l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Pierre-Yves BIENAIME

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25
Unité de recherche : Laboratoire de mathématiques Jean Leray (Université de Nantes)

Soutenue le 01 octobre 2014

Existence locale et effet régularisant précisés pour des équations de type Schrödinger.

JURY

Président :	**M. Nicolas LERNER**, Professeur des universités, Pierre et Marie Curie
Rapporteurs :	**M. Jean-Marc DELORT**, Professeur des Universités, Paris XIII
	M. Luis VEGA, Professeur des universités, Université de Madrid
Examinateurs :	**M. Benoît GREBERT**, Professeur des universités, Université de Nantes
	M. WANG XUE PING, Professeur des universités, Université de Nantes
	M. Herau FRÉDÉRIC, Professeur des universités, Université de Nantes
Directeur de thèse :	**M. Abdesslam BOULKHEMAIR**, Maître de conférence-HDR, Université de Nantes

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé dans le département de mathématiques de l'université de Nantes.

Je tiens à remercier ici tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont apporté leur aide à la concrétisation de ce mémoire.

Je remercie en particulier, Monsieur le professeur Abdesslam BOULKHEMAIR qui m'a proposé ce sujet de thése passionnant et motivant, qui m'a apporté son aide précieuse et son soutien dans les moments de doute et d'impasse.

Je remercie aussi tous les membres du Jury : Nicolas LERNER, Jean-Marc DELORT, Luis VEGA, Benoît GREBERT, Xue Ping WANG et Frédéric HERAU pour le temps passé à travailler sur le mémoire, les nombreuses remarques et questions qui ont permis de l'améliorer et d'ouvrir encore d'autres perspectives.

Bien sûr, je remercie aussi toute l'équipe du département de mathématiques de l'université de Nantes qui soutient et guide parfaitement ses étudiants, en particulier, un soutien moral sans lequel je n'aurai peut-être pas pu obtenir ma maîtrise ou encore mon agrégation ou bien encore mon D.E.A. tout en travaillant à temps plein par ailleurs.

Je remercie aussi toutes les personnes que j'ai croisées tout au long de mon parcours professionnel, aussi bien dans une chaine de restauration rapide bien connue à Nantes ou au Mans que dans l'éducation nationale, qui m'ont encouragées à ne pas abandonner mes études dans les moments de doute.

Je remercie évidemment aussi ma famille.

I

NOTATIONS PRINCIPALES

Dans toute cette thèse, toute constante qui ne dépend que de la dimension de l'espace n et de la régularité ϱ de $\nabla_x u_0$ est notée A pour simplifier.

$$\mathscr{L} = \sum_{j\leq k} \partial_{x_j}^2 - \sum_{j>k} \partial_{x_j}^2$$

$$\tilde{\xi} = (-\xi_1, ..., -\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$$

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \ J^s = (1-\Delta)^{s/2}\,, \quad \Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial_k^2 \ \text{ étant le Laplacien,}$$

S'il y a nécessité de préciser la variable par rapport à laquelle on dérive, on notera

$$J_y^s = (1-\Delta_y)^{s/2} \ \text{ si l'on dérive par rapport à la variable } y.$$

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \quad \text{si } \ \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

$$\Delta F = (\Delta F_1, ..., \Delta F_n) \ \text{ et } \ \nabla F = (\nabla F_1, ..., \nabla F_n) \quad \text{si } \ F = (F_1, ..., F_n)$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ \text{ désigne l'espace de Schwartz,}$$

$$\hat{u} \ \text{ ou } \ \mathscr{F}(u) \ \text{ désigne la transformée de Fourier de } \ u,$$

$$\text{Si } s \in \mathbb{R},\ H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n); (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\} \ \text{ désigne l'espace de Sobolev,}$$

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_s\,.$$

— Classes de symboles de Hörmander : Si $m \in \mathbb{R}$ et $\gamma, \delta \in [0,1]$,

$$S_{\gamma,\delta}^m = \left\{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-\gamma|\beta|+\delta|\alpha|+m}\right\}.$$

— Si ϱ est un réel positif, $C^\varrho(\mathbb{R}^n)$ désigne la classe de Hölder, autrement dit, u est dans $C^\varrho(\mathbb{R}^n)$ si $u \in C^{[\varrho]}(\mathbb{R}^n)$ et si,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq [\varrho],\ \partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{et } \ \exists C \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C|x-y|^{\varrho-[\varrho]}.$$

— OpS désigne l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels dont le symbole appartient à la classe S.
— Si $Q_\mu = \mu + [0,1]^n$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$, on pose

$$|||f||| = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \|f\|_{L^2(Q_\mu)}\,,$$

$$|||f|||_1 = \sup_{\text{Q : cube de côté1}} \|f\|_{L^2(Q)}\,,$$

$$|||u|||_T = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu\rangle^{-2} u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$|||u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n} |\sqrt{\sigma_0}\langle x - \sigma_1 x_\mu\rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}} u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, on a

$$|||u|||_{T,3,1} = |||u|||_T$$

$$|||u|||_{T,\infty} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T}\int_{Q_\mu} |u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \|u\|_{L^2([-T,T]\times Q_\mu)} = \|u\|_{l_\mu^\infty(L^2(Q_\mu\times[-T,T]))}\,,$$

$$\mathcal{N}_T(u) = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^2 u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$|||u|||'_T = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T} \int_{Q_\mu} |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|u\|_{L^2([-T,T]\times Q_\mu)} = \|u\|_{l^1_\mu(L^2(Q_\mu \times [-T,T]))} .$$

La norme ci-dessus est la norme duale de $|||u|||_{T,\infty}$.

II

INTRODUCTION

Considérons l'équation

$$\partial_t u = i\Delta u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \tag{1}$$

Depuis un demi-siècle le problème de Cauchy local dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \dfrac{n}{2} + 1$ associé aux équations de type (1) pour une donnée initiale $u(x, 0) = u_0$ a été étudiée dans de nombreux travaux. Ci-dessous, nous présentons une selection non exhautive de travaux réalisés qui sont en partie généralisés par les résultats énoncés dans cette thèse et qui donnent une idée des différentes directions explorées autour des équations de type (1).

Pour commencer, on s'intéresse à un article de M. Tsutsumi et I. Fukuda, [71] , dans lequel il est prouvé que ce problème de Cauchy est bien posé dans le cas $n = 1$ et

$$F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u}) = \partial_x(|u|^k u).$$

S. Klainerman, dans [38], donne le résultat dans le cas $n \geq 1$ et F indépendante de $\nabla_x u$, et, S. Klainerman et G. Ponce dans [39] ainsi que J. Shatah dans [61] obtiennent le résulat dans le cas $n \geq 1$ et $F \in C^\infty(\mathbb{C}^{2n+2})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\partial_{\partial x_j u} F$ et $\partial_{x_j \overline{u}} F$ sont réelles.
Ces trois derniers résultats sont obtenus sans utiliser d'effet régularisant.

Dans le cas particulier où

$$F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u}) = b_1(x).\nabla_x u + b_2(x)\nabla_x \overline{v} + F(x, t),$$

l'équation étudiée devenant linéaire, le caractère bien posé dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \geq 1$ et $b_2 = 0$ a été étudié dans de nombreux travaux comme par exemple [16], [26], [30], [49] et [78]. Ce qui est remarquable, c'est que dans ce cas, une condition nécessaire et une condition suffisante ont respectivement été démontrées dans [**?**] et [**?**]. Le lien avec le cas non linéaire est qu'en utilisant par exemple la formule de J.M. Bony (Voir [**?**]) pour linéariser $F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u})$, on remarque que le coefficient de $\nabla_x u$, en $t = 0$, vérifie cette condition nécessaire pour les trois non linéarités citées précédemment, dans le cas $n = 1$ et

$$F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u}) = \partial_x(|u|^k u),$$

dans le cas $n \geq 1$ et F indépendante de ∇u ou $F \in C^\infty(\mathbb{C}^{2n+2})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\partial_{\partial x_j u} F$ et $\partial_{x_j \overline{u}} F$ sont réelles.

En 1983, T. Kato démontre un effet régularisant dans [42] du type

$$\int_{-T}^{T} \int_{-R}^{R} |\partial_x u(x, t)|\, dx\, dt \leq A(T, R, \|u_0\|_0)$$

pour les solutions u de l'équation de KdV rappelée ci-dessous

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0 \text{ avec } x, t \in \mathbb{R}.$$

En 1986, N. Hayashi, K. Nakamitsu et M. Tsutsumi, dans [22], s'intéressent au problème Cauchy associé à une équation de Schrödinger non linéaire très étudiée et rappelée ci-dessous :

$$i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^{p-1} u \text{ avec } u(0, x) = \varphi(x)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Ils prouvent que, sous l'hypothèse $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ et $1 < p < 5$, on obtient un effet régularisant tel que, si $\varphi \in H^{1,2}$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $x^n \varphi \in L^2$, ou bien, si $\varphi \in L^2$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $(1 + |x|)^n \varphi \in L^2$, alors pout tout $t \neq 0$,

$$u \in \cap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R}^*, C^{n-2m-1}(\mathbb{R})).$$

La preuve utilise notamment la règle de conservation due à Ginibre et Velo.

L'idée de T.Kato est ensuite reprise et appliquée à l'équation de Schrödinger

$$\partial_t u = i\Delta u \text{ avec } u(x,0) = u_0(x) \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

par P. Sjölin [63] puis P. Constantin et J.C. Saut [14], et, L. Vega [74]. L'effet régularisant obtenu dans ce cas est du type

$$\int_{-T}^{T}\int_{-R}^{R} |(1-\Delta)^{\frac{1}{4}} e^{it\Delta} u(x,t)|\, dx\, dt \leq A(T,R,\|u_0\|_0).$$

Dans [74], L. Vega prouve plus précisément qu'une solution de l'équation ci-dessus vérifie, pour tout $a > 1$ et tout $s_1 \geq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} |J^{s_1}u|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{\frac{1}{2}} \leq A\|u_0\|_{s_1-1+\frac{a}{2}}.$$

Dans le cas $n \geq 2$, l'inégalité suivante

$$\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \leq A\|u_0\|_0$$

où P désigne l'un des opérateurs ci-dessous

$$P = \langle x\rangle^{-s}|D_x|^{\frac{1}{2}}; s > \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$P = |x|^{\alpha-1}|D_x|^{\alpha}; 1-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$P = \langle x\rangle^{-s}J^{\frac{1}{2}}; s \geq 1 \ \ (s > 1 \text{ si } n = 2). \tag{4}$$

est démontrée par M. Ben-Artzi et S. Klainerman [4] $(n \geq 3)$, et H. Chihara [10] $(n \geq 2)$ dans le cas (2). Le type (3) est obtenu par T. Kato et K. Yajima [43] $(n \geq 3, 0 \leq \alpha < \frac{1}{2})$ ou $(n = 2, 0 < \alpha < \frac{1}{2})$, et Sugimoto [64] $(n \geq 2)$. Watanabe [75] montre que ce dernier résultat est faux si $\alpha = \frac{1}{2}$. Le type (4) est prouvé par T. Kato et K. Yajima [43] $(n \geq 3)$, et B. G. Walther [Wa1] $(n \geq 2)$ qui démontre aussi que ce n'est pas vrai pour $s < 1$ ($s \geq 1$ si $n = 2$.)

C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega prouvent, dans [34], que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} e^{it\partial_x^2} u_0(x)|^2\, dt \leq A\|u_0\|^2.$$

De plus, ils obtiennent un résultat d'existence locale pour le problème de Cauchy associé à (1) dans le où F est un polynôme P de valuation 2. Quatre cas y sont considérés, $n = 1$, $n \geq 2$, et P admet ou non des termes quadratiques. Dans le cas où P est de valuation 3, le problème associé à l'équation (1) est bien posé si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $\|u_0\|_s$ assez petite pour tout s assez grand $(s \geq s_0(n))$. Si P est de valuation 2, des espaces de Sobolev à poids sont utilisés. Ce qui est raisonnable au vu de la condition nécessaire d'existence démontrée dans [49].

N. Hayashi et T. Ozawa étudient dans [25] le caractère bien posée du problème de Cauchy associé à l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u + 2i\partial_x(|u|^2 u) = 0 \tag{5}$$

Ils démontrent que pour une donnée initiale

$$u(x,0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}) \ \text{ avec } \|u_0\|_0 < \sqrt{\pi},$$

une solution globale existe. Ils décrivent aussi un effet régularisant : pour $t > 0$, u est plus régulière que u_0 et le gain de régularité dépend de la vitesse de décroissance de u_0 quand $|x| \to +\infty$. Par exemple, si u_0 décroît exponentiellement, ils montrent que la solution associée est analytique en x.

N. Hayashi, dans [18], étudie l'équation (1) pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $n \geq 2$, F un polynôme de degré 3 tel que

$$|F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u})| \leq A(|u| + |\nabla u|)^3$$

et, pour tout nombre complexe ω de module 1,

$$F(\omega u, \omega \nabla u, \overline{\omega u}, \omega \nabla \overline{\omega u}) = \omega F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u}).$$

Il montre que les solutions globales ont des propriétés régularisantes.

Dans [35], l'équation (1) est étudiée dans le cas où $F = P$ est un polynôme de valuation 2. Il y est démontré que pour $u(x,0) = u_0$ assez petite, le problème de Cauchy local est bien posé. L'espace dans lequel u_0 est supposée petite est un espace de Sobolev d'ordre suffisament grand si P est de valuation ≥ 3 et dans un espace de Sobolev à poids sinon. Ce résultat est prouvé en utilisant un théorème du point fixe donnant, de plus, un effet régularisant du type de Kato pour le groupe $\{e^{it\Delta}\}_{-\infty}^{+\infty}$. Dans cette thèse, il est rappelé que, dans le cas semilinéaire $F = f(|u|)u$ (avec f une fonction à valeurs réelles.), des réultats locaux, globaux mais aussi d'explosion en temps fini ont été prouvés, ces derniers dépendant notamment de la régularité et de la taille de la donnée u_0 mais aussi du degré et du signe de f, et de la dimension n.
Pour plus de détails, on pourra consulter [8].
Dans le cas où F satisfait

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha P(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla \overline{u}) \partial^\alpha u \, dx \right| \leq A(1 + \|u\|_s^2)\|u\|_s^2,$$

pour la preuve de l'existence locale dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \frac{n}{2} + 1$, on pourra consulter [41]. De plus, sous des hypothèses convenables d'analycité de la donnée u_0 et de la non linéarité F, des résultats locaux et globaux d'analycité ont été obtenus, (voir par exemple [17]).

N. Hayashi et K. Kato dans [19] établissent un effet régularisant analytique pour les solutions du problème

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2p} u, \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \ u(x,0) = u_0(x)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$. Ils montrent plus précisément le résultat suivant.
Si $\|e^{|x|^2} u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+1}} < \infty$,alors , pour tout $R > 0$, il existe une unique solution $u(x,t)$ définie sur un intervalle $[0,T]$ qui est analytique en temps et en espace dans le cylindre $[0,T] \times D_R$ où

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\},$$

et qui admet un prolongement analytique $u(z, z_0)$ au domaine

$$\begin{aligned} &\{(z, z_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \\ &\quad z_0 = t + i\tau, 0 < t < T, -A_0 t^2 < \tau < A_0 t^2, \\ &\qquad z = x + iy, x \in D_R, -At < y_i < At\} \end{aligned}$$

où A_0 et A sont des constantes.
Ce résultat complète le résultat obtenu par N. Hayashi et S. Saitoh donné dans [27] et [28] qui ont prouvé un effet régularisant analytique. L'argument principal de la preuve est l'utilisation d'un opérateur

$$\mathbf{C} = |x|^2 + Nit + 2ix.\nabla + 2it^2\partial_t$$

qui satisfait $[L, \mathbf{C}] = 4itL$ où L est l'opérateur de Schrödinger

$$L = i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta.$$

Pour compléter, on pourra consulter [19].

Dans [20], un effet régularisant est étudié pour les solutions du problème de Cauchy associé à (1) dans le cas où $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla\overline{u}) = K_1(|u|^2)|u|^2 u + K_2(|u|^2)|u|^2\partial_x u + K_3(|u|^2)u^2\partial_x\overline{u} \\ +K_4(|u|^2)|\partial_x u|^2 u + K_5(|u|^2)\overline{u}\,(\partial_x u)^2 + K_6(|u|^2)|\partial_x u|^2\partial_x u$$

ou $K_j \in C^\infty([0,\infty])$. Si la non-linéarité est de la forme

$$F(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla\overline{u}) = \frac{\overline{u}\,(\partial_x u)^2}{1+|u|^2},$$

on retrouve un modèle de pseudo spin classique utilisé par G. Makhanov et O.K. Pashaev dans [50]. Dans cet article, il est prouvé le résultat ci-dessous.
Si la donnée initiale

$$u_0 \in H^{3,\infty}$$

(notations définies au paragraphe précédent) et que $\|u_0\|_{3,\infty}$ est suffisant petit (dans le cas où F dépend de $\partial_x u$) alors il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy étudié dans ce cas admet une unique solution

$$u \in C^\infty([-T,T]\backslash\{0\} : C^\infty(\mathbb{R})).$$

Dans [52], pour le problème de Cauchy similaire à celui étudié dans [20], avec F vérifiant l'hypothèse supplémentaire appelée condition de jauge :

$$F(e^{i\theta}u) = e^{i\theta}F(u),$$

P.-N. Pipolo obtient le même résultat que dans [20] mais sans la condition de petitesse de la donnée intiale.

L. T'Joen prouve dans [67] que le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\partial_t u = i\Delta_g u + R(x, D_x)u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x\overline{u}) \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$$

est localement bien posé pour une classe de «petites» données sous l'hypothèse géométrique posant que les bicharacteristics associées à l'opérateur Δ_g ne sont pas captives, où Δ_g est la laplacien associé à une métrique g asymptotiquement plate. De plus, R est un opérateur pseudifférentiel d'ordre 1 et Q un polynôme de valuation 2. Le preuve est basée sur l'obtention d'estimations donnant un effet régularisant microlocal.

D. F. Rial dans [54] étudie le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u + \partial_x(T_\lambda(u)u) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

où $T_\lambda(u) = |u|^2 - \lambda H(|u|^2)$, $\lambda > 0$ et H est la transformée de Hilbert.
L'auteur prouve que le problème de Cauchy admet des solutions globales en temps faiblement dans L^2 qui vérifient un effet régularisant. La méthode est basée sur celle utilisée par T. Kato dans [42] pour l'équation de Korteweg-de Vries.

R. P. de Moura étudie dans [46] le problème de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R})$ associé à l'équation

$$\partial_t u = -i\alpha\partial_x^2 u + \beta u\partial_x(|u|^2) - i\beta u\tau_h\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2 u \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

où α, β, γ et h sont des réels positifs, $s \geq 1$, et

$$\tau_h u(x) = \frac{1}{2h} v.p. \int_{\mathbb{R}} coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right)\, u(y)\,dy$$

avec $v.p.$ désignant la valeur principale de l'intégrale. En ce qui concerne l'existence locale, le résultat est le suivant.

Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^s$ telle que $\|u_0\|_s \leq \delta$, il existe une unique solution $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R})$ avec $T = T(\|u_0\|_s) > 0$ qui tend vers 0 si $\|u_0\|_s$ tend vers ∞ telle que

$$D_x^{s+\frac{1}{2}} u \in L^\infty(\mathbb{R} : L^2([0,T])), \ \sup_{[0,T]} \|u\|_0 \leq C(1+T) \text{ et } D_x^s u \in L^6(\mathbb{R} : L^6([0,T])).$$

De plus, la solution dépend continuement de la donnée initiale.
Les résultats précédents sont encore vrais si $\|u_0\|_0 < \delta$ au lieu de $\|u_0\|_s < \delta$ dans le cas $\gamma = 0$.
Dans le cas $s = 1$, la solution est globale car elle peut être étendue à tout intervalle de type $[0,T]$.
La preuve du résultat local utilise l'effet régularisant vérifié par le groupe d'opérateurs $(e^{it\partial_x^2})_{t\in\mathbb{R}}$, des estimations de type Strichartz et un théorème du point fixe appliquée à l'équation intégrale correspondante au problème étudié.
Dans le cas $s = 1$, en utilisant des propriétés de conservation de l'énergie, l'auteu r obtient une estimation uniforme en temps de $\|u(t)\|_1$. Cette estimation a priori, associée à des arguments standards, permet d'obtenir l'existence globale.

R. P. de Moura et A. Pastor considèrent dans [51] le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger ci-dessous :

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = \partial_x(|u|^2 u) + \lambda \partial_x(H(|u|^2)u),$$

où λ est un réel et H la tansformée de Hilbert.
Les auteurs montrent que le problème de Cauchy associé est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > \frac{1}{2}$ dans le cas d'une donnée initiale petite, et au contraire, mal posé pour $s < \frac{1}{2}$. La preuve de caractère bien posé est basée sur la technique de la transformation de jauge et l'effet régularisant issu de l'équation linéaire.

Il existe d'autres opérateurs pour lesquels on retrouve des propriétés régularisantes. Par exemple,

- l'équation relativiste de Schrödinger qui a été étudiée dans [5] et[77],
- les équations des ondes et de Klein-Gordon dans [**?**],
- les équations de Korteweg-de Vries dans [35],
- les équations de Benjamin-Ono dans [36]
- les équations de Davey-Stewartson dans [45],
- certaines équations polynomiales dispersives dans [2],
- des équation du troisième ordre dans [40],

pour n'en citer que quelques unes.
Toutes ces équations peuvent se mettre sous la forme ci-dessous :

$$\begin{cases} (i\partial_t + a(D))u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{6}$$

ou $a(\xi)$ est une fonction de $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ à valeur réelle d'ordre m.
Les équation de ce type ont beaucoup été étudiées soit en utilisant l'hypothèse d'ellipticité

$$(a(\xi) \neq 0 \text{ si } \xi \neq 0),$$

soit l'hypothèse de dispersivité

$$(\nabla a(\xi) \neq 0 \text{ si } \xi \neq 0).$$

Sous de telles hypothèses, un effet régularisant global a été démontré pour les solutions

$$u(x,t) = e^{ita(D)}u_0(x)$$

dans beaucoup d'articles, dans les cas differentiels et pseudo-differentiels ([5], [2], [10], [14], [23], [24], [43], [34], [55], [77], etc...). La condition de dispersivité a été démontrée comme nécessaire pour certains types d'estimations (voir Hoshiro [24]).

Supposons formellement maintenant que, pour $T > 0$, l'on souhaite établir un estimation régularisante à poids de la forme

$$\|w(x)\varrho(D)e^{ita(D)}u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq A\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{7}$$

où $\varrho(D)$ est régularisant avec un poids $w(x)$. Une idée serait d'utiliser un opérateur $\mathbf{C}$ pour lesquels on a les relations

$$a(D)\circ\mathbf{C} = \mathbf{C}\circ\tilde{a}(D) \text{ et } \varrho(D)\circ\mathbf{C} = \mathbf{C}\circ\tilde{\varrho}(D),$$

pour certains opérateurs $\tilde{a}(D)$ et $\tilde{\varrho}(D)$. On a donc aussi

$$e^{ita(D)}\circ\mathbf{C} = \mathbf{C}\circ e^{it\tilde{a}(D)}.$$

De plus, on construit $\mathbf{C}$ pour que $\mathbf{C}u_0$ vérifie (7), ce qui donne

$$\|w(x)\varrho(D)e^{ita(D)}\mathbf{C}u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq A\|\mathbf{C}u_0\|_0.$$

Ce qui équivaut à

$$\|w(x)\mathbf{C}\tilde{\varrho}(D)e^{ita(D)}u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq A\|\mathbf{C}u_0\|_0.$$

Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^{-1}$ sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ à poids, on obtient que la dernière inégalité ci-dessus est équivalante à

$$\|w(x)\tilde{\varrho}(D)e^{ita(D)}u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq A\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Cette idée peut être utilisée dans une grande variété de situations, et, est utilisée dans cette thèse comme par Kenig, Ponce et Vega dans [31].

L'objectif essentiel de cette thèse est de préciser les résultats obtenus par C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega dans [31] rappelés ci-dessous.
Le problème de Cauchy étudié dans [31] est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = i\mathscr{L}u(x,t) + P(u,\nabla_x u,\overline{u},\nabla_x\overline{u}) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8}$$

où, pour $k\in\{1,...,n\}$, on a

$$\mathscr{L} = \sum_{j\leq k}\partial^2_{x_j} - \sum_{j>k}\partial^2_{x_j}$$

et P est un polynôme n'ayant pas de terme linéaire, c'est a dire que, pour tout $z\in\mathbb{C}^{2n+2}$,

$$P(z) = \sum_{l_0\leq|\alpha|\leq d} a_\alpha z^\alpha, \quad l_0 \geq 2$$

Dans [31], C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega prouvent les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.1 *Soit $l_0\geq 3$. Il existe $s(n;P) > 0$ tel que, pour tout $u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, l'équation (8) admet une unique solution définie sur un intervalle $[0,T]$,*

$$T = T(\|u_0\|_s) > 0$$

vérifiant

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^n)),$$

et

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\infty} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{Q_\mu}|J^{s+\frac{1}{2}}u(x,t)|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Si $s' > s$ alors le résultat ci-dessus est encore vraie avec s' au lieu de s sur le même intervalle $[0,T]$. De plus, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\|u_0\|_s) > 0$ telle que l'application qui a $\tilde{u}_0$ associe $\tilde{u}$ de l'ensemble

$$\{\tilde{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)/\|\tilde{u}_0 - u_0\|_s < \varepsilon\}$$

dans l'ensemble des fonctions $\tilde{u}$ telles que

$$\tilde{u} \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^n)),$$

et

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}\tilde{u}|||_{T,\infty} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{Q_\mu}|J^{s+\frac{1}{2}}u(x,t)|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

est continue.

Théorème 0.2 *Soit $l_0 = 2$. Il existe alors $s = s(n,P) > 0$ et $m = m(n,P) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n : |x|^{2m}dx)$. Le résultat du théorème 0.1 est vrai avec*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n : |x|^{2m}dx)).$$

Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de Cauchy plus général

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = i\mathscr{L}u(x,t) + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{9}$$

où F est une fonction C^∞ par rapport à chacune de ses variables. On démontre les deux théorèmes qui suivent.

Théorème 0.3 *On suppose F nulle en 0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Dans ce cas, pour tout $s > \dfrac{n}{2} + 3$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe un nombre réel $T > 0$ tel que l'équation (5.1) possède une solution unique $u \in E_T$ où E_T est l'ensemble des fonctions*

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^n))$$

telles que

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x - x_\mu\rangle^{-2}J^{s+\frac{1}{2}}u(x,t)|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

avec $J = (1-\Delta)^{1/2}$ et $\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\partial_{x_k}^2$.

De plus, pour un borné B de H^s de données initiales, les solutions associées ont un même temps d'existence T_B, et, l'application qui à $u_0 \in B$ associe $u \in E_{T_B}$ est uniformément continue.

De plus, dans le cas où F ne s'annule qu'à l'ordre 1, on a le résultat plus technique ci-dessous qui fait intervenir des espaces de Sobolev à poids et qui précise l'effet régularisant obtenu dans le cas du théorème 0.3. A la suite de ce résultat, on énonce un corollaire dont l'énoncé est plus simple mais pour lequel la réguarité utilisée est plus importante.

Théorème 0.4 *On suppose F nulle en 0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 1.*
Soit un entier naturel $p \geq 2$.
Dans ce cas, pour tout $s > \dfrac{n}{2} + 3 + p$ tel que

$$u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

$$\langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} u_0 \in H^{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}(\mathbb{R}^n),$$

et, pour tout entier $k \leq p$

$$\langle x \rangle^k u_0 \in H^{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}(\mathbb{R}^n),$$

il existe un nombre réel $T > 0$ tel que l'équation (5.1) possède une solution unique $u \in E_T$ où E_T est l'ensemble des fonctions u telles que

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^n)),$$

$$\langle x \rangle^k u \in C([-T,T] : H^{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)),$$

où $\varepsilon > 0$ et, pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0, 1\}$,

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} |\sqrt{\sigma_0} \langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}} J^{s+\frac{1}{2}} u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

De plus, pour un borné B de données initiales, les solutions associées ont un même temps d'existence T_B, et, l'application qui à $u_0 \in B$ associe $u \in E_{T_B}$ est uniformément continue.

Remarque :

—Dans le cas $p \geq \frac{n}{2} + \varepsilon$ et $n \geq 4$, c'est à dire que $p \geq 2$, u et u_0 sont dans les mêmes espaces de Sobolev.

—Du théorème précédent, on peut déduire le corollaire suivant que l'on obtient en fixant $p = Ent(\frac{n}{2})+2$ où Ent désigne la partie entière.

Corollaire 0.1 *On suppose F nulle en 0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 1. On pose $p = Ent(\frac{n}{2})+2$.*
Dans ce cas, pour tout $s > n+5$ et tout entier $k \leq p$,

$$\langle x \rangle^k u_0 \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n),$$

il existe un nombre réel $T > 0$ tel que l'équation (5.1) possède une solution unique $u \in E_T$ où E_T est l'ensemble des fonctions u telles que, pour tout entier $k \leq p$,

$$\langle x \rangle^k u \in C([-T,T] : H^{s-k}(\mathbb{R}^n)),$$

où $\varepsilon > 0$ et, pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0, 1\}$,

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\sqrt{\sigma_0}\langle x-\sigma_1 x_\mu\rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}}J^{s+\frac{1}{2}}u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

De plus, pour un borné B de données initiales, les solutions associées ont un même temps d'existence T_B, et, l'application qui à $u_0 \in B$ associe $u \in E_{T_B}$ est uniformément continue.

Le théorème 0.3 améliore le résultat obtenu par C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega dans [31] dans le cas où F est un polynôme de valuation $v \geq 3$ et $s \geq 10n$. Le résultat énoncé par le théorème 0.4 est une amélioration des résultats connus et obtenus sur ce sujet juqu'à présent, notamment dans [31] où la régularité utilisée est de l'ordre de $40n$ et $p = 8n + 12$ pour une non linéarité polynomiale.

L'effet régularisant obtenu est aussi précisé car

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}\tilde{u}|||_{T,\infty} \leq A_n|||J^{s+\frac{1}{2}}\tilde{u}|||_T$$

Dans [32], on a le résultat dans le cas où la condition initiale u_0 est petite en norme $H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ avec $s_0 = 3n + 4 + \dfrac{1}{2}$, $\mathscr{L} = \Delta$, $F = P$ et $n \geq 2$.

Dans le cas où la nonlinéarité F est d'ordre 0 et $\mathscr{L} = \Delta$, on a le résultat pour tout $s > \dfrac{n}{2}$.

Dans cette thèse, on prouve le théorème 0.3 pour $s > \dfrac{n}{2} + 3$.

Dans [32], on a le resultat du théorème 0.3 pour $s \geq \dfrac{1}{2} + 3$ en dimension 1 et, pour $s \geq s_0$ avec $s_0 = n + 2 + \dfrac{1}{2}$ en dimension n dans le cas où $\mathscr{L} = \Delta$, F polynôme de valuation 3 et $\|u_0\|_{H^{s_0}}$ assez petite.

III

OUTILS D'ANALYSE

1

Préliminaire d'Analyse

Dans cette sont utilisées les outils habituels d'analyse fonctionnelle.

Les espaces de Sobolev

Définition 1.1 *Pour tout entier naturel m et tout $1 \leq r \leq 1$, on définit l'espace de Sobolev*

$$W^{m,r}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u, \|u\|_{W^{m,r}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

où α est un multi-indice dans $\mathbb{Z}^n$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

avec

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}, \; \partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_n}$$

et

$$L^r(\mathbb{R}^n) = \left\{ f, \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty \right\}.$$

On peut généraliser cette définition à l'aide de la transformée de Fourier d'une foncton u, notée $\mathscr{F}(u)$ ou encore $\hat{u}$, définie, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, par

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix.\xi) u(x) \, dx$$

où

$x.\xi$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2 *Pour tout réel s et tout r, $1 \leq r \leq +\infty$, on définit l'espace de Sobolev*

$$H^{s,r}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u, \|u\|_{H^{s,r}} = \|\mathscr{F}^*(\langle\xi\rangle^\varrho \mathscr{F} u\|_{L^r(\mathbb{R}^n} < \infty \right\}$$

où

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.1 *Pour tout entier naturel m et tout r tel que $1 < r < +\infty$, on a*

$$W^{m,r} = H^{m,r}.$$

Théorème 1.1 (injection de Sobolev généralisée) *Pour tout nombre réel s et tout nombre réel r tel que $1 \leq r \leq +\infty$, on a*

$$H^{s,r} \subset_{>} \mathscr{C}^{s-\frac{n}{r}}$$

et l'injection est continue.

Dans cette thèse, les espaces de Sobolev utilisés sont surtout les espaces $H^{s,2}$ pour $s \geq 0$ que l'on note plus simplement H^s et

$$\|.\|_{H^s} = \|.\|_s.$$

On remarque que

$$H^0 = L^2.$$

Proposition 1.2 *Pour tout $s > s'$, $H^s \subset H^{s'}$.*

Proposition 1.3 *Pour tout $s > \dfrac{n}{2}$, l'espace de Sobolev H^s est une algèbre.*

C'est cette dernière propriété qui fait que les espaces H^s pour $s > \dfrac{n}{2}$ sont un cadre naturel intéressant pour obtenir des estimations sur les solutions d'E.D.P non linéaires. Par exemple, pour une équation de Schrödinger non linéaire,

$$\partial_t u(x,t) = i\Delta u + u|\nabla_x u|$$

La non-linéarité est ici quadratique

$$u|\nabla_x u|$$

et, pour tout s tel que $s - 1 > \dfrac{n}{2}$ et tout u dans H^s, on a

$$\|u|\nabla_x u|\|_{s-1} \leq \|u\|_{s-1}\|\nabla_x u\|_{s-1} \leq \|u\|_s^2.$$

Des théorèmes du point fixe

Proposition 1.4 *Soit X une espace de normé complet,*

$$S \subset X \text{ et } A : S \to X.$$

Si A est contractant dans S, i.e,

$$\exists \varepsilon < 1, \forall u_1, u_2 \in S, \|A(u_1) - A(u_2)\|_X \leq \varepsilon \|u_1 - u_2\|_X$$

alors l'équation $Au = u$ admet, au plus, une solution dans S. Si, de plus, S est fermé dans X et

$$A(S) \subset S$$

alors l'équation

$$Au = u$$

admet une unique solution dans S.

Proposition 1.5 *On suppose que*

$$Au = u_0 + F(u)$$

avec

$$u_0 \in S_0 \subset X.$$

On suppose aussi que

$$S_0 + F(S) \subset S$$

et que F est contactante dans S.
Dans ce cas, l'application qui a $u_0 \in S_0$ associe $u \in S$ est Lipschitz continue en norme X de S_0 dans S.

Ce dernier résultat permet d'obtenir, dans le cadre d'une E.D.P du type

$$u(x,t) = Au(x,t) \text{ et } u(x,0) = u_0,$$

la continuité par rapport aux donées initiales.

Pour un exemple plus précis, on pourra aller voir la sous-chapter intitulée «méthode de contraction».

Les deux sous-chapters suivantes sont largement inspirées du cours de DEA 1994-1995 sur les EDP de Jean Ginibre intitulé : *Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires.*

Le problème de Cauchy

On considère dans cette partie le problème général suivant :

$$\partial_t u = Lu + f(u)$$

où L est un opérateur différentiel indépendant de u, x et t (c'est à dire à coefficients constants : son symbole ne dépend que de ξ) et f dépend de u et éventuellement des dérivées de u d'ordre inférieur à celui de L.

L'équation

$$\partial_t u = Lu \tag{1.1}$$

est appelée équation libre.

On se donne une donnée initiale $u_0(x)$ dans un espace convenable X et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu + f(u) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.2}$$

dans une espace convenable $X(I)$ de fonctions u de I dans X où I est un intervalle, par exemple $[0,T]$ avec $T > 0$.

On considère en particulier les questions suivantes :

Existence locale en temps : On essaie de montrer qu'il existe $T > 0$ tel que le problème (1.2) admet une solution sur l'intervalle de temps $[0,T]$ avec T pouvant être très petit.

Unicité de la solution : On essaie de montrer que pour tout intervalle I contenant 0, par exemple $[0,T]$, le problème (1.2) admet au plus une solution dans $X(I)$.

Continuité par rapports aux données initiales : On essaie de montrer que l'application qui à une donnée intiale u_0 associe l'unique solution u dans $X(I)$ du problème (1.2) est continue, de préférence au sens naturel, c'est à dire avec la topologie de X pour u_0 et celle de $X(I)$ pour u.

Montrer cette continuité permet de dire que si la donnée initiale change peu, la solution change peu, et en particulier, pour la même donnée intiale, on a la même solution.

Existence globale en temps : On essaie de montrer qu'il existe une solution dans $X(\mathbb{R})$.

Si les trois premières propriétés énoncées ci-dessus sont satisfaites, on dit que le probléme de Cauchy (1.2) est **localement** bien posé (pour des données initiales dans X).
Si on arrive à obtenir la quatrième, on dit que le probléme de Cauchy (1.2) est **globalement** bien posé.

Régularité des solutions : Soit $u_0 \in X$. On suppose qu'il existe une solution du problème (1.2) $u \in X(I)$.
On essaie de savoir ce que devient u si u_0 est dans un espace strictement inclus dans X (c'est à dire que, par exemple, u_0 est plus régulière que ce que l'on a utilisé pour démontrer l'existence de u).
La régularité de u_0 se propage-t-elle à u ? C'est à dire : a-t-on $u \in Y(I')$? et a-t-on $I' = I$?...
L'intérêt d'une telle démarche est que l'on peut utiliser les résultats obtenus pour $u_0 \in X$, c'est á dire, en particulier, que si $u_0 \in Y \subset X$, on a l'existence de u dans $X(I)$. Il n'y a plus qu'à préciser les résultats.

Explosion en temps fini : C'est la situation opposée à celle de l'existence globale. On essaie de montrer qu'il existe un $T^* < \infty$ tel que la solution de (1.2) explose que t tend vers T^*, par exemple, dans le sens où

$$\|u(t)\|_X \to \infty.$$

Pour chacune des questions considérées ci-dessus, on pourra par ailleurs s'intéresser au cas pariculier (donc a priori plus simple) de données intiales petites, ce qui peut réduire l'influence du terme non linéaire. On visera alors des propositions du type : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|u_0\|_X \leq \varepsilon$, l'une ou l'autre des propriétés ci-dessus est vraie.
Lorsque le problème de Cauchy est bien posé, on peut s'intéresser au comportement asymptotique des solutions quand $t \to \pm\infty$, en essayant, par exemple de classer les solutions suivant leur comportement asymptotique, la classification étant basée sur le comportement asymptotique des solutions d' un problème plus simple bien résolu comme par exemple celui de l'équation libre (1.1).

Des méthodes d'études pour les équations aux dérivées partielles non linéaires

Méthode de contraction

On considére le problème (1.2). On s'intéresse à un problème plus simple que l'on sait résoudre comme, par exemple, le problème (1.1) .
On note

$$W(t)u_0 = v(x,t)$$

la solution de de (1.1) telles

$$W(0)u_0 = u_0.$$

On écrit alors que u est solution du problème (1.2) équivaut à

$$u(x,t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')f(u(x,t'))\,dt' \tag{1.3}$$

En effet, (1.3) équivaut à

$$\partial_t u(x,t) = LW(t)u_0 + W(t-t)f(u(x,t)) + \int_0^t LW(t-t')f(u(x,t'))\,dt'$$

et $u(x,0) = u_0$ or L est indépendant du temps, ce qui permet de le commuter avec l'intégrale en temps t' donc on obtient que (1.3) équivaut à

$$\partial_t u(x,t) = Lu(x,t) + f(u(x,t)) \text{ et } u(x,0) = u_0.$$

En utilisant des estimations de $W(t)u_0$ (entre autres, un effet régularisant par exemple : gain de dérivées), le fait que

$$|\int_0^T W(T-t')f(u(x,t'))\,dt'| \leq T \sup_{t'\in[0,T]} |W(T-t')f(u(x,t'))|$$

et, à partir des estimations obtenues sur f, pour T assez petit, on peut obtenir des estimations sur

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(x,t)|,$$

ces estimations devant permettre de démontrer que l'opérateur Υ défini par

$$\Upsilon u = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')f(u(x,t'))\,dt'$$

est contractant dans un espace de Banach (où un espace métrique complet construit pour pouvoir appliquer cette méthode et inclus dans $X(I)$ pour $u_0 \in X$).
Ce qui permettra d'obtenir l'existence locale d'une solution dans $X(I)$ au problème (1.2) à l'aide d'un théorème du point fixe, et, qui donne aussi l'unicité et la continuité par rapport aux données initiales.
La difficulté n'est pas d'appliquer le théorème du point fixe mais de trouver de bonnes estimations pour $W(t)u_0$ et f, et de construire un espace de Banach qui permette d'appliquer le théorème du point fixe.

Exploitation des invariants, estimations d'énergie généralisées

Quand l'équation possède de bonnes propriétés algébriques, on peut utiliser des lois de conservations exactes ou approchées pour obtenir a priori des solutions à partir des quantitiés conservées, en particulier l'énergie.

Méthode de compacité

Appliquer une méthode de compacité, c'est remplacer l'équation considérée par une équation approchée plus réguière que l'on sait résoudre.
Exemple :

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{\nabla u_0}\nabla_x u \tag{1.4}$$

que l'on remplace, pour tout $\varepsilon > 0$, par

$$\partial_t u = (\varepsilon\Delta + i\mathscr{L})u + T_{\nabla_x u_0}\nabla_x u \tag{1.5}$$

Cette deuxième équation permet de récupérer les propriétés de l'équation de la chaleur. On tente alors d'obtenir des estimations sur les solutions de cette dernière équation pour montrer que ces solutions restent dans un ensemble compact fixe.
Si cela est possible, on élimine ensuite la régularisation par un passage à la limite puis on obtient l'éxistence d'une solution pour l'équation initiale.

2

L'analyse dyadique

Dans la suite, on note

$$sp(u) = supp(\hat{u})$$

et $\mathscr{F}$ la tansformée de Fourier. On pose, pour tout $j \geq 0$,

$$\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi)$$

avec

$$\varphi_0(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \varphi_(\xi),$$

où

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$supp(\varphi) \subset B(0,1),$$

$$\varphi = 1 \text{ dans } B\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

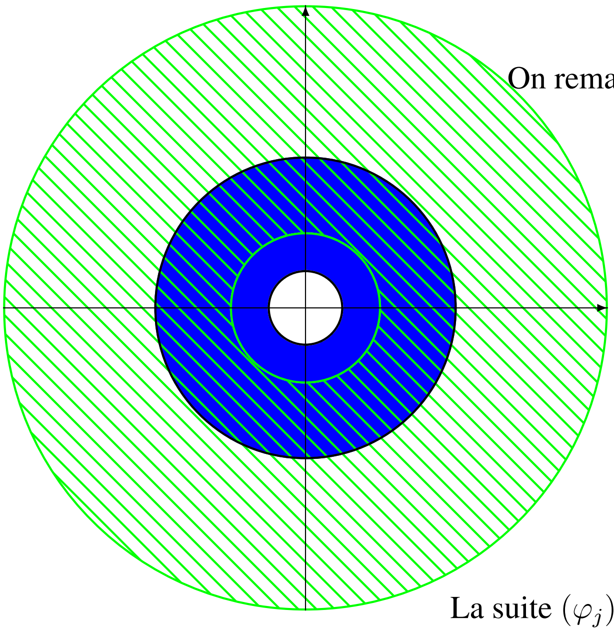
On a

$$supp(\varphi_j) = 2^j supp(\varphi_0)$$

et

$$supp(\varphi_j) \subset \Gamma_j = 2^j \Gamma_0.$$

Les couronnes Γ_0 (hachurée en bleu) et Γ_1 (hachurée en vert) sont représentées sur le dessin suivant :



On remarque que $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ si $|j-k| \geq 4$.

On pose $\varphi_{-1} = \varphi$.

lemme :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=-1}^{+\infty} \varphi_j(\xi) = 1.$$

Preuve :

$$\sum_{j=-1}^{k} \varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-k-1}\xi).$$

La suite (φ_j) est appelée partition dyadique de l'unité.

Définition 2.1 *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Schwartz. On appelle décomposition dyadique de u la série*

$$\sum_{j \geq -1} u_j$$

où

$$u_j = \varphi_j(D)u$$

et $\varphi_j(D)$ est l'opérateur $\mathscr{F}^{-1}\varphi_j\mathscr{F}$. Les u_j sont appelés les termes dyadiques de u.

Remarques :
— Cette décomposition dépend de φ mais φ est fixée une fois pour toute.
— Les termes dyadiques sont C^∞ (Théorème de Paley-Wiener-Schwartz).

Proposition 2.1 *Dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$u = \sum_{j \geq -1} u_j.$$

Preuve :

$$\langle \sum_{k \geq j \geq -1} u_j, \chi \rangle = \langle \varphi(2^{-k-1}D)u, \chi \rangle$$

$$\langle \sum_{k \geq j \geq -1} u_j, \chi \rangle = \langle \hat{u}, \varphi(2^{-k-1}\xi)\mathscr{F}^{-1}(\chi) \rangle$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\forall \psi \in \mathscr{S} \quad \|(\varphi(2^{-k-1}\xi) - 1)\psi\|_{L^\infty} \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathscr{S}} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\psi \in \mathscr{S}$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall |\xi| > R_\varepsilon \quad |\psi(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \|\phi\|_{L^\infty}}$$

donc
$$|\varphi(2^{-k-1}\xi)-1)\psi(\xi)|\leq\varepsilon.$$
De plus
$$|\varphi(2^{-k-1}\xi)-1)\psi(\xi)|=|2^{-k-1}\xi.\psi(\xi)\int_0^1\nabla_\xi\varphi(2^{-k-1}t\xi)\,dt|$$
donc il existe $k_\varepsilon>0$ tel que pour tout $k>k_\varepsilon$
$$\forall|\xi|\leq R_\varepsilon\ \ |\varphi(2^{-k-1}\xi)-1)\psi(\xi)|\leq 2^{-k-1}R_\varepsilon\|\nabla_\xi\varphi\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\leq\varepsilon.$$
Il reste à prouver la convergence des dérivées, c'est à dire que
$$\forall\psi\in\mathscr{S}\ \forall\alpha,\forall\beta\in\mathbb{N}^n\ \ \|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta((\varphi(2^{-k-1}\xi)-1)\psi)\|_{L^\infty}\ \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Ce qui s'obtient par le même raisonnement.

Théorème 2.1 *Soient $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,*
$$u=\sum_{j\geq-1}u_j$$
la décomposition dyadique de u et $s\in\mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :
$$u\in H^s(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow\forall j\in\mathbb{N},\ u_j\in L^2(\mathbb{R}^n)\ \textit{et}\ (2^{js}\|u_j\|_{L^2})_j\in l^2.$$
De plus, les normes $\|u\|_s$ et $\|\|u_j\|_0\|_{l^2}$ sont équivalentes.

On a aussi, pour $s\in\mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}$,
$$u\in C^s(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow\ \forall j\in\mathbb{N},\ u_j\in L^\infty\ \textit{et}\ \sup_j 2^{js}\|u_j\|_{L^\infty}<\infty$$
De plus, les normes $\|u\|_{C^s}$ et $\|\|u_j\|_{L^\infty}\|_{l^\infty}$ sont équivalentes.

Définition 2.2 *On désigne par $B^s_{p,q}$ l'espace des fonctions $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*
$$\begin{cases}u_j\in L^p\\ \|2^{js}\|u_j\|_{L^p}\|_{l^q}<\infty.\end{cases}$$

Remarques :
—L'espace $B^s_{p,q}$ est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{B^s}=\|2^{js}\|u_j\|_{L^p}\|_{l^q}$.
—Cet espace est indépendant de la décomposition dyadique choisie.
—Si $s\geq s'$ alors $B^s_{p,q}\subset B^{s'}_{p,q}$.
—Pour $s\in\mathbb{R}_+^*\backslash\mathbb{N}$, $B^s_{\infty,\infty}=C^s$ et, dans la suite on note $B^s_{\infty,\infty}=B^s$.

Corollaire 2.1 *Injection de Sobolev précisée.*

Pour tout $s>\dfrac{n}{2}$,
$$H^s(\mathbb{R}^n)\subsetneq B^{s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 2.2 *Pour tous réels s et m, l'opérateur $\langle D\rangle^m$ est continue de B^s dans B^{s-m} et bijectif.*

Preuve : Soit

$$v = \langle D\rangle^m u \stackrel{def}{=} \mathscr{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^m \hat{u})$$

et

$$v_j = \varphi_j(D)v = \langle D\rangle^m u_j = f_j(D)u_j$$

avec

$$f_j(\xi) = \tilde{\varphi}_0(2^{-j}\xi)\langle\xi\rangle^n.$$

En posant

$$\hat{g}_j = f_j,$$

on a

$$v_j(x) = 2^{jn}\int g_j(2^j y)u_j(x-y)\,dy$$

donc

$$\|v_j\|_{L^\infty} \leq \|g_j\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty}.$$

De plus, pour $N > \dfrac{n}{2}$, on a

$$\|g_j\|_{L^1} \leq A\|\langle\xi\rangle^N \hat{f}_j\|_{L^2}.$$

On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 2.1 *La fonction $2^{-jm}f_j$ est bornée dans $D(\mathbb{R}^n)$.*

On obtient donc

$$\|g_j\|_{L^1} \leq A2^{jm},$$

ce qui donne

$$2^{j(s-m)}\|v_j\|_{L^\infty} \leq A2^{js}\|u\|_{L^\infty}.\square$$

Corollaire 2.2 *Si $s \leq 0$ les éléments de B^s sont des combinaisons linéaires de dérivées d'éléments de $B^{s'}$ avec $s' > 0$.*

Théorème 2.2 *Soit (u_j) une suite de fonctions telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $m > s$ tel que

$$\|2^{js}\|u_j\|_0\|_{l^2} < \infty$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = m$,

$$\|2^{j(s-m)}\|\partial^\alpha u_j\|_0^2\|_{l^2} < \infty$$

alors

$$\sum_j u_j \in H^s$$

et $u = \sum_j u_j$ vérifie

$$\|u\|_s^2 \leq A \sup_{|\alpha|=0 \text{ ou } m} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j(s-|\alpha|)}\|u_j\|_0.$$

Preuve : voir [47], [69].

Théorème 2.3 *Soit* (u_j) *une suite de fonctions telles que, pour tout* $j \in \mathbb{N}$*,*

$$u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On suppose qu'il existe un compact

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

tel que

$$sp(u_j) \subset 2^j \Gamma$$

et, qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\left(2^{js} \|u_j\|_0\right)_j \in l^2$$

alors

$$\sum_j u_j \in H^s$$

et $u = \sum_j u_j$ *vérifie*

$$\|u\|_s^2 \leq A \sum_{j=0}^\infty 2^{2js} \|u_j\|_0^2.$$

Remarques : ces derniers résultats se généralisent à $B^s_{p,q}$ en remplaçant L^2 par L^p et l^2 par l^q.

On a par exemple

Théorème 2.4 *Soit* (u_j) *une suite de fonctions telles que, pour tout* $j \in \mathbb{N}$*,*

$$u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

On suppose qu'il existe un compact

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

tel que

$$sp(u_j) \subset 2^j \Gamma,$$

et un nombre réel s *tel que*

$$\left(2^{js} \|u_j\|_{L^p}\right)_j \in l^q$$

alors

$$u = \sum u_j \in B^s_{p,q}$$

et

$$\|u\|^q_{B^s_{p,q}} \leq A \sum_{j=0}^\infty 2^{qjs} \|u_j\|^q_{L^p}.$$

3

Les opérateurs pseudo-différentiels

Dans la suite, on note

$$S^m_{\gamma,\delta} = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}),\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \exists A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R},\ \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le A_{\alpha,\beta} |\xi|^{-\gamma|\beta| + \delta|\alpha| + m} \right\}$$

$$a(x,D)u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi.$$

Definition 3.1 *On appelle semi-norme d'ordre N d'un opérateur à symbole dans $S^m_{\gamma,\delta}$ le nombre*

$$\sup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| = N, |\beta| = N} \ \sup_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-m + \gamma|\beta| - \delta|\alpha|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|.$$

Théorème 3.1 *Soient $a \in S^m_{\gamma,\delta}$, $b \in S^{m'}_{\gamma,\delta}$ avec $0 \le \delta \le \gamma < 1$ ou $0 \le \delta < \gamma \le 1$, $m \in \mathbb{R}$, et $m' \in \mathbb{R}$. On a*

$$a(x,D)b(x,D) = c(x,D)$$

où

$$c(x,\xi) = \sum_{|\nu| < N} \frac{1}{\nu!} \partial_\xi^\nu a(x,\xi) D_x^\nu b(x,\xi) + \sum_{|\nu| = N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} r_{\nu,\theta}(x,\xi)\, d\theta$$

$$r_{\nu,\theta}(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta} \partial_\xi^\nu a(x, \xi + \theta\eta) \partial_x^\nu b(x+y, \xi)\, dy\, d\eta$$

De plus, les $S^{m+m'-\delta|\nu|}_{\gamma,\delta}$ semi-normes de $r_{\nu,\theta}$ sont bornées par des produits de $S^{m-\delta|\nu|}_{\gamma,\delta}$ semi-normes de $\partial_\xi^\nu a$ et des $S^{m'}_{\gamma,\delta}$ semi-normes $\partial_x^\nu b$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

On a aussi

$$a^*(x,\xi) = \sum_{|\nu| < N} \frac{1}{\nu!} \partial_\xi^\nu \overline{a(x,\xi)} + \sum_{|\nu| = N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} r^*_{\nu,\theta}(x,\xi)\, d\theta$$

$$r^*_{\nu,\theta}(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta} \partial_\xi^\nu \partial_x^\nu \overline{a(x+y, \xi + \theta\eta)}\, dy\, d\eta$$

De plus, les $S^m_{\gamma,\delta}$ semi-normes de $r^*_{\nu,\theta}$ sont bornées par des $S^{m-\delta|\nu|}_{\gamma,\delta}$ semi-normes de $\partial_\xi^\nu \partial_x^\nu \bar{a}$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

Preuve : voir [69].

Remarque : dans cette thèse, le résultat utilisé est celui donné sans la précision de dépendance de l'ordre en $\delta|\nu|$.

Lemme 3.1 *Soient a et b tels que $a \in S^m_{0,0}$ et $b \in S^{m'}_{0,0}$ alors pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$,*

$$r_{\nu,\theta} \in S^{m+m'}_{0,0}$$

et les $S^{m'+m}_{0,0}$ semi-normes de $r_{\nu,\theta}$ sont bornées par des produits de semi-normes de $\partial^\nu_\xi a$ et $\partial^\nu_x b$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

Soient a et b tels que $a \in S^{m'}_{1,\delta}$ et, $b \in S^m_{0,0}$ indépendant de ξ, alors pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$,

$$r_{\nu,\theta} \in S^{m+m'-|\nu|}_{1,\delta}$$

et les $S^{m'+m-|\nu|}_{1,\delta}$ semi-normes de $r_{\nu,\theta}$ sont bornées par des produits de semi-normes de $\partial^\nu_\xi a$ et $\partial^\nu_x b$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

Preuve :

On a
$$r_{\nu,\theta}(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta}\partial^\nu_\xi a(x,\xi+\theta\eta)\partial^\nu_x b(x+y,\xi)\, dy\, d\eta.$$

Pour tous multi-indices α et β, on a

$$\partial^\beta_\xi \partial^\alpha_x r_{\nu,\theta}(x,\xi) = \sum_{\gamma,\gamma'} Os \int\int e^{-iy.\eta}\partial^{\nu+\beta-\gamma}_\xi \partial^{\alpha-\gamma'}_x a(x,\xi+\theta\eta)\partial^{\nu+\gamma'}_x b(x+y,\xi)\, dy\, d\eta.$$

Pour tous entiers naturels N_1 et N_2, on a

$$\partial^\beta_\xi \partial^\alpha_x r_{\nu,\theta}(x,\xi) = \\ \sum_{\gamma,\gamma'} Os \int\int J^{N_2}_\eta J^{N_1}_y (e^{-iy.\eta})\partial^{\nu+\beta-\gamma}_\xi \partial^{\alpha-\gamma'}_x a(x,\xi+\theta\eta)\partial^{\nu+\gamma'}_x \partial^\gamma_\xi b(x+y,\xi)\frac{dy\, d\eta}{\langle\eta\rangle^{N_2}\langle y\rangle^{N_1}}.$$

Soit χ une fonction de $\mathscr{S}$ tel que $\chi(0)=1$.
Pour tous entiers naturels pairs N_1 et N_2, par intégrations par parties en η et y, on obtient

$$\partial^\beta_\xi \partial^\alpha_x r_{\nu,\theta}(x,\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\gamma,\gamma'} \\ \int\int e^{-iy.\eta}J^{N_2}_\eta\left(\chi(\varepsilon\eta)\frac{\partial^{\nu+\beta-\gamma}_\xi \partial^{\alpha-\gamma'}_x a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle\eta\rangle^{N_1}}\right)J^{N_1}_y\left(\chi(\varepsilon y)\frac{\partial^{\nu+\gamma'}_x \partial^\gamma_\xi b(x+y,\xi)}{\langle y\rangle^{N_2}}\right)\, dy\, d\eta.$$

Dans le cas où $a \in S^m_{0,0}$ et $b \in S^{m'}_{0,0}$, sachant que θ et $\varepsilon \in [0,1]$, on a

$$\left|J^{N_2}_\eta\left(\chi(\varepsilon\eta)\frac{\partial^{\nu+\beta-\gamma}_\xi \partial^{\alpha-\gamma'}_x a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle\eta\rangle^{N_1}}\right)\right| \leq \\ A_{\nu,\alpha,\beta,\gamma,\gamma',N_2,N_1}\frac{\langle\xi\rangle^m}{\langle\eta\rangle^{N_1-m}}\left(1+\sum_{k=1}^{k=N_2} A_{k,N_2}\varepsilon^k \sup_{|\gamma_2|=k}|\partial^{\gamma_2}_\eta \chi(\varepsilon\eta)|\right)$$

$$\left| J_y^{N_1} \left(\chi(\varepsilon y) \frac{\partial_x^{\nu+\gamma'} \partial_\xi^{\gamma} b(x+y,\xi)}{\langle y \rangle^{N_2}} \right) \right| \leq$$

$$A_{\nu,\gamma,\gamma',N_1,N_2} \frac{\langle \xi \rangle^{m'}}{\langle y \rangle^{N_2 - m'}} \left(1 + \sum_{k=1}^{k=N_1} A_{k,N_1} \varepsilon^k \sup_{|\gamma_2|=k} |\partial_y^{\gamma_2} \chi(\varepsilon y)| \right)$$

où les constantes $A_{\nu,\alpha,\beta,\gamma,\gamma',N_2,N_1}$ et $A_{\nu,\gamma,\gamma',N_1,N_2}$ sont respectivement des sommes de $S^m_{0,0}$ semi-normes de a et des sommes de $S^{m'}_{0,0}$ semi-normes de b.
Pour $N_1 > n+m$ et $N_2 > n+m'$, on obtient la première proposition du lemme 3.1.

Dans le cas où $a \in S^m_{1,\delta}$ et, $b \in S^{m'}_{0,0}$ indépendant de ξ, sachant que $\theta \in [0,1]$, on a

$$\left| J_\eta^{N_2} \left(\frac{\partial_\xi^{\nu+\beta} \partial_x^{\alpha-\gamma'} a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta \rangle^{N_1}} \right) \right| \leq$$

$$A_{\nu,\alpha,\beta,\gamma',N_2,N_1} \frac{\langle \xi \rangle^{m+\delta(|\alpha|-|\gamma'|)-(|\nu|+|\beta|)}}{\langle \eta \rangle^{N_1-m-\delta(|\alpha|-|\gamma'|)-(|\nu|+|\beta|)}} \left(1 + \sum_{k=1}^{k=N_1} A_{k,N_1} \varepsilon^k \sup_{|\gamma_2|=k} |\partial_y^{\gamma_2} \chi(\varepsilon y)| \right)$$

$$\left| J_y^{N_1} \left(\frac{\partial_x^{\nu+\gamma'} b(x+y)}{\langle y \rangle^{N_2}} \right) \right| \leq$$

$$A_{\nu,\gamma',N_1,N_2} \frac{\langle \xi \rangle^{m'}}{\langle y \rangle^{N_2-m'}} \left(1 + \sum_{k=1}^{k=N_1} A_{k,N_1} \varepsilon^k \sup_{|\gamma_2|=k} |\partial_y^{\gamma_2} \chi(\varepsilon y)| \right)$$

où les constantes $A_{\nu,\alpha,\beta,\gamma,\gamma',N_2,N_1}$ et $A_{\nu,\gamma,\gamma',N_1,N_2}$ sont respectivement des sommes de $S^m_{1,\delta}$ semi-normes de a et des sommes de $S^{m'}_{0,0}$ semi-normes de b.
Pour N_1 et N_2 assez grand, on obtient la deuxième proposition du lemme 3.1.

Théorème 3.2 (Calderón-Vaillancourt) *Soit a un symbole tel qu'il existe δ, $0 \leq \delta < 1$ tel que $a \in S^0_{\delta,\delta}$ alors $a(x,D)$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Plus précisément, s'il existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$ tel que, pour tous multi-indices α et β tels que $|\alpha|+\beta| \leq N$, les dérivées $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)$ vérifient des estimations $S^0_{\delta,\delta}$ alors $a(x,D)$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On a aussi ce même résultat pour α et β tels que $|\alpha| \leq N$ et $|\beta| \leq N$ avec $N > \frac{n}{2}$.

Preuve : voir [9].

Théorème 3.3 *Soit $s > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.*

Si

$$a(x,D) \in OpS^m_{1,1}$$

alors $a(x,D)$ est borné de $H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 3.1 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$ ou $0 \leq \delta < \gamma \leq 1$ alors*

$$|||a(x,D)f|||_T \leq A|||f|||_T \text{ et } \mathcal{N}_T(a(x,D)f) \leq A\mathcal{N}_T(f).$$

Preuve.

$$|||a(x,D)f|||_T = \sup_\mu \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^{-2} a(x,D)f|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

or

$$a(x,D)f = a(x,D)\langle x - x_\mu \rangle^2 \langle x - x_\mu \rangle^{-2} f$$

et le symbole de l'opérateur

$$a(x,D)\langle x - x_\mu \rangle^2$$

est

$$\sum_{|\nu| \leq 2} \partial_\xi^\nu a(x,\xi) D_x^\nu (\langle x - x_\mu \rangle^2)$$

et donc

$$\langle x - x_\mu \rangle^{-2} a(x,D) \langle x - x_\mu \rangle^2 \in S^0_{\gamma,\delta}.$$

Le théorème de Calderòn-Vaillancourt donne alors le résultat, les $S^0_{\gamma,\delta}$ semi-normes de

$$\langle x - x_\mu \rangle^{-2} a(x,D) \langle x - x_\mu \rangle^2$$

étant uniformément bornées en μ.

Prouvons ensuite la seconde inégalité. On a

$$\mathcal{N}_T(a(x,D)f) = \sup_\mu \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^2 a(x,D)f|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'opérateur

$$a(x,D)\langle x - x_\mu \rangle^{-2}$$

a pour symbole

$$r(x,\xi) = Os \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy.\eta} \langle x + y - x_\mu \rangle^{-2} a(x, \xi + \eta) \, dyd\eta.$$

Par intégrations par parties en y et η, puis en utilisant l'inégalité de Peetre

$$\langle x + y - x_\mu \rangle^{-2-N} \leq A_N \langle x - x_\mu \rangle^{-2-N} \langle y \rangle^N,$$

on prouve que

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 r(x,\xi) \in S^0_{\gamma,\delta}$$

avec ses semi-normes uniformément bornées en μ.
Ce qui termine la démonstration de ce corollaire. □

Proposition 3.1 *On pose*

$$|||f||| = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_{L^2(Q_\mu)}$$

$$|||f|||_1 = \sup_{Q \text{ : cube de côté} 1} \|f\|_{L^2(Q)}$$

Il existe un réel A_n tel que

$$|||f||| \leq |||f|||_1 \leq A_n |||f|||$$

Corollaire 3.2 *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, Il existe un réel A_n tel que*

$$|||f(. + x_0)||| \leq A_n |||f|||$$

Lemme 3.2 *Si*

$$\langle x\rangle^{s_1}u \in H^s$$

alors

$$\langle x\rangle^{s_1}\nabla_x u \in H^{s-1}.$$

Preuve :

$$\partial_{x_k}(\langle x\rangle^{s_1}u) = s_1\langle x\rangle^{s_1-1}\frac{x_k}{\langle x\rangle^{s_1}}u + \langle x\rangle^{s_1}\partial_{x_k}u$$

Lemme 3.3 *Soit $q \geq 0$, posons*

$$\lambda_q(x) = \langle x\rangle^{-q} = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{q}{2}}}.$$

Si $a \in S^0_{\delta,\delta}$, $0 \leq \delta < 1$ alors $\langle x\rangle^{-q}a(x,D)\langle x\rangle^q$ est continue sur $L^2(\mathbb{R}^n : \lambda_q(x)dx)$ avec sa norme ne dépendant que de q et de n.

Preuve : On a

$$\|a(x,D)g\|_{L^2(\mathbb{R}^n:\lambda_q(x)dx)} = \left(\int |\int e^{ix\xi}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{q}{4}}}a(x,\xi)\langle x\rangle^{q/2}\widehat{(g\lambda_{q/2}}(x))(\xi)d\xi|^2dx\right)^{1/2}$$

or $g \in L^2(\mathbb{R}^n : \lambda_q(x)dx)$ si et seulement si $g\lambda_{q/2}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n : dx)$ donc en posant

$$b(x,D)f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{q}{4}}}a(x,D)\left((1+|x|^2)^{\frac{q}{4}}f(x)\right)$$

où

$$f = g\lambda_{q/2}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n : dx),$$

il suffit de montrer que $b(x,D)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n : dx)$.

Formellement, d'après le théorème 3.1, on a

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{q}{4}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1\int e^{-iy.\eta}\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(x,\xi+\eta\theta)(1+|x+y|^2)^{\frac{q}{4}}\,dy\,d\eta\,\,d\theta$$

Par intégration par parties en y et η, pour tout entier naturel N_1 et tout entier naturel N_2 pairs et choisis assez grand pour obtenir l'intégrabilité en y et η, après passage à la limite en ε, on obtient

$$b(x,\xi) = \sum_{\substack{\gamma_1\in\mathbb{N}^n,|\gamma_1|\leq N_1\\ \gamma_2\in\mathbb{N}^n,|\gamma_2|\leq N_2}} A_{\gamma_1,\gamma_2}\int_0^1\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^{\gamma_1}\left(\frac{a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle\eta\rangle^{N_2}}\right)\frac{\partial_y^{\gamma_2}d(x,y)}{\langle y\rangle^{N_1}}dyd\eta d\theta$$

Pour tout multi-indice α et β, on a

$$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b(x,\xi) = \sum_{\substack{\gamma_1\in\mathbb{N}^n,|\gamma_1|\leq N_1\\ \gamma_2\in\mathbb{N}^n,|\gamma_2|\leq N_2\\ \gamma_3\in\mathbb{N}^n,|\gamma_3|\leq|\alpha|}} A_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}\int_0^1\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^{\gamma_1}\left(\frac{\partial_x^{\gamma_3}\partial_\xi^\beta a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle\eta\rangle^{N_2}}\right)\frac{\partial_x^{\alpha-\gamma_3}\partial_y^{\gamma_2}d(x,y)}{\langle y\rangle^{N_1}}dyd\eta d\theta$$

avec

$$d(x,y) = (1+|x|^2)^{-q/4}(1+|x+y|^2)^{q/4}.$$

Sachant que pour $s \geq 0$, on a
$$\langle x+y\rangle^s \leq C_s \langle x\rangle^s \langle y\rangle^s$$
donc, pour tout α et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a
$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta d(x,y)| \leq A_{\alpha,\beta} \langle y\rangle^{q/4}$$
et
$$a(x,\xi) \in S^0_{\delta,\delta}$$
donc, pour tout α et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, on obtient
$$\sup_{\theta\in[0,1]} \left| \partial_\eta^{\gamma_1} \left(\frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta\rangle^{N_2}} \right) \right| \leq A_{\alpha,\beta,\gamma_1} \langle \xi\rangle^{\delta(|\alpha|-|\beta|)} \langle \eta\rangle^{\delta(|\alpha|+|\beta|+N_1)-N_2}$$
Le symbole $b(x,\xi)$ a donc ses $S^0_{\delta,\delta}$ semi-normes bornées pour N_1 et N_2 assez grands. On conclut alors à l'aide du théorème de Calderón-Vaillancourt.

Lemme 3.4 *Soit C un opérateur à symbole*
$$c(x,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}$$
alors pour tout réel $s > 0$,
$$\langle x\rangle^s \# c(x,\xi) \# \langle x\rangle^{-s} \in S^m_{\varrho,\delta}$$
avec ses semi-normes bornées par une somme de semi-normes de $c(x,\xi)$.

Lemme 3.5 *Soit C un opérateur à symbole*
$$c(x,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}$$
alors pour tout réel $s > 0$,
$$\langle x\rangle^s \# a(x,\xi) \in S^{m-\varrho}_{\varrho,\delta}$$
où
$$a(x,\xi) = (c(x,\xi)\#\langle x\rangle^{-s} - \langle x\rangle^{-s}\#c(x,\xi))$$
avec ses semi-normes bornées par une somme de semi-normes de $c(x,\xi)$.
On a plus précisément que, pour tout multi-indice α et β,
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\langle x\rangle^s \# a(x,\xi))| \leq A \langle \xi\rangle^{m-\varrho+\delta|\alpha|-\varrho|\beta|} \langle x\rangle^{-1}.$$

Corollaire 3.3 *On a*
$$a(x,D)\langle x\rangle \in OpS^m_{\varrho,\delta}.$$

Preuve du lemme 3.5.

Posons $r(x,\xi) = \langle x\rangle^s \# (c(x,\xi)\#\langle x\rangle^{-s} - \langle x\rangle^{-s}\#c(x,\xi))$.

Formellement, d'après la formule rappelée dans le théorème 3.1, pour tout $\psi \in \mathscr{S}$ telle que $\psi(0) = 1$, on a
$$r(x,\xi) = \langle x\rangle^s \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n, |\nu|=1} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \int \psi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy.\eta} \partial_y^\nu \langle x+y\rangle^{-s} \partial_\eta^\nu c(x,\xi+\theta\eta)\, dy\, d\eta\ \ d\theta.$$

Après intégrations par parties en y et η, pour tout entier naturel N_1 et tout entier naturel N_2 pairs et assez grands pour obtenir l'intégrabilité en y et η, après passage à la limite en ε, on obtient

$$r(x,\xi) = \langle x\rangle^s \sum_{\substack{\gamma_1 \in \mathbb{N}^n, |\gamma_1| \le N_1 \\ \gamma_2 \in \mathbb{N}^n, |\gamma_2| \le N_2 \\ \nu \in \mathbb{N}^n, |\nu| = 1}} A_{\gamma_1,\gamma_2} \int_0^1 \int \frac{e^{-iy.\eta}}{\langle y\rangle^{N_1}} \partial_y^{\gamma_2} \partial_y^{\nu} \langle x+y\rangle^{-s} \partial_\eta^{\gamma_1} \left(\frac{\partial_\eta^\nu c(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta\rangle^{N_2}} \right) dy\, d\eta\ \ d\theta.$$

Pour tout α et tout β multi-indices, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x,\xi) = \sum_{\substack{\gamma_1 \in \mathbb{N}^n, |\gamma_1| \le N_1 \\ \gamma_2 \in \mathbb{N}^n, |\gamma_2| \le N_2 \\ \nu \in \mathbb{N}^n, |\nu| = 1 \\ |\gamma_3| \le |\alpha|}} A_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} \int_0^1 \int \frac{e^{-iy.\eta}}{\langle y\rangle^{N_1}} \partial_y^{\gamma_2+\nu} \partial_x^{\alpha-\gamma_3} (\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s}) \times \partial_\eta^{\gamma_1} \left(\frac{\partial_\eta^\nu \partial_x^{\gamma_3} \partial_\xi^\beta c(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta\rangle^{N_2}} \right) dy d\eta\ \ d\theta$$

or, pour ν tel que $\nu_j = 1$, on a

$$\partial_y^{\gamma_2+\nu} \partial_x^{\alpha-\gamma_3} (\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s}) = -s \partial_y^{\gamma_2} \partial_x^{\alpha-\gamma_3} \left(\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s-1} \frac{y_j}{\langle x+y\rangle} \right).$$

Sachant que, pour tous multi-indices α_1 et α_2, on a

$$\left| \partial_y^{\alpha_1} \partial_x^{\alpha_2} \left(\frac{1}{\langle x+y\rangle} \right) \right| \le 1$$

et que, pour tous multi-indices α_3 et α_4, on a

$$\left| \partial_y^{\alpha_3} \partial_x^{\alpha_4} \left(\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s-1} y_j \right) \right| \le A \langle y\rangle^{s+2} \langle x\rangle^{-1},$$

en effet

$$\left| \partial_y^{\alpha_3} \partial_x^{\alpha_4} \left(\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s-1} y_j \right) \right| \le A \sup_{\gamma_4 \le \alpha_4} \langle x\rangle^{s-|\gamma_4|} \langle x+y\rangle^{-s-1-|\alpha_3|-(|\alpha_4-\gamma_4|)} \langle y\rangle$$

et

$$\langle x+y\rangle^{-s-1} \langle y\rangle \le A \langle x\rangle^{-s-1} \langle y\rangle^{s+2}.$$

On obtient donc que

$$|\partial_y^{\gamma_2+\nu} \partial_x^{\alpha-\gamma_3} (\langle x\rangle^s \langle x+y\rangle^{-s})| \le A \langle y\rangle^{s+2} \langle x\rangle^{-1},$$

et

$$\left| \partial_\eta^{\gamma_1} \left(\frac{\partial_\eta^\nu \partial_x^{\gamma_3} \partial_\xi^\beta c(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta\rangle^{N_2}} \right) \right| \le A|\theta| \frac{\langle \xi+\theta\eta\rangle^{m-\varrho|\beta|-\varrho|\nu|+\delta|\alpha|}}{\langle \eta\rangle^{N_2}},$$

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \left| \partial_\eta^{\gamma_1} \left(\frac{\partial_\eta^\nu \partial_x^{\gamma_3} \partial_\xi^\beta c(x,\xi+\theta\eta)}{\langle \eta\rangle^{N_2}} \right) \right| \le A \frac{\langle \xi\rangle^{m-\varrho|\beta|-\varrho|\nu|+\delta|\alpha|} \langle \eta\rangle^{m+\varrho|\beta|+\varrho|\nu|+\delta|\alpha|}}{\langle \eta\rangle^{N_2}}.$$

On a donc

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x,\xi)| \le A_{\alpha,\beta} \int \frac{\langle y\rangle^{s+2} \langle x\rangle^{-1}}{\langle y\rangle^{N_1}} \frac{\langle \xi\rangle^{m-\varrho|\beta|-\varrho|\nu|+\delta|\alpha|} \langle \eta\rangle^{m+\varrho|\beta|+\varrho|\nu|+\delta|\alpha|}}{\langle \eta\rangle^{N_2}}\, dy\, d\eta$$

Pour $N_1 = n + 1 + s + 3$ et $N_2 = m + n + 2 + |\alpha| + |\beta|$, on obtient le résultat. $\square$

Preuve du lemme 3.4. Ce lemme est un corollaire du lemme 3.5 car

$$\langle x\rangle^s \# c(x,\xi) \# \langle x\rangle^{-s} = \langle x\rangle^s \# (c(x,\xi) \# \langle x\rangle^{-s} - \langle x\rangle^{-s} \# c(x,\xi)) + c(x,\xi). \ \square$$

Preuve du corollaire 3.3. On a

$$a(x,\xi) \# \langle x\rangle = Os \int\int e^{iy.\eta} a(x, \xi+\eta) \langle x+y\rangle \, dy d\eta,$$

donc, pour tout multi-indice α et β, on a

$$\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha a(x,\xi) \# \langle x\rangle = \sum_{\gamma\le\alpha} A_{\gamma,\alpha} Os \int\int e^{iy.\eta} (\partial_x^{\alpha-\gamma} \partial_\xi^\beta a)(x,\xi+\eta) \partial_x^\gamma(\langle x+y\rangle) \, dy d\eta.$$

Par intégration par parties en y et η, on obtient le résultat à l'aide du lemme 3.5 qui donne des estimations sur les dérivées de a. $\square$.

Lemme 3.6 *Si $q > n$ alors il existe un réel $A_{n,q}$ tel que $\|f\|_{L^2(\lambda_q(x) \ dx)} \le A_{q,n}|||f|||$*

Preuve : Voir [31] Proposition 2.7. aaa

Théorème 3.4 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$ avec $0 \le \delta \le \gamma < 1$ ou $0 \le \delta < \gamma \le 1$ alors*

$$|||a(x,D)f||| \le A_n |||f|||$$

où A_n est une constante qui ne dépend que de n.

Dans la suite, on pose :

$$|||u|||' = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{Q_\mu} |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \|u\|_{L^2([0,T]\times Q_\mu)} = \|u\|_{l^1_\mu(L^2(Q_\mu\times[0,T]))}$$

$$|||u|||'_T = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_0^T \int_{Q_\mu} |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \|u\|_{L^2([0,T]\times Q_\mu)} = \|u\|_{l^1_\mu(L^2(Q_\mu\times[0,T]))}$$

Corollaire 3.4 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$ avec $0 \le \delta \le \gamma < 1$ ou $0 \le \delta < \gamma \le 1$ alors*

$$|||a(x,D)f|||' \le A_n |||f|||'.$$

Corollaire 3.5 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$ avec $0 \le \delta \le \gamma < 1$ ou $0 \le \delta < \gamma \le 1$ alors*

$$|||a(x,D)f|||'_T \le A_n |||f|||'_T.$$

la preuve du théorème 3.4 et de ses deux corollaires est analogue à celle faite dans [31] : "Theorem 2.8".

Lemme 3.7 *Pour tout réel s et tout $\sigma > \frac{n}{2}$, il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $v \in H^s$,*

$$\|\langle x-\mu\rangle^{-\sigma}v\|_s \in l^2_\mu \quad \textit{et} \quad \|\|\langle x-\mu\rangle^{-\sigma}v\|_s\|_{l^2_\mu} \leq A\,\|v\|_s.$$

Preuve. Posons

$$c_\mu(x,D) = \langle D\rangle^s \langle x-\mu\rangle^{-\sigma}.$$

D'après le Théorème 3.1, on a

$$c_\mu(x,\xi) = Os\!\int e^{-iy.\eta}\langle \xi+\eta\rangle^s \langle x+y-\mu\rangle^{-\sigma}\,\frac{dy\,d\eta}{(2\pi)^n}.$$

On remarque que l'on peut écrire

$$\langle x-\mu\rangle^\sigma c_\mu(x,\xi) = c(x-\mu,\xi)$$

où

$$c(x,\xi) = \langle x\rangle^\sigma \int e^{-iy.\eta}\langle \xi+\eta\rangle^s \langle x+y\rangle^{-\sigma}\,\frac{dy\,d\eta}{(2\pi)^n}.$$

Supposons d'abord que $c \in S^s_{1,0}$. On a alors

$$\sum_\mu \|c_\mu(x,D)v\|_0^2 = \sum_\mu \int \frac{|c(x-\mu,D)v(x)|^2}{\langle x-\mu\rangle^{2\sigma}}\,dx$$
$$\leq C_1 \sum_\mu \int \frac{\langle x-E(x)\rangle^{2\sigma}}{\langle E(x)-\mu\rangle^{2\sigma}} |c(x-\mu,D)v(x)|^2 dx,$$

où $E(x)$ est le vecteur formé par les parties entières des coordonnées de x et où on a utilisé l'inégalité de Peetre. D'où,

$$\sum_\mu \|c_\mu(x,D)v\|_0^2 \leq C_2 \sum_\mu \frac{1}{\langle\mu\rangle^{2\sigma}}\|c(x,D)\tau_{-\mu}v\|_0^2 \leq C_3 \sum_\mu \frac{1}{\langle\mu\rangle^{2\sigma}}\|\tau_{-\mu}v\|_s^2 = C^2\|v\|_s^2,$$

puisque $2\sigma > n$, $c \in S^s_{1,0}$ et la norme H^s est invariante par translation.

Reste à vérifier que $c \in S^s_{1,0}$. L'argument est en fait classique : Par intégrations par parties, on peut écrire $\langle x\rangle^{-\sigma}c(x,\xi)$ comme une combinaison linéaire finie d'intégrales de la forme

$$\int e^{-iy.\eta}\partial^\alpha_\eta \langle \xi+\eta\rangle^s\, \partial^\beta_\eta \langle \eta\rangle^{-N}\langle y\rangle^{-N'} J^N_y \langle x+y\rangle^{-\sigma}\,dyd\eta,$$

où les entiers pairs N, N' sont assez grands et $|\alpha|+|\beta| \leq N'$, intégrales que l'on peut estimer, grâce à l'inégalité de Peetre, par

$$C\int \langle\xi\rangle^s\,\langle\eta\rangle^{-N+|s|}\langle y\rangle^{-N'+\sigma}\langle x\rangle^{-\sigma}\,dyd\eta = C'\langle\xi\rangle^s\,\langle x\rangle^{-\sigma}$$

si $N > n+|s|$ et $N' > n+\sigma$. Ce qui prouve que

$$|c(x,\xi)| \leq C\,\langle\xi\rangle^s.$$

Les dérivées partielles de c se traitent de la même manière. □

Définition 3.1 *Un opérateur E est dit elliptique s'il existe $c > 0$ telle que pour tout x et tout ξ dans $\mathbb{R}^n$, son symbole $e(x,\xi)$ vérifie*

$$e(x,\xi) \geq c|\xi|.$$

Lemme 3.8 *Tout opérateur E à symbole dans la classe $S^m_{1,0}$ elliptique d'ordre m admet une parametrixe F à symbole dans la classe $S^{-m}_{1,0}$ telle que*

$$EF - Id = R$$

à symbole dans la classe $S^{-1}_{1,0}$ et

$$FE - Id = R'$$

à symbole dans la classe $S^{-1}_{1,0}$.

Preuve. On appelle F l'opérateur de symbole

$$\frac{1-\theta(|\xi|)}{e(x,\xi)}$$

où e est le symbole de E et $\theta \in C^\infty$, $0 \le \theta \le 1$ qui vaut 0 si $|\xi| \ge 2$ et 1 si $|\xi| \le 1$, et, la formule donnée dans le théorème 3.1 appliquée à EF et FE permet d'obtenir le résultat.

Lemme 3.9 *Pour tout opérateur E à symbole dans la classe $S^m_{1,0}$ elliptique d'ordre m, il existe B à symbole dans la classe $S^{\frac{m}{2}}_{1,0}$ elliptique d'ordre $\frac{m}{2}$ tel que*

$$E - B^2 = R$$

à symbole dans la classe $S^{m-1}_{1,0}$.

Preuve. On prend B de symbole

$$(1-\theta(|\xi|))\sqrt{e(x,\xi)}$$

puis on applique la formule donnée dans le théorème 3.1 à B^2.

Lemme 3.10 *Pour tout nombre réel s et tout ξ tel que $|\xi| \ge 1$, on a*

$$\frac{1}{|\xi|^s} \in S^{-s}_{1,0}.$$

Plus précisément, on a

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \exists A_{\beta,s} \in \mathbb{R}^+, \forall |\xi| \ge 1, |\partial_\xi^\beta \left(\frac{1}{|\xi|^s}\right)| \le \frac{A_{\beta,s}}{|\xi|^{s+|\beta|}}.$$

De plus, le résultat ci-dessus est aussi vrai avec $\langle\xi\rangle$ au lieu de $|\xi|$.

Preuve par récurrence sur $m = |\beta|$ dans le cas $s \in \mathbb{R}^{*+}$.

On a le résultat pour $|\beta| = 0$.

On fait alors l'hyponthèse de récurrence suivante :

Pour tout β tel que $|\beta| \le m$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists A_{\beta,s} \in \mathbb{R}^+, \forall |\xi| \ge 1, |\partial_\xi^\beta \left(\frac{1}{|\xi|^s}\right)| \le \frac{1}{|\xi|^{s+|\beta|}}.$$

Posons β' tel que $|\beta'| = |\beta| + 1$. On a

$$\partial_\xi^{\beta'} \left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = \partial_\xi^\beta \partial_{\xi_k} \left(\frac{1}{|\xi|^p}\right)$$

$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = -s\partial_\xi^\beta\left(\frac{\xi_k}{|\xi|}\times\frac{1}{|\xi|^{s+1}}\right)$$
$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = -s\partial_\xi^\beta\left(\xi_k\times\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)$$
$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = -s\sum_{\gamma\leq\beta} A_{\gamma,\beta}\partial_\xi^{\beta-\gamma}(\xi_k)\times\partial_\xi^\gamma\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)$$

On a donc deux cas possibles ;

$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = -s\xi_k\partial_\xi^\beta\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)+\partial_\xi^\gamma\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)$$

avec $|\gamma| = |\beta|-1$ et plus précisément $\forall i\in [\![0,n]\!]$, si $i\neq k$ alors $\gamma_k=\beta_k$ et sinon $\gamma_k=\beta_k-1$, où bien

$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\right) = -s\xi_k\partial_\xi^\beta\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$|\partial_\xi^\beta\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)| \leq \frac{A_{\beta,s}}{|\xi|^{p+2+m}}$$

et

$$|\partial_\xi^\gamma\left(\frac{1}{|\xi|^{s+2}}\right)| \leq \frac{A_{\gamma,s}}{|\xi|^{s+2+m-1}}.$$

En posant

$$A_{\beta',s} = |-sA_{\beta,s+2}+A_{\gamma,s+2}|,$$

on obtient donc l'hérédité.

Le cas $s=0$ est évident et le cas $-s\in\mathbb{R}^{*+}$ se démontre de même. $\square$

Lemme 3.11 *Soit $\theta_1\in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction plateau telle que $\theta_1(x)=0$ si $|x|\leq 1$ et $\theta_1(x)=1$ si $|x|\geq 2$. On a*

$$\theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\in S^0_{1,0}$$

avec, sur le support de θ_1', $|\xi|\sim R$.

Preuve. On remarque tout d'abord que sur le support de θ', on a $R\leq|\xi|\leq 2R$.

On démontre par récurrence sur $m=|\beta|$, la propriété suivante :

Pour tout $\theta\in C^\infty(\mathbb{R})$, bornée, telle que $supp(\theta)\in[1,2]$,

$$\forall\beta\in\mathbb{N}^n,\exists A_\beta\in\mathbb{R}^+,\forall R\geq 1,\ |\partial_\xi^\beta\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)|\leq\frac{A_\beta}{|\xi|^{|\beta|}}.$$

Le cas $m=0$ est évident.

Prouvons alors l'hérédité.

Soit β' tel que $|\beta'| = |\beta| + 1$. On a

$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\right) = \partial_\xi^{\beta}\left(\theta'\left(\frac{|\xi|}{R}\right) \times \frac{\xi_k}{|\xi|}\frac{1}{R}\right)$$

$$\partial_\xi^{\beta'}\left(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\right) = \sum_{\gamma\leq\beta} A_{\beta,\gamma}\partial_\xi^{\gamma}\left(\theta'\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\right)\sum_{\gamma_1\leq\beta-\gamma} A_{\beta,\gamma,\gamma_1}\partial_\xi^{\gamma_1}(\xi_k)\partial_\xi^{\beta-\gamma-\gamma_1}\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \times \frac{1}{R}.$$

En utilisant que sur le support de θ',

$$|\xi| \leq 2R$$

et donc que

$$\frac{1}{R} \leq \frac{2}{|\xi|},$$

puis en appliquant le lemme 3.10 et l'hypothèse de récurrence à θ', on obtient l'hérédité.

4

Les opérateurs paradifférentiels

Dans la suite, on rappelle quelques résultats sur les opérateurs paradifférentiels.

Tout le calcul pseudo-différentiel classique (produit, adjoint, inverse, . ..) s'étend aux opérateurs paradifférentiels, le calcul symbolique étant fini et non pas asymptotique, les restes étant ϱ-régularisants et non infiniment régularisants. L'exemple typique, et fondamental, de tels opérateurs est celui des opérateurs T_a associés à une fonction $a(x)$ de classe C^ϱ.

À la place de la multiplication par a, qui n'opère de H^s dans lui-même que pour $|s| < \varrho$, nous introduisons les opérateurs de «paramultiplication» T_a qu'on peut décrire approximativement comme suit : si u a son spectre localisé au voisinage de $|\xi| = R$, $T_a u$ est à peu près égal à $a_R u$ où $\hat{a}_R$ est égal à $\hat{a}$ dans la boule de rayon εR, et à 0 ailleurs. Le lien fondamental entre opérateurs paradifférentiels et fonctions non linéaires est le résultat suivant.

Si u est de classe C^ϱ $\varrho > 0$ [resp. $H^s, s > n/2$] et si f est de classe C^∞, on a

$$f(u(x)) = T_{f'(x)}.u(x) + erreur$$

où l'erreur appartient à $C^{2\varrho}$ [resp. $H^{2s-\frac{n}{2}}$].

Soit $a(x) \in L^\infty$ à support compact. L'idée essentielle est de remplacer l'opérateur de multiplication par a, qui n'opère que dans bien peu d'espaces, par un opérateur de «paramultiplication» T_a qui applique H^s (ou C^0) dans lui-même quels que soient s et a. Cet opérateur dépend du choix d'une fonction auxiliaire χ, mais si a est de classe C^ϱ, un changement de fonction χ ne modifie T_a que par l'addition d'un opérateur ϱ-régularisant.

Définition 4.1 (La classe de symboles Σ_ϱ^m) *On définit la classe Σ_ϱ^m où $m \in \mathbb{N}$ et $\varrho > 0$ par la classe de symboles a, continus sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, C^∞ en ξ et C^ϱ en x, tels que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \; \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) \left\langle \xi \right\rangle^{-m+|\alpha|} \in B^\varrho \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \right)$$

et

$$\widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\xi - \eta, \eta\right) \mathscr{F}_1(a)(\xi - \eta, \eta) \hat{u}(\eta)\, d\eta$$

où χ est une paratroncature, c'est à dire que χ est C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $h > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$ tels que

$$\varepsilon < \varepsilon' < 1 \text{ et } \chi(\xi,\eta) = \begin{cases} 0 \text{ si } |\xi| \geq \varepsilon|\eta| \\ 1 \text{ si } |\xi| \leq \varepsilon'|\eta| \text{ et } \; |\eta| \geq h \end{cases}$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \; \exists A_\alpha \in \mathbb{R}, \; \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \; \langle \xi \rangle^{|\alpha|} |\partial^\alpha \chi(\xi, \eta)| \leq A_\alpha.$$

Proposition 4.1 *Si, dans la définition de T_a, on change la paratroncature et si $a \in \Sigma_\varrho^m$ alors l'opérateur erreur (ou différence) est continu de H^s dans $H^{s-m+\varrho}$.*

Preuve. voir [6], [48] ou [69].

Dans la suite, ψ_1 désigne une fonction de $\mathscr{S}$ qui vaut 1 sur $B(0,1)$ et χ désigne une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0,\varepsilon)$ qui vaut 1 sur $B(0,\varepsilon')$ où ε et ε' sont deux réels tels que $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$.

Proposition 4.2 *On peut alors aussi écrire T_a comme un opérateur pseudodifférentiel classique de symbole*

$$\tilde{a}^1(x,\xi) = |\xi|^n (1 - \psi_1(\xi)) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}(|\xi|^1 (x-y)) a(y,\xi) \, dy$$

avec $\tilde{a}^1 \in S^m_{1,1}$ si $a \in \Sigma^m_\varrho$.

Dans cette thèse, pour des raisons techniques, on choisit un $\chi(y,\eta)$ de la forme

$$\chi\left(\frac{y}{|\eta|^{\frac{1}{2}}}\right)(1 - \psi_1(\eta)).$$

Ce qui n'est pas pas exactement une paratroncature. L'opérateur obtenu, noté $T_a^{\frac{1}{2}}$, n'est pas un opérateur paradifférentiel classique mais la différence

$$T_a^{\frac{1}{2}} - T_a$$

possède de bonnes propriétés.

On rappelle que pour tout $j \geq 0$, on pose

$$\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi)$$

avec

$$\varphi_0(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \varphi(\xi),$$

où

$$\varphi = \varphi_{-1} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

est telle que

$$supp(\varphi) \subset B(0,1)$$

et $\varphi = 1$ sur $B(0,1/2)$. On a donc une partition dyadique de l'unité,

$$1 = \sum_{j \geq -1} \varphi_j(x),$$

ce qui permet d'écrire la décomposition dyadique associée à φ,

$$u = \sum_{j \geq -1} u_j$$

pour toute distribution tempérée u avec $u_j = \varphi_j(D)u$ les termes dyadiques de u.
Nous allons également définir un autre opérateur T'_a dépendant d'un entier N_0 (et du choix de φ pour la décomposition en couronnes dyadiques)

$$T'_a u = \sum_{q=N_0}^{+\infty} \sum_{-1 \leq p \leq q-N_0} a_p u_q$$

où u_q et a_p sont les termes respectivement obtenus après décompositions dyadiques de a et u assciées à φ.

L'entier N_0 doit être assez grand pour qu'il existe une famille de couronnes Γ'_q analogues aux couronnes dyadiques Γ_q telles que $\Gamma_q + \Gamma_{q-N_0} \subset \Gamma'_q$.

On a alors le résultat suivant

Théorème 4.1 *Soient s et σ deux nombres réels quelconques.*
Soient m et ϱ deux nombres réels positifs et $a \in \Sigma^m_\varrho$.

(i) Les opérateurs T_a et T'_a appliquent H^s dans H^{s-m} (et C^σ dans C^σ si $m = 0$, conv. hab. si entier), et, il existe une constante A telle que leur norme d'opérateur est majorée par $A\|a\|_0$.

(ii) Si de plus a est de classe C^ϱ, $\varrho > 0$ non entier, alors

$$T_a - T'_a$$

est ϱ-régularisant : il applique H^s dans $H^{s-m+\varrho}$ (et, si $m = 0$, C^σ dans $C^{\sigma+\varrho}$, conv. hab. si entier) et, il existe une constante A telle que

$$\|T_a - T'_a\|_{\mathscr{L}(H^s : H^{s-m+\varrho})} \leq A\|a\|_\varrho.$$

De même, une modification du choix de χ pour T_a, ou de (N_0, φ) pour T'_a, ne modifie ces opérateurs que par addition d'un opérateur ϱ-régularisant.

Preuve : voir [6], [48] ou [69].

Les opérateurs paradifférentiels permettent d'écrire la formule de linéarisation de J.-M. Bony.

Théorème 4.2 (Formule de Bony) *Pour toutes fonctions réelles u_1,...$u_m \in H^{\frac{n}{2}+\varrho}(\mathbb{R}^n)$, $\varrho > 0$, et toute fonction F de m variables réelles, C^∞ et nulle en 0, on a*

$$F(u_1, u_2, ..., u_m) = \sum_{i=1}^{i=m} T_{\partial_{u_i} F} u_i + r \ \ \text{avec} \ \ r \in H^{\frac{n}{2}+2\varrho}(\mathbb{R}^n)$$

Preuve : voir [6]. Cf aussi Y. Meyer : [48],[47].

Le reste de Bony r dépend évidemment de $(u_1, ..., u_m)$. Le résultat qui suit étudie cette dépendance et montre que r est une fonction localement lipschitzienne de $(u_1, ..., u_m)$ dans des espaces de Sobolev à poids.

Théorème 4.3 *Soit r le reste obtenu dans la formule de Bony ci dessus et $\varrho > 0$.*
Si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe un nombre réel $s_1 \geq 0$, $\langle x \rangle^{s_1} u_i \in H^{\frac{n}{2}+\varrho}$ alors

$$\langle x \rangle^{s_1} r \in H^{\frac{n}{2}+2\varrho}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 4.4 *Soit r le reste obtenu dans la formule de Bony ci dessus.*
Pour tout réel s_1 et pour tout u, v telles que $\langle x\rangle^{s_1}u$ et $\langle x\rangle^{s_1}v \in H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $s \geq \frac{n}{2} + \varrho$ et $\varrho > 0$, on a

$$\|\langle x\rangle^{s_1}(r(u) - r(v))\|_{s+\varrho} \leq \Theta(\|\langle x\rangle^{s_1}u\|_s, \|\langle x\rangle^{s_1}v\|_s)\|\langle x\rangle^{s_1}(u-v)\|_s$$

avec $\Theta(\|u\|_s, \|v\|_s)$ bornée si u et v sont dans un borné de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Preuve dans le cas $s_1 = 0$.

On reprend la méthode utilisée dans l'article [47] pour démontrer la formule de Bony, méthode basée sur l'analyse dyadique.

On suppose $m = 1$. Les u_j désignent les termes dyadiques de u et les $S_j(u)$ les sommes partielles jusqu'à j des termes dyadiques de u, de sorte que

$$u_j = S_j(u) - S_{j-1}(u).$$

On peut écrire

$$F(u) = F(u_{-1}) + \sum_{j=0}^{\infty} F(S_j(u)) - F(S_{j-1}(u)) = F(S_1(u)) + \sum_{j=2}^{\infty} u_j\, r_j(u) + T_{F'(u)}u,$$

où

$$r_j(u) = \int_0^1 F'(S_{j-1}(u) + tu_j)\, dt - S_{j-3}(F'(u)) \quad \text{et} \quad T_{F'(u)}u = \sum_{j=2}^{\infty} u_j\, S_{j-3}(F'(u)).$$

Notons ici que $T_{F'(u)}$ est bien un opérateur paradifférentiel, en fait de paramultiplication : il est associé au symbole $F'(u(x))$ et à la paratroncature particulière

$$\chi(\xi, \eta) = \sum_{j\geq 2}\sum_{l\leq j-3} \varphi_l(\xi - \eta)\, \varphi_j(\eta).$$

Il en résulte l'expression suivante de $r(u)$:

$$r(u) = F(S_1(u)) + \sum_{j=2}^{\infty} u_j\, r_j(u).$$

Notons aussi qu'il est bien connu que l'application $u \mapsto F(u)$ envoie $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même ($s > n/2$) et qu'elle est bornée sur les bornés, ce qui implique facilement le caractère localement lipschitzien de cette application. D'ailleurs, ceci rend l'étude du terme $F(S_1(u))$ triviale, terme qui est donc ignoré dans la suite de cette démonstration.

On peut donc écrire, pour u et v variant dans un borné B de $H^s(\mathbb{R}^n)$,

$$r(u) - r(v) = \sum_{j=2}^{\infty}(u_j - v_j)\, r_j(u) + \sum_{k=2}^{\infty} v_j\, (r_j(u) - r_j(v)).$$

Sachant que, pour tout multi-indice α, on a

$$\|\partial^\alpha u_j\|_0 \leq \varepsilon'_j 2^{j(|\alpha|-s)},$$

avec $(\varepsilon'_j) = (2^{js}\|u_j\|_0) \in l^2$, $\|2^{js}\|u_j\|_0\|_{l^2} \leq C_s\|u\|_s$, et, de même, on a

$$\|\partial^\alpha(u_j - v_j)\|_0 \leq \|u - v\|_s 2^{j(|\alpha|-s)},$$

Il suffit donc d'établir les estimations

$$\|\partial^\alpha r_j(u)\|_0 \leq \varepsilon_j 2^{j(|\alpha|-s)} \quad \text{et} \quad \|\partial^\alpha(r_j(u) - r_j(v))\|_0 \leq \delta_j 2^{j(|\alpha|-s)}$$

pour $0 \leq |\alpha| \leq N$ avec N assez grand ($N > 2s$) et des suites (ε_j) et (δ_j) vérifiant

$$\|(\varepsilon_j)\|_{l^2} \leq C_B\|u\|_s \quad \text{et} \quad \|(\delta_j)\|_{l^2} \leq C_B\|u - v\|_s,$$

la constante C_B ne dépendant que du borné B de $H^s(\mathbb{R}^n)$.
Puisque que dans ce cas, on obtient que

$$\sum_{j=2}^{\infty}(u_j - v_j)\, r_j(u) \text{ et } \sum_{k=2}^{\infty} v_j\,(r_j(u) - r_j(v)) \in B^{2s}_{1,1} \subset B^{2s}_{2,1} \subset H^{2s-\frac{n}{2}}.$$

En effet, par exemple, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| > 2s$, on a

$$\|\partial^\alpha((u_j - v_j)\, r_j(u))\|_{l^1} \leq \|\partial^{\beta-\alpha}(u_j - v_j)\|_{l^2}\|\partial^\beta r_j(u)\|_{l^2} \leq \varepsilon'_j\varepsilon_j 2^{j|\alpha|}2^{-2js}$$

avec

$$\varepsilon'_j\varepsilon_j \in l^1$$

et

$$\|\varepsilon'_j\varepsilon_j\|_{l^1} \leq C_B\|u - v\|_s\|u\|_s.$$

L'estimation sur $\partial^\alpha r_j(u)$ découle du lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soit $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ et B une partie bornée de $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $s > \frac{n}{2}$.*
Pour tout entier $N > s$, il existe une constante C_B telle que, pour tout $u \in B$, on ait

$$\|\partial^\alpha[G(S_j(u)) - S_{j-j_0}(G(u))]\|_0 \leq \varepsilon_j 2^{j(|\alpha|-s)},$$

pour $0 \leq |\alpha| \leq N$, où la suite (ε_j) vérifie $\|(\varepsilon_j)\|_{l^2} \leq C_B\|u\|_s$, et l'entier j_0 est fixé.

Preuve. On renvoie à l'article [47] où ce lemme (Proposition 1 de [47]) est démontré même si l'estimation de $\|(\varepsilon_j)\|_{l^2}$ par rapport à B et u n'y est pas. En fait, il suffit de suivre les détails de cette preuve pour voir que cette estimation est vraie.

Revenons à la preuve du théorème 4.4 dans le cas $s_1 = 0$.

Enfin, comme

$$r_j(u) - r_j(v) = \int_0^1 [F'(S_{j-1}(u) + tu_j) - F'(S_{j-1}(v) + tv_j)]dt - S_{j-3}(F'(u) - F'(v)),$$

l'estimation sur $\partial^\alpha(r_j(u) - r_j(v))$ vient du lemme suivant qui est l'analogue du lemme précédent 4.1.

Lemme 4.2 *Soit $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ et B une partie bornée de $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $s > \frac{n}{2}$. Pour tout entier $N > s$, il existe une constante C_B telle que, pour tous $u, v \in B$, on ait*

$$\|\partial^\alpha[G(S_j(u)) - G(S_j(v)) - S_{j-j_0}(G(u) - G(v))]\|_0 \leq \delta_j 2^{j(|\alpha|-s)},$$

pour $0 \leq |\alpha| \leq N$, où la suite (δ_j) vérifie $\|(\delta_j)\|_{l^2} \leq C_B\|u - v\|_s$, et l'entier j_0 est fixé.

Preuve. La méthode de preuve de ce lemme est la même que celle du lemme précédent (voir [47]). Cependant, on utilise en plus le caractère localement lipschitzien de G.

Revenons à la preuve du théorème 4.4 dans le cas $s_1 = 0$.

Le cas $m > 1$ se traite par le même type d'arguments en écrivant

$$F(u_1, ..., u_m) = F(S_{-1}(u_1, ..., u_m)) + \sum_{k=0}^{\infty} F(S_k(u_1, ..., u_m)) - F(S_{j-1}(u_1, ..., u_m)),$$

où on a noté $S_j(u_1, ..., u_m) = (S_k(u_1), ..., S_k(u_m))$. $\square$

Preuve du théorème 4.4 dans le cas $s_1 > 0$.

Comme dans [48], dans le cas $m = 1$, on a

$$F(u) = T_{F'(u)}u + r(u) + F(S_1(u))$$

On remarque

$$r(u) = R_u(x, D)u$$

avec

$$R_u(x, \xi) = \sum_{j=2}^{\infty} r_j(u)\varphi_j(\xi) \in S^{-\varrho}_{1,1}$$

et, pour tout u dans un borné B de H^s avec $s > \dfrac{n}{2} + \varrho$, pour tous multi-indices α et β, on a, comme cela est indiqué dans [48] (où l'opérateur $R_u(x, D)$ est noté $\varrho(x, D)$),

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_u(x, \xi)| \leq A_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{|\alpha|-|\beta|-\varrho} C_B \|u\|_s.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle x\rangle^{s_1}(r(u) - r(v)) = & \\ & \langle x\rangle^{s_1}(R_u(x, D) - R_v(x, D))\langle x\rangle^{-s_1}\langle x\rangle^{s_1}u \\ & +\langle x\rangle^{s_1}R_v(x, D)\langle x\rangle^{-s_1}\langle x\rangle^{s_1}(u - v) + \langle x\rangle^{s_1}F(S_0(u - v)). \end{aligned}$$

Le lemme 3.4 donne que

$$\langle x\rangle^{s_1}R_u(x, D)\langle x\rangle^{-s_1} \in OpS^{-\varrho}_{1,1}$$

avec ses semi-normes majorées par des semi-normes de $R_u(x, \xi)$. On a le même résultat pour

$$\langle x\rangle^{s_1}(R_u(x, D) - R_v(x, D))\langle x\rangle^{-s_1}$$

Remarque : dans cette thèse, nous appliquerons la formule de Bony à l'expression

$$F(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla\bar{u}),$$

où

$$u \in H^{\frac{n}{2}+1+\varrho}(\mathbb{R}^n)$$

est à valeurs complexes. Cela est possible car on peut écrire

$$F(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla\bar{u}) = G(Re(u), \nabla Re(u), Im(u), \nabla Im(u))$$

avec

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_1 - iy_1, x_2 - iy_2)$$

une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^{2n+2}$ dans $\mathbb{C}$.

On applique alors la formule de Bony à G et on obtient que

$$F(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla \bar{u}) = T_{\partial_{x_1} G} Re(u) + T_{\partial_{x_2} G} \nabla Re(u) + T_{\partial_{y_1} G} Im(u) + T_{\partial_{y_2} G} \nabla Im(u) + r.$$

En utilisant que

$$Re(u) = \frac{u + \overline{u}}{2},$$
$$Im(u) = \frac{u - \overline{u}}{2i},$$
$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

et

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

puis la linéarité de T_b par rapport à b, on obtient la formule utilisée dans cette thèse :

$$F(u, \overline{u}, \nabla u, \nabla \overline{u}) = T_{\partial_u F} u + T_{\partial_{\overline{u}} F} \overline{u} + T_{\partial_{\nabla u} F} \nabla u + T_{\partial_{\nabla \overline{u}} F} \nabla \overline{u} + r(u)$$

avec $r(u) \in H^{\frac{n}{2} + 2\varrho}(\mathbb{R}^n)$.

Variante paradifférentielle : Dans cette thèse, pour des raisons techniques, nous utiliserons une paratroncature $\chi(\xi, \eta)$ de la forme

$$\chi_1\left(\xi/|\eta|^{\frac{1}{2}}\right)(1 - \psi_1(\eta)),$$

où

$$\psi_1, \chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ψ_1 vaut 1 au voisinage de 0 et est à support dans $B(0, h)$, et χ_1 est à support dans $B(0, \varepsilon)$ et vaut 1 sur $B(0, \varepsilon')$, où ε et ε' sont deux réels tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$, ce qui, bien entendu, modifie la quantification paradifférentielle de Bony.

L'opérateur associé, noté $T_a^{\frac{1}{2}}$, n'est pas un opérateur paradifférentiel classique puisque

$$T_a^{\frac{1}{2}} = \tilde{a}(x, D)$$

avec

$$\tilde{a} \in S^m_{1, \frac{1}{2}},$$

ce qui est une meilleure classe que $S^m_{1,1}$.

Cependant, avec cette définition, les restes ne seront plus ϱ-régularisants, mais seulement $\frac{\varrho}{2}$-régularisants.

Plus généralement, étant donnée une fonction $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on posera

$$\tilde{b}^\delta(x, \xi) = (1 - \psi_1(\xi))|\xi|^{\delta n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}^{-1}(\chi_1)\big(|\xi|^\delta (x - y)\big)\, b(y) dy \tag{4.1}$$

où $0 \leq \delta \leq 1$ et ψ_1, χ_1 sont comme ci-dessus. On utilisera aussi la notation

$$T_b^\delta = \tilde{b}^\delta(x, D)$$

et on notera que T_b^1 n'est autre que l'opérateur paradifférentiel (de paramultiplication) T_b.

Soit ϱ un nombre réel positif, dans la suite, l'espace C^ϱ désigne l'espace de Holder si ϱ n'est pas un entier et l'espace des fonctions ϱ dérivables à dérivées continues et bornées sinon.

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 4.3 *Soit $\delta \in [0,1]$ et $\sigma_1 \in \{0,1\}$. On a $\tilde{b}^\delta \in C^\infty$ et, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, tout $N \in \mathbb{N}$, tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$, on a*

$$\text{Si } b \in C^{|\alpha|} \text{ alors } \langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \tilde{b}^\delta(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta,N} \sup_\mu \|\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b\|_{C^{|\alpha|}} \langle \xi \rangle^{-|\beta|}. \tag{4.2}$$

On en déduit donc que, si $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N \tilde{b}^\delta \in S^0_{1,\mathbf{0}}$$

avec ses semi-normes majorées par

$$A_{\alpha,\beta} \sup_\mu \|\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b\|_{C^{|\alpha|}}.$$

Soit $\varrho \in \mathbb{N}$ tel que $b \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\text{pour } |\alpha| > \varrho, \quad \langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \tilde{b}^\delta(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta,N} \sup_\mu \|\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b\|_{C^\varrho} \langle \xi \rangle^{\delta(|\alpha|-\varrho)-|\beta|} \tag{4.3}$$

et

$$\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \tilde{b}^\delta(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta,N} \sup_\mu \|\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b\|_{C^\varrho} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \text{ pour } |\alpha| \leq \varrho, \tag{4.4}$$

où $A_{\alpha,\beta,N}$ désigne une constante positive indépendante de μ.

Dans ce cas, on en déduit que

$$\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N \tilde{b}^\delta \in S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes majorées par

$$A_{\alpha,\beta} \sup_\mu \|\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b\|_{C^\varrho}.$$

Soit $\varrho \geq 0$ non nécessairement entier tel que $b \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$.
Si $supp(b) \subset Q_\mu = \mu + [0,1]^n$ alors on a

$$\langle x - x_\mu \rangle^N |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \tilde{b}^\delta(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta,N} \|b\|_{C^\varrho} \langle \xi \rangle^{\delta(|\alpha|-\varrho)-|\beta|} \text{ pour } |\alpha| > \varrho, \tag{4.5}$$

$$\langle x - x_\mu \rangle^N |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \tilde{b}^\delta(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta,N} \|b\|_{C^\varrho} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \text{ pour } |\alpha| \leq \varrho, \tag{4.6}$$

où $A_{\alpha,\beta,N}$ désigne une constante positive indépendante de μ.
Sans la condition de support de b, cette dernière proposition reste vraie seulement dans le cas $N = 0$.

Preuve. Pour simplifier, on écrit $\tilde{b}$ au lieu de $\tilde{b}^\delta$ et on omet le facteur $1 - \psi_1(\xi)$ qui ne pose pas de problème. On rappelle que $1 - \psi_1$ est nulle au voisinage de 0, et plus précisément, on a $|\xi| \geq 1$ et donc $\langle \xi \rangle \leq \sqrt{2}|\xi|$. Pour tout multi-indice α et tout $\alpha' \leq \alpha$ tel que $|\alpha - \alpha'| \leq \varrho$, on a

$$\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N \partial_x^\alpha \tilde{b}(x,\xi) = |\xi|^{\delta n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\delta|\alpha'|} (\partial_x^{\alpha'} \hat{\chi}_1)(|\xi|^\delta (x-y)).\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N (\partial_x^{\alpha-\alpha'} b)(y) dy.$$

Quand $\alpha = 0$, on a, pour tout multi-indice β,

$$\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N \partial_\xi^\beta \tilde{b}(x,\xi) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_\xi^{\beta-\gamma}(|\xi|^{\delta n}) \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma (\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta (x-y))).\langle x - \sigma_1 x_\mu \rangle^N b(y) dy.$$

Or, en vertu de la formule de Faa di Bruno,

$$\partial_\xi^\gamma(\hat\chi_1(|\xi|^\delta(x-y))) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n \\ |\nu|=q\leq|\gamma|}} \sum_{\substack{\gamma=\gamma_1+...+\gamma_q \\ \gamma_i\neq 0}} \partial^\nu\hat\chi_1(|\xi|^\delta(x-y))\partial_\xi^{\gamma_1}(|\xi|^\delta)...\partial_\xi^{\gamma_q}(|\xi|^\delta)(x-y)^\nu,$$

ce qui permet de majorer comme suit :

$$|\partial_\xi^\gamma(\hat\chi(|\xi|^\delta(x-y)))| \leq \sum_{|\nu|\leq|\gamma|} C_\nu\,|\partial^\nu\hat\chi_1(|\xi|^\delta(x-y))(|\xi|^\delta(x-y))^\nu|\,|\xi|^{-|\gamma|}.$$

De plus, on a

$$\langle x-\sigma_1 x_\mu\rangle^N \leq \langle x-y\rangle^N\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N \leq C'_N(1+\max(|x-y|,|x-y|^N))\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N.$$

Ces arguments permettent d'obtenir le résultat dans le cas $|\alpha|=0$. Dans le cas $|\alpha|\leq\varrho$ et ϱ entier, le raisonnement est identique avec $\partial^\alpha b$ au lieu de b, cad avec $\alpha=0$. On obtient une estimation par

$$A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N b\|_{C^{|\alpha|}}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}$$

ce qui donne les deux premières estimations donnnées dans le lemme.

Dans le cas ϱ entier et $|\alpha|>\varrho$ et $\beta=0$, on écrit que

$$|\alpha| = |\alpha'| + |\alpha| - |\alpha'|$$

avec

$$|\alpha|-|\alpha'| = \varrho \text{ et } |\alpha'|\geq 1.$$

Comme $\hat\chi_1\in\mathscr{S}$, on a donc l'expression

$$\partial_x^\alpha\tilde b(x,\xi) = |\xi|^{\delta(n+|\alpha'|)}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^{\alpha'}\hat\chi)(|\xi|^\delta(x-y)).\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)dy,$$

On applique alors le raisonnement fait dans le cas précédent pour obtenir, après dérivation en β une estimation par

$$A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N b\|_{C^\varrho}\langle\xi\rangle^{-|\beta|+\delta|\alpha|}$$

car

$$\|\|\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N\partial^{\alpha-\alpha'}b\|_{L^\infty} \leq \|\langle y-\sigma_1 x_\mu\rangle^N b\|_{C^\varrho}$$

Cas $|\alpha|>\varrho$, ϱ non entier, et $\beta=0$: On écrit $|\alpha|=|\alpha'|+|\alpha|-|\alpha'|$ avec $|\alpha|-|\alpha'|=[\varrho]$ et $|\alpha'|\geq 1$. Comme $\hat\chi_1\in\mathscr{S}$, on a donc l'expression

$$\partial_x^\alpha\tilde b(x,\xi) = |\xi|^{\delta(n+|\alpha'|)}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^{\alpha'}\hat\chi)(|\xi|^\delta(x-y)).(\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)-\partial^{\alpha-\alpha'}b(x))dy,$$

et, si ψ est une fonction dans $\mathscr{D}$ telle que $\psi(x-x_\mu)=1$ sur le support de b, on a

$$\begin{aligned}\langle x-x_\mu\rangle^N|\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)-\partial^{\alpha-\alpha'}b(x)| &= \\ &\langle x-x_\mu\rangle^N|\psi(y-x_\mu)\,\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)-\psi(x-x_\mu)\,\partial^{\alpha-\alpha'}b(x)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \langle x-x_\mu\rangle^N|\psi(x-x_\mu)||\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)-\partial^{\alpha-\alpha'}b(x)| \\ &\qquad+\langle x-x_\mu\rangle^N|\psi(y-x_\mu)-\psi(x-x_\mu)||\partial^{\alpha-\alpha'}b(y)|\end{aligned}$$

$$\leq (1+C_N)\left(|x-y|^{\varrho-[\varrho]}\,\|b\|_{C^\varrho} + \langle x-y\rangle^N |x-y|\,\sup_y \langle y-x_\mu\rangle^N |\partial^{\alpha-\alpha'} b(y)|\right).$$

Ceci permet de majorer $\langle x-x_\mu\rangle^N |\partial_x^\alpha \tilde{b}(x,\xi)|$ et d'obtenir l'estimation

$$\langle x-x_\mu\rangle^N |\partial_x^\alpha \tilde{b}(x,\xi)| \leq C_{N,\alpha} \|b\|_{C^\varrho}\,\langle \xi\rangle^{\delta(|\alpha|-\varrho)}.$$

Enfin, le cas $\beta \neq 0$ s'obtient en combinant les raisonnements précédents.

Proposition 4.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$.*
Si $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\delta \in [0,1]$ alors l'opérateur T_b^δ est borné sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ et sa norme d'opérateur est majorée par une constante fois $\|b\|_{L^\infty}$.

Preuve. D'après le lemme précédent,

$$T_b^\delta = \tilde{b}^\delta(x,D) \in Op(S^0_{1,\delta}),$$

classe dont les opérateurs sont bornés sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta < 1$. Pour $\delta = 1$, il s'agit de l'opérateur de paramultiplication de J.-M. Bony qui est donc borné sur $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 4.4 *Soit $R > 0$. Si $b \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{b} = 0$ dans $B(0,R)$, alors*

$$\|b\|_{L^\infty} \leq C_n\, R^{-\varrho}\, \|b\|_{C^\varrho}.$$

Proposition 4.4 *Si $b \in C^{\varrho'}(\mathbb{R}^n)$ et $\delta' \in [0,1]$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $s \geq \frac{n}{2} + \varrho'$, $T_b - T_b^{\delta'}$ est continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s+\delta'\varrho'}(\mathbb{R}^n)$ et sa norme d'opérateur est majorée par une constante fois $\|b\|_{C^{\varrho'}}$, pourvu qu'on utilise dans la définition de T_b et $T_b^{\delta'}$ les mêmes troncatures χ_1 et ψ_1.*

On a aussi, plus généralement, que, pour tout réel $s_1 \geq 0$,

$$\|\langle x\rangle^{s_1}(T_b - T_b^{\delta'})u\|_{s+\delta'\varrho'} \leq A\|b\|_{C^{\varrho'}}\|\langle x\rangle^{s_1} u\|_{\max(s,s+\delta'\varrho'-1)}$$

Preuve. Soit (u_j), (b_k) les suites des termes dyadiques de u, b, respectivement. On peut écrire, au moins au sens des distributions, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathscr{F}((T_{b_k} - T_{b_k}^\delta)u_j)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\chi_1\left(\frac{\xi-\eta}{|\eta|}\right) - \chi_1\left(\frac{\xi-\eta}{|\eta|^\delta}\right)\right] \hat{b}_k(\xi-\eta)\hat{u}_j(\eta)(1-\psi_1(\eta))\,d\eta.$$

Il découle des propriétés de support de χ_1, b_k et u_j que, sur le support d'intégration, on a

$$2^k \sim |\xi-\eta| \geq \mathrm{Cste}\,|\eta|^\delta \sim \mathrm{Cste}\,2^{j\delta}.$$

Il existe donc un entier k_0 tel que l'on puisse écrire

$$(T_b - T_b^\delta)u_j = \sum_{k \geq j\delta - k_0} (T_{b_k} - T_{b_k}^\delta)u_j.$$

On en déduit, par application de la Proposition 4.3 et du Lemme 4.4, l'estimation

$$\|(T_b - T_b^\delta)u_j\|_{L^2} \leq A_1 \sum_{k \geq j\delta - k_0} 2^{-k\varrho}\,\|b\|_{C^\varrho}\,\|u_j\|_{L^2} \leq A_2\, 2^{-j\varrho\delta}\,\|b\|_{C^\varrho}\,\|u_j\|_{L^2},$$

ce qui donne le résultat sachant que les termes $(T_b - T_b^\delta)u_j$ sont à spectre inclus dans une couronne de la forme $c_1 2^j \leq |\xi| \leq c_2 2^j$ avec $0 < c_1 < c_2$, comme on peut le vérifier facilement.

La seconde estimation s'obtient en utilisant la premiere partie de ce même lemme et le lemme 3.5 sachant que $T_b - T_b^\delta \in OpS^0_{1,\delta}$.

$\square$

Lemme 4.5

$$|||J^{s-\frac{1}{2}}T_{b_i}\nabla w|||'_T \leq A_n \left(\sum_\mu \|\iota_\mu^2 b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\right) max(T\sup_{[0,T]}\|w\|_s, |||J^{s+\frac{1}{2}}w|||_T)$$

où $\iota_\mu^2(x) = \langle x-\mu\rangle^{-(4n+4)}$.

Preuve.

Le preuve de ce lemme utilise le lemme ci-dessous.

Lemme 4.6 *Pour tous multi-indices α et β et tout entier naturel N, on a*

$$|\langle\xi\rangle^{-\delta|\alpha|+|\beta|}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(i_\mu(x)\tilde{b}^\delta(x,\xi))| \leq A_{\alpha,\beta,N}\|i_\mu b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

ou $i_\mu(x) = \langle x - x_\mu\rangle^{-N}$.

Pour le preuve de ce lemme, on renvoie à la fin de la démonstration de lemme 4.5.

Revenons alors à la preuve du lemme 4.5.

Soit $h_\mu(x) = h(x-\mu)$ avec h fonction C^∞ à support dans Q_0^* et $h=1$ sur Q_0.
On a

$$|||J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla u|||'_T = \sum_\mu \left(\int_0^T \|h_\mu^2(x)J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla u\|_0^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a

$$h_\mu^2 J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla u = h_\mu[J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla, h_\mu]u + h_\mu J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla h_\mu u.$$

Commençons par traiter le deuxième terme

$$h_\mu J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla h_\mu u.$$

D'après le développement de Taylor donné dans le théorème 3.1, pour N assez grand, on a

$$J^{s-\frac{1}{2}}i_\mu(x)^{-2} = (\langle\xi\rangle^{s-\frac{1}{2}}i_\mu(x)^{-2})(x,D) + r(x,D)$$

avec, d'après le lemme 3.1,

$$r \in S_{1,0}^{s-\frac{1}{2}-1},$$

donc on a

$$\|h_\mu r(x,D)i_\mu^2 T_b\nabla h_\mu u\|_0 \leq A\|i_\mu^2 T_b.\nabla h_\mu u\|_{s-\frac{1}{2}-1}.$$

D'après le lemme 4.6, on obtient que

$$\|h_\mu r(x,D)i_\mu^2 T_b\nabla h_\mu u\|_0 \leq A\|i_\mu^2 b\|_{L^\infty}\|h_\mu u\|_{s-\frac{1}{2}} \leq A\|i_\mu^2 b\|_{L^\infty}\|u\|_s.$$

De plus, d'après le développement de Taylor donné dans le théorème 3.1, on a, pour N_1 assez grand,

$$h_\mu(\langle\xi\rangle^{s-\frac{1}{2}}i_\mu^{-2})(x,D)i_\mu^2 T_b.\nabla = t(x,D) + s(x,D) + r(x,D).$$

En remarquant que le symbole de

$$i_\mu(x)^2 T_b^\delta.\nabla$$

est exactement

$$i_\mu(x)^2\tilde{b}^\delta(x,\xi).i\xi,$$

on a

$$s(x,\xi) = \sum_{1\le|\nu_1|<N_1} \frac{1}{\nu_1!}\partial_\xi^{\nu_1}(h_\mu(x)\langle\xi\rangle^{s-\frac{1}{2}} i_\mu^{-2}(x)) D_x^{\nu_1}(i_\mu^2(x)\tilde{b}^\delta(x,\xi).i\xi),$$

$$t(x,\xi) = h_\mu(x)\langle\xi\rangle^{s-\frac{1}{2}} i_\mu(x)^{-2} i_\mu(x)^2 \tilde{b}^\delta(x,\xi).i\xi,$$

$$r_1(x,\xi) = \sum_{|\nu_1|=N_1} \frac{1}{\nu_1!}\int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} r_{\nu_1,\theta}\, d\theta, \text{ et}$$

$$r_{\nu_1,\theta}(x,\xi) = Os\int e^{iy.\eta}\partial_\xi^{\nu_1}(h_\mu(x)\langle\xi+\theta\eta\rangle^{s-\frac{1}{2}} i_\mu^{-2}(x))\partial_x^{\nu_1}(i_\mu^2(x+y)\tilde{b}^\delta(x+y,\xi).i\xi)\, dyd\eta.$$

Sur le support de h_μ, on a

$$i_\mu^{-2} \le c_n^{4n+2}.$$

Pour $\varrho \ge 1$ sachant que $\tilde{b}^\delta \in S_{1,\delta}^{0,\varrho}$, on a donc

$$s(x,\xi) \in S_{1,\delta}^{s-\frac{1}{2}}$$

et donc

$$|||s(x,D)u|||_T' \le AT\sum_\mu \|i_\mu^2 b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \sup_{[0,T]}\|u\|_s.$$

En ce qui concerne $r_1(x,\xi)$, par intégrations par parties en η et en y, pour

$$N_1 = E\left(\frac{(s+\frac{1}{2})(1+\delta)+\delta(n+1)}{1-\delta}\right)+1,$$

on a

$$r_{\nu_1,\theta}(x,\xi) \in S_{1,\delta}^0$$

et, d'après le lemme 4.6,

$$\|r_1(x,D)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \le A\|i_\mu b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce qui donne le résultat pour ce terme.

De plus

$$t(x,\xi) \in S_{1,\delta}^{s+\frac{1}{2}}$$

et d'après le lemme 4.6, on a

$$\|t(x,D)h_\mu u\|_0^2 \le A\|i_\mu b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|h_\mu u\|_{s+\frac{1}{2}}.$$

Ce qui donne le résultat pour ce terme après commutation de $J^{s+\frac{1}{2}}$ et h_μ.

Pour le terme

$$h_\mu[J^{s-\frac{1}{2}}T_b\nabla, h_\mu]u = [J^{s-\frac{1}{2}}h_\mu T_b\nabla, h_\mu]u,$$

on obtient le résultat en utilisant le théorème 3.1 puis le lemme 4.6.

Idée de preuve du lemme 4.6. Pour prouver ce lemme, on rappelle que

$$\tilde{b}^\delta(x,\xi) = (1-\psi_1(\xi))|\xi|^{\delta n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathscr{F}^{-1}(\chi)(|\xi|^\delta(x-y))b(y)\, dy.$$

$$\partial_x^\alpha(i_\mu(x)\tilde{b}^\delta(x,\xi)) = (1-\psi_1(\xi))|\xi|^{\delta n}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha(i_\mu(x)\mathscr{F}^{-1}(\chi)(|\xi|^\delta(x-y)))b(y)\, dy.$$

Ce qui permet, en s'inspirant de la démonstration du lemme 4.3, d'obtenir le lemme 4.6 car $|\partial_x^\alpha i_\mu(x)| \le A_n i_\mu(x)$. $\square$

IV

PRINCIPAUX RESULTATS

5 Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de Cauchy ci-dessous.

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{5.1}$$

où $u = u(x,t)$ est une fonction à valeurs complexes, $F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$ est une fonction C^∞ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$,

$$\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$$

et

$$\mathscr{L} = \sum_{j \le k} \partial^2_{x_j} - \sum_{j > k} \partial^2_{x_j}, \text{ où } k \in \{1, ..., n\}$$

est un opérateur différentiel qui, bien qu'il puisse être égal au Laplacien, n'est pas elliptique en général.
Il s'agit donc d'équations non linéaires de Schrödinger généralisées.
En suivant les travaux de C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega, on étudie dans ce travail le caractère bien posé dans les espaces de Sobolev habituels $H^s(\mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy associé ainsi que l'effet régularisant vérifié par les solutions.

6

Exemples d'applications

Cette équation généralise des modèles de type spin-1 en cristallographie pour

$$F(u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \overline{u}) = \frac{2\overline{u}}{1+|u|^2}((\partial_{x_1} u)^2 - (\partial_{x_2} u)^2),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = \dfrac{2\overline{u}}{1+|u|^2}((\partial_{x_1} u)^2 - (\partial_{x_2} u)^2) \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \end{cases}$$

On retrouve aussi un opérateur du type $\mathscr{L}$ dans les sytèmes de type Davey-Stewartson (Voir [15]), c'est à dire :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = u|u|^2 + \partial_{x_2} v u \\ \Delta v(x_1, x_2) = -\partial_{x_2}(|u|^2) \end{cases}$$

qui décrivent l'évolution de paquets d'ondes marines qui sont des cas particuliers des sytemes de types Zakharov-Schulman (pour des références voir [53], [33], [79]).

La non-linéarité n'est pas exactement une fonction C^∞ mais elle est plutôt ce qu'on pourrait appeler une non-linéarité pseudo-différentielle. Les méthodes pour traiter le cas F fonction C^∞ devraient pouvoir s'adpater pour obtenir les résultats dans ce cas. Ce qui n'est pas traité dans cette thèse mais ce dernier exemple montre l'intérêt de généraliser l'équation de Schrödinger.

On retrouve encore des équations proches en ferromagnetisme, par exemple.

7

Principaux résultats

L'objectif de cette thèse est de généraliser les résultats obtenus par C.E. Kenig, G. Ponce et L. Vega concernant le problème de Cauchy (5.1).

Soient $Q_0 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{N} \cap [1, n] \;\; 0 \leq x_i \leq 1\}$ et Q_μ le cube obtenu par la translation de vecteur μ appliquée à Q_0.

On note x_μ le sommet du cube Q_μ image de $(0, 0, ..., 0)$ par la translation de vecteur μ.

La famille $\{Q_\mu\}_{\mu \in \mathbb{Z}^n}$ est une famille de cubes de côté 1 dont les sommets sont à coordonnées entières qui recouvre $\mathbb{R}^n$.

Les résultats présentés dans cette thèse sont les suivants :

Théorème 7.1 *On suppose F nulle en 0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2.
Dans ce cas, pour tout $s > \dfrac{n}{2} + 3$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe un nombre réel $T > 0$ tel que l'équation (5.1) possède une solution unique $u \in E_T$ où E_T est l'ensemble des fonctions $u \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R}^n))$ telles que*

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{s+\frac{1}{2}} u(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

avec $J = (1 - \Delta)^{1/2}$ et $\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \partial_{x_k}^2$.

De plus, pour un borné B de H^s de données initiales, les solutions associées ont un même temps d'existence T_B, et, l'application qui à $u_0 \in B$ associe $u \in E_{T_B}$ est uniformément continue.

Théorème 7.2 *On suppose F nulle en 0 ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 1.
Soit un entier naturel $p \geq 2$.
Dans ce cas pour tout $s > \dfrac{n}{2} + 3 + p$,*

$$u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

$$\langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} u_0 \in H^{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}(\mathbb{R}^n),$$

et, pour tout entier $k \leq p$

$$\langle x\rangle^k u_0 \in H^{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}(\mathbb{R}^n),$$

il existe un nombre réel $T > 0$ tel que l'équation (5.1) possède une solution unique $u \in E_T$ où E_T est l'ensemble des fonctions u telles que

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^n)),$$
$$\langle x\rangle^k u \in\in C([-T,T] : H^{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)),$$

où $\varepsilon > 0$ et, pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$,

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\sqrt{\sigma_0}\langle x-\sigma_1 x_\mu\rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}}J^{s+\frac{1}{2}}u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

De plus, pour un borné B de H^s de données initiales, les solutions associées ont un même temps d'existence T_B, et, l'application qui à $u_0 \in B$ associe $u \in E_{T_B}$ est uniformément continue.

Remarque : dans le cas $p \geq \frac{n}{2}+\varepsilon$ et $p \geq 2$, u et u_0 sont dans les mêmes espaces de Sobolev.

Le théorème 7.1 améliore le résultat obtenu par C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega dans [31] dans le cas où F est un polynôme de valuation $v \geq 3$ et $s \geq 10n$.
Le résultat énoncé par le théorème 7.2 est une amélioration des résultats connus et obtenus sur ce sujet jusqu'à présent, notamment dans [31] où la régularité utilisée est de l'ordre de $40n$ et $p = 8n+12$ pour une non-linéarité polynomiale.

La question de l'optimalité de cette régularité minimale se pose. Dans [32], on a le résultat dans le cas où la condition initiale u_0 est petite en norme $H^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ avec $s_0 = 3n+4+\dfrac{1}{2}$, $\mathscr{L} = \Delta$, $F = P$ et $n \geq 2$.
Dans le cas où la non-linéarité F est d'ordre 0 et $\mathscr{L} = \Delta$, on a le résultat pour tout $s > \dfrac{n}{2}$.
Dans cette thèse, on prouve le théorème 7.1 pour $s > \dfrac{n}{2}+3$.
Dans [32], on a le resultat du théorème 7.1 pour $s \geq \dfrac{1}{2}+3$ en dimension 1 et, pour $s \geq s_0$ avec $s_0 = n+2+\dfrac{1}{2}$ en dimension n dans le cas où $\mathscr{L} = \Delta$, F polynôme de valuation 3 et $\|u_0\|_{H^{s_0}}$ assez petite.
Dans [67] par exemple, lorsque l'opérateur $\mathscr{L}$ est elliptique comme $-\Delta$, ou, plus généralement, $\mathscr{L} = \sum_{i,j}\partial_{x_i}a_{ij}(x)\partial_{x_j}$ un opérateur auto-adjoint avec une non-linéarité de la forme $F(u,\overline{u})$, on a le résultat d'existence et d'unicité pour tout s assez grand. Toujours dans [67], en supposant l'existence d'une solution, on obtient un effet régularisant microlocal mais avec une condition moins forte de non dégénérescence sur le symbole de $\mathscr{L}$ notamment.

On peut remarquer que la méthode de démonstration utilisée pour démontrer le théorème (7.1) ne donne pas de meilleurs résultats si on a un opérateur elliptique.

On rappelle que Q_μ est le cube $\mu+[0,1]^n$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$. On note x_μ le sommet du cube Q_μ image de 0 par la translation de vecteur μ. La famille de cubes $\{Q_\mu\}_{\mu\in\mathbb{Z}^n}$ recouvre $\mathbb{R}^n$. On note Q_μ^* le cube de côté 2 obtenu par homothétie de centre le centre de Q_μ.
On note $c_n = \langle d_n\rangle$ où d_n est la norme du vecteur $(1,1,1,...,1,1,1) \in \mathbb{R}^n$, longueur de la grande diagonale du cube Q_0 ainsi que des cubes Q_μ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$.

Dans la suite, on pose

$$\mathcal{N}_T(f) = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x-x_\mu\rangle^2 f(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note Q_μ^* le cube de côté 2 obtenu par homothétie de centre le centre de Q_μ.

Pour prouver le théorème 7.1, on utilise les résultats suivants qui portent sur l'équation suivante souvent appelée «équation paralinéaire».

Théorème 7.3 *Etant donné un nombre réel positif s et un nombre réel $\delta \in [0,1[$, on considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{u} + C_1 u + C_2 \bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{7.1}$$

On suppose que C_1 et C_2 sont des opérateurs à symbole dans S^0_{1,δ_1} avec $0 \leq \delta_1 < 1$, et que $b_1, b_2 \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$, $\varrho \geq 2$, et, plus précisément, que

$$(S.2) \begin{cases} b_k(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,\mu}\varphi_{k,\mu}(x), k = 1,2 \\ \textit{supp}\varphi_{k,\mu} \subseteq Q^*_\mu, \sum_\mu |\alpha_{k,\mu}| \leq A_k, \\ \|\varphi_{k,\mu}\|_{C^2} \leq 1, \end{cases}$$

alors pour tout réel s, et tout $T > 0$ tels que $\int_{-T}^T \|f(t)\|_s \, dt$ et $\mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f) < +\infty$, l'équation (7.1) admet une unique solution dans $C([-T,T]; H^s(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe un réel A tel que

$$\sup_{-T \leq t \leq T} \|u(t)\|_s^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)), \tag{7.2}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{7.3}$$

avec

$$|||u|||_T = \sup_\mu \left(\int_{-T}^T \|\langle x - x_\mu \rangle^{-2} u\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et $I_T(f,u)$ est une conbinaison linéaire d'au plus trois termes de la forme $\int_{-T}^T |\langle Gf, u\rangle| \, dt$ où $G \in OpS^0_{0,0}$. En particulier, on a

$$\sup_{-T \leq t \leq T} \|u(t)\|_s \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)), \tag{7.4}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)) \tag{7.5}$$

$$\sup_{-T \leq t \leq T} \|u(t)\|_s \leq A \left(\|u_0\|_s + \int_{-T}^T \|f(t)\|_s \, dt \right), \tag{7.6}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \leq A \left(\|u_0\|_s + \int_{-T}^T \|f(t)\|_s \, dt \right). \tag{7.7}$$

Remarques :

— Comme dans [31], le résultat ci-dessus est vrai avec la condition

$$|||J^{-\frac{1}{2}}f|||'_T = \sum_\mu (\int_{-T}^T \int_{Q_\mu} |J^{-\frac{1}{2}}f|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

au lieu de

$$\mathcal{N}_T(J^{-\frac{1}{2}}f) < +\infty.$$

Cette dernière quantité pouvant être un intermédiaire de calcul. Pour éviter encore de multiples notations et détails techniques, nous ne travaillons qu'avec la norme $\mathcal{N}_T$.

— La constante A utilisée ci-dessus est de la forme $C_1 \exp(C_2 T)$ avec C_1 et C_2 deux constantes strictement positives.

— Nous allons démontrer le théorème sur l'intervalle $[0,T]$, le cas $[-T,0]$ se traitant de façon analogue en travaillant avec $v(x,t) = u(x,-t)$.

— Nous allons aussi travailler avec $s = 0$ puisque le cas général peut être ramené à ce cas en appliquant J^s à (7.1). Plus précisément, on pose $v = J^s u$ et donc $v_0 = J^s u_0 \in L^2$ pour $u_0 \in H^s$. On obtient que v est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v = i\mathscr{L} v + T^{\delta}_{b_1}.\nabla_x v + T^{\delta}_{b_2}.\nabla_x \bar{v} + \widetilde{C}_1 v + \widetilde{C}_2 \bar{v} + \widetilde{f}(x,t) \\ v(x,0) = v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{7.8}$$

où $\widetilde{f} = J^s f^\delta$ et $\widetilde{C}_k = J^s C_k J^{-s} + [J^s, T_{b_k}.\nabla_x]J^{-s}$, $k = 1$ ou 2, qui sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même car C_1 et $C_2 \in S^0_{1,\delta_1}$ avec $0 \le \delta_1 < 1$. Ce qui suffit pour obtenir le théorème 7.3.

—si u est une solution de

$$\partial_t u = i\mathscr{L} u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u})$$

alors l'équation

$$\partial_t v = -i\mathscr{L} v + F(v, \nabla_x v, \overline{v}, \nabla_x \overline{v})$$

admet une solution qui est

$$v(t,x) = u(t, x_{k+1}, ..., x_n, x_1, ..., x_k).$$

—Dans la suite, A désigne une constante polynômiale en n, A_1, e^{A_1} et A_2 où A_1 et A_2 sont définies dans l'hypothèse (S.2).

La preuve du théorème précédent utilise les deux lemmes qui vont suivre où u désigne une solution de (7.1) si elle existe avec les coefficient b_1 vérifiant l'hypothèse supplémentaire ci-dessous :

$$\forall M \in \mathbb{N}, \varphi_{i,\mu} \in C^M(\mathbb{R}^n)$$

avec, pour tout entier M_0,

$$\sup_\mu \|\langle x - x_\mu \rangle^{M_0} \varphi_{i,\mu}\|_{C^M} \le A_{M,M_0}$$

où A_{M,M_0} est une constante, cette dernière hypothèse remplaçant la propriété de support.
Ce qui permet d'avoir, si besoin, $\tilde{b}^\delta_i \in S^0_{1,0}$ mais avec ses semi-normes d'ordre α en x et β en ξ bornées par une constante du type

$$A_{\alpha,\beta} \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}}$$

ou bien encore

$$\tilde{b}^\delta_i \in S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes bornées par

$$A_{\alpha,\beta}.$$

On rappelle que $\tilde{b}^\delta$ est tel que

$$\tilde{b}^\delta(x,D) = T^\delta_b.$$

Lemme 7.1

Il existe un opérateur $\mathbf{C}$ *inversible et borné dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *tel qu'il existe un réel* A*, deux entiers naturels* N *et* M *tels que, pour tout* $T > 0$*,*

$$\sup_{0\le t\le T} \|\mathbf{C}u(t)\|_0^2 \le \|\mathbf{C}u_0\|_0^2 + 2\int_0^T |\langle \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\, dt$$
$$+A \sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M+7} \varphi_{i,\mu}\|^N_{C^M} \left(RT \sup_{0\le t\le T} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 \right).$$

Lemme 7.2

Il existe un réel A et un opérateur $\Psi \in OpS^0_{1,0}$ tels que pour tout $T>0$ une solution u de l'équation (7.1) pour laquelle les coefficients b_i ont une régularité limitée $\varrho \geq 2$, on a

$$|||J^{1/2}u|||_T^2 \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + (1+T)\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_0^2\right).$$

On a aussi que, pour tout R assez grand, une solution u de l'équation (7.1), pour laquelle les coefficients b_i ont une régularité $M \geq \varrho$ fixée assez grande, vérifie

$$\begin{aligned}|||J^{1/2}\mathbf{C}u|||_T^2 \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\,dt + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{C}u\|_0^2\right) + \\ \sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M+7}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}^N\left(\frac{A}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + ART\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2\right).\end{aligned}$$

où N et M sont deux entiers naturels fixés assez grands ne dépendant que de n et de ϱ.

Remarques :

—Les preuves des lemmes 7.1 et 7.2 suivent en partie les démonstrations faites dans [31] : Lemme 3.2, 3.3.

— Le lemme 7.2 nécessite au moins une régularité $\varrho \geq 2$ car le preuve de ce lemme utilise le théorème 8.4 (Inégalité de Garding.).

—Pour des raisons techniques, on précise la dépendance des coefficients par rapport à la norme $\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M+7}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}^N$, l'entier M n'étant pas précisé mais choisi suffisamment grand ne dépendant que de n, tout comme N. Cette dépendance n'est précisée que si la régularité M utilisée est strictement supérieure à 2.

— La preuve de l'effet régularisant (lemme 7.2) vérifié par u ne coûte seulement que 2 crans de régularité pour les coefficeients b_1 et b_2. Ce qui coûte davantage en régularité pour obtenir l'effet régularisant vérifié par $\mathbf{C}u$ dans le cas où $\mathbf{C}$ est l'opérateur construit pour prouver le lemme 7.1, c'est l'utilisation de la continuité L^2 de $\mathbf{C}$.

—À l'intérieur de ces preuves s'intercalent de nombreux lemmes ainsi que leur démonstration. Celle du lemme 7.1 nécessite notamment les lemmes 11.5 et 11.6, et, celle du lemme 7.2 utilise le lemme de Doi (voir [16]).

—Pour la preuve du lemme 7.2, on renvoie à la section V.

—Des indications de démonstrations de ces résultats sont données dans les sections qui suivents. Pour plus de détails encore, on pourra se rendre à la section V.

8

Résumé des principaux outils utilisés dans cette thèse.

Les démonstrations de ces deux résultats utilisent de très nombreux outils comme les opérateurs paradifférentiels dus à J.-M. Bony (Voir [6]). Ces techniques sont développées dans les parties qui vont suivre.
Dans cette thèse, elles ne sont appliquées qu'à une équation mais elles ont été appliquées depuis une trentaine d'années à de nombreuses équations et ont fait leurs preuves en terme d'amélioration des résultats. Ces techniques peuvent certainement être encore utilisées pour préciser de nombreux autres résultats mais leur complexité peut parfois être un frein et les gains réalisés en régularité ne seront probablement pas toujours à la hauteur du niveau de difficulté de la démonstration.
Les détails techniques des démonstrations des résultats principaux sont en effet assez complexes mais dans le cas de l'équation (5.1) les résultats obtenus sont plus précis que ceux obtenus jusqu'ici comme nous l'avons expliqué dans la section précédente.

On utilise aussi la classe de symboles suivante :

$$S^{m,\varrho}_{\gamma,\delta} \text{ où } \gamma,\ \delta,\ \varrho \text{ et } m \text{ sont quatre nombres réels tels que } 1 \geq \gamma \geq \delta \geq 0,\ \varrho > 0$$

définie ci-après :

Definition 8.1 *On dit qu'une fonction*

$$s \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

appartient à la classe $S^{m,\varrho}_{\gamma,\delta}$ si pour tout multi-indice α et β dans $\mathbb{Z}^n$ tels que $|\alpha| \leq \varrho$ alors

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}|\xi|^{-\gamma|\beta|}$$

et, si $|\alpha| > \varrho$ alors

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}|\xi|^{-\gamma|\beta|+\delta|\alpha|-\delta\varrho}.$$

Remarque :

—On remarque que $S^{m,\varrho}_{\gamma,\delta} \subset S^m_{\gamma,\delta}$.

—Pour $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$ ou $0 \leq \delta < \gamma \leq 1$, on peut appliquer les théorèmes de continuités H^s et de composition aux opérateurs à symbole dans ces classes.

—En particulier, on peut appliquer le théorème de Calderón-Vaillancourt si $\gamma = \delta$.

—Pour tout $s > 0$, tout γ et tout δ tels que $0 \leq \delta \leq \gamma \leq 1$, on a la continuité H^s.

L'énoncé suivant rappelle et résume le calcul pseudodifférentiel associé aux classes de symboles de Hörmander $S^m_{\gamma,\delta}$:

Théorème 8.1 (Calcul pseudodifférentiel 3.1) *Soient $a \in S^m_{\gamma,\delta}$, $b \in S^{m'}_{\gamma,\delta}$ avec $m, m' \in \mathbb{R}$, et $0 \leq \delta < \gamma \leq 1$ ou $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$.*

(i) On a $a(x,D)b(x,D) = c(x,D)$ avec $c \in S^{m+m'}_{\gamma,\delta}$. De plus,

$$c(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta} a(x,\xi+\eta)\, b(x+y,\xi)\, \frac{dy\, d\eta}{(2\pi)^n}$$

$$= \sum_{|\nu|<N} \frac{1}{\nu!} \partial_\xi^\nu a(x,\xi) D_x^\nu b(x,\xi) + \sum_{|\nu|=N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} r_{\nu,\theta}(x,\xi)\, d\theta,$$

$$\text{où} \quad r_{\nu,\theta}(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta} \partial_\xi^\nu a(x,\xi+\theta\eta) \partial_x^\nu b(x+y,\xi)\, \frac{dy\, d\eta}{(2\pi)^n}.$$

Enfin, les semi-normes $S^{m+m'}_{\gamma,\delta}$ de $r_{\nu,\theta}$ sont bornées par des produits de semi-normes de $\partial_\xi^\nu a$, $\partial_x^\nu b$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

(ii) On a aussi $a(x,D)^* = a^*(x,D)$ avec $a^* \in S^m_{\gamma,\delta}$ et

$$a^*(x,\xi) = \sum_{|\nu|<N} \frac{1}{\nu!} \partial_\xi^\nu \overline{a(x,\xi)} + \sum_{|\nu|=N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} r^*_{\nu,\theta}(x,\xi)\, d\theta,$$

$$\text{où} \quad r^*_{\nu,\theta}(x,\xi) = Os \int\int e^{-iy.\eta} \partial_\xi^\nu \partial_x^\nu \overline{a(x+y,\xi+\theta\eta)}\, \frac{dy\, d\eta}{(2\pi)^n}.$$

De plus, les semi-normes $S^m_{\gamma,\delta}$ de $r^*_{\nu,\theta}$ sont bornées par des produits de semi-normes de $\partial_\xi^\nu \partial_x^\nu \bar{a}$ uniformément en $\theta \in [0,1]$.

Preuve. Voir [69], par exemple.

Théorème 8.2 ((Calderón-Vaillancourt)) *Soit a une une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, δ un nombre réel tel que $0 \leq \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq n+1$.*

Si les dérivés $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)$ vérifient des estimations $S^0_{\delta,\delta}$ pour tous multi-indices α et β tels que $|\alpha|+|\beta| \leq N$ alors $a(x,D)$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On a aussi ce même résultat pour α et β tels que $|\alpha| \leq N$ et $|\beta| \leq N$ pour $N > \frac{n}{2}$.

Preuve. Voir [9].

Théorème 8.3 *Soit $s > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.*

Si

$$a(x,D) \in OpS^m_{1,1}$$

alors $a(x,D)$ est borné de $H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 8.1 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$ ou $0 \leq \delta < \gamma \leq 1$ alors*

$$|||a(x,D)f|||_T \leq A|||f|||_T \ \text{ et } \ \mathcal{N}_T(a(x,D)f) \leq A\mathcal{N}_T(f).$$

Preuve. Voir corollaire 3.4.

On a aussi

Corollaire 8.2 *Si $a \in S^0_{\gamma,\delta}$, $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$ ou $0 \leq \delta < \gamma \leq 1$ alors*

$$|||a(x,D)f||| \leq A|||f|||_T \text{ et } \mathcal{N}(a(x,D)f) \leq A\mathcal{N}_T(f).$$

où

$$|||a(x,D)f||| = \sup_\mu \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^{-2} a(x,D)f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathcal{N}(a(x,D)f) = \sup_\mu \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^{2} a(x,D)f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. La preuve de ce corollaire est analogue à celle du corollaire 3.4 sans les intégrales en temps.

Lemme 8.1 *On définit la fonction régularisante ci-dessous.*

$$\theta(x) = \frac{\tilde{\theta}(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\theta}(x)\,dx} \text{ avec } \tilde{\theta}(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}) \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_m = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))u(y)\,dy.$$

Si $u \in L(\mathbb{R}^n)^\infty$, on a

$$\forall M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \ \|u_m\|_{C^M} \leq A_{n,M}(1 + m^M)\|u\|_{L^\infty}, \tag{8.1}$$

S'il existe $M' > 0$ tel que $u \in C^{M'}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\forall M \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \ \|u_m\|_{C^M} \leq A_{n,M,M'}(1 + m^{M-M'})\|u\|_{C^{M'}}, \tag{8.2}$$

S'il existe $\varrho \geq 0$ tel que $u \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \ \|u - u_m\|_{L^\infty} \leq \frac{\|u\|_{C^\varrho}}{m^{\min(\varrho,1)}}. \tag{8.3}$$

S'il existe $\varrho \geq 0$ tel que, pour tout entier naturel N', $\sup_\mu \|\langle x - x_\mu\rangle^{N'} u\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ alors pour tout entier naturel N pair, il existe un entier naturel N' tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \ \sup_\mu \|\langle x - x_\mu\rangle^N (u - u_m)\|_{L^\infty} \leq \frac{A_N \sup_\mu \|\langle x - x_\mu\rangle^{N'} u\|_{C^\varrho}}{m^{\min(\varrho,1)}}. \tag{8.4}$$

avec A_N une constante indépendante de μ.

S'il existe un entier $\varrho \geq 0$ tel que $u \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$ à support dans un cube type $Q_\mu = \mu + [0,1]^n$ avec $\mu \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pout tout multi-indice α, on a

$$\sup_\mu \left|\partial_x^\alpha (\langle x - x_\mu\rangle^N u_m)\right| \leq A_{\alpha,N,n} m^{|\alpha|-\varrho} \sup_\mu \|u\|_{C^\varrho}$$

Remarque : la preuve de ce dernier point est dans le même esprit que la preuve du lemme 4.3.

Preuve.

Pour tout multi-indice α de longueur M, on a

$$\partial_x^\alpha u_m(x) = m^{n+M} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\alpha \theta)(m(x-y))u(y)\, dy.$$

donc

$$\|u\|_{C^M} \leq A m^M \|u\|_{L^\infty}$$

avec

$$A = \sum_{\alpha \leq M} m^n \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_x^\alpha \theta)(m(x-y))|\, dt.$$

On a

$$u(x) - u_m(x) = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))u(x)\, dy - m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))u(y)\, dy$$

$$u(x) - u_m(x) = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))(u(y)-u(x))\, dy$$

or, si $\varrho \in]0,1[$, on a $|u(x)-u(y)| \leq A\|u\|_{C^\varrho}|x-y|^\varrho$ donc

$$|u(x) - u_m(x)| \leq A\|u\|_{C^\varrho} m^n \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(m(x-y))|\, |x-y|^\varrho\, dy$$

$$|u(x) - u_m(x)| \leq A\|u\|_{C^\varrho} m^{n-\varrho} \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(m(x-y))|\, m^\varrho |x-y|^\varrho\, dy.$$

Dans le cas où $\varrho \in]0,1[$, on obtient donc

$$\|u - u_m\|_{L^\infty} \leq \frac{A\|u\|_{C^\varrho}}{m^\varrho}$$

Dans le cas où $\varrho \geq 1$, on a

$$|u(x)-u(y)| \leq A\|u\|_{C^\varrho}|x-y|,$$

$$\|u - u_m\|_{L^\infty} \leq \frac{A\|u\|_{C^\varrho}}{m}.$$

Prouvons alors (8.4). On a

$$\langle x - x_\mu \rangle^N (u_m(x) - u(x)) = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y)) \langle x - x_\mu \rangle^N (u(y) - u(x))\, dy$$

$$\langle x - x_\mu \rangle^N (u_m(x) - u(x)) = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))(\langle x - x_\mu \rangle^N - \langle y - x_\mu \rangle^N) u(y)\, dy$$
$$+ m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))(\langle y - x_\mu \rangle^N u(y) - \langle x - x_\mu \rangle^N u(x))\, dy$$

Pour le second terme de l'expression ci-dessus, on obient le résultat comme pour prouver (8.3). Pour l'autre terme, en supposant N pair, on a

$$\langle x - x_\mu \rangle^N - \langle y - x_\mu \rangle^N = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \sum_{i=1}^{N/2-1} (x_k - x_{\mu,k})^i (y_k - x_{\mu,k})^{N/2-i}.$$

Ce qui permet d'obtenir que

$$\begin{aligned}
&m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))(\langle x - x_\mu\rangle^N - \langle y - x_\mu\rangle^N) u(y)\, dy \\
&= m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y)) \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \sum_{i=1}^{N/2-1} (x_k - x_{\mu,k})^i (y_k - x_{\mu,k})^{N/2-i} u(y)\, dy.
\end{aligned}$$

En remarquant, pour tout entier naturel p, on a

$$\left| m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))(x_k - y_k)^p\, dy \right| \leq \frac{A_p}{m^p},$$

et que

$$|(x_k - x_{\mu,k})| \leq |x_k - y_k| + |y_k - y_{\mu,k}|,$$

on obtient (8.4).

Prouvons alors la dernière proposition énoncée dans le lemme 8.1.
Pour tout multi-indice α, on a

$$\partial_x^\alpha (\langle x - x_\mu\rangle^N u_m(x)) = \sum_{\alpha_1 \leq \alpha} A_{\alpha_1,\alpha} \partial_x^{\alpha - \alpha_1} (\langle x - x_\mu\rangle^N)(\partial_x^{\alpha_1} u_m)(x)$$

or

$$\partial_x^{\alpha-\alpha_1}(\langle x - x_\mu\rangle^N) = a(x)\langle x - x_\mu\rangle^{N - |\alpha - \alpha_1|}$$

avec $a \in C^\infty$ uniformément bornée en μ et, pour tout entier naturel N_1,

$$\langle x - x_\mu\rangle^{N_1} |(\partial_x^{\alpha_1} u_m)(x) \leq A_{\alpha_1,n,N_1} m^{|\alpha_1| - \varrho} \sup_\mu \|u\|_{C^\varrho}.$$

En effet, pour tout multi-indice α_2 de longueur ϱ, on a

$$\partial_x^{\alpha_1} u_m(x) = m^{n + |\alpha_1| - \varrho} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1 - \alpha_2}\theta)(m(x-y))(\partial_x^{\alpha_2} u)(y)\, dy,$$

donc

$$\langle x - x_\mu\rangle^{N_1} \partial_x^{\alpha_1} u_m(x) = m^{n+|\alpha_1|-\varrho} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y)) \langle x - x_\mu\rangle^{N_1} (\partial_x^{\alpha_2} u)(y)\, dy,$$

$$\begin{aligned}
&\langle x - x_\mu\rangle^{N_1} \partial_x^{\alpha_1} u_m(x) = \\
&m^{n+|\alpha_1|-\varrho} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y)) \langle x - y\rangle^{N_1} \langle y - x_\mu\rangle^{N_1} (\partial_x^{\alpha_2} u)(y) \frac{\langle x - x_\mu\rangle^{N_1}}{\langle x - y\rangle^{N_1}\langle y - x_\mu\rangle^{N_1}}\, dy,
\end{aligned}$$

donc on a

$$\left|\langle x - x_\mu\rangle^{N_1} \partial_x^{\alpha_1} u_m(x)\right| \leq A_{\alpha_1,n,N_1} m^{|\alpha_1|-\varrho} \sup_\mu \|u\|_{C^\varrho}$$

car

$$\begin{aligned}
&m^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y))\langle x - y\rangle^{N_1}\, dy \\
&\qquad \leq A_{N_1} m^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y)) \sum_{k=0}^{Ent(N_1/2)+1} (x-y)^{2k}\, dy
\end{aligned}$$

donc, schant que $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&m^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y))\langle x - y\rangle^{N_1}\, dy \\
&\qquad \leq A_{N_1} m^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y)) \sum_{k=0}^{Ent(N_1/2)+1} (m(x-y))^{2k}\, dy
\end{aligned}$$

donc

$$m^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(m(x-y))\langle x-y\rangle^{N_1}\,dy \\ \leq A_{N_1}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^{\alpha_1-\alpha_2}\theta)(y)\sum_{k=0}^{Ent(N_1/2)+1} y^{2k}\,dy < A_{N_1,\alpha_1,\alpha_2}.$$

De plus, en utilisant le support de u et que $|\alpha_2| = \varrho$, on a

$$\sup_\mu |\langle y-x_\mu\rangle^{N_1}(\partial_x^{\alpha_2}u)(y)| \leq A_n \sup_\mu \|u\|_{C^\varrho},$$

et

$$\frac{\langle x-x_\mu\rangle^{N_1}}{\langle x-y\rangle^{N_1}\langle y-x_\mu\rangle^{N_1}} \leq A_{N_1}.$$

□

Deux autres résultats très importants sont l'inégalité Garding précisée pour un système et le lemme de Doi. On commence par définir la classe de symbole à régularité limitée notée $C^kS^m_{\gamma,\delta}$.

Definition 8.2 *Pour tout entier naturel k, $C^kS^m_{\gamma,\delta}$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\mathbb{R}^{2n})$ telle que*

$$(\xi \mapsto a(x,\xi)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, C^k(\mathbb{R}^n))$$

et, pour tout α et β des multi-indices de $\mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}|\xi|^{-\gamma|\beta|+\delta|\alpha|+m}.$$

On énonce alors l'inégalité de Garding utilisée dans cette thèse qui fait que l'on utilise une régularité $\varrho \geq 2$.

Théorème 8.4 (Inégalité de Garding précisée pour un système) *Soit A une matrice $l\times l$ dont les éléments*

$$a_{j,k} \in C^\varrho S^m_{1,0}$$

avec $\varrho \geq 2$.
Supposons que le symbole $a(x,\xi)$ (une $l\times l$ matrice) vérifie, pour tout $\eta \in \mathbb{C}^l$ et pour tout $|\xi| \geq c_0$,

$$\langle (a(x,\xi)+a^*(x,\xi))\eta,\eta\rangle \geq 0$$

où a^* est la matrice adjointe de a et $\langle .,.\rangle$ le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^l$. On a

$$\mathscr{R}\langle A\vec{u},\vec{u}\rangle \geq -c\|J^{\frac{m-1}{2}}\vec{u}\|_2^2$$

où c dépend seulement de n, l, c_0 et des semi-normes de A.

Le théorème suivant n'est pas utilisé dans cette thèse mais est peut-être un outil qui pourrait permettre de baisser la régularité utilisée.

Théorème 8.5 *Soit A une matrice $l \times l$ dont les éléments*

$$a_{j,k} \in C^\varrho S^{\frac{2\varrho}{2+\varrho}}_{1,0}$$

avec $0 \leq \varrho \leq 2$.
Supposons que le symbole $a(x,\xi)$ (une $l\times l$ matrice) vérifie, pour tout $\eta \in \mathbb{C}^l$ et pour tout $|\xi| \geq c_0$,

$$\langle (a(x,\xi)+a^*(x,\xi))\eta,\eta\rangle \geq 0$$

où a^* est la matrice adjointe de a et $\langle .,.\rangle$ le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^l$. On a

$$\mathscr{R}\langle A\vec{u},\vec{u}\rangle \geq -c\|\vec{u}\|_2^2$$

où c dépend seulement de n, l, c_0 et des semi-normes de A.

Preuves. Voir [68].

Lemme 8.2 (Lemme de Doi.) *Soit λ une fonction paire, positive, régulière et bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\lambda \in L^1(0,\infty)$.*

Il existe une fonction régulière

$$\theta(x) = (\theta_1(x), ..., \theta_n(x))$$

bornée ainsi que toutes ses dérivées telle que, au sens des matrices, on ait

$$D\theta_{symm}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j}\theta_k + \partial_{x_k}\theta_j(x)\right) \geq \lambda(|x|)I.$$

On peut choisir

$$\theta(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$$

avec

$$f(t) = \int_0^t \lambda(|s|)ds.$$

On définit

$$p(x,\xi) = -\frac{\theta(x).\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \in S^0_{1,0}$$

où

$$\tilde{\xi} = (-\xi_1, ..., -\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$$

On a

$$-2\tilde{\xi}.p(x,\xi) = 2\frac{D\theta_{symm}(x)\tilde{\xi}.\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \geq \lambda(|x|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}$$

Preuve. Voir [16].

Ces deux résultats sont très importants car ce sont des arguments clefs dans la démonstration du lemme 7.2 donnant l'effet régularisant qui permet de traiter les termes d'ordre 1.

9

Indications de démonstration du théorème 7.1

Celle-ci suit le schéma de celle donnée dans [31] Théorème 1.1) et utilise une linéarisation. Cependant, pour obtenir des estimations plus précises, nous linéarisons l'équation (5.1) en utilisant la paralinéarisation de J.-M. Bony (Voir [6]), et un certain calcul symbolique paradifférentiel. L'utilisation de ce type de calcul permet essentiellement de supprimer les pertes de régularité liées aux commutations.

Ainsi, au lieu de linéariser de manière classique pour se ramener à étudier l'équation linéaire

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + a_1 u + a_2\overline{u} + b_1\nabla_x u + b_2\nabla_x\overline{u} + f(x,t), \tag{9.1}$$

nous linéarisons selon la méthode de J.-M. Bony pour se ramener à étudier l'équation suivante, qui est aussi linéaire,

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{a_1}u + T_{a_2}\overline{u} + T_{b_1}\nabla_x u + T_{b_2}\nabla_x\overline{u} + f(x,t) \tag{9.2}$$

où T_{a_1}, T_{a_2}, T_{b_1} et T_{b_2} sont des opérateurs paradifférentiels et plus précisément des opérateurs de paramultiplication (voir Section 2).
Cette équation est souvent dite «paralinéaire».

Pour expliquer l'hypothèse d'annulation faite sur F et ses dérivées, on rappelle que, dans le cas où $\mathscr{L} = \Delta$ et $b_2 = 0$, pour que le problème de Cauchy linéaire associé à (9.1) soit bien posé, une condition nécessaire portant sur le coefficient $b_1(x)$ a été démontrée :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\,\omega\in\mathbb{S}^{n-1},\,R>0}\left|\mathscr{I}\int_0^R b_1(x+r\omega).\omega\, dr\right| < \infty \tag{9.3}$$

Voir [73], [49].

Cette condition est évidemment vérifiée si b_1 est réel.
Elle est aussi vérifiée si $b_1 = vw$ ou avw, pour $v,w \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2}$ et $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, comme on peut le voir en appliquant le théorème de trace. Comme le coefficient b_1 est une dérivée de F, ceci justifie l'hypothèse faite sur F et explique aussi pourquoi l'on est contraint de travailler dans des espaces à poids si F s'annule seulement à l'ordre 1 en 0.

La démonstration du Théorème 7.2 consiste en grande partie à établir des estimations convenables sur la solution du problème de Cauchy associé à l'équation paralinéaire (9.2).
Pour ce faire et suivant [31], on construit un opérateur pseudodifférentiel **C** d'ordre 0 et possédant de bonnes

propriétés, notamment inversible et de symbole $\mathbf{c}(x,\xi)$ réel et pair en ξ.
Cela permet, par estimation de $\|\mathbf{C}u\|_2$, d'obtenir des estimations d'énergie sur les solutions de (9.2) du type (7.6), (7.7), (7.4) et (7.5) rappelées ci-dessous

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_s \le A\left(\|u_0\|_s + \int_{[0,T]} \|f(t)\|_s\, dt\right) \tag{7.6}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u(t)|||_T \le A\left(\|u_0\|_s + \int_{[0,T]} \|f(t)\|_s\, dt\right) \tag{7.7}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_s \le A\left(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)\right) \tag{7.4}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \le A\left(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)\right) \tag{7.5}$$

avec

$$\mathcal{N}_T(u) = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x-x_\mu\rangle^2 u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

On remarque que l'on peut aussi obtenir les estimations obtenues dans [31] avec

$$|||J^{-\frac{1}{2}}f|||'_T = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{-T}^T\int_{Q_\mu} |J^{-\frac{1}{2}}f|^2\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

mais, dans un souci de simplification et de clarté, nous n'utilisons dans cette section que $\mathcal{N}_T(J^{-\frac{1}{2}}f)$.

On met alors l'équation (5.1) sous la forme (9.2) avec

$$\begin{aligned}
a_1 &= \partial_u F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0),\\
a_2 &= \partial_{\overline{u}} F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0),\\
b_1 &= \nabla_v F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0),\\
b_2 &= \nabla_{\overline{v}} F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)
\end{aligned}$$

et un terme non linéaire

$$f(x,t) = R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}).$$

Si $W(t)u_0$ désigne la solution de (9.2) telle que $W(0)u_0 = u_0$, on détermine alors un espace métrique complet dans lequel on prouve que l'opérateur

$$\Upsilon u = W(t)u_0 + \int_0^T W(t-t')R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u})\, dt'$$

admet un unique point fixe pour un T assez petit.
Ce dernier résultat s'obtient en utilisant les estimations (7.6) et (7.7).
Pour estimer la non-linéarité, on utilise la propriété d'algèbre de H^s pour $s > \frac{n}{2}$.

Pour prouver (7.6) et (7.7), on estime la norme L^2 de $\mathbf{C}u$, où u est une solution de (9.2), en écrivant de manière classique

$$\partial_t \|\mathbf{C}u\|_{L^2}^2 = \langle \partial_t \mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, \partial_t \mathbf{C}u\rangle.$$

Ce qui permet d'obtenir que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{C}u(T_0)\|_2^2 \le \|\mathbf{C}u_0\|_2^2 &+ \left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0} \langle i\left[\mathbf{C}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathbf{C}\right]u + \mathbf{C}T_{i\mathscr{I}(b_1)}\nabla u, \mathbf{C}u\rangle dt\right|\\
&+ \left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0} \langle \mathbf{C}T_{b_2}\nabla\bar{u}, \mathbf{C}u\rangle dt\right| + \left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}f\rangle dt\right|\\
&+ A_c T_0 \sup_{[0,T_0]}\|u(t)\|_2^2 + \frac{A_c}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_{T_0}^2.
\end{aligned} \tag{9.4}$$

où A_c est une constante qui dépend des semi-normes d'ordre M (suffisamment grand) des symboles de $\mathbf{C}$ et T_{b_1}.

La difficulté de l'équation (9.2) semblant venir du coefficient b_1, on cherche à choisir $\mathbf{C}$ pour que l'opérateur

$$i[\mathbf{C}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathbf{C}] + \mathbf{C}T_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla$$

soit relativement petit, en un sens que l'on précisera, l'idéal étant qu'il soit continu sur L^2, ce qui nous ramène à étudier son symbole principal

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x \mathbf{c}(x,\xi) - \mathbf{c}(x,\xi)\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi\,,$$

où $\tilde{b}_1(x,\xi)$ est tel que

$$T_{i\mathscr{I}(b_1)} = i\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,D))$$

et

$$\tilde{\xi} = (-\xi_1, \dots, -\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

On rappelle que

$$\mathscr{L} = \sum_{j\leq k} \partial_{x_j}^2 - \sum_{j>k} \partial_{x_j}^2.$$

Pour assurer plus ou moins l'inversibilité de $\mathbf{C}$, on cherche son symbole sous la forme

$$\mathbf{c}(x,\xi) = \exp(\gamma(x,\xi)).$$

Pour construire γ, on commence par décomposer b_1 comme

$$b_1(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{1,\mu}\varphi_{1,\mu}(x) \tag{9.5}$$

avec

$$(\alpha_{1,\mu}) \in l^1,$$
$$supp(\varphi_{1,\mu}) \subset 2Q_\mu$$

et

$$\|\varphi_{1,\mu}\|_{C^2} \leq 1$$

où C^ϱ désigne la classe de Hölder si ϱ n'est pas entier et l'espace des fonctions ϱ fois dérivables à dérivées bornées sinon.

Le fait de supposer une régularité $\varrho \geq 2$ est notamment utilisé pour permettre d'appliquer l'inégalité de Garding. (voir Théorème 8.4).

On résout ensuite l'équation aux dérivées partielles suivante, d'inconnue η_μ,

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x \eta_\mu(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{\varphi}_\mu(x,\xi)).\xi = 0, \tag{9.6}$$

où $\tilde{\varphi}_\mu$ est défini par

$$\tilde{\varphi}_\mu(x,D) = T_{\varphi_\mu}.$$

On symétrise alors en ξ la solution obtenue, puis on la tronque de manière convenable pour obtenir un symbole γ_μ d'ordre 0.

On pose enfin

$$\gamma(x,\xi) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{1,\mu}\gamma_\mu(x,\xi).$$

Le symbole γ ainsi défini est d'ordre 0 et, même si l'expression

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi$$

n'est pas d'ordre 0, elle est petite en un sens convenable.

On remarque que, par construction, pour tout $i \in \{1,2\}$, b_i, $\varphi_{i,\mu}$ et $\mathbf{c}$ ont la régularité de ∇u_0.

Pour estimer l'autre terme qui pose problème,

$$\langle \mathbf{C}T_{b_2}\nabla_x\overline{u}, \mathbf{C}u\rangle,$$

on utilise des commutateurs, que

$$\langle \nabla_x\overline{u}, u\rangle = 0,$$

et les propriétés de $\mathbf{C} = \mathbf{c}(x,D)$, notamment que $\mathbf{c}$ est pair et réel en ξ, ce qui donne

$$\mathbf{C}\overline{u} = \overline{\mathbf{C}u}.$$

Les inégalités (7.7) et (7.5) donnent l'effet régularisant.

Les inégalités (7.4) et surtout (7.5) sont centrales car elles permettent d'estimer la non-linéarité d'ordre 1 dans un espace approprié pour pouvoir appliquer un théorème de point fixe.

L'effet régularisant s'obtient en utilisant le lemme de Doi, l'inégalité de Gårding et la décomposition de b_1, b_2, a_1 et a_2 suivant les Q_μ, autrement dit, en suivant là encore la méthode utilisée dans [31] et en l'adaptant au cadre plus général des résultats énoncés dans cette thèse.

On rappelle que u est solution de l'équation (7.1) rappelée ci-dessous

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^{\delta}_{b_1}.\nabla_x u + T^{\delta}_{b_2}.\nabla_x\bar{u} + C_1u + C_2\bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{7.1}$$

On commence par démontrer les estimations (7.2), (7.3).

On suppose donc que l'équation (7.1) admet une unique solution u.

On régularise alors les coefficients b_i en posant

$$\varphi_{i,\mu,m}(x) = m^n\int_{\mathbb{R}^n}\theta(m(x-y)) * \varphi_{i,\mu}(y)\,dy \text{ et } b_{i,m}(x) = \sum_{\mu}\alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu,m}(x),$$

où θ est une fonction régularisante définit comme dans le lemme 8.1 et les $\alpha_{i,\mu}$ sont les coefficients définis dans (9.5).

On rappelle que, par hypothèse,

$$\|\varphi_{1,\mu}\|_{C^2} \leq 1.$$

On a donc

$$\|\varphi_{i,\mu,m}\|_{C^2} \leq 1.$$

De plus, pour tout $M \geq 2$, on remarque que , pour tout entier naturel M_0, il existe M_1 tel que

$$\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu,m}\|^N_{C^M} \leq$$
$$Am^{MN}\langle d_n\rangle^{M_1}\sup_{\mu,i}\|\varphi_{i,\mu}\|^N_{L^\infty} \leq Am^{MN}\sup_{\mu,i}\|\varphi_{i,\mu}\|^N_{C^2} \leq Am^{NM}.$$

Cette dernière propriété remplaçant la propriété de support vérifiée par les $\varphi_{i,\mu}$ et pas par les $\varphi_{i,\mu,m}$.

On obtient alors l'équation suivante

$$\begin{aligned}\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_{1,m}}.\nabla_x u + T^\delta_{b_{2,m}}.\nabla_x\overline{u} + C_1 u + C_2\bar{u} + \\ (T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_{1,m}}).\nabla u + (T^\delta_{b_2} - T^\delta_{b_{2,m}}).\nabla\overline{u} + f(x,t)\end{aligned} \tag{9.7}$$

avec $b_{1,m}$ et $b_{2,m}$ qui sont des coefficients C^∞ tels que

$$b_{i,m} = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu,m}, \ \ 1 \le k \le n$$

avec

$$\|\varphi_{i,\mu,m}\|_{C^2} \le 1$$

puisque

$$\|\varphi_{i,\mu}\|_{C^2} \le 1.$$

Les $\alpha_{i,\mu}$ sont les coefficients obtenus dans le décomposition des b_i suivant les cubes Q_μ.
Ces hypothèses permettent d'avoir

$$T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}} \in Op^0_{1,\delta}$$

avec

$$\sup_{\mu,m} \|T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \le A$$

mais aussi que

$$T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}} \in Op^0_{1,0}$$

avec, pour M assez grand,

$$\sup_\mu \|T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}}\|_{\mathscr{L}(L^2)} \le A \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu,m}\|_{C^M}.$$

Dans le second cas, on a une constante qui dépend de m.

On utilise alors le lemme 7.1 appliqué aux coefficients régularisés $b_{1,m}$ et $b_{2,m}$ avec f remplacée par

$$f_m = f + \textstyle\sum_\mu \alpha_{1,\mu}f_{1,\mu} + \sum_\mu \alpha_{2,\mu}f_{2,\mu}$$

où $$f_{1,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu,m}}).\nabla_x u \text{ et } f_{2,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{2,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{2,\mu,m}}).\nabla_x\overline{u}.$$

Les estimations sont alors vraies pour un opérateur $\mathbf{C}$ dépendant de m noté dans la suite $\mathbf{C}_m$.

De plus, on a le lemme suivant

Lemme 9.1

Pour tout $i \in \{1,2\}$, tout $\varrho \ge 0$, il existe une constante A ne dépendant que de n, de ϱ et de $\sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho}$ telle que pour tout $m \ge 1$ et tout $m' \ge m$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle\, dt\right| \le \frac{A}{m}|||J^{\frac12}\mathbf{C}_m u|||^2_T + \frac{Am^{NM}}{m'}|||J^{\frac12}u|||^2_T \\ + \frac{Am'^{NM}}{R}|||J^{\frac12}u|||^2_T + ARm'^{NM}T\sup_{[0,T]}\|u\|^2_0.\end{aligned}$$

avec $\tilde{u} = u$ ou $\tilde{u} = \overline{u}$. On a aussi

$$\left| \int_0^T \langle \mathbf{C}_m (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}}).\nabla \tilde{u}, \Psi^* \mathbf{C}_m u \rangle \, dt \right| \leq \frac{A}{m} |||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{A m^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + \frac{A {m'}^{NM}}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + A R {m'}^{NM} T \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

où $\Psi \in S^0_{1,0}$ avec ses semi-normes majorées par une constante ne dépendant que de n.

Preuve. Voir preuve du lemme 11.10.

Revenons à la preuve du théorème 7.3. En utilisant le lemme 7.1 et le lemme 9.1, pour N et M deux entiers naturels fixés assez grand ne dépendant que de n, on obtient que

$$\sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq \|\mathbf{C}_m u_0\|_0^2 + 2 \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \frac{A}{m} |||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{A m^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + A {m'}^{NM} \left(TR \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T \right).$$

$$\begin{aligned} &\sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq \\ &A {m'}^{NM} \left(\|u_0\|_0^2 + TR \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T \right) \\ &+ \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \frac{A}{m} |||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{A m^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2. \end{aligned} \tag{9.8}$$

On applique ensuite le lemme 7.2 à $\mathbf{C}_m u$, c'est à dire que

$$|||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 \leq A \left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f_m, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \right) + 2 A {m'}^{NM} \left(\frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + RT \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_0^2 \right).$$

On applique à alors nouveau le lemme 9.1 pour obtenir que

$$\begin{aligned} &|||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 \leq \\ &A \left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \frac{A}{m} |||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{A m^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + \sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \right) \\ &+ 2 A {m'}^{NM} \left(\frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + RT \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_0^2 \right), \end{aligned}$$

la constante A obtenue étant le maximum des constantes obtenues qui ne dépendent que de n.
Pour $m \geq 2A^2$, on a

$$1 - \frac{A^2}{m} \geq \frac{1}{2},$$

et donc on obtient que

$$|||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 \leq 2A \left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{A m^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 \right) + 2 A {m'}^{NM} \left(\frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + RT \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_0^2 \right).$$

En appliquant l'estimation ci-dessus à (9.8), on peut alors écrire que

$$\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\right)$$
$$+\frac{A}{m}\left(\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{Am^{NM}}{m'}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right)$$
$$+2Am'^{NM}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_0^2\right).$$

On applique alors le lemme 7.2 avec $\mathbf{C}_m = Id$ où u est une solution de l'équation (7.1) dont les coefficients b_i n'ont qu'une régularité ($\varrho \geq 2$) limitée mais qui suffit pour appliquée la première estimation donnée dans le lemme 7.2. Ce qui donne

$$\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\right)$$
$$+\frac{A}{m}\left(\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{Am^{NM}}{m'}\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right)\right)$$
$$+2Am'^{NM}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_0^2\right).$$

$$\left(1-\frac{A}{m}\right)\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\right)$$
$$+\frac{A}{m}\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \frac{A^2m^{NM-1}}{m'}\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt$$
$$+\frac{A^2m^{NM-1}}{m'}\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_0^2 + 2Am'^{NM}\left(\frac{A}{R}\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right) + RT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_0^2\right).$$

Pour m assez grand, par exemple $m \geq 2A$, on a

$$1-\frac{A}{m} \geq \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq \left(1-\frac{A}{m}\right)\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2.$$

Sachant que l'on peut fixer $A \geq 1$, on a $m \geq 2$ et donc on obtient que

$$\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2$$
$$\leq 2Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \frac{A}{R}\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right)\right.$$
$$\left.+\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\right) + \frac{A^2m^{NM}}{m'}\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2.$$

On utilise enfin que, par construction de $\mathbf{C}_m$, on a

$$\|u\|_0^2 \leq Am^{2M}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{Am^{2M}}{R}\|u\|_0^2.$$

Ce qui permet d'obtenir les estimations (7.2) et (7.3) du théorème 7.3 pour m' grand devant m, $R \geq R_{m'}$ assez grand et T_0 assez petit avec

$$I_{T_0}(f,u) = \int_0^{T_0} |\langle \mathbf{C}_m^* \Psi \mathbf{C}_m f, u\rangle|\, dt + \int_0^{T_0} |\langle \mathbf{C}_m^* \mathbf{C}_m f, u\rangle|\, dt + \int_0^{T_0} |\langle \Psi f, u\rangle|\, dt. \tag{9.9}$$

où $\mathbf{C}_m = \mathbf{C} \in OpS^0_{0,0}$, avec ses semi-normes bornées par une puissance de m, est l'opérateur construit dans la preuve du lemme 7.1 et $\Psi \in S^0_{1,0}$, avec semi-normes bornées par une constante qui ne dépend que de n, est l'opérateur construit dans la preuve du lemme 7.2.

On obtient donc les estimations ci-dessous sur l'intervalle $[0, T_0]$,

$$\sup_{[0,T_0]} \|u(t)\|_0^2 \leq A\left(\|u_0\|_0^2 + I_{T_0}(f,u)\right), \tag{9.10}$$

$$|||J^{\frac{1}{2}}u|||_{T_0}^2 \leq A\left(\|u_0\|_0 + I_{T_0}(f,u)\right). \tag{9.11}$$

En vérifiant que $J^s u$ est une solution d'une équation du type (7.1), on obtient les estimations ci-dessous sur l'intervalle $[0, T_0]$,

$$\sup_{[0,T_0]} \|u(t)\|_s^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right), \tag{9.12}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T_0}^2 \leq A\left(\|u_0\|_s + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right). \tag{9.13}$$

Les estimations s'obtiennent ensuite pour tout $T > 0$ en remarquant que

$$v(x,t) = u(x, t+T_0),$$

si elle existe, est solution de

$$\partial_t v = i\mathscr{L}v + T^\delta_{b_1}.\nabla v + T^\delta_{b_2}.\nabla\overline{v} + T^\delta_{a_1} v + T^\delta_{a_2}.\nabla\overline{v} + g(x,t). \tag{9.14}$$

où $g(x,t) = f(x, t+T_0)$. On obtient donc que

$$\sup_{[0,T_0]} \|v(t)\|_s^2 \leq A\left(\|v_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}v|||_{T_0}^2 \leq A\left(\|v_0\|_s + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right).$$

Ce qui donne

$$\sup_{[T_0,2T_0]} \|u(t)\|_s^2 \leq A\left(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}v|||_{T_0}^2 \leq A\left(\|v(T_0)\|_s + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sup_{[0,2T_0]} \|u(t)\|_s^2 & \\ &\leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) \\ &+A\left(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{2T_0}^2 & \\ &\leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) \\ &+A\left(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right).\end{aligned}$$

or

$$\|u(T_0)\|_s^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
&\sup_{[0,2T_0]} \|u(t)\|_s^2 \\
&\qquad\qquad \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) \\
&\qquad\qquad +A\left(A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{2T_0}^2 \\
&\qquad\qquad \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) \\
&\qquad\qquad +A\left(A\left(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)\right) + I_{T_0}(J^s g, J^s u)\right).
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$I_{T_0}(J^s f, J^s u)) + I_{T_0}(J^s g, J^s u)) \leq I_{2T_0}(J^s f, J^s u)),$$

on obtient

$$\sup_{[0,2T_0]} \|u(t)\|_s^2 \leq (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_0}(J^s f, J^s u)$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{2T_0}^2 \leq (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_0}(J^s f, J^s u).$$

Dans un souci de simplication, sans perte de généralité, on note alors

$$A = \max(A + A^2, 2A + A^2).$$

Pour tout $T > 0$, il existe $T_1 \leq T_0$ et N assez grand tels que $NT_1 = T$. De plus,

$$\sup_{[0,2T_1]} \|u(t)\|_s^2 \leq (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_1}(J^s f, J^s u)$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{2T_1}^2 \leq (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_1}(J^s f, J^s u).$$

On réitère alors le processus précédent $N - 1$ fois pour obtenir, sur l'intervalle $[0, T]$, les estimations (7.2) et (7.3) rappelées ci-dessous,

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)\right)$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)\right)$$

avec $A = A_N$ une constante qui dépend de T et, plus précisément, qui explose exponentiellement si T temps vers l'infini.
On obtient donc (7.2) et (7.3) sur tout intervalle $[0, T]$.

Pour obtenir les quatre autres estimations (7.6), (7.7), (7.4) et (7.5), on utilise (7.2) et (7.3) en remarquant tout d'abord que, d'après (9.9), on a

$$I_T(J^s f, J^s u) \leq A\left(\int_0^T \|f\|_s^2\, dt + T \sup_{[0,T]} \|u\|_s^2\right). \tag{9.15}$$

De plus, pour tout $R' > 0$, on a

$$I_T(J^s f, J^s u) \leq A\left(R' \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}} f)^2 + \frac{1}{R'} |||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2\right). \tag{9.16}$$

L'estimation (9.15) permet d'obtenir (7.6) et (7.7) pour T_2 assez petit, puis en utilisant la méthode utilisée pour obtenir (7.2) et (7.3) pour tout $T > 0$, on obtient (7.6) et (7.7) pour tout $T > 0$.
L'estimation (9.16) permet d'obtenir (7.4) et (7.5) pour R' assez grand et $T_3 = T(R')$ assez petit, puis en

utilisant la méthode utilisée pour obtenir (7.2) et (7.3) pour tout $T > 0$, on obtient (7.4) et (7.5) pour tout $T > 0$.

Unicité :

Supposons que l'équation (7.1) admette deux solutions u_1 et u_2 sur un intervalle $[0, T]$ alors $u_1 - u_2$ est solutions d'une équation du type (7.1) avec $f = 0$ et $u_0 = 0$ donc $u_1 - u_2$ vérifie (7.6), c'est à dire que

$$\sup_{[0,T]} \|u_1 - u_2\|_s \leq 0$$

donc, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Existence :

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction plateau telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x u + T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x \bar{u} + C_1 u + C_2 \bar{u} + f(x,t) \\ u(x, 0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{9.17}$$

On remarque que $\varphi(\varepsilon D)$ et ∇_x commutent.

Soit $T > 0$ tel que

$$\sup_{[0,T]} \|f\|_s < +\infty.$$

Cette équation admet une unique solution dans $C([0, T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$ avec $T_\varepsilon \in]0, T]$.
On note cette solution u_ε.

En effet, la fonctionnelle Υ définie par

$$\Upsilon u = e^{i\mathscr{L}t}u_0 + \int_0^t e^{i\mathscr{L}(t-t')}((T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_1)u + (T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_2)\bar{u} + f(x, t'))dt'$$

admet un unique point fixe pour T_ε assez petit.

Pour vérifier cela, on remarque que

$$\int_0^t \|(T^\delta_{b_1}.\nabla_x\varphi(\varepsilon D) + C_1)u\|_s \, dt \leq \\ t\|b^\delta_1(x, D)\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \sup_{[0,t]} \|\nabla_x\varphi(\varepsilon D)u\|_s + t\|C_1\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \sup_{[0,t]} \|u\|_s.$$

Or, en utilisant le support φ, on a

$$\|\nabla_x\varphi(\varepsilon D)\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{A}{\varepsilon}$$

où A est indépendante de ε. Pour $T_\varepsilon \leq \varepsilon$ assez petit, on otient donc que

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|\Upsilon u\|_s \leq \|u_0\|_s + \frac{1}{2} \sup_{[0,T_\varepsilon]} \|u\|_s.$$

Pour tout $u \in C([0, T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$, on obtient donc que $\Upsilon u \in C([0, T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

De plus, pour tout u et tout $v \in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|\Upsilon(u-v)\|_s \leq \frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|u-v\|_s.$$

L'opérateur Υ est donc contractant dans $C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.

En étudiant de la même manière le problème (9.17) mais avec la donnée initiale

$$u(x,0) = u_\varepsilon(T_\varepsilon),$$

on obtient l'existence d'une solution dans $C([0,2T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.
En effet, en posant

$$\Upsilon_1 u = e^{i\mathscr{L}t}u_\varepsilon(T_\varepsilon) + \int_0^t e^{i\mathscr{L}(t-t')}((T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_1)u + (T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_2)\bar{u} + f(x,t'))dt',$$

pour le même T_ε, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|\Upsilon_1 u\|_s \leq \|u_\varepsilon(T_\varepsilon)\|_s + \frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|u\|_s.$$

Pour tout $u \in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$, on obtient donc que $\Upsilon_1 u \in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.
De plus, pour tout u et tout $v \in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|\Upsilon_1(u-v)\|_s \leq \frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|u-v\|_s.$$

L'opérateur Υ_1 est donc contractant dans $C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.

En réitérant ce raisonnement, pour tout $T > 0$, on obtient que le problème (9.17) admet une unique solution dans $C([0,T];H^s(\mathbb{R}^n))$.

Lemme 9.2 *La solution u_ε de (9.17) vérifie, uniformément en ε, les estimations d'énergie (7.4), (7.5), (7.6) et (7.7) données dans le théorème 7.3 rappelées ci-dessous.*

$$\sup_{-T\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f))$$

$$\sup_{-T\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_{-T}^T \|f(t)\|_s\,dt\right),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_{-T}^T \|f(t)\|_s\,dt\right).$$

Preuve. Voir preuve du lemme 11.11 . □

On rappelle que

$$\partial_t u_\varepsilon = i\mathscr{L}u_\varepsilon + T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x u_\varepsilon + T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x \bar{u_\varepsilon} + C_1 u_\varepsilon + C_2\bar{u_\varepsilon} + f(x,t)$$

donc
$$\partial_t u_{\varepsilon'} = i\mathscr{L}u_{\varepsilon'} + T^{\delta}_{b_1}\varphi(\varepsilon' D).\nabla_x u_{\varepsilon'} + T^{\delta}_{b_2}\varphi(\varepsilon' D).\nabla_x \bar{u_{\varepsilon'}} + C_1 u_{\varepsilon'} + C_2 \bar{u_{\varepsilon'}} + f(x,t).$$
On obtient donc que $v = u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}$ est solution de l'équation (9.17) avec

$$\tilde{f} = T^{\delta}_{b_1}.\nabla_x(\varphi(\varepsilon D) - \varphi(\varepsilon' D))u_{\varepsilon'} + T^{\delta}_{b_2}.\nabla_x(\varphi(\varepsilon D) - \varphi(\varepsilon' D))\overline{u_{\varepsilon'}}$$

et $v_0 = 0$, d'après le lemme 9.2, on obtient que v vérifie les estimations d'energie du théorème 7.3.
En utilisant ces mêmes estimations appliquées à u_ε dans $\tilde{f}$, pour tout ε, tout ε', tout $s \geq 2$, tout $u_0, f \in H^s$ et tout $T > 0$, on a
$$\int_0^T \|\tilde{f}\|_0 \, dt \leq (\varepsilon - \varepsilon')TA(\|u_0\|_2 + \sup_{[0,T]} \|f\|_2).$$
Pour tout $T > 0$, (u_ε) est donc de Cauchy dans l'espace complet $C([0,T] : L^2(\mathbb{R}^n))$ et converge vers l'unique solution u de (7.1) pour tout $u_0 \in H^2$.

De plus, par un argument classique de densité de $S(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut approcher u_0 et f dans L^2 par deux suites de fonctions $(u_{0,k})$ et (f_k) dans $S(\mathbb{R}^n)$.
Soit u_k l'unique solution de (7.1) (avec f_k au lieu de f) dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ associée à $u_{0,k}$. D'après les estimations d'énergie données dans le théorème 7.3, on a

$$\sup_{[0,T]} \|u_k - u_{k'}\|_s \leq A(\|u_{0,k} - u_{0,k'}\|_0 + T \sup_{[0,T]} \|f_k - f_{k'}\|_0).$$

Sachant que $(u_{0,k})$ et (f_k) convergent, on obtient que (u_k) est de Cauchy dans l'espace complet $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ et converge donc vers l'unique solution u de (7.1) dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ pour tout u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour traiter le cas non linéaire et donc obtenir le théorème 7.1, on met l'équation (5.1) sous la forme appelée en générale paralinéaire obtenue par la formule de Bony.

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{\partial_v F}.\nabla_x u + T_{\partial_{\overline{v}} F}.\nabla_x \overline{u} + T_{\partial_u F}.u + T_{\partial_{\overline{u}} F}.\overline{u} + R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{9.18}$$

où
$$R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \in H^{\frac{n}{2}+2\varrho}(\mathbb{R}^n)$$
si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \frac{n}{2} + 1 + \varrho$.
Si l'on suppose $\varrho \geq 1$, on a donc

$$R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \in H^{\frac{n}{2}+1+\varrho}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$$

On pose
$$v = \nabla_x u,$$
$$z_0 = (u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0),$$
$$z = (u, v, \overline{u}, \overline{v}),$$
$$b_1(x) = \partial_v F(z),$$
$$b_2(x) = \partial_{\overline{v}} F(z),$$
$$a_1(x) = \partial_u F(z),$$
$$a_2(x) = \partial_{\overline{u}} F(z)$$
et
$$b_1^0(x) = \partial_v F(z_0),$$
$$b_2^0(x) = \partial_{\overline{v}} F(z_0),$$

$$a_1^0(x) = \partial_u F(z_0),$$

$$a_2^0(x) = \partial_{\overline{u}} F(z_0).$$

L'équation (9.18) s'écrit alors, en posant $v = \nabla_x u$ pour simplifier,

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1^0}.v + T^\delta_{b_2^0}.\bar{v} + T^\delta_{a_1^0}u + T^\delta_{a_2^0}\bar{u} + \tilde{R}_u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{9.19}$$

avec

$$\tilde{R}_u = R(u, v, \overline{u}, \overline{v}) + \tilde{R}_{u,2} + \tilde{R}_{u,3}$$

$$\delta \in [0, 1[$$

$$\tilde{R}_{u,2} = (T_{b_1} - T^\delta_{b_1}).v + (T_{b_2} - T^\delta_{b_2}).\bar{v},$$

$$\tilde{R}_{u,3} = (T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_1^0}).\nabla u + (T^\delta_{b_2} - T^\delta_{b_2^0}).\nabla \bar{u},$$

et

$$\tilde{R}_{u,4} = (T_{a_1} - T^\delta_{a_1^0})u + (T_{a_2} - T^\delta_{a_2^0})\bar{u}.$$

Dans la suite $A_n(\|u_0\|_s)$, $B_n(\|u_0\|_s)$, $C_n(\|u_0\|_s)$ désignent des constantes qui ne dépendent que de n, s et de $\|u_0\|_s$, ou des constantes majorées par des constantes qui ne dépendent que de n, s et de $\|u_0\|_s$.

Soit ϱ tel que $2 \leq \varrho < s - (n/2 + 1)$.
Le minimu utilisé est 2 car pour obtenir les estimations dans le cas linéaire, et notamment l'effet régularisant, on utilise l'inégalité de Garding.
L'inégalité stricte $2 < s - (n/2 + 1)$ vient du fait que l'on utilise l'inégalité de Sobolev

$$\|\nabla u_0\|_{C^2} \leq A\|\nabla u\|_{2+\frac{n}{2}+\varepsilon} \ \leq \|u_0\|_s.$$

Soit $(q_\mu)_\mu$ une partition de l'unité subordonnée au Q_μ.

On a

$$b_i^0(x) = \sum_\mu q_\mu b_i^0(x).$$

Si

$$\|q_\mu b_i^0\|_{C^2} \neq 0,$$

on pose

$$\alpha_{i,\mu} = \|q_\mu b_i^0\|_{C^2}$$

et

$$\varphi_{i,\mu}(x) = \frac{q_\mu b_i^0(x)}{\|q_\mu b_i^0\|_{C^2}},$$

et sinon, on pose

$$\alpha_{i,\mu} = 0$$

et

$$\varphi_{i,\mu}(x) = 0.$$

On a donc, pour tout μ tel que $\alpha_{i,\mu} \neq 0$,

$$\|\varphi_{i,\mu}\|_{C^2} = 1.$$

Sous les hypothèses du Théorème 7.1 (F est nulle en 0, ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2), en utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre 2 de $\partial_v F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$, enfin, en posant $z_0 = (u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$, on obtient

$$b_1^0 = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma|=2} z_0^\gamma h_{1,\gamma}(z_0)$$

avec $h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$ vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)| \leq \sup_{x \in [-\|u_0\|_s, \|u_0\|_s]^{2n+2}} |G_{1,\gamma}(x)|$$

où

$$G_{1,\gamma}(\mathscr{R}(u_0), \nabla \mathscr{R}(u_0), \mathscr{I}(u_0), \nabla \mathscr{I}(u_0)) = h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0).$$

On a le même résultat pour b_2 mais en utilisant $\partial_{\overline{v}} F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$.

D'après l'inégalité de Sobolev, sachant que sur le support de q_μ, on a

$$\langle x - x_\mu \rangle \leq d_n,$$

en posant

$$\iota_\mu = \langle x - x_\mu \rangle^{-(n+1)},$$

on obtient

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \alpha_{i,\mu} \leq A_n(\|u_0\|_s) \|\iota_\mu^2 (u_0^2 + u_0 v_0 + v_0^2)\|_{s-1},$$

or

$$s - 1 > \frac{n}{2}$$

donc on a

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \alpha_{i,\mu} \leq A_n(\|u_0\|_s) \left(\|\iota_\mu u_0\|_{s-1}^2 + \|\iota_\mu u_0\|_{s-1} \|\iota_\mu v_0\|_{s-1} + \|\iota_\mu v_0\|_{s-1}^2 \right).$$

D'après le lemme 3.7, on a

$$\| \|i_\mu u_0\|_{s-1} \|_{l^2} \leq A \|u_0\|_{s-1}$$

et

$$\| \|i_\mu v_0\|_{s-1} \|_{l^2} \leq A \|u_0\|_s.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on en déduit que

$$\|\iota_\mu b_i^0\|_{s-1} \in l^1$$

et

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \| \|\iota_\mu b_i^0\|_{s-1} \|_{l^1} \leq B_n(\|u_0\|_s).$$

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L} u + T^\delta_{b_1^0}.\nabla u + T^\delta_{b_2^0}.\nabla \bar{u} + T^\delta_{a_1^0} u + T^\delta_{a_2^0} \bar{u} + \tilde{R}_u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{9.20}$$

On définit $\lambda_1^T(w)$, $\lambda_2^T(w)$ et $\lambda_3^T(w)$ par

$$\lambda_1^T(w) = \sup_{[0,T]} \|w\|_s, \quad \lambda_2^T(w) = |||J^{s+\frac{1}{2}} w|||_T, \quad \lambda_3^T(w) = \sup_{[0,T]} \|\partial_t w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}$$

$$\Gamma^T(w) = \max(\lambda_1^T(w), \lambda_2^T(w), \lambda_3^T(w))$$

On pose

$$Z^T_{\|u_0\|_s} = \left\{ w \in C([0,T]; H^s) : w(x,0) = u_0(x) \; et \; \Gamma^T(w) \leq 10 K_n(\|u_0\|_s) \right\}$$

où $K_n(\|u_0\|_s)$ désigne une constante ne dépendant que de n, de s et de $\|u_0\|_s$ telle que

$$K_n(\|u_0\|_s) \geq \|u_0\|_s J_n(\|u_0\|_s)$$

$$J_n(\|u_0\|_s) \geq C_n(\|u_0\|_s)(1 + I_n(\|u_0\|_s)),$$

$C_n(\|u_0\|_s)$ une constante polynomiale en n, $\|u_0\|_s$, $B_n(\|u_0\|_s)$ et $e^{B_n(\|u_0\|_s)}$ et

$$I_n(\|u_0\|_s) \geq (\|u_0\|_s^2 + 1) \sup_{i,\gamma,x} |G_{i,\gamma}(x)|.$$

On pose

$$\Upsilon w(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')\tilde{R}_w(t')dt'$$

où $W(t)u_0$ est la solution de l'équation (7.1) pour $f = 0$ (l'existence dans la cas paralinéaire n'est utilisée que dans le cas $f = 0$).

Un point fixe de Υ est solution de (7.1) avec $f = \tilde{R}_w$.
En effet, en notant B l'opérateur conjugaison, on a

$$\partial_t \Upsilon w(t) = \left(i\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B\right) W(t)u_0 +$$
$$\int_0^t \left(i\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B\right) W(t-t')\tilde{R}_w(t')\, dt' + \tilde{R}_w(t)$$

$$\partial_t \Upsilon w(t) = (i\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B)\Upsilon w(t) + \tilde{R}_w(t). \tag{9.21}$$

On prouve alors que, pour $T > 0$ assez petit Υ admet un unique point fixe dans $Z^T_{\|u_0\|_s}$ en utilisant les estimations (7.2) à (7.3), ce qui permet de démontrer le théorème 7.1.

Pour prouver la propriété de continuité par rapport aux données initiales, on remarque tout d'abord que s'il existe $r > 0$ tel que

$$\|u_0\| \leq r$$

alors toutes le constantes $A_n(\|u_0\|_s)$, $B_n(\|u_0\|_s)$,..., $K_n(\|u_0\|_s)$ se majorent par une constante $A_{n,r}$ ne dépendant plus de u_0.
La solution u associée à u_0 existe donc sur un intervalle $[-T_r, T_r]$ avec T_r indépendant de u_0.

On utilise ensuite que $u - v$ est solution de (7.1) avec

$$f = \tilde{R}_{u-v} + T_{b_1^0 - b_1(v_0)}.\nabla_x v + T_{b_2^0 - b_2(v_0)}.\nabla_x \overline{v} + T_{a_1^0 - a_1(v_0)} v + T_{a_2^0 - a_2(v_0)} \overline{v}$$

où $b_1(v_0) = (\nabla_v F)(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$, etc....

Pour $T = T_r$, on obtient donc que

$$\Gamma^{T_r}(u - v) \leq 10 C_n(\|u_0 - v_0\|_s)\|u_0 - v_0\|_s + \|u_0 - v_0\|_s T_r H_n(\|v_0\|_s).$$

Cette dernière estimation permet d'obtenir l'uniforme continuité par rapport aux données initiales pour $T = T_r$ assez petit.

10

Indications de démonstration du théorème 7.2

La démonstration suit celle de [31] et les indications données dans la section précédente, qui concernent les mêmes résultats mais dans le cas où les dérivées de F sont nulles jusqu'à l'ordre 1.

Nous allons présenter la méthode de démonstration du théorème 7.2 à l'aide de l'exemple suivant

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + |\nabla_x u|^2.$$

En utilisant le calcul paradifférentiel et la formule de Bony, on linéarise comme suit

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{\nabla_x \overline{u}}.\nabla_x u + T_{\nabla_x u}.\nabla_x \overline{u} + R(\nabla_x u, \nabla_x \overline{u})$$

que l'on transforme en

$$\begin{aligned}\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{\nabla_x \overline{u_0}}.\nabla_x u + T^\delta_{\nabla_x u_0}.\nabla_x \overline{u} \\ +(T_{\nabla_x \overline{u_0}} - T^\delta_{\nabla_x \overline{u_0}}).\nabla_x u + (T_{\nabla_x u_0} - T^\delta_{\nabla_x u_0}).\nabla_x \overline{u} \\ +(T_{\nabla_x \overline{u}} - T_{\nabla_x \overline{u_0}}).\nabla_x u + (T_{\nabla_x u} - T_{\nabla_x u_0}).\nabla_x \overline{u} \\ +R(\nabla_x u, \nabla_x \overline{u})\end{aligned} \tag{10.1}$$

oú

$$(T^\delta_b v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\tilde{b}^\delta(x,\xi)(1-\psi_1(\xi))\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

$$\tilde{b}^\delta(x,\xi) = |\xi|^{\delta n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}(|\xi|^\delta(x-y))b(y)\, dy$$

$$T_b = T^1_b$$

et χ est une fonction à support dans $B(0,\varepsilon)$, $\chi = 1$ sur $B(0,\varepsilon')$ avec $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$, et $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi_1 = 1$ sur $B(0,1)$ et $\psi_1 = 0$ en dehors de $B(0,2)$.

Comme dans la sous-section précédente, on note Υ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}\Upsilon w(t) = W(t)u_0 + \\ \int_0^t W(t-t')((T_{\nabla_x \overline{w}} - T^\delta_{\nabla_x \overline{w}}).\nabla w + (T_{\nabla_x w} - T^\delta_{\nabla_x w}).\nabla \overline{w})(t') + \\ \int_0^t W(t-t')((T^\delta_{\nabla_x \overline{w}} - T^\delta_{\nabla_x \overline{u_0}}).\nabla_x u + (T^\delta_{\nabla_x w} - T^\delta_{\nabla_x u_0}).\nabla_x \overline{w})(t')\, dt' + \\ \int_0^t W(t-t')R(\nabla_x w, \nabla_x \overline{w})(t')dt'\end{aligned} \tag{10.2}$$

où $w(x,0) = u_0$ et

$$u(x,t) = W(t)u_0(x)$$

est la solution d'une équation du type (10.3) suivant

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1^0}.\nabla u + T^\delta_{b_2^0}.\nabla \overline{u} + T^\delta_{a_1^0}u + T^\delta_{a_2^0}\overline{u} + f(x,t) \tag{10.3}$$

pour $f = 0$, $b_1^0 = \nabla_x \overline{u}_0$, $b_2^0 = \nabla_x u_0$, $a_1^0 = a_2^0 = 0$ et $u(x,0) = u_0$.

On obtient que $\Upsilon w(t)$ est une solution de l'équation (10.3) pour

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \tag{10.4}$$

avec

$$f_1(x,t) = (T_{\nabla_x \overline{w}} - T^\delta_{\nabla_x \overline{w}}).\nabla w(x,t) + (T_{\nabla_x w} - T^\delta_{\nabla_x w}).\nabla \overline{w}(x,t),$$
$$f_2(x,t) = (T^\delta_{\nabla_x \overline{w}} - T^\delta_{\nabla_x \overline{u}_0}).\nabla w(x,t) + (T^\delta_{\nabla_x w} - T^\delta_{\nabla_x u_0}).\nabla \overline{w}(x,t),$$
$$f_3(x,t) = R(\nabla_x w, \nabla_x \overline{w}).$$
$$\Upsilon w(x,0) = u_0 \quad \text{et} \quad b_1^0 = \nabla_x \overline{u_0},\ b_2^0 = \nabla_x u_0,\ a_1 = a_2 = 0.$$

On démontre alors que s'il existe ϱ tel que, pour tout $i \in \{1,2\}$,

$$b_i^0(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \alpha^0_{i,\mu}\varphi^0_{i,\mu}(x)$$

avec

$$\alpha^0_{i,\mu} \in l^1,$$
$$supp\varphi^0_{i,\mu} \in 2Q_\mu$$

et

$$\|\varphi^0_{i,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1$$

(où, pour $\varrho > 0$, C^ϱ est la classe de Hölder si ϱ non entier et l'espace des fonctions ϱ fois dérivables à dérivées bornées sinon) alors les équations du type (10.3) admettent une solution unique, sur tout intervalle de temps $[0,T]$, qui vérifie les estimations d'énergie suivantes :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_{[0,T]} \|f(t)\|_s \, dt\right) \tag{10.5}$$

Pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$, on a

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u(t)|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_{[0,T]} \|f(t)\|_s \, dt\right) \tag{10.6}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A\left(\|u_0\|_s + |||J^{s-\frac{1}{2}}f|||'_T\right) \tag{10.7}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,0} \leq A\left(\|u_0\|_s + |||J^{s-\frac{1}{2}}f|||_{T,-\sigma_0-2,0}\right) \tag{10.8}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,1} \leq A\left(\|u_0\|_s + |||J^{s-\frac{1}{2}}f|||'_T\right) \tag{10.9}$$

avec

$$|||u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_0^T \|\sigma_0^{\frac{1}{2}}\langle x - \sigma_1 x_\mu\rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}}u\|_0^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|||u|||'_T = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_0^T \int_{Q_\mu} |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \|_{L^2([0,T]\times Q_\mu)} = \|u\|_{l^1_\mu(L^2(Q_\mu \times [0,T]))}.$$

où

$$A = c_1 \exp(c_2 T)$$

et, c_1, c_2 dépendent polynômialement de n, et des constantes A_0, A_1, e^{A_0} et e^{A_1} avec A_0 et A_1 des constantes qui vérifient

$$A_0 \geq \sup_{i \in \{1,2\}} \sum_\mu |\alpha^0_{i,\mu}| \quad \text{et} \quad A_1 \geq \sup_{i \in \{1,2\}} \|b^0_i\|_{C^2}.$$

Dans le cas $\sigma_0 = 3$ et $\sigma_1 = 1$, on remarque que

$$|||f|||_{T,-\sigma_0-2,0} = \mathcal{N}_T(f).$$

On remarque aussi que si

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

la méthode de démonstration fait que l'on peut obtenir par exemple, pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} &\sup_{[0,T]} \|u\|_s + |||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} \leq A\|u_0\|_s + \\ &A \left(\int_0^T \|f_1\|_s \, dt + |||J^{s-\frac{1}{2}} f_2|||_{T,-5,0} + \int_0^T \|f_3\|_s \, dt \right). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Dans l'exemple présenté dans cette section, on peut appliquer les estimations précédentes avec

$$A_0 = \|\langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}}$$

car , en utilisant notamment le support de q_μ, on a

$$\begin{aligned} \sum_\mu |\alpha^0_{i,\mu}| &= \sum_\mu \|q_\mu \nabla_x u_0\|_{C^2} \leq \sum_\mu \|q_\mu \nabla_x u_0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \\ &\leq \sum_\mu \|\langle x - x_\mu \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle x \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \|\langle x - x_\mu \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} \nabla_x u_0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient que

$$\begin{aligned} &\sum_\mu |\alpha^0_{i,\mu}| \leq \\ &\left(\sum_\mu \|\langle x - x_\mu \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle x \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}\|^2_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_\mu \|\langle x - x_\mu \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} \nabla_x u_0\|^2_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On applique alors le lemme 3.7, ce qui permet d'obtenir que

$$\sum_\mu |\alpha^0_{i,\mu}| \leq \|\langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}.$$

C'est le seul argument qui utilise que

$$\|\langle x \rangle^{\frac{n}{2}+\varepsilon} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} < +\infty$$

qui est du à la méthode utilisée pour vérifieer que les coefficients b_i admettent une décomposition suivant les cubes Q_μ et que b_1 vérifie donc la condition nécessaire et suffisante (9.3).

De plus, on a
$$A_1 = \|u_0\|_{H^{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}}.$$
Or $A_1 \leq A_0$, les inégalités précédentes restent donc vraies avec $c_1 = c_2 = P(n, A_0, e^{A_0})$ où P est un polynôme.

On applique alors ces estimations à Υw pour w dans un espace métrique complet bien choisi pour pouvoir appliquer un théorème du point fixe.
Soit un entier naturel $p \geq 2$.
Cette méthode nous amène à estimer
$$\lambda_1^T(\Upsilon w) = \sup_{[0,T]} \|\Upsilon w\|_s \text{ et } \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(\Upsilon w) = |||J^{s+\frac{1}{2}}\Upsilon w|||_{T,\sigma_0,\sigma_1},$$
$$\lambda_{2,3,1}^T(\Upsilon w) \text{ et } \lambda_{2,1,0}^T(\Upsilon w),$$
$$\lambda_{\tilde{3}}^T(\Upsilon w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \partial_t \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \text{ et } \lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+p-k+\varepsilon}$$
pour tout $\sigma_0 > 0$ et, $\sigma_1 = 0$ ou $\sigma_1 = 1$ par une fonction de $\lambda_1^T(w)$, $\lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(w)$, $\lambda_{2,3,1}^T(w)$, $\lambda_{2,1,0}^T(w)$, $\lambda_{\tilde{3}}^T(w)$ et $\lambda_{4,k}^T(w)$ bornée sur tout compact où
$$\lambda_1^T(w) = \sup_{[0,T]} \|w\|_s \text{ et } \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(w) = |||J^{s+\frac{1}{2}} w|||_{T,\sigma_0,\sigma_1},$$
$$\lambda_{\tilde{3}}^T(w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \partial_t w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \text{ et } \lambda_{4,k}^T(w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}.$$
Dans la suite, on note $\Gamma^T(w)$ le maximum de ces $p+4$ normes.
Plus précisément, on souhaite montrer que Υ admet un unique point fixe dans l'espace noté $Z_{\|u_0\|_s}^T$ tel que
$$Z_{\|u_0\|_s}^T = \left\{w, \Gamma^T(w) \leq 10K_{n,u_0}\right\}$$
où K_{n,u_0} est une contante fixée assez grande qui ne dépend que de n, s et des différentes normes associées aux espaces de Sobolev auxquels appartient u_0.

Sachant que Υw est solution d'une équation de type (10.3), on peut lui appliquer l'estimation (10.10) où f_1, f_2 et f_3 sont définies dans (10.4).

On prouve que
$$\int_0^T \|f_3\|_s \, dt \leq AT \sup_{x\in[-M,M]} |\Theta(x)| \lambda_1^T(w)$$
où
$$M = \sup_{[0,T]} \|w\|_s \text{ et } \Theta \in C^\infty(\mathbb{R})$$
pour $\varrho > 1$ car f_3 est le reste de Bony.

De plus, pour $\delta = \frac{1}{2}$ et $\varrho \geq 2$, d'après le proposition 4.4, on a
$$\int_0^T \|f_1\|_s \, dt \leq AT \sup_{[0,T],i} \|b_i\|_{C^2} \sup_{[0,T]} \|w\|_s$$
avec
$$\sup_{[0,T],i} \|b_i\|_{C^2} \leq \sup_{[0,T]} \|w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$$

et donc
$$\int_0^T \|f_1\|_s\,dt \leq AT\lambda_1^T(w)^2.$$

On démontre aussi que
$$|||J^{s-\frac{1}{2}}f_2|||_{T,-5,0} \leq A \sup_{i\in\{1,2\}} \|\langle x\rangle^2(b_i - b_i^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\lambda_{2,1,0}^T(w).$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev, on obtient que
$$\|\langle x\rangle^2(b_i - b_i^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leq A \sup_{x\in[-M_1,M_1]} |\Theta_1(x)| \times \sup_{k,[0,T]} \|\langle x\rangle^2\partial_{x_k}(w-u_0)\|_{\frac{n}{2}+\varepsilon}$$

où $\Theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et
$$M_1 = \sup_{[0,T]} \|w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} + \|u_0\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.$$
Dans cet exemple où $b_1 = \nabla_x\overline{w}$ et $b_2 = \nabla_x w$, on a $\Theta_1(x) = 1$.

On obtient donc
$$\|\langle x\rangle^2(b_i - b_i^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[-T,T])} \leq AT\lambda_{\tilde{3}}^T(w).$$

On obtient donc que
$$\begin{aligned}&\lambda_1^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,3,1}^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,1,0}^T(\Upsilon w)\\ &\qquad \leq K_{n,u_0}\left(1 + T\left(\lambda_{\tilde{3}}^T(w)\lambda_{2,1,0}^T(w) + \sup_{x\in[-\lambda_1^T(w),\lambda_1^T(w)]} |\Theta(x)|\lambda_1^T(w) + \lambda_1^T(w)^2\right)\right),\end{aligned}$$

c'est à dire que pour T assez petit, on obtient
$$\lambda_1^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,3,1}^T(\Upsilon w) + \lambda_{2,1,0}^T(\Upsilon w) \leq 2K_{n,u_0}$$

Estimons alors
$$\lambda_{\tilde{3}}^T(\Upsilon w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2\partial_t\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.$$

On rappelle que
$$\mathscr{L} = \sum_{j\leq k}\partial_{x_j} - \sum_{j>k}\partial_{x_j}$$

On remarque tour d'abord que Υw vérifie
$$\partial_t\Upsilon w = i\mathscr{L}\Upsilon w + T^\delta_{\nabla\overline{u_0}}.\nabla\Upsilon w + T^\delta_{\nabla u_0}.\nabla\overline{\Upsilon w} + f(x,t)$$

avec f qui peut se mettre sous la forme
$$\tilde{R}(\nabla_x w, \nabla_x\overline{w}) - \tilde{R}(\nabla_x u_0, \nabla_x\overline{u}_0) + R(\nabla_x u_0, \nabla_x\overline{u}_0),$$

où
$$\tilde{R}(\nabla_x w, \nabla_x\overline{w}) = (T_{\nabla\overline{w}} - T^\delta_{\nabla\overline{w}}).\nabla w + (T_{\nabla w} - T^\delta_{\nabla w}).\nabla\overline{w} + R(\nabla_x w, \nabla_x\overline{w}),$$

et
$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\nabla_x w, \nabla_x\overline{w}) - \tilde{R}(\nabla_x u_0, \nabla_x\overline{u}_0) =\\ &\quad (T_{\nabla\overline{w}-\nabla\overline{u}_0} - T^\delta_{\nabla\overline{w}-\nabla\overline{u}_0}).\nabla w + (T_{\nabla\overline{u}_0} - T^\delta_{\nabla\overline{u}_0}).\nabla(w-u_0)\\ &\quad +(T_{\nabla w-\nabla u_0} - T^\delta_{\nabla w-\nabla u_0}).\nabla\overline{w} + (T_{\nabla u_0} - T^\delta_{\nabla u_0}).\nabla\overline{(w-u_0)}\\ &\quad +R(\nabla_x w, \nabla_x\overline{w}) - R(\nabla_x u_0, \nabla_x\overline{u}_0)\end{aligned} \tag{10.11}$$

En remarquant que

$$\mathscr{L}(\langle x\rangle^2\Upsilon w) = \langle x\rangle^2\mathscr{L}\Upsilon w + (2k-2(n-k))\Upsilon w - 2\tilde{x}.\nabla\Upsilon w$$

où $\tilde{x} = (-x_1, ..., -x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$, on obtient que

$$\begin{aligned}\langle x\rangle^2\partial_t\Upsilon w = i\mathscr{L}(\langle x\rangle^2\Upsilon w) + \langle x\rangle^2 T^\delta_{\nabla\overline{u_0}}.\nabla\Upsilon w \\ +\langle x\rangle^2 T^\delta_{\nabla u_0}.\nabla\overline{\Upsilon w} + 2i\tilde{x}.\nabla\Upsilon w - i(4k-2n)\Upsilon w + \langle x\rangle^2 f(x,t).\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.4, on a

$$\begin{aligned}\|\langle x\rangle^2 T^\delta_{\nabla\overline{u_0}}.\nabla\Upsilon w + \langle x\rangle^2 T^\delta_{\nabla u_0}.\nabla\overline{\Upsilon w} + 2i\tilde{x}.\nabla\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ \leq A(1+2\|\nabla u_0\|_{L^\infty})\|\langle x\rangle^2\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq A(1+2\sup_k\|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,2}^T(\Upsilon w) + \sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2 f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq A(1+2\sup_k\|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,2}^T(\Upsilon w) \\ +\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}(\nabla w,\nabla\overline{w}) - \tilde{R}(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} + \|\langle x\rangle^2 R(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0)\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Dans la suite θ_1 désigne une fonction dans $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta_1 = 0$ sur $B(0,1)$ et $\theta_1 = 1$ en dehors de $B(0,2)$. On a alors que

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq A(1+2\sup_k\|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) + \sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2 f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \tag{10.12}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq A(1+2\sup_k\|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,2}^T(\Upsilon w) \\ +\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}(\nabla w,\nabla\overline{w}) - \tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w}))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ +\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w}) - \\ \tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla u_0,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ +\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla u_0,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{u}_0) - \tilde{R}(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ +\|\langle x\rangle^2 R(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0)\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{10.13}$$

On rappelle que, pour tout w_1 et tout w_2, on a

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\nabla_x w_1,\nabla_x\overline{w}_1) - \tilde{R}(\nabla_x w_2,\nabla_x\overline{w}_2) = \\ &\quad(T_{\nabla\overline{w}_1-\nabla\overline{w}_2} - T^\delta_{\nabla\overline{w}_1-\nabla\overline{w}_2}).\nabla w_1 + (T_{\nabla\overline{w}_2} - T^\delta_{\nabla\overline{w}_2}).\nabla(w_1-w_2) \\ &\quad+(T_{\nabla w_1-\nabla w_2} - T^\delta_{\nabla w_1-\nabla w_2}).\nabla\overline{w}_1 + (T_{\nabla w_2} - T^\delta_{\nabla w_2}).\nabla\overline{(w_1-w_2)} \\ &\quad+R(\nabla_x w_1,\nabla_x\overline{w}_1) - R(\nabla_x w_2,\nabla_x\overline{w}_2)\end{aligned} \tag{10.14}$$

D'après le proposition 4.4 et le théorème 4.4, on obtient donc que

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}(\nabla w,\nabla\overline{w}) - \tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w}))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ \leq A(2\|\theta_1(D/R)\nabla w\|_{L^\infty}\|\langle x\rangle^2\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ +2\|(1-\theta_1(D/R))\nabla w\|_{L^\infty}\|\langle x\rangle^2\theta_1(D/R)\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \\ +\sup_{x\in[-M_1,M_1]}|\Theta(x)|\|\langle x\rangle^2\theta_1(D/R)\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon})\end{aligned}$$

avec, d'après le lemme 3.4,

$$M_1 = \max\left(\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}, \sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(1-\theta_1(D/R))\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\right) \leq \lambda_{4,2}^T(w).$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}(\nabla w,\nabla\overline{w})-\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w}))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\quad\leq\frac{A}{R}\left(4\lambda_1^T(w)+\sup_{x\in[-\lambda_{4,2}^T(w),\lambda_{4,2}^T(w)]}|\Theta(x)|\right)\lambda_{4,2}^T(w)\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w})-\\&\qquad\qquad\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla u_0,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\leq A(2\|(1-\theta_1(D/R))\nabla(w-u_0)\|_{L^\infty}\|\langle x\rangle^2\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\qquad+2\|(1-\theta_1(D/R))\nabla w\|_{L^\infty}\|\langle x\rangle^2(1-\theta_1(D/R))\nabla(w-u_0)\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\qquad+\sup_{x\in[-M_2,M_2]}|\Theta(x)|\|\langle x\rangle^2(1-\theta_1(D/R))\nabla_x(w-u_0)\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon})\end{aligned}$$

avec

$$M_2=\max\left(\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(1-\theta(D/R))\nabla u_0\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon},\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(1-\theta(D/R))\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\right)$$

où, d'après le lemme 3.4, on a

$$\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(1-\theta(D/R))\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\leq\lambda_{4,2}^T(w).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla w,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{w})-\\&\qquad\qquad\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla u_0,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\quad\leq ART\lambda_3^T(w)\left(4\lambda_{4,2}^T(w)+\sup_{x\in[-M_2,M_2]}|\Theta(x)|\right).\end{aligned}$$

En réinjectant ces dernières estimations dans (10.13), on obtient que

$$\begin{aligned}\lambda_3^T(\Upsilon w)\leq{}&A(1+\sup_k\|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,2}^T(\Upsilon w)+\\&\frac{A}{R}\left(4\lambda_1^T(w)+\sup_{x\in[-\lambda_{4,2}^T(w),\lambda_{4,2}^T(w)]}|\Theta(x)|\right)\lambda_{4,2}^T(w)\\&+ART\lambda_3^T(w)\left(4\lambda_{4,2}^T(w)+\sup_{x\in[-M_2,M_2]}|\Theta(x)|\right)+K_{n,u_0}\end{aligned}$$

où K_{n,u_0} est fixée telle que

$$\begin{aligned}&K_{n,u_0}\geq\\&\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2(\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))\nabla u_0,(1-\theta_1(D/R))\nabla\overline{u}_0)-\tilde{R}(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0))\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\&\qquad+\|\langle x\rangle^2R(\nabla u_0,\nabla\overline{u}_0)\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Sachant que $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$, on obtient que

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq A(1+\sup_k \|\partial_k u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,2}^T(\Upsilon w)+ \left(\frac{A}{R}+ART\right)\left(80K_{n,u_0}+2\sup_{x\in[-10K_{n,u_0},10K_{n,u_0}]}|\Theta(x)|\right)10K_{n,u_0}+K_{n,u_0} \tag{10.15}$$

Pour prouver que Υ stabilise $Z^T_{\|u_0\|_s}$ pour R assez grand et T assez petit, Il reste à estimer $\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w)$ pour tout $k \leq p$.
On commence par remarquer que, à l'aide de l'équation intégrale (10.2), on obtient que

$$\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) \leq \|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} + T\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^k f\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}.$$

D'après le théorème 4.4 appliquées dans la cas $s_1 = k$ et $\varrho = 1$, et la proposition 4.4 appliquée avec $\delta' = \delta = \frac{1}{2}$ et $\varrho' = 2$, ce qui fait que $\delta'\varrho' = 1$, on a

$$\|\langle x\rangle^k(f_3+f_1)\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq A\left(\sup_{x\in[-M_3,M_3]}|\Theta(x)|+2\|\nabla_x w\|_{C^2}\right)\lambda_{4,k}^T(w)$$

avec

$$M_3 = \lambda_{4,k}^T(w).$$

D'après le lemme 4.3 appliqué dans le cas $\varrho = 0$ et $\sigma_1 = 0$, on a

$$\|\langle x\rangle^k f_2\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq 2A\|\langle x\rangle^k\nabla(w-u_0)\|_{L^\infty}\|\nabla w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}$$

$$\|\langle x\rangle^k f_2\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq A(\lambda_{4,2}^T(w)+\|\langle x\rangle^k\nabla u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,k-1}^T(w)$$

On obtient donc que

$$\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) \leq \|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} + T\times \left(A\left(\sup_{x\in[-M_3,M_3]}|\Theta(x)|+2\|\nabla_x w\|_{C^2}\right)\lambda_{4,k}^T(w)+A(\lambda_{4,2}^T(w)+\|\langle x\rangle^k\nabla u_0\|_{L^\infty})\lambda_{4,k-1}^T(w)\right).$$

$$\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) \leq \|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} + TA\left(\sup_{x\in[-K_{n,u_0},K_{n,u_0}]}|\Theta(x)|+4K_{n,u_0}\right)K_{n,u_0}. \tag{10.16}$$

Pour estimer $\|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}$, on utilise que $\langle x\rangle^k W(t)u_0$ est solution de

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + (T_{b_1^0}+T_{b_2^0}B).\nabla u + (T_{a_1^0}+T_{a_2^0}B)u + f \tag{10.17}$$

avec pour donnée initiale $\langle x\rangle^k u_0$, B l'opérateur de conjugaison et

$$f(x,t) = f_k(x,t) = i\langle x\rangle^k[(\mathscr{L}+T^\delta_{b_1^0}.\nabla+T^\delta_{b_2^0}.\nabla B),\langle x\rangle^{-k}]\langle x\rangle\langle x\rangle^{k-1}W(t)u_0.$$

On applique alors l'estimation (10.5), ce qui donne

$$\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq C_n(\|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon})\left(\|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}+\int_0^T\|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}\,dt\right),$$

avec, d'après le corollaire 3.3,

$$\|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq C_n(\|u_0\|_s) \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^{k-1} W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-(k-1)+\varepsilon}.$$

$$\|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq C_n(\|u_0\|_s)\lambda^T_{4,k-1}(W(t)u_0).$$

Pour estimer $\lambda^T_{4,k-1}(W(t)u_0)$, on réitére la même opération, ce qui fait que l'on doit estimer $\lambda^T_{4,k-2}(W(t)u_0)$ et ainsi de suite jusqu'à

$$\lambda^T_{4,1}(W(t)u_0).$$

Ce qui revient à estimer, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\sup_{[0,T]} \|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon}.$$

Ce qui à déja été fait précédemment dans le cas $p = 1$. On remarque alors $x_j W(t)u_0$ est solution d'une équation de type (9.20) avec

$$f = f_j = i[x_j, \mathscr{L}] + [x_j, T^\delta_{b^0_1}.\nabla] + [x_j, T^\delta_{b^0_2}.\nabla]BW(t)u_0$$

et de donnée initiale $x_j u_0$ avec $[x_j, \mathscr{L}]$ l'opérateur de symbole $-\frac{1}{i}\tilde{\xi}_j$ et $[x_j, T^\delta_{b^0_i}.\nabla]$ l'opérateur de symbole $-\frac{1}{i}\partial_{\xi_j}(\tilde{b}^\delta(x,\xi).\xi)$.

On a donc

$$\begin{aligned}&\|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon}\\ &\leq C_n(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon})\left(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon} + T\sup_{[0,T]}\|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

On conclut en rappelant que $W(t)u_0$ est solution de (9.20) avec $f = 0$ et donc, pour $s \geq \frac{n}{2}+3+p+\varepsilon$, on a

$$\sup_{[0,T]} \|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p+\varepsilon} \leq A\|u_0\|_s.$$

On obtient, d'après (10.16), que que

$$\lambda^T_{4,k}(\Upsilon w) \leq A\|u_0\|_s + +TA\left(\sup_{x\in[-K_{n,u_0},K_{n,u_0}]} |\Theta(x)| + 4K_{n,u_0}\right) K_{n,u_0}. \tag{10.18}$$

Pour tout entier $k \leq p$, pour T assez petit, on obtient donc que

$$\lambda^T_{4,k}(\Upsilon w) \leq 10K_{n,u_0}.$$

En utilisant (10.18) dans (10.15), on obtient aussi que, pour R assez grand et T assez petit,

$$\lambda^T_3(\Upsilon w) \leq 10K_{n,u_0}.$$

Ce sont toutes ces estimations qui permettent de prouver que Υ admet un point fixe dans un espace normé complet bien construit pour obtenir le résultat donné par le théorème 7.2.

L'introduction d'un poids semble nécessaire car dans le cas où $\mathscr{L} = \Delta$, $b_2 = 0$ et T_{b_1} étant plus simplement la multiplication par b_1, l'équation (10.3) a été étudiée dans de nombreux travaux comme [73], [49] et une condition nécessaire portant sur le coefficient $b_1(x)$ a été démontrée :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\omega\in\mathbb{S}^{n-1},R>0} \left|\mathscr{I}\int_0^R b_1(x+r\omega).\omega\, dr\right| < \infty \tag{10.19}$$

On observe que dans le cas où b_1 est réelle, cette condition est vérifiée.
Dans le cas où $b_1 = u_0^2$ pour $u \in H^s$ et $s > \frac{n}{2}$, à l'aide du théorème de trace de Sobolev, la condition (10.19) est vérifiée mais dans le cas où $b_1 = \nabla_x u_0 \in H^s$, pour que cette condition soit vérifiée, il semble que l'on doive introduire un poids.

L'utilisation d'estimations d'energie dans des espaces de Sobolev à poids fait que l'on doit aussi estimer le reste de Bony dans ces espaces à poids.

On peut remarquer que la méthode de démonstration utilisée ne donne pas de meilleurs résultats si on a un opérateur elliptique.

11

Preuve du théorème 7.3 : Existence globale et effet régularisant pour des équations linéaires (ou plutôt «paralinéaires») de Schrödinger généralisées.

Dans cette section, nous traitons le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger généralisée linéaire définie ci-dessous.

On rappelle que Q_μ est le cube $\mu + [0,1]^n$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$. On note x_μ le sommet du cube Q_μ image de 0 par la translation de vecteur μ. La famille de cubes $\{Q_\mu\}_{\mu\in\mathbb{Z}^n}$ recouvre $\mathbb{R}^n$. On note Q_μ^* le cube de côté 2 obtenu par homothétie de centre le centre de Q_μ. On note $c_n = \langle d_n \rangle$ où d_n est la norme du vecteur $(1,1,1,...,1,1,1) \in \mathbb{R}^n$, longueur de la grande diagonale du cube Q_0 ainsi que des cubes Q_μ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$.

Théorème 11.1 *Etant donné un nombre réel s et un nombre réel $\delta \in [0,1[$, on considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^{\delta}_{b_1}.\nabla_x u + T^{\delta}_{b_2}.\nabla_x \bar{u} + C_1 u + C_2 \bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{11.1}$$

On suppose que C_1 et C_2 sont des opérateurs à symbole dans S^0_{1,δ_1} avec $0 \leq \delta_1 < 1$, et que

$$b_1, b_2 \in C^{\varrho}(\mathbb{R}^n),$$

avec $\varrho \geq 2$ et

$$(S.2) \begin{cases} b_k(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{k,\mu}\varphi_{k,\mu}(x), k = 1,2 \\ supp\varphi_{k,\mu} \subseteq Q^*_\mu, \|\varphi_{k,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1, \sum_\mu |\alpha_{k,\mu}| \leq A_k. \end{cases}$$

Pour tout nombre réel s et tout $T > 0$ tels que $\int_0^T \|f(t)\|_s\, dt < +\infty$ et $\mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f) < +\infty$, l'équation (11.1) admet une unique solution u dans $C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^n))$ telle qu'il existe un réel A tel que u vérifie (7.2), (7.3), (7.6), (7.7), (7.4) et (7.5) rappelées ci dessous.

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)), \tag{11.2}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{11.3}$$

avec

$$|||u|||_T = \sup_\mu \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^{-2} u\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et $I_T(f,u)$ est une somme de 3 termes de la forme $\int_0^T |\langle Gf, u\rangle| \, dt$ où $G \in OpS^0_{0,0}$ et $\|G\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}$ indépendante de T.

En particulier, on a

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_s \le A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)), \tag{11.4}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \le A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}}f)) \tag{11.5}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_s \le A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s \, dt\right), \tag{11.6}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \le A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s \, dt\right). \tag{11.7}$$

Remarques :

— Comme dans [31], le résultat ci-dessus est vrai avec la condition

$$|||J^{-\frac{1}{2}}f|||'_T = \sum_\mu \left(\int_0^T \int_{Q_\mu} |J^{-\frac{1}{2}}f|^2 \, dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \text{ au lieu de } \mathcal{N}_T(J^{-\frac{1}{2}}f) < +\infty,$$

cette dernière quantité pouvant être un intermédiaire de calcul. Pour éviter encore de multiples notations et détails techniques, nous ne travaillons qu'avec la norme $\mathcal{N}_T$. Nous n'avons pas trouvé d'estimation simple qui lie ces deux normes.

— La constante A utilisée ci-dessus est de la forme $c_1 \exp(c_2 T)$ avec c_1 et c_2 deux constantes strictement positives.

— Nous allons démontrer le théorème sur l'intervalle $[0,T]$, le cas $[-T,0]$ se traitant de façon analogue en remarquant $v(x,t) = u(x,-t)$ est solution d'une équation du même type que u.

— Nous allons aussi travailler avec $s = 0$ puisque le cas général peut être ramené à ce cas en appliquant J^s à (11.1). Plus précisément, on pose $v = J^s u$ et donc $v_0 = J^s u_0 \in L^2$ pour $u_0 \in H^s$. On obtient que v est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v = i\mathscr{L}v + T^\delta_{b_1}.\nabla_x v + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{v} + \widetilde{C}_1 v + \widetilde{C}_2 \bar{v} + \widetilde{f}(x,t) \\ v(x,0) = v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{11.8}$$

où

$$\widetilde{f} = J^s f$$

et

$$\widetilde{C}_k = J^s C_k J^{-s} + [J^s, T_{b_k}.\nabla_x] J^{-s},$$

$k = 1$ ou 2, qui sont des opérateurs à symboles dans $S^0_{1,\max(\delta_1,\delta)}$ car C_1 et $C_2 \in OpS^0_{1,\delta_1}$ avec $0 \le \delta_1 < 1$. Ce qui suffit pour obtenir le théorème 11.1.

—Dans la suite, A désigne une constante polynômiale en n, A_1, e^{A_1} et A_2.

Preuve du théorème 11.1.

La démonstration de ce théorème est assez longue.

Pour prouver ce théorème, on utilise les deux lemmes qui vont suivre, les lemmes 11.1 et 11.2 (effet régularisant prouvé dans le section V.).

Pour prouver ces lemmes, on régularise les coefficients b_1 et b_2 de manière classique comme indiqué dans le lemme 8.1, ce qui permet de travailler avec des opérateurs à symbole dans $S_{0,0}$ sans perte en régularité. Les restes obtenus s'estiment correctement car ils sont petits par passage à la limite. C'est le lemme 11.10 qui donne cette estimation sachant que pour prouver ce lemme on utilise l'estimation (8.3) donnée dans le lemme 8.1. On ne fait pas exactement un passage à la limite car sinon on ne peut obtenir l'existence un intervalle $[0, T_0]$ avec $T_0 > 0$ qui tend vers 0 si l'on passe à la limite et donc, avec la méthode utilisée, on ne peut étendre l'existence à tout intervalle $[0, T]$.

Pour démontrer les lemmes 11.1 et le lemme 11.2, on suppose donc que u désigne une solution de (11.1) si elle existe avec les coefficients b_1 et b_2 vérifiant les hypothèses supplémentaires ci-dessous :

$$\forall k \in \{1, 2\},\ b_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{11.9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} b_k(x) = \displaystyle\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,\mu}\varphi_{k,\mu}(x), k = 1, 2 \\ \|\varphi_{k,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1, \displaystyle\sum_{\mu} |\alpha_{k,\mu}| \leq A_k. \end{array}\right. \tag{11.10}$$

$$\forall M \in \mathbb{N}, \varphi_{k,\mu} \in C^M(\mathbb{R}^n) \text{ et } \forall M_0 \in \mathbb{N}, \sup_{\mu} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{k,\mu}\|_{C^M} \leq A_{n,M_0,M}. \tag{11.11}$$

Lemme 11.1

Il existe un opérateur $\mathbf{C}$ *inversible et borné dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, un réel* A *et trois entiers naturels* N*,* M *et* M_0 *tels que, pour tout* $T > 0$*,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{C}u(t)\|_0^2 \leq A\|\mathbf{C}u_0\|_0^2 + 2\int_0^T |\langle \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\, dt$$
$$+A\sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}^N \left(RT \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right).$$

Lemme 11.2

Il existe un réel A *et un opérateur* $\Psi \in OpS^0_{1,0}$ *tels que pour tout* $T > 0$*, on a*

$$|||J^{1/2}u|||_T^2 \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\, dt + (1 + T) \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_0^2\right),$$

l'estimation ci-dessus n'utilisant seulement que $\varrho \geq 2$*, (11.11) dans le cas* $M \leq 2$ *et pas (11.9).*

On a aussi, pour tout R *assez grand,*

$$|||J^{1/2}\mathbf{C}u|||_T^2 \leq A(\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\, dt + \sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{C}u\|_0^2)+$$
$$\sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}^N \left(\frac{A}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + ART \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_0^2\right).$$

Remarques :

—Les preuves des lemmes 11.1 et 11.2 suivent en partie les démonstrations faites dans [31] : Lemme 3.2, 3.3.

— C'est l'utilisation du lemme 11.2 dans le cas $\mathbf{C} = Id$ appliqué à une solution d'une équation dont les coefficient b_i ne vérifie pas (11.9) et (11.11) qui fait que l'on suppose $\varrho \geq 2$ pour pouvoir appliquer l'inégalité de Garding précisée pour un système (théorème 8.4). Une amélioration est sans doute possible en utilisant le théorème 8.5.

—Pour des raisons techniques, on précise la dépendance des coefficients par rapport aux normes $\sup_{\mu,i} \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}^N$, les entiers M_0 et M n'étant pas précisés mais suffisamment grands et ne dépendants que de n.
Cette dépendance n'est précisée que si la régularité M utilisée est strictement supérieure à ϱ.

— La preuve de l'effet régularisant (lemme 11.2) vérifié par u ne coûte seulement que 2 crans de régularité pour les coefficients b_1 et b_2. Ce qui coûte davantage en régularité pour obtenir l'effet régularisant vérifié par $\mathbf{C}u$ dans le cas où $\mathbf{C}$ est l'opérateur construit pour prouver le lemme 11.1, c'est l'utilisation de la continuité L^2 de $\mathbf{C}$.

— À l'intérieur de ces preuves s'intercalent de nombreux lemmes ainsi que leur démonstration. Celle du lemme 11.1 nécessite notamment les lemmes 11.5 et 11.6, et, celle du lemme 11.2 utilise le lemme de Doi (voir [16]).

— Pour la preuve du lemme 11.2, on renvoie à la section V.

Preuve du lemme 11.1.

Soit $\mathbf{C}$ un opérateur à symbole réel dans la classe $S^0_{0,0}$ tel que $\mathbf{C}$ soit borné dans L^2 et inversible pour que des estimations de $\sup\limits_{[0,T]} \|\mathbf{C}u\|_0^2$ en donnent pour $\sup\limits_{[0,T]} \|u\|_0^2$.

On a

$$\partial_t\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle = \langle \mathbf{C}\partial_t u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}\partial_t u\rangle, \tag{11.12}$$

or

$$\langle i\mathscr{L}\mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, i\mathscr{L}\mathbf{C}u\rangle = 0, \tag{11.13}$$

on obtient donc que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle &= 2\mathscr{R}\langle [\mathbf{C}i\mathscr{L} - i\mathscr{L}\mathbf{C}]\, u, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{b_1}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle +\\ &2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}.\nabla \bar{u}, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}f\rangle + 2\mathscr{R}\left(\langle \mathbf{C}C_1 u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}C_2\overline{u}, \mathbf{C}u\rangle\right).\end{aligned}$$

On écrit alors que

$$2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{b_1}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle = 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle &= 2\mathscr{R}\langle [\mathbf{C}i\mathscr{L} - i\mathscr{L}\mathbf{C}]\, u, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle\\ &+2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}.\nabla \bar{u}, \mathbf{C}u\rangle + 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}f\rangle + 2\mathscr{R}\left(\langle \mathbf{C}C_1 u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}C_2\overline{u}, \mathbf{C}u\rangle\right).\end{aligned}$$

Par construction de $\mathbf{C}$ (plus de détails seront donnés dans les sections suivantes, en particulier, voir les lemmes 11.5, 11.7), pour tout $T > 0$, on a les deux inégalités suivantes :

$$\int_0^T \left|2\mathscr{R}\left(\langle \mathbf{C}C_1 u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}C_2\overline{u}, \mathbf{C}u\rangle\right)\right| dt \leq A \sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M} \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

$$\int_0^T |\langle \mathbf{C}T^\delta_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle|\, dt \leq \sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^3_{C^M}\left(\frac{A}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2 + AT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right).$$

En intégrant sur $[0, T_0]$, pour tout $T_0 \in [0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathbf{C}u(T_0)\|_2^2 &\leq \|\mathbf{C}u_0\|_0^2 + \left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0}\langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}.\nabla\bar{u}, \mathbf{C}u\rangle\, dt\right| + \left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0}\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}f\rangle\, dt\right|\\ &+\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^3_{C^M}\left(\frac{A}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2 + AT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right) +\\ &\left|2\mathscr{R}\int_0^{T_0}\langle i\,[\mathbf{C}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathbf{C}]\, u, \mathbf{C}u\rangle\, dt + 2\mathscr{R}\int_0^{T_0}\langle \mathbf{C}T^\delta_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle\, dt\right|.\end{aligned} \tag{11.14}$$

Dans la suite, nous allons construire **C** pour rendre le terme

$$\left| 2\mathscr{R} \int_0^T \langle i \left[\mathbf{C}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathbf{C} \right] u, \mathbf{C}u \rangle \, dt + 2\mathscr{R} \int_0^T \langle \mathbf{C} T^{\delta}_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u \rangle \, dt \right|$$

suffisamment petit dans un sens que l'on précisera ultérieurement.

On note $\mathbf{c}(x,\xi)$ le symbole de **C**. Par construction de **C**, on a

$$\mathbf{c}(x,\xi) \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathscr{R}(\langle \mathbf{C} T^{\delta}_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u \rangle) = \langle (-\mathbf{c}(x,\xi)\mathscr{I}(\tilde{b}_1^{\delta}(x,\xi)).\xi)(x,D)u, \mathbf{C}u \rangle + \mathscr{R}(\langle E_{2,R} u, \mathbf{C}u \rangle$$

avec

$$E_{2,R} = \mathbf{C} T^{\delta}_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla - (\mathbf{c}(x,\xi) i \mathscr{I}(\tilde{b}_1^{\delta}(x,\xi)).i\xi)(x,D).$$

<u>Construction de C :</u>

On rappelle que

$$\mathscr{L} = \sum_{j \leq k} \partial_{x_j} - \sum_{j > k} \partial_{x_j}$$

et on pose

$$\tilde{\xi} = (-\xi_1, .., -\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$$

et, on note $\mathbf{c}(x,\xi)$ le symbole de **C**.

Nous allons construire **C** à symbole

$$\mathbf{c}(x,\xi) \in S^0_{0,0}.$$

On a

$$i \left[\mathbf{C}\mathscr{L} - \mathscr{L}\mathbf{C} \right] = -2 \left(\tilde{\xi}.\nabla_x \mathbf{c}(x,\xi) \right) (x,D) + E$$

où

$$E = \mathscr{L}\mathbf{c}(x,D) \in OpS^0_{0,0}$$

avec, par construction de **C** (voir lemme 11.5), pour M assez grand,

$$\|Eu\|_0 \leq A \sup_{\mu} \|\langle x - x_\mu \rangle^{M_0} \varphi_{1,\mu}\|_{C^M} \|u\|_0.$$

Le but est de rendre

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x \mathbf{c}(x,\xi) - \mathbf{c}(x,\xi)\mathscr{I}(\tilde{b}_1^{\delta}(x,\xi)).\xi$$

aussi petit que possible.

On pose $\mathbf{c}(x,\xi) = \mathbf{c}_R(x,\xi)$ avec $R > 1$.
On souhaite aussi que **C** soit inversible sur L^2.
On pose

$$\mathbf{c}_R(x,\xi) = \exp\left(\gamma_R(x,\xi)\right) \text{ et } \gamma_R(x,\xi) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{1,\mu} \gamma_{R,\mu}(x,\xi)$$

avec

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{1,\mu}| \leq A_1$$

où les $\alpha_{1,\mu}$ sont les coefficients donnés dans l'hypothèse du théorème 11.1 de décomposition de b_1 suivant les cubes Q_μ. On a alors que

$$\nabla_x \mathbf{c}_R(x,\xi) = \nabla_x \gamma_R(x,\xi)\exp\left(\gamma_R(x,\xi)\right) = \nabla_x\gamma_R(x,\xi)\mathbf{c}_R(x,\xi)$$

$$\begin{aligned}-2\tilde{\xi}.\nabla_x \mathbf{c}(x,\xi) - \mathbf{c}(x,\xi)\mathscr{I}(\tilde{b}_1^\delta(x,\xi)).\xi &= \mathbf{c}_R(x,\xi)(-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma_R(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{b}_1^\delta(x,\xi)).\xi)\\ &= \mathbf{c}_R(x,\xi)\sum_\mu \alpha_{1,\mu}\left(-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma_{R,\mu}(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta(x,\xi)).\xi\right)\end{aligned}$$

où, par définition, on a

$$\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta(x,\xi) = (1-\psi_1(|\xi|))|\xi|^{\delta n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta(x-y))\varphi_{1,\mu}(y)\,dy.$$

<u>Construisons alors $\gamma_{R,\mu}$.</u>

Considérons tout d'abord la fonction

$$\eta_\mu(x,\xi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathscr{I}(\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta(x+s\tilde{\xi},\xi)).\xi\,ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathscr{I}\left(\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta\left(x+s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|},\xi\right)\right).\frac{\xi}{|\xi|}\,ds.$$

Lemme 11.3 *On rappelle que x_μ est un des coins de Q_μ. On a $\eta_\mu \in C^\infty$ et, pour tous multi-indices α et β,*

$$\left|\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha\eta_\mu(x,\xi)\right| \leq A_{\alpha,\beta,n}\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+2}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}} \tag{11.15}$$

où $A_{\alpha,\beta,n}$ est une constante qui ne dépend que de n, α, β, et δ.

De plus, on a

$$2\tilde{\xi}.\nabla_x\eta_\mu(x,\xi) = -\mathscr{I}(\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta(x,\xi)).\xi. \tag{11.16}$$

Preuve. On a

$$\eta_\mu(x,\xi) = \frac{(1-\psi_1(|\xi|))|\xi|^{\delta n}}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)\mathscr{I}\left(\varphi_{1,\mu}\left(x+s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|}-y\right)\right).\frac{\xi}{|\xi|}\,dsdy.$$

Pour tous multi-indices α et β, on a

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\eta_\mu(x,\xi) = \sum_{\beta_1\leq\beta}A_{\beta_1,\beta}\partial_\xi^{\beta-\beta_1}\left(\frac{1-\psi_1(|\xi|)}{2}\right)\times\\ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^{\beta_1}\left(\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)\mathscr{I}\left(\partial_x^\alpha\varphi_{1,\mu}\left(x+s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|}-y\right)\right).\frac{\xi|\xi|^{\delta n}}{|\xi|}\right)dsdy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\eta_\mu(x,\xi) = \sum_{\beta_1\leq\beta}A_{\beta_1,\beta}\partial_\xi^{\beta-\beta_1}\left(\frac{1-\psi_1(|\xi|)}{2}\right)\sum_{\beta_2\leq\beta_1}A_{\beta_2,\beta_1}\times\\ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^{\beta_1-\beta_2}\left(\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)\right)\partial_\xi^{\beta_2}\left(\mathscr{I}\left(\partial_x^\alpha\varphi_{1,\mu}\left(x+s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|}-y\right)\right).\frac{\xi|\xi|^{\delta n}}{|\xi|}\right)dsdy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\eta_\mu(x,\xi) = \sum_{\beta_1\leq\beta}A_{\beta_1,\beta}\partial_\xi^{\beta-\beta_1}\left(\frac{1-\psi_1(|\xi|)}{2}\right)\sum_{\beta_2\leq\beta_1}A_{\beta_2,\beta_1}\sum_{\beta_3\leq\beta_2}A_{\beta_3,\beta_2}\times\sum_{j=1}^n\\ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^{\beta_1-\beta_2}\left(\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)\right)\partial_\xi^{\beta_3}\left(\mathscr{I}\left(\partial_x^\alpha\varphi_{1,\mu,j}\left(x+s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|}-y\right)\right)\right)\partial_\xi^{\beta_2-\beta_3}\left(\frac{\xi_j|\xi|^{\delta n}}{|\xi|}\right)dsdy.\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\langle s \rangle \leq \langle x_{\mu_k} - x_k \rangle \langle y_k \rangle \langle x_{\mu_k} - x_k + s\frac{\tilde{\xi}_k}{|\xi|} - y_k \rangle.$$

et

$$1 = \frac{\left\langle x_{\mu_k} - x_k + s\frac{\tilde{\xi}_k}{|\xi|} - y_k \right\rangle^2}{\left\langle x_{\mu_k} - x_k + s\frac{\tilde{\xi}_k}{|\xi|} - y_k \right\rangle^2}.$$

De plus, dans le cas $\beta_1 \neq \beta_2$ et $\beta_3 \neq 0$, d'après la formule de Faa di Bruno, pour $\gamma = \beta_1 - \beta_2$, on a

$$\partial_\xi^\gamma(\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n \\ |\nu| = q \leq |\gamma|}} \sum_{\substack{\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_q \\ \gamma_i \neq 0 \\ \gamma_i \in \mathbb{N}^n}} \partial^\nu \hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y) \partial_\xi^{\gamma_1}(|\xi|^\delta)...\partial_\xi^{\gamma_q}(|\xi|^\delta) y^\nu.$$

Sachant que sur le support de $1 - \psi$, on a $|\xi| \geq 1$. En posant

$$\chi_2(\xi, y) = \partial_\xi^{\beta_1 - \beta_2}(\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)),$$

on obtient donc que

$$|\chi_2(\xi, y)| \leq A_{\beta_1, \beta_2} \sum_{\nu \leq \beta_1 - \beta_2} |\partial^\nu \hat{\chi}_1(|\xi|^\delta y)| |\xi|^{\delta|\nu| - |\beta_1| + |\beta_2|} |y|^{|\nu|} \tag{11.17}$$

et

$$\partial_\xi^{\beta_3}\left(\mathscr{I}\left(\partial_x^\alpha \varphi_{1,\mu,j}\left(x + s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|} - y\right)\right)\right) =$$

$$\sum_{\substack{\nu_1 \in \mathbb{N}^n \\ |\nu_1| = q_1 \leq |\beta_3|}} \sum_{\substack{\beta_3 = \tilde{\beta}_1 + ... + \tilde{\beta}_{q_1} \\ \tilde{\beta}_i \neq 0 \\ \beta_i \in \mathbb{N}^n}} \mathscr{I}\left(\partial^{\nu_1 + \alpha} \varphi_{1,\mu,j}\left(x + s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|} - y\right)\right) s^{q_1} \prod_{k=1}^{q_1} \partial_\xi^{\tilde{\beta}_k}\left(\frac{\xi_{i_k}}{|\xi|}\right)$$

avec

$$\prod_k \xi_{i_k} = \xi^{\nu_1}.$$

On en déduit donc que

$$\left|\partial_\xi^{\beta_3}\left(\mathscr{I}\left(\partial_x^\alpha \varphi_{1,\mu,j}\left(x + s\frac{\tilde{\xi}}{|\xi|} - y\right)\right)\right)\right| \leq \sum_{\nu_1 \leq \beta_3} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\nu_1 + \alpha} \varphi_{1,\mu,j}| s^{|\beta_3|} |\xi|^{-|\beta_3|}.$$

De plus, on a

$$|\partial_\xi^{\beta_2 - \beta_3}\left(\frac{\xi_k |\xi|^{\delta n}}{|\xi|}\right)| \leq A|\xi|^{\delta n - |\beta_2| + |\beta_3|}.$$

Ce qui permet d'obtenir que pour tous multi-indices α et β, on a

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \eta_\mu(x, \xi)| \leq A \langle x - x_\mu \rangle^{|\beta|} |\xi|^{-|\beta|} \| \langle x - x_\mu \rangle^{|\beta| + 2} \varphi_{1,\mu} \|_{C^{|\alpha| + |\beta|}} \sum_{\beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta}$$

$$\left|\partial_\xi^{\beta - \beta_1}\left(\frac{1 - \psi_1(|\xi|)}{2}\right)\right| \times$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{\left\langle x_{\mu_k} - x_k + s\frac{\tilde{\xi}_k}{|\xi|} - y_k \right\rangle^2} ds \;\; \langle y \rangle^{|\beta_3|} |\xi|^{n\delta} (|\xi|^\delta y)^{\beta_1 - \beta_2} |\chi_2(\xi, y)| \, dy.$$

On pose alors $k = k_\xi$ tel que

$$|\xi_{k_\xi}| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |\xi_k|.$$

Sachant que, sur le support de $1 - \psi_1$, on a $|\xi| \geq 1$ donc, on a nécessairement

$$|\xi_{k_\xi}| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De plus,

$$|\xi| \leq \sqrt{n}|\xi_{k_\xi}|.$$

On obtient donc que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \eta_\mu(x,\xi)| \leq A\langle x - x_\mu\rangle^{|\beta|}|\xi|^{-|\beta|}\|\langle x - x_\mu\rangle^{|\beta|+2}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}} \sum_{\beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{|\xi|}{\tilde{\xi}_{k_\xi}} \arctan\left(x_{\mu_{k_\xi}} - x_{k_\xi} + s\frac{\tilde{\xi}_{k_\xi}}{|\xi|} - y_{k_\xi}\right)\right]_0^\infty \langle y\rangle^{|\beta|}|\xi|^{n\delta}(|\xi|^\delta y)^{\beta_1-\beta_2}|\chi_2(\xi,y)|\,dy.$$

Dans le cas $\tilde{\xi}_{k_\xi} < 0$, on a

$$\left[\frac{|\xi|}{\tilde{\xi}_{k_\xi}} \arctan\left(x_{\mu_{k_\xi}} - x_{k_\xi} + s\frac{\tilde{\xi}_{k_\xi}}{|\xi|} - y_{k_\xi}\right)\right]_0^\infty = -\frac{\pi}{2}\frac{|\xi|}{\tilde{\xi}_{k_\xi}} - \frac{|\xi|}{\tilde{\xi}_{k_\xi}} \arctan\left(x_{\mu_{k_\xi}} - x_{k_\xi} - y_{k_\xi}\right)$$

$$\left[\frac{|\xi|}{\tilde{\xi}_{k_\xi}} \arctan\left(x_{\mu_{k_\xi}} - x_{k_\xi} + s\frac{\tilde{\xi}_{k_\xi}}{|\xi|} - y_{k_\xi}\right)\right]_0^\infty \leq \frac{2\pi}{2}\frac{|\xi|}{|\tilde{\xi}_{k_\xi}|} \leq \pi\sqrt{n}$$

On a la même estimation dans le cas $\tilde{\xi}_{k_\xi} > 0$. Or

$$\langle y\rangle^{|\beta|} \leq A(1 + |y|^{|\beta|}),$$

on obtient donc que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \eta_\mu(x,\xi)| \leq A\pi\sqrt{n}\langle x - x_\mu\rangle^{|\beta|}|\xi|^{-|\beta|}\|\langle x - x_\mu\rangle^{|\beta|+2}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}} \sum_{\beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{-\delta|\beta|}||\xi|^\delta y|^{|\beta|})|\xi|^{n\delta}(|\xi|^\delta y)^{\beta_1-\beta_2}|\chi_2(\xi,y)|\,dy.$$

La fonction $\hat{\chi}_1$ (Voir χ_2 définie avant (11.17)) étant dans l'espace de Schwartz, on obtient l'estimation annoncée dans le cas $\beta_1 \neq \beta_2$ et $\beta_3 \neq 0$.

Le cas $\beta_1 = \beta_2$ ou $\beta_3 = 0$ se traite avec le même type d'arguments ou plus simplement.

Démontrons ensuite l'égalité (11.16).

Par définition de η_μ, on a

$$2\tilde{\xi}.\nabla_x\eta_\mu(x,\xi) = -\int_0^{+\infty} \sum_{j \in [\![1,n]\!]} \xi_j\tilde{\xi}.\nabla_x(\mathscr{I}(\tilde{\varphi}_{1,\mu,j}^\delta(x + s\tilde{\xi},\xi)))\,ds,$$

or

$$\nabla_x(\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}^\delta(x + s\tilde{\xi},\xi)) = (\nabla_x\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}^\delta)(x + s\tilde{\xi},\xi),$$
$$(\nabla_x\tilde{\varphi}_{1,\mu,,k}^\delta)(x + s\tilde{\xi},\xi).\tilde{\xi} = \frac{d}{ds}(\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}^\delta(x + s\tilde{\xi},\xi))$$

et

$$|\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu,j}(x+s\tilde{\xi},\xi)| \leq \frac{A}{\langle x-x_\mu+s\tilde{\xi}\rangle}$$

car

$$\langle x-x_\mu\rangle^N|\varphi_{1,\mu,j}(x)| \leq A_N\langle d_n\rangle^N.$$

On obtient donc l'égalité donnée dans le lemme 11.3. □

On définit alors

$$v_\mu(x,\xi) = \frac{\eta_\mu(x,\xi)+\eta_\mu(x,-\xi)}{2}.$$

La fonction v_μ est paire en ξ et vérifie le lemme 11.3. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = 0$ si $|x| > 1$ et $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$. Définissons ensuite

$$\gamma_{R,\mu}(x,\xi) = \theta_1\left(\frac{\xi}{R}\right)\psi\left(R\frac{\langle x-x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)v_\mu(x,\xi),$$

où R est un réel dans $[1,+\infty[$, fixé très grand.

Les preuves des quatre lemmes 11.4, 11.5, 11.6 et 11.7 qui suivent sont données juste après que ces lemmes aient été énoncés.

Lemme 11.4

(a) Le symbole $\gamma_{R,\mu}(x,\xi)$ *est pair en* ξ et réel.
(b) On a

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\gamma_{R,\mu}(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+2}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}}.$$

Ici, comme dans la suite, une constante notée $A_{\alpha,\beta}$ *est une constante qui ne dépend que de* n*, de* α *et* β*.*
(c) On a

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma_{R,\mu}(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu}(x,\xi)).\xi = e_{R,\mu}(x,\xi)$$

où $\quad e_{R,\mu}(x,D)\in OpS^0_{0,0}$ avec $\|e_{R,\mu}(x,D)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq AR\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}.$
(d) On a

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_{\xi_k}\gamma_{R,\mu}(x,\xi)| \leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{R}\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+3}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|+1}},\quad 1\leq k\leq n.$$

Définissons maintenant $\sigma(\mathbf{C})$, le symbole de $\mathbf{C}$. On pose

$$\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{c}(x,\xi) = \mathbf{c}_R(x,\xi) = \exp(\gamma_R(x,\xi))\ \text{ avec } \gamma_R(x,\xi) = \sum_\mu\alpha_{1,\mu}\gamma_{R,\mu}(x,\xi).$$

où les $\alpha_{1,\mu}$ désignent les coefficients de la décomposition de b_1 suivant les cubes Q_μ (hypothèse (S.2), théorème 7.3).

Lemme 11.5

(i) Le symbole $\mathbf{c}_R(x,\xi)$ *est pair en* ξ et réel.
(ii) On a

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\mathbf{c}(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+2}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|}}.$$

(iii) On a

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\xi\mathbf{c}(x,\xi)| \leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{R}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+3}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|+1}}.$$

(iv) Pour $i=1$ *ou* $i=2$*, tout* $\varrho>1$*, tout* $T>0$ *et tout* $R\geq 1$*, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^T &|\langle[\mathbf{C},T^\delta_{b_i}.\nabla]u,\tilde{C}u\rangle|\,dt\\ &\leq A\max\left(\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M},\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^2_{C^M}\right)\\ &\qquad\times\left(RT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2+\frac{1}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2\right),\end{aligned}$$

et, pour tout $\varphi\in C^M(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi\|_{C^M}<+\infty$*, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^T &|\langle[\mathbf{C},T^\delta_{\varphi}.\nabla]u,\tilde{C}u\rangle|\,dt\\ &\leq A\max\left(\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^2_{C^M},\sup_{\mu,i}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M}\right)\\ &\qquad\times\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi\|_{C^M}\left(RT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2+\frac{1}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2\right)\end{aligned}$$

où N *et* M *sont fixés assez grands ne dépendant que* n, $\tilde{C}=Id$ *ou* $\tilde{C}=\mathbf{C}$.
(v) On a

$$i\,[\mathbf{C},\mathscr{L}]+\mathbf{C}T^\delta_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla_x=E_{1,R}+E_{2,R}+E$$

où

$$E_{1,R}\in OpS^0_{0,0}$$

est borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ *avec*

$$\|E_{1,R}\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leq AR\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}$$

et

$$E\in OpS^0_{0,0}$$

borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ *avec*

$$\|E\|_{\mathscr{L}(L^2)}\leq A\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}.$$

De plus, pour tout $T_0\in[0,T]$*, on a*

$$\left|\int_0^{T_0}\langle E_{2,R}u,\mathbf{C}u\rangle dt\right|\leq A\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M}\left(RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_0^2+\frac{1}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2\right),$$

$$\left|\int_0^{T_0}\langle E_{2,R}u,u\rangle dt\right|\leq A\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}\left(RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_0^2+\frac{1}{R}|||J^{\frac12}u|||_T^2\right),$$

(vi) On a

$$\|u\|_0 \le A \sup_{\mu} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0} \varphi_{1,\mu}\|_{C^M} \|\mathbf{C}u\|_0 + \frac{A \sup_\mu \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M}}{R}\|u\|_0.$$

Revenons à la preuve du lemme 11.1 et estimons $2\mathscr{R}\int_0^T \langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}\nabla\bar{u}, \mathbf{C}u\rangle\, dt$, il suffit pour cela d'estimer $|\int_0^T \langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}\nabla\bar{u}, \mathbf{C}u\rangle\, dt|$.

Lemme 11.6

Soit **C** *comme dans le lemme 11.5. On a*

$$\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}T^\delta_{b_2}\nabla\bar{u}, \mathbf{C}u\rangle dt\right| \le A \sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M}\left(RT \sup_{0\le t\le T}\|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T\right).$$

Lemme 11.7

Soit **C** *comme dans le lemme 11.5. On a*

$$\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}T^\delta_{\mathscr{R}(b_1)}\nabla u, \mathbf{C}u\rangle dt\right| \le A \sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M}\left(RT \sup_{0\le t\le T}\|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T\right).$$

Preuve du lemme 11.4

La proposition *(a)* est évidente. Vérifions la proposition *(b)*.

Lemme 11.8 *Pour tout multi-indices α et β, il existe $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$ et tout $R \in [1, +\infty[$,*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\tfrac{R\langle x - x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle})| \le A_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}.$$

Preuve : voir section V.

Revenons à la preuve du lemme 11.4. Les fonctions θ_1, $\tilde{\varphi}_{1,\mu}$ et ψ sont C^∞ donc $\gamma_{R,\mu}$ est C^∞. De plus, pour tout multi-indice α, on a

$$\partial_x^\alpha \gamma_{R,\mu}(x,\xi) = \theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\sum_{|\gamma|\le|\alpha|} A_{\gamma,\alpha}\partial_x^\gamma\left(\psi\left(\frac{R\langle x - x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)\right)\partial_x^{\alpha-\gamma}v_\mu(x,\xi)$$

et, pour tout multi-indice β, on a donc

$$\begin{aligned}&\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha\gamma_{R,\mu}(x,\xi)\\ &\quad= \sum_{|\gamma_1|\le|\beta|,|\gamma|\le|\alpha|} A_{\gamma,\alpha,\gamma_1,\beta}\partial_\xi^{\gamma_1}\left(\theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\right)\partial_x^\gamma\left(\psi\left(\frac{R\langle x - x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)\right)\partial_\xi^{\beta-\gamma_1}\partial_x^{\alpha-\gamma}v_\mu(x,\xi).\end{aligned}$$

Or, $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction plateau telle que $\theta_1(x) = 0$ si $|x| \le 1$ et $\theta_1(x) = 1$ si $|x| \ge 2$ donc on a $\theta_1(\frac{|\xi|}{R}) \in S^0_{1,0}$ avec, sur le support de θ_1', $|\xi| \sim R$.

En utilisant les estimations obtenues sur η_μ (lemme 11.3), sachant que sur le support ψ,

$$\langle x - x_\mu\rangle^{|\beta-\gamma_1|} \le \left(\frac{\langle\xi\rangle}{R}\right)^{|\beta-\gamma_1|},$$

on en déduit donc que, pour $|\xi| \geq 1$,

$$|\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \gamma_{R,\mu}(x,\xi)| \leq A \sup_{|\gamma_1|} \langle \xi \rangle^{-|\gamma_1|} \langle \xi \rangle^{-|\beta-\gamma_1|} \left(\frac{\langle \xi \rangle}{R} \right)^{|\beta-\gamma_1|} \| \langle x - x_\mu \rangle^{|\beta-\gamma_1|+2} \varphi_{1,\mu} \|_{C^{|\beta-\gamma_1|+|\alpha-\gamma|}},$$

$$\text{soit } |\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \gamma_{R,\mu}(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta} \| \langle x - x_\mu \rangle^{|\beta|+2} \varphi_{1,\mu} \|_{C^{|\beta|+|\alpha|}}.$$

Ce qui prouve la proposition *(b)*.

Prouvons alors la proposition *(d)* dans le cas $\alpha = \beta = 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_k} \gamma_{R,\mu}(x,\xi) &= \frac{1}{R} \frac{\xi_k}{|\xi|} \theta_1' \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \psi \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) v_\mu(x,\xi) \\ &+ \theta_1 \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \partial_{\xi_k} \left(\psi \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) v_\mu(x,\xi) + \theta_1 \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \psi \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \partial_{\xi_k} v_\mu(x,\xi) \end{aligned}$$

La proposition *(d)* s'obtient en remarquant que, sur le support de θ_1 ,

$$|\xi|^{-1} \leq \frac{1}{R},$$

que d'après le lemme 11.8,

$$\partial_{\xi_k} \left(\psi \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) \in S^{-1}_{1,0}$$

avec ses semi-normes uniformément bornées en R, sachant que sur le support de $\psi(\frac{R\langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle})$ et de ses dérivées, on a

$$\langle x - x_\mu \rangle \leq 2 \frac{\langle \xi \rangle}{R},$$

et donc

$$\partial_{\xi_k} v_\mu(x,\xi) \in S^0_{1,0}.$$

Le cas α et β quelconque s'obtient avec les mêmes arguments en utilisant, en plus, la formule de Faa-di-Bruno par exemple.

Prouvons ensuite la proposition *(c)*. On a

$$\begin{aligned} -2\tilde{\xi}.\nabla_x \gamma_{R,\mu}(x,\xi) = -2 \frac{R \tilde{\xi}.\nabla_x(\langle x - x_\mu \rangle)}{\langle \xi \rangle} \psi' \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \theta_1 \left(\frac{|\xi|}{R} \right) v_\mu(x,\xi) \\ -2\psi \left(\frac{R \langle x - x_\mu \rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \theta_1 \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \tilde{\xi}.\nabla_x v_\mu(x,\xi). \end{aligned}$$

Or,

$$\nabla_x v_\mu(x,\xi) = \frac{\nabla_x \eta_\mu(x,\xi) + \nabla_x \eta_\mu(x,-\xi)}{2},$$

en utilisant l'égalité donnée dans le lemme 11.3, vérifiée par η_μ on a

$$2\tilde{\xi}.\nabla_x \eta_\mu(x,\xi) = -\mathscr{I}(\varphi_{1,\mu}(x,\xi)).\xi$$

et donc

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x v_\mu(x,\xi) = \frac{\mathscr{I}(\varphi_{1,\mu}(x,\xi)).\xi + \mathscr{I}(\varphi_{1,\mu}(x,-\xi)).\xi}{2}.$$

Sachant que $\varphi_{1,\mu}$ est paire en ξ, on obtient enfin que

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x v_\mu(x,\xi) = 2\mathscr{I}(\varphi_{1,\mu}(x,\xi).\xi$$

et donc que

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x \gamma_{R,\mu}(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu}(x,\xi)).\xi = e_{R,\mu}(x,\xi)$$

avec

$$\begin{aligned} e_{R,\mu}(x,\xi) = -2\frac{R\tilde{\xi}.\nabla_x\left(\langle x-x_\mu\rangle\right)}{\langle \xi\rangle}\psi'\left(\frac{R\langle x-x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)v_\mu(x,\xi) \\ +\left(\psi\left(\frac{R\langle x-x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)-1\right)\theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\mathscr{I}\left(\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu}(x,\xi)\right).\xi \\ +\left(\theta_1\left(\frac{|\xi|}{R}\right)-1\right)\mathscr{I}(\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu}(x,\xi)).\xi. \end{aligned}$$

Pour obtenir la proposition *(c)*, on peut remarquer que le premier terme est dans $S^0_{0,0}$ et que les deux derniers sont dans $S^{-\infty}$.
Pour prouver cela, on utilise le support de $1-\psi$,

$$1 \le \frac{R\langle x-x_\mu\rangle}{\langle\xi\rangle}$$

et que, pour $|\alpha|+|\beta|\neq 0$,

$$\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi(1-\psi) = -\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi\psi,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 11.8 dans ce cas, sachant que, d'après le lemme 4.3 , $\tilde{\varphi}_{1,\mu}$ absorbe les puissances de $\langle x-x_\mu\rangle$.
Pour le troisième terme, on utilise le support de $1-\theta_1$.

Preuve du lemme 11.5

Les propositions *(i)*, *(ii)*, *(iii)* découlent directement des propriétés de $\gamma_{R,\mu}$.

Pour démontrer *(vi)*, on pose

$$s_R(x,\xi) = exp(-\gamma_R(x,\xi)).$$

On observe que les propriétés *(i)*, *(ii)*, *(iii)* sont encore vraies pour $s_R(x,\xi)$.
D'après le théorème 3.1, on a

$$\mathbf{C}(x,D)S(x,D) = I+L_1,\quad S(x,D)\mathbf{C}(x,D) = I+L_2$$

avec $L_1, L_2 \in \mathrm{Op}S^0_{0,0}$ et, d'aprés la proposition *(d)* du lemme 11.4, on a

$$\|L_i\|_{\mathscr{L}(L^2)} \le \frac{A\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}}{R}.$$

Pour prouver *(v)*, l'opérateur $\mathscr{L}$ étant différentiel, par intégrations par parties, on a

$$i\left[\mathbf{C}\mathscr{L}-\mathscr{L}\mathbf{C}\right] = -2\left(\tilde{\xi}.\nabla_x\mathbf{c}\right)(x,D)+E$$

où E a son symbole $\mathscr{L}_x\mathbf{c}(x,\xi)$ dans $S^0_{0,0}$ avec ses semi-normes majorées par

$$A\sup_\mu\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}.$$

De plus, on a

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x\mathbf{c}(x,\xi) = \mathbf{c}(x,\xi)(\mathscr{I}(\tilde{b}^\delta_1(x,\xi)).\xi + e_{1,R}(x,\xi)))$$

où
$$e_{1,R}(x,\xi) = \sum_{\mu} \alpha_{1,\mu} e_{R,\mu}(x,\xi)$$
avec $e_{R,\mu}(x,\xi)$ défini dans la preuve du lemme 11.4.
Posons
$$E_{1,R} = (\mathbf{c}e_{1,R})(x,D).$$

D'après *(ii)*, $\mathbf{c} \in S^0_{0,0}$ avec ses semi-normes bornées par $A\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}$, et $e_{1,R}$ par $AR\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}$, donc, d'après le théorème 3.1 et le théorème de Calderón-Vaillancourt, pour M assez grand, on a
$$\|E_{1,R}\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq AR\sup_{\mu} \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M}.$$

On pose
$$E_{2,R} = \mathbf{C}T^{\delta}_{b_1}.\nabla_x - (\mathbf{c}(x,\xi)i\tilde{b}^{\delta}_1(x,\xi).\xi)(x,D).$$
En notant $e_{2,R}$ le symbole de $E_{2,R}$, on a
$$e_{2,R}(x,\xi) = \sum_{\mu} \alpha_{1,\mu} e_{2,\mu}(x,\xi)$$
avec
$$e_{2,\mu}(x,\xi) = -\sum_{|\gamma|=1} \int_0^1 \int e^{iy.\eta}\partial^\gamma_\xi \mathbf{c}(x,\xi+\theta\eta)\partial^\gamma_x \tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu}(x+y,\xi).\xi \, dyd\eta d\theta.$$

Lemme 11.9 *Le symbole $e_{2,\mu}(x,\xi) \in S^1_{0,0}$ avec, pour tout multi-indice α et tout multi-indice β,*
$$\left|\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi e_{2,\mu}(x,\xi)\right| \leq \frac{A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+3}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^{|\alpha|+|\beta|+1}}}{R}$$
où $A_{\alpha,\beta}$ est une constante indépendante de μ.
De plus, $e_{2,\mu}$ absorbe les puissances de $\langle x-x_\mu\rangle$.

Preuve : On utilise le lemme 3.1, sachant que d'après la proposition *(iii)* du lemme 11.5, on a
$$\partial_\xi \mathbf{c} \in S^0_{0,0}$$
avec ses semi-normes majorées par
$$\frac{A_{\alpha,\beta}}{R}\sup_{\mu} \|\langle x-x_\mu\rangle^{|\beta|+3}\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+|\beta|+1}}.$$
De plus, d'après les hypothèses supplémentaires (11.9), (11.10) et (11.11) et le lemme 4.3, on a
$$\partial_x\tilde{\varphi}^{\delta}_{1,\mu} \in S^0_{1,0} \subset S^0_{0,0}$$
avec ses semi-normes majorées par
$$A_{\alpha,\beta}\sup_{\mu} \|\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+1}}.$$
On démontre aussi que, pour tout entier naturel N,
$$\langle x-x_\mu\rangle^N e_{2,\mu} \in S^1_{0,0}$$

avec ses semi-normes majorées par

$$\frac{A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{N+|\beta|+3}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^{|\alpha|+|\beta|+1}}}{R}.$$

Ce dernier résultat s'obtient en remarquant que

$$\langle x-x_\mu\rangle^N e_{2,\mu}(x,\xi) = -\sum_{|\gamma|=1}\int_0^1\int e^{iy.\eta}\partial_\xi^\gamma \mathbf{c}(x,\xi+\theta\eta)\langle x-x_\mu\rangle^N\partial_x^\gamma\tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu}(x+y,\xi).\xi\, dyd\eta d\theta,$$

que

$$\langle x-x_\mu\rangle^N = \left(\frac{\langle x-x_\mu\rangle}{\langle x+y-x_\mu\rangle\langle y\rangle}\right)^N\langle x+y-x_\mu\rangle^N\langle y\rangle^N$$

avec, pour tous multi-indices γ_1 et γ_2,

$$\partial_y^{\gamma_1}\partial_x^{\gamma_2}\left(\frac{\langle x-x_\mu\rangle}{\langle x+y-x_\mu\rangle\langle y\rangle}\right)^N \leq A_{N,\gamma_1,\gamma_2}.$$

En reprenant alors la démarche faite dans le démonstration du lemme 3.1 sachant que $\tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu}$ vérifie le lemme 4.3, c'est à dire que

$$\langle x-x_\mu\rangle^N\partial_x\tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu} \in S^0_{1,0}\subset S^0_{0,0}$$

avec ses semi-normes majorées par

$$A_{\alpha,\beta}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^N\varphi_{1,\mu}\|_{C^{|\alpha|+1}},$$

on obtient donc le lemme 11.9. □

Revenons alors à la démonstration de la proposition *(v)* du lemme 11.5.

On a

$$\langle E_{2,R}u,\mathbf{C}u\rangle = \sum_\mu \alpha_{1,\mu}\langle e_{2,\mu}(x,D)J^{-\frac{1}{2}}+r(x,D))u, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}u\rangle$$

où, d'après la première proposition du le lemme 3.1 appliquée, pour chaque multi-indice γ de longueur 1, avec

$$a(x,\xi) = \partial_\xi^\gamma(\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}})\in S^{-\frac{3}{2}}_{1,0}\subset S^{-\frac{3}{2}}_{0,0}$$

et

$$b(x,\xi) = \partial_x^\gamma e_{2,\mu}(x,\xi)\in S^1_{0,0},$$

on a

$$r(x,D) = [J^{-\frac{1}{2}}, e_{2,\mu}(x,D)]\in OpS^{-\frac{1}{2}}_{0,0}$$

avec, pour M assez grand,

$$\|J^{\frac{1}{2}}r(x,D)\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq \frac{A}{R}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M},$$

donc

$$|\langle r(x,D)u, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}u\rangle| = |\langle J^{\frac{1}{2}}r(x,D)u,\mathbf{C}u\rangle| \leq \frac{A}{R}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^3_{C^M}\|u\|_0^2$$

car $\mathbf{C}\in OpS^0_{0,0}$. De plus

$$\langle e_{2,\mu}(x,D)J^{-\frac{1}{2}}u, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}u\rangle = \langle\langle x-x_\mu\rangle^2 e_{2,\mu}(x,D)J^{-\frac{1}{2}}u, \langle x-x_\mu\rangle^{-2}J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}u\rangle$$

et
$$\begin{aligned}&\langle x-x_\mu\rangle^2 e_{2,\mu}(x,D)J^{-\frac{1}{2}}u = \\ &\qquad \langle x-x_\mu\rangle^2 e_{2,\mu}(x,D)J^{-1}\langle x-x_\mu\rangle^2\langle x-x_\mu\rangle^{-2}J^{\frac{1}{2}}u.\end{aligned}$$
Sachant que $\langle x-x_\mu\rangle^2$ est un polynôme de degré 2, on a
$$\begin{aligned}&\langle x-x_\mu\rangle^2 e_{2,\mu}(x,D)J^{-1}\langle x-x_\mu\rangle^2 = \\ &\qquad \langle x-x_\mu\rangle^4 e_{2,\mu}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-1})(x,D)+ \\ &\qquad (\langle x-x_\mu\rangle^2\nabla_\xi(e_{2,\mu}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-1}).\nabla_x(\langle x-x_\mu\rangle^2))(x,D)+ \\ &\qquad \textstyle\sum_{|\nu|=2}(\langle x-x_\mu\rangle^2\partial_\xi^\nu(\langle\xi\rangle^{-1}e_{2,\mu}(x,\xi))\partial_x^\nu(\langle x-x_\mu\rangle^2))(x,D).\end{aligned}$$
En utilisant le lemme 11.9, sachant que
$$\sum_\mu |\alpha_{1,\mu}| \leq A_1,$$
on obtient donc que
$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T\langle E_{2,R}u,\mathbf{C}u\rangle dt\right| \\ &\leq \frac{A\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M}A_1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}u|||_T + A\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^3_{C^M}T\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2.\end{aligned}$$
En remarquant que $J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C} = \mathbf{C}J^{\frac{1}{2}} + [J^{\frac{1}{2}},\mathbf{C}]$ avec $[J^{\frac{1}{2}},\mathbf{C}] \in S^0_{0,0}$ et en utilisant le lemme 3.1, on obtient l'estimation annoncée pour $E_{2,R}$.

Preuve de la proposition *(iv)*. On remarque que
$$[\mathbf{C},T^\delta_{b_i}.\nabla] = E_{2,R} + (\tilde{b}^\delta_i(x,\xi).i\xi\mathbf{c}(x,\xi))(x,D) - T^\delta_{b_i}.\nabla\mathbf{C}$$
Pour le second terme, on applique la même démonstration que pour $E_{2,R}$ sachant que
$$T^\delta_{b_i} = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}$$
avec $\varphi_{i,\mu}$ vérifiant les hypothèses (11.9), (11.10), (11.11) et que, d'après le lemme 4.3, pour tout entier naturel N, tout multi-indice α et tout multi-indice β, on a
$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left(\langle x-x_\mu\rangle^N\tilde{\varphi}^\delta_{i,\mu}(x,\xi)\right)\right| \leq A_{\alpha,\beta,N}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^N\varphi_{i,\mu}\|_{C^{|\alpha|}}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}$$
et, pour prouver la deuxième estimation énoncée dans la proposition *(iv)*, on écrira seulement que
$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left(\langle x-x_\mu\rangle^N\tilde{\varphi}^\delta(x,\xi)\right)\right| \leq A_{\alpha,\beta,N}\sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^N\varphi\|_{C^{|\alpha|}}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}.$$

Preuve du lemme 11.6

On a
$$\langle\mathbf{C}T^\delta_{b_2}.\nabla_x\overline{u},\mathbf{C}u\rangle = \langle[\mathbf{C},T^\delta_{b_2}.\nabla_x]\overline{u},\mathbf{C}u\rangle + \langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x\mathbf{C}\overline{u},\mathbf{C}u\rangle,$$
or, d'après la proposition *(iv)* du lemme 11.5,
$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T\langle[\mathbf{C},T^\delta_{b_2}.\nabla_x]\overline{u},\mathbf{C}u\rangle\,dt\right| \\ &\leq A\sup_\mu(\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^2_{C^M}\|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{2,\mu}\|_{C^M})\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||^2_T + RT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right).\end{aligned}$$

De plus, $\mathbf{c}(x,\xi)$ est réel et pair en ξ donc
$$\mathbf{C}\overline{u} = \overline{\mathbf{C}u}.$$
Le deuxième terme de cette somme est donc de la forme $\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle$ avec
$$v = \mathbf{C}u.$$

On a
$$\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle = -\langle \overline{v}, \nabla_x.(T^\delta_{\overline{b_2}} + r(x,D))v\rangle$$
avec d'après le théorème 3.1, d'après les hypothèses (11.9), (11.10), (11.11) et le lemme 4.3 dans le cas $N=0$, on a
$$r \in S^{-1}_{1,0}.$$
avec ses semi-normes majorées par
$$A_{\alpha,\beta} \sup_\mu \|\varphi_{2,\mu}\|_{C^{|\alpha|}} \langle \xi\rangle^{-|\beta|}.$$
Le terme en $\nabla_x.r(x,D)$ est donc d'ordre 0 et
$$\|\nabla_x.r(x,D)\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq A \sup_\mu \|\varphi_{2,\mu}\|_{C^M},$$
il ne pose donc pas de problème et ne sera pas écrit dans la suite.
On a alors
$$\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle = -\overline{\langle \nabla_x.T^\delta_{\overline{b_2}} v, \overline{v}\rangle}$$
or $\overline{\nabla_x v} = \nabla_x \overline{v}$, sachant que $\tilde{b}_2(x,\xi)$ est pair en ξ, on a $\overline{T_{\overline{b_2}} v} = T_{b_2}\overline{v}$, et
$$\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle = -\langle \nabla_x.T^\delta_{b_2} \overline{v}, v\rangle$$
or
$$\nabla_x.T^\delta_{b_2} = T^\delta_{b_2}.\nabla_x + r_1(x,D)$$
avec r_1 vérifiant les même propriété que $\nabla_x.r$ donc
$$2\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle = \langle (r+r_1)(x,D)\overline{v}, v\rangle \leq A \sup_\mu \|\varphi_{2,\mu}\|_{C^M} \|v\|_0^2,$$
$$2\langle T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{v}, v\rangle \leq A \sup_{\mu,i} \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M} \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

Ce qui termine la preuve du lemme 11.6.

Preuve du lemme 11.7
Pour simplifier l'écriture, on note T au lieu de T^δ.
On a
$$2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle = \langle \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u\rangle$$
or,
$$\langle \mathbf{C}u, \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u\rangle = \langle \mathbf{C}u, [\mathbf{C}, T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla]u\rangle + \langle (T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla)^*\mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle$$
et, d'après le théorème 3.1,
$$T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla = (\mathscr{R}(\tilde{b}_1(x,\xi)).i\xi)(x,D) \text{ et } (T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla)^* = (\mathscr{R}(\tilde{b}_1(x,\xi)).i\xi)(x,D)^*.$$

$$(\mathscr{R}(\tilde{b}_1(x,\xi)).i\xi)(x,D)^* = -(\mathscr{R}(\tilde{b}_1(x,\xi)).i\xi)(x,D) + r_1(x,D)$$

et donc

$$(T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla)^* = -T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla + r_1(x,D)$$

avec, d'après le théorème 3.1 et le lemme 4.3 dans le cas $N=0$, on a $r_1 \in S^0_{1,0}$ avec

$$\|r_1(x,D)\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq A \sup_\mu \|\varphi_{1,\mu}\|_{C^M}$$

pour M assez grand.

On obtient donc que

$$\begin{aligned} 2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle = \langle \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle - \langle T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla \mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle \\ +\langle r_1(x,D)\mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, [\mathbf{C}, T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla]u\rangle \end{aligned}$$

$$2\mathscr{R}\langle \mathbf{C}T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla u, \mathbf{C}u\rangle = \langle [\mathbf{C}, T_{\mathscr{R}(b_1)}.\nabla]u, \mathbf{C}u\rangle + \langle r_1(x,D)\mathbf{C}u, \mathbf{C}u\rangle + \langle \mathbf{C}u, [\mathbf{C}, T_{\mathscr{R}(b_1}.\nabla]u\rangle$$

On intègre alors sur $[0,T]$ et, les propositions *(ii)*, *(iii)* et *(iv)* du lemme 11.5 donnent l'estimation souhaitée car $\mathscr{R}(b_1)$ a les mêmes propriétés que b_1.

En appliquant ces deux derniers lemmes 11.6 et 11.7, ainsi que la proposition *(v)* du lemme 11.5 à l'inégalité (11.14), on obtient le lemme 11.1.

Preuve du théorème 11.1 (numéroté aussi 7.3) : On commence par démontrer les estimations (7.4), (7.5). On suppose donc que l'équation (11.1) admet une unique solution u, c'est à dire que

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{u} + C_1 u + C_2 \bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. On applique alors J^s à cette équation, ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_t J^s u = i\mathscr{L}J^s u + J^s T^\delta_{b_1}.\nabla_x u + J^s T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{u} + J^s C_1 u + J^s C_2 \bar{u} + J^s f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t J^s u = i\mathscr{L}J^s u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x J^s u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x J^s \bar{u} \\ \qquad +[J^s, T^\delta_{b_1}.\nabla_x]u + [J^s, T^\delta_{b_2}.\nabla_x]\bar{u} + J^s C_1 u + J^s C_2 \bar{u} + J^s f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t J^s u = i\mathscr{L}J^s u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x J^s u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x J^s \bar{u} \\ \qquad +[J^s, T^\delta_{b_1}.\nabla_x]J^{-s}J^s u + [J^s, T^\delta_{b_2}.\nabla_x]J^{-s}J^s\bar{u} + \\ \qquad\qquad J^s C_1 J^{-s} J^s u + J^s C_2 J^{-s} J^s \bar{u} + J^s f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

or J^s a un symbole réel et pair en ξ donc $J^s\bar{u} = \overline{J^s u}$, ce qui donne

$$\begin{cases} \partial_t J^s u = i\mathscr{L}J^s u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x J^s u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \overline{J^s u} \\ \qquad +[J^s, T^\delta_{b_1}.\nabla_x]J^{-s}J^s u + [J^s, T^\delta_{b_2}.\nabla_x]J^{-s}\overline{J^s u} + \\ \qquad\qquad J^s C_1 J^{-s} J^s u + J^s C_2 J^{-s} \overline{J^s u} + J^s f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{11.18}$$

On rappelle alors que $T^\delta_{b_1} \in OpS^0_{1,\delta}$ et donc $T^\delta_{b_1}.\nabla \in OpS^1_{1,\delta}$, et, d'après le théorème 3.1, sachant que $\delta \in [0,1[$, $J^s \in OpS^s_{1,\delta}$, on a

$$[J^s, T^\delta_{b_1}.\nabla_x] \in OpS^s_{1,\delta}.$$

On a donc
$$[J^s, T^\delta_{b_1}.\nabla_x]J^{-s} \in OpS^0_{1,\delta}.$$
On a de même
$$[J^s, T^\delta_{b_2}.\nabla_x]J^{-s} \in OpS^0_{1,\delta},$$
$$J^sC_1J^{-s} \in OpS^0_{1,\delta_1},$$
$$J^sC_2J^{-s} \in OpS^0_{1,\delta_1}.$$
En posant
$$\tilde{C}_i = [J^s, T^\delta_{b_i}.\nabla_x]J^{-s} + J^sC_1J^{-s},$$
on obtient que $J^s u$ est solution d'une équation de type (7.1). On peut donc lui appliquer les résultats des lemmes 11.1 et 11.2 avec $J^s u_0$ au lieu de u_0 et $J^s f$ au lieu de f.
Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on écrit le raisonnement dans le cas $s = 0$.

Pour pouvoir utiliser les lemmes 11.1 et 11.2, il faut régulariser les coefficients b_i pour qu'ils vérifient les hypothèses supplémentaires (11.9), (11.10) et (11.11) utilisées pour les preuves de ces deux derniers lemmes.

Commenons par démontrer (7.2).
On régularise alors les coefficients b_i en posant
$$\varphi_{i,\mu,m}(x) = m^n \int_{\mathbb{R}^n} \theta(m(x-y))\varphi_{i,\mu}(y)\,dy \text{ et } b_{i,m}(x) = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu,m}(x).$$
où θ est une fonction régularisante définit comme dans le lemme 8.1.

On rappelle que, par hypothèse, $\|\varphi_{1,\mu}\|_{C^2} = 1$.
De plus, on remarque que, pour tout entier naturel M_0, il existe un entier naturel M_1 tel que
$$\begin{aligned}&\sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu,m}\|^N_{C^M}\\ &\leq Am^{MN}\sup_{\mu,i}\|\langle x - x_\mu\rangle^{M_1}\varphi_{i,\mu}\|^N_{L^\infty} \leq Am^{MN}\langle d_n\rangle^{M_1}\sup_{\mu,i}\|\varphi_{i,\mu}\|^N_{C^\varrho} \leq Am^{NM}.\end{aligned}$$

Remarques :

—Dans cette démonstration, cette propriété est issue (et remplace) la propriété de support vérifié par les $\varphi_{i,\mu}$.

—On peut toujours se ramener à un entier M_0 pair.

On obtient alors l'équation suivante
$$\begin{aligned}\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_{1,m}}.\nabla_x u + T^\delta_{b_{2,m}}.\nabla_x\overline{u} + C_1u + C_2\overline{u} +\\ (T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_{1,m}}).\nabla u + (T^\delta_{b_2} - T^\delta_{b_{2,m}}).\nabla\overline{u} + f(x,t)\end{aligned} \tag{11.19}$$
avec $b_{1,m}$ et $b_{2,m}$ qui vérifient les hypothèses (11.9), (11.10) et (11.11) utilisées dans la preuve du lemme 11.1. Comme cela a déjà été précisé, on a notamment que
$$\forall i \in \{1,2\},\;\; b_{i,m}(x) = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu,m}(x),$$

De plus, u est solution de l'équation (11.19). On utilise alors le lemme 11.1 appliqué aux coefficients régularisés $b_{1,m}$ et $b_{2,m}$, avec f remplacée par
$$f_m = f + \sum_\mu \alpha_{1,\mu}f_{1,\mu} + \sum_\mu \alpha_{2,\mu}f_{2,\mu}$$

où $$f_{1,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu,m}}).\nabla_x u \text{ et } f_{2,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{2,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{2,\mu,m}}).\nabla_x \overline{u}.$$

Les estimations sont alors vraies pour un opérateur **C** dépendant de m noté dans la suite $\mathbf{C}_m$. De plus, on a le lemme suivant

Lemme 11.10

Pour tout $i \in \{1,2\}$, tout $\varrho \geq 0$, il existe une constante A ne dépendant que de n, de ϱ et de $\sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho}$ telle que pour tout $m \geq 1$ et tout $m' \geq m$, on a

$$\left| \int_0^T \langle \mathbf{C}_m (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}}).\nabla \tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle \, dt \right| \leq \frac{Am^{NM}}{m'} |||J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{A}{m} ||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2$$
$$\frac{Am'^{NM}}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 + ARm'^{NM} T \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

avec $\tilde{u} = u$ ou $\tilde{u} = \overline{u}$ et, N et M des entiers naturels assez grands ne dépendant que de n, la dimension.

Preuve du lemme 11.10 :

Soit m' un nombre réel positif fixé assez grand.

On commence par écrire que
$$T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m}} = T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}} + T_b$$
où
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; b(x) = \varphi_{i,\mu,m'}(x) - \varphi_{i,\mu,m}(x).$$
On a
$$\langle \mathbf{C}_m T^\delta_b.\nabla u, \mathbf{C}_m u\rangle = \langle T^\delta_b.\nabla \mathbf{C}_m u, \mathbf{C}_m u\rangle + \langle [\mathbf{C}_m, T^\delta_b.\nabla] u, \mathbf{C}_m u\rangle.$$
On souhaite pour pouvoir appliquer la proposition *(iv)* du lemme 11.5 au terme
$$\langle [\mathbf{C}_m, T^\delta_b.\nabla] u, \mathbf{C}_m u\rangle.$$
Pour pouvoir faire cela, on remarque que, pour tout entier naturel N, on a
$$\langle x - x_\mu\rangle^N \tilde{b}^\delta(x,\xi) \in S^0_{1,0} \subset S^0_{0,0}$$
avec ses semi-normes bornées par
$$A_{\alpha,\beta,N} 2 m'^{|\alpha|} \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{L^\infty}.$$
En effet, par définition (voir (4.1)), on a
$$\tilde{b}^\delta(x,\xi) = (1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \int \hat{\chi}(|\xi|^\delta y) b(x-y)\, dy$$
donc
$$\langle x - x_\mu\rangle^N \tilde{b}^\delta(x,\xi) =$$
$$(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \int \hat{\chi}(|\xi|^\delta y) \langle y\rangle^N \langle x-y-x_\mu\rangle^N b(x-y) \frac{\langle x-x_\mu\rangle^N}{\langle y\rangle^N \langle x-y-x_\mu\rangle^N}\, dy.$$
On a
$$1-\psi(\xi) \in S_{1,0},$$
De plus, d'après la dernière proposition énoncée dans le lemme 8.1, on a
$$\langle x-y-x_\mu\rangle^N b(x-y) \in S^0_{1,0}$$

avec ses semi-normes bornées par une constante indépendante de m, m' ($m' \geq m$) et μ du type

$$A_{\alpha,\beta,N} m'^{|\alpha|} \sup_{\mu} \|\varphi_{i,\mu}\|_{L^\infty}.$$

De plus, on a

$$\frac{\langle x - x_\mu \rangle^N}{\langle y \rangle^N \langle y - x - x_\mu \rangle^N} \in S^0_{1,0}$$

avec ses semi-normes uniformément bornées en y et, enfin,

$$|\xi|^{\delta n} \int \hat{\chi}(|\xi|^\delta y)) \langle y \rangle^N \, dy \in S^0_{1,0}.$$

Ces arguments permettent de déduire que

$$\langle x - x_\mu \rangle^N \tilde{b}^\delta(x,\xi) \in S^0_{1,0} \subset S^0_{0,0}$$

avec ses semi-normes bornées par

$$A_{\alpha,\beta,N} 2 m'^{|\alpha|} \sup_{\mu} \|\varphi_{i,\mu}\|_{L^\infty}.$$

On peut donc appliquer la prorposition *(iv)* du lemme 11.5 pour obtenir que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \langle [\mathbf{C}_m, T^\delta_b . \nabla] u, \mathbf{C}_m u \rangle \, dt \right| \\ &\qquad \leq A m^{2M} m'^M \sup_{\mu} \|\varphi_{i,\mu}\|_{L^\infty} \left(RT \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R} |||J^{\frac{1}{2}} u|||_T^2 \right). \end{aligned} \tag{11.20}$$

On rappelle que

$$\|\varphi_{i,\mu}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle T^\delta_b . \nabla \mathbf{C}_m u, \mathbf{C}_m u \rangle &= \langle J^{-\frac{1}{2}} T^\delta_b . \nabla \mathbf{C}_m u, J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle \\ = \langle [J^{-\frac{1}{2}}, T^\delta_b . \nabla] \mathbf{C}_m u, J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle &+ \langle \langle x - x_\mu \rangle^2 T^\delta_b . \nabla J^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u, \langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1, on a

$$[J^{-\frac{1}{2}}, T^\delta_b . \nabla] \in Op S^{-\frac{1}{2}}_{1,0}$$

avec, pour M assez grand, d'après le lemme 4.3,

$$\|[J^{-\frac{1}{2}}, T^\delta_b . \nabla]\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq A \|b\|_{C^M}.$$

On a donc

$$\int_0^T \langle [J^{-\frac{1}{2}}, T^\delta_b . \nabla] \mathbf{C}_m u, J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle \, dt \leq AT \|b\|_{C^M} \|\mathbf{C}_m\|^2_{\mathscr{L}(L^2)} \|u\|_0^2. \tag{11.21}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} &\langle \langle x - x_\mu \rangle^2 T^\delta_b . \nabla J^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u, \langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle = \\ &\qquad \langle \langle x - x_\mu \rangle^2 T^\delta_b . \nabla J^{-1} \langle x - x_\mu \rangle^2 \langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u, \langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}_m u \rangle, \end{aligned}$$

or

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 T^\delta_b . \nabla J^{-1} \langle x - x_\mu \rangle^2 \in Op S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes majorées par $\|\langle x - x_\mu \rangle^N b\|_{L^\infty}$ avec N un entier naturel assez grand et pair. En effet, le symbole de cet opérateur est

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 \sum_{|\nu| \leq 2} \partial^\nu_\xi (\tilde{b}^\delta(x,\xi) i \xi \langle \xi \rangle^{-1}) (-i\partial_x)^\nu (\langle x - x_\mu \rangle^2),$$

et $\tilde{b}^\delta$ vérifie le lemme 4.3.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \langle x-x_\mu\rangle^2 T_b.\nabla J^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u, \langle x-x_\mu\rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u\rangle\, dt \\ \leq A\|\langle x-x_\mu\rangle^N b\|_{L^\infty} |||J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u|||_T^2,\end{aligned} \tag{11.22}$$

or,

$$\|\langle x-x_\mu\rangle^N b\|_{L^\infty} \leq \|\langle x-x_\mu\rangle^N(\varphi_{1,\mu}-\varphi_{1,\mu,m})\|_{L^\infty} + \|\langle x-x_\mu\rangle^N(\varphi_{1,\mu}-\varphi_{1,\mu,m'})\|_{L^\infty}$$

donc, d'après le lemme 8.1 et le fait que

$$supp\varphi_{1,\mu} \subset Q_\mu,$$

on a

$$\|\langle x-x_\mu\rangle^N b\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{A}{m}+\frac{A}{m'}\right)\|\varphi_{1,\mu}\|_{C^1},$$

et, pour $m' \geq m$,

$$\|\langle x-x_\mu\rangle^N b\|_{L^\infty} \leq \frac{A}{m}\|\varphi_{1,\mu}\|_{C^1}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle\, dt = \\ \int_0^T \langle J^{-\frac{1}{2}}(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle\, dt = \\ \int_0^T \langle [J^{-\frac{1}{2}},(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}})].\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt \\ + \int_0^T \langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle\, dt = \\ \int_0^T \langle J^{\frac{1}{2}}[J^{-\frac{1}{2}},(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}})].\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt \\ + \int_0^T \langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt\end{aligned}$$

or, pour $\varrho \geq 1$, on a

$$J^{\frac{1}{2}}[J^{-\frac{1}{2}},(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}})].\nabla \in S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes bornées par une constante de la forme $A\sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^1}$, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle\, dt\right| \\ \leq AT\|\mathbf{C}_m\|^2_{\mathscr{L}(L^2)} m' \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^1} \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 \\ + \int_0^T \left|\langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\right|\, dt.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt \\ = \int_0^T \langle \langle x-x_\mu\rangle^2(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, \langle\langle x-x_\mu\rangle^{-2}J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\, dt,\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T \left|\langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\right| dt$$
$$\leq A \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu} - \varphi_{i,\mu,m'}\|_{L^\infty} \int_0^T \|\langle x-x_\mu\rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}}\tilde{u}\|_0 \|\langle x-x_\mu\rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\| \, dt.$$

Or, $\mathbf{C}_m^* \in S^0_{0,0}$ et $\mathbf{C}_m \in S^0_{0,0}$ donc, d'après le corollaire 8.2, on a

$$\int_0^T \left|\langle (T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).J^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}, J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m^*\mathbf{C}_m u\rangle\right| dt$$
$$\leq A \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu} - \varphi_{i,\mu,m'}\|_{L^\infty} \|\mathbf{C}_m^*\|_{\mathscr{L}(L^2)} \|\mathbf{C}_m\|_{\mathscr{L}(L^2)} \int_0^T \|\langle x-x_\mu\rangle^{-2} J^{\frac{1}{2}}\tilde{u}\|_0^2 \, dt.$$

On obtient donc que

$$\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle \, dt\right| \leq A\frac{m^{NM}}{m'} \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^1} |||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2.$$

Sachant que $\sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^1} \leq 1$, on a

$$\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle \, dt\right| \leq \frac{Am^{NM}}{m'} ||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2.$$

et

$$\left|\int_0^T \langle \mathbf{C}_m(T^\delta_{\varphi_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{i,\mu,m'}}).\nabla\tilde{u}, \mathbf{C}_m u\rangle \, dt\right|$$
$$\leq AT\|\mathbf{C}_m\|^2_{\mathscr{L}(L^2)} m' \sup_\mu \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^1} \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \frac{Am^{NM}}{m'} ||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2. \tag{11.23}$$

Pour $m' \geq m$, en utilisant (11.20), (11.21), (11.22) et (11.23), on obtient l'inégalité du lemme 11.10.

Revenons à la preuve du théorème 11.1 (numéroté aussi 7.3 dans la section précédente).

En utilisant le lemme 11.1, le lemme 11.10, on obtient que

$$\sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq$$
$$Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle| \, dt + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right)$$
$$+\frac{A}{m}|||J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u|||_T^2 + \frac{Am^{NM}}{m'}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2. \tag{11.24}$$

On applique ensuite le lemme 11.2 à $\mathbf{C}_m u$ à l'équation régularisée (11.19) et donc f est remplacée par

$$f_m = f + \sum_\mu \alpha_{1,\mu} f_{1,\mu} + \sum_\mu \alpha_{2,\mu} f_{2,\mu}$$

où $\qquad f_{1,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu,m}}).\nabla_x u$ et $f_{2,\mu} = (T^\delta_{\varphi_{2,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{2,\mu,m}}).\nabla_x \overline{u}.$

Ce qui donne

$$|||J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u|||_T^2 \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}_m f_m, \mathbf{C}_m u\rangle| \, dt + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2\right)$$
$$+2Am^{NM-1}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2\right).$$

On remarque que
$$\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f_{i,\mu}, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt = \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f_{i,\mu}, \Psi^* \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt$$
et donc la démonstration du lemme 11.10 est valable pour ce terme car $\Psi \in S^0_{1,0}$ (indépendant de m et de m'), ce qui permet d'obtenir que, pour $m \geq 2A^2$, on a
$$\begin{aligned}|||J^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}_m u|||_T^2 \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2\right)\\ + \frac{A^2 m^{NM}}{m'}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + Am'^{NM}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2\right).\end{aligned}$$

En notant pas abus, pour simplifier, comme déjà fait précédemment A au lieu de A^2, à partir de (11.24), on obtient alors
$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\right)\\ + \frac{A}{m}\left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2\right) + \frac{Am^{NM}}{m'}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\\ + 2Am^{NM-1}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2\right).\end{aligned}$$
On applique alors le lemme 11.2 avec $\mathbf{C}_m = Id$ directement à l'équation (11.1) sans régularisation, ce qui est possible car $\varrho \geq 2$, c'est à dire que l'on a
$$|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 \leq A\left(\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt\right)$$
$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 \leq 2Am'^{NM}\Bigg(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\\ + \int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\Bigg)\\ + \frac{Am^{NM}}{m'}\left(\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right).\end{aligned}$$
et donc
$$\begin{aligned}&\sup_{[0,T]}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2\\ &\leq 2Am'^{NM}\Bigg(\|u_0\|_0^2 + TR\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\\ &\quad + \frac{1}{R}\left(\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt\right)\\ &\quad + \int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\,dt\Bigg)\\ &\quad + \frac{Am^{NM}}{m'}\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + \frac{Am^{NM}}{m'}\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2.\end{aligned} \tag{11.25}$$
On utilise ensuite que, d'après la proposition *(iv)* du lemme 11.5, on a
$$\|u\|_0^2 \leq Am^{2M}\|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{Am^{2M}}{R}\|u\|_0^2.$$

donc

$$\sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \leq Am^{2NM} \sup_{[0,T]} \|\mathbf{C}_m u\|_0^2 + \frac{Am^{2NM}}{R} \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

On applique alors (11.25),

$$\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \leq \\
&Am^{2NM} \left(2Am'^{NM} \left(\|u_0\|_0^2 + TR \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R} \left(\sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 + \int_0^T |\langle \Psi f, u \rangle| \, dt \right) \right.\right. \\
&\qquad \left. + \int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt \right) + \left. \frac{Am^{NM}}{m'} \int_0^T |\langle \Psi f, u \rangle| \, dt \right) \\
&\qquad + \left(\frac{Am^{2NM}}{R} + \frac{Am^{3NM}}{m'} \right) \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{2A^2 m^{2NM} m'^{NM}}{R} - \frac{Am^{2NM}}{R} - \frac{Am^{3NM}}{m'} \right) \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \leq \\
&Am^{2NM} \left(2Am'^{NM} \left(\|u_0\|_0^2 + TR \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \right.\right. \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{1}{R} + \frac{Am^{NM}}{m'} \right) \int_0^T |\langle \Psi f, u \rangle| \, dt \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt \right) \right).
\end{aligned}$$

Pour

$$R \geq \max \left(\frac{12A^2 m^{2NM} m'^{NM}}{5}, \frac{6Am^{2NM}}{5} \right),$$

et

$$m' \geq \frac{6Am^{3NM}}{5},$$

on a

$$\frac{2A^2 m^{2NM} m'^{NM}}{R} + \frac{Am^{2NM}}{R} + \frac{Am^{3NM}}{m'} \leq \frac{1}{2}$$

et donc

$$\left(1 - \frac{2A^2 m^{2NM} m'^{NM}}{R} - \frac{Am^{2NM}}{R} - \frac{Am^{3NM}}{m'} \right) \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \geq \frac{1}{2} \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \leq \\
&2Am'^{2NM} \left(2Am'^{NM} \left(\|u_0\|_0^2 + TR \sup\nolimits_{[0,T]} \|u\|_0^2 \right.\right. \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{1}{R} + \frac{Am^{NM}}{m'} \right) \int_0^T |\langle \Psi f, u \rangle| \, dt \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \textstyle\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1 - 2A^2 m'^{3NN} RT) \sup_{[0,T]} \|u\|_0^2 \leq \\
&2Am'^{2NM} \left(2Am'^{NM} \left(\|u_0\|_0^2 + \left(\frac{1}{R} + \frac{Am^{NM}}{m'} \right) \int_0^T |\langle \Psi f, u \rangle| \, dt \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt + \int_0^T |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u \rangle| \, dt \right) \right).
\end{aligned}$$

Pour $T_0 = \dfrac{1}{4A^2 m'^{3NM} R}$, on a

$$\sup_{[0,T_0]} \|u\|_0^2 \leq$$
$$4Am'^{2NM}\left(2Am'^{NM}\left(\|u_0\|_0^2 + 2\int_0^{T_0} |\langle \Psi f, u\rangle|\, dt \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{T_0} |\langle \Psi \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\, dt + \int_0^{T_0} |\langle \mathbf{C}_m f, \mathbf{C}_m u\rangle|\, dt\right)\right).$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\sup_{[0,T_0]} \|u\|_0^2 \leq A\left(\|u_0\|_0^2 + I_{T_0}(f,u)\right).$$

l'estimation (7.2), dans le cas $s = 0$ pour T_0 petit, donnée dans le théorème 7.3 en notant A, par abus et pour simplifier, le nombre $\max(8A^2 m'^{3NM}, 1)$ et, en posant,

$$I_{T_0}(f,u) = \int_0^{T_0} |\langle \mathbf{C}_m^* \Psi \mathbf{C}_m f, u\rangle|\, dt + \int_0^{T_0} |\langle \mathbf{C}_m^* \mathbf{C}_m f, u\rangle|\, dt + \int_0^{T_0} |\langle \Psi f, u\rangle|\, dt.$$

On obtient les estimations dans le cas $s = 0$. Le passage au cas général s'obtient en utilisant la remarque faite au début de cette démonstration.

Dans le cas s quelconque, cela donne

$$\sup_{0\leq t\leq T_0} \|u(t)\|_s^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)). \tag{11.26}$$

Prouvons alors (7.3) pour T_0 assez petit, c'est à dire

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T_0}^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)). \tag{11.27}$$

On applique le lemme 7.2 à $J^s u$, ce qui donne

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \leq A\left((1+T)\sup_{[0,T]} \|u\|_s^2 + \int_0^T |\langle \psi J^s f, J^s u\rangle|\, dt\right).$$

De (11.26), on déduit que

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T_0}^2 \leq A\left((1+T_0)(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) + \int_0^{T_0} |\langle \psi J^s f, J^s u\rangle|\, dt\right).$$

Ce qui donne (7.3) en notant, pour simplifier, $I_{T_0}(J^s f, J^s u)$ l'expression

$$I_{T_0}(J^s f, J^s u) + \int_0^{T_0} |\langle \psi J^s f, J^s u\rangle|\, dt.$$

Sachant que

$$I_{T_0}(J^s f, J^s u) \leq I_{T_0}(J^s f, J^s u) + \int_0^{T_0} |\langle \psi J^s f, J^s u\rangle|\, dt,$$

l'inégalité (7.2) reste vraie avec ce nouveau I_{T_0}.

Les estimations (7.2) et (7.3) s'obtiennent ensuite pour tout $T > 0$ en remarquant que

$$v(x,t) = u(x, t+T_0),$$

si elle existe, est solution de

$$\partial_t v = i\mathscr{L}v + T^{\delta}_{b_1}.\nabla v + T^{\delta}_{b_2}.\nabla \overline{v} + T^{\delta}_{a_1} v + T^{\delta}_{a_2}.\nabla \overline{v} + g(x,t) \tag{11.28}$$

avec

$$g(x,t) = f(x, t+T_0).$$

On obtient donc que

$$\sup_{0\le t\le T_0} \|v(t)\|_s^2 \le A(\|v_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} v|||_{T_0}^2 \le A(\|v_0\|_s + I_{T_0}(J^s g, J^s u)).$$

Ce qui donne

$$\sup_{T_0\le t\le 2T_0} \|u(t)\|_s^2 \le A(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)),$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} v|||_{T_0}^2 \le A(\|v(T_0)\|_s + I_{T_0}(J^s g, J^s u)).$$

donc

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 2T_0} & \|u(t)\|_s^2 \\ & \le A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) \\ & + A(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_{2T_0}^2 & \\ & \le A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) \\ & + A(\|u(T_0)\|_s^2 + I_{T_0}(J^s g, J^s u)).\end{aligned}$$

or

$$\|u(T_0)\|_s^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)),$$

donc

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 2T_0} & \|u(t)\|_s^2 \\ & \le A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) \\ & + A(A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) + I_{T_0}(J^s g, J^s u)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_{2T_0}^2 & \\ & \le A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) \\ & + A(A(\|u_0\|_s^2 + I_{T_0}(J^s f, J^s u)) + I_{T_0}(J^s g, J^s u)).\end{aligned}$$

Soit, en remarquant que

$$I_{T_0}(J^s f, J^s u) + I_{T_0}(J^s g, J^s u) \le I_{2T_0}(J^s f, J^s u),$$

on obtient

$$\sup_{0\le t\le 2T_0} \|u(t)\|_s^2 \le (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_0}(J^s f, J^s u)$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_{2T_0}^2 \le (A + A^2)\|u_0\|_s^2 + (2A + A^2) I_{2T_0}(J^s f, J^s u).$$

Par abus, on pose alors $A = \max(A + A^2, 2A + A^2)$, et, pour tout $T > 0$, on fixe $T_1 \le T_0$ et N assez grand tels que $NT_1 = T$. On réitère alors le processus N fois pour obtenir (7.2) et (7.3) rappelées ci-dessous.

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_s^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u))$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_T^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u))$$

avec une constante qui dépend de T et, plus précisément, qui explose exponentiellement si T temps vers l'infini.
On obtient (7.2) et (7.3) sur tout intervalle $[0, T]$.

On rappelle ci-dessous, dans l'ordre, les estimations (7.2), (7.3), (7.4) , (7.5), (7.6) et (7.7) écrites sur $[0,T]$.

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_s^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{7.2}$$

$$|||J^{s+\frac12}u|||_T^2 \le A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{7.3}$$

avec

$$|||u|||_T = \sup_\mu \left(\int_0^T \|\langle x-x_\mu\rangle^{-2}u\|_0^2\,dt\right)^{\frac12}$$

et $I_T(f,u)$ est une combinaison linéaire d'au plus trois termes de la forme $\int_0^T |\langle Gf,u\rangle|\,dt$ où $G\in OpS^0_{0,0}$.

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_s \le A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac12}f)), \tag{7.4}$$

avec

$$\mathcal{N}_T(f) = \sup_\mu \left(\int_0^T \|\langle x-x_\mu\rangle^{2}f\|_0^2\,dt\right)^{\frac12},$$

$$|||J^{s+\frac12}u|||_T \le A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac12}f)), \tag{7.5}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_s \le A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s\,dt\right), \tag{7.6}$$

$$|||J^{s+\frac12}u|||_T \le A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s\,dt\right). \tag{7.7}$$

Pour obtenir les quatre autres estimations (7.6), (7.7), (7.4) et (7.5), on utilise (7.2) et (7.3) en remarquant tout d'abord que

$$I_T(J^s f, J^s u) \le A\left(\int_0^T \|f\|_s^2\,dt + T\sup_{[0,T]}\|u\|_s^2\right), \tag{11.29}$$

et, pour tout $R'>0$,

$$I_T(J^s f, J^s u) \le A\left(R'\mathcal{N}_T(J^{s-\frac12}f)^2 + \frac{1}{R'}|||J^{s+\frac12}u|||_T^2\right). \tag{11.30}$$

L'estimation (11.29) permet d'obtenir (7.6) à l'aide de (7.2) et (7.7) à l'aide de (7.3).
pour R' assez grand, l'estimation (11.30) permet d'obtenir (7.4) à l'aide (7.2) et (7.5) à l'aide de (7.3).

.

Pour obtenir ces estimations sur $[-T,0]$, il suffit d'appliquer les estimations obtenues sur $[0,T]$ à $v(x,t)=u(x,-t)$ qui est solution d'une équation du même type que celle dont u est solution.

Les estimations sur $[-T,T]$ se déduisent des estimations obtenues sur $[-T,0]$ et sur $[0,T]$.

Unicité :

Supposons que l'équation (7.1) admette deux solutions u_1 et u_2 sur un intervalle $[-T,T]$ alors u_1-u_2 est solution d'une équation du type (7.1) avec $f=0$ et $u_0=0$ donc u_1-u_2 vérifie (7.6), c'est à dire que

$$\sup_{[-T,T]}\|u_1-u_2\|_s \le 0$$

donc, pour tout $t\in[0,T]$ et tout $x\in\mathbb{R}^n$,

$$u_1(x,t)=u_2(x,t).$$

Existence :

On commence par prouver l'existence sur tout intervalle $[0,T]$, l'existence sur $[-T,0]$ s'en déduisant en considérant $v(x,t)=u(x,-t)$.

Soit $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction plateau telle que $\varphi(\xi)=1$ si $|\xi|\leq\frac{1}{2}$ et $\varphi(\xi)=0$ si $|\xi|\geq 1$.
Pour tout $\varepsilon\in]0,1]$, considérons l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x u + T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x\bar{u} + C_1 u + C_2\bar{u} + f(x,t)\\ u(x,0)=u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)\end{array}\right. \tag{11.31}$$

Soit $T>0$ tel que $\sup_{[0,T]}\|f\|_s<+\infty$.

Cette équation admet une unique solution dans $C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$ avec $T_\varepsilon\in]0,T]$. On note cette solution u_ε.

En effet, La fonctionnelle Υ définie par

$$\Upsilon u = e^{i\mathscr{L}t}u_0 + \int_0^t e^{i\mathscr{L}(t-t')}((T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_1)u + (T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_2)\bar{u} + f(x,t'))dt'$$

admet un unique point fixe pour T_ε assez petit.
Pour vérifier cela, on remarque que

$$\int_0^t \|(T^\delta_{b_1}.\nabla_x\varphi(\varepsilon D)+C_1)u\|_s\,dt \leq \\ t\|b^\delta_1(x,D)\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))}\sup_{[0,t]}\|\nabla_x\varphi(\varepsilon D)u\|_0 + t\|C_1\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))}\sup_{[0,t]}\|u\|_0.$$

Or en utilisant le support φ, on a

$$\|\nabla_x\varphi(\varepsilon D)\|_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n))}\leq\frac{A}{\varepsilon}$$

où A est indépendante de ε. Pour $T_\varepsilon\leq\varepsilon$ assez petit, on otient donc que

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|\Upsilon u\|_s\leq\|u_0\|_s+\frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|u\|_s.$$

On a donc que si $u\in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$ alors $\Upsilon u\in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.

De plus, pour tout u et tout $v\in C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|\Upsilon(u-v)\|_s\leq\frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|u-v\|_s.$$

L'opérateur Υ est donc contractant dans $C([0,T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.

En étudiant de la même manière le problème (11.31) mais avec la donnée initiale

$$u(x,0)=u_\varepsilon(T_\varepsilon),$$

on obtient l'existence d'une solution dans $C([0,2T_\varepsilon];H^s(\mathbb{R}^n))$.
En effet, en posant

$$\Upsilon_1 u = e^{i\mathscr{L}t}u_\varepsilon(T_\varepsilon) + \int_0^t e^{i\mathscr{L}(t-t')}((T^\delta_{b_1}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_1)u + (T^\delta_{b_2}\varphi(\varepsilon D).\nabla_x + C_2)\bar{u} + f(x,t'))dt',$$

pour le même T_ε, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|\Upsilon_1 u\|_s\leq\|u_\varepsilon(T_\varepsilon)\|_s+\frac{1}{2}\sup_{[0,T_\varepsilon]}\|u\|_s.$$

On obtient donc que si $u \in C([0,T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$ alors $\Upsilon_1 u \in C([0,T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

De plus, pour tout u et tout $v \in C([0,T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$, on a

$$\sup_{[0,T_\varepsilon]} \|\Upsilon_1(u-v)\|_s \leq \frac{1}{2} \sup_{[0,T_\varepsilon]} \|u-v\|_s.$$

L'opérateur Υ_1 est donc contractant dans $C([0,T_\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

En réitérant ce raisonnement, on obtient que pour tout $T > 0$, le problème (11.31) admet une unique solution dans $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

On rappelle le lemme 9.2 :

Lemme 11.11 *La solution u_ε de (9.17) vérifie les estimations d'énergie (7.2), (7.3), (7.4), (7.5), (7.6) et (7.7) données dans le théorème 7.3 rappelées ci-dessous, uniformément en ε.*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{7.2}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_T^2 \leq A(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)) \tag{7.3}$$

avec

$$|||u|||_T = \sup_\mu \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu \rangle^{-2} u\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et $I_T(f,u)$ est une combinaison linéaire d'au plus trois termes de la forme $\int_0^T |\langle Gf, u\rangle| \, dt$ où $G \in OpS^0_{0,0}$.

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}} f)), \tag{7.4}$$

avec

$$\mathcal{N}_T(f) = \sup_\mu \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu \rangle^2 f\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_T \leq A(\|u_0\|_s + \mathcal{N}_T(J^{s-\frac{1}{2}} f)), \tag{7.5}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_s \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s \, dt \right), \tag{7.6}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}} u|||_T \leq A\left(\|u_0\|_s + \int_0^T \|f(t)\|_s \, dt \right). \tag{7.7}$$

Idées pour la Preuve. La solution u_ε de (9.17) vérifie les lemmes 11.2 (numéroté aussi 7.2) et 11.1 (numéroté aussi 7.1) uniformément en $\varepsilon \in]0,1]$.

Ce résultat s'obtient en remplaçant dans la preuve du lemme 11.2 (voir preuve du lemme 7.2 section V) T_{b_i} par $T_{b_i}\varphi(\varepsilon D)$ dont le symbole est

$$\tilde{b}_i^\delta(x,\xi)\varphi(\varepsilon\xi)$$

et vérifie le lemme 4.3 avec en particulier

$$\tilde{b}_i^\delta(x,\xi)\varphi(\varepsilon\xi) \in S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes uniformément bornées en ε et μ et

$$\tilde{b}_i^\delta(x,\xi)\varphi(\varepsilon\xi) \in C^2 S^0_{1,0}$$

car $\varrho \geq 2$.

On a aussi toujours

$$2\sum_{i\in\{1,2\}}|\tilde{b}_i^\delta(x,\xi)\varphi(\varepsilon\xi).\xi|\leq 4A_2\sum_\mu\langle x-x_\mu\rangle^{-4}\sum_{i\in\{1,2\}}|\alpha_{i,\mu}|\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}$$

et

$$\gamma(x,\xi)=p(x-x_{\mu_0},\xi)+10A_2\sum_\mu(|\alpha_{1,\mu}|+|\alpha_{2,\mu}|)p(x-x_\mu,\xi).$$

Dans la preuve du lemme 11.1, on remplace η_μ par

$$\tilde{\eta}_\mu(x,\xi)=\varphi(\varepsilon\xi)\eta_\mu(x,\xi).$$

On remarque $\tilde{\eta}_\mu$ vérifie les mêmes propriétés que η_μ (lemme 11.3 avec des estimations uniformes en ε car $\varepsilon\in]0,1]$) et, en particulier, on a

$$2\tilde{\xi}.\nabla_x\tilde{\eta}_\mu(x,\xi)=-\mathscr{I}(\tilde{\varphi}_{1,\mu}^\delta(x,\xi)\varphi(\varepsilon\xi)).\xi.$$

Ce qui permet d'obtenir un autre opérateur $\mathbf{C}_\varepsilon$ vérifiant les mêmes propriétés que $\mathbf{C}\in OpS^0_{0,0}$ avec notamment les semi-normes de son symbole uniformément bornées en $\varepsilon\in]0,1]$ et que

$$i[\mathbf{C}_\varepsilon\mathscr{L}-\mathscr{L}\mathbf{C}_\varepsilon]+\mathbf{C}_\varepsilon T^\delta_{i\mathscr{I}(\varphi_{1,\mu})}\varphi(\varepsilon D).\nabla$$

vérifie exactement les mêmes estimations et propriétés que

$$i[\mathbf{C}\mathscr{L}-\mathscr{L}\mathbf{C}]+\mathbf{C}T^\delta_{i\mathscr{I}(\varphi_{1,\mu})}.\nabla$$

□

Sachant que $v=u_\varepsilon-u_{\varepsilon'}$ est solution de l'équation (9.17) avec

$$\tilde{f}=T^\delta_{b_1}.\nabla_x(\varphi(\varepsilon D)-\varphi(\varepsilon' D))u_\varepsilon+T^\delta_{b_2}.\nabla_x(\varphi(\varepsilon D)-\varphi(\varepsilon' D))\overline{u_\varepsilon}$$

et $v_0=0$ donc, d'après le lemme 11.11, v vérifie les estimations d'energie du théorème 7.3. C'est à dire que l'on a

$$\sup_{[0,T]}\|v\|_0\leq A\int_0^T\|\tilde{f}\|_0\,dt.$$

Or,

$$\|\tilde{f}\|_0\leq A\max_{i\in\{1,2\}}\|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|(\varphi(\varepsilon D)-\varphi(\varepsilon' D))u_\varepsilon\|_1$$

et

$$\varphi(\varepsilon D)-\varphi(\varepsilon' D)=(\varepsilon-\varepsilon')\int_0^1(\nabla_\xi\varphi)((\varepsilon t+\varepsilon'(1-t))D).\nabla_x\,dt$$

donc on a

$$\|\tilde{f}\|_0\leq A(\varepsilon-\varepsilon')\|u_\varepsilon\|_2.$$

Or, d'après le lemme 11.11, on a

$$\|u_\varepsilon\|_2\leq A\left(\|u_0\|_2+\int_0^T\|f\|_2\,dt\right),$$

donc, pour tout ε, tout ε', tout $u_0, f\in H^2$ et tout $T>0$, on a

$$\int_0^T\|\tilde{f}\|_0\,dt\leq(\varepsilon-\varepsilon')\max(T,T^2)A\left(\|u_0\|_2+\sup_{[0,T]}\|f\|_2\right).$$

On obtient que pour tout $T > 0$, (u_ε) est de Cauchy dans l'espace complet

$$C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$$

et donc converge vers l'unique solution u de (7.1) pour tout $u_0 \in H^2$.
De plus, par un argument classique de densité de $S(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut approcher u_0 et f dans L^2 par deux suites de fonctions $(u_{0,k})$ et (f_k) dans $S(\mathbb{R}^n)$.
Soit u_k l'unique solution de (7.1) (avec f_k au lieu de f) dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ associée à $u_{0,k}$. D'après les estimations d'énergie données dans le théorème 7.3, on a

$$\sup_{[0,T]} \|u_k - u_{k'}\|_0 \leq A \left(\|u_{0,k} - u_{0,k}\|_0 + T \sup_{[0,T]} \|f_k - f_{k'}\|_0 \right).$$

Sachant que $(u_{0,k})$ et (f_k) convergent, on obtient que (u_k) est de Cauchy dans l'espace $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ et converge donc vers l'unique solution u de (7.1) dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ pour tout u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

12

Preuve du théorème 7.1 : Existence locale et effet régularisant pour des équations non linéaires type Schrödinger avec une non linéarité C^∞ nulle à l'odre 2 en 0.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \end{array}\right. \tag{12.1}$$

où F est une fonction C^∞ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, nulle en 0 ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2.

On appelle équation paralinéaire associée, l'équation ci-dessous obtenue par la formule de Bony.

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{\partial_v F}.\nabla_x u + T_{\partial_{\overline{v}} F}.\nabla_x \overline{u} + T_{\partial_u F}.u + T_{\partial_{\overline{u}} F}.\overline{u} + R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{12.2}$$

où

$$R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \in H^{\frac{n}{2}+2\varrho} \text{ si } u \in H^s \text{ avec } s = \frac{n}{2} + 1 + \varrho \text{ et } \varrho > 0.$$

On pose

$$v = \nabla_x u, \quad z_0 = (u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0), \quad z = (u, v, \overline{u}, \overline{v}),$$

$$b_1(x) = \partial_v F(z), \quad b_2(x) = \partial_{\overline{v}} F(z), \quad a_1(x) = \partial_u F(z), \quad a_2(x) = \partial_{\overline{u}} F(z)$$

et

$$b_1^0(x) = \partial_v F(z_0), \quad b_2^0(x) = \partial_{\overline{v}} F(z_0), \quad a_1^0(x) = \partial_u F(z_0), \quad a_2^0(x) = \partial_{\overline{u}} F(z_0).$$

L'équation (12.2) s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1^0}.\nabla_x u + T^\delta_{b_2^0}.\nabla_x \bar{u} + T^\delta_{a_1^0} u + T^\delta_{a_2^0} \bar{u} + \tilde{R}_u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}\right. \tag{12.3}$$

avec

$$\tilde{R}_u = R(u, v, \overline{u}, \overline{v}) + \tilde{R}_{u,2} + \tilde{R}_{u,3} + \tilde{R}_{u,4}$$

où, pour tout $\delta \in [0, 1[$,

$$\tilde{R}_{u,2} = (T_{b_1} - T^{\delta}_{b_1}).\nabla u + (T_{b_2} - T^{\delta}_{b_2}).\nabla \bar{u},$$
$$\tilde{R}_{u,3} = (T^{\delta}_{b_1} - T^{\delta}_{b_1^0}).\nabla u + (T^{\delta}_{b_2} - T^{\delta}_{b_2^0}).\nabla \bar{u},$$
$$\tilde{R}_{u,4} = (T_{a_1} - T^{\delta}_{a_1^0})u + (T_{a_2} - T^{\delta}_{a_2^0})\bar{u}.$$

Par hypothèse, on a

$$2 < s - (n/2 + 1).$$

Soit $(q_\mu)_\mu$ une partition de l'unité subordonnée au Q_μ. On a

$$b_i^0(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} q_\mu(x) b_i^0(x).$$

Soit $\mu \in \mathbb{Z}^n$.
Si $\|q_\mu b_i^0\|_{C^2} \neq 0$, on pose

$$\alpha^0_{i,\mu} = \|q_\mu b_i^0\|_{C^2} \quad \text{et} \quad \varphi^0_{i,\mu}(x) = \frac{q_\mu b_i^0(x)}{\|q_\mu b_i^0\|_{C^2}}.$$

Sinon, on pose $\alpha^0_{i,\mu} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^0_{i,\mu}(x) = 0$.

Sous les hypothèses du Théorème 7.1, (F est nulle en 0, ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2) en utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre 2 de $\partial_v F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$, en posant $z_0 = (u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$, on obtient

$$b_1^0(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma| = 2} z_0^\gamma h_{1,\gamma}(z_0)$$

avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)| \leq \sup_{x \in [-\|u_0\|_s, \|u_0\|_s]^{2n+2}} |G_{1,\gamma}(x)|$$

où

$$G_{1,\gamma}(\mathscr{R}(u_0), \nabla \mathscr{R}(u_0), \mathscr{I}(u_0), \nabla \mathscr{I}(u_0)) = h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0).$$

On a le même résultat pour b_2 mais en utilisant $\partial_{\overline{v}} F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$.

Dans la suite $A_n(\|u_0\|_s)$ et $B_n(\|u_0\|_s)$ désignent des constantes qui ne dépendent que de n, s et de $\|u_0\|_s$.

Sachant que sur le support de q_μ, on a

$$\langle x - x_\mu \rangle \leq d_n,$$

en posant

$$\iota_\mu = \langle x - x_\mu \rangle^{-(n+1)},$$

on obtient

$$\|q_\mu b_i^0\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{|\gamma|=2} \sup_{x \in [-\|u_0\|_s, \|u_0\|_s]^{2n+2}} |G_{1,\gamma}(x)| \sup_{|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 1} \|\iota_\mu^2 \partial_x^{\gamma_1} u_0 \partial_x^{\gamma_2} u_0\|_{s-1}.$$

Or

$$s - 1 > \frac{n}{2} + 2,$$

donc d'après l'inégalité de Sobolev, on a

$$\|q_\mu b_i^0\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq A_n(\|u_0\|_s) \sup_{|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq 1} \|\iota_\mu \partial_x^{\gamma_1} u_0\|_{s-1} \|\iota_\mu \partial_x^{\gamma_2} u_0\|_{s-1}.$$

C'est à dire que

$$\sup_{i\in\{1,2\}} \alpha^0_{i,\mu} \le A_n(\|u_0\|_s) \sup_{|\gamma_1|,|\gamma_2|\le 1} \|\iota_\mu \partial_x^{\gamma_1} u_0\|_{s-1} \|\iota_\mu \partial_x^{\gamma_2} u_0\|_{s-1}$$

où

$$A_n(\|u_0\|_s) \ge A \sup_{\gamma\in\mathbb{N}^{2n+2},|\gamma|=2} \sup_{x\in[-\|u_0\|_s,\|u_0\|_s]^{2n+2}} \sup_{i\in\{1,2\}} |G_{i,\gamma}(x)|.$$

D'après le lemme 3.7, on a

$$\sup_{|\gamma|\le 1} \|\iota_\mu \partial_x^\gamma u_0\|_{s-1} \in l^2$$

et

$$\sup_{i\in\{1,2\}} \| \|\iota_\mu b^0_i\|_{s-1}\|_{l^1} \le B_n(\|u_0\|_s)$$

où

$$B_n(\|u_0\|_s) \ge \|u_0\|_s^2 A_n(|u_0\|_s).$$

En utilisant l'hypothèse que la non-linéarité F s'annule à l'ordre 2, on a donc démontré que

$$(\alpha^0_{i,\mu})_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \in l^1 \text{ avec } \sum_\mu |\alpha^0_{i,\mu}| \le B_n(\|u_0\|_s).$$

On peut donc appliquer le théorème 7.3 à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b^0_1}.\nabla u + T^\delta_{b^0_2}.\nabla \bar{u} + T^\delta_{a^0_1} u + T^\delta_{a^0_2}\bar{u} + f \text{ où } f = \tilde{R}_u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{12.4}$$

On définit $\lambda_1^T(w)$, $\lambda_2^T(w)$ et $\lambda_3^T(w)$ par

$$\lambda_1^T(w) = \sup\nolimits_{[0,T]} \|w\|_s, \quad \lambda_2^T(w) = |||J^{s+\frac{1}{2}}w|||_T\,, \quad \lambda_3^T(w) = \sup\nolimits_{[0,T]} \|\partial_t w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon},$$

$$\Gamma^T(w) = \max(\lambda_1^T(w), \lambda_2^T(w), \lambda_3^T(w)).$$

On pose

$$Z^T_{\|u_0\|_s} = \left\{ w \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n)\right) : w(x,0) = u_0(x) \text{ } et \text{ } \Gamma^T(w) \le 10K_n(\|u_0\|_s) \right\}$$

où $K_n(\|u_0\|_s)$ désigne une constante fixé assez grande ne dépendant que de n, de s et de $\|u_0\|_s$ telle que

$$K_n(\|u_0\|_s) \ge \|u_0\|_s J_n(\|u_0\|_s)$$

$$J_n(\|u_0\|_s) \ge C_n(\|u_0\|_s)$$

avec $C_n(\|u_0\|_s)$ une constante polynomiale en n, $B_n(\|u_0\|_s)$ et $e^{B_n(\|u_0\|_s)}$.

Dans la suite, pour tout $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$, on pose

$$\Upsilon w(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')\tilde{R}_w(t')dt'$$

où $W(t)u_0$ est la solution de l'équation (12.4) pour $f = 0$ (l'existence énoncée dans le théorème 7.3 n'est utilisée que dans le cas $f = 0$). Un point fixe de Υ est solution de (12.3) et donc solution du problème de Cauchy (12.1). En effet, en notant B l'opérateur conjugaison, on a

$$\begin{aligned} &\partial_t \Upsilon w(t) = (i\mathscr{L} + T^\delta_{b^0_1}.\nabla + T^\delta_{b^0_2}.\nabla B + T^\delta_{a^0_1} + T^\delta_{a^0_2} B)W(t)u_0 + \\ &\int_0^t (i\mathscr{L} + T^\delta_{b^0_1}.\nabla + T^\delta_{b^0_2}.\nabla B + T^\delta_{a^0_1} + T^\delta_{a^0_2} B)W(t-t')\tilde{R}_w(t')\,dt' + \tilde{R}_w(t) \end{aligned}$$

$$\partial_t \Upsilon w(t) = (i\mathscr{L} + T^{\delta}_{b^0_1}.\nabla + T^{\delta}_{b^0_2}.\nabla B + T^{\delta}_{a^0_1} + T^{\delta}_{a^0_2} B)\Upsilon w(t) + \tilde{R}_w(t). \tag{12.5}$$

Sachant que Υw est solution de (12.5), on peut appliquer les estimations (7.2) et (7.3) pour obtenir que

$$\begin{aligned} \lambda_1^T(\Upsilon w)^2 + \lambda_2^T(\Upsilon w)^2 \leq C_n(\|u_0\|_s)^2(\|u_0\|_s^2 + I_T(R(w,\nabla w,\overline{w},\nabla\overline{w}),\Upsilon w) \\ + I_T(\tilde{R}_{w,4},\Upsilon w) + I_T(\tilde{R}_{w,2},\Upsilon w) + I_T(\tilde{R}_{w,3},\Upsilon w)). \end{aligned} \tag{12.6}$$

Lemme 12.1 *Pour tout $T > 0$, on a*

$$I_T(f,u) \leq AT\left(\sup_{[0,T]}\|f\|_0^2 + \sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right). \tag{12.7}$$

Dans la suite θ_1 désigne une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta_1(x) = 0$ si $|x| \leq 1$ et $\theta_1(x) = 1$ si $|x| \geq 2$. Si $f = \sum_\mu \alpha_\mu f_\mu$ avec $\sum_\mu |\alpha_\mu| \leq A$ alors, pour tout $T > 0$, tout $R' \geq 1$ et tout $R \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} & I_T(J^s f, J^s u) \leq \\ & AR'\|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}}\theta_1(D/R)f_\mu\|^2_{l^\infty(L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T]))} + \frac{A}{R'}|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \\ & + AT\left(\sup_{[0,T]}\|(Id - \theta_1(D/R))J^s f\|_0^2 + \sup_{[0,T]}\|J^s u\|_0^2\right). \end{aligned} \tag{12.8}$$

Cette dernière estimation étant aussi vérifiée avec Id au lieu de $\theta_1(D/R)$.

Preuve : Voir section V.

On rappelle que l'on note

$$\tilde{R}_u = R(u,\nabla u,\overline{u},\nabla\overline{u}) + \tilde{R}_{u,2} + \tilde{R}_{u,3} + \tilde{R}_{u,4}$$

où, pour tout $\delta \in [0,1[$,

$$\tilde{R}_{u,2} = (T_{b_1} - T^{\delta}_{b_1}).\nabla u + (T_{b_2} - T^{\delta}_{b_2}).\nabla\bar{u},$$

$$\tilde{R}_{u,3} = (T^{\delta}_{b_1} - T^{\delta}_{b^0_1}).\nabla u + (T^{\delta}_{b_2} - T^{\delta}_{b^0_2}).\nabla\bar{u},$$

$$\tilde{R}_{u,4} = (T_{a_1} - T^{\delta}_{a^0_1})u + (T_{a_2} - T^{\delta}_{a^0_2})\bar{u}.$$

On remarque que les coefficients a_i et b_i admettent une décomposition suivant les cubes Q_μ comme les coefficients a_i^0 et b_i^0. On note

$$b_i = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu}$$

avec

$$\sum_\mu |\alpha_{i,\mu}| \leq B_n(\|u\|_s)$$

et

$$\|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1.$$

On applique alors (12.7) à $I_T(R(w,\nabla w,\overline{w},\nabla\overline{w}),\Upsilon w)$ et $I_T(\tilde{R}_{w,4},\Upsilon w)$.

De plus, en posant

$$b_{3,i}(x,t) = \int_0^1 \partial_t b_i(x,tt')\,dt',$$

on a

$$T^{\delta}_{b_i} - T^{\delta}_{b^0_i} = tT^{\delta}_{b_{3,i}(x,t)}.$$

$\partial_t b_i(x,t) = \sum_\mu \tilde{\alpha}_{i,\mu}\tilde{\tilde{\varphi}}_{i,\mu}$ avec $\tilde{\alpha}_{i,\mu} = \|q_\mu \partial_t b_i(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ et $\tilde{\tilde{\varphi}}_{i,\mu} = \frac{q_\mu \partial_t b_i}{\|q_\mu \partial_t b_i(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}$.

Sachant que $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$ et que, par exemple, pour $i=1$,

$$b_i(x,t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma|=2} z^\gamma h_{i,\gamma}(z)$$

avec $z = (w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) \in \mathbb{C}^{2n+2}$ donc

$$\partial_t b_i(x,t) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma|=2} \partial_t(z^\gamma) h_{i,\gamma}(z) + z^\gamma \partial_t(h_{i,\gamma}(z)).$$

Sachant que $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$, on a

$$\sup_{i\in\{1,2\}, x\in\mathbb{R}^n} (|h_{i,\gamma}(z)| + |(\nabla h_{i,\gamma})(z)|) \leq D_n(\|u_0\|_s),$$

et donc, pour $s_2 = \frac{n}{2} + 1 + \varepsilon$, on a $\partial_t b_i \in H^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$ et

$$\sum_\mu |\tilde{\alpha}_{i,\mu}| \leq \|w\|_{s_2} \|\partial_t w\|_{s_2} D_n(\|u_0\|_s),$$

$$\sum_\mu |\tilde{\alpha}_{i,\mu}| \leq 100 K_n(\|u_0\|_s)^2 D_n(\|u_0\|_s).$$

C'est une nouvelle fois l'hypothèse que la nonlinéraité F s'annule à l'ordre 2 qui permet d'obtenir la convergence la série des $|\tilde{\alpha}_{i,\mu}|$.

On peut donc appliquer (12.8) à $I_T(\tilde{R}_{w,2}, \Upsilon w)$, et à $I_T(\tilde{R}_{w,3}, \Upsilon w)$ dans le cas $\theta_1 = 1$.

Pour R et R' assez grands, et T assez petit, en posant

$$b_{i,\mu}(x,t) = \int_0^1 \tilde{\tilde{\varphi}}_{i,\mu}(x, tt')\, dt',$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}\lambda_1^T(\Upsilon w)^2 + \lambda_2^T(\Upsilon w)^2 \leq{}& C_n(\|u_0\|_s)^2 (\|u_0\|_s^2 + T \sup_{[0,T]} \|R(w, \nabla w, \overline{w}, \nabla\overline{w}) + \tilde{R}_{w,4}\|_s^2 \\ &+ T 100 K_n(\|u_0\|_s)^2 D_n(\|u_0\|_s) \sup_{i,\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}} T_{b_{i,\mu}}.\nabla w\|_0^2\, dt\right) \\ &+ \sup_{i,\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}} \theta_1\left(\frac{D}{R}\right)\left(T_{\varphi^0_{i,\mu}} - T^\delta_{\varphi^0_{i,\mu}}\right).\nabla w\|_0^2\, dt\right).\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.4 et la proposition 4.4, pour $\varrho \geq 1$, on a

$$\|R(w, \nabla w, \overline{w}, \nabla\overline{w})\|_s \leq A \sup_{x\in[-\sup_{[0,T]}\|w\|_s, \sup_{[0,T]}\|w\|_s]} \Theta(x)\, \|w\|_s.$$

On rappelle que, par construction, on a $\|b_{i,\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ et que, comme b_i^0, b_i admet une décomposition du type

$$b_i = \sum_\mu \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu}$$

avec

$$\sum_{\mu} |\alpha_{i,\mu}| \leq B_n(10K_n(\|u_0\|_s))$$

car $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$ et

$$\|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho(\mathbb{R}^n)} \leq 1.$$

On énonce alors les deux lemmes suivants qui sont prouvés ensuite.

Lemme 12.2 *On a*

$$\sup_{i,\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}} T^\delta_{b_{i,\mu}}.\nabla w\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq A(\lambda_2^T(w) + T\lambda_1^T(w)).$$

Lemme 12.3 *On a aussi*

$$\sup_{\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}} \theta_1 \left(\frac{D}{R}\right) \left(T_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu}}\right).\nabla w\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq A \sup_{\mu} \|\varphi_{1,\mu}\|_{C^\varrho} \left(RT\lambda_1^T(w) + \frac{1}{R^{\varrho\delta}} \lambda_2^T(w) \right).$$

Preuve du lemme 12.2

On commute tout d'abord $[\langle x - x_\mu\rangle^2, J^{s-\frac{1}{2}}]$.
Le multiplicateur $\langle x - x_\mu\rangle^2$ étant un polynôme de degré 2, le symbole de ce commutateur noté $r(x, D)$ est

$$r(x, \xi) = -\sum_{|\nu| \in \{1,2\}} \partial_\xi^\nu (J^{s-\frac{1}{2}}) D_x^\nu (\langle x - x_\mu\rangle^2)$$

et donc

$$r(x, D)\langle x - x_\mu\rangle^{-2} \in S^{s-1-\frac{1}{2}}_{1,0}.$$

En posant

$$b(x, t) = b_{i,\mu}(x, t) \left(= \int_0^1 (\partial_t \tilde{\tilde{\varphi}}_{i,\mu})(x, tt') \, dt' \right),$$

on obtient que

$$\sup_{\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}} T^\delta_b.\nabla w\|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$AT \sup_{[0,T]} \|T_b.\nabla w\|_{s-\frac{3}{2}} + \sup_{\mu} \left(\int_0^T \|\langle x - x_\mu\rangle^2 T^\delta_b.\nabla w\|^2_{s-\frac{1}{2}} \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or,

$$\langle x - x_\mu\rangle^2 T^\delta_b \langle x - x_\mu\rangle^2 \in OpS^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes bornées par $A\|b\|_{L^\infty}$ où A est une constante indépendante de μ car, par construction, d'après le lemme 4.3,

$\tilde{b}^\delta$ absorbe les puissances de $\langle x - x_\mu\rangle$ et,

$$\tilde{b}^\delta \in S^0_{1,\delta}.$$

On a plus précisément que, pour chacune des coordonnées de b (que l'on note b pour simplifier), l'opérateur

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 T^\delta_b \langle x - x_\mu \rangle^2$$

a pour symbole

$$\begin{array}{l}\langle x - x_\mu \rangle^2 \tilde{b}^\delta(x,\xi)\langle x - x_\mu \rangle^2 \\ +\langle x - x_\mu \rangle^2 (\nabla_\xi \tilde{b}^\delta)(x,\xi).2i(x - x_\mu) \\ -2 \displaystyle\sum_{|\gamma|=2} (\partial^\gamma_\xi \tilde{b}))(x,\xi)\end{array}$$

or

$$\tilde{b}^\delta(x,\xi) = (1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))b(y)\, dy$$

donc

$$\begin{array}{l}(\partial_{\xi_k} \tilde{b}^\delta)(x,\xi) = \\ \partial_{\xi_k}((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}) \displaystyle\int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))b(y)\, dy \\ +(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \displaystyle\int \frac{\xi_k (x-y)}{|\xi|}.(\nabla\hat{\chi})(|\xi|^\delta (x-y))b(y)\, dy\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(\nabla_\xi \tilde{b}^\delta)(x,\xi).(x-x_\mu) = \\ \nabla_\xi((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}).(x-x_\mu) \displaystyle\int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))b(y)\, dy \\ +(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \displaystyle\int \frac{(x-y)}{|\xi|}.(\nabla\hat{\chi})(|\xi|^\delta (x-y))\xi.(x-x_\mu)b(y)\, dy\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(\nabla_\xi \tilde{b}^\delta)(x,\xi).(x-x_\mu) = \\ \nabla_\xi((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}). \displaystyle\int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))(x-y)b(y)\, dy \\ +\nabla_\xi((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}). \displaystyle\int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))(y-x_\mu)b(y)\, dy \\ +(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \displaystyle\int \frac{(x-y)}{|\xi|}.(\nabla\hat{\chi})(|\xi|^\delta (x-y))\xi.(x-y)b(y)\, dy+ \\ +(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \displaystyle\int \frac{(x-y)}{|\xi|}.(\nabla\hat{\chi})(|\xi|^\delta (x-y))\xi.(y-x_\mu)b(y)\, dy\end{array}$$

et , pour tout multi-indice γ de longueur 2, c'est à dire que γ est une vecteur composé de deux 1 en position j et k et d'un 2 si $j = k$, on a

$$\begin{array}{l}(\partial^\gamma_\xi \tilde{b}^\delta)(x,\xi) = \\ \partial^\gamma_\xi((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}) \displaystyle\int \hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y))b(y)\, dy \\ +(1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n} \displaystyle\int \partial^\gamma_\xi(\hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y)))b(y)\, dy \\ +2\partial_{\xi_j}((1-\psi(\xi))|\xi|^{\delta n}) \displaystyle\int \partial_{\xi_k}(\hat{\chi}(|\xi|^\delta (x-y)))b(y)\, dy\end{array}$$

De plus , on a

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 = 1 + \sum_k (x_k - x_{\mu,k})^2$$

donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 = 1 + \sum_k (x_k - y_k)^2 + (y_k - x_{\mu,k})^2 + 2(x_k - y_k)(y_k - x_{\mu,k}).$$

Tout cela permet d'en déduire que

$$\langle x-x_\mu\rangle^2 T_b^\delta \langle x-x_\mu\rangle^2$$

est une somme d'opérateurs à symboles dans $S^0_{1,\delta}$ avec leurs semi-normes bornées par la somme ci-dessous

$$A\left(\|b\|_{L^\infty}+\|(y_k-x_{\mu,k})b\|_{L^\infty}+\|(y_k-x_{\mu,k})^2 b\|_{L^\infty}+ \right.$$
$$\left. \|(y_k-x_{\mu,k})^3 b\|_{L^\infty}+\|(y_k-x_{\mu,k})^4 b\|_{L^\infty}\right)$$

où A est une constante indépendante de μ mais sur le support de b, par construction,

$$|y-x_\mu|\leq c_n$$

avec $c_n\geq 1$ et donc

$$\langle x-x_\mu\rangle^2 T_b^\delta \langle x-x_\mu\rangle^2$$

est un opérateur à symbole dans $S^0_{1,\delta}$ avec ses semi-normes bornées par

$$5Ac_n^4\|b\|_{L^\infty}.$$

On a donc que

$$\langle x-x_\mu\rangle^2 T_b^\delta \langle x-x_\mu\rangle^2$$

est borné de $H^{s-\frac12}$ dans lui-même avec se norme d'opérateur borné par

$$A\|b\|_{L^\infty}.$$

On obtient donc que

$$\sup_\mu\left(\int_0^T \|\langle x-x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac12}T_b^\delta.\nabla w\|_0^2\,dt\right)^{\frac12}\leq$$
$$AT\sup_{[0,T]}\|T_b^\delta.\nabla w\|_{s-\frac32}+A\|b\|_{L^\infty}\sup_\mu\left(\int_0^T\|\langle x-x_\mu\rangle^{-2}\nabla w\|^2_{s-\frac12}\,dt\right)^{\frac12}.$$

Après commutation de $J^{s-\frac12}$ et $\langle x-x_\mu\rangle^{-2}$, on obtient que

$$\|\langle x-x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac12}T_b^\delta.\nabla w\|_{l^\infty(L^2(\mathbb{R}^n\times[0,T]))}\leq A\|b\|_{L^\infty}\left(T\sup_{[0,T]}\|w\|_{s-\frac12}+|||J^{s+\frac12}w|||_T\right).$$

Preuve du lemme 12.3

On a

$$\langle x-x_\mu\rangle^2 J^{s-\frac12}\theta_1\left(\frac{D}{R}\right)\left(T_{\varphi_{1,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{1,\mu}}\right).\nabla =$$
$$\left(\langle x-x_\mu\rangle^2\langle\xi\rangle^{s-\frac12}\theta_1\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)(x,D)\langle x-x_\mu\rangle^{-2}\,\langle x-x_\mu\rangle^2\left(T_{\varphi_{1,\mu}}-T^\delta_{\varphi_{1,\mu}}\right).\nabla$$

En utilisant que sur le support de θ_1,

$$R^{\delta\varrho}\langle\xi\rangle^{-\delta\varrho}\leq 1,$$

on a

$$\left(\langle x-x_\mu\rangle^2\langle\xi\rangle^{s-\frac12}\theta_1\left(\frac{\xi}{R}\right)\right)(x,D)\langle x-x_\mu\rangle^{-2}R^{\delta\varrho}J^{-\delta\varrho}\in OpS^{s-\frac12}_{1,\delta}$$

donc

$$\| \left(\langle x - x_\mu \rangle^2 \langle \xi \rangle^{s-\frac{1}{2}} \theta_1 \left(\frac{\xi}{R} \right) \right) (x, D) \, \left(T_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} \right) .\nabla w \|_0 \leq \frac{A}{R^{\delta \varrho}} \| J^{s+\delta\varrho-\frac{1}{2}} \langle x - x_\mu \rangle^2 \left(T_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} \right) .\nabla w \|_0.$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'opérateur

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 \left(T_{\varphi_{1,\mu,k}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu,k}} \right) \langle x - x_\mu \rangle^2$$

est borné de $H^{s-\frac{1}{2}}$ dans $H^{s-\frac{1}{2}+\delta\varrho}$ car $\langle x - x_\mu \rangle^2$ est un polynôme de degré 2 et donc, le symbole de cet opérateur est

$$- \sum_{|\nu| \leq 2} \langle x - x_\mu \rangle^2 \partial^\nu_\xi ((\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}(x, \xi) - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k}(x, \xi))) D^\nu_x (\langle x - x_\mu \rangle^2).$$

De plus, on a le lemme suivant (prouver à la fin de la démonstration du lemme 12.3).

Lemme 12.4 *Pour tout k et tout $k' \in [\![1, n]\!]$, on a*

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 (\tilde{\varphi}_{1,\mu,k} - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k}))(x, D)$$

et

$$(\langle x - x_\mu \rangle^2 (x_{k'} - x_{\mu,k'}) (\tilde{\varphi}_{1,\mu,k} - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k})(x, D))$$

sont des opérateurs bornés de H^s dans $H^{s+\delta\varrho}$ avec leur norme d'opérateur borné par

$$A \|\varphi_{1,\mu,k}\|_{C^\varrho}$$

où A est une constante indépandente de μ.

On obtient donc

$$\int_0^T \| J^{s-\frac{1}{2}} \langle x - x_\mu \rangle^2 (T_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu}}).\nabla w \|_0 \, dt \leq \sum_k \int_0^T \| \langle x - x_\mu \rangle^{-2} \partial_{x_k} w \|_{s-\frac{1}{2}} \, dt.$$

Le commutateur $[J^{s-\frac{1}{2}}, \langle x - x_\mu \rangle^{-2}] \in S^{s-\frac{3}{2}}_{1,0}$ donc on a

$$\left(\int_0^T \| J^{s-\frac{1}{2}} \langle x - x_\mu \rangle^2 \theta_1 \left(\frac{D}{R} \right) \left(T_{\varphi_{1,\mu}} - T^\delta_{\varphi_{1,\mu}} \right) .\nabla w \|_0^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A}{R^{\delta\varrho}} \lambda^T_2(w) + AT \lambda^T_1(w)$$

où l'on rappelle que

$$\lambda^T_2(w) = |||J^{s+\frac{1}{2}} w|||_T = \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_\mu \rangle^{-2} J^{s+\frac{1}{2}} w(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\lambda^T_1(w) = \sup_{[0,T]} \|w\|_s. \quad \square$$

Preuve du lemme 12.4.
On remarque tout d'abord que

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 = 1 + \sum_{k'} (x_{k'} - x_{\mu,k'})^2$$

et donc

$$\langle x - x_\mu \rangle^2 (\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}(x, \xi) - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k}(x, \xi)) = \tilde{\varphi}_{1,\mu,k}(x, \xi) - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k}(x, \xi) + \sum_{k'} (x_{k'} - x_{\mu,k'})^2 (\tilde{\varphi}_{1,\mu,k}(x, \xi) - \tilde{\varphi}^\delta_{1,\mu,k}(x, \xi)).$$

La proposition 4.4 donne le résultat pour le premier terme.
Pour l'autre terme, sachant que

$$(x_{k'} - x_{\mu,k'})^2 = (x_{k'} - y_{k'})^2 + 2(x_{k'} - y_{k'})(y_{k'} - x_{\mu,k'}) + (y_{k'} - x_{\mu,k'})^2,$$

que

$$|x - x_\mu|^2 = \sum_{k'=1}^{k'=n} (x_{k'} - x_{\mu,k'})^2,$$

en revenant à la définition de $\tilde{\varphi}^\delta(x,\xi)$, sachant que, pour tout k, tout $k' \in [\![1,n]\!]$, et tout $k_0 \in \{1,2\}$,

$$\varphi_{k',\mu,k}(y) = (y_{k'} - x_{\mu,k'})^{k_0}\varphi_{\mu,k}(y) \in C^\varrho,$$

vérifie le lemme 4.3 et la proposition 4.4, on obtient le lemme 12.4 dans la premier cas. Le deuxième cas énoncé dans le lemme 12.4 se traite comme ci-dessus.

Revenons alors à la démonstration du théorème 7.1.

On applique alors à (12.6), les lemmes 12.2 et 12.3.

Sachant que $R^{-1} \leq R^{-\delta\varrho}$, on obtient donc que

$$\begin{aligned}\lambda_1^T(\Upsilon w)^2 + \lambda_2^T(\Upsilon w)^2 \leq C_n(\|u_0\|_s)^2(&\|u_0\|_s^2 + \\ &(R^{-\varrho\delta} + 100K_n(\|u_0\|_s)^2 D_n(\|u_0\|_s)T)\lambda_2^T(w)^2 \\ &+ A(1 + R + 100K_n(\|u_0\|_s)^2 D_n(\|u_0\|_s))T\lambda_1^T(w)^2).\end{aligned} \tag{12.9}$$

Ce qui donne, pour $\varrho\delta > 0$, R assez grand et T assez petit,

$$\lambda_1^T(\Upsilon w) + \lambda_2^T(\Upsilon w) \leq K_n(\|u_0\|_s). \tag{12.10}$$

Estimons alors $\lambda_3^T(\Upsilon w) = \sup\limits_{[0,T]} \|\partial_t \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}$.

On rappelle que Υw est solution de (12.4) avec $f = \tilde{R}_w$ et $\Upsilon w(0) = u_0$. En écrivant plus simplement que

$$f = F(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) - T^\delta_{b_1^0}.\nabla w - T^\delta_{b_2^0}.\nabla \overline{w} - T^\delta_{a_1^0} w - T^\delta_{a_2^0}\overline{w},$$

or

$$F(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) = T_{b_1}.\nabla w + T_{b_2}.\nabla \overline{w} + T_{a_1} w + T_{a_2}\overline{w} + R(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w})$$

donc, en posant

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) = \\ &\quad (T_{b_1} - T^\delta_{b_1}).\nabla w + (T_{b_2} - T^\delta_{b_2}).\nabla \overline{w} + (T_{a_1} - T^\delta_{a_1})w + (T_{a_2} - T^\delta_{a_2})\overline{w} \\ &\qquad + R(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}),\end{aligned}$$

on a

$$F(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) = T^\delta_{b_1}.\nabla w + T^\delta_{b_2}.\nabla \overline{w} + T^\delta_{a_1} w + T^\delta_{a_2}\overline{w} + \tilde{R}(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}).$$

En posant

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0}) = \\ &\quad (T_{b_1^0} - T^\delta_{b_1^0}).\nabla u_0 + (T_{b_2^0} - T^\delta_{b_2^0}).\nabla \overline{u_0} + (T_{a_1^0} - T^\delta_{a_1^0})u_0 + (T_{a_2^0} - T^\delta_{a_2^0})\overline{u_0} \\ &\qquad + R(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0}),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
f = \ & \tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0}) \\
& + \tilde{R}(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) - \tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0}) \\
& + (T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_1^0}).\nabla w + (T^\delta_{b_2} - T^\delta_{b_2^0}).\nabla \overline{w} \\
& + (T^\delta_{a_1} - T^\delta_{a_1^0}) w + (T^\delta_{a_2} - T^\delta_{a_2^0}) \overline{w}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\partial_t \Upsilon w = i\mathscr{L}\Upsilon w + T^\delta_{b_1^0}.\nabla \Upsilon w + T^\delta_{b_2^0}.\nabla \overline{\Upsilon w} + T^\delta_{a_1^0}\Upsilon w + T^\delta_{a_2^0}\overline{\Upsilon w} + f(x,t).$$

On en déduit que

$$\sup_{[0,T]} \|\partial_t \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \leq (1 + \|b_i^0\|_{L^\infty} + \|a_i^0\|_{L^\infty}) \lambda_1^T(\Upsilon w) + \sup_{[0,T]} \|f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.$$

Or,

$$1 + \|b_i^0\|_{L^\infty} + \|a_i^0\|_{L^\infty} \leq C_n(\|u_0\|_s)$$

donc, pour $K_n(\|u_0\|_s) \geq C_n(\|u_0\|_s)^2 \|u_0\|_s$, en utilisant l'estimation de $\lambda_1^T(\Upsilon w)$ donnée par l'inégalité (12.9), pour R assez grand et T assez petit, on obtient

$$\sup_{[0,T]} \|\partial_t \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \leq 2K_n(\|u_0\|_s) + \sup_{[0,T]} \|f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}. \tag{12.11}$$

Pour estimer $\sup_{[0,T]} \|f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}$, on commence par écrire que

$$\sup_{[0,T]} \|f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \leq \sup_{[0,T]} \|\theta_1\left(\frac{D}{R}\right) f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} + \sup_{[0,T]} \|\left(1 - \theta_1\left(\frac{D}{R}\right)\right) f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.$$

où R est un nombre réel fixé assez grand et θ_1 est définie comme précédemment, c'est à dire que $1-\theta_1$ est une fonction plateau telle que

$$1 - \theta_1(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1,$$
$$1 - \theta_1(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 2.$$

On a

$$\sup_{[0,T]} \|\theta_1\left(\frac{D}{R}\right) f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \leq \frac{10K_n(\|u_0\|_s)}{R} \lambda_1^T(w).$$

Pour estimer

$$\sup_{[0,T]} \|\left(1 - \theta_1\left(\frac{D}{R}\right)\right) f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon},$$

on utilise le théorème 4.4 dans le cas $s_1 = 0$ et et la proposition 4.4, c'est à dire que

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{R}(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) - \\
& \tilde{R}(((1-\theta_1(D/R))w, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x w, (1-\theta_1(D/R))\overline{w}, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x \overline{w})\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \\
& \quad \leq \theta(\|(1-\theta_1(D/R))w\|_{s-1}, \|(1-\theta_1(D/R))\nabla_x w\|_{s-1}, \|w\|_{s-1}, \|\nabla w\|_{s-1}) \\
& \qquad \times \|\nabla_x w - (1-\theta_1(D/R))\nabla w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{R}(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w}) \\
& - \tilde{R}(((1-\theta_1(D/R))w, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x w, (1-\theta_1(D/R))\overline{w}, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x \overline{w})\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \\
& \quad \leq \frac{\theta(\|(1-\theta_1(D/R))w\|_{s-1}, \|(1-\theta_1(D/R))\nabla_x w\|_{s-1}, \|w\|_{s-1}, \|\nabla w\|_{s-1})}{R} \|w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On a la même estimation pour u_0 à la place de w. De plus, on a

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{R}((1-\theta_1(D/R))w, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x w, (1-\theta_1(D/R))\overline{w}, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x \overline{w}) \\
& - \tilde{R}((1-\theta_1(D/R))u_0, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x u_0, (1-\theta_1(D/R))\overline{u_0}, (1-\theta_1(D/R))\nabla_x \overline{u_0})\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \\
& \quad \leq \theta(\|w\|_s, \|u_0\|_s) \|(1-\theta_1(D/R))(\nabla_x w - \nabla u_0)\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon},
\end{aligned}$$

or

$$\|(1-\theta_1(D/R))\nabla_x w - \nabla u_0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \leq R^2 T \lambda_3^T(w),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]} \|f\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} \leq \\ & A\left(\sum_i \|b_i - b_i^0\|_{L^\infty} + \|a_i - a_i^0\|_{L^\infty}\right)\lambda_1^T(w) \\ & \quad + \sup_{w\in Z^T_{\|u_0\|_s}} \theta(\|w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}, \|u_0\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon})\left(A\frac{\lambda_1^T(w)}{R} + AR^2T\lambda_3^T(w)\right) \\ & \quad + \|\tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0})\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\end{aligned}$$

En remplaçant dans (12.11), on obtient donc que

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq 2K_n(\|u_0\|_s) + E_n(\|u_0\|_s)\left(\frac{1}{R} + R^2 T\right) + K_n(\|u_0\|_s).$$

avec

$$K_n(\|u_0\|_s) \geq \|\tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0})\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}$$

et

$$\begin{aligned}E_n(\|u_0\|_s) \geq A\Bigg(& \sup_{w\in Z^T_{\|u_0\|_s}} \theta(\|w\|_s, \|u_0\|_s) + \sup_{w\in Z^T_{\|u_0\|_s}} \|F(w, \nabla_x w, \overline{w}, \nabla_x \overline{w})\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon} + \\ & (\|b_1^0\|_{L^\infty} + \|b_2^0\|_{L^\infty} + \|a_1^0\|_{L^\infty} + \|a_2^0\|_{L^\infty})\Bigg) \times (1 + 10K_n(\|u_0\|_s))^2.\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour R assez grand et T assez petit,

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \leq 10K_n(\|u_0\|_s). \tag{12.12}$$

On déduit de (12.10) et de (12.12) que $\Upsilon(Z^T_{\|u_0\|_s}) \subset Z^T_{\|u_0\|_s}$.

Pour prouver que, pour T assez petit, Υ est contractante sur $Z^T_{\|u_0\|_s}$, comme précédemment, on applique les estimations du théorème 7.3 à $\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2$, ce qui est possible car

$$\partial_t(\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2) = (i\mathscr{L} + T^{\frac{1}{2}}_{b_1^0}.\nabla + T^{\frac{1}{2}}_{b_2^0}.\nabla B + T^{\frac{1}{2}}_{a_1^0} + T^{\frac{1}{2}}_{a_2^0} B)(\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2) + \tilde{R}_{w_1} - \tilde{R}_{w_2} \ .$$

En remarquant, par exemple, que

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{w_1,3} - \tilde{R}_{w_2,3} = (T_{b_1(w_1)} - T_{b_1(w_2)}).\nabla_x w_1 + T_{b_1(w_2)}.\nabla_x(w_1 - w_2) + \\ (T_{b_1(w_1)} - T_{b_1(w_2)}).\nabla_x \overline{w_1} + T_{b_1(w_2)}.\nabla_x \overline{(w_1 - w_2)},\end{aligned}$$

sachant que

$$b_1(w_1) - b_1(w_2) = (w_1 - w_2).\int_0^1 (\nabla b_1)(t'w_1 + (1-t')w_2)\,dt'$$

avec $(w_1 - w_2).\int_0^1 (\nabla b_1)(t'w_1 + (1-t')w_2)\,dt'$ admettant une décomposition $\sum_\mu \alpha_{4,\mu}\tilde{\varphi}_{4,\mu}$ suivant les Q_μ telle que

$$\sum_\mu |\alpha_{4,\mu}| \leq \sup_{[0,T]} \|w_1 - w_2\|_{\frac{n}{2}+\varrho'} \sup_{t'\in[0,1], t\in[0,T]} \|(\nabla b_1)(t'w_1 + (1-t')w_2)\|_{\frac{n}{2}+\varrho'},$$

en utilisant, de plus, le théorème 4.4 pour estimer

$$\|R(w_1, \nabla_x w_1, \overline{w}_1, \nabla_x \overline{w}_1) - R(w_2, \nabla_x w_2, \overline{w}_2, \nabla_x \overline{w}_2)\|_s,$$

et les arguments déjà utilisés pour les autres termes, on obtient que, pour tout w_1 et tout w_2 dans $Z^T_{\|u_0\|_s}$,

$$\Gamma^T(\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2) \leq G_n(\|u_0\|_s)(T + R^{-\delta\varrho})\Gamma^T(w_1 - w_2).$$

Ce qui permet d'obtenir que Υ est contractante dans $Z^T_{\|u_0\|_s}$ pour R assez grand et T assez petit.

Sachant que $Z^T_{\|u_0\|_s}$ est un espace métrique complet, on peut donc appliquer le théorème du point fixe. On obtient alors le théorème 7.1 car

$$Z^T_{\|u_0\|_s} \subset \left\{ u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n)), u(x,0) = u_0 \text{ et } |||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T < \infty \right\} = E_T.$$

L'unicité dans E_T s'obtient en remarquant que si une solution u existe dans E_T alors, en appliquant les estimations du théorème 7.3 à u et en utilisant des arguments déjà utilisés pour obtenir le point fixe, pour $T > 0$ assez petit, on a $u \in Z^T_{\|u_0\|_s}$. En effet, u vérifie $\Upsilon u = u$ et donc, en appliquant (12.10), on obtient

$$\sup_{[0,T]} \|u\|_s + |||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T \leq K_n(\|u_0\|_s)$$

Pour prouver la propriété de continuité par rapport aux données initiales, on remarque tout d'abord que, s'il existe $r > 0$ tel que

$$\|u_0\|_s \leq r$$

alors toutes le constantes $A_n(\|u_0\|_s)$, $B_n(\|u_0\|_s)$,..., $K_n(\|u_0\|_s)$ se majorent par une constantes $A_{n,r}$ ne dépendant plus de u_0, et donc la solution u associée à u_0 existe sur un intervalle $[-T_r, T_r]$ avec T_r indépendant de u_0.
On utilise que si u et $\tilde{u}$ sont les deux solutions associées respectivement aux données initiales u_0 et $\tilde{u}_0$, on a

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{b_1^0}.\nabla u + T_{b_2^0}.\nabla \overline{u} + T_{a_1^0}u + T_{a_2^0}\overline{u} + \tilde{R}_u$$

et

$$\partial_t \tilde{u} = i\mathscr{L}\tilde{u} + T_{b_1(\tilde{u}_0)}.\nabla \tilde{u} + T_{b_2(\tilde{u}_0)}.\nabla \overline{\tilde{u}} + T_{a_1(\tilde{u}_0)}\tilde{u} + T_{a_2(\tilde{u}_0)}\overline{\tilde{u}} + \tilde{R}_{\tilde{u}},$$

où

$$\begin{aligned} b_1(\tilde{u}_0) &= (\nabla_v F)(\tilde{u}_0, \nabla\tilde{u}_0, \overline{\tilde{u}}_0, \nabla\overline{\tilde{u}}_0), \\ b_2(\tilde{u}_0) &= (\nabla_{\overline{v}} F)(\tilde{u}_0, \nabla\tilde{u}_0, \overline{\tilde{u}}_0, \nabla\overline{\tilde{u}}_0), \\ a_1(\tilde{u}_0) &= (\nabla_u F)(\tilde{u}_0, \nabla\tilde{u}_0, \overline{\tilde{u}}_0, \nabla\overline{\tilde{u}}_0), \\ a_2(\tilde{u}_0) &= (\nabla_{\overline{u}} F)(\tilde{u}_0, \nabla\tilde{u}_0, \overline{\tilde{u}}_0, \nabla\overline{\tilde{u}}_0). \end{aligned}$$

On obtient donc $u - \tilde{u}$ est solution de (9.20) avec

$$f = \tilde{R}_u - \tilde{R}_{\tilde{u}} + T_{b_1^0 - b_1(\tilde{u}_0)}.\nabla_x \tilde{u} + T_{b_2^0 - b_2(v_0)}.\nabla_x \overline{\tilde{u}} + T_{a_1^0 - a_1(v_0)}\tilde{u} + T_{a_2^0 - a_2(v_0)}\overline{\tilde{u}}.$$

On obtient alors que, pour $T = T_r$, on a

$$\Gamma^{T_r}(u - \tilde{u}) \leq 10C_n(\|u_0 - \tilde{u}_0\|_s)\|u_0 - \tilde{u}_0\|_s + \|u_0 - \tilde{u}_0\|_s T_r H_n(\|\tilde{u}_0\|_s).$$

Cette dernière estimation permet d'obtenir l'uniforme continuité par rapport aux données initiales pour $T = T_r$ assez petit.

Preuve du théorème 12.1 : Existence globale et effet régularisant pour des équations linéaires (ou plutôt "paralinéaires") type Schrödinger utilisée pour obtenir le théorème 7.2.

Dans cette sous-section, nous traitons le problème de Cauchy pour l'´equation de Schrödinger généralisée linéaire définie ci-dessous.

On rappelle que Q_μ est le cube $\mu + [0,1]^n$, $\mu \in \mathbb{Z}^n$. On note x_μ le sommet du cube Q_μ image de 0 par la translation de vecteur μ. La famille de cubes $\{Q_\mu\}_{\mu \in \mathbb{Z}^n}$ recouvre $\mathbb{R}^n$. On note Q^*_μ le cube de côté 2 obtenu par homothétie de centre le centre de Q_μ. On note $c_n = \langle d_n \rangle$ où d_n est la norme du vecteur $(1,1,1,...,1,1,1) \in \mathbb{R}^n$, longueur de la grande diagonale du cube Q_0 ainsi que des cubes Q_μ pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$.

Théorème 12.1 *Etant donné un nombre réel s, on considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1}.\nabla_x u + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{u} + C_1 u + C_2 \bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{12.13}$$

On suppose que $0 \leq \delta < 1$, que C_1 et C_2 sont dans OpS^0_{1,δ_1} avec $0 \leq \delta_1 < 1$, et que $b_1, b_2 \in C^\varrho(\mathbb{R}^n)$, $\varrho \geq 2$, et, plus précisément, que

$$(S.2) \begin{cases} b_k(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,\mu}\varphi_{k,\mu}(x), k = 1,2 \\ supp\varphi_{k,\mu} \subseteq Q^*_\mu, \|\varphi_{k,\mu}\|_{C^2} \leq 1, \sum_\mu |\alpha_{k,\mu}| \leq A_k. \end{cases}$$

alors l'équation (12.13) admet une unique solution u telle que pour tout $\sigma_0 > 0$, tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$, et tout $T > 0$,

$$(t \mapsto u(t,x)) \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$$

et, il existe un réel A tel que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_s^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)\right), \tag{12.14}$$

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_T^2 \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(f,u)\right) \tag{12.15}$$

où $I_T(f,u)$ est une somme de trois terme de la forme $\int_0^T |\langle Gf, u\rangle|\, dt$ avec $G \in OpS^0_{0,0}$.

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||^2_{T,\sigma_1,\sigma_0} \leq A\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s u)\right). \tag{12.16}$$

avec

$$|||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_\mu \left(\int_{-T}^T \|\sqrt{\sigma_0}\langle x - \sigma_1 x_\mu\rangle^{\frac{-\sigma_0 - 1}{2}} J^{1/2}u\|_0^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|||u|||_T = |||u|||_{T,3,1}$$

Remarques :

— Ce théorème est l'analogue du théorème 11.1 (numéroté aussi 7.3) et se prouve exactement de la même manière.

— La constante A est de la forme $c_1 \exp(c_2 T)$ avec c_1 et c_2 deux constantes strictement positives.

— Nous allons démontrer le théorème sur l'intervalle $[0,T]$, le cas $[-T,0]$ se traitant de façon analogue en remarquant

$$v(x,t) = u(x,-t)$$

est solution d'une équation de même type que u.

— Nous allons aussi travailler avec $s = 0$ puisque le cas général peut être ramené à ce cas en appliquant J^s à (12.13). Plus précisément, on pose $v = J^s u$ et donc $v_0 = J^s u_0 \in L^2$ pour $u_0 \in H^s$. On obtient que v est solution de

$$\begin{cases} \partial_t v = i\mathscr{L}v + T^\delta_{b_1}.\nabla_x v + T^\delta_{b_2}.\nabla_x \bar{v} + \widetilde{C}_1 v + \widetilde{C}_2 \bar{v} + \widetilde{f}(x,t) \\ v(x,0) = v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{12.17}$$

où

$$\widetilde{f} = J^s f$$

et, pour $k = 1$ ou 2,

$$\widetilde{C}_k = J^s C_k J^{-s} + [J^s, T_{b_k}.\nabla_x]J^{-s},$$

qui sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même car C_1 et $C_2 \in OpS^0_{1,\delta_1}$ avec $0 \leq \delta_1 < 1$. Ce qui suffit pour obtenir le théorème 7.3.

— Contrairement à ce qui précède, dans la suite, A désigne une constante polynômiale en n, A_1, e^{A_1} et A_2.

Preuve du théorème 12.1.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 11.1 (numéroté aussi 7.3).

Pour prouver ce théorème, on utilise les deux lemmes qui vont suivre, les lemmes 12.5 et 12.6 (effet régularisant.).
Le lemme 12.5 est le lemme 11.1 (numéroté aussi 7.1).

Pour prouver ces lemmes, on régularise donc, comme dans la preuve des lemmes 11.1 et 11.2), les coefficients b_1 et b_2 , ce qui permet de travailler avec des opérateurs à symbole dans $S_{0,0}$ sans perte en régularité. Les restes obtenus s'estiment correctement car ils sont petits par passage à la limite. On ne fait pas exactement un passage à la limite car sinon on ne peut obtenir l'existence un intervalle $[0, T_0]$ avec $T_0 > 0$ qui tend vers 0 si l'on passe à la limite et donc, avec la méthode utilisée, on ne peut étendre l'existence à tout intervalle $[0, T]$.

Pour démontrer les lemmes 12.5 et le lemme 12.6, on suppose donc que u désigne une solution de (7.1) si elle existe avec les coefficients b_1 et b_2 vérifiant les hypothèses supplémentaires (11.9), (11.10) et (11.11) rappelées ci-dessous :

$$\forall i \in \{1, 2\},\ b_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} b_i(x) = \displaystyle\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{i,\mu}\varphi_{i,\mu}(x), k = 1, 2 \\ \|\varphi_{i,\mu}\|_{C^\varrho} \leq 1, \displaystyle\sum_{\mu} |\alpha_{i,\mu}| \leq A_i. \end{cases}$$

$$\forall M \in \mathbb{N}, \varphi_{i,\mu} \in C^M(\mathbb{R}^n) \text{ et } \forall M_0 \in \mathbb{N}, \sup_{\mu} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|_{C^M} \leq A_{M,M_0}.$$

Lemme 12.5

Il existe un opérateur $\mathbf{C}$ *inversible et borné dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, un réel* A *et trois entiers naturels* N*,*M *et* M_0 *ne dépendant que de* n *tels que, pour tout* $T > 0$*,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{C}u(t)\|_0^2 \leq A\|\mathbf{C}u_0\|_0^2 + 2\int_0^T |\langle \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\, dt$$
$$+A\sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^N_{C^M} \left(RT \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right).$$

Le lemme ci-dessous est une généralisation du lemme 11.2 (numéroté aussi 7.2).

Lemme 12.6 *Il existe un réel* A *tel que, pour toute solution* u *de l'équation (12.13), tout* $T > 0$*, tout* $\sigma_0 > 0$ *et tout* $\sigma_1 \in \{0, 1\}$*, il existe un réel* $\tilde{A}$ *et un opérateur* $\Psi \in S^0_{1,0}$ *tel que, pour tout* $\mu \in \mathbb{Z}^n$*, pour tout* R *assez grand, on a*

$$\left(\int_0^T \|\sqrt{\sigma_0}\langle x - \sigma_1 x_\mu\rangle^{\frac{-\sigma_0-1}{2}} J^{1/2}\mathbf{C}u\|_0^2\, dt\right) \leq$$
$$\tilde{A}\int_0^T |\langle \Psi\mathbf{C}f, u\rangle|\, dt + (A + \tilde{A}T) \sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{C}u\|_0^2$$
$$+A\sup_{\mu,i} \|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^N_{C^M} \left(RT \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right),$$

On a aussi

$$\left(\int_0^T \|\sqrt{\sigma_0}\langle x-\sigma_1 x_\mu\rangle^{\frac{-\sigma_0-1}{2}} J^{1/2}u\|_0^2\,dt\right) \le \tilde{A}\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt + (A+\tilde{A}T)\sup_{0\le t\le T}\|u\|_0^2.$$

et, comme dans le lemme 11.2, pour obtenir cette dernière estimation, il suffit que les coefficients b_i est une régularité $\varrho \geq 2$.

Remarques. Le lemme 12.6 dans le cas $\sigma_0 = 3$ et $\sigma_1 = 1$ est le lemme 11.2 prouver dans le section V. Dans les autres cas, pour la preuve de ce lemme, on renvoie aussi à la section V.

Preuve du lemme 12.5 : Voir preuve du lemme 11.1.

Preuve du Théorème 12.1 : comme il l'a déjà été indiqué plus haut la preuve des deux premières estimations, de l'existence, et de l'unicité sont identiques à celles faites pour prouver le théorème 11.1.

Pour obtenir l'estimation (12.16, on utilise

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_0^2 \le A\left(\|u_0\|_0^2 + I_T(f,u)\right), \tag{12.18}$$

$$|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 \le A\left(\|u_0\|_0^2 + I_T(f,u)\right). \tag{12.19}$$

où $I_T(f,u)$ est une combinaison linéaire de trois terme de la forme $\int_0^T |\langle Gf,u\rangle|\,dt$ avec $G \in OpS^0_{0,0}$.

Les deux estimations ci-dessus sont les estimations (7.2) et (7.3) données dans le théorème 7.3 dans le cas $s = 0$. Elles se prouvent de la même manière.

Une fois ces deux estimations établies, on remplace $\sup_t \|u\|_0^2$ et $|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2$ dans l'estimation énoncée dans le lemme 12.6.
Ce qui permet d'obtenir que pour tout $T > 0$, tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$, il existe A tel que

$$|||J^{\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_1,\sigma_0}^2 \le A\left(\|u_0\|_0^2 + I_T(f,u)\right).$$

13

Preuve du théorème 7.2 : Existence et effet régulatisant pour des équations non linéaires de Schrö dinger généralisées avec une non linéarité F qui s'annule en 0 ainsi que ses dérivées partielles : nécessité de travailler dans des espaces de Sobolev à poids.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \end{cases} \tag{13.1}$$

où $F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$ est une fonction C^∞ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, nulle en 0 ainsi que ses dérivées d'ordre 1.

On appelle équation paralinéaire associée, l'équation ci-dessous obtenue par la formule de Bony.

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T_{\partial_v F}.\nabla_x u + T_{\partial_{\overline{v}} F}.\nabla_x \overline{u} + T_{\partial_u F}.u + T_{\partial_{\overline{u}} F}.\overline{u} + R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{13.2}$$

où $R(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}) = R_u \in H^{\frac{n}{2}+2\varrho}$ si $u \in H^s$ avec $s = \dfrac{n}{2} + 1 + \varrho$ avec $\varrho > 0$. Cette dernière équation est du type (12.13).

On pose

$$\begin{aligned} b_1 &= \partial_v F(u, v, \overline{u}, \overline{v}) \;\; b_2 = \partial_{\overline{v}} F(u, v, \overline{u}, \overline{v}), \\ a_1 &= \partial_u F(u, v, \overline{u}, \overline{v}) \;\; a_2 = \partial_{\overline{u}} F(u, v, \overline{u}, \overline{v}), \\ b_1^0 &= \partial_v F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0) \;\; b_2^0 = \partial_{\overline{v}} F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0), \\ a_1^0 &= \partial_u F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0) \;\; a_2^0 = \partial_{\overline{u}} F(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0). \end{aligned}$$

L'équation (13.2) s'écrit alors, en posant $v = \nabla_x u$ pour simplifier,

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t u = i\mathscr{L}u + T^{\delta}_{b^0_1}.v + T^{\delta}_{b^0_2}.\bar{v} + T^{\delta}_{a^0_1}u + T^{\delta}_{a^0_2}\bar{u} + f(x,t)\\ u(x,0) = u_0(x),\end{array}\right. \tag{13.3}$$

avec $\delta \in [0, 1[$,

$$f(x,t) = (T_{b_1} - T^{\delta}_{b_1}).\nabla u + (T_{b_2} - T^{\delta}_{b_2}).\nabla\bar{u} + (T_{a_1} - T^{\delta}_{a^0_1})u + (T_{a_2} - T^{\delta}_{a^0_2})\bar{u} + \tilde{R}u + R_u$$

$$\tilde{R}u = (T^{\delta}_{b_1} - T^{\delta}_{b^0_1}).v + (T^{\delta}_{b_2} - T^{\delta}_{b^0_2}).\bar{v}.$$

Dans la suite $A_n(\|u_0\|_s)$, $B_n(\|u_0\|_s)$, $C_n(\|u_0\|_s)$, ... désignent des constantes qui ne dépendent que de n, s et de $\|u_0\|_s$, ou des constantes majorées par des constantes qui ne dépendent que de n, s et de $\|u_0\|_s$.

Soit $(q_\mu)_\mu$ une partition de l'unité subordonnée au Q_μ. On a

$$b^0_i(x) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} q_\mu(x) b^0_i(x).$$

Si $\|q_\mu b^0_i\|_{C^2} \neq 0$, on pose

$$\alpha^0_{i,\mu} = \|q_\mu b^0_i\|_{C^2}$$

et

$$\varphi^0_{i,\mu}(x) = \frac{q_\mu b^0_i}{\|q_\mu b^0_i\|_{C^2}},$$

et, si $\|q_\mu b^0_i\|_{C^2} = 0$, on pose

$$\alpha^0_{i,\mu} = 0 \text{ et } \varphi^0_{i,\mu}(x) = 0.$$

On remarque que l'on a bien, dans le cas où $\alpha_{i,\mu} \neq 0$,

$$\|\varphi^0_{i,\mu}(x)\|_{C^2} \leq 1$$

qui est un hypothèse importante uniquement pour pouvoir appliquer l'inégalité de Garding dans la preuve du lemme 11.2.

Sous les hypothèses du Théorème 7.2, (F est nulle en 0, ainsi que ses dérivées d'ordre 1) en utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale en 0 à l'ordre 1 de $\partial_v F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$, en posant $z_0 = (u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$, on obtient

$$b^0_1(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma|=1} z_0^{\gamma} h_{1,\gamma}(z_0)$$

avec $h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)$ vérifiant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0)| \leq \sup_{x\in[-\|u_0\|_s, \|u_0\|_s]^{2n+2}} |G_{1,\gamma}(x)|$$

où

$$G_{1,\gamma}(Re(u_0), \nabla Re(u_0), Im(u_0), \nabla Im(u_0)) = h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0).$$

On a le même résultat pour b_2 mais en utilisant $\partial_{\overline{v}} F(u, v, \overline{u}, \overline{v})$.

D'après l'inégalité de Sobolev et les propriétés de support de q_μ, on a

$$\|q_\mu b^0_i\|_{C^2} \leq A_n(\|u_0\|_s)\|\iota^2_\mu u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq A_n(\|u_0\|_s)\|\iota_\mu u_0\langle x\rangle^{s_1}\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}\|\iota_\mu\langle x\rangle^{-s_1}\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$$

(car $\frac{n}{2} + 3 + \varepsilon - 1 > \frac{n}{2} + 2$) où $\iota_\mu(x) = \langle x - \mu\rangle^{-(2n+2)}$.

D'après le lemme 3.7 pour $s_1 = \frac{n}{2} + \varepsilon$, on a

$$\|\iota_\mu b_i^0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \in l^1$$

et

$$\|\|\iota_\mu b_i^0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}\|_{l^1} \leq A_n(\|u_0\|_s)\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}.$$

Remarque : il n'y a qu'à ce niveau que l'on utilise que $\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} < +\infty$. Si l'on arrivait à vérifier autrement que

$$\|\iota_\mu b_i^0\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \in l^1$$

avec de donnes estimations, le poids $\frac{n}{2} + \varepsilon$ utilisé pourrait baisser. Ces dernières conditions étant vérifées, cela permet au coefficient b_1 de vérifier la condition nécessaire (9.3).

On peut donc appliquer le théorème 12.1 à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + T^\delta_{b_1^0}.\nabla u + T^\delta_{b_2^0}.\nabla \bar{u} + T^\delta_{a_1^0} u + T^\delta_{a_2^0}\bar{u} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{13.4}$$

On définit respectivement $\lambda_1^T(w)$, $\lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(w)$, $\lambda_{\tilde{3}}^T(w)$ et, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_{4,k}^T(w)$ par

$$\lambda_1^T(w) = \sup_{[0,T]} \|w\|_s, \quad \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(w) = |||J^{s+\frac{1}{2}} w|||_{T,\sigma_0,\sigma_1},$$

avec

$$|||u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} = \sup_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^n} |\sqrt{\sigma_0}\langle x - \sigma_1 x_\mu\rangle^{-\frac{1+\sigma_0}{2}} u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\lambda_{\tilde{3}}^T(w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \partial_t w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon},$$

et enfin, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$,

$$\lambda_{4,k}^T(w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k\varepsilon}.$$

On note $Z^T_{\|u_0\|_s}$ l'ensemble des fonction $w \in C([0,T]; H^s)$ telle que $w(x,0) = u_0(x)$ et

$$\Gamma^T(w) = \max\left(\max_{i\in\{1,2,\tilde{3}\},k} \lambda_i^T(w), \lambda_{4,k}^T(w), \lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(w), \lambda_{2,3,1}^T(w), \lambda_{2,1,0}^T(w) \right)$$
$$\leq 10K_{n,u_0}$$

où K_{n,u_0} désigne une constante fixée assez grande ne dépendant que de n, de s, de $\|u_0\|_s$, $\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$ où $s_1 = \frac{n}{2} + \varepsilon$ et, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, de $\|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}$ telle que

$$K_{n,u_0} \geq \|u_0\|_s C_n(\|u_0\|_s)$$

où $C_n(\|u_0\|_s)$ est une constante polynomiale en n, $A_n(\|u_0\|_s)$ et $B_n(\|u_0\|_s)$ et $e^{B_n(\|u_0\|_s)}$.

Dans la suite, on pose

$$\Upsilon w(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')f(x,t')dt' \tag{13.5}$$

où $W(t)u_0$ est la solution de l'équation (13.4) pour $f = 0$.
Un point fixe de Υ est solution de (13.4).

En effet, en notant B l'opérateur conjuguaison, on a

$$\partial_t \Upsilon w(t) = \left(i\mathscr{L} + T_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B\right) W(t)u_0 + \int_0^t \left(i\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B\right) W(t-t')f(x,t')\, dt' + f(x,t),$$

or les coefficients b_1^0, b_2^0, a_1^0 et a_2^0 sont indépendants du temps donc on a

$$\partial_t \Upsilon w(t) = \left(i\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B\right) \Upsilon w(t) + f(x,t)$$

D'après les estimations du Théorème 12.1, en notant $w_1 = w$ et $w_2 = \overline{w}$, pour tout $\sigma_0 > 0$ et tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$, on a

$$\lambda_1^T(\Upsilon w)^2 + \lambda^T_{2,\sigma_0,\sigma_1}(\Upsilon w)^2 + \lambda^T_{2,3,1}(\Upsilon w)^2 + \lambda^T_{2,1,0}(\Upsilon w)^2 \leq C_n(\|u_0\|_s)\left(\|u_0\|_s^2 + I_T(J^s f, J^s \Upsilon w)\right)$$

Dans la suite, on explique comment est obtenue l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^T(\Upsilon w) + \lambda^T_{2,\sigma_0,\sigma_1}(\Upsilon w) + \lambda^T_{2,3,1}(\Upsilon w) + \lambda^T_{2,1,0}(\Upsilon w) \leq C_n(\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}) \times \\
&\sup_{i\in\{1,2\}} \Bigg(\|u_0\|_s + \left(\int_0^T \|\langle x\rangle^2 (T^\delta_{b_i} - T^\delta_{b_i^0}).\langle x\rangle^{-1} \nabla J^{s-\frac12} w_i\|_0^2\, dt\right)^{\frac12} \\
&+ \int_0^T \|J^{\frac12}[(T^\delta_{b_i} - T^\delta_{b_i^0}), \langle x\rangle].\langle x\rangle^{-1}\nabla J^{s-\frac12} w_i\|_0\, dt + \\
&\qquad \int_0^T \|J^{\frac12}[(T^\delta_{b_i} - T^\delta_{b_i^0}).\nabla, J^{s-\frac12}] w_i\|_0\, dt\Bigg) \\
&+ C_n(\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}) \left(\int_0^T \|(T_{b_i} - T^\delta_{b_i}).\nabla w_i\|_0\, dt + \int_0^T \|f_4\|_s\, dt'\right)
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Pour obtenir précisément l'estimation ci-dessus, on écrit que $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec

$$f_1 = \sum_i (T^\delta_{b_i} - T^\delta_{b_i^0}).\nabla w,$$

$$f_2 = \sum_i (T_{b_i} - T^\delta_{b_i}).\nabla w$$

et

$$f_3 = R_w + (T_{a_1} - T^\delta_{a_1^0})w + (T_{a_2} - T^\delta_{a_2^0})\overline{w}.$$

On utilise ensuite que

$$I_T(J^s f, J^s \Upsilon w) \leq \sum_{i=1}^{i=3} I_T(J^s f_i, J^s \Upsilon w).$$

On estime alors, pour chaque i, $I_T(J^s f_i, J^s \Upsilon w)$ à l'aide d'une méthode appropriée puis on obtiendra l'estimation (13.6) ci-dessus pour un T assez petit.

Dans les cas $i = 2$ et $i = 3$, on écrit simplement que

$$I_T(J^s f_i, J^s \Upsilon w) \leq A\left(\int_0^T \|f_i\|_s^2 dt + T\lambda_1(\Upsilon w)^2\right).$$

et, d'après la proposition 4.4 appliquée à f_2 pour $\varrho' = 2$ et $\delta' = \delta = \frac12$, et le théorème 4.4 appliqué à f_3, on obtient que

$$I_T(J^s f_i, J^s \Upsilon w) \leq AT\left(\left(\sup_{[0,T]} \|b_i\|^2_{C^2} + \sup_{x\in[-\lambda_1^T(w),\lambda_1^T(w)]} |\Theta(x)|\right)\lambda_1(w)^2 + \lambda_1(\Upsilon w)^2\right).$$

Pour finir, il reste le cas de f_1 à traiter, sachant qu'à la fin de cette démonstration pour obtenir (13.6) on fixera R' assez grand et $T = T(R')$ assez petit.

En ce qui concerne f_1, pour un tel f_1 de forme $T_b.\nabla w$ avec $b \in \Sigma_0^\varrho$ où $b = b_i - b_i^0$, on écrit que

$$I_T(J^s f_1, J^s \Upsilon w) = I_T(J^{s-\frac{1}{2}} f_1, J^{s+\frac{1}{2}} \Upsilon w)$$

$$I_T(J^s f_1, J^s \Upsilon w) = \int_0^T \langle T_b^\delta.\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w, J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w\rangle\, dt + \int_0^T \langle J^{\frac{1}{2}}[T_b^\delta.\nabla_x, J^{s-\frac{1}{2}}]w, G J^s \Upsilon w\rangle\, dt$$

Le second terme ci-dessus s'estime alors par

$$\begin{aligned} A \int_0^T \| J^{\frac{1}{2}}[T_b^\delta.\nabla_x, J^{s-\frac{1}{2}}]w\|_0^2\, dt \times \sup_{[0,T]} \|\Upsilon w\|_s \\ \leq AR' \left(\int_0^T \| J^{\frac{1}{2}}[T_b^\delta.\nabla_x, J^{s-\frac{1}{2}}]w\|_0\, dt \right)^2 + \frac{A}{R'} \sup_{[0,T]} \|\Upsilon w\|_s^2 \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle T_b^\delta.\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w, J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w\rangle\, dt = \\ \int_0^T \langle \langle x\rangle T_b^\delta.\langle x\rangle^{-1} \nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w, J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w\rangle\, dt \\ + \int_0^T \langle J^{\frac{1}{2}}[T_b^\delta, \langle x\rangle].\langle x\rangle^{-1} \nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w, \Upsilon w\rangle\, dt. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Le second terme de (13.7) s'estime par

$$AR' \int_0^T \| J^{\frac{1}{2}}[T_b^\delta, \langle x\rangle].\langle x\rangle^{-1} \nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w\|_0^2\, dt + \frac{A}{R'} \sup_{[0,T]} \|J^s \Upsilon w\|_0^2.$$

Et, pour finir, pour le premier terme de (13.7), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \langle x\rangle T_b^\delta.\langle x\rangle^{-1} \nabla_x J^{s-\frac{1}{2}} w, J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w\rangle\, dt \right| \\ \leq AR' \int_0^T \left\| \langle x\rangle^2 T_b^\delta.\langle x\rangle^{-1} \nabla_x J^{-\frac{1}{2}} J^s w \right\|_0^2 dt \\ + \frac{A}{R'} \int_0^T \left\| \langle x\rangle^{-1} J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w \right\|_0^2 dt. \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 3.1, on a

$$[J^{\frac{1}{2}}, G] \in S_{0,0}^{-\frac{1}{2}}$$

donc

$$\langle x\rangle^{-1}[J^{\frac{1}{2}}, G] \in S_{0,0}^{-\frac{1}{2}}.$$

On a aussi

$$\langle x\rangle^{-1} G \in S_{0,0}^0,$$

ce qui permet d'obtenir que

$$\int_0^T \|\langle x\rangle^{-1} J^{\frac{1}{2}} G J^s \Upsilon w\|_0^2\, dt \leq A \|G\|_{\mathscr{L}(L^2)} (T \lambda_1^T(\Upsilon w)^2 + \lambda_{2,1,0}^T(\Upsilon w)^2).$$

Pour R' fixé assez grand et $T = T(R')$ assez petit, modulo des carrés qui ne posent pas de problème car, dans la dans le cas de p nombres positifs, on a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} \leq \sum_i x_i,$$

les constantes type $C_n(\|u_0\|_s)$ étant fixées ≥ 1 et vérifiant donc

$$\sqrt{C_n(\|u_0\|_s)} \leq C_n(\|u_0\|_s),$$

on obtient l'estimation (13.6).

A l'estimation (13.6), on applique alors les resultats qui suivent.

Pour terminer, on énonce alors le lemme suivant :

Lemme 13.1 *On a*

$$\left(\int_0^T \|\langle x\rangle^2 (T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla J^{s-\frac{1}{2}} w\|_0^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq A\|\langle x\rangle^2(b_i - b_i^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\lambda^T_{2,1,0}(w).$$

Preuve : voir section V.

D'après le lemme 13.1, on a

$$\left(\int_0^T \|\langle x\rangle^2 J^{s-\frac{1}{2}}(T^\delta_{b_1} - T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla w\|_0^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq A\|\langle x\rangle^2(b_i - b_i^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\,\lambda^T_{2,1,0}(w).$$

D'après la formule de Taylor et l'hypothèse faite sur les dérivées de F, en posant

$$z = (w, v, \overline{w}, \overline{v}),$$

on a

$$b_1 - b_1^0 = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{2n+2}, |\gamma|=1} (z^\gamma - z_0^\gamma)h_{1,\gamma}(z) + z_0^\gamma(h_{1,\gamma}(z) - h_{1,\gamma}(z_0))$$

avec, pour tout γ, $h_{1,\gamma}(w, v, \overline{w}, \overline{v})$ une fonction bornée si w est dans un borné de H^s. On rappelle que $v = \nabla_x w$. Tous les termes de cette somme s'estiment de la même façon. Estimons par exemple le terme de multi-indice $\gamma = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$:

$$\|\langle x\rangle^2(\partial_{x_2} w - \partial_{x_2} u_0)h_{1,\gamma}(w, v, \overline{w}, \overline{v}) + \langle x\rangle^2 \partial_{x_2} u_0 (h_{1,\gamma}(w, v, \overline{w}, \overline{v}) - h_{1,\gamma}(u_0, v_0, \overline{u}_0, \overline{v}_0))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}.$$

On écrit que le second terme de cette somme se majore par

$$\|\langle x\rangle^2\partial_{x_2} u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \left\|\int_0^t \frac{d}{dt}(h_{1,\gamma}(w, v, \overline{w}, \overline{v}))\, dt'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}$$

Ce qui s'estime par

$$\begin{aligned} AT &\sup_{x\in[-\sup_{[0,T]}\|w\|_s, \sup_{[0,T]}\|w\|_s]} |\Theta(x)|\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \\ \leq AT &\sup_{x\in[-K_{n,u_0}, K_{n,u_0}]} |\Theta(x)|\|\langle x\rangle^{s_1} u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \end{aligned}$$

car $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$ et $s_1 > 2$.
Pour estimer le premier terme, on remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}&\|\langle x\rangle^2(\partial_{x_2}w-\partial_{x_2}u_0)h_{1,\gamma}(w,v,\overline{w},\overline{v})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\\ &\qquad\le \|\langle x\rangle^2(\partial_{x_2}w-\partial_{x_2}u_0)\|_{\frac{n}{2}+\varepsilon}\,\|h_{1,\gamma}(w,v,\overline{w},\overline{v})\|_{\frac{n}{2}+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Or $s > \frac{n}{2}+\varepsilon+1$, donc on a

$$\begin{aligned}&\|\langle x\rangle^2(\partial_{x_2}w-\partial_{x_2}u_0)h_{1,\gamma}(w,v,\overline{w},\overline{v})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\\ &\qquad\le AT\sup_{x\in[-K_{n,u_0},K_{n,u_0}]}|\Theta(x)|(\lambda_3^T(w)+\lambda_{4,2}^T(w)+\|\langle x\rangle^2u_0\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon})\lambda_1^T(w).\end{aligned}$$

En appliquant les résultats précédents à l'estimation (13.6) sachant que $\varrho \ge 2$, pour T assez petit, on obtient que

$$\lambda_1^T(\Upsilon w)+\lambda_{2,\sigma_0,\sigma_1}^T(\Upsilon w)+\lambda_{2,3,1}^T(\Upsilon w)+\lambda_{2,1,0}^T(\Upsilon w)\le 10K_{n,u_0}.$$

Estimons alors $\lambda_3^T(\Upsilon w)$.
La méthode utilisée est la méthode déjà présentée dans le cas particulier de la sous-section 7.5 intitulée «Indications de démonstration du théorème 7.2».

Sachant que Υw est solution d'une équation de type (13.4) avec

$$f=F(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})-T^\delta_{b_1^0}.\nabla w-T^\delta_{b_2^0}.\nabla\overline{w}-T^\delta_{a_1^0}w-T^\delta_{a_2^0}\overline{w},$$

or

$$F(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})=T_{b_1}.\nabla w+T_{b_2}.\nabla\overline{w}+T_{a_1}w+T_{a_2}\overline{w}+R(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})$$

donc, en posant

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})=\\ &\quad(T_{b_1}-T^\delta_{b_1}).\nabla w+(T_{b_2}-T^\delta_{b_2}).\nabla\overline{w}+(T_{a_1}-T^\delta_{a_1})w+(T_{a_2}-T^\delta_{a_2})\overline{w}\\ &\qquad+R(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w}),\end{aligned}$$

on a

$$F(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})=T^\delta_{b_1}.\nabla w+T^\delta_{b_2}.\nabla\overline{w}+T^\delta_{a_1}w+T^\delta_{a_2}\overline{w}+\tilde{R}(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w}).$$

En posant

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(u_0,\nabla_x u_0,\overline{u_0},\nabla_x\overline{u_0})=\\ &\quad(T_{b_1^0}-T^\delta_{b_1^0}).\nabla u_0+(T_{b_2^0}-T^\delta_{b_2^0}).\nabla\overline{u_0}+(T_{a_1^0}-T^\delta_{a_1^0})u_0+(T_{a_2^0}-T^\delta_{a_2^0})\overline{u_0}\\ &\qquad+R(u_0,\nabla_x u_0,\overline{u_0},\nabla_x\overline{u_0}),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}f=\;&\tilde{R}(u_0,\nabla_x u_0,\overline{u_0},\nabla_x\overline{u_0})\\ &+\tilde{R}(w,\nabla_x w,\overline{w},\nabla_x\overline{w})-\tilde{R}(u_0,\nabla_x u_0,\overline{u_0},\nabla_x\overline{u_0})\\ &+(T^\delta_{b_1}-T^\delta_{b_1^0}).\nabla w+(T^\delta_{b_2}-T^\delta_{b_2^0}).\nabla\overline{w}\\ &+(T^\delta_{a_1}-T^\delta_{a_1^0})w+(T^\delta_{a_2}-T^\delta_{a_2^0})\overline{w},\end{aligned}$$

sachant que $w\in Z^T_{\|u_0\|_s}$, à l'aide du théorème 4.4 mais aussi de la proposition 4.4 avec $\varrho\delta\ge 1$ en décomposant f comme dans le preuve du cas non linéaire sans poids (c'est à dire qu'on introduit $\theta_1(D/R)$) , on obtient que

$$\begin{aligned}&\lambda_3^T(\Upsilon w)\le\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^2\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}+A\|b_1^0+b_2^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\|\langle x\rangle^2\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon}+\\ &A\|a_1^0+a_2^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times[0,T])}\|\langle x\rangle^2\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}+\|[\langle x\rangle^2,\mathscr{L}]\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}+\\ &\|[\langle x\rangle^2,T_{b_1^0}.\nabla_x+T_{a_1^0}]\Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}+\|[\langle x\rangle^2,T_{b_2^0}.\nabla_x+T_{a_2^0}]\overline{\Upsilon w}\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}\\ &\quad+AE_n(\|\langle x\rangle^2u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon},\|u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon})\left(R^{-1}+R^2T\right)+\\ &\qquad\|\langle x\rangle^2\tilde{R}(u_0,\nabla_x u_0,\overline{u_0},\nabla_x\overline{u_0})\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

On fixe

$$K_{n,u_0} \geq \|\langle x\rangle^2 \tilde{R}(u_0, \nabla_x u_0, \overline{u_0}, \nabla_x \overline{u_0})\|_{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}.$$

On obtient que

$$\begin{aligned} \lambda_3^T(\Upsilon w) \leq (1 + A_n(\|u_0\|_s)) \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} + \\ AE_n(\|\langle x\rangle^2 u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}, \|u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}) \left(R^{-1} + R^2 T\right) + K_{n,u_0} \end{aligned} \tag{13.8}$$

Pour prouver que, pour R assez grand et T assez petit, $\Upsilon w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$, Il reste à estimer

$$\sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$$

et

$$\lambda_{4,k}^T(\Upsilon w) = \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}.$$

Pour cela, on utilise l'équation intégrale (13.5). Ce qui donne

$$\sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq \|\langle x\rangle^2 W(t) u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} + T \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 f\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}.$$

On rappelle que f est, par exemple, définie juste après (13.3).
D'après le théorème 4.4 appliquée dans le cas $s_1 = 2$, on a

$$\|\langle x\rangle^2 R_w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq \sup_{w \in Z^T_{\|u_0\|_s}} \Theta\left(\|\langle x\rangle^2 w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}, \|\langle x\rangle^2 u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}\right) \|\langle x\rangle^2 w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$$

D'après la proposition 4.4 appliquée dans la cas $s_1 = 2$, $\delta' = \delta = \frac{1}{2}$ et $\varrho' = 2$, on a

$$\begin{aligned} \|\langle x\rangle^2 \left(T_{b_i} - T^\delta_{b_i}).\nabla u + (T_{b_2} - T^\delta_{b_2}).\nabla \bar{u}\right) \|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} &\leq A \sup_i \|\langle x\rangle^2 b_i\|_{C^2} \|\nabla u\|_{\frac{n}{2}+2+\varepsilon} \\ &\leq A \sup_{i,} \|\langle x\rangle^2 b_i\|_{C^2} \left(\lambda^T_{4,2}(u) + \lambda^T_{4,1}(u)\right) \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 3.4, on a

$$\|\langle x\rangle^2 (T_{a_1} - T^\delta_{a_1^0}) u + (T_{a_2} - T^\delta_{a_2^0}) \bar{u})\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq A \sup_i \left(\|a_i\|_{L^\infty} + \|a_i^0\|_{L^\infty}\right) \|u\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$$

Enfin, d'après lemme 4.3 appliqué aux symboles respectifs des opérateur $T^\delta_{b_i}$ et $T^\delta_{b_i^0}$ dans le cas $\sigma_1 = 0$, $N = 2$, $\varrho = 0$, on a

$$\begin{aligned} \|\langle x\rangle^2 T^\delta_{b_i}.\nabla u\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} &\leq A \|\langle x\rangle^2 b_i\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}, \\ \|\langle x\rangle^2 T^\delta_{b_i^0}.\nabla u\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} &\leq A \|\langle x\rangle^2 b_i^0\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 f\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq \sup_{w \in Z^T_{\|u_0\|_s}} & \Theta(\|\langle x\rangle^2 w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}, \|\langle x\rangle^2 u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}) \\ & \times \left(1 + \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} + \lambda_1^T(w)\right). \end{aligned}$$

Pour estimer $\|\langle x\rangle^2 W(t) u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}$, on utilise que $\langle x\rangle^2 W(t) u_0$ est solution de (13.4) avec

$$f_2(x,t) = i\langle x\rangle^2 [\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0} B, \langle x\rangle^{-2}] \langle x\rangle \langle x\rangle W(t) u_0$$

et de donnée initiale $\langle x\rangle^2 u_0$. On note, pour raccourcir un peu les écritures,

$$[\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0}B, \langle x\rangle^{-2}] = \\ [\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{a_1^0}, \langle x\rangle^{-2}] + [T^\delta_{b_2^0}.\nabla + T^\delta_{a_2^0}, \langle x\rangle^{-2}]B$$

avec B l'opérateur de conjugaison complexe.

On applique alors l'estimation (10.5), ce qui donne

$$\sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^2 W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \le C_n(\|\langle x\rangle^2 u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}) \left(\|\langle x\rangle^2 u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} + \int_0^T \|f_2\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}\, dt \right),$$

avec, d'après le corollaire 3.3,

$$\sup_{[0,T]} \|f_2\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \le C_n(\|u_0\|_s) \left(\sum_{j=1}^n \|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon} + \|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \right).$$

Pour estimer, $\|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon}$, on utilise enfin que $x_j W(t)u_0$ est solution d'une équation de type (13.4) avec

$$f = f_1 = (i[x_j, \mathscr{L}] + [x_j, T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{a_1^0}])W(t)u_0 + [x_j, T^\delta_{b_2^0}.\nabla + +T^\delta_{a_2^0}]\overline{W(t)u_0}$$

et de donnée initiale $x_j u_0$.
On a donc

$$\begin{aligned} &\sup_{[0,T]} \|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon} \\ &\le C_n(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon}) \left(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon} + T \sup_{[0,T]} \|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+5+\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On conclut en rappelant que $W(t)u_0$ est solution de (13.4) avec $f = 0$ et donc, pour $s \ge \frac{n}{2} + 5 + \varepsilon$, on a

$$\sup_{[0,T]} \|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+5+\varepsilon} \le A\|u_0\|_s$$

et que, comme $p \ge 2$, $p - 1 \ge 1$ et donc

$$\|x_k u_0\|_{\frac{n}{2}+4+\varepsilon} \le \|\langle x\rangle u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon}.$$

Ce qui permet d'obtenir, d'après (13.8), que pour T assez petit,

$$\lambda_3^T(\Upsilon w) \le 10 K_{n,u_0}. \tag{13.9}$$

Estimons pour finir, pour tout $k \le p$, $\lambda^T_{4,k}(\Upsilon w)$. Pour cela, on reprend le raisonnement juste précédent qui a été fait pour estimer

$$\|\langle x\rangle^2 \Upsilon w\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon}.$$

On commence par remarquer que, à l'aide de l'équation intégrale (13.5), on obtient que

$$\lambda^T_{4,k}(\Upsilon w) \le \|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} + T \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k f\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}.$$

Daprès le théorème 4.4, la proposition 4.4 appliquées dans la cas $s_1 = k$ dans le cas $\delta = \delta' = \frac{1}{2}$ et $\varrho' = 2$ et le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned} &\sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k f\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \\ &\quad \le \sup_{w \in Z^T_{\|u_0\|_s}} \Theta(\|\langle x\rangle^k w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}, \|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}) \sup_{[0,T]} \|\langle x\rangle^k w\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pour estimer $\|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}$, on utilise que $\langle x\rangle^k W(t)u_0$ est solution de (13.4) avec

$$f(x,t) = f_k(x,t) = (i\langle x\rangle^k([\mathscr{L} + T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{a_1^0}, \langle x\rangle^{-k}]\langle x\rangle\langle x\rangle^{k-1}W(t)u_0 \\ +\langle x\rangle^k[T^\delta_{b_2^0}.\nabla + T^\delta_{a_2^0}, \langle x\rangle^{-k}]\overline{W(t)u_0}$$

et de donnée initiale $\langle x\rangle^k u_0$.
On applique alors l'estimation (10.5), ce qui donne

$$\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^k W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \\ \leq C_n(\|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon})\left(\|\langle x\rangle^k u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} + \int_0^T \|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon}\,dt\right),$$

avec, d'après le corollaire 3.3,

$$\|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+p-k+\varepsilon} \leq C_n(\|u_0\|_s)\sup_{[0,T]}\|\langle x\rangle^{k-1}W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-(k-1)+\varepsilon}.$$

$$\|f_k\|_{\frac{n}{2}+3+\varepsilon} \leq C_n(\|u_0\|_s)\lambda^T_{4,k-1}(W(t)u_0).$$

Pour estimer $\lambda^T_{4,k-1}(W(t)u_0)$, on réitére la même opération ce qui fait que l'on doit estimer $\lambda^T_{4,k-2}(W(t)u_0)$ et ainsi de suite jusqu'à

$$\lambda^T_{4,1}(W(t)u_0).$$

Ce qui revient à estimer, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\sup_{[0,T]}\|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon}.$$

Ce qui à déja été fait précédemment dans le cas $p = 1$. On remarque alors $x_j W(t)u_0$ est solution d'une équation de type (13.4) avec

$$f = f_j = (i[x_j, \mathscr{L}] + [x_j, T^\delta_{b_1^0}.\nabla + T^\delta_{b_2^0}.\nabla B + T^\delta_{a_1^0} + T^\delta_{a_2^0}B])W(t)u_0$$

et de donnée initiale $x_j u_0$.
On a donc

$$\|x_j W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon} \\ \leq C_n(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon})\left(\|x_j u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p-1+\varepsilon} + T\sup_{[0,T]}\|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p+\varepsilon}\right).$$

On conclut en rappelant que $W(t)u_0$ est solution de (13.4) avec $f = 0$ et donc, pour $s \geq \frac{n}{2}+3+p+\varepsilon$, on a

$$\sup_{[0,T]}\|W(t)u_0\|_{\frac{n}{2}+3+p+\varepsilon} \leq A\|u_0\|_s.$$

Pour T assez petit, on obtient donc que

$$\lambda^T_{4,k}(\Upsilon w) \leq 10K_{n,u_0}.$$

Sachant $w \in Z^T_{\|u_0\|_s}$, pour R assez grand et T assez petit, et $s \geq \frac{n}{2}+3+p+\varepsilon$ avec $p \geq 2$, on obtient donc $\Upsilon(Z^T_{\|u_0\|_s}) \subset Z^T_{\|u_0\|_s}$. De plus, pour tout w_1 et w_2 dans $Z^T_{\|u_0\|_s}$, on a

$$\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2 = \int_0^t W(t-t')((T^\delta_{b_1(w_1)} - T^\delta_{b_1(w_2)})\nabla w_1)(t') + T^\delta_{b_1(w_2)}\nabla(w_1-w_2)(t') - \\ T^\delta_{b_1^0}.\nabla(w_1-w_2)(t') + \tilde{R}(w_1-w_2) + R_{w_1} - R_{w_2})(t'))dt'$$

D'après le théorème 4.4, on a, pour tout w_1 et w_2 dans $Z^T_{\|u_0\|_s}$, que

$$\sup_{[0,T]} \|R_{w_1} - R_{w_2}\|_s \leq A \sup_{[0,T]} \|w_1 - w_2\|_s.$$

En utilisant des arguments déjà utilisés pour les autres termes, on obtient que

$$\Gamma^T(\Upsilon w_1 - \Upsilon w_2) \leq AT\Gamma^T(w_1 - w_2).$$

Ce qui permet d'obtenir que Υ est contractante sur $Z^T_{\|u_0\|_s}$ pour T assez petit.
Sachant que $Z^T_{\|u_0\|_s}$ est un espace métrique complet, on peut donc appliquer le théorème du point fixe. On obtient alors le théorème 7.2 car

$$Z^T_{\|u_0\|_s} \subset \left\{ u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n)), u(x,0) = u_0 \text{ et } |||J^{s+\frac{1}{2}}u|||_{T,\sigma_0,\sigma_1} < \infty \right\}.$$

V

PREUVE DES LEMMES

14

Preuve du lemme 11.2 (numéroté aussi 7.2)

La preuve de ce lemme suit le même raisonnement que pour celle du lemme 3.3 dans [31]. Les modifications à apporter sont dues au fait que l'on travaille avec des opérateurs T_b^δ de symboles $\tilde{b}^\delta(x,\xi)$ (définis par (4.1) et notés dans cette démonstration T_b et $\tilde{b}(x,\xi)$, la valeur de $\delta < 1$ ne modifiant pas la démonstration.) au lieu de $b(x)$. Dans la suite, on désigne par $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ les opérateurs tels que $\tilde{C}_i\overline{u} = \overline{C_i u}$. On a donc $\tilde{C}_i u = \overline{C_i\overline{u}}$ or, pour tout réel s, C_i est borné de H^s dans H^s donc $\tilde{C}_i$ aussi, ainsi que leurs adjoints respectifs.

La démonstration est écrite simultanément dans le cas $\mathbf{C} = Id$ et $\mathbf{C} \neq Id$ en précisant les simplifications éventuelles obtenues dans les calculs, la démarche étant la même dans les deux cas.

On a

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{C}u = i\mathscr{L}\mathbf{C}u + i[\mathbf{C},\mathscr{L}]u + T_{b_1}.\nabla_x \mathbf{C}u + T_{b_2}.\nabla_x \overline{\mathbf{C}u} + C_1\mathbf{C}u + C_2\overline{\mathbf{C}u} + \mathbf{C}f(x,t)\\ +[\mathbf{C},T_{b_1}.\nabla]u + [\mathbf{C},T_{b_2}.\nabla]\overline{u} + [\mathbf{C},C_1]u + [\mathbf{C},C_2]\overline{u}.\end{aligned}$$

On pose aussi

$$B = \begin{pmatrix} T_{b_1}.\nabla_x & T_{b_2}.\nabla_x \\ T_{\overline{b_2}}.\nabla_x & T_{\overline{b_1}}.\nabla_x \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & -\Psi \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \mathscr{L} & 0 \\ 0 & -\mathscr{L} \end{pmatrix}$$

où Ψ est un opérateur dont on choisira le symbole $\psi(x,\xi)$ dans $S^0_{1,0}$ vérifiant $\psi(x,\xi) \geq A$ avec $A > 0$. De plus, d'après la proposition *(v)* du lemme 11.5 (dans la preuve du lemme 7.1), on a

$$i[\mathbf{C},\mathscr{L}] = -\mathbf{C}T_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla + E_{1,R} + E_{2,R} + E$$

donc

$$i\begin{pmatrix} [\mathbf{C},\mathscr{L}] & 0 \\ 0 & -[\mathbf{C},\mathscr{L}] \end{pmatrix} = \tilde{B}\mathbf{C} + g(x,D)\tilde{I} \text{ avec}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -T_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla & 0 \\ 0 & -T_{\overline{i\mathscr{I}(b_1)}}.\nabla \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$g(x,D) = -[\mathbf{C},T_{i\mathscr{I}(b_1)}.\nabla] + E_{1,R} + E_{2,R} + E$$

D'après la proposition *(v)*, mais aussi la proposition *(iv)* du lemme 11.5, on a

$$\int_0^T \langle g(x,D)u,u\rangle\, dt \leq A \sup_\mu \|\langle x-x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{1,\mu}\|^N_{C^M}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||^2_T + RT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right).$$

Remarque : Dans le cas où $\mathbf{C} = Id$, le commutateur $[\mathbf{C}, \mathscr{L}] = 0$ et donc dans le cas $\mathbf{C} = Id$, on n'a pas les termes en $\tilde{B}$ et $g(x, D)$. C'est le terme en $g(x, D)$ qui fait que l'estimation dans le cas $\mathbf{C} \neq Id$ est différente de celle obtenue dans le cas $\mathbf{C} = Id$.
On rappelle que $\mathbf{c}(x, \xi)$ est pair en ξ et réel donc $\mathbf{C}\overline{u} = \overline{\mathbf{C}u}$. Dans la suite, on pose $\vec{w}_c = (\mathbf{C}u, \overline{\mathbf{C}u})$ et $\vec{w} = (u, \overline{u})$.

On a

$$\partial_t \mathbf{C}\overrightarrow{w} = iH\mathbf{C}\overrightarrow{w} + (B + \tilde{B} + \Phi)\mathbf{C}\overrightarrow{w} + ([B + \Phi, \mathbf{C}Id] + g(x, D)\tilde{I})\vec{w} + \mathbf{C}\overrightarrow{F}, \tag{14.1}$$

$$\partial_t \Psi_M \mathbf{C}\overrightarrow{w} = i\Psi_M H\mathbf{C}\overrightarrow{w} + \Psi_M(B + \tilde{B} + \Phi)\mathbf{C}\overrightarrow{w} + \Psi_M([B + \Phi, \mathbf{C}Id] + g(x, D)\tilde{I})\vec{w} + \Psi_M\mathbf{C}\overrightarrow{F}$$

avec $\overrightarrow{F} = (f(x), \overline{f(x)})^T$. Sachant que $\mathbf{c}(x, \xi)$ est pair en ξ et réel donc $\mathbf{C}\overline{u} = \overline{\mathbf{C}u}$, en posant dans la suite $\vec{w}_c = (\mathbf{C}u, \overline{\mathbf{C}u})$ et $\vec{w} = (u, \overline{u})$, on obtient que

$$\partial_t \Psi_M \overrightarrow{w_c} = i\Psi_M H\overrightarrow{w_c} + \Psi_M(B + \tilde{B} + \Phi)\overrightarrow{w_c} + \Psi_M([B + \Phi, \mathbf{C}Id] + g(x, D)\tilde{I})\vec{w} + \Psi_M\mathbf{C}\overrightarrow{F}$$

or

$$\partial_t \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle = \langle \partial_t \Psi_M \overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, \partial_t \overrightarrow{w}_c \rangle$$

et

$$\langle i\Psi_M H\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, iH\overrightarrow{w}_c \rangle = \langle i\Psi_M H\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle (-iH\Psi_M)\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle$$
$$\langle i\Psi_M H\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, iH\overrightarrow{w}_c \rangle = \langle (i\Psi_M H - iH\Psi_M)\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle$$
$$\langle i\Psi_M H\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, iH\overrightarrow{w}_c \rangle = -i\langle (H\Psi_M - \Psi_M H)\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} &\partial_t \langle \Psi_M \overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle = -i\langle (H\Psi_M - \Psi_M H)\overrightarrow{w}_c, \overrightarrow{w}_c \rangle + \langle (B^*\Psi_M + \Psi_M B)\vec{w}_c, \vec{w}_c \rangle \\ &+\langle (\tilde{B}^*\Psi_M + \Psi_M \tilde{B})\vec{w}_c, \vec{w}_c \rangle + \langle (\Phi^*\Psi_M + \Psi_M \Phi)\vec{w}_c, \vec{w}_c \rangle \\ &+\langle \Psi_M \mathbf{C}\vec{F}, \vec{w}_c \rangle + \langle \Psi_M \vec{w}_c, \mathbf{C}\vec{F} \rangle\rangle + \langle G\Psi_M \vec{w}, \vec{w} \rangle + \langle \Psi_M \vec{w}, G\vec{w} \rangle. \end{aligned} \tag{14.2}$$

avec $G = [B + \Phi, \mathbf{C}Id] + g(x, D)$. De plus, modulo des opérateurs bornés dans L^2, on a

$$\langle (B^*\Psi_M + \Psi_M B)\vec{w}, \vec{w} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \Psi T_{b_1 - \overline{b_1}}.\nabla_x & 2\Psi T_{b_2}.\nabla_x \\ -2\Psi T_{\overline{b_2}}.\nabla_x & \Psi T_{b_1 - \overline{b_1}}.\nabla_x \end{pmatrix} \vec{w}, \vec{w} \right\rangle$$

En notant ψ le symbole de Ψ,

$$\sigma(B^*\Psi_M + \Psi_M B) = \psi(x, \xi) \begin{pmatrix} i(\tilde{b}_1 - \overline{\tilde{b}_1})(x, \xi).\xi & 2i\tilde{b}_2(x, \xi).\xi \\ -2i\overline{\tilde{b}_2}(x, \xi).\xi & i(\tilde{b}_1 - \overline{\tilde{b}_1})(x, \xi).\xi \end{pmatrix}$$

De plus

$$\sigma(\tilde{B}^*\Psi_M + \Psi_M \tilde{B}) = \psi(x, \xi) \begin{pmatrix} -2\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x, \xi)).\xi & 0 \\ 0 & -2\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x, \xi)).\xi \end{pmatrix}$$

Le terme $\langle \Psi_M[B + \Phi, \mathbf{C}Id]\vec{w}, \vec{w} \rangle + \langle \Psi_M \vec{w}, [B + \Phi, \mathbf{C}Id]\vec{w} \rangle$ s'estime comme celui en $g(x, D)$.

Remarque : le commutateur $[B + \Phi, \mathbf{C}Id]$ est nul si $\mathbf{C} = Id$.

Dans la suite, on utilise le lemme suivant

Lemme 14.1 (Lemme de Doi) *Soit λ une fonction paire, positive, régulière et bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\lambda \in L^1(0, \infty)$. Il existe une fonction régulière $\theta_0(x) = (\theta_1(x), ..., \theta_n(x))$ bornée, ainsi que toutes ses dérivées, telle que, au sens des matrices, on ait*

$$D\theta_{symm}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j}\theta_k + \partial_{x_k}\theta_j(x)\right) \geq \lambda(|x|)I$$

On peut choisir $\theta_0(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ *avec* $f(t) = \int_0^t \lambda(|s|)ds$.
On définit $p(x,\xi) = -\dfrac{\theta_0(x).\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \in S^0_{1,0}$ *où* $\tilde{\xi} = (-\xi_1, ..., -\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$. *On a*

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x p(x,\xi) = 2\frac{D\theta_{symm}(x)\tilde{\xi}.\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \geq \lambda(|x|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}.$$

Preuve : Voir [16].
D'après le lemme de Doi ci-dessus appliqué avec λ que l'on fixera plus tard, en posant,

$$\gamma(x,\xi) = p(x - x_{\mu_0}, \xi) + 10A_2 \textstyle\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(|\alpha_{1,\mu}| + |\alpha_{2,\mu}|)p(x - x_\mu, \xi)$$

où μ_0 est fixé,

$$A_2 = sup_{\mu,i,x,\xi}|\langle x - x_\mu\rangle^4 \tilde{\varphi}_{i,\mu}(x,\xi)|,$$

avec $\tilde{\varphi}_{i,\mu}$ défini par (4.1) et

$$p(x,\xi) = -\frac{\theta_0(x).\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle}$$

avec

$$\theta_0(x) = (f(x_1), ..., f(x_n)),\ f(t) = \int_0^t \lambda(|s|)ds \text{ et } \lambda(|s|) = \langle s\rangle^{-4}.$$

On obtient que p vérifie le lemme de Doi et donc que

$$\begin{aligned}&-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) \geq \\ &\quad \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\tfrac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle} + \textstyle\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} 10A_2(|\alpha_{1,\mu,}| + |\alpha_{2,\mu}|)\lambda(|x - x_\mu|)\tfrac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}.\end{aligned} \tag{14.3}$$

On choisit Ψ de symbole $\psi(x,\xi) = exp(-\gamma(x,\xi))$ donc $\psi \in S^0_{1,0}$ car $\gamma \in S^0_{1,0}$ et Ψ admet une paramétrix dans $S^0_{1,0}$.
L'opérateur $-i(H\Psi_M - \Psi_M H) + (\Psi_M(B + \tilde{B}) + (B + \tilde{B})^*\Psi_M)$ a pour symbole principal la matrice

$$s(x,\xi) = 2\psi \begin{pmatrix} \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) & -i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ i\overline{\tilde{b}_2(x,\xi).\xi} & \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans le cas $\mathbf{C} = Id$, on a

$$s(x,\xi) = 2\psi \begin{pmatrix} \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi & -i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ i\overline{\tilde{b}_2(x,\xi).\xi} & \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) - \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi \end{pmatrix}.$$

et les calculs ci-dessous sont écrits dans le cas $\mathbf{C} = Id$ sachant qu'ils sont plus simples dans le cas $\mathbf{C} \neq Id$ car il n'y a plus le terme en $\mathscr{I}(\tilde{b}_1)$ mais l'opérateur Ψ construit ci-dessus fait fonctionner la démonstration dans les deux cas. .

Définissons alors $\kappa(x,\xi) = \begin{pmatrix} 2\psi\lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} & 0 \\ 0 & 2\psi\lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} \end{pmatrix}$ et $\zeta(x,\xi) = -s(x,\xi) - \kappa(x,\xi)$.

On a

$$\begin{aligned}&\zeta(x,\xi) + \zeta(x,\xi)^* = \\ &4\psi(x,\xi)\begin{pmatrix} -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi & i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ -i\overline{\tilde{b}_2(x,\xi).\xi} & -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)) \end{pmatrix} - 2\kappa(x,\xi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\zeta(x,\xi) + \zeta(x,\xi)^* = \\ &4\psi(x,\xi)\begin{pmatrix} -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} & i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ -i\overline{\tilde{b}_2(x,\xi).\xi} & -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En posant, dans le $\mathbf{C} = Id$,

$$c = -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle}$$

et, dans le cas $\mathbf{C} \neq Id$,

$$c = -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle},$$

on a

$$\det(\zeta(x,\xi) + \zeta(x,\xi)^* - \nu Id) = 16\psi^2(\nu^2 - 2c\nu + c^2 - |\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|^2)$$

Le discriminant réduit Δ de ce trinôme du second degré est $|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|^2$. Les deux racines réelles du trinôme du second degré

$$\det(\zeta(x,\xi) + \zeta(x,\xi)^* - \nu Id)$$

sont donc

$$\nu_1 = c - \sqrt{\Delta} = -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} - |\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|$$

et

$$\nu_2 = \nu_1 + 2\sqrt{\Delta}.$$

Pour prouver que

$$\forall z \in \mathbb{C}^2, \langle(\zeta(x,\xi) + \zeta^*(x,\xi))z, z\rangle \geq 0,$$

Il suffit donc de prouver que $\nu_1 \geq 0$ car $\nu_2 \geq \nu_1$.

On applique alors le lemme de Doï avec $\lambda(t) = \langle t\rangle^{-4}$ et $\exp(-\gamma(x,D))$ borné dans L^2, on obtient que

$$\begin{aligned} -2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) \geq \\ \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle} + \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} 10A_2(|\alpha_{1,\mu,}| + |\alpha_{2,\mu}|)\lambda(|x - x_\mu|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} -2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) - \lambda(|x - x_{\mu_0}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle} \geq \\ \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} 10A_2(|\alpha_{1,\mu,}| + |\alpha_{2,\mu}|)\lambda(|x - x_\mu|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 \geq \\ \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} 10A_2(|\alpha_{1,\mu,}| + |\alpha_{2,\mu}|)\lambda(|x - x_\mu|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle} + \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi - |\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|.\end{aligned}$$

Or, on a

$$|\tilde{b}_1(x,\xi).\xi| + |\tilde{b}_2(x,\xi).\xi| \leq \left(\sum_\mu |\alpha_{1,\mu}||\tilde{\varphi}_{1,\mu}(x,\xi)| + |\alpha_{2,\mu}||\tilde{\varphi}_{2,\mu}(x,\xi)|\right)|\xi|.$$

donc, pour $|\xi| \geq 1$, on obtient

$$|\tilde{b}_1(x,\xi).\xi| + |\tilde{b}_2(x,\xi).\xi| \leq 2A_2\sum_\mu\langle x - x_\mu\rangle^{-4}(|\alpha_{1,\mu}| + |\alpha_{2,\mu}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}.$$

Ce qui permet d'obtenir que $\nu_1 \geq 0$.

On obtient donc que

$$\forall z \in \mathbb{C}^2, \langle (\zeta(x,\xi) + \zeta^*(x,\xi))z, z\rangle \geq 0, \ .$$

Sachant que $\tilde{b}_1 \in C^2 S^0_{1,0}$ donc $\zeta \in C^2 S^1_{1,0}$, d'après l'inégalité de Gårding précisée pour un système, on obtient

$$\mathscr{R}\left(\langle -(-i(H\Psi_M - \Psi_M H) + \Psi_M(B+\tilde{B}) + (B+\tilde{B})^*\Psi_M + \kappa(x,D))\vec{w}_c, \vec{w}_c\rangle\right) \geq -A\|\vec{w}_c\|_0^2.$$

C'est à dire que

$$\mathscr{R}\left(\langle (-i(H\Psi_M - \Psi_M H) + \Psi_M(B+\tilde{B}) + (B+\tilde{B})^*\Psi_M + \kappa(x,D))\vec{w}_c, \vec{w}_c\rangle\right) \leq A\|\vec{w}_c\|_0^2.$$

avec A ne dépendant que de n et de $\sup_\mu \|\varphi_{1,\mu}(x)\|_{C^2}$.

En intégrant alors en temps la partie réelle de (17.1) puis en utilisant l'inégalité précédente sachant que

$$\kappa(x,D) = \lambda(x - x_{\mu_0})J\Psi Id + R_3 \ \text{ où } \Psi = \tilde{\Psi}^2 + R_4$$

avec R_3 dans $OpS^0_{1,0}$, R_4 dans $OpS^{-1}_{1,0}$ et $\tilde{\Psi} = \exp(-\gamma(x,D)/2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{R}\int_0^T \langle \sqrt{\lambda}(|x - x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}_c, \sqrt{\lambda}(|x - x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}_c\rangle dt \leq \\ (A + AT)\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{w}_c\|^2 + \mathscr{R}\int_0^T (\langle \Psi_M \mathbf{C}\vec{F}, \vec{w}_c\rangle + \langle \Psi_M \vec{w}_c, \mathbf{C}\vec{F}\rangle)dt + \\ A\sup_{\mu,i}\|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M}\left(\frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2 + RT\sup_{[0,T]}\|u\|_0^2\right).\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\left|\int_0^T \langle \Psi_M \mathbf{C}\vec{F}, \vec{w}_c\rangle dt\right| \leq 2\int_0^T \mathscr{R}(\langle \Psi \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle)\, dt. \tag{14.4}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mathscr{R}\int_0^T \langle \sqrt{\lambda}(|x - x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}_c, \sqrt{\lambda}(|x - x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}_c\rangle dt \geq \\ \mathscr{R}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(|x - x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\mathbf{C}u|^2 dx dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inversibilité de $\tilde{\Psi}$, modulo des commutateurs à symbole dans $S^0_{1,0}$ et le lemme 11.5, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\sqrt{\lambda}(|x - x_{\mu_0})J^{1/2}\mathbf{C}u\|_0^2 dt \leq A\left(\int_0^T |\langle \Psi \mathbf{C}f, \mathbf{C}u\rangle|\, dt + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{C}u(t)\|_0^2\right) \\ + A\sup_{\mu,i}\|\langle x - x_\mu\rangle^{M_0}\varphi_{i,\mu}\|^3_{C^M}\left(RT\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2 + \frac{1}{R}|||J^{\frac{1}{2}}u|||_T^2\right).\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat en prenant alors le sup sur μ_0.

15

Preuve du lemme 11.8.

Pour simplifier, on écrit la démonstration dans le cas $\mu = 0$, la cas μ quelconque se traitant exactement de la même façon.

En utilisant la formule de Faa di Bruno, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\partial_x^\alpha \left(\psi \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ q \leq |\alpha|}} \sum_{\substack{\alpha = \nu_1 + \ldots + \nu_q \\ \nu_i \neq 0}} \psi^q \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \partial_x^{\nu_1}(\langle x \rangle))\ldots\partial_x^{\nu_q}(\langle x\rangle) \left(\frac{R}{\langle \xi \rangle} \right)^q,$$

$$\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \left(\psi \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) = \sum_{q\in\mathbb{N}, q\leq|\alpha|} \sum_{\alpha=\nu_1+\ldots+\nu_q, \nu_i\neq 0}$$
$$\sum_{\gamma\leq\beta} a_{\gamma,\beta} \partial_\xi^\gamma \left(\psi^q \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) \partial_x^{\nu_1}(\langle x \rangle)\ldots\partial_x^{\nu_q}(\langle x\rangle) R^q \partial_\xi^{\beta-\gamma}(\langle \xi\rangle^{-q}).$$

On applique à nouveau la formule de Faa di Bruno en ξ, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \left(\psi \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) = \\ &\sum_{q\in\mathbb{N}, q\leq|\alpha|} \sum_{\alpha=\nu_1+\ldots+\nu_q, \nu_i\neq 0} \sum_{\gamma\leq\beta} a_{\gamma,\beta} \partial_x^{\nu_1}(\langle x \rangle))\ldots\partial_x^{\nu_q}(\langle x\rangle) R^q \partial_\xi^{\beta-\gamma}(\langle \xi\rangle^{-q}) \\ &\sum_{q_2\leq|\gamma|} \sum_{\gamma=\gamma_1+\ldots+\gamma_{q_2}, \gamma_i\neq 0} \psi^{q+q_2} \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \partial_\xi^{\gamma_1}(\langle \xi\rangle^{-1})\ldots\partial_\xi^{\gamma_{q_2}}(\langle \xi\rangle^{-1}) \langle x\rangle^{q_2} R^{q_2}. \end{aligned} \tag{15.1}$$

$$\left| \partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \left(\psi \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right) \right| \leq A_{\beta,\alpha} \sum_{q,q_2,\gamma} \langle x\rangle^{-|\nu|} R^q \langle \xi\rangle^{-q-|\beta|+|\gamma|} \langle \xi\rangle^{-q_2-|\gamma|} \langle x\rangle^{q_2} R^{q_2}. \tag{15.2}$$

Sur le support de

$$\left((x,\xi) \mapsto \psi \left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right) \right),$$

on a

$$\left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi \rangle} \right)^q \leq 2^q$$

et
$$\langle x\rangle^{-q-|\nu|} \leq 1,$$
on obtient donc que
$$\left|\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha \left(\psi\left(\frac{R\langle x\rangle}{\langle \xi\rangle}\right)\right)\right| \leq A_{\beta,\alpha}\langle \xi\rangle^{-|\beta|}.$$
avec $A_{\beta,\alpha}$ indépendante de R.

16

Preuve du lemme 12.1

L'inéglité (12.7) se prouve en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité diabolique. Pour prouver l'inégalité (12.8), on commence par intercaller θ_1.

On a
$$I_T(f,u) \leq I_T(\theta_1(D/R)f,u) + I_T((1-\theta_1(D/R))f,u).$$
Pour le deuxième terme, on utilise (12.7).
Pour le premier, on a
$$I_T(\theta_1(D/R)f,u) \leq \sum_{\mu} |\alpha_\mu| I_T(\theta_1(D/R)f_\mu,u),$$
or
$$I_T(\theta_1(D/R)f_\mu,u) = I_T(\langle x-x_\mu\rangle^2 J^{-\frac{1}{2}}\theta_1(D/R)f_\mu, \langle x-x_\mu\rangle^{-2}J^{\frac{1}{2}}u).$$
On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwartz, puis l'inégalité diabolique (**??**) pour faire apparaître les coefficients R' et $\frac{1}{R'}$. On termine en prenant le sup sur μ.

Dans le cas $s>0$, on a le résultat en remarquant que J^s et $Id-\theta_1(D/R)$ commutent.

17

Preuve du lemme 12.6

La preuve est écrite uniquement dans le cas $\mathbf{C} = Id$, le cas $\mathbf{C} \neq Id$ se traitant comme dans la preuve du lemme 7.2.

La preuve de ce lemme suit le même raisonnement que pour celle du lemme 3.3 dans [31]. Les modifications à apporter sont dues au fait que l'on travaille avec des opérateurs T_b^δ de symboles $\tilde{b}^\delta(x,\xi)$ (notés dans cette démonstration T_b et $\tilde{b}(x,\xi)$, la valeur de $\delta < 1$ ne modifiant pas la démonstration.) au lieu de $b(x)$. Dans la suite, on désigne par $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ les opérateurs tels que $\tilde{C}_i\overline{u} = \overline{C_i u}$. Or, pour tout réel s, C_i est borné de H^s dans H^s donc $\tilde{C}_i$ aussi, ainsi que leurs adjoints respectifs.
On pose aussi

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(x,D).\nabla_x & \tilde{b}_2(x,D).\nabla_x \\ \bar{\tilde{b}}_2(x,D).\nabla_x & \bar{\tilde{b}}_1(x,D).\nabla_x \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & -\Psi \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \mathscr{L} & 0 \\ 0 & -\mathscr{L} \end{pmatrix}$$

où Ψ est un opérateur dont on choisira le symbole dans $S^0_{1,0}$ et tels qu'il existe un réel A tel que ce symbole soit supérieur ou égale à $\exp(-A)$. En posant $\overrightarrow{w} = (u,\overline{u})^T$, on a

$$\partial_t \overrightarrow{w} = iH\overrightarrow{w} + (B+\Phi)\overrightarrow{w} + \overrightarrow{F}$$

avec $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} f(x) \\ \overline{f(x)} \end{pmatrix}$. Ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \Psi_M \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \rangle = -i\langle (H\Psi_M - \Psi_M H\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle + \langle (B^*\Psi_M + \Psi_M B)\vec{w}, \vec{w}\rangle + \\ \langle (\Phi^*\Psi_M + \Psi_M\Phi)\vec{w}, \vec{w}\rangle + \langle \Psi_M \vec{F}, \vec{w}\rangle + \langle \Psi_M \vec{w}, \vec{F}\rangle\rangle \end{aligned} \tag{17.1}$$

De plus, modulo des opérateurs bornés dans L^2, on a

$$\langle (B^*\Psi_M + \Psi_M B)\vec{w}, \vec{w}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \Psi(\tilde{b}_1(x,D) - \bar{\tilde{b}}_1(x,D)).\nabla_x & 2\Psi\tilde{b}_2(x,D).\nabla_x \\ -2\Psi\bar{\tilde{b}}_2(x,D).\nabla_x & \Psi(\tilde{b}_1(x,D) - \bar{\tilde{b}}_1(x,D)).\nabla_x \end{pmatrix} \vec{w}, \vec{w} \right\rangle$$

En notant ψ le symbole de Ψ, on obtient, modulo des opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par A, que le symbole principal de $B^*\Psi_M + \Psi_M B$ est

$$\begin{pmatrix} i\psi(\tilde{b}_1 - \overline{\tilde{b}_1})(x,\xi).\xi & 2i\psi\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ -2i\psi\bar{\tilde{b}}_2(x,\xi).\xi & i\psi(\tilde{b}_1 - \bar{\tilde{b}}_1)(x,\xi).\xi \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on utilise le lemme suivant

Lemme 17.1 (Lemme de Doi) *Soit λ une fonction paire, positive, régulière et bornée ainsi que toutes ses dérivées, $\lambda \in L^1(0,\infty)$. Il existe une fonction régulière*

$$\theta(x) = (\theta_1(x), ..., \theta_n(x))$$

bornée, ainsi que toutes ses dérivées telle que, au sens des matrices, on ait

$$D\theta_{symm}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j}\theta_k + \partial_{x_k}\theta_j(x)\right) \geq \lambda(|x|)I$$

On peut choisir $\theta(x) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ avec $f(t) = \int_0^t \lambda(|s|)ds$.

On définit

$$p(x,\xi) = -\frac{\theta(x).\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \in S^0_{1,0}$$

où $\tilde{\xi} = (-\xi_1, ..., -\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n)$. On a

$$-2\tilde{\xi}.\nabla_x p(x,\xi) = 2\frac{D\theta_{symm}(x)\tilde{\xi}.\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle} \geq \lambda(|x|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}.$$

Preuve : Voir [16].

D'après le lemme de Doi ci-dessus appliqué avec λ que l'on fixera plus tard, en posant, pour tout $\sigma_1 \in \{0,1\}$,

$$\gamma(x,\xi) = \sigma_0 p(x - \sigma_1 x_{\mu_0}, \xi) + 10A_2 \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(|\alpha_{1,\mu}| + |\alpha_{2,\mu}|)\tilde{p}(x - x_\mu, \xi)$$

où μ_0 est fixé, $\sigma_0 > 0$,

$$A_2 = sup_{\mu,i,x,\xi\in\mathbb{R}^n}|\langle x - x_\mu\rangle^2\tilde{\varphi}_{i,\mu}(x,\xi)|$$

et

$$\tilde{p}(x,\xi) = -\frac{\tilde{\theta}(x).\tilde{\xi}}{\langle\xi\rangle}$$

avec

$$\tilde{\theta}(x) = (\tilde{f}(x_1), ..., \tilde{f}(x_n)),$$
$$\tilde{f}(t) = \int_0^t \tilde{\lambda}(|s|)ds$$

et

$$\tilde{\lambda}(|s|) = \langle s\rangle^{-2}.$$

On obtient que $\tilde{p}$ vérifie le lemme de Doi et donc que

$$\begin{aligned} &-2\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma(x,\xi) \geq \\ &\sigma_0\lambda(|x - \sigma_1 x_{\mu_0}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle} + \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n} 10A_2(|\alpha_{1,\mu}| + |\alpha_{2,\mu}|)\tilde{\lambda}(|x - x_\mu|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}. \end{aligned} \tag{17.2}$$

On choisit Ψ de symbole $\psi(x,\xi) = exp(-\gamma(x,\xi))$ donc $\psi \in S^0_{1,0}$ car $\gamma \in S^0_{1,0}$ et Ψ admet une paramétrixe dans Op$S^0_{1,0}$.

L'opérateur

$$-i(H\Psi_M - \Psi_M H) + (\Psi_M B + B^*\Psi_M)$$

a pour symbole principal la matrice

$$s(x,\xi) = 2\psi\begin{pmatrix} \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma - \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi & i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi \\ -i\overline{\tilde{b}_2}(x,\xi).\xi & \tilde{\xi}.\nabla_x\gamma - \mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi \end{pmatrix}$$

Définissons alors

$$\kappa(x,\xi)=\begin{pmatrix} 2\psi\sigma_0\lambda(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle} & 0\\ 0 & 2\psi\sigma_0\lambda(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle}\end{pmatrix} \text{ et } \zeta(x,\xi)=-s(x,\xi)-\kappa(x,\xi).$$

On a

$$\zeta(x,\xi)+\zeta(x,\xi)^*=-2\psi(x,\xi)\begin{pmatrix} -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma-\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi & i\tilde{b}_2(x,\xi).\xi\\ -i\overline{\tilde{b}_2}(x,\xi).\xi & -\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma-\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi\end{pmatrix}-2\kappa(x,\xi)\ .$$

En posant

$$c=-\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma+\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi)).\xi-\sigma_0\lambda(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\frac{|\tilde{\xi}|^2}{\langle\xi\rangle},$$

on a

$$det(\zeta(x,\xi)+\zeta(x,\xi)^*-\nu Id)=16\psi^2(\nu^2-2c\nu+c^2-|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|^2)$$

Le discriminant réduit Δ de ce trinôme du second degré est $|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|^2$.
Les deux racines réelles du trinôme du second degré

$$det(\zeta(x,\xi)+\zeta(x,\xi)^*-\nu Id)$$

sont donc

$$\nu_1=c-\sqrt{\Delta}$$

et

$$\nu_2=\nu_1+2\sqrt{\Delta}.$$

Il suffit donc de prouver que $\nu_1\geq 0$ car $\nu_2\geq\nu_1$.

Pour cela, on utilise que

$$|\tilde{b}_1(x,\xi).\xi|+|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|\leq\left(\sum_\mu|\alpha_{1,\mu}||\tilde{\varphi}_{1,\mu}(x,\xi)|+|\alpha_{2,\mu}||\tilde{\varphi}_{2,\mu}(x,\xi)|\right)|\xi|.$$

Pour $|\xi|\geq 1$, on a

$$|\tilde{b}_1(x,\xi).\xi|+|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|\leq 2A_2\sum_\mu\langle x-x_\mu\rangle^{-2}(|\alpha_{1,\mu}|+|\alpha_{2,\mu}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle}$$

or,

$$\nu_1=-\tilde{\xi}.\nabla_x\gamma+\mathscr{I}(\tilde{b}_1(x,\xi).\xi)-|\tilde{b}_2(x,\xi).\xi|-\sigma_0\lambda(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\frac{|\xi|^2}{\langle\xi\rangle},$$

et, pour tout $\sigma_0>0$,

$$\sigma_0\lambda(t)=\sigma_0\langle t\rangle^{-1-\sigma_0}$$

vérifie le lemme de Doi avec $\exp(-\gamma(x,D))$ borné dans L^2 uniformément en σ_0 , donc on obtient bien que $\nu_1\leq 0$, et, donc

$$\langle(\zeta(x,\xi)+\zeta^*(x,\xi))z,z\rangle\geq 0,\ \forall z\in\mathbb{C}^2.$$

Sachant que, pour $\varrho>2$,

$$\tilde{b}_1\in C^2S^0_{1,0}$$

donc

$$\zeta\in C^2S^1_{1,0},$$

d'après l'inégalité de Gårding précisée pour un système, on obtient

$$\mathscr{R}\left(\langle -i(H\Psi_M - \Psi_M H) + (\Psi_M B + B^*\Psi_M)\vec{w},\vec{w}\rangle\right) + \mathscr{R}\left(\langle \kappa(x,D)\vec{w},\vec{w}\rangle\right) \leq \tilde{A}\|\vec{w}\|_0^2$$

avec $\tilde{A}$ une constante.

En intégrant alors en temps la partie réelle de (17.1) puis en utilisant l'inégalité précédente et en remarquant que

$$\kappa(x,D) = \sigma_0\eta^2(x-\sigma_1 x_{\mu_0})J\Psi Id + R_3$$

ou $\eta^2 = \lambda$, et que

$$\Psi = \tilde{\Psi}^2 + R_4$$

avec R_3 et R_4 dans $OpS^0_{1,0}$ et

$$\tilde{\Psi} = \exp(-\gamma(x,D)/2),$$

on obtient

$$\mathscr{R}\int_0^T \langle \sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}, \sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}\rangle dt \leq$$
$$(A+\tilde{A}T)\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{w}\|^2 + \mathscr{R}\int_0^T (\langle \Psi_M\vec{F},\vec{w}\rangle + \langle \Psi_M\vec{w},\vec{F}\rangle)dt$$

avec A une constante indépendante de σ_0 et σ_1.

On remarque que

$$|\int_0^T \langle \Psi_M\vec{F},\vec{w}\rangle dt| \leq A\int_0^T |\langle \Psi f, u\rangle|\,dt$$

De plus, on a

$$\mathscr{R}\int_0^T \langle \sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}, \sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}\vec{w}\rangle dt \geq$$
$$\mathscr{R}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |\sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)\tilde{\Psi}J^{1/2}u|^2 dxdt.$$

En utilisant l'inversibilité de $\tilde{\Psi}$, modulo des commutateurs à symbole dans $S^0_{1,0}$, on obtient que

$$\int_0^T \|\sqrt{\sigma_0}\,\eta(|x-\sigma_1 x_{\mu_0}|)J^{1/2}u\|_0^2 dt \leq A\int_0^T |\langle \Psi f,u\rangle|\,dt + (A+\tilde{A}T)\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_0^2$$

On obtient donc le résultat.

En effet $\|\tilde{\Psi}\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))}$ est indépendante de σ_0.
Pour prouver cela, il suffit que regarder, dans la définition de Θ, $f(x_i)$ pour chaque i.
On rappelle que

$$f(x_i) = \int_0^{x_i} \sigma_0\lambda(|t|)dt$$

avec

$$\lambda(t) = (1+t)^{-1-\sigma_0}.$$

18

Preuve du lemme 13.1

On a

$$\int_0^T \|\langle x\rangle^2(T^\delta_{b_1}-T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}}w\|_0^2 dt \leq$$
$$\int_0^T \|(T^\delta_{b_1}-T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}}w\|_0^2 dt + \int_0^T \||x|^2(T^\delta_{b_1}-T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}}w\|_0^2 dt$$

Pour le premier terme, on a

$$\left|\int_0^T \|(T^\delta_{b_1}-T^\delta_{b_1^0}).\langle x\rangle^{-1}\nabla_x J^{s-\frac{1}{2}}w\|_0^2 dt\right| \leq \int_0^T \|b-b_1^0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\langle x\rangle^{-1}J^{s+\frac{1}{2}}w\|_0^2\, dt.$$

Pour le second terme, on étudie la classe du symbole

$$|x|^2(\tilde{b}^\delta_{1,k}(x,\xi)-\tilde{b}^{\delta,0}_{1,k}(x,\xi)).$$

Pour cela, on revient à la défintion de $\tilde{b}^\delta(x,\xi)$. On remarque tout d'abord que

$$||x|^2(\tilde{b}^\delta_{1,k}(x,\xi)-\tilde{b}^{\delta,0}_{1,k}(x,\xi))| \leq 2|\xi|^{n\delta}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^2|\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta(x-y))||b_1(y)-b_1^0(y)|\,dy$$
$$+2|\xi|^{n\delta}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\chi}_1(|\xi|^\delta(x-y))|||y|^2(b_1(y)-b_1^0(y))|\,dy.$$

Sachant que $|\xi|\geq 1$, on obtient bien quelque chose de borné par

$$\|\langle x\rangle^2(b_1(x)-b_1^0(x))\|_{L^\infty}.$$

Pour les dérivées d'ordres supérieurs en x et ξ, on s'inspire de l'estimation ci-dessus et de la preuve du lemme 4.3 mais en considérant que $\varrho=0$ et $N=0$.
Pour les dérivées d'ordre β en ξ, on fait éxactement le même rasionnement que dans ce lemme 4.3 mais avec $b_1(y)-b_1^0(y)$ pour un terme et $|y|^2(b_1(y)-b_1^0(y))$ pour l'autre.
Ensuite, pour les dérivées d'ordre α en x, on dérive un produit sachant que pour tout $|\alpha_1|>2$, $\partial^{\alpha_1}(|x|^2)=0$ et, on s'inspire de la preuve du lemme 4.3 et de ce qui est fait ci-dessus.

On obtient que

$$|x|^2(\tilde{b}_{1,k}(x,\xi)-\tilde{b}^0_{1,k}(x,\xi))\in S^0_{1,\delta}$$

avec ses semi-normes majorées par

$$A_{\alpha,\beta}\|\langle x\rangle^2(b(x)-b(x)^0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Bibliographie

[1] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, *The limiting absorption principle for partial differential op erators*, Mem. Amer. Math. Soc. **66** (1987).

[2] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, *Local smoothing and convergence properties of Schrödinger type equations*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 231-254.

[3] A. de Brouard, N. Hayashi, K. Kato, *Gevrey regularizing effet for the generalized Korteweg de Vries equation and nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse, non lináire, **12** (1995) 673-725. 15, 16

[4] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, Decay and regularity for the Schrödinger equation, J. Analyse Math. **58** (1992), 25-37.

[5] M. Ben-Artzi and J. Nemirovsky, *Remarks on relativistic Schrödinger operators and their extensions*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67** (1997), 29-39. 12

[6] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles*, Annales scientifiques de l'E.N.S, 4è série, tome 14, n°2 , p 209-246 (1981). 15, 16

[7] A. Boulkhemair, *On canonical transformations of paradifferential operators*, commun. in partial differential equations, **18**(5&6), 917-964 (1993). 48, 49, 71, 79

[8] T. Cazenave, *An introduction to nonlinear equations*, Textos de Metodos Matematicos, Vol. **22**. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[9] R. Coifman, Y. Meyer, *Au dela des opérateurs pseudodifférentiels* Asterisque **57**, 2ème édition S.M.F. (1978). 13

[10] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1953-2005. 37, 72

[11] H. Chihara, *Local existence for semilinear Schrödinger équations* Math. Japonica **42**, 35-52 (1995). 12, 16

[12] H. Chihara, *The initial value problem for semilinear Schrödinger equations* Publ.RIMS. Kyoto Univ. **32**, 445-472 (1996).

[13] X. Carvajal et F. Linares *A higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients.* (English summary) Differential Integral Equations **16** (2003), no. 9, 1111-1130.

[14] P. Constantin, J. C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413-439.

[15] A. Davey, K. Stewartson, *On three dimensionnal packets of surface waves*, Proc. R. Soc, A **338** (1974) 101-110. 12, 16

[16] S.Doi, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of the solutions* J.Math. Kyoto Univ. **34**, 319-328 (1994). 63

[17] N. Hayashi, *Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations.* Duke Math. J, **62** (1991), 575-592. 11, 69, 77, 108, 169, 178

[18] N. Hayashi, *Smoothing effect of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **57** (1992), no. 4, 385-394. 13

[19] N. Hayachi et K. Kato, *Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations.* J. Funct. Anal. **128** (1995) 253-277. 13

[20] N. Hayashi, P. I. Naumkin et P. N. Pipolo, *Smoothing effect for some derivative nonlinear Schrödinger equations without smallness condition.* SUT J.Math. **35** (1999), no. 1, 81-112. 13

[21] N. Hayashi, P. I. Naumkin et P. N. Pipolo, *Analytic smoothing effects for some derivative nonlinear Schr odinger equations.* Tsukuba J. Math. **24** (2000), no. 1 , 21-34. 14

[22] N. Hayashi, K. Nakamitsu, et M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schr odinger equations in one space dimension.* Math. Z. **192** (1986), no. **4**, 637-650.

[23] T. Hoshiro, *Mourre's method and smoothing properties of dispersive equations*, Comm. Math. Phys. **202** (1999), 255-265. 11

[24] T. Hoshiro, *Decay and regularity for dispersive equations with constant coefficients*, J. Anal. Math. **91** (2003), 211-230. 16

[25] N. Hayashi et T. Ozawa, *On the derivative nonlinear Schr odinger equation.* Phys. D **55** (1992), no. 1-2, 14-36. 16

[26] S. Hara : *A necessary condition for the r I -well posed Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. **3**, 287-305 (1992). 12

[27] N. Hayashi et S. Saitoh, *Analycity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations.* Commu. Math. Phys. **129** (1990), 27-42. 11

[28] N. Hayashi et S. Saitoh, *Analycity and smoothing effet for the Schödinger equations.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théo. 13

52 (1990), 163-173.

[29] N. Hayashi, T. Ozawa, *Remarks on nonlinear Schrödinger equations in one space diemension* Diff integral Eqs **2**, 453-461 (1994). 13

[30] W. Ichinose : *A note on the Cauchy problem for Schro dinger type equations on the Riemannian manifold Math.* Japonica **35**, 205-213 (1990).

[31] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Smoothing effect and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equation*, Inventiones Mathematicae **134**, 489-545 (1998). 11

[32] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Annales de l'I.H.P. **10**, 255-288 (1993). 16, 19, 42, 66, 67, 69, 79, 80, 82, 95, 106, 107, 167, 177

[33] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *The cauchy problem for quasi-linear Schrödinger equations*, Invent. math. **158**, 343-388 (2004). 19, 66

[34] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 33-69. 63

[35] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527-620. 12, 16

[36] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the generalized Benjamin-Ono equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 155-172. 13, 15

[37] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the Zakharov and Zakharov-Schulman systems*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 204-234. 15

[38] S. Klainerman, *Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **78** (1982), no. 1, 73-98. MR 84b :35015

[39] S. Klainerman and G. Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 1, 133-141. MR 84a :35173. 11

[40] H. Koch and J. C. Saut, *Local smoothing and local solvability for third order dispersive equations*, SIAM J.Math. Anal. **38**, n°. 5, 1528-1542 (2006). 11

[41] T. Kato : *Quasilinear evolution equation, with applications to partial diérential equations*, Lecture Notes in Math. **448**, 27-50, Springer- Verlag 1975. 15

[42] T. Kato : *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation* Advances in Math. Supp. Studies, Studies in Applied Math. **8** (1983), 93-128. 13

[43] T. Kato et K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481-496. 11, 14

[44] C. Laurey, *Le problème de Cauchy pour une équation de Schrödinger non linéaire d'ordre 3.* C. R. Acad. Sci. Paris S er. I Math. **315** (1992), no. 2, 165-168. 12, 16

[45] F. Linares, G. Ponce, *On the Davey-Stewartson systems*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **10** (1993), 523-548.

[46] R.P. de Moura *Well-posedness for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation.* (English summary) J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), no. 2, 1254-1267. 15

[47] Y. Meyer, *Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles*, séminaire Goulaoudic-Meyer-Schwartz 1981-1982, Exposé n° VI, 10 Novembre 1981. 14

[48] Y. Meyer, *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires*, séminaire N. Bourbaki, 1979-1980, exp n^0 550, 293-302. 33, 49, 50, 51, 52

[49] S. Mizohata, *On the Cauchy problem Notes and Reports in Math. in Science and Engineering*, Science Press &A&Academic Press **3**, (1985). 48, 49, 52

[50] V. G. Makhanov and O. K. Pashaev, Soviet Sci. Rev., Sect. C : Math. Phys. Rev. 9 (1992), no. 3, i-iv and 1-152 ; Zbl 839.35109. 11, 12, 79, 103

[51] R. P. de Moura et A. Pastor, *On the Cauchy problem for the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation.* (English summary) Commun. Math. Sci. **9** (2011), no. 1, 63-80. 14

[52] P.-N. Pipolo, *Smoothing effect for some derivative nonlinear Schrödinger equations.* Discrete Contin. Dynam. Systems **5** (1999), no. 3, 685-695. 15

[53] G. Ponce, *Local existence theory for the generalized Schrödinger equation* JEDP. p 1-11 (1997). 14

[54] D. F. Rial *Weak solutions for the derivative nonlinear Schrödinger equation.* Nonlinear Anal. **49** (2002), no. 2 Ser. A : Theaory Methods, 149-158. 63

[55] M. Ruzhansky et M. Sugimoto, *A new proof of global smoothing estimates for dispersive equations*, Advances in pseudo-differential operators, 65-75, Oper. Theory Adv. Appl., **155** (2004), Birkhäuser, Basel. 14

[56] M. Ruzhansky et M. Sugimoto, *Global L2 -boundedness theorems for a class of Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 547-569. 16

[57] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A smoothing property of Schrödinger equations in the critical case*, Math. Ann. **335** (2006), 645-673.

[58] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Global smoothing estimates for dispersive equations with non-polynomial symbols* , Proceedings of The 12th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Kyushu University Press, Fukuoka.

[59] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A smoothing property of Schr odinger equations and a global existence result for derivative nonlinear equations*, in Advances in Analysis 315-320, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[60] M. Ruzhansky, M. Sugimoto, *Smoothing properties of evolution equations via canonicla transforms.* (2008).

[61] Jalal Shatah, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Differential Equations **46** (1982), no. 3, 409-425. MR 84g :35036.

[62] B. Simon, *Best constants in some operator smoothness estimates*, J. Funct. Anal. **107** (1992), 66-71. 11

[63] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), 699-715.

[64] M. Sugimoto, *Global smoothing properties of generalized Schrödinger equations*, J. Anal. Math. **76** (1998), 191-204. 12

[65] M. Sugimoto, *A Smoothing property of Schrödinger equations along the sphere*, J. Anal. Math. **89** (2003), 1530. 12

[66] J. Szeftel, *Microlocal smoothing effect for the nonlinear Schrödinger equation.* SIAM J. Math. Anal. **37** (2), 549-597, (2005).

[67] L. T'Joen, *Effet régularisant et existence local pour l'équation de Schrödinger non linéaire à coefficents variables* C.R.Acad.Sci.Paris, t.**331**, Serie 1, 375-378 (2000). Galilée.

[68] D.Tataru, *On the Fefferman-Phong inequality and related problems* Communication in Partial Differential equations, **27** : 11, 2101-2138 (2002). 14, 66

[69] M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE* Birkhäuser (1991). 77

[70] M.E. Taylor, *PDE III Nonlinear Equations* Springer (1997). 33, 36, 48, 49, 72

[71] Masayoshi Tsutsumi et Isamu Fukuda, *On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation. Existence and uniqueness theorem*, Funkcial. Ekvac. **23** (1980), no.3, 259-277. MR 83c :35108a.

[72] Masayoshi Tsutsumi and Isamu Fukuda, *On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation. II*, Funk- cial. Ekvac. **24** (1981), no.1, 85-94. MR 83c :35108b. 11

[73] J.Takeushi, *On the Cauchy problem for some non-kowalewskian equations with distinct characteristic roots* J.Math. Kyoto Univ. **20**, 105-124 (1980).

[74] L. Vega, *Schrödinger equations : Pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 874-878. 79, 103

[75] K. Watanabe, *Smooth perturbations of the selfadjoint operator* $|\Delta|^{\frac{\alpha}{2}}$, Tokyo J. Math. **14**. 12

[76] B. G. Walther, *A sharp weighted L2 -estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation*, Ark. Math. **37** (1999), 381-393. 12

[77] B. G. Walther, *Regularity, decay, and best constants for dispersive equations*, J. Funct. Anal. **189** (2002), 325-335.

[78] M. Yamazaki : *On the microlocal smoothing effect of dispersive partial differential equations I* ; second order linear equations Algebraic Analysis **11**, 911-926 (1988). 15, 16

[79] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, *Degenerate dispersion laws, motion invariant and kinetic equations*, Physica **1D** (1980), 185-250. 11

63

Table des matières

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Pierre-Yves BIENAIME

Existence locale et effet régularisant précisés pour des équations de type Schrödinger.

Local existence and smoothing effect precised for generalized nonlinear Schrödinger equations

Résumé

Dans cette thèse, on considère le problème de Cauchy dans les espaces de Sobolev habituels et dans des espaces de Sobolev à poids pour des équations non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ces équations sont de la forme des équations de Schrödinger. Nous étudions l'existence locale et l'effet régularisant vérifié par les solutions, pour cela nous suivons une méthode employée par C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega, et nous généralisons et précisons certains de leurs résultats. La non linéarité est un fonction régulière nulle à l'ordre 2 en 0 et l'opérateur $\mathscr{L}$ est de la forme $\mathscr{L} = \sum_{j\leq k} \partial^2_{x_j} - \sum_{j>k} \partial^2_{x_j}$.
Cet opérateur généralise le Laplacien mais n'est plus elliptique.
Dans le cas où F est nulle à l'ordre 3 en 0, nous prouvons l'existence locale, l'unicité ainsi qu'un effet régularisant pour une donnée initiale dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \frac{n}{2} + 3$. Dans le cas où F est nulle à l'ordre 2 en 0, nous prouvons le même résultat mais pour une donnée initiale dans des espaces de Sobolev à poids.
Le plan de démonstration reprend celui de C.E. KENIG, G. PO ?CE et L. VEGA.

Mots clés

Equations de type Schrödinger non linéaires, Equations aux dérivées partielles non linéaires, Espaces de Sobolev, Opérateurs pseudodifférentiels, Opérateurs paradifférentiels, Formule de Bony, Problème de Cauchy, Existence locale, Effet régularisant.

Abstract

In this paper, we consider the Cauchy problem in the usual Sobolev spaces for some nonlinear equations of the form

$$\begin{cases} \partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

that is, equations which are of Schrödinger type. We study the local existence and the smoothing effect of the solutions, following C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, and extend some of their results.
The nonlinearity F is a smooth function which vanishes to the 3rd order at 0 and the operator $\mathscr{L}$ has the form $\mathscr{L} = \sum_{j\leq k} \partial^2_{x_j} - \sum_{j>k} \partial^2_{x_j}$. It extends the Laplace operator but is not elliptic in general.
We prove the local existence, the uniqueness and the smoothing effect given any $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ with $s > \frac{n}{2} + 3$.
The proof follows the same plan as that of C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Inventiones Matematicae*, 1998. We improve the estimates by using the paradifferential calculus of J.-M. Bony.

Key Words

Non linear generalized Schrödinger equations type, Sobolev spaces, Pseudodiffenrentiel operators, Bony's formula, Cauchy Problem, Local Existence, Smoothing effect.