issus de la neuropsychologie, tant sur le plan de la méthode que sur les fondements théoriques (entre autres, Dehaene, 2010 ; Butterworth, 2005). Toutefois, ces travaux ont permis d'autoriser une plus large part aux observations cliniques de l'enfant et ont fourni plusieurs éléments de repère quant au développement de la construction du nombre (Montangero, 2001), comme par exemple le fait que les enfants s'appuient d'abord sur des indices perceptifs, nécessaires au développement de la pensée, pour progressivement s'en affranchir et réussir à abstraire des concepts.

Les modèles neuropsychologiques postulent que les jeunes enfants disposent très précocement d'un sens numérique, avant même de savoir parler. D'après ces postulats, l'humain naîtrait avec une tendance innée pour les compétences numériques (Dehaene, 2010). Ces premières compétences, nourries par les expériences sensorimotrices, bien qu'elles puissent paraître lointaines dans le référentiel du développement numérique, constituent pourtant un socle fondamental dans les apprentissages ultérieurs. En effet, parmi ces compétences précoces, les bébés de quatre à sept mois peuvent comparer deux ensembles d'éléments sur la base de leur différence numérique : on parle alors de discrimination des numérosités (travaux de Starkey et Cooper, 1980, cités par Noël, 2005). Les jeunes enfants de deux ans et demi, parfois même plus jeunes, sont sensibles à la compréhension des relations quantitatives : ils peuvent distinguer l'ensemble comprenant préférentiellement le plus d'éléments parmi d'autres ensembles d'éléments, discernant alors deux collections par la différence numérique de leurs éléments. À noter que cette préférence pour l'ensemble disposant du plus d'éléments est très souvent observée, chez le petit humain mais également les animaux.

Ces connaissances numériques sont ensuite approfondies dans un contexte scolaire, notamment par l'apprentissage de la chaîne verbale, acquise entre deux et six ans. Les enfants vont devoir par ailleurs acquérir et maîtriser le lexique et la syntaxe propres à la numération.

2.5 Connaissances arithmétiques

Le dictionnaire du TLFi propose la définition suivante de l'arithmétique : « science qui a pour objet l'étude de la formation des nombres, de leurs propriétés et des rapports qui existent entre eux ». Tout comme ils découvrent le monde des nombres, des quantités, les jeunes enfants sont amenés très tôt à développer un sens de l'arithmétique pour des situations comportant peu d'éléments : les expériences de Wynn (1992, cités par Noël, 2005) proposent à des bébés de cinq mois des marionnettes à l'effigie de mickey, alternativement dissimulées ou exhibées dans un castelet. Ces éléments apparaissaient sous certaines conditions, par exemple « 1 + 1 » (avec attente de deux mickeys) ou « 2 - 1 » (avec attente d'un seul mickey). Dans le cas de la situation « 2 - 1 », si les bébés constatent le résultat a priori impossible de deux mickeys dans le castelet, Wynn observe qu'ils réagissent en maintenant leur regard plus longtemps que pour les résultats plausibles, traduisant alors une surprise. En revanche, la présence d'un seul mickey, attente en cohérence avec la présentation du script « 2 - 1 », ne les surprend pas, cela leur semble normal. Ces réactions formeraient les prémisses de la compréhension des transformations opérées sur des éléments, notamment l'ajout et le retrait (respectivement addition et soustraction).

La considération de ces performances et l'assimilation de ces comportements à des concepts d'opérations arithmétiques pures reste toutefois nuancée par certains auteurs. Les enfants disposent certes de connaissances que l'on pourrait qualifier de pré-arithmétiques : ils possèdent par exemple des stratégies telles que le comptage ou le dénombrement. Toutefois, le fait qu'un nourrisson dispose d'une intuition arithmétique ne relève pas du même champ cognitif que l'application d'opération à proprement parler : ces capacités réelles du sens du nombre ne sont valables que pour des contenus arithmétiques très élémentaires. Il s'agirait bien d'une intuition arithmétique, support du développement arithmétique.

C'est au cours de la scolarité que l'essor des connaissances arithmétiques va particulièrement émerger. La mobilisation du système verbal est particulièrement engagé dans ces apprentissages : l'enfant doit appréhender un nouveau lexique, spécifique des mathématiques, traduisant des transformations d'état, comparaisons. Parfois ce lexique peut sembler similaire, pourtant il peut exister un écart d'interprétation entre deux formulations a priori voisines, par exemple « plus que » et « de plus que ».

2.5.1 Sens des opérations et symbolisations arithmétiques

De nombreux chercheurs s'accordent pour admettre que les problèmes arithmétiques constituent un support solide pour établir des liens entre, d’une part, le symbolisme mathématique utilisé pour représenter les additions et les soustractions et, d’autre part, les actions sur les objets et les relations mentionnées dans les situations décrites. Ces relations et actions sur les objets peuvent être mises en lien avec des situations du monde réel et permettent de déterminer et d'appliquer des stratégies opératoires. Certaines situations peuvent être mises en actes, fidèlement ou bien symboliquement par le biais de pions par exemple, toutefois d'autres situations peuvent se révéler aberrantes voire irréalisables, mais elles peuvent tout de même être simulées et évaluées numériquement à travers un problème arithmétique.

Le sens des opérations se définit par la compréhension des valeurs et usages propres des différentes opérations. Brissiaud qualifie ce sens opératoire d'aspect « couteau-suisse » des opérations. Pour le cas de la soustraction, elle peut aussi bien être utilisée pour rechercher le résultat d'un retrait, une comparaison d'ensembles ou encore un reste. Un enfant disposant du sens des opérations sait choisir la bonne opération. On dissocie du sens des opérations la maîtrise opératoire, autrement dit la faculté à savoir mener une démarche opératoire correcte, savoir calculer une opération. Cette maîtrise opératoire est plus ou moins automatisée en fonction du degré d'expertise et fait appel à des capacités procédurales. Brissiaud et Sander (2010) distinguent également le sens de la situation du sens des opérations : un enfant peut disposer du sens des opérations, mais éprouver des difficultés à se représenter la situation décrite dans le problème.

2.5.2 Résolution d'opérations simples

Les opérations simples sont composées d'opérandes à un seul chiffre, par exemple 3 + 4. Même avant un apprentissage formel, les jeunes enfants de moins de cinq ans peuvent résoudre des problèmes mettant en jeu une opération simple (retrait ou ajout), notamment par le comptage. Ces premières capacités à dénombrer des collections s'observent chez beaucoup d'enfants d'âge pré-scolaire, même issus de cultures différentes (Geary, 1994). La présentation de petits scénarios ou histoires avec recours de matériel (jouets, cubes), s'apparentant à des situations de problèmes arithmétiques simples, permettent à l'enfant d'appréhender ses premières notions d'addition (ajout) et de soustraction (retrait).

Dans le cas de la résolution d'addition simples, les enfants peuvent faire appel à cinq méthodes de résolution : le recours à la manipulation d'objets, le comptage digital, le comptage verbal, la décomposition et la récupérations des faits arithmétiques en mémoire (Siegler, 1987). Concernant la résolution de soustractions simples, les mêmes stratégies sont utilisées, en ajoutant le cas de l'addition indirecte, communément appelée « addition à trou » (3 + ? = 7 pour résoudre 7 – 3). Les enfants de 3 ans utilisent principalement la manipulation d'objets pour répondre à un problème mettant en jeu une addition simple (Fuson et. al, 1982), comme par exemple le problème « combien font trois gâteaux et deux gâteaux ? » : ils procèdent généralement par groupement de collections (une de trois objets, l'autre de deux objets), puis dénombrement de l'ensemble des collections avec soutien du pointage. Leurs aînés, âgés de quatre à cinq ans, utilisent plus volontiers le comptage digital ou verbal, notamment grâce à une meilleure stabilité de la chaîne numérique. Ils peuvent toutefois avoir encore recours à la manipulation.

À partir du cycle 3, les enfants maîtrisent de mieux en mieux la récupération de faits arithmétiques en mémoire à long terme et y font plus souvent appel, en particulier pour les additions : une opération simple telle que 3 + 2 pourra être résolue « de tête », sans nécessiter de procédure opératoire (McCloskey et Caramazza, 1985). À noter que cette récupération directe des résultats permet d'alléger la mémoire de travail et de rendre l'enfant plus disponible pour traiter les autres (et nombreux) aspects du problème.

2.5.3 Résolution d'opérations complexes

Les opérations complexes portent sur des opérandes à plusieurs chiffres. Les stratégies engagées dans la résolution de ces opérations complexes ne sont que très peu étudiées : Van Lehn (1990) aborde la notion de « bugs », correspondant à un oubli ou à une erreur lors de la pose de la retenue. Des difficultés de respect du placement des chiffres dans les colonnes associées peuvent s'observer chez certains enfants, notamment par défaut d'organisation spatiale.

2.6 Estime de soi et compétences arithmétiques

Bien qu'il existe de nombreuses études sur les problèmes arithmétiques, très peu ne prennent en compte les aspects non-cognitifs, comme les aspects affectifs. Pourtant, il s'agit d'un élément qui n'est pas à négliger et qui a une influence sur les performances.

Certains auteurs s'interrogent sur les fondements de l'anxiété, communément véhiculée, liée aux mathématiques : est-elle la conséquence d'un manque de compétences en arithmétique ou bien est-ce cette anxiété des mathématiques qui génère ces lacunes ? À travers une étude menée avec des adultes, Ashcraft (2002) constate que les sujets très anxieux consacrent peu de temps à la lecture, au traitement et à la résolution des énoncés, ce qui les mène à commettre davantage d'erreurs. D'après Ashcraft, cette anxiété, causant un stress négatif, interfère avec la mémoire de travail, comme le sujet occupe son attention et ses capacités par ses préoccupation. Hembree (1990) évoque un lien de corrélation entre l'anxiété des mathématiques et conduite d'évitement de situations où les mathématiques peuvent intervenir. Les mathématiques inquiètent beaucoup : lors de la dernière étude PISA de 2012, les chiffres révèlent qu'un élève sur trois est anxieux vis-à-vis des problèmes arithmétiques, au point que 30% d'entre eux se sentent « perdus » avec cet exercice et 59% « inquiets » de ne pas comprendre un cours de mathématiques (Vayssettes & Rech, 2015).

McLeod et Adams (1989) présentent un modèle descriptif des implications émotionnelles dans la résolution de problèmes arithmétiques :

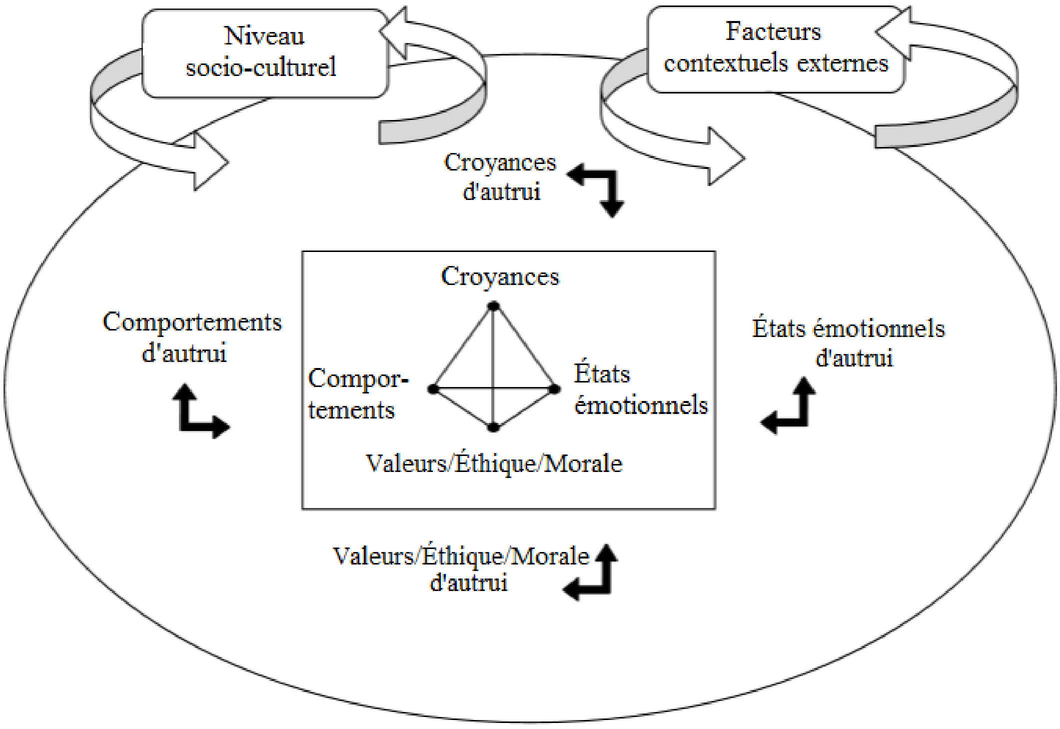


Figure 1 Modèle descriptif des domaines affectifs dans la résolution de problèmes (McLeod & Adams, 1989)

Ils isolent les émotions (*emotions*), les comportements (*attitudes*) et les croyances (*beliefs*). Ces trois composantes du domaine affectif sont en interaction, à la fois de manière individuelle, mais également de façon dynamique, en interaction avec autrui. Dans le contexte scolaire, l'exigence de la tâche et les enjeux qui en découlent (notation du travail) influencent particulièrement l'élève.

2.7 Le contrat didactique dans le cadre des problèmes arithmétiques

La théorie des situations didactiques en arithmétique émerge à la fin des années 1970, dans un courant d'interrogations et d'observations sur l'enseignement de cette matière. La situation didactique est un cadre regroupant à la fois l'enseignant et l'apprenant, dans une dynamique de partage de savoirs, de communication et d'apprentissage. L'adulte et l'élève sont engagés dans un contrat didactique tacite, autrement dit les deux parties savent qu'ils ont des attentes l'un envers l'autre (Brousseau, 1986). L'enseignant, dans cette situation, lui soumet des exercices pour vérifier ses acquis. Il se retrouve face à un certain paradoxe : l'enseignant est dans une situation d'attente de réponses correctes de la part de l'enfant, seulement ce dernier n'en est pas capable puisque le principal objectif de sa situation d'élève apprenant est de s'approprier les connaissances pour pouvoir répondre correctement. Brousseau propose l'analogie suivante : il imagine que les règles d'un jeu soit l'objet d'un apprentissage à faire pour l'enfant. Il évoque plusieurs possibilités : soit ce dernier connaît les règles et peut jouer (auquel cas l'enseignant ne lui est d'aucune aide), soit il ne les connaît pas et ne peut donc jouer. Dans ce cas, l'enseignant lui explicite les règles et dans cette situation, Brousseau considère que l'apprentissage est dépourvu de plaisir de découverte, car il s'agit d'une application de règles : « si le maître dit ce qu’il veut, il ne peut plus l’obtenir ». Une autre alternative, encadrée par le contrat didactique, serait que l'enfant découvre et s'approprie par lui-même, dans le discours étayé de l'adulte, les règles du jeu.

D'après certains chercheurs, cette notion de contrat didactique pourrait être une des explications des difficultés massives rencontrées par les élèves dans cette matière, tout particulièrement dans le cadre des problèmes arithmétiques (Sarrazy, 1995) et serait donc en partie imputable à certaines tendances d'enseignement, n'incitant pas une appropriation des savoirs. Pour l'enfant, la principale difficulté réside dans l'acceptation de sa condition sociale d'apprenant, comprendre les enjeux liés aux apprentissages.

Nous avons passé en revue dans cette partie les variables internes, propres au sujet. La suivante s'intéressera particulièrement aux variables externes relatives aux composantes des énoncés.

3 ÉNONCÉS DES PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

3.1 Habillage des énoncés

L'habillage d'un problème arithmétique fait référence aux caractéristiques composant les données linguistiques de l'énoncé. Ces caractéristiques particulières font varier les difficultés liées à la résolution de problème. Ce n'est finalement pas tant la nature de l'opération en jeu qui rend un problème difficile, mais bien son habillage. Les premières études concernant ces variables portent sur les problèmes additifs simples, ne nécessitant qu'une seule opération. Différents types de problèmes sont ainsi mis à jour (Riley, Greeno & Heller, cités par Fayol, 1990), comme les problèmes de changement, combinaison et comparaison. Ces travaux démontrent l'importance de l'habillage : en effet, bien que ces éléments relèvent de la structure superficielle du problème, ils ont un impact sur la représentation interne que le sujet se construit. Par exemple, deux problèmes pouvant se résoudre par la même opération (i.e., par une addition) mais ne proposant pas le même habillage vont provoquer des différences de performances (Riley *et al.*, cités par Fayol, 1990). Les paramètres de surface de l'énoncé font donc varier la performance du sujet. Parmi ces paramètres, on retrouve principalement la nature du champ sémantique et le thème de l'énoncé, la formulation syntaxique, la nature des variables impliquées ou encore la longueur du problème. Ce phénomène est également désigné sous le terme d'effet de contenu, conduisant à des différences de difficultés : pour Gamo, Taabane et Sander (2011), « l'énoncé contraint la représentation du problème que se construit celui qui le résout ».

3.1.1 Éléments constitutifs de l'habillage et leurs effets

L'habillage d'un problème renvoie au contexte décrit par l'énoncé, une mise en mots, agencés par des liens et organisés en propositions. Dans cette partie seront détaillées les composantes de l'habillage des énoncés arithmétiques et les implications qui en découlent, puis les classifications d'énoncés arithmétiques seront présentées.

3.1.2 Champ sémantique

Parmi ces caractéristiques, le champ sémantique adopté par l'énoncé a un impact particulier sur la manière dont le sujet se représente et, de fait, comprend la situation. Certaines tournures linguistiques peuvent alors être mal interprétées et modifier le sens initial du problème, notamment chez les novices, comme par exemple les termes relationnels « *avoir... de plus que...* » peut être interprété comme « *avoir* », sans implication comparative, ou encore « combien ont-il *ensemble* » peut être confondu par certains élèves novices par « combien ont-ils *chacun* » et inversement (De Corte et. al, 1985, cités par Gamo *et al.*, 2011 ; Cummins, Kintsch, Reusser & Weiner, 1988). Concernant les résultats de l'étude menée par De Corte et. al (1985), le taux d'erreurs observé est plus élevé avec des énoncés de type « Jean a 3 billes. Il a 5 billes *de moins que* Tom » qu'avec « Jean a 3 billes. Il a 5 billes *de plus que* Tom » et cette différence de performance s'observe aussi bien chez les élèves de CM1 que chez des étudiants universitaires, autrement dit chez les sujets experts. La confusion entre « ensemble » et « chacun » relèverait du fait que ces termes sont traditionnellement usités dans les énoncés de problèmes et donnent fréquemment lieu à des mésinterprétations : en effet, dans les énoncés « Marie et Paul ont X billes *chacun* » et « Marie et Paul ont X billes *ensemble* », seule la présence de ces termes permet de distinguer deux situations bien différentes et d'en modifier le sens.

Gamo *et al.* (2011) ont démontré que la nature des variables, qu'il s'agisse de durées, d'effectifs ou d'âges, a un impact sur le choix de la stratégie : en fonction de ces variables, les enfants optent pour telle stratégie et en éliminent d'autres. Pour les variables relatives à des quantités matérielles (effectif, prix, hauteur, poids), la stratégie la plus utilisée est celle du calcul du tout ou recherche du complément. Pour les autres variables immatérielles, en lien avec des durée ou des âges, la stratégie la plus utilisée est celle du calcul de la différence, la recherche d'un écart.

La reformulation, explicitant les relations par des expressions simplifiées, est une aide particulièrement bénéfique pour les enfants ayant des difficultés à comprendre le sens induit par ces tournures linguistiques propres aux énoncés arithmétiques (De Corte, Verschaffel &

De Win, 1985). Ainsi, « combien ont-ils *ensemble* » peut être reformulé de manière à exprimer qui ou ce qui se cache derrière le terme « *ensemble* » et clarifier la situation. La structure sémantique véhiculée par le lexique de l'énoncé constitue le principal support de l'interprétation du problème. Or la représentation établie lors de la lecture et la compréhension de l'énoncé dépend fortement des connaissances du sujet vis-à-vis des éléments contenus dans l'énoncé (cf. partie sur les connaissances déclaratives). C'est pourquoi l'introduction d'un mot inconnu de l'enfant peut le déstabiliser, car il ne peut rattacher de sens à l'énoncé lu et ce manque d'accès sémantique peut le bloquer dans son raisonnement.

Toutefois, l'impact du lexique dans l'énoncé serait modéré et ne constituerait pas la principale difficulté rencontrée par les novices en résolution de problème : « si les questions de vocabulaire demandent certes de ne pas être méconnues, elles ne sont ni la source de difficultés très considérables, ni la matière d'un enrichissement linguistique bien important » (Pluvinage, 2000). L'étude de Léger *et al.* (2002) démontre qu'il n'y a pas un effet péjoratif si l'énoncé comporte plusieurs items lexicaux n'ayant a priori aucun rapport pertinent, autrement dit les élèves n'étaient pas perturbés par le manque de sens des énoncés. Ils n'ont donc pas été sensibles à l'effet de lexicalisation ou non-lexicalisation. Les chercheurs expliquent que cela peut être dû au fait que les élèves sont habitués à appliquer des procédures de résolution, sans particulièrement s'attarder sur le contexte sémantique de l'énoncé. Les auteurs ne convergent donc pas vers les mêmes conclusions concernant les effets du lexique, aussi cette hypothèse reste à approfondir.

3.1.3 Congruence et non-congruence

La congruence se définit, dans le cadre d'un problème arithmétique écrit, par la coïncidence entre les données sémantiques de l'énoncé, qui décrivent la situation et précise les relations entre les données numériques, et la structure arithmétique qui sous-tend les calculs à opérer pour trouver la solution (Duval, 1995). Sans cette concordance entre structure de surface et structure profonde (arithmétique), on parle de non-congruence : cela exige de devoir déduire les calculs par changement de point de vue pour traduire correctement la situation de manière mathématique. De fait, un énoncé congruent avec la structure arithmétique respective est plus simple à se représenter, puisqu'il est univoque et ne nécessite pas de changement de point de vue pour être résolu. Verschaffel (1994) parle également de consistance et de non-consistance pour décrire ce phénomène.

Par exemple, dans l'énoncé : « Tu as X cartes. Ton ami a Y cartes de plus que toi. Combien a-t-il de cartes ? », on doit donc procéder à l'addition X + Y pour trouver le nombre de cartes de l'ami. Dans cet énoncé consistant ou congruent, on suit l'ordre des données fournies dans la syntaxe et l'indice sémantique « de plus » est bien en adéquation avec l'opération à fournir, ici une addition (coïncidence « plus » avec +). Avec un énoncé de type inconsistant, la formulation peut induire l'enfant en erreur, s'il se fie à la structure de surface de l'énoncé. Avec le même exemple formulé de manière inconsistante : « Tu as X cartes. Tu as Y cartes de moins que ton ami. Combien a-t-il de cartes ? » ; on doit là faire appel à une addition pour trouver le nombre de cartes que possède l'ami, bien que l'énoncé indique « de moins » qui pourrait tenter l'enfant de réaliser la soustraction X – Y. Il s'agit pour l'enfant de pouvoir se mettre à la place de l'ami pour comprendre que l'on en a X – Y de moins que lui. En effet, les calculs arithmétiques à mener ne sont pas toujours mis en évidence par l'énoncé ou la situation présentée. Dans d'autres exemples, la non-congruence peut être véhiculée par certains mots : par exemple, un énoncé peut comporter le terme « perdre » mais nécessiter une addition pour être résolu. Vergnaud (1991) ajoute qu'une structure de surface non congruente avec la structure arithmétique attendue est source d'erreurs chez les enfants et reste généralement moins bien comprise et réussie qu'un énoncé congruent.

L'effet de non congruence sémantique est une source de difficulté indépendante de la structure arithmétique sous-jacente (Léger *et al.*, 2002), autrement dit un élève peut savoir résoudre une opération donnée, mais ne pas pouvoir générer en contexte de résolution de problème arithmétique, avec la même opération à rechercher. Pour Duval (1988), c'est essentiellement autour de cet effet de congruence ou de non-congruence que les difficultés se manifestent : « la véritable frontière, celle qui arrête beaucoup d'élèves, se situe dans la congruence et non-congruence sémantique, dans le jeu de la substitution d'une expression à une autre ou d'une représentation à une autre ». En effet, dans le cadre des problèmes arithmétiques, il faut savoir maîtriser et alterner diverses langues : langue naturelle, mais également langue arithmétique (maîtrise du lexique et syntaxe propres au mathématiques). Pour Hegarty, Mayer et Monk (1995), les échecs associés aux énoncés non consistants témoignent du manque de compréhension des énoncés.

3.1.4 Q-problèmes et E-problèmes

Un Q-problème est un énoncé faisant référence à une situation du quotidien ; un E-problème renvoie aux problèmes abordés à l'école. Cette distinction entre E-problèmes et Q-problèmes est inspirée des travaux de Vygotski, ce dernier évoquant les « concepts scolaires » et « concepts du quotidien » (Brossard & Fijalkow, 2008).

Les E-problèmes nécessitent généralement un apprentissage explicite préalable, tandis que les Q-problèmes renvoient à des problèmes rencontrés dans la vie courante, dont la résolution peut s'effectuer par récupération de faits arithmétiques. Certains enfants arrivent même à résoudre des Q-problèmes multiplicatifs sans même avoir appris les méthodes opératoires. Ces situations-problèmes font émerger le sens des opérations bien avant l'apprentissage dispensé à l'école.

La différence entre E-problème et Q-problème peut sembler indistinct aux yeux d'un expert. En revanche, les taux de réussite à un E-problème (i.e., « avec 150 gâteaux, on fait des paquets de 50 gâteaux ; combien peut-on faire de paquets ? ») versus un Q-problème, d'apparence similaire (i.e., « Avec 150 gâteaux, on fait des paquets de 3 gâteaux ; combien peut-on faire de paquets ? ») sont significatifs. Le Q-problème cité ci-dessus est réussi à 64% versus 11% pour le E-problème, chez des enfants de CE2 (Brissiaud, 2002). Il s'agit d'ailleurs d'un problème portant sur une division, qui pas encore abordée en début de CE2. Une des explications de l'auteur à propos de cette différence significative de performance serait la mise en œuvre chez le sujet de stratégie informelle, telle que le comptage sur les doigts, chaque doigt représentant 50 gâteaux. Pour l'E-problème, les informations numériques ne permettent pas l'application d'une telle stratégie et rendent le calcul plus laborieux.

Cette classification des problèmes arithmétique se centre davantage sur les stratégies de résolution, notamment à travers l'usage des stratégies informelles et formelles. Elle ne permet pas de trier les énoncés en fonction de leur structure, comme les taxonomies de Riley et al. ou Vergnaud. Elle peut par exemple permettre de vérifier si un jeune enfant s'appuie sur ses performances informelles (comptage digital, dessins, stratégies autogénérées) et vérifier s'il peut résoudre des E-problèmes, nécessitant des calculs difficilement solubles par des stratégies informelles.

3.1.5 Énoncés explicites

Les énoncés explicites se composent d'un lexique, d'une syntaxe et de relations structurelles clairs, sans recours à des formulations équivoques et ne nécessitant pas un traitement inférentiel particulier. Leur compréhension est généralement aisée, puisqu'ils favorisent la construction de représentations plus adéquates de la situation. Ils ne doivent pas être confondus avec les énoncés dits congruents, car les énoncés explicites n'impliquent pas la notion de coïncidence entre énoncé de surface et structure arithmétique, mais sont caractérisés par une formulation indirecte de la situation à proprement parler.

Le cas de la nature explicite des actes de langage est étudié au-delà des problèmes arithmétiques verbaux. Dans le cas des problèmes de logique verbale, tel que : « Anne est plus jeune que Béatrice, Béatrice est plus jeune que Catherine », répondre à la question cherchant à déterminer qui est la plus jeune est plus aisé et rapide que si l'énoncé avait présenté les informations de manière désordonnée. Dans d'autres cas de figure, l'énoncé peut être explicite en lui-même, mais la question peut ne pas l'être. Pour le même exemple cité précédemment, la question « qui est la moins jeune ? » n'est pas explicite, car l'énoncé présente des éléments reliés par la relation « plus jeune que », tandis que la question porte sur « la moins jeune », ce qui nécessite de produire une inférence.

De Corte, Verschaffel et De Win (1985) relèvent que les énoncés explicites ont un impact favorable sur les performances dans la tâche de résolution de problèmes arithmétiques. Dans leur étude, ils ont proposé deux séries de problèmes à des élèves, certains formulés classiquement (issus de manuels scolaires) et les autres rassemblant des problèmes similaires reformulés de manière plus explicite. Par exemple, l'énoncé suivant : « Tom a gagné 3 billes. Maintenant, il a 5 billes. Combien de billes Tom avait-il au départ ? » est de nature dite classique ; voici, pour le même énoncé formulé explicitement et mettant de fait plus en exergue les éléments pertinents à prendre en compte, la forme dite explicite : « Tom avait quelques billes. Il a gagné 3 billes de plus. Maintenant, il a 5 billes. Combien de billes Tom avait-il au départ ? ». Dans le premier énoncé, c'est d'abord le gain de 3 billes qui est introduit, puis la situation actuelle (il a 5 billes) et la question porte sur l'état initial inconnu. Dans le second, la situation est présentée de manière chronologique : on sait que Tom avait « quelques » billes (point de départ), puis qu'il en a gagné 3 « de plus » et qu'il en a maintenant 5. La question porte alors sur l'état initial évoqué, autrement dit à combien correspond le « quelque ». Dans le cas de problèmes arithmétiques, le pendant explicite concerne principalement la dimension chronologique du récit. Ils concluent leur étude en émettant l'hypothèse que l'explicitation par la reformulation des relations entretenues par les éléments du problème permet aux enfants de mieux comprendre la situation et, de fait, de mieux résoudre les problèmes.

3.1.6 Irréalité des réalités

Baruk (1973, citée par Bacquet *et al.*, 1996) décrit les objets arithmétiques comme étant des « êtres de cauchemar et créatures de rêve ». Baruk dénonce la réalité de l'arithmétique, formée de concepts plus que d'objets du monde réel. En effet, les mathématiques telles qu'elles sont apprises à l'école, peuvent se « reconnaître dans la vie quotidienne ». Or ces objets arithmétiques ne représentent rien du réel, ils ne sont que des outils de mesure, d'évaluation, de description, mais ne sont pas observables dans le monde réel.

Le processus de secondarisation fait écho au concept d'irréalité des réalités : la secondarisation se définit par le fait de pouvoir passer du domaine pratique du quotidien à un domaine symbolique, abstrait. Ce processus s'applique particulièrement dans le cadre de la scolarité, à la différence des apprentissages sociaux, davantage écologiques, du domaine extrascolaire. De par leur statut d'élèves, les enfants apprennent des stratégies, des outils et cela leur demande de mobiliser tout particulièrement leurs compétences cognitives. Pour certains chercheurs, la principale cause des difficultés rencontrées par les élèves en difficulté serait leur difficulté à cerner les enjeux cognitifs des activités proposées à l'école. Les apprentissages scolaires des enfants ne sont pas forcément étendus et appliqués dans le monde réel, du quotidien.

3.1.7 Énoncés absurdes

Un énoncé absurde présente une situation insoluble, ne pouvant être résolue par manque d'information et par manque de cohérence. « L'âge du capitaine » en est un exemple bien connu. L'étude de ces problèmes permet de mettre à jour les capacités de modélisation arithmétique, autrement dit vérifier si les sujets traitent les énoncés comme de vrais problèmes plausibles, simulables mentalement, et résolvables arithmétiquement. Ces énoncés absurdes permettent aussi de vérifier les croyances associées aux problèmes arithmétiques, comme par exemple la conviction qu'un problème se résout forcément par une ou des procédures opératoires ou encore qu'il faut nécessairement fournir une réponse de nature numérique.

Une équipe de chercheurs de l'IREM de Grenoble (1980, cité par Brissiaud, 1988) s'est penchée sur le cas de ces problèmes : en effet, de par l'énoncé et les informations qu'il contient, il n'est pas possible de répondre à la question, car il y a un non-sens entre les données fournies et la question (« Dans un troupeau, il y a 75 moutons et 5 chiens ; quel est l'âge du berger? »). De Corte et Verschaffel (1983, cités par Brissiaud, 1988) ont mené l'expérience auprès d'enfants de CP : sur 31 enfants, seuls 5 manifestent une surprise lors de l'énonciation du problème, tandis que les autres s'aventurent dans des calculs. Certains problèmes ne comportent qu'une seule donnée numérique (« Pierre avait des pommes ; il a donné 4 pommes à Anne ; combien de pommes a-t-il maintenant ? »), pourtant certains élèves se sont tout de même engagés dans une démarche opératoire hasardeuse. Ces enfants, d'après De Corte et Verschaffel, n'ont pas encore bien saisi ce qui constitue un énoncé dit « bien formé », autrement dit un ensemble formé de relations numériques et relationnelles cohérentes. Lorsqu'une seule donnée numérique est indiquée, ils pallient le manque en générant arbitrairement un calcul. Beaucoup n'arrivent pas à reconnaître que l'énoncé souffre de cohérence et se cantonnent à leur résultat. Ces connaissances sur la forme des énoncés rentrent dans le cadre plus général du Word Problem Schema, développé par ces mêmes auteurs.

3.1.8 Place de la question

Plusieurs chercheurs se sont penchés sur le cas des effets du placement de la question en tête ou en fin d'énoncé. À noter que dans la forme canonique des problèmes arithmétiques, la question est disposée en fin d'énoncé. Certains chercheurs (Arter & Clinton, 1974 ; Caron, 1992) n'ont pas déterminé de différences significatives de performance selon l'emplacement en début ou en fin d'énoncé. D'autres (Fayol *et al.*, 1987) constatent une amélioration des performances lorsque la question est en tête d'énoncé : pour ces chercheurs, la question porte la structure et active de fait chez les sujets un schéma de résolution ad hoc pour la résolution.

L'étude de Thévenot, Barrouillet et Fayol (2004) confirme cet effet facilitateur, mais en nuance ses influences. Thévenot et son équipe proposent à des étudiants de psychologie (2004), puis dans une expérience similaire, à des enfants de CM2 (2008), de reconnaître parmi plusieurs propositions orales l'énoncé correspondant à la question proposée auparavant. D'autres présentations, plus classiques, proposent d'abord l'énoncé, puis ensuite la question, et enfin le sujet restitue la réponse. Les résultats sont en faveur de l'effet facilitateur du placement de la question en tête d'énoncé. Cet effet peut s'expliquer par le fait que la question, porteuse du but à déterminer, canalise l'attention de l'enfant sur les éléments pertinents à isoler dans l'énoncé lu et l'aide à également mieux anticiper et encoder ces informations (Thévenot et al., 2004). De plus, certains enfants effectuent les calculs lors de la lecture de l'énoncé, puisqu'ils ont déjà en tête la question et donc le but à atteindre. Les enfants les moins performants en résolution sont ceux qui bénéficient le plus de l'effet de placement de la question en tête d'énoncé. Pour les enfants les plus performants, aucun effet mélioratif n'est observé : cet effet facilitateur pourrait n'être pertinent que pour certains enfants, notamment les plus en difficulté, mais ne permet pas d'améliorer les performances pour tous.

L'habillage des problèmes, par leur large variété de critères et de déclinaisons possibles, permet de mettre en exergue certains types de traitement des énoncés. La prise en compte de ces caractéristiques permet, pour les chercheurs, de pouvoir identifier des stratégies de traitement ou certaines erreurs communes. En outre, les implications de l'habillage des énoncés enrichissent le champ pédagogique et de remédiation cognitive, en ce sens où l'on peut ajuster les énoncés en fonction du domaine cognitif à solliciter. Ce sont, entre autres, ces implications qui ont motivé les chercheurs à vouloir classer ces problèmes.

3.2 Classement des problèmes arithmétiques

Après avoir introduit les problèmes additifs et multiplicatifs, organisés autour de l'opération impliquée lors de la phase de calcul, les principales classifications des problèmes arithmétiques verbaux seront présentées. Ces dernières sont classées par des critères autres que l'opération mise en jeu.

3.2.1 Problèmes additifs et soustractifs

Les problèmes additifs et soustractifs sont construits autour de la relation additive. En effet, même si un problème additif peut être résolu par une soustraction, il est tout de même regroupé sous cette appellation. Davydov (1982) décrit ces problèmes comme entretenant une « relation stable entre trois quantités dont une est la somme de deux autres » (Gervais, Savard & Polotskaia, 2013), qu'il s'agisse de problèmes nécessitant l'usage de l'addition ou de la soustraction.

Concernant la commutativité, Sansiquet et Zaitzeff (2013) soulignent dans leur mémoire la majoration des erreurs commises par les enfants lorsqu'un énoncé de problème additif simple présente d'abord un grand nombre, puis un plus petit (exemple : 6 + 2). Sansiquet et Zaitzeff observent que cet effet d'ordre de présentation diminue avec l'âge des sujets. En effet, les plus jeunes enfants ne procèdent pas à la stratégie « count min » car ils n'ont pas encore bénéficié d'un enseignement formel de la commutativité.

Ces problèmes sont les premiers rencontrés au cours de la scolarité. Ceux mobilisant une addition sont généralement vus avant ceux nécessitant une soustraction.

3.2.2 Problèmes multiplicatifs et de division

D'après Ménissier (2011), les premiers problèmes à structure multiplicative constituent une certaine rupture dans les schémas de pensée de l’enfant. En effet, ces problèmes introduisent les notions de quantités discrète et continue. Or, dans le cas des problèmes additifs, l'enfant peut toujours avoir recours au comptage, les quantités mises en jeu étant très souvent dénombrables. Dans le cas d'un problème multiplicatif, il n'est pas toujours possible de se référer à un objet discret.

Vergnaud rassemble ces concepts sous ce qu'il nomme le « champ conceptuel des structures multiplicatives ». Ces problèmes multiplicatifs sont susceptibles d'êtres résolus par l'usage de la multiplication, la division ou une combinaison des deux. Il distingue quatre formes de relations : proportion simple, comparaison multiplicative, produit de mesures et proportion multiple. Ces relations varient en fonction de l'inconnue à rechercher.

Dans le cas des problèmes de proportionnalité simple, un rapport constant existe entre deux quantités. Dans exemple : « j'ai 5 sacs de 32 billes chacun : combien ai-je de billes ? », il faut multiplier 32 (renvoyant à la quantité de billes par sac) par 5 (nombre de sacs en tout). Il cite également les problèmes de proportionnalité simple composée, dans lesquels il existe plusieurs éléments à déterminer, par multiplications ou divisions successives. Par exemple, « Je monte un escalier de 25 marches 4 fois par jour. Combien de marches montées en 5 jours ? » : après avoir déterminé le nombre de marches montées pour une journée, il faut déterminer le nombre de marches montées pour cinq jours. Une méthode alternative et à une seule étape, s’appuyant sur la propriété associative de la multiplication, permettrait de résoudre ce problème, en considérant par exemple le nombre de marches montées quatre fois en une journée, puis en multipliant par cinq pour déterminer le nombre de marches empruntées en cinq jours : (25 x 4) x 5.

La comparaison multiplicative se caractérise par l'usage d'un lexique de comparaison, comme « combien de plus/moins que ». On peut chercher un rapport (« combien en ont-ils de fois plus que lui ? ») ou bien un résultat issu d'un rapport donné (« Pierre a 3 billes. Jean en a 6 fois plus. Combien Jean a-t-il de billes ? »). Comme pour les problèmes additifs, il s'agit de problèmes généralement moins réussis que les autres.

Le cas des problèmes de produits de mesures renvoient à une composition de deux mesures données en une troisième. Il s'agit souvent de calcul d'aires de terrains, de volumes d'espaces, etc.

Les problèmes de proportion multiple sont structurellement assez proches des produits de mesure. Dans ces problèmes, une mesure-quantité est proportionnelle à deux autres mesures différentes, avec des quantités indépendantes. Le facteur temporel est souvent considéré dans ces énoncés. Par exemple : « Un hôtel coûte 35€ par personne et par jour. Des amis ont passé 8 jours dans cet hôtel et ont payé 5880€. Combien sont-ils ? ».

Greer (1992, cité par Verschaffel et De Corte, 1997) distingue les situations commutatives des situations non commutatives : d'après lui, des problèmes multiplicatifs mettant en jeu des quantités relatives au multiplicateur ou à la multiplicande ont une influence sur la manière dont le sujet va traiter et comprendre le problème. Bien que la multiplication soit commutative, le premier terme de la multiplication est désigné par multiplicande et le second multiplicateur. Par exemple, un problème de forme « 0,6€ par 38 kilos » (0,6 x 36) est mieux réussi qu'un problème mettant en jeu un multiplicateur décimal « 43€ par 0,7kg » (43 x 0,7). Pour la division, la distinction entre diviseur et dividende comporte une différence fonctionnelle, puisqu'il ne s'agit pas d'une opération commutative.

Contrairement aux problèmes additifs, il existe peu de recherches analysant les difficultés soulevées par les types de problèmes exposés ci-dessus. Quelques données sont validées, comme le fait que les multiplications portant sur des entiers sont mieux réussies que celles portant sur des données décimales (Greer & Mangan, 1984). Toutefois, il a été démontré que des énoncés comportant des quantités égales sont plus faciles à résoudre que des problèmes proposant des produits cartésiens (« Au bal, il y a 5 garçons et 4 filles. Si tous les garçons dansent avec toutes les filles, combien de couples peut-on former ? ») et des conversions de mesure (« Un pouce mesure 2,4cm. Combien mesurent 3cm en pouces ? ») (Thévenot, Coquin & Verschaffel, 2006). On peut donc avancer que la difficulté ne réside pas tant dans l'opération mise en jeu que la structure sémantique du problème, tout comme dans les problèmes additifs.

3.2.3 Taxonomie de Riley, Greeno et Heller

Les études en psychologie et en pédagogie mettent en évidence différents types de problèmes arithmétiques additifs et soustractifs. Pour autant, ces différences ne portent pas sur les opérations mises en jeu par les problèmes : elles se fondent sur les différentes structures des problèmes. Les énoncés se définissent par trois éléments fondamentaux, que sont l'état initial, l'état final et une ou plusieurs transformations nécessaires pour mener à bien la résolution. Ainsi, un problème peut être caractérisé par des actions d'augmentations, de combinaisons ou diminutions ou encore des comparaisons d'ensembles. Trois critères principaux ont permis d'éclairer les différences entre les énoncés de problème :

- le déroulement temporel de l'énoncé ;
- la mesure, autrement dit objet de la transformation qui doit être opérée ;
- la relation statique ou non statique établie entre les éléments du problème.

La prise en compte de ces caractéristiques mène les chercheurs à établir une classification de ces problèmes, à partir de leurs caractéristiques sémantiques. Riley, Greeno et Heller (1983) isolent trois catégories de problèmes additifs :

- les problèmes de changement, dans lesquels il y a présence d'une ou plusieurs transformations temporelles appliquées à l'état initial. La relation n'est pas statique, puisqu'il y a transformation effective ;
- les problèmes de combinaison, dans lesquels la recherche porte sur un total d'ensembles ou sur un état partiel d'ensembles. Il n'y a pas de transformation, autrement dit la situation reste statique : l'inconnue porte sur le total ou bien sur un ou plusieurs sous-ensembles ;
- les problèmes de comparaison, dans lesquels plusieurs sous-ensembles d'éléments statiques sont mis en correspondance par des relations comparatives tels que « plus que, moins que, autant que ». La recherche porte sur l'état référant, référé ou bien sur la comparaison en elle-même.

Cette classification proposée par Riley et. al repose sur les concepts d'accroissement, diminution, combinaison et comparaison. Ces trois grandes catégories sont elles-mêmes divisées en sous-catégories en fonction de l'identité de l'inconnue et de la relation entretenue (plus/moins). Riley, Greeno et Heller mettent en évidence des écarts de difficulté de résolution en fonction du type de problème à résoudre. Encore une fois, la difficulté ne se situe pas tant au niveau du calcul en lui-même, mais dans le choix de l'opération, déterminé en fonction de la situation décrite (la structure). Les procédures de résolution varient selon chaque type de problème, mettant en évidence des taux de réussites différents :

- les problèmes de type comparaison sont généralement ceux où l'on constate le plus d'échec. En effet, dans ces problèmes, il n'y a pas de transformation : il s'agit d'une situation statique, dans laquelle il faut calculer une différence ou évaluer un état de comparaison (« plus » ou « moins ») ;
- les problèmes de changement sont les mieux réussis, indépendamment du fait que la transformation soit positive (addition) ou négative (soustraction) ;
- les enfants réussissent davantage lorsque l'inconnue porte sur l'état final, contrairement à une inconnue relative à l'état initial ou la transformation.

Greeno et Riley (1987) montrent que le principal écueil dans la résolution de problèmes additifs se situe dans la difficulté qu'éprouvent les jeunes enfants à se représenter la situation décrite. Ils ne disposent pas suffisamment de connaissances spécifiques pour modéliser les énoncés des problèmes.

3.2.4 Taxonomie de Vergnaud

La classification établie par Vergnaud (1982) enrichit la classification de Riley, Greeno et Heller. En effet, Fayol (dans Bideaudf, Meljac & Fisher, 1991) note que leur classification « ne prend pas en considération l'ensemble des possibilités ». En effet, la classification de Vergnaud considère également les caractères statiques ou encore les compositions de mesures et les définit plus précisément.

Vergnaud isole six catégories de problèmes, dont quatre sont abordées à l'école :

- transformation, avec recherche de l'état initial, final ou de la transformation (positive ou négative) ;
- composition de deux mesures, avec recherche du tout ou d'une des parties ;
- relation de comparaison additive, avec recherche de l'état référé, référant ou de la comparaison ;
- composition de transformation, avec une double transformation appliquée sur l'état initial et intermédiaire.

Cette classification, à l'instar de celle proposée par Riley, Greeno et Heller, se fonde sur les aspects sémantiques de l'énoncé. Toutefois, Vergnaud s'attarde sur d'autres critères que sont la mesure, la transformation temporelle et relations statiques) ; cette catégorisation ne prend pas en compte l'action ou l'opération à effectuer.

Il introduit la notion des champs conceptuels, qu'il définit comme étant une « théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes ». Pour Vergnaud, tout sujet acquiert le sens d'un concept ou d'une connaissance à travers la rencontre de situations problèmes. Ces connaissances s'organisent autours d'invariants, de formes langagières et non langagières ainsi que de représentations du réel.

3.2.5 Problèmes isomorphes

Le terme isomorphe est issu des affixes grecs *iso-* (« égal ») et *morph-* (« forme ») et s'applique, dans le domaine des problèmes arithmétiques, à la structure arithmétique sous-jacente des énoncés. Ainsi, deux problèmes peuvent comporter un lexique ou une syntaxe différents, mais être construits sur la même structure. Ces types de problèmes permettent aux chercheurs de jouer sur les effets de contenus et de ce fait de masquer les structures sous-jacentes (Gamo, Nogry & Sander, 2014), aussi ils sont souvent utilisés dans les études. Les études de la résolution de ces problèmes permettent en effet de mettre en exergue des différences de traitement des données de l'énoncé, grâce au contrôle des variables rentrant en jeu : ces variables ont mis en évidence des variations de performances ainsi que des choix de stratégies de résolution différents (Gamo, Taabane & Sander, 2011).

Ces problèmes sont également utilisés pour évaluer les capacités de transfert analogique. Dans le cas de la résolution de problème, le transfert analogique consiste à transférer des connaissances acquises lors de la résolution d'un problème (appelé problème source) pour pouvoir résoudre un autre problème, qualifié de problème cible. Les problèmes isomorphes ont donc leur intérêt pour vérifier si la stratégie adoptée lors du problème source est également usitée pour la résolution d'un problème cible. L'intérêt de ces recherches est de déterminer si les sujets sont capables d'établir un lien entre problèmes source et cible et donc d'effectuer un transfert de connaissances sur un problème nouveau. Toutefois, ce point ne sera pas particulièrement abordé ultérieurement, puisque les problèmes choisis pour cette étude ne s'appuyant pas sur des énoncés isomorphes.

3.3 Intérêts et limites des classements

L'intérêt principal de ces classements est de pouvoir isoler des différents agencements de structures (temporelles, relations statique et mesures), permettant de construire une grande variété de problèmes différents. Ainsi, il est possible pour un chercheur, un enseignant ou un clinicien de pouvoir construire voire proposer à l'enfant d'imaginer un énoncé problème, tout en le faisant travailler sur certains types de problèmes.

Le regroupement des problèmes en fonction des opérations permettant de les résoudre ne sert qu'à distinguer les énoncés nécessitant le recours à l'addition et/ou la soustraction, ou bien la multiplication et/ou la division. Les classifications par champs conceptuels ou par structures sous-jacentes, vues auparavant, telles que celles proposées par Vergnaud ou Riley, Greeno et Heller, permettent de faire sens au niveau de la sémantique et des liens entre les objets du problème, mais ne considèrent pas l'opération à mettre en œuvre. Un problème additif peut alors être envisagé dans un énoncé de type Comparaison, Changement ou Combinaison, puisque l'addition comme la soustraction peut être usitée dans chacun de ces problèmes.

Une des limites imputable à ces classements se situe dans le fait que ces différents problèmes n'autorisent pas à conclure à un type de traitement particulier à chacune des catégories. Les comportements de résolution et les erreurs ne permettent pas de refléter le fonctionnement effectif du sujet. Baffrey-Dumont souligne ce point (1996) : « seules les informations accédant à la conscience verbalisée sont prises en compte », il n'est pas possible d'expliquer toutes les instances cognitives sollicitées lors d'une tâche donnée. Comme il a déjà eté souligné, de très nombreux aspects cognitifs rentrent en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques et tous ne sauraient être contrôlés, tant ils sont intriqués. Dans une étude de 1996, Baffrey-Dumont constate une large variété de réponses et de stratégies parmi les différents types de problèmes. Elle constate également plusieurs glissements de sens parmi les enfants, du fait que chacun interprète de manière individuelle et au regard des connaissances conceptuelles, lexicales, logiques dont tout un chacun dispose. Dans le cas du glissement de sens, l'enfant s'éloigne de la structure proposée pour recréer une structure opératoire, familière avec ses connaissances acquises. L'observation des comportements ne permet pas d'aboutir à des conclusions en termes de causalité, toutefois ils apportent des éléments non négligeables à l'étude de la résolution de problèmes et permettent d'apprécier certaines tendances générales de comportement, de niveau de difficulté ressenti et d'erreurs fréquemment commises.

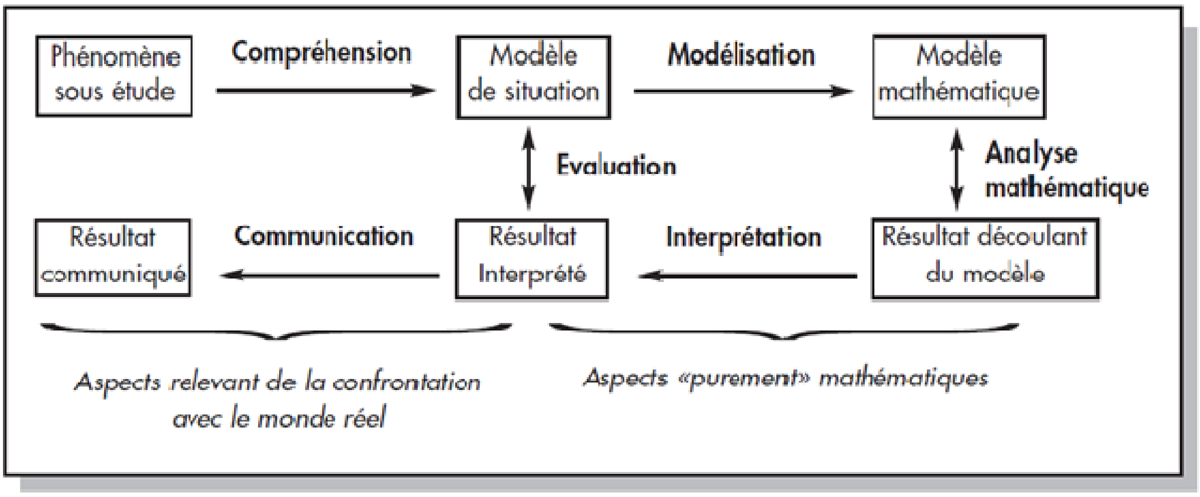
Après avoir développé les variables internes et externes, il est temps d'aborder les stratégies de résolution entreprises par les sujets. Les chercheurs proposent des modèles cognitifs de résolution, en faisant varier divers paramètres d'expérimentation, mais aussi des classifications des problèmes étudiés. L'impact de certains types de problèmes sur les performances ou les stratégies développées, mais aussi le contrôle des variables telles que la lecture, la compréhension et les inférences textuelles, la mémoire de travail et bien d'autres sont étudiées.

4 STRATÉGIES DE RÉSOLUTION

4.2 Démarche de résolution

Dans son quotidien, l'enfant part d'une situation de la vie réelle qu'il soumet à une certaine analyse mathématique. En situation scolaire, il est confronté à des énoncés et à des représentations graphiques.

Verschaffel, Greer et De Corte (2000) proposent un modèle illustrant la démarche de résolution, prenant en compte les aspects relatifs au monde réel et spécifiques au domaine de l'arithmétique :



Tout d'abord, l'enfant soumet le phénomène sous étude, autrement dit il lit l'énoncé, extrait les informations et génère du sens sur la situation décrite afin de s'en faire une représentation mentale : il s'agit de l'étape de compréhension. Il y intègre les informations importantes, la chronologie de celles-ci et le but recherché par la question. Les connaissances liées à l'expérience de l'enfant sont déterminantes pour la suite de la résolution.

L'enfant part de ce modèle de situation pour en traduire un modèle arithmétique en une représentation mathématique : il s'agit véritablement d'une traduction de données linguistiques en « langage arithmétique ». Lors de cette analyse mathématique, il déduit les procédures et calculs à effectuer.

Par la suite, l'enfant vérifie la ou les hypothèses qu'il a dégagées au regard du modèle de situation. Si ses hypothèses sont en cohérence avec le modèle de situation, alors il communique son résultat. Dans le cas contraire, il revient en arrière à l'étape d'analyse arithmétique ou renouvelle son modèle de représentation. Il s'agit principalement pour le sujet de basculer alternativement du monde réel aux concepts arithmétiques.

Ménissier (2011) décompose la résolution de problème arithmétique selon cinq phases :

1. L'enfant doit tout d'abord traduire le problème. Pour ce faire, de multiples traitements cognitifs sont enrôlés, notamment « l'identification des objets et des relations, la reconnaissance des termes lexicaux, le jugement d'appartenance catégorielle, la distinction entre quantité continue et discontinue [et] l'inférence perceptive immédiate intervenant à des degrés divers selon la présentation des données ». (Ménissier, 2011). Une traduction arithmétique n'est pertinente que si elle renvoie à un vécu particulier de l'enfant, s'il a déjà fait face à une situation lui posant problème. Une première traduction du problème consiste de traiter d'abord de manière textuelle, en répétant dans l'ordre, les termes de l'énoncé, puis de manière sémantique où la reformulation de l'énoncé amorce un début de plan de résolution (Ehrlich, 1990).

2. L'enfant intègre le problème. Pour comprendre et donc mieux s'approprier la structure du problème, l'enfant va devoir coordonner tous les éléments pertinents pour aboutir à un schéma de résolution.

3. L'enfant planifie ses actions. La résolution de problème nécessite une organisation de la tâche en sous-buts. Anticiper, c'est organiser mentalement son action avant de la réaliser. En se référant aux éléments pertinents du texte, l'enfant doit faire du lien avec son projet de résolution. Ménissier (2011) distingue deux types de raisonnement : l'induction, « qui partirait du général vers le particulier » et la déduction, « qui irait du particulier au général ». L'enfant part de ce qu'il sait (données), il utilise ses connaissances générales et arithmétiques, puis conclut en répondant au problème en suivant son plan d'action.

4. L'enfant exécute ses calculs. Lors de cette étape, l'enfant organise les informations numériques pertinentes en cohérence avec son plan de résolution, en vue d'opérer. Il peut retrouver en mémoire certains faits arithmétiques, comme pour le cas des additions de nombres doubles (2 + 2 = 4), résultat de tables de multiplication ou bien mener une démarche de calculs.

5. L'enfant contrôle sa production. En essayant, en formulant des hypothèses ou en résolvant les objectifs qu'il s'était fixés, l'enfant est à même de réajuster son plan voire de le réenvisager depuis le début. Lors de cette phase, le clinicien peut observer « la détection d'incidents (lorsque se produit une erreur dans la procédure et que s'effectue une correction) et des impasses (lorsque l'enfant au cours de la procédure admet son impossibilité à atteindre le but recherché) » (Ménissier, 2011). Fayol et Gombert (1988) constatent que les jeunes enfants n'ont pas systématiquement recours à cette étape d'autocontrôle du résultat, ce qui ne les autorise pas à corriger certaines erreurs. Les sujets experts, face à un problème trivial, ne font plus usage de cette vérification, puisqu'ils ont largement automatisé la procédure de résolution.

4.2.5 Stratégies de résolution formelles et informelles

Les stratégies de résolution dites informelles font référence aux méthodes mises en œuvre par un sujet non expert. Il s'agit bien souvent de stratégies auto-générées. Les stratégies de résolution formelles sont, elles, acquises dans le cadre scolaire : les enfants apprennent les conventions sous lesquelles sont régies les mathématiques, telles que la disposition en colonne, le pose de retenue, etc. Bien souvent, l'élève novice s'appuie encore sur ses stratégies informelles pour étayer son raisonnement et s'assurer de ses calculs. Elles ne disparaissent pas avec le temps, il s'agit d'un processus vicariant : un expert peut tout à fait avoir recours à des stratégies informelles lorsqu'il se trouve confronté à un problème ardu.

Les travaux de Goldin-Meadow, Levine et Jacobs (2014) remettent en perspective l'importance et les implications des modalités gestuelles dans le développement de l'arithmétique, notamment dans le cas de la résolution de problèmes. L'intérêt des gestes dans le comptage a déjà été démontré : l'accompagnement gestuel assuré par le pointage lors du comptage et de la récitation de la comptine numérique aide l'enfant à segmenter les unités entre elles et ainsi d'être plus précis (entre autres Butterworth, 1999 ; Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Le comptage reste d'ailleurs très présent chez les jeunes enfants lors de la résolution de problèmes arithmétiques simples (Siegler & Jenkins, 1989).

Lorsqu'un enfant explique ce qu'il comprend d'un problème, on remarque qu'il fait usage fréquemment, et de manière spontanée, de ses doigts en accompagnant son discours. Il peut fournir une justification correcte ou incorrecte, à la fois à l'oral et en modalité gestuelle ou bien arriver à expliquer de manière correcte par les gestes, mais ne pas savoir verbaliser (plus fréquemment que l'inverse). Ces gestes peuvent servir de soutien à la mémoire de travail lors de la lecture ou de la procédure de résolution. On observe cela très souvent lors de la rétention de la retenue : l'enfant laisse le doigt relevé pour se souvenir de la retenue, allégeant la charge de maintien de l'information en arrière-tâche lors du calcul. Ces éléments cliniques fournissent des compléments d'informations aux justifications verbales.

Le recours à des stratégies informelles reste un support indispensable d'apprentissage chez l'enfant apprenant : dans une étude, Fagnant (2013) s'intéresse aux stratégies mises en place par des élèves de première année primaire belge (équivalent du CP). Elle indique que « le nombre de calculs corrects est toujours inférieur au nombre de réponses correctes », autrement dit les jeunes enfants arrivent parfois à résoudre des problèmes par le biais de stratégies informelles, comme le dénombrement, mais éprouvent des difficultés à formaliser mathématiquement leur raisonnement. En effet, elle constate que 88% des sujets de l'étude ont recours à la manipulation de matériel pour résoudre ces problèmes, leur permettant ainsi de symboliser les données numériques en jeu et les relations qu'elles entretiennent. D'après Fagnant, cela témoigne le fait que ces enfants n'ont pas encore assimilé le symbolisme arithmétique. Les erreurs commises lors des stratégies informelles relèvent davantage d'erreurs de type conceptuelles (i.e. confusions dans les termes relationnels : plus que/moins que, etc.). Les erreurs relevées lors des calculs formels témoignent de stratégies superficielles, comme par exemple les inductions faites à partir du lexique (« plus que » déclenche chez l'enfant une stratégie de résolution additive) ou la proposition d'un calcul, parce que l'enfant sait qu'il doit en faire un, tout en restant impuissant face à l'interprétation du résultat qu'il trouve (manque de sens, application d'algorithmes plaqués).

4.3 Théorie des schémas de résolution *(Word Problem Schema)*

Dans les années 1930, Bartlett, psychologue cognitiviste, introduit la théorie des schémas, en rapport avec ses travaux sur la mémoire. Un schéma se définit par un ensemble de connaissances abstraites, correspondant à des traces mnésiques assimilées lors des différentes situations-problème rencontrées ultérieurement et organisées en objet structuré ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques. Ces schémas permettent donc de représenter des concepts, des séquences d'actions, etc. Autrement dit, à force de rencontrer des problèmes possédant une structure sous-jacente identique, le sujet finit par en extraire un cadre particulier à ce type de problèmes et le stocke en mémoire à long terme. Ce schéma est à nouveau activé lors de la lecture-compréhension d'un énoncé de même structure.

Riley, Greeno et Heller (1983) étendent cette théorie à la résolution de problèmes arithmétiques, dans le cadre des problèmes arithmétiques additifs simples (*Word Problem Schema* ou WPS). Leur modèle se fonde sur trois domaines de connaissances : les schémas de problèmes (mentionnés ci-dessus), les schémas d’action et enfin les connaissances stratégiques. Les principaux schémas d'action possibles sont « construire-ensemble », « ajouter » et « retirer ». Ces schémas d'action font référence aux opérations telles que l'addition ou la soustraction, en fonction de la situation problème. Enfin, les connaissances stratégiques rassemblent les connaissances opératoires à mettre en rapport avec la situation donnée : elles mettent en jeu la planification et permettent la mise en application de la phase de résolution à proprement parler.

La théorie des schémas permet alors de mieux comprendre le déroulement de la phase de résolution : le sujet mène un traitement propositionnel, autrement dit, il analyse l'énoncé propositions par propositions, générant entre elles des relations diverses (ajouter, retirer, etc.). Riley et. al (1983) démontrent que les indices sémantiques ont une importance fondamentale dans l'activation du schéma, autrement dit le lecteur s'appuie sur les indices sémantiques de l'énoncé pour guider son raisonnement. Dans la théorie des schémas, les erreurs de l'enfant peuvent être imputables à une absence de schéma adéquat ou à un choix non congruent à la situation décrite.

De Corte, Verschaffel et De Win (1985) démontrent que les enfants de 8 ans disposent d'un WPS. Ils insistent sur l'importance de la « nature stéréotypée » des énoncés problèmes dans l'intégration de ces schémas de problèmes et des stratégies et actions associées. Pour autant, il leur semble nécessaire de varier ces énoncés afin de savoir dégager les stratégies adaptées.

4.4 Théorie des modèles de situation ou modèles mentaux

La théorie des modèles mentaux a été développée par Philip Johnson-Laird en 1983. Elle s'inspire d'une hypothèse émise par Craick en 1943, prétendant que l'esprit humain élaborerait des représentations mentales miniatures pour comprendre et anticiper le réel, ces représentations mentales permettant à l'individu d'en modéliser le fonctionnement. Cette hypothèse a inspiré beaucoup de courants de la psychologie, notamment Johnson-Laird, dont les travaux sur les modèles mentaux constituent un cadre théorique de référence dans le domaine des sciences cognitives et permettent de mieux comprendre l'activité de résolution de problèmes arithmétiques verbaux.

Un modèle mental est une représentation interne analogique d'une situation fictive ou réelle, construite en mémoire de travail. Sa structure est alors isomorphe à la situation, elle représente fidèlement les relations entreprises par des éléments de l'énoncé verbal. Le modèle mental se distingue des images mentales : en effet, on ne peut visualiser mentalement toutes les possibilités d'un énoncé. Par exemple, avec l'énoncé « Le bureau n'est pas derrière le piano », on ne peut se représenter mentalement l'impossibilité du bureau derrière le piano. Pour ce faire, il faudrait pouvoir imaginer toutes les autres possibilités, ce qui reste très coûteux cognitivement.

Dans le cas d'un problème arithmétique verbal, le sujet se construit mentalement une représentation de l'énoncé de nature non arithmétique, ce qui lui permet par la suite de traduire mathématiquement la situation.

Contrairement à la théorie des schémas, le modèle mental est construit de manière ad hoc en mémoire de travail, et non pas activé en mémoire à long terme. Cela peut expliquer le fait que certains sujets ne disposant a priori pas de schéma de résolution adapté à une situation-problème donnée, puissent tout de même la résoudre, en construisant un modèle de situation. La théorie des modèles de situation permet d'expliquer au moins deux aspects que ne peut expliquer la théorie des schémas :

- Les énoncés sont mieux compris et mieux résolus lorsque le contexte de l'énoncé fait référence à une situation familière au sujet (Stern & Lehrndorfer, 1992 ; cités par Thévenot, 2007). Cela s'explique par le fait que les connaissances ultérieures générales et sémantiques dudit énoncé familier forment un effet facilitateur du modèle mental. Pour un énoncé narrant une situation inconnue, abstraite, voire un lexique non connu, l'élaboration du modèle mental est plus complexe ;
- Il existe un effet facilitateur de résolution lorsque les données de l'énoncé sont présentées dans l'ordre chronologique du problème. Cela peut s'expliquer par le fait que l'information est logiquement progressive, autrement dit une information est représentée mentalement, puis complétée par la nouvelle information suivante, qui vient s'ajouter au modèle mental initial, ce au fur et à mesure de la progression de la lecture (Oakhill & Garnham, 1985 ; cités par Thévenot, 2009).

Thévenot, Devidal, Barrouillet et Fayol (2007) ont étudié l'impact du placement de la question auprès d'enfants, classés en sous-groupes bons et mauvais calculateurs. Ils ont émis alors deux hypothèses, l'une en faveur de la théorie des schémas et l'autre de la théorie des modèles mentaux :

- si le placement de la question en tête d'énoncé est davantage facilitateur pour les *problèmes jugés les plus simples* et pour *les bons calculateurs*, cela s'explique alors en partie par le fait qu'ils disposent en mémoire à long terme de schémas adaptés, contrairement aux mauvais calculateurs. Cette première hypothèse validerait en partie la théorie des schémas ;
- si le placement de la question en tête d'énoncé se relève être davantage une aide pour les problèmes jugés *difficiles* et pour les *mauvais calculateurs*, cela se justifie donc par la construction d'un modèle mental ad hoc en mémoire de travail (par manque de schéma disponible en mémoire à long terme). Cette hypothèse est donc imputable à la théorie des modèles mentaux, puisqu'elle nécessite le recours à une représentation transitoire en mémoire de travail et non pas une activation d'un schéma stocké en mémoire à long terme.

La deuxième hypothèse a été validée : l'effet facilitateur du placement de la question en début d'énoncé est particulièrement valable pour les mauvais calculateurs. Tel un titre, elle fournit à l'enfant des indices lui permettant de mieux encoder et intégrer les données de l'énoncé à suivre, et le guide dans la construction de son modèle mental.

Bien que ces deux principales théories exposent des points de vue différents quant à la résolution de problèmes, elles apportent néanmoins des éléments importants à prendre en compte. Ces deux modèles peuvent également être envisagés comme coexistants : pour un problème donné, en fonction de son expertise, de ses connaissances et stratégies connues, un sujet pourrait faire usage d'un schéma ou bien construire un modèle de situation.

4.5 Calcul numérique et calcul relationnel

Vergnaud distingue le calcul numérique du calcul relationnel : les calculs dits relationnels sont ceux faisant directement correspondance avec la structure arithmétique sous-jacente de l'énoncé. Il s'agit de l'étape décisive durant laquelle le sujet calcule les relations établies par l'énoncé : Vergnaud parle d'opération de pensée (Durand et Vergnaud, 1976). Les calculs numériques, quant à eux, renvoient à la mise en opérations des éléments de l'énoncé sous forme canonique, avec la recherche de l'inconnue mise derrière le signe de l'égalité.

Dès lors, en considérant les différentes composantes structurelles et temporelles d'un problème additif que sont l'état initial, la transformation (négative ou positive) et l'état final, on peut alors envisager huit calculs relationnels possibles, pour seulement deux calculs numériques envisageables : l'addition ou la soustraction. Pour les jeunes enfants, la difficulté réside principalement dans le choix du calcul numérique, déterminé par le calcul relationnel.

La prise en compte de ces paramètres est très importante, notamment le fait que le calcul relationnel guide le raisonnement de l'enfant vers un choix de stratégie de résolution. Avant les années 1980, ces deux paramètres indépendants étaient les principaux critères considérés dans les travaux sur les problèmes arithmétiques. Toutefois, d'autres sont à prendre en compte, tels que les effets de contenus sémantiques ou encore la formulation (Fayol & Abdi, 1986).

4.6 Résolution de problème chez le sujet novice et chez le sujet expert

Pour Lemaire (1999), l'expertise s'envisage tel un « continuum » entre le novice et l’expert. Il note que la différence majeure entre novice et expert réside dans la nature même de la représentation mentale réalisée lors de la résolution de problème. L’expertise vient par le sentiment d’habitude et d'aisance dans la résolution, activant un modèle mental plus rapidement.

Chez les experts ce n’est pas seulement le nombre mais bien l’ordonnancement des informations en mémoire à long terme qui leur permet d’être plus efficients. (Chi, Glaser et Grees 1992, cités par Lemaire, 1999). Les experts usent de l’abstraction pour composer leur catégorisation, à la différence des novices. Cet agencement des données « permet au sujet un encodage beaucoup plus efficace de l’information relative à un problème ». Le novice a donc plus de difficultés à discriminer les informations qui lui sont utiles de celles qui sont superflues.

En outre, les enfants novices sont plus sensibles que les individus experts aux effets des différences d'habillage des problèmes. Pour Deblois (1997), il suffit de modifier une donnée mineure de l'énoncé, comme par exemple changer les données numériques ou une variable, pour qu'un jeune enfant ne puisse résoudre un problème. Il s'agit pour elle d'une manifestation attestant de la « structuration partielle de leurs connaissances », autrement dit les élèves disposent de savoirs (opératoires, de résolution, etc.), mais éprouvent des difficultés à transférer leurs acquis dans une situation pourtant similaire. Cette tendance peut s'expliquer par un défaut de mobilisation cognitive et de généralisation des connaissances, mais également par un facteur émotionnel. Les jeunes enfants doivent prendre confiance en leurs connaissances et se les approprier, afin de pouvoir les utiliser comme des outils cognitifs opérants.

Stigler *et al.* (1990) remarquent que les enfants ayant des difficultés en résolution de problème ont la particularité d'établir une stratégie appelée *direct translation strategy* (stratégie de traduction directe), opposée au *problem-model strategy* dont se servent les experts. Ces enfants repèrent les mots-clés et les nombres de l'énoncé, puis effectuent un calcul sans prendre en compte les structures sous-jacentes de l'énoncé. Les mots-clés de l'énoncé peuvent être des termes relationnels. Stigler qualifie cette procédure superficielle de *compute first and think later*, traduisible par « calculer d'abord, réfléchir ensuite ». Ils mènent un raisonnement qualifié de « quantitatif », tandis que les experts s'appuient sur un raisonnement « qualitatif », organisé autour d'une représentation cohérente. Ces derniers considèrent les liens établis entre les données de l'énoncé et ne se limitent pas aux indices de surface.

Les experts ont également une meilleure connaissance des attentes de la tâche et font davantage preuve de capacité d'autorégulation (Crahay *et al.*, 2008). Ces derniers prennent le temps de lire et de comprendre le problème pour déterminer quelle stratégie de résolution sera la plus appropriée compte tenu de la situation, contrairement aux sujets novices qui ont tendance à consacrer moins de temps à cette étape du raisonnement.

5 ÉLÉMENTS COMPLÉMENTAIRES POUR LA PRÉSENTE ÉTUDE

5.2 Difficultés fréquemment soulevées par les problèmes arithmétiques

Charnay (1987) avance que la principale difficulté dans la résolution de problèmes arithmétiques n'est pas tant de trouver la « bonne » opération à mener, mais plutôt de mettre en œuvre une stratégie qui puisse permettre de mener à la solution. Par exemple, les problèmes requérant une transformation négative ne sont pas forcément plus difficiles que ceux nécessitant une transformation positive. Clements (1980) constate que 66,67% des erreurs sont commises lors des phases de lecture, compréhension et transformation, autrement dit lors des premières étapes de traitement de l'énoncé.

Fagnant (2013) note que les erreurs commises relatives à des stratégies informelles relèvent davantage de confusions d'ordre conceptuelles, telles l'interprétation des termes relationnels : plus que/moins que, etc. Pour leur part, les erreurs relevées lors des calculs formels témoignent de stratégies superficielles classiques, comme par exemple les inductions faites à partir du lexique : par exemple, « plus que » déclenche chez l'enfant une stratégie de résolution additive. Elle constate également que la plupart des enfants soumettent un calcul, partant du présupposé qu'ils doivent nécessairement fournir un calcul pour chaque problème.

Pourtant, ils peuvent parfois rester impuissants quant à l'interprétation et la justification de leurs calculs.

5.3 Facteurs internes de réussite dans la résolution de problèmes arithmétiques

Les facteurs internes de réussite sont ceux associés aux individus, ayant une incidence sur leurs performances. Les facteurs externes font référence aux variables de l'environnement ayant un impact sur le sujet, comme par exemple le contexte de réalisation de la tâche. Dans cette partie, les facteurs internes de réussite dans la résolution de problèmes arithmétiques sont développés.

Commeiras et Bruas (2010) déterminent trois principaux facteurs de réussite dans la résolution de problèmes. Aussi, pour être performant, l’enfant doit disposer :

- De compétences efficientes en lecture et en langage oral : si la compréhension de l’énoncé verbal est erronée, elle donnera lieu à une mauvaise interprétation de la situation et donc à une mauvaise traduction arithmétique. La compréhension écrite a un impact important comme l’affirme Muth (1984, cité par Commeiras et Bruas, 2010), qui met à jour un écart notable entre erreur de lecture et erreur de calcul dans la résolution de problème. Pour Kail et Hall (1999, cités par Thévenot, Coquin et Verschaffel, 2006) « la compréhension du langage écrit des problèmes verbaux est une première étape nécessaire à la construction du modèle mathématique lui-même nécessaire à l’accomplissement des calculs ». Un élève considéré comme bon lecteur a moins de difficulté à se figurer et à ordonner les différentes structures arithmétiques, par rapport à un élève de faible niveau en lecture.
- Une habileté opératoire certaine : les auteurs rappellent que de nombreux travaux ont mis en évidence l’utilisation préférentielle des procédures informelles (grâce à des supports externes) chez les enfants ayant des difficultés opératoires. Ceux-ci n’ont pas une maîtrise suffisante des outils arithmétiques formels, ce qui augmente leur temps de résolution et peut les mener à des erreurs.
- Des capacités suffisantes de mémoire de travail : Swanson *et al.* (1993, cités par Thévenot *et al.*, 2006) ont révélé une corrélation entre la réussite en situation de résolution et l’empan de la mémoire de travail.

Ces compétences individuelles sont essentielles, mais ne sauraient être suffisantes pour justifier une bonne performance en résolution de problèmes. Il ne faut pas négliger la dimension psycho-affective de l'enfant dans son rapport à la situation de résolution de problème, à sa disponibilité et à sa motivation.

5.4 Variabilités interindividuelles

En plus de l'hétérogénéité des connaissances de la langue, de la performance opératoire et de l'efficacité de la mémoire de travail vues précédemment, Thévenot et Perret (2009) ajoutent les variations de construction des modèles mentaux propres à chaque individu. Les auteurs soulignent la différence de contrainte et de rigueur que les enfants s'imposent dans leurs représentations. En effet pour certains d'entre eux, une traduction arithmétique inadéquate ou bien une réponse complètement indépendante des données du texte ne les dérange en aucune façon.

Fayol *et al.* (2005) considèrent d'autres facteurs, comme le développement langagier : les enfants n'ont pas tous le même bagage lexical ni la même consistance syntaxique. De Corte et Verschaffel (1987) ajoutent que la présence de formulations explicites dans l'énoncé, le respect de la chronologie ainsi que l'ajustement des termes employés, augmentent « significativement les performances des enfants ».

Selon Kail et Hall (1999, cités par Fayol *et al.*, 2005), les progrès dans le domaine opératoire se répercutent directement sur les progrès en résolution de problèmes. Brissiaud (2003, cité par Fayol *et al.*, 2005) précise que l'exactitude de la réponse est subordonnée à l'évolution des savoirs arithmétiques et de leur utilisation. De plus, l'enfant n'assimilera pas de la même manière que son camarade l'enseignement reçu, concernant les concepts arithmétiques.

Levine, Jordan et Huttenlocher (1992, cités par Fayol *et al.*, 2005) soulignent une limite de capacité mnésique variable entre plusieurs sujets. Ils utilisent l'indice *Representational Set Size* (RSS), permettant d'estimer les limites des quantités à manipuler, retenues en mémoire de travail.

5.5 Tests évaluant la capacité de résolution de problèmes arithmétiques

L’évaluation de la résolution de problème rentre dans le cadre plus global de l’évaluation mathématique. Il s'agit d'une épreuve intéressante pour apprécier les stratégies et le sens des opérations. Pour autant, peu de batteries proposent cette évaluation. Lafay, Saint-Pierre et Macoir (2014) en dégagent six appréciant les compétences arithmétiques sur le plan qualitatif et/ou quantitatif :

- Exploration du Raisonnement et du Langage Associé (Legeay, Morel & Voye, 2009 ; cités par Lafay *et al.*) propose une épreuve s’intitulant «Enigmes numériques, problèmes arithmétiques » Elle évalue la compréhension de problèmes additifs en se détachant de la résolution posée à l’écrit par le biais des opérateurs. À la suite de l’écoute d’une histoire, l’enfant joue la saynète à l’aide du matériel fourni et choisit une donnée numérique de la situation sur laquelle il pose une question. Les situations présentées sont de type combinaison, transformation, comparaison additive et soustractive, suivant la classification de Riley *et al.* (1983). Ensuite, l’enfant rédige lui-même des problèmes en apportant des variations sur la situation et l’inconnue à traiter.

- Le Zareki-R (Von Aster, traduit par Dellatolas, 2006 ; cité par Lafay *et al.*), de cinq ans à 11 ans six mois, explore les problèmes arithmétiques sous la forme « problèmes arithmétiques présentés oralement ». L’enfant résout six problèmes en justifiant à chaque fois son raisonnement. Seule la réponse numérique est cotée quantitativement dans le protocole. Cependant l’explication du raisonnement est essentielle pour avoir un éclairage sur la pensée de l’enfant.

- La batterie Bilan-Logico Mathématique (Métral, 2008 ; citée par Lafay *et al.*), de cinq ans à huit ans six mois, se compose d’un examen de résolution de « Problèmes à énoncés », consistant à résoudre suite à la lecture de l’énoncé, un problème de type combinaison, deux problèmes à étapes comportant des problèmes multiplicatifs et une situation impossible à résoudre. Celle-ci à pour but, de contrôler si l’enfant peut juger de l’insolubilité. Cette batterie ajoute une épreuve de résolution de « Problèmes schématisés » ayant pour objectif de juger si l’enfant peut se détacher de la compréhension du texte pour résoudre un problème. Il doit seulement utiliser ses connaissances arithmétiques. À partir d'une représentation graphique, l'enfant doit créer des situations-problèmes et les résoudre.

- Le Tedi-Math (Van Nieuwenhoven, Grégoire et Noël, 2001 ; cités par Lafay *et al.*), de cinq ans à huit ans, comprend une première épreuve s'intitulant « Opérations avec énoncé verbal » où les huit énoncés sont donnés oralement à l'enfant. Il doit opérer sur des transformations additives ou soustractives. Ici la recherche d'inconnue porte sur l'état initial, la transformation ou l'état final. La seconde épreuve, « opérations avec supports imagés », est constituée de six problèmes présentés oralement, avec un support graphique. L'enfant recherche la collection dans son ensemble sur trois problèmes de combinaison et l'état final, dans trois problèmes de transformation soustractive.

- Exalang 8-11 ans (Thibault, Lenfant et Helloin, 2012 ; cités par Lafay *et al.*), est une batterie informatisée qui contient le subtest « Screening logicomathématique » évaluant simultanément la compréhension et la résolution de problèmes à partir d'énoncés arithmétiques. Il s'agit de reconnaître la nature des inconnues, chercher la question d'une structure multiplicative ou bien réaliser chaque étape de la résolution dans une structure additive.

- Exalang 11-15 ans (Thibault, Lenfant et Helloin, 2012 ; cités par Lafay *et al.*) qui est aussi un logiciel d'évaluation, associe les domaines « Logique et langage ». Ce subtest examine la capacité de compréhension, d'assimilation et de traitement de l'énoncé. Il permet notamment d'apprécier les façons dont l'adolescent trie les informations les plus pertinentes pour résoudre les situations-problèmes. L'épreuve se présente sous la forme de questionnaire à choix multiple, dans lequel l'adolescent doit dans un premier temps apparier chaque question avec l'énoncé correspondant. Puis dans un second temps, il doit indiquer, toujours parmi plusieurs réponses, quel paramètre est absent pour résoudre des problèmes à structure additive ou multiplicative.

Lafay *et al.* concluent en regrettant qu'il n'y ait pas encore à ce jour d'évaluation complète des structures additives et multiplicatives. Ils insistent aussi sur les différents apports théoriques concernant la démarche de résolution (Ménissier, 2011), la structure de l'énoncé dégagée Riley *et al.* (1983) ou bien par Vergnaud (1982).

5.6 Caractéristiques des problèmes de Mialaret

Sur les 12 problèmes, sept comportent des données numériques relativement petites et cinq autres comprennent un ou deux nombres supérieurs à 100. Toutes les informations présentées dans les énoncés sont pertinentes, autrement dit il n'y a aucune information superflue ou absurde risquant d'entraver le raisonnement de l'enfant. Le but de cette étude n'est pas de mesurer la sensibilité aux effets des distracteurs. Aussi, il s'agit de problèmes arithmétiques simples (*one-step word problems*), ne nécessitant qu'un seul calcul pour trouver la solution numérique. Aucun énoncé ne propose d'opérande décimale et seul le problème n°10 aboutit à un résultat décimal. Sept problèmes mettent en jeu des calculs dont le traitement opératoire nécessite l'usage de la retenue : ce critère est à prendre en considération, puisque la présence de retenues peut causer des erreurs de calculs, appelés des *bugs* (Van Lehn, 1990).

Les énoncés de ces problèmes sont présentés à l'écrit, ce que ne proposent pas la plupart des tests évaluant les capacités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants. Nous avons vu que la présentation orale met en jeu la mémoire de travail, aussi le but de cette étude n'est pas d'explorer ce domaine cognitif particulier. Avec une moyenne de 18 mots par problème, ces énoncés sont courts, ils ne pénalisent donc pas les enfants sur le plan de la lecture à proprement parler. Le champ lexical reste accessible : il recouvre des situations de la vie courante ou de domaines bien connus des enfants, bien que certains mots puissent poser problème (cf. partie méthodologie). Du point de vue de la nature des variables, trois problèmes traitent de quantités finies et dénombrables, comme des prunes, des poules ou bien des euros. Neuf problèmes sont construits autour de quantités indéfinies, en rapport avec des unités de mesure de temps, d'espace ou de volume. Deux énoncés proposent comme objets, deux variables de natures différentes, à savoir des heures avec des kilomètres (rapport temps-espace) et des mètres avec des euros (rapport prix au mètre). La diversité de ces variables permet de pouvoir évaluer l'aisance du sujet face à des problèmes de natures différentes.

Les critères de ces 12 problèmes susmentionnés permettent de réduire tout effet de surcharge cognitive : en effet, l'objectif principal de cette étude est d'analyser les stratégies de résolution de problème arithmétique, en rendant compte des capacités et des erreurs commises. C'est pourquoi ces différents effets de mémoire de travail, d'inhibition de données non pertinentes ou bien de planification de plusieurs opérations à mener ne sont pas retenus dans cette étude.

Comme il a été démontré dans la partie théorique, l'étude des procédures de résolution de problème arithmétique nécessite de prendre en considération de nombreux éléments. Le protocole mis en place auprès d'enfants de CM1 a pour but de valider la grille d'évaluation créée pour cette étude, associée aux problèmes de Mialaret, qui permettra une analyse systématique des productions d'enfants de 9 à 10 ans.

II PARTIE PRATIQUE

1 PRÉSENTATION DES AXES DE RECHERCHE

1.1 Rappels et problématique

Comme précisé dans l'introduction, ce mémoire s'inscrit dans la continuité de celui de Guillon (2014). Son travail s'appuie sur le même support que sont les 12 problèmes choisis de Mialaret. Pour les besoins de sa recherche, elle a toutefois complété cette épreuve avec d'autres tests (issus du LMC-R et de l'ECS-III de Khomsi). Ses hypothèses concernent les liens entre la lecture et le raisonnement analogique dans la tâche de résolution de problèmes chez des élèves de CM1 et CM2 et des enfants suivis en orthophonie. Elle énonce trois hypothèses :

- la première hypothèse concerne les liens entre les difficultés de lecture (compréhension inférentielle) et la performance en résolution des énoncés des problèmes requérant un traitement des inférences. Cette hypothèse est infirmée, les résultats n'ont pas démontré de corrélations entre des difficultés de traitements inférentiels, un niveau de lecture efficient et les capacités de résolution de problèmes. Cela peut s'expliquer par le fait que les performances en résolution de problèmes ne sont pas uniquement dépendantes des capacités de lecture.

- la seconde hypothèse suggère que des lacunes en raisonnement logique se répercutent sur la capacité de résolution de problèmes arithmétiques. Les résultats démontrent, à l'instar de la précédente hypothèse, que de nombreux traitements cognitifs entrent en jeu dans cette tâche et ne permettent pas d'expliquer les différences de performances obtenues. Aussi, l'étude n'a pas permis de mettre en évidence une corrélation entre raisonnement logique et résolution de problèmes arithmétiques.

- la troisième et dernière hypothèse avancée cherche à mettre en évidence des performances supérieures pour la population de référence (enfants de CM1 et CM2 tout venant). Cette dernière hypothèse est confirmée et révèle certaines difficultés particulièrement rencontrées par les patients de CM1 et CM2.

La présente étude se propose de recenser les fréquences d'erreurs commises dans l'optique d'un pré-étalonnage des 12 problèmes de Mialaret. Elle permet également de valider la grille créée à cet effet.

Les éléments théoriques mentionnés dans la partie précédente permettent de définir un cadre conceptuel des connaissances accumulées jusqu'alors sur la résolution de problèmes arithmétiques, en particulier chez l'enfant. D'après ce qui a été développé, force est de constater qu'il s'agit d'une tâche complexe mettant en jeu l'activité même de lecture, la compréhension écrite, les processus inférentiels associés, les connaissances numériques et arithmétiques. Elle suppose non seulement de connaître et maîtriser les procédures opératoires, mais également de savoir dans quelles situations utiliser telle ou telle opération, autrement dit faire preuve d'un certain sens opératoire.

En outre, la résolution de problèmes mobilise des connaissances spécifiques sur les accroissements, diminutions, comparaisons et combinaisons d'ensembles, permettant au sujet de se représenter la situation décrite et d'en déduire un modèle de situation : autant de compétences à intégrer et à maîtriser qui déterminent la compétence de résolution de problèmes arithmétiques.

La question de recherche de ce travail est de déterminer les principales difficultés rencontrées par les élèves de CM1 face aux problèmes arithmétiques. Plusieurs hypothèses découlent de ce questionnement.

1.2 Hypothèses

➔ Hypothèse n°1 : *Les élèves de CM1 choisissent plus souvent la bonne opération à effectuer qu'ils ne fournissent de calculs adéquats ;* cette hypothèse validerait le fait que les élèves arrivent à choisir la bonne opération, adaptée à la situation. En revanche, ils éprouvent des difficultés à traduire arithmétiquement et de manière adéquate la situation : il peut s'agir d'erreurs de disposition des opérandes ou bien d'une incapacité à mettre en opération les données numériques. Cela conforterait le fait que les élèves de CM1 disposent d'un sens des opérations plus développé que leur maîtrise opératoire. Ils pressentent l'opération à effectuer, même pour des situations arithmétiques dont ils ne maîtrisent pas de façon optimale la technique opératoire, comme par exemple la division et la multiplication.

Cette hypothèse est vérifiable par comparaison des scores obtenus en « choix de l'opération », ainsi que ceux obtenus en « traduction arithmétique » adéquate, comprenant les scores avec *EC* (erreur de calcul).

➔ Hypothèse n°2 : *Les élèves de CM1 fournissent plus de justifications écrites adéquates que de justifications orales adéquates ;* cette hypothèse pourrait expliquer la difficulté de la prise de recul quant à leur démarche de résolution (réflexion métacognitive) et quant à la bonne compréhension de la situation décrite par l'énoncé. Les justifications écrites revêtent bien souvent un caractère stéréotypé, « plaqué » sur le modèle de l'énoncé et de la question, tandis que les justifications orales nécessitent un retour sur les stratégies mobilisées lors de la résolution.

Cette hypothèse est vérifiable par le rapprochement des scores obtenus en justifications écrite et orale.

1.3 Objectif de recherche

L'objectif de recherche se fonde sur l'évaluation des capacités des enfants de CM1 en résolution de problèmes arithmétiques verbaux et l'appréciation de leurs capacités du sens des opérations.

2 POPULATION, MATÉRIEL ET MÉTHODE

2.1 Moyens de recrutement

Après avoir demandé l'accord préalable aux établissements, une demande a été formulée auprès de l'inspection de l'Éducation Nationale. Deux écoles publiques et une école privée ont répondu favorablement. Parmi elles, deux se situent en périphérie urbaine et l'autre en centre-ville. Aussi, une autorisation parentale a été soumise pour chaque élève. Au vu de l'échantillon, aucune école située en zone d'éducation prioritaire n'a été démarchée ; en effet, le pourcentage d'élèves scolarisés en Réseau de Réussite Scolaire et Réseau Ambition Scolaire (anciennement ZEP) est de 17,9% en France pour l'année 2013-2014 (DGESCO, 2014). Compte tenu de l'effectif total de 31 élèves pour cette étude, la participation de cinq élèves supplémentaires n'aurait pas été suffisamment pertinente d'un point de vue de la sensibilité statistique. Toutefois, un étalonnage ultérieur composé d'un échantillon plus important pourrait inclure des enfants scolarisés en ZEP, afin d'établir un panel représentatif et fidèle de la population d'élèves de CM1.

2.2 Présentation de la population

La population de recherche est composée de 31 enfants tout-venant, scolarisés en CM1 à Nantes et périphérie nantaise.

2.2.1 Critères de non-inclusion

Les élèves ayant redoublé ou sauté une classe n'ont pas été inclus dans cette étude ; aussi, les enfants bénéficiant d'un suivi orthophonique en rééducation logico-mathématique n'ont pas été pris en compte. Toutefois, trois enfants ont été suivis auparavant pour des troubles du langage écrit et/ou oral, leur prise en charge s'étant arrêtée il y a plus d'un an. Tout déficit sensoriel, moteur et/ou intellectuel majeur et connu est également un critère d'exclusion pour l'échantillon.

Les résultats d'un des sujets de l'étude n'ont pas été retenus, car l'enfant semblait d'emblée très anxieux vis-à-vis de l'épreuve, qui a été arrêtée rapidement.

2.3 Matériel

Le support utilisé est constitué de 12 pages comprenant les problèmes destinés à l'enfant et de feuilles d'évaluation pour l'examinateur. Ces grilles d'évaluation répertorient divers critères, problème par problème. Des feuilles de brouillon et des pions de diverses formes et couleurs sont également mis à disposition.

2.3.1 Présentation des problèmes

Chaque problème est présenté individuellement sur une page verso. Le numéro de problème est indiqué, sous lequel se trouve l'énoncé. La première ligne indique les quatre opérations (addition, soustraction, division et multiplication) à entourer. La case en dessous laisse un espace pour effectuer le calcul et la dernière ligne est dédiée à la rédaction de la phrase de réponse. Par souci de lisibilité, la police de caractères choisie est Verdana (sans empattement), en taille 14 et avec un interligne 1,5.

Cette présentation diffère de celle choisie par Guillon (2014), dans laquelle les 12 énoncés sont disposés sur deux feuilles. Sur ces pages, une colonne indique l'énoncé, la suivante sert à indiquer l'opération effectuée, puis dans la troisième l'opération est posée. La phrase réponse est indiquée sous l'énoncé, dans la première colonne.

La disposition de la présente étude permet au sujet de se concentrer sur un problème à chaque fois, sans se disperser, et avec la possibilité de revenir à un problème déjà lu ou traité.

2.3.1.1 Analyse des problèmes

Comme décrit dans la partie théorique (cf. sous-partie 5.5), les énoncés conçus par Mialaret renvoient à des problèmes arithmétiques verbaux simples, ne nécessitant en principe qu'une seule opération pour les résoudre. Ce fait n'est d'ailleurs pas mentionné dans les consignes afin de laisser les sujets résoudre à leur façon et s'engager dans plusieurs calculs.

Plusieurs critères sont retenus dans cette analyse des problèmes: ils permettent de pouvoir apprécier les spécificités de chacun des 12 problèmes. Ce complément de test revêt une visée plus généraliste, d'où la diversité des catégories d'énoncés proposées. Cette épreuve ne permet pas de cibler des difficultés très précises dans un type de problème donné.
La classification retenue est celle établie par Vergnaud.

Problème n°1

Un fermier a 23 poules blanches et 9 poules noires. Combien a-t-il de poules en tout ?

- Type de problème : combinaison ;
- Opération attendue : addition ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : total (addition des parties) ;
- Nature des variables : poules (éléments homogènes et valeurs discrètes) ;
- Remarques :
    - il s'agit d'un problème très consistant et « classique », car il présente sans ambiguïté la situation (« et » peut évoquer l'ajout, la notion d'addition). Dans l'étude de Guillon (2014), il n'a pas particulièrement posé de difficulté, sinon quelques erreurs de calcul.

Problème n°2

Je possédais 275€. Je dépense 34€. Combien me reste-t-il ?

- Type de problème : changement avec recherche de l'état final ;
- Opération attendue : soustraction ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : état final ;
- Nature des variables : euros (éléments homogènes et valeurs discrètes) ;
- Remarques :
    - le thème de la dépense d'argent est un classique des énoncés de résolution de problèmes vus à l'école ;
    - la soustraction 275 – 34 ne requiert pas l'usage de la retenue (réduction du risque d'erreur de calcul) ;
    - les données numériques sont introduites dans l'ordre chronologique de l'histoire ;
    - Meljac et Siegenthaler (2012) signalent que tout échec à ces deux premiers énoncés doivent retenir l'attention de l'examinateur. La passation de cette épreuve peut alors « se révéler une pure et simple perte de temps », en ce sens où l'enfant n'est pas encore rentré dans cet exercice s'il ne dispose pas d'« un langage et (…) [d']une forme de pensée auxquels [il] n'adhère pas ».

Problème n°3

Il y avait 11 prunes dans mon panier. Il n'en reste plus que 8. Combien en a-t-on mangé en tout ?

- Type de problème : changement avec recherche de la transformation négative ;
- Opération attendue : soustraction ;
- Structure : inconsistante (« en tout » peut déclencher une procédure additive, cependant « il n'en reste plus que 8 » peut également susciter une soustraction...)
- Élément recherché/à calculer : transformation (recherche du nombre de prunes qui ont été mangées sur les 11, pour qu'il en reste 8) ;
- Nature des variables : prunes (éléments homogènes et valeurs discrètes) ;
- Remarques :
  - les données numériques ne sont pas introduites dans l'ordre chronologique : la situation initiale est introduite, suivie de la situation finale. La question porte alors sur la transformation.

Problème n°4

Un terrain a une longueur de 45 mètres. Un autre a une longueur de 39 mètres. Quel est le plus long ? Et de combien ?

- Type de problème : comparaison ;
- Opération attendue : soustraction ;
- Structure : inconsistante (aucun piège de lexique inducteur, mais la succession des deux questions peut poser des difficultés, cf. remarques ci-dessous) ;
- Élément recherché/à calculer : différence ;
- Nature des variables : mètres (éléments homogènes et valeurs continues) ;
- Remarques :
  - ce problème propose deux questions (comme le problème n°7), ce qui peut dérouter l'enfant, comme le mentionne Guillon (2014) ;
  - la première question ne nécessite pas la pose d'un calcul, si tant est que la chaîne numérique soit maîtrisée. En revanche, il peut être complexe de répondre à la seconde : la formulation isolée « de combien ?» fait écho à la question précédente, interrogeant celui qui « est le plus long » ;
  - il s'agit d'un problème souvent échoué par les élèves de CM1 (Meljac et

Siegenthaler, 2012, Guillon, 2014) ; ces échecs corroborent avec le fait qu'il s'agisse d'un problème de type comparaison, jugés comme étant les plus « difficiles » comme nous l'avons vu dans la partie théorique.

Problème n°5

On veut ranger 252 crayons dans des boîtes. Chaque boîte contient 36 crayons. Combien faut-il de boîtes ?

- Type de problème : proportionnalité simple ;
- Opération attendue : division ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : nombre de boîtes pour ranger des crayons (rapport de contenant et de contenu) ;
- Nature des variables : boîtes et crayons (éléments hétérogènes et valeurs discrètes) ;
- Remarques :
    - le diviseur 36 peut paraître impressionnant, comme le souligne Guillon (2014) dans l'étude précédente, au détour d'une réaction d'un élève : « la table de 36, (…) c'est très long ! ».
    - le dividende est également un grand nombre et il est éloigné du diviseur 36 ;
    - ce problème de division reste difficile pour les élèves de CM1 et n'est abordable qu'à partir du CM2, d'après Meljac et Siegenthaler (2012). Cet énoncé a été conservé afin de vérifier si les sujets pressentent tout de même le besoin d'appliquer une division.

Problème n°6

Un tonneau peut contenir quand il est plein 225 litres de vin. Il ne contient que 135 litres de vin. Combien faut-il verser de litres de vin pour le remplir ?

- Type de problème : changement avec recherche de transformation négative ;
- Opération attendue : soustraction ;
- Structure : inconsistante (les termes « verser » et « remplir » peuvent mener l'enfant à choisir l'addition) ;
- Élément recherché/à calculer : différence (litres manquants pour remplir le tonneau de 225L) ;
- Nature des variables : litres (éléments homogènes et valeurs continues) ;

- Remarques :
  - il s'agit d'un énoncé inconsistant, qui peut guider les enfants vers le choix d'une addition des termes ou d'une addition par recherche de complément ; on pourrait s'attendre à constater de nombreuses erreurs de choix d'opération pour ce problème. Meljac et Siegenthaler (2012) relèvent, tout comme Guillon (2014) le constate dans son étude, que les sujets se représentent une personne ajoutant des litres de vin, ce qui les mène à opter pour l'addition ;
  - Meljac et Siegenthaler (2012) notent que les élèves de CM2 « tombent encore dans [le] piège » avec cet énoncé.

Problème n°7

Pierre a 18 ans et Jean 12 ans. Quel est le plus âgé des deux ? De combien ?

- Type de problème : comparaison ;
- Opération attendue : soustraction ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : différence (en années) ;
- Nature des variables : temps en années (éléments homogènes et valeurs continues) ;
- Remarques :
  - il s'agit du deuxième énoncé de l'épreuve proposant deux questions : la première question n'engage pas l'enfant à développer un calcul, puisqu'il doit déterminer le plus âgé des enfants par simple comparaison des âges. La seconde question, en revanche, l'invite à déterminer la différence d'âge et à une mise en opération ;
  - Meljac et Siegenthaler (2012) soulignent le fait que beaucoup d'enfants résolvent ce problème de tête et peuvent éprouver des difficultés à poser leur raisonnement par une opération. Il faudrait donc s'attendre à davantage de justifications écrites correctes que de traductions arithmétiques adéquates ;
  - bien qu'il s'agisse d'un problème de type comparaison, cet énoncé est rarement échoué car certains sujets répondent de tête, toutefois ils éprouvent des difficultés à poser leur raisonnement sous forme de calcul. Guillon (2014) souligne le fait que certains enfants raisonnent par analogie avec le problème n°4.

Problème n°8

Quel est le trajet parcouru en 5h par une automobile qui parcourt 72km en 1h ?

- Type de problème : proportionnalité simple ;
- Opération attendue : multiplication ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : total (trajet en kilomètres) ;
- Nature des variables : kilomètres par heure (éléments hétérogènes et valeurs continues) ;
- Remarques :
  - il s'agit du premier problème portant sur une multiplication ;
  - cet énoncé a la particularité de n'être constitué que d'une question ;
  - la nature des éléments est d'ordre temporelle et spatiale (rapport de vitesse en kilomètres par heure) et cet effet de contenu peut influencer les performances. Guillon (2014) remarque que beaucoup de sujets de CM1 ont des difficultés à comprendre la situation décrite.

Problème n°9

Une portion de fromage pèse 90 grammes. Combien pourra-t-on faire de portions avec 810 grammes de fromage ?

- Type de problème : proportionnalité simple ;
- Opération attendue : division ;
- Structure : consistante ;
- Élément recherché/à calculer : nombre de portions possibles pour une quantité donnée ;
- Nature des variables : grammes et parts de fromage (éléments hétérogènes, valeurs respectivement continues et discrètes) ;
- Remarques :
  - l'enfant doit considérer que 90 grammes constituent une unité (une part de fromage) ;
  - Meljac et Siegenthaler (2012) indiquent que les sujets de CM1 peuvent déjà avoir une idée de l'opération à calculer, mais ne savent pas toujours la mettre en pratique ;

- la procédure de division peut inquiéter le sujet, comme le souligne Guillon (2014). Pourtant, ce problème peut se résoudre assez facilement par la récupération de faits arithmétiques, si le sujet considère que 81 apparaît dans la table de 9, et qu'il faut donc 9 x 90 grammes (soit 9 portions).

Problème n°10

12 mètres de soie coûtent 963€. Quel est le prix du mètre ?

- Type de problème : proportionnalité simple ;
- Opération attendue : division ;
- Structure : consistante (mais unités de natures différentes) ;
- Élément recherché/à calculer : rapport (euros par mètre) ;
- Nature des variables : prix en euros et mètres (éléments hétérogènes, valeurs respectivement discrètes et continues) ;
- Remarques :
  - les mesures engagées dans ce problème, à savoir les euros et les mètres, peuvent compliquer la résolution. Les enfants sont peut-être plus habitués aux problèmes associant des euros à des quantités dénombrables. Le fait de calculer le prix du mètre peut les laisser perplexes, car comme le souligne Guillon (2014), ces deux unités sont différentes. Cela peut leur paraître interdit, puisqu'on leur dit à l'école qu'on ne peut pas opérer sur des unités différentes dans le cas du système métrique...
  - la grandeur des donnes numériques de l'énoncé peuvent effrayer certains enfants peu à l'aise dans le calcul et crisper leur réflexion. Guillon (2014) constate qu'un problème similaire, comportant des nombres plus petits, est nettement mieux réussi par les sujets qui optent volontiers pour le partage (division).

Problème n°11

J’ai parcouru 12km en bus, puis 3 km à pied. Quelle est la longueur totale du trajet que j’ai parcouru ?

- Type de problème : combinaison avec recherche de l'état final ;
- Opération attendue : addition ;
- Structure : consistante (« total » induit une addition) ;
- Élément recherché/à calculer : kilomètres parcourus (en bus et à pied) ;

– Nature des variables : kilomètres (éléments homogènes, valeurs continues) ;
– Remarques :
  - ce problème, ainsi que le suivant, sont généralement bien réussis par les élèves et les patients dans l'étude de Guillon (2014). Placés en fin d'épreuve, ils peuvent éventuellement restaurer un sentiment de confiance en soi et clôturent l'épreuve sur une note positive.

Problème n°12

Combien y a-t-il de jours dans 5 semaines ?

– Type de problème : proportionnel simple ;
– Opération attendue : multiplication ;
– Structure : consistante, mais ambiguë de par l'absence de la deuxième donnée numérique ;
– Élément recherché/à calculer : total (nombre de jours compris dans cinq semaines) ;
– Nature des variables : jours et semaines (éléments hétérogènes et valeurs continues) ;
– Remarques :
  - il s'agit du seul énoncé ne présentant qu'une seule information numérique, la seconde étant induite par le mot « semaine ». Toutefois, Guillon (2014) souligne que les enfants ne tombent pas dans le piège et trouvent sans difficulté, malgré quelques erreurs de calculs. Il y a une possible récupération de faits arithmétiques de la table de 5 ;
  - la simplicité relative des deux derniers énoncés (n°11 et 12) permet aux sujets de se réassurer, si toutefois ils sont réussis. Tout comme les énoncés n°1 et 2, un échec d'enfants de CM1 met à jour une « grande fragilité » (Meljac et Siegenthaler, 2012), tout comme il peut souligner une éventuelle fatigabilité.

Opération attendue	Addition	Soustraction	Multiplication	Division
N° de problème	1 – 11	2 – 3 – 4 – 6 -7	8 – 12	5 – 9 – 10

Tableau 1: Récapitulatif des opérations attendues par problème

2.3.2 Présentation de la grille d'analyse des réponses

La grille élaborée pour cette étude permet d'évaluer les réponses aux problèmes de manière quantitative et qualitative :

- Supports externes : pour ce critère, le « recours à la manipulation » et le « recours au dessin » sont distingués ; deux modalités sont possibles : usage adéquat (1 point), pour lequel la situation représentée est en adéquation avec la situation décrite. Si la représentation graphique ou matérialisée avec des pions ne correspond pas à la situation du problème, il s'agit d'un usage inadéquat (0 point). Des exemples sont donnés en 4.3 ;

- Choix de l'opération : un point est attribué si l'enfant entoure l'opération attendue ;

- Traduction arithmétique : un point est attribué si l'opération est correctement posée, autrement dit si les termes sont bien disposés. En cas d'erreur de calcul (*EC*), le point est tout de même accordé. Nous avons choisi de ne pas pénaliser les erreurs de calculs, car ce n'est pas l'objet de cette étude. Toutefois, l'examinateur relève la présence d'erreur de calcul en spécifiant *EC*. Certaines erreurs de calcul engendrent des résultats numériquement aberrants, aussi des remarques peuvent être référencées dans la case réservée aux commentaires. Dans la situation où l'enfant produit un calcul de type recherche de complément (par exemple, une addition à trou pour une soustraction) et si ce calcul lui permet d'aboutir à la réponse numérique attendue (avec une possible *EC*), le point est attribué. Si la traduction arithmétique est incorrecte, par exemple si l'enfant agence d'une façon inappropriée les termes ou n'utilise pas un calcul qui permette d'aboutir à la réponse escomptée, il s'agit d'une réponse inadaptée (*Inad*). Aucun point n'est attribué dans ce cas, de même si aucun calcul n'est proposé (*ABS*) ;

- Justification écrite : pour ce critère, la focalisation est portée sur l'adéquation de la réponse formulée par écrit. Il s'agit de voir si l'enfant a bien cerné l'enjeu de la question et y répond effectivement. La réponse numérique peut donc être incorrecte, mais la réponse écrite adéquate. De la même manière, la réponse numérique peut être correcte, mais la phrase réponse peut ne pas répondre à la question, auquel cas il s'agit d'une réponse inadéquate et le point n'est pas attribué ;

- Justification orale : tout comme la justification écrite, la justification orale est soit *Ad*, auquel cas le point est accordé, soit *Inad* ou *ABS*. Lors de cette justification orale, l'enfant doit expliquer la raison du choix de l'opération. Pour que sa réponse soit considérée comme étant valide, elle doit comporter les arguments étayant sa démarche opératoire et pouvant s'appuyer sur des éléments de l'énoncé ou de la situation décrite. Une justification orale inadaptée ne suffit pas à démontrer la pertinence du choix de l'opération ;

- Commentaires, questions de l'enfant : il s'agit d'observations, de remarques cliniques que l'examinateur relève pour chaque problème (données qualitatives) ;

- Temps par problème : le temps est mesuré de manière indicative pour chaque problème.

Ainsi, un score maximal de 4 points peut être atteint pour chaque problème, soit un total de 48 points pour l'ensemble du test. L'attribution des points est précisée dans la sous-partie 2.4.2.3 concernant les modalités de cotation. La non attribution de points pour la traduction arithmétique ainsi que les justifications orales et écrites peut renvoyer à une réponse inadaptée ou bien à une absence de réponse. De la même manière, un point attribué peut par ailleurs être assigné d'une erreur de calcul. Les éventuels recours aux supports externes ne sont pas comptabilisés dans ce total de points, mais ils sont toutefois mentionnés et restent des indices cliniques informatifs.

2.3.3 Pré-test

Un premier essai a été effectué en novembre, auprès de deux enfants tout-venant. Ce pré-test a permis d'évaluer la clarté de la présentation du test, des consignes et du déroulement de la passation. Certaines modalités ont été réajustées, notamment la proposition de la calculatrice, qui s'est avérée être un choix peu judicieux. Nous envisagions de proposer cet outil aux enfants, en vue d'alléger leur charge cognitive déjà bien engagée dans la résolution de problèmes. L'intérêt de cette étude ne se situe pas dans l'analyse de la maîtrise technique des opérations, mais davantage dans leur usage fonctionnel, dans la décision de l'opération en fonction de la situation. Suite à ce pré-test et quelques échanges avec les enseignants, il apparaît que tous les élèves de CM1 ne maîtrisent pas la calculatrice. Sur les trois écoles, seule une a dispensé un enseignement de l'usage de cet outil. En outre, les erreurs de calculs commises sans l'usage de la calculatrice peuvent parfois aboutir à des résultats numériquement aberrants. Lorsqu'ils rédigent leurs calculs, certains enfants peuvent se rendre compte de leur erreur s'ils aboutissent à un résultat aberrant, tandis que d'autres acceptent ce résultat. Le recours à la calculatrice ne permettrait pas d'observer ces comportements d'autocorrection.

D'autre part, quelques consignes ont été clarifiées. Le pré-test a aussi permis de définir une estimation du temps complet de l'épreuve.

2.4 Procédure

2.4.1 Recueil des données

Les passations se sont déroulées de fin novembre à début juin dans les écoles. Il s'agit d'un protocole individuel, réduisant un éventuel effet distracteur et permettant à l'examinateur le recueil de réactions et questions de l'enfant, sans que celui-ci ne se sente embarrassé par la présence d'autres camarades. De plus, une passation collective aurait compliqué la prise en compte du temps de chaque enfant pour chaque problème. Une salle calme était mise à disposition à cet effet.
Les entretiens ont été enregistrés sur magnétophone, afin de reporter a posteriori les commentaires des sujets et d'éviter à l'examinateur la prise de notes lors du temps de passation.

2.4.2 Protocole de passation

L'examinateur prête une attention particulière à la présentation de l'étude et aux consignes : aussi, le protocole est appliqué de la manière la plus fidèle possible, afin de minimiser les risques de biais interindividuels éventuels. La feuille de rappel des éléments à présenter avant chaque entretien se trouve dans les annexes.

2.4.2.1 Introduction de l'épreuve

Après avoir demandé l'accord de chaque enfant, nous présentons brièvement l'étude et la raison de notre présence ici. Il est également dit que « ce petit travail ne sera pas noté et ni l'école ni [leur] parents ne seront informés des résultats ». Le caractère anonyme est également mis en avant dès le début de l'entrevue, afin de mettre les sujets à l'aise. Il est annoncé que certains problèmes sont moins faciles que d'autres.

L'examinateur s'assure, avant de commencer l'épreuve, que l'enfant connaît les quatre opérations et sait les associer à leurs symboles respectifs. La maîtrise opératoire de la division n'est pas optimale en CM1, cependant plusieurs enfants ont réussi à les résoudre ou à pressentir le besoin d'effectuer une division, malgré des erreurs éventuelles de calcul.

2.4.2.2 Consignes

Après avoir présenté le sujet de l'étude à l'enfant et recueilli son accord pour commencer, l'examinateur lui donne les consignes. L'enfant doit d'abord lire l'énoncé, puis l'examinateur le lui relit à voix haute. Cette relecture permet d'éviter une possible difficulté de compréhension écrite, puisqu'il ne s'agit pas d'un critère que l'on souhaite évaluer : Meljac et Siegenthaler (2012) parlent de « remise en selle » qui permet à l'enfant d'éviter au mieux toute mécompréhension. Suite à cela, l'enfant entoure l'opération, puis résout son calcul dans la case attribuée, utilise un brouillon (dessins, schémas, etc.) ou le matériel s'il le souhaite (pions, jetons), puis propose une phrase réponse à l'écrit.

Lorsqu'il aura terminé chaque problème, il est expliqué à l'enfant qu'il devra justifier à l'oral le choix de son opération, en répondant à la question : « comment as-tu fais pour choisir *telle opération* pour résoudre ce problème ? ». Il est bien précisé que cette question n'induit pas que la réponse fournie est incorrecte, mais il s'agit pour l'examinateur de mieux comprendre le choix de l'élève. Lorsque l'enfant a terminé sa justification orale, il peut retourner sa feuille et passer au problème suivant.

Si un enfant n'arrive pas à résoudre le problème, il lui est demandé s'il peut, dans la mesure du possible, entourer l'opération qu'il pense être adéquate dans cette situation, sans avoir à calculer l'opération. Cela permet de vérifier, dans une certaine mesure, si l'enfant arrive à déterminer l'opération qu'il juge adaptée à la situation de l'énoncé, quand bien même il éprouve des difficultés à mettre en opération les données numériques.

Il est dit à l'enfant qu'il peut réaliser cette épreuve dans l'ordre qu'il souhaite, qu'il peut ainsi revenir en arrière ou passer au problème suivant. Dans notre étude, seul un enfant se réfère à un problème antérieur, en vue de se corriger, mais n'a finalement pas modifié sa production.

2.4.2.3 Modalités de cotation

L'attribution de points pour le choix de l'opération permet de faire la distinction entre le sens des opérations et les capacités de procédures opératoires. Certains enfants ressentent le besoin de recourir à telle opération, sans pour autant pouvoir la résoudre. Par exemple, ils peuvent choisir la division pour une situation donnée, sans réussir à la poser ou à calculer, et néanmoins réussir à justifier leur choix en exprimant une notion de partage.

Il existe une situation particulière où l'examinateur peut, après avoir demandé une justification orale, poser une question supplémentaire : il s'agit du cas où un enfant a recours à une opération de type recherche de complément. Si un enfant entoure par exemple l'addition et propose une addition à trou, l'examinateur lui demande s'il pense pouvoir choisir une autre opération (« Aurais-tu pu choisir une autre opération ? »). Il semblait dommage dans ce cas de pénaliser l'enfant, car la démarche, bien que compensatrice, reste valide et permet d'aboutir à la bonne réponse si elle est bien menée. Néanmoins, une grande partie des sujets a réussi à choisir l'opération attendue suite à la question (soustraction, si l'on garde le même exemple). Une addition et une addition à trou ne représentent pas la même situation : l'addition évoque l'idée d'un ajout, tandis que l'addition à trou témoigne d'une recherche de complément. La soustraction, quant à elle, suppose le calcul de la différence. Si l'addition à trou est admise par l’enfant comme étant une alternative ou une équivalence à la soustraction, l'examinateur peut alors attribuer le point au « choix de l'opération ». Même situation pour la multiplication réitérée à défaut de la division, à la différence près que beaucoup moins d'enfants ont réussi à expliquer qu'ils auraient pu faire une division. Si l'enfant n'accepte que l'addition dans une situation « soustractive » et n'entoure pas la soustraction, le point n'est pas attribué (*Inad*). Par exemple, dans le cas de l'énoncé n°2, si un sujet entoure « addition (à trou) » et « soustraction », le point est attribué. Un sujet n'admettant que l'addition ne validera pas le point pour le « choix de l'opération », mais en obtiendra un pour la « traduction arithmétique» si son calcul le mène au bon résultat numérique (34 + *241* = 275).

La qualification de justification orale ou écrite *adéquate* ou *inadéquate* reste soumise à l'appréciation subjective de l'examinateur. Il est attendu d'une justification adéquate une argumentation recevable, relative à la situation décrite. Une réponse se limitant à la lecture de l'énoncé entier ou partiel ne suffit à justifier de manière adéquate. Toutefois, nous considérons qu'un enfant qui appuie son choix en citant quelques mots-clés pertinents de l'énoncé en les mettant en rapport avec l'opération en question se relève être adéquat, si tant est que cette citation étaie sa justification.

L'épreuve est chronométrée à partir de la première lecture de l'énoncé, suspendue lors de la lecture à voix haute par l'examinateur, puis le temps est de nouveau mesuré jusqu'à la fin de l'épreuve (fin de rédaction de la phrase réponse).

2.5 Différences avec le système de cotation de Guillon (2014)

Dans son étude, Guillon (2014) s'est appuyée sur un système de cotation différent. Elle utilise deux codages :

- le codage 1 permet d'apprécier la justification écrite du résultat, le nom de l'opération choisie et le calcul posé. Si ces critères sont corrects, 1 point est attribué pour chacun d'entre eux, soit un score total de 38 points pour l'ensemble des 12 problèmes ;
- le codage 2 concerne la compréhension de la situation : 1 point est attribué si la situation est correctement comprise et justifiée, indépendamment du calcul effectué et de la réponse numérique, pour un maximum de 12 points pour les 12 problèmes.

Dans la grille de cotation de notre étude, la distinction entre les éléments opérationnels et de compréhension de la situation est également considérée. La pose du calcul, aspect opératoire de la résolution, est cotée par le critère « traduction arithmétique ». Les aspects relatifs au sens des opérations est évalué par le « choix de l'opération », la « justification écrite » et la « justification orale ». Toutefois, les réponses fournies pour la traduction arithmétique sont dépendantes du cheminement de la résolution et sont donc en lien avec le sens des opérations. Il s'agit néanmoins de l'étape de résolution durant laquelle sont mises à l'épreuve les compétences opératoires.

Concernant la justification écrite, la cotation choisie par Guillon (2014) attribue 1 point si la phrase de réponse est correcte et comporte le bon résultat. Nous avons choisi, dans notre étude, d'admettre une phrase réponse correcte comportant un résultat numérique incorrect, conséquent d'une erreur de calcul ou d'une traduction arithmétique inadéquate. En effet, nous retenons de la « justification écrite » la pertinence de la réponse vis-à-vis de la situation-problème. Par ailleurs, une phrase réponse non adéquate comportant un résultat numérique correct est considérée comme étant inadéquate, puisqu'elle ne répond pas à la question.

Afin de préciser la non attribution d'un point, nous avons distingué l'absence de réponse de la proposition d'une réponse inadéquate pour la traduction arithmétique et les justifications écrite et orale.

D'autres ajouts ont permis de préciser la grille. Par exemple, le recours aux supports externes (dessin et manipulation) est pris en compte et qualifié (adéquat ou inadéquat). Il permet d'estimer le besoin d'un sujet de recourir à la représentation formelle et abstraite de la situation, laquelle peut l'aider à mieux comprendre la situation.

Aussi, le choix de l'opération est envisagé comme une composante du sens opératoire ou compréhension du sens de la situation. Or dans son étude, Guillon attribue ce critère au codage 1, l'excluant du codage 2 relatif aux aspects du sens de l'opération. Nous n'avons donc pas choisi d'isoler les catégories de notation sous forme de codage, car encore une fois, le sens de l'opération est engagé tout au long de la résolution et organise le raisonnement de l'enfant dans cette tâche particulière. Toutefois, les scores obtenus en fonction de ces catégories permettent d'obtenir un aperçu des capacités des sujets.

3 ÉTUDES DE CAS

Afin d'apporter quelques éléments cliniques et présenter le déroulement de la passation, deux études de cas sont détaillées dans cette partie. Parmi les 31 sujets rencontrés lors de cette étude, deux ont été retenus ; ce choix demeure bien entendu arbitraire et chaque sujet est unique dans sa manière de raisonner, toutefois les profils de N. et E. ont retenu notre attention. Leurs feuilles de passations sont reportées dans les annexes.

3.1 Passation de N., 9 ans 8 mois

L'institutrice a présenté N. comme étant un élève ayant un bon niveau en mathématiques. Il passe la totalité des problèmes en 31 minutes, ce qui est au-dessus de la moyenne (25 minutes). Lorsqu'il parle d'une opération, il la désigne par le nom de son signe associé. Il connaît toutefois les noms des opérations et sait les identifier. Il subvocalise lorsqu'il lit et réfléchit à voix basse et s'adresse à moi pour demander de l'aide avec cette même voix. N. reste très concentré tout le temps de la passation.

Supports externes

N. est l'enfant qui a le plus eu recours au dessin (à six reprises). Toutefois, quatre de ses productions dessinées se révèlent inappropriées compte tenu de la situation décrite :

- pour le problème n°2 : N. dessine des billets et des pièces, en se questionnant sur la manière dont il doit représenter le problème et en se perdant dans des précisions réalistes (« est-ce que ça existe un billet de 200€ ? »). Au final, il dessine deux billets de 100€, un billet de 200€, un de 50€, deux de 10€ et neuf pièces de 1€, ce qui ne lui permet pas de répondre au problème ;
- pour le problème n°5 : il dessine une grille dont chaque case représente un crayon et s'exclame « j'ai fait les crayons, par contre il y a trop de boîtes, je ne pourrai pas le faire ! » ;
- pour le problème n°7 : il dessine deux personnages, avec un grand souci du détail (visages, vêtements, etc.) et leurs noms en-dessous ;

- pour le problème n°10 : il dessine un costume et une étiquette de prix mentionnant 963€. Pour ce problème, il a posé une question car il ne savait pas ce qu'était la soie, ce à quoi je lui ai proposé un synonyme (« tissu »). La présence d'un mot inconnu l'a sans doute induit en erreur et l'a mené à associer tissu (continu) à vêtement (discontinu)...

Pour le reste de ses productions, il écrit ses tables sur brouillon à plusieurs reprises lorsqu'il cherche à multiplier, avec la particularité de systématiquement partir de 1. Dans le problème n°6, il réalise un schéma très pertinent en dessinant deux tonneaux de même taille et mettant en évidence l'écart de remplissage par une flèche verticale. Pour autant, il n'arrive pas à traduire arithmétiquement ce problème. Il en fait de même pour le problème n°8, en dessinant un tronçon de route avec une flèche de bout en bout, indiquant « 72km = 1h » et un plus grand tronçon en-dessous, avec un point d'interrogation. Pour le dernier problème, il choisit de dessiner un calendrier sous forme de grille représentant un mois, mais il se mélange puis s'exclame « j'arrive pas à dessiner, tant pis, je fais le calcul ».

Choix de l'opération et traduction arithmétique

	Pb 1	Pb 2	Pb 3	Pb 4	Pb 5	Pb 6	Pb 7	Pb 8	Pb 9	Pb 10	Pb 11	Pb 12	**TOTAL**
Choix de l'opération	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	1/1	4/12
Traduction Arithm.	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	0/1	1/1	0/1	0/1	0/1	1/1	0/1	5/12

N. réussit à déterminer quatre opérations sur les 12 problèmes. Sur ces quatre problèmes, trois comportent des erreurs de calcul. Pour le problème n°1, massivement réussi par les enfants rencontrés, N. trouve 122, malgré la pose correcte de l'addition attendue, à savoir 23 + 9. Il compte la retenue comme étant une centaine, toutefois sa réponse aberrante du point de vue numérique ne le dérange pas. Pour le problème n°3, N. entoure la bonne opération, mais effectue une erreur de calcul (11 – 8 = 17), ce qui ne l'empêche pas de fournir la bonne réponse par écrit. Il réussit à utiliser l'addition dans toutes les situations adéquates et utilise à bon effet la soustraction pour les problèmes n°2 et 3. N. n'a pas entouré la division, peut-être parce qu'il ne sait encore dans quelle situation l'utiliser. En revanche, il entoure pour sept problèmes l'addition, qu'il maîtrise du point de vue opératoire, mais qu'il utilise dans des situations dans lesquelles il ne sait quelle autre stratégie opératoire à mettre en place. On peut dégager du profil de N. un sens des opérations plutôt abouti pour l'addition et la soustraction, en revanche la connaissance des usages de la division et la multiplication semblent encore fragiles, d'où son recours fréquent à l'addition.

Cinq problèmes parmi les 12 sont traduits correctement. Il décompose à trois reprises les résultats numériques qu'il obtient par ses calculs : par exemple, pour le problème n°4, il part de 45 (longueur en mètres d'un des deux terrains) et écrit en tâtonnant 5 x 8 = 40 + 5 = 45, ces données numériques n'étant pas mentionnées dans le problème. Dans l'énoncé n°9, il propose 800 + 10, afin de retrouver 810 (donnée de l'énoncé), somme à laquelle il ajoute 90, autre donnée de l'énoncé. Pour le problème n° 11, N. calcule 12 + 3 et trouve 15 ; il entoure l'addition, réfléchit un instant et s'exclame qu'on « pourrait aussi faire 'fois' ». Le nombre 15 lui a sans doute rappelé le produit de la multiplication 3 x 5 qu'il obtient par récupération de faits arithmétiques. Il propose alors ce calcul en me disant que c'est « pareil », car il aboutit au même résultat. Cependant, ce calcul n'a pas de lien avec la situation en question. Ces décompositions lui prennent du temps, car il part de 1 à chaque fois qu'il veut multiplier et il décline ainsi la table jusqu'à trouver ce qu'il cherche ou s'en rapproche. Pour l'énoncé n°12, il mène un bon raisonnement arithmétique en entourant l'addition et la multiplication, cependant il propose les calculs suivants : 30 + 30 + 30 + 30 + 30 et 5 x 6, au lieu de proposer 5 x 7 et éventuellement l'addition correspondante. Il considère également qu'une semaine est composée de six jours, ce qui peut être une erreur d'inattention. Certains enfants proposent aussi cinq ou parfois six, considérant que le week-end ne compte pas dans la semaine. L'addition successive et la multiplication ont bien un rapport pour N., toutefois cela reste encore confus pour lui.

Justifications écrites et orales

	Pb 1	Pb 2	Pb 3	Pb 4	Pb 5	Pb 6	Pb 7	Pb 8	Pb 9	Pb 10	Pb 11	Pb 12	**TOTAL**
Justification écrite	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	0/1	1/1	1/1	8/12
Justification orale	0/1	1/1	1/1	0/1	1/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	1/1	1/1	5/12

N. produit plus de justifications correctes (orales et écrites confondues) que de calculs corrects. Cela peut témoigner d'une certaine compréhension du sens de la situation bien qu'il puisse éprouver des difficultés à mettre en calcul et parfois même choisir la bonne opération, N. parvient à exposer ce qu'il comprend de la situation et ce y est attendu. Il obtient un score de huit justifications écrites versus cinq justifications orales correctes.

Il produit deux justifications écrites inadaptées et ne peut répondre aux problèmes n°4 et 10. Pour l'énoncé n°8, il fournit une réponse non numérique (voir page suivante), tandis que pour l'énoncé n°9, il commet une confusion entre les deux variables du problème et répond « il faut 900 portions de fromage ». Bien que N. cite bien la variable « portions de fromage » dont il est question, il évoque la nécessité d'une telle quantité de portions, et non pas la possibilité comme le suppose la question (« combien pourra-t-on faire de portions (…) ? »). Sa justification orale reste floue et ne suffit pas à témoigner de la bonne compréhension de la situation.

Concernant ses justifications orales correctes, il relève avec justesse, dans le problème n°3, que « manger, c'est comme dépenser, alors j'ai fait la soustraction » ou encore pour le n° 11 « il avance 12km en bus, donc c'est 'plus', mais à pieds aussi, c'est la même chose (…). S'il avait reculé, on aurait fait 'moins' ». N. établit du lien entre le lexique de l'énoncé et la traduction arithmétique, en particulier dans le cas des problèmes additifs.

Pour les problèmes lui ayant posé des difficultés de justifications orales :

- pour plusieurs problèmes, il justifie son choix par des déductions non adéquates : « c'est 'plus', parce que 'fois' c'est trop loin et 'moins', c'est pas assez ». Pour lui, mais comme pour d'autres enfants, la multiplication est justifiée dans le cas d'un grand résultat numérique, contrairement à l'addition ou la soustraction. Il s'agit d'une tendance qui a été observée à plusieurs reprises dans l'étude : beaucoup d'enfants associent la multiplication à de grands nombres, principalement de grands résultats (supérieurs à 100), lorsqu'il s'agit de justifier à l'oral leur choix d'opération.
- pour le problème n°8 : après avoir lu l'énoncé, il s'exclame « ah ça, je sais !.. est-ce que je suis obligé de faire un calcul ou je peux mettre la réponse ? ». Je l'enjoins à

essayer de choisir l'opération et la réaliser s'il le souhaite. Il produit un dessin adéquat, mais n'arrive pas à trouver le calcul, il écrit donc « c'est l'autoroute » en justifiant à l'oral qu'il a appris ce mot hier en roulant en voiture avec sa mère : « quand ça fait beaucoup de kilomètres, ben ça s'appelle l'autoroute, alors je sais que c'est ça ». Cette réponse, surprenante au premier abord, va à l'encontre de la croyance généralisée chez les élèves selon laquelle toute réponse à un problème arithmétique doit contenir une donnée numérique. Il s'agit du seul problème dont la justification écrite est inadaptée.

Dans sa manière de résoudre les problèmes, N. semble recourir à la stratégie « compute first, think later » : il envisage d'abord les données numériques, il les considère et les décompose, avant de déduire la situation décrite et déterminer le plan opératoire à mener. N. a souvent recours au support illustratif, pour autant il applique un certain sens du détail qui le dessert : il semble se perdre dans ce qu'il dessine, s'attacher à des détails, il prend un certain plaisir à dessiner. À la fin de la séance, il me demande s'il peut emporter la feuille de brouillon « pour la montrer à [ses] parents »

3.2 Passation de E., 9 ans 6 mois

La passation des 12 problèmes lui a pris 34 minutes et 29 secondes. E. prend le temps de se relire à la fin de chaque problème, ce qui n'est pas le cas de la majorité de ses camarades. Il fait preuve d’une bonne autonomie de travail, s’autocorrige à voix haute, témoignage d’un niveau de conscience de sa démarche de recherche. E. sait nommer les opérations par leur nom. Il semble serein et m’annonce au cours de l’épreuve qu’il aime beaucoup la résolution de problèmes.

Supports externes

E. n'utilise qu'à deux fois le dessin, pour les problèmes n°3 et n°4, et ce de manière adaptée à la situation. Il dessine 11 ronds (prunes), puis en barre trois pour le premier ; pour le n°4, il me demande s'il peut aller chercher sa règle (ce qui lui est accordé), puis il commence à tracer un trait de 45cm et un autre de 39cm (« comme ça, j'ai juste qu'à changer et mettre en mètres, c'est pareil »). Il accole deux feuilles pour pouvoir tracer les lignes en entier, puis s'engage dans la soustraction après avoir indiqué l'écart par une flèche à deux pointes. Il est le seul à avoir également eu recours à la manipulation de pions et ce dans le but de vérifier son résultat obtenu avec son schéma (problème n°3). Concernant le problème n°5, avec les crayons à ranger dans des boîtes, E. semble dans l'embarras et me dit qu'il « ne [voit] pas comment le dessiner ». Il n'arrive pas non plus à déterminer l'opération à mener pour ce problème. Bien qu'il n'ait recours que peu de fois aux supports externes, E. en ressent le besoin lorsqu'il est confronté à un problème lui posant des difficultés de résolution. Pour certains sujets de l'étude, ces usages du dessin a une visée de réassurance plutôt qu'une aide effective à la recherche de stratégie de résolution. Pour E., il s'agit plus de trouver le bon outil que de se rassurer.

Choix de l'opération et traduction arithmétique

	Pb 1	Pb 2	Pb 3	Pb 4	Pb 5	Pb 6	Pb 7	Pb 8	Pb 9	Pb 10	Pb 11	Pb 12	**TOTAL**
Choix de l'opération	1/1	1/1	0/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	9/12
Traduction Arithm.	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	1/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	9/12

E. détermine correctement neuf opérations sur 12 : il opte pour l'addition et la multiplication pour toutes les situations dont leur usage est adéquat. Il choisit la division pour deux des trois problèmes dont la division est nécessaire à leur résolution (associé ou non à la multiplication réitérée). E. sait repérer les opérations à mettre en œuvre dans presque toutes les situations données. Le problème n°3 le met en échec, car il n'entoure strictement que l'addition, alors qu'il réalise une addition à trou et bien que son calcul le mène à la bonne réponse numérique. Pour le problème n°5, il multiplie les deux données de l'énoncé sans effectuer de division. Enfin, pour le problème n°9, il n'entoure rien, mais propose tout de même un calcul (multiplication des deux données). Ne sachant que faire de son calcul, il ne propose pas de justification orale ou écrite. Il juge son résultat comme n'étant sans doute pas le bon, aussi il passe à la suite.

E. réalise un score de 9/12 pour la traduction arithmétique, ce qui est également un bon score . En effet, au problème n°3, il procède à une addition à trou (8 + 3 = 11) et ne trouve pas d'autre opération possible lorsque je le sollicite. Pourtant, il s'agit d'un problème pour lequel beaucoup d'enfants choisissent la soustraction, d'emblée ou par sollicitation. Il arrive par ailleurs à entourer l'addition et la soustraction pour d'autres problèmes, lorsqu'il procède à une recherche de complément. Pour le problème n°4, il entoure correctement « soustraction », conforté par son dessin, mais il propose l'opération « 39 – 45 = 6 ». Il ne s'agit donc pas d'une erreur de calcul, mais d'un mauvais agencement (*Inad*). À l'oral, il justifie son calcul en disant : « il y a un écart, alors j'ai fait la soustraction (…). J'ai comparé les terrains et trouvé 6 ». Il a su trouver le bon résultat mentalement, mais n'a pas trouvé ce résultat en calculant. Enfin, il résout sans difficulté le dernier problème par une multiplication, mais au moment de la justification orale, il entoure également la soustraction (« on aurait pu faire une soustraction »). Je lui demande alors quel calcul il aurait mené, il commence à rédiger « 35 - ... », mais ne sait poser l'opération. Il maintient la possibilité de la soustraction, tout en expliquant que « c'est une histoire de jours, c'est du temps alors on peut retrouver le nombre de jours en faisant une soustraction ».

Malgré un sens et une maîtrise opératoires à première vue satisfaisants, E. commet à deux reprises des confusions concernant la commutativité de la multiplication. Pour le problème n°5, il propose 252 x 36 et n'est pas satisfait de sa réponse, il essaie alors 36 x 252 en me disant « j'essaie ça (…) ça sera pas pareil ». Il commet une erreur de calcul et aboutit à un résultat inférieur à celui obtenu auparavant, ce qui lui convient.

<u>Justifications écrites et orales</u>

	Pb 1	Pb 2	Pb 3	Pb 4	Pb 5	Pb 6	Pb 7	Pb 8	Pb 9	Pb 10	Pb 11	Pb 12	**<u>TOTAL</u>**
Justification écrite	1/1	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	9/12
Justification orale	1/1	1/1	1/1	1/1	0/1	0/1	1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1/1	9/12

Concernant les justifications orales et écrites, E. obtient pour ces deux dernières un score de 9/12 : il n'arrive pas à justifier, à l'oral et à l'écrit, les problèmes n°5, n°6 et n°9. Les justifications orales d'E. sont très fines, il semble avoir une bonne compréhension des attentes de la tâche et exprime son raisonnement de manière très juste.

E. prête une attention particulière au caractère plausible de ses réponses : à plusieurs reprises, il met en doute les réponses qu'il propose. Dans le problème n°5, il prend le temps de réfléchir après la rédaction de sa phrase réponse : « c'est trop grand comme chiffre... ». Il se reprend également pour les problèmes n°8 et n°9 ; il proposait initialement un résultat numériquement aberrant pour ces problèmes et réussissait à s'en rendre compte, sans pour autant réussir à trouver le bon résultat.

Les résultats d'E. mettent en évidence des scores plutôt bons par rapport à la moyenne établie, malgré quelques fragilités dans la maîtrise des concepts arithmétiques, en particulier la division, ce qui reste normal vis-à-vis du fait qu'il soit en CM1. Il obtient 9/12 pour chacune des catégories, ce qui témoigne d'une certaine homogénéité dans ses compétences. Ces scores ne sont toutefois pas attribués aux mêmes problèmes pour le choix de l'opération et la traduction arithmétique : E. réussit à bien choisir l'opération et n'arrive pas à traduire arithmétiquement ou inversement. En revanche, il est intéressant de constater que les scores de justification écrite coïncident avec ceux de justification orale, ce qui signifie E. a su étayer à l'oral ses phrases-réponses en expliquant sa démarche avec pertinence, il sait expliciter son raisonnement à autrui.

4 ANALYSES DES RÉSULTATS

4.1 Traitement des données relatives à la population

4.1.1 Répartition de la population

L'âge moyen est de 9 ans et 10 mois. Dans un souci d'équité, les critères sexuels ont été contrôlés : 16 garçons et 15 filles ont participé à l'étude, correspondant à un sexe-ratio de 0,9.

Effectif total	Filles	Garçons	Âge moyen	Plus jeune	Plus âgé
31	15 (48%)	16 (52%)	9 ans 10 mois	9 ans 4 mois	10 ans 2 mois

Tableau 2 : âges des sujets de l'étude

4.1.2 Catégories socioprofessionnelles

Pour les besoins de l'étude, une seule catégorie a été retenue par enfant (catégorie la plus élevée par parent). Nous nous sommes appuyés sur la liste des Professions et Catégories Socioprofessionnelles issue des travaux de l'INSEE (PCS 2003). Il est à noter que les chiffres de notre étude ne correspondent pas aux données de l'INSEE de 2013, regroupant la répartition des catégories socioprofessionnelles en France. Toutefois, ces données ont été recueillies afin d'avoir une estimation de la répartition des PCS de l'échantillon.

4.2 Résultats obtenus aux problèmes

	Choix opération (/1)	Traduction Arithmétique (/1)	Justif. É (/1)	Justif. O (/1)	Moyenne du total de points par problème (/4)
Problème 11	0,9	**1**	**1**	**0,9**	**3,8**
Problème 1	**1**	**1**	**1**	0,8	**3,7**
Problème 2	**1**	**1**	0,8	**0,9**	**3,7**
Problème 12	0,9	0,8	0,9	**0,9**	**3,5**
Problème 3	0,9	0,9	0,9	0,6	**3,3**
Problème 7	0,5	0,6	0,8	0,6	**2,5**
Problème 6	0,5	0,6	0,7	0,5	**2,4**
Problème 8	0,6	0,5	0,6	0,5	**2,2**
Problème 4	0,6	0,4	0,5	0,5	**2**
Problème 9	0,4	**0,2**	0,4	**0,2**	**1,2**
Problème 10	**0,3**	0,3	**0,3**	**0,2**	**1,2**
Problème 5	**0,3**	**0,2**	**0,3**	**0,2**	**0,9**

Tableau 3 : Classement des problèmes par ordre de réussite et niveau de difficulté

Le tableau ci-dessus présente le classement des problèmes en fonction des moyennes du total des points par problème. Il permet d'avoir un aperçu des résultats moyens obtenus pour chaque catégorie. Les problèmes sont classés par ordre croissant, en fonction de la moyenne du total de points par problème. Pour chaque critère, les données mises en gras correspondent aux scores moyens les plus élevés (vert) et les plus bas (rouge). Les données brutes sont reportées dans les annexes.

La zone verte comprend les problèmes les mieux résolus, la zone orange les problèmes moyennement résolus et en rouge les moins bien réussis. Ces zones ont été déterminées par calcul de l'écart-type. La moyenne des scores obtenus pour l'ensemble des problèmes se situe autour de 2,5/4. Cinq problèmes sont très bien réussis, quatre ont des scores autour de la moyenne et trois sont peu réussis (score moyen de 1/4 pour ces trois énoncés).

On relève une grande différence entre la moyenne obtenue pour le problème le mieux réussi (3,8/4) et le problème le moins bien réussi (0,9/4). Cette différence significative de scores met en évidence l'écart de difficulté des énoncés, certains étant en moyenne plus souvent résolus correctement que d'autres.

Les points suivants détaillent les résultats obtenus par la population, par comparaison des différentes catégories de cotation.

4.2.1 « Choix de l'opération » versus « Traduction arithmétique »

	Choix opération	Traduction arithmétique	*Écart en %*
Problème 1	**100,0%**	96,8%	***3,2%***
Problème 2	**100,0%**	**100,0%**	***0%***
Problème 3	87,1%	**93,5%**	*6,5%*
Problème 4	**58,1%**	41,9%	*16,1%*
Problème 5	**29,0%**	22,6%	*6,5%*
Problème 6	54,8%	**61,3%**	*6,5%*
Problème 7	45,2%	**58,1%**	*12,9%*
Problème 8	**64,5%**	48,4%	*16,1%*
Problème 9	**41,9%**	22,6%	***19,4%***
Problème 10	**32,3%**	29,0%	***3,2%***
Problème 11	93,5%	**100,0%**	*6,5%*
Problème 12	**93,5%**	80,6%	*12,9%*
Totaux M réussite	**66,7%**	**62,9%**	

Tableau 4: Pourcentages de réussite en "Choix de l'opération" versus "Traduction arithmétique"

Les résultats du « choix de l'opération » et de la « traduction arithmétique » ont été reportés dans le tableau n°5 ci-dessus. Les écarts en pourcentage figurent dans la dernière colonne. On peut constater que huit problèmes sur 12 sont mieux réussis en fonction du critère du « choix de l'opération » versus « traduction arithmétique ». Cela signifie que plus d'enfants ont effectivement réussi à choisir la bonne opération qu'ils n'ont su agencer l'opération correctement.

Le problème n°2 donne lieu à des résultats maximums pour ces deux critères. Il s'agit d'un énoncé souvent réussi (score moyen de 3,7/4). Le problème n°5 est celui dont les pourcentages du « choix de l'opération » et de la « traduction arithmétique » sont les plus bas et cet énoncé est celui qui est le moins bien réussi en moyenne.

La « traduction arithmétique » donne lieu à des scores plus élevés que ceux du « choix de l'opération » pour les problèmes n°3, 6, 7 et 11. Ces quatre problèmes sont additifs, les trois premiers pouvant être résolus par une soustraction et le n°11 par une addition. En effet, pour les problèmes mobilisant une soustraction, beaucoup d’enfants ont entouré l’addition et mené une addition à trou, sans accepter la soustraction : dans ce cas, le point du choix opératoire n’est pas attribué, mais la traduction arithmétique correcte (si les termes sont bien agencés). Cela pourrait expliquer cette différence de scores pour ces problèmes.

L'écart le plus important entre les scores de « choix de l'opération » et de « traduction arithmétique » concerne le problème n°9. Il s'agit d'un énoncé rarement réussi et pour lequel le choix de l'opération est plus souvent correct que traduit arithmétiquement. On note en effet un écart de 19,4% pour ce problème. La division n'est pas encore bien maîtrisée en CM1, mais les enfants disposent de connaissances sur la notion de partage que comprend cette opération. Sans pouvoir traduire ce problème par une opération, ils savent tout de même entourer la division. De plus, la présence du terme « portion » dans l'énoncé peut leur fournir un indice sémantique (voir partie 4.5 de la partie pratique). La différence la plus faible entre ces deux critères est nulle pour le problème n°2, ce qui est normal puisque l'on relève 100% de réussite pour le choix de l'opération et la traduction arithmétique. Les énoncés n°1 et 10 affichent un faible écart de 3,2% chacun : le premier présente de bons taux de réussite pour ces deux critères et de manière générale, tandis que le dixième problème fait partie des moins bien réussis. Pour le problème n°1, le choix de l'opération plafonne à 100% de réussite et la

« traduction arithmétique » à 96,8%, ce qui reste un bon score. L'énoncé n°10 nécessite une division, tout comme le n°9, pourtant l'écart entre ces deux problèmes est important. L'explication possible pourrait être que le recours à la division est plus spontané pour le problème n°9 que pour le n°10, qui engage de surcroît des mètres et des euros (unités de mesure hétérogènes). De plus, dans le problème n°10, aucun lexique ne laisse supposer qu'il faut utiliser la division.

Toutefois, les moyennes des pourcentages totaux de ces deux critères ne sont pas si éloignées : on relève un pourcentage de réussite moyen de 66,7% pour le « choix de l'opération » versus 62,9% pour la « traduction arithmétique », soit un écart minime de 3,8%.

4.2.2 Nombre d'erreurs de calcul (*EC*) en « traduction arithmétique »

Un bon choix opératoire peut mener à une traduction arithmétique correcte, incorrecte ou absente. Le tableau n°6 ci-dessous met en évidence le nombre de points attribués avec *EC*, associés aux scores de « traduction arithmétique », ainsi que les pourcentages de fréquence des *EC*. Il apparaît que 51 *EC* ont été commises sur le total de points attribués pour l'ensemble de la population, ce qui représente un taux d'*EC* de 21,8%.

	Total des points attribués en Trad. Arithm (/ 31)	**Pourcentage de fréquence des *EC***
Problème 1	30 (dont 5 EC)	20,0%
Problème 2	31 (dont 6 EC)	19,4%
Problème 3	29 (dont 4 EC)	13,8%
Problème 4	13 (dont 4 EC)	30,8%
Problème 5	7 (dont 6 EC)	85,7%
Problème 6	19 (dont 6 EC)	31,6%
Problème 7	18 (dont 2 EC)	11,1%
Problème 8	15 (dont 4 EC)	26,7%
Problème 9	7 (dont 2 EC)	28,6%
Problème 10	9 (dont 8 EC)	88,9%
Problème 11	31 (dont 2 EC)	6,5%
Problème 12	25 (dont 2 EC)	8,0%
TOTAL	***234 (dont 51 EC)***	

Tableau 5 : Points attribués en "Traduction arithmétique" et pourcentages d'EC.

Le problème n°10 comptabilise le plus d'*EC* : il fait partie des problèmes les moins bien réussis et qui engage une division, dont le diviseur et le dividende sont de grands nombres (963/12). Un seul des enfants ayant réussi à trouver la bonne opération a pu calculer sans erreur à cet énoncé.

Les problèmes n°11 et 12 font l'objet de très peu d'*EC*. En effet, ces problèmes mettent en jeu respectivement une addition simple (12 + 5) et une multiplication (7 x 5) qui peut être possiblement résolue par récupération de faits arithmétiques.

Les énoncés n°5 et 10, quant à eux, soulèvent de nombreuses *EC*. Ces deux problèmes impliquent une division, ce qui peut expliquer le taux d'erreur explicable par le manque de maîtrise opératoire chez les sujets de CM1. Le problème n°9, mettant également en jeu une division, n'affiche qu'un pourcentage d'*EC* de 28,6%. Ce faible pourcentage d'*EC* peut s'interpréter par la possible récupération de faits arithmétiques, comme il a déjà été souligné.

On remarque toutefois que le pourcentage d'*EC* n'est pas toujours dépendant de la réussite moyenne des problèmes : en effet, certains problèmes bien réussis (en vert) n'ont pas systématiquement un faible pourcentage de fréquence d'*EC*, comme le problème n°1 ou n°2, dont on rapporte un pourcentage proche ou égal à 20%. Le problème n°7, par exemple, fait l'objet d'un faible pourcentage d'*EC* (11,1%), alors qu'il fait partie des énoncés moyennement réussis.

Les principales *EC* rencontrées sont des erreurs de retenue (oubli, surcomptage de retenue) et des erreurs d'agencement des opérandes, ces dernières mettant en jeu la bonne opération mais ne permettent pas d'aboutir au bon résultat.

4.2.3 « Justification écrite » versus « Justification orale »

	Justif. Écrite	**Justif. Orale**	***Écart (en %)***
Problème 1	**100,0%**	77,4%	*22,6%*
Problème 2	80,6%	**93,5%**	*12,9%*
Problème 3	**87,1%**	64,5%	*22,6%*
Problème 4	45,2%	**54,8%**	*9,7%*
Problème 5	**29,0%**	19,4%	*9,7%*
Problème 6	**67,7%**	51,6%	*16,1%*
Problème 7	**80,6%**	64,5%	*16,1%*
Problème 8	**58,1%**	45,2%	*12,9%*
Problème 9	**35,5%**	22,6%	*12,9%*
Problème 10	**32,3%**	22,6%	*9,7%*
Problème 11	**96,8%**	90,3%	*6,5%*
Problème 12	**93,5%**	87,1%	*6,5%*
Totaux M réussite	**67,2%**	**57,8%**	***13,2%***

Tableau 6: Pourcentages de réussite en "Justification écrite" versus "Justification orale".

Les scores en « justification écrite » et en « justification orale » sont reportés dans le tableau n°7, sous forme de pourcentage de réussite problème par problème. L'écart en pourcentage est également indiqué. Il ressort de ce tableau plusieurs éléments développés ci-dessous.

Les problèmes de l'étude sont généralement mieux justifiés à l'écrit qu'à l'oral, ce qui confirme la seconde hypothèse. En effet, le tableau révèle en vert les problèmes les mieux justifiés en modalité écrite et en modalité orale. On remarque alors que 10 des 12 problèmes de l'étude sont mieux justifiés à l'écrit. Les problèmes les mieux justifiés à l'oral sont les énoncés n°2 et 4.

Toutefois, on observe que la différence entre les moyennes de réussite de l'ensemble des problèmes pour les modalités orale et écrite n'est pas si élevée : 67,2% de réussite pour les justifications à l'écrit contre 57,8% à l'oral, ce qui fait un écart de 9,4%. Bien que les sujets arrivent à justifier plus correctement à l'écrit qu'à l'oral, ils savent toutefois fournir des réponses adéquates à l'oral. Les écarts pour chaque problème, reportés dans la marge, sont en moyenne de 13%.

L'écart le plus petit entre les moyennes de « justification écrite » et « justification orale » concerne les problèmes 11 et 12, avec une différence de 6%. Ces deux problèmes ont donné lieu à des scores élevés pour ces deux modes de justification. Pour le problème n°11, on relève une seule justification écrite inadaptée (« Il reste 15m a pied », ne répondant pas exactement à la question et comportant une confusion de l'unité de mesure). Aucun enfant n'a été dérangé par la différence entre des kilomètres entrepris en bus ou à pied. Pour le problème n°12, les trois réponses inadaptées relatent des justifications par déduction (« ça pouvait pas être la soustraction, ni la multiplication (…) et pas la division non plus, donc j'ai fait l'addition »), ce qui demeure insuffisant pour justifier le choix de l'opération effectuée. Au vu de la simplicité relative de ce problème, il n'est pas à exclure qu'une certaine fatigabilité soit à l'origine de ces quelques erreurs survenues en fin d'épreuve.

Le problème n°3 met en évidence le plus grand écart de réussite (23%) entre les justifications écrites et orales. Il s'agit pourtant d'un problème généralement bien réussi lorsque l'on considère les critères du « choix de l'opération » et de la « traduction arithmétique ». Il est également bien justifié à l'écrit, puisque 27 sujets arrivent à formuler la réponse correctement. Pour autant, à l'oral, seuls 20 des sujets arrivent à bien justifier. Les 11 enfants n'ayant pas su répondre correctement ont effectué six justifications orales inadéquates et cinq absentes. Parmi les réponses inadéquates, on peut relever principalement des difficultés à restituer la chronologie de la situation décrite, ce qui donne lieu à des confusions (« il en avait 11, il en a mangé 8, alors il en reste 3 »). Cinq enfants n'ont pas su justifier leur calcul et leur raisonnement. Malgré la présence de petites opérandes, il se peut que les sujets aient été mis en difficulté par la justification de la recherche de la transformation négative (nombre de fruits qui ont été mangés), moins évidente que celle de la situation finale.

4.2.4 « Choix de l'opération » et « Traduction arithmétique » versus « Justifications » orale et écrite confondues

	Justif. Écrite ABS	**Justif. Orale ABS**	***Total de justif. ABS***	**Choix de l'op. + Trad. Arithm.**
Problème 1	**0**	**0**	***0***	98,4%
Problème 2	1	**0**	*1*	100,0%
Problème 3	0	5	*5*	90,3%
Problème 4	8	11	*19*	50,0%
Problème 5	**17**	**19**	***36***	25,8%
Problème 6	3	5	*8*	58,0%
Problème 7	3	8	*11*	52,0%
Problème 8	5	6	*11*	56,5%
Problème 9	12	11	*23*	32,0%
Problème 10	16	16	*31*	31,0%
Problème 11	**0**	**0**	***0***	97,0%
Problème 12	2	1	*3*	87,1%
Totaux	**67**	**82**	***149***	

Tableau 7 : Nombre de "Justifications orales et écrites" absentes versus pourcentage de réussite en "Choix de l'opération" et "Traduction arithmétique".

Les résultats montrent qu'il y a davantage de justifications orales et écrites absentes que de justifications inadéquates. Pour autant, cet écart n'est pas si marqué, puisque l'on constate 76 justifications orales inadaptées versus 81 absentes et 55 justifications écrites inadaptées versus 67 absentes.

Le tableau n°8 ci-dessus permet d'apprécier le nombre de justifications écrites et orales absentes comparé au pourcentage de réussite du choix de l'opération et de la traduction arithmétique. Une tendance s'observe rapidement : mieux un problème est réussi quant au choix et à la réalisation opératoires, moins on peut constater d'absence de justification. Autrement dit, les sujets proposent une justification écrite et orale lorsqu'ils réussissent à résoudre l'énoncé. Les problèmes n°1 et 2, réussis par quasiment tous les sujets, n'ont donné lieu qu'à une seule absence de justification. On note également qu'un quart des réponses absentes portent sur le problème n°5, tant à l'oral qu'à l'écrit. Le problème n°10 donne lieu à

16 réponses absentes. Ces deux énoncés sont en effet les moins bien réussis en moyenne par l'ensemble des sujets : le problème n° 5 comptabilise un score moyen de 1/4 et le n°10 1,2/4 (cf. tableau n°4). On peut donc supposer qu'il est aussi difficile de résoudre ces problèmes que de les justifier.

	Justif. Écrite Inad.	**Justif. Orale Inad.**	***Total de Justif. Inad.***	**Choix de l'op. + Trad. Arithm.**
Problème 1	**0**	7	*7*	98,4%
Problème 2	5	**2**	*7*	100,0%
Problème 3	4	6	*10*	90,3%
Problème 4	**9**	3	*12*	50,0%
Problème 5	5	6	*11*	25,8%
Problème 6	7	10	*17*	58,1%
Problème 7	3	3	*6*	51,6%
Problème 8	8	11	*19*	56,5%
Problème 9	8	**13**	***21***	32,3%
Problème 10	5	8	*13*	30,7%
Problème 11	1	3	***4***	96,8%
Problème 12	0	3	*3*	87,1%
Totaux	**55**	**75**	***130***	

Tableau 8: Nombre de "Justifications orales et écrites" inadéquates versus pourcentage de réussite en "Choix de l'opération" et "Traduction arithmétique".

Le tableau n°9 met en comparaison le même pourcentage moyen de réussite du choix de l'opération et de la traduction arithmétique avec le nombre de justifications inadéquates. Alors qu'il donne lieu au plus grand nombre de justifications absentes (pour rappel, 36), le problème n°5 ne comptabilise que 11 justifications inadéquates. Ce problème est également celui qui est le moins bien réussi en prenant compte la moyenne du choix de l'opération et de la traduction arithmétique. Des exemples de productions sont reportés dans la partie 4.5.

Toutefois, ayant établi qu'en moyenne les sujets justifient plus correctement les problèmes à l'écrit qu'à l'oral, il convient de nuancer le fait qu'un problème peut être bien justifié à l'oral, mais pas à l'écrit. À noter que cela concerne six enfants pour 14 réponses. Les justifications écrites concernées relèvent des réponses incomplètes (restitution du résultat sans phrase) ou bien des contresens (« il en reste 3 » pour « on a mangé 3 » pour le problème n°3). Cela pourrait être chez ces sujets une difficulté propre à la formulation écrite de la réponse. La justification orale leur est plus aisée, ce qui témoigne pour autant d'une compréhension de la situation décrite.

4.3 Recours aux supports externes

	Dessin	
	Adéquat	Inadéquat
Problème 1	1	
Problème 2		1
Problème 3	1	
Problème 4	3	
Problème 5	1	1
Problème 6	1	
Problème 7	1	
Problème 8	2	
Problème 9		
Problème 10		1
Problème 11		1
Problème 12		
Totaux	***10***	***4***

Tableau 9: Nombre de recours au dessin.

Le tableau ci-contre présente le nombre de recours au support externe (dessin). Des exemples de représentations graphiques adéquates et inadéquates sont proposés dans les annexes.

On constate que les représentations schématiques produites par les sujets de l'étude sont plus souvent adéquates qu'inadéquates, ce qui témoigne d'un bon sens de la représentation de la situation.

Les problèmes n°9 et 10 n'ont pas été représentés graphiquement. Il s'agit de problèmes rarement réussis. Peut-être sont-ils plus difficiles à représenter graphiquement que le problème n°5, également dans la tranche des problèmes moins bien réussis et mobilisant une division. Ce dernier donne lieu à deux représentations, dont une correcte et une inadaptée : des pots et des crayons (éléments dénombrables) sont sans doute plus aisément représentables que des portions de fromages pesant 90g et des mètres de soie rattachés à un prix.

D'après le tableau, on constate que le problème n°4 donne lieu à trois représentations graphiques illustrant la situation avec pertinence. Il s'agit pour rappel d'un problème de comparaison et ce dernier suscite chez trois enfants le besoin de visualiser la situation. Ces trois schémas sont semblables et se composent de deux parallélogrammes, dont un est plus grand que l'autre, mais parfois de la même longueur. Pour chacun de ces dessins, un segment ou une flèche souligne la notion d'écart de distance entre les deux.

Un seul enfant a recours à la manipulation de pions : il s'agit de E., présenté dans l'étude de cas. Il se sert des pions pour vérifier son schéma lors de la résolution du problème n°3. Il obtient le même résultat qui s'avère être correct. Ce détail clinique est à considérer : E. ressent le besoin de vérifier son schéma par le comptage de pions, pour ensuite appuyer son calcul par ses deux démonstrations. La matérialisation de la situation peut être un appui au raisonnement arithmétique, hautement abstrait, et permet de mettre en rapport une démarche informelle à une procédure plus formelle, symbolique. Certains enfants (ré)investissent ces supports (dessin, manipulation) pour se rassurer et s'assurer de leur résultat, voire même construire leur plan d'action. Les manières de représenter la situation, même si elles ne traduisent pas toujours exactement ce que l'enfant envisage, donne un aperçu de la manière dont l'enfant conçoit la situation.

4.4 Temps de passation

	Temps moyen
Problème 11	1'
Problème 1	1'13"
Problème 12	1'11"
Problème 2	1'32"
Problème 7	2'14"
Problème 3	2'17"
Problème 8	2'24"
Problème 9	2'26"
Problème 6	2'32"
Problème 10	2'38"
Problème 4	3'18"
Problème 5	3'35"

Tableau 10: Classement chronologique (ordre croissant) des problèmes.

Le tableau ci-contre (n°11) organise les problèmes par ordre croissant de temps moyen de résolution, du plus rapide au plus long à résoudre. Le temps de passation moyen pour l'ensemble des douze problèmes s'élève à 24 minutes et 42 secondes, arrondi à 25 minutes. On peut souligner une assez grande disparité : le sujet ayant été le plus rapide a consacré 13 minutes et 30 secondes, tandis que l'enfant ayant passé le plus de temps a mis 41 minutes.

Guillon (2014) estime que la passation de l'épreuve est de 33 minutes. Dans notre étude, nous avons mesuré le temps effectif de résolution, en interrompant le chronomètre lors de la lecture par l'expérimentateur et des éventuelles interventions de l'enfant lors de l'épreuve (questions relatives au matériel, au déroulement). La fin du chronométrage prend lieu lorsque l'enfant a terminé de rédiger sa phrase réponse. Aussi, la justification orale n'est pas chronométrée, ce qui permet au sujet de prendre le temps d'élaborer son raisonnement.

Le problème n°11 est l'énoncé nécessitant le moins de temps de résolution, avec une moyenne de 1 minute. Le problème n°5, quant à lui, est celui demandant le plus de temps de réflexion, avec une moyenne de 3 minutes et 35 secondes. Il s'agit des énoncés ayant respectivement été le mieux et le moins bien réussi en moyenne. Si on rapproche ce tableau de celui présentant l'ordre de réussite des problèmes en moyenne, on peut observer que ces classements ont des similitudes : l'ordre des problèmes de ces tableaux se suit en fonction des temps et des scores moyens. Les sujets consacrent moins de temps à un problème qu'ils résolvent bien. Aussi, ils passent plus de temps sur les problèmes qu'ils traitent avec davantage de difficultés.

4.5 Analyse qualitative des résultats

Cette sous-partie présente une synthèse des observations recueillies au cours des passations, problème par problème.

Problème n°1
Ce problème, très souvent réussi, introduit l'épreuve en douceur. Il ne soulève pas d’inquiétude particulière, tous les sujets ont su choisir l'opération et traduire arithmétiquement, malgré quelques erreurs de calcul relevées (principalement surcomptage de la retenue). On constate tout particulièrement le caractère figé des réponses écrites : une très grande majorité des enfants propose : « Le fermier/Il a 32 poules (en tout) ». Autre remarque concernant la nature stéréotypée des phrases-réponses, on relève qu'un des enfants propose « En tout il a 32 poules » et amorce par la suite toutes ses justifications écrites par « en tout ». Les sujets appuient très souvent leur justification orale sur le « en tout » compris dans la question pour étayer leur choix opératoire (addition). D'aucuns relèvent également « combien » et le « et » dans « 23 poules blanches *et* 9 poules noires ». Très généralement, la recherche du tout a bien été pressentie et exprimée.

Problème n°2

La notion de dépense évoque pour beaucoup d'enfants la soustraction. Certains se justifient en relevant le caractère temporel de ce problème : « je possédais avant 275€, puis je dépense 34€ donc je retire », « j'avais des euros, mais c'est moins car je dépense ». Guillon (2014) remarque que la présence du « je » dans l'énoncé a suscité des réactions : lors des passations, cet élément a suscité quelques questionnements (« c'est une fille ou un garçon ?.. je mets il ou elle ? »), mais cela ne les a pas empêchés de poursuive la résolution. Il s'agit également d'un problème ayant soulevé peu de difficultés.

Problème n°3

La progression des énoncés met à jour la présence de « combien/en tout » pouvant rappeler le problème n°1. Pour autant, peu d'enfants tombent dans le piège du choix de l'addition et entourent la soustraction, aucun n'établit de lien avec le premier problème. Les données numériques sont petites et les erreurs de calculs relevées sont principalement des maladresses de résolution opératoire (confusion des procédures additives et soustractives). Quatre sujets ont su calculer, mais ont effectué des confusions lors de la justification écrite et/ou orale : « il reste 3 prunes dans mon panier » ou encore « on a 11 prunes, on en a mangé 8 alors il en reste 3 » (à l'oral). Plusieurs sujets justifient à l'oral la soustraction en assimilant le fait de manger à « retirer quelque chose » (« manger, c'est comme si t'enlèves »). Peu d'enfants ont procédé par récupération de faits arithmétiques, alors qu'il s'agit d'un calcul pouvant être rapidement effectué. La pose du calcul leur a été sans doute nécessaire du fait de la retenue. Deux enfants ont procédé à une recherche de complément en comptant sur leurs doigts et réussissent à trouver le résultat. Ces sujets se sont ensuite engagés dans une addition donnant lieu au résultat compté sur leurs doigts (11 + 8 = 3), ce qui témoigne d'une certaine fragilité dans leur conception de la soustraction et de « l'addition à trou ».

Problème n°4

Beaucoup d'enfants n'ont pas su fournir de justifications écrites et orales (*ABS*). Les sujets ont davantage su justifier à l'oral qu'à l'écrit : cela peut s'expliquer par la présence de deux questions. Concernant leurs justifications écrites, presque tous les enfants répondent à la première question sans poser de calcul. Un seul sujet calcule mentalement, mais ne sait choisir l'opération ni poser le calcul. Plusieurs sujets omettent l'unité ou la confondent par des centimètres. À l'oral, la notion d'écart est souvent évoquée (« 45, c'est plus grand que 39 ») ainsi que la différence de longueur « il fait 6m de plus, il est plus grand », « on cherche combien de plus grand, alors on fait la soustraction »). À l'écrit, on relève plusieurs confusions ou omission de réponses (notamment à la deuxième question). Un enfant propose : « c'est le premier, il fait 45m », ce qui témoigne d'un manque de compréhension de la question concernant l'écart de grandeur des terrains. Pour autant, on constate que les sujets ont su plus souvent choisir la bonne opération qu'ils n'ont su effectuer le calcul et justifier à l'écrit ou l'oral. Il s'agit de l'énoncé ayant suscité le plus de recours au dessin, ces productions s'avérant adéquates. Les schémas présentent tous deux terrains et mettent en avant la notion d'écart (flèche, segment soulignant la différence) et servent de support pour le raisonnement : un des enfants propose la réponse « Le premier terrain dépasse l'autre de 6m ».

Problème n°5

Ce problème recense les scores les plus bas pour toutes les catégories de la grille. Seuls neuf enfants sur 31 arrivent à trouver l'opération et un seul parvient à résoudre correctement l'opération (et neuf avec *EC*). Concernant l'opération, dix optent pour la soustraction et douze se lancent dans la multiplication. On peut remarquer qu'aucun enfant n'a choisi l'addition, sans doute parce qu'aucune notion ou référence à l'ajout n'est référencée ou induite dans cet énoncé de type proportionnalité simple. Un des enfants parvient à multiplier les deux données numériques mais reste dubitatif quant au résultat qu'il juge trop élevé (il s'agit de E., présenté lors de l'étude de cas). Moins d'un tiers des sujets choisissent la division. Ceux-ci n'arrivent pas toujours à poser ni à résoudre l'opération, néanmoins les deux-tiers d'entre eux arrivent à correctement justifier à l'oral : « on cherche le bon nombre de boîtes pour ranger tous les crayons », « contenir... donc c'est dedans (…) et on veut mettre dans chaque boîte, alors il faut ranger des groupes ». Un des sujets amorce un schéma regroupant des sacs de 36 unités, mais s'arrête en cours de procédure car cela lui demande beaucoup trop de temps et choisit la multiplication. Ce problème a donné lieu à certaines manifestations d'anxiété (pincements des lèvres, jambe agitée) et a demandé le plus de temps aux enfants.

Problème n°6

Ce problème de comparaison, à l'instar du problème n°4, ne donne lieu qu'à une seule production schématique. L'éventuelle explication serait qu'il peut sembler plus difficile de représenter des litres (volume) que des mètres (distance). Pour les justifications orales, un des enfants propose : « on cherche à savoir combien de litres... pour remplir... donc j'ai fait la soustraction ». L'hésitation lors de sa justification témoigne d'un certain doute lié au lexique inducteur (« remplir » induit un ajout, qui peut mener à une addition), puisqu'il reprend ensuite son calcul, essaie une addition mais conserve son calcul initial. Un enfant propose une remarque très intéressante concernant la recherche de complément : « quand j'étais petit, je faisais ça (135) plus 'quelque chose' est égal à ça (225), mais là ça serait long ; maintenant je sais faire la soustraction ». En effet, beaucoup de sujets ont procédé à l'addition à trou, voire à des additions successives pour aboutir au résultat, mais finalement la moitié d'entre eux arrivent à opter pour la soustraction.

Problème n°7

Bien qu'il puisse paraître classique et comporte de petites données numériques, ce problème a soulevé plusieurs difficultés, en particulier pour le choix de l'opération et la justification orale. Un enfant s'exclame « c'est drôle, j'ai un cousin qui s'appelle Pierre mais il a 13 ans et mon Papi s'appelle Jean, il a... 72 ans (…) c'est l'inverse ». Tout en ayant établi cela, il rédige sa réponse : « Jean est plus âgé que Pierre de 6 ans ». Son anecdote personnelle a sans doute influencé sa réflexion et l'a induit en erreur, bien qu'il ait fourni la réponse numérique du problème. Cette confusion met en évidence les liens que créent les sujets autour de situations décrites avec leur monde réel, sans toujours les évoquer à haute-voix. Certaines fois, ces liens peuvent aider l'enfant à mieux comprendre, les perdre ou peut-être même les bloquer, s'il s'agit d'un sujet sensible. Un enfant établit une analogie avec le problème n°3 : « c'est pareil, j'ai cherché la différence ». Beaucoup d'enfants résolvent ce problème de tête, sans toutefois réussir à entourer l'opération effectuée mentalement : « j'ai trouvé, mais je ne sais pas ce que c'est... je ne sais pas faire la division, alors je vais choisir ça (…) ça doit être ça ». Un quart des sujets ne savent poser l'opération. Le piège tendu par le lexique inducteur « le plus âgé » n'a influencé que deux sujets : « on cherche le plus âgé, alors on fait plus ». On pourrait émettre l'hypothèse que le recours au nom du signe pourrait avoir comme conséquence une sensibilité au lexique inducteur pour certains sujets ; Meljac et Siegenthaler (2012) précisent qu'il est important de noter si l'enfant utilise le nom de l'opération ou le nom du signe associé.

Problème n°8

Deux tiers des sujets choisissent la bonne opération et, parmi eux, les trois quarts résolvent correctement l'opération : un enfant justifie son choix de la multiplication et relève que « c'est plus rapide que de faire l'addition ». Cet énoncé s'établit autour d'un rapport temps et espace, pouvant être considéré comme un tableau de proportionnalité : quelques sujets arrivent à exprimer cette relation « on sait qu'une heure, c'est 72km, alors on fait fois 5h ». Deux enfants font appel au dessin et représentent des schémas similaires : un segment sous lequel apparaît « 72km = 1h » et, plus loin, cinq autres tronçons. L'un additionne 72 cinq fois, tandis que l'autre s'engage directement dans la pose de la multiplication sans terminer son dessin. Un peu plus de la moitié des sujets arrivent à répondre à l'écrit, ce qui est plutôt encourageant compte-tenu du rapport km/h dont il est question. Quelques sujets arrivent à calculer correctement, mais ne savent comment exploiter leur réponse. Un enfant reste perplexe quant à la question posée : « bah c'est marqué, le trajet durera 5h ! C'est facile, y a pas de calcul ».

Problème n°9

Il s'agit d'un des trois problèmes les moins bien réussis. Plusieurs enfants ont demandé ce que signifie « portion », certains l'ayant lu [pɔrtjõ]. Les synonymes « morceau » ou « part », généralement mieux connus, leur ont été proposés. Sans doute par manque de compréhension de ce mot, un enfant commet une petite confusion dans sa réponse : « on pourra faire 9 fromages ». Tout comme le constate Guillon (2014), beaucoup d'enfants ont majoritairement choisi la multiplication des deux termes numériques, ce qui mène à un résultat numériquement aberrant. Un des sujets, ayant annoncé dès le début de l'épreuve son goût pour les problèmes arithmétiques, mène à voix haute son raisonnement : « je fais 9 x 100, ça fait 900 ; si je retire 90 ça fait bien 810, donc la réponse c'est 90 portions ». Un seul enfant réalise que 81(0) apparaît dans la table de 9.

Problème n°10

Le problème n°10 et le précédent se distinguent par leur niveau de difficulté. De fait, un certain nombre d'enfants, découragés par le problème n°9, « passent » rapidement ce problème et poursuivent l'épreuve. Quelques enfants méconnaissaient le terme « soie », le synonyme « tissu » leur a été suggéré. Un des sujets a proposé une division, ce qui est la bonne opération, mais a mal agencé les opérandes : il propose « 12 : 963 » et obtient 3 après avoir abandonné son calcul (confusion de la technique opératoire de la division avec la soustraction). Il propose toutefois une justification écrite : « Le mètre de soi coûtent 3€ », en dessinant un smiley triste à côté, pour signifier sa réserve quant au résultat trouvé. À l'oral, il justifie le choix de la division : « j'ai fait la division, parce qu'on doit trouver... c'est comme si on découpe le soie tous les 1 mètre, alors on cherche le prix ». La notion de découpage, de partage en parts a bien été comprise par ce sujet, malgré la difficulté de mise en opération. Comme l'énoncent Meljac et Siegenthaler (2012), l'idée de la division est en émergence chez les enfants scolarisés en CM1, mais leur maîtrise opératoire n'est pas suffisamment aboutie. Dans notre étude, peu d'enfants choisissent la division. La plupart d'entre eux s'engagent dans une soustraction des termes. Un des sujets explique son raisonnement : « on sait que 12m coûtent 963€, alors pour trouver 1m, on fait 963 - 11m ». La confusion pourrait s'expliquer par les différentes natures des variables (mètres et euros). Un enfant se justifie : « bah 963, c'est très grand, alors on doit faire moins ». Ces justifications par déduction en fonction de la grandeur des nombres se retrouvent particulièrement chez les sujets qui nomment les opérations par leur symbole arithmétique.

Problème n°11

Les deux derniers problèmes demeurent bien réussis dans l'ensemble. En l'occurrence, le n°11 est celui qui affiche le taux de réussite maximum : la quasi totalité des sujets résout ce problème sans erreur. Guillon (2014) obtient elle aussi des scores maximaux dans son étude pour cet énoncé. Aucun enfant n'est tombé dans le piège tendu par Mialaret et n'a été dérangé par le fait d'opérer avec des kilomètres parcourus en bus et à pied. En revanche, deux sujets ont opté pour la multiplication : pour l'un des sujets, son explication est que « il prend le bus... et ensuite à pied... donc c'est 'fois' » ; pour le deuxième cas, N. présenté dans la partie 3.1, le résultat obtenu par son calcul « 12 + 3 » le mène à faire le lien avec le produit de « 3 x 5 ». Il barre alors l'addition pour entourer la multiplication. Pour les justifications orales, presque tous les enfants évoquent la notion de recherche d'une totalité : « il fallait trouver le total de kilomètres » ou encore le nombre de kilomètres « en tout ».

Problème n°12

L'absence de la deuxième donnée numérique n'a pas été source d'erreurs ou de confusions. Pour ce problème multiplicatif, seuls deux enfants n'entourent pas la multiplication. Beaucoup ont entouré l'addition et la multiplication. Un seul sujet n'arrive pas à résoudre ce problème et dit ne pas le comprendre (« c'est trop dur »). La présentation de l'énoncé, composé d'une seule question, est relevée par certains enfants (« y a que la question ! »). Comme Guillon (2014), un élève considère qu'il y a cinq jours dans une semaine, excluant le week-end, et calcule donc « 5 x 5 ».

5 DISCUSSION

5.1 Synthèse des résultats et vérification des hypothèses

➔ Hypothèse n°1 : *Les élèves de CM1 choisissent plus souvent la bonne opération à effectuer qu'ils ne fournissent de calculs adéquats* : **hypothèse validée**

Les scores démontrent qu'en effet les enfants ont tendance à plus souvent entourer la bonne opération adaptée à la situation qu'ils ne proposent de calculs adéquats. Les enfants de CM1 ont une bonne compréhension des opérations, particulièrement pour les problèmes additifs et multiplicatifs. Pour les problèmes mobilisant la division, on constate un sens opératoire en émergence, mais aussi la technique opératoire n'est pas encore optimale.

Toutefois, les moyennes totales des critères « choix de l'opération » et « traduction arithmétique » ne sont pas si éloignées. Ainsi, beaucoup d'enfants ayant entouré la bonne opération savent tout de même la poser et la résoudre, malgré des éventuelles *EC*, particulièrement prégnantes lors de la résolution de division.

➔ Hypothèse n°2 : *Les élèves de CM1 fournissent plus de justifications écrites adéquates que de justifications orales adéquates* : **hypothèse validée**

En effet, si l'on comptabilise le nombre d'énoncés dont les justifications écrites sont adéquates, on en recense davantage que pour le critère de justifications orales. La nature stéréotypée des réponses écrites pourrait expliquer cette tendance : les enfants reprennent très souvent de manière fidèle la formulation de la question et les termes des énoncés qui leur fournissent un support. Justifier à l'oral nécessite aussi un retour sur sa propre pensée, un regard métacognitif sur des instances cognitives dont on a généralement peu ou pas conscience. Cette introspection est d'autant plus difficile pour un enfant, car il peut avoir du mal à mettre en mots son raisonnement et à cerner l'enjeu d'une telle justification. Toutefois, certains sujets on éprouvé des difficultés à rattacher leur résultat numérique à l'élément recherché, et donc de répondre correctement à la question du problème. L'écart moyen des scores entre les justifications orales et justifications écrites est supérieur à celui des performances en choix de l'opération et traduction arithmétique. Autrement dit, on relève une plus grande variabilité des performances entre justification orale et écrite que pour les critères de la première hypothèse.

5.2 Réponses à l'objectif de recherche

- ✓ Objectif de recherche : pour rappel, l'objectif de recherche de ce travail est d'établir une évaluation des capacités des enfants de CM1 en résolution de problèmes arithmétiques verbaux et l'appréciation de leurs capacités du sens des opérations.

La grille créée à cet effet permet de considérer les erreurs commises et de cerner les difficultés propres à la résolution de problèmes. Afin d'estimer le sens des opérations, la grille d'évaluation distingue le choix de l'opération de la procédure opératoire en elle-même.

D'après les résultats, on peut conclure que les élèves de CM1 disposent d'une bonne maîtrise de résolution des problèmes mobilisant l'addition : les deux énoncés les mieux réussis (n°1 et 11) sont des problèmes engageant une addition. La notion d'ajout associée à l'addition semble bien acquise pour les élèves de CM1.

Concernant les cinq problèmes nécessitant la soustraction, trois sont moyennent réussis (n°4, 6 et 7) et deux sont bien réussis (n°2 et 3). Parmi les trois moins bien réussis, les n°4 et 7 sont des problèmes de comparaison, sujets à davantage d'erreurs que les autres types problèmes additifs (combinaison et changement). Concernant le problème n°3 de type changement, la recherche de transformation négative pourrait expliquer l'écueil rencontré : il est en effet plus facile de résoudre ces problèmes lorsque l'inconnue concerne l'état final.

Les deux problèmes engageant la multiplication (n°8 et 12) donnent respectivement lieu à des scores moyens et bons. Le problème n°8 s'organise autour d'un rapport temporo-spatial. La différence de nature de ces variables pourrait expliquer la difficulté d'accès au sens opératoire, alors même que le calcul est abordable pour des sujets de CM1. Les scores en « choix de l'opération » sont en effet supérieurs à ceux obtenus en « traduction arithmétique » pour cet énoncé. Le problème 12, bien réussi, fait appel à la restitution de faits arithmétiques. Beaucoup d'enfants optent pour la multiplication et certains précisent que l'on aurait aussi pu procéder à une addition réitérée, ce qui témoigne d'une bonne polyvalence des usages et recours possibles à ces opérations.

En revanche, les problèmes de partage, engageant la division, sont les trois énoncés les plus chutés (zone rouge), ce qui peut s'expliquer par une maîtrise opératoire insuffisante. On relève toutefois pour ces énoncés de meilleurs scores en « choix de l'opération » qu'en « traduction arithmétique », ce qui irait en faveur d'un sens opératoire de la division en émergence.

5.3 Limites de cette étude

L'échantillon recueilli n'est pas suffisant pour prétendre à un étalonnage conforme de cette épreuve pour la classe d'âge choisie. De plus, les catégories socioprofessionnelles ne sont pas représentatives de la population française, il s'agit là d'un biais de recrutement. Une étude prenant en compte des critères et disposant d'une population plus importante permettrait de procéder à un étalonnage. Néanmoins, la présente étude permet de justifier les intérêts de la grille construite à cet usage.

Concernant les conditions de test, il faut souligner le fait que trois des passations se sont déroulées en deux temps, ce qui peut également entraîner un biais.

En outre, comme le souligne Fayol (1990), la méthode de l'entretien engage un certain biais méthodologique ; en effet, il est difficile, même pour un adulte, de justifier ce qui oriente la personne vers un choix opératoire. Les processus cognitifs mis en jeu sont nombreux et il est complexe, voire impossible, de les verbaliser avec exactitude car ils ne sont pas tous soumis à un niveau de conscience suffisant. Il souligne également le biais possible induit par les questions de l'examinateur, qui peuvent mener à des interférences attentionnelles avec la tâche en cours, à des hésitations, etc.

L'appréciation des justifications est subjective puisqu'elle est soumise au jugement personnel de l'examinateur. Les modalités de cotation sont présentées dans la partie 2.4.2.3., avec des critères fondamentaux à prendre en compte afin d'évaluer au mieux les productions de l'enfant.

5.4 Intérêts de la grille d'évaluation des problèmes arithmétiques de Mialaret en orthophonie

L'intérêt majeur de ce type d'épreuve réside dans l'observation du mode de raisonnement de l'enfant et des stratégies qu'il met en place face à une situation-problème donnée, plus que dans la catégorisation des types d'erreurs. De plus, ces catégories n'autoriseraient pas à conclure à un type de traitement particulier et ne sauraient refléter le fonctionnement effectif du sujet. Lors des entretiens, une large variété de réponses et de stratégies a pu être constatée. Les glissements de sens sont nombreux, du fait que chacun interprète de manière individuelle (en fonction des connaissances conceptuelles, lexicales, logiques, etc.). Un enfant peut, par un heureux hasard, appliquer une stratégie opératoire connue et aboutir au bon résultat, sans pour autant avoir compris réellement ce qu'il entreprenait. Il n'existe que très peu de classifications des types d'erreurs, notamment à cause des raisons susmentionnées, mais aussi de par la grande variété des instances cognitives mises en jeu dans cette activité. Outre les erreurs, les réussites de résolution sont particulièrement intéressantes à considérer, notamment par la justification orale fournie. Là aussi, de nombreuses justifications adéquates ont pu être recueillies : il n'existe pas *une* justification possible.

Les problèmes arithmétiques verbaux constituent une épreuve indispensable dans l'évaluation des capacités arithmétiques et dans le dépistage de la dyscalculie. Un défaut de compréhension du langage oral et écrit, nuisant à la compréhension de la situation représentée, peut aussi altérer les capacités de résolution, sans difficulté numérique particulière. Ainsi, la grille constituée peut mettre en évidence et éventuellement dissocier des difficultés liées à la compréhension de la situation, du sens opératoire ou de la maîtrise opératoire propre. Elle permet de relever des indices cliniques quant aux stratégies mises en place, tels que le recours au dessin, schéma ou manipulation de jetons. Ces indices sont précieux pour orienter la prise en charge, en fonction des résultats des patients. Il ne s'agit certainement pas d'une « rééducation de la capacité de résolution de problèmes arithmétiques », mais d'un travail de fond autour des instances organisant cette tâche, en partie l'association de connaissances numériques, opératoires et langagières.

Les scores obtenus proposent un « état des lieux » des compétences opératoires et du sens de la situation. Ainsi, il est intéressant de mettre en rapport les scores obtenus avec l'âge et les résultats constatés au cours d'autres épreuves de bilan.

5.5 Perspectives de recherche

Ce travail préliminaire pourrait être poursuivi en élargissant l'échantillon et en proposant ces problèmes à des sujets d'autres tranches d'âge. Meljac et Siegenthaler (2012) estiment que l'intérêt des problèmes de Mialaret concerne les enfants scolarisés de CP. Un étalonnage systématique permettrait de pouvoir reporter les résultats aux problèmes à des normes standardisées, et non pas par rapport aux résultats globalement attendus en fonction de l'avancée dans la scolarité.

Par ailleurs, une étude longitudinale serait également porteuse afin d'évaluer l'évolution des stratégies mises en place par les sujets d'une cohorte, au cours des années.

CONCLUSION

L'objectif de cette étude est d'établir des constats à travers les scores obtenus et les observations menées lors des entretiens auprès d'enfants tout-venant scolarisés en CM1.

Les résultats de cette étude démontrent que les enfants de CM1 soumis aux épreuves disposent d'un bon sens opératoire pour les problèmes additifs et multiplicatifs. Ils arrivent également à choisir la division et la multiplication dans des situations où leur recours est nécessaire à la résolution, mais de façon moins fréquente. Leur sens des opérations est plus développé que leurs capacités opératoires, sans que ces deux compétences soient toutefois en grand décalage du point de vue de leur maîtrise. On constate également que les justifications fournies à l'écrit sont plus souvent correctes que celles données à l'oral : cela pourrait s'expliquer par deux hypothèses. La première serait que l'enfant s'appuie sur les éléments linguistiques de l'énoncé pour fournir sa réponse écrite, ainsi que sur ses connaissances sur les problèmes, ce qui provoque parfois des réponses dites stéréotypées, mais plus faciles à composer. La seconde pourrait expliquer la difficulté que constitue la justification orale, de par son caractère introspectif et métacognitif. L'écart entre ces deux modalités orale et écrite est plus marqué que celui obtenu entre le choix de l'opération et la traduction arithmétique. Les deux hypothèses sont donc validées, mais les résultats ne démontrent pas un écart très significatif.

On peut également souligner le fait qu'à de rares exceptions près, tous les enfants ont au moins entouré une opération par problème, avec les sollicitations de l'examinateur. Même s'ils n'ont pas su poser leur calcul, écrire et argumenter leur réponse, chaque enfant a mis à l'épreuve son sens opératoire et tenté au mieux de choisir le « bon outil », même si sa maîtrise peut rester fragile.

Comme le soulignent les études sur le sujet, la résolution de problèmes arithmétiques verbaux repose sur une multiplicité de facteurs et de compétences, acquises à l'école mais aussi à travers le quotidien de l'enfant. Les travaux sur le sujet sont nombreux et s'intéressent à certains angles précis afin de mieux comprendre les processus engagés et établir des modèles, car il est en effet difficile de réduire la compétence de résolution à travers une seule « note » ou un seul score. Un sujet peut tout à fait mal choisir la bonne opération, mais mal traduire la situation avec son calcul : si nous poursuivons la comparaison, il peut utiliser le bon outil, mais pas pour le bon usage… ou inversement.

L'ambition de ce travail est de proposer aux orthophonistes une cotation plus nuancée des productions, moins binaire, car ces chiffres purs sont peu évocateurs. L'observation des comportements et des stratégies mis en place ne saurait être mise à l'écart dans l'appréciation de cette tâche. C'est pourquoi cette grille est constituée à la fois de données quantitatives, permettant de situer les performances du sujet parmi une tranche d'âge, mais également qualitatives (observations, rapprochement avec d'autres épreuves). Ces précieux indices fournissent au praticien des pistes pour l'évaluation et aussi la rééducation à mener.

Il serait réducteur d'affirmer qu'il n'existe qu'une seule manière de résoudre un problème donné : plusieurs cheminements sont envisageables pour aboutir à la solution et c'est la particularité du raisonnement de chaque enfant qu'il est intéressant d'entrevoir. Pour cela, il est nécessaire d'observer les stratégies mises en place et d'être attentif aux explications fournies par l'enfant sur ses productions.

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, J.R. (1983). *The architecture of cognition*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

ARTER, J.A., & CLINTON, L. (1974). Time and error consequences of irrelevant data and question placement in arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 68*, 28-31.

ASHCRAFT, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185. doi: 10.1111/1467-8721.00196

ATILF. Analyse et Traitement Informatique de la Langue Française (CNRS), *Dictionnaire du TLFi* (Trésor de la Langue Française informatisé). En ligne : http://atilf.atilf.fr/

BACQUET, M., POUJOL, G., SOULIÉ, M., DECOUR C., & GUÉRITTE-HESS, B. (1996). *Le tour du problème.* Brive : Éditions du Papyrus.

BADDELEY, A. D. (2000). The episodic buffer : a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, *4(11)*, 417-423.

BAFFREY-DUMONT, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation, 22(2),* 321-343.

BARROUILLET, P, FAYOL, M., & THÉVENOT, C. (2004). Représentation mentale et procédures de résolution de problèmes arithmétiques : l'effet du placement de la question. *L'année psychologique*, *104(4)*, 683–699.

BIDEAUD, J, MELJAC, C. & FISCHER, J.C. (1991). *Les chemins du nombre.* Lille : Presses universitaires de Lille

BRISSIAUD R. (2002) *Phénomène de concordance/discordance entre la représentation initiale d’un problème et l’économie de sa résolution numérique : le cas de la* *division euclidienne.* Communication au Colloque Cognitique, 17-18 Juin 2002 : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements. Paris.

BRISSIAUD, R. (1988). De l'âge du capitaine à l'âge du berger : quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème de CE2 ? *Revue française de pédagogie, 82*, 23-31.

BRISSIAUD, R., & SANDER, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a Situation Strategy First Framework. *Developmental Science, 13*, 92-107.

BROSSARD, M., & FIJALKOW, J. (2008). *Vygotski et les recherches en éducation et en didactiques.* Pessac : Presses universitaires de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherche en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTTERWORTH B. (1999). *The Mathematical Brain*. Londres : Macmillan.

BUTTERWORTH, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of child psychology and psychiatry, 46*, 3-18.

CARON, C. (1992). *Effets de différentes formulations sur la résolution de problèmes mathématiques écrits chez les élèves de deuxième secondaire.* Mémoire de maîtrise, Rimouski : Université du Québec.

CHARNAY, R. (1987). Apprendre par la résolution de problèmes. *Grand N - IREM de Grenoble, 42*, 77-83.

CHARNAY, R., HERVÉ, P. (2005). *La résolution de problèmes arithmétiques à l'école.* Paris : Hatier Pédagogie.

CLÉMENT, É. (1996) L'effet du contexte sémantique dans l'élaboration de la représentation du problème. *L'année psychologique, 96 (3),* 409-442.

CLÉMENT, É. (2009). *La résolution de problème, à la découverte de la flexibilité cognitive.* Paris : Armand Colin.

CLEMENTS, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 1-21.

COMMEIRAS, C., & BRUAS, P. (2010). Fonctions exécutives et résolution de problèmes. In George, F., *Actualités dans la prise en charge des troubles DYS,* 79-92. Marseille : Solal.

CRAHAY, M., VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., & GRÉGOIRE , J. (2008). *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Supérieur.

CUMMINS, D., KINTSCH, W., REUSSER, K., & WEIMER, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, *20*, 405-438.

DASEN, P. R. (1990). L'arithmétique quotidienne et l'arithmétique scolaire. *Résonances*, 19-21.

DAVYDOV, V. V. (1982). *Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. Addition and subtraction : cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates

DE CORTE, E., GREER, B., & VERSCHAFFEL, L. (1996). Mathematics teaching and learning. *Handbook of educational psychology,* 297-320.

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L., & DE WIN, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children’s problem representations and solution. *Journal of Educational Psychology, 77,* 460-470.

DEBLOIS, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et Francophonie XXV, Association canadienne d'éducation en langue française,* 102-120.

DEHAENE, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44,* 1-42.

DEHAENE, S. (2010). *La bosse des maths.* Paris : Odile Jacob.

DEVIDAL, M., FAYOL, M., & BARROUILLET, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'année psychologique, 97,* 3-31.

Direction Générale de l'Enseignement Scolaire (2014). Éducation prioritaire : définitions et méthodes de calcul des indicateurs du tableau de bord national – données 2013-2014. Consulté en ligne : http://www.reseau-canope.fr/education-prioritaire/fileadmin/user_upload/user_upload/comprendre/donnees_cles/Definitions_et_methodes_de_calcul_du_TdB_national_de_l_EP_2013-2014.pdf

DURAND C., & VERGNAUD, G. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie, 1,* 36, 28-43.

DUVAL, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruences. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg, 1,* 7-25.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : P. Lang.

FAGNANT, A. (2000). La compréhension des opérations additives et soustractives au travers de la résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers du service de pédagogie expérimentale, 4*, 117-132.

FAGNANT, A. (2013). Opérations arithmétiques et symbolisations variées : partir des démarches informelle des élèves pour donner du sens aux apprentissages. *Éducation & formation, 298,* 23-28.

FAGNANT, A., & HINDRYCKX, G. (2008). Les opérations additives et soustractives : quand les symbolisations informelles et plus conventionnelles s'en mêlent (ou s'emmêlent). *Cahiers des sciences de l'éducation, 27,* 7-23.

FAYOL, M, & ABDI, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education, 1,* 41-58.

FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre.* Paris : Delachaux & Niestlé.

FUSON, K, RICHARDS, J., BRIARS, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. *Children's logical and mathematical cognition, 1*, 32-92. New York : Springer Verlag.

GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française, 59(3)*, 215-229.

GAMO, S., TAABANE, L., & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'année psychologique, 111*, 613-640.

GEARY, D.C. (1994). *Children's mathematical development : Research and practical application*s. Washington DC : American Psychological Association.

GERVAIS, C., SAVARD, A., & POLOTSKAIA, E. (2013). La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ, 3*, 58-66.

GOLDIN-MEADOW, S., LEVINE, S.C., & JACOBS, S. (2014). Gesture's role in learning arithmetic. In Edwards, L., Ferrara, F., & Moore-Russo, D. : E*merging perspectives on gesture and embodiment in mathematics*. Charlotte, N.C. : Information Age Publishing.

GOMBERT, J. E., & FAYOL M. (1988). Autocontrôle par l'enfant de ses réalisations dans des tâches cognitives. *Revue française de pédagogie, 82,* 47-59.

GRACIA-BAFALLUY, M. & NOËL, M-P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance ? *Cortex*, *44*, 368-375.

GREENO, J., & RILEY, M. (1987). Processes and Development of Understanding. In Weinert, R. E., & Kluwe, R. H., *Metacognition, Motivation, and Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates.

GREER, B., & MANGAN, C. (1984). Understanding multiplication and division, in Carpenter, T., & Moser, J. (Eds.) : Wisconsin Meeting of the PME-NA, University of Wisconsin.

GUILLON, C. (2013). *Impact de la lecture et du raisonnement analogique dans la résolution de problèmes arithmétiques comparaison d'élèves et de patients de fin de 3ème cycle primaire*. Mémoire de recherche en orthophonie, Université de Nantes.

HEGARTY, M., MAYER, R. E., & MONK, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems : a comparison of sucessful and unsucessful problem solvers. *Journal of educational psychology, 87*, 18-32.

HEMBREE, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 33-46.

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge : Cambridge University Press.

LAFAY, A., SAINT-PIERRE, M. C., & MACOIR, J. (2014). L'évaluation des habiletés mathématiques de l'enfant : inventaire critique des outils disponibles. *Glossa*, *116*, 33-58.

LÉGER, L., SANDER, E., RICHARD, J.-F., BRISSIAUD, R., LEGROS, D., & TIJUS, C. (2002). Propriétés des objets et résolution des problèmes mathématiques. *Revue française de pédagogie*, *139*, 97-106.

LEMAIRE, P. (1999). *Psychologie cognitive*. Bruxelles : De Boeck.

MCCLOSKEY, M. & CARAMAZZA, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation : evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, *4*, 171-186.

MCLEOD, D. B., & ADAMS, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving*. New York : Springer-Verlag.

MELJAC, C., & SIEGENTHALER, F. (2012). Une aide à l'examen des difficultés en calcul : les problèmes de Gaston Mialaret. *A.N.A.E., 118*, 376-381.

MÉNISSIER, A., (2011). Analyser, comprendre et travailler les problèmes arithmétiques, in Habib M., *Calcul et Dyscalculies : des modèles à la rééducation*, 79-129. Issy-les-Moulineaux : Elsevier Masson.

Ministère de l'Éducation Nationale et Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2008). Cycle des approfondissements : programme de CM1. En ligne : http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm

MONTAGUE, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on the mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *25*, 230-248.

MONTANGERO, J. (2001). Pourquoi tant de critiques à l'œuvre de Piaget ? *Intellectica, 33*, 245-273.

NEWELL A., & SIMON H. A. (1972). *Human problem solving.* Erlbaum, New Jersey : Englewood Cliffs.

NOËL, M.P. (2005). *La dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant.* Marseille : Solal.

PASSOLUNGHI, M. C., & MAMMARELLA, I. C. (2012). Selective spatial working memory impairment in children with arithmetic learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, doi:10.1177/0022219411400746

PASSOLUNGHI, M. C., & SIEGEL, L.S. (2001). Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. *Journal of experimenal child psychology, 80,* 44-57.

PASSOLUNGHI, M.C., & PAZZAGLIA, F. (2005). A comparison of updating processes in children good or poor in arithmetic word problem-solving. *Learning and Individual Differences, 15,* 257-296. doi : 10.1016/j.lindif.2005.03.001

PLUVINAGE, F. (2000). Mathématiques et maîtrise de la langue. *Repères IREM*, *39*, 115-126.

RICHARD, J-F. (1998). *Les activités mentales – comprendre, raisonner, trouver des solutions*, 3ème éd. Paris : Armand Colin.

RILEY, M. S., GREENO, J. G., & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In Ginsburg, H., *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York : Academic Press.

SARRAZY, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie, 112*, 85-118.

SARRAZY, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux II.

SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning how to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D. : *Handbook for research on mathematics teaching and learning.* New York : Macmilian.

SIEGLER, R.S. (1987) The perils of averaging data over strategies : An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology, 116*, 250-264.

SIEGLER, R.S., & JENKINS, E. (1989). *How children discover new strategies.* New York : New York Psychology Press.

STIGLER, J. W., LEE, S. Y., & STEVENSON, H. W. (1990). M*athematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*. Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

TARDIF, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique, l'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Les éditions logiques.

THÉVENOT, C. (2008). Représentations mentales et stratégies de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants de CM2, *L'année psychologique*, *108*, 617-630.

THÉVENOT, C., & PERRET, P. (2009). Le développement du raisonnement dans la résolution de problèmes : l'apport de la théorie des modèles mentaux. *Développements*, *2(2)*, 49-56. doi : 10.3917/devel.002.0049

THÉVENOT, C., BARROUILET, P., & FAYOL, M. (2004). Représentation mentale et procédures de résolution de problèmes arithmétiques : l'effet du placement de la question. *L'année psychologique, 114*, 683-699.

THÉVENOT, C., COQUIN, D., & VERSCHAFFEL, L. (2006). La résolution de problèmes, in Barrouillet, P., & Camos, V., *La cognition mathématique chez l'enfant*. Marseille : Solal.

THÉVENOT, C., DEVIDAL, M., BARROUILLET, P., & FAYOL, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? A situation model account. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *60*(1), 43-56.

VAN DER SCHOOT, M., REIJNTJES, A. & VAN LIESHOUT, E.C.D.M. (2012). How do children deal with inconsistencies in text ? An eye fixation and self-paced reading study in primary school children. *Reading and Writing, 25(7)*, 1665-1690.

VAN DIJK, T. A., & KINTSCH, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension.* New York : Academic Press.

VAN LEHN, K. (1990). *Mind Bugs: The Origins of Procedural Misconceptions*. Cambridge : MIT Press.

VAYSSETTES, S., & RECH, G. (2015). PISA à la loupe, Qui a peur du grand méchant maths ? *Rapport de l'OCDE, 48*, 1-4.

VERGNAUD G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective,* Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59.

VERGNAUD, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la réalité (4e éd.)*. Berne : Peter Lang.

VERSCHAFFEL, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*. *25(2)*,141-165.

VERSCHAFFEL, L., & DE CORTE, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school : a teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(5)*, 577-601.

ZAGAR, D., FAYOL, M. & DEVIDAL, M. (1991). Peut-on appréhender une stratégie de prise d'information particulière à la lecture de problèmes ? *Psychologie Française, 36*, 143-149.

ANNEXES

ANNEXE 1 : présentation des problèmes (problème n°1)

Problème 1 :

Un fermier a 23 poules blanches et 9 poules noires. Combien a-t-il de poules en tout ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	
Phrase-réponse :	

ANNEXE 2 : exemple de grille (problème n°1)

	PROBLÈME 1			
Supports externes				Totaux
- Recours à la manipulation	Oui : - adéquat (+) - inadéquat (-)		Non (∅)	Ad : Inad :
- Recours au dessin	Oui : - adéquat (+) - inadéquat (-)		Non (∅)	Ad : Inad :
Choix de l'opération				/1
Traduction arithmétique	Adéquat (1pt): - correct *- erreur calcul (EC)*	Inadéquate (erreur opération) (0 pt)	Réponse absente (0 pt)	/1 Ad { *EC* : Inad : ABS :
Justification écrite	Adéquate (1 pt)	Inadéquate (0 pt)	Justification É absente (0 pt)	/1 Inad : ABS :
Justification orale	Adéquate (1 pt)	Inadéquate (0 pt)	Justification O absente (0 pt)	/1 Inad : ABS :
Commentaires, questions de l'enfant				
Temps par problème				
TOTAL POINTS				**/4**

ANNEXE 3 : **énoncés des 12 problèmes**

Problème 1 :

Un fermier a 23 poules blanches et 9 poules noires. Combien a-t-il de poules en tout ?

Problème 2 :

Je possédais 275€. Je dépense 34€. Combien me reste-t-il ?

Problème 3 :

Il y avait 11 prunes dans mon panier. Il n'en reste plus que 8. Combien en a-t-on mangé en tout ?

Problème 4 :

Un terrain a une longueur de 45 mètres. Un autre a une longueur de 39 mètres. Quel est le plus long ? Et de combien ?

Problème 5 :

On veut ranger 252 crayons dans des boîtes. Chaque boîte contient 36 crayons. Combien faut-il de boîtes ?

Problème 6 :

Un tonneau peut contenir quand il est plein 225 litres de vin. Il ne contient que 135 litres de vin. Combien faut-il verser de litres de vin pour le remplir ?

Problème 7 :

Pierre a 18 ans et Jean 12 ans. Quel est le plus âgé des deux ? De combien ?

Problème 8 :

Quel est le trajet parcouru en 5h par une automobile qui parcourt 72km en 1h ?

Problème 9 :

Une portion de fromage pèse 90 grammes. Combien pourra-t-on faire de portions avec 810 grammes de fromage ?

Problème 10 :

12 mètres de soie coûtent 963€. Quel est le prix du mètre ?

Problème 11 :

J'ai parcouru 12km en bus, puis 3km à pieds. Quelle est la longueur totale du trajet que j'ai parcouru ?

Problème 12 :

Combien y a-t-il de jours dans 5 semaines ?

ANNEXE 4 : résultats bruts

	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5	Problème 6	Problème 7	Problème 8	Problème 9	Problème 10	Problème 11	Problème 12
Supports ext.												
Dessin												
- Ad.	1		1	3	1	1	1	2				
- Inad.		1			1					1	1	
Manipulation												
- Ad.			1									
- Inad.												
Choix op.	31	31	27	18	9	17	14	20	13	10	29	29
Trad. Arith.												
- Ad.	25	23	25	9	1	13	16	11	5	1	29	26
- *Ad. EC*	5	8	4	4	6	6	2	4	2	8	2	2
- Inad.	1		2	5	14	5	6	11	16	7		2
- ABS				13	10	7	7	5	8	15		1
Justif. É												
- Ad.	31	25	27	14	9	21	25	18	11	10	30	30
- Inad.		5	4	9	5	7	3	8	8	5	1	
- ABS		1		8	17	3	3	5	12	16		1
Justif. O												
- Ad.	24	29	20	17	6	16	20	14	7	7	28	27
- Inad.	7	2	9	3	6	10	3	11	13	8	3	3
- ABS			2	11	19	5	8	6	11	16		1

ANNEXE 5 : demande d'accord parental

UNIVERSITÉ DE NANTES

U.F.R. de médecine et techniques médicales
Certificat de Formation Universitaire en Orthophonie
1, rue Gaston Veil – 44035 Nantes

Responsables :

- Docteur Florent ESPITALIER : Directeur de l'Ecole d'Orthophonie
- Mme Valérie CHOPINEAUX-MARTINAGE : Directrice Pédagogique
- Mme Anne LE RAY : Directrice des Stages

Contact :

- Mme Martine HINCOURT (02 40 41 28 50 – matin) : Secrétaire Pédagogique

Nantes, le 06/01/2015

Objet : DEMANDE D'ACCORD PARENTAL

Mesdames, Messieurs,

Dans le cadre de mon mémoire de fin d'études d'orthophonie, j'élabore une grille d'évaluation des capacités de résolution de problèmes arithmétiques à destination des orthophonistes, dans le but de compléter les outils existants.

Je vous sollicite afin de savoir si vous accepteriez que votre enfant participe à cette étude. La passation se déroule de manière individuelle (environ 30-40 min) et 12 problèmes arithmétiques sont à résoudre par écrit. La grille permet de qualifier les procédures et éventuelles erreurs commises. Ces entretiens sont enregistrés sur magnétophones afin de traiter a posteriori les commentaires et remarques.

S'agissant d'un travail de recherche, l'anonymat et la confidentialité des données sont garantis, qu'il s'agisse des noms, prénoms, lieux et résultats aux épreuves. Ces derniers seront reportés à des fins statistiques dans notre mémoire, mais resteront tout à fait anonymes : en effet, le but de ce travail est de recenser au mieux les capacités et difficultés majoritairement rencontrées par les enfants de CM1 dans cette épreuve.

Merci également de bien vouloir cocher la catégorie socioprofessionnelle, correspondant à votre situation ainsi que celle de votre conjoint(e), dans la grille reportée au verso. Ces données me seront utiles à des fins statistiques uniquement pour ce mémoire et resteront également anonymes, aussi il ne vous est pas nécessaire de spécifier le parent concerné pour votre réponse, il vous suffit de cocher pour le(s) parent(s) ou tuteur(s) de l'enfant. Je m'appuie sur la nomenclature des Professions et Catégories Socioprofessionnelles de l'INSEE (2003).

Catégories socioprofessionnelles	Parent(s) ou tuteur(s)
Agriculteurs exploitants	
Artisans, commerçants et chefs d'entreprise	
Cadres et ingénieurs : professions libérales, de l'information, cadres de la fonction publique, etc.	
Professions intermédiaires : professeurs des écoles, techniciens, travailleurs dans fonction publique, contremaîtres, etc.	
Employés : agents de service de la fonction publique, policiers, militaires, employés de commerce, etc.	
Ouvriers	
Retraités	
Autre : sans activité, étudiants, etc.	

En signant ce document, vous autorisez votre enfant .... à participer au protocole d'évaluation des capacités de résolution de problèmes arithmétiques.

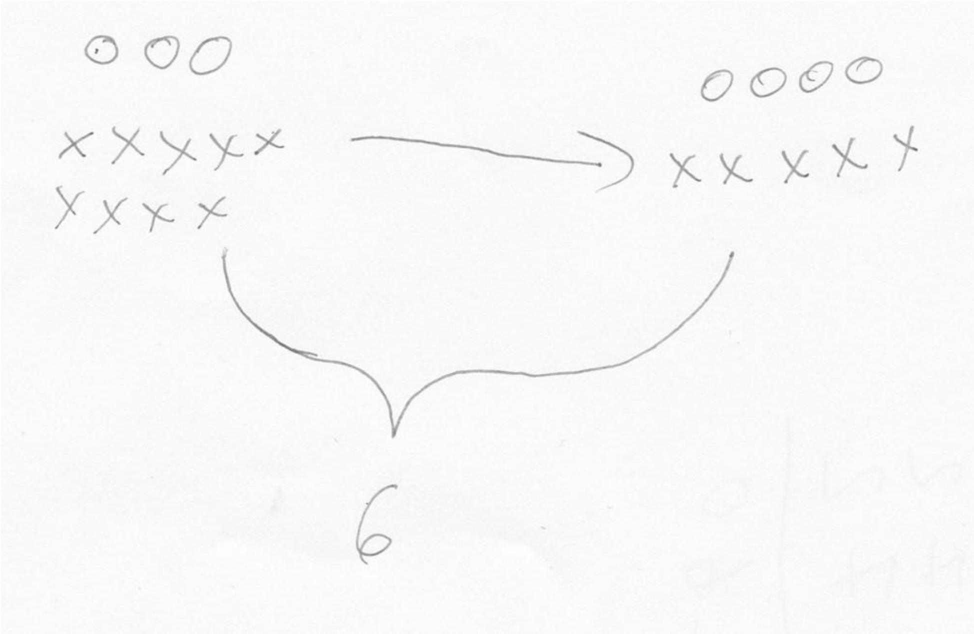
Signature du représentant légal :

Je reste à votre disposition pour toute question et vous remercie d'avance du temps et de l'intérêt que vous et votre enfant consacrez à cette étude,

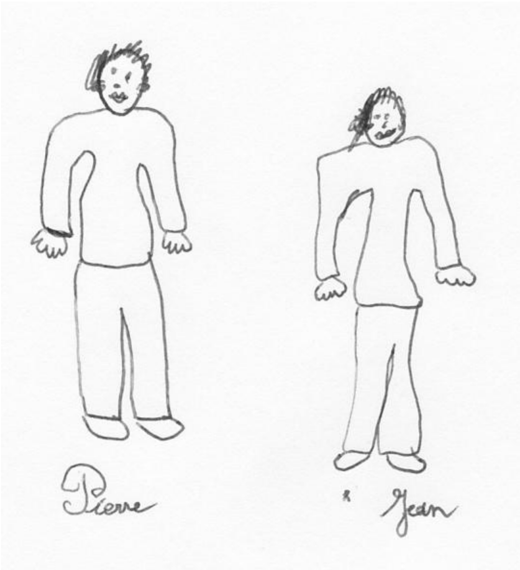
Bien cordialement.

Émilie PAULIK

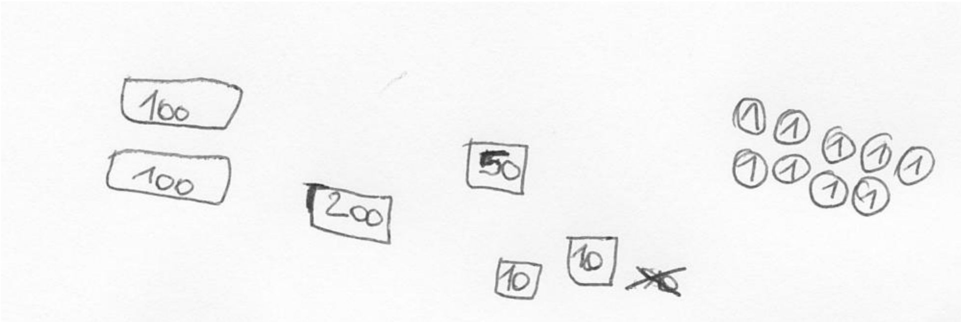
ANNEXE 6 : exemples dessins et schémas adéquats/inadéquats proposés par les sujets de l’étude



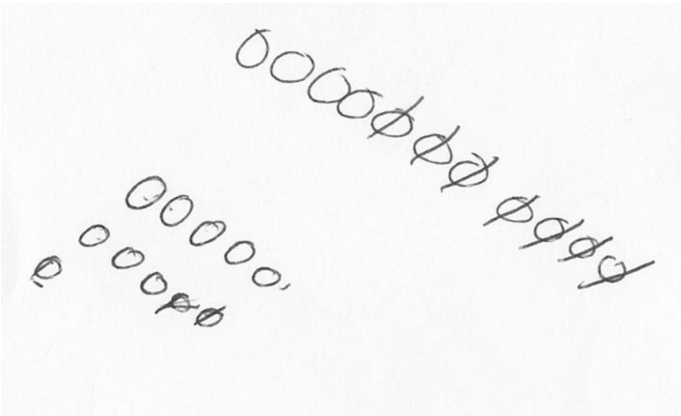
Production 1 : problème n°7, représentation adéquate des années (ronds et croix) de Pierre et Jean, avec la mise en évidence de l'écart d'âge en années (6)



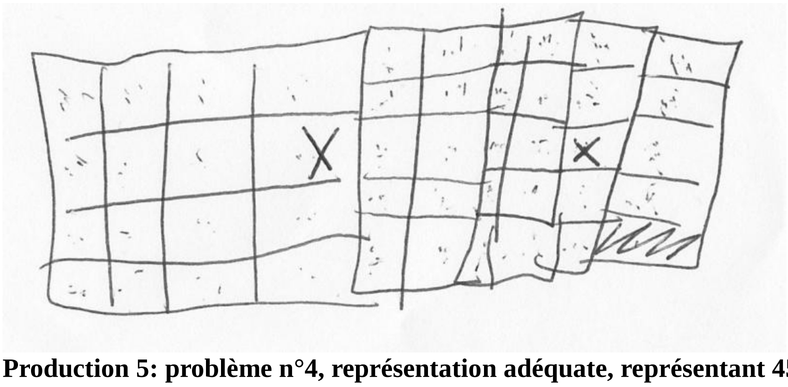
Production 2 : problème n°7, représentation inadéquate avec dessin de Pierre et Jean dont les noms sont écrits, mais ni les âges ni l'écart d’âge ne sont mentionnés. On peut relever que Jean est plus petit (et plus jeune), mais ce détail peut relever d'un hasard...



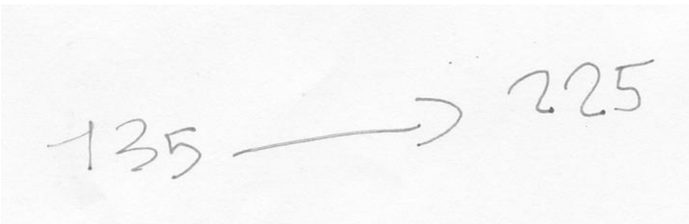
Production 3: problème n°2, représentation inadéquate de la somme d'argent 275€ avec billets et pièces : l'enfant s'est trouvé confronté à la difficulté de soustraire 34€ de sa production (pas de barrage possible)



Production 4: problème n°3, production adéquate représentant les 11 prunes et 7 barrées (haut) et 11 prunes dont 3 barrées (dessin retenu par l'enfant)



Production 5: problème n°4, représentation adéquate, représentant 45 cases en pointillés ; le sujet s'est aidé de son schéma pour soustraire en pointant 6 cases (l'écart recherché)



Production 6 : problème n°6, représentation adéquate, quoique très formelle, de la situation d'écart entre 135 "pour aller à" 225

ANNEXE 7 : présentation de l'étude et consignes données aux sujets (présentés à l'oral).

Présentation :

Je suis étudiante en orthophonie en dernière année et mon mémoire se base sur l'étude des maths, en particulier les problèmes arithmétiques. Ce que j'essaie de voir avec ce travail, ce n'est pas ce que tu sais faire ou pas, je vais collecter les productions de beaucoup d'enfants pour avoir une idée de ce que peuvent et savent faire les élèves de CM1. Donc sache que ce petit travail ne sera pas noté et ni l'école ni tes parents ou tes camarades ne seront informés des résultats, car c'est **anonyme**.

Est-ce que tu connais ces quatre opérations ? (nom et signe opératoire associé)

Consigne :

Voici 12 problèmes. Il y en a des plus simples et des plus compliqués : tu les fais **dans l'ordre que tu veux**. Pour chaque problème, tu vas devoir **entourer le nom de l'opération** que tu vas faire. Dans la case en dessous, tu **peux écrire ton calcul** (brouillon si besoin). N'hésite pas à t'**aider de schémas, dessins ou pions** (brouillon).

Je vais **chronométrer** le temps que tu passes à faire ces problèmes, mais ce n'est pas une épreuve de vitesse : **tu prends le temps nécessaire.**

Quand tu auras terminé un problème, tu me le dis. Je te poserai ensuite une question à chaque fois : « **comment as-tu fais pour choisir *telle opération* pour résoudre ce problème ?** ». Tu pourras m'expliquer comme tu veux, en t'aidant de l'énoncé ou de ce que tu t'imagines dans ta tête.

Est-ce que tu as des questions ? Quant tu es prêt, on peut commencer. **Tu essaies de faire du mieux que tu peux !**

ANNEXE 8 : feuilles de passation de N. (étude de cas)

Problèmes de Gaston Mialaret

Problème 1 :
Un fermier a 23 poules blanches et 9 poules noires. Combien a-t-il de poules en tout ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : 1 23 + 9 = 122	
Phrase-réponse : Il y a 122 poules en tout	

2

Problème 2 :

Je possédais 275€. Je dépense 34€. Combien me reste-t-il ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : 275 - 34 = 251	275 - 34
Phrase-réponse : Il a dépenser 2 Il y reste 251€	

3

Problème 3 :

Il y avait 11 prunes dans mon panier. Il n'en reste plus que 8. Combien en a-t-on mangé en tout ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : 11 - 8 = (17) 17	
Phrase-réponse : Il en mangé 3	

Problème 4 :

Un terrain a une longueur de 45 mètres. Un autre a une longueur de 39 mètres. Quel est le plus long ? Et de combien ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division

Calcul :

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 6 \\ \hline 39 \end{array}$$

Phrase-réponse :

Le plus long est le terrain de 45 mètre et l'écart est de 6 mètre

5

Problème 5 :
On veut ranger 252 crayons dans des boîtes. Chaque boîte contient 36 crayons. Combien faut-il de boîtes ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division

Calcul :

200
+ 50
+ 2

200
+ 52
252

35
+252
224

252 | 36

Phrase-réponse :

Il faut 224 boîtes

6

Problème 6 :

Un tonneau peut contenir quand il est plein 225 litres de vin. Il ne contient que 135 litres de vin. Combien faut-il verser de litres de vin pour le remplir ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\,135 \\ \hline 360 \end{array}$$

Phrase-réponse :

Il faut remplir 360 litres de vin

Problème 7 :
Pierre a 18 ans et Jean 12 ans. Quel est le plus âgé des deux ? De combien ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	
Phrase-réponse : C'est pierrre le plus âgé de deux Il a 18ans	

Problème 8 :

Quel est le trajet parcouru en 5h par une automobile qui parcourt 72km en 1h ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : $2+2+1=5$	
Phrase-réponse : C'est l'autoroute	

Problème 9 :

Une portion de fromage pèse 90 grammes. Combien pourra-t-on faire de portions avec 810 grammes de fromage ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : 800 + 16 = 810; 810 + 90 = 900	
Phrase-réponse : 900 Il faut portions de fromage	

Problème 10 :

12 mètres de soie coûtent 963€. Quel est le prix du mètre ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	
Phrase-réponse :	

Problème 11 :
J'ai parcouru 12km en bus, puis 3km à pieds. Quelle est la longueur totale du trajet que j'ai parcouru ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	$12 + 3 = 15$ $5 \times 3 = 15$
Phrase-réponse :	Il a parcouru en tout 15 km a bus et a pied

Problème 12 :
Combien y a-t-il de jours dans 5 semaines ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	$30+30+30+30+30=$ ou 5×6
Phrase-réponse :	Il ya a 30 jours dans 5 semaines.

ANNEXE 9 : feuilles de passation de E. (étude de cas)

Problème 1 :

Un fermier a 23 poules blanches et 9 poules noires. Combien a-t-il de poules en tout ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	

$$\begin{array}{r} {}^{1}23 \\ + \ \ 9 \\ \hline 32 \end{array}$$

Phrase-réponse :

Le fermier a en tout 32 poules

Problème 2 :
Je possédais 275€. Je dépense 34€. Combien me reste-t-il ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division

Calcul :

$$\begin{array}{r} 275 \\ -\quad 34 \\ \hline 241 \end{array}$$

Phrase-réponse :

Il me reste 241€.

Problème 3 :

Il y avait 11 prunes dans mon panier. Il n'en reste plus que 8. Combien en a-t-on mangé en tout ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$$

Phrase-réponse :

On ~~en~~ a manger 3 prunes.

Problème 4 :

Un terrain a une longueur de 45 mètres. Un autre a une longueur de 39 mètres. Quel est le plus long ? Et de combien ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 6 \\ \hline 39 \end{array}$
Phrase-réponse :	Le plus long est le terrain de 45 mètre et l'écart est de 6 mètre

Problème 5 :

On veut ranger 252 crayons dans des boîtes. Chaque boîte contient 36 crayons. Combien faut-il de boîtes ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	36 x 252 72 + 153 . 1602 252 x 36 1512 + 756 . 9072
Phrase-réponse :	Il faudra 1 602 boites.

Problème 6 :

Un tonneau peut contenir quand il est plein 225 litres de vin. Il ne contient que 135 litres de vin. Combien faut-il verser de litres de vin pour le remplir ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : $135 + 100 = 235$ $235 - 10 = 225$	
Phrase-réponse : 100 litres	

Problème 7 :

Pierre a 18 ans et Jean 12 ans. Quel est le plus âgé des deux ? De combien ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division

Calcul :

$$\begin{array}{r} 18 \\ -\ 12 \\ \hline 06 \end{array}$$

Phrase-réponse :

le plus âgé des deux c'est Pierre/6.

Problème 8 :

Quel est le trajet parcouru en 5h par une automobile qui parcourt 72km en 1h ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : $\begin{array}{r} 72 \\ \times \quad 5 \\ \hline 360 \end{array}$	
Phrase-réponse : L'automobile a parcouru 360 km . en	

Problème 9 :

Une portion de fromage pèse 90 grammes. Combien pourra-t-on faire de portions avec 810 grammes de fromage ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : 810 X 90 000 8190 81900	
Phrase-réponse :	

Problème 10 :

12 mètres de soie coûtent 963€. Quel est le prix du mètre ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	

$$\begin{array}{r|l} 963 & 12 \\ \cline{2-2} -90 & 107 \\ \cline{1-1} 63 & \\ -63 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Phrase-réponse :

Le mètre coûtent 107€.

Problème 11 :

J'ai parcouru 12km en bus, puis 3km à pieds. Quelle est la longueur totale du trajet que j'ai parcouru ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul : $\begin{array}{r} 12 \\ +\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$	
Phrase-réponse : J'ai parcouru 15 km en tout.	

Problème 12 :
Combien y a-t-il de jours dans 5 semaines ?

Nom de l'opération :	Addition - Soustraction - Multiplication - Division
Calcul :	$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 5 \\ \hline 35 \end{array}$
Phrase-réponse :	Dans ~~une~~ 5 semaines il y a 35 jours.

RÉSUMÉ :

Les problèmes arithmétiques verbaux sont au croisement de la compréhension écrite et/ou orale, de l'arithmétique et d'une grande variété d'instances cognitives. Cette épreuve permet d'apprécier tout particulièrement le sens des opérations, autrement dit la capacité à déterminer l'opération permettant d'apporter la solution à une situation-problème.

L'objet de ce mémoire est d'étudier les capacités de résolution de problèmes chez les enfants scolarisés en CM1.

Les 12 problèmes de Mialaret ont servi de support pour cette étude. Une grille d'évaluation a été élaborée en vue d'évaluer les diverses étapes de la résolution et d'apprécier le sens des opérations. Un pré-étalonnage a permis de situer les différents niveaux de capacités. Les résultats vont dans le sens de l'existence d'une multiplicité de stratégies et présentent des particularités de traitement mis en évidence par les critères de la grille.

MOTS-CLÉS : problèmes arithmétiques verbaux ; résolution de problèmes ; sens des opérations ; grille d'évaluation.

ABSTRACT:

Arithmetic word problems are based on oral and/or written comprehension, aritmetics, and a wide range of cognitive skills. This exercise is an indicator of the operation sense which is the ability to identify and use the relevant operation appropriate to the situation to solve.

The purpose of this study is to examine the solving mathematical word problems abilities of fourth grade students.

The chosen material is the 12 word problems developed by Mialaret. A rating grid has been created to evaluate the various stages of problem-solving and evaluate the operation sense. A precalibration enabled us to determine the different levels of solving abilities. Results show that several types of strategies occur and the criterias set out in the grid suggest some specific processes used by children.

KEYWORDS : arithmetic word problems ; problem-solving ; operation sense ; rating grid.