

Thèse de Doctorat

Pierre VIDOTTO

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 6 juillet 2016

Géométrie ergodique et fonctions de comptage en mesure infinie

JURY

Présidente : **M^{me} Françoise PÈNE**, Professeur des universités, Université de Brest
Rapporteur : **M. Frédéric FAURE**, Maître de conférences, Université de Grenoble
Examineurs : **M. Laurent GUILLOPÉ**, Professeur des universités, Université de Nantes
M. Juan SOUTO, Directeur de recherche, Université de Rennes 1
Directeur de thèse : **M. Marc PEIGNÉ**, Professeur des universités, Université de Tours
Co-directeur de thèse : **M. Samuel TAPIE**, Maître de conférences, Université de Nantes

Rapporteur : **M. Mark POLLICOTT**, Professeur, Université de Warwick

Remerciements

Cette thèse serait inachevée sans des remerciements aux personnes qui ont participé de près ou de loin à son écriture, ou qui m'ont suivi et soutenu depuis le début.

Mes pensées vont tout d'abord à Marc et Samuel pour leur encadrement pendant ces trois ans. Je remercie Samuel pour avoir accepté de proposer un sujet de stage en M2 et Marc pour avoir accepté de l'épauler pendant le stage, et finalement, pendant trois ans de thèse. Ce fut une expérience très enrichissante : je ne réussirai sans doute pas à rendre ici l'émerveillement qui m'a emporté à de nombreuses reprises en découvrant la richesse mathématique du sujet que vous m'avez proposé. Merci de m'avoir laissé du temps en début de thèse, pour bien comprendre les objets à manipuler et me faire une idée plus précise du sujet : que ces premiers mois furent difficiles ! Vous avez toujours su motiver les questions et le contexte de ce travail, toujours apporté une illustration déterminante face à mes difficultés de compréhension. Vos deux points de vue différents mais complémentaires ont fait de ces trois ans une aventure mathématique passionnante, dans laquelle il reste encore bien des pistes à explorer... Merci d'avoir été disponibles malgré vos diverses responsabilités et d'avoir toujours fait preuve de patience devant mes questions répétées. Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans vos conseils et vos lectures acharnées des différentes versions du manuscrit : merci pour votre exigence quant à la rédaction ! Si j'ai abordé jusque-là le côté scientifique de ces trois ans, je n'en oublie pas pour autant le côté humain : merci pour vos encouragements et toutes les discussions que l'on a partagées, pour votre enthousiasme et la confiance que vous m'avez accordée. Merci également pour les rencontres que j'ai faites grâce à vous et les différents endroits que j'ai découverts. J'ai maintenant une bonne adresse pour me détendre sur les bords de Loire !

Un grand merci à Frédéric Faure et Mark Pollicott d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Merci pour votre implication dans la relecture et pour vos rapports, ainsi que vos commentaires concernant l'amélioration du texte. Merci à Frédéric pour ses exposés qui m'ont révélé une autre facette des problèmes de dynamique. J'en profite

pour remercier Mark pour le temps qu'il m'a accordé lors de mon séjour à l'université de Warwick en janvier. Je remercie également Laurent Guillopé, Françoise Pène et Juan Souto pour avoir accepté de faire partie du jury et pour leurs corrections du manuscrit.

J'aimerais adresser un remerciement particulier aux personnes suivantes. Je commence par Barbara Schapira pour son accueil dans l'équipe ANR-Géode et pour les discussions que nous avons partagées à Bilbao, Rennes ou Nantes. Merci pour la co-organisation avec Samuel du groupe de travail Nantes-Rennes, qui a été un très bon moyen de réfléchir à de très jolies mathématiques dans une ambiance agréable. Je souhaite également remercier Françoise Dal'bo pour les différents moments où nous avons parlé de mathématiques ou d'autres choses. Merci pour ce cours de géométrie hyperbolique et toutes les questions passionnantes qu'il a soulevées. Je ne peux pas m'empêcher de te dire merci pour tes différentes productions écrites qui ont toujours été une source d'inspiration d'exposés : j'ai trouvé dans ces lectures maintes illustrations des interactions fécondes entre géométrie, théorie des nombres et dynamique qui m'ont passionné durant ces trois ans. J'adresse également un grand merci à Sébastien Gouëzel, pour ses exposés, pour sa qualité d'écoute, ses explications et son implication dans mon travail : merci notamment d'avoir résolu un problème de dernière minute qui m'a fait vivre des heures d'inquiétude. Merci beaucoup Sébastien !

Merci aux différents enseignants angevins que j'ai croisés dans ma formation pour avoir développé ma curiosité pour certaines questions mathématiques et fait naître en moi l'envie d'aller plus loin.

J'arrive maintenant aux membres du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL). Mon premier remerciement sera général, pour souligner la très bonne ambiance qui règne au LMJL : ce fut toujours avec plaisir que j'arrivais au laboratoire, pour partager un bonjour ou un sourire avant de me mettre au travail. Pour ces quelques années, merci à tous ! Mon arrivée à Nantes s'est faite pour la préparation à l'agrégation. J'ai vécu depuis lors de très bons moments ici. Je remercie Gilles pour son implication dans la préparation et ses bons conseils, ainsi que ses encouragements à Paris au moment des oraux. Je tiens également à remercier les enseignants du master 2 qui nous ont ouvert leur porte pour nous parler plus profondément de mathématiques. Cette année fut bien sûr déterminante dans le choix d'entreprendre une thèse ; je remercie le centre Henri Lebesgue et toutes les personnes qui ont défendu mon dossier pour l'obtention d'une bourse. Cette bourse a été l'occasion pour moi d'enseigner pendant trois ans : ce fut une expérience particulièrement enrichissante par les questions qu'elle soulève et les discussions qu'elle engendre. Je remercie à ce titre Abdesslam, Robert, Samuel et Xue-Ping pour leurs explications et leurs conseils d'enseignant, ainsi que Moudhaffar, Virgile et Damien pour

les débats et les échanges de ressources pédagogiques. J'ai également participé à l'atelier "MATH.en.JEANS" durant ma première année, ce qui n'aurait pas été possible sans le concours de Colette Anné ; je remercie également Karine, Hervé, Thierry et Michel pour la mise en place de cet atelier dans les collèges Victor Hugo et Paul Langevin. Je tiens à remercier toute l'équipe de la SEME pour cette bonne expérience et plus particulièrement Anne, Paul, Éric et Philippe pour leur encadrement. Merci également à François Laudenbach pour son intérêt pour les doctorants, sa disponibilité et ses bons conseils en matière d'exposés. J'adresse un grand merci à Anaïs, Annick, Katrin, Brigitte, Colette et Stéphanie : que ferions-nous sans vous ? Merci pour votre patience devant nos errements administratifs, pour l'organisation de tout ce qui touche de près ou de loin au laboratoire et pour votre bonne humeur ! Je voudrais enfin remercier Claude, pour ses mails surprenants, sa bonne humeur et ses belles chemises : ça me manquera de venir troubler ta quiétude au CRDM !

Cette expérience aurait été bien différente sans les doctorants. Ceux d'horizons plus lointains d'une part : un grand merci à Felipe pour tous ces bons moments ! Grâce à toi, bien des conférences ont été plus sympathiques à suivre. Merci pour les belles expressions chiliennes, pour le Pisco, pour les notions mathématiques que nous avons tenté d'étendre pendant un repas au CIRM (avec une belle contribution de Cheikh !) et pour cette amitié. Merci également à Martin pour avoir immortalisé notre rencontre avec le scorpion et à Olivier et Sébastien pour mes premières bières en conférence ! Je remercie également Adrien, Alexandre et Kamel pour les rencontres bien agréables du groupe de travail.

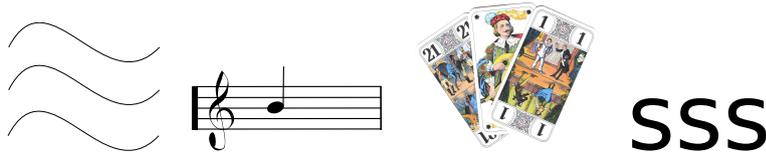
Et bien sûr, ceux du LMJL : un grand merci à Christophe et Ilaria de nous avoir expliqué les trucs et astuces du laboratoire et pour votre accueil chaleureux : j'ai bien en mémoire ce premier mois dans votre bureau ! Merci également à Thomas G. pour ses conseils de grand Sage, à Antoine pour son calme olympien face à la folie de Christophe, à Virgile pour m'avoir donné envie de jouer aux boules nantaises, à Moudhi pour son coaching et ses explications déterminantes pour la soutenance, à Florian pour son énergie du lundi matin et sa mèche à la Denis la Malice, à Victor MD de m'avoir fait découvrir la possibilité de souffrir de courbatures en sortant de cours, à Vytauté pour nous avoir canalisés durant la SEME, à Guillaume qui m'a fait rêver en chantant haut perché (j'attends d'ailleurs une version de "I will always love you" de Whitney Houston), à Olivier de m'avoir longtemps fait douter sur son nom et son prénom, à Thomas B. d'être notre caution militante et de n'avoir jamais désarmé face à notre mauvaise foi et nos taquineries, à Thomas W. de ne pas être piqué des hannetons pendant nos légendaires parties de palets, à Victor VdR d'avoir partagé cette galette -galette de quoi ?- galette des rois (parce que c'est extrêmement super sympa !), à Noémie qui rigole toujours quand je

lui parle (saurais-je un jour pourquoi?!), à Hala pour toutes ses bonnes gourmandises du Liban et enfin à Caroline de m'avoir soutenu dans des séminaires difficiles. Merci à tous les nouveaux venus -Simon, Zoé, Niccolò, Guillem, Claire- pour la bonne humeur que vous avez insufflée tout au long de l'année! Je m'arrête à présent plus particulièrement sur les membres du bureau 9, Valentin et Damien, avec qui l'on se suit depuis cinq ans déjà. Cette expérience n'aurait pas été la même sans vous. Nous nous sommes retrouvés tous les trois dans ce grand bain de la recherche et nous avons avancé ensemble. Si j'apprécie de venir au laboratoire, c'est aussi grâce à vous. Merci pour tout : nos discussions, nos délires, nos fous rires, nos soirées Wilton, nos échanges mathématiques, votre soutien dans les moments de doute, nos soirées Wilton, nos défis sportifs et bien d'autres choses encore! Travailler dans une si bonne ambiance est déjà un luxe, mais le faire avec deux amis c'est un véritable privilège. Je vous souhaite le meilleur pour la suite et j'espère bien venir vous embêter dans le futur, que vous soyez au Canada, à Mayotte ou dans un pays inconnu pour un post-doc de trois ans en géométrie algébrique. Merci du fond du coeur pour tous ces moments et ceux à venir.

Ce dernier paragraphe m'offre une transition parfaite pour remercier les autres personnes qui comptent beaucoup. Un grand merci à Adrien pour ton soucis constant de mes avancées de thèse, pour tes points de vue originaux et pour tous nos appels plus ou moins philosophiques. Je remercie également le duo fou des Gyros, Yann et Romain, pour toutes nos aventures depuis maintenant neuf ans. Malgré la distance, vous avez toujours été présents pour des moments d'anthologie! Comme quoi, les capteurs gyroscopiques, ça crée des liens! J'adresse également un grand merci à la team angevine - Simon et Johan. Mersimon pour toutes nos belles aventures depuis la première année de master, durant laquelle nous avons découvert la joie de la vache qui rit sur le pain de mie. Depuis, "toujours la banane, toujours debout" et c'est à chaque fois un plaisir de se retrouver. Et Johan pardi : mi-angevin, mi-nantais mais carrément terrible! Merci d'avoir refait le monde si souvent, de te laisser toujours tenter par une bière improvisée, d'être si passionnant quand on parle de mathématiques et pour ton écoute et ton soutien constant. Merci à Maxime et Leïla d'apporter toujours ce grain de folie : les soirées entre la Sarthe et la Loire-Atlantique sont toujours l'occasion de trouver de nouvelles chansons marquantes! Un grand merci également à Alexandre, Claudie et Émilien pour nos soirées lognottes (j'ai un doute sur l'adjectif, mais l'ami Wiki semble confirmer!), les week-ends parisiens, les balades, les chansons de Disney et nos défis flèches et arc! Merci à Nicolas pour les soirées PS2 épicées, à Thibaut de nous avoir enseigné l'art subtil de la margarita et à Mathilde de nous accompagner depuis longtemps dans les soirées "pas de projet"! Un grand merci à vous pour tous ces bons moments!

Je remercie tout naturellement mes parents. Je ne serais pas là si vous ne m'aviez pas toujours soutenu et encouragé à continuer. Merci pour votre confiance et votre présence depuis le début. Cette thèse, c'est en grande partie à vous que je la dois. Un grand merci à mes deux soeurs pour nos moments de complicité sans égal. Merci également à Denis pour les virées entre le Parc Astérix, Miramas-le-Vieux et le château de Blois ! Que c'est bon de se retrouver autour d'un bon repas ou d'un jeu de mimes ! Merci pour votre présence dans les bons moments comme dans les moins bons et de n'avoir jamais rigolé lorsque je vous parlais de mes beignets de courbure négative ! S'il y a une personne à qui je dois également beaucoup et qui m'a supporté depuis le début de cette thèse, c'est bien Elsa : je te remercie pour ton soutien de tous les jours, pour ta patience, pour ta bonne humeur et le bonheur de notre vie à deux. Tu m'auras bien permis de déconnecter des problèmes mathématiques ! Merci de m'avoir fait découvrir les perles "cousues main" des Marseillais et surtout pour tout le reste ! Un grand merci à toute la famille de Janzé à Varilhes, en passant par Châteaubriant et Nozay, pour tous les moments passés et ceux à venir ! J'ai une pensée plus particulière pour ma grand-mère. Merci également à ma belle-famille pour votre accueil et votre gentillesse, pour les cousinades de folie et notamment Béatrice, Pierre et Choukie d'avoir franchi deux départements pour cette soutenance !

Il fut un temps où nous communiquions à l'aide de rébus dans le bureau 9 ; en voici un pour résumer ces quelques pages !



Introduction

1.1 Présentation du sujet

Cette thèse traite de certains aspects de l'action par isométries de groupes discrets Γ sur des espaces X à courbure négative. Pour motiver ce qui va suivre, rappelons la question suivante, formulée par C. F. Gauss dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* :

Quel est l'équivalent lorsque R tend vers $+\infty$ du nombre $N(R)$ de points à coordonnées entières appartenant au disque $B(O, R)$ centré en l'origine et de rayon R ?

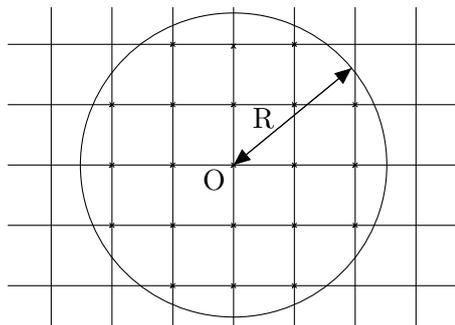


FIGURE 1.1 – Problème du cercle de Gauss

Gauss montra que $N(R) = \pi R^2 + O(R)$. Une méthode pour obtenir ce résultat repose sur les remarques suivantes (voir [Bab02b] pour plus de détails) :

- si un couple $(n, m) \in B(O, R)$, alors le carré unité $C_{n,m}$ de sommets (n, m) , $(n + 1, m)$, $(n + 1, m + 1)$ et $(n, m + 1)$ est inclus dans $B(O, R + \sqrt{2})$;
- si le carré unité $C_{n,m}$ intersecte $B(O, R - \sqrt{2})$, alors $(n, m) \in B(O, R)$.

Ce résultat, reformulé dans le langage de l'action du groupe \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 par translations, s'énonce $N(R) = B(O, R) \cap \mathbb{Z}^2 \cdot O \sim \pi R^2$. Une autre démonstration est basée sur l'équidistribution des cercles sur le tore $\Pi^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$: fixons $R > 0$ et notons $\tilde{\lambda}_R$ la mesure uniforme sur le cercle $\tilde{C}(O, R) \subset \mathbb{R}^2$, et au quotient, λ_R la mesure uniforme sur la projection du cercle $C(O, R)$; alors pour toute fonction continue $f : \Pi^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a (voir figure 1.2)

$$\int_{C(O,R)} f(x, y) d\lambda_R(x, y) \rightarrow \int_{\Pi^2} f(x, y) dx dy \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty. \quad (1.1)$$

Fixons à présent une fonction $\rho : \Pi^2 \rightarrow \mathbb{R}$, d'intégrale 1 et nulle en dehors d'un voisinage $B(\bar{O}, \varepsilon)$ du point \bar{O} . Notons $\tilde{\rho} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un relevé de ρ ; la quantité $N(R)$ peut être encadrée de la manière suivante

$$\int_{B(O, R-\varepsilon)} \tilde{\rho}(x, y) dx dy \leq N(R) \leq \int_{B(O, R+\varepsilon)} \tilde{\rho}(x, y) dx dy.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{B(O, R)} \int_{B(O, R)} \tilde{\rho}(x, y) dx dy = \frac{1}{B(O, R)} \int_0^R 2\pi t \left(\int_{C(O, t)} \tilde{\rho}(x, y) d\tilde{\lambda}_t(x, y) \right) dt,$$

la formule d'équidistribution (1.1) impose que l'intégrale de droite tend vers 1 quand $R \rightarrow +\infty$. Cette deuxième approche met en évidence les liens entre problèmes de comptage et dynamique ; elle est à l'origine de nombreux résultats en arithmétique (voir [CDP07], [Dal07] et [Bab02b]) ou concernant l'action de groupes d'isométries en courbure négative.

Cet exemple n'est pas loin de nos préoccupations, bien que le contexte géométrique soit différent. L'espace X sur lequel nous faisons agir les groupes est une variété connexe, simplement connexe, complète, avec une courbure sectionnelle négative pincée, *i.e.* comprise entre deux constantes strictement négatives. Notons d la distance sur X induite par la structure riemannienne de X . Les groupes Γ que nous étudions agissent par isométries

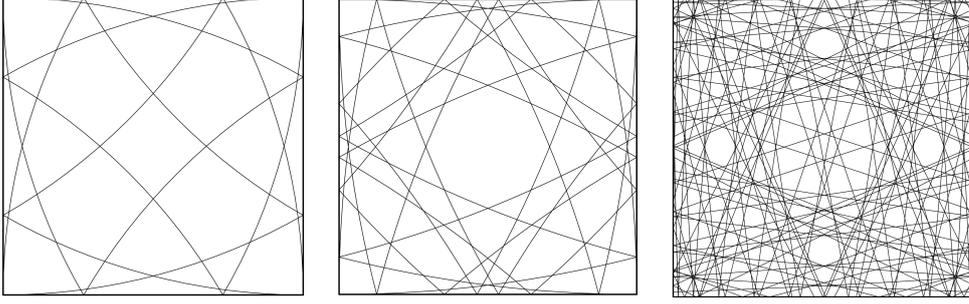


FIGURE 1.2 – Équidistribution des cercles sur le tore Π^2 .

sur X , proprement discontinu et sans point fixe. Soit $\mathbf{o} \in X$. L'étude de quantités comme la fonction orbitale

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) := \#\{\gamma \in \Gamma \mid d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq R\}$$

est fortement reliée à la compréhension de la dynamique du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent $T^1(X/\Gamma)$ de la variété quotient. Rappelons que ce flot est défini de la manière suivante : si $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in T^1(X/\Gamma)$, ce couple détermine une unique géodésique $(\gamma(t))_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaisant $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (\mathbf{p}, \mathbf{v})$; dans ce cas, pour $t \in \mathbb{R}$, l'action de g_t est donnée par $g_t(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (\gamma(t), \gamma'(t))$. Remarquons que l'entropie topologique du flot géodésique est donnée par le taux de croissance exponentielle de la fonction orbitale, que l'on note δ_Γ , c'est-à-dire

$$\delta_\Gamma := \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N_\Gamma(\mathbf{o}, R))}{R}.$$

Rappelons que la série de Poincaré du groupe Γ est définie de la manière suivante : pour tout $s > 0$

$$\mathcal{P}_\Gamma(s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}.$$

Le nombre δ_Γ est alors l'exposant critique de \mathcal{P}_Γ , au sens où

$$\delta_\Gamma = \sup \{s > 0 \mid \mathcal{P}_\Gamma(s) = +\infty\} = \inf \{s > 0 \mid \mathcal{P}_\Gamma(s) < +\infty\}.$$

Le groupe Γ est dit divergent (resp. convergent) dès que $\mathcal{P}_\Gamma(\delta_\Gamma) = +\infty$ (resp. $\mathcal{P}_\Gamma(\delta_\Gamma) < +\infty$). Ces séries ont permis à S. J. Patterson (dans [Pat76]) et D. Sullivan (voir [Sul84]) de construire une famille de mesures $(\sigma_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in X}$ portées par un ensemble particulier : l'ensemble

limite Λ_Γ de Γ défini comme l'ensemble des points d'accumulation d'une (ou de toute) Γ -orbite. Chaque mesure de Patterson-Sullivan $\sigma_{\mathbf{x}}$ rend compte de la structure de Λ_Γ vu du point \mathbf{x} . Il est possible d'associer à cette famille une mesure m_Γ sur $T^1(X/\Gamma)$, invariante sous l'action du flot géodésique. Le premier objectif de cette thèse est d'étudier une propriété de mélange du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ relativement à cette mesure. Rappelons tout d'abord ce que l'on entend par mélange du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par rapport à une mesure m de masse $\|m\|$ finie sur $T^1(X/\Gamma)$: le flot géodésique est dit mélangeant si pour tous ensembles $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset T^1(X/\Gamma)$ mesurables, on a

$$m(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \longrightarrow \frac{m(\mathfrak{A})m(\mathfrak{B})}{\|m\|} \text{ quand } t \longrightarrow \pm\infty.$$

Si la masse $\|m\|$ est infinie, cette définition s'étend en disant que le flot $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est mélangeant si

$$m(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \pm\infty.$$

Quand la mesure m_Γ est finie, ce résultat a par exemple été démontré en courbure constante pour des surfaces de volume fini (voir [Hed39]), par F. Dal'bo et M. Peigné dans le cas de groupes de Schottky contenant des transformations paraboliques agissant sur une variété de Hadamard de courbure pincée (voir [DP98]), ou par M. Babillot sans hypothèse de finitude de la mesure dans [Bab02a]. Nous citons finalement le résultat suivant de T. Roblin (voir [Rob03])

Théorème (Roblin).

Si $\|m_\Gamma\| < +\infty$, on a

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{\|m_\Gamma\|}.$$

Si $\|m_\Gamma\| = +\infty$, on a

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0.$$

Remarque 1.1.1. *La définition de mélange dans le cas de la mesure infinie peut sembler bien faible en comparaison de sa signification en mesure finie (voir le chapitre 3 de [Rob03] à ce sujet). En fournissant un équivalent de la forme*

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \sim \varepsilon(t)m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B}),$$

le théorème A ci-dessous pourra bien être interprété comme une propriété de mélange,

mais à renormalisation près.

Cette propriété de mélange du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\mathbb{T}^1(X/\Gamma)$ est intéressante en soi, du point de vue de la théorie ergodique, mais permet également pour les variétés géométriquement finies de mesure finie de retrouver un équivalent de la fonction orbitale $N_\Gamma(\mathbf{o}, R)$. Cette idée a été développée dans la thèse de G. A. Margulis dans le cas des surfaces hyperboliques ; elle repose sur le fait que le mélange du flot géodésique entraîne une propriété d'équidistribution des sphères du type (1.1). Le comptage orbital en découle par des arguments similaires à ceux déjà évoqués ; il faut néanmoins être prudent concernant les effets de bord apparaissant en courbure négative (voir la deuxième section de [EM93] pour plus de détails). Ce résultat de comptage était déjà connu des travaux de Margulis pour les variétés compactes (voir [Mar69]), pour les groupes géométriquement finis agissant sur \mathbb{H}^n (voir par exemple [LP82], où les auteurs utilisent des arguments de théorie spectrale), ou pour les groupes convexe-cocompacts en courbure pincée (voir [Lal89] pour une démonstration basée sur la dynamique symbolique). Dans [Rob03], l'auteur déduit également un équivalent pour la fonction orbitale à partir du mélange. Il démontre le résultat suivant

Théorème (Roblin).

Si la masse $\|m_\Gamma\|$ est finie, on a

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) \sim \frac{\|\sigma_\mathbf{o}\|^2}{\|m_\Gamma\|} e^{\delta_\Gamma R} \text{ lorsque } R \longrightarrow +\infty.$$

Si $\|m_\Gamma\| = +\infty$, on a

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) = o\left(e^{\delta_\Gamma R}\right) \text{ lorsque } R \longrightarrow +\infty.$$

La dernière question abordée dans ce travail concerne le dénombrement asymptotique des orbites périodiques du flot géodésique $(g_t)_t$ de période $\leq R$, ou autrement dit, l'étude de la quantité $N_{\mathcal{G}}(R)$ correspondant au nombre de géodésiques fermées contenues dans la variété quotient X/Γ de longueur $\leq R$. D'abord prouvé par Selberg dans le cas des surfaces hyperboliques compactes (voir [Sel56]), puis par Margulis (voir [Mar69]) dans le cas des variétés compactes et étendu dans [PP83] aux orbites périodiques des flots axiome-A, on a le résultat suivant dû à Roblin dans cette généralité

Théorème ([Rob03]). *Soit X/Γ une variété géométriquement finie. Si $\|m_\Gamma\| < +\infty$, il*

vient

$$N_{\mathcal{G}}(R) \sim \frac{e^{\delta_{\Gamma} R}}{\delta_{\Gamma} R}.$$

Malheureusement, ses arguments géométriques ne fournissent pas d'indication quant au comportement de cette quantité lorsque $\|m_{\Gamma}\| = +\infty$.

1.1.1 Hypothèses et résultats

Le but de cette thèse est d'obtenir des équivalents précis pour les fonctions $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R)$ et $N_{\mathcal{G}}(R)$, ainsi qu'une vitesse de convergence vers 0 pour $m_{\Gamma}(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B})$ pour certains groupes Γ , dont la mesure m_{Γ} a une masse infinie sur T^1X/Γ . Ces groupes sont des groupes de Schottky exotiques et ont été construits dans les articles [DOP00], puis [Pei11] : leur construction est rappelée au chapitre 2. L'idée principale en est la suivante : soit M une variété hyperbolique géométriquement finie de dimension $n \geq 2$ possédant un cusp et dont le groupe fondamental Γ est un groupe de Schottky non élémentaire. Les théorèmes A et B de [DOP00] assurent que Γ est de type divergent et que la mesure m_{Γ} est finie dans ce cas. Les démonstrations de ces résultats permettent aux auteurs de comprendre comment modifier la métrique dans le cusp afin d'obtenir une nouvelle variété M' isométrique à un quotient X/Γ , où X est une variété de Hadamard à courbure variable pincée, sur laquelle le groupe Γ agit par isométries, est de type convergent et pour lequel la mesure m_{Γ} est de masse totale infinie relativement à la métrique de X . L'article [Pei11] prolonge ce travail, et permet de modifier la métrique dans le cusp de M de telle sorte que le groupe Γ soit de type divergent relativement à la métrique obtenue sur X , tout en conservant une mesure m_{Γ} infinie. Ces travaux définissent notre cadre de travail, dans lequel la variété X est une variété de Hadamard, de courbure sectionnelle pincée entre deux constantes $-b^2$ et $-a^2$, avec $0 < a < 1 \leq b$, et Γ est un groupe de Schottky "exotique", au sens où Γ est engendré par des groupes élémentaires $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{p+q}$ pour $p, q \geq 1$ tels que $p + q \geq 3$ et satisfaisant la famille d'hypothèses (H_{β}) suivante, pour $\beta \in]0, 1]$:

(D) *Le groupe $\Gamma = \Gamma_1 \star \dots \star \Gamma_{p+q}$ est de type divergent.*

(P₁) *Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le groupe Γ_j est parabolique, de type convergent et son exposant critique est égal à δ_{Γ} .*

1.1. Présentation du sujet

(P₂) Il existe une fonction à variations lentes¹ L telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_j \mid d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\delta_\Gamma d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} C_j \frac{L(T)}{T^\beta}$$

pour une constante $C_j > 0$.

(N) Pour tout $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, le groupe Γ_j satisfait la condition suivante :

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_j \mid d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\delta_\Gamma d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{L(T)}{T^\beta}\right).$$

Nous émettons l'hypothèse **supplémentaire** suivante :

(S) Pour tout $\Delta > 0$, il existe une constante $C = C_\Delta > 0$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et tout $T > 0$ suffisamment grand

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_j \mid T-\Delta \leq d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) < T+\Delta} e^{-\delta_\Gamma d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \leq C \frac{L(T)}{T^{1+\beta}}.$$

Les groupes paraboliques $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ sont dits “influent” car leur exposant critique est égal à celui du groupe Γ : cette propriété est cruciale pour obtenir des groupes convergents, et par suite, des groupes divergents de mesure m_Γ infinie (voir au chapitre 2). Par opposition, les groupes $\Gamma_{p+1}, \dots, \Gamma_{p+q}$, qu'ils soient hyperboliques ou paraboliques, sont dit “non-influent”.

L'hypothèse de divergence du groupe Γ nous assure, par l'intermédiaire du théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan (voir au chapitre 2), que le flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est totalement conservatif relativement à la mesure m_Γ . Sous ces hypothèses, nous démontrons le théorème suivant, qui précise la vitesse de mélange du flot géodésique.

Théorème A. Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset T^1X/\Gamma$ deux ensembles m_Γ -mesurables de mesure finie.

- Si $\beta \in]0, 1[$, il existe une constante $C = C_{\beta, \Gamma} > 0$ telle que

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}\mathfrak{B}) \sim C \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{t^{1-\beta}L(t)} \text{ lorsque } t \rightarrow \pm\infty ;$$

¹Une fonction $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite à variations lentes à l'infini si pour tout $x > 0$, elle vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1$.

- Si $\beta = 1$, il existe une constante $C = C_\Gamma > 0$ telle que

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}.\mathfrak{B}) \sim C \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{\tilde{L}(t)} \text{ lorsque } t \longrightarrow \pm\infty,$$

$$\text{où } \tilde{L}(t) = \int_1^t \frac{L(x)}{x} dx \text{ pour tout } t \geq 1.$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude d'un codage de l'ensemble limite de Γ et sur une représentation symbolique du flot géodésique; tout ceci est exposé au chapitre 4.

Dans le deuxième théorème, nous montrons comment obtenir une minoration du nombre de géodésiques fermées de longueur $\leq R$.

Théorème B. Pour $\beta \in]0, 1[$, il vient

$$N_{\mathcal{G}}(R) \geq \beta \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\delta_\Gamma R}.$$

Nous espérons améliorer ce résultat en un équivalent, mais les techniques utilisées jusque-là ne nous le permettent pas. Pour mettre ce résultat en perspective, rappelons que le résultat suivant a été démontré dans [Rob03] : pour une géodésique fermée φ , si l'on note \mathcal{D}_φ la mesure de Lebesgue normalisée le long de φ , il vient quand $R \longrightarrow +\infty$

$$\delta_\Gamma R e^{-\delta_\Gamma R} \sum_{\varphi | l(\varphi) \leq R} \mathcal{D}_\varphi \longrightarrow \frac{m_\Gamma}{\|m_\Gamma\|} \quad (1.2)$$

dans le dual de l'ensemble des fonctions continues sur T^1X/Γ et à support compact. En particulier, dans le cas d'une variété convexe-cocompacte (qui est un exemple de variété munie d'une mesure m_Γ finie), l'ensemble T^1X/Γ est compact et (1.2) appliqué en $\mathbb{1}_{T^1X/\Gamma}$ implique le résultat de comptage $N_{\mathcal{G}}(R) \sim \frac{e^{\delta R}}{\delta R}$. La convergence (1.2), également valide quand $\|m_\Gamma\| = +\infty$, pourrait laisser penser que $N_{\mathcal{G}}(R)$ est négligeable devant $\frac{e^{\delta R}}{R}$; le théorème B met donc en défaut cette intuition.

Le dernier résultat concerne le dénombrement asymptotique des points orbitaux.

Théorème C.

- Si $\beta \in]0, 1[$, il existe $C' = C'_{\beta, \Gamma} > 0$ telle que

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) \sim C' \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{R^{1-\beta} L(R)}.$$

- Si $\beta = 1$, il existe $C' = C'_\Gamma > 0$ telle que

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) \sim C' \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\tilde{L}(R)}.$$

Pour démontrer ce résultat, nous étendons le codage présenté au chapitre 4 à l'orbite $\Gamma.x_0$ d'un point x_0 du bord à l'infini, ce qui est fait au chapitre 7.

Les constantes apparaissant dans les théorèmes A et C seront exhibées dans leurs démonstrations respectives.

Remarque 1.1.2. *Dans les résultats de T. Roblin cités plus haut, l'hypothèse de non-arithméticité du spectre des longueurs (i.e. que l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées de X/Γ n'est pas contenu dans un sous-groupe discret de \mathbb{R}) est omniprésente. D'après [DP96a], la présence d'un cusp dans la variété quotient assure que cette propriété est satisfaite dans notre situation.*

Remarque 1.1.3. *L'hypothèse supplémentaire (S) a été mise à part dans la famille (H_β) pour la raison suivante : dans l'article [DPPS15], les auteurs obtiennent un résultat analogue au théorème C pour $\beta \in]\frac{1}{2}, 1]$, sans cette hypothèse. Ils ne peuvent obtenir leur résultat pour $\beta \leq \frac{1}{2}$, puisque leur démonstration (à la section 6) est basée sur le théorème de renouvellement de [Eri70], qui n'assure pas la convergence souhaitée dans le cas $\beta \leq \frac{1}{2}$. Notre approche suit celle de l'article [Gou11] qui évite cet écueil grâce à l'hypothèse (S). Il se peut que dans le contexte géométrique qui est le nôtre, l'hypothèse (S) soit une conséquence des quatre premières ; cela reste un point à éclaircir.*

Notons que l'hypothèse (S) est équivalente à chacun des deux énoncés suivants :

- (S') Pour tout $\Delta > 0$, il existe une constante $C = C_\Delta > 0$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et tout $T > 0$ suffisamment grand, on ait

$$\#\{\alpha \in \Gamma_j \mid T - \Delta \leq d(\mathbf{o}, \alpha.\mathbf{o}) < T + \Delta\} \leq C \frac{L(T)e^{\delta_\Gamma T}}{T^{1+\beta}}.$$

- (S'') Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et tout $T > 0$ suffisamment grand, on ait

$$\#\{\alpha \in \Gamma_j \mid d(\mathbf{o}, \alpha.\mathbf{o}) \leq T\} \leq C \frac{L(T)e^{\delta_\Gamma T}}{T^{1+\beta}}.$$

L'équivalence entre les assertions (S) et (S') est immédiate ; nous remarquons également que l'hypothèse (S'') implique l'hypothèse (S'). Pour achever la démonstration de l'équivalence annoncée, il nous reste alors à comprendre pourquoi (S') \Rightarrow (S''). La démonstration

de cette implication est donnée à la fin du troisième chapitre ; elle repose sur les lemmes de Karamata et de Potter énoncés dans ce dernier.

Remarque 1.1.4. Le lemme de Karamata (cf. Chapitre 3) nous permet de remarquer le fait suivant : les équivalents donnés dans les théorèmes A et C dans le cas $\beta < 1$ s'écrivent également sous la forme

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t} \cdot \mathfrak{B}) \sim \frac{C_{\beta,\Gamma}}{1-\beta} \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{\tilde{L}_\beta(t)} ;$$

et

$$N_\Gamma(\mathbf{o}, R) \sim \frac{C'_{\beta,\Gamma}}{1-\beta} \frac{e^{\delta_\Gamma R}}{\tilde{L}_\beta(R)}$$

où la fonction \tilde{L}_β est définie par : $\tilde{L}_\beta(t) = \int_1^t \frac{L(x)}{x^\beta} dx$ pour tout $t \geq 1$. Cette écriture souligne la similarité des résultats avec le cas $\beta = 1$.

1.1.2 Plan de la thèse

Le deuxième chapitre est consacré dans un premier temps à des rappels de géométrie en courbure négative, qui servent ensuite à détailler les constructions des groupes de Schottky exotiques expliquées dans [DOP00] et [Pei11].

Les hypothèses (P_2) et (N) nous conduiront à utiliser certaines propriétés des lois de probabilité stables de paramètre $\beta \in]0, 1]$; le troisième chapitre est dédié à ces outils et fournit des résultats techniques utiles concernant les fonctions à variations régulières.

Nous développons au chapitre 4 un codage de l'ensemble limite, que nous étendons par la suite au flot géodésique. L'étude de ces codages se fait en utilisant une famille d'opérateurs de transfert adaptés ; nous étudions plus précisément le spectre de ces opérateurs ainsi que la régularité de leur rayon spectral.

La démonstration du théorème A fait l'objet du cinquième chapitre. Les étapes sont différentes selon que β soit inférieur ou égal à 1. La démonstration dans le premier cas est inspirée de celle du théorème 1.4 de [Gou11] ; lorsque $\beta = 1$, nous reprenons l'approche de [MT12]. Nous suivons le même cheminement pour les théorèmes B et C.

Le sixième chapitre concerne le dénombrement asymptotique des géodésiques fermées. Nous expliquons comment obtenir une minoration pour $\beta < 1$.

Dans le septième et dernier chapitre, nous étendons dans un premier temps le codage de l'ensemble limite donné au chapitre 4, afin de prendre en compte les mots finis ; nous étudions ensuite le nouvel opérateur de transfert associé à ce codage. La seconde partie du chapitre est consacrée à la démonstration du théorème C.

Notations

Pour deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, nous écrirons $f \underset{C}{\preceq} g$ (ou simplement $f \preceq g$) si $f(R) \leq Cg(R)$ pour une constante $C > 0$ et R suffisamment grand et $f \underset{C}{\succ} g$ (ou simplement $f \succ g$) si $f \underset{C}{\preceq} g$ et $g \underset{C}{\preceq} f$. Pour deux sous-ensembles A, B d'un ensemble E , nous noterons $A \overset{\Delta}{\times} B$ le sous-ensemble de $A \times B$ défini par $A \overset{\Delta}{\times} B := \{(a, b) \in A \times B \mid a \neq b\}$. Nous attirons enfin l'attention du lecteur sur le fait que les constantes apparaissant dans le texte qui suit peuvent varier d'une ligne à l'autre.



2

Géométrie en courbure négative

Ce chapitre est consacré à la présentation des objets et des notations essentiels à la compréhension de la suite du texte. Dans un second temps, nous présentons la construction des groupes d'isométries exotiques avec lesquels nous travaillerons par la suite.

2.1 Rappels et notations

Dans cette thèse, le contexte général est celui d'une variété riemannienne simplement connexe X de dimension $n \geq 2$, complète, de courbure sectionnelle κ strictement négative et pincée entre deux constantes $-b^2$ et $-a^2$ avec $0 < a < 1 \leq b$. L'exemple le plus simple de tels espaces est donné par l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n de courbure -1 . Deux de ses modèles sont les suivants : $\mathbb{R}_x^{n-1} \times \mathbb{R}_y^{+*}$ muni de la métrique $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ ou le modèle de la boule unité \mathbb{B}^n munie de la métrique $\frac{dx^2}{4(1-||x||^2)^2}$, où $|| \cdot ||$ représente la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

2.1.1 Bord à l'infini

Fixons un point $\mathbf{o} \in X$. Notons d la distance induite par la structure riemannienne sur X . On appelle segment géodésique (resp. rayon géodésique, resp. géodésique) une isométrie \mathbf{s} (resp \mathbf{r} , resp γ) d'un intervalle compact de \mathbb{R} d'origine 0 (resp. d'une demi-droite de \mathbb{R} d'origine 0, resp. de \mathbb{R}) dans X . Deux rayons géodésiques \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont dit équivalents

s'ils sont à distance bornée l'un de l'autre, c'est-à-dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que $d(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) \leq C$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. L'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques constituent le bord à l'infini ∂X de X . On dit qu'une suite $(\mathbf{x}_n)_n$ de points de X converge vers $x \in \partial X$ s'il existe un rayon géodésique $(\mathbf{r}(t))_{t \geq 0}$ dans la classe de x tel que $(d(\mathbf{o}, \mathbf{x}_n))_n$ tend vers $+\infty$ et $\supinf_n \sup_{t \geq 0} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{r}(t)) < +\infty$: dans ce cas, tous les rayons de la classe de x vérifient cette propriété. Par exemple, dans le modèle de \mathbb{H}^n donné par le demi-espace, le bord à l'infini s'identifie à $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cup \{\infty\}$; dans le modèle de la boule \mathbb{B}^n , le bord s'identifie à \mathbb{S}^{n-1} .

Notons T^1X le fibré unitaire tangent de X . Le théorème de Cartan-Hadamard établit les propriétés suivantes :

- 1) tout couple $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in T^1X$ détermine une unique géodésique γ vérifiant $\gamma(0) = \mathbf{p}$ et $\gamma'(0) = \mathbf{v}$;
- 2) l'ensemble ∂X est homéomorphe à la sphère unité euclidienne \mathbb{S}^{n-1} ;
- 3) avec la topologie définie précédemment, l'ensemble $\bar{X} := X \cup \partial X$ est homéomorphe à la boule unité euclidienne fermée $\bar{\mathbb{B}}^n$.

De ce théorème, on déduit que pour tout couple de points $(x, y) \in \bar{X} \times \bar{X}$, $x \neq y$, il existe un unique segment géodésique (resp. rayon géodésique, resp. géodésique) d'extrémités x et y . On peut munir le bord à l'infini ∂X d'une distance appelée distance de Gromov. Rappelons sa définition. Commençons par introduire les fonctions de Busemann. Soient $x \in \partial X$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Le cocycle de Busemann $\mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est défini par la formule suivante :

$$\mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \lim_{\mathbf{z} \rightarrow x} (d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{z})). \quad (2.1)$$

De cette définition, on déduit la propriété de cocycle suivante : pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ et tout $x \in \partial X$

$$\mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathcal{B}_x(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \quad (2.2)$$

L'horoboule \mathcal{H} centrée en $x \in \partial X$ et passant par $\mathbf{x} \in X$ est l'ensemble des points $\mathbf{y} \in X$ tels que $\mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ (voir figure 2.1 dans le modèle du demi-plan de Poincaré). On appelle horosphère de niveau $t \in \mathbb{R}$ centrée en x et basée en \mathbf{x} l'ensemble des points \mathbf{z} vérifiant $\mathcal{B}_x(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = t$: l'horosphère de niveau 0 centrée en x et basée en \mathbf{x} n'est autre que le bord de l'horoboule \mathcal{H} précédente. Pour tous $x, y \in \partial X$, le produit de Gromov $(x|y)_\mathbf{o}$ est défini par

$$(x|y)_\mathbf{o} = \frac{1}{2} (\mathcal{B}_x(\mathbf{o}, \mathbf{z}) + \mathcal{B}_y(\mathbf{o}, \mathbf{z})) \quad (2.3)$$

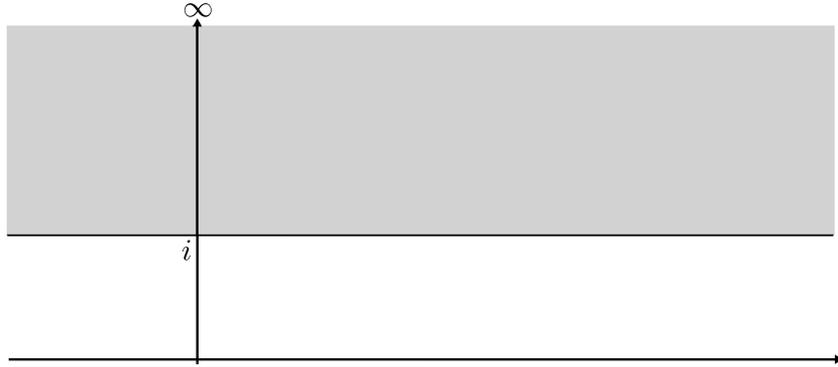


FIGURE 2.1 – Horoboule centrée en l’infini passant par i .

où \mathbf{z} appartient à la géodésique d’extrémités x et y . On peut trouver dans [Bou93] une démonstration du fait que la fonction

$$d_{\mathbf{o}} : (x, y) \mapsto \exp(-a(x|y)_{\mathbf{o}}) \quad (2.4)$$

est une distance sur ∂X : c’est la distance de Gromov au bord vue du point \mathbf{o} . L’espace $(\partial X, d_{\mathbf{o}})$ est compact et $d_{\mathbf{o}}$ satisfait la propriété de visibilité suivante : il existe $C > 0$ ne dépendant que des bornes de la courbure de X telle que

$$\frac{1}{C} \exp(-ad(\mathbf{o}, (xy))) \leq d_{\mathbf{o}}(x, y) \leq C \exp(-ad(\mathbf{o}, (xy))). \quad (2.5)$$

Dans les deux modèles de \mathbb{H}^n évoqués plus haut, la distance de Gromov au bord correspond à la distance euclidienne.

2.1.2 Action des isométries au bord

Notons $\text{Isom}(X)$ l’ensemble des isométries de X préservant l’orientation. On peut étendre l’action d’une isométrie $\gamma \in \text{Isom}(X)$ sur le bord ∂X de la manière suivante : si $(\mathbf{r}(t))_{t \geq 0}$ est un représentant de la classe de $x \in \partial X$, on définit $\gamma.x$ pour $\gamma \in \Gamma$ comme étant la classe du rayon $(\gamma.\mathbf{r}(t))_{t \geq 0}$. L’isométrie $\gamma \in \Gamma$ satisfait alors la relation de conformité suivante

$$d_{\mathbf{o}}(\gamma.x, \gamma.y) = \sqrt{|\gamma'(x)|_{\mathbf{o}} |\gamma'(y)|_{\mathbf{o}}} d_{\mathbf{o}}(x, y) \quad (2.6)$$

où la définition de la distance de Gromov implique que pour tout $x \in \partial X$

$$|\gamma'(x)|_{\mathbf{o}} = e^{-a\mathcal{B}_x(\gamma^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})}.$$

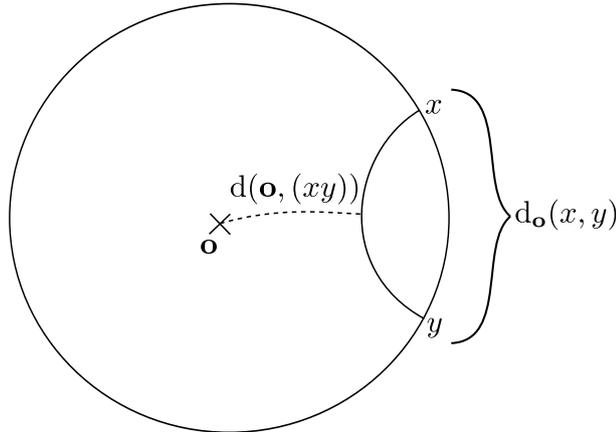


FIGURE 2.2 – Propriété de visibilité de la distance de Gromov d_o .

Une isométrie $\gamma \in \Gamma$ est dite *parabolique* si elle fixe un unique point à l'infini, noté x_γ et que l'on appelle point parabolique. Par exemple, dans le modèle du demi-plan de Poincaré, l'isométrie $z \mapsto z + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est une isométrie parabolique fixant le point à l'infini ∞ .

Une isométrie $\gamma \in \Gamma$ est *hyperbolique* si elle fixe exactement deux points du bord à l'infini. On note x_γ^+ (resp. x_γ^-) son point fixe attractif (resp. répulsif) : pour tout $x \in \bar{X} \setminus \{x_\gamma^-\}$ (resp. $x \in \bar{X} \setminus \{x_\gamma^+\}$), la suite $(\gamma^n \cdot x)_{n \geq 1}$ tend vers x_γ^+ (resp. x_γ^-). On appelle axe de γ la géodésique d'extrémités x_γ^+ et x_γ^- . Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, l'isométrie $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$, fixe les deux points 0 et ∞ ; son axe est donné par la demi-droite orthogonale à l'axe des abscisses passant par 0.

Enfin, une isométrie fixant au moins un point de X sera dite *elliptique*; nous travaillerons néanmoins avec des groupes sans torsion.

Dans la suite, Γ sera un sous-groupe de $\text{Isom}(X)$, agissant proprement discontinument et sans point fixe sur X . Pour étudier la dynamique de l'action de Γ sur X , on introduit son ensemble limite Λ_Γ : c'est le plus petit fermé non-vide Γ -invariant de \bar{X} . Il est formé des points d'accumulation de l'orbite $\Gamma \cdot \mathbf{o}$: cette définition ne dépend pas du point \mathbf{o} . Le groupe Γ agissant proprement discontinument sur X , l'ensemble limite Λ_Γ est un sous-ensemble de ∂X . La proposition suivante (voir [Ebe72]) donne un premier aperçu de sa structure.

Proposition 2.1.1. *L'ensemble limite Λ_Γ est de l'un des trois types suivants :*

- 1) *il est formé d'un unique point à l'infini ;*

2) il contient exactement deux points ;

3) Λ_Γ est infini non-dénombrable et est un ensemble parfait nulle-part dense de ∂X .

Le premier cas correspond à un groupe Γ engendré par des isométries paraboliques fixant le même point à l'infini, tandis que dans le deuxième, le groupe Γ est engendré par une isométrie hyperbolique. Dans ces deux cas, le groupe est dit élémentaire. Un point limite $x \in \Lambda_\Gamma$ est radial s'il existe un point $\mathbf{z} \in X$ et une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments de Γ tels que $(\gamma_n \cdot \mathbf{o})_n$ tend vers x en restant à distance bornée du rayon géodésique $[\mathbf{z}x]$. On notera Λ_{rad} l'ensemble formé par ces points. Les points fixes d'une isométrie hyperbolique γ sont radiaux : il suffit pour cela de choisir \mathbf{z} sur l'axe de γ et $\gamma_n = \gamma^n$ pour tout $n \geq 1$. On peut trouver dans [Bow95] la caractérisation suivante des points limites radiaux

Proposition 2.1.2. *Un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est radial s'il existe une suite $(\gamma_n)_n$ d'éléments distincts de Γ telle que pour tout $y \in \Lambda_\Gamma \setminus \{x\}$, la suite $(\gamma_n \cdot x, \gamma_n \cdot y)_n$ reste dans un compact de $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$.*

Le groupe Γ est dit cocompact (respectivement de covolume fini) si X/Γ est compact (resp. X/Γ a un volume fini). Notons $C(\Lambda_\Gamma)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble limite Λ_Γ dans X . Le groupe Γ est dit convexe-cocompact si Γ agit de façon cocompacte sur $C(\Lambda_\Gamma)$. On dit enfin que Γ est géométriquement fini (ou que la variété quotient X/Γ est géométriquement finie) si le quotient d'un ε -voisinage (ou de tout ε -voisinage) de $C(\Lambda_\Gamma)$ par Γ a un volume fini ; cette notion est une généralisation naturelle de la notion de groupe de covolume fini. Un point parabolique $x \in \partial X$ est dit borné s'il est fixé par un sous-groupe parabolique de Γ tel que le quotient $(\Lambda_\Gamma \setminus \{x\})/\Gamma$ soit compact : nous noterons Λ_{pb} l'ensemble de ces points. On obtient la caractérisation suivante (voir [Kat92] et [Bow95]) :

Proposition 2.1.3.

1) Si Γ est géométriquement fini, alors $\Lambda_\Gamma = \partial X$ si et seulement si Γ est de covolume fini ;

2) $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \cup \Lambda_{pb}$ si et seulement si Γ est géométriquement fini.

2.1.3 Groupes de Schottky

Les groupes qui nous intéressent dans cette thèse sont des groupes de Schottky que nous présentons à présent. Soient $k \geq 1$ et $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ des isométries satisfaisant la propriété suivante : il existe des sous-ensembles fermés et disjoints D_1, \dots, D_k de ∂X tels que pour

tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$ on ait $\mathbf{a}_j^n \cdot (\partial X \setminus D_j) \subset D_j$; les isométries $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ sont dites en position Schottky : le lemme de Klein implique que le groupe Γ engendré par les $(\mathbf{a}_i)_i$ est un groupe libre, agissant proprement discontinument et sans point fixe sur X . Ce groupe est appelé groupe de Schottky. L'ensemble limite d'un groupe de Schottky est un sous-ensemble de ∂X , parfait et nulle-part dense. Si aucune des isométries \mathbf{a}_j n'est parabolique, le groupe Γ est convexe-cocompact.

Pour fixer les idées, donnons un exemple dans le modèle du demi-plan de Poincaré. Considérons l'isométrie parabolique $p : z \mapsto z + 1$. Les puissances non-nulles de p envoient l'intervalle $[0, 1]$ dans $]\infty, 0] \cup [1, \infty[\cup \{\infty\}$, et on pose $D_p =]\infty, 0] \cup [1, \infty[$. Conjuguons à présent l'isométrie hyperbolique $h : z \mapsto 64z$ par $\gamma(z) = \frac{3z + \frac{1}{2}}{z + 2}$. L'isométrie h' ainsi obtenue est hyperbolique et fixe les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; ses puissances négatives envoient $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus [\frac{7}{52}, \frac{25}{76}]$ dans $[\frac{7}{52}, \frac{25}{76}]$, tandis que ses puissances positives envoient $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus [\frac{37}{52}, \frac{37}{44}]$ dans $[\frac{37}{52}, \frac{37}{44}]$. On pose alors $D_h = [\frac{7}{52}, \frac{25}{76}] \cup [\frac{37}{52}, \frac{37}{44}]$ (voir figure 2.3). Soit Γ un groupe de Schottky. Pour des raisons techniques qui apparaîtront

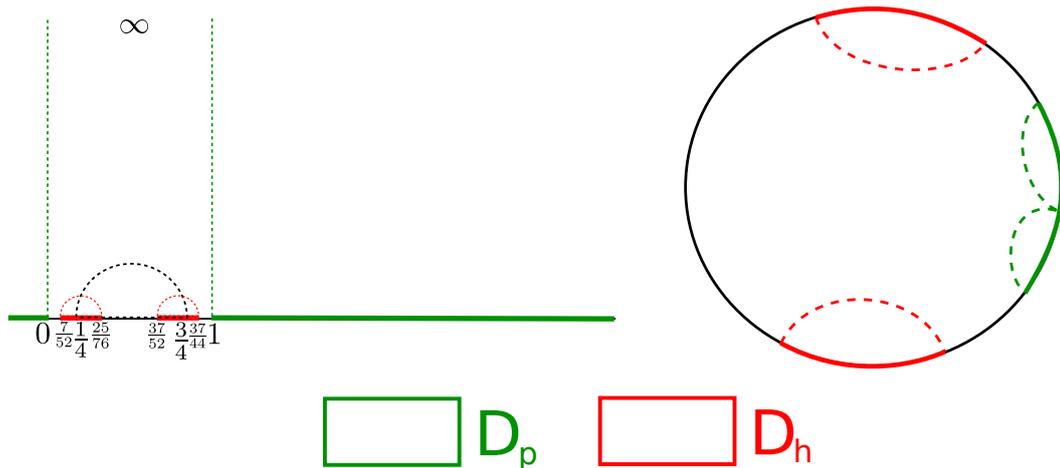


FIGURE 2.3 – Position Schottky dans les deux modèles de \mathbb{H}^2

dans la suite, nous introduisons les ensembles suivants : pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, notons \mathbf{D}_j un sous-ensemble de \bar{X} dont l'intersection avec ∂X contient D_j . On impose également que les $(\mathbf{D}_j)_{1 \leq j \leq p+q}$ soient deux à deux disjoints et que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait $\mathbf{a}_j^n \cdot (\bar{X} \setminus \mathbf{D}_j) \subset \mathbf{D}_j$; pour les groupes Γ_j paraboliques, l'ensemble \mathbf{D}_j peut être choisi connexe et géodésiquement convexe, tandis que pour les groupes hyperboliques, il possède deux composantes connexes géodésiquement convexes. Pour clarifier notre propos concernant ces ensembles, la figure 2.4 les exhibe dans le cas de l'exemple précédent.

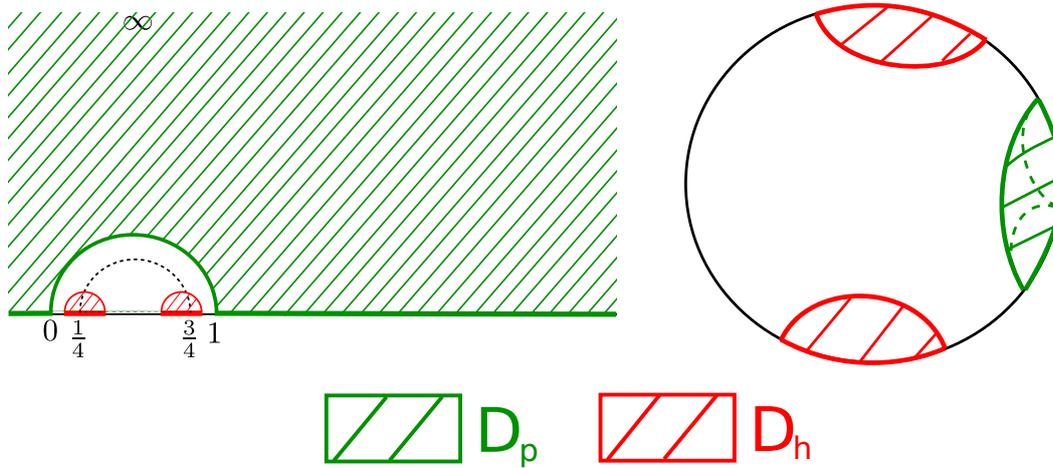


FIGURE 2.4 – Ensembles \mathbf{D}_j dans les deux modèles de \mathbb{H}^2

2.1.4 Mesures de Patterson-Sullivan

Un des outils principaux de cette thèse est la série de Poincaré \mathcal{P}_Γ du groupe Γ définie par : pour tout $s > 0$

$$\mathcal{P}_\Gamma(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}.$$

La convergence ou la divergence de cette série ne dépend pas du point \mathbf{o} . On notera δ_Γ l'exposant critique de la série \mathcal{P}_Γ : pour tout $s > \delta_\Gamma$, la série $\mathcal{P}_\Gamma(s)$ converge et pour tout $s < \delta_\Gamma$ la série diverge. Le groupe Γ est de type divergent (resp. convergent) si la série $\mathcal{P}_\Gamma(\delta_\Gamma)$ diverge (resp. converge). Cette quantité correspond également au taux de croissance exponentielle de la fonction orbitale $N_\Gamma(\mathbf{o}, R) := \#\{\gamma \in \Gamma \mid d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq R\}$, *i.e.*

$$\delta_\Gamma := \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N_\Gamma(\mathbf{o}, R))}{R}.$$

Nous abordons à présent la construction des mesures de Patterson-Sullivan. D'après les travaux de [Pat76], il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, la série

$$P_\Gamma^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(\mathbf{x}, \gamma \cdot \mathbf{y})) e^{-sd(\mathbf{x}, \gamma \cdot \mathbf{y})}$$

diverge si et seulement si $s \leq \delta_\Gamma$. Dans le cas où le groupe Γ est divergent, on choisit $h = 1$. Fixons $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Pour $s > \delta_\Gamma$, on introduit la mesure $\sigma_{s, \mathbf{x}, \mathbf{y}}$ suivante :

$$\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, s} = \frac{1}{P_\Gamma^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} h(d(\mathbf{x}, \gamma \cdot \mathbf{y})) e^{-sd(\mathbf{x}, \gamma \cdot \mathbf{y})} D_{\gamma \cdot \mathbf{y}}$$

où $D_{\gamma \cdot \mathbf{y}}$ représente la masse de Dirac au point $\gamma \cdot \mathbf{y}$. Il existe une suite $(s_k)_k$ convergeant vers δ_Γ par valeurs supérieures telle que la suite de mesures $(\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_k})_k$ converge faiblement vers une mesure $\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$, laquelle est portée par l'ensemble limite Λ_Γ . La famille de mesure $(\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}})_{\mathbf{x} \in X}$ est appelée densité conforme de dimension δ_Γ : pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$, la mesure $\sigma_{\mathbf{x}', \mathbf{y}}$ est absolument continue par rapport à $\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ avec une dérivée de Radon-Nikodym donnée par la formule suivante : pour tout $x \in \partial X$

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{x}', \mathbf{y}}}{d\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}}(x) = e^{-\delta_\Gamma \mathcal{B}_x(\mathbf{x}', \mathbf{x})}. \quad (2.7)$$

Cette famille est de plus Γ -invariante au sens où pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout borélien $A \subset \partial X$, on a

$$\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\gamma \cdot A) = \sigma_{\gamma^{-1} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}}(A). \quad (2.8)$$

Enfin, d'après [Sul84], quand le groupe Γ est divergent, la mesure $\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ ne dépend ni de $\mathbf{y} \in X$ ni de la suite $(s_k)_k$: on la note alors $\sigma_{\mathbf{x}}$. Les groupes de Schottky avec lesquels nous travaillons étant de type divergent par construction, nous omettrons l'indice \mathbf{y} .

2.1.5 Flot géodésique et mesure de Bowen Margulis

On définit le flot géodésique $(\tilde{g}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur T^1X de la manière suivante : soit $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in T^1X$, alors $\tilde{g}_t(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où γ est l'unique géodésique telle que $\gamma(0) = \mathbf{p}$ et $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Afin de définir le flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le quotient T^1X/Γ et d'en exhiber une mesure invariante, identifions le fibré unitaire tangent T^1X avec le produit $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X \times \mathbb{R}$. En effet, un couple $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in T^1X$ détermine un unique triplet (x^-, x^+, r) où x^- et x^+ sont les extrémités "passée" et "future" de l'unique géodésique orientée déterminée par (\mathbf{p}, \mathbf{v}) et $r = \mathcal{B}_{x^+}(\mathbf{o}, \mathbf{p})$: ces nouvelles coordonnées sont appelées coordonnées de Hopf. Dans ces coordonnées, l'action du groupe Γ est donnée par : pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma \cdot (x^-, x^+, r) = (\gamma \cdot x^-, \gamma \cdot x^+, r + \mathcal{B}_{x^+}(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})),$$

2.1. Rappels et notations

tandis que celle du flot géodésique $(\tilde{g}_t)_t$ est donnée par : pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g_t(x^-, x^+, r) = (x^-, x^+, r + t).$$

Ces deux actions commutent, et ceci définit par passage au quotient le flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur T^1X/Γ . Des définitions (2.1) et (2.3) et de la propriété (2.7), on déduit que la

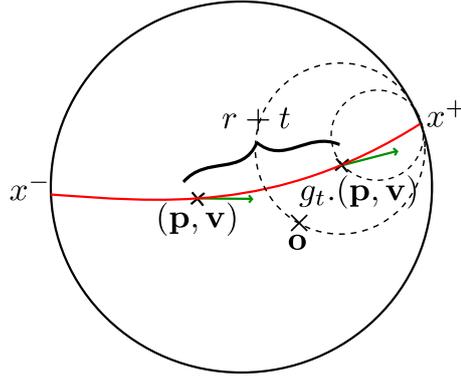


FIGURE 2.5 – Flot géodésique et coordonnées de Hopf

mesure

$$\tilde{m}_\Gamma = \frac{d\sigma_o(y)d\sigma_o(x)dt}{d_o(y, x)^{2\frac{\delta_\Gamma}{a}}}$$

est invariante sous l'action de Γ et de $(\tilde{g}_t)_t$. Elle induit par passage au quotient une mesure m_Γ sur T^1X/Γ , invariante sous l'action du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Cette mesure ne charge que l'ensemble non-errant pour le flot géodésique Ω_Γ , qui est égal à $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$ d'après [Ebe72]. Les auteurs de [OP04] ont prouvé que si cette mesure a une masse finie sur Ω_Γ , c'est l'unique mesure invariante qui maximise l'entropie du flot géodésique ; elle est ainsi appelée mesure de Bowen-Margulis. Remarquons que lorsqu'elle est infinie, il n'existe pas de mesure invariante finie qui maximise l'entropie ; on l'appelle néanmoins mesure de Bowen-Margulis dans ce cas.

Avant d'énoncer le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan, nous rappelons quelques définitions (voir [Rob03] paragraphe 1E.). Pour le système dynamique $(T^1X/\Gamma, (g_t)_{t \in \mathbb{R}}, m_\Gamma)$, nous dirons qu'un borélien $B \subset T^1X/\Gamma$ est *errant* si $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(g_t.w)dt$ est finie pour presque tout $w \in B$. On peut décomposer l'espace T^1X/Γ en deux parties disjointes et Γ -invariantes $T^1X/\Gamma^C \cup T^1X/\Gamma^D$ où T^1X/Γ^D est une réunion dénombrable d'ensembles errants, maximale au sens où elle contient tout ensemble errant, à un ensemble m_Γ -négligeable près : cette partie est appelée *partie dissipative* de $(T^1X/\Gamma, (g_t)_{t \in \mathbb{R}}, m_\Gamma)$

tandis que T^1X/Γ^C constitue sa *partie conservative*. Si B est un borélien contenu dans T^1X/Γ^C , alors $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \circ (g_t.w) dt = +\infty$ pour presque tout $w \in B$. Le système dynamique $(T^1X/\Gamma, (g_t)_{t \in \mathbb{R}}, m_{\Gamma})$ sera dit *complètement conservatif* (resp. *dissipatif*) si $m_{\Gamma}(T^1X/\Gamma^D) = 0$ (resp. $m_{\Gamma}(T^1X/\Gamma^C) = 0$).

Théorème (Hopf-Tsuji-Sullivan). *Dans chacun des deux cas complémentaires suivants, les assertions (i) à (iv) sont équivalentes.*

Premier cas :

(i) Γ est convergent : $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta_{\Gamma} d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} < +\infty$.

(ii) $\sigma_{\mathbf{o}}(\Lambda_{rad}) = 0$.

(iii) $(\partial X \times \partial X, \Gamma, (\sigma_{\mathbf{o}} \otimes \sigma_{\mathbf{o}})|_{\partial X \times \partial X})$ est complètement dissipatif et non ergodique.

(iv) $(T^1X/\Gamma, (g_t)_{t \in \mathbb{R}}, m_{\Gamma})$ est complètement dissipatif et non ergodique.

Deuxième cas :

(i) Γ est divergent : $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta_{\Gamma} d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} = +\infty$.

(ii) $\sigma_{\mathbf{o}}(\Lambda_{rad}) = 1$.

(iii) $(\partial X \times \partial X, \Gamma, (\sigma_{\mathbf{o}} \otimes \sigma_{\mathbf{o}})|_{\partial X \times \partial X})$ est complètement conservatif et ergodique.

(iv) $(T^1X/\Gamma, (g_t)_{t \in \mathbb{R}}, m_{\Gamma})$ est complètement conservatif et ergodique.

2.2 Construction des groupes exotiques

Avant de rentrer plus en détails dans l'étude des groupes qui nous intéressent, il est bon de rappeler la genèse du cadre dans lequel ce travail est présenté, à savoir celui de certains groupes de Schottky exotiques, dont la construction est présentée dans les articles [DOP00] et [Pei11].

L'article [DOP00] présente une construction de groupes discrets d'isométries Γ , géométriquement finis et convergents, agissant sur une variété riemannienne simplement connexe, complète et à courbure sectionnelle pincée. Ce n'est pas le premier exemple explicite de groupe convergent : dans [PS94], les auteurs étudient la fonction de comptage de certains \mathbb{Z}^d -revêtements de variété compacte. Cet article aboutit à un équivalent de la forme $\frac{e^{\delta_{\Gamma} R}}{R^{\frac{d}{2}}}$, ce qui implique que le groupe fondamental Γ du revêtement intermédiaire est

2.2. Construction des groupes exotiques

convergent pour $d \geq 3$: en effet, dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Gamma(s) &\asymp \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \sim n}} e^{-sd(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \\ &\asymp \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\delta_\Gamma n}}{n^{\frac{d}{2}}} e^{-sn}. \end{aligned}$$

et la somme $\mathcal{P}(\delta_\Gamma)$ est finie dès que $d \geq 3$. Les groupes dont il est question dans [PS94] peuvent être de type convergent ou divergent, mais sont toujours géométriquement infinis : ils ne rentrent donc pas dans notre cadre d'étude. L'article [DP96a] précède [DOP00] ;

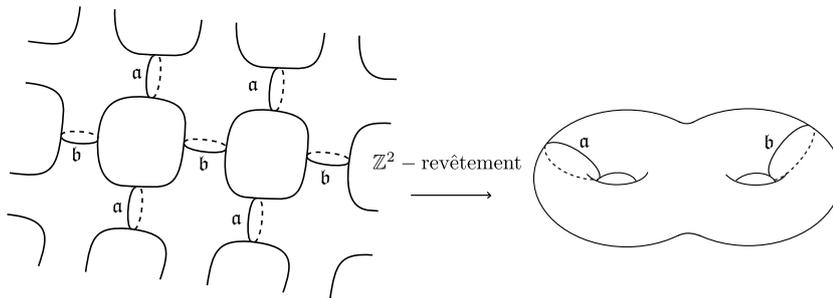


FIGURE 2.6 – \mathbb{Z}^2 -revêtement d'un tore à deux trous

les auteurs y prouvent la divergence du groupe Γ quand il est produit libre de groupes élémentaires divergents. Dans ce cas, la divergence des facteurs paraboliques apparaît déjà cruciale. Ceci est précisé quelques années plus tard dans [DOP00] avec le théorème suivant

Théorème A ([DOP00]). *Soit Γ un groupe géométriquement fini contenant des transformations paraboliques. Si $\delta_\Gamma > \delta_P$ pour tout sous-groupe parabolique P , alors Γ est divergent.*

L'hypothèse $\delta_\Gamma > \delta_P$ pour tout sous-groupe parabolique P est appelée “propriété de trou critique” pour le groupe Γ . Elle permet de construire des mesures de Patterson-Sullivan sur Λ_Γ sans atome. Ces mesures donnent alors masse totale à l'ensemble limite radial, propriété équivalente à la divergence de Γ ([Sul84]). Cette hypothèse est en particulier vérifiée quand les sous-groupes paraboliques ayant un exposant critique maximal (parmi les sous-groupes élémentaires) sont de type divergent.

Rappelons également que la dichotomie divergence/convergence pour Γ a des conséquences fondamentales pour la dynamique du flot géodésique relativement à la mesure

m_Γ : c'est une conséquence du théorème de Hopf, Tsuji et Sullivan énoncé à la fin de la première section de ce chapitre. Nous constatons alors que la finitude de la mesure m_Γ sur T^1X/Γ implique la divergence du groupe Γ , en vertu du théorème de récurrence de Poincaré. Il est maintenant bien connu (voir [Sul84]) que les groupes cocompacts, convexe-cocompacts et même les groupes géométriquement finis agissant sur \mathbb{H}^n admettent une mesure m_Γ finie, et sont donc de type divergent. C'est aussi le cas pour les groupes géométriquement finis agissant sur des espaces symétriques de rang 1 ([CI99]). La présence de cusp dans la variété rend la situation plus incertaine. Les auteurs de [DOP00] traitent néanmoins cette question avec un résultat qui met là-encore en avant les transformations paraboliques. Ils prouvent le théorème suivant

Théorème B ([DOP00]). *Soit Γ un groupe géométriquement fini divergent contenant des isométries paraboliques. La mesure m_Γ est finie si et seulement si pour tout sous groupe parabolique P de Γ , la série $\sum_{p \in P} d(\mathbf{o}, p \cdot \mathbf{o}) e^{-\delta_\Gamma d(\mathbf{o}, p \cdot \mathbf{o})}$ converge.*

Des théorèmes A et B ci-dessus, nous pouvons tirer au moins les deux constats suivants :

- un groupe géométriquement fini contenant des isométries paraboliques satisfaisant l'hypothèse de trou critique est de type divergent et admet une mesure m_Γ finie ;
- pour obtenir un groupe divergent et de mesure infinie, il faut être capable dans un premier temps de construire des groupes paraboliques convergents. C'est le but de la section suivante, qui reprend les arguments développés dans [DOP00].

2.2.1 Sur l'existence de groupes paraboliques convergents

Plaçons-nous pour commencer en courbure constante -1 et considérons un groupe parabolique P agissant sur \mathbb{H}^n , $n \geq 2$. Quitte à conjuguer P , on peut supposer que les éléments de P fixent le point à l'infini. Notons \mathcal{H} l'horoboule centrée en l'infini et passant par $\mathbf{i} = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}, 1)$; le groupe P agissant par isométries sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}$, on en déduit qu'il agit par isométries sur \mathbb{R}^{n-1} muni de sa structure métrique euclidienne ; d'après un théorème de Bierberbach (voir [Bie11] et [Bie12]), il contient un sous-groupe abélien d'indice fini Q qui agit par translations sur un sous-espace $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $k \leq n-1$. Il existe donc k vecteurs indépendants v_1, \dots, v_k et un ensemble fini $F \subset P$ tels que tout élément $p \in P$ peut être décomposé en $\tau_{v_1}^{n_1} \dots \tau_{v_k}^{n_k} f$ pour $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ et $f \in F$, où $\tau_{v_i}^{n_i}$ est le n_i -ième itéré de la translation de vecteur v_i . Dans ce cas, la série de Poincaré \mathcal{P}_P

2.2. Construction des groupes exotiques

de P est donnée par : pour tout $s > 0$

$$\mathcal{P}_P(s) = \sum_{p \in P} e^{-sd(\mathbf{i}, p \cdot \mathbf{i})} = \sum_{f \in F} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k} e^{-sd(\mathbf{i}, \tau_{v_1}^{n_1} \dots \tau_{v_k}^{n_k} f \cdot \mathbf{i})}.$$

La quantité $d(\mathbf{i}, \tau_{v_1}^{n_1} \dots \tau_{v_k}^{n_k} f \cdot \mathbf{i}) - 2 \ln(\|n_1 v_1 + \dots + n_k v_k\|)$ est bornée quand $n_1^2 + \dots + n_k^2 \rightarrow +\infty$, où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne sur \mathbb{R}^{n-1} ; il vient donc

$$\mathcal{P}_P(s) \asymp \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in (\mathbb{Z}^k)^*} \frac{1}{\|n_1 v_1 + \dots + n_k v_k\|^{2s}}.$$

L'exposant critique de cette série vaut $\frac{k}{2}$ et la série diverge en cette valeur de s .

Dans la suite, nous voulons “rendre” ce groupe convergent en l'exposant critique $\frac{k}{2}$. Pour ce faire, il faut comprendre comment modifier la métrique dans l'horoboule \mathcal{H} , puisque les calculs précédents montrent que les groupes paraboliques sont de type divergent quand la courbure est constante au voisinage de leur point fixe. Nous allons donc nous placer dans un autre modèle de l'espace hyperbolique, qui est mieux adapté à l'étude de l'action du groupe P sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}$. Considérons le difféomorphisme

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{H}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto (x, \ln(y)) = (x, t) \end{cases}.$$

Dans ce nouveau modèle de l'espace hyperbolique, la métrique sur \mathbb{R}^n est donnée par $e^{-2t} dx^2 + dt^2$. Dans ce modèle notons $\mathcal{H}_t = \{(x, s) \mid s \geq t, x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ l'horoboule de niveau $t \in \mathbb{R}$ centrée au point à l'infini; on a $\Psi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0$. Fixons deux points $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ et notons $x_t = (x, t)$ et $y_t = (y, t)$ pour $t > 0$. La distance entre x_t et y_t induite par la métrique hyperbolique sur l'horosphère $\partial\mathcal{H}_t$ est alors $e^{-t}\|x - y\|$. Donc, sur l'horosphère de niveau $t = \ln(\|x - y\|)$, la distance entre x_t et y_t induite par la métrique intrinsèque vaut 1. Le fait que la courbe $[x_0 x_t] \cup [x_t y_t] \cup [y_t y_0]$ est une quasi-géodésique entraîne que la quantité $d(x_0, y_0) - 2 \ln(\|x - y\|)$ est bornée ([HIH77]). Cette remarque nous amène à penser qu'en choisissant une fonction croissante $u : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction décroissante $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $T(u(s)) = \frac{1}{s}$ pour tout $s > 0$, la quantité $d_{u,T}(x_0, y_0) - 2u(\|x - y\|)$ est bornée dans \mathbb{R}^n muni de la métrique $T^2(t)dx^2 + dt^2$; dans le cas où $u(s) = \ln(s)$ et $T(t) = e^{-t}$, on retrouve le modèle de l'espace hyperbolique. Le but de [DOP00], section 3 et [Pei11] section 2 est d'expliquer comment choisir de telles fonctions tout en contrôlant la courbure sectionnelle $K(t)$ de la métrique $T^2(t)dx^2 + dt^2$, de façon à ce qu'elle soit strictement négative pincée sur \mathbb{R}^n . Le lemme 2.2 de [Pei11] précise ce choix.

Lemme 2.2.1. *Soit $\kappa \in]0, 1[$. Pour tout $\beta \geq 0$, il existe $s_\beta \geq 1$ et une fonction croissante $u_\beta : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 satisfaisant :*

- $u_\beta(s) = \ln(s)$ si $s \in]0, 1]$;
- $u_\beta(s) = \ln(s) + (1 + \beta) \ln(\ln(s))$ si $s \geq s_\beta$;
- $K(u_\beta(s)) \leq -\kappa^2$;
- $\lim_{s \rightarrow +\infty} K(u_\beta(s)) = -1$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand s tend vers $+\infty$.

Fixons à présent $a \in \mathbb{R}$. Pour une telle fonction u_β , on munit \mathbb{R}^n de la métrique $g_{\beta,a} = T_{\beta,a}^2(t)dx^2 + dt^2$, où $T_{\beta,a}$ est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$T_{\beta,a}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \leq a \\ \frac{e^{-a}}{u_\beta^{-1}(t-a)} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cette métrique admet une courbure négative pincée $\leq -\kappa^2$ et constante égale à -1 sur le domaine $\mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, a]$ (voir figure 2.7). À ce stade, le choix de la métrique dépend

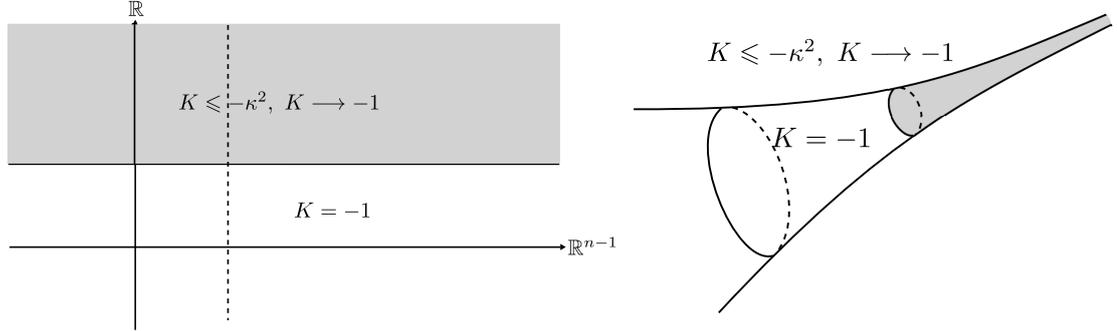


FIGURE 2.7 – Courbure dans l’horoboule et le cusp

au moins des deux paramètres $\beta, a \in \mathbb{R}$. Le paramètre β sert à obtenir des groupes convergents et plus tard à imposer une mesure m_Γ infinie. Le paramètre de “hauteur” a à partir de laquelle on modifie la métrique dans le cusp nous permet d’obtenir des groupes divergents non-élémentaires contenant des sous-groupes paraboliques convergents.

Dans ce nouveau modèle d’espace de courbure sectionnelle négative pincée, le groupe P agit toujours par isométries et sa série de Poincaré est alors donnée par

$$\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in (\mathbb{Z}^k)^*} \frac{1}{\|n_1 v_1 + \dots + n_k v_k\|^{2s} \ln(\|n_1 v_1 + \dots + n_k v_k\|)^{2s(1+\beta)}} ,$$

à un facteur borné près. Cette série admet alors $\frac{k}{2}$ comme exposant critique et converge dès que $\beta > 0$. Cette manière de procéder permet donc de construire des groupes paraboliques discrets de type convergent agissant sur un espace de courbure strictement négative pincée.

Expliquons à présent comment construire un groupe non-élémentaire de type convergent. Soit Γ un groupe géométriquement fini agissant sur \mathbb{H}^n , proprement discontinu et sans point fixe, et contenant des isométries paraboliques. La variété quotient \mathbb{H}^n/Γ possède alors un nombre fini de cusps $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_l$, chacun d'eux étant isométrique au quotient d'une horoboule \mathcal{H}_i par un groupe d'isométries paraboliques P_i de rang $k_i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. D'après la discussion précédente, chaque groupe P_i agit aussi par isométries sur \mathbb{R}^n muni de la métrique $e^{-2t}dx^2 + dt^2$ que nous allons perturber en $T_{\beta,a}^2(t)dx^2 + dt^2$. Considérons par exemple le cusp \mathcal{C}_1 . On peut alors choisir le paramètre a pour pouvoir recoller le quotient $(\mathbb{R}^{n-1} \times [a, +\infty[)/P_1$ avec $(\mathbb{H}^n/\Gamma) \setminus \mathcal{C}_1$. La construction précédente assure que Γ agit isométriquement sur le revêtement universel X de cette variété quotient muni de la métrique $\tilde{g}_{\beta,a}$, où $\tilde{g}_{\beta,a}$ correspond à la métrique hyperbolique excepté dans les relevés de \mathcal{H}_1 où elle correspond à $g_{\beta,a}$. Dans la suite, nous n'imposons pas au volume des cusps \mathcal{C}_i d'être fini, contrairement à la construction exposée dans [Pei11].

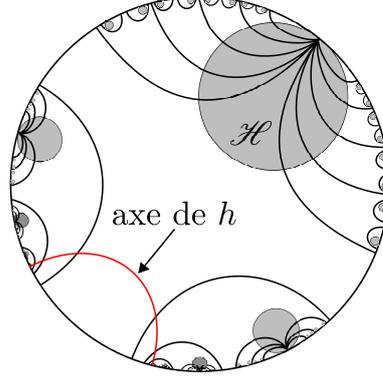
2.2.2 Construction de groupes convergents ou divergents contenant des paraboliques convergents

Le fait d'avoir imposé $\beta > 0$ dans la définition de la métrique $g_{\beta,a}$ implique que le groupe parabolique P_1 est de type convergent. Nous notons d_a la distance induite par la métrique $g_{\beta,a}$. Reprenant l'article [Pei11] section 4, on peut utiliser la construction précédente pour exhiber des groupes discrets d'isométries agissant sur l'espace X précédent, de type convergent ou divergent, selon la valeur du paramètre a choisi. Plus précisément, on trouve dans [Pei11] la

Proposition 2.2.2. *Il existe des sous-groupes de Schottky G de Γ et un réel positif a_0 tels que :*

- G admet $\frac{1}{2}$ comme exposant critique et est de type convergent sur $(X, \tilde{g}_{\beta,0})$;
- G a un exposant critique $> \frac{1}{2}$ et est de type divergent sur $(X, \tilde{g}_{\beta,a})$ pour $a \geq a_0$.

Fixons $\mathfrak{o} \in X$. Ce résultat repose sur l'existence d'une isométrie parabolique $p \in P$ et d'une isométrie hyperbolique $h \in \Gamma$ n'ayant aucun point fixe en commun. Quitte à réduire l'horoboule \mathcal{H} dans laquelle la métrique est modifiée, on peut s'assurer que la projection de l'axe de h reste dans une région de courbure constante (voir figure 2.8).


 FIGURE 2.8 – Isométries p et h et horoboule \mathcal{H} et ses copies

Les isométries p et h n'ayant pas de point fixe en commun, on peut aussi trouver deux ensembles non-vides fermés et disjoints $\mathbf{D}_p, \mathbf{D}_h \subset \bar{X}$, dont l'intersection avec ∂X est notée D_p (resp. D_h), tels que $p^n \cdot (\bar{X} \setminus \mathbf{D}_p) \subset \mathbf{D}_p$ et $h^n \cdot (\bar{X} \setminus \mathbf{D}_h) \subset \mathbf{D}_h$ pour tout $n \neq 0$. Notons alors $D_\gamma = \mathbf{D}_\gamma \cap \partial X$ pour $\gamma \in \{p, h\}$. Dans ce cas, la série de Poincaré du groupe $\langle p, h \rangle$ en $s > 0$ se comporte à un facteur borné près comme la série

$$\sum_{l \geq 1} \sum_{m_i, n_i \in \mathbb{Z}^*} e^{-s d_a(\mathbf{o}, h^{m_1} p^{n_1} \dots h^{m_l} p^{n_l} \cdot \mathbf{o})}. \quad (2.9)$$

En utilisant la propriété du groupe de Schottky $\langle p, h \rangle$, on peut montrer que cette série est comparable à la quantité suivante

$$\sum_{l \geq 1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} e^{-s d_a(\mathbf{o}, h^m \cdot \mathbf{o})} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-s d_a(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \right)^l. \quad (2.10)$$

Puisque $d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = 2 \ln |n| + 2(1 + \beta) \ln \ln |n| + o(\ln \ln |n|)$, il vient $\delta_{\langle p \rangle} = \frac{1}{2}$ et $p \in \langle p, h \rangle$ implique $\frac{1}{2} \leq \delta_{\langle p, h \rangle}$. Pour $a = 0$, la métrique dans l'horoboule impose que $\sum_{n \neq 0} e^{-\frac{1}{2} d_0(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} < +\infty$. De plus $\sum_{m \neq 0} e^{-\frac{1}{2} d_0(\mathbf{o}, h^m \cdot \mathbf{o})} \asymp e^{-\frac{1}{2} l(h)}$ où $l(h)$ est la longueur de h . Donc, si on remplace h par une de ses puissances suffisamment grande, on peut supposer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} e^{-\frac{1}{2} d_0(\mathbf{o}, h^m \cdot \mathbf{o})} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-\frac{1}{2} d_0(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} < 1.$$

Donc $\mathcal{P}_{\langle p, h \rangle} \left(\frac{1}{2} \right) < +\infty$, d'où $\delta_{\langle p, h \rangle} \leq \frac{1}{2}$. Finalement, le sous-groupe $G = \langle p, h \rangle$ de Γ est convergent d'exposant critique $\delta_{\langle p \rangle} = \frac{1}{2}$.

Quand a tend vers $+\infty$, la région de X où la métrique est constante égale à -1 devient

2.2. Construction des groupes exotiques

de plus en plus grande et la série de Poincaré du groupe $\langle p \rangle$ tend vers $+\infty$ en $\frac{1}{2}$. Le contrôle précédent sur $\sum_{m \neq 0} e^{-sd_a(\mathbf{o}, h^m \cdot \mathbf{o})}$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \geq a_0$:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} e^{-(\frac{1}{2} + \varepsilon)d_a(\mathbf{o}, h^m \cdot \mathbf{o})} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-(\frac{1}{2} + \varepsilon)d_a(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} > 1.$$

Alors (2.10) implique que $G = \langle p, h \rangle$ satisfait $\delta_G > \frac{1}{2}$ et est divergent d'après le théorème A de [DOP00].

Dans le troisième point, nous montrons qu'il existe un unique $a^* \in]0, a_0[$ tel que le groupe $G = \langle p, h \rangle$ est divergent d'exposant critique $\frac{1}{2}$ pour la métrique \tilde{g}_{β, a^*} : cette propriété apparaît comme un changement de phase entre les deux possibilités décrites précédemment. Elle repose sur la comparaison entre la série de Poincaré \mathcal{P}_G (et plus précisément (2.9)) et le potentiel d'un opérateur de transfert \mathcal{L}_a associé à l'action de G sur $(X, \tilde{g}_{\beta, a})$ (voir section 4 de [Pei11]).

2.2.3 Sur l'existence de groupes géométriquement finis divergents avec m_{Γ} infinie

Rappelons d'abord que $G = \langle p, h \rangle$, où $\langle p \rangle$ est convergent d'exposant critique $\frac{1}{2}$. Soit $a \in [0, a_0]$. On introduit formellement l'opérateur suivant : pour tout $\phi \in \mathbb{L}^\infty(\Lambda_G, \mathbb{R})$, tout $s > 0$ et $x \in \Lambda_G$

$$\mathcal{L}_{a,s}\phi(x) = \sum_{\gamma \in \{p,h\}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \mathbb{1}_{D_\varepsilon}(x) e^{-s\mathcal{B}_x^{(a)}(\gamma^{-n} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} \phi(\gamma^n \cdot x)$$

où $\mathcal{B}_x^{(a)}(\gamma^{-n} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$ représente le cocycle de Busemann pour la métrique d_a (voir (2.1)). En utilisant la structure de groupe de Schottky de $\langle p, h \rangle$, on peut montrer que pour tout $l \geq 1$

$$\sum_{m_i, n_i \in \mathbb{Z}^*} e^{-sd_a(h^{m_1} p^{n_1} \dots h^{m_l} p^{n_l} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} \asymp \left| \mathcal{L}_{a,s}^{2l} \mathbb{1}_{\Lambda_G} \right|_\infty.$$

D'après (2.9), ceci implique que $\mathbf{P}_G(s)$ se comporte comme $\sum_{l \geq 1} \left| \mathcal{L}_{a,s}^{2l} \mathbb{1}_{\Lambda_G} \right|_\infty$. Comme $\mathcal{L}_{a,s}$ est un opérateur positif, son rayon spectral $\rho_\infty(\mathcal{L}_{a,s})$ sur $\mathbb{L}^\infty(\Lambda_G, \mathbb{R})$ est donné par

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} \left(\left| \mathcal{L}_{a,s}^{2l} \mathbb{1}_{\Lambda_G} \right|_\infty \right)^{\frac{1}{2l}}.$$

La proposition 2.2.2 implique donc

- la série $\sum_{l \geq 1} \left| \mathcal{L}_{0, \frac{1}{2}}^{2l} \mathbb{1}_{\Lambda_G} \right|_{\infty}$ converge et $\rho_{\infty}(\mathcal{L}_{0, \frac{1}{2}}) \leq 1$;
- la série $\sum_{l \geq 1} \left| \mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}}^{2l} \mathbb{1}_{\Lambda_G} \right|_{\infty}$ diverge et $\rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}}) \geq 1$ lorsque $a \geq a_0$.

Dans [Pei11], il est démontré qu'il existe un unique $a_* \in]0, a_0[$ tel que $\rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a_*, \frac{1}{2}}) = 1$. Le groupe G sera alors de type divergent d'exposant critique $\frac{1}{2}$ sur $(X, \tilde{g}_{\beta, a_*})$. L'existence d'un tel a_* repose sur les deux propriétés suivantes :

- la régularité de l'application $\mathcal{L} \mapsto \rho_{\infty}(\mathcal{L})$;
- la régularité de $a \mapsto \rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}})$.

La première est délicate à obtenir. En général, l'application $\mathcal{L} \mapsto \rho_{\infty}(\mathcal{L})$ est seulement semi-continue inférieurement (voir [Kat13]). Pour pallier ce défaut de régularité, l'auteur de [Pei11] fait agir les opérateurs $(\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}})_{a \in [0, a_0]}$ sur le sous-espace de $\mathbb{L}^{\infty}(\Lambda_G, \mathbb{R})$ suivant :

$$\mathbb{L}_{\omega}(\Lambda_G) := \{ \phi \in \mathcal{C}(\Lambda_G) \mid |\phi|_{\omega} := |\phi|_{\infty} + [\phi]_{\omega} < +\infty \}$$

où $[\phi]_{\omega} := \sup_{\gamma \in \{p, h\}} \sup_{\substack{x, y \in D_{\gamma} \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d_{\mathfrak{o}}^{(a)}(x, y)^{\omega}}$ pour ω donné dans le fait 3.7 de [Pei11]. Dans l'expres-

sion précédente, la quantité $d_{\mathfrak{o}}^{(a)}(x, y)$ est la distance de Gromov sur le bord de X vue du point $\mathfrak{o} \in X$ et associée à la métrique $\tilde{g}_{\beta, a}$. Soit $\rho(a)$ le rayon spectral de $\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}}$ sur cet espace. L'auteur montre que $\rho(a)$ est une valeur propre simple et isolée dans le spectre de $\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}}$, égale à $\rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}})$. Ce trou spectral pour les $\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}}$, $a \in [0, a_0]$, est le point-clé pour obtenir la continuité de l'application $\mathcal{L} \mapsto \rho_{\infty}(\mathcal{L})$. L'espace $\mathbb{L}_{\omega}(\Lambda_G)$ est aussi l'espace dans lequel la continuité de $a \mapsto \rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a, \frac{1}{2}})$ est prouvée. Cette propriété repose sur la définition des métriques $\tilde{g}_{\beta, a}$ et le fait qu'elles sont quasi-isométriques entre elles (voir section 3.2 de [Pei11]), ainsi que sur le fait que les isométries p et h sont en position Schottky (voir proposition 4.7 de [Pei11]).

La justification détaillée de l'existence d'un $a_* \in [0, a_0]$ satisfaisant $\rho_{\infty}(\mathcal{L}_{a_*, \frac{1}{2}}) = 1$ et tel que $G = \langle p, h \rangle$ est de type divergent d'exposant critique $\frac{1}{2}$ pour la métrique \tilde{g}_{β, a_*} fait l'objet du paragraphe 4.5. Puisque G est de type convergent pour $\tilde{g}_{\beta, 0}$ et admet un exposant critique $> \frac{1}{2}$ pour \tilde{g}_{β, a_0} (en vertu de la proposition 2.2.2), il vient $a_* \in]0, a_0[$. Ensuite, on applique le critère de finitude de la mesure de Bowen-Margulis donné dans le théorème B de [DOP00] pour vérifier que le groupe G a une mesure de Bowen-Margulis infinie si $\beta \leq 1$. Dans la dernière section de [Pei11], il est montré que le paramètre a^* est unique dans $]0, a_0[$.

2.2.4 Commentaires

De cette présentation succincte des articles [DOP00] et [Pei11], on peut dégager les principes suivants :

- il est possible de construire des groupes paraboliques de type convergent en courbure négative pincée ;
- il est également possible de construire des groupes de Schottky géométriquement finis non-élémentaires et de type convergent ;
- on peut construire des groupes de Schottky $G = \langle p, h \rangle$ où p est une isométrie parabolique telle que $\langle p \rangle$ est de type convergent d'exposant critique $\frac{1}{2}$ et où G est de type divergent avec le même exposant critique, et admet une mesure de Bowen-Margulis m_G infinie.

Ce dernier cas fournit le cadre de travail de cette thèse. Le fait que G soit un groupe de Schottky implique qu'il est égal au produit libre $\langle p \rangle \star \langle h \rangle$, et ceci constitue un pas décisif pour définir un codage de l'ensemble limite Λ_G , que l'on étend dans un second temps au flot géodésique et à ses orbites périodiques. La preuve des théorèmes A et B se fera alors à l'aide du formalisme thermodynamique.

Soulignons que la métrique $g_{\beta,a}$, $\beta \in]0, 1]$, construite à l'aide du lemme 2.2.1, fournit un exemple type de groupe parabolique P qui satisfait aux hypothèses (P_1) , (P_2) et (S) . Fixons $\beta \in]0, 1]$ et notons \mathcal{C} le cusp associé à p et \mathcal{H} l'horoboule telle que \mathcal{C} soit isométrique à $\mathcal{H}/\langle p \rangle$. Si $\mathbf{o} \in \mathcal{H}$, il vient $d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = 2 \ln(|n|) + 2(1 + \beta) \ln \ln(|n|) + O(\ln \ln(|n|))$ pour n suffisamment grand. On obtient alors la

Proposition 2.2.3. *Soit $\Delta > 0$. Il existe $C_{\beta,\Delta}, C'_\beta > 0$ telles que pour tout $T \gg 1$*

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = T \pm \Delta} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \leq \frac{C_{\beta,\Delta}}{T^{\beta+1}} ; \\ 2. \quad & \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \sim \frac{C'_\beta}{T^\beta} , \end{aligned}$$

où $d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = T \pm \Delta$ signifie que $T - \Delta \leq d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) < T + \Delta$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$. Notons

- $b_k := \#\{n \in \mathbb{Z} \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = k \pm \Delta\}$;
- $B_k := \#\{n \in \mathbb{Z} \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) \leq k\}$;

$$- n_k := \max \{n \in \mathbb{Z} \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) \leq k\}.$$

Il découle de la définition de la métrique dans le cusp qu'il existe $C = C(\beta) > 0$ telle que

$$n_k \sim C \frac{e^{\frac{1}{2}k}}{k^{1+\beta}}; \quad (2.11)$$

de plus, des propriétés de la géométrie en courbure négative et des définitions précédentes, on déduit

$$b_k \sim B_k \sim 2n_k \text{ pour } k \rightarrow +\infty. \quad (2.12)$$

Soit $T \gg 1$. En utilisant la définition de b_T , il vient

$$\sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})=T \pm \Delta} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \preceq e^{-\frac{1}{2}T} b_T$$

et le 1. découle en combinant (2.11) et (2.12). De plus, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} &= \sum_{k > T+1} \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})=k \pm \varepsilon} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \\ &\asymp \sum_{k > T+1} b_k e^{-\frac{1}{2}k}. \end{aligned}$$

De (2.11) et (2.12), on déduit

$$\sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \asymp \sum_{k > T+1} \frac{1}{k^{1+\beta}} \asymp \frac{1}{\beta} \frac{1}{T^\beta};$$

Ce résultat étant satisfait pour tout $\varepsilon > 0$, l'assertion 2) en découle. \square

Remarque 2.2.4. *Des estimations similaires sont également vérifiées par le reste de la série de Poincaré du groupe $\langle h \rangle$ en $\frac{1}{2}$: en effet, l'exposant critique de ce groupe est 0, et de ce fait, les sommes*

$$\sum_{n \mid d(\mathbf{o}, h^n \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, h^n \cdot \mathbf{o})} \text{ et } \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, h^n \cdot \mathbf{o})=T \pm 1} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, h^n \cdot \mathbf{o})}$$

décroissent exponentiellement vite en T .

Fixons à présent $\gamma \in \mathbb{R}$; une modification de la métrique dans le cusp telle que

$$d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = 2 \ln(n) + 2(1 + \beta) \ln \ln(n) + 2\gamma \ln \ln \ln n \quad (2.13)$$

2.2. Construction des groupes exotiques

impose

$$n_T \sim C \frac{e^{\frac{1}{2}T}}{T^{1+\beta} \ln(T)^\gamma}$$

et donc

$$b_T \sim 2C \frac{e^{\frac{1}{2}T}}{T^{1+\beta} \ln(T)^\gamma},$$

d'où

$$\sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) > T} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \sim \frac{2C}{\beta} \frac{1}{T^\beta \ln(T)^\gamma}.$$

Il est donc possible de construire des groupes paraboliques satisfaisant l'hypothèse (P_2) pour une fonction L non constante ; prendre $\gamma \in \{\pm 1\}$ par exemple.

D'après le théorème B dans [DOP00], la mesure m_G est infinie si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} = +\infty$. Donc m_G est infinie si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{n \mid d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) > k} e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \asymp \sum_{k \geq 1} \frac{L(k)}{k^\beta} = +\infty$$

où $L(x) = \frac{1}{\ln(x)^\gamma}$. Si on note $\tilde{L}(x) = \int_1^x \frac{L(x)}{x^\beta} dx$, alors m_G est infinie si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{L}(x) = +\infty$. Quand $\beta = 1$, la mesure m_Γ peut être finie : c'est le cas par exemple en choisissant $\gamma = 2$, ce qui impose $d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) = 2 \ln(n) + 4 \ln \ln(n) + 4 \ln \ln \ln(n)$ dans l'horoboule \mathcal{H} (dans ce cas $b_k \sim C \frac{e^{\frac{k}{2}}}{k^2 \ln(k)^2}$ et l'on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o}) e^{-\frac{1}{2}d(\mathbf{o}, p^n \cdot \mathbf{o})} \asymp \sum_{k \geq 1} k b_k e^{-\frac{k}{2}} \asymp \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \ln(k)^2}$). Les résultats qui nous intéressent étant en mesure infinie, la fonction à variations lentes \tilde{L} sera toujours supposée vérifier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{L}(x) = +\infty$. Cette propriété interviendra de manière récurrente dans la suite.

2.2.5 Dernière remarque

On peut construire $G = \Gamma_1 * \dots * \Gamma_p * \Gamma_{p+1} * \dots * \Gamma_{p+q}$ où les facteurs de Schottky $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ sont des groupes paraboliques élémentaires, "influent" au sens où leur exposant critique est égal à celui de G et les groupes $\Gamma_{p+1}, \dots, \Gamma_{p+q}$ sont des groupes élémentaires hyperboliques ou paraboliques mais avec un exposant critique strictement plus petit que celui de G . C'est dans cette généralité que nous allons travailler dans cette thèse. Le nombre de facteurs de Schottky influents ne joue un rôle que dans les constantes apparaissant dans les résultats. Dans le cas où $p + q = 2$ se présente un phénomène de périodicité dans la dynamique du groupe G : l'opérateur de transfert associé au codage admet alors deux valeurs propres dominantes au lieu d'une seule ([BP06] et [DP96a]).

Les résultats de comptage et de mélange restent cependant valides, seule l'analyse se complique un peu.



3

Fonctions à variations régulières

Dans ce chapitre sont présentées certaines propriétés des fonctions à variations régulières. Nous énonçons d'abord quelques rappels sur les lois stables, qui apparaissent naturellement comme loi limite de sommes renormalisées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ([GK68]). Ensuite, pour les besoins techniques de cette thèse, nous établirons quelques estimations de la fonction caractéristique de lois de probabilité dont le comportement asymptotique est dicté par une fonction à variations régulières.

3.1 Lois stables

Définition 3.1.1. Soient μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^+ et X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes et de loi μ . La loi μ est dite stable si pour tous nombres $a, b > 0$, il existe $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires réelles $aX + bY$ et $cZ + \alpha$ aient les mêmes lois.

Ce type de loi apparaît de façon naturelle lors de l'étude de la loi limite des sommes normalisées

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} - B_n \quad (3.1)$$

de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, où $a_n > 0$ et B_n sont des constantes réelles convenablement choisies ([GK68] p.162). Dans la

suite de cette thèse, nous ne travaillerons pas avec les lois stables dans toute leur généralité, mais seulement avec certaines que nous définissons maintenant. Une loi de probabilité est dite asymétrique et stable de paramètre $\beta \in (0, 1)$ si sa fonction caractéristique est donnée par $g_\beta(t) = e^{-\Gamma(1-\beta)e^{i\text{sign}(t)\beta\pi/2}|t|^\beta}$, où $\Gamma(1-\beta)$ est la fonction Gamma d'Euler en $1-\beta$. La densité d'une telle loi est une fonction continue Ψ_β définie sur $[0, +\infty[$. Si une mesure de probabilité μ est telle qu'une somme normalisée de variables aléatoires identiquement distribuées $(X_n)_{n \geq 1}$ de loi μ converge vers une loi stable, on dira que μ est dans le domaine d'attraction de cette loi stable. La proposition suivante fournit la principale explication de l'apparition des lois stables de paramètre $\beta \in]0, 1[$ dans la suite.

Proposition 3.1.2. *Soient μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^+ et $\beta \in]0, 1[$. Si la fonction de répartition F de la loi μ satisfait $1 - F(T) \sim \frac{1}{T^\beta}$ quand $T \rightarrow +\infty$, alors μ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre β .*

On déduit de cette proposition qu'une loi μ dont la densité f satisfait $f(x) \sim \frac{1}{x^{1+\beta}}$ appartient au domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre β . L'asymptotique de F donnée dans l'hypothèse de cette proposition coïncide avec le contrôle imposé au reste des séries de Poincaré des groupes Γ_j dans la famille d'hypothèses (H_β) . Sous cette hypothèse, l'étude du comportement local de la fonction caractéristique $\hat{\mu}$ de μ constitue un outil important ; au chapitre 4, nous en déduisons un développement limité de la valeur propre dominante d'opérateurs de transfert, introduits de façon naturelle dans le cadre géométrique que nous considérons.

3.2 Fonctions à variations lentes

3.2.1 Définition

Commençons par énoncer la

Définition 3.2.1.

i) Une fonction mesurable $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à variations lentes à l'infini si pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1.$$

ii) Une fonction mesurable $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à variations régulières d'exposant $\beta \in \mathbb{R}$ si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, elle satisfait $U(t) = t^\beta L(t)$ où L est à variations lentes.

La proposition suivante précise le type de convergence du quotient $\frac{L(xt)}{L(t)}$ vers 1 quand x appartient à un compact. On en trouvera plusieurs démonstrations dans le livre [BGT87].

Proposition 3.2.2. *Soit $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction à variations lentes à l'infini. Alors pour tout intervalle compact $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1$$

uniformément par rapport à $x \in [a, b]$.

3.2.2 Lemmes de Karamata et de Potter

Le lemme suivant précise le comportement au voisinage de l'infini des primitives des fonctions à variations régulières.

Lemme 3.2.3 (Karamata). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- Si $\alpha > 1$, alors

$$\int_x^{+\infty} \frac{L(y)}{y^\alpha} dy \sim \frac{L(x)}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

- Si $\alpha \leq 1$, alors la fonction $\tilde{L} : x \mapsto \int_1^x \frac{L(y)}{y^\alpha} dy$ est à variations régulières d'exposant $1 - \alpha$; de plus, quand $x \rightarrow +\infty$

$$\tilde{L}(x) \sim \frac{x^{1-\alpha}L(x)}{1-\alpha} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } \frac{L(x)}{\tilde{L}(x)} \rightarrow 0 \text{ sinon.}$$

Ce lemme permet notamment de caractériser les suites de renormalisation $(a_n)_n$ apparaissant dans les théorèmes de convergence de sommes normalisées du type (3.1). Pour assurer la convergence vers une loi stable de paramètre $\beta \in]0, 1[$, la suite $(a_n)_n$ doit satisfaire la condition $\frac{a_n^\beta}{L(a_n)} = n$ où L est à variations lentes ([GK68], p.180). En d'autres termes, si on pose $A(x) = \frac{x^\beta}{L(x)}$, la suite $(a_n)_n$ vérifie $A(a_n) = n$. D'après la proposition 1.5.12 de [BGT87], il existe alors une fonction croissante et à variations régulières A^* d'exposant $\frac{1}{\beta}$ telle que $a_n = A^*(n)$; la fonction A^* est la pseudo-inverse de A . Ces deux fonctions satisfont $A^*(A(x)) \sim A(A^*(x)) \sim x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Le lemme qui suit permet quant à lui de contrôler les oscillations d'une fonction à variations lentes.

Lemme 3.2.4 (Lemme de Potter). *Si L est une fonction à variations lentes, alors pour*

tous $B > 1$ et $\rho > 0$, il existe $T = T(B, \rho)$ tel que pour tous $x, y \geq T$

$$\frac{L(x)}{L(y)} \leq B \max \left(\left(\frac{x}{y} \right)^\rho, \left(\frac{x}{y} \right)^{-\rho} \right).$$

Pour plus d'informations concernant ces résultats, on pourra consulter [BGT87].

3.3 Applications

3.3.1 Fonction caractéristique d'une loi stable

Nous avons la

Proposition 3.3.1. *Soient $\beta \in]0, 1]$ et μ une loi de probabilité sur \mathbb{R}^+ dont la fonction de répartition $F(T) := \mu([0, T])$ vérifie lorsque $T \rightarrow +\infty$*

$$1 - F(T) \asymp \frac{L(T)}{T^\beta} \quad \left(\text{respectivement } 1 - F(T) = o\left(\frac{L(T)}{T^\beta}\right) \right) \quad (3.2)$$

où L est une fonction à variations lentes. Soit $\kappa > 0$.

1. Si $\beta < 1$, alors

$$\begin{aligned} a) \int_0^{+\infty} |e^{itx} - 1| \mu(dx) &\preceq |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \left(\text{resp.} = o\left(|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \right); \\ b) \int_0^{+\infty} |e^{-\kappa x} - 1| \mu(dx) &\preceq \kappa^\beta L\left(\frac{1}{\kappa}\right) \quad \left(\text{resp.} = o\left(\kappa^\beta L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) \right). \end{aligned}$$

2. Si $\beta = 1$, alors

$$\begin{aligned} a) \int_0^{+\infty} |e^{itx} - 1| \mu(dx) &\preceq |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \left(\text{resp.} = o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \right); \\ b) \int_0^{+\infty} |e^{-\kappa x} - 1| \mu(dx) &\preceq \kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \quad \left(\text{resp.} = o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration suit les étapes de celle du lemme 2 de [Eri70]. Fixons $t > 0$. Les arguments sont similaires pour $t < 0$ en utilisant $-t$ comme niveau de troncature. On écrit

$$\int_0^{+\infty} |e^{itx} - 1| \mu(dx) = \int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} |e^{itx} - 1| \mu(dx) + \int_0^{\frac{1}{t}} |e^{itx} - 1| \mu(dx) =: I_1 + I_2.$$

3.3. Applications

De l'asymptotique (3.2), on déduit $I_1 \preceq 1 - F\left(\frac{1}{t}\right)$. Donc

$$I_1 \preceq t^\beta L\left(\frac{1}{t}\right) \quad \left(\text{resp. } = o\left(t^\beta L\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right) \quad (3.3)$$

quand $\beta \in]0, 1[$ et

$$I_1 \preceq t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \left(\text{resp. } = o\left(t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right) \quad (3.4)$$

quand $\beta = 1$. Par ailleurs

$$I_2 \leq t \int_0^{\frac{1}{t}} x\mu(dx).$$

Par intégration par parties, on voit que $\int_0^T x\mu(dx) = -T(1 - F(T)) + \int_0^T (1 - F(x))dx$. Puisque $\int_1^T (1 - F(x))dx \asymp \tilde{L}(T)$, le lemme de Karamata entraîne

$$\frac{T(1 - F(T))}{\int_0^T (1 - F(x))dx} \asymp \frac{T^{1-\beta}L(T)}{\tilde{L}(T)} \longrightarrow 1 - \beta \text{ quand } T \longrightarrow +\infty.$$

Donc, quand $\beta < 1$ et $1 - F(T) \sim \frac{L(T)}{T^\beta}$, il vient

$$\int_0^T x\mu(dx) \preceq \tilde{L}(T) \preceq T^{1-\beta}L(T),$$

ce qui implique

$$I_2 \leq t \int_0^{\frac{1}{t}} x\mu(dx) \preceq t^\beta L\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.5)$$

Quand $\beta < 1$ et $1 - F(T) = o\left(\frac{L(T)}{T^\beta}\right)$, le lemme de Karamata donne

$$\int_0^T x\mu(dx) = o\left(T^{1-\beta}L(T)\right) + o\left(\tilde{L}(T)\right) = o\left(T^{1-\beta}L(T)\right)$$

et donc

$$I_2 = o\left(t^\beta L\left(\frac{1}{t}\right)\right). \quad (3.6)$$

Quand $\beta = 1$ et $1 - F(T) \sim \frac{L(T)}{T}$, on obtient de façon analogue

$$\int_0^T x\mu(dx) = o\left(\tilde{L}(T)\right) + \int_0^T (1 - F(x))dx \preceq \tilde{L}(T),$$

d'où

$$I_2 \preceq t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.7)$$

Quand $\beta = 1$ et $1 - F(T) = o\left(\frac{L(T)}{T}\right)$, on a cette fois $\int_0^T x\mu(dx) = o\left(\tilde{L}(T)\right)$, ce qui implique

$$I_2 = o\left(t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)\right). \quad (3.8)$$

Finalement, les estimations 1.a) et 2.a) s'obtiennent en combinant (3.3), (3.5) et (3.6) d'une part et (3.4), (3.7) et (3.8) d'autre part. Les estimations 1.b) et 2.b) pour l'intégrale $\int_0^\infty |e^{-\kappa x} - 1| d\mu(x)$ s'obtiennent de la même manière en utilisant une troncature en $\frac{1}{\kappa}$. \square

Dans la proposition suivante, nous nous intéressons plus particulièrement au cas $\beta = 1$.

Proposition 3.3.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^+ de fonction de répartition F ; pour $t \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$ notons*

$$I_S := \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} \sin(tx)(1 - F(x))dx \text{ et } I_C := \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx)(1 - F(x))dx.$$

Si F satisfait $1 - F(T) \sim \frac{L(T)}{T}$ quand $T \rightarrow +\infty$, on a, lorsque t et κ tendent vers 0

- i) $|I_S| \preceq \frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right)$;
- ii) $|I_S| \preceq L\left(\frac{1}{|t|}\right)$;
- iii) $I_C = \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)(1 + o(1)) + O\left(\frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$;
- iv) $I_C = \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)(1 + o(1)) + O\left(\frac{\kappa}{|t|} L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$.

Démonstration. La démonstration est inspirée de celle de la proposition 6.2 de [MT12].

i) Soit $t \neq 0$. Grâce au contrôle asymptotique de F , on écrit

$$\begin{aligned} |I_S| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} |\sin(tx)| (1 - F(x)) dx \preceq |t| \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} \left| \frac{\sin(tx)}{tx} \right| L(x) dx \\ &\preceq |t| \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} L(x) dx \preceq \frac{|t|}{\kappa} \int_0^{+\infty} e^{-u} L\left(\frac{u}{\kappa}\right) du \preceq \frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right), \end{aligned}$$

où la dernière majoration est une conséquence des lemmes de Karamata et de Potter.

3.3. Applications

ii) Supposons que $t > 0$. Alors

$$I_S = t^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{u}{t}\right)\right) du.$$

Puisque $u \mapsto e^{-\frac{\kappa u}{t}} \left(1 - F\left(\frac{u}{t}\right)\right)$ est décroissante et positive, les propriétés d'intégration des fonctions oscillantes impliquent

$$0 \leq I_S \leq t^{-1} \int_0^\pi e^{-\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{u}{t}\right)\right) du.$$

Le lemme de Karamata donne finalement

$$\begin{aligned} |I_S| &\leq t^{-1} \int_0^\pi e^{-\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{u}{t}\right)\right) du \preceq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} L\left(\frac{u}{t}\right) du \\ &\preceq L\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Pour $t < 0$, la méthode est la même. Il suffit d'observer que dans ce cas

$$I_S = t^{-1} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{-u}{t}\right)\right) du$$

est négative, et donc

$$\begin{aligned} |I_S| &= -I_S = (-t)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{-u}{t}\right)\right) du \\ &\leq (-t)^{-1} \int_0^\pi e^{\frac{\kappa u}{t}} \sin(u) \left(1 - F\left(\frac{-u}{t}\right)\right) du \end{aligned}$$

par le même argument d'intégrales de fonctions oscillantes. Le résultat suit en multipliant par $L\left(-\frac{1}{t}\right)$.

iii) Soit $t \neq 0$. On écrit

$$I_C = \int_0^{\frac{1}{\kappa}} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx + \int_{\frac{1}{\kappa}}^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx.$$

Commençons par la première intégrale. Décomposons la fonction $x \mapsto e^{-\kappa x} \cos(tx)$ sous la forme

$$e^{-\kappa x} \cos(tx) = e^{-\kappa x} (\cos(tx) - 1) + (e^{-\kappa x} - 1) + 1; \quad (3.9)$$

le lemme de Karamata nous permet d'écrire d'une part

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{1}{\kappa}} e^{-\kappa x} (\cos(tx) - 1) (1 - F(x)) dx \right| &\leq |t| \int_0^{\frac{1}{\kappa}} e^{-\kappa x} \left| \frac{\cos(tx) - 1}{tx} \right| L(x) dx \\ &\leq |t| \int_0^{\frac{1}{\kappa}} e^{-\kappa x} L(x) dx \\ &\leq \frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right), \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{1}{\kappa}} (e^{-\kappa x} - 1) (1 - F(x)) dx \right| &\leq \kappa \int_0^{\frac{1}{\kappa}} \left| \frac{e^{-\kappa x} - 1}{\kappa x} \right| L(x) dx \\ &\leq L\left(\frac{1}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{\kappa}} (1 - F(x)) dx \sim \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right).$$

Étudions à présent l'intégrale sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\kappa}, +\infty\right[$; le lemme de Potter pour $B = \rho = 1$, $x = \frac{u}{\kappa}$ et $y = \frac{1}{\kappa}$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{\kappa}}^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx \right| &\leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} L\left(\frac{u}{\kappa}\right) du \\ &\leq L\left(\frac{1}{\kappa}\right), \end{aligned}$$

d'où, en prenant compte toutes les estimations précédentes

$$I_C = O\left(\frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) + \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) (1 + o(1)) + O\left(L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$$

et le lemme de Karamata implique

$$I_C = \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) (1 + o(1)) + O\left(\frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right),$$

où $\lim_{\kappa \searrow 0} o(1) = 0$.

iv) Soit $t > 0$. On écrit

$$I_C = \int_0^{\frac{3\pi}{2t}} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2t}}^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx$$

et de la décomposition (3.9), on déduit

- $\left| \int_0^{\frac{3\pi}{2t}} e^{-\kappa x} (\cos(tx) - 1) (1 - F(x)) dx \right| \leq L \left(\frac{1}{t} \right) ;$
- $\left| \int_0^{\frac{3\pi}{2t}} (e^{-\kappa x} - 1) (1 - F(x)) dx \right| \leq \frac{\kappa}{t} L \left(\frac{1}{t} \right) ;$
- $\int_0^{\frac{3\pi}{2t}} (1 - F(x)) dx \sim \tilde{L} \left(\frac{1}{t} \right).$

Pour la contribution sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2t}, +\infty \right[$, on écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{3\pi}{2t}}^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - F(x)) dx \\ &= \frac{1}{t} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \cos(u) \left(1 - F \left(\frac{u}{t} \right) \right) du, \end{aligned}$$

et les propriétés d'intégration des fonctions oscillantes entraînent

$$0 \leq t^{-1} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \cos(u) \left(1 - F \left(\frac{u}{t} \right) \right) du$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \cos(u) \left(1 - F \left(\frac{u}{t} \right) \right) du \\ & \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \cos(u) \left(1 - F \left(\frac{u}{t} \right) \right) du. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \left| t^{-1} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{\kappa u}{t}} \cos(u) \left(1 - F \left(\frac{u}{t} \right) \right) du \right| & \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} L \left(\frac{u}{t} \right) du \\ & \leq L \left(\frac{1}{t} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$I_C = \tilde{L} \left(\frac{1}{t} \right) (1 + o(1)) + O \left(\frac{\kappa}{t} L \left(\frac{1}{t} \right) \right),$$

où $\lim_{t \rightarrow 0} o(1) = 0$. Le cas $t < 0$ se traite de façon analogue.

□

3.3.2 (S') implique (S'')

On démontre ici la dernière implication de la remarque 1.1.3, c'est-à-dire que l'assertion (S') implique (S''). Soit $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Supposons que pour tout $\Delta > 0$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$, la quantité $\#\{\alpha \in \Gamma_j \mid T - \Delta \leq d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) < T + \Delta\}$ est majorée par $C e^{\delta_\Gamma T} \frac{L(T)}{T^{1+\beta}}$. Fixons $T > 0$ et majorons $\#\{\alpha \in \Gamma_j \mid d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) \leq T\}$. Puisqu'une boule centrée en $\mathbf{o} \in X$ de rayon T peut se décomposer en l'union disjointe d'anneaux de "largeur" Δ , il suffit de montrer que

$$\Sigma := \sum_{n=1}^N \frac{e^{\delta_\Gamma n} L(n)}{n^{1+\beta}} \preceq \frac{e^{\delta_\Gamma N} L(N)}{N^{1+\beta}}.$$

Décomposons Σ en $\Sigma_1 + \Sigma_2$ avec

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{e^{\delta_\Gamma n} L(n)}{n^{1+\beta}} \text{ et } \Sigma_2 = \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^N \frac{e^{\delta_\Gamma n} L(n)}{n^{1+\beta}},$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ représente la fonction partie entière. D'après le lemme de Karamata

$$\Sigma_1 \preceq e^{\delta_\Gamma \frac{N}{2}} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} L(n) \preceq e^{\delta_\Gamma \frac{N}{2}} \left[\frac{N}{2} \right] L \left(\left[\frac{N}{2} \right] \right) \preceq \left[\frac{N}{2} \right] L(N) e^{\delta_\Gamma \frac{N}{2}}, \quad (3.10)$$

la dernière inégalité provenant du lemme de Potter avec $B = 1$, $\rho = 1$, $x = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et $y = N$. De même

$$\Sigma_2 = \frac{L(N)}{N^{1+\beta}} \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^N e^{\delta_\Gamma n} \frac{L(n)}{L(N)} \frac{N^{1+\beta}}{n^{1+\beta}} \leq 2^{2+\beta} \frac{L(N)}{N^{1+\beta}} \sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^N e^{\delta_\Gamma n}, \quad (3.11)$$

où la dernière inégalité découle du lemme de Potter avec $B, \rho = 1$, $x = n$ et $y = N$. Puisque $\sum_{n=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^N e^{\delta_\Gamma n}$ est majorée par $e^{\delta_\Gamma N}$ à une constante multiplicative près, le résultat découle de (3.10) et (3.11) pour N assez grand.



4

Codages et opérateur de transfert

Comme il est usuel dans l'étude du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur une variété de courbure négative, on veut conjuguer la dynamique du flot à celle d'une suspension au dessus d'un décalage sur un espace symbolique ([Bow75] et [PP90]). L'objet de ce chapitre est de présenter le codage que nous allons utiliser afin d'étudier la propriété de mélange de $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ décrite dans l'introduction et de compter ses orbites périodiques. Dans une deuxième partie, nous introduisons une famille d'opérateurs de transfert qui reflète la dynamique du codage. On étudiera ensuite le spectre de ces opérateurs, en mettant notamment en évidence l'existence d'un trou spectral.

4.1 Codages de l'ensemble limite et du flot géodésique

Rappelons que X désigne une variété de Hadamard à courbure pincée entre $-b^2$ et $-a^2$, sur laquelle agit un groupe de Schottky exotique Γ . Dans cette première partie, nous introduisons les notations complémentaires en lien avec le groupe Γ et nous présentons quelques propriétés géométriques importantes de ce groupe, qui nous permettront de définir un codage de son ensemble limite.

Pour l'heure, fixons deux entiers $p, q \geq 1$ tels que $p+q \geq 3$. Considérons $p+q$ sous-groupes élémentaires $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{p+q}$ de $\text{Isom}(X)$, agissant proprement discontinument et sans point fixe sur X . Supposons que les groupes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ sont paraboliques. Pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$,

supposons de plus qu'il existe un sous-ensemble fermé D_j de ∂X tel que $\alpha.(\partial X \setminus D_j) \subset D_j$ pour tout $\alpha \in \Gamma_j^*$. On peut remarquer que l'ensemble limite Λ_{Γ_j} de Γ_j est inclus dans D_j . Nous supposons enfin que les ensembles D_j , $1 \leq j \leq p+q$ sont deux-à-deux disjoints. Notons $D := \cup_{1 \leq j \leq p+q} D_j$. Du choix des $(D_j)_{1 \leq j \leq p+q}$, il vient immédiatement que D est un sous-ensemble propre de ∂X . Dans la suite, nous aurons besoin d'utiliser des ensembles "plus gros" que les D_j , mais possédant les mêmes propriétés dynamiques sous l'action des $(\Gamma_j)_j$ sur \bar{X} . Pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, notons \mathbf{D}_j un sous-ensemble connexe (ou ayant deux composantes connexes), géodésiquement convexe (ou dont chaque composante connexe est géodésiquement convexe) de \bar{X} tel que $\mathbf{D}_j \cap \partial X = D_j$; supposons également que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, l'ensemble \mathbf{D}_j satisfait $\Gamma_j.(\bar{X} \setminus \mathbf{D}_j) \subset \mathbf{D}_j$ (voir figure 2.4).

4.1.1 Propriétés des groupes de Schottky

Sous les hypothèses précédentes, le groupe Γ engendré par les groupes Γ_j , $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, agit proprement discontinument et sans point fixe sur X et l'on a $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots * \Gamma_{p+q}$; le groupe Γ est le produit Schottky des groupes $(\Gamma_j)_{1 \leq j \leq p+q}$ et chaque groupe Γ_j , $1 \leq j \leq p+q$ est un *facteur de Schottky* de Γ . De la structure de produit libre, on peut déduire que toute isométrie $\gamma \in \Gamma$ peut être décomposée de manière **unique** comme un produit $\alpha_1 \dots \alpha_k$ d'éléments de $\cup_j \Gamma_j^*$ satisfaisant la propriété suivante : deux éléments consécutifs α_j et α_{j+1} n'appartiennent pas au même facteur de Schottky. Posons $\mathcal{A} := \cup_{1 \leq j \leq p+q} \Gamma_j^*$: dans ce qui suit, \mathcal{A} sera appelé *l'alphabet* et les isométries $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les *lettres* de γ . Un mot $\alpha_1 \dots \alpha_k$ respectant les conditions précédentes sera dit *\mathcal{A} -admissible*. Le nombre k de lettre(s) apparaissant dans l'écriture de γ est la *longueur symbolique* de γ et est notée $|\gamma|$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\Gamma(n) = \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n\}$. Nous remarquons que l'alphabet \mathcal{A} et les ensembles $\Gamma(n)$, $n \geq 1$, sont infinis et dénombrables. Les lettres initiale et finale intervenant dans l'écriture de γ vont jouer un rôle essentiel par la suite, nous notons donc $i(\gamma)$ l'indice du groupe auquel appartient la première lettre de γ et $l(\gamma)$ celui du groupe auquel appartient la dernière lettre. Énonçons à présent quelques propriétés géométriques de l'action de Γ sur X , intimement liées à la structure de produit Schottky. Commençons par le lemme suivant, caractéristique de la courbure strictement négative.

Lemme 4.1.1. *Soient $E, F \subset \bar{X}$ tels que $E \cap \partial X, F \cap \partial X \neq \emptyset$ et $\bar{E} \cap \bar{F} = \emptyset$. Il existe un compact $K_0 = K_0(E, F) \subset X$ tel que toute géodésique (xy) (respectivement tout segment géodésique $[\mathbf{xy}]$) d'extrémités $x \in E \cap \partial X$ et $y \in F \cap \partial X$ (resp. $\mathbf{x} \in E \cap X$ et $\mathbf{y} \in F \cap X$) intersecte K_0 ; en particulier, il existe une constante $C = C(E, F) > 0$ telle que $d(\mathbf{o}, (xy)) \leq C$ (resp. $d(\mathbf{o}, [\mathbf{xy}]) \leq C$).*

Démonstration. Montrons par l'absurde qu'il existe un compact K_0 de X par lequel passe

toute géodésique ayant ses extrémités dans $E \cap \partial X$ et $F \cap \partial X$. Supposons donc que pour tout compact $K \subset X$, il existe une géodésique (xy) avec $x \in E \cap \partial X$ et $y \in F \cap \partial X$ telle que $K \cap (xy) = \emptyset$. Soit $n \geq 1$. Notons $K_n = B(\mathbf{o}, n)$ la boule fermée centrée en \mathbf{o} de rayon n . Cette boule est un compact de X , donc il existe $x_n \in E \cap \partial X$ et $y_n \in F \cap \partial X$ tels que $K_n \cap (x_n y_n) = \emptyset$, si bien que $d(\mathbf{o}, (x_n y_n)) \geq n$. De la propriété de visibilité (2.5) découle l'inégalité $d_{\mathbf{o}}(x_n, y_n) \leq C e^{-n}$; ainsi, pour n assez grand

$$d_{\mathbf{o}}(x_n, y_n) < d_{\mathbf{o}}(E \cap \partial X, F \cap \partial X).$$

Contradiction. Il existe donc un compact K_0 ayant la propriété demandée. Quitte à agrandir K_0 , on peut supposer qu'il contient le point \mathbf{o} . Soient maintenant $x \in E \cap \partial X$ et $y \in F \cap \partial X$; d'après la propriété précédente, il existe $\mathbf{p} \in (xy) \cap K_0$, d'où $d(\mathbf{o}, (xy)) \leq d(\mathbf{o}, \mathbf{p}) \leq \text{diam}(K_0)$. Ceci achève la démonstration du lemme. \square

Ce lemme admet le corollaire suivant

Corollaire 4.1.2. *Soient $E, F \subset X$ tels que $\overline{E} \cap \overline{F} \cap \partial X = \emptyset$. Il existe une constante $C = C(E, F) > 0$ telle que $d(\mathbf{o}, [\mathbf{x}\mathbf{y}]) \leq C$ pour tous $\mathbf{x} \in E$ et $\mathbf{y} \in F$.*

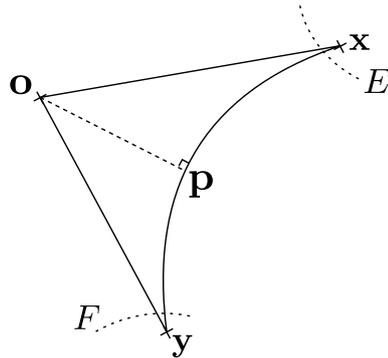


FIGURE 4.1 – Triangle $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$

Nous pouvons à présent déduire l'inégalité suivante, qui complète l'inégalité triangulaire. Cette propriété de la courbure négative est **cruciale** dans tout ce qui suit.

Lemme 4.1.3 (“quasi-égalité triangulaire”). *Soient $E, F \subset X$ tels que $\overline{E} \cap \overline{F} \cap \partial X = \emptyset$. Il existe alors une constante $C = C(E, F) > 0$ telle que pour tous $\mathbf{x} \in E$ et $\mathbf{y} \in F$, on ait $d(\mathbf{o}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{y}) - C \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.*

Démonstration. La démonstration est inspirée de celle du Lemme 2.2 dans [Sch04]. Considérons le triangle hyperbolique de sommets \mathbf{o}, \mathbf{x} et \mathbf{y} . Notons \mathbf{p} le projeté de \mathbf{o} sur

le côté $[\mathbf{xy}]$ (voir figure 4.1). Du corollaire 4.1.2, on déduit l'existence d'une constante $C = C(X, E, F) > 0$ telle que $d(\mathbf{o}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{o}, [\mathbf{xy}]) \leq C$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} d(\mathbf{o}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ = d(\mathbf{o}, \mathbf{x}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique alors $d(\mathbf{o}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2C$. \square

Cette propriété générale de courbure négative combinée avec la position relative des ensembles D_j , $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, nous permet de formuler les deux corollaires ci-dessous : le premier est une formulation adaptée à Γ de la propriété de "quasi-égalité triangulaire" précédente pour des triangles dont deux sommets sont dans des bassins \mathbf{D}_j disjoints ; le deuxième est un raffinement de l'inégalité $\mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq d(\mathbf{o}, \gamma^{-1} \cdot \mathbf{o})$ qui découle de la définition des fonctions de Busemann.

Corollaire 4.1.4. *Il existe une constante $C > 0$, qui dépend seulement des bornes de la courbure de X et de Γ , telle que pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ avec $i(\gamma_1) \neq i(\gamma_2)$, on ait $d(\mathbf{o}, \gamma_1 \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) - C \leq d(\gamma_1 \cdot \mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o})$.*

Remarque 4.1.5. *Du corollaire précédent et des hypothèses (P_1) et (N) on déduit que la somme $\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta_{\Gamma} d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}$ est finie pour tout $k \geq 1$. Si $k = 1$, c'est une conséquence directe des hypothèses (P_1) et (N) ; si $k \geq 2$, le corollaire 4.1.4 implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$, on ait*

$$d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \geq d(\mathbf{o}, \alpha_1 \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \alpha_2 \cdot \mathbf{o}) + \dots + d(\mathbf{o}, \alpha_k \cdot \mathbf{o}) - (k-1)C$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta_{\Gamma} d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \leq e^{(k-1)C} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} e^{-\delta_{\Gamma} d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \right)^k < +\infty.$$

Corollaire 4.1.6. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\gamma \in \Gamma^*$ et $x \in \cup_{j \neq l(\gamma)} D_j$*

$$d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - C \leq \mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}).$$

Démonstration. Soit $j \neq l(\gamma)$ tel que $x \in (D_j \cap \Lambda_{\Gamma})$ et $(\mathbf{r}(t))_{t \geq 0}$ un rayon géodésique convergeant vers x . Pour t assez grand, on a $\mathbf{r}(t) \in D_j$ (voir figure 4.2). D'après le lemme 4.1.3, il existe une constante $C = C(l(\gamma), j) > 0$ telle que pour t assez grand, on ait

$$d(\mathbf{o}, \gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{r}(t)) - C \leq d(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{r}(t)) \leq d(\mathbf{o}, \gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \mathbf{r}(t)),$$

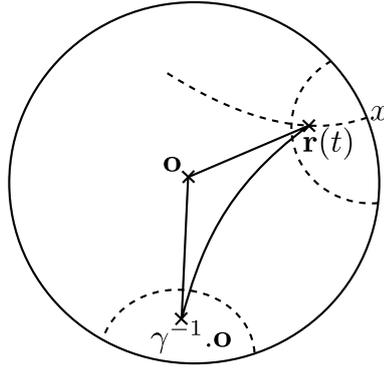


FIGURE 4.2 – Comparaison entre fonction de Busemann et distance

d'où

$$d(\mathbf{o}, \gamma^{-1}.\mathbf{o}) - C \leq d(\gamma^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{r}(t)) - d(\mathbf{o}, \mathbf{r}(t)) \leq d(\mathbf{o}, \gamma^{-1}.\mathbf{o}).$$

On conclut en faisant tendre t vers $+\infty$ puis en définissant la constante C de l'énoncé comme le maximum sur $i, j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $i \neq j$, des constantes $C(i, j)$ précédentes. \square

Cette estimation du cocycle de Busemann nous permet de contrôler le coefficient de conformité de l'action d'une isométrie γ sur le bord ∂X .

Proposition 4.1.7. *Il existe une constante $C > 0$ et un réel $r \in]0, 1[$ tels que pour tout $n \geq 1$, tout $\gamma \in \Gamma(n)$ et tout $x \in \cup_{j \neq l(\gamma)} D_j$*

$$|\gamma'(x)|_{\mathbf{o}} \leq Cr^n.$$

Démonstration. Rappelons que $|\gamma'(x)|_{\mathbf{o}} = e^{-a\mathcal{B}_x(\gamma^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})}$. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) \geq An$ pour tout $\gamma \in \Gamma(n)$. Fixons donc $n \geq 1$. Les orbites sous l'action de Γ s'accumulant à l'infini, il existe un entier $l_0 \geq 1$ tel que $d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) \geq 1 + 2C$ pour tout $g \in \Gamma$ de longueur l_0 , la constante C étant celle qui apparaît dans le corollaire 4.1.4. Nous décomposons alors $\gamma \in \Gamma(n)$ en un produit de transformations de longueur symbolique l_0 . Deux cas se présentent :

- 1) ou bien $n > 2l_0$, et on écrit $\gamma = \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k.\bar{\gamma}$ où $|\gamma_j| = l_0$, $1 \leq j \leq k := \lfloor \frac{n}{l_0} \rfloor$ et $|\bar{\gamma}| < l_0$. Le corollaire 4.1.4 implique alors

$$d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) \geq \sum_{1 \leq i \leq k} d(\mathbf{o}, \gamma_i.\mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \bar{\gamma}.\mathbf{o}) - 2kC$$

et donc $d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \geq k \geq \frac{1}{2l_0}n$;

2) ou bien $n \leq 2l_0$. Par discrétude de Γ , on a

$$B := \inf_{1 \leq n \leq 2l_0} \inf_{\gamma \in \Gamma(n)} d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) > 0,$$

d'où $d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \geq B \geq \left(\frac{B}{2l_0}\right)n$.

Le résultat s'en déduit en prenant $A := \min\left(\frac{1}{2l_0}, \frac{B}{2l_0}\right)$. □

De la propriété de conformité (2.6) des isométries $\gamma \in \Gamma$ pour la distance $d_{\mathbf{o}}$ et de la proposition précédente découle le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.8. *Il existe $r \in]0, 1[$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $n \geq 1$, tout $\gamma \in \Gamma(n)$ et tous $x, y \in \Lambda_{\Gamma} \cap (\partial X \setminus D_{l(\gamma)})$*

$$d_{\mathbf{o}}(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) \leq Cr^n d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

Les corollaires 4.1.6 et 4.1.8 nous seront très utiles dans les sections à venir pour définir et étudier le codage des points de Λ_{Γ} . Plus précisément, le corollaire 4.1.6 sera d'un usage constant pour obtenir des estimations concernant l'opérateur de transfert que nous introduirons dans la suite. Pour sa part, le corollaire 4.1.8 assurera la dilatation uniforme du décalage sur les suites : c'est l'un des objets de la section suivante.

4.1.2 Codage de l'ensemble limite

Nous présentons à présent un codage de l'ensemble limite de Γ à partir de l'alphabet \mathcal{A} . Ce codage repose sur la propriété de produit libre de Γ . S'introduit de façon naturelle sur cet espace symbolique une transformation de décalage dont nous étudierons les propriétés géométriques dans son action sur Λ_{Γ} .

Notons $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ l'ensemble des suites d'éléments de \mathcal{A} , dites \mathcal{A} -admissibles, défini par

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^+ := \{\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1} \mid \forall n \geq 1, \alpha_n \in \mathcal{A} \text{ et } \exists i \neq j, \alpha_n \in \Gamma_i, \alpha_{n+1} \in \Gamma_j\}.$$

Fixons un point $x_0 \in \partial X \setminus D$. Nous avons la

Proposition 4.1.9.

- 1) *Pour tout $\alpha = (\alpha_n) \in \Sigma_{\mathcal{A}}^+$, la suite $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot x_0)_{n \geq 1}$ converge vers un point $\pi(\alpha)$ de l'ensemble limite Λ_{Γ} , qui ne dépend pas du point x_0 choisi dans $\partial X \setminus D$;*

2) l'application $\pi : \Sigma_{\mathcal{A}}^+ \longrightarrow \Lambda_{\Gamma}$ est injective et le complémentaire de son image dans Λ_{Γ} est dénombrable et consiste en l'orbite sous Γ de l'union $\cup_{1 \leq j \leq p+q} \Lambda_{\Gamma_j}$ des ensembles limites des groupes Γ_j ;

3) en outre, l'ensemble $\pi(\Sigma_{\mathcal{A}}^+)$ est inclus dans l'ensemble limite radial de Γ .

Remarque 4.1.10. Le fait de choisir x_0 en dehors des D_j nous assure qu'aucune simplification n'apparaît dans la définition du point limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot x_0$. Si dans les corollaires 4.1.6 et 4.1.8 on s'autorise à considérer x ou y dans $\{x_0\} \cup \cup_{j \neq l(\gamma)} D_j$, les constantes apparaissant dans ces deux résultats dépendent également du choix du point x_0 .

Démonstration. La preuve des différentes assertions de cette proposition est une adaptation à notre cas de celle de la proposition 1 dans [Pei03].

1) Soit $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{A}}^+$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 4.1.8, il existe $n_0 \geq 1$, tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $p \geq 0$

$$d_{\mathbf{o}}(\alpha_1 \dots \alpha_n \cdot x_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \alpha_{n+p} \cdot x_0) \leq Cr^n d(x_0, \alpha_{n+1} \dots \alpha_p \cdot x_0) \leq C'r^n \leq \varepsilon.$$

La suite $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot x_0)_{n \geq 1}$ est ainsi une suite de Cauchy de ∂X , elle est donc convergente. De plus, pour tout x_1 contenu dans $\partial X \setminus D$, la suite $(d_{\mathbf{o}}(\alpha_1 \dots \alpha_n \cdot x_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \cdot x_1))_n$ tend vers 0, donc la limite ne dépend pas du point base choisi dans $\partial X \setminus D$.

2) Montrons dans un premier temps que l'application π est injective. Soient α, β deux suites différentes de $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$. Soit $n_0 \geq 1$ le premier indice tel que $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$. Posons alors $x_{n_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_{n_0} \dots \alpha_{n_0+k} \cdot x_0$ et $y_{n_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_{n_0} \dots \beta_{n_0+k} \cdot x_0$. Si les facteurs de Schottky auxquels appartiennent α_{n_0} et β_{n_0} sont différents, alors x_{n_0} et y_{n_0} sont dans deux bassins différents ; donc $\pi(\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_{n_0-1} \cdot x_{n_0} \neq \alpha_1 \dots \alpha_{n_0-1} \cdot y_{n_0} = \pi(\beta)$. Sinon, α_{n_0} et β_{n_0} sont deux transformations distinctes du même facteur de Schottky Γ_j ; on en déduit que les points $\alpha_{n_0}^{-1} \cdot x_{n_0}$ et $\alpha_{n_0}^{-1} \cdot y_{n_0}$ ne sont pas dans le même bassin et l'argument précédent permet de conclure en composant par l'isométrie $\alpha_1 \dots \alpha_{n_0}$. Fixons à présent $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in (\Lambda_{\Gamma} \cap D_j)$;

a) Supposons dans un premier temps que $\alpha^{-1} \cdot x \in D_j$ pour tout $\alpha \in \Gamma_j^*$. Comme x est un point de l'ensemble limite, il existe une suite $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de Γ telle que $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k \cdot x_0$. Pour k assez grand, la première lettre α_k de γ_k appartient à Γ_j^* . On peut de plus extraire une sous-suite de $(\gamma_k)_k$, toujours

notée $(\gamma_k)_k$, telle que tous les α_k soient distincts. En effet, sinon, à partir d'un certain rang, $\alpha_k = \alpha$ et donc $x \in \alpha \cdot (\Lambda_\Gamma \setminus D_j)$ ce qui contredit notre hypothèse. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\beta_k = \alpha_k^{-1} \gamma_k$ est telle que la suite $(\beta_k \cdot x_0)_k$ converge vers $y \in (\Lambda_\Gamma \setminus D_j)$. Il vient donc $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \cdot y$, ce qui prouve que $x \in \Lambda_{\Gamma_j}$.

- b) Supposons à présent qu'il existe $l \neq j$ et $\alpha \in \Gamma_j^*$ tels que $\alpha^{-1} \cdot x \in (\Lambda_\Gamma \cap D_l)$. Soulignons que l'élément α est unique. En effet, s'il existait $\beta \in \Gamma_j^*$, $\beta \neq \alpha$ tel que $y = \beta^{-1} \cdot x \in (\Lambda_\Gamma \setminus D_j)$, alors $\alpha^{-1} \beta \cdot y = \alpha^{-1} \cdot x \in (\Lambda_\Gamma \cap D_l)$ et donc $\alpha^{-1} \beta \in \Gamma_l^*$, ce qui est impossible.

On pose alors $\alpha_1 = \alpha$ et on mène alors la même discussion en remplaçant le point x par $\alpha_1^{-1} \cdot x$.

De proche en proche, si $x \notin \Gamma \cdot (\cup_j \Lambda_{\Gamma_j})$, on peut construire une suite admissible $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que $x = \pi(\alpha)$.

- 3) Montrons maintenant que $\pi(\Sigma_{\mathcal{A}}^+)$ est inclus dans l'ensemble limite radial. D'après la caractérisation de l'ensemble limite radial rappelée dans la proposition 2.1.2, il suffit de prouver que pour toute suite admissible α fixée, il existe une suite $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ d'éléments distincts de Γ telle que pour tout $y \in \Lambda_\Gamma \setminus \{\pi(\alpha)\}$, la suite $(\gamma_k \cdot \pi(\alpha), \gamma_k \cdot y)_{k \geq 0}$ reste dans un sous-ensemble compact de $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma$. Les facteurs Γ_j étant en nombre fini, il existe $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ tel qu'une infinité de lettres de α appartiennent à Γ_j^* . Notons $\varphi(k)$ la k -ième apparition dans α d'un terme de Γ_j^* et posons $\gamma_k = (\alpha_1 \dots \alpha_{\varphi(k)})^{-1}$; remarquons que $\gamma_k \cdot \pi(\alpha)$ n'appartient pas à D_j pour tout $k \geq 1$. Fixons à présent $y \in \Lambda_\Gamma \setminus \{\pi(\alpha)\}$. Supposons dans un premier temps que $y \in \pi(\Sigma_{\mathcal{A}}^+)$. Il existe donc $\beta \in \Sigma_{\mathcal{A}}^+$ tel que $y = \pi(\beta)$; notons alors l le premier indice pour lequel $\beta_l \neq \alpha_l$ et $k_0 \geq 1$ l'unique entier tel que $\varphi(k_0) \leq l < \varphi(k_0 + 1)$. Pour tout $k \geq k_0 + 1$, il vient $\gamma_k \cdot y \in D_j$ et la propriété est vérifiée. Le cas où $y \notin \pi(\Sigma_{\mathcal{A}}^+)$ se traite de façon analogue en utilisant le 2).

□

Introduisons maintenant les notations suivantes :

- $\Lambda^0 := \pi(\Sigma_{\mathcal{A}}^+)$;
- $\Lambda_j^0 := \Lambda^0 \cap D_j = \left\{ \pi(\alpha) \mid \alpha_1 \in \Gamma_j^* \right\}$ pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$.

Insistons sur le fait que l'ensemble Λ_j^0 n'est pas l'ensemble limite du groupe Γ_j qui est réduit à un ou deux points puisque Γ_j est élémentaire. Néanmoins $\overline{\Lambda_j^0}$ contient Λ_{Γ_j} pour

tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Les bassins D_j , $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, étant fermés et disjoints, les ensembles $(\Lambda_j^0)_j$ ont des adhérences disjointes. On peut alors décomposer Λ^0 et les Λ_j^0 de la manière suivante :

- 1) Λ^0 est la réunion finie des ensembles $\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \dots, \Lambda_{p+q}^0$;
- 2) chaque ensemble Λ_j^0 est lui-même partitionné en une famille dénombrable de sous-ensembles d'adhérences disjointes : en effet, pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, on a

$$\Lambda_j^0 = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_j^*} \bigcup_{k \neq j} \alpha \cdot \Lambda_k^0.$$

L'opérateur de décalage (ou *shift*) sur l'espace symbolique $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ est défini par

$$\forall \alpha \in \Sigma_{\mathcal{A}}^+, \Theta(\alpha) = (\alpha_{k+1})_{k \geq 1}.$$

Cet opérateur Θ induit une transformation T sur Λ^0 dont l'action est donnée par :

$$T.x = \alpha_1^{-1}.x \text{ si } x = \pi(\alpha).$$

La transformation T définie précédemment jouit de la propriété suivante :

Proposition 4.1.11. *La transformation T est uniformément dilatante sur Λ^0 : il existe $k_0 \geq 1$, tel que pour tout $k \geq k_0$, pour tous $x, y \in \Lambda^0$ vérifiant $x = \pi(\alpha)$, $y = \pi(\beta)$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, on ait*

$$d_{\mathbf{o}}(T^k.x, T^k.y) \geq 2d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

Démonstration. Pour tout $k \geq 1$ et tout couple (x, y) de points de Λ^0 satisfaisant les hypothèses de la proposition, on peut écrire $x = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k . x'$ avec $x' \in \Lambda^0 \setminus \Lambda_{l(\alpha_k)}^0$ et $y = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k . y'$ avec $y' \in \Lambda^0 \setminus \Lambda_{l(\alpha_k)}^0$. L'inégalité 4.1.8 entraîne

$$d_{\mathbf{o}}(x, y) = d_{\mathbf{o}}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k . x', \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k . y') \leq Cr^k d_{\mathbf{o}}(x', y').$$

La proposition en découle en choisissant $k_0 \geq 1$ tel que $Cr^{k_0} \leq \frac{1}{2}$ et en notant que $x' = T^{k_0}.x$ et $y' = T^{k_0}.y$. □

Remarque 4.1.12.

- 1- Dans [Dal07], l'auteur utilise un codage de l'ensemble limite à partir d'un point base $\mathbf{o} \in X$. Les propriétés du codage données par la proposition 4.1.9 sont aussi vraies

dans ce cas. Pour l'utilisation que l'on en aura, et notamment dans le chapitre 7 pour l'étude de la fonction orbitale, il est plus pratique d'utiliser un point base $x_0 \in \partial X \setminus D$.

2- Comme nous l'avons déjà remarqué, l'alphabet ici est infini dénombrable. Imaginons l'espace d'un instant un alphabet fini. Si nous notons \mathbf{a}_j une isométrie engendrant Γ_j , pour $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, l'alphabet fini s'imposant à nous serait alors $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1^{-1}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2^{-1}, \dots, \mathbf{a}_{p+q}, \mathbf{a}_{p+q}^{-1}\}$ et nous pourrions définir comme espace de suites admissibles l'espace suivant

$$\Sigma_{\mathcal{A}}^+ = \left\{ (\alpha_n)_{n \geq 1} \mid \alpha_n \in \mathcal{A} \text{ et } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n^{-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \right\}$$

comme dans le cas d'un groupe convexe-cocompact. Dans notre cas, ce codage permet de coder tout l'ensemble limite Λ_{Γ} , mais n'est plus injectif du fait de la présence de transformations paraboliques : en effet, pour une transformation parabolique \mathbf{a} fixant $x_{\mathbf{a}}$, les deux suites $(\mathbf{a}^n \cdot x_0)_{n \geq 1}$ et $(\mathbf{a}^{-n} \cdot x_0)_{n \geq 1}$ convergent vers $x_{\mathbf{a}}$. Il faudrait se restreindre à un sous-ensemble de $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ ne rendant compte que de l'ensemble limite radial (voir la proposition 2.2 dans [Dal07]). Un problème important demeurerait cependant : la transformation T ne serait plus uniformément dilatante. Ce qui conduirait à la perte de quasi-compacité de l'opérateur de transfert associé (voir proposition 4.2.9). La présence de transformations paraboliques nous oblige donc à considérer un alphabet infini. Dans [DPPS15], les auteurs adaptent le codage précédent en considérant également les mots en des puissances 1 des générateurs des (Γ_j) , pour s'assurer des bonnes propriétés du codage dans le cas où tous les Γ_j sont paraboliques et où la variété quotient est de volume fini.

4.1.3 Codage du flot géodésique

Dans cette section, nous utilisons le codage présenté précédemment comme brique de base pour construire un codage du flot géodésique $(g_t)_t$ sur T^1X/Γ . Nous rappelons dans un premier temps quelques notions présentées dans le premier chapitre. Grâce au théorème de Hopf, on peut identifier le fibré unitaire tangent T^1X/Γ de la variété X/Γ à l'ensemble $\partial X \overset{\Delta}{\times} \partial X \times \mathbb{R}$. Dans ces coordonnées, l'action du groupe Γ est donnée de la manière suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma \cdot (y, x, r) = \left(\gamma \cdot y, \gamma \cdot x, r + \mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) \right).$$

4.1. Codages de l'ensemble limite et du flot géodésique

Rappelons également que, relativement à cette paramétrisation, le flot géodésique $(\tilde{g}_t)_t$ sur T^1X agit par translations sur la troisième coordonnée ; ces deux actions commutent et définissent en passant au quotient le flot $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur T^1X/Γ . D'après un résultat de Eberlein [Ebe72], la dynamique du flot géodésique $(g_t)_t$ est portée par l'ensemble non-errant Ω_Γ qui s'identifie à $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}/\Gamma$. Au vu de la définition du codage symbolique de Λ_Γ , il est naturel de regarder l'ensemble $\Omega^0 := \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0 \times \mathbb{R}$, dont le complémentaire dans Ω_Γ est une union dénombrable d'orbites du flot géodésique, fermées ou non. On va maintenant produire un codage de l'action du flot géodésique $(g_t)_t$ sur cet ensemble Ω^0 . On introduit tout d'abord l'ensemble \mathcal{D}^0 suivant

$$\mathcal{D}^0 := \bigcup_{k \neq j} \Lambda_j^0 \times \Lambda_k^0.$$

Cet ensemble \mathcal{D}^0 est inclus dans $\Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0$ et est en correspondance bijective avec l'espace symbolique $\Sigma_{\mathcal{A}}$ des suites bi-infinies \mathcal{A} -admissibles : à toute suite $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathcal{A}}$, on associe le couple $(y, x) = \pi(\alpha) \in \mathcal{D}^0$ suivant

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_0^{-1} \alpha_{-1}^{-1} \dots \alpha_{-n}^{-1} \cdot x_0 \text{ et } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot x_0. \quad (4.1)$$

L'ensemble $\Sigma_{\mathcal{A}}$ code alors toutes les géodésiques ayant des extrémités dans des bassins d'attraction distincts, à un ensemble $\sigma_{\mathbf{o}} \otimes \sigma_{\mathbf{o}}$ -négligeable près. D'après le lemme 4.1.1, il existe un compact $K_0 \in X$ intersecté par toutes ces géodésiques. L'ensemble $\Sigma_{\mathcal{A}}$ sert à coder toutes les géodésiques intersectant un compact fixé contrairement à $\Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0$ qui comprend toutes les copies de l'ensemble précédent sous l'action de Γ . Le but étant de coder le flot géodésique, on gardera à l'esprit l'interprétation suivante : si l'on considère le triplet (y, x, r) où le réel r permet de positionner l'origine temporelle sur la géodésique orientée (yx) (voir chapitre 2), alors les symboles d'indice négatif de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ codent le passé de la trajectoire (yx) par rapport à l'origine choisie tandis que les symboles d'indice positif sont associés au futur de la trajectoire. Le déplacement sur la géodésique dû à l'action du flot géodésique va alors être pris en compte par l'action d'une transformation, toujours notée \mathbb{T} , induite par le décalage sur les suites bi-infinies. Plus précisément, si $(y, x) \in \mathcal{D}^0$ correspond à la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, alors

$$\mathbb{T} \cdot (y, x) = (\alpha_1^{-1} \cdot y, \alpha_1^{-1} \cdot x).$$

Si on note $(y', x') = T.(y, x)$, on a alors

$$y' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1^{-1} \alpha_0^{-1} \dots \alpha_{-n}^{-1} x_0 \text{ et } x' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_2 \dots \alpha_n x_0.$$

Sous l'action de T , le symbole α_1 devient maintenant un symbole codant le passé. On constate aussi que la transformation T ainsi définie est inversible sur \mathcal{D}^0 , ce qui n'était pas le cas dans la section précédente. On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.1.13. *L'action de Γ sur $\Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0$ est orbite-équivalente à celle de T sur \mathcal{D}^0 .*

Démonstration. Pour un couple $(y, x) \in \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0$, on définit le couple (\tilde{y}, \tilde{x}) de \mathcal{D}^0 de la manière suivante : les points x et y étant dans Λ^0 , il existe deux suites différentes α et β de $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ telles que $x = \pi(\alpha)$ et $y = \pi(\beta)$. Soit n_0 le premier entier ≥ 1 tel que $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$:

- si α_{n_0} et β_{n_0} n'appartiennent pas au même facteur de Schottky Γ_j , on pose $(\tilde{y}, \tilde{x}) = (y, x)$ si $n_0 = 1$ et $(\tilde{y}, \tilde{x}) = (\beta_1 \dots \beta_{n_0-1})^{-1} .(y, x)$ sinon ;
- si α_{n_0} et β_{n_0} appartiennent au même groupe Γ_j , on pose $(\tilde{y}, \tilde{x}) = (\beta_1 \dots \beta_{n_0})^{-1} .(y, x)$.

Définissons maintenant l'application

$$P : \begin{cases} \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0 & \longrightarrow \mathcal{D}^0 / \langle T \rangle \\ (y, x) & \longmapsto [(\tilde{y}, \tilde{x})] \end{cases},$$

où pour tout $(a, b) \in \mathcal{D}^0$, l'élément $[(a, b)]$ représente l'orbite de (a, b) sous l'action de $\langle T \rangle$. Cette application est surjective et pour tout $(a, b) \in \mathcal{D}^0$, il vient $P^{-1}(\{[(a, b)]\}) = \Gamma.(a, b)$. Ainsi P se factorise en $\tilde{P} : \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0 / \Gamma \longrightarrow \mathcal{D}^0 / \langle T \rangle$ qui est bijective. \square

Plus précisément, l'action de Γ sur les triplets $(y, x, r) \in \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0 \times \mathbb{R}$ est conjuguée à celle de la transformation T_l sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$ définie par : pour tout $(y, x) = \pi((\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}})$

$$T_l.(y, x, r) = (T.(y, x), r - l(x)) \text{ où } l(x) = -\mathcal{B}_x(\alpha_1, \mathbf{o}, \mathbf{o}). \quad (4.2)$$

Le choix de la *fonction plafond* l provient de la façon dont Γ agit sur les triplets. D'après les propriétés du cocycle de Busemann, la fonction l vérifie $l(x) = \mathcal{B}_{\alpha_1^{-1}.x}(\alpha_1^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})$. Le codage du flot géodésique sur T^1X/Γ se fera à l'aide d'un flot spécial défini au-dessus du décalage T sur \mathcal{D}^0 . Lorsque $l > 0$, il est facile d'expliciter un domaine fondamental \mathcal{D}_l^0

pour l'action de T_Γ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$ en posant :

$$\mathcal{D}_\Gamma^0 = \left\{ (y, x, r) \in \mathcal{D}^0 \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r < \mathfrak{l}(x) \right\}.$$

En général, la fonction \mathfrak{l} n'est pas strictement positive ; nous avons cependant le

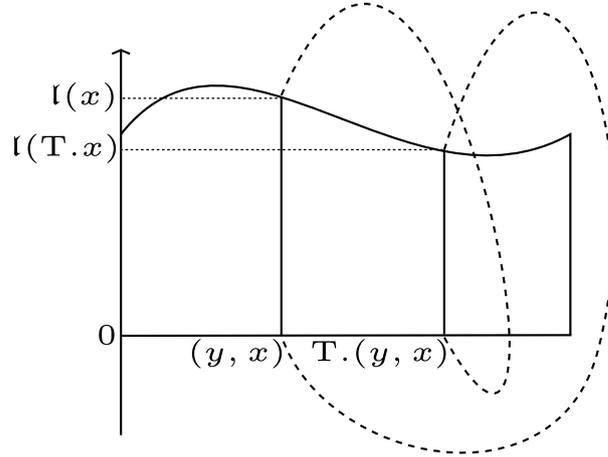


FIGURE 4.3 – Action de T_Γ quand $\mathfrak{l} > 0$

Lemme 4.1.14. *La fonction \mathfrak{l} satisfait les propriétés suivantes :*

- \mathfrak{l} est minorée uniformément par $-C$, où $C > 0$ ne dépend que de X et de Γ ;
- il existe $k_0 \geq 1$ tel que $S_k \mathfrak{l}(x) := \mathfrak{l}(x) + \mathfrak{l}(T \cdot x) + \dots + \mathfrak{l}(T^{k-1} \cdot x) > 0$ pour tous $k \geq k_0$ et $x \in \Lambda^0$.

Démonstration. Soient $x \in \Lambda^0$ et $\alpha \in \Sigma_A^+$ tels que $x = \pi(\alpha)$. Puisque $\mathfrak{l}(x) = \mathcal{B}_{\alpha_1^{-1} \cdot x}(\alpha_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$, le corollaire 4.1.6 implique $\mathfrak{l}(x) \geq d(\mathbf{o}, \alpha_1^{-1} \cdot \mathbf{o}) - C$, ce qui prouve la première assertion. Pour la deuxième, il suffit de constater que

$$\begin{aligned} S_k \mathfrak{l}(x) &= \mathcal{B}_{\alpha_1^{-1} \cdot x}(\alpha_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) + \mathcal{B}_{\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \cdot x}(\alpha_2^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) + \dots + \mathcal{B}_{\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \cdot x}(\alpha_k^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) \\ &= \mathcal{B}_{\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \cdot x}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}), \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est plus grande que $d(\mathbf{o}, \alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \cdot \mathbf{o}) - C$, et donc strictement positive pour k assez grand, uniformément par rapport à $x \in \Lambda^0$. \square

Grâce à un argument classique en théorie ergodique, on peut alors expliciter un domaine fondamental pour l'action de T_Γ . En effet

Proposition 4.1.15. *La fonction \mathfrak{l} est cohomologue à une fonction strictement positive \mathfrak{L} , i.e. il existe une fonction mesurable $f : \Lambda^0 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathfrak{l} = \mathfrak{L} + f - f \circ T$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.1.14, il existe $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $x \in \Lambda^0$, on ait $S_k \mathfrak{l}(x) > 0$. Notons alors $\varepsilon = \frac{1}{k_0}$ et $a_i = 1 - i\varepsilon$ pour tout $i \in \llbracket 0, k_0 \rrbracket$. On remarque que $a_0 = 1$, $a_{k_0} = 0$ et $a_i - a_{i-1} = -\varepsilon$ pour tout $i \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket$. Fixons $x \in \Lambda^0$ et posons

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k_0-1} a_i \mathfrak{l}(T^i . x).$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(T.x) &= \sum_{i=0}^{k_0-1} a_i \mathfrak{l}(T^i . x) - \sum_{i=0}^{k_0-1} a_i \mathfrak{l}(T^{i+1} . x) \\ &= a_0 \mathfrak{l}(x) - a_{k_0} \mathfrak{l}(T^{k_0} . x) + \sum_{i=1}^{k_0} a_i \mathfrak{l}(T^i . x) - \sum_{i=1}^{k_0} a_{i-1} \mathfrak{l}(T^i . x). \end{aligned}$$

Des propriétés des $(a_i)_{0 \leq i \leq k_0}$, on déduit que

$$f(x) - f(T.x) = \mathfrak{l}(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^{k_0} \mathfrak{l}(T^i . x).$$

Posons alors $\mathfrak{L}(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{k_0} \mathfrak{l}(T^i . x) = \frac{1}{k_0} S_{k_0} \mathfrak{l}(T.x)$. Cette fonction est strictement positive d'après le lemme 4.1.14; ceci achève la démonstration de cette proposition. \square

L'ensemble

$$\mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0 = \left\{ (y, x, r) \in \mathcal{D}^0 \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r < f(x) + \mathfrak{L}(x) \right\}$$

est donc un domaine fondamental pour l'action de T_1 sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$. En effet

$$T_1 . (y, x, f(x) + \mathfrak{L}(x)) = (T.y, T.x, f(x) + \mathfrak{L}(x) - \mathfrak{l}(x)) = (T.y, T.x, f(T.x)).$$

Notons $\tilde{\phi}_t$ la transformation qui agit sur les triplets $(y, x, r) \in \mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$ par translation de t sur la troisième coordonnée. Cette translation commute avec l'action de T_1 et définit par passage au quotient un *flot spécial* $(\phi_t)_t$ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R} / \langle T_1 \rangle$. En identifiant $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R} / \langle T_1 \rangle$ avec $\mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0$, il vient pour tout $(y, x, r) \in \mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0$ et $t > 0$

$$\phi_t(y, x, r) = (y, x, r + t) = \left(T^k . (y, x), r + t - S_k \mathfrak{L}(x) \right) = T_1^k . (y, x, r + t), \quad (4.3)$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que $f(x) \leq r + t - S_k \mathfrak{L}(x) < f(x) + \mathfrak{L}(x)$. On obtient

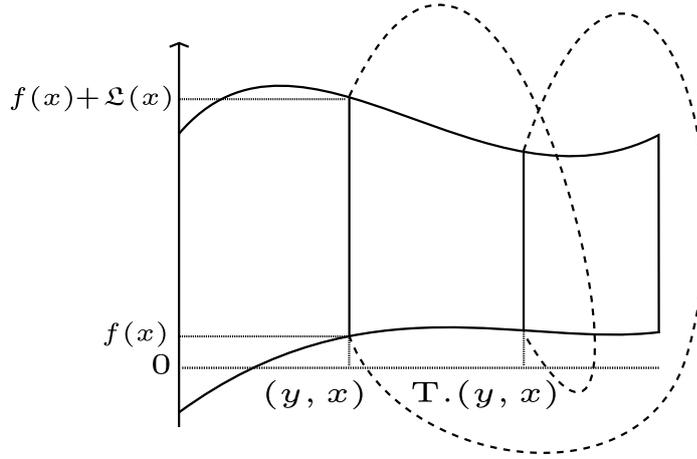


FIGURE 4.4 – Domaine $\mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0$

alors le lemme suivant

Lemme 4.1.16.

- i) Les espaces $\Lambda^0 \times \Lambda^0 \times \mathbb{R}/\Gamma$ et $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$ sont en bijection.
- ii) Le flot géodésique sur Ω^0 est conjugué au flot spécial sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$.

Démonstration. Le i) se démontre comme la proposition 4.1.13. Maintenant, si nous notons \mathfrak{c} la bijection entre $\Lambda^0 \times \Lambda^0 \times \mathbb{R}/\Gamma$ et $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$, il vient $\mathfrak{c} \circ g_t = \phi_t \circ \mathfrak{c}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: cette propriété découle de l'action de \tilde{g}_t sur $\Lambda^0 \times \Lambda^0 \times \mathbb{R}$ et de celle de $\tilde{\phi}_t$ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$. \square

D'après le lemme précédent, il y a une correspondance bijective entre les orbites primitives périodiques du flot géodésique sur T^1X/Γ et les orbites périodiques primitives du flot spécial $(\phi_t)_t$ sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$. Nous allons utiliser cette correspondance pour caractériser les orbites périodiques de $(g_t)_t$. Soient $L > 0$ et $(y, x, f(x)) \in \mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0$ un triplet ϕ_L périodique : on a $\phi_L(y, x, f(x)) = (y, x, f(x))$, ce qui s'écrit encore

$$(y, x, f(x) + L) \sim (y, x, f(x)).$$

On a alors nécessairement $L \geq \mathfrak{L}(x)$ et il existe un unique entier $k \geq 1$ tel que

$$f(x) \leq f(x) + L - S_k \mathfrak{L}(x) < f(x) + \mathfrak{L}(x).$$

L'unique représentant de $(y, x, f(x) + L)$ dans $\mathcal{D}_{f, \mathfrak{L}}^0$ est alors

$$\left(\mathbb{T}^k . y, \mathbb{T}^k . x, f(x) + L - S_k \mathfrak{L}(x) \right),$$

d'où

$$\mathbb{T}^k . (y, x) = (y, x) \text{ et } L = S_k \mathfrak{L}(x).$$

Ces égalités déterminent k couples \mathbb{T}^k -périodiques

$$(y, x), (\mathbb{T} . y, \mathbb{T} . x), \dots, \left(\mathbb{T}^{k-1} . y, \mathbb{T}^{k-1} . x \right)$$

appartenant à \mathcal{D}^0 et la longueur L de l'orbite est donnée par $S_k \mathfrak{L}(x)$. D'après la relation de cohomologie qui relie les fonctions \mathfrak{L} et l , il vient

$$\begin{aligned} S_k \mathfrak{L}(x) &= \mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(\mathbb{T} . x) + \dots + \mathfrak{L}(\mathbb{T}^{k-1} . x) \\ &= l(x) + l(\mathbb{T} . x) + \dots + l(\mathbb{T}^{k-1} . x) + f(\mathbb{T}^k . x) - f(x) \\ &= S_k l(x). \end{aligned}$$

Donc $S_k \mathfrak{L}(x) = S_k l(x)$ pour un point \mathbb{T}^k -périodique $x \in \Lambda^0$. Par ailleurs, les géodésiques fermées du quotient X/Γ sont en bijection avec les orbites périodiques du flot géodésique $(g_t)_t$ sur $\mathbb{T}^1 X/\Gamma$. Soit \mathfrak{g} une géodésique fermée de X/Γ . Si la géodésique \mathfrak{g} n'est pas la projection de l'axe d'une isométrie hyperbolique d'un des facteurs de Schottky Γ_j , $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, un relevé de la géodésique \mathfrak{g} dans $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle \mathbb{T}_1 \rangle$ correspond à une orbite périodique pour le flot spécial. Il existe donc $(y, x) \in \mathcal{D}^0$ et $k \geq 2$ tels que

$$\mathbb{T}^k . (y, x) = (y, x) \text{ et } l(\mathfrak{g}) = S_k l(x),$$

où $l(\mathfrak{g})$ représente la longueur de la géodésique \mathfrak{g} . Le couple (y, x) correspond alors à une suite bi-infinie k -périodique $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\Sigma_{\mathcal{A}}$; le point x est le point fixe attractif de l'isométrie hyperbolique $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ et la géodésique \mathfrak{g} est la projection de l'axe de cette isométrie.

Remarquons que les points $(y, x), \mathbb{T} . (y, x), \dots, \mathbb{T}^{k-1} . (y, x)$ correspondent à la même orbite périodique du flot spécial, et donc à la même géodésique fermée. Ainsi les géodésiques fermées qui ne sont pas associées aux générateurs hyperboliques sont en bijection avec les orbites de couples \mathbb{T}^k -périodiques de \mathcal{D}^0 , pour un certain $k \geq 2$.

4.1.4 Le système dynamique (Λ^0, T, ν)

Dans cette dernière section, nous introduisons un système dynamique particulier qui nous permettra par la suite d'étudier l'action de T sur Λ^0 d'un point de vue analytique par le biais d'un opérateur de transfert. Patterson et Sullivan ont construit une famille de mesures finies $(\sigma_x)_{x \in X}$ sur ∂X , portées par l'ensemble limite Λ_Γ et dont la construction a été rappelée au chapitre 2. Le groupe Γ étant divergent, les mesures σ_x n'ont pas d'atome. En particulier $\sigma_o(\Lambda_\Gamma \setminus \Lambda^0) = 0$. Nous avons rappelé au chapitre 2 la construction de la mesure de Bowen-Margulis m_Γ , obtenue par passage au quotient à partir de la mesure

$$\tilde{m}_\Gamma = \frac{d\sigma_o(y)d\sigma_o(x)dt}{d_o(y, x)^{\frac{2\delta_\Gamma}{a}}} = d\mu \otimes dt$$

définie sur $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$. Du fait que σ_o ne charge pas $\Lambda_\Gamma \setminus \Lambda^0$, on déduit que m_Γ ne charge pas $\Omega_\Gamma \setminus \Omega^0$.

En restreignant la mesure μ à \mathcal{D}^0 et en la normalisant, on obtient une mesure de probabilité $\bar{\nu}$ invariante par T . La mesure $\bar{\nu} \otimes dt$ est donc T_Γ -invariante sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$ et induit une mesure n_{T_Γ} sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_\Gamma \rangle$, invariante pour le flot spécial $(\phi_t)_t$: le système dynamique obtenu de cette manière est conjugué à $(\Omega, (g_t)_t, m_\Gamma)$. De plus, on peut construire un système dynamique (Λ^0, T, ν) , facteur de $(\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}, T_\Gamma, \bar{\nu} \otimes dt)$, en restreignant l'étude à la dynamique dans le futur. La mesure de probabilité ν peut être obtenue par projection de $\bar{\nu}$ sur la seconde coordonnée. Cette mesure admet une densité h par rapport à la mesure de Patterson σ_o , décrite dans la

Proposition 4.1.17. *Pour tout $j \in \{1, \dots, p+q\}$ et tout $x \in \Lambda_j$*

$$h(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\bigcup_{i \neq j} \Lambda_i^0} \frac{d\sigma_o(y)}{d_o(x, y)^{\frac{2\delta_\Gamma}{a}}}. \quad (4.4)$$

D'autre part, la mesure $\nu = h\sigma_o$ est T -invariante.

Démonstration. Soit $\varphi : \Lambda^0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Notons p la projection

$$p : \begin{cases} \mathcal{D}^0 & \longrightarrow \Lambda^0 \\ (x, y) & \longmapsto y \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \nu(\varphi) &= \int_{\Lambda^0} \varphi(x) \nu(dx) = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \sum_{j=1}^{p+q} \int_{\Lambda_j^0} \int_{\Lambda^0 \setminus \Lambda_j^0} \varphi(x) d\mu(x, y) \\
 &= \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \sum_{j=1}^{p+q} \int_{\Lambda_j^0} \int_{\Lambda^0 \setminus \Lambda_j^0} \varphi(x) \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(x) d\sigma_{\mathbf{o}}(y) dt}{d_{\mathbf{o}}(x, y)^{\frac{2\delta_{\Gamma}}{a}}} \\
 &= \sum_{j=1}^{p+q} \int_{\Lambda_j^0} \varphi(x) h(x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x),
 \end{aligned}$$

et l'expression (4.4) de h s'en déduit immédiatement.

Puisque la mesure μ est Γ -invariante, la mesure $\bar{\nu}$ est T -invariante sur \mathcal{D}^0 : en effet, les ensembles $(\alpha\Lambda_i \times \beta\Lambda_j)_{i \neq j, \alpha, \beta \in \Gamma}$ forment une partition de \mathcal{D}^0 ; l'action de T sur \mathcal{D}^0 est alors donnée par l'action d'un élément $\gamma \in \Gamma$ sur chaque atome de la partition. On en déduit finalement la T -invariance de $\nu = p(\bar{\nu})$ sur Λ^0 . \square

Remarque 4.1.18. *On peut prolonger la fonction h à Λ_{Γ} en posant : pour tous $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in \overline{\Lambda_j^0}$*

$$h(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\bigcup_{l \neq j} \Lambda_l} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)^{\frac{2\delta_{\Gamma}}{a}}}.$$

4.2 Étude des opérateurs de transfert

Dans cette section, nous allons étudier une famille d'opérateurs de transfert associés à la transformation T . L'importance de ces opérateurs a été mise en évidence dans bon nombre d'ouvrages. Nous citerons en particulier [Bow75], [PP90] et [Zin96]. Ces opérateurs mettent à profit la non-injectivité du décalage sur Σ^+ pour décrire la dynamique de T sur Λ^0 . Chaque point $x \in \Lambda^0$ a une infinité d'antécédents par T et l'opérateur de transfert \mathcal{L} prend en compte cette multiplicité en affectant un poids à chacun d'entre eux. L'opérateur \mathcal{L} peut alors être vu comme un noyau de transition gouverné par les branches inverses de T sur Λ^0 . L'étude des propriétés de T^n pour n grand est alors fortement reliée au comportement d'une chaîne de Markov de noyau \mathcal{L} sur Λ^0 ([DP96b] et [HH01]).

4.2.1 Définition et premières propriétés

Pour étudier le codage présenté dans la section précédente, on introduit une famille $(\mathcal{L}_z)_{z \in \mathbb{C}}$, où pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'opérateur de transfert \mathcal{L}_z est défini formellement de la

4.2. Étude des opérateurs de transfert

manière suivante : pour $\varphi : \Lambda_\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x \in \Lambda^0$

$$\mathcal{L}_z \varphi(x) = \sum_{Ty=x} e^{-z\mathfrak{l}(y)} \varphi(y).$$

Ces opérateurs sont associés à la fonction plafond \mathfrak{l} définie en (4.2) et nous permettront de décrire le système dynamique (Λ^0, T, ν) d'un point de vue analytique. Dans un premier temps, nous allons revenir sur la définition précédente, ce qui nous amènera à étudier l'action des $(\mathcal{L}_z)_z$ sur l'espace $\mathcal{C}(\Lambda_\Gamma)$ des fonctions continues sur Λ_Γ à valeurs complexes, muni de la norme de la convergence uniforme $|\cdot|_\infty$. Mais pour obtenir une valeur propre dominante isolée dans le spectre de \mathcal{L}_δ -on parlera dans la suite de *trou spectral*- nous considérerons finalement son action sur le sous-espace de $\mathcal{C}(\Lambda)$ formé des fonctions lipschitziennes sur Λ_Γ . Enfin nous expliquerons la façon dont cette propriété spectrale se propage par la perturbation $z \longmapsto \mathcal{L}_z$ de \mathcal{L}_δ . Pour éviter d'alourdir les notations, nous noterons dans la suite Λ l'ensemble limite Λ_Γ , $\Lambda_j = \overline{\Lambda_j^0} = D_j \cap \Lambda_\Gamma$ pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $\delta = \delta_\Gamma$; de même, la quantité $b(\gamma, x)$ désignera $\mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$ pour tous $x \in \partial X$ et $\gamma \in \Gamma$.

Fixons momentanément $z \in \mathbb{C}$ et $l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Si $x \in \Lambda_l^0$, ses antécédents par T sont les points $y = \alpha \cdot x$ pour $\alpha \in \cup_{j \neq l} \Gamma_j^*$ et donc $\mathfrak{l}(y) = b(\alpha, x)$. Nous pouvons donc réécrire l'opérateur de la manière suivante

$$\mathcal{L}_z \varphi(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j^* \\ j \neq l}} e^{-zb(\alpha, x)} \varphi(\alpha \cdot x) = \sum_{j=1}^{p+q} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-zb(\alpha, x)} \varphi(\alpha \cdot x). \quad (4.5)$$

En combinant les hypothèses (P_2) et (N) avec le corollaire 4.1.6, on peut vérifier que $\mathcal{L}_z \varphi$ est bien définie et continue sur Λ^0 dès que $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$. Or la série de fonctions apparaissant dans (4.5) converge normalement sur Λ dès que $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$, donc la fonction $\mathcal{L}_z \varphi$ peut être prolongée par continuité sur Λ en posant : pour tout $l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in \Lambda_l$

$$\mathcal{L}_z \varphi(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j^* \\ j \neq l}} e^{-zb(\alpha, x)} \varphi(\alpha \cdot x) = \sum_{j=1}^{p+q} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-zb(\alpha, x)} \varphi(\alpha \cdot x).$$

Remarquons que \mathcal{L}_δ est un opérateur positif sur $\mathcal{C}(\Lambda)$; de plus, on a

Lemme 4.2.1. *La fonction h introduite dans (4.4) satisfait $\mathcal{L}_\delta h = h$.*

Démonstration. Fixons $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in \Lambda_j$. D'après (4.5), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta h(x) &= \sum_{l \neq j} \sum_{\alpha \in \Gamma_l^*} e^{-\delta \mathcal{B}_x(\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} h(\alpha \cdot x) \\ &= \sum_{l \neq j} \sum_{\alpha \in \Gamma_l^*} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_l} e^{-\delta \mathcal{B}_x(\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(y)}{d_{\mathbf{o}}(\alpha \cdot x, y)^{\frac{2\delta}{a}}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la conformité de l'action de $\gamma \in \Gamma$ sur ∂X donnée dans (2.6), il vient

$$d_{\mathbf{o}}(\alpha \cdot x, y)^{\frac{2\delta}{a}} = e^{-\delta \mathcal{B}_x(\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\delta \mathcal{B}_{\alpha^{-1} \cdot y}(\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} d_{\mathbf{o}}(x, \alpha^{-1} \cdot y)^{\frac{2\delta}{a}}.$$

En posant $z = \alpha^{-1} \cdot y$, les propriétés de la famille de mesures $(\sigma_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in X}$ donnent

$$d\sigma_{\mathbf{o}}(y) = d\sigma_{\mathbf{o}}(\alpha \cdot z) = (\alpha^* \cdot d\sigma_{\mathbf{o}})(z) = d\sigma_{\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}}(z) = e^{-\delta \mathcal{B}_z(\alpha^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})} d\sigma_{\mathbf{o}}(z).$$

Il vient

$$\mathcal{L}_\delta h(x) = \sum_{l \neq j} \int_{\Lambda_l} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(z)}{d_{\mathbf{o}}(x, z)^{\frac{2\delta}{a}}} = h(x).$$

□

Soulignons que la fonction h est strictement positive sur Λ . Le lemme 4.2.1 nous permet alors d'introduire l'opérateur normalisé $P := \frac{1}{h} \mathcal{L}_\delta(h)$. C'est un opérateur de Markov (*i.e.* $P\mathbb{1}_\Lambda = \mathbb{1}_\Lambda$) positif.

La propriété suivante établit clairement le lien entre l'action de T sur Λ^0 et l'action de l'opérateur \mathcal{L}_δ .

Lemme 4.2.2. *Pour tous φ, ψ dans $\mathcal{C}(\Lambda)$*

$$\int_{\Lambda} \varphi(x) \psi(T \cdot x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x) = \int_{\Lambda} \mathcal{L}_\delta \varphi(x) \psi(x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x).$$

En particulier, la mesure $\sigma_{\mathbf{o}}$ est \mathcal{L}_δ -invariante.

Démonstration. D'après la propriété de δ -conformité (2.7) de la famille de mesures $(\sigma_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in X}$, il vient

$$\int_{\Lambda} \varphi(x) \psi(T \cdot x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x) = \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\alpha \cdot (\Lambda \setminus \Lambda_j)} \varphi(x) \psi(\alpha^{-1} \cdot x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x)$$

4.2. Étude des opérateurs de transfert

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(y) \varphi(\alpha.y) \psi(y) e^{-\delta \mathcal{B}_y(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})} d\sigma_{\mathbf{o}}(y) \\
&= \int_{\Lambda} \mathcal{L}_{\delta} \varphi(y) \psi(y) d\sigma_{\mathbf{o}}(y).
\end{aligned}$$

L'égalité $\sigma_{\mathbf{o}} \mathcal{L}_{\delta} = \sigma_{\mathbf{o}}$ en découle en prenant $\psi = \mathbf{1}_{\Lambda}$. \square

De la démonstration précédente, on déduit également que l'opérateur de Markov P satisfait : pour tous φ, ψ dans $\mathcal{C}(\Lambda)$

$$\int_{\Lambda} \varphi(x) \psi(T.x) \nu(dx) = \int_{\Lambda} P\varphi(x) \psi(x) \nu(dx), \quad (4.6)$$

où $\nu = h\sigma_{\mathbf{o}}$. Une propriété de ce type nous sera utile dans la démonstration du théorème A, mais pour l'opérateur \tilde{P} défini dans la proposition suivante.

Lemme 4.2.3. *Soit \tilde{P} l'opérateur défini pour toutes fonctions $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, pour tous $x \in \Lambda$ et $t \in \mathbb{R}$ par*

$$\tilde{P}(u \otimes \varphi)(x, t) = \sum_{j=1}^{p+q} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} \frac{h(\alpha.x) u(\alpha.x)}{h(x)} \varphi(t + b(\alpha, x)).$$

Cet opérateur \tilde{P} est l'adjoint de l'application $(x, s) \mapsto (T.x, s - \mathfrak{l}(x))$ pour la mesure $\nu \otimes ds$.

Démonstration. D'après la propriété de δ -conformité des mesures $(\sigma_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in X}$ et la définition de ν , il vient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi(x, s) v \otimes \psi(T.x, s - \mathfrak{l}(x)) d\nu(x) ds \\
&= \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\alpha.(\Lambda \setminus \Lambda_j) \times \mathbb{R}} v(\alpha^{-1}.x) \psi(s - \mathfrak{l}(x)) u \otimes \varphi(x, s) d\nu(x) ds \\
&= \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j \times \mathbb{R}} v(y) \psi(t) u(\alpha.y) h(\alpha.y) \varphi(t + \mathfrak{l}(\alpha.y)) d\sigma_{\mathbf{o}}(\alpha.y) dt \\
&= \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(y) e^{-\delta b(\alpha, y)} h(\alpha.y) u(\alpha.y) \varphi(t + \mathfrak{l}(\alpha.y)) v(y) \psi(t) d\sigma_{\mathbf{o}}(y) dt
\end{aligned}$$

et l'on conclut en notant que $\mathfrak{l}(\alpha.y) = b(\alpha, y)$. \square

Pour motiver la restriction qui va suivre, évoquons un autre exemple d'opérateur de transfert. Considérons l'application

$$\mathfrak{T} : \begin{cases} [0, 1[& \longrightarrow [0, 1[\\ x & \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} .$$

L'action de l'opérateur de transfert \mathcal{L} associé est donnée par : $\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$ pour tous $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $x \in [0, 1[$. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ de module < 1 et introduisons la fonction $\phi_\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n \cos(2^n \pi x)$ pour $x \in [0, 1[$: on remarque que cette fonction appartient à $\mathcal{C}([0, 1])$. Il vient également $\mathcal{L}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$: donc tout nombre complexe de module < 1 est valeur propre de \mathcal{L} ; cet opérateur n'admet finalement pas de trou spectral sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

Cette remarque nous conduira à introduire un sous-espace de fonctions lipschitziennes, sur lequel \mathcal{L}_δ satisfera une propriété de trou spectral. Avant cela, nous allons étudier la régularité des fonctions poids définies formellement de la manière suivante : pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \Gamma$

$$w_z(\gamma, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Lambda_{l(\gamma)}, \\ e^{-zb(\gamma, x)} & \text{si } x \in \Lambda_j, j \neq l(\gamma). \end{cases}$$

Ces fonctions satisfont la propriété de cocycle suivante : pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $l(\gamma_1) \neq i(\gamma_2)$

$$w_z(\gamma_1 \gamma_2, x) = w_z(\gamma_1, \gamma_2 \cdot x) w_z(\gamma_2, x). \quad (4.7)$$

Pour tous $k \geq 1$ et $\varphi \in (\mathcal{C}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$, le k -ième itéré est donc donné par : pour tout $x \in \Lambda$

$$\mathcal{L}_z^k \varphi(x) = \sum_{T^k \cdot y = x} e^{-zS_k l(y)} \varphi(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} w_z(\gamma, x) \varphi(\gamma \cdot x) = \sum_{j=1}^{p+q} \mathbf{1}_{\Lambda_j}(x) \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-zb(\gamma, x)} \varphi(\gamma \cdot x).$$

Nous avons la

Proposition 4.2.4. *Soit $E \subset \partial X$ et $F \subset X$ deux ensembles non-vides d'adhérences disjointes dans \bar{X} . Alors la famille $(x \mapsto \mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{o}))_{\mathbf{f} \in F}$ est équi-Lipschitz continue sur $(E, d_{\mathbf{o}})$.*

Démonstration. La preuve suivante est tirée de [BP06], fait 4. On veut démontrer

$$\exists C = C(X, E, F) > 0, \forall \mathbf{f} \in F, \forall x, y \in E, |\mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{o}) - \mathcal{B}_y(\mathbf{f}, \mathbf{o})| \leq C d_{\mathbf{o}}(x, y). \quad (4.8)$$

4.2. Étude des opérateurs de transfert

Soient $(x, t) \in \partial X$ et $\mathbf{f} \in F$. En utilisant la définition de la métrique de Gromov donnée dans (2.4), on peut écrire

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{f}}(x, t) &= \exp\left(-\frac{a}{2}(\mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{z}) + \mathcal{B}_t(\mathbf{f}, \mathbf{z}))\right) \text{ avec } \mathbf{z} \in (xy) \\ &= \exp\left(-\frac{a}{2}(\mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{o}) + \mathcal{B}_x(\mathbf{o}, \mathbf{z}) + \mathcal{B}_t(\mathbf{f}, \mathbf{o}) + \mathcal{B}_t(\mathbf{o}, \mathbf{z}))\right) \\ &= \exp\left(-\frac{a}{2}(\mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{o}) + \mathcal{B}_t(\mathbf{f}, \mathbf{o}))\right) d_{\mathbf{o}}(x, t) \end{aligned}$$

Ceci implique donc que pour tous $(x, t) \in \partial X$ et $\mathbf{f} \in F$

$$\mathcal{B}_x(\mathbf{f}, \mathbf{o}) = \frac{2}{a} \ln(d_{\mathbf{o}}(x, t)) - \frac{2}{a} \ln(d_{\mathbf{f}}(x, t)) - \mathcal{B}_t(\mathbf{f}, \mathbf{o}) \quad (4.9)$$

Admettons maintenant les deux propriétés suivantes, nous les prouverons par la suite :

i) il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\mathbf{f} \in F$, il existe $\xi_{\mathbf{f}} \in \partial X$ satisfaisant

$$d_{\mathbf{o}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \geq \varepsilon \text{ et } d_{\mathbf{f}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \geq \varepsilon.$$

ii) l'ensemble $\{d(\mathbf{f}, (xy)) - d(\mathbf{o}, (xy))\}$ est minoré uniformément en $\mathbf{f} \in F$ et $x, y \in E$, $x \neq y$.

Fixons $\mathbf{f} \in F$. D'après la propriété i), il existe $\xi_{\mathbf{f}} \in \partial X$ tel que

$$d_{\mathbf{o}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \geq \varepsilon \text{ et } d_{\mathbf{f}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \geq \varepsilon.$$

D'après l'égalité (4.9) en $t = \xi_{\mathbf{f}}$, il suffit de montrer que les fonctions $x \mapsto \mathcal{B}_{\xi_{\mathbf{f}}}(\mathbf{f}, \mathbf{o})$, $x \mapsto \ln(d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}}))$ et $x \mapsto \ln(d_{\mathbf{f}}(x, \xi_{\mathbf{f}}))$ sont uniformément Lipschitz en $\mathbf{f} \in F$ pour $d_{\mathbf{o}}$. La propriété est clairement vérifiée pour $x \mapsto \mathcal{B}_{\xi_{\mathbf{f}}}(\mathbf{f}, \mathbf{o})$ qui est constante. Pour $x \mapsto \ln(d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}}))$, nous raisonnons en deux temps. D'abord, pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$, l'inégalité triangulaire impose

$$|d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}}) - d_{\mathbf{o}}(y, \xi_{\mathbf{f}})| \leq d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

De plus, la propriété i) ci-dessus implique que $x \mapsto d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}})$ est minorée par ε , et donc

$$|\ln(d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}})) - \ln(d_{\mathbf{o}}(y, \xi_{\mathbf{f}}))| \leq \frac{1}{\varepsilon} d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

Ceci implique que la famille de fonctions $(x \mapsto \ln(d_{\mathbf{o}}(x, \xi_{\mathbf{f}})))_{\mathbf{f} \in F}$ est équi-Lipschitz

continue sur E relativement à $d_{\mathbf{o}}$. De la même manière, on peut prouver que la famille de fonctions $(x \mapsto \ln(d_{\mathbf{f}}(x, \xi_{\mathbf{f}})))_{\mathbf{f} \in F}$ est équi-Lipschitz continue sur E relativement à $d_{\mathbf{f}}$. La propriété (4.2.4) sera prouvée si l'on montre qu'il existe $C' > 0$ ne dépendant pas de $\mathbf{f} \in F$ telle que pour tous $x, y \in E$, on ait

$$d_{\mathbf{f}}(x, y) \leq C' d_{\mathbf{o}}(x, y). \quad (4.10)$$

Fixons donc $x, y \in E$, $x \neq y$. D'après la propriété de visibilité (2.5) des distances de Gromov, on a

$$\begin{aligned} \frac{d_{\mathbf{f}}(x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} &\leq C^2 \frac{\exp(-d(\mathbf{f}, (xy)))}{\exp(-d(\mathbf{o}, (xy)))} \\ &\leq C^2 \exp[-(d(\mathbf{f}, (xy)) - d(\mathbf{o}, (xy)))]. \end{aligned}$$

Or, cette dernière quantité est majorée uniformément en $\mathbf{f} \in F$, $x, y \in E$, $x \neq y$ d'après ii). Ceci montre donc (4.10). Il nous reste à établir les propriétés i) et ii) énoncées ci-dessus.

Démonstration de l'assertion i) : on distingue deux cas.

- 1) Supposons dans un premier temps que F est borné dans X . Fixons un point $y_0 \in \partial X \setminus \overline{E}$; on a $d_{\mathbf{o}}(y_0, E) > 0$. Puisque ce point n'est pas dans \overline{E} , il existe un compact $K \subset X$ tel que toute géodésique $(y_0 e)$, $e \in E$, rencontre K . Alors, pour tous $\mathbf{f}_0 \in F$ et $e \in E$, on a

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}_0, (y_0 e)) &\leq d(\mathbf{f}_0, (y_0 e) \cap K) \\ &\leq \sup_{\mathbf{f} \in F} \sup_{\mathbf{k} \in K} d(\mathbf{f}, \mathbf{k}) := M, \end{aligned}$$

cette dernière quantité étant finie par compacité de \overline{F} dans X . D'après la propriété de visibilité pour la distance $d_{\mathbf{f}_0}$, il vient

$$\frac{1}{C} \exp(-M) \leq d_{\mathbf{f}_0}(y_0, e).$$

Ceci étant vrai pour tout $e \in E$, on a $d_{\mathbf{f}_0}(y_0, E) \geq C' > 0$. On pose alors $\xi_{\mathbf{f}_0} = y_0$ pour tout $\mathbf{f}_0 \in F$ et i) suit dans ce cas.

- 2) Supposons que F n'est pas borné dans X et posons $\varepsilon_0 = \frac{d_{\mathbf{o}}(E, F \cap \partial X)}{2}$. Soit K_0 un compact de X tel que si $x, y \in \partial X$, $x \neq y$, vérifient $d_{\mathbf{o}}(x, y) \geq \varepsilon_0$, alors la géodésique (xy) intersecte K_0 . Soient $e_0 \in E$ et $y_0 \in \partial X$ tel que $d_{\mathbf{o}}(y_0, E) \geq \varepsilon_0$. Si $\mathbf{f} \in F \cap K_0$, alors $d_{\mathbf{o}}(y_0, e) \geq d_{\mathbf{o}}(y_0, E) \geq \varepsilon_0$ pour tout $e \in E$; il existe donc $\mathbf{q}_e \in K_0 \cap (y_0 e)$ et

l'on a $d(\mathbf{f}, (y_0e)) \leq d(\mathbf{f}, \mathbf{q}_e) \leq \text{diam}(K_0)$. La propriété de visibilité implique que $d_{\mathbf{f}}(y_0, E)$ est minorée par $\frac{1}{C} \exp(-\text{diam}(K_0))$, et l'on peut prendre $\xi_f = y_0$ dans ce cas. Considérons à présent le cas où $\mathbf{f} \notin K_0$. Notons $\xi_{\mathbf{f}}$ l'extrémité de l'unique géodésique partant de e_0 et passant par \mathbf{f} . On peut en fait élargir K_0 de telle manière que $d_{\mathbf{o}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \geq \varepsilon_0$ dès que $\mathbf{f} \notin K_0$: si l'on ne pouvait pas, il serait possible de construire un point $\xi_{\mathbf{f}} \in (F \cap \partial X)$ tel que $d_{\mathbf{o}}(\xi_{\mathbf{f}}, E) \leq \varepsilon_0$, ce qui contredirait la définition de ε_0 . Pour tout $e \in E$, on a $d_{\mathbf{o}}(\xi_{\mathbf{f}}, e) \geq \varepsilon_0$, donc il existe $\mathbf{q}_e \in K_0 \cap (\xi_{\mathbf{f}}e)$. Ceci implique $d(\mathbf{f}, (\xi_{\mathbf{f}}e)) \leq d(\mathbf{q}_{e_0}, \mathbf{q}_e) \leq \text{diam}(K_0)$. L'assertion i) s'en déduit dans ce cas.

Démonstration de l'assertion ii) : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des suites $(\mathbf{f}_n)_{n \geq 0}$ de points de F , et $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ de points de E avec $x_n \neq y_n$ pour tout $n \geq 0$ vérifiant

$$d(\mathbf{f}_n, (x_n y_n)) - d(\mathbf{o}, (x_n y_n)) \longrightarrow -\infty. \quad (4.11)$$

Pour $n \geq 0$, notons \mathbf{q}_n le projeté de \mathbf{f}_n sur $(x_n y_n)$. On a

$$d(\mathbf{f}_n, \mathbf{q}_n) - d(\mathbf{o}, \mathbf{q}_n) \leq d(\mathbf{f}_n, (x_n y_n)) - d(\mathbf{o}, (x_n y_n)) \longrightarrow -\infty. \quad (4.12)$$

Quitte à considérer des sous-suites, on peut considérer que les suites $(\mathbf{f}_n)_n$ et $(\mathbf{q}_n)_n$ convergent vers $f \in X$ et $q \in X$ respectivement. Comme $d(\mathbf{f}_n, \mathbf{q}_n) - d(\mathbf{o}, \mathbf{q}_n) \longrightarrow -\infty$, il vient $d(\mathbf{o}, \mathbf{q}_n) \longrightarrow \infty$, et donc $q \in E$. De l'inégalité

$$|d(\mathbf{f}_n, \mathbf{q}_n) - d(\mathbf{q}_n, \mathbf{o})| \leq d(\mathbf{o}, \mathbf{f}_n),$$

on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathbf{o}, \mathbf{f}_n) = +\infty$, d'où $\mathbf{f} \in \overline{F} \cap \partial X$. Pour n assez grand, au vu de la position des points \mathbf{f}_n et \mathbf{q}_n , la quasi-égalité des triangles du lemme 4.1.3 implique qu'il existe une constante $C > 0$ qui dépend de E et F telle que

$$d(\mathbf{f}_n, \mathbf{q}_n) - d(\mathbf{o}, \mathbf{q}_n) \geq d(\mathbf{o}, \mathbf{f}_n) - C$$

ce qui contredit (4.12). □

On introduit à présent un sous-espace $\text{Lip}(\Lambda)$ de $\mathcal{C}(\Lambda)$ de fonctions lipschitziennes sur Λ à valeurs dans \mathbb{C} défini par

$$\text{Lip}(\Lambda) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Lambda) \mid \|\varphi\| = |\varphi|_{\infty} + [\varphi] < +\infty\}$$

où

$$[\varphi] = \sup_{1 \leq j \leq p+q} \sup_{\substack{x, y \in \Lambda_j \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d_{\mathbf{o}}(x, y)}.$$

L'espace $\text{Lip}(\Lambda)$ est un \mathbb{C} -espace de Banach et d'après le théorème d'Ascoli, l'injection de $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ dans $(\text{Lip}(\Lambda), |\cdot|_{\infty})$ est compacte.

Le lemme suivant atteste que la fonction h définie en (4.4) appartient à ce sous-espace de $\mathcal{C}(\Lambda)$.

Lemme 4.2.5. *La fonction h appartient à $\text{Lip}(\Lambda)$.*

Démonstration. D'après la propriété de visibilité (2.5), il existe $C > 0$ telle que pour $x \in \Lambda_j$ et $y \in \Lambda \setminus \Lambda_j$, on ait $\frac{1}{C} \exp(-d(\mathbf{o}, (xy))) \leq d_{\mathbf{o}}(x, y)$; par ailleurs, le lemme 4.1.1 entraîne $d(\mathbf{o}, (xy)) \leq C$. Ainsi il existe $D > 0$ telle que $D \leq d_{\mathbf{o}}(x, y)$, ce qui prouve que h est bornée sur Λ . Maintenant fixons $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x, y \in \Lambda_j$. On écrit

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= \left| \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \left(\frac{1}{d_{\mathbf{o}}(x, z)^{\frac{2\delta}{a}}} - \frac{1}{d_{\mathbf{o}}(y, z)^{\frac{2\delta}{a}}} \right) d\sigma_{\mathbf{o}}(z) \right| \\ &\leq \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \left| d_{\mathbf{o}}(y, z)^{\frac{2\delta}{a}} - d_{\mathbf{o}}(x, z)^{\frac{2\delta}{a}} \right| d\sigma_{\mathbf{o}}(z), \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} |d_{\mathbf{o}}(y, z) - d_{\mathbf{o}}(x, z)| d\sigma_{\mathbf{o}}(z) \\ &\leq d_{\mathbf{o}}(x, y), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. \square

La proposition 4.2.4 va nous permettre de montrer que l'opérateur \mathcal{L}_{δ} agit sur $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$. On montre d'abord la proposition suivante :

Proposition 4.2.6. *Pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \geq \delta$, la fonction $w_z(\gamma, \cdot)$ appartient à $\text{Lip}(\Lambda)$ et il existe une constante $C = C(z) > 0$ telle que*

$$\|w_z(\gamma, \cdot)\| \leq C e^{-\text{Re}(z)d(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})}.$$

Démonstration. Soient $1 \leq j \leq p+q$ et $\gamma \in \Gamma_j$ avec $l(\gamma) = j$. Soit $x \in \Lambda$. Si $x \in \Lambda_j$, alors $w_z(\gamma, x) = 0$; sinon $x \in \Lambda_l$ avec $l \neq j$. Le corollaire 4.1.6 implique qu'il existe $C > 0$ telle

4.2. Étude des opérateurs de transfert

que $|b(\gamma, x) - d(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})| \leq C$. Donc

$$\left| e^{-zb(\gamma, x)} e^{zd(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})} \right| \leq e^{C|\operatorname{Re}(z)|}.$$

On en déduit $\left| e^{-zb(\gamma, x)} \right| \leq e^{C|\operatorname{Re}(z)|} e^{-\operatorname{Re}(z)d(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})}$. Finalement

$$|w_z(\gamma, \cdot)|_\infty \leq e^{C|\operatorname{Re}(z)|} e^{-\operatorname{Re}(z)d(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})}.$$

Maintenant fixons $l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x, y \in \Lambda_l$ tels que $x \neq y$. Si $l = j$, alors $|w_z(\gamma, x) - w_z(\gamma, y)| = 0$. Pour $l \neq j$, on écrit

$$\begin{aligned} |w_z(\gamma, x) - w_z(\gamma, y)| &= \left| e^{-zb(\gamma, x)} \right| \left| 1 - e^{-z(b(\gamma, y) - b(\gamma, x))} \right| \\ &\leq \left| e^{-zb(\gamma, x)} \right| |z| |b(\gamma, y) - b(\gamma, x)| e^{|\operatorname{Re}(z)| |b(\gamma, y) - b(\gamma, x)|}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.2.4, il existe $C' > 0$ telle que $|b(\gamma, y) - b(\gamma, x)| \leq C' d_{\mathbf{o}}(x, y)$, donc

$$|w_z(\gamma, x) - w_z(\gamma, y)| \leq C' |z| e^{C'|\operatorname{Re}(z)| d_{\mathbf{o}}(x, y)} d_{\mathbf{o}}(x, y) \left| e^{-zb(\gamma, x)} \right|.$$

Il vient

$$\frac{|w_z(\gamma, x) - w_z(\gamma, y)|}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \leq C'' |z| |w_z(\gamma, \cdot)|_\infty,$$

avec $C'' = C' \mathfrak{d} |z| e^{C'|\operatorname{Re}(z)| \mathfrak{d}}$ où \mathfrak{d} désigne le $d_{\mathbf{o}}$ -diamètre de ∂X . Le lemme en découle. \square

On déduit de cette proposition le corollaire suivant

Corollaire 4.2.7. *L'opérateur \mathcal{L}_z est borné sur $\operatorname{Lip}(\Lambda)$ pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$.*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente et aux hypothèses (P_1) et (N) , il vient pour $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_z\| &\leq \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \|w_z(\alpha, \cdot)\| \\ &\leq C(z) \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\operatorname{Re}(z)d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \\ &\leq C(z) \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. \square

Des lemmes 4.2.1 et 4.2.5 et du corollaire 4.2.7, on déduit que 1 est une valeur propre de \mathcal{L}_δ sur $\text{Lip}(\Lambda)$. Nous souhaitons à présent approfondir notre connaissance du spectre de \mathcal{L}_δ sur cet espace. Puisque l'opérateur \mathcal{L}_δ est positif, son rayon spectral $\rho_\infty(\delta)$ sur $(\mathcal{C}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$ est donné par

$$\rho_\infty(\delta) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{L}_\delta^n \mathbb{1}_\Lambda|_\infty^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction h appartenant à $\text{Lip}(\Lambda)$, elle est continue sur Λ . D'après la définition donnée dans (4.4), elle est aussi strictement positive sur Λ ; on en déduit que

$$|\mathcal{L}_\delta^n \mathbb{1}_\Lambda|_\infty \asymp |\mathcal{L}_\delta^n h|_\infty = |h|_\infty,$$

d'où $\rho_\infty(\delta) = 1$. Notons maintenant $\rho(\delta)$ le rayon spectral de \mathcal{L}_δ sur $\text{Lip}(\Lambda)$. La proposition à venir détaille plus précisément le spectre de \mathcal{L}_δ . Sa démonstration repose sur la notion de quasi-compacité que nous rappelons maintenant.

Définition 4.2.8. Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et Q un opérateur borné sur \mathcal{B} de rayon spectral $\rho(Q)$. On dit que Q est quasi-compact s'il existe une décomposition en sous-espaces fermés et Q -stables $\mathcal{B} = F \oplus H$ où F est de dimension finie et $Q|_F$ n'a que des valeurs propres de module $\rho(Q)$ tandis que $\rho(Q|_H) < \rho(Q)$.

Cette notion est stable par perturbation ([Hen95]) : nous nous en servons dans la prochaine section. Nous avons la

Proposition 4.2.9. Le rayon spectral $\rho(\delta)$ est une valeur propre simple et isolée dans le spectre de \mathcal{L}_δ vérifiant $\rho(\delta) = \rho_\infty(\delta) = 1$. De plus, le reste du spectre de \mathcal{L}_δ est inclus dans un disque de rayon < 1 .

Démonstration. La preuve suit celles présentées dans [BP00], [BP06] et [Pei11]. Nous commençons par montrer que \mathcal{L}_δ est quasi-compact sur $\text{Lip}(\Lambda)$: d'après [Hen93], il suffit de prouver la propriété DF(s) (pour Wolfgang Doeblin et Robert Fortet, voir [DF37]) suivante

Définition 4.2.10 (Propriété DF(s)). L'opérateur \mathcal{L}_δ vérifie la propriété DF(s) sur $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ si

- i) \mathcal{L}_δ est compact de $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ dans $(\text{Lip}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$;

4.2. Étude des opérateurs de transfert

ii) pour tout $n \geq 1$, il existe des réels positifs S_n, s_n satisfaisant

$$\liminf_n (s_n)^{\frac{1}{n}} = s < \rho(\delta)$$

et $\|(\mathcal{L}_\delta)^n \varphi\| \leq S_n |\varphi|_\infty + s_n \|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$.

Le corollaire 4.2.7 implique que \mathcal{L}_δ est borné sur $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$; de plus, l'injection canonique de $(\text{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ dans $(\text{Lip}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$ est compacte, donc l'assertion i) de la définition 4.2.10 est satisfaite. Rappelons que pour tous $n \geq 1$, $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et $x \in \Lambda$, on a

$$\mathcal{L}_\delta^n \varphi(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \varphi(\gamma \cdot x),$$

d'où

$$|\mathcal{L}_\delta^n \varphi(x)| \leq \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \|w_\delta(\gamma, \cdot)\| \right) |\varphi|_\infty. \quad (4.13)$$

Fixons maintenant $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x, y \in \Lambda_j$. On a

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\delta^n \varphi(x) - \mathcal{L}_\delta^n \varphi(y)| &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) \left| e^{-\delta b(\gamma, x)} - e^{-\delta b(\gamma, y)} \right| |\varphi(\gamma \cdot x)| \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y) e^{-\delta b(\gamma, y)} |\varphi(\gamma \cdot x) - \varphi(\gamma \cdot y)|. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $[\cdot]$ et la proposition 4.2.6, le premier terme du membre de droite peut être majoré par

$$\left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \|w_\delta(\gamma, \cdot)\| \right) |\varphi|_\infty d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

Pour traiter le second terme, on majore tout d'abord $|\varphi(\gamma \cdot x) - \varphi(\gamma \cdot y)|$ par $[\varphi] d_{\mathbf{o}}(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y)$.

En utilisant le corollaire 4.1.8, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y) e^{-\delta b(\gamma, y)} |\varphi(\gamma \cdot x) - \varphi(\gamma \cdot y)| \\ \leq Cr^n \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y) e^{-\delta b(\gamma, y)} \right) [\varphi] d_{\mathbf{o}}(x, y) \\ \leq Cr^n |\mathcal{L}_\delta^n \mathbf{1}_\Lambda|_\infty \|\varphi\| d_{\mathbf{o}}(x, y), \end{aligned}$$

pour $r \in]0, 1[$. En conjuguant ces estimations, on obtient finalement

$$[\mathcal{L}_\delta^n \varphi] \leq \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \|w_\delta(\gamma, \cdot)\| \right) |\varphi|_\infty + Cr^n |\mathcal{L}_\delta^n \mathbf{1}_\Lambda|_\infty \|\varphi\|. \quad (4.14)$$

Des inégalités (4.13) et (4.14), il vient

$$\|\mathcal{L}_\delta^n \varphi\| \leq \left[2 \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \|w_\delta(\gamma, \cdot)\| \right) \right] |\varphi|_\infty + (Cr^n |\mathcal{L}_\delta^n \mathbf{1}_\Lambda|_\infty) \|\varphi\|.$$

Posons

$$S_n = 2 \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \|w_\delta(\gamma, \cdot)\| \right) \text{ et } s_n = Cr^n |\mathcal{L}_\delta^n \mathbf{1}_\Lambda|_\infty ;$$

on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n^{\frac{1}{n}} = r\rho_\infty(\delta),$$

avec $\rho_\infty(\delta) = 1 \leq \rho(\delta)$ d'après les lemmes 4.2.1 et 4.2.5. Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n^{\frac{1}{n}} < \rho(\delta),$$

ce qui montre que \mathcal{L}_δ satisfait la propriété DF(s). Cet opérateur est quasi-compact sur $\text{Lip}(\Lambda)$, son rayon spectral $\rho(\delta)$ est une valeur propre de multiplicité finie sur $\text{Lip}(\Lambda)$, qui est isolée dans le spectre de \mathcal{L}_δ .

Montrons que ce rayon spectral vaut 1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ de module $\rho(\delta)$ et une fonction $\phi \in \text{Lip}(\Lambda)$ telle que $\mathcal{L}_\delta \phi = \lambda \phi$. Il vient $\rho(\delta) |\phi| \leq \mathcal{L}_\delta |\phi|$, d'où $\rho(\delta) \leq \rho_\infty(\delta) = 1$ et $\rho(\delta) = \rho_\infty(\delta)$. Finalement 1 est une valeur propre dominante de \mathcal{L}_δ sur $\text{Lip}(\Lambda)$ de multiplicité finie, et isolée dans le spectre. Montrons maintenant qu'elle est de multiplicité 1, c'est à dire que l'espace propre associé à 1 est $\mathbb{C}h$. Nous allons utiliser l'opérateur de Markov P introduit précédemment ; rappelons que $P(\varphi) = \frac{1}{h} \mathcal{L}_\delta(\varphi h)$ pour toute fonction $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et que cet opérateur est positif, borné sur $\text{Lip}(\Lambda)$ et satisfait $P(\mathbf{1}_\Lambda) = \mathbf{1}_\Lambda$. Soit φ une fonction non nulle de $\text{Lip}(\Lambda)$ vérifiant $P(\varphi) = \varphi$; montrons que φ est constante. Soit $y_0 \in \Lambda$ tel que $|\varphi(y_0)| = |\varphi|_\infty \neq 0$: un tel point existe par continuité de $|\varphi|$ sur le compact Λ . En utilisant la forme des itérés de P , il vient pour tout $k \geq 1$

$$|\varphi(y_0)| = |P^k(\varphi)(y_0)| \leq P^k(|\varphi|)(y_0) \leq |\varphi(y_0)|.$$

La suite d'inégalités précédentes est donc une suite d'égalités, et il vient $P^k(|\varphi|)(y_0) =$

$|\varphi(y_0)|$, ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{h(y_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y_0) e^{-\delta b(\gamma, y_0)} |\varphi(\gamma \cdot y_0)| h(\gamma \cdot y_0) = |\varphi(y_0)|.$$

D'où, pour tout $k \geq 1$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y_0) e^{-\delta b(\gamma, y_0)} \frac{|\varphi(\gamma \cdot y_0)| h(\gamma \cdot y_0)}{|\varphi(y_0)| h(y_0)} = 1.$$

En se rappelant que $P^k(\mathbb{1}_\Lambda) = \mathbb{1}_\Lambda$ et que $|\varphi(\gamma \cdot y_0)| \leq |\varphi(y_0)|$ pour tout $\gamma \in \Gamma(k)$ tel que $y_0 \notin \Lambda_{l(\gamma)}$, il vient

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y_0) e^{-\delta b(\gamma, y_0)} \frac{h(\gamma \cdot y_0)}{h(y_0)} \left(\frac{|\varphi(\gamma \cdot y_0)|}{|\varphi(y_0)|} - 1 \right) = 0.$$

Finalement $|\varphi(\gamma \cdot y_0)| = |\varphi(y_0)|$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $y_0 \notin \Lambda_{l(\gamma)}$. L'ensemble

$$\left\{ \gamma \cdot y_0 \mid \gamma \in \Gamma \text{ avec } y_0 \notin \Lambda_{l(\gamma)} \right\}$$

étant dense dans Λ , on conclut que la fonction $|\varphi|$ est constante sur Λ ; il existe alors une constante $M > 0$ et une fonction $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi = M e^{ig}$. Fixons $k \geq 1$. L'égalité $P^k(\varphi) = \varphi$ entraîne, pour tout $y \in \Lambda$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y) e^{-\delta b(\gamma, y)} \frac{h(\gamma \cdot y)}{h(y)} \left(e^{i(g(\gamma \cdot y) - g(y))} - 1 \right) = 0.$$

De la stricte convexité du disque unité, on déduit que $g(\gamma \cdot y) - g(y)$ est un multiple de 2π pour tous $\gamma \in \Gamma(k)$, $k \geq 1$, et $y \notin \Lambda_{l(\gamma)}$, d'où l'égalité $\varphi(\gamma \cdot y) = \varphi(y)$ pour tous $\gamma \in \Gamma(k)$, $k \geq 1$, et $y \notin \Lambda_{l(\gamma)}$. La fonction φ est donc constante sur Λ . Nous allons utiliser un argument similaire pour montrer que 1 est l'unique valeur propre de \mathcal{L}_δ de module 1. Supposons donc qu'il existe $\phi \in \text{Lip}(\Lambda)$ telle que $\mathcal{L}_\delta \phi = e^{i\theta} \phi$; il vient $|\phi| \leq \mathcal{L}_\delta |\phi|$, et la mesure σ_\circ étant \mathcal{L}_δ -invariante, on a $\sigma_\circ(\mathcal{L}_\delta |\phi|) = \sigma_\circ(|\phi|)$, d'où $|\phi|(x) = \mathcal{L}_\delta |\phi|(x)$ pour σ_\circ -presque tout $x \in \Lambda$. Donc $|\phi|$ est une fonction propre pour 1. Donc les fonctions h et $|\phi|$ sont proportionnelles sur Λ . L'égalité $\mathcal{L}_\delta \phi = e^{i\theta} \phi$ s'écrit aussi, pour tout $x \in \Lambda$

$$\frac{1}{h(x)} \sum_{j=1}^{p+q} \mathbb{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} h(\alpha \cdot x) \frac{\phi(\alpha \cdot x)}{h(\alpha \cdot x)} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)},$$

soit encore

$$\frac{1}{h(x)} \sum_{j=1}^{p+q} \mathbb{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} h(\alpha \cdot x) \frac{\phi(\alpha \cdot x) h(x)}{h(\alpha \cdot x) \phi(x)} e^{-i\theta} = 1.$$

Or, puisque $|\phi| = h$, le nombre complexe $\frac{\phi(\alpha \cdot x) h(x)}{h(\alpha \cdot x) \phi(x)} e^{-i\theta}$ est de module 1 pour tous $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $\alpha \in \Gamma_j^*$ et $x \notin \Lambda_j$, et par stricte convexité, il vient

$$\frac{\phi(\alpha \cdot x)}{h(\alpha \cdot x)} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)} \quad (4.15)$$

pour tous $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $\alpha \in \Gamma_j^*$ et $x \notin \Lambda_j$. Fixons maintenant $x, y \in \Lambda$ et choisissons $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ tel que $x, y \notin \Lambda_j$, ce qui est possible puisque $p+q \geq 3$. Notons \mathfrak{a}_j un générateur de Γ_j et $x_{\mathfrak{a}_j}^+$ son point fixe attractif. De l'équation (4.15), on déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\frac{\phi(\mathfrak{a}_j^n \cdot x)}{h(\mathfrak{a}_j^n \cdot x)} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\phi(\mathfrak{a}_j^n \cdot y)}{h(\mathfrak{a}_j^n \cdot y)} = e^{i\theta} \frac{\phi(y)}{h(y)}.$$

En passant à la limite, il vient

$$\frac{\phi(x)}{h(x)} = \frac{\phi(y)}{h(y)}.$$

Le choix de x et de y étant arbitraire, la fonction $\frac{\phi}{h}$ est constante sur Λ , et donc $\theta = 0$. Dans le cas où $p+q = 2$, les auteurs de [DP96a] montrent que -1 est une autre valeur propre de module 1, dont une fonction propre est donnée par $h(\mathbb{1}_{\Lambda_1} - \mathbb{1}_{\Lambda_2})$. \square

De par la description du spectre de \mathcal{L}_δ , on a

$$\mathcal{L}_\delta = \Pi_\delta + R_\delta$$

où $\Pi_\delta : \text{Lip}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}h$ est le projecteur spectral sur l'espace propre associé à la valeur propre 1 et $R_\delta = \mathcal{L}_\delta - \Pi_\delta$ satisfait $\Pi_\delta R_\delta = R_\delta \Pi_\delta = 0$ et possède un rayon spectral < 1 . Il existe donc une forme linéaire $\sigma_\delta : \text{Lip}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Pi_\delta(\cdot) = \sigma_\delta(\cdot)h$. Pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$, il vient alors $\Pi_\delta(\mathcal{L}_\delta \varphi) = \sigma_\delta(\mathcal{L}_\delta \varphi)h$ d'une part et $\Pi_\delta(\mathcal{L}_\delta \varphi) = \mathcal{L}_\delta \Pi_\delta(\varphi) = \sigma_\delta(\varphi)h$ d'autre part, ce qui montre la \mathcal{L}_δ -invariance de σ_δ .

Remarque 4.2.11. *La mesure sur Λ induite par σ_δ correspond exactement à la mesure de Patterson-Sullivan σ_\circ . En effet, pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et tout $k \geq 1$*

$$\sigma_\circ(\varphi) = \sigma_\circ(\mathcal{L}_\delta^k \varphi) = \sigma_\circ(\sigma_\delta(\varphi)h) + \sigma_\circ(R_\delta^k(\varphi)).$$

Donc

$$\sigma_{\mathbf{o}}(\varphi) = \sigma_{\delta}(\varphi) + \sigma_{\mathbf{o}}\left(R_{\delta}^k(\varphi)\right) \longrightarrow \sigma_{\delta}(\varphi).$$

La remarque découle de la densité de $\text{Lip}(\Lambda)$ dans $L^1(\Lambda)$.

4.2.2 Perturbation de l'opérateur

La partie précédente a mis en évidence quelques propriétés de l'opérateur de transfert \mathcal{L}_{δ} , notamment la présence d'un trou spectral pour son action sur $\text{Lip}(\Lambda)$. Nous nous intéressons dans cette partie à la perturbation de \mathcal{L}_{δ} donnée par $z \mapsto \mathcal{L}_z$ pour $z \in \mathbb{C}$ proche de δ avec $\text{Re}(z) \geq \delta$. Nous démontrons dans un premier temps la proposition suivante

Proposition 4.2.12. *Sous la famille d'hypothèses (H_{β}) , pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe une constante $C = C_K > 0$ telle que pour tous $s, t \in K$ et $\kappa \searrow 0$*

1) si $\beta \in]0, 1[$

$$a. \|\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta+is}\| \leq C|s-t|^{\beta} L\left(\frac{1}{|s-t|}\right),$$

$$b. \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} - \mathcal{L}_{\delta+it}\| \leq C\kappa^{\beta} L\left(\frac{1}{\kappa}\right);$$

2) si $\beta = 1$

$$a. \|\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta+is}\| \leq C|s-t|\tilde{L}\left(\frac{1}{|s-t|}\right),$$

$$b. \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} - \mathcal{L}_{\delta+it}\| \leq C\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right),$$

$$\text{où } \tilde{L}(x) = \int_1^x \frac{L(y)}{y} dy.$$

Démonstration. Nous détaillons simplement la démonstration de la propriété 1) a., les étapes étant similaires pour les trois autres assertions. Soit $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$: il suffit de vérifier que

$$\|\mathcal{L}_{\delta+it}\varphi - \mathcal{L}_{\delta+is}\varphi\| \leq C|s-t|^{\beta} L\left(\frac{1}{|s-t|}\right) \|\varphi\|.$$

La proposition 3.3.1 est le point clé pour obtenir de telles estimées ; son application nécessite d'introduire des mesures de probabilité rentrant dans le cadre des hypothèses de cette proposition. Pour tous $1 \leq j \leq p+q$ et $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$, introduisons la mesure de

probabilité suivante

$$\mu_j^x = \frac{1}{M_j(x)} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} D_{b(\alpha, x)}$$

où $M_j(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)}$ est une constante de renormalisation et où $D_{b(\alpha, x)}$ désigne la masse de Dirac en $b(\alpha, x)$; ces mesures sont à support dans $[-C, +\infty[$ où $C > 0$ est la constante ne dépendant que de X et de Γ apparaissant dans le corollaire 4.1.6. On déduit de ce dernier

$$e^{-\delta C} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \leq M_j(x) \leq e^{\delta C} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}$$

puis

$$\frac{e^{-2\delta C}}{\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T+C}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \leq 1 - \mu_j^x([-C, T])$$

et

$$1 - \mu_j^x([-C, T]) \leq \frac{e^{2\delta C}}{\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T-C}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}.$$

Donc pour T suffisamment grand

$$\frac{e^{-2\delta C}}{\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}} \frac{L(T)}{T^\beta} \leq 1 - \mu_j^x([-C, T]) \leq \frac{e^{2\delta C}}{\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}} \frac{L(T)}{T^\beta}$$

pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et

$$1 - \mu_j^x([-C, T]) = o_j(T) \frac{L(T)}{T^\beta}$$

avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} o_j(T) = 0$ pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$. De l'assertion 1.a) de la proposition 3.3.1, on déduit

$$\int_0^{+\infty} |e^{ity} - 1| \mu_j^x(dy) \preceq |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, tandis que pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, on a

$$\int_0^{+\infty} |e^{ity} - 1| \mu_j^x(dy) \preceq o\left(|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$$

et ce uniformément en $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$. Cela s'écrit aussi sous la forme

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} |e^{itb(\alpha, x)} - 1| e^{-\delta b(\alpha, x)} = |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad (4.16)$$

pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \left| e^{itb(\alpha, x)} - 1 \right| e^{-\delta b(\alpha, x)} = |t|^\beta L \left(\frac{1}{|t|} \right) o \left(\frac{1}{|t|} \right) \quad (4.17)$$

pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$. Donc, pour tous $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} |w_{\delta+it}(\alpha, x)\varphi(\alpha.x) - w_{\delta+is}(\alpha, x)\varphi(\alpha.x)| &\leq \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_j} \left| e^{i(t-s)b(\alpha, x)} - 1 \right| e^{-\delta b(\alpha, x)} \right) \|\varphi\|_\infty \\ &\asymp |t-s|^\beta L \left(\frac{1}{|t-s|} \right) \|\varphi\| \end{aligned}$$

ce qui donne, en sommant sur $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$

$$|\mathcal{L}_{\delta+it}\varphi - \mathcal{L}_{\delta+is}\varphi|_\infty \preceq |t-s|^\beta L \left(\frac{1}{|t-s|} \right) \|\varphi\|.$$

Afin de contrôler le coefficient Lipschitz de la fonction $x \mapsto \mathcal{L}_{\delta+it}\varphi(x) - \mathcal{L}_{\delta+is}\varphi(x)$, on observe tout d'abord que

$$[\mathcal{L}_{\delta+it}\varphi - \mathcal{L}_{\delta+is}\varphi] \leq \sup_{j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket} \sup_{\substack{x, y \in \Lambda_j \\ y \neq x}} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_l \\ l \neq j}} \frac{A_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} A_j(l, \alpha, x, y) &:= |w_{\delta+it}(\alpha, x)\varphi(\alpha.x) - w_{\delta+is}(\alpha, x)\varphi(\alpha.x) \\ &\quad - (w_{\delta+it}(\alpha, y)\varphi(\alpha.y) - w_{\delta+is}(\alpha, y)\varphi(\alpha.y))| \end{aligned}$$

pour tous $j, l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $l \neq j$, tous $x, y \in \Lambda_j$, $y \neq x$ et tout $\alpha \in \Gamma_l$. Il vient

$$\begin{aligned} A_j(l, \alpha, x, y) &\leq |w_{\delta+it}(\alpha, x) - w_{\delta+is}(\alpha, x) - (w_{\delta+it}(\alpha, y) - w_{\delta+is}(\alpha, y))| |\varphi(\alpha.x)| \\ &\quad + |w_{\delta+it}(\alpha, y) - w_{\delta+is}(\alpha, y)| |\varphi(\alpha.y) - \varphi(\alpha.x)| \\ &\leq B_j(l, \alpha, x, y) + C_j(l, \alpha, x, y) \end{aligned}$$

où

$$B_j(l, \alpha, x, y) = |w_{\delta+it}(\alpha, x) - w_{\delta+is}(\alpha, x) - (w_{\delta+it}(\alpha, y) - w_{\delta+is}(\alpha, y))| |\varphi(\alpha.x)|$$

et

$$C_j(l, \alpha, x, y) = |w_{\delta+it}(\alpha, y) - w_{\delta+is}(\alpha, y)| |\varphi(\alpha.y) - \varphi(\alpha.x)|.$$

On a

$$\begin{aligned} B_j(l, \alpha, x, y) &\leq e^{-\delta b(\alpha, x)} \left| e^{i(t-s)b(\alpha, x)} - e^{i(t-s)b(\alpha, y)} \right| \|\varphi\| \\ &\quad + \left| e^{-(\delta+it)b(\alpha, x)} - e^{-(\delta+it)b(\alpha, y)} \right| \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| \|\varphi\| \\ &\leq e^{-\delta b(\alpha, x)} \left| e^{i(t-s)(b(\alpha, x) - b(\alpha, y))} - 1 \right| \|\varphi\| \\ &\quad + e^{-\delta b(\alpha, y)} \left| e^{(\delta+it)(b(\alpha, y) - b(\alpha, x))} - 1 \right| \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| \|\varphi\| \\ &\leq \left(e^{-\delta b(\alpha, x)} [b(\alpha, \cdot)] |t - s| d_{\mathbf{o}}(x, y) \right) \|\varphi\| \\ &\quad + \left(e^{-\delta b(\alpha, y)} |\delta + it| [b(\alpha, \cdot)] \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| d_{\mathbf{o}}(x, y) \right) \|\varphi\| \end{aligned}$$

à une constante multiplicative près. La suite $([b(\gamma, \cdot)])_{\gamma \in \Gamma_j}$ étant bornée et t appartenant au compact K , on obtient

$$\frac{B_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \leq \left(e^{-\delta b(\alpha, x)} |t - s| \right) \|\varphi\| + \left(e^{-\delta b(\alpha, y)} \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| \right) \|\varphi\|.$$

D'autre part

$$\frac{C_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \leq e^{-\delta b(\alpha, y)} \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| \|\varphi\|,$$

si bien que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et tous $x, y \in \Lambda_j$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_l \\ l \neq j}} \frac{A_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_l \\ l \neq j}} \frac{B_j(l, \alpha, x, y) + C_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_l \\ l \neq j}} \left(e^{-\delta b(\alpha, x)} |t - s| + e^{-\delta b(\alpha, y)} \left| e^{i(t-s)b(\alpha, y)} - 1 \right| \right) \|\varphi\|. \end{aligned}$$

En utilisant (4.16) et (4.17), il vient

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_l \\ l \neq j}} \frac{A_j(l, \alpha, x, y)}{d_{\mathbf{o}}(x, y)} \leq |t - s|^\beta L \left(\frac{1}{|t - s|} \right) \|\varphi\|$$

4.2. Étude des opérateurs de transfert

et cette dernière majoration combinée avec (4.18) implique

$$[\mathcal{L}_{\delta+it}\mathbb{1}_\Lambda - \mathcal{L}_{\delta+is}\mathbb{1}_\Lambda] \preceq |t-s|^\beta L\left(\frac{1}{|t-s|}\right) \|\varphi\|,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

On déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.13. *L'application $z \mapsto \mathcal{L}_z$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \delta\}$.*

Démonstration. D'après les arguments explicités dans l'étape 3 de la démonstration de la proposition 2.2 de [BP00], l'application $z \mapsto \mathcal{L}_z$ est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \delta\}$, et donc continue sur ce domaine. Il reste à montrer la continuité de cette application en $\delta + it$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Démontrons-la dans le cas $\beta < 1$. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$; soient $\kappa \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} - \mathcal{L}_{\delta+it_0}\| \leq \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} - \mathcal{L}_{\delta+it}\| + \|\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta+it_0}\|.$$

Pour t dans un voisinage compact de t_0 , les assertions du 1) de la proposition 4.2.12 impliquent qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} - \mathcal{L}_{\delta+it}\| &\leq C' \kappa^\beta L\left(\frac{1}{\kappa}\right) \\ \text{et } \|\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta+it_0}\| &\leq C' |t - t_0|^\beta L\left(\frac{1}{|t - t_0|}\right), \end{aligned}$$

ce qui implique la continuité. \square

La proposition qui suit affirme que l'existence d'une valeur propre dominante, isolée, simple est assurée pour \mathcal{L}_z , uniformément en z suffisamment proche de δ . Notons $\rho(z)$ le rayon spectral de \mathcal{L}_z sur $\operatorname{Lip}(\Lambda)$ et $|x + iy|_\infty = \max(|x|, |y|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2.14. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho_\varepsilon \in]0, 1[$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z - \delta|_\infty < \varepsilon$ et $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$, on ait :*

- $\rho(z) > \rho_\varepsilon$;
- \mathcal{L}_z a une unique valeur propre λ_z de module $\rho(z)$;
- cette valeur propre est simple et $\lim_{z \rightarrow \delta} \lambda_z = 1$;
- le reste du spectre de \mathcal{L}_z est inclus dans un disque centré en l'origine de rayon ρ_ε .

De plus, pour tout $A > 0$, il existe $\rho(A) < 1$ tel que $\rho(z) < \rho(A)$ dès que $z \in \mathbb{C}$ satisfait $|z - \delta|_\infty \geq \varepsilon$, $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq A$. Enfin $\rho(z) = 1$ si et seulement si $z = \delta$.

Démonstration. La preuve se fait en plusieurs étapes et repose sur les approches de [BP00], [BP06], [DP96a] et [Pei11]. On note $\rho_\infty(s)$ le rayon spectral de \mathcal{L}_s sur $(\mathcal{C}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$.

- 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$, on a $\rho(z) \leq \rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$. Nous allons majorer le rayon spectral essentiel de \mathcal{L}_z sur $\operatorname{Lip}(\Lambda)$ par $r\rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$, où $r \in]0, 1[$ a été donné dans le corollaire 4.1.8. Pour ce faire, nous montrons que \mathcal{L}_z vérifie presque la propriété DF(s) 4.2.10 introduite dans la preuve de la proposition 4.2.9. Le “presque” précédent signifie qu’un point de la propriété DF(s) ne sera pas satisfait : ce point est le fait que dans le cas présent

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n^{\frac{1}{n}} = r\rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$$

n’est pas $< \rho(z)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\geq \delta$. L’opérateur \mathcal{L}_z est borné sur $(\operatorname{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ d’après le corollaire 4.2.7 et l’injection de $(\operatorname{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$ dans $(\operatorname{Lip}(\Lambda), |\cdot|_\infty)$ est compacte, donc le point i) de la propriété DF(s) est acquis pour \mathcal{L}_z . Concernant l’assertion ii), fixons $n \geq 1$ et $\varphi \in (\operatorname{Lip}(\Lambda), \|\cdot\|)$. Alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_z^n \varphi|_\infty &= \sup_{x \in \Lambda} |\mathcal{L}_z^n \varphi(x)| \\ &= \sup_{x \in \Lambda} \left| \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-zb(\gamma, x)} \varphi(\gamma \cdot x) \right| \\ &\leq \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \left\| w_{\operatorname{Re}(z)}(\gamma, \cdot) \right\| \right) |\varphi|_\infty. \end{aligned}$$

D’autre part, si on fixe $x, y \in \Lambda_j$, $x \neq y$ pour $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, il vient

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_z^n \varphi(x) - \mathcal{L}_z^n \varphi(y)| &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) \left| e^{-zb(\gamma, x)} - e^{-zb(\gamma, y)} \right| |\varphi(\gamma \cdot x)| \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(y) e^{-\operatorname{Re}(z)b(\gamma, y)} |\varphi(\gamma \cdot x) - \varphi(\gamma \cdot y)| \\ &\leq \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \left\| w_{\operatorname{Re}(z)}(\gamma, \cdot) \right\| \right) |\varphi|_\infty d_{\mathbf{o}}(x, y) \\ &\quad + Cr^n \left| \mathcal{L}_{\operatorname{Re}(z)}^n \mathbb{1}_\Lambda \right|_\infty \|\varphi\| d_{\mathbf{o}}(x, y). \end{aligned}$$

4.2. Étude des opérateurs de transfert

Finalement, d'après la définition de $[\cdot]$, il vient

$$\|\mathcal{L}_z^n \varphi\| \leq S_n \|\varphi\|_\infty + s_n \|\varphi\|$$

avec

$$S_n = 2 \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \left\| w_{\operatorname{Re}(z)}(\gamma, \cdot) \right\| \right) \text{ et } s_n = Cr^n \left| \mathcal{L}_{\operatorname{Re}(z)}^n \mathbf{1}_\Lambda \right|_\infty.$$

On constate alors que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n^{\frac{1}{n}} = r\rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$. Ce résultat implique alors que le rayon spectral essentiel de \mathcal{L}_z sur $\operatorname{Lip}(\Lambda)$ est $\leq r\rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$. Maintenant si $\rho(z) > \rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$, l'opérateur \mathcal{L}_z est quasi-compact et toute valeur spectrale de module $> r\rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$ est une valeur propre isolée et de multiplicité finie pour \mathcal{L}_z . Soit donc $\lambda(z)$ une telle valeur propre, de module $\rho(z)$: il existe $\phi \in \operatorname{Lip}(\Lambda)$ satisfaisant $\mathcal{L}_z \phi = \lambda(z)\phi$, ce qui donne $\rho(z)|\phi| \leq \mathcal{L}_{\operatorname{Re}(z)}|\phi|$, et donc $\rho(z) \leq \rho_\infty(\operatorname{Re}(z))$: contradiction. Ceci achève la preuve du 1).

- 2) la fonction $s \mapsto \rho_\infty(s)$ est strictement décroissante sur $[\delta, +\infty)$. Soient s, s' deux réels tels que $\delta \leq s < s'$. Pour tous $k \geq 1$ et $x \in \Lambda$, il vient

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-s'b(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x) = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-(s'-s)b(\gamma,x)} e^{-sb(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x),$$

d'où, d'après le corollaire 4.1.6,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-s'b(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x) \\ & \leq e^{(s'-s)C} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-(s'-s)d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} e^{-sb(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x). \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1.7, il existe une constante $A > 0$ telle que $d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) \geq Ak$ pour tout $\gamma \in \Gamma(k)$, d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-s'b(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x) \\ & \leq e^{(s'-s)C} e^{-(s'-s)Ak} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-sb(\gamma,x)} \mathbf{1}_\Lambda(\gamma.x). \end{aligned}$$

Donc $\left| \mathcal{L}_{s'}^k \mathbf{1}_\Lambda \right|_\infty \leq e^{(s'-s)C} e^{-(s'-s)Ak} \left| \mathcal{L}_s^k \mathbf{1}_\Lambda \right|_\infty$, et il vient

$$\rho_\infty(s') \leq e^{-(s'-s)A} \rho_\infty(s) < \rho_\infty(s).$$

Le 2) s'en déduit donc. Il est à noter que cette preuve donne un contrôle sur la décroissance de $|\rho_\infty(s) - \rho_\infty(s')|$. Puisque $\rho_\infty(\delta) = 1$, on a en particulier $\rho(z) < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \delta$. Il reste donc à examiner le cas où $z = \delta + it$: c'est l'objet du point 3).

- 3) On a $\rho(\delta + it) = 1, t \in \mathbb{R}$, si et seulement si $t = 0$. On sait que $\rho(\delta + it) \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons $t \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(\delta + it) = 1$. Toute valeur spectrale de $\mathcal{L}_{\delta+it}$ de module $> r$ étant une valeur propre, il existe $\phi \in \operatorname{Lip}(\Lambda)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}_{\delta+it}\phi = e^{i\theta}\phi$. En particulier $|\phi| \leq \mathcal{L}_\delta |\phi|$. L'égalité $\sigma_\bullet \mathcal{L}_\delta = \sigma_\bullet$ et la continuité de ϕ entraînent alors que $\mathcal{L}_\delta |\phi| = |\phi|$ et donc que $|\phi|$ est proportionnelle à h . L'égalité $\mathcal{L}_{\delta+it}\phi = e^{i\theta}\phi$ s'écrit aussi

$$\frac{1}{h(x)} \sum_{j=1}^{p+q} \mathbf{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} h(\alpha \cdot x) \frac{\phi(\alpha \cdot x)}{h(\alpha \cdot x)} e^{itb(\alpha, x)} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)},$$

si bien que, par stricte convexité, pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, pour tous $\alpha \in \Gamma_j^*$ et $x \notin \Lambda_j$, on a

$$\frac{\phi(\alpha \cdot x)}{h(\alpha \cdot x)} e^{itb(\alpha, x)} = e^{i\theta} \frac{\phi(x)}{h(x)}.$$

Le groupe Γ_1 étant engendré par une isométrie parabolique \mathbf{a}_1 , dont on note le point fixe $x_{\mathbf{a}_1}$, on a pour tous $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $x \notin \Lambda_1$

$$\frac{\Phi(\mathbf{a}_1^m \cdot x)}{\Phi(\mathbf{a}_1^n \cdot x)} \frac{h(\mathbf{a}_1^n \cdot x)}{h(\mathbf{a}_1^m \cdot x)} e^{it(b(\mathbf{a}_1^m, x) - b(\mathbf{a}_1^n, x))} = 1. \quad (4.19)$$

On sait également que pour $x \notin \Lambda_1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b(\mathbf{a}_1^{n+1}, x) - b(\mathbf{a}_1^n, x)) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b(\mathbf{a}_1^n, x) = +\infty,$$

ce qui entraîne la densité de l'ensemble

$$\{b(\mathbf{a}_1^n, x) - b(\mathbf{a}_1^m, x) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

dans \mathbb{R} . Pour tout $u \in \mathbb{R}$, il existe alors deux suites $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que la suite $(b(\mathbf{a}_1^{n_k}, x) - b(\mathbf{a}_1^{m_k}, x))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers u ; puisque les suites $(\mathbf{a}_1^{n_k} \cdot x)_{k \in \mathbb{N}}$ et

4.2. Étude des opérateurs de transfert

$(\mathbf{a}_1^{m_k} \cdot x)_{k \in \mathbb{N}}$ tendent vers $x_{\mathbf{a}_1}$, l'égalité (4.19) nous fournit $e^{itu} = 1$; on en déduit que $t = 0$.

4) *Théorie des perturbations* L'application $z \mapsto \mathcal{L}_z$ étant une perturbation continue de \mathcal{L}_δ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \delta\}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho_\varepsilon \in]0, 1[$ tels que pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \delta\}$ vérifiant $|z - \delta|_\infty < \varepsilon$, l'opérateur \mathcal{L}_z admet une unique valeur propre dominante λ_z , simple et proche de 1, isolée dans le spectre de \mathcal{L}_z , et vérifiant $|\lambda_z| > \rho_\varepsilon$ (voir par exemple [Hen95]). De plus, on sait que le reste du spectre de \mathcal{L}_z est inclus dans un disque centré en l'origine et de rayon ρ_ε .

5) *Conclusion* Fixons $0 < \varepsilon < A$. Montrons dans un premier temps que

$$\rho' = \rho'(\varepsilon, A) := \sup_{\varepsilon \leq |t| \leq A} \rho(\delta + it) < 1.$$

Supposons que $\rho' = 1$. Alors il existe une suite $(t_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de $[-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$ telle que la suite $(\rho(\delta + it_k))_k$ tende vers 1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(t_k)_{k \geq 0}$ converge vers $t_\infty \in [\varepsilon, A]$. D'après la proposition 4.2.12 et [Kat13], l'application $t \mapsto \rho(\delta + it)$ est semi-continue inférieurement sur \mathbb{R} . Donc $1 \leq \rho(\delta + it_\infty)$: ceci est impossible d'après le point 3) car $|t_\infty| \geq \varepsilon$.

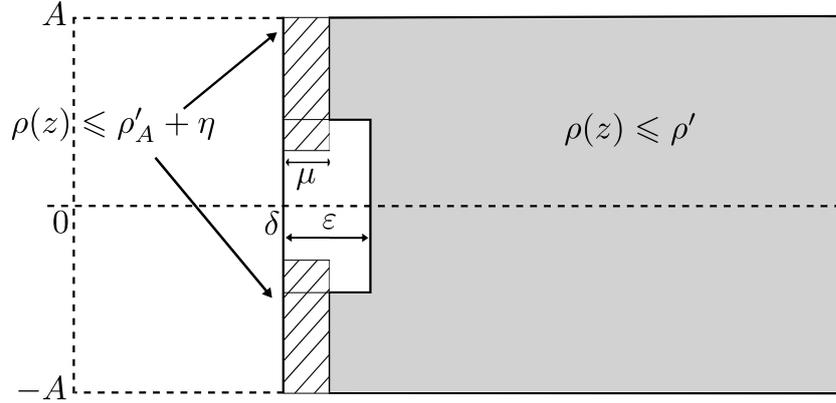
Soit $\eta \in]0, 1 - \rho'_A[$. D'après la proposition 4.2.12 et [Kat13], l'application $z \mapsto \rho(z)$ est semi-continue inférieurement pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$. On en déduit que pour tout $t \in [-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$, il existe $\mu(t) > 0$ tel que $\rho(z) \leq \rho'_A + \eta$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ et $|z - \delta + it|_\infty < \min(\mu(t), \frac{\varepsilon}{2})$. Par compacité de l'ensemble $\{\delta + it \mid |t| \in [\varepsilon, A]\}$, il existe $t_1, \dots, t_N \in [-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$ et $\mu_1, \dots, \mu_N > 0$ tels que

$$\{\delta + it \mid |t| \in [\varepsilon, A]\} \subset \bigcup_{k=1}^N B(t_k, \mu_k).$$

Soit $\mu = \min_k \mu_k$. On en conclut que $\rho(z) \leq \rho'_A + \eta$ pour tout z dans la bande $\{x + iy \mid \delta \leq x \leq \delta + \mu, |y| \in [\varepsilon, A]\}$.

L'application $s \mapsto \rho_\infty(s)$ étant strictement décroissante sur $[\delta, +\infty[$ d'après le 2), il vient $\rho_\infty(s) \leq \rho_\infty(\delta + \mu) = \rho'$ pour tout $s \geq \delta + \mu$. Du point 1) on déduit alors que $\rho(z) \leq \rho'$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \geq \delta + \mu$. Le résultat suit en posant $\rho_A = \max(\rho'_A + \eta, \rho')$.

□


 FIGURE 4.5 – Contrôle de $\rho(z)$

Remarque 4.2.15. Pour des commodités de calcul dans les démonstrations des propositions A.1 et C.1, on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit de façon à avoir

$$\frac{L(x)}{L(y)} \leq \max\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

pour tous $x, y \geq \frac{1}{\varepsilon}$; ceci est possible grâce au lemme de Potter 3.2.4.

Soient λ_z l'unique valeur propre dominante de \mathcal{L}_z et h_z l'unique fonction propre associée à λ_z satisfaisant $\sigma_{\mathbf{o}}(h_z) = 1$; on note $\Pi_z : \text{Lip}(\Lambda) \rightarrow \text{Lip}(\Lambda)$ la projection spectrale associée à λ_z . Il existe alors une unique forme linéaire $\sigma_z : \text{Lip}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Pi_z = \sigma_z h_z$ et $\sigma_z(h_z) = 1$. Nous noterons enfin $R_z = \mathcal{L}_z - \Pi_z$.

Proposition 4.2.16. Les applications $z \mapsto \Pi_z$, $z \mapsto h_z$ et $z \mapsto \lambda_z$ ont la même régularité que la fonction $z \mapsto \mathcal{L}_z$.

Démonstration. On adapte la preuve du lemme 2.5 de [BP00]. D'après la proposition précédente, il existe un disque D centré en 1 et de rayon $< 1 - \rho_\varepsilon$ tel que $\lambda_z \in D$ pour $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\text{Re}(z) \geq \delta$ et $|z - \delta| < \varepsilon$; de plus, pour un tel z , le reste du spectre de \mathcal{L}_z est inclus dans un disque fermé centré en l'origine et disjoint de D . Il vient alors

$$\Pi_z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} (w\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1} dw.$$

Puisque $\partial D \cap \text{Spec}(\mathcal{L}_z) = \emptyset$, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ proches de δ , on a

$$\|\Pi_z - \Pi_{z'}\| \leq \|\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{z'}\|.$$

Posons $C_z = \sigma_{\mathbf{o}}(\Pi_z(h))$; on a $\Pi_z(h) = C_z h_z$ et

$$|C_z - C_{z'}| = |\sigma_{\mathbf{o}}(\Pi_z(h)) - \sigma_{\mathbf{o}}(\Pi_{z'}(h))| \leq \|h\| \|\Pi_z - \Pi_{z'}\|.$$

On a $C_\delta = 1$ et donc $C_z, C_{z'} \neq 0$ pour z, z' suffisamment proches de δ . On écrit alors

$$\begin{aligned} \|h_z - h_{z'}\| &= \left\| \frac{\Pi_z(h)}{C_z} - \frac{\Pi_{z'}(h)}{C_{z'}} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\Pi_z(h)}{C_z} - \Pi_z(h) \right\| + \|\Pi_z(h) - \Pi_{z'}(h)\| + \left\| \Pi_{z'}(h) - \frac{\Pi_{z'}(h)}{C_{z'}} \right\| \\ &\preceq \|\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{z'}\|. \end{aligned}$$

Enfin on écrit

$$\begin{aligned} |\lambda_z - \lambda_{z'}| &= |\sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_z h_z) - \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{z'} h_{z'})| \\ &\leq |\sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_z h_z - \mathcal{L}_z h_{z'})| + |\sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_z h_{z'} - \mathcal{L}_{z'} h_{z'})|, \end{aligned}$$

et le résultat découle des estimations précédentes. \square

4.2.3 Régularité de la valeur propre dominante

Dans les démonstrations des théorèmes A,B et C, nous aurons à étudier des quantités du type

$$\sum_{\Gamma^k, y=x} e^{-\delta S_k l(y)} \varphi(S_k l(y) - R), \quad (4.20)$$

pour des fonctions φ admettant une transformée de Fourier suffisamment régulière et à support compact. La formule d'inversion de Fourier conduit à l'expression

$$\sum_{\Gamma^k, y=x} e^{-\delta S_k l(y)} \varphi(S_k l(y) - R) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \mathcal{L}_{\delta+it}^k(\mathbf{1}_\Lambda(x)) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

L'étude du comportement lorsque R tend vers l'infini de la quantité (4.20) nécessite alors une connaissance précise de celui de la fonction $t \mapsto \lambda_{\delta+it}$ au voisinage de 0.

On établit en premier lieu un résultat concernant certaines mesures de probabilité dépendant des facteurs de Schottky Γ_i , $1 \leq i \leq p+q$.

Proposition 4.2.17. *Soient $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$. Notons $M_j(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} h(\alpha.x) e^{-\delta b(\alpha,x)}$ et introduisons la mesure de probabilité μ_j^x sur $[-C, +\infty[$ définie*

par

$$\mu_j^x := \frac{1}{M_j(x)} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} h(\alpha.x) e^{-\delta b(\alpha,x)} D_{b(\alpha,x)}$$

où D_a représente la masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}$. Cette mesure vérifie l'une des assertions suivantes.

1) Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $t \rightarrow 0$, on a

- si $\beta \in]0, 1[$

$$\widehat{\mu}_j^x(t) = 1 - \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) e^{-i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} \Gamma(1 - \beta) |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$$

- si $\beta = 1$

$$* \widehat{\mu}_j^x(t) = 1 + \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) i |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$$

$$* \operatorname{Re}\left(1 - \widehat{\mu}_j^x(t)\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)),$$

où $x_{\mathbf{a}_j}$ représente le point fixe d'une isométrie parabolique \mathbf{a}_j engendrant Γ_j et les $(C_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont les constantes apparaissant dans l'hypothèse (P_2) ;

2) Pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, il existe une fonction $f_j : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_\circ(\mathbf{1}_{\Lambda_j^c} f_j) < +\infty$ telle que pour $t \rightarrow 0$, on ait

- si $\beta \in]0, 1[$

$$\widehat{\mu}_j^x(t) = 1 - f_j(x) o\left(|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) ;$$

- si $\beta = 1$

$$* \widehat{\mu}_j^x(t) = 1 + f_j(x) o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right),$$

$$* \operatorname{Re}\left(1 - \widehat{\mu}_j^x(t)\right) = f_j(x) o\left(|t| L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right).$$

Démonstration. Soit $\beta \in]0, 1[$. Considérons d'abord le cas où $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et fixons $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$. Le groupe Γ_j est alors un groupe élémentaire parabolique "influent". Du fait que h est strictement positive sur Λ et du corollaire 4.1.6, on déduit l'existence de deux constantes

4.2. Étude des opérateurs de transfert

$m, M > 0$ telles que

$$m \sum_{\alpha \in \Gamma_j} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \leq M_j(x) \leq M \sum_{\alpha \in \Gamma_j} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}.$$

D'autre part, l'hypothèse (P_2) donne

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \sim C_j \frac{L(T)}{T^\beta}.$$

Montrons à présent que la fonction de répartition F_j^x de μ_j^x satisfait

$$1 - F_j^x(T) \sim \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o}} \right) \frac{L(T)}{T^\beta} \text{ uniformément en } x \notin \Lambda_j. \quad (4.21)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $T_0 \gg 1$ tel que pour tout $T \geq T_0$, tout $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$ et pour tout $\alpha \in \Gamma_j$ satisfaisant $d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T$, on ait

- i) $-\varepsilon \leq b(\alpha, x) - d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) + 2(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o} \leq \varepsilon$ (Lemme 6.7 de [DPPS15]) ;
- ii) $(1 - \varepsilon)h(x_{\mathbf{a}_j}) \leq h(\alpha.x) \leq (1 + \varepsilon)h(x_{\mathbf{a}_j})$;
- iii) $(1 - \varepsilon)C_j \frac{L(T)}{T^\beta} \leq \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \leq (1 + \varepsilon)C_j \frac{L(T)}{T^\beta}$,

d'où l'on déduit

$$(1 - \varepsilon)^2 e^{-\delta\varepsilon} \frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o}} \frac{L(T + \varepsilon + 2(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o})}{(T + \varepsilon + 2(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o})^\beta} \leq 1 - F_j^x(T)$$

d'une part et

$$1 - F_j^x(T) \leq (1 + \varepsilon)^2 e^{\delta\varepsilon} \frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o}} \frac{L(T - \varepsilon + 2(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o})}{(T - \varepsilon + 2(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o})^\beta}$$

d'autre part. On a $(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\mathbf{o} \asymp d(\mathbf{o}, (x_{\mathbf{a}_j}x))$, cette quantité est donc bornée uniformément en $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$; de plus, les fonctions

$$t \mapsto \frac{L(T+t)}{L(T)} \text{ et } t \mapsto \frac{T+t}{T}$$

tendent vers 1 uniformément sur tout compact de \mathbb{R} . Il vient alors

$$(1 - \varepsilon)^3 e^{-\delta\varepsilon} \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) \frac{L(T)}{T^\beta} \leq 1 - F_j^x(T)$$

et

$$1 - F_j^x(T) \leq (1 + \varepsilon)^3 e^{\delta\varepsilon} \left(\frac{C_j}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) \frac{L(T)}{T^\beta},$$

pour T suffisamment grand. Donc (4.21) est vraie pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Rappelons maintenant le résultat suivant que l'on peut trouver dans [Eri70] :

Proposition 4.2.18 ([Eri70]). *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^+ telle qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ et une fonction à variations lentes L satisfaisant $\mu([T, +\infty) \sim C \frac{L(T)}{T^\beta}$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. Alors la fonction caractéristique $\hat{\mu}(t) := \int_0^{+\infty} e^{itx} d\mu(x)$ a le comportement local suivant au voisinage de 0 :*

- si $\beta \in]0, 1[$

$$\hat{\mu}(t) = 1 - C e^{-i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} \Gamma(1 - \beta) |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$$

- si $\beta = 1$

$$* \hat{\mu}(t) = 1 + iC |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$$

$$* \operatorname{Re}(1 - \hat{\mu}(t)) = \frac{\pi}{2} C |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)),$$

$$\text{où l'on a posé } \tilde{L}(t) = \int_1^t \frac{L(x)}{x} dx.$$

On déduit alors la partie 1) de la proposition 4.2.17 dans le cas $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ en appliquant le résultat de Erickson à la mesure μ_j^x qui satisfait (4.21).

Fixons à présent $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$. Lorsque Γ_j est parabolique, l'argument précédent fonctionne encore, l'hypothèse (N) entraînant cette fois-ci

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} = o\left(\frac{L(T)}{T^\beta}\right),$$

d'où

$$1 - F_j^x(T) = \left(\frac{1}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_\circ} \right) \frac{L(T)}{T^\beta} o(T)$$

4.2. Étude des opérateurs de transfert

où $\lim_{T \rightarrow +\infty} o(T) = 0$ uniformément en $x \notin \Lambda_j$. La deuxième partie du résultat suit comme dans [Eri70], avec la fonction $f_j(x)$ donnée dans ce cas par

$$f_j(x) = \frac{1}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_{\mathbf{o}}}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{o}} \left(\mathbb{1}_{\Lambda_j^c} f_j \right) &= \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{1}{M_j(x)} h(x_{\mathbf{a}_j}) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_{\mathbf{o}}} d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \\ &\leq \frac{M}{m \sum_{\alpha \in \Gamma_j} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)_{\mathbf{o}}} d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \\ &\stackrel{\simeq}{\leq} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(x)}{d_{\mathbf{o}}(x_{\mathbf{a}_j}, x)^{\frac{2\delta}{a}}} < +\infty. \end{aligned}$$

Lorsque Γ_j est hyperbolique engendré par \mathbf{a}_j ayant pour point fixe attractif (respectivement répulsif) $x_{\mathbf{a}_j}^+$ (resp. $x_{\mathbf{a}_j}^-$), il vient

$$\sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > T}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \asymp \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ |n| l_j \geq T}} e^{-\delta l_j n} \asymp e^{-\delta T}$$

où l_j représente la longueur de l'axe de \mathbf{a}_j , et on raisonne comme pour les paraboliques non-influents. La fonction $f_j(x)$ vaut dans ce cas

$$f_j(x) = \frac{1}{2M_j(x)} \left(h(x_{\mathbf{a}_j}^+) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}^+|x)_{\mathbf{o}}} + h(x_{\mathbf{a}_j}^-) e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}^-|x)_{\mathbf{o}}} \right).$$

Le fait que $\sigma_{\mathbf{o}} \left(\mathbb{1}_{\Lambda_j^c} f_j \right)$ soit finie s'obtient de façon analogue. \square

Rappelons que 1 est une valeur propre simple de \mathcal{L}_{δ} , et que l'on a $\mathcal{L}_{\delta} h = h$ et $\sigma_{\mathbf{o}}(h) = 1$. D'après la proposition 4.2.14, pour t suffisamment proche de 0, l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+it}$ admet une valeur propre simple dominante notée $\lambda_{\delta+it}$, associée à une fonction propre $h_{\delta+it}$ satisfaisant $\sigma_{\mathbf{o}}(h_{\delta+it}) = 1$. La proposition précédente nous sert à préciser le comportement local en 0 de la fonction $t \mapsto \lambda_{\delta+it}$.

Proposition 4.2.19. *Il existe une constante $E_{\Gamma} > 0$ telle que*

- si $\beta \in]0, 1[$

$$\lambda_{\delta+it} = 1 - E_{\Gamma} \Gamma(1 - \beta) e^{+i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta \pi}{2}} |t|^{\beta} L \left(\frac{1}{|t|} \right) (1 + o(1)) ;$$

- si $\beta = 1$

$$\begin{aligned} * \lambda_{\delta+it} &= 1 - E_\Gamma \text{sign}(t) i |t| \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right) (1 + o(1)) ; \\ * \text{Re}(1 - \lambda_{\delta+it}) &= \frac{\pi}{2} E_\Gamma |t| L \left(\frac{1}{|t|} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme précédemment, nous ne détaillons la preuve que pour $\beta < 1$. On a

$$\lambda_{\delta+it} = \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+it} h_{\delta+it}) = \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+it} h) + \sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta})(h_{\delta+it} - h)).$$

D'après la proposition 4.2.12, le second terme de cette expression est majoré par $\sigma_{\mathbf{o}}(\Lambda) \left(|t|^\beta L \left(\frac{1}{|t|} \right) \right)^2$ et il reste donc à préciser le comportement du premier terme au voisinage de 0. On écrit

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+it} h) &= 1 + \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+it} h) - 1 = 1 + \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+it} h) - \sigma_{\mathbf{o}}(h) \\ &= 1 + \sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta}) h) = 1 + \sum_{j=1}^{p+q} S_j \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_j &:= \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha \cdot x) e^{-\delta b(\alpha, x)} (e^{-itb(\alpha, x)} - 1) d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \\ &= \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} M_j(x) \left(\widehat{\mu}_j^x(-t) - 1 \right) d\sigma_{\mathbf{o}}(x), \end{aligned}$$

pour $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. D'après la proposition 4.2.17, on a $S_j = o\left(|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$ pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, tandis que pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\begin{aligned} S_j &= -C_j h(x_{\mathbf{a}_j}) \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} e^{2\delta(x_{\mathbf{a}_j}|x)} d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \right) e^{i \text{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} \Gamma(1-\beta) |t|^\beta L \left(\frac{1}{|t|} \right) (1 + o(1)) \\ &= -C_j \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(x)}{d_{\mathbf{o}}(x, x_{\mathbf{a}_j})^{\frac{2\delta}{a}}} \right)^2 e^{i \text{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} \Gamma(1-\beta) |t|^\beta L \left(\frac{1}{|t|} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Le résultat suit par sommation et la constante E_Γ est donnée par

$$E_\Gamma = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}^0)} \sum_{1 \leq j \leq p} C_j \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(x)}{d_{\mathbf{o}}(x, x_{\mathbf{a}_j})^{\frac{2\delta}{a}}} \right)^2.$$

□

4.2.4 Autour de la résolvante quand $\beta = 1$

Dans les démonstrations des théorèmes A et B dans le cas $\beta = 1$, nous nous servirons de l'opérateur $Q_z = (\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \geq \delta$. Les propriétés suivantes tirées de [MT12] soulignent son comportement en fonction de l'éloignement de z avec δ . Rappelons que les quantités λ_z et Π_z ont été définies respectivement dans la proposition 4.2.19 et après la remarque 4.2.15.

Proposition 4.2.20. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $\|Q_z - (1 - \lambda_z)^{-1}\Pi_z\| \leq C$ pour z tel que $|z - \delta|_\infty < \varepsilon$ et $\|Q_z\| \leq C$ pour z tel que $|z - \delta|_\infty \geq \varepsilon$. De plus, pour t proche de 0*

$$Q_{\delta+it} = \frac{1}{E_\Gamma \text{sign}(t) i |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} (1 + o(1))\Pi_0 + O(1)$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\geq \delta$ tel que $z \neq \delta$ et $|z - \delta|_\infty < \varepsilon$, où ε est choisi comme dans la proposition 4.2.14. Avec les notations introduites après cette même proposition, il vient

$$\mathcal{L}_z = \lambda_z \Pi_z + R_z = \lambda_z \Pi_z + \mathcal{L}_z (\text{Id} - \Pi_z).$$

Donc

$$Q_z = (\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1} = (1 - \lambda_z)^{-1} \Pi_z + (\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1} (\text{Id} - \Pi_z).$$

La proposition 4.2.14 implique $\|(\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1} (\text{Id} - \Pi_z)\| \leq C$ pour un tel z . Le premier résultat en découle. Il vient également $\|(\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1}\| \leq C$ pour z suffisamment loin de δ . Maintenant pour t proche de 0, le premier point nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} Q_{\delta+it} &= (1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \Pi_{\delta+it} + O(1) \\ &= (1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \Pi_\delta + (1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} (\Pi_{\delta+it} - \Pi_\delta) + O(1). \end{aligned}$$

La régularité de l'application $t \mapsto \mathcal{L}_{\delta+it}$ donnée dans la proposition 4.2.12 et le développement limité de $\lambda_{\delta+it}$ donné dans (4.2.19) impliquent que le second terme est un $O(1)$. Finalement

$$Q_{\delta+it} = (1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \Pi_\delta + O(1)$$

et le résultat découle de (4.2.19). □

On obtient directement le

Corollaire 4.2.21. *La fonction $t \mapsto \operatorname{Re}(Q_{\delta+it})$ est intégrable en 0.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on décompose $\operatorname{Re}(Q_{\delta+it})$ en

$$\operatorname{Re}\left(Q_{\delta+it} - (1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\Pi_{\delta}\right) + \operatorname{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\right)\Pi_{\delta}.$$

La première partie est bornée par une constante $C > 0$. Concernant le terme $\operatorname{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\right)$, on écrit

$$\operatorname{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\right) = \frac{\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+it})}{|1 - \lambda_{\delta+it}|^2}.$$

Les développements limités de (4.2.19) donnent alors

$$\operatorname{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\right) = \frac{\pi}{2E_{\Gamma}} \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t|\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2}(1 + o(1)).$$

Pour se convaincre que cette fonction est intégrable en 0, on écrit pour tout $K > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-K}^K \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t|\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2} dt &= 2 \int_0^K \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)^2} dt = \int_{\frac{1}{K}}^{+\infty} \frac{L(y)}{y\tilde{L}(y)^2} dy \\ &= \left[\frac{-1}{\tilde{L}(y)^2} \right]_{\frac{1}{K}}^{+\infty} = \frac{1}{\tilde{L}\left(\frac{1}{K}\right)} < +\infty, \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{L}(x) = +\infty$; le corollaire en découle. □

Théorème A

Ce chapitre est consacré à l'étude de la propriété de mélange du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent T^1X/Γ de la variété X/Γ . La mesure m_Γ étant infinie, on sait que pour tous boréliens $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ de T^1X/Γ tels que $0 < m_\Gamma(\mathfrak{A}), m_\Gamma(\mathfrak{B}) < +\infty$, on a $m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}.\mathfrak{B}) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$; on précise ici la vitesse de convergence vers 0.

Le groupe Γ étant divergent, le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan nous assure que le flot est totalement conservatif : nous n'avons donc pas besoin d'émettre des hypothèses supplémentaires sur les ensembles \mathfrak{A} et \mathfrak{B} pour éviter les exemples de Hajan et Kakutani ([HK70]) pour lesquels $m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}.\mathfrak{B})$ peut être nulle.

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème A. *Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset T^1X/\Gamma$ deux ensembles m_Γ -mesurables de mesure finie. Sous la famille d'hypothèses (H_β) :*

- si $\beta \in]0, 1[$, on a lorsque $t \rightarrow \pm\infty$

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}.\mathfrak{B}) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi E_\Gamma} \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{t^{1-\beta}L(t)} ;$$

- si $\beta = 1$, on a lorsque $t \rightarrow \pm\infty$

$$m_\Gamma(\mathfrak{A} \cap g_{-t}.\mathfrak{B}) \sim \frac{1}{E_\Gamma} \frac{m_\Gamma(\mathfrak{A})m_\Gamma(\mathfrak{B})}{\tilde{L}(t)},$$

où $\tilde{L}(t) = \int_1^t \frac{L(x)}{x} dx$ pour tout $t \geq 1$ et où

$$E_\Gamma = \frac{\mu(\mathcal{D}^0)}{\sum_{1 \leq j \leq p} C_j \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{\sigma_{\mathbf{o}}(dx)}{d_{\mathbf{o}}(x, x_{a_j})^{\frac{2\delta}{a}}} \right)^2}. \quad (5.1)$$

Introduisons la notation suivante : pour toute fonction m_Γ -intégrable φ , on note $m_\Gamma(\varphi) = \int_{T^1X} \varphi dm_\Gamma$. L'énoncé précédent s'écrit de façon fonctionnelle comme suit

Théorème A. Soient $A, B \in \mathbb{L}^1(T^1X/\Gamma, m_\Gamma) \cap \mathbb{L}^2(T^1X/\Gamma, m_\Gamma)$. Sous la famille d'hypothèses (H_β) , il vient :

- si $\beta \in]0, 1[$, on a lorsque $t \rightarrow \pm\infty$

$$m_\Gamma(A \cdot B \circ g_t) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi E_\Gamma} \frac{m_\Gamma(A)m_\Gamma(B)}{t^{1-\beta}L(t)} ;$$

- si $\beta = 1$, on a lorsque $t \rightarrow \pm\infty$

$$m_\Gamma(A \cdot B \circ g_t) \sim \frac{1}{E_\Gamma} \frac{m_\Gamma(A)m_\Gamma(B)}{\tilde{L}(t)}.$$

Dans la suite de ce chapitre, pour mieux mettre en évidence les similitudes entre les démonstrations des théorèmes A, B et C, nous notons R le paramètre temporel du flot géodésique. Pour deux fonctions $A, B \in \mathbb{L}^1(T^1X/\Gamma, m_\Gamma) \cap \mathbb{L}^2(T^1X/\Gamma, m_\Gamma)$, nous notons

$$\begin{aligned} M(R; A, B) &:= m_\Gamma(A \cdot B \circ g_R) \\ &= \int_{\Omega} A([x_-, x_+, s]) B(g_R([x_-, x_+, s])) dm_\Gamma([x_-, x_+, s]) \end{aligned}$$

où $[x_-, x_+, s]$ représente l'orbite du triplet (x_-, x_+, s) sous l'action de Γ . Le but de la prochaine section est d'exprimer la quantité $M(R; A, B)$ en terme du codage du chapitre 4 et des opérateurs de transfert associés.

5.1 Étude de la quantité $M(R; A, B)$

Dans le chapitre 4, on a vu que les espaces $\Omega^0 = \Lambda^0 \overset{\Delta}{\times} \Lambda^0 \times \mathbb{R}/\Gamma$ et $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_t \rangle$ sont en bijection et que le flot géodésique sur Ω est conjugué au flot spécial $(\Phi_R)_{R \in \mathbb{R}}$ sur

5.1. Étude de la quantité $M(R; A, B)$

$\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$. Si on note \mathfrak{c} la bijection entre $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$ et Ω^0 , puisque m_Γ ne charge que Ω^0 , on peut écrire

$$M(R; A, B) = \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle} A([x_-, x_+, s]) B(\phi_R([x_-, x_+, s])) dn_{T_1}([x_-, x_+, s])$$

où $[x_-, x_+, s]$ représente l'orbite de (x_-, x_+, s) sous l'action de $\langle T_1 \rangle$, où l'on a identifié A (respectivement B) avec $A \circ \mathfrak{c}$ (resp. $B \circ \mathfrak{c}$) et où n_{T_1} est la projection sur $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$ de la mesure $\bar{\nu} \otimes dt$ (voir sous-section 4.1.4). La stratégie que l'on va suivre ici est inspirée de [GH88]. Identifions l'espace $\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}/\langle T_1 \rangle$ avec un domaine fondamental $S \subset \mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}$ pour l'action de $\langle T_1 \rangle$ et notons $(\tilde{\phi}_R)_R$ le flot sur S . Par densité dans $\mathbb{L}^1(S, \bar{\nu} \otimes ds) \cap \mathbb{L}^2(S, \bar{\nu} \otimes ds)$ de l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $u \otimes \varphi$ avec u lipschitzienne sur \mathcal{D}^0 et φ continue à support compact sur \mathbb{R} , on peut supposer que $A = u \otimes \varphi$ et $B = v \otimes \psi$, avec u, v, φ, ψ des fonctions satisfaisant les régularités données ci-dessus et vérifiant $\text{supp}(u \otimes \varphi) \subset S$ et $\text{supp}(v \otimes \psi) \subset S$. De la définition de T_1 et du fait que S est un domaine fondamental on déduit que pour tous $(y, x, s) \in S$ et $R \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $k = k(R, x_-, x_+, s) \in \mathbb{Z}$ tel que $T_1^k(x_-, x_+, s + R) \in S$, si bien que, pour tous $(y, x, s) \in S$ et $R \in \mathbb{R}$

$$v \otimes \psi(\tilde{\phi}_R(x_-, x_+, s)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v \otimes \psi(T_1^k.(x_-, x_+, s + R)).$$

On écrit alors $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) + M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ où

$$\begin{aligned} M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ = \sum_{k \geq 0} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} u(x_-, x_+) \varphi(s) v \otimes \psi(T_1^k.(x_-, x_+, s + R)) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} u(x_-, x_+) \varphi(s) v \otimes \psi(T_1^{-k}.(x_-, x_+, s + R)) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds. \end{aligned}$$

La première étape consiste à montrer le lemme suivant :

Lemme 5.1.1.

- 1) $R^{1-\beta} L(R) M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = 0$ pour R assez grand ;
- 2) $R^{1-\beta} L(R) M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = 0$ pour $-R$ assez grand.

Démonstration.

1) Par T_Γ -invariance de $\bar{\nu} \otimes ds$, on écrit

$$\begin{aligned} M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi \left(T_\Gamma^k \cdot (x_-, x_+, s) \right) v \otimes \psi(x_-, x_+, s + R) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds. \end{aligned}$$

Le codage des points de Λ (resp. des couples $(x, y) \in \mathcal{D}^0$) par des suites indexées sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (resp. \mathbb{Z}) va être primordial dans la suite de l'argument. Il va nous permettre d'identifier le triplet (x_-, x_+, s) avec une suite bi-infinie $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Par un argument de densité classique en dynamique symbolique, il suffit de prouver que $R^{1-\beta} L(R) M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = 0$ pour des fonctions u et v dépendant seulement des coordonnées $(\alpha_n)_{n \geq -q}$ pour $q \geq 0$. Fixons donc un tel $q \geq 0$; sans perdre en généralité, grâce à la T_Γ -invariance de $\bar{\nu} \otimes ds$, on peut supposer $q = 0$. Il vient alors

$$\begin{aligned} M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi \left(T_\Gamma^k \cdot (p(x_-, x_+), s) \right) v \otimes \psi(p(x_-, x_+), s + R) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds \end{aligned}$$

où $p : \mathcal{D}^0 \rightarrow \Lambda$ désigne la projection sur la seconde coordonnée. Il vient

$$M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \sum_{k \geq 1} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi \left(T^k \cdot x, s - S_k l(x) \right) v(x) \psi(s + R) d\nu(x) ds.$$

Rappelons que l'opérateur \tilde{P} , adjoint de la transformation $(x, s) \mapsto (T \cdot x, s - l(x))$ relativement à la mesure $\nu \otimes ds$, est défini au lemme 4.2.3 et est donné par : pour tous $x \in \Lambda$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{P}(v \otimes \psi)(x, t) = \sum_{j=1}^{p+q} \mathbb{1}_{\Lambda_j^c}(x) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta b(\alpha, x)} \frac{h v(\alpha \cdot x)}{h(x)} \psi(t + b(\alpha, x)).$$

Notons $R_0 = \max \text{supp } \psi + C - \min \text{supp } \varphi + 1$. Par compacité du support de ψ , il vient

$$\tilde{P}^k(v \otimes \psi)(x, s + R) = 0$$

pour $R \geq R_0$. Ainsi, dès que $R \geq R_0$, on a

$$M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \sum_{k \geq 1} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi(x, s) \tilde{P}^k(v \otimes \psi)(x, s + R) d\nu(x) ds$$

5.1. Étude de la quantité $M(R; A, B)$

$$=0,$$

d'où $R^{1-\beta}L(R)M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = 0$, ce qui achève la démonstration du 1).

2) Le résultat suit des arguments précédents, en remarquant que

$$\begin{aligned} M^+(-|R|; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) &= \sum_{k \geq 0} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} u(x_-, x_+) \varphi(s + |R|) v \otimes \psi(T_1^k(x_-, x_+, s)) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_{\mathcal{D}^0 \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x_-, x_+, s + |R|) v \otimes \psi(x_-, x_+, s) d\bar{\nu}(x_-, x_+) ds. \end{aligned}$$

□

Autrement dit, nous avons

- quand $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) &= M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) d\nu(x) ds ; \end{aligned}$$

- quand $R \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) &= M^-(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} u \otimes \varphi(x, s) \tilde{P}^k(v \otimes \psi)(x, s + R) d\nu(x) ds. \end{aligned}$$

Il ressort des égalités précédentes que dans les deux cas $R \rightarrow +\infty$ et $R \rightarrow -\infty$, la recherche d'un équivalent pour la quantité $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ repose sur les mêmes arguments (quitte à échanger les rôles des fonctions u, φ avec ceux des fonctions v, ψ) ; nous nous contentons donc par la suite de démontrer le théorème dans le cas où $R \rightarrow +\infty$. Nous supposons $R \geq R_0$ pour assurer $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$, et nous omettrons dorénavant le signe + pour alléger les notations. Dans la section suivante, nous nous concentrons sur le cas $\beta \in]0, 1[$.

5.2 Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

Nous avons

$$M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \sum_{k \geq 0} M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$$

où

$$M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R)v \otimes \psi(x, s) d\nu(x)ds$$

pour tout $k \geq 1$. Nous suivons à présent la démonstration du théorème 1.4 dans [Gou11] pour faire apparaître l'équivalent annoncé au début du chapitre. Nous considérons une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ satisfaisant $kL(a_k) = a_k^\beta$ où L est la fonction à variations lentes donnée dans les hypothèses (H_β) . Nous admettons pour le moment les deux propositions suivantes.

Proposition A.1. *Soient $u, v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues à support compact. Alors, uniformément en $K \geq 2$ et $R \in [0, Ka_k]$, nous avons lorsque $k \rightarrow +\infty$*

$$M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \frac{1}{e_\Gamma a_k} \left(\Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) n_{T_1}(u \otimes \varphi) n_{T_1}(v \otimes \psi) + o_k(1) \right),$$

où Ψ_β est la densité de la loi stable asymétrique de paramètre β et $e_\Gamma = E_\Gamma^{\frac{1}{\beta}}$.

Proposition A.2. *Soient $u, v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues à support compact. Quand $R \geq a_k$, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que du support de φ telle que*

$$|M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)| \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \|u \otimes \varphi\|_\infty \|v \otimes \psi\|_\infty.$$

Nous démontrerons ces deux propositions dans les sous-sections 5.2.2 et 5.2.3 de ce chapitre. Dans un premier temps, expliquons comment le théorème A en découle.

5.2.1 Équivalent pour $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$

La proposition A.1 nous permet d'écrire

$$M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) + M^2(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) + M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$$

où

$$M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) := n_{T_1}(u \otimes \varphi) n_{T_1}(v \otimes \psi) \sum_{k \mid R < K a_k} \frac{1}{e_{\Gamma} a_k} \Psi_{\beta} \left(\frac{R}{e_{\Gamma} a_k} \right),$$

$$M^2(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) := \sum_{k \mid R < K a_k} \frac{o_k(1)}{e_{\Gamma} a_k},$$

$$\text{et } M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) := \sum_{k \mid R \geq K a_k} M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi).$$

a) *Contribution de $M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$.* Suivant [Gou11], on introduit la mesure

$$\mu_R = \sum_{0 < \frac{R}{a_k} \leq K} D_{\frac{R}{a_k}} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de telle manière que}$$

$$\sum_{k \mid R < K a_k} \frac{1}{e_{\Gamma} a_k} \Psi_{\beta} \left(\frac{R}{e_{\Gamma} a_k} \right) = \frac{1}{R} \int_0^K \frac{z}{e_{\Gamma}} \Psi_{\beta} \left(\frac{z}{e_{\Gamma}} \right) d\mu_R(z). \quad (5.2)$$

Identifions dans un premier temps la limite faible sur $]0, K[$ de la suite de mesures $(R^{-\beta} L(R) \mu_R)_R$. Pour tout $[x, y] \subset]0, K[$, on a

$$\mu_R([x, y]) = \sum_{k \mid x \leq \frac{R}{a_k} \leq y} 1 = \sum_{k \mid \frac{R}{y} \leq a_k \leq \frac{R}{x}} 1.$$

Rappelons maintenant quelques propriétés de la fonction $A(t) = \frac{t^{\beta}}{L(t)}$ et de son inverse généralisée A^* données dans le chapitre 3. Vu la définition de A , il vient $A(a_n) = n$. L'inverse généralisée A^* est une fonction à variations régulières d'indice $\frac{1}{\beta}$ satisfaisant $a_n = A^*(n)$.

Lemme 5.2.1. *Dès que R est assez grand, on a*

$$\left\{ k \mid A \left(\frac{R}{y} \right) \leq k \leq A \left(\frac{R}{x} - 1 \right) \right\} \subset \left\{ k \mid \frac{R}{y} \leq a_k \leq \frac{R}{x} \right\}$$

$$\text{et } \left\{ k \mid \frac{R}{y} \leq a_k \leq \frac{R}{x} \right\} \subset \left\{ k \mid A \left(\frac{R}{y} \right) \leq k \leq A \left(\frac{R}{x} \right) \right\}.$$

Démonstration. De la croissance de l'inverse généralisée A^* et des inégalités $A^*(A(t)) \geq t$ et $A^*(A(t-1)) \leq t$ pour tout $t \gg 1$ (voir [Tho13]), on déduit

- $A \left(\frac{R}{y} \right) \leq k$ implique $\frac{R}{y} \leq A^*(k)$;
- $k \leq A \left(\frac{R}{x} - 1 \right)$ implique $A^*(k) \leq \frac{R}{x}$.

La première inclusion découle alors du fait que $A^*(k) = a_k$. La seconde inclusion est une conséquence de la croissance de la fonction A . \square

On déduit de ce lemme l'encadrement suivant

$$\sum_{A\left(\frac{R}{y}\right) \leq k \leq A\left(\frac{R}{x}-1\right)} 1 \leq \mu_R([x, y]) \leq \sum_{A\left(\frac{R}{y}\right) \leq k \leq A\left(\frac{R}{x}\right)} 1,$$

qui s'écrit encore

$$A\left(\frac{R}{x}-1\right) - A\left(\frac{R}{y}\right) \leq \mu_R([x, y]) \leq A\left(\frac{R}{x}\right) - A\left(\frac{R}{y}\right);$$

il vient alors

$$\mu_R([x, y]) \sim A\left(\frac{R}{x}\right) - A\left(\frac{R}{y}\right) \sim \frac{R^\beta}{L(R)} (x^{-\beta} - y^{-\beta})$$

et finalement

$$R^{-\beta} L(R) \mu_R([x, y]) \sim \int_x^y \beta z^{-\beta-1} dz. \quad (5.3)$$

Nous cherchons à présent à contrôler la quantité

$$\sum_{k \mid R < a_k \varepsilon} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta\left(\frac{R}{e_\Gamma a_k}\right)$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Dans cette optique, fixons $\eta > 0$. Pour tout $R \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il vient

$$\left| R^{1-\beta} L(R) \sum_{k \mid R < \varepsilon a_k} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta\left(\frac{R}{e_\Gamma a_k}\right) \right| \leq R^{1-\beta} L(R) \sum_{k \mid R < \varepsilon a_k} \frac{1}{a_k}. \quad (5.4)$$

Soit maintenant $N = N(\varepsilon, R)$ le premier entier k tel que $R < \varepsilon a_k$: N croît avec R . Le lemme de Karamata implique alors

$$\left| \sum_{k \mid R < \varepsilon a_k} \frac{1}{a_k} \right| = \sum_{k \geq N} \frac{1}{a_k} \sim \frac{N}{a_N}.$$

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

De l'égalité $a_N^\beta = NL(a_N)$, on déduit que $\frac{N}{a_N} = \frac{1}{a_N^{1-\beta} L(a_N)}$, d'où

$$R^{1-\beta} L(R) \frac{N}{a_N} \leq \varepsilon^{1-\beta} \frac{L(R)}{L(a_N)} \leq \varepsilon^{1-\beta} \max\left(\frac{R}{a_N}, \frac{a_N}{R}\right)^{\frac{1-\beta}{2}}, \quad (5.5)$$

où la dernière inégalité est une conséquence du lemme de Potter 3.2.4 avec $B = 1$, $\rho = \frac{1-\beta}{2}$, $x = R$ et $y = a_N$. De l'hypothèse sur N , il vient $\frac{R}{a_N} < \varepsilon$ et $\varepsilon a_{N-1} \leq R$; d'où

$$\frac{a_N}{R} = \frac{a_{N-1}}{R} \frac{a_N}{a_{N-1}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{a_N}{a_{N-1}} \preceq \frac{1}{\varepsilon}$$

pour N suffisamment grand. Finalement, cette dernière estimation combinée avec (5.5) donne

$$R^{1-\beta} L(R) \frac{N}{a_N} \preceq \varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

D'après (5.4), on déduit l'existence de $\varepsilon_\eta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_\eta$ on ait

$$\left| R^{1-\beta} L(R) \sum_{k \mid R < a_k \varepsilon} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta\left(\frac{R}{e_\Gamma a_k}\right) \right| \leq \eta. \quad (5.6)$$

Finalement, pour tout $\eta > 0$, il existe un $\varepsilon_\eta > 0$ tel que pour tout R suffisamment grand, les propriétés (5.2), (5.3) et (5.6) impliquent

$$\begin{aligned} R^{1-\beta} L(R) \sum_{k \mid R < K a_k} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta\left(\frac{R}{e_\Gamma a_k}\right) \\ = O(\eta) + R^{1-\beta} L(R) \int_{\varepsilon_\eta}^K \frac{z}{e_\Gamma} \Psi_\beta\left(\frac{z}{e_\Gamma}\right) d\mu_R(z) \\ = O(\eta) + \left(\frac{\beta}{e_\Gamma} \int_{\varepsilon_\eta}^K z^{-\beta} \Psi\left(\frac{z}{e_\Gamma}\right) dz \right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

où $\lim_{R \rightarrow +\infty} o(1) = 0$. De l'intégrabilité de la fonction $z \mapsto z^{-\beta} \Psi_\beta(z)$ sur $[0, +\infty[$ donnée dans [Zol86], on déduit que, quitte à diminuer $\varepsilon_\eta > 0$, il vient

$$\left| \int_0^{\varepsilon_\eta} z^{-\beta} \Psi_\beta\left(\frac{z}{e_\Gamma}\right) dz \right| \leq \eta$$

d'où finalement, quand $R \rightarrow +\infty$

$$R^{1-\beta} L(R) \sum_{k \mid R < K a_k} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta\left(\frac{R}{e_\Gamma a_k}\right) \sim \frac{\beta}{e_\Gamma} \int_0^K z^{-\beta} \Psi_\beta\left(\frac{z}{e_\Gamma}\right) dz. \quad (5.7)$$

Il découle alors immédiatement de la définition de $M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ et de (5.7) que, lorsque $R \rightarrow +\infty$

$$R^{1-\beta} L(R) M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \sim \frac{\beta n_{T_1}(u \otimes \varphi) n_{T_1}(v \otimes \psi)}{E_\Gamma} \int_0^{\frac{K}{e_\Gamma}} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz \quad (5.8)$$

avec $E_\Gamma = e_\Gamma^\beta$.

b) *Contribution de $M^2(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$.* Soit $N = N(K, R)$ le premier entier tel que $K a_N > R$: $N(R)$ croît avec R . Soit $\varepsilon > 0$; pour R suffisamment grand et tout $k \geq N$, on a $|o_k(1)| \leq \varepsilon$. Le lemme de Karamata implique alors

$$\left| \sum_{k \mid R < K a_k} \frac{o_k(1)}{e_\Gamma a_k} \right| \leq \sum_{k \geq N} \frac{\varepsilon}{a_k} \sim \varepsilon \frac{N}{a_N}.$$

En suivant les mêmes étapes que dans le a) pour les termes négligeables de $M^1(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$, on déduit de $\frac{N}{a_N} = \frac{1}{a_n^{1-\beta} L(a_N)}$ que

$$R^{1-\beta} L(R) \frac{N}{a_N} \leq K^{1-\beta} \frac{L(R)}{L(a_N)}$$

et le lemme de Potter avec $B = \rho = 1$ et $x = R$ et $y = a_N$ fournit $R^{1-\beta} L(R) \frac{N}{a_N} \leq K^{2-\beta}$, si bien que quand $R \rightarrow +\infty$

$$R^{1-\beta} L(R) M^2(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = o_K(1). \quad (5.9)$$

c) *Contribution de $M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$.* On écrit

$$\left| M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \right| \leq \sum_{k \mid R \geq K a_k} |M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)|.$$

D'après la proposition A.2, il vient

$$M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \leq \|u \otimes \varphi\|_\infty \|v \otimes \psi\|_\infty C \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \sum_{k \mid R \geq K a_k} k$$

et de la définition de la fonction A , on déduit

$$\sum_{k \mid R \geq K a_k} k = \sum_{k \mid k \leq A\left(\frac{R}{K}\right)} k \leq A \left(\frac{R}{K}\right)^2,$$

si bien que

$$\left| M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \right| \leq \|u \otimes \varphi\|_\infty \|v \otimes \psi\|_\infty C \frac{L(R) R^{2\beta}}{R^{1+\beta} K^{2\beta}} \frac{1}{L\left(\frac{R}{K}\right)^2}.$$

Le lemme de Potter (3.2.4) implique $\frac{L(R)}{L(R/K)} \leq K^{\frac{\beta}{2}}$ pour R suffisamment grand et l'on en conclut que

$$R^{1-\beta} L(R) M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \leq C \|u \otimes \varphi\|_\infty \|v \otimes \psi\|_\infty K^{-\beta}. \quad (5.10)$$

En combinant (5.8), (5.9) et (5.10), il vient

$$\begin{aligned} R^{1-\beta} L(R) M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ = \frac{\beta n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi) n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi)}{E_\Gamma} \int_0^{\frac{K}{e_\Gamma}} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz (1 + o(1)) \\ + o_K(1) + O(K^{-\beta}), \end{aligned}$$

où $\lim_{R \rightarrow +\infty} o(1) = 0$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} o_K(1) = 0$ pour K fixé. En choisissant K assez grand, puis en faisant tendre R vers l'infini, on obtient

$$R^{1-\beta} L(R) M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \sim \frac{\beta n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi) n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi)}{E_\Gamma} \int_0^{+\infty} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz.$$

De [Zol86], on déduit

$$\int_0^{+\infty} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz = \frac{\sin(\beta\pi)}{\beta\pi};$$

d'après la section 1, on a également $n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi) = m_\Gamma(u \otimes \varphi)$ et $n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi) = m_\Gamma(v \otimes \psi)$, et cette dernière remarque achève la démonstration du théorème A avec $C = \frac{\sin(\beta\pi)}{E_\Gamma\pi}$.

5.2.2 Démonstration de la proposition A.1

Le but de cette partie est de démontrer le théorème limite local suivant

Proposition A.1. *Soient $u, v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues à support compact. Alors, uniformément en $K \geq 2$ et*

$R \in [0, Ka_k]$, nous avons lorsque $k \rightarrow +\infty$

$$M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \frac{1}{e_\Gamma a_k} \left(\Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) n_{T_1}(u \otimes \varphi) n_{T_1}(v \otimes \psi) + o_k(1) \right),$$

où Ψ_β est la densité de la loi stable asymétrique de paramètre β et $e_\Gamma = E_\Gamma^{\frac{1}{\beta}}$.

Dans cette démonstration, nous fixons $R > 0$ et considérons les entiers k tels que $Ka_k > R$, où $K > 2$ est fixé. On rappelle d'abord que pour un tel k

$$M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds.$$

Il nous faut montrer que la suite de mesures

$$\left(a_k M_k(R; u \otimes \cdot, v \otimes \psi) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \left(\nu(u) \int_{\mathbb{R}} \cdot(x) dx \right) n_{T_1}(v \otimes \psi) \right)_{k|Ka_k > R},$$

converge faiblement vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ et ce uniformément en K et R . En utilisant un argument dû à Stone ([BP00] p.106), il est suffisant de vérifier que $a_k M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est fini et que

$$a_k M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) n_{T_1}(v \otimes \psi) \nu(u) \hat{\varphi}(0) \rightarrow 0$$

pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une transformée de Fourier \mathcal{C}^∞ à support compact. Plus précisément, introduisons la

Définition 5.2.2. Soit \mathcal{H} la classe de fonctions test φ de la forme $\varphi(x) = e^{itx} \varphi_0(x)$ où $t \in \mathbb{R}$ et φ_0 appartient à l'ensemble des fonctions positives de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , intégrables et dont la transformée de Fourier est \mathcal{C}^∞ et à support compact.

On montre d'abord que la quantité $a_k M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est finie pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. D'après la formule d'inversion de Fourier et la définition de \tilde{P}^k donnée dans le lemme 4.2.3, on écrit

$$\begin{aligned} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) &= \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{i(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \frac{uh(\gamma, x)}{h(x)} \varphi(s - R + b(\gamma, x)) \\ &= \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\delta+it}^k uh \right)(x) \hat{\varphi}(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque h est une fonction propre strictement positive de l'opérateur \mathcal{L}_δ pour la valeur

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

propre 1, la quantité précédente est bornée par $\|uh\|_\infty \|\widehat{\varphi}\|_1$ à une constante multiplicative près. La fonction $v \otimes \psi$ étant intégrable sur $\Lambda \times \mathbb{R}$, le terme $M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est fini lorsque $\varphi \in \mathcal{H}$.

La proposition A.1 est alors une conséquence du lemme suivant et du théorème de convergence dominée

Lemme 5.2.3. *Quand $k \rightarrow +\infty$*

$$\frac{a_k}{2\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\delta+it}^k uh \right) (x) \widehat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) \rightarrow 0,$$

uniformément en $x \in \Lambda$, $s \in \text{supp } v$, R et K .

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ selon la proposition 4.2.14. D'après la formule d'inversion de Fourier pour Ψ_β et la définition de la fonction caractéristique g_β de la loi stable de paramètre β , on peut écrire

$$\frac{a_k}{2\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\delta+it}^k uh \right) (x) \widehat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) = K_1(k) + K_2(k)$$

où

$$K_1(k) = \frac{a_k}{2\pi h(x)} \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\delta+it}^k uh \right) (x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned} K_2(k) &= \frac{a_k}{2\pi h(x)} \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\delta+it}^k uh \right) (x) \widehat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it \frac{R-s}{a_k}} \left(\mathcal{L}_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k uh \right) (x) \widehat{\varphi} \left(\frac{t}{a_k} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) dt. \end{aligned}$$

Puisqu'il existe $\rho \in]0, 1[$ pour lequel $\|\mathcal{L}_{\delta+it}\| \leq \rho$ pour tout $t \in (\text{supp } \widehat{\varphi}) \cap (\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])$, on a $|K_1(k)| \leq a_k \rho^k$, quantité qui tend vers 0 uniformément en x , s , R et K lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Contrôlons à présent le terme $K_2(k)$. En utilisant la décomposition spectrale de $\mathcal{L}_{\delta+i \frac{t}{a_k}}$, on écrit pour tout $t \in [-\varepsilon a_k, \varepsilon a_k]$

$$\mathcal{L}_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k (uh) = \lambda_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k \Pi_{\delta+i \frac{t}{a_k}} (uh) + R_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k (uh)$$

où $R_{\delta+i \frac{t}{a_k}}$ a un rayon spectral $\leq \rho_\varepsilon < 1$. La quantité $K_2(k)$ se décompose en $L_1(k) + L_2(k)$

où

$$L_1(k) = \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it \frac{R-s}{a_k}} R_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k (uh)(x) \widehat{\varphi} \left(\frac{t}{a_k} \right) dt$$

et

$$\begin{aligned} L_2(k) &= \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it \frac{R-s}{a_k}} \lambda_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k \Pi_{\delta+i \frac{t}{a_k}} (uh)(x) \widehat{\varphi} \left(\frac{t}{a_k} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_{\beta}(e_{\Gamma} t) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) dt. \end{aligned}$$

On a $|L_1(k)| \leq a_k \rho_{\varepsilon}^k$: cette quantité tend donc vers 0 uniformément en x , s , R et K lorsque $k \rightarrow +\infty$. On décompose $L_2(k)$ en $M_1(k) + M_2(k)$ où

$$M_1(k) = \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it \frac{R-s}{a_k}} \lambda_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k \left(\Pi_{\delta+i \frac{t}{a_k}} (uh)(x) - \Pi_{\delta} (uh)(x) \right) \widehat{\varphi} \left(\frac{t}{a_k} \right) dt$$

et

$$\begin{aligned} M_2(k) &= \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it \frac{R-s}{a_k}} \lambda_{\delta+i \frac{t}{a_k}}^k \Pi_{\delta} (uh)(x) \widehat{\varphi} \left(\frac{t}{a_k} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_{\beta}(e_{\Gamma} t) \nu(u) \widehat{\varphi}(0) dt. \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction caractéristique g_{β} d'une loi stable de paramètre β (voir chapitre 3) est donnée par $g_{\beta}(t) = \exp \left(-\Gamma(1-\beta) e^{i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} |t|^{\beta} \right)$. On peut remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|g_{\beta}(t)| \leq e^{-(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|t|^{\beta}}$: cette fonction est donc intégrable sur \mathbb{R} . De plus, la proposition 4.2.19 implique que pour t proche de 0, la valeur propre dominante $\lambda_{\delta+it}$ satisfait

$$\lambda_{\delta+it} = e^{-\Gamma(1-\beta) e^{i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} |e_{\Gamma} t|^{\beta} L \left(\frac{1}{|t|} \right) (1+o(1))}.$$

La régularité de l'application $t \mapsto \Pi_{\delta+it}$ implique que l'intégrande de M_1 tend vers 0 uniformément en x , $s \in \operatorname{supp} v$, R et K ; il nous suffit donc de la majorer par une fonction intégrable. De la proposition 4.2.12, on déduit

$$\left| \Pi_{\delta+i \frac{t}{a_k}} (uh)(x) - \Pi_{\delta} (uh)(x) \right| \leq \left\| \Pi_{\delta+i \frac{t}{a_k}} - \Pi_{\delta} \right\| \|uh\| \leq \frac{|t|^{\beta}}{a_k^{\beta}} L \left(\frac{a_k}{|t|} \right),$$

avec

$$\frac{L \left(\frac{a_k}{|t|} \right)}{L(a_k)} \leq \max \left(\frac{1}{|t|}, |t| \right)^{\frac{\beta}{2}}$$

pour tout k assez large et uniformément en $t \in [-\varepsilon a_k, \varepsilon a_k]$ de part le choix de ε énoncé

dans la remarque 4.2.15. Donc

$$\left| \Pi_{\delta+i\frac{t}{a_k}}(uh)(x) - \Pi_{\delta}(uh)(x) \right| \leq \begin{cases} \frac{L(a_k)}{a_k^\beta} |t|^{\frac{\beta}{2}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ \frac{L(a_k)}{a_k^\beta} |t|^{\frac{3\beta}{2}} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}.$$

De même, les inégalités

$$\left| \lambda_{\delta+i\frac{t}{a_k}}^k \right| \leq e^{-(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\beta} \frac{k}{a_k^\beta} L(a_k) \frac{L(a_k/|t|)}{L(a_k)} (1+o(1))}$$

et

$$\min\left(\frac{1}{|t|}, |t|\right)^{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{L\left(\frac{a_k}{|t|}\right)}{L(a_k)}$$

combinées avec le fait que $a_k^\beta = kL(a_k)$ nous donnent

$$\left| \lambda_{\delta+i\frac{t}{a_k}}^k \right| \leq \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{3\beta}{2}}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{\beta}{2}}} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}.$$

À une constante multiplicative près, l'intégrande de M_1 est donc majorée pour k assez grand par

$$l(t) = \begin{cases} |t|^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{3\beta}{2}}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ |t|^{\frac{3\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{\beta}{2}}} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}.$$

La quantité $M_2(k)$ se décompose quant à elle en $N_1(k) + N_2(k) + N_3(k)$ où

$$\begin{aligned} N_1(k) &= \frac{\nu(u)}{2\pi} \int_{[-\varepsilon a_k, \varepsilon a_k]^c} e^{it\frac{R}{a_k}} g_{\beta}(e_{\Gamma}t) \widehat{\varphi}(0) dt, \\ N_2(k) &= \frac{\nu(u)}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it\frac{R}{a_k}} g_{\beta}(e_{\Gamma}t) \left(\widehat{\varphi}(0) - \widehat{\varphi}\left(\frac{t}{a_k}\right) \right) dt \\ \text{et } N_3(k) &= \frac{\nu(u)}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{it\frac{R}{a_k}} \left(e^{-it\frac{s}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{t}{a_k}}^k - g_{\beta}(e_{\Gamma}t) \right) \widehat{\varphi}\left(\frac{t}{a_k}\right) dt. \end{aligned}$$

Le terme $N_1(k)$ tend vers 0 uniformément en x , s , R et K . Il en est de même pour $N_2(k)$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $\widehat{\varphi}$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Enfin, pour $N_3(k)$, l'intégrande tend vers 0 uniformément en $s \in \text{supp } \nu$ et l'on majore $\left| e^{-it\frac{s}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{t}{a_k}}^k - g_{\beta}(e_{\Gamma}t) \right|$ par une fonction intégrable sur \mathbb{R} , à savoir $e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{3\beta}{2}}} + |g_{\beta}(e_{\Gamma}t)|$ pour $|t| \leq 1$ et

$e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_{\Gamma}t|^{\frac{\beta}{2}}} + |g_{\beta}(e_{\Gamma}t)|$ lorsque $|t| > 1$. Cette dernière estimée conclut la preuve du lemme. \square

5.2.3 Démonstration de la proposition A.2

Dans cette partie, on va donner un contrôle des termes M_k non-influents dans la convergence du théorème A. Rappelons encore une fois la définition de la quantité M_k :

$$M_k(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds,$$

où l'opérateur \tilde{P} est défini dans le lemme 4.2.3. Pour démontrer la proposition A.2., il nous suffit de vérifier que l'on a

$$\left| \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) \right| \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \|u \otimes \varphi\|_{\infty}$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \text{supp } \psi$. Il vient

$$\begin{aligned} \left| \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) \right| &\leq \frac{1}{h(x)} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} |(uh)(\gamma \cdot x) \varphi(s - R + b(\gamma, x))| \\ &\leq \|u \otimes \varphi\|_{\infty} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s}} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \end{aligned}$$

où la notation $a \stackrel{M}{\sim} b$ signifie que $|a - b| \leq M$: en d'autres termes, lorsque R tend vers $+\infty$, les seules transformations γ jouant un rôle ci-dessus sont celles qui rendent $b(\gamma, x)$ de l'ordre de $R - s$ (au support compact de φ près). Il suffit donc de montrer

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s}} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \quad (5.11)$$

où C dépend seulement du support de φ . La démonstration suit les étapes de celle du théorème 1.6 dans [Gou11]. Puisque $R > Ka_k$, on écrit $R = wa_k$ pour un certain $w \geq 1$ et on introduit la troncature ζ suivante : $\zeta = w^{\rho} \frac{a_k}{2} \in \left[\frac{a_k}{2}, \frac{R}{2} \right]$, pour $\rho \in (0, 1)$ proche de 1. Une estimation plus précise de ρ sera nécessaire au cours de la démonstration. L'introduction de ζ va nous permettre d'utiliser l'écart entre R et a_k pour partitionner l'ensemble

$$\mathfrak{J} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \alpha_1 \dots \alpha_k \text{ admissible, } b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R - s\} \quad (5.12)$$

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

en $\tilde{\mathcal{J}} = \tilde{\mathcal{J}}_1 \cup \tilde{\mathcal{J}}_2 \cup \tilde{\mathcal{J}}_3 \cup \tilde{\mathcal{J}}_4$ où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_1 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \exists r, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}\}; \\ \tilde{\mathcal{J}}_2 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \frac{R}{2}; \exists r < t, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}), d(\mathbf{o}, \alpha_t \cdot \mathbf{o}) \geq \zeta\}; \\ \tilde{\mathcal{J}}_3 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \frac{R}{2}; \exists! r, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \zeta\}; \\ \tilde{\mathcal{J}}_4 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \zeta\}.\end{aligned}$$

On va montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\Sigma_i := \sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \tilde{\mathcal{J}}_i}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}}$$

en utilisant les deux lemmes suivants :

Lemme 5.2.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in \Lambda$*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq C.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} h(\gamma \cdot x) \leq \mathcal{L}_\delta^k h(x) \leq |h|_\infty.$$

□

Lemme 5.2.5. *Soit $\Delta > 0$. Il existe une constante $C_\Delta > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, pour tout $x \in \Lambda$ et tout $\zeta \in [\frac{a_k}{2}, \infty]$*

$$\sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq C_\Delta \frac{e^{-\frac{R}{\zeta}}}{a_k}.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et dont la transformée de Fourier est à support compact ; notons que

$$\sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)}$$

$$\leq \frac{e^{-\frac{R}{\zeta}}}{\min_{[-\Delta, \Delta]} f} \sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{\frac{R}{\zeta}} e^{-\delta b(\gamma, x)} f(R - b(\gamma, x)).$$

La condition $R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta$ impose alors que la dernière somme apparaissant est majorée par

$$e^{\frac{\Delta}{\zeta}} \sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-(\delta - \frac{1}{\zeta})b(\gamma, x)} f(R - b(\gamma, x)).$$

Le paramètre ζ étant grand dans ce lemme, le terme $e^{\frac{\Delta}{\zeta}}$ est proche de 1. D'après la formule d'inversion de Fourier, on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ R - \Delta \leq b(\gamma, x) \leq R + \Delta \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \\ & \leq \frac{e^{-\frac{R}{\zeta}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \left(\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \mathbb{1}_{\Lambda} \right) (x) \widehat{f}(t) dt \end{aligned}$$

où l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}$ est défini par : pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\Lambda)$

$$\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta} \varphi = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o}) \leq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\alpha)}^c} e^{-(\delta - \frac{1}{\zeta} + it)b(\alpha, \cdot)} \varphi(\alpha \cdot \cdot).$$

Il nous reste donc à montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{itR} \left(\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \mathbb{1}_{\Lambda} \right) (x) \widehat{f}(t) dt$ est $\leq \frac{C}{a_k}$.

Décomposons-la en $I_1 + I_2$ avec

$$I_1 := \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c} e^{itR} \left(\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \mathbb{1}_{\Lambda} \right) (x) \widehat{f}(t) dt$$

et

$$I_2 := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{itR} \left(\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \mathbb{1}_{\Lambda} \right) (x) \widehat{f}(t) dt$$

où ε est choisi comme dans la proposition 4.2.14. Remarquons tout d'abord que l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}$ est une perturbation continue de $\mathcal{L}_{\delta + it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, on peut

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

déduire des hypothèses (P_2) et (N) que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta} - \mathcal{L}_{\delta + it} \right\| &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) \leq \zeta}} \left\| w_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it}(\alpha, \cdot) - w_{\delta + it}(\alpha, \cdot) \right\| + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > \zeta}} \|w_{\delta + it}(\alpha, \cdot)\| \\ &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) \leq \zeta}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\alpha)}^c} e^{-(\delta + it)b(\alpha, \cdot)} \left(e^{\frac{1}{\zeta} b(\alpha, \cdot)} - 1 \right) \right\| + C \frac{L(\zeta)}{\zeta^\beta}. \end{aligned}$$

Des inégalités

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\alpha)}^c} e^{-(\delta + it)b(\alpha, \cdot)} \right\| \preceq e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \text{ et } \left\| e^{\frac{1}{\zeta} b(\alpha, \cdot)} - 1 \right\| \preceq \frac{1}{\zeta} (1 + d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})) e^{\frac{1}{\zeta} d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}$$

satisfaites pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il vient

$$\left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta} - \mathcal{L}_{\delta + it} \right\| \preceq \frac{L(\zeta)}{\zeta^\beta}.$$

Le lemme de Potter implique alors que pour k assez grand et $\zeta \geq \frac{a_k}{2}$

$$\left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta} - \mathcal{L}_{\delta + it} \right\| \leq C a_k^{-\beta} L(a_k) \leq \frac{C}{k}. \quad (5.13)$$

En combinant le fait que $\rho(\delta + it) < 1$ pour $|t| \in \text{supp } \widehat{f} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ et (5.13), on déduit l'existence de $\rho \in]0, 1[$ tel que

$$|I_1| \leq C \int_{|t| \geq \varepsilon} \left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \right\| \widehat{f}(t) dt \leq \frac{C}{a_k} \int_{|t| \geq \varepsilon} a_k \rho^k \widehat{f}(t) dt.$$

Puisque la suite $(a_k \rho^k)$ converge vers 0, on obtient la borne désirée pour I_1 . En outre, d'après la proposition 4.2.14 et l'estimation (5.13), pour k suffisamment grand (et donc ζ assez grand) et t assez proche de 0, l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}$ possède une unique valeur propre $\lambda_{t, \frac{1}{\zeta}}$ proche de 1, dominante et isolée dans le spectre de $\mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}$. En particulier $|\lambda_{t, \frac{1}{\zeta}} - \lambda_{\delta + it}| \leq \frac{C}{k}$. Pour estimer I_2 , il suffit de montrer que

$$J := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \right\| dt \leq \frac{C}{a_k}. \quad (5.14)$$

On écrit $J = J_1 + J_2$ où

$$J_1 = \int_{-\frac{C_1}{a_k}}^{\frac{C_1}{a_k}} \left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \right\| dt$$

et

$$J_2 = \int_{[-\varepsilon, \varepsilon] \setminus [-\frac{C_1}{a_k}, \frac{C_1}{a_k}]} \left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \right\| dt,$$

où la constante $C_1 > 0$ sera choisie ultérieurement. Concernant J_1 , puisque $|\lambda_{\delta+it}| \leq 1$, il vient $|\lambda_{t, \frac{1}{\zeta}}| \leq 1 + \frac{C}{k}$; d'où $\left\| \mathcal{L}_{\delta - \frac{1}{\zeta} + it, \zeta}^k \right\| \leq C$. La contribution de J_1 est alors bornée par $\frac{CC_1}{a_k}$ pour $C_1 > 0$.

De la proposition 4.2.19, on déduit qu'il existe $c > 0$ telle que pour $|t| \in [\frac{C_1}{a_k}, \varepsilon]$, on a

$$|\lambda_{t, \frac{1}{\zeta}}| \leq |\lambda_{\delta+it}| + \frac{C}{k} \leq 1 - c|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) + \frac{C}{k},$$

avec, lorsque $k \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{k} \sim a_k^{-\beta} L(a_k) \leq C_1^{\frac{\beta}{2}} a_k^{-\beta} L\left(\frac{a_k}{C_1}\right) \leq \frac{|t|^\beta}{C_1^{\frac{\beta}{2}}} L\left(\frac{1}{|t|}\right).$$

Donc, pour C_1 suffisamment grand, on a

$$|\lambda_{t, \frac{1}{\zeta}}| \leq 1 - c'|t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

où $c' > 0$. D'où

$$J_2 \leq C \int_{\frac{C_1}{a_k}}^{\varepsilon} \left(1 - c'|t|^\beta L\left(\frac{1}{t}\right)\right)^k dt \leq C \int_{\frac{C_1}{a_k}}^{\varepsilon} e^{-kc't^\beta L(\frac{1}{t})} dt.$$

Posons $u = ta_k$; le choix du ε donné dans la remarque 4.2.15 nous permet d'utiliser le lemme de Potter et de majorer $\frac{L(\frac{a_k}{u})}{L(a_k)}$ par $u^{\pm \frac{\beta}{2}}$, selon les valeurs de u . Il vient

$$\int_{\frac{C_1}{a_k}}^{\varepsilon} e^{-kc't^\beta L(\frac{1}{t})} dt = \frac{1}{a_k} \int_{C_1}^{\varepsilon a_k} e^{-kc'|u|^\beta |a_k|^{-\beta} L(\frac{a_k}{u})} du$$

$$\leq \frac{1}{a_k} \int_{C_1}^{\varepsilon a_k} e^{-kc'|u|^{\beta \pm \frac{\beta}{2}}} |a_k|^{-\beta} L(a_k) du.$$

Puisque $a_k^\beta = kL(a_k)$, on obtient finalement

$$J_2 \leq \frac{C}{a_k} \int_{C_1}^{\varepsilon a_k} e^{-c'u^{\beta \pm \frac{\beta}{2}}} du \leq \frac{C}{a_k} \int_{C_1}^{\infty} e^{-c'u^{\beta \pm \frac{\beta}{2}}} du,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.2.5. □

Revenons à présent à la démonstration de la proposition A.2. **Pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, on fixe $y_j \in \Lambda \setminus \Lambda_j$ et on note $\Gamma(k, j)$ l'ensemble des transformations $\gamma \in \Gamma$ de longueur symbolique $|\gamma| = k$ et telle que l'indice $l(\gamma)$ soit égal à j .** Introduisons les notations suivantes :

1. pour tous $t > 0$ et $\Delta > 0$

$$\mathcal{A}(t, \Delta) := \{ \gamma \in \Gamma \mid t - \Delta \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) < t + \Delta \};$$

2. pour tous $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{c}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{+*}$

$$Q(\mathbf{l}, \mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(l, j) \\ \gamma \in \mathcal{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e})}} e^{-\delta b(\gamma, y_j)};$$

3. un ensemble $\Omega_r(j_1, j_2, j_3) \subset \Gamma$ défini pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et tous $j_1, j_2, j_3 \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $j_1 \neq j_2$ et $j_2 \neq j_3$ par

$$\begin{aligned} - \Omega_1(j_1, j_2, j_3) &:= \{ \alpha_1 \dots \alpha_k \mid \alpha_1 \in \Gamma_{j_2}^*, \alpha_k \in \Gamma_{j_3}^* \}; \\ - \Omega_r(j_1, j_2, j_3) &:= \{ \alpha_1 \dots \alpha_k \mid \alpha_{r-1} \in \Gamma_{j_1}^*, \alpha_r \in \Gamma_{j_2}^*, \alpha_k \in \Gamma_{j_3}^* \}, \quad 2 \leq r \leq k-1; \\ - \Omega_k(j_1, j_2, j_3) &:= \{ \alpha_1 \dots \alpha_k \mid \alpha_{k-1} \in \Gamma_{j_1}^*, \alpha_k \in \Gamma_{j_2}^* \}. \end{aligned}$$

4. si $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \in \Gamma(k)$, $k \geq 1$, on note $\gamma_0 = \gamma^{k+1} = \text{Id}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $\gamma_j = \alpha_1 \dots \alpha_j$ et $\gamma^j = \alpha_j \dots \alpha_k$.

Contrôle de Σ_1 . Par définition de \mathfrak{J}_1 , si $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{J}_1$, il existe

$r \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}$. La propriété de cocycle de $b(\gamma, x)$ impose

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{\gamma=\alpha_1 \dots \alpha_k \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s \\ d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma_{r-1}, \gamma^r \cdot x)} e^{-\delta b(\alpha_r, \gamma^{r+1} \cdot x)} e^{-\delta b(\gamma^{r+1}, x)} \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3}} \sum_{\substack{\gamma \in \Omega_r(j_1, j_2, j_3) \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma_{r-1}, \gamma^r \cdot x)} e^{-\delta b(\alpha_r, \gamma^{r+1} \cdot x)} e^{-\delta b(\gamma^{r+1}, x)}. \end{aligned}$$

La proposition 4.2.4 implique qu'il existe $D = D(X, \Gamma) > 0$ tel que

$$\begin{cases} |b(\gamma_{r-1}, \gamma^r \cdot x) - b(\gamma_{r-1}, y_{j_1})| \leq D \\ |b(\alpha_r, \gamma^{r+1} \cdot x) - b(\alpha_r, y_{j_2})| \leq D \\ |b(\gamma^{r+1}, x) - b(\gamma^{r+1}, y_{j_3})| \leq D \end{cases}$$

pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, tous $j_1, j_2, j_3 \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $j_1 \neq j_2$ et $j_2 \neq j_3$ et $\gamma \in \Omega_r(j_1, j_2, j_3)$.
Alors

$$\Sigma_1 \leq \sum_{r=1}^k \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3}} \sum_{\substack{\gamma \in \Omega_r(j_1, j_2, j_3) \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma_{r-1}, y_{j_1})} e^{-\delta b(\alpha_r, y_{j_2})} e^{-\delta b(\gamma^{r+1}, y_{j_3})}.$$

En combinant l'estimée $b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s$ avec la propriété de cocycle de $b(\gamma, x)$, il vient

$$b(\gamma_{r-1}, \gamma^r \cdot x) + b(\alpha_r, \gamma^{r+1} \cdot x) + b(\gamma^{r+1}, x) \stackrel{M}{\sim} R-s,$$

d'où

$$b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) + b(\alpha_r, y_{j_2}) + b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \stackrel{M+3D}{\sim} R-s.$$

D'après le corollaire 4.1.6, la condition $d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}$ implique

$$b(\alpha_r, y_{j_2}) \geq \frac{R}{2} - C.$$

Donc $b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) + b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \leq \frac{R}{2} - s + M + 3D + C$. Notons $\Delta = M + 3D + C$. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) \in [(m-1)\Delta, (m+1)\Delta]$ et $b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \in [(n-1)\Delta, (n+1)\Delta]$

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

pour $m \leq N$ et $n \leq N - m$, où

$$N := \left\lceil \frac{\frac{R}{2} - s + \Delta}{2\Delta} \right\rceil + 1.$$

En utilisant les notations précédentes, on peut majorer Σ_1 par

$$\sum_{r=1}^k \sum_{m+n \leq N} (Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) Q(1, R - s - (m+n)\Delta, 3\Delta + 2C) Q(k-r, n\Delta, 2\Delta + 2C)).$$

Pour $0 \leq n, m \leq N$ tels que $n + m \leq N$, le corollaire 4.1.6 entraîne

$$\begin{aligned} Q(1, R - s - (m+n)\Delta, 3\Delta + 2C) &= \sum_{j_2=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{j_2}^* \\ \alpha \in \mathcal{A}(R-s-(m+n)\Delta, 3\Delta+2C)}} e^{-\delta b(\alpha, y_{j_2})} \\ &\preceq \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}(R-s-(m+n)\Delta, 3\Delta+2C)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})}. \end{aligned}$$

En combinant l'hypothèse (S) de la famille (H_β) et le lemme de Potter, on obtient

$$\begin{aligned} Q(1, R - s - (m+n)\Delta, 3\Delta + 2C) &\leq \sup_{t \geq \frac{R}{2} - s} \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}(t, 3\Delta+2C)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o})} \\ &\leq C \sup_{t \geq \frac{R}{2} - s} \frac{L(t)}{t^{1+\beta}} \\ &\leq C \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \end{aligned}$$

où C dépend seulement du support de φ . On peut donc majorer $\frac{R^{1+\beta}}{L(R)} \Sigma_1$ à une constante multiplicative près par

$$\sum_{r=1}^k \left(\sum_{j_1=1}^{p+q} \sum_{\gamma_1 \in \Gamma(r-1)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma_1)}^c}(y_{j_1}) e^{-\delta b(\gamma_1, y_{j_1})} \right) \left(\sum_{j_3=1}^{p+q} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma(k-r)} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma_2)}^c}(y_{j_3}) e^{-\delta b(\gamma_2, y_{j_3})} \right)$$

et le lemme 5.2.4 implique $\Sigma_1 \preceq kR^{-1-\beta} L(R)$.

Contrôle de Σ_2 . Si $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{J}_2$, il existe $r < t$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$ tels que $d(\mathbf{o}, \alpha_r, \mathbf{o}), d(\mathbf{o}, \alpha_t, \mathbf{o}) > \zeta$. On décompose Σ_2 selon les valeurs de r et t comme pour Σ_1 ,

ce qui nous conduit à majorer Σ_2 par la quantité

$$\sum_{r < t} \sum_{m+n+l \leq N} \left(Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) Q(1, R - \zeta - s - (m+n+l)\Delta, 3\Delta + 2C) \right. \\ \left. Q(r-t-1, n\Delta, 2\Delta + 2C) \left(\sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j^* \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) \geq \zeta}} e^{-\delta b(\alpha, y_j)} \right) Q(k-t, l\Delta, 2\Delta + 2C) \right),$$

où $\Delta = M + 5D + 2C$ et $N = \left\lceil \frac{R - 2\zeta - s + \Delta}{2\Delta} \right\rceil + 1$. Il vient

$$Q(1, R - \zeta - s - (m+n+l)\Delta, 3\Delta + 2C) = \sum_{j_2=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{j_2}^* \\ \alpha \in \mathcal{A}(R - \zeta - s - (m+n+l)\Delta, 3\Delta + 2C)}} e^{-\delta b(\alpha, y_{j_2})} \\ \leq C \frac{L(\zeta)}{\zeta^{1+\beta}},$$

où C dépend seulement du support de φ . Les hypothèses (P_2) et (N) sur les groupes $(\Gamma_j)_j$ combinées avec le corollaire 4.1.6 impliquent

$$\sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_j^* \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) \geq \zeta}} e^{-\delta b(\alpha, y_j)} \preceq \frac{L(\zeta)}{\zeta^\beta}.$$

On majore ensuite la quantité

$$\sum_{m+n+l \leq N} Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) Q(r-t-1, n\Delta, 2\Delta + 2C) Q(k-t, l\Delta, 2\Delta + 2C)$$

par $\leq C^3$ en utilisant le lemme 5.2.4 ; après sommation sur $r < t$, on obtient

$$\Sigma_2 \preceq k^2 \zeta^{-2\beta-1} L(\zeta)^2.$$

Puisque $k \sim \frac{a_k^\beta}{L(a_k)}$, $\frac{2\zeta}{a_k} = w^\rho$ et $\frac{R}{\zeta} = 2w^{1-\rho}$, on peut réécrire la dernière inégalité de la manière suivante

$$\Sigma_2 \preceq k \frac{a_k^\beta}{L(a_k)} \frac{L(\zeta)}{\zeta^\beta} \frac{L(\zeta)}{\zeta^{\beta+1}} \frac{R^{\beta+1}}{L(R)} R^{-\beta-1} L(R).$$

5.2. Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$

D'après le lemme de Potter, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{L(\zeta)}{L(a_k)} \leq w^\varepsilon \text{ et } \frac{L(\zeta)}{L(R)} \leq w^\varepsilon.$$

Donc

$$\Sigma_2 \preceq k \cdot w^{-\beta\rho+\varepsilon} \cdot w^{(1-\rho)(\beta+1)+\varepsilon} R^{-\beta-1} L(R).$$

Si $\beta\rho > (1-\rho)(\beta+1)$ (i.e. $\rho > \frac{1+\beta}{1+2\beta}$), l'exposant de w peut être rendu négatif en choisissant ε assez petit. Voilà donc une première précision sur ρ . Au final $\Sigma_2 \preceq kR^{-1-\beta}L(R)$.

Contrôle de Σ_3 . Si $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{J}_3$, il existe un unique r dans $[[1, k]]$ tel que $d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) > \zeta$. Nous traitons séparément les cas où $w \leq k$ et $w > k$. Lorsque $w \leq k$, on a soit $r \leq \frac{k}{w}$ ou $r \geq k + 1 - \frac{k}{w}$, soit $r \in \left[\frac{k}{w}, k + 1 - \frac{k}{w} \right]$.

a) Si $r \leq \frac{k}{w}$ ou $r \geq k + 1 - \frac{k}{w}$, on majore

$$\sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} R-s \\ d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \zeta}} \mathbb{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}^c}(x) e^{-\delta b(\gamma_{r-1}, \gamma^r \cdot x)} e^{-\delta b(\alpha_r, \gamma^{r+1} \cdot x)} e^{-\delta b(\gamma^{r+1}, x)} \quad (5.15)$$

par

$$\sum_{m+n \leq N} (Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) Q(1, R-s-(m+n)\Delta, 3\Delta + 2C) Q(k-r, n\Delta, 2\Delta + 2C)),$$

où $\Delta = M + 3D + C$ et $N = \left\lceil \frac{R-\zeta-s+\Delta}{2\Delta} \right\rceil + 1$. Comme pour Σ_1 , on majore $Q(1, R-s-(m+n)\Delta, 3\Delta + 2C)$ par $C\zeta^{-1-\beta}L(\zeta)$ et le lemme 5.2.4 nous permet de contrôler

$$\sum_{m+n \leq N} (Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) Q(k-r, n\Delta, 2\Delta + 2C))$$

par C . Puisqu'il y a au plus $\frac{2k}{w}$ termes de cette nature, leur contribution totale est au plus

$$\begin{aligned} C \frac{k}{w} \zeta^{-\beta-1} L(\zeta) &= C k w^{-1} \frac{L(\zeta)}{\zeta^{\beta+1}} \frac{R^{\beta+1}}{L(R)} R^{-\beta-1} L(R) |\varphi|_\infty \\ &\preceq k w^{-1} w^{(1-\rho)(\beta+1)+\varepsilon} R^{-\beta-1} L(R), \end{aligned}$$

car

$$\frac{R^{\beta+1}}{\zeta^{\beta+1}} = 2^{\beta+1} w^{(1-\rho)(\beta+1)} \text{ et } \frac{L(\zeta)}{L(R)} \leq \max \left(2w^{1-\rho}, \frac{1}{2}w^{\rho-1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\rho}} = 2^{\frac{\varepsilon}{1-\rho}} w^\varepsilon.$$

Si ρ est assez proche de 1 (i.e. $\rho > \frac{\beta}{1+\beta}$ ici), l'exposant de w est négatif, donc la contribution est bornée par $CkR^{-\beta-1}L(R)$.

b) Supposons maintenant que $r \in \left[\frac{k}{w}, k+1 - \frac{k}{w} \right]$. La condition

$$R - s - M \leq b(\gamma, x) \leq R - s + M$$

et la propriété de cocycle de $b(\gamma, x)$ impliquent

$$b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) + b(\alpha_r, y_{j_2}) + b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \stackrel{M+3D}{\sim} R - s$$

pour tout $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, tout $(j_1, j_2, j_3) \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $j_1 \neq j_2$ et $j_2 \neq j_3$ et tout $\gamma \in \Omega_r(j_1, j_2, j_3)$. Fixons de tels indices r, j_1, j_2 et j_3 ainsi que $\gamma \in \Omega_r(j_1, j_2, j_3)$. La condition $d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) < \frac{R}{2}$ impose $b(\alpha_r, y_{j_2}) < \frac{R}{2} + C$, et donc

$$b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) + b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \geq \frac{R}{2} - s - M - 3D - C.$$

Cette dernière majoration donne

$$1) \ b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) \geq \frac{R}{4} - \frac{s}{2} - \frac{M + 3D + C}{2}$$

ou

$$2) \ b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \geq \frac{R}{4} - \frac{s}{2} - \frac{M + 3D + C}{2}.$$

Nous détaillons uniquement les arguments pour contrôler la somme dans le cas 1), l'autre se traitant de manière similaire. Posons $\Delta = M + 3D$ et soient $m, n, l \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\begin{cases} b(\gamma_{r-1}, y_{j_1}) \in [(m-1)\Delta, (m+1)\Delta] \\ b(\alpha_r, y_{j_2}) \in [(n-1)\Delta, (n+1)\Delta] \\ b(\gamma^{r+1}, y_{j_3}) \in [(l-1)\Delta, (l+1)\Delta] \end{cases}$$

pour $m \leq N$, $n \leq N - m$ et $l = N - m - n$, où $N = \left\lceil \frac{R-s}{\Delta} \right\rceil + 1$. La somme (5.15)

pour $r \in \left[\frac{k}{w}, k+1 - \frac{k}{w} \right]$ peut être majorée par

$$\sum_{m+n+l=N} \left(Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) \sum_{j_2=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A}(l\Delta, 3\Delta+2C) \cap \Gamma_{j_2}^* \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > \zeta}} e^{-\delta b(\alpha, y_{j_2})} \right. \\ \left. Q(k-r, n\Delta, 2\Delta + 2C) \right),$$

puis par

$$(\star) \sup_m \left(Q(r-1, m\Delta, 2\Delta + 2C) \right) \times \left(\sum_{j_2=1}^{p+q} \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{j_2}^* \\ d(\mathbf{o}, \alpha, \mathbf{o}) > \zeta}} e^{-\delta b(\alpha, y_{j_2})} \right) \\ \times \left(\sum_{j_3=1}^{p+q} \sum_{|\gamma_2|=k-r} \mathbb{1}_{\Lambda_{i(\gamma_2)}^c} (y_{j_3}) e^{-\delta b(\gamma_2, y_{j_3})} \right)$$

où la borne supérieure est prise sur $m \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant $m\Delta \geq \frac{R}{4} - \frac{s}{2} - \frac{3}{2}(\Delta + C)$. En combinant le lemme 5.2.5 et le fait que s appartient à un compact de \mathbb{R} pour la borne supérieure, les hypothèses (P_2) et (N) pour le second terme et le lemme 5.2.4 pour la dernière somme, on peut majorer ce terme par

$$C \frac{e^{-\frac{R}{4\zeta}}}{a_{r-1}} \zeta^{-\beta} L(\zeta),$$

pour C dépendant seulement du support de la fonction φ . De $\frac{1}{a_{r-1}} \leq \frac{C}{a_r}$, on déduit que l'expression (\star) est majorée par

$$C e^{-\frac{R}{4\zeta}} \zeta^{-\beta} \frac{L(\zeta)}{a_r}.$$

Puisque $\frac{k}{w} \leq r \leq k+1 - \frac{k}{w}$ et que la suite $(a_i)_i$ est à variations régulières d'exposant $\frac{1}{\beta}$, le lemme de Potter implique $a_r \geq \frac{a_k}{w^{\frac{1}{\beta} + \varepsilon}}$. En outre, $a_k = \frac{R}{w}$ et $\frac{R}{\zeta} = 2w^{1-\rho}$, donc on obtient une majoration de la forme

$$C e^{-\frac{w^{1-\rho}}{2}} w^{C'} R^{-\beta-1} L(R)$$

pour $C' = \frac{1}{\beta} + (1-\rho)(1+\beta) + \varepsilon$. Puisque $\rho < 1$, la borne précédente est majorée

par $CR^{-\beta-1}L(R)$. L'entier r prenant au plus k valeurs, le résultat s'en déduit pour Σ_3 .

Si $k \leq w$, nécessairement $r \in \left[\frac{k}{w}, k+1 - \frac{k}{w}\right]$: la démonstration dans ce cas est la même que pour le b).

Contrôle de Σ_4 . D'après le lemme 5.2.5

$$\Sigma_4 \leq C \frac{e^{-\frac{R}{\zeta}}}{a_k} ;$$

mais $C \frac{e^{-\frac{R}{\zeta}}}{a_k} = C \frac{e^{-2w^{1-\rho}}}{a_k}$ et

$$kR^{-\beta-1}L(R) \sim \frac{a_k^\beta}{L(a_k)} (wa_k)^{-\beta-1}L(wa_k) = \frac{w^{-\beta-1\pm\varepsilon}}{a_k},$$

ce qui achève la démonstration pour cette dernière somme, et finalement, la démonstration de la proposition A.2.

5.3 Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$

Cette partie est dédiée à la démonstration du théorème A dans le cas $\beta = 1$. Les arguments sont légèrement différents du cas $\beta < 1$. Ceci est en partie dû au comportement des primitives des fonctions à variations régulières d'exposant $\beta = 1$. En effet, avec les notations de la famille d'hypothèses (H_β) et en notant

$$\tilde{L}(x) = \int_1^x \frac{L(y)}{y} dy,$$

le lemme de Karamata 3.2.3 affirme que \tilde{L} est une fonction à variations lentes satisfaisant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x)}{\tilde{L}(x)} = 0.$$

Rappelons également que le fait que la mesure de Bowen Margulis est infinie entraîne que la fonction \tilde{L} a une limite infinie en $+\infty$. Les démonstrations présentées dans la suite sont basées sur la démonstration du théorème 2.1 dans le cas $\beta = 1$ de [MT12]. En reprenant les notations introduites à la section 1, le but de cette section est de montrer

5.3. Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$

que lorsque $R \rightarrow \pm\infty$

$$M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \sim \frac{1}{E_\Gamma} \frac{m_\Gamma(u \otimes \varphi)m_\Gamma(v \otimes \psi)}{\tilde{L}(R)}$$

où $u, v : \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ sont lipschitziennes et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues à support compact. Les arguments exposés à la section 1 nous conduisent à ne traiter que le cas $R \rightarrow +\infty$. Le lemme 5.1.1 implique alors que pour R suffisamment grand

$$\begin{aligned} M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) &= M^+(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds \end{aligned}$$

Pour les besoins de l'étude de $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$, nous aurons à intégrer l'application $t \mapsto Q_{\delta+it}$ pour t proche de 0. Or la proposition 4.2.20 nous assure que $t \mapsto Q_{\delta+it}$ n'est pas intégrable en 0. Pour éviter ce problème, nous procédons comme dans la démonstration du théorème 6.1 de [DPPS15] et nous symétrisons la quantité $\tilde{P}^k(u \otimes \varphi)(x, s - R)$. On introduit de ce fait la quantité $(\tilde{P}^{\text{sym}})^k(u \otimes \varphi)(x, s - R)$ suivante :

$$\begin{aligned} (\tilde{P}^{\text{sym}})^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) &= \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\delta b(\gamma, x)} \frac{hu(\gamma \cdot x)}{h(x)} [\varphi(s - R + b(\gamma, x)) + \varphi(s - R - b(\gamma, x))]. \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à étudier $\tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ défini par

$$\tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \sum_{k \geq 0} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} (\tilde{P}^{\text{sym}})^k(u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds.$$

Les fonctions φ et ψ étant à support compact, il vient

$$\tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$$

pour R suffisamment grand. Il suffit donc de montrer que quand $R \rightarrow +\infty$

$$\tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \sim C \frac{n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi)n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi)}{\tilde{L}(R)}. \quad (5.16)$$

En effet, il découle des arguments exposés dans la section 1 que $n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi) = m_\Gamma(u \otimes \varphi)$ et $n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi) = m_\Gamma(v \otimes \psi)$.

Remarque 5.3.1. Si l'on fixe les fonctions u, v (resp. la fonction ψ) dans l'espace des fonctions lipschitziennes (resp. dans l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} à support compact), on s'aperçoit que pour démontrer (5.16), il suffit d'établir la convergence faible vers $Cn_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi)n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi)$ de la suite de mesures $\left(\tilde{L}(R)\tilde{M}(R; u \otimes \cdot, v \otimes \psi)\right)_R$. D'après l'argument de Stone déjà mentionné dans la démonstration de la proposition A.1, il suffit de montrer que $\tilde{L}(R)\tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est fini et converge vers $Cn_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi)n_{\Gamma_1}(v \otimes \psi)$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dans la classe \mathcal{H} introduite dans la définition 5.2.2.

5.3.1 Démonstration de (5.16)

Soit $\varphi(x) = e^{itx}\varphi_0(x)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et φ_0 appartenant à l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{+*} , intégrable et dont la transformée de Fourier est C^∞ à support compact. Pour être en mesure d'invertir des limites et des intégrales par la suite, on introduit la quantité suivante pour $\xi > \delta$: pour tout $k \geq 1$, tous $x \in \Lambda$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{P}_\xi^{\text{sym}}\right)^k (u \otimes \varphi)(x, s - R) \\ & := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\xi b(\gamma, x)} \frac{hu(\gamma \cdot x)}{h(x)} (\varphi(s - R + b(\gamma, x)) + \varphi(s - R - b(\gamma, x))). \end{aligned}$$

On définit alors le terme $\tilde{M}_\xi(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ par

$$\tilde{M}_\xi(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \tag{5.17}$$

$$:= \sum_{k \geq 0} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\tilde{P}_\xi^{\text{sym}}\right)^k (u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds. \tag{5.18}$$

La convergence de la série de Poincaré du groupe Γ en l'exposant $\xi > \delta$ assure que

$$\tilde{M}_\xi(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\sum_{k \geq 0} \left(\tilde{P}_\xi^{\text{sym}}\right)^k (u \otimes \varphi)(x, s - R) \right) v(x) \psi(s) \nu(dx) ds.$$

La formule d'inversion de Fourier pour φ donne alors

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \left(\tilde{P}_\xi^{\text{sym}}\right)^k (u \otimes \varphi)(x, s - R) \\ & = \frac{1}{2\pi h(x)} \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \left(\mathcal{L}_{\xi+it}^k + \mathcal{L}_{\xi-it}^k\right) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \left[\sum_{k \geq 0} \left(\mathcal{L}_{\xi+it}^k + \mathcal{L}_{\xi-it}^k \right) (uh)(x) \right] \widehat{\varphi}(t) dt$$

pour tous $x \in \Lambda$ et $s \in \mathbb{R}$. On en déduit que le terme $\widetilde{M}_{\xi}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est égal à

$$\int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\xi+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \right) v(x) \psi(s) \nu(dx) ds.$$

Pour démontrer (5.16), nous devons comprendre comment relier les quantités $\widetilde{M}_{\xi}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ et $\widetilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 5.3.2.

$$\begin{aligned} & \widetilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi) \\ &= \int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \right) v(x) \psi(s) \nu(dx) ds. \end{aligned}$$

Démonstration. Cette proposition énonce en fait les deux résultats suivants :

- 1) $\lim_{\xi \searrow \delta} \widetilde{M}_{\xi}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ existe et vaut

$$\int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \right) v(x) \psi(s) \nu(dx) ds$$

- 2) cette limite vaut également $\widetilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$.

Pour démontrer le premier point, il suffit de vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\xi+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \xrightarrow{\xi \searrow \delta} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \quad (5.19)$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \operatorname{supp} \psi$. On admet ce résultat pour le moment : sa démonstration, technique, fait l'objet de la sous-section suivante. Montrons maintenant comment le second point découle du premier. Supposons dans un premier temps que les fonctions u, v, φ et ψ sont positives. Au vu de la définition (5.17), le théorème de convergence monotone implique que $\widetilde{M}_{\xi}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ converge vers $\widetilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$. L'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t)$ sur \mathbb{R} donnée par le corollaire 4.2.21 impliquent que $\widetilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est fini pour tous u, v, φ et ψ positives. Le théorème de convergence dominée implique que c'est également le cas pour des fonctions

u, v, φ et ψ de signe arbitraire. En effet, dans ce cas, on majore

$$\int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\tilde{P}_\xi^{\text{sym}} \right)^k (u \otimes \varphi)(x, s - R) v \otimes \psi(x, s) \nu(dx) ds$$

par

$$\int_{\Lambda \times \mathbb{R}} \left(\tilde{P}^{\text{sym}} \right)^k (|u| \otimes |\varphi|)(x, s - R) |v| \otimes |\psi|(x, s) \nu(dx) ds. \quad (5.20)$$

Par définition de la classe de fonctions \mathcal{H} , si $\varphi \in \mathcal{H}$, alors $|\varphi| \in \mathcal{H}$; on déduit de la finitude de $\tilde{M}(R; |u| \otimes |\varphi|, |v| \otimes |\psi|)$ que la famille de termes (5.20) est sommable.

Ces arguments fournissent aussi l'information supplémentaire suivante : pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, la quantité $\tilde{L}(R) \tilde{M}(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ est finie. \square

Ainsi, la proposition 5.3.2 est une conséquence de la

Proposition 5.3.3. *Uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \text{supp } \psi$, il vient quand $R \rightarrow +\infty$*

$$I := \frac{1}{\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \text{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt \sim \frac{n_{\Gamma_1}(u \otimes \varphi)}{E_{\Gamma} \tilde{L}(R)}.$$

Démonstration. Soit $A > 0$. On écrit $I = I_1 + I_2$ où

$$I_1 = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| > \frac{A}{R-s}} e^{it(R-s)} \text{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} e^{it(R-s)} \text{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt.$$

Nous étudions la contribution de I_1 . On peut décomposer cette intégrale selon que le paramètre t est positif ou négatif. Détaillons le contrôle pour l'intégrale

$$J = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{t > \frac{A}{R-s}} e^{it(R-s)} \text{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt,$$

la contribution pour $t < -\frac{A}{R-s}$ se traitant de la même manière. En posant $t = y - \frac{\pi}{R-s}$ dans J , on obtient

$$J = -\frac{1}{\pi h(x)} \int_{y > \frac{A+\pi}{R-s}} e^{iy(R-s)} \text{Re} \left(Q_{\delta+i\left(y-\frac{\pi}{R-s}\right)} \right) (uh)(x) \hat{\varphi} \left(y - \frac{\pi}{R-s} \right) dy,$$

d'où

$$\begin{aligned}
 2J &= \frac{1}{\pi h(x)} \int_{\frac{A}{R-s}}^{\frac{A+\pi}{R-s}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re}(Q_{\delta+it})(uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{\pi h(x)} \int_{t > \frac{A+\pi}{R-s}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re}\left(Q_{\delta+i\left(t-\frac{\pi}{R-s}\right)}\right)(uh)(x) \left(\widehat{\varphi}(t) - \widehat{\varphi}\left(t - \frac{\pi}{R-s}\right)\right) dt \\
 &\quad + \frac{1}{\pi h(x)} \int_{t > \frac{A+\pi}{R-s}} e^{it(R-s)} \left(\operatorname{Re}(Q_{\delta+it}) - \operatorname{Re}\left(Q_{\delta+i\left(t-\frac{\pi}{R-s}\right)}\right)\right)(uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \\
 &=: K_1 + K_2 + K_3.
 \end{aligned}$$

Commençons par le terme K_1 . D'après le corollaire 4.2.21, on a pour tout t proche de 0

$$|\operatorname{Re}(Q_{\delta+it})(uh)(x)| \preceq \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2};$$

donc

$$\begin{aligned}
 |K_1| &\preceq \int_{\frac{A}{R-s}}^{\frac{A+\pi}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t \tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)^2} dt \\
 &\preceq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)} \int_A^{A+\pi} \frac{1}{t} \frac{L\left(\frac{R-s}{t}\right)}{L(R)} \frac{\tilde{L}(R)^2}{\tilde{L}\left(\frac{R-s}{t}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

et le lemme de Potter combiné au fait que s vit dans un compact de \mathbb{R} permet d'obtenir la majoration suivante

$$\begin{aligned}
 |K_1| &\preceq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)} \int_A^{A+\pi} \frac{dt}{t^{\frac{1}{4}}} \\
 &\preceq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)} (A + \pi)^{\frac{3}{4}}.
 \end{aligned}$$

En se rappelant que $\widehat{\varphi}$ a un support compact et en procédant de même, on obtient

$$|K_2| \preceq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)}.$$

Finalement, le lemme de Karamata implique que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R) |K_1 + K_2| = 0. \quad (5.21)$$

Pour $|K_3|$, on a

$$|K_3| \leq \frac{1}{\pi h(x)} \int_{t > \frac{A+\pi}{R-s}} \|Q_{\delta+it}\| \left\| Q_{\delta+i\left(t-\frac{\pi}{R-s}\right)} \right\| \left\| \mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta+i\left(t-\frac{\pi}{R-s}\right)} \right\| |\widehat{\varphi}(t)| dt.$$

Puisqu'il existe $M > 0$ tel que le support de φ soit inclus dans $[-M, M]$, on déduit des propositions 4.2.12 et 4.2.20 que

$$\begin{aligned} |K_3| &\leq \frac{\tilde{L}\left(\frac{R-s}{\pi}\right)}{R-s} \int_{\frac{A+\pi}{R-s}}^M \frac{1}{t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)} \frac{1}{\left(t-\frac{\pi}{R-s}\right)\tilde{L}\left(\frac{1}{t-\frac{\pi}{R-s}}\right)} dt \\ &\leq \frac{\tilde{L}(R)}{R} \int_{\frac{A}{R-s}}^{M-\frac{\pi}{R-s}} \frac{1}{\left(t+\frac{\pi}{R-s}\right)\tilde{L}\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{R-s}}\right)t\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)} dt. \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{t} = \frac{R-s}{t(R-s)}$, le lemme de Potter implique que pour R suffisamment grand, on a

$$\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right) \leq \tilde{L}\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{R-s}}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} |K_2| &\leq \frac{\tilde{L}(R)}{R} \int_{\frac{A}{R}}^M \frac{1}{t^2\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)^2} dt \leq \tilde{L}(R) \int_A^{RM} \frac{1}{t^2\tilde{L}\left(\frac{R}{t}\right)^2} dt \\ &\leq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \int_A^{RM} \frac{\tilde{L}(R)^2}{t^2\tilde{L}\left(\frac{R}{t}\right)^2} dt \leq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \int_A^{RM} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt \\ &\leq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{1}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

En combinant l'estimation ci-dessus et (5.21), il vient $\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R)|J| = 0$ uniformément en $x \in \Lambda$ et en $s \in \text{supp } \psi$. Donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R)|I_1| = 0 \quad (5.22)$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et en $s \in \text{supp } \psi$. Montrons maintenant comment l'intégrale I_2 fournit le terme dominant. On écrit

$$I_2 = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} e^{it(R-s)} \left[\text{Re}(Q_{\delta+it}) - \text{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1}\right) \Pi_{\delta} \right] (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

5.3. Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$

$$+ \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} e^{it(R-s)} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \Pi_{\delta} \right] (uh)(x) \widehat{\psi}(t) dt$$

$$=: K_1 + K_2.$$

D'après la proposition 4.2.20, il vient $|K_1| \leq 2 \frac{A}{R}$ pour R suffisamment grand. On décompose ensuite K_2 en $L_1 + L_2$ où

$$L_1 = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} \left(e^{it(R-s)} - 1 \right) \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \Pi_{\delta} \right] (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

et

$$L_2 = \frac{1}{\pi h(x)} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \Pi_{\delta} \right] (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

Concernant L_1 , puisque $\Pi_{\delta}(uh)(x) = \sigma_{\mathbf{o}}(uh)h(x) = \nu(u)h(x)$, il vient

$$L_1 = \frac{\nu(u)}{\pi} \int_{|t| \leq \frac{A}{R-s}} \left(e^{it(R-s)} - 1 \right) \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

D'après le développement limité de $\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right)$ donné dans (4.2.19), le terme L_1 satisfait

$$\begin{aligned} \tilde{L}(R)L_1 &= \tilde{L}(R) \frac{\nu(u)}{E_{\Gamma}} \int_{|y| \leq A} \frac{(e^{iy} - 1)}{y} \frac{L\left(\frac{R-s}{y}\right)}{\tilde{L}\left(\frac{R-s}{y}\right)^2} \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{R-s}\right) dy \\ &\sim \frac{\nu(u)}{E_{\Gamma}} \frac{L(R-s)}{\tilde{L}(R-s)} \int_{|y| \leq A} \frac{(e^{iy} - 1)}{y} \frac{L\left(\frac{R-s}{y}\right)}{L(R-s)} \frac{\tilde{L}(R-s)^2}{\tilde{L}\left(\frac{R-s}{y}\right)^2} \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{R-s}\right) dy, \end{aligned}$$

et finalement

$$\tilde{L}(R)L_1 \preceq A \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)}. \quad (5.23)$$

Il reste maintenant à traiter le dernier terme L_2 ; nous le décomposons en deux intégrales selon le signe de t . Notons

$$M = \frac{1}{\pi h(x)} \int_0^{\frac{A}{R-s}} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \Pi_{\delta} \right] (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

l'intégrale dont nous détaillons l'étude; celle pour les t négatifs se traite de la même

façon. Comme dans [MT12], notons H la fonction définie de la manière suivante :

$$\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{E_\Gamma} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} (1 + H(t))$$

où $H(t) = o(1)$ quand t est proche de 0. Donc $\sup_{0 \leq t \leq \frac{A}{R-s}} |H(t)|$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On écrit

$$\begin{aligned} M &= \frac{\nu(u)}{\pi} \int_0^{\frac{A}{R-s}} \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it})^{-1} \right) \widehat{\varphi}(t) dt \\ &= \frac{\nu(u)}{2E_\Gamma} \int_0^{\frac{A}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} \widehat{\varphi}(t) dt + \frac{\nu(u)}{2E_\Gamma} \int_0^{\frac{A}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} H(t) \widehat{\varphi}(t) dt \\ &= \frac{\nu(u)}{2E_\Gamma} \int_0^{\frac{A}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} \widehat{\varphi}(t) dt + O \left(\sup_{0 \leq t \leq \frac{A}{R-s}} |H(t)| \int_0^{\frac{A}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} dt \right). \end{aligned}$$

En posant $y = \frac{1}{t}$, il découle d'une intégration par parties que

$$\int_0^{\frac{A}{R-s}} \frac{L\left(\frac{1}{t}\right)}{t\tilde{L}^2\left(\frac{1}{t}\right)} \widehat{\varphi}(t) dt = \frac{\widehat{\varphi}\left(\frac{A}{R-s}\right)}{\tilde{L}\left(\frac{R-s}{A}\right)} + \int_{\frac{R-s}{A}}^{+\infty} \widehat{\varphi}'\left(\frac{1}{y}\right) \tilde{L}(y)^{-1} \frac{dy}{y^2}.$$

Les propriétés des fonctions à variations lentes imposent que le second terme du membre de droite est négligeable devant le premier quand $R \rightarrow +\infty$. De plus, la régularité de $\widehat{\varphi}$ implique que $\widehat{\varphi}\left(\frac{A}{R-s}\right)$ tend vers $\widehat{\varphi}(0)$ uniformément en $s \in \operatorname{supp} \psi$; on en déduit

$$\tilde{L}(R)M \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\nu(u)\widehat{\varphi}(0)}{2E_\Gamma},$$

puis

$$\tilde{L}(R)L_2 \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{E_\Gamma} (\nu(u)\widehat{\varphi}(0)).$$

En combinant ce résultat avec (5.22) et (5.23), il vient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{L}(R)}{\pi h(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt = \frac{n_{T_1}(u \otimes \varphi)}{E_\Gamma}$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \operatorname{supp} \psi$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.3.3. \square

5.3.2 Démonstration de la proposition 5.3.2

Cette sous-section est dédiée à la démonstration de l'assertion (5.19), *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re}(Q_{\xi+it})(uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt \xrightarrow[\xi \searrow \delta]{} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re}(Q_{\delta+it})(uh)(x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \operatorname{supp} \psi$ et pour $\varphi \in \mathcal{H}$. Soient $x \in \Lambda$ et s dans le support compact de ψ . On suit les étapes du paragraphe 6 de [MT12]. Pour montrer cette convergence, l'idée est d'utiliser un développement limité de $(1 - \lambda_{\xi+it})^{-1}$ pour majorer l'application $t \mapsto \operatorname{Re}(Q_{\xi+it})(uh)(x)$ par une fonction intégrable. Notons $\xi = \delta + \kappa$ avec $\kappa > 0$. La première étape consiste à montrer la proposition suivante

Proposition 5.3.4. *Il existe des mesures finies ν_j sur \mathbb{R}^+ de masse P_j , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ telles que*

$$1 - \lambda_{\delta+\kappa+it} = \sum_{j=1}^p P_j \left[(\kappa I_{C_j} + t I_{S_j}) - i (\kappa I_{S_j} - t I_{C_j}) \right] + o \left(|t| \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right) + \kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \right),$$

où I_{C_j} et I_{S_j} correspondent aux intégrales I_C et I_S de la proposition 3.3.2 associées aux mesures ν_j , $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Démonstration. Nous suivons les mêmes étapes que dans la démonstration du développement limité de $\lambda_{\delta+it}$ (dans la proposition 4.2.19). Pour $z = \delta + \kappa + it$, on écrit

$$\lambda_z = \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_z h_z) = \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_z h) + \sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{\delta})(h_z - h)).$$

D'après la proposition 4.2.12, le second terme de cette expression est

$$\preceq \left(\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + |t| \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right) \right)^2.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} h) &= 1 + \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} h) - 1 = 1 + \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it} h) - \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_{\delta} h) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{p+q} S_j \end{aligned}$$

où

$$S_j := \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha.x) e^{-\delta b(\alpha,x)} (e^{-(it+\kappa)b(\alpha,x)} - 1) d\sigma_{\mathbf{o}}(x).$$

Avec les notations de la proposition 4.2.19, il vient

$$S_j = \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} M_j(x) \left(\widehat{\mu}_j^x(-t + i\kappa) - 1 \right) d\sigma_{\mathbf{o}}(x)$$

et l'on déduit de la proposition 3.3.1 que la contribution de cette quantité est en $o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) + o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$ pour $j \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$ et il suffit donc de contrôler les p termes restants.

Soient $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $x_{\mathbf{a}_j}$ le point fixe du groupe élémentaire parabolique $\Gamma_j = \langle \mathbf{a}_j \rangle$ et posons $\Delta_{\alpha}(x) := b(\alpha, x) - d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})$ pour tous $\alpha \in \Gamma_j^*$ et $x \in \Lambda \setminus \Lambda_j$. La suite $\left(\Delta_{\mathbf{a}_j^n}(x)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ tend vers $-2\left(x|x_{\mathbf{a}_j}\right)_{\mathbf{o}}$ quand $|n| \rightarrow +\infty$, uniformément en $x \notin \Lambda_j$. On décompose alors S_j en $S_{j1} + S_{j2}$ où

$$S_{j1} := \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha \cdot x) e^{-\delta \Delta_{\alpha}(x)} \left(e^{-(it+\kappa)b(\alpha, x)} - e^{-(it+\kappa)d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \right) d\sigma_{\mathbf{o}}(x)$$

et

$$S_{j2} := \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \left(e^{-(it+\kappa)d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} - 1 \right) \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha \cdot x) e^{-\delta \Delta_{\alpha}(x)} d\sigma_{\mathbf{o}}(x).$$

Alors

$$|S_{j1}| \leq C e^{\delta C} (|t| + \kappa) \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} = O(|t| + \kappa) = o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) + \kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right),$$

puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{L}(x) = +\infty$. Pour l'étude de la contribution de S_{j2} , on remarque que $S_{j2} = P_j \widehat{\nu}_j(-t + i\kappa) - P_j$ où

$$\nu_j = \frac{1}{P_j} \sum_{\alpha \in \Gamma_j} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha \cdot x) e^{-\delta \Delta_{\alpha}(x)} d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \right) D_{d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})}.$$

Le coefficient de renormalisation P_j qui vaut

$$P_j = \sum_{\alpha \in \Gamma_j} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \left(\int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha \cdot x) e^{-\delta \Delta_{\alpha}(x)} d\sigma_{\mathbf{o}}(x) \right)$$

est fini d'après l'hypothèse (P_1) et le fait que corollaire 4.1.6 implique $|\Delta_{\alpha}(x)| \leq C$ uniformément en $x \notin \Lambda_j$. Ces mesures satisfont lorsque $T \rightarrow +\infty$

$$1 - \nu_j([0, T]) \sim \frac{C_j}{P_j} \frac{L(T)}{T^{\beta}}, \quad (5.24)$$

5.3. Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$

avec

$$\mathcal{C}_j = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} h(\alpha.x) e^{-\delta \Delta_\alpha(x)} \sigma_{\mathbf{o}}(dx) = h(x_{\mathbf{a}_j}) \int_{\Lambda \setminus \Lambda_j} \frac{d\sigma_{\mathbf{o}}(x)}{d_{\mathbf{o}}(x, x_{\mathbf{a}_j})^{\frac{2\delta}{\alpha}}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{S_{j2}}{P_j} &= \int_0^{+\infty} (e^{i(-t+i\kappa)x} - 1) d\nu_j(x) \\ &= -(\kappa + it) \int_0^{+\infty} e^{i(-t+i\kappa)x} (1 - \nu_j[0, x]) dx, \end{aligned}$$

et en notant

$$I_{Cj} := \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} \cos(tx) (1 - \nu_j[0, x]) dx$$

et

$$I_{Sj} := \int_0^{+\infty} e^{-\kappa x} \sin(tx) (1 - \nu_j[0, x]) dx,$$

il vient

$$\frac{S_{j2}}{P_j} = (-\kappa I_{Cj} - t I_{Sj}) + i(\kappa I_{Sj} - t I_{Cj})$$

et donc

$$1 - \lambda_{\delta+\kappa+it} = \sum_{j=1}^p P_j [(\kappa I_{Cj} + t I_{Sj}) - i(\kappa I_{Sj} - t I_{Cj})] + o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) + \kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right).$$

□

La proposition 3.3.2 nous permet alors de montrer

Proposition 5.3.5. *Soit $\kappa > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\max(\kappa, |t|) < \varepsilon$ où ε provient de la proposition 4.2.14, la valeur propre dominante $\lambda_{\delta+\kappa+it}$ satisfait*

- 1) $|1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}|^{-1} \preceq |\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})|^{-1} \preceq \frac{1}{\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j} \frac{1}{\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)}$ pour $|t| \leq \kappa$;
- 2) $|1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}|^{-1} \preceq \frac{1}{\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j} \frac{1}{(\kappa + |t|) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)}$ pour $|t| \geq \kappa$;
- 3) $|\operatorname{Re}((1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1})| \preceq \frac{1}{\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j} \left(\frac{\kappa}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} + \frac{|t| L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2} \right)$

pour $|t| \geq \kappa$.

Démonstration. De la proposition 5.3.4 on déduit

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) = \sum_{j=1}^p P_j [\kappa I_{C_j} + t I_{S_j}] + o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) + o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$$

et

$$\operatorname{Im}(\lambda_{\delta+\kappa+it}) = -\operatorname{Im}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) = \sum_{j=1}^p P_j [\kappa I_{S_j} - t I_{C_j}] + o\left(|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) + o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right).$$

1) De (5.24) et des points i) et iii) de la proposition 3.3.2, on déduit

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) \sim \sum_{j=1}^p C_j \left[\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) (1 + o(1)) + \kappa O\left(\frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right) + t I_{S_j} \right].$$

Puisque $|t| \leq \kappa$, on a

$$\kappa \frac{|t|}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right) = o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right),$$

et le lemme de Karamata donne

$$|I_{S_j}| \leq \frac{|t|^2}{\kappa} L\left(\frac{1}{\kappa}\right) \leq \kappa L\left(\frac{1}{\kappa}\right) = o\left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right),$$

d'où

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) \sim \left(\sum_{j=1}^p C_j \right) \kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right).$$

Le point 1) en découle.

2) On utilise les propriétés ii) et iv) de la proposition 3.3.2. Dans ce cas

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) \sim \sum_{j=1}^p C_j \left[\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) + \kappa O\left(\frac{\kappa}{|t|} L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) + t I_{S_j} \right].$$

De

$$|t I_{S_j}| \leq |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right) = O\left(|t| L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$$

et

$$\frac{\kappa^2}{|t|} L\left(\frac{1}{|t|}\right) \leq |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right) = O\left(|t| L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right),$$

on déduit

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}) \sim \left(\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j \right) \left(\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) + O\left(|t|L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \right). \quad (5.25)$$

Concernant $\operatorname{Im}(\lambda_{\delta+\kappa+it})$, la proposition 3.3.2 implique

$$\operatorname{Im}(\lambda_{\delta+\kappa+it}) = \sum_{j=1}^p P_j \mathcal{C}_j \left[-t \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) - tO\left(\frac{\kappa}{|t|}L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) + \kappa I_{S_j} \right].$$

et le lemme de Karamata donne

$$\operatorname{Im}(\lambda_{\delta+\kappa+it}) \sim - \left(\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j \right) t \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right). \quad (5.26)$$

Puisque $|1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}| \geq \frac{1}{2} (|\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})| + |\operatorname{Im}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})|)$, les estimations (5.25) et (5.26) combinées avec le lemme de Karamata fournissent

$$|1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}| \succeq \left(\sum_{j=1}^p \mathcal{C}_j \right) (\kappa + |t|) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

ce qui achève la démonstration de l'assertion 2).

3) Il suffit de constater que

$$\operatorname{Re}\left((1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1}\right) = \frac{\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})}{|1 - \lambda_{\delta+\kappa+it}|^2}$$

et d'utiliser (5.25) et 2).

□

La proposition précédente implique

Proposition 5.3.6. *Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \kappa < \kappa_0$ et tout compact K de \mathbb{R} , l'application $t \mapsto \operatorname{Re}(Q_{\delta+\kappa+it})(uh)(x)$ est majorée par $b_\kappa(t)$ définie par*

$$\begin{aligned} b_\kappa : t \mapsto & \frac{\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\kappa + |t|} + \frac{1}{\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)} 1_{[-\kappa, \kappa]}(t) \\ & + \frac{\kappa}{(\kappa^2 + t^2) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} + \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2}, \end{aligned}$$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $t \in K$.

Démonstration. Soient $\kappa \in [0, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $\max(\kappa, |t|) < \varepsilon$, pour le ε donné dans la proposition 4.2.14. Des arguments exposés dans la démonstration de la proposition 4.2.20, on déduit

$$Q_{\delta+\kappa+it} = (1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} \Pi_{\delta} + (1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} (\Pi_{\delta+\kappa+it} - \Pi_{\delta}) + O(1). \quad (5.27)$$

Des assertions 3) et 1) de la proposition précédente, il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} \right) &\leq \left| \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} \right) \right| \mathbf{1}_{|t| \geq \kappa} + \left| \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} \right) \right| \mathbf{1}_{|t| \leq \kappa} \\ &\leq \left[\frac{\kappa}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right)} + \frac{|t| L \left(\frac{1}{|t|} \right)}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right)^2} \right] \mathbf{1}_{[\kappa, \varepsilon]}(|t|) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)} \mathbf{1}_{|t| \leq \kappa} \\ &\leq \frac{\kappa}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right)} + \frac{L \left(\frac{1}{|t|} \right)}{|t| \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right)^2} + \frac{1}{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)} \mathbf{1}_{|t| \leq \kappa}. \end{aligned}$$

Les applications $t \mapsto \Pi_{\delta+it}$ et $\kappa \mapsto \Pi_{\delta+\kappa+it}$ héritant de la régularité des applications $t \mapsto \mathcal{L}_{\delta+it}$ et $\kappa \mapsto \mathcal{L}_{\delta+\kappa+it}$, la proposition 5.3.5 combinée avec le lemme de Potter nous permet d'estimer le second terme de (5.27) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\left| (1 - \lambda_{\delta+\kappa+it})^{-1} (\Pi_{\delta+\kappa+it} - \Pi_{\delta}) \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)} \mathbf{1}_{|t| \leq \kappa} + \frac{1}{(\kappa + |t|) \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right)} \mathbf{1}_{[\kappa, \varepsilon]}(|t|) \right) \left(\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + |t| \tilde{L} \left(\frac{1}{|t|} \right) \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)} \mathbf{1}_{|t| \leq \kappa} + \frac{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)}{\kappa + |t|}. \end{aligned}$$

Le résultat de la proposition 5.3.6 en découle en remarquant que 1 est négligeable devant un terme de la forme $\frac{1}{\kappa \tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right)}$ quand $\kappa \searrow 0$. \square

Rappelons que nous voulons montrer :

$$\lim_{\xi \searrow \delta} \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\xi+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{it(R-s)} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}) (uh)(x) \hat{\varphi}(t) dt$$

5.3. Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$

uniformément en $x \in \Lambda$ et $s \in \text{supp } \psi$. D'une part, pour tous $x \in \Lambda$ et $t \neq 0$, la suite $(\text{Re}(Q_{\delta+\kappa+it})(uh)(x))_{\kappa>0}$ tend vers $\text{Re}(Q_{\delta+it})(uh)(x)$ quand $\kappa \searrow 0$. De plus, la proposition précédente implique que pour tout κ assez petit et tout t appartenant au support compact de $\widehat{\varphi}$, il vient

$$|\text{Re}(Q_{\delta+\kappa+it})(uh)(x)| \leq h_\kappa(t) + \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t|\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2}$$

où

$$h_\kappa(t) = \frac{\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\kappa + |t|} + \frac{1}{\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\mathbb{1}_{[-\kappa,\kappa]}(t) + \frac{\kappa}{(\kappa^2 + t^2)\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)}.$$

On remarque alors que la fonction $t \mapsto \frac{L\left(\frac{1}{|t|}\right)}{|t|\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)^2}$ est intégrable sur tout compact d'après le corollaire 4.2.21 et que $h_\kappa(t)$ tend vers 0 ponctuellement quand $\kappa \searrow 0$. La convergence attendue sera prouvée si l'on montre $\lim_{\kappa \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} h_\kappa(t)\widehat{\varphi}(t)dt = 0$. Supposons que le support de $\widehat{\varphi}$ soit inclus dans $[-M, M]$ pour $M > 0$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \frac{\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\kappa + |t|} dt &\leq \kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \int_0^M \frac{dt}{\kappa + t} \\ &\leq \kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right) (\ln(\kappa + M) - \ln(\kappa)) \end{aligned}$$

et ce terme tend vers 0 quand $\kappa \searrow 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \frac{1}{\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \mathbb{1}_{[0,\kappa]}(|t|) dt &\leq \frac{1}{\kappa\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \int_0^\kappa dt \\ &\leq \frac{1}{\tilde{L}\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \end{aligned}$$

et ce terme tend également vers 0 quand $\kappa \searrow 0$. La dernière partie repose sur l'astuce suivante tirée de [MT12]. Soit $A \in [0, M]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \frac{\kappa}{(\kappa^2 + |t|^2)\tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} dt &\leq \int_0^M \frac{\kappa}{(\kappa^2 + t^2)\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)} dt \\ &\leq \int_0^A \frac{\kappa}{(\kappa^2 + t^2)\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_A^M \frac{\kappa}{(\kappa^2 + t^2)\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)} dt \end{aligned}$$

$$\preceq \frac{A}{\kappa \tilde{L}\left(\frac{1}{A}\right)} + \frac{\kappa}{A},$$

où la dernière égalité est une conséquence du lemme de Karamata pour l'intégrale sur $[0, A]$ et une conséquence du fait que $\frac{1}{\tilde{L}\left(\frac{1}{t}\right)}$ est bornée sur $[0, M]$ pour l'intégrale sur

$[A, M]$. On peut choisir $A = A(\kappa)$ en fonction de κ de sorte que $\kappa = \frac{A}{\sqrt{\tilde{L}\left(\frac{1}{A}\right)}}$. Des

propriétés des fonctions à variations lentes, on déduit que $A(\kappa) \rightarrow 0$ quand $\kappa \rightarrow 0$. Pour une telle fonction A , il vient

$$\int_{-M}^M \frac{\kappa}{(\kappa^2 + |t|^2) \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} dt \preceq \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\left(\frac{1}{A}\right)}}$$

et ce terme tend vers 0 quand $\kappa \rightarrow 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{L}(x) = +\infty$.



6

Théorème B

Dans ce chapitre, le but est d'obtenir une minoration du nombre de géodésiques fermées de X/Γ de longueur plus petite que R . Soit \mathcal{G} l'ensemble des géodésiques fermées de X/Γ et posons $N_{\mathcal{G}}(R) := \#\{\varphi \in \mathcal{G} \mid l(\varphi) \leq R\}$. Plus précisément, nous montrons dans ce chapitre que pour $\beta \in]0, 1[$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\delta R}{\beta e^{\delta R}} N_{\mathcal{G}}(R) \geq 1.$$

On a vu au chapitre 4 qu'une géodésique fermée de X/Γ est la projection sur X/Γ de l'axe d'une isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$. S'il existe $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$ et $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\gamma = \alpha_j^n$, la condition $l(\varphi) \leq R$ implique $|n| \leq \frac{R}{l(\alpha_j)}$; la contribution des géodésiques fermées de longueur $\leq R$ associées aux générateurs hyperboliques est linéaire en R et est donc négligeable en comparaison de la minoration attendue en $\frac{e^{\delta R}}{R}$.

Dans la suite, on supposera qu'une isométrie hyperbolique γ de Γ est de longueur symbolique ≥ 2 . Quitte à conjuguer γ , on peut supposer que γ satisfait $i(\gamma) \neq l(\gamma)$. Soit $\tilde{N}_{\mathcal{G}}(R)$ le nombre de géodésiques fermées de longueur $\leq R$ associées à une isométrie hyperbolique γ_{φ} de longueur symbolique ≥ 2 . Le théorème B revient alors à dire : quand $R \rightarrow +\infty$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\delta R}{\beta e^{\delta R}} \tilde{N}_{\mathcal{G}}(R) \geq 1. \quad (6.1)$$

6.1 Démonstration du théorème B

Le codage du flot géodésique développé au chapitre 4 permet de réécrire $\tilde{N}_{\mathcal{G}}(R)$ sous la forme

$$\tilde{N}_{\mathcal{G}}(R) = \sum_{\varphi \in \mathcal{G}_p, |\gamma_\varphi| \geq 2} \mathbb{1}_{l(\varphi) \leq R} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{T^k.x=x} \mathbb{1}_{[0,R]}(S_k l(y)).$$

En s'inspirant de [Lal89] et [DP96b], l'idée est d'approcher $\tilde{N}_{\mathcal{G}}(R)$ par des sommes du type

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{T^k.y=x} \mathbb{1}_{[0,R]}(S_k l(y))$$

pour un point x bien choisi. Nous expliquons à présent comment faire ce choix.

Fixons un entier $n \geq 1$; pour tout $\gamma \in \Gamma(n)$, notons

$$- \Lambda_\gamma^0 = \gamma \cdot (\Lambda^0 \setminus \Lambda_{l(\gamma)}^0);$$

- x^γ est un point de Λ_γ^0 que l'on fixe une fois pour toute.

Au chapitre 4 a été développé un codage de l'ensemble limite, et l'on sait que tout point $x \in \Lambda^0$ est égal à $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_1 \dots \alpha_p \cdot x_0$ pour une unique suite \mathcal{A} -admissible $(\alpha_p)_{p \geq 1}$. Nous dirons dans la suite que les lettres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les k - premières "lettres de x ". Pour des raisons techniques qui apparaitront dans la suite, on supposera chaque x^γ non-périodique. Nous pouvons également remarquer que pour tout $n \geq 1$, la famille $(\Lambda_\gamma^0)_{\gamma \in \Gamma(n)}$ forme une partition de l'ensemble Λ^0 ; cette partition est d'autant plus fine que n est grand. Fixons à présent $\gamma \in \Gamma(n)$ et un point périodique $x \in \Lambda_\gamma^0$ satisfaisant $T^k.x = x$ pour un certain $k \geq 2$; on définit alors un unique $y \in \Lambda_\gamma$ tel que $T^k.y = x^\gamma$ et que les k - premières lettres de y soient égales à celles de x . Des remarques précédentes on déduit que les $k+n$ premières lettres de y et de x coïncident : il existe alors une suite finie \mathcal{A} -admissible $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+n})$ et $x', y' \in \Lambda \setminus \Lambda_{l(\alpha_{k+n})}^0$ tels que $x = \alpha_1 \dots \alpha_{k+n} \cdot x'$ et $y = \alpha_1 \dots \alpha_{k+n} \cdot y'$ et l'on déduit

$$\begin{aligned} |S_k l(y) - S_k l(x)| &\leq |l(y) - l(x)| + \dots + |l(T^{k-1}.y) - l(T^{k-1}.x)| \\ &\leq |b(\alpha_1 \dots \alpha_{k+n}, y') - b(\alpha_1 \dots \alpha_{k+n}, x')| + \dots \\ &\quad + |b(\alpha_k \dots \alpha_{k+n}, y') - b(\alpha_k \dots \alpha_{k+n}, x')| \\ &\leq r^{k+n} + \dots + r^{n+1} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} := \varepsilon_n \end{aligned}$$

6.1. Démonstration du théorème B

pour le $r \in]0, 1[$ donné dans le corollaire 4.1.8. Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x^\gamma} \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(y) \mathbf{1}_{[0, R - \varepsilon_n]}(S_k \mathbf{l}(y)) &\leq \tilde{N}_{\mathcal{G}}(R) \\ \text{et } \tilde{N}_{\mathcal{G}}(R) &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x^\gamma} \mathbf{1}_{\Lambda_\gamma}(y) \mathbf{1}_{[0, R + \varepsilon_n]}(S_k \mathbf{l}(y)) \end{aligned}$$

Le théorème B découle alors de la proposition suivante :

Proposition 6.1.1. *Pour toute fonction $\psi \in \text{Lip}(\Lambda)$, uniformément en $x \in \Lambda^0$, il vient quand $R \rightarrow +\infty$*

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) \mathbf{1}_{[0, R]}(S_k \mathbf{l}(y)) \sim \beta \sigma_{\circ}(\psi) h(x) \frac{e^{\delta R}}{\delta R}.$$

Démonstration. Notons $N(\psi, x, R) := \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) \mathbf{1}_{[0, R]}(S_k \mathbf{l}(y))$. Cette quantité se réécrit

$$N(\psi, x, R) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) e^{-\delta S_k \mathbf{l}(x)} \varphi_R(S_k \mathbf{l}(y))$$

où $\varphi_R(t) = e^{\delta t} \mathbf{1}_{[0, R]}(t)$. Fixons $\eta > 0$ et posons $I = \left\lceil \frac{R}{\eta} \right\rceil$. De l'encadrement

$$\sum_{p=0}^{I-1} e^{\delta \eta p} \mathbf{1}_{[\eta p, \eta(p+1)[}(t) \leq \varphi_R(t) \leq \sum_{p=0}^I e^{\delta \eta(p+1)} \mathbf{1}_{[\eta p, \eta(p+1)[}(t),$$

on déduit

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{I-1} e^{\delta \eta p} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) \mathbf{1}_{[0, \eta[}(S_k \mathbf{l}(y) - \eta p) &\leq N(\psi, x, R) \\ \text{et } N(\psi, x, R) &\leq \sum_{p=0}^I e^{\delta \eta(p+1)} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) \mathbf{1}_{[0, \eta[}(S_k \mathbf{l}(y) - \eta p). \end{aligned}$$

Admettons pour le moment la proposition suivante

Proposition 6.1.2. *Pour toutes fonctions $\psi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact, on a*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Lambda^0} \left| p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{\Gamma^k . y = x} \psi(y) e^{-\delta S_k \mathbf{l}(y)} \varphi(S_k \mathbf{l}(y) - \eta p) - \beta \sigma_{\circ}(\psi) h(x) \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\eta} \right| = 0.$$

De cette proposition et du lemme suivant donné dans [DP96b]

Lemme 6.1.3. *Soient $(u_p(x))_{p \geq 0}$ une suite de fonctions strictement positives sur un compact K et $(v_p)_{p \geq 0}$ une série à termes positifs divergente. Sous l'hypothèse $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} \left| \frac{u_p(x)}{v_p} - 1 \right| = 0$, on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} \left| \frac{\sum_{p=0}^N u_p(x)}{\sum_{p=0}^N v_p} - 1 \right| = 0.$$

on déduit que

$$\sum_{p=1}^I e^{\delta \eta p} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \sum_{T^k, y=x} \psi(y) \mathbb{1}_{[0, \eta]}(S_k \mathbb{I}(y) - \eta p) \sim \left(\sum_{p=1}^I \frac{e^{\delta \eta p}}{p} \right) \beta \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x)$$

uniformément en $x \in \Lambda^0$. Puisque $\sum_{p=1}^I \frac{e^{\delta \eta p}}{p} \sim \frac{e^{\delta \eta I}}{\delta \eta I}$ pour η arbitraire, il vient quand $R \rightarrow +\infty$

$$N(\psi, x, R) \sim \beta \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \frac{e^{\delta R}}{\delta R}$$

uniformément en $x \in \Lambda^0$. □

Expliquons à présent comment déduire le théorème B de la proposition 6.1.1; le lemme de Fatou donne

$$e^{-\delta \varepsilon_n} \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \sigma_{\mathbf{o}}(\mathbb{1}_{\Lambda_\gamma}) h(x^\gamma) \leq \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{\delta R}{\beta e^{\delta R}} \tilde{N}_{\mathcal{G}}(R).$$

Le résultat (6.1) s'en déduit en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\delta \varepsilon_n} \sum_{\gamma \in \Gamma(n)} \sigma_{\mathbf{o}}(\mathbb{1}_{\Lambda_\gamma}) h(x^\gamma) = \int_{\Lambda^0} h(x) d\sigma_{\mathbf{o}}(x) = 1.$$

6.2 Proposition 6.1.2

Comme pour le théorème A, la démonstration est basée sur celle du théorème 1.4 de [Gou11]; considérons une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ satisfaisant $a_k^\beta = kL(a_k)$, où L est la fonction à

6.2. Proposition 6.1.2

variations lentes donnée dans la famille d'hypothèses (H_β) . Pour tout $k \geq 1$, notons

$$Z_k(\psi, \varphi, x, p) = \sum_{\Gamma^k, y=x} \psi(y) e^{-\delta S_k l(y)} \varphi(S_k l(y) - \eta p).$$

Nous admettons pour le moment les deux propositions suivantes :

Proposition B.1. *Soient $\psi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact. Alors, uniformément en $K \geq 2$, $p \in [0, Ka_k]$ et $x \in \Lambda^0$, nous avons lorsque $k \rightarrow +\infty$*

$$Z_k(\psi, \varphi, x, p) = \frac{1}{e_\Gamma a_k} \left(\Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) + o_k(1) \right),$$

où Ψ_β représente la densité de la loi stable asymétrique de paramètre β et la constante e_Γ vaut $E_\Gamma^{\frac{1}{\beta}}$.

Proposition B.2. *Soient $\psi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de η et du support de φ telle que pour tout $p \geq Ka_k$, on a*

$$|Z_k(\psi, \varphi, x, p)| \leq Ck \frac{L(p)}{p^{1+\beta}} |\psi|_\infty |\varphi|_\infty.$$

Nous démontrerons ces deux propositions dans les sous-sections suivantes. Dans un premier temps, expliquons comment la proposition 6.1.2 en découle.

6.2.1 Démonstration de la proposition 6.1.2

Notons

$$D(x; p) = \left| p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} Z_k(\psi, \varphi, x, p) - \beta \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\eta} \right|,$$

où $\eta > 0$ a été fixé dans la démonstration de la proposition 6.1.1. D'après la proposition B.1, nous majorons $D(x; p)$ par la somme $D(x; p)^1 + D(x; p)^2 + D(x; p)^3 + D(x; p)^4$ où

$$D^1(x; p) = \left| p \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{1}{e_\Gamma k a_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) - \beta \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \frac{\widehat{\varphi}(0)}{\eta} \right|,$$

$$D^2(x; p) = \left| p \sum_{k \mid p < \frac{a_k}{K}} \frac{1}{e_\Gamma k a_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) \right|,$$

$$D^3(x; p) = \left| p \sum_{k \mid p < Ka_k} \frac{o_k(1)}{e_\Gamma k a_k} \right|$$

$$\text{et } D^4(x; p) = \left| p \sum_{k \mid p \geq Ka_k} \frac{1}{k} Z_k(\psi, \varphi, x, p) \right|.$$

a) *Contrôle du terme* $D^1(x; p)$. Le terme $D^1(x; p)$ peut être majoré par

$$C \left| \frac{p}{e_\Gamma} \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{1}{ka_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) - \frac{\beta}{\eta} \right|$$

où C ne dépend que de ψ et φ . Puisque $k = \frac{a_k^\beta}{L(a_k)}$, on a

$$p \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{1}{ka_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) = \frac{L(p)}{p^\beta} \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{L(a_k)}{L(p)} \frac{p^{1+\beta}}{a_k^{1+\beta}} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right)$$

et de la convergence uniforme vers 1 de $\frac{L(a_k)}{L(p)} = \frac{L(a_k)}{L\left(a_k \cdot \frac{p}{a_k}\right)}$ assurée par la proposition 3.2.2, on déduit

$$p \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{1}{ka_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sim \frac{L(p)}{p^\beta} \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{p^{1+\beta}}{a_k^{1+\beta}} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \quad (6.2)$$

uniformément en p tel que $\frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k$. À l'aide de la mesure $\mu_p = \sum_k D_{\frac{p}{a_k}}$ considérée sur l'intervalle $\left[\frac{1}{K}, K\right]$, on réécrit le membre de droite de (6.2) de la manière suivante

$$\frac{L(p)}{p^\beta} \sum_{k \mid \frac{a_k}{K} \leq p < Ka_k} \frac{p^{1+\beta}}{a_k^{1+\beta}} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) = \frac{L(p)}{p^\beta} \int_{\frac{1}{K}}^K z^{\beta+1} \Psi_\beta \left(\frac{\eta}{e_\Gamma} z \right) d\mu_p(z) \quad (6.3)$$

et des arguments exposés dans la démonstration du théorème A (dans le a) de la section 5.2.1), on déduit que la suite de mesures $\left(\frac{L(p)}{p^\beta} \mu_p\right)_p$ converge faiblement sur $\left[\frac{1}{K}, K\right]$ vers la mesure $\beta x^{-1-\beta} dx$. En combinant (6.2) et (6.3), on obtient

$$D^1(x; p) \leq \beta \left| \frac{1}{e_\Gamma} \left(\int_{\frac{1}{K}}^K \Psi_\beta \left(\frac{\eta}{e_\Gamma} z \right) dz \right) (1 + o(1)) - \frac{1}{\eta} \right|$$

6.2. Proposition 6.1.2

où $\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} o(1) = 0$. Finalement

$$D^1(x; p) \preceq \frac{\beta}{\eta} \left| \left(\int_{\frac{\eta}{K e_\Gamma}}^{\frac{\eta K}{e_\Gamma}} \Psi_\beta(z) dz \right) (1 + o(1)) - 1 \right|$$

d'où l'on tire

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Lambda^0} D^1(x; p) = 0.$$

b) *Contrôle du terme $D^2(x; p)$.* Rappelons que $k = A(a_k)$, et puisque $pK < a_k$, on a $A(pK) \leq k$ par croissance de la fonction A et donc

$$\begin{aligned} D^2(x; p) &\preceq \frac{p}{A(pK)} \left| \sum_{k \mid p < \frac{a_k}{K}} \frac{1}{a_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \right| \\ &\preceq \frac{p^{1-\beta}}{K^\beta} L(pK) \left| \sum_{k \mid p < \frac{a_k}{K}} \frac{1}{a_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \right| \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de ψ et φ . De la convergence faible sur $]0, \frac{1}{K}]$ de la suite de mesures $\left(\frac{L(p)}{p^\beta} \mu_p \right)_p$ vers la mesure $\beta x^{-1-\beta} dx$ et de l'étude des termes négligeables menée au a) de la section 5.2.1, on déduit

$$\begin{aligned} &\frac{p^{1-\beta}}{K^\beta} L(pK) \sum_{k \mid p < \frac{a_k}{K}} \frac{1}{a_k} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \\ &= \frac{p^{-\beta}}{K^\beta} L(pK) \int_0^{\frac{1}{K}} z \Psi_\beta \left(\frac{\eta}{e_\Gamma} z \right) d\mu_p(z) \\ &= \frac{\beta}{K^\beta} \frac{L(pK)}{L(p)} \left(\int_0^{\frac{1}{K}} z \Psi_\beta \left(\frac{\eta}{e_\Gamma} z \right) dz \right) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

où $\lim_{p \rightarrow +\infty} o(1) = 0$; d'où

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Lambda^0} D^2(x; p) = 0.$$

c) *Contrôle du terme $D^3(x; p)$.* Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N = N(p)$ le premier entier tel que $K a_N > p$: l'entier $N(p)$ croît avec p . Pour p suffisamment grand et tout $k \geq N$, on a $|o_k(1)| \leq \varepsilon$. Le lemme de Karamata 3.2.3 implique alors

$$D^3(x; p) \leq \frac{\varepsilon}{e_\Gamma} p \sum_{k \geq N} \frac{1}{ka_k} \leq \frac{\varepsilon}{e_\Gamma} \frac{p}{a_N} \preceq \varepsilon K.$$

Finalement $\sup_{x \in \Lambda^0} D^3(x; p) \preceq \varepsilon K$ et donc $\sup_{x \in \Lambda^0} D^3(x; p) = o_K(1)$ où $\lim_{p \rightarrow +\infty} o_K(1) = 0$ à K fixé; d'où $\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Lambda^0} D^3(x; p) = 0$.

d) *Contrôle de $D^4(x; p)$.* D'après la proposition B.2, on majore $D^4(x; p)$ par $Cp^{-\beta} L(p) \sum_{k \mid Ka_k \leq p} 1$ où la constante C ne dépend que de φ et ψ . De la même manière qu'au point b), on déduit de $a_k \leq \frac{p}{K}$ que $k \leq \left(\frac{p}{K}\right)^\beta L\left(\frac{p}{K}\right)^{-1}$, et donc

$$D^4(x; p) \preceq K^{-\beta} \frac{L(p)}{L\left(\frac{p}{K}\right)}.$$

Le lemme de Potter entraîne $D^4(x; p) \preceq K^{-\frac{\beta}{2}}$, et donc $\lim_{K \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Lambda^0} D^4(x; p) = 0$.

6.2.2 Démonstration de la proposition B.1

Nous suivons les étapes de la démonstration de la proposition A.1 basée sur [Gou11]. Dans cette démonstration, nous allons travailler à p fixé, et considérer les entiers k tels que $Ka_k > p$, où $K > 2$ est fixé. On rappelle d'abord que pour un tel k

$$Z_k(\psi, \varphi, x, p) = \sum_{T^k \cdot y = x} \psi(y) e^{-\delta S_k l(y)} \varphi(S_k l(y) - \eta p).$$

pour une fonction $\psi \in \text{Lip}(\Lambda)$ et une fonction φ continue à support compact sur \mathbb{R} . Fixons la fonction ψ et $x \in \Lambda^0$; on veut établir la convergence suivante

$$a_k Z_k(\psi, \varphi, x, p) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_\circ(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) \longrightarrow 0 \quad (6.4)$$

uniformément en K , p et $x \in \Lambda^0$, ce qui équivaut à la convergence faible vers 0 de la suite de mesures

$$\left(a_k Z_k(\psi, \cdot, x, p) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_\circ(\psi) h(x) \int_{\mathbb{R}} \cdot(t) dt \right)_{k \mid Ka_k > p},$$

uniformément en K , R et $x \in \Lambda^0$. D'après l'argument de Stone déjà évoqué dans la démonstration de la proposition A.1, il est suffisant de vérifier que $a_k Z_k(\psi, \varphi, x, p)$ est

finie et que

$$a_k Z_k(\psi, \varphi, x, p) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \quad (6.5)$$

quand $\varphi \in \mathcal{H}$, où \mathcal{H} a été introduite dans la définition 5.2.2. La formule d'inversion de Fourier fournit

$$Z_k(\psi, \varphi, x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\eta p} \mathcal{L}_{\delta+it}^k \psi(x) \widehat{\varphi}(t) dt,$$

et l'on en déduit que $|Z_k(\psi, \varphi, x, p)| \preceq \|\psi\|_\infty \|\widehat{\varphi}\|_1$; cette quantité est donc finie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}$. Montrons à présent (6.5). La formule d'inversion de Fourier nous permet de décomposer

$$a_k Z_k(\psi, \varphi, x, p) - \frac{1}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{\eta p}{e_\Gamma a_k} \right) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0)$$

en $K_1 + K_2$ où

$$K_1 := \frac{a_k}{2\pi} \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c} e^{it\eta p} \mathcal{L}_{\delta+it}^k \psi(x) \widehat{\varphi}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &:= \frac{a_k}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{it\eta p} \mathcal{L}_{\delta+it}^k \psi(x) \widehat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{\eta p}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu \frac{\eta p}{a_k}} \mathcal{L}_{\delta+i \frac{u}{a_k}}^k \psi(x) \widehat{\varphi} \left(\frac{u}{a_k} \right) du \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{\eta p}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x) \widehat{\varphi}(0) h(x_0) dt, \end{aligned}$$

avec le $\varepsilon > 0$ donné dans la proposition 4.2.14. Cette dernière combinée avec le fait que $\widehat{\varphi}$ a un support compact implique qu'il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]^c \cap \text{supp } \widehat{\varphi}$, on ait $\|\mathcal{L}_{\delta+it}^k\| \preceq \rho^k$; on en déduit $|K_1| \preceq \|\widehat{\varphi}\|_\infty \|\psi\| \rho^k a_k$ et ce terme tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, uniformément en K, p et $x \in \Lambda^0$. Nous nous intéressons à présent à K_2 . La décomposition spectrale de l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+i \frac{u}{a_k}}$ fournit

$$\mathcal{L}_{\delta+i \frac{u}{a_k}}^k \psi(x) = \lambda_{\delta+i \frac{u}{a_k}}^k \Pi_{\delta+i \frac{u}{a_k}}(\psi)(x) + R_{\delta+i \frac{u}{a_k}}^k \psi(x)$$

avec $\text{spec}(R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}) \subset B(0, \rho_\varepsilon)$ et $0 < \rho_\varepsilon < 1$. On décompose alors K_2 en $L_1 + L_2 + L_3$ où

$$L_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{\eta p}{a_k}} R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \psi(x) \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{\eta p}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \left(\Pi_{\delta+i\frac{u}{a_k}}(\psi)(x) - \Pi_\delta(\psi)(x) \right) \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du$$

et

$$L_3 = \frac{\sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x)}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{\eta p}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du - \frac{\sigma_{\mathbf{o}}(\psi) h(x)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\frac{\eta p}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \widehat{\varphi}(0) dt.$$

Du résultat concernant le rayon spectral de $R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}$, on déduit que $|L_1| \preceq a_k \rho_\varepsilon^k \|\widehat{\varphi}\|_\infty \|\psi\|$, quantité qui tend vers 0 uniformément en K, p et $x \in \Lambda^0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Nous utilisons le théorème de convergence dominée pour L_2 ; comme pour l'intégrale M_1 apparaissant dans la démonstration de la proposition A.1, le choix du ε expliqué dans la remarque 4.2.15 et le développement limité de $\lambda_{\delta+it}$ donné dans la proposition 4.2.19, impliquent que l'intégrande de L_2 est majorée à une constante multiplicative près par

$$l(t) = \begin{cases} |t|^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_\Gamma t|^{\frac{3\beta}{2}}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ |t|^{\frac{3\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_\Gamma t|^{\frac{\beta}{2}}} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}.$$

Le terme L_3 se traite de la même manière que le terme M_2 apparaissant dans la démonstration de la proposition A.1.

6.2.3 Démonstration de la proposition B.2

La quantité $Z_k(\psi, \varphi, x, p)$ peut s'écrire sous la forme

$$Z_k(\psi, \varphi, x, p) = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}}(x) \psi(\gamma.x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \varphi(b(\gamma, x) - \eta p).$$

On en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|Z_k(\psi, \varphi, x, p)| \leq |\psi|_\infty |\varphi|_\infty \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ b(\gamma, x) \sim \eta p}} \mathbf{1}_{\Lambda_{l(\gamma)}}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)}$$

6.2. Proposition 6.1.2

où nous rappelons que la notation $b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} \eta p$ signifie $|b(\gamma, x) - \eta p| \leq M$. Il suffit donc de montrer

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ b(\gamma, x) \stackrel{M}{\sim} \eta p}} \mathbf{1}_{\Lambda_l(\gamma)}(x) e^{-\delta b(\gamma, x)} \leq C k \frac{L(p)}{p^{1+\beta}}$$

où C dépend seulement de η et du support de φ ; ce dernier résultat est une conséquence de (5.11).



7

Théorème C

Ce chapitre est dédié à la recherche d'un équivalent pour la fonction orbitale du groupe Γ

$$N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq R\}.$$

Pour obtenir l'équivalent, nous montrons que $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R)$ "se comporte" comme une somme d'itérés de l'opérateur de transfert. Malheureusement, le codage exposé dans le chapitre 4 ne nous permet pas de coder les transformations $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$. En adaptant l'approche de S. Lalley (dans [Lal89]), nous sommes amenés à considérer non seulement les éléments de l'ensemble limite de Γ (codés par les suites admissibles infinies) mais aussi les points d'une orbite $\Gamma \cdot x_0$, $x_0 \notin \Lambda_{\Gamma}$, qui correspondent eux aux suites finies $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Nous étudions ensuite les opérateurs de transfert associés à ce nouveau codage. Enfin nous démontrons le théorème en séparant les cas $\beta \in]0, 1[$ et $\beta = 1$.

7.1 Extension du codage aux suites finies

Nous notons $\tilde{\Lambda}^0 := \Lambda^0 \cup \Gamma \cdot x_0$ pour x_0 le point base appartenant à $\partial X \setminus \cup_i D_i$, fixé au chapitre 4 et nous introduisons l'espace symbolique étendu suivant

$$\tilde{\Sigma}^+ := \Sigma^+ \cup \{\emptyset\} \cup \Gamma^*$$

où \emptyset représente la suite vide et $\Gamma^* := \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$. Le sous-ensemble géométrique $\tilde{\Lambda}^0$ de ∂X correspondant à cet espace symbolique peut être vu de la manière suivante :

- le point x_0 est associé à la suite vide ;
- le point $\alpha_1 \dots \alpha_k . x_0$ correspond à la suite admissible finie $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$;
- la suite infinie $(\alpha_k)_k$ correspond toujours à un unique point $x \in \Lambda$ par l'application π définie au chapitre 4.

Nous voulons étendre le cocycle $b(\gamma, x) = \mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$ à cet ensemble. Soit $\gamma_1 \in \Gamma$. Si on pose

$$b^*(\gamma_1, \gamma_2 . x_0) := d(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o})$$

pour tout $\gamma_2 \in \Gamma$, la fonction $x \in \Gamma . x_0 \mapsto b^*(\gamma_1, x)$ satisfait les trois propriétés suivantes :

- (i) d'une part, quand la suite de points $(\gamma_2 \cdot \mathbf{o})_{\gamma_2}$ tend vers un point $x \in \Lambda$, la suite $(\gamma_2 . x_0)_{\gamma_2}$ tend également vers x et $\left(d(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) \right)_{\gamma_2}$ tend vers $\mathcal{B}_x(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o}) = b(\gamma_1, x)$;
- (ii) par ailleurs, le lemme 4.1.4 implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si l'on choisit $\gamma_2 \in \Gamma$ satisfaisant $i(\gamma_2) \neq l(\gamma_1)$, on a

$$\left| \left(d(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) \right) - d(\mathbf{o}, \gamma_1 \cdot \mathbf{o}) \right| \leq C,$$

d'où $|b^*(\gamma_1, \gamma_2 . x_0) - d(\mathbf{o}, \gamma_1 \cdot \mathbf{o})| \leq C$: cette propriété n'est pas sans rappeler le corollaire 4.1.6.

- (iii) enfin, la propriété de cocycle suivante est satisfaite : $b^*(\gamma_1 \gamma_2, x_0) = b^*(\gamma_1, \gamma_2 . x_0) + b^*(\gamma_2, x_0)$.

Cette extension de la fonction $b^*(\gamma_1, \cdot)$ à l'ensemble $\Gamma . x_0$ est alors naturelle. Si γ s'écrit $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{A}$, on a

$$d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) = b^*(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k . x_0) + b^*(\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_k . x_0) + \dots + b^*(\alpha_k, x_0). \quad (7.1)$$

Dans la suite, nous notons encore b^* le cocycle étendu : pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, la fonction $x \mapsto b^*(\gamma_1, x)$ est égale à $\mathcal{B}_x(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$ quand $x \in \Lambda$ et à $d(\gamma_1^{-1} \cdot \mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o})$ si $x = \gamma_2 . x_0$.

L'application T définie auparavant sur Λ^0 s'étend naturellement à $\Gamma . x_0$ en posant $T . (\gamma . x_0) := \alpha_1^{-1} . (\gamma . x_0)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ de première lettre $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, avec la convention

7.2. Régularité du cocycle étendu sur $\tilde{\Lambda}$

$T.x_0 = x_0$. On peut donc écrire l'ensemble $\tilde{\Lambda}^0 \setminus \{x_0\}$ comme une union disjointe des ensembles $(\tilde{\Lambda}_j^0)_j$, où l'ensemble $\tilde{\Lambda}_j^0$ est obtenu en ajoutant à l'ensemble Λ_j^0 les points $\gamma.x_0$ pour lesquels γ s'écrit $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ avec $\alpha_1 \in \Gamma_j$. Chaque sous-ensemble $\tilde{\Lambda}_j^0$ est lui-même partitionné en une famille dénombrable de sous-ensembles d'adhérences disjointes : $\tilde{\Lambda}_j^0 = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_j^*} \alpha. (\{x_0\} \cup \bigcup_{l \neq j} \tilde{\Lambda}_l^0)$.

On peut également étendre la fonction plafond l à l'ensemble $\Gamma.x_0$ en posant $l(x_0) = 0$ et $l(\gamma.x_0) = b^*(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k.x_0)$ pour tout $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \in \Gamma^*$. Pour $y = \gamma.x_0$, la relation (7.1) devient

$$d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) = l(y) + l(T.y) + \dots + l(T^{k-1}.y) = S_k l(y). \quad (7.2)$$

On veut maintenant s'assurer que le caractère lipschitzien donné dans 4.2.4 pour la famille de fonctions $(x \mapsto b^*(\gamma, x))_{\gamma \in \Gamma}$ sur Λ s'étend à l'ensemble $\Lambda \cup \Gamma.x_0$: c'est le but de la prochaine section.

7.2 Régularité du cocycle étendu sur $\tilde{\Lambda}$

Dans cette section, nous montrons la proposition suivante :

Proposition 7.2.1. *Il existe une constante $C = C(x_0) > 0$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ avec $l(\gamma) = j$ et tous $x, y \in \tilde{\Lambda}_l$, $l \neq j$,*

$$|b^*(\gamma, x) - b^*(\gamma, y)| \leq C d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

Il suffit de démontrer cette proposition pour $\gamma \in \Gamma$ de longueur symbolique égale à 1. En effet, supposons que $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k$ pour $k \geq 2$ et notons $\gamma_n = \alpha_n \dots \alpha_k$ pour tout $n \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket$. En utilisant la propriété de cocycle de b^* , on obtient pour tous $x, y \in \tilde{\Lambda} \setminus \tilde{\Lambda}_j$

$$\begin{aligned} |b^*(\gamma, x) - b^*(\gamma, y)| &\leq |b^*(\alpha_1, \gamma_2.x) - b^*(\alpha_1, \gamma_2.y)| + |b^*(\gamma_2, x) - b^*(\gamma_2, y)| \\ &\leq |b^*(\alpha_1, \gamma_2.x) - b^*(\alpha_1, \gamma_2.y)| + |b^*(\alpha_2, \gamma_3.x) - b^*(\alpha_2, \gamma_3.y)| \\ &\quad + \dots + |b^*(\alpha_k, x) - b^*(\alpha_k, y)|. \end{aligned}$$

Si la proposition 7.2.1 est vraie pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on en déduit

$$|b^*(\gamma, x) - b^*(\gamma, y)| \leq C(x_0) (d_{\mathbf{o}}(\gamma_2.x, \gamma_2.y) + \dots + d_{\mathbf{o}}(x, y)).$$

Le corollaire 4.1.8 implique alors qu'il existe $r \in]0, 1[$ et $C = C(X, \Gamma) > 0$ tels que

$d_{\mathbf{o}}(\gamma_2.x, \gamma_2.y) \leq C.r^{k-1}d_{\mathbf{o}}(x, y), \dots, d_{\mathbf{o}}(\alpha_k.x, \alpha_k.y) \leq C.rd_{\mathbf{o}}(x, y)$, si bien que

$$|b^*(\gamma, x) - b^*(\gamma, y)| \leq CC(x_0)C(X, \Gamma) \frac{1}{1-r} d_{\mathbf{o}}(x, y).$$

On va donc démontrer la proposition 7.2.1 pour une transformation γ de longueur symbolique 1, qui sera toujours notée α dans cette section. Trois cas sont à considérer :

(a) **Les points x et y appartiennent à $\Lambda \setminus \Lambda_j$** : l'énoncé découle de la proposition 4.2.4.

(b) **$x \in \Lambda$ et $y \in \Gamma.x_0$** : l'énoncé de la proposition se réécrit alors

Il existe une constante $C = C(x_0) > 0$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, pour tout $\alpha \in \Gamma_j^$, pour tous $g \in \Gamma, i(g) \neq j$ et $x \in \Lambda_{i(g)}$, on a*

$$\left| \mathcal{B}_x(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0) \right| \leq Cd_{\mathbf{o}}(x, g.x_0).$$

- 1) Supposons dans un premier temps que $x \in g.(\Lambda \setminus \Lambda_{l(g)})$. La démonstration de cette proposition nécessite les résultats classiques suivants : on introduit certains voisinages d'un point du bord à l'infini utilisé dans [Pei11]. Soit $x \in \partial X$. Notons $V(x, \mathbf{o}, t)$ le sous-ensemble de ∂X formé par les points y dont la projection $\tilde{\mathbf{y}}$ sur le rayon géodésique $[\mathbf{o}x]$ satisfait $d(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{o}) \geq t$; le $d_{\mathbf{o}}$ -diamètre d'un tel ensemble est $\leq e^{-at}$. L'ensemble $\tilde{V}(x, \mathbf{o}, t)$ représente un sous-ensemble connexe et géodésiquement convexe de \bar{X} dont l'intersection avec ∂X est égale à $V(x, \mathbf{o}, t)$. Les propositions suivantes sont prouvées dans [Sch04].

Proposition 7.2.2. *Soit $\kappa > 0$ tel que X soit un κ -espace hyperbolique au sens de Gromov.*

1. *Soient $K_1 = 6\kappa > 0, \mathbf{p} \in X, x \in \partial X$ et $t \geq 1$. Pour tout $y \in V(x, \mathbf{p}, t+K_1+\kappa)$, on a*

$$V(x, \mathbf{p}, t+K_1) \subset V(y, \mathbf{p}, t) \subset V(x, \mathbf{p}, t-K_1).$$

2. *Pour tout $D > 0$, notons $K_2 = 2D + 4\kappa$. Soient \mathbf{p} et \mathbf{q} deux points de X tels que $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq D, x \in \partial X$ et $t \geq K_2$. Alors*

$$V(x, \mathbf{p}, t+K_2) \subset V(x, \mathbf{q}, t) \subset V(x, \mathbf{p}, t-K_2).$$

Soit $y \in \Lambda \setminus \Lambda_{l(g)}$ tel que $x = g.y$. La relation de conformité (2.6) implique

$$d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0) = d_{\mathbf{o}}(g.y, g.x_0) = \sqrt{|g'(y)|_{\mathbf{o}}|g'(x_0)|_{\mathbf{o}}} d_{\mathbf{o}}(y, x_0).$$

7.2. Régularité du cocycle étendu sur $\tilde{\Lambda}$

Les égalités $|g'(y)|_{\mathbf{o}} = e^{-a\mathcal{B}_y(g^{-1}\cdot\mathbf{o},\mathbf{o})}$ et $|g'(x_0)|_{\mathbf{o}} = e^{-a\mathcal{B}_{x_0}(g^{-1}\cdot\mathbf{o},\mathbf{o})}$ combinées au fait que $y \in \Lambda \setminus D_l(g)$ et au corollaire 4.1.6 entraînent

$$d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0) \asymp e^{-ad(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})} d_{\mathbf{o}}(y, x_0) \asymp e^{-ad(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})}.$$

Estimons à présent $|\mathcal{B}_x(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0)|$: notons ξ' (respectivement ξ'') l'extrémité du rayon géodésique issu de \mathbf{o} (resp. de $\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}$) et passant par $g.\mathbf{o}$ (voir figure 7.1). On a

$$\mathcal{B}_{\xi'}(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) \leq \mathcal{B}_{\xi''}(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, \mathbf{o}). \quad (7.3)$$

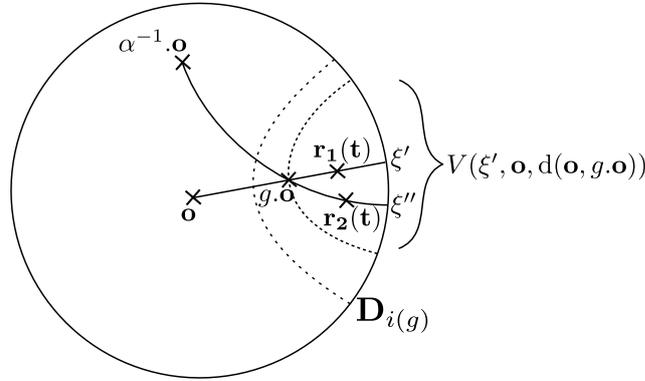


FIGURE 7.1 – Estimation de $d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})$

Pour s'en convaincre, nous procédons de la manière suivante : appelons r_1 (resp. r_2) le rayon géodésique $[g.\mathbf{o}\xi']$ (resp. $[g.\mathbf{o}\xi'']$) tel que $d(g.\mathbf{o}, r_1(t)) = t$ (resp. $d(g.\mathbf{o}, r_2(t)) = t$) pour tout $t \geq 0$. De $\mathcal{B}_{\xi'}(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, r_1(t)) - d(r_1(t), \mathbf{o}))$ et du fait que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, r_1(t)) - d(r_1(t), \mathbf{o}) &\leq d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) + d(g.\mathbf{o}, r_1(t)) \\ &\quad - d(r_1(t), g.\mathbf{o}) - d(g.\mathbf{o}, \mathbf{o}), \end{aligned}$$

on déduit que $\mathcal{B}_{\xi'}(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, \mathbf{o}) \leq d(\alpha^{-1}\cdot\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})$. La seconde inégalité s'obtient de la même manière en utilisant le rayon r_2 .

Les points ξ' et ξ'' appartiennent à $V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}))$ qui est connexe par arcs, donc il existe un chemin continu $c : [0, 1] \rightarrow V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}))$ d'extrémités ξ' et ξ'' .

De la proposition 4.2.4 et de (7.3), on déduit alors qu'il existe $\xi \in V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}))$ tel que $b^*(\alpha, g.x_0) = \mathcal{B}_\xi(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})$. Le fait que $V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})) \subset D_{i(g)}$ combiné avec la proposition 4.2.4 implique

$$|\mathcal{B}_x(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0)| = |\mathcal{B}_x(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o}) - \mathcal{B}_\xi(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o})| \leq C d_{\mathbf{o}}(x, \xi)$$

pour une constante $C > 0$. Puisque $\xi \in V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}))$, il vient $d_{\mathbf{o}}(\xi, \xi') \preceq e^{-ad(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})}$. On veut maintenant montrer un résultat similaire pour x .

Supposons dans un premier temps que que $i(g) \neq l(g)$; l'isométrie g est alors hyperbolique. Notons x_g^+ son point fixe attractif et x_g^- son point fixe répulsif. Alors $x_g^- \in \Lambda_{l(g)}$ et $x_g^+, y \in \Lambda \setminus \Lambda_{l(g)}$.

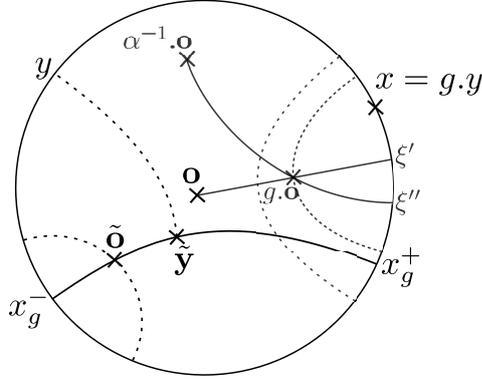


FIGURE 7.2 – Points $\tilde{\mathbf{o}}$ et \tilde{y}

Il existe donc $E = E(X, \Gamma) > 0$ et un point $\tilde{\mathbf{o}} \in (x_g^- x_g^+)$ tels que $d(\mathbf{o}, \tilde{\mathbf{o}}) \leq E$ et la projection de y sur l'axe $(x_g^- x_g^+)$ appartienne au rayon géodésique $[\tilde{\mathbf{o}} x_g^+)$ (voir figure 7.2); notons $L = d(\tilde{\mathbf{o}}, g.\tilde{\mathbf{o}}) = d(\tilde{y}, g.\tilde{y})$ la longueur de la projection de l'axe de g . Si $L \geq L_\Gamma := 5E + 10\kappa$, la proposition 7.2.2.1 impose

$$V(x_g^+, \tilde{y}, L - E) \subset V(x_g^+, \tilde{\mathbf{o}}, L - E). \quad (7.4)$$

Puisque le point $g.\tilde{\mathbf{o}}$ appartient à la boule $B(g.\mathbf{o}, E)$ et que $B(g.\mathbf{o}, E) \subset \tilde{V}(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - E)$, on en déduit que le rayon géodésique $[g.\tilde{\mathbf{o}}, x_g^+)$ est inclus dans $\tilde{V}(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - E)$, d'où $x_g^+ \in V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - E)$. D'après la proposition 7.2.2.2, il vient

$$V(x_g^+, \mathbf{o}, L - 3E - 4\kappa) \subset V(\xi', \mathbf{o}, L - 3E - 10\kappa), \quad (7.5)$$

7.2. Régularité du cocycle étendu sur $\tilde{\Lambda}$

si bien qu'en combinant (7.4) et (7.5), on obtient

$$V(x_g^+, \tilde{\mathbf{y}}, L - E) \subset V(\xi', \mathbf{o}, L - 3E - 10\kappa).$$

De $x \in V(x_g^+, \tilde{\mathbf{y}}, L - E)$, on déduit $x \in V(\xi', \mathbf{o}, L - 3E - 10\kappa)$; d'autre part, l'inégalité triangulaire implique $d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - 2E \leq L$, d'où le fait que le point x appartient à $V(\xi', \mathbf{o}, d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - 5E - 10\kappa)$. Finalement $d_{\mathbf{o}}(x, \xi') \leq K'_{\Gamma} e^{-ad(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})}$ et l'on conclut que $d_{\mathbf{o}}(x, \xi) \leq K e^{-ad(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})}$ avec $K > 0$.

Quand $i(g) = l(g)$, on procède de la même manière avec l'isométrie hyperbolique $g' = g\alpha$.

On doit maintenant montrer l'inégalité pour tout $g \in \Gamma$ tel que $d(\tilde{\mathbf{o}}, g.\tilde{\mathbf{o}}) \leq L_{\Gamma}$. L'ensemble de ces transformations étant fini, la quantité

$$m = \min_{g \mid d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) \leq L_{\Gamma}} d_{\mathbf{o}}(g.x_0, x)$$

est strictement positive. Le lemme 4.1.3 et le corollaire 4.1.6 impliquent qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\mathcal{B}_x(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0) - | \leq C \leq \frac{C}{m} d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0).$$

La constante de l'énoncé est alors donnée par le maximum entre $\frac{C}{m}$ et K_{Γ} .

- 2) Pour terminer la démonstration du (b), il reste à traiter le cas où x et $g.x_0$ sont proches, mais pas autant que dans le point 1. Pour cela, nous avons besoin de la propriété suivante

Fait 7.2.3. *Pour tout $j \in \llbracket p + q \rrbracket$, tout $\alpha \in \Gamma_j^*$, tous $g \in \Gamma$ avec $i(g) \neq j$ et $x \in \Lambda_{i(g)}$, il existe $z \in g.(\Lambda \setminus \Lambda_{l(g)})$ tel que $d_{\mathbf{o}}(z, x) \leq C d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0)$ et $d_{\mathbf{o}}(z, g.x_0) \leq C d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0)$, pour une constante $C = C(x_0) > 0$.*

Démonstration. Le point x appartient à $\Lambda_{i(g)}$, donc il existe $g' \in \Gamma$ avec $i(g') = i(g)$ et $x' \in \Lambda$ tels que $x = g'.x'$. Soit k le premier indice $\leq \min(|g'|, |g|)$ tel que les k -ièmes lettres de g' et g soient différentes. Deux cas se présentent :

a) *les deux lettres n'appartiennent pas au même facteur de Schottky*; dans ce cas, on peut écrire $g' = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha'_k . g'_1$ et $g = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k . g_1$. Fixons $w \in \Lambda \setminus \Lambda_{l(g)}$. Considérons u dans le bord $\partial_{g_1}^{x_0}$ de la composante connexe de $D_{i(g_1)}$ contenant $g_1.x_0$

(voir figure 7.3). Il vient

$$d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_k . u) = e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . x_0}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_u(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} d_{\mathbf{o}}(g_1 . x_0, u) ;$$

en remarquant que $m = \min_{j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket} \min_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ i(\gamma)=j}} \min_{u \in \partial_{\gamma}^{x_0}} d_{\mathbf{o}}(\gamma . x_0, u) > 0$, on obtient

$$m e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . x_0}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_u(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} \leq d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_k . u).$$

Il existe également une constante $M > 0$ (que l'on peut choisir égale au $d_{\mathbf{o}}$ -diamètre de ∂X) telle que

$$d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w) \leq M e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . x_0}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . w}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})}.$$

Ces deux estimations fournissent alors :

$$\frac{d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w)}{d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_k . u)} \leq \frac{M}{m} e^{-\frac{a}{2} (\mathcal{B}_{g_1 . w}(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - \mathcal{B}_u(\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}))}.$$

D'après le corollaire 4.1.6, il existe une constante $C(X, \Gamma) > 0$ telle que

$$\frac{d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w)}{d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_k . u)} \leq \frac{M}{m} e^{aC(X, \Gamma)}.$$

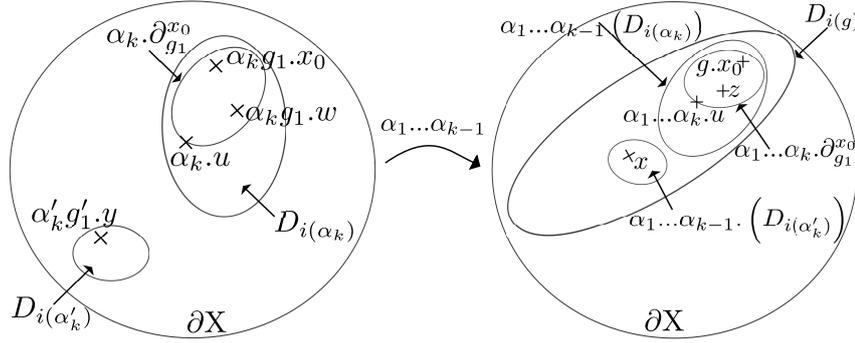
Cette majoration étant valable pour tout $u \in \partial_{g_1}^{x_0}$, on déduit de la compacité de $\partial_{g_1}^{x_0}$ que $d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w) \leq C'(x_0) d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_k . \partial_{g_1}^{x_0})$. Puisque $x \notin \alpha_1 \dots \alpha_k . D_{i(g_1)}$, on en déduit que $d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w) \leq C'(x_0) d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0)$. L'inégalité triangulaire imposant $d_{\mathbf{o}}(\gamma.w, x) \leq d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0) + d(g.x_0, g.w)$, le résultat suit en posant $z = g.w$ et $C = 1 + C'(x_0)$.

b) les deux lettres appartiennent au même facteur de Schottky : il existe alors $\beta \in \mathcal{A}$ et $n > n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $g = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} . \beta^n . g_1$ et $g' = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} . \beta^{n'} . g'_1$. Supposons pour fixer les idées que β engendre Γ_l , $l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Fixons $u \in \partial_{g_1}^{x_0}$ et $w \in \Lambda \setminus \Lambda_{l(g)}$. Comme dans le a), il vient

$$m e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . x_0}(\beta^{-n} \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_u(\beta^{-n} \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} \leq d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta^n . u)$$

et

$$d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w) \leq M e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . x_0}(\beta^{-n} \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})} e^{-\frac{a}{2} \mathcal{B}_{g_1 . w}(\beta^{-n} \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o})}.$$


 FIGURE 7.3 – Action de $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$

De même, en utilisant le corollaire 4.1.6 et en remarquant que les estimations précédentes sont satisfaites pour tout $u \in \partial_{g_1}^{x_0}$, on en déduit l'existence d'une constante $C'(x_0) > 0$ telle que $d_{\mathbf{o}}(g.x_0, g.w) \leq C'(x_0) d_{\mathbf{o}}(g.x_0, \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta^n . \partial_{g_1}^{x_0})$. Puisque $x \in \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta^{n'} . D_{i(g'_1)}$ et que $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta^{n'} . D_{i(g'_1)} \cap \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \beta^n . \partial_{g_1}^{x_0} = \emptyset$, on en déduit $d_{\mathbf{o}}(g.w, g.x_0) \leq C'(x_0) d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0)$. La conclusion du fait suit comme précédemment en posant $z = g.w$. \square

Reprenons à présent la démonstration du 2). On fixe $x \in \Lambda_{i(g)}$, puis $z \in g.(\Lambda \setminus \Lambda_{i(g)})$ vérifiant les conclusions du fait 7.2.3. La proposition 4.2.4 et le cas 1) de la présente démonstration appliqué en z impliquent qu'il existe $C = C(x_0) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{B}_x(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0) \right| &\leq \left| \mathcal{B}_x(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - \mathcal{B}_z(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{B}_z(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, g.x_0) \right| \\ &\leq C d_{\mathbf{o}}(x, g.x_0). \end{aligned}$$

(c) Les points x et y appartiennent à $\Gamma.x_0$: fixons $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$, $\alpha \in \Gamma_j^*$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $i(g_1) = i(g_2) \neq j$. Posons $\gamma_1 = \gamma . \beta_1$ et $\gamma_2 = \gamma . \beta_2$.

- 1) *Supposons d'abord que $i(\beta_1) \neq i(\beta_2)$.* Soient $z_1 \in \Lambda \setminus \Lambda_{i(\gamma_1)}$ et $z_2 \in \Lambda \setminus \Lambda_{i(\gamma_2)}$. De la proposition 4.2.4 et du lemme précédent, on déduit qu'il existe $C' = C'(X, \Gamma, x_0) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)| &\leq \left| b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - \mathcal{B}_{\gamma_1.z_1}(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{B}_{\gamma_1.z_1}(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - \mathcal{B}_{\gamma_2.z_2}(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{B}_{\gamma_2.z_2}(\alpha^{-1} . \mathbf{o}, \mathbf{o}) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\preceq C' (d_{\mathfrak{o}}(\gamma_1.x_0, \gamma_1.z) + d_{\mathfrak{o}}(\gamma_1.z_1, \gamma_2.z_2) \\ &\quad + d_{\mathfrak{o}}(\gamma_2.z_2, \gamma_2.x_0)). \end{aligned}$$

En combinant la propriété de conformité (2.6) et le corollaire 4.1.6, il vient

$$\begin{aligned} |b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)| &\preceq e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma_1.\mathfrak{o})} d_{\mathfrak{o}}(x_0, z_1) + e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o})} d_{\mathfrak{o}}(\beta_1.z_1, \beta_2.z_2) \\ &\quad + e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma_2.\mathfrak{o})} d_{\mathfrak{o}}(z_2, x_0) \\ &\preceq \left(e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma_1.\mathfrak{o})} + e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o})} + e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma_2.\mathfrak{o})} \right). \end{aligned}$$

Le lemme 4.1.3 implique alors que $d(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o}) + d(\mathfrak{o}, \beta_i.\mathfrak{o}) - C \leq d(\mathfrak{o}, \gamma_i.\mathfrak{o}) \leq d(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o}) + d(\mathfrak{o}, \beta_i.\mathfrak{o})$ pour $i \in \{1, 2\}$, d'où

$$|b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)| \preceq e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o})}.$$

Puisque $\min_{(x,y) \in \bigcup_{l \neq j} \tilde{\Lambda}_l \times \tilde{\Lambda}_j} d_{\mathfrak{o}}(x, y) > 0$, on a

$$|b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)| \preceq e^{-ad(\mathfrak{o}, \gamma.\mathfrak{o})} d_{\mathfrak{o}}(\beta_1.x_0, \beta_2.x_0).$$

On conclut en utilisant une fois encore (2.6).

- 2) Si $i(\beta_1) = i(\beta_2) = l \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$: il existe $\beta \in \Gamma_l^*$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$, $n_1 \neq n_2$ et $\beta_{1,1}, \beta_{2,1} \in \Gamma$ tels que $\beta_1 = \beta^{n_1} \beta_{1,1}$ et $\beta_2 = \beta^{n_2} \beta_{2,1}$. Nous avons le

Fait 7.2.4. *Il existe $z \in \Lambda_l$ tel que $d_{\mathfrak{o}}(\beta_1.x_0, z) \leq Cd(\beta_1.x_0, \beta_2.x_0)$ et $d_{\mathfrak{o}}(\beta_2.x_0, z) \leq Cd(\beta_1.x_0, \beta_2.x_0)$ pour une constante $C = C(x_0) > 0$.*

Démonstration. Fixons $w \in \Lambda_{i(\beta_{2,1})}$ et $u \in \partial_{\beta_{2,1}}^{x_0}$ le bord de la composante connexe de $D_{i(\beta_{2,1})}$ contenant $\beta_{2,1}.x_0$. De la même manière que dans la démonstration du fait 7.2.3, on a

$$m e^{-\frac{\alpha}{2} \mathcal{B}_{\beta_{2,1}.x_0}(\beta^{-n_2}.\mathfrak{o}, \mathfrak{o})} e^{-\frac{\alpha}{2} \mathcal{B}_u(\beta^{-n_2}.\mathfrak{o}, \mathfrak{o})} \leq d_{\mathfrak{o}}(\beta^{n_2} \beta_{2,1}.x_0, \beta^{n_2}.u)$$

et

$$d_{\mathfrak{o}}(\beta^{n_2} \beta_{2,1}.x_0, \beta^{n_2}.w) \leq M e^{-\frac{\alpha}{2} \mathcal{B}_{\beta_{2,1}.x_0}(\beta^{-n_2}.\mathfrak{o}, \mathfrak{o})} e^{-\frac{\alpha}{2} \mathcal{B}_w(\beta^{-n_2}.\mathfrak{o}, \mathfrak{o})}.$$

En posant $z = \beta^{n_2}.w$, il découle du corollaire 4.1.6 et des estimations précédentes que

$$d_{\mathfrak{o}}(\beta^{n_2} \beta_{2,1}.x_0, z) \leq C' d_{\mathfrak{o}}(\beta^{n_2} \beta_{2,1}.x_0, \beta^{n_2} \partial_{\beta_{2,1}}^{x_0})$$

7.3. Spectre de l'opérateur de transfert étendu

pour $C' = C'(x_0) > 0$. Or $\beta^{n_1}\beta_{1,1}.x_0 \in \beta^{n_1}.(\partial X \setminus D_l)$ et $\beta^{n_1}.(\partial X \setminus D_l) \cap \beta^{n_2}. \partial_{\beta_{2,1}}^{x_0} = \emptyset$, donc

$$d_{\mathbf{o}}(\beta^{n_2}\beta_{2,1}.x_0, z) \leq C' d_{\mathbf{o}}(\beta^{n_2}\beta_{2,1}.x_0, \beta^{n_1}\beta_{1,1}.x_0).$$

Le fait découle alors de l'inégalité triangulaire en posant $C = 1 + C'$. \square

Terminons à présent la démonstration de l'étape (c). On peut décomposer $|b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)|$ en

$$|b^*(\alpha, \gamma_1.x_0) - b^*(\alpha, \gamma.z)| + |b^*(\alpha, \gamma.z) - b^*(\alpha, \gamma_2.x_0)| ;$$

La conclusion de la proposition 7.2.1 pour $x = \gamma_1.x_0$ et $y = \gamma_2.x_0$ s'obtient alors en utilisant successivement le (b), la relation de conformité (2.6), la définition de z puis (2.6) une dernière fois.

7.3 Spectre de l'opérateur de transfert étendu

On introduit maintenant l'opérateur de transfert associé à la fonction plafond b^* . Pour alléger les formules, nous notons dans la suite $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Gamma.x_0$ et $\tilde{\Lambda}_j := \overline{\tilde{\Lambda}_j^0}$ pour tout $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$.

Pour $z \in \mathbb{C}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\tilde{\Lambda})$, on définit formellement l'opérateur \mathcal{L}_z^* de la manière suivante : pour tout $x \in \tilde{\Lambda}^0$

$$\mathcal{L}_z^*\varphi(x) = \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}_j^c}(x) e^{-zb^*(\alpha, x)} \varphi(\alpha.x).$$

On remarque que $\mathcal{L}_z^*\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{\alpha \in \Gamma_j^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha.\mathbf{o})} \varphi(\alpha.x_0)$. Comme pour \mathcal{L}_z , on déduit des hypothèses (P_1) et (N) et du corollaire 4.1.6 que les sommes précédentes sont bornées pour $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$. La convergence normale de ces séries de fonctions pour $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ et le fait que $\varphi \in \mathcal{C}(\tilde{\Lambda})$ impliquent que $\mathcal{L}_z^*\varphi$ peut être continument étendu sur $\tilde{\Lambda}$; en particulier, l'opérateur \mathcal{L}_δ^* agit sur $\mathcal{C}(\tilde{\Lambda})$. Notons ρ_∞^* son rayon spectral sur cet ensemble. L'opérateur \mathcal{L}_δ^* étant positif, le théorème de Perron-Frobenius implique que

$$\rho_\infty^* = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left| (\mathcal{L}_\delta^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}} \right|_\infty^{\frac{1}{k}}.$$

Pour obtenir une propriété de trou spectral, on étudiera l'action de \mathcal{L}_δ^* sur l'espace $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$, défini par

$$\text{Lip}(\tilde{\Lambda}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(\tilde{\Lambda}) \mid \|\varphi\| := |\varphi|_\infty + [\varphi] < +\infty \right\}$$

où

$$[\varphi] = \sup_{1 \leq j \leq p+q} \sup_{\substack{x, y \in \tilde{\Lambda}_j \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d_{\mathbf{o}}(x, y)}.$$

La proposition suivante implique que l'opérateur \mathcal{L}_z^* est borné sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \geq \delta$.

Proposition 7.3.1. *Chaque poids $w_z^*(\gamma, \cdot) := e^{-zb^*(\gamma, \cdot)} \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}_c}$ appartient à $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ et il existe une constante $C = C(z) > 0$ telle que pour tout γ dans Γ^* , on a*

$$\|w_z^*(\gamma, \cdot)\| \leq C e^{-\text{Re}(z)d(\mathbf{o}, \gamma, \mathbf{o})}.$$

Cette proposition est une conséquence du corollaire 7.2.1. La démonstration est en tout point similaire à celle de la proposition 4.2.4.

Notons ρ^* le rayon spectral de \mathcal{L}_z^* sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$. On a

Proposition 7.3.2. *L'opérateur \mathcal{L}_δ^* est quasi-compact sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ et ρ^* est une valeur propre simple et isolée dans son spectre, associée à une fonction propre strictement positive. De plus $\rho^* = \rho_\infty^* = 1$.*

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition 4.2.9, la première étape consiste à montrer que l'opérateur \mathcal{L}_δ^* est quasi-compact sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$. De [Hen95], on déduit qu'il suffit de montrer que l'opérateur \mathcal{L}_δ^* satisfait la propriété suivante :

Définition 7.3.3 (Propriété DF(s)). *L'opérateur \mathcal{L}_δ^* satisfait la propriété DF(s) sur $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), \|\cdot\|)$ si*

- i) \mathcal{L}_δ^* est compact de $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), \|\cdot\|)$ dans $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), |\cdot|_\infty)$;
- ii) pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe des réels positifs S_k, s_k tels que

$$\liminf_k (s_k)^{\frac{1}{k}} = s < \rho^*$$

$$\text{et } \left\| (\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi \right\| \leq S_k |\varphi| + s_k \|\varphi\| \text{ pour tout } \varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda}).$$

Nous suivons une fois encore les étapes des démonstrations données dans [BP00] et [Pei11]. L'ensemble $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Gamma.x_0$ étant compact, le théorème d'Ascoli implique que

7.3. Spectre de l'opérateur de transfert étendu

l'inclusion $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), \|\cdot\|) \hookrightarrow (\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), |\cdot|_\infty)$ est compacte, d'où le fait que \mathcal{L}_δ^* est compact de $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), \|\cdot\|)$ dans $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), |\cdot|_\infty)$. Montrons à présent l'existence de deux suites $(s_k)_{k \geq 1}$ et $(S_k)_{k \geq 1}$ satisfaisant la relation suivante : pour tout $k \geq 1$ et tout $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$

$$\|(\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi\| \leq s_k \|\varphi\| + S_k |\varphi|_\infty$$

avec $s := \liminf_{k \rightarrow +\infty} (s_k)^{\frac{1}{k}} < \rho^*$. Soient $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$, $k \geq 1$ et $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Pour tout $x \in \tilde{\Lambda}_j$, rappelons que

$$(\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\delta b^*(\gamma, x)} \varphi(\gamma \cdot x).$$

Donc

$$\left| (\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi(x) \right| \leq \left(\sum_{|\gamma|=k} \|w_\delta^*(\gamma, \cdot)\| \right) \cdot |\varphi|_\infty. \quad (7.6)$$

Pour $x, y \in \tilde{\Lambda}_j$, on majore $\left| (\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi(x) - (\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi(y) \right|$ par $K_1 + K_2$ où

$$K_1 := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\delta b^*(\gamma, x)} |\varphi(\gamma \cdot x) - \varphi(\gamma \cdot y)|$$

et

$$K_2 := \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} \left| e^{-\delta b^*(\gamma, y)} - e^{-\delta b^*(\gamma, x)} \right| |\varphi(\gamma \cdot y)|.$$

Les points x et y étant tous les deux dans $\tilde{\Lambda}_j$ et γ satisfaisant $l(\gamma) \neq j$, le corollaire 4.1.8 implique qu'il existe $r < 1$ tel que

$$K_1 \leq C r^k \left(\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\delta b^*(\gamma, x)} \right) [\varphi] d_{\mathbf{o}}(x, y),$$

d'où

$$K_1 \leq C r^k \left| (\mathcal{L}_\delta^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}} \right|_\infty \|\varphi\| \cdot d_{\mathbf{o}}(x, y). \quad (7.7)$$

Le second terme K_2 est majoré par

$$\left(\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \|w_\delta^*(\gamma, \cdot)\| \right) |\varphi|_\infty \cdot d_{\mathbf{o}}(x, y). \quad (7.8)$$

En divisant par $d_{\mathbf{o}}(x, y)$ dans (7.7) et (7.8), puis en prenant la borne supérieure sur x, y et j dans (7.6), (7.7) et (7.8), il vient

$$\|(\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi\| \leq \left(Cr^k \|(\mathcal{L}_\delta^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}\|_\infty \right) \|\varphi\| + 2 \left(\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \|w_\delta^*(\gamma, \cdot)\| \right) |\varphi|_\infty.$$

Posons $s_k := Cr^k \|(\mathcal{L}_\delta^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}\|_\infty$ et $S_k = 2 \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} \|w_\delta^*(\gamma, \cdot)\|$. On remarque que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} s_k^{\frac{1}{k}} = r\rho_\infty^*.$$

La définition des normes $\|\cdot\|$ et $|\cdot|_\infty$ combinée avec le théorème de Beurling implique que $\rho_\infty^* \leq \rho^*$, et donc

$$\|(\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi\| \leq s_k \|\varphi\| + S_k |\varphi|_\infty$$

pour tout $k \geq 1$ et avec $s = \liminf_{k \rightarrow +\infty} s_k^{\frac{1}{k}} < \rho^*$. Finalement \mathcal{L}_δ^* est quasi-compact sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$. Donc ρ^* correspond au module d'une valeur propre de multiplicité finie.

Dans la deuxième étape, nous montrons $\rho^* = \rho_\infty^* = 1$. La démonstration précédente implique déjà $\rho_\infty^* \leq \rho^*$. Supposons que cette inégalité est stricte : il existe une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de module ρ^* et une fonction propre $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ telle que $\mathcal{L}_\delta^* \varphi = \lambda \varphi$, ce qui implique $\rho^* |\varphi| \leq \mathcal{L}_\delta^* |\varphi|$ par positivité de \mathcal{L}_δ^* ; d'où $\rho^* \leq \rho_\infty^*$, ce qui contredit l'hypothèse $\rho_\infty^* < \rho^*$. Montrons maintenant que $\rho^* = 1$. On a montré dans la proposition 4.2.9 que l'opérateur \mathcal{L}_δ admet 1 comme rayon spectral, qui est une valeur propre simple associée à la fonction propre strictement positive h définie au chapitre 4. Soit $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ une fonction propre associée à une valeur propre de module ρ^* . La restriction $\varphi|_\Lambda$ appartient à $\text{Lip}(\Lambda)$ et satisfait pour tout $x \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta \varphi|_\Lambda(x) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\Lambda_{i(\alpha)}^c}(x) e^{-\delta b(\alpha, x)} \varphi|_\Lambda(\alpha.x) \\ &= (\mathcal{L}_\delta^* \varphi)|_\Lambda(x) \\ &= \lambda \varphi|_\Lambda(x). \end{aligned}$$

7.3. Spectre de l'opérateur de transfert étendu

Donc $\rho^* = |\lambda| \leq 1$. D'autre part $\rho^* \geq \limsup_n |(\mathcal{L}_\delta^*)^n \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}|_\infty^{\frac{1}{n}}$. Fixons $\varepsilon > 0$; il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $(\mathcal{L}_\delta^*)^{n_k} \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x) \leq (\rho^*)^{n_k} (1 + \varepsilon)^{n_k}$ pour tous $k \geq 1$ et $x \in \Lambda$. Par définition de \mathcal{L}_δ^* , ceci implique que

$$\mathcal{L}_\delta^{n_k} \mathbf{1}_\Lambda(x) \leq (\rho^*)^{n_k} (1 + \varepsilon)^{n_k} \quad (7.9)$$

pour tous $k \geq 1$ et $x \in \Lambda$; la fonction propre h étant strictement positive, il existe $m, M > 0$ tels que $m \leq h \leq M$, d'où

$$\frac{m}{M} \leq \frac{h(x)}{M} \leq \mathcal{L}_\delta^{n_k} \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x) \quad (7.10)$$

pour tous $k \geq 1$ et $x \in \Lambda$. De (7.9) et (7.10) et d'un passage à la limite en k , on peut déduire que $\rho^*(1 + \varepsilon) \geq 1$ pour tout $\varepsilon > 0$. Finalement $\rho^* = 1$.

Soit maintenant $e^{i\theta}$ une valeur propre de module 1 de \mathcal{L}_δ^* : il existe $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ telle que $\mathcal{L}_\delta^* \varphi = e^{i\theta} \varphi$. Par le même raisonnement que précédemment, pour tout $x \in \Lambda$, on a

$$\mathcal{L}_\delta \varphi|_\Lambda(x) = (\mathcal{L}_\delta^* \varphi)|_\Lambda(x) = e^{i\theta} \varphi|_\Lambda(x).$$

Puisque 1 est l'unique valeur propre de module 1 de \mathcal{L}_δ , on a $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$; donc 1 est l'unique valeur propre de module 1 de \mathcal{L}_δ^* .

La prochaine étape consiste à prouver l'existence d'une fonction propre strictement positive pour 1. L'opérateur \mathcal{L}_δ^* étant positif, le théorème de Perron-Frobenius assure qu'il existe une fonction positive ϕ telle que $\mathcal{L}_\delta^* \phi = \phi$. Montrons que ϕ est strictement positive. Supposons que ϕ s'annule en $x \in \tilde{\Lambda}$. Deux cas se présentent alors :

- soit il existe $j \in \llbracket 1, p + q \rrbracket$ tel que $x \in \Lambda_j$; alors, en utilisant la définition des itérés de \mathcal{L}_δ^* , il vient pour tout $k \geq 1$

$$(\mathcal{L}_\delta^*)^k \phi(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ l(\gamma) \neq j}} e^{-\delta b(\gamma, x)} \phi(\gamma \cdot x) = \phi(x) = 0. \quad (7.11)$$

Donc $\phi(\gamma \cdot x) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et tout $\gamma \in \Gamma(k)$ avec $l(\gamma) \neq j$. La minimalité de l'action de Γ sur Λ et la continuité de ϕ sur Λ impliquent alors que ϕ est nulle sur Λ . Il reste à montrer que c'est aussi le cas sur $\Gamma \cdot x_0$. L'équation (7.11) évaluée en x_0 assure qu'il est en fait suffisant de prouver que $\phi(x_0)$ est nul. La même équation permet encore de réduire la preuve à montrer que la suite $\left(\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \phi(\gamma \cdot x_0) \right)_k$

tend vers 0. Soit $k \geq 1$. Le corollaire 4.1.8 implique que pour tout $|\gamma| = k$, on a

$$\phi(\gamma.x_0) = |\phi(\gamma.x_0)| = |\phi(\gamma.x_0) - \phi(\gamma.y)| \leq [\phi] d_{\mathbf{o}}(\gamma.x_0, \gamma.y) \leq [\phi] r^k d_{\mathbf{o}}(x_0, y)$$

où $y \in \Lambda_{l(\gamma)}^c$. Le lemme 5.2.4 combiné avec le corollaire 4.1.6 implique pour sa part qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} \leq C$; d'où le fait que $\phi(x_0) \leq Cr^k$. En prenant la limite en k , on voit que $\phi(x_0) = 0$; pour résumer, si ϕ s'annule sur Λ , elle est nulle sur $\tilde{\Lambda}$.

- soit $x \in \Gamma.x_0$: en utilisant les itérés de \mathcal{L}_{δ}^* , il vient $\phi(\gamma.x) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $x \notin \tilde{\Lambda}_{l(\gamma)}$. Par continuité de ϕ et par définition de l'ensemble limite, la fonction ϕ est nulle sur Λ et la discussion précédente assure que ϕ est nulle sur $\Gamma.x_0$.

Donc ϕ est strictement positive. La prochaine étape concerne la dimension de l'espace propre associé à 1. Pour montrer qu'elle vaut 1, introduisons l'opérateur normalisé P^* défini pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ par

$$P^*\varphi = \frac{1}{\phi} \mathcal{L}_{\delta}^*(\varphi\phi)$$

où ϕ est une fonction propre strictement positive associée à 1. Cet opérateur est positif, borné sur $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$, quasi-compact; il vérifie $P^*(\mathbb{1}_{\tilde{\Lambda}}) = \mathbb{1}_{\tilde{\Lambda}}$ et son rayon spectral vaut 1. Montrons que la dimension de l'espace propre associé à 1 est 1 pour cet opérateur. Soit f une fonction propre pour P^* associée à 1.

- (i) Supposons dans un premier temps que $|f|$ atteint son maximum $|f|_{\infty}$ en un point x de Λ_j , $j \in \llbracket 1, p+q \rrbracket$. Alors

$$|f(x)| = |P^*f(x)| \leq P^*|f|(x) \leq |f(x)|. \quad (7.12)$$

En utilisant les itérés de P^* et un argument de convexité, on obtient $|f(\gamma.x)| = |f(x)|$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ avec $l(\gamma) \neq j$. Par minimalité de l'action de Γ sur Λ , la fonction $|f|$ est constante sur Λ . C'est aussi le cas sur $\Gamma.x_0$. En effet, si on note M la valeur de $|f|$ sur Λ , on a

$$1 - \frac{|f(x_0)|}{M} = \frac{1}{\phi(x_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} \left(1 - \frac{|f(\gamma.x_0)|}{M}\right) \phi(\gamma.x_0),$$

d'où

$$\left|1 - \frac{|f(x_0)|}{M}\right| \leq \frac{1}{\phi(x_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})} \frac{|M - |f(\gamma.x_0)||}{|M|} \phi(\gamma.x_0).$$

7.3. Spectre de l'opérateur de transfert étendu

Pour tout $\gamma \in \Gamma(k)$ et tout $z \in \Lambda_{l(\gamma)}^c$ on a $M = |f(\gamma.z)|$. Comme précédemment, on majore $|M - |f(\gamma.x_0)||$ par Cr^k pour $r \in]0, 1[$ et la suite $\left(\left| 1 - \frac{|f(x_0)|}{M} \right| \right)_k$ tend vers 0 ; d'où $|f(x_0)| = M$. En appliquant (7.12) pour les itérés de P^* et en utilisant une fois encore un argument de convexité, on déduit que $|f|$ est constante sur $\Gamma.x_0$, et finalement $|f|$ est constante sur $\tilde{\Lambda}$.

- (ii) Si $|f|$ atteint son maximum sur $\Gamma.x_0$, il découle de la minimalité de l'action de Γ au bord que $|f|$ est constante sur Λ , et l'argument précédent implique que $|f|$ est constante sur $\tilde{\Lambda}$.

De même, on peut montrer que f est constante sur $\tilde{\Lambda}$. Ceci achève la démonstration du dernier point. \square

Choisissons maintenant une fonction propre h^* de \mathcal{L}_δ^* pour 1 satisfaisant $\sigma_{\mathbf{o}}(h^*) = 1$; il existe $\Pi_\delta^* : \text{Lip}(\tilde{\Lambda}) \rightarrow \mathbb{C}h^*$ telle que pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$, on a

$$\mathcal{L}_\delta^* \varphi = \Pi_\delta^*(\varphi) + R_\delta^*(\varphi)$$

où R^* satisfait $R_\delta^* \Pi_\delta^* = \Pi_\delta^* R_\delta^* = 0$ et possède un rayon spectral < 1 . Il existe alors une forme linéaire $\sigma^* : \text{Lip}(\tilde{\Lambda}) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant $\sigma^*(h^*) = 1$ telle que pour tout $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$, on a

$$\mathcal{L}_\delta^* \varphi = \sigma^*(\varphi)h^* + R^* \varphi. \quad (7.13)$$

Pour tout $k \geq 1$, il vient

$$(\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi = \sigma^*(\varphi)h^* + (R^*)^k \varphi \text{ et } (\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi = \sigma^*(\mathcal{L}_\delta^* \varphi)h^* + (R^*)^{k-1} \mathcal{L}_\delta^* \varphi ;$$

la fonction h^* étant strictement positive, on en déduit que σ^* est \mathcal{L}_δ^* -invariante. Soient $\varphi \in \text{Lip}(\tilde{\Lambda})$ et $k \geq 1$. On écrit

$$\mathcal{L}_\delta^k \varphi|_\Lambda = \left((\mathcal{L}_\delta^*)^k \varphi \right)|_\Lambda = \sigma^*(\varphi)h^*|_\Lambda + (R^*)^k \varphi|_\Lambda ;$$

l'égalité

$$\sigma_{\mathbf{o}}(\varphi) = \sigma_{\mathbf{o}}(\varphi|_\Lambda) = \sigma_{\mathbf{o}}(\mathcal{L}_\delta^k \varphi|_\Lambda)$$

entraîne

$$\sigma_{\mathbf{o}}(\varphi) = \sigma^*(\varphi) + \sigma_{\mathbf{o}}\left((R^*)^k \varphi|_\Lambda\right).$$

En passant à la limite en k , on voit que $\sigma_{\mathbf{o}}(\varphi) = \sigma^*(\varphi)$ et il vient $\sigma^* = \sigma_{\mathbf{o}}$. Dans la suite,

nous remplacerons σ^* par $\sigma_{\mathbf{o}}$. Rappelons que la décomposition spectrale de \mathcal{L}_δ donne

$$\mathcal{L}_\delta = \sigma_{\mathbf{o}}(\cdot)h + R. \quad (7.14)$$

On observe alors que h^* est une extension de h dans $\text{Lip}(\tilde{\Lambda})$.

Remarque 7.3.4. *En utilisant les itérés de \mathcal{L}_δ^* évalués en la fonction $\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}$ et au point x_0 , il vient*

$$h^*(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}$$

et cette quantité ne dépend pas du point $x_0 \in \partial X$.

Comme pour l'opérateur \mathcal{L}_δ , on cherche à étendre le trou spectral de \mathcal{L}_δ^* à une petite perturbation. On montre d'abord que l'application $z \mapsto \mathcal{L}_z^*$ est une perturbation continue de \mathcal{L}_δ^* pour $\text{Re}(z) \geq \delta$ en se basant sur la

Proposition 7.3.5. *Sous la famille d'hypothèses (H_β) , pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe une constante $C = C_K > 0$ telle que pour tous $s, t \in K$ et $\kappa \searrow 0$*

1) si $\beta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} a. & \|\mathcal{L}_{\delta+it}^* - \mathcal{L}_{\delta+is}^*\| \leq C|s-t|^\beta L \left(\frac{1}{|s-t|} \right), \\ b. & \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it}^* - \mathcal{L}_{\delta+it}^*\| \leq C\kappa^\beta L \left(\frac{1}{\kappa} \right); \end{aligned}$$

2) si $\beta = 1$

$$\begin{aligned} a. & \|\mathcal{L}_{\delta+it}^* - \mathcal{L}_{\delta+is}^*\| \leq C|s-t|\tilde{L} \left(\frac{1}{|s-t|} \right), \\ b. & \|\mathcal{L}_{\delta+\kappa+it}^* - \mathcal{L}_{\delta+it}^*\| \leq C\kappa\tilde{L} \left(\frac{1}{\kappa} \right), \end{aligned}$$

$$\text{où } \tilde{L}(x) = \int_1^x \frac{L(y)}{y} dy.$$

La démonstration est la même que celle de la proposition 4.2.12. Notons $\rho^*(z)$ le rayon spectral de l'opérateur \mathcal{L}_z^* sur $(\text{Lip}(\tilde{\Lambda}), \|\cdot\|)$. En utilisant les arguments de la démonstration de la proposition 4.2.14, on montre

Proposition 7.3.6. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho_\varepsilon \in]0, 1[$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z - \delta|_\infty < \varepsilon$ et $\text{Re}(z) \geq \delta$, on a*

7.3. Spectre de l'opérateur de transfert étendu

- $\rho^*(z) > \rho_\varepsilon$;
- \mathcal{L}_z a une unique valeur propre λ_z^* de module $\rho^*(z)$;
- cette valeur propre est simple et proche de 1 ;
- le reste du spectre est inclus dans un disque de rayon ρ_ε .

De plus, pour tout $A > 0$, il existe $\rho(A) < 1$ tel que $\rho^*(z) < \rho(A)$ dès que $z \in \mathbb{C}$ satisfait $|z - \delta|_\infty \geq \varepsilon$, $\operatorname{Re}(z) \geq \delta$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq A$. Enfin $\rho^*(z) = 1$ si et seulement si $z = \delta$.

La démonstration de la proposition C.1 nécessite également la remarque suivante

Remarque 7.3.7. On peut choisir le $\varepsilon > 0$ de la proposition précédente suffisamment petit pour que

$$\frac{L(x)}{L(y)} \leq \max\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

pour tous $x, y \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

La proposition suivante précise le comportement local de la valeur propre dominante $\lambda_{\delta+it}^*$.

Proposition 7.3.8. Pour la constante $E_\Gamma > 0$ donnée dans la proposition 4.2.19 et t proche de 0

- si $\beta \in]0, 1[$

$$\lambda_{\delta+it}^* = 1 - E_\Gamma \Gamma(1 - \beta) e^{+i \operatorname{sign}(t) \frac{\beta\pi}{2}} |t|^\beta L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$$

- si $\beta = 1$

- $\lambda_{\delta+it}^* = 1 - E_\Gamma \operatorname{sign}(t) i |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)) ;$
- $\operatorname{Re}(1 - \lambda_{\delta+it}^*) = \frac{\pi}{2} E_\Gamma |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right) (1 + o(1)).$

Remarque 7.3.9. Il n'y a rien de surprenant dans le fait que la constante soit encore E_Γ dans le cas de l'opérateur étendu. La démonstration de ce résultat est la même que celle de la proposition 4.2.19. On montre que

$$\lambda_{\delta+it}^* \sim \sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_{\delta+it}^* - \mathcal{L}_\delta^*) h^*).$$

La mesure $\sigma_{\mathbf{o}}$ ne chargeant pas $\Gamma.x_0$, il vient

$$\sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_{\delta+it}^* - \mathcal{L}_{\delta}^*)h^*) = \sigma_{\mathbf{o}}((\mathcal{L}_{\delta+it} - \mathcal{L}_{\delta})h).$$

Dans la démonstration du théorème C dans le cas $\beta = 1$, nous nous servirons de l'opérateur $Q_z^* = (\text{Id} - \mathcal{L}_z^*)^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \geq \delta$. Les propriétés suivantes sont analogues aux propriétés 4.2.20 et 4.2.21 démontrées pour l'opérateur $Q_z = (\text{Id} - \mathcal{L}_z)^{-1}$.

Proposition 7.3.10. *Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $\|Q_z^* - (1 - \lambda_z^*)^{-1}\Pi_z^*\| \leq C$ pour z tel que $|z - \delta|_{\infty} < \varepsilon$ et $\|Q_z^*\| \leq C$ pour z tel que $|z - \delta|_{\infty} \geq \varepsilon$. De plus, pour t proche de 0*

$$Q_{\delta+it}^* = \frac{1}{E_{\Gamma} \text{sign}(t) i |t| \tilde{L}\left(\frac{1}{|t|}\right)} (1 + o(1))\Pi_0 + O(1)$$

On obtient directement le corollaire suivant :

Corollaire 7.3.11. *La fonction $t \mapsto \text{Re}(Q_{\delta+it}^*)$ est intégrable en 0.*

7.4 Démonstration du théorème C

Pour commencer, rappelons que la fonction orbitale de Γ est donnée pour tout $R > 0$ par

$$\begin{aligned} N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) &:= \#\{\gamma \in \Gamma \mid d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) \leq R\} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o}) - R) + 1 \end{aligned}$$

où $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$. Nous démontrons ici le

Théorème C.

- $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) \sim \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \frac{h^*(x_0)}{\delta E_{\Gamma}} \frac{e^{\delta R}}{R^{1-\beta} L(R)}$ si $\beta \in]0, 1[$;
- $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) \sim \frac{h^*(x_0)}{\delta E_{\Gamma}} \frac{e^{\delta R}}{\tilde{L}(R)}$ si $\beta = 1$.

Rappelons que la remarque 7.3.4 assure que $h^*(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma.\mathbf{o})}$; cette

7.4. Démonstration du théorème C

quantité ne dépend donc pas de x_0 . On écrit

$$\begin{aligned} N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) &= e^{\delta R} \sum_{\gamma \in \Gamma^*} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \varphi(d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R) + 1 \\ &= e^{\delta R} \sum_{k \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \varphi(d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R) + 1 \\ &\sim e^{\delta R} W(R, \varphi) \end{aligned}$$

où $\varphi(x) = e^{\delta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(x)$ et $W(R, \varphi) = \sum_{k \geq 1} W_k(R, \varphi)$. Pour montrer le théorème C, il suffit de montrer la

Proposition 7.4.1. *Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx > 0$, il vient*

- $W(R, \varphi) \sim \frac{C}{R^{1-\beta} L(R)} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$ si $\beta \in]0, 1[$;
- $W(R, \varphi) \sim \frac{C}{\bar{L}(R)} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$ si $\beta = 1$.

Expliquons-le pour $\beta \in]0, 1[$, les arguments étant les mêmes lorsque $\beta = 1$; à un nombre de transformations fini près, on a $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid 1 \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \leq R\}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et encadrons $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R)$ par

$$m(R) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{R}{\varepsilon} \rfloor - 2} \#\{\gamma \in \Gamma \mid 1 + q\varepsilon \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) < 1 + (q+1)\varepsilon\}$$

et

$$M(R) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{R}{\varepsilon} \rfloor - 1} \#\{\gamma \in \Gamma \mid 1 + q\varepsilon \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) < 1 + (q+1)\varepsilon\}.$$

En appliquant la proposition 7.4.1 avec la fonction $\varphi : t \mapsto e^{\delta t} \mathbf{1}_{[0, \varepsilon]}(t)$, il vient

$$m(R) \sim C \frac{e^{\delta \varepsilon} - 1}{\delta \varepsilon} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{R}{\varepsilon} \rfloor - 2} \varepsilon \frac{e^{\delta(1+q\varepsilon)}}{(1+q\varepsilon)^{1-\beta} L(1+q\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} C \int_1^R \frac{e^{\delta x}}{x^{1-\beta} L(x)} dx$$

et

$$M(R) \sim C \frac{e^{\delta \varepsilon} - 1}{\delta \varepsilon} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{R}{\varepsilon} \rfloor - 1} \varepsilon \frac{e^{\delta(1+q\varepsilon)}}{(1+q\varepsilon)^{1-\beta} L(1+q\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} C \int_1^R \frac{e^{\delta x}}{x^{1-\beta} L(x)} dx$$

Finalement $N_{\Gamma}(\mathbf{o}, R) \sim C \frac{e^{\delta R}}{\delta R^{1-\beta} L(R)}$.

7.4.1 Proposition 7.4.1 dans le cas $\beta \in]0, 1[$

On suit les mêmes étapes que dans les démonstrations des théorèmes A et B. Soient $K \geq 2$ et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite satisfaisant $kL(a_k) = a_k^\beta$ pour L la fonction à variations lentes donnée dans la famille d'hypothèses (H_β) . On admet dans un premier temps les propositions suivantes

Proposition C.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à support compact. Uniformément en $K \geq 2$ et $R \in [0, Ka_k]$, il vient quand $k \rightarrow +\infty$*

$$W_k(R, \varphi) = \frac{1}{e_\Gamma a_k} \left(C_0 \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \widehat{\varphi}(0) + o_k(1) \right),$$

où Ψ_β est la densité de la loi stable asymétrique de paramètre β , la constante e_Γ est égale à $E_\Gamma^{\frac{1}{\beta}}$ et $C_0 = h^*(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}$.

Proposition C.2. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à support compact. Quand $R \geq a_k$, il existe $C > 0$ ne dépendant que du support de φ telle que*

$$|W_k(R, \varphi)| \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} |\varphi|_\infty.$$

Expliquons à présent comment déduire la proposition 7.4.1 à l'aide des propositions C.1 et C.2. Soit φ une fonction à support compact. On veut estimer $W(R, \varphi) = \sum_{k \geq 1} W_k(R, \varphi)$. D'après la proposition C.1, nous pouvons décomposer ce terme en $W^1(R, \varphi) + W^2(R, \varphi) + W^3(R, \varphi)$ où

$$\begin{aligned} W^1(R, \varphi) &:= \frac{C_0 \widehat{\varphi}(0)}{e_\Gamma} \sum_{k \mid R < Ka_k} \frac{1}{a_k} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right), \\ W^2(R, \varphi) &:= \frac{1}{e_\Gamma} \sum_{k \mid R < Ka_k} \frac{o_k(1)}{a_k} \\ \text{et } W^3(R, \varphi) &:= \sum_{k \mid R \geq Ka_k} W_k(R, \varphi). \end{aligned}$$

a) *Contribution de $W^1(R, \varphi)$.* Suivant [Gou11], l'idée est d'écrire ce terme en utilisant la mesure $\mu_R = \sum_{0 < \frac{R}{a_k} \leq K} \frac{D_R}{a_k}$ sur l'intervalle $]0, K]$. Il vient

$$\sum_{R < Ka_k} \frac{1}{e_\Gamma a_k} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) = \frac{1}{R} \int_0^K \frac{z}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{z}{e_\Gamma} \right) d\mu_R(z). \quad (7.15)$$

7.4. Démonstration du théorème C

Cette mesure satisfait quand $R \rightarrow +\infty$

$$R^{-\beta} L(R) \mu_R([x, y]) \sim \int_x^y \beta z^{-\beta-1} dz, \quad (7.16)$$

si bien qu'en combinant la définition de $W^1(R, \varphi)$, l'étude des termes négligeables menée au a) de la section 5.2.1 et (7.16), on obtient

$$R^{1-\beta} L(R) W^1(R, \varphi) \sim \frac{C_0 \beta \widehat{\varphi}(0)}{e_\Gamma} \int_0^K z^{-\beta} \Psi_\beta \left(\frac{z}{e_\Gamma} \right) dz.$$

La première étape fournit alors l'estimation suivante

$$R^{1-\beta} L(R) W^1(R, \varphi) \sim \frac{\beta \widehat{\varphi}(0)}{E_\Gamma} \int_0^{\frac{K}{e_\Gamma}} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz \quad (7.17)$$

où $E_\Gamma = e_\Gamma^\beta$.

b) *Contribution de $W^2(R, \varphi)$.* Cette quantité est identique à la contribution $M^2(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ apparaissant dans la démonstration du théorème A ; cette quantité satisfait

$$R^{1-\beta} L(R) W^2(R, \varphi) = o_K(1) \text{ où } \lim_{R \rightarrow +\infty} o_K(1) = 0 \text{ à } K \text{ fixé.} \quad (7.18)$$

c) *Contribution de $W^3(R, \varphi)$.* Comme pour le terme $M^3(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$ apparaissant dans la démonstration du théorème A, il vient

$$R^{1-\beta} L(R) W^3(R, \varphi) \leqslant CK^{-\beta}. \quad (7.19)$$

En combinant (7.17), (7.18) et (7.19), on obtient

$$R^{1-\beta} L(R) W(R, \varphi) = \frac{\beta \widehat{\varphi}(0) C_0}{E_\Gamma} \int_0^{\frac{K}{e_\Gamma}} z^{-\beta} \psi(z) dz (1 + o(1)) + o_K(1) + O(K^{-\beta}),$$

où $\lim_{R \rightarrow +\infty} o(1) = 0$. En choisissant K suffisamment grand et en faisant tendre R vers l'infini, il vient finalement

$$R^{1-\beta} L(R) W(R, \varphi) \sim \frac{\beta \widehat{\varphi}(0) C_0}{E_\Gamma} \int_0^{+\infty} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz.$$

D'après [Zol86]

$$\int_0^{+\infty} z^{-\beta} \Psi_\beta(z) dz = \frac{\sin(\beta\pi)}{\beta\pi},$$

et la proposition 7.4.1 suit avec $C = \frac{C_0}{E_\Gamma} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi}$.

Démonstration de la proposition C.1

Rappelons que

$$W_k(R, \varphi) = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \varphi(d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R)$$

où φ est à support compact. Pour démontrer la proposition C.1, il suffit de démontrer que

$$a_k W_k(R, \varphi) - \frac{h^*(x_0)}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \widehat{\varphi}(0) \longrightarrow 0, \quad (7.20)$$

pour une fonction test φ appartenant à la classe \mathcal{H} donnée dans la définition 5.2.2. Montrons dans un premier temps que la quantité $W_k(R, \varphi)$ est finie pour $\varphi \in \mathcal{H}$. La formule d'inversion de Fourier implique

$$\begin{aligned} |W_k(R, \varphi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{itR} (\mathcal{L}_{\delta+it}^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \widehat{\varphi}(t) \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (\mathcal{L}_\delta^*)^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(t)| dt \\ &\leq \|\widehat{\varphi}\|_1 h^*(x_0) < +\infty. \end{aligned}$$

Montrons à présent (7.20). Pour alléger les notations, on omettra le symbole $*$ pour tout objet en lien avec l'opérateur \mathcal{L}_δ^* . La formule d'inversion de Fourier nous permet de décomposer

$$a_k W_k(R, \varphi) - \frac{h(x_0)}{e_\Gamma} \Psi_\beta \left(\frac{R}{e_\Gamma a_k} \right) \widehat{\varphi}(0)$$

en $K_1 + K_2$ où

$$K_1 := \frac{a_k}{2\pi} \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c} e^{itR} \mathcal{L}_{\delta+it}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &:= \frac{a_k}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{itR} \mathcal{L}_{\delta+it}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \widehat{\varphi}(0) h(x_0) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu \frac{R}{a_k}} \mathcal{L}_{\delta+i \frac{u}{a_k}}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \widehat{\varphi} \left(\frac{u}{a_k} \right) du - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it \frac{R}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \widehat{\varphi}(0) h(x_0) dt, \end{aligned}$$

7.4. Démonstration du théorème C

avec le $\varepsilon > 0$ donné dans la proposition 7.3.6. Les propriétés spectrales de \mathcal{L}_z évoquées dans cette même proposition et le fait que $\widehat{\varphi}$ soit à support compact impliquent que $\|\mathcal{L}_{\delta+it}^k\| \leq \rho^k$, pour $0 < \rho < 1$ dépendant du support de φ . Donc $|K_1| \leq \|\widehat{\varphi}\|_\infty \rho^k a_k$, et ce terme tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, uniformément en K et R . Nous étudions ensuite K_2 . La décomposition spectrale de l'opérateur $\mathcal{L}_{\delta+i\frac{u}{a_k}}$ fournit

$$\mathcal{L}_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) = \lambda_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \Pi_{\delta+i\frac{u}{a_k}}(\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) + R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0)$$

avec $\text{spec}(R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}) \subset B(0, \rho_\varepsilon)$ et $0 < \rho_\varepsilon < 1$.

On décompose alors K_2 en $L_1 + L_2 + L_3$ où

$$L_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{R}{a_k}} R_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}}(x_0) \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{R}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \left(\Pi_{\delta+i\frac{u}{a_k}}(\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) - \Pi_\delta(\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \right) \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du$$

et

$$L_3 = \frac{h(x_0)}{2\pi} \int_{-\varepsilon a_k}^{\varepsilon a_k} e^{iu\frac{R}{a_k}} \lambda_{\delta+i\frac{u}{a_k}}^k \widehat{\varphi}\left(\frac{u}{a_k}\right) du - \frac{h(x_0)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\frac{R}{a_k}} g_\beta(e_\Gamma t) \widehat{\varphi}(0) dt.$$

On a $|L_1| \leq a_k \rho_\varepsilon^k \|\widehat{\varphi}\|_\infty$, si bien que L_1 tend vers 0 uniformément en K et R quand $k \rightarrow +\infty$. Nous utilisons le théorème de convergence dominée pour L_2 : comme pour l'intégrale M_1 dans la démonstration de la proposition A.1, le développement limité de $\lambda_{\delta+it}$ donné dans la proposition 7.3.8 implique que l'intégrande de L_2 est majorée à une constante multiplicative près par

$$l(t) = \begin{cases} |t|^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_\Gamma t|^{\frac{3\beta}{2}}} & \text{si } |t| \leq 1 \\ |t|^{\frac{3\beta}{2}} e^{-\frac{1}{4}(1-\beta)\Gamma(1-\beta)|e_\Gamma t|^{\frac{\beta}{2}}} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}.$$

Le terme L_3 se traite de la même manière que le terme M_2 dans la démonstration de la proposition A.1.

Démonstration de la proposition C.2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à support compact. Pour montrer la proposition C.2, il suffit de montrer qu'il existe des constantes $C, M > 0$ ne dépendant que du support de φ

telles que

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(k) \\ d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M}{\sim} R}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \quad (7.21)$$

où $d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M}{\sim} R$ signifie $|d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R| \leq M$. Nous suivons les étapes de la démonstration du théorème 1.6 de [Gou11]. On écrit $R = wa_k$ pour $w \geq 1$. Notons $\zeta = w^\rho \frac{a_k}{2} \in [\frac{a_k}{2}, \frac{R}{2}]$, pour $\rho \in (0, 1)$. L'idée est de partitionner

$$\mathfrak{J} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \alpha_1 \dots \alpha_k \text{ } \mathcal{A}\text{-admissible, } d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M}{\sim} R\}$$

en utilisant ζ comme niveau de troncature. Plus précisément, on décompose \mathfrak{J} en $\mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2 \cup \mathfrak{J}_3 \cup \mathfrak{J}_4$ où

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \exists r, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}\}; \\ \mathfrak{J}_2 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \frac{R}{2}; \exists r < t, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}), d(\mathbf{o}, \alpha_t \cdot \mathbf{o}) \geq \zeta\}; \\ \mathfrak{J}_3 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \frac{R}{2}; \exists! r, d(\mathbf{o}, \alpha_r \cdot \mathbf{o}) \geq \zeta\}; \\ \mathfrak{J}_4 &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in J \mid \forall j, d(\mathbf{o}, \alpha_j \cdot \mathbf{o}) < \zeta\}. \end{aligned}$$

Nous montrons que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a :

$$\Sigma_i := \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{J}_i} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o})} \leq Ck \frac{L(R)}{R^{1+\beta}}.$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants, analogues aux lemmes 5.2.4 et 5.2.5

Lemme 7.4.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \leq C.$$

Démonstration. Il vient

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} = \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \mathbb{1}_{\bar{\Lambda}}(\gamma \cdot x_0)$$

7.4. Démonstration du théorème C

Par stricte positivité sur $\tilde{\Lambda}$ de la fonction h^* définie dans la proposition 7.3.2, on a

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \preceq C \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} h^*(\gamma \cdot x_0) \preceq C \mathcal{L}_\delta h^*(x_0) \preceq \|h^*\|.$$

□

Lemme 7.4.3. *Soit $\Delta > 0$. Il existe une constante $C = C(\Delta) > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\xi \in [\frac{a_k}{2}, \infty]$, on a*

$$\sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ \forall i, d(\mathbf{o}, \alpha_i \cdot \mathbf{o}) \leq \xi \\ d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{\Delta}{\sim} R}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} \leq C \frac{e^{-\frac{R}{\xi}}}{a_k}.$$

La démonstration de ce lemme est en tout point similaire à celle du lemme 5.2.5. La démonstration de la proposition C.2 est une réécriture de celle de la proposition A.2, en remplaçant $b(\gamma, x) = \mathcal{B}_x(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o})$ par $d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})$. Seules les constantes apparaissant seront différentes. Pour fixer les idées, traitons le cas de la quantité Σ_1 . Rappelons que

$$\Sigma_1 = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{J}_1} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o})}.$$

Le lemme 4.1.4 implique

$$\Sigma_1 \preceq \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_k \\ d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M}{\sim} R \\ d(\mathbf{o}, \alpha_p \cdot \mathbf{o}) \geq \frac{R}{2}}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \cdot \mathbf{o})} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha_p \cdot \mathbf{o})} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha_{p+1} \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o})}.$$

De plus $d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M}{\sim} R$ implique que

$$d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \alpha_p \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \alpha_{p+1} \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o}) \stackrel{M+2C}{\sim} R,$$

Donc $d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \cdot \mathbf{o}) + d(\mathbf{o}, \alpha_{p+1} \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o}) \leq \frac{R}{2} + 2C + M$. Notons $\Delta = M + 2C$. On décompose la somme sur p en une somme sur m et n , tels $d(\mathbf{o}, \alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \cdot \mathbf{o}) \in [(m-1)\Delta, (m+1)\Delta]$ et $d(\mathbf{o}, \alpha_{p+1} \dots \alpha_k \cdot \mathbf{o}) \in [(n-1)\Delta, (n+1)\Delta]$ pour $m \leq N$ et $n \leq N - m$ où

$$N := \left\lceil \frac{\frac{R}{2} + \Delta}{2\Delta} \right\rceil + 1.$$

On majore ensuite Σ_1 par la somme sur p de la somme sur $1 \leq m, n \leq N$ tels que $m + n \leq N$, des quantités

$$\sum_{\substack{|\gamma_1|=p-1 \\ \gamma_1 \in \mathcal{A}(m\Delta, \Delta)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma_1 \cdot \mathbf{o})} \cdot \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}(R-(m+n)\Delta, 2\Delta)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \cdot \sum_{\substack{|\gamma_2|=k-p \\ \gamma_2 \in \mathcal{A}(n\Delta, \Delta)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o})},$$

où pour tous $t > 0$ et $\Delta > 0$

$$\mathcal{A}(t, \Delta) := \{\gamma \in \Gamma \mid t - \Delta \leq d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) < t + \Delta\}.$$

L'hypothèse supplémentaire (S) combinée avec le lemme de Potter donne

$$\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}(R-(m+n)\Delta, 2\Delta)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \leq \sup_{t \geq \frac{R}{2}} \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}(t, 2\Delta)}} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \alpha \cdot \mathbf{o})} \quad (7.22)$$

$$\leq \sup_{t \geq \frac{R}{2}} \frac{L(t)}{t^{1+\beta}} \leq \frac{L(R)}{R^{1+\beta}}. \quad (7.23)$$

On obtient finalement

$$\Sigma_1 \leq \frac{L(R)}{R^{1+\beta}} \sum_{p=1}^k \sum_{\gamma_1 \in \Gamma(p-1)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma_1 \cdot \mathbf{o})} \sum_{\gamma_2 \in \Gamma(k-p)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma_2 \cdot \mathbf{o})}.$$

Le lemme 7.4.2 fournit alors la majoration désirée. Les quantités Σ_2 , Σ_3 et Σ_4 se traitent alors exactement comme leur pendant de la proposition A.2.

7.4.2 Proposition 7.4.1 dans le cas $\beta = 1$

Comme dans la démonstration du théorème A dans le cas $\beta = 1$, nous devons symétriser la quantité $W^\delta(R, \varphi)$ pour faire apparaître $\operatorname{Re}(Q_{\delta+it}^*)$. Nous introduisons donc

$$\tilde{W}^\delta(R, \varphi) := \sum_{k \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} (\varphi(d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R) + \varphi(-d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R)).$$

On remarque que $\tilde{W}^\delta(R, \varphi) = W^\delta(R, \varphi)$ pour R assez grand, car φ est à support compact. On étudie dans un premier temps la quantité

$$\tilde{W}^\xi(R, \varphi) := \sum_{k \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\xi d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})} (\varphi(d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R) + \varphi(-d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o}) - R))$$

7.4. Démonstration du théorème C

pour $\xi > \delta$. L'argument de Stone nous permet de supposer que $\varphi \in \mathcal{H}$. Le fait que $\tilde{W}^\xi(R, \varphi)$ est fini pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ est une conséquence de l'étude à venir. Pour l'instant, remarquons que la formule d'inversion de Fourier combinée avec la convergence de la série de Poincaré en $\xi > \delta$ implique

$$\tilde{W}^\xi(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \sum_{k \geq 1} \left((\mathcal{L}_{\xi+it}^*)^k + (\mathcal{L}_{\xi-it}^*)^k \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt$$

qui est fini pour $\varphi \in \mathcal{H}$. Donc

$$\tilde{W}^\xi(R, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\xi+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \hat{\varphi}(t) dt.$$

On veut

$$\tilde{W}^\delta(R, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \hat{\varphi}(t) dt. \quad (7.24)$$

La première étape consiste à montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\xi+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt \xrightarrow{\xi \searrow \delta} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt.$$

Les arguments sont les mêmes que ceux de la proposition 5.3.2. De plus, pour une fonction φ positive, le théorème de convergence monotone implique que $\tilde{W}^\xi(R, \varphi)$ tend vers $\tilde{W}^\delta(R, \varphi)$. Le fait que $t \mapsto \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0)$ soit intégrable en 0 implique que $\tilde{W}^\delta(R, \varphi)$ est fini pour toute fonction φ positive (ce qui assure d'ailleurs que cette quantité est finie pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$). Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on remarque que $|\varphi| \in \mathcal{H}$ et le résultat provient du théorème de convergence dominée et du fait que $\tilde{W}^\xi(R, \varphi) \leq \tilde{W}^\delta(R, |\varphi|)$. Finalement

$$\tilde{W}^\delta(R, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}_\Gamma})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \hat{\varphi}(t) dt.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, le terme $\int_{\mathbb{R}} e^{itR} \hat{\varphi}(t) dt$ est négligeable devant $\frac{1}{L(R)}$. Comme précédemment fixons $A > 0$. Nous décomposons

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt$$

en $I_1 + I_2$ où

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \frac{A}{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+it}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \hat{\varphi}(t) dt$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \frac{A}{R}} e^{itR} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}^*) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

Commençons par le terme I_1 . On peut décomposer cette intégrale selon le signe de t . Soit J l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{t > \frac{A}{R}} e^{itR} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}^*) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

En posant $t = u - \frac{\pi}{R}$ dans J , on obtient

$$J = -\frac{1}{\pi} \int_{u > \frac{A+\pi}{R}} e^{iuR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+i(u-\frac{\pi}{R})}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi} \left(u - \frac{\pi}{R} \right) du.$$

Alors

$$\begin{aligned} 2J &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{A}{R}}^{\frac{A+\pi}{R}} e^{itR} \operatorname{Re} (Q_{\delta+it}^*) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{t > \frac{A+\pi}{R}} e^{itR} \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+i(t-\frac{\pi}{R})}^* \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \left(\widehat{\varphi}(t) - \widehat{\varphi} \left(t - \frac{\pi}{R} \right) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{t > \frac{A+\pi}{R}} e^{itR} \left(\operatorname{Re} (Q_{\delta+it}^*) - \operatorname{Re} \left(Q_{\delta+i(t-\frac{\pi}{R})}^* \right) \right) (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt \\ &=: K_1 + K_2 + K_3. \end{aligned}$$

Les arguments utilisés pour contrôler K_1 dans la démonstration de la proposition 5.3.3 impliquent que $|K_1| \preceq \frac{1}{L(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)} (A + \pi)^{\frac{3}{4}}$ et $|K_2| \preceq \frac{1}{L(R)} \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)}$. Pour $|K_3|$, on a

$$|K_3| \leq \frac{1}{\pi} \int_{t > \frac{A+\pi}{R}} \left\| Q_{\delta+it}^* \right\| \left\| Q_{\delta+i(t-\frac{\pi}{R})}^* \right\| \left\| \mathcal{L}_{\delta+it}^* - \mathcal{L}_{\delta+i(t-\frac{\pi}{R})}^* \right\| |\widehat{\varphi}(t)| dt.$$

Comme dans la démonstration de la proposition 5.3.3, on obtient

$$|K_3| \preceq \frac{1}{\tilde{L}(R)} \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R) |J| = 0$. D'où

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R) |I_1| = 0. \quad (7.25)$$

Concernant I_2 , on écrit

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \frac{A}{R}} e^{itR} \left[\operatorname{Re} (Q_{\delta+it}^*) - \operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it}^*)^{-1} \Pi_{\delta}^* \right) \right] (\mathbf{1}_{\tilde{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt$$

7.4. Démonstration du théorème C

$$\begin{aligned}
& + \int_{|t| \leq \frac{A}{R}} e^{itR} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it}^*)^{-1} \right) \Pi_{\delta}^* \right] (\mathbf{1}_{\bar{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt \\
& =: L_1 + L_2.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 7.3.10, pour R suffisamment grand, on a $|L_1| \leq 2 \frac{A}{R}$. Nous décomposons ensuite L_2 en $M_1 + M_2$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}
L_2 &= \int_{|t| \leq \frac{A}{R}} (e^{itR} - 1) \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it}^*)^{-1} \right) \Pi_{\delta}^* \right] (\mathbf{1}_{\bar{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt \\
& \quad + \int_{|t| \leq \frac{A}{R}} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it}^*)^{-1} \right) \Pi_{\delta}^* \right] (\mathbf{1}_{\bar{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt \\
& = M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

En reprenant les arguments donnés pour contrôler M_1 dans la démonstration de la proposition 5.3.3, il vient

$$\tilde{L}(R)M_1 \preceq A \frac{L(R)}{\tilde{L}(R)}.$$

Il reste maintenant à traiter le dernier terme, qui donne l'équivalent recherché. On décompose M_2 en deux intégrales selon le signe de t . Notons

$$N = \int_0^{\frac{A}{R}} \left[\operatorname{Re} \left((1 - \lambda_{\delta+it}^*)^{-1} \right) \Pi_{\delta}^* \right] (\mathbf{1}_{\bar{\Lambda}})(x_0) \widehat{\varphi}(t) dt.$$

Il vient

$$\tilde{L}(R)N \sim \frac{h^*(x_0)}{2E_{\Gamma}} \widehat{\varphi}(0),$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{L}(R)M_2 = C_{\Gamma} \widehat{\varphi}(0)$$

où $C_{\Gamma} = \frac{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma(k)} e^{-\delta d(\mathbf{o}, \gamma \cdot \mathbf{o})}}{E_{\Gamma}}$. Le résultat suit pour L_2 , puis pour L_2 .

Bibliographie

- [Bab02a] Martine BABILLOT : On the mixing property for hyperbolic systems. *Israel journal of mathematics*, 129(1):61–76, 2002. 12
- [Bab02b] Martine BABILLOT : Points entiers et groupes discrets : de l’analyse aux systèmes dynamiques. *Panoramas et synthèses-Société mathématique de France*, (13):1–119, 2002. 10
- [BGT87] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE et J. L. TEUGELS : *Regular variation*, volume 27 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. 44, 45, 46
- [Bie11] Ludwig BIEBERBACH : Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume. *Mathematische Annalen*, 70(3):297–336, 1911. 32
- [Bie12] Ludwig BIEBERBACH : Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume (zweite abhandlung.) die gruppen mit einem endlichen fundamentalbereich. *Mathematische Annalen*, 72(3):400–412, 1912. 32
- [Bou93] Marc BOURDON : *Actions quasi-convexes d’un groupe hyperbolique, flot géodésique*. Thèse de doctorat, 1993. 23
- [Bow75] Rufus BOWEN : *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. 53, 70
- [Bow95] Brian BOWDITCH : Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Mathematical Journal*, 77(1):229, 1995. 25
- [BP00] Martine BABILLOT et Marc PEIGNÉ : Homologie des géodésiques fermées sur des variétés hyperboliques avec bouts cuspidaux. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(1):81–120, 2000. 80, 89, 90, 94, 114, 170

- [BP06] Martine BABILLOT et Marc PEIGNÉ : Asymptotic laws for geodesic homology on hyperbolic manifolds with cusps. *Bull. Soc. Math. France*, 134(1):119–163, 2006. 41, 74, 80, 90
- [CDP07] Gilles COURTOIS, Françoise DAL’BO et Frédéric PAULIN : Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques. *Journées mathématiques X-UPS*, 2007. 10
- [CI99] Kevin CORLETTE et Alessandra IOZZI : Limit sets of discrete groups of isometries of exotic hyperbolic spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(4):1507–1530, 1999. 32
- [Dal07] Françoise DAL’BO : *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2007. 10, 61, 62
- [DF37] Wolfgang DOEBLIN et Robert FORTET : Sur des chaînes à liaisons complètes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 65:132–148, 1937. 80
- [DOP00] Françoise DAL’BO, Jean-Pierre OTAL et Marc PEIGNÉ : Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis. *Israel J. Math.*, 118:109–124, 2000. 14, 18, 30, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 41
- [DP96a] F. DAL’BO et M. PEIGNÉ : Groupes du ping-pong et géodésiques fermées en courbure -1 . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46(3):755–799, 1996. 17, 31, 41, 84, 90
- [DP96b] Françoise DAL’BO et Marc PEIGNÉ : Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante. *Astérisque*, (238):111–177, 1996. Études spectrales d’opérateurs de transfert et applications. 70, 148, 150
- [DP98] Françoise DAL’BO et Marc PEIGNÉ : Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting. *J. Reine Angew. Math.*, 497:141–169, 1998. 12
- [DPPS15] Françoise DAL’BO, Marc PEIGNÉ, Jean-Claude PICAUD et Andrea SAMBUSETTI : Convergence and Counting in Infinite Measure. working paper or preprint, mars 2015. 17, 62, 97, 131
- [Ebe72] Patrick EBERLEIN : Geodesic flows on negatively curved manifolds. I. *Ann. of Math. (2)*, 95:492–510, 1972. 24, 29, 63

- [EM93] Alex ESKIN et Curt MCMULLEN : Mixing, counting, and equidistribution in lie groups. *Duke Math. J.*, 71(1):181–209, 07 1993. 13
- [Eri70] K. Bruce ERICKSON : Strong renewal theorems with infinite mean. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151:263–291, 1970. 17, 46, 98, 99
- [GH88] Yves GUIVARC'H et Jean HARDY : Théorèmes limites pour une classe de chaînes de markov et applications aux difféomorphismes d'anosov. *In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 24, pages 73–98, 1988. 105
- [GK68] B. V. GNEDENKO et A. N. KOLMOGOROV : *Limit distributions for sums of independent random variables*. Translated from the Russian, annotated, and revised by K. L. Chung. With appendices by J. L. Doob and P. L. Hsu. Revised edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills., Ont., 1968. 43, 45
- [Gou11] Sébastien GOUËZEL : Correlation asymptotics from large deviations in dynamical systems with infinite measure. *Colloq. Math.*, 125(2):193–212, 2011. 17, 18, 108, 109, 118, 150, 154, 180, 184
- [Hed39] Gustav A HEDLUND : Fuchsian groups and mixtures. *Annals of Mathematics*, pages 370–383, 1939. 12
- [Hen93] Hubert HENNION : Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(2):627–634, 1993. 80
- [Hen95] H HENNION : Quasi-compacité cas des noyaux lipschitziens et des noyaux markoviens. *Publications mathématiques et informatiques de Rennes*, (2):1–50, 1995. 80, 93, 170
- [HH01] Hubert HENNION et Loïc HERVÉ : *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, volume 1766 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. 70
- [HIH77] Ernst HEINTZE et Hans-Christoph IM HOF : Geometry of horospheres. *J. Differential Geom.*, 12(4):481–491, 1977. 33
- [HK70] Arshag B HAJIAN et Shizuo KAKUTANI : Example of an ergodic measure preserving transformation on an infinite measure space. *In Contributions to Ergodic Theory and Probability*, pages 45–52. Springer, 1970. 103

-
- [Kat92] Svetlana KATOK : *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992. 25
- [Kat13] Tosio KATO : *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013. 38, 93
- [Lal89] Steven P. LALLEY : Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, non-Euclidean tessellations and their fractal limits. *Acta Math.*, 163(1-2):1–55, 1989. 13, 148, 159
- [LP82] Peter D LAX et Ralph S PHILLIPS : The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and non-euclidean spaces. *In Toeplitz centennial*, pages 365–375. Springer, 1982. 13
- [Mar69] Gregorii A MARGULIS : Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Functional analysis and its applications*, 3(4):335–336, 1969. 13
- [MT12] Ian MELBOURNE et Dalia TERHESIU : Operator renewal theory and mixing rates for dynamical systems with infinite measure. *Invent. Math.*, 189(1):61–110, 2012. 18, 48, 101, 130, 138, 139, 145
- [OP04] Jean-Pierre OTAL et Marc PEIGNÉ : Principe variationnel et groupes kleinien. *Duke Math. J.*, 125(1):15–44, 2004. 29
- [Pat76] S. J. PATTERSON : The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, 136(3-4):241–273, 1976. 11, 27
- [Pei03] Marc PEIGNÉ : On the Patterson-Sullivan measure of some discrete group of isometries. *Israel J. Math.*, 133:77–88, 2003. 59
- [Pei11] Marc PEIGNÉ : On some exotic Schottky groups. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 31(2):559–579, 2011. 14, 18, 30, 33, 35, 37, 38, 39, 80, 90, 162, 170
- [PP83] William PARRY et Mark POLLICOTT : An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows. *Ann. of Math. (2)*, 118(3):573–591, 1983. 13
- [PP90] William PARRY et Mark POLLICOTT : Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188):268, 1990. 53, 70

- [PS94] Mark POLLICOTT et Richard SHARP : Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature. *Invent. Math.*, 117(2):275–302, 1994. 30, 31
- [Rob03] Thomas ROBLIN : Ergodicité et équidistribution en courbure négative. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (95):vi+96, 2003. 12, 13, 16, 29
- [Sch04] Barbara SCHAPIRA : Lemme de l’ombre et non divergence des horosphères d’une variété géométriquement finie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(4):939–987, 2004. 55, 162
- [Sel56] A. SELBERG : Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:47–87, 1956. 13
- [Sul84] Dennis SULLIVAN : Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 153(3-4):259–277, 1984. 11, 28, 31, 32
- [Tho13] Damien THOMINE : *Théorèmes limites pour les sommes de Birkhoff de fonctions d’intégrale nulle en théorie ergodique en mesure infinie*. Thèse de doctorat, Rennes 1, 2013. 109
- [Zin96] Michel ZINSMEISTER : *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, volume 4 de *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1996. 70
- [Zol86] V. M. ZOLOTAREV : *One-dimensional stable distributions*, volume 65 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. Translated from the Russian by H. H. McFaden, Translation edited by Ben Silver. 111, 113, 182

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Présentation du sujet	9
1.1.1	Hypothèses et résultats	14
1.1.2	Plan de la thèse	18
2	Géométrie en courbure négative	21
2.1	Rappels et notations	21
2.1.1	Bord à l'infini	21
2.1.2	Action des isométries au bord	23
2.1.3	Groupes de Schottky	25
2.1.4	Mesures de Patterson-Sullivan	27
2.1.5	Flot géodésique et mesure de Bowen Margulis	28
2.2	Construction des groupes exotiques	30
2.2.1	Sur l'existence de groupes paraboliques convergents	32
2.2.2	Construction de groupes convergents ou divergents contenant des paraboliques convergents	35
2.2.3	Sur l'existence de groupes géométriquement finis divergents avec m_Γ infinie	37
2.2.4	Commentaires	39
2.2.5	Dernière remarque	41
3	Fonctions à variations régulières	43
3.1	Lois stables	43
3.2	Fonctions à variations lentes	44
3.2.1	Définition	44
3.2.2	Lemmes de Karamata et de Potter	45
3.3	Applications	46

3.3.1	Fonction caractéristique d'une loi stable	46
3.3.2	(S') implique (S'')	52
4	Codages et opérateur de transfert	53
4.1	Codages de l'ensemble limite et du flot géodésique	53
4.1.1	Propriétés des groupes de Schottky	54
4.1.2	Codage de l'ensemble limite	58
4.1.3	Codage du flot géodésique	62
4.1.4	Le système dynamique (Λ^0, T, ν)	69
4.2	Étude des opérateurs de transfert	70
4.2.1	Définition et premières propriétés	70
4.2.2	Perturbation de l'opérateur	85
4.2.3	Régularité de la valeur propre dominante	95
4.2.4	Autour de la résolvante quand $\beta = 1$	101
5	Théorème A	103
5.1	Étude de la quantité $M(R; A, B)$	104
5.2	Théorème A pour $\beta \in]0, 1[$	108
5.2.1	Équivalent pour $M(R; u \otimes \varphi, v \otimes \psi)$	108
5.2.2	Démonstration de la proposition A.1	113
5.2.3	Démonstration de la proposition A.2	118
5.3	Démonstration du Théorème A pour $\beta = 1$	130
5.3.1	Démonstration de (5.16)	132
5.3.2	Démonstration de la proposition 5.3.2	139
6	Théorème B	147
6.1	Démonstration du théorème B	148
6.2	Proposition 6.1.2	150
6.2.1	Démonstration de la proposition 6.1.2	151
6.2.2	Démonstration de la proposition B.1	154
6.2.3	Démonstration de la proposition B.2	156
7	Théorème C	159
7.1	Extension du codage aux suites finies	159
7.2	Régularité du cocycle étendu sur $\tilde{\Lambda}$	161
7.3	Spectre de l'opérateur de transfert étendu	169
7.4	Démonstration du théorème C	178

7.4.1	Proposition 7.4.1 dans le cas $\beta \in]0, 1[$	180
7.4.2	Proposition 7.4.1 dans le cas $\beta = 1$	186
Bibliographie		195

Table des figures

1.1	Problème du cercle de Gauss	9
1.2	Équidistribution des cercles sur le tore Π^2	11
2.1	Horoboule centrée en l'infini passant par i	23
2.2	Propriété de visibilité de la distance de Gromov $d_{\mathbf{o}}$	24
2.3	Position Schottky dans les deux modèles de \mathbb{H}^2	26
2.4	Ensembles \mathbf{D}_j dans les deux modèles de \mathbb{H}^2	27
2.5	Flot géodésique et coordonnées de Hopf	29
2.6	\mathbb{Z}^2 -revêtement d'un tore à deux trous	31
2.7	Courbure dans l'horoboule et le cusp	34
2.8	Isométries p et h et horoboule \mathcal{H} et ses copies	36
4.1	Triangle $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$	55
4.2	Comparaison entre fonction de Busemann et distance	57
4.3	Action de T_l quand $l > 0$	65
4.4	Domaine $\mathcal{D}_{f,\mathcal{E}}^0$	67
4.5	Contrôle de $\rho(z)$	94
7.1	Estimation de $d(\alpha^{-1}.\mathbf{o}, g.\mathbf{o}) - d(\mathbf{o}, g.\mathbf{o})$	163
7.2	Points $\tilde{\mathbf{o}}$ et \tilde{y}	164
7.3	Action de $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}$	167

Thèse de Doctorat

Pierre VIDOTTO

Géométrie ergodique et fonctions de comptage en mesure infinie

Ergodic geometry and counting functions in infinite measure

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de certaines propriétés dynamiques de variétés $M = X/\Gamma$ à courbure sectionnelle négative pincée, où X est une variété de Hadamard et $\Gamma = \pi_1(M)$ agit par isométries sur X . Nous considérons le cas de certains groupes de Schottky Γ de type divergent, munis d'une mesure de Bowen-Margulis m_Γ infinie sur le fibré unitaire tangent T^1X/Γ . Sous ces hypothèses, nous définissons tout d'abord un espace symbolique permettant de coder l'action du groupe Γ sur le bord de X et celle du flot géodésique $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur T^1X/Γ . Ces codages nous permettent dans un premier temps de préciser la vitesse de mélange du flot géodésique ; nous montrons ensuite comment obtenir une minoration du nombre $N_{\mathcal{G}}(R)$ de géodésiques fermées de longueur $\leq R$ contenues dans la variété M ; nous donnons enfin un équivalent de la fonction orbitale $\#\{\gamma \in \Gamma \mid d(o, \gamma \cdot o) \leq R\}$ quand R tend vers l'infini.

Mots clés

Théorie ergodique, mesure infinie, flot géodésique, fonction orbitale, mélange, exposant critique, groupe de Schottky.

Abstract

We study here some dynamical properties of manifolds $M = X/\Gamma$, endowed with a pinched negative sectional curvature, where X is a Hadamard manifold and $\Gamma = \pi_1(M)$ acts by isometries on X . More precisely, we consider divergent Schottky groups Γ whose Bowen-Margulis measure m_Γ is infinite on the unit tangent bundle T^1X/Γ . We first define a coding of the action of Γ on the boundary of X , which will be useful to build a symbolic space associated with the geodesic flow. Then we precise the rate of mixing of the geodesic flow $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ on T^1X/Γ . In a second part, we study the number of closed geodesics on M with length $\leq R$. Finally, we give an asymptotic for the orbital counting function $\#\{\gamma \in \Gamma \mid d(o, \gamma \cdot o) \leq R\}$ when R goes to infinity.

Key Words

Ergodic theory, infinite measure, geodesic flow, orbital function, mixing, critical exponent, Schottky groups.