

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE NANTES
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 596
Matière, Molécules, Matériaux
Spécialité : Constituants élémentaires et physique théorique

Par **Alexandre PARENT du CHATELET**

Perte d'énergie par rayonnement dans un milieu opaque

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 17 octobre 2018
Unité de recherche : UMR 6457
Thèse N° :

Rapporteurs avant soutenance :

Dany Davesne Professeur des Universités, Université Claude Bernard, Lyon
Samuel Wallon Maître de conférences, Université Pierre et Marie Curie, Paris

Composition du Jury :

Président :	Dany Davesne	Professeur des Universités, Université Claude Bernard, Lyon
Examineurs :	Dany Davesne	Professeur des Universités, Université Claude Bernard, Lyon
	Samuel Wallon	Maître de conférences, Université Pierre et Marie Curie, Paris
	Julien Serreau	Maître de conférences, Université Paris Diderot

Dir. de thèse :	Thierry Gousset	Professeur des Universités, Université de Nantes
Co-dir. de thèse :	Pol-Bernard Gossiaux	Professeur, IMT Atlantique

Résumé

Dans le but de comprendre les résultats des expériences sur le plasma de quarks et de gluons telle qu'ALICE au LHC du CERN, il est important d'avoir des modèles précis pour étudier le comportement des particules élémentaires dans ce milieu exotique. Ce travail de thèse s'inscrit dans l'optique de l'évaluation de la perte d'énergie d'une particule ultrarelativiste se propageant dans un milieu dense. La perte d'énergie par rayonnement étant un processus caractérisé par un temps appelé temps de formation, on peut se demander si celle-ci est modifiée lorsque le gluon produit interagit lui-même dans le milieu pendant ce même temps. Du point de vue microscopique, on souhaite regarder la situation dans laquelle le libre parcours moyen dans le milieu est plus court que le temps de formation du gluon principal. Ainsi, dans cette fenêtre en temps, la paire quark-gluon en cours de formation continuant d'interagir dans le milieu, on s'attend à la possibilité d'émettre d'autres gluons, secondaires, de plus basse énergie et pouvant avoir une influence sur la perte d'énergie du quark elle-même. Pour regarder cela, on propose un formalisme effectif permettant d'inclure dans la propagation du quark ou du gluon principal ce rayonnement secondaire dans une limite ultrarelativiste et pour des rayonnements dont l'énergie est négligeable devant celle de la paire principale. On montre que l'effet de ce rayonnement secondaire semble être de réduire le temps de formation du gluon primaire à des valeurs de l'ordre du libre parcours moyen impliquant une diminution du spectre de rayonnement et de la perte d'énergie du parton émetteur.

Mots-clés : PQG - perte d'énergie radiative - effet LPM

Abstract

In order to understand the results of experiments on quark-gluon plasma such as ALICE at LHC at CERN, it is important to have accurate models to study the behaviour of elementary particles in this kind of exotic medium. This thesis work is incorporated within the framework of radiative energy loss of an ultrarelativistic particle propagating in a dense medium. The radiative energy loss is a process characterized by a time called formation time so one can wonder if this energy loss is modified when the emitted gluon itself interacts in the medium during its formation. From the microscopic viewpoint, we want to look at the situation in which the mean free path in the medium is shorter than the formation time of the primary gluon. Thus, in this window of time, the quark-gluon pair being formed continues to interact in the medium with the possibility of emitting other gluons, called secondary ones, at lower energies and which could have an effect on the energy loss of the quark itself. To investigate this, we propose an effective formalism allowing us to include these secondary radiations in the propagation of the main quark or gluon in an ultrarelativistic limit and for radiations whose energy is negligible compared to the one of the principal pair. It will be shown that these secondary radiations reduce the formation time of the primary gluon to values of the order of the mean free path implying a decrease for the radiation spectrum and for the energy loss of the emitting parton.

Keywords : QGP - radiative energy loss - LPM effect

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	11
1.1	Introduction générale et contenu des chapitres	11
1.2	Plasma de quarks et de gluons	12
1.2.1	Suppositions théoriques et découverte	13
1.2.2	Comment former un PQG : brève histoire des accélérateurs	14
1.2.3	Vie et mort du PQG	16
1.2.4	Comment étudier un PQG	17
2	De la physique des plasmas	21
2.1	Quelques notions de physique des plasmas	23
2.1.1	Classification des plasmas	23
2.1.2	Longueur de Debye	25
2.1.3	Oscillation plasma	27
2.2	Notion d'amortissement	28
2.2.1	Ce que l'on va chercher à évaluer	28
2.2.2	Nécessité des relations de dispersion	28
2.3	Plasma classique	29
2.3.1	Etude cinétique et introduction du tenseur diélectrique	30
2.3.2	Aspects longitudinaux : l'amortissement de Landau	35
2.3.3	Aspects transverses	36
2.3.4	Plasma classique relativiste	37
2.4	Plasma quantique	38
2.4.1	Éléments de théorie quantique des champs à température finie	38
2.4.2	Aspects longitudinaux	41
2.4.3	Aspects transverses	42
2.4.4	Taux d'amortissement dans un plasma quantique	43
3	De la perte d'énergie	47
3.1	Problématique du chapitre	49
3.2	Perte d'énergie collisionnelle	50
3.2.1	Dans la matière ordinaire	50
3.2.2	Dans un plasma	53
3.2.3	Passage à la QCD pour un plasma	57
3.3	Perte d'énergie radiative	58
3.3.1	Phénomène de Bremsstrahlung en QED	59
3.3.2	Approche de Gunion-Bertsch	60

3.3.3	Apportons un peu de cohérence à tout cela...	62
3.4	Hypothèse vis-à-vis d'un effet tenant compte du caractère absorbant du milieu	68
4	De la modélisation de la diffusion élastique dans un milieu	73
4.1	Principe du formalisme	75
4.2	Approche « corrélateur » et interaction unique	76
4.2.1	Travail originel	76
4.2.2	Introduction du corrélateur et calcul de la probabilité d'interaction unique avec le potentiel $\tilde{A}$	77
4.2.3	Évaluation explicite du corrélateur	83
4.2.4	Étude analytique du corrélateur élastique	85
4.3	Interactions multiples et ligne de Wilson	86
4.3.1	Une interaction unique	87
4.3.2	Deux interactions	88
4.3.3	Généralisation à n diffusions	89
4.4	Probabilité totale et retour du corrélateur	90
5	De la modélisation de la diffusion inélastique dans un milieu	99
5.1	Interaction multiple dans un champ dépendant de x^-	101
5.1.1	Une interaction unique	101
5.1.2	Deux interactions	102
5.1.3	Généralisation à n diffusions	105
5.2	Probabilité d'interaction et corrélateur inélastique	106
5.2.1	Introduction d'un corrélateur inélastique	106
5.2.2	Calcul de la probabilité totale d'interaction dans le milieu	106
5.3	Corrélateur inélastique	108
5.3.1	Lien entre section efficace et corrélateur élastique	108
5.3.2	Définition de l'espace des phases du gluon rayonné	110
6	De l'exploitation du formalisme	113
6.1	Mise en forme de l'étude et hypothèse de travail	115
6.1.1	Quelle intégrale va-t-on devoir calculer ?	115
6.1.2	Comment la rendre exploitable ?	116
6.2	Perte d'énergie moyenne	119
6.2.1	Perte d'énergie Gunion-Bertsch	119
6.2.2	Modification de la perte d'énergie avec la limitation des temps de formation	121
6.3	Retour sur la notion de temps de formation	123
6.3.1	Phase de Landau et temps de formation BDMPS	123
6.3.2	Modèles incluant le rayonnement secondaire de gluons	124
6.3.3	Conséquence sur le spectre de rayonnement associé au gluon primaire	129
	Conclusion générale et perspectives	133
A	Coordonnées cône de lumière	135
A.1	Quadrivecteur et métrique dans l'espace de Minkowski	135
A.2	Passage aux coordonnées LC et implications sur la métrique	136
A.2.1	Première convention	136
A.2.2	Deuxième convention	137

A.3	Intérêt physique des coordonnées cône de lumière	138
B	Approximation analytique pour $x d\sigma/dx$ et ses premiers moments	139
B.1	Intégration sur X	139
B.2	Intégration sur Y avec et sans limite sur les temps de formation . .	140

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Introduction générale et contenu des chapitres

« Depuis le Big Bang, tout commence à mourir à l'instant même de naître. L'univers n'est qu'un élan vers l'usure et la mort ». C'est peut-être pour remettre en cause cette vision pessimiste des choses, que l'on doit à Jean d'Ormesson¹, que les physiciens cherchent d'arrache-pied à comprendre notre Origine avec un grand « O ». En effet, depuis environ un siècle, de très nombreux modèles cosmologiques ont été proposés pour expliquer telle ou telle observation astrophysique ; avec parfois des postulats diamétralement opposés. Cependant, il existe un point commun sur lequel à peu près tout le monde s'entend : l'existence du Big Bang. Une idée reçue sur ce dernier, qu'il faut balayer d'entrée, est de dire qu'il s'agit de l'instant initial de notre univers. En réalité, la seule affirmation faite par la théorie du Big Bang est que celui-ci a connu une période très² dense et très³ chaude, il y a quelques 14 milliards d'années. La plupart des modèles s'accordent aussi à dire que l'univers est en expansion et qu'il se refroidit en voyant sa densité diminuer. Ainsi, lorsque des chercheurs postulent, dans les années 1970, l'existence d'un état de la matière hadronique très dense et très chaud, il fut naturel de considérer que cet état ait été un état intermédiaire entre le Big Bang et l'univers actuel. Cet état est appelé plasma de quarks et gluons (PQG). Les modèles les plus récents estiment que l'univers était dans un état de PQG quelques microsecondes après le Big Bang. De plus, il est supposé que l'on retrouve ce plasma dans des phénomènes astrophysiques extrêmes tels que les étoiles à neutrons ou les trous noirs en explosion. Ainsi, l'étude du PQG est, aujourd'hui, un domaine très actif de la recherche en physique des particules.

Aujourd'hui, nous sommes capables de reproduire très temporairement et sur des extensions spatiales infimes ce PQG au sein d'expériences tels que le grand collisionneur à hadrons (LHC) du CERN à la frontière franco-suisse, RHIC aux Etats-Unis, FAIR en Allemagne ou encore NICA en Russie. Pour ce faire, des noyaux de plombs ultrarelativistes sont envoyés les uns sur les autres pour créer

1. *Voyez comme on danse*, 2001.

2. Euphémisme...

3. cf. note 2.

des conditions de température et de densité propices à l'apparition du plasma. Dans l'optique d'en apprendre plus sur ce dernier, il nous faut comprendre et maîtriser les processus physiques qui y prennent place. Un des moyens utilisés pour cela est la perte d'énergie d'une particule externe au PQG (un quark lourd par exemple). En effet, cette particule va interagir avec le plasma en le traversant et va, de ce fait, servir de sonde pour observer son évolution.

Pour ce qui est de l'interaction entre le PQG et la particule sonde, nous savons que ce qui s'y produit sont des diffusions élastiques ainsi que des diffusions induisant un rayonnement de gluons entraînant, respectivement, une perte d'énergie collisionnelle et une perte d'énergie radiative. En physique des hautes énergies, c'est cette dernière qui prédomine. Elle est décrite par la physique du rayonnement et il est connu, notamment, qu'il est possible d'associer un temps au processus d'émission appelé temps de formation. Il est aussi connu que, lorsque ce temps de formation devient plus long que le libre parcours moyen, le rayonnement et la perte d'énergie diminue : c'est l'effet LPM. Ce travail de thèse se situe dans ce cadre et cherche à déterminer si le fait que le gluon émis puisse interagir avec le milieu durant son propre temps de formation induisant une modification de la perte d'énergie du parton émetteur.

Après une introduction générale du plasma de quarks et de gluons dans ce premier chapitre, le deuxième sera consacré à la caractérisation des plasmas et, notamment, à l'étude des perturbations que l'on peut y trouver. Nous retrouverons les différentes relations de dispersion indiquant quels sont les modes pouvant se propager dans un plasma.

La perte d'énergie sera le thème de notre troisième chapitre. Nous y détaillerons les résultats les plus importants de la littérature concernant la perte d'énergie collisionnelle puis radiative. La fin de ce chapitre permettra d'identifier plus clairement l'objet de notre étude.

Nous commencerons à mener cette étude dans le quatrième chapitre en revisitant un formalisme de la diffusion multiple dans un milieu modélisé par un potentiel $\tilde{A}(x)$. Ce sera l'occasion d'introduire les outils principaux de nos travaux.

Dans le cinquième chapitre, nous étendrons ce formalisme à des processus inélastiques pour rendre compte d'une perte d'énergie. Nous verrons qu'il faut, pour cela, revenir sur l'hypothèse principale du chapitre 4. Le but sera de « ranger » le rayonnement secondaire de gluons, induit par l'interaction du gluon en formation avec le milieu, dans le potentiel $\tilde{A}(x)$.

Pour le sixième et dernier chapitre, nous exploiterons les résultats du précédent pour tenter d'en extraire de la phénoménologie. Nous verrons, notamment, la conséquence de la prise en compte de ce rayonnement secondaire sur le temps de formation du gluon principal.

1.2 Plasma de quarks et de gluons

Dans cette section, nous allons détailler la notion de plasma de quarks et de gluons pour arriver à la motivation principale de ces travaux de thèse.

1.2.1 Suppositions théoriques et découverte

La théorie étudiant l'interaction entre particules portant une charge de couleur, quarks et gluons, s'appelle la chromodynamique quantique. Nous utiliserons, dans ce manuscrit, l'acronyme anglais communément employé dans la communauté scientifique « QCD » pour *Quantum Chromodynamics*⁴. Cette théorie fut développée dans les années 1970.

Une des propriétés inexpliquées de la QCD est le confinement. C'est le fait que les quarks s'associent toujours de manière à former un ensemble neutre du point de vue de la charge de couleur. Cela peut être réalisé en combinant trois quarks de couleurs différentes (rouge+vert+bleu=blanc i.e. neutre) ou bien un quark et un antiquark (rouge+=blanc). La première possibilité correspond aux baryons et la deuxième aux mésons. D'un point de vue théorique, cette observation n'a toujours pas été justifiée et constitue, en quelque sorte, la question à 1 million de dollars de la QCD⁵. La piste principale stipule que l'interaction forte croît avec la distance. Ainsi, si on essaye d'arracher un quark d'un hadron, la force s'intensifie empêchant l'ensemble de se scinder.

Cependant, la constante de couplage g de l'interaction forte (paramètre qui intervient dans l'intensité de la force) a un comportement particulier lorsque l'on augmente l'énergie : elle diminue. Celle de l'interaction électromagnétique, au contraire, augmente avec l'énergie. Cela a une conséquence importante : la liberté asymptotique. En effet, à très haute énergie, cette tendance à aller vers 0 de la constante de couplage implique que les quarks et les gluons interagissent très peu et se déplacent quasi-librement dans le régime des grandes énergies (équivalent aux petites distances). C'est l'exact opposé du confinement pour les énergies standards (grandes distances). La liberté asymptotique fut découverte en 1973 par H. David Politzer [1], Frank Wilczek et David J. Gross [2] qui remportèrent le prix Nobel de physique en 2004 pour cela.

Avec la propriété de liberté asymptotique, on a déduit qu'il devait exister un état de la matière, à très haute énergie, où les quarks et les gluons n'interagissent quasiment pas : c'est le Plasma de Quarks et de Gluons (PQG) par analogie avec un plasma électromagnétique dans lequel les électrons et les ions se comportent de manière quasi-libre.

Ainsi, on peut tenter de dresser un diagramme des phases de la matière hadronique donnant l'état de celle-ci en fonction de la température et de la densité baryonique. Lorsque ces deux paramètres sont peu élevés, la matière peut être vue comme un gaz de hadrons (c'est le confinement). On trouve notamment dans cette zone les noyaux composant la matière ordinaire, celle qui nous entoure et nous compose. Au contraire, lorsque la température et/ou la densité deviennent très élevées, on trouve le plasma de quarks et de gluons. Cependant, la question de la transition entre ces deux états reste assez ouverte et constitue un sujet d'étude particulièrement riche.

4. De même, nous parlerons de « QED » pour la théorie quantique de l'électromagnétisme : l'électrodynamique quantique ou *Quantum Electrodynamics*.

5. A prendre au sens propre car il s'agit d'un des sept problèmes du prix du millénaire, problèmes réputés insurmontables, posés par l'institut de mathématiques Clay en 2000 et avec, à la clé, une récompense d'un million de dollars.

En 1975, J.C. Collins [3] suppose que ce nouvel état de la matière pourrait expliquer les hautes densités observées dans certains astres tels que les étoiles à neutrons. De plus, les cosmologistes supposent que l'univers primordial est passé par un état de PQG quelques microsecondes après le Big-Bang, quand l'univers était encore extrêmement chaud et dense (conditions nécessaires à l'apparition du PQG).

Motivées par la physique du confinement et, dans une moindre mesure, par ces aspects cosmologiques, les activités de recherche autour du PQG vont rapidement se développer au sein de la communauté de la physique des particules.

1.2.2 Comment former un PQG : brève histoire des accélérateurs

On sait que pour former un PQG il faut réussir à atteindre des températures et des densités colossales. Pour avoir un ordre d'idée, la température à laquelle on s'attend à une transition vers un PQG est de l'ordre de 10^{12} °C. Pour ce qui est de la densité, on estime qu'elle s'établit à une dizaine de fois celle du noyau atomique qui est de 230 000 tonnes par millimètre cube⁶ ! Comment faire pour recréer ce type de conditions en laboratoire ?

Pour répondre à cette question, faisons un bref historique des techniques expérimentales utilisées par les physiciens des particules. Pour faire simple, le concept des expériences dans ce domaine n'a pas beaucoup évolué depuis Rutherford : on fait collisionner des particules le plus fort possible. C'est l'idée que si l'on casse nos jouets on pourra comprendre comment ils fonctionnent ! Le problème réside dans le fait qu'il faut taper de plus en plus fort pour observer des phénomènes de plus en plus petits. Une expérience de physique des particules a toujours deux grandes composantes : l'accélération et la détection. On accélère des particules pour les faire se collisionner puis on détecte ce qui sort de cette collision.

Intéressons nous d'abord à l'accélération. Comment accélérer une particule le plus possible ? La méthode est simple : il faut la placer dans un champ électrostatique de haute tension (avec une grande différence de potentiel) et la force électrostatique va accélérer la particule. Dans la pratique, il y a deux écoles. La première est l'accélération linéaire. On essaye de créer la plus grande différence de potentiel possible entre deux plaques. Cette technique a permis, entre autres, de réaliser les premières désintégrations nucléaires en envoyant des protons de 400 keV⁷ sur du lithium. Pour augmenter l'énergie, Rolf Wilderoe réalise un accélérateur constitué de plusieurs cavités accélératrices [4]. Il s'agit du concept de base de tous les futurs accélérateurs linéaires (ou Linac). Actuellement, le plus grand Linac se trouve à Stanford aux Etats-Unis. Il mesure plus de 3 km de long et permet d'accélérer des électrons jusqu'à des énergies de 60 GeV. La deuxième école est l'accélération circulaire. Pour augmenter encore l'énergie, Ernest Lawrence a l'idée suivante : au lieu de faire passer une particule dans une succession de champs électrostatiques, pourquoi ne pas faire passer la particule plusieurs fois dans le même champ ? C'est le principe du cyclotron. Un champ magnétique fait

6. Quand on dit que la matière est essentiellement constituée de vide ...

7. L'eV est l'unité d'énergie utilisée par la physique des particules, $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

tourner les particules qui passent et repassent dans un champ électrostatique et accélèrent progressivement. On distingue les cyclotrons à champ magnétique fixe où les particules décrivent une spirale (le rayon de courbure de la particule dans le champ magnétique dépendant de sa vitesse, plus elle est accélérée, plus ce rayon augmente) des synchrotrons où le champ magnétique augmente pour garder les particules sur une orbite circulaire. Longtemps, après accélération, les particules étaient envoyées sur une cible fixe pour étudier les réactions possibles. Aujourd'hui, on utilise souvent des collisionneurs : on accélère en sens inverse deux faisceaux de particules et on les fait se collisionner menant à une énergie disponible plus importante que sur cible fixe. C'est le principe du Large Hadron Collider du Centre Européen de la Recherche Nucléaire (CERN), l'accélérateur le plus puissant au monde, à l'heure actuelle. Il a un périmètre de 27 km et permet d'atteindre des énergies de 14 TeV.

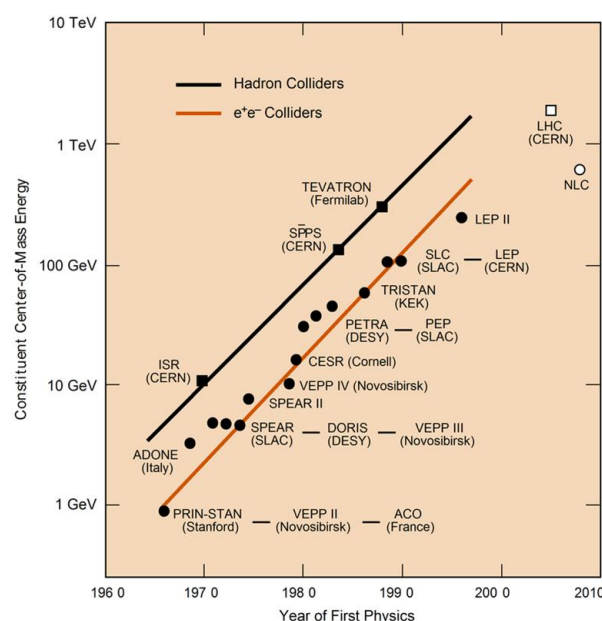


FIGURE 1.1 – Graphique montrant l'évolution de l'énergie mise en jeu dans les différentes expériences de physique des particules au cours du temps : diagramme de Livingstone

Pour ce qui est de l'accélération, on voit donc que c'est une sorte de course à l'énergie. Cette course à l'énergie a cependant permis de découvrir toutes les particules prédites par le Modèle Standard (le boson de Higgs étant la dernière en date) et, pour étudier la physique au-delà du Modèle Standard, les physiciens vont avoir besoin de monter encore en énergie impliquant des aimants encore plus puissants et des machines encore plus grandes !

Maintenant qu'on a accéléré et fait collisionner nos particules, si l'énergie est suffisante, on a créé un grand nombre de nouvelles particules qui vont évoluer, réinteragir, se désintégrer pour en donner de nouvelles, etc ... L'enjeu est donc de détecter tout cela pour pouvoir reconstruire les différents événements. Or, détecter quelque chose qui mesure de l'ordre de 10^{-14} m n'est pas chose aisée. Le principe de base de la détection de particules réside dans l'interaction de la particule qu'on cherche à détecter avec le détecteur. Pour les particules chargées électriquement, on peut utiliser l'ionisation. Quand une particule chargée traverse un milieu, elle

peut arracher des électrons aux atomes de celui-ci. On applique un champ électrique au milieu pour que, quand des électrons sont arrachés par le passage d'une particule, ils dérivent vers les électrodes et, ainsi, engendrent un signal électrique. A l'heure actuelle, quasiment tous les détecteurs de particules utilisent ce principe d'une manière plus ou moins directe. A titre d'exemple, on peut citer la chambre à fils [5] qui a valu à Georges Charpak le prix Nobel de physique en 1992. Celle-ci consiste en une succession de grilles composées elles-mêmes d'un grand nombre de fils parallèles et baignant dans un gaz noble type argon ou krypton. Toutes les grilles sont sous tension et alternées entre cathode et anode. Ainsi, quand une particule traverse la chambre, elle ionise les atomes de gaz noble. Ces électrons dérivent vers les électrodes les plus proches permettant ainsi la reconstruction d'une trace de la particule dans la chambre.

Finalement, pour former un PQG, il faut accélérer des ions de plomb (composés de 207 nucléons) et les faire se collisionner à suffisamment grande énergie (de l'ordre du TeV). Par contre, aux énergies disponibles actuellement, on ne s'attend pas à former de PQG en collisionnant des protons seuls⁸. Depuis la prédiction de cet état, plusieurs grandes expériences ont cherché à l'étudier. Les plus conséquentes sont les installations du Brookhaven National Laboratory (BNL) près de New-York et du CERN à la frontière franco-suisse. L'accélérateur phare du BNL est le Relativistic Heavy-Ion Collider (RHIC), un collisionneur d'une conférence de près de 4 km et pouvant atteindre 200 GeV/c. Le CERN contient, quant à lui, le Large Hadron Collider (LHC) évoqué plus haut et un des 4 détecteurs installés le long de l'anneau est une expérience presque exclusivement dédiée à l'étude du PQG depuis 2010 : l'expérience ALICE.

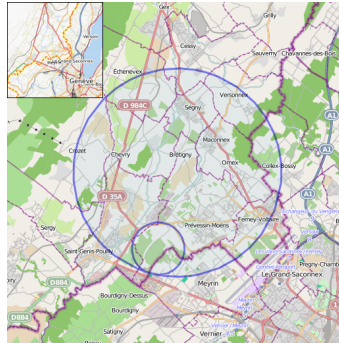


FIGURE 1.2 – Situation du LHC à la frontière franco-suisse

1.2.3 Vie et mort du PQG

On a vu que pour créer un PQG il fallait effectuer une collision entre deux noyaux d'atomes lourds comme le plomb pour avoir une densité d'énergie suffisamment importante. Dans ces collisions, plusieurs phases se succèdent.

- On considère qu'à $t = 0$ la collision a lieu. A partir de là, les très nombreuses collisions inélastiques (i.e. pouvant entraîner l'apparition de nouvelles particules grâce à la relativité) entraînent une augmentation de la densité d'énergie du milieu. C'est là que sont créées des particules lourdes, dans ces processus dits « durs » (particules charmées, bosons vecteurs W et Z ,...).

8. Même si cette question n'est pas définitivement tranchée : il est possible que des petites zones de plasma soient créées dans de telles collisions.

- Si la densité d'énergie et, donc, la température augmentent suffisamment, un PQG est alors formé : c'est le déconfinement. Aux énergies du LHC, cette phase PQG peut durer une dizaine de fm/c⁹.
- Ensuite, par différence de pression avec l'extérieur du PQG, celui-ci entre en expansion et se refroidit. Petit à petit, la température diminuant, les quarks se recombinent en hadrons : c'est l'hadronisation.
- La dernière étape est celle du *freeze out*. Il y a deux parties dans celui-ci. Premièrement, lorsqu'il n'y a plus d'interaction inélastique entre les hadrons (plus de particules créées), on parle de gel chimique. Deuxièmement, lorsqu'il n'y a plus de collision élastique (modifiant seulement l'énergie des particules en jeu), on parle de gel cinétique. Les hadrons sont alors dans leurs états finaux. Ce sont ces hadrons (ou leurs produits de désintégrations s'ils sont instables) que l'on observe dans les détecteurs.

Ainsi, on voit que le PQG a une durée de vie extrêmement courte. Se pose alors la question de son étude : comment faire pour étudier un état qui disparaît si vite. On va tenter de répondre à cette question dans la partie suivante.

1.2.4 Comment étudier un PQG

Le fait que le PQG ait une durée de vie si courte empêche toute observation directe. On peut uniquement l'étudier indirectement grâce aux produits finaux de la collision. De manière générale, la stratégie d'étude est la suivante. On commence par identifier une observable (i.e. une mesure particulière) dont la prédiction théorique prévoit une modification en présence de PQG. On réalise ensuite cette mesure lors des collisions proton-proton (p-p), situation dans laquelle on ne s'attend pas à la formation de PQG. Puis, on réalise la même mesure dans les collisions plomb-plomb (Pb-Pb) ou autres ions lourds où on s'attend, cette fois, à la formation de PQG. Finalement, si la modification prédite par les modèles théoriques est vérifiée, alors on a une « preuve » de l'existence du PQG et ses propriétés physiques peuvent être déduites des paramètres du modèle utilisé.

La question, maintenant, est de trouver la ou les bonnes observables pour faire cela. On appelle ces observables des sondes pour le PQG. On pourra trouver dans [6] un inventaire détaillé des différentes sondes possibles pour le PQG. Une bonne sonde a plusieurs caractéristiques.

- Elle doit être bien maîtrisée dans les collisions p-p qui servent de référence.
- Les modèles théoriques doivent lui prédire une importante modification en présence de PQG.
- Elle doit être mesurable de la manière la plus précise possible, avec une faible incertitude.

On peut classer les sondes en deux types distincts. Premièrement, les sondes dites *molles* sont associées à des processus de faible énergie conduisant à des effets de collectivité des particules. Deuxièmement, les sondes dites *dures* sont associées, elles, à des processus beaucoup plus énergétiques ayant lieu au tout début de la collision. Ces processus sont beaucoup plus rares mais ont un avantage important : ces particules produites avant l'apparition du PQG vont « voir » toute l'évolution de celui-ci.

9. C'est l'unité de temps typique pour ce genre de processus, $1 \text{ fm}/c = 3,33 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ représente le temps caractéristique associé à l'interaction forte.

Un exemple notable de sonde molle est ce qu'on appelle le flot elliptique [7]. Il est très peu probable que deux noyaux d'ions lourds entrent en collision de manière parfaitement frontale (on parlera de centralité nulle). Le fait que ces collisions menant au PQG sont plutôt non-centrales induit une forme d'amande pour celui-ci. Il en résulte une anisotropie dans l'expansion latérale du PQG. In fine, la distribution azimutale des particules va être affectée par cet effet. En particulier, les expérimentateurs mesurent une quantité appelée le flot elliptique v_2 correspondant à la deuxième harmonique de la série de Fourier représentant la distribution azimutale des particules. Un v_2 non-nul nous renseigne sur la présence d'un PQG [8].

Pour ce qui est des sondes dures, un premier exemple est la suppression des quarkonia. Un quarkonium est un méson composé de quarks dit lourds comme le charme ou la beauté (de la forme $c - \bar{c}$ ou $b - \bar{b}$). Ces particules sont produites en amont du PQG et il a été prédit que la formation de ce dernier induirait une diminution du nombre de ces particules en fonction de la température atteinte [9]. On dit souvent que les quarkonia pourrait servir, en quelque sorte, de thermomètre du PQG.

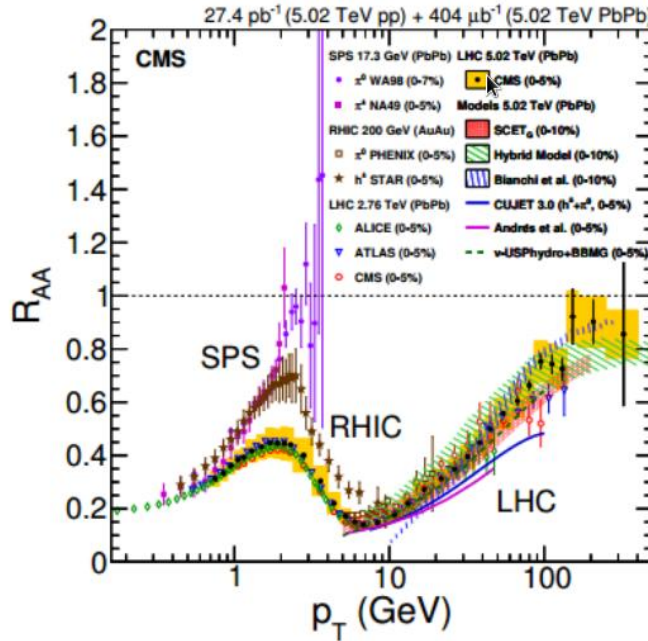


FIGURE 1.3 – Facteurs de modification nucléaire R_{AA} dans les collisions centrales pour les pions neutres et les hadrons chargés au SPS et à RHIC ainsi que pour les particules chargées au LHC comparés aux prédictions de différents modèles [10].

La deuxième et dernière sonde dure que l'on va évoquer est d'un intérêt tout particulier pour introduire le travail de thèse relaté dans ce manuscrit. Il s'agit de ce que l'on appelle la suppression des grandes impulsions transverses. En effet, il est prédit [11] que des partons (quarks ou gluons) très énergétiques se propageant dans un milieu très dense (type PQG) vont perdre une partie de leur énergie par interaction avec ce milieu. Cette perte d'énergie peut se faire par deux mécanismes : collisionnel ou radiatif¹⁰. Ainsi, ces partons affaiblis en énergie par leur

10. L'ensemble de ces deux mécanismes forment le centre d'intérêt du chapitre 3.

traversée du PQG vont, une fois l'hadronisation faite, induire des taux de production de particules logiquement moins importants à grande impulsion transverse par rapport aux mesures qui seraient faites dans les collisions p-p. Ce phénomène est appelé *jet-quenching*. Une mesure particulière illustre parfaitement cela. Il s'agit du facteur de modification nucléaire, R_{AA} . Cette quantité est le rapport normalisé du taux de production d'un type de particule entre les collisions Pb-Pb et les collisions p-p. Tout écart à l'unité de ce genre de quotient implique un effet particulier des collisions d'ions lourds pouvant s'interpréter comme la présence d'un PQG. On peut voir dans la Fig. 1.3 un écart à l'unité clair pour cette mesure faite dans divers expériences sur le PQG. Ce genre de comportement est donc expliqué en grande partie par les mécanismes de pertes d'énergie dans le milieu dense.

Du point de vue des modèles théoriques, il est donc d'une importance capitale de maîtriser le mieux possible cette perte d'énergie. Cela consiste à comprendre en détail comment une particule ultrarelativiste¹¹ va interagir dans le PQG. Ce travail de thèse a donc pour but de mettre en évidence un effet supplémentaire qui pourrait jouer un rôle dans la perte d'énergie radiative (qui, à haute énergie, est le mécanisme dominant) et qui découlerait du caractère opaque¹² que l'on peut attribuer au PQG.

11. Une particule est dite ultra-relativiste lorsque son énergie de masse $E = mc^2$ est négligeable devant son énergie cinétique.

12. Dans un milieu opaque, une onde (ici on parlera de photon ou de gluon) perd de l'énergie au fur et à mesure de sa traversée du milieu.

CHAPITRE 2

DE LA PHYSIQUE DES PLASMAS

La fin du chapitre précédent a explicité l'objet de notre étude : on souhaite regarder l'influence du caractère opaque d'un milieu de type plasma sur la perte d'énergie d'une particule rayonnante. La première étape consiste à définir et étudier cet état de la matière particulier qu'est le plasma. Ainsi, dans ce chapitre, nous allons présenter les concepts importants associés à l'état de plasma. Puis, nous nous intéresserons plus particulièrement aux méthodes développées par la physique théorique pour étudier la réponse d'un plasma à une perturbation. Cette description sera menée, d'une part, du point de vue classique et, d'autre part, par une approche quantique. Ces méthodes seront, de plus, à la base de certains calculs de perte d'énergie considérés dans le chapitre 3. De plus, il est connu que la réponse des particules élémentaires est modifiée lors de la propagation dans un milieu : on parlera de modes collectifs. Ces derniers sont caractérisés par une relation de dispersion donnant le lien entre l'énergie et l'impulsion et, leur durée de vie étant limitée, on peut leur associer un taux d'amortissement γ . L'objectif de ce chapitre résidant dans la détermination des modes de propagation pouvant exister dans le plasma, cela nous conduira à déterminer les relations de dispersion de ces différents modes.

Sommaire

2.1	Quelques notions de physique des plasmas	23
2.1.1	Classification des plasmas	23
2.1.2	Longueur de Debye	25
2.1.3	Oscillation plasma	27
2.2	Notion d'amortissement	28
2.2.1	Ce que l'on va chercher à évaluer	28
2.2.2	Nécessité des relations de dispersion	28
2.3	Plasma classique	29
2.3.1	Etude cinétique et introduction du tenseur diélectrique	30
2.3.2	Aspects longitudinaux : l'amortissement de Landau	35
2.3.3	Aspects transverses	36
2.3.4	Plasma classique relativiste	37
2.4	Plasma quantique	38
2.4.1	Eléments de théorie quantique des champs à température finie	38
2.4.2	Aspects longitudinaux	41
2.4.3	Aspects transverses	42
2.4.4	Taux d'amortissement dans un plasma quantique	43

2.1 Quelques notions de physique des plasmas

On peut définir un plasma comme un ensemble statistique de particules chargées se déplaçant librement. Il constitue le quatrième état de la matière avec les liquides, les solides et les gaz. Cependant, contrairement à ces trois derniers, la matière ne passe pas par une transition de phase brusque pour passer à l'état de plasma ou revenir d'un état de plasma à un autre état. L'exemple le plus simple en est le plasma électromagnétique. Il consiste en un ensemble d'atomes dont une certaine proportion est ionisée. Les électrons résultants de ces ionisations se déplacent librement dans le milieu conférant à celui-ci des propriétés particulières, comme celle de conduire l'électricité¹. L'énergie d'ionisation U étant de l'ordre de la dizaine d'eV, il faut que l'agitation thermique $k_B T$ atteigne cette énergie pour passer à une phase de plasma impliquant des températures très élevées (plusieurs dizaines de milliers de kelvins). Mais, il est possible d'obtenir un plasma en utilisant d'autres formes d'énergie que l'énergie thermique. Par exemple, un milieu exposé à un rayonnement peut aussi être ionisé à cause des collisions avec celui-ci.



FIGURE 2.1 – Les quatre états de la matière

Bien que très répandu dans l'univers², on trouve peu de plasma naturel sur Terre ; les conditions de pression et de température ne s'y prêtant pas spécialement. Cependant, l'étude de l'ionosphère est souvent faite en considérant que ce milieu est un plasma : c'est le rayonnement ultraviolet solaire qui vient ioniser la haute atmosphère. De plus, industriellement, les plasmas sont présents dans de nombreux domaines ; l'exemple le plus connu étant les téléviseurs (ici, c'est l'application d'un champ électrique qui génère le plasma). Aussi, les aurores boréales sont un exemple de plasma créé par l'interaction entre la haute atmosphère et les particules chargées issues des vents solaires. Enfin, en dehors de la Terre, de nombreuses étoiles gazeuses se trouvent dans un état de plasma. Le Soleil en est un exemple.

Le terme de « plasma » a été utilisé pour la première fois par Langmuir et Tonks qui étudiaient les décharges gazeuses à la fin des années 1920 [12, 13]. Ils ont, notamment, introduit la notion d'oscillation plasma [14] que l'on détaillera un peu plus tard.

2.1.1 Classification des plasmas

Pour ce qui est de la classification des différents plasmas, plusieurs critères peuvent être utilisés. Dans cette partie, toutes les notions seront définies par rapport au plasma électromagnétique, encore appelé gaz d'électrons (les électrons étant les composantes les plus mobiles du plasma alors que les ions sont considérés comme quasiment immobiles du fait de leur masse) mais peuvent s'étendre à n'importe quel type de plasma.

1. On « brise » ainsi la neutralité de la matière atomique.

2. On estime que 99 % de la matière dans l'univers est à l'état de plasma.

Degré d'ionisation

Dans un plasma électromagnétique, on peut définir la densité d'électrons n_e , la densité d'ions n_i et la densité d'atomes non-ionisés n_0 . Un plasma sera dit neutre si $n_e = n_i = n$ ³. Alors, le degré d'ionisation α de ce plasma désigne la proportion d'atomes ionisés du milieu

$$\alpha = \frac{n}{n + n_0} . \quad (2.1)$$

On peut donc classer un plasma selon ce degré d'ionisation. Typiquement, α commence à devenir significatif dès lors que l'énergie thermique $k_B T$ dans le milieu atteint le dixième du potentiel d'ionisation U : on parle de plasma fortement ionisé. En dessous de cette valeur, on a un plasma faiblement ionisé. Enfin, on parlera de plasma à l'équilibre thermodynamique lorsque le nombre d'ionisations compense le nombre de recombinaisons (i.e. α devient indépendant du temps).

Plasma cinétique vs plasma corrélé

On fait cette distinction en comparant l'énergie cinétique moyenne et l'énergie d'interaction potentielle moyenne (liée à l'interaction Coulombienne entre les charges). Ce rapport adimensionnel, fondamental pour un plasma, est appelé le paramètre plasma

$$\Gamma = \frac{| \langle E_P \rangle |}{| \langle E_c \rangle |} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}}{\frac{3}{2}k_B T} , \quad (2.2)$$

$d \propto n^{-1/3}$ étant la distance entre deux particules chargées.

Dans le cas où l'énergie cinétique moyenne est grande devant l'énergie d'interaction moyenne, $\Gamma \ll 1$, on a un plasma dit cinétique (ou faiblement corrélé). On peut alors considérer que les particules du plasma se déplacent librement comme dans un gaz parfait. Dans le cas opposé, $\Gamma \gg 1$, on parle de plasma corrélé. Dans la suite de ce chapitre, on considérera essentiellement des plasmas cinétiques.

Plasma classique vs plasma quantique

Lorsque l'on augmente la densité d'un plasma, il va arriver une densité critique où la distance entre les particules va être si faible que le recouvrement des fonctions d'onde ne pourra plus être négligé. Il faudra alors prendre en compte les corrections dues aux effets quantiques et on aura, a fortiori, un plasma dit quantique (ou dégénéré).

Le paramètre qui permet de trancher sur la nature classique ou quantique d'un plasma est le rapport entre la distance moyenne d entre deux particules chargées et l'extension spatiale moyenne d'une particule. La première quantité étant reliée facilement à la densité de particules du plasma :

$$d = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3} . \quad (2.3)$$

La seconde, quant à elle, est estimée par la longueur d'onde thermique de de Broglie. Il s'agit de la longueur d'onde de de Broglie associée à des particules d'un

3. La notion de neutralité du plasma sera explicitée plus en détail lorsque l'on évoquera la longueur de Debye.

gaz à une température donnée

$$\lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} . \quad (2.4)$$

Ainsi, si $d/\lambda_{th} \gg 1$, on a un plasma classique. Par contre, dès lors que d/λ_{th} devient plus petit que 1, le plasma est considéré comme quantique.

Plasma non relativiste vs plasma relativiste

La distinction entre ces deux types de plasmas se fait en comparant l'énergie thermique $k_B T$ et l'énergie de masse associée aux composants du plasma, ici des électrons, $m_e c^2$. Lorsque la première est faible devant la seconde, la masse est conservée et on a un plasma non relativiste. Dans le cas contraire, les collisions dans le plasma sont suffisamment énergétiques pour engendrer de nouvelles particules : on a un plasma relativiste.

Au vu des différents critères de définition d'un plasma, on peut se demander dans quelle catégorie tombe le PQG. Ce dernier, de par les propriétés de la liberté asymptotique, est très dense mais avec des constituants n'interagissant quasiment pas. De plus, l'énergie thermique associée au PQG étant de l'ordre de 180 MeV et l'énergie de masse des quarks u et d de l'ordre de quelques MeV, le plasma est relativiste. On a donc, un plasma quantique cinétique⁴ et relativiste.

En effet, dans ce type de plasma, on a la densité qui est proportionnelle à la température au cube. Ainsi, on a $d \propto 1/T$ et l'expression du paramètre plasma (2.2) donne alors, dans le cas du PQG, $\Gamma \propto \alpha_s$. Dans le cadre d'une étude perturbative, $\alpha_s \ll 1$ indiquant que le PQG est un plasma cinétique. De plus, dans un plasma, les constituants du milieu acquièrent une masse thermique de l'ordre de gT ce qui implique que le rapport d/λ_{th} va comme $\sqrt{g}$ et est donc bien inférieur à 1. Le PQG peut alors être qualifié de plasma quantique cinétique relativiste.

2.1.2 Longueur de Debye

On considère un gaz d'électrons et on cherche à évaluer la section efficace de diffusion d'une particule de masse m , de charge électrique q et de vitesse v sur une autre charge q_0 . Celle-ci est évidemment donnée par la formule de Rutherford [15], θ étant l'angle de diffusion :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \propto \left(\frac{q_0 q}{mv^2}\right)^2 \sin^{-4}(\theta/2) . \quad (2.5)$$

La section efficace totale⁵ est donnée par l'intégration sur l'angle de diffusion :

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} \sin \theta d\theta . \quad (2.6)$$

4. On parle parfois de plasma à couplage faible.

5. Dans un plasma, on définit souvent aussi une section efficace dite de transport dans laquelle l'intégration sur l'angle est pondérée par un facteur $1 - \cos \theta$. L'apparition de la divergence restant la même, on utilisera la section efficace totale plus courante en physique des particules.

On voit, ici, apparaître une divergence logarithmique pour les plus petits angles de diffusion (correspondant aux paramètres d'impact les plus grands). Ainsi, un traitement standard d'interaction à deux corps n'est pas adapté au cas d'un plasma, ne décrivant pas correctement le comportement des particules chargées interagissant à grandes distances.

Pour résoudre ce problème, on doit calculer le potentiel effectif autour d'un centre diffuseur en tenant compte explicitement de la distribution des autres charges dans le milieu. Le premier calcul de ce genre a été mené par Debye et Hückel en 1923 [16]. On considère un plasma neutre de densité n_0 et de température T . On introduit, donc, dans le plasma, une particule chargée q_0 placée à l'origine d'un repère $\vec{r} = \vec{0}$. Dans le vide, il est clair que le potentiel créé par cette charge est donné par :

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (2.7)$$

Cependant, dans le plasma, la distribution des particules chargées va être affectée par cette charge supplémentaire et crée un potentiel additionnel à ajouter à $\phi_0(\vec{r})$. On note $\phi(\vec{r})$ ce potentiel effectif. Il est donné par l'équation de Poisson :

$$-\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} + \frac{q_0\delta(\vec{r})}{\epsilon_0} , \quad (2.8)$$

avec $\rho(\vec{r}) = e(n_i(\vec{r}) - n_e(\vec{r}))$, la densité totale de charge égale à la somme des densités ionique et électronique pondérées par la charge⁶. Explicitons maintenant ces densités. Si l'on suppose une situation d'équilibre, elles sont déterminées par la distribution de Boltzmann :

$$n_i(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T}} \quad \text{et} \quad n_e(\vec{r}) = n_0 e^{\frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T}} . \quad (2.9)$$

On recherche une solution à symétrie sphérique, ce qui revient à supposer que le potentiel possède uniquement une dépendance en la norme de $\vec{r}$. Utilisant l'expression du laplacien dans ces coordonnées, on trouve que l'on a à résoudre l'équation suivante :

$$-\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[e^{-\frac{e\phi(r)}{k_B T}} - e^{\frac{e\phi(r)}{k_B T}} \right] + \frac{q_0\delta(r)}{\epsilon_0} . \quad (2.10)$$

On utilise, alors, le fait que l'on a un plasma cinétique⁷. Ainsi, on peut linéariser l'exponentielle et résoudre l'équation différentielle pour obtenir le potentiel effectif :

$$\phi(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{2r}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}}}\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-2r/\lambda_D) . \quad (2.11)$$

Le paramètre introduit s'appelle la longueur de Debye :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} . \quad (2.12)$$

Son interprétation est simple. Dans un plasma, le potentiel produit par une charge q_0 n'est ressenti que dans un rayon égal à la longueur de Debye. En effet, toutes les

6. Ces densités sont modifiées par l'ajout d'une charge q_0 , sinon elles sont égales à n_0 .

7. $\frac{e\phi}{k_B T} \ll 1$.

autres charges contenues dans cette sphère de Debye (ayant pour centre la charge considérée et pour rayon λ_D) ressentent un potentiel quasi-Coulombien. Mais les charges situées à l'extérieur de cette sphère ne ressentent quasiment pas le potentiel à cause de sa décroissance exponentielle. C'est ce qu'on appelle le phénomène d'écrantage. Cela a des conséquences importantes. La première est la neutralité locale du plasma. Bien qu'il soit constitué de particules chargées évoluant quasiment librement, un plasma est neutre aux échelles intermédiaires. En effet, chaque particule du plasma peut-être assimilée à la charge q_0 et est au centre de sa propre sphère de Debye. Ainsi, dans chaque sphère de Debye, le potentiel n'est pas nul et le milieu n'est pas neutre. Cependant, si l'on considère un volume contenant un grand nombre de sphères de Debye, alors le phénomène d'écrantage induit la neutralité du plasma dans son ensemble.

Une deuxième conséquence de l'existence de cette longueur caractéristique est la résolution de la divergence observée dans le calcul de la section efficace de diffusion Coulombienne. En effet, on comprend maintenant qu'il ne faut considérer dans ce calcul que les diffusions ayant lieu avec des paramètres d'impact plus petits que la longueur de Debye. On obtient ainsi une coupure naturelle aux petits angles.

2.1.3 Oscillation plasma

On a abouti à la notion de longueur de Debye en considérant l'équilibre statique entre une particule chargée et un gaz d'électrons et d'ions. Regardons maintenant ce qu'il se passe du point de vue dynamique lorsqu'une charge est introduite dans le plasma.

Dans cette situation, certains électrons se mettent en mouvement dans le but d'écranter le potentiel électrostatique induit par la charge ajoutée. Cependant, de par leur inertie, les électrons vont dépasser la situation d'équilibre et créer une distribution hors-équilibre dans la direction opposée. Ils vont donc se déplacer en sens inverse et dépasser encore l'équilibre et ainsi de suite. Ce comportement oscillatoire des électrons est appelé oscillation plasma et est caractérisé par une pulsation dite plasma ω_P [14].

Pour évaluer cette fréquence particulière, on considère une tranche de plasma en déplacement d'épaisseur x . L'amplitude du champ électrique produit est donnée par :

$$E = \frac{nex}{\epsilon_0} . \quad (2.13)$$

On substitue cette force dans l'équation du mouvement et on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}x = 0 . \quad (2.14)$$

Ainsi, on trouve l'expression de la pulsation ω_P dans un plasma caractérisé par une densité n :

$$\omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} . \quad (2.15)$$

Les ondes de plasma décrites par cette fréquence particulière sont associées, lors de leur quantification, à des quasi-particules appelées plasmons [17]. Ils constitueront les modes longitudinaux que nous étudierons dans les prochaines sections de ce chapitre.

2.2 Notion d'amortissement

2.2.1 Ce que l'on va chercher à évaluer

Dans le cadre de cette thèse, l'objet principal de notre attention consistera en le diagramme de la figure 2.2. Ce si petit diagramme peut amplement être l'activité de recherche d'une carrière ! Bien sûr, il est ici représenté dans sa forme la plus réductrice. En effet, on va chercher à évaluer la probabilité associée à ce processus dans un milieu. C'est une question qui fait l'objet de recherches intenses dans le domaine de la physique des ions lourds. Notre particularité dans toutes ces activités réside dans le fait que l'on va s'intéresser à un milieu que l'on qualifie d'opaque.

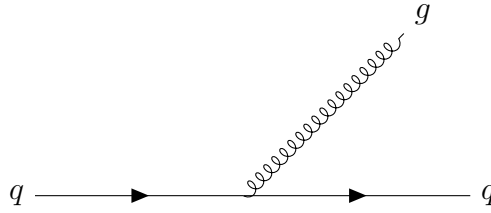


FIGURE 2.2 – Diagramme principal

Les multiples travaux de recherche ayant traité des processus radiatifs seront traités en détail dans le chapitre suivant. Pour l'heure, nous souhaitons uniquement insister sur le caractère opaque du milieu en explicitant les implications et l'orientation de notre recherche.

2.2.2 Nécessité des relations de dispersion

L'opacité d'un milieu peut être définie comme son caractère non transparent⁸. Autrement dit, si on se positionne du point de vue de la physique classique, un rayonnement électromagnétique traversant un milieu absorbant sera affecté par celui-ci. La manière dont cette affection aura lieu est encodée dans l'indice de réfraction n . Rappelons que cet indice est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur la vitesse de la lumière dans le milieu que l'on considère

$$n = \frac{c}{v} . \quad (2.16)$$

Plaçons nous quelques instants dans le milieu le plus simple qui soit : transparent, homogène (i.e. ses propriétés sont les mêmes en chacun de ces points), isotrope (i.e. ses propriétés sont les mêmes dans chaque direction de l'espace) et non-dispersif. Ce dernier point indique que la vitesse de la lumière dans le milieu ne dépend pas de la fréquence de l'onde électromagnétique considérée. Alors, dans un tel milieu, l'indice de réfraction est un nombre réel, supérieur à 1 et constant avec la fréquence. C'est généralement dans ce type de milieu que l'on se place quand on fait de l'optique géométrique.

Complexifions maintenant notre milieu en abandonnant le caractère non-dispersif. Ainsi, il nous faut modifier légèrement la relation (2.16) pour écrire à la place :

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} . \quad (2.17)$$

8. Nous voilà bien avancés ...

n est toujours réel et supérieur à 1 mais a perdu sa constance avec la fréquence, la dépendance étant cachée, bien sûr, dans la vitesse de la lumière dans le milieu. De tels milieux sont responsables de la dispersion des différentes couleurs comme dans l'expérience de décomposition de la lumière par un prisme. Venons en à la relation de dispersion. Étant donné un indice de réfraction, de manière standard, celle-ci prend la forme suivante :

$$k^2 - n^2(\omega)\omega^2 = 0 . \quad (2.18)$$

Cette équation nous donne accès aux ondes pouvant se propager dans le milieu et la partie imaginaire (si elle existe) indique comment celles-ci sont amorties et peut se réécrire sous la forme d'une fonction $\omega(k)$ (fonction pouvant être complexe). Ainsi, nous voyons que la détermination de « qui vit ? » et « qui meurt ? » dans un milieu opaque repose crucialement sur ces relations de dispersion. On va donc chercher à les évaluer dans le cadre du plasma.

Mais avant cela, deuxième difficulté ; oublions le caractère transparent. La modification de l'indice de réfraction qui en résulte est l'apparition d'une partie imaginaire. En effet, on peut écrire :

$$n(\omega) = n_r(\omega) + in_i(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} + in_i(\omega) . \quad (2.19)$$

On appelle n_r l'indice de dispersion (il correspond à l'indice que l'on utilisait jusqu'à maintenant, parfois appelé indice optique) et n_i l'indice d'absorption conséquence de l'absorption.

Pour faire le lien avec la suite du propos, notons que l'usage est de décomposer l'indice de réfraction en deux quantités : la permittivité relative $\epsilon_r(\omega)$ et la perméabilité relative $\mu_r(\omega)$, tel que :

$$n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega) . \quad (2.20)$$

Tout l'enjeu est de déterminer cet ensemble de deux fonctions $\epsilon(\omega)$ et $\mu(\omega)$ et c'est la tâche que nous allons effectuer dans les deux prochaines sections : d'un point de vue classique puis avec une approche quantique. L'idée sous-jacente est d'oublier dans la figure 2.2 l'émission du gluon et de se concentrer uniquement sur sa propagation dans le plasma, cherchant notamment des régions où l'amortissement existe et donc celles où $\text{Im } \omega(k) \neq 0$. L'idéal serait de trouver cet amortissement dans des régions de haute énergie puisqu'on est concerné, ici, par la physique des hautes énergies. En effet, le type de sonde qui nous intéresse, ici, est un parton énergétique qui correspondra à un jet détecté. Cependant, il est intéressant⁹ de commencer par chercher des traces d'amortissement à petit k , lié à des phénomènes collectifs.

2.3 Plasma classique

Dans un premier temps, on va étudier les différents phénomènes de propagation et d'absorption pouvant s'opérer dans un plasma classique. On considère un plasma

9. notamment pour certains calculs de perte d'énergie qui seront faits dans le chapitre suivant et qui utiliseront les outils théoriques qui vont être mis en place.

cinétique (on néglige donc les interactions) composé d'électrons et d'ions : c'est toujours un plasma électromagnétique. Plusieurs livres devenus des standards de la physique théorique expliquent cela en détail : on citera, notamment, l'ouvrage d'Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics* [18]. On prend, de plus, ce plasma non relativiste. En effet, les collisions étant négligées, on oublie la possibilité de création de nouvelles particules à grandes vitesses. On discutera seulement de l'extension possible de ces résultats au cas d'un plasma relativiste.

2.3.1 Etude cinétique et introduction du tenseur diélectrique

En premier lieu, il nous faut poser le cadre théorique qui sera utile à l'étude des phénomènes ondulatoires dans le plasma. On aborde celle-ci par une description cinétique du milieu. Une telle démarche a pour but de construire des objets décrivant le milieu de manière macroscopique à partir d'autres objets le décrivant d'un point de vue microscopique. Autrement dit, on cherche à passer d'une vision discrète à une vision continue.

Introduction de l'équation de Vlasov

C'est ce qui s'opère dans le passage de l'équation de Klimontovich à l'équation de Vlasov. On définit la distribution de Klimontovich [19], $\mathcal{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, la densité dans l'espace de phase pour les électrons de notre plasma :

$$\mathcal{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \delta^{(3)}(\vec{v} - \vec{v}_i(t)) . \quad (2.21)$$

Le nombre d'électrons étant conservé, elle vérifie l'équation de continuité dans l'espace de phase :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}} = 0 , \quad (2.22)$$

appelée équation de Klimontovich. Si les électrons ne sont soumis qu'à l'interaction électromagnétique, on ne prend en compte que la force de Lorentz dans l'évaluation de l'accélération $\dot{\vec{v}}$. Le champ électromagnétique est partagé en deux composantes : un champ extérieur appliqué au milieu et le champ créé par le milieu lui-même. Comme on considère un plasma non relativiste, on peut négliger le champ magnétique interne et adopter l'approximation électrostatique pour le champ électrique interne. Dans ces circonstances, l'équation de Klimontovich prend la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) - \int \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}') \mathcal{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) d^3 r' d^3 v' \right) \mathcal{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 , \quad (2.23)$$

avec

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \left[\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{V}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}') = \frac{q^2 N}{4\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} . \quad (2.25)$$

La distribution de Klimontovich donne la description microscopique complète mais n'est pas adaptée à la détermination des quantités macroscopiques. Pour établir une connexion, on adopte la démarche de la physique statistique : on imagine

un grand nombre de répliques du système, chacune dans un état décrit par un point P dans l'espace des phases à $6N$ dimensions, Γ_{6N} , correspondant à la même configuration macroscopique. La distribution de Liouville, $\mathcal{D}$, est la densité, normalisée à 1, de ces points dans Γ_{6N} . Les quantités macroscopiques intéressantes sont obtenues par des moyennes pondérées par $\mathcal{D}$

$$\langle f(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}', \dots, t) \rangle = \int f(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}', \dots, t) \mathcal{D}(P, t) d^{6N}P . \quad (2.26)$$

La quantité qui va nous intéresser au premier chef est celle pour laquelle f est la distribution de Klimontovich elle-même

$$\langle \mathcal{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) , \quad (2.27)$$

appelée la distribution à un corps. C'est sur cette quantité que va porter l'équation de Vlasov. Pour cela on doit considérer aussi le corrélateur à deux distributions de Klimontovich

$$\langle \mathcal{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \mathcal{F}(\vec{r}', \vec{v}', t) \rangle = f_2(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}', t) + \frac{1}{N} f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta^{(3)}(\vec{v} - \vec{v}') , \quad (2.28)$$

qui fait apparaître la distribution à deux corps, f_2 .

On peut maintenant effectuer la moyenne de l'équation (2.23)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) \right) f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = \int \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}') f_2(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}', t) d^3r' d^3v' . \quad (2.29)$$

On obtient que l'évolution de la distribution à un corps dépend de l'intervention du champ extérieur et de l'interaction Coulombienne pilotée par la distribution à deux corps. En principe, il nous faut donc connaître cette dernière distribution. On montre que cette distribution satisfait une équation analogue où f_2 apparaît dans le membre de gauche et une distribution à 3 corps dans le membre de droite, et ainsi de suite. Cette construction théorique porte le nom de hiérarchie BBGKY, pour Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon [20].

En pratique, pour résoudre un tel problème, on doit tronquer le système d'équations. Une façon d'opérer pour un plasma dont le paramètre plasma, défini par (2.2), est petit devant 1, consiste à développer les distributions à $s = 1, 2$ ou plusieurs corps par rapport à ce paramètre

$$f_s = f_s^{(0)} + f_s^{(1)} + f_s^{(2)} + \dots , \quad (2.30)$$

puis à faire l'hypothèse qu'à l'ordre 0 la distribution à s corps est en fait un produit de s distribution à un corps f_1 . Pour f_2 , on écrit

$$f_2^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{r}', \vec{v}', t) = f_1^{(0)}(\vec{r}, \vec{v}, t) \times f_1^{(0)}(\vec{r}', \vec{v}', t) . \quad (2.31)$$

En ne gardant que les termes d'ordre 0 dans le paramètre plasma, $f_1^{(0)}$ notée simplement f_1 , on obtient l'équation de Vlasov

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 , \quad (2.32)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) - \frac{qN}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int d\vec{r}' \int d\vec{v}' \frac{f_1(\vec{r}', \vec{v}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) . \end{aligned}$$

L'équation de Vlasov ressemble formellement à celle de Klimontovich. Cependant, le contenu physique en est très différent. La première aborde les choses d'un point de vue macroscopique tandis que la seconde traite la matière dans tout son caractère microscopique.

L'équation de Vlasov est aussi appelée l'équation de Boltzmann sans collision à cause de l'absence notable du terme de droite. En effet, les phénomènes de collision apparaissent plutôt dans les termes d'ordre 1 au moins par rapport au paramètre plasma. Cependant, il faut bien noter que l'équation de Vlasov tient compte des interactions à deux corps dans le milieu grâce au second terme du champ électrique qui est généré par les particules du milieu elles-mêmes. Aussi, le terme « sans collision » ne doit pas être tenu comme réhibitoire d'une possibilité de lien avec la perte d'énergie. En effet, ce sont les interactions entre les constituants du plasma qui, étant négligées, conduit à cette dénomination mais une particule sonde traversant le plasma peut interagir avec celui-ci.

Introduction du tenseur diélectrique et de la relation de dispersion

Le tenseur diélectrique est une quantité contenant toute l'information nécessaire sur les processus électromagnétiques pouvant avoir lieu dans le plasma. Pour le déterminer, imaginons qu'on introduise une perturbation dans notre milieu sous forme d'un champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Ce dernier va induire une densité de courant $\vec{J}(\vec{r}, t)$ dans le plasma telle que, par définition :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int_V d\vec{r}' \int_{-\infty}^t dt' \bar{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') . \quad (2.33)$$

Dans cette équation, nous pouvons lire le caractère linéaire de la réponse à une perturbation ainsi que, dans les bornes de l'intégrale temporelle, la causalité du processus. De plus, pour faire le lien avec la fonction de distribution $f_1 \equiv F$, on a aussi :

$$\vec{J} = qn_0 \int \vec{v} F(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.34)$$

$$\rho = qn_0 \int F(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} . \quad (2.35)$$

Enfin, l'invariance par translation permet d'adopter une description des grandeurs physiques en terme d'ondes planes. Ainsi, opérant une transformée de Fourier, on obtient la définition du tenseur de conductivité $\bar{\sigma}(\vec{k}, \omega)$:

$$\vec{J}(\vec{k}, \omega) = \bar{\sigma}(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) . \quad (2.36)$$

Maintenant, pour déterminer le tenseur diélectrique, qui découle du tenseur de conductivité, utilisons les équations de Maxwell dans l'espace de Fourier en présence de charges extérieures. Celles-ci nous donneront naturellement le lien entre $\vec{J}$ et $\vec{E}$.

$$\vec{k} \wedge \vec{E} - \omega \vec{B} = \vec{0} \quad (2.37)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} = -i\mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_{ext}) \quad (2.38)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = -i \frac{\rho + \rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad (2.39)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.40)$$

En effet, comme $\vec{J} = \bar{\bar{\sigma}} \vec{E}$, la deuxième équation de Maxwell permet d'écrire :

$$\vec{k} \wedge \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \omega (\bar{\bar{I}} + i \frac{\bar{\bar{\sigma}}}{\epsilon_0 \omega}) \vec{E} = -i \mu_0 \vec{J}_{ext} \quad (2.41)$$

où $\bar{\bar{I}}$ représente le tenseur unité d'ordre 2. Le facteur entre parenthèse est, justement, le tenseur diélectrique. Il est relié au tenseur de conductivité par :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{I}} + i \frac{\bar{\bar{\sigma}}}{\omega \epsilon_0} . \quad (2.42)$$

Nous pouvons maintenant introduire la notion de relation de dispersion. En effet, en combinant les deux premières équations de Maxwell, on déduit

$$(\vec{k} \vec{k} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\bar{\epsilon}} - \vec{k} \vec{k} / k^2) \vec{E} \equiv \bar{\bar{\Delta}} \vec{E} = -i \omega \mu_0 \vec{J}_{ext} . \quad (2.43)$$

Ce nouveau tenseur $\bar{\bar{\Delta}}$ est appelé tenseur de dispersion. Si on ne considère pas de perturbation extérieure, alors la condition de nullité du déterminant du tenseur de dispersion nous donne les relations de dispersion reliant le vecteur d'onde et la pulsation des ondes électromagnétiques pouvant se propager dans le plasma :

$$\det[\bar{\bar{\Delta}}(\vec{k}, \omega)] = 0. \quad (2.44)$$

Enfin, dans un milieu isotrope, on peut montrer que le tenseur diélectrique peut se séparer en deux contributions : longitudinale et transverse. Si k désigne la norme du vecteur d'onde, alors on a :

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_L(k, \omega) \bar{\bar{I}}_L + \epsilon_T(k, \omega) \bar{\bar{I}}_T \quad (2.45)$$

avec $\bar{\bar{I}}_L \equiv \vec{k} \vec{k} / k^2$ et $\bar{\bar{I}}_T \equiv \bar{\bar{I}} - \vec{k} \vec{k} / k^2$. Aussi, nous pouvons déduire la forme des fonctions scalaires représentant les composantes longitudinale et transverse du tenseur diélectrique :

$$\epsilon_L(k, \omega) = \frac{\vec{k} \bar{\bar{\epsilon}}(\vec{k}, \omega) \vec{k}}{k^2} , \quad (2.46)$$

$$\epsilon_T(k, \omega) = \frac{1}{2} [\text{Tr} \bar{\bar{\epsilon}}(\vec{k}, \omega) - \epsilon_L(k, \omega)] . \quad (2.47)$$

Ainsi, d'après (2.44), les relations de dispersion des modes longitudinaux et transverses dans le plasma sont données par

$$\epsilon_L(k, \omega) = 0 , \quad (2.48)$$

$$\epsilon_T(k, \omega) = (kc/\omega)^2 . \quad (2.49)$$

Faisons un petit aparté pour établir le lien évoqué à l'occasion de la formule (2.20). Nous avons, en effet, introduit les fonctions permittivité ϵ_r et perméabilité μ_r . Nous disposons maintenant de deux nouvelles fonctions ϵ_L et ϵ_T , composantes du tenseur diélectrique. On peut montrer [18] que ces deux jeux de fonctions sont équivalents. On pourrait, en effet, parfaitement définir ϵ_L et ϵ_T en électrodynamique ou bien ϵ_r et μ_r en théorie cinétique. Cependant, il est plus usuel d'utiliser le premier binôme en théorie cinétique et le second en électrodynamique. Dans un milieu isotrope, ils sont reliés par les relations suivantes :

$$\epsilon_r(k, \omega) = \epsilon_L(k, \omega) , \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{\mu_r(k, \omega)} = 1 + \left(\frac{\omega}{ck} \right)^2 [\epsilon_L(k, \omega) - \epsilon_T(k, \omega)] . \quad (2.51)$$

En électrodynamique des milieux continus, permittivité et perméabilité diélectrique font le lien entre les vecteurs champs et les vecteur inductions (électrique et magnétique) :

$$\vec{D}(k, \omega) = \epsilon_r(k, \omega) \vec{E}(k, \omega) , \quad (2.52)$$

$$\vec{H}(k, \omega) = \frac{\vec{B}(k, \omega)}{\mu_r(k, \omega)} . \quad (2.53)$$

Fermons cette parenthèse électrodynamique des milieux continus. Il ne nous reste plus qu'à calculer le tenseur diélectrique explicitement. C'est ce que nous allons faire dans le cas d'un plasma non magnétisé. La méthode consiste à coupler l'équation de Vlasov avec celles de Maxwell. En effet, on utilise le fait que :

$$\vec{J} = qn_0 \int \vec{v} F(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} , \quad (2.54)$$

$$\rho = qn_0 \int F(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} . \quad (2.55)$$

On imagine que l'on introduit une perturbation dans le plasma sous la forme suivante :

$$\delta \vec{E} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} , \quad (2.56)$$

$$\delta \vec{B} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{(\vec{k} \wedge \delta \vec{E}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{\omega} . \quad (2.57)$$

De plus, étant donné que l'on considère une réponse linéaire, on peut prendre la fonction de distribution à une particule comme étant :

$$F(\vec{v}) + \delta F(\vec{v}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (2.58)$$

En substituant tout cela dans (2.32), nous obtenons, en gardant uniquement les termes linéaires en $\delta \vec{E}$ et δF :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \delta F(\vec{v}) = -\frac{q}{m} \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \right) \cdot \left[\left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} \right) \vec{I} + \frac{\vec{k} \vec{v}}{\omega} \right] \cdot \delta \vec{E} . \quad (2.59)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le lien entre la fonction de distribution et le courant, ainsi qu'à transposer les différents opérateurs de dérivation dans l'espace de Fourier pour trouver le tenseur diélectrique.

$$\bar{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \vec{I} - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{v} \vec{v}}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega - i\eta} \vec{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} \quad (2.60)$$

On a introduit, dans cette équation, la pulsation plasma défini dans la sous-section 2.1.3. Aussi, on introduit un régulateur η au dénominateur utile à l'intégration sur la vitesse. Le signe « - » est dû à la causalité. En effet, le propagateur en temps réel est proportionnel à $e^{\eta t}$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$: signifiant que la perturbation est « branchée » dans le passé. Physiquement, ce terme $i\eta$ peut-être associé à la mise en place de la perturbation de manière adiabatique. C'est à partir de cette forme que l'on calculera, dans les deux prochaines sections, les relations de dispersion longitudinale et transverse pour y voir quel processus peuvent avoir lieu.

2.3.2 Aspects longitudinaux : l'amortissement de Landau

Nous pouvons maintenant, en nous plaçant dans un milieu isotrope, calculer la composante longitudinale du tenseur diélectrique. Pour cela, nous prenons comme fonction de distribution à une particule la distribution des vitesses de Maxwell

$$F(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) . \quad (2.61)$$

Ainsi, on évalue (2.46), en utilisant (2.60), pour trouver, en choisissant arbitrairement la direction du vecteur d'onde selon l'axe x :

$$\epsilon_L(k, \omega) = 1 + \frac{k_D^2}{k^2} \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{kv_x}{kv_x - \omega - i\eta} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2T} \right) \quad (2.62)$$

avec k_D l'inverse de la longueur de Debye (2.12) appelé nombre d'onde de Debye. La détermination du comportement longitudinal (et, on le verra par la suite, transverse également) des oscillations pouvant avoir lieu dans le plasma dépend, donc, de la fonction W , définie de la manière suivante et parfois appelée fonction de dispersion plasma :

$$W(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x - Z - i\eta} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx . \quad (2.63)$$

Cette fonction est définie correctement pour des Z pris dans le demi-plan complexe supérieur. Pour les Z situés dans le demi-plan complexe inférieur, il est toujours possible d'effectuer un prolongement analytique en déformant le contour d'intégration de manière à ce que celui-ci se tienne systématiquement en dessous du pôle. Avec W , la relation de dispersion pour les modes longitudinaux exprimée par (2.48) devient

$$1 + \frac{k_D^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{k(T/m)^{1/2}}\right) = 0 . \quad (2.64)$$

Pour poursuivre analytiquement notre calcul, il nous faut trouver des approximations à cette fonction $W(Z)$ pour des petites et des grandes valeurs de son argument. Heureusement, une expansion en série existe pour $Z \rightarrow \infty$ ¹⁰ et nous donne

$$1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} - 3 \frac{\omega_P^2 k^2 (T/m)}{\omega^4} - \dots + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega k_D^2}{k^3 (T/m)^{1/2}} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2 (T/m)} \right) = 0 . \quad (2.65)$$

Si l'on cherche une solution à cette équation du type $\omega = \omega_r + i\gamma_{L/T}$ sous l'hypothèse que $|\gamma/\omega_r| \ll 1$, alors on aboutit au résultat suivant :

$$\omega_r^2 = \omega_P^2 + 3(T/m)k^2 + \dots , \quad (2.66)$$

$$\gamma_L = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_P \frac{k_D^3}{k^3} \exp \left(-\frac{\omega_r^2}{2k^2 (T/m)} \right) . \quad (2.67)$$

Pour des vecteurs d'onde plus petits que le vecteur d'onde de Debye, la propagation des modes longitudinaux est parfaitement décrite par ces deux équations. L'interprétation de (2.66) est assez simple : pour des $k \neq 0$, le mouvement thermique des électrons induit un déplacement de la fréquence d'oscillation par rapport

10. Cela correspond au domaine des petits vecteur d'onde $k \ll k_D$ et donc des phénomènes collectifs.

à la fréquence naturelle ω_P . Comme nous nous sommes situés jusqu'à présent dans un plasma non relativiste, il est clair que le terme en k^2 va seulement induire un léger décalage dans la pulsation des modes longitudinaux.

L'interprétation de la partie imaginaire, γ , est plus subtile mais non moins intéressante. En effet, le fait que γ soit négatif est lié au fait que l'oscillation est amortie dans le plasma et ne peut vivre éternellement. Landau est le premier à avoir étudié cet effet [21]; on parlera donc d'amortissement de Landau. Une approche classique permettant d'expliquer ce phénomène réside dans le couplage résonant entre l'onde et les particules du milieu évoluant à des vitesses proches de celle de la vitesse de phase ω/k [22]. Les particules ressentent une force égale à $eE_0 \sin(kx)$ au passage de l'onde entraînant une oscillation de celle-ci avec une pulsation égale à $\sqrt{\frac{eE_0 k}{m}}$. On note u la vitesse de phase du mode longitudinal et v la vitesse des particules du plasma. Si ces dernières ont une vitesse v différente de plus qu'un Δv par rapport à u , alors elles « surfent » sur les pics de l'onde et ne sont pas affectées. Cependant, si elles ont une vitesse telle que $u - \Delta v \leq v \leq u + \Delta v$, alors elles sont « piégées » par l'onde et accordent leur vitesse à celle de l'onde. Cela induit une variation d'énergie et deux situations possibles :

- $v \leq u$ et l'onde perd de l'énergie au profit du milieu
- $v \geq u$ et l'onde gagne de l'énergie

Autrement dit, l'onde « aide » les particules moins rapides en leur cédant de l'énergie et vice-versa. Or, nous avons considéré une distribution de type Maxwell qui autour d'une valeur de u donnée est décroissante. Ainsi, il y a, statistiquement, plus de particules ayant une vitesse légèrement inférieure à celle de l'onde que de particules avec une vitesse supérieure. En conséquence, l'onde perd plus d'énergie qu'elle n'en gagne et nous avons bien un amortissement. Une approche plus quantique explique ce dernier par une différence de probabilité entre l'émission induite et l'absorption [23].

Si l'on essaye d'augmenter la valeur de k pour aller sonder une autre zone de la relation de dispersion, on a besoin d'un traitement numérique de la fonction W . Cela a été fait [24] et le résultat montre que le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle augmente logarithmiquement avec k . Il en découle que l'amortissement devient tellement important pour les grands k que le concept d'oscillation même doit être remis en cause. C'est tout simplement la conséquence du fait que, pour $k \gg k_D$, les phénomènes collectifs n'ont plus de sens. Il faut, à nouveau, considérer le milieu en termes de particules individuelles [25]. En effet, on ne peut plus négliger le terme de collision dans l'équation de Vlasov : il faut considérer l'équation de Boltzmann en entier. Un autre moyen d'aller chercher le taux d'amortissement à plus haute énergie est de quitter l'approche classique pour une vision plus quantique des choses. C'est ce qui est fait dans la prochaine section.

2.3.3 Aspects transverses

Passons désormais au calcul de la relation de dispersion associée aux modes transverses du plasma. Pour cela, dans les mêmes hypothèses que pour la partie longitudinale, nous évaluons l'expression (2.47) et obtenons, utilisant la même

fonction W :

$$\epsilon_T(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \left[1 - W \left(\frac{\omega}{k(T/m)^{1/2}} \right) \right] . \quad (2.68)$$

On souhaite étudier une situation dans laquelle la partie imaginaire (i.e. l'amortissement) n'est pas trop conséquente. L'étude de W indique qu'il y a deux régions satisfaisant cette condition [24] :

- $|\omega/k| \gg (T/m)^{1/2}$
- $|\omega/k| \ll (T/m)^{1/2}$

La première situation conduit à une composante transverse du tenseur diélectrique prenant la forme suivante :

$$\epsilon_T(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{k^2 T}{\omega^2 m} + \dots \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_P k_D}{\omega k} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2(T/m)^{1/2}} \right) . \quad (2.69)$$

On voit alors, d'après (2.49), que la vitesse de phase $|\omega/k|$ est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide c , ce qui corrobore bien la première hypothèse. Avec l'explication classique de l'amortissement de Landau, on devine qu'il ne devrait pas y avoir de partie imaginaire dans (2.69). En effet, aucune particule n'allant plus vite que la lumière dans le vide, il ne peut y avoir de couplage entre l'onde et les particules : leurs vitesses sont forcément trop différentes. La présence artificielle d'une partie imaginaire, cependant, vient du fait que l'on considère toujours une fonction de distribution de Maxwell, clairement non relativiste et donc inadaptée à la description de ce genre de phénomène.

La deuxième situation peut être étudiée de la même manière et mène à un résultat contradictoire avec l'hypothèse de départ. On ne peut avoir de mode de propagation dans ce cas.

Cela nous laisse avec une relation de dispersion très simple (si on néglige le terme en $k^2 T / \omega^2 m$ dans (2.69)). D'après (2.49), on a

$$\omega^2 = \omega_P^2 + k^2 c^2 . \quad (2.70)$$

En conséquence, une onde électromagnétique ayant une pulsation ω inférieure à ω_P ne pourra se propager dans un plasma non-relativiste. Elle sera simplement réfléchiée avec une certaine longueur de pénétration de l'ordre de c/ω_P .

2.3.4 Plasma classique relativiste

Avant de passer à un plasma quantique, posons nous la question de ce qu'il advient de tout le raisonnement fait ci-dessus dans le cas d'un plasma relativiste. La réponse est finalement assez simple, même si les calculs qui en résultent sont plus compliqués : il suffit essentiellement de remplacer la distribution de Maxwell-Boltzmann par son extension relativiste : la distribution de Maxwell-Jüttner,

$$F(\gamma) = \frac{\gamma^2 \beta}{\theta K_2(1/\theta)} e^{-\gamma/\theta} \quad (2.71)$$

avec β la vitesse réduite v/c , γ le facteur de Lorentz, $\theta = \frac{kT}{mc^2}$ et K_2 la fonction de Bessel modifiée du second ordre. C'est, notamment, de par celle-ci que vient la complexification des calculs.

Toujours est-il que l'on peut montrer [26] qu'il existe encore, dans ce cas, des modes qui se propagent. Les relations de dispersion s'extraient de la généralisation covariante de l'expression (2.44). Dans le cas longitudinal, on trouve une nouvelle expression pour le taux d'amortissement :

$$\gamma_L = \theta(k^2 c^2 / \omega^2 - 1) \frac{\pi}{2} \frac{\omega_P^2}{(kc)^3} \frac{e^{-\beta}}{\beta K_2(\beta)} \left(2 + \frac{2\beta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{(kc)^2}}} + \frac{\beta^2}{1 - \frac{\omega^2}{(kc)^2}} \right). \quad (2.72)$$

La fonction échelon qui apparaît nous indique que l'onde ne sera amortie que si elle possède une vitesse de phase plus faible que c . C'est logique pour les mêmes raisons que dans la sous-section précédente : aucune particule n'allant plus vite que la lumière, le couplage ne peut se faire avec une onde supraluminique. D'ailleurs, pour ce qui est du cas transverse, même dans un plasma relativiste, les modes oscillatoires ne sont pas amortis¹¹.

2.4 Plasma quantique

Tournons nous, à présent, vers un plasma quantique. La voie d'étude royale pour le monde quantique est la théorie quantique des champs. Cependant, cette théorie est définie à température nulle et, dans un plasma, la température ne peut clairement pas être négligée. Il a fallu, alors, étendre le formalisme de la théorie quantique des champs à cette notion de température. C'est ce que fait la théorie quantique des champs à température finie. Ce domaine fait l'objet d'intenses recherches depuis les années 1980. On peut citer deux livres devenus standards dans ce champ de recherche : celui de Le Bellac [27] et celui de Kapusta et Gale [28].

2.4.1 Éléments de théorie quantique des champs à température finie

Dans cette sous-section, nous allons mettre en avant les éléments de la théorie quantique des champs à température finie qui seront utiles à l'obtention de l'équivalent quantique des relations de dispersion trouvées plus haut. De plus, ce sont ces mêmes éléments qui serviront dans le prochain chapitre à évaluer la perte d'énergie dans les plasmas ultrarelativistes.

Formalisme à temps imaginaire

Dans une théorie perturbative, les objets les plus importants à calculer sont les propagateurs. Ces fonctions de Green, en théorie des champs à température finie, font intervenir une intégrale temporelle dont le contour peut être choisi de différentes manières. Matsubara décide d'utiliser un contour donnant au temps des valeurs imaginaires [29]. Cela entraîne une simplification des calculs expliquant le succès de cette approche.

11. [26] indique, cependant, qu'avec la présence d'un champ magnétique extérieur, on peut avoir des modes transverses amortis qui se propagent dans le plasma.

En théorie quantique des champs à température nulle, le propagateur d'un champ scalaire s'exprime comme suit [30] :

$$i\Delta^{T=0}(x-y) = \langle 0 | \mathcal{T} \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle . \quad (2.73)$$

A température finie, cette expression doit être remplacée par une autre incluant la fonction de partition canonique $Z = \text{tr}[\exp\{(-\beta\mathcal{H})\}]$ où $\beta = 1/T$, tenant compte de la thermodynamique du système :

$$i\Delta(x-y) = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | \mathcal{T} \{ \phi(x) \phi(y) \} | n \rangle e^{-\beta E_n} \quad (2.74)$$

avec E_n et $|n\rangle$ les valeurs et vecteurs propres de l'hamiltonien libre.

Matsubara utilise le fait que le propagateur bosonique à température finie (i.e. thermique) est périodique par rapport à un temps imaginaire $\tau = it$, $\Delta(\tau) = \Delta(\tau + \beta)$, pour l'exprimer sous la forme suivante :

$$i\Delta(x-y) = iT \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{-ik \cdot (x-y)} . \quad (2.75)$$

Dans ce propagateur thermique, l'énergie est discrète, $k_0 = 2\pi inT$. On peut, cependant, évaluer cette somme sur les fréquences dites de Matsubara grâce à la règle de sommation suivante [28] :

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(k_0 = 2\pi inT) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk_0 \frac{f(k_0) + f(-k_0)}{2} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] n_B(k_0) \end{aligned} \quad (2.76)$$

où n_B représente la distribution de Bose-Einstein :

$$n_B(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} . \quad (2.77)$$

Nous pouvons donc lire sur (2.75) la forme du propagateur thermique (dans lequel la température se cache dans la composante k_0) d'une théorie scalaire dans l'espace de Fourier :

$$\Delta(k) = \frac{1}{(2ni\pi T)^2 - \vec{k}^2 - m^2} . \quad (2.78)$$

Pour le cas d'un fermion, la procédure est similaire. Seulement, les fréquences de Matsubara sont données par $k_0 = (2n+1)i\pi T$ en conséquence du caractère anti-périodique du propagateur fermionique.

Self-énergies, approximation des boucles thermiques dures et propagateurs effectifs

Nous allons, maintenant, introduire le propagateur effectif dans le milieu. Il est défini via une équation de type Dyson-Schwinger. Comme cela sera expliqué un peu plus bas, il provient d'une resommation de la self-énergie. Tout calcul fait et dans la jauge de Coulomb, on aboutit aux expressions suivantes pour les

deux composantes du propagateur effectif du photon D^* dans le bain thermique d'électrons et de positrons :

$$D_L^*(k) = \frac{1}{|\vec{k}|^2 - \Pi_L(k)} , \quad (2.79)$$

$$D_T^*(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi_T(k)} . \quad (2.80)$$

Nous avons introduit deux fonctions Π_L et Π_T qui sont les composantes longitudinale et transverse de la self-énergie du photon (qui sera définie un peu plus loin) et que l'on appelle aussi tenseur de polarisation. Ainsi, en considérant les pôles de ces propagateurs, nous allons tomber sur les relations de dispersion dans le plasma quantique et pouvoir les comparer au cas classique.

Il est à noter que le tenseur de polarisation est relié au tenseur diélectrique introduit dans le cas d'un plasma classique. En effet, on peut montrer que [31] :

$$\epsilon_L(k_0, |\vec{k}|) = 1 - \frac{\Pi_L(k_0, |\vec{k}|)}{|\vec{k}|^2} , \quad (2.81)$$

$$\epsilon_T(k_0, |\vec{k}|) = 1 - \frac{\Pi_T(k_0, |\vec{k}|)}{k_0^2} . \quad (2.82)$$

On va revenir, ensuite, sur la notion de self-énergie. C'est une des quantités fondamentales en théorie quantique des champs. Elle permet, entre autres, de déterminer les taux d'amortissement et les relations de dispersion dans le milieu. Le diagramme de la self-énergie du photon, qui va nous intéresser par la suite, est représenté Fig. 2.3. A cause des fonctions de distribution de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac apparaissant sous les intégrales, il est souvent impossible d'établir une expression analytique de ces quantités. Cependant, cela devient possible dans deux cas limites : lorsque la température T est faible devant l'impulsion du photon k et lorsqu'au contraire, $T \gg k$. Ici, c'est la limite des hautes températures qui va nous intéresser.

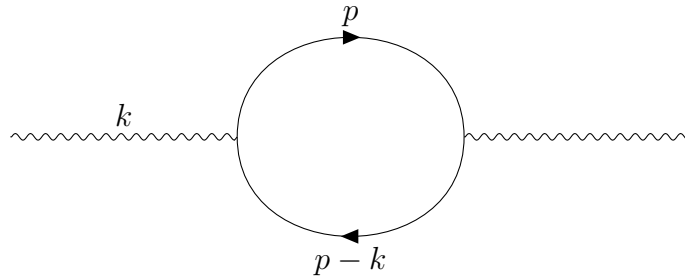


FIGURE 2.3 – Self-énergie du photon au premier ordre (en nombre de boucles).

Braaten et Pisarski ont montré en 1990 [32] qu'une réorganisation du calcul perturbatif en se limitant aux boucles thermiques dures tel que $|\vec{p}|, p_0 \geq T$ permettrait d'obtenir ces expressions simplifiées¹². En effet, les différents calculs du taux d'amortissement des modes longitudinaux du gluon menaient à des résultats

12. Ils ont, en fait, pu démontrer que considérer ces boucles dures était équivalent à l'approximation de haute température.

différents en norme et en signe pour des jagues différentes. Or, une telle observable devrait respecter l'invariance de jauge. Braaten et Pisarski ont mis en avant le fait que ces calculs étaient incomplets : des diagrammes contenant plusieurs boucles contribuaient au même ordre en la constance de couplage g . Il est nécessaire de resommer tous ces diagrammes dans des propagateurs et des vertex effectifs. Il est montré dans [32] que, cela étant fait, on restaure l'invariance de jauge pour l'amortissement du gluon mais on évoquera cela un peu plus tard. La terminologie « boucle thermique dure »¹³ vient du fait que ce sont les boucles dans lesquelles circulent un quadrivecteur énergie-impulsion dur qui sont du même ordre de grandeur que le diagramme en arbre vis-à-vis de la constante de couplage. Plus particulièrement, il s'avère que ces corrections dues aux boucles d'ordres supérieurs sont environ égales à $g^2 T^2 / P^2$ fois l'amplitude en arbre correspondante avec P le quadrivecteur caractéristique des lignes extérieures du diagramme. Donc, on voit que si P est dur (autrement dit, de l'ordre de T), ces corrections vont être pénalisées par un facteur g^2 si l'on suppose un couplage faible. Cependant, si P est mou (de l'ordre de gT), alors $g^2 T^2 / P^2$ devient de l'ordre de 1 et les diagrammes HTL doivent être pris en compte. In fine, l'artillerie HTL doit être mise en place lorsque l'on a des particules molles par rapport à la température et la contribution à prendre en compte est celle des boucles dures. Dans la figure 2.3 par exemple, les corrections HTL sont à prendre en compte lorsque le photon est mou, de l'ordre de gT , et elles viennent de la partie dure, de l'ordre de T de la boucle.

Ainsi, après de longs calculs, il est possible d'exprimer les deux seules composantes indépendantes de la self-énergie du photon ou tenseur de polarisation dans un plasma constitué d'électrons, de positrons et de photons et tenant compte de ces diagrammes HTL :

$$\Pi_L(k_0, |\vec{k}|) = -3m_\gamma^2 \left(1 - \frac{k_0}{2|\vec{k}|} \ln \frac{k_0 + |\vec{k}|}{k_0 - |\vec{k}|} \right), \quad (2.83)$$

$$\Pi_T(k_0, |\vec{k}|) = \frac{3}{2} m_\gamma^2 \frac{k_0^2}{|\vec{k}|^2} \left[1 - \left(1 - \frac{k_0^2}{|\vec{k}|^2} \right) \frac{k_0}{2|\vec{k}| \ln \frac{k_0 + |\vec{k}|}{k_0 - |\vec{k}|}} \right]. \quad (2.84)$$

On a introduit dans ces expressions la masse thermique du photon $m_\gamma = eT/3$ qui est une conséquence de l'interaction entre les électrons et les positrons du milieu avec le photon.

2.4.2 Aspects longitudinaux

Pour obtenir la relation de dispersion des modes longitudinaux, il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$D_L^{-1}(k) = 0. \quad (2.85)$$

En effet, au vu du lien entre les composantes du tenseur de polarisation Π et celles du tenseur diélectrique $\bar{\epsilon}$ (2.81), on voit aisément que l'équation précédente équivaut à son pendant classique (2.48).

13. On parlera de HTL pour Hard Thermal Loop.

En utilisant (2.83), on obtient la relation de dispersion la plus générale¹⁴

$$k^2 + 3m_\gamma^2 \left(1 - \frac{\omega}{2k} \ln \frac{\omega + k}{\omega - k} \right) = 0 . \quad (2.86)$$

Bien que cette équation ne puisse être simplifiée analytiquement, son comportement pour $k \rightarrow 0$ et pour $k \rightarrow \infty$ peut en être extrait. En effet, dans cette première limite, un simple développement limité nous indique que

$$\omega_L(k \rightarrow 0) = m_\gamma + \frac{3}{10} \frac{k^2}{m_\gamma} . \quad (2.87)$$

De même, on trouve pour la limite à grand k :

$$\omega_L(k \rightarrow \infty) = k . \quad (2.88)$$

Il est intéressant de noter que l'on a $\omega_L \geq k$ dans ces deux limites. La partie imaginaire ne contribue pas et il n'y a pas d'amortissement de type Landau dans ces deux cas. Par contre, dans le cas général, on voit, avec les logarithmes présents dans la polarisation, que l'on aura un amortissement Landau pour les modes de type espace. De plus, la relation à $k \rightarrow 0$ décrit une particule non-relativiste de masse m_γ pouvant être associée au plasmon. Pour une identification plus claire, la masse thermique du photon m_γ est égale, dans les unités hautes énergies, à la pulsation de l'oscillation plasma ω_P .

2.4.3 Aspects transverses

Passons aux aspects transverses et répétons le même schéma que pour ceux longitudinaux en résolvant, maintenant, l'équation

$$D_T^{-1}(k) = 0 . \quad (2.89)$$

Grâce à (2.84), on déduit une relation de dispersion faisant intervenir les mêmes ingrédients que dans la sous-section précédente :

$$\omega^2 - k^2 - \frac{3}{2} m_\gamma^2 \frac{\omega^2}{k^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) \frac{\omega}{2k} \ln \frac{\omega + k}{\omega - k} \right] . \quad (2.90)$$

Effectuant ensuite le même développement limité que précédemment, on obtient les limites à petit et à grand vecteur d'onde de cette relation :

$$\omega_T(k \rightarrow 0) = m_\gamma + \frac{3}{5} \frac{k^2}{m_\gamma} , \quad (2.91)$$

$$\omega_T(k \rightarrow \infty) = k . \quad (2.92)$$

Pour ce qui est des grands k , à l'instar de l'étude longitudinale, on retrouve la relation de dispersion d'un photon dans le vide $\omega = k$. Cela est tout à fait logique dans le sens où cette limite $k \rightarrow \infty$ correspond à des distances quasi-nulles pour lesquelles la description en terme de milieu perd toute signification. A grandes distances, par contre, on retrouve une relation très similaire à celle obtenue dans le cas longitudinal, avec absence d'amortissement.

14. dans l'hypothèse de haute température bien sûr.

Les relations mises en avant dans les deux dernières sous-sections sont valables pour des photons évoluant dans un plasma QED. Cependant, les modes gluoniques se propageant dans un PQG vérifient les mêmes relations. Il faut simplement faire la substitution suivante :

$$m_\gamma \longrightarrow m_g = \frac{g^2 T^2}{3} \left(1 + \frac{N_f}{6} \right) . \quad (2.93)$$

Il est intéressant de noter que la prise en compte de quatre diagrammes pour le calcul de la self-énergie du gluon (figure (2.4)) au premier ordre (contre un seul pour celle du photon) induit uniquement ce changement de masse.

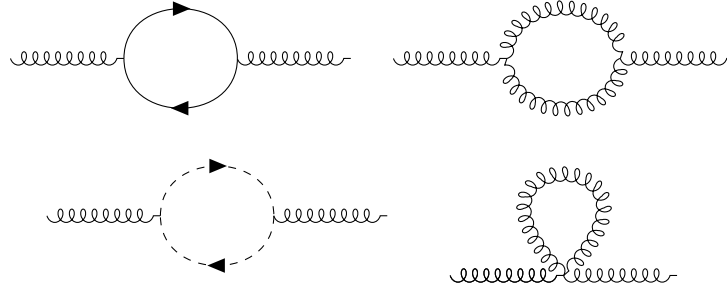


FIGURE 2.4 – Diagrammes contribuant à la self-énergie du gluon au plus petit ordre

On a, pour l'instant, uniquement des parties réelles pour ces relations de dispersion (aussi bien dans le cas transverse que longitudinal). Cela est dû au fait que l'amortissement apparaît seulement si l'on regarde l'ordre supérieur dans le calcul de la self-énergie.

2.4.4 Taux d'amortissement dans un plasma quantique

Premièrement, plaçons nous dans un plasma QED (composée d'électrons, de positrons et de photons). Le calcul du taux d'amortissement pour un photon dur a été réalisé par Thoma en 1994 [33]. On considère que l'amortissement vient, au plus petit ordre non-nul pour ce dernier, des diffusions Compton et des créations de paires dans le milieu. De plus, Thoma considère un photon réel donc transverse et utilise la polarisation transverse Π_T .

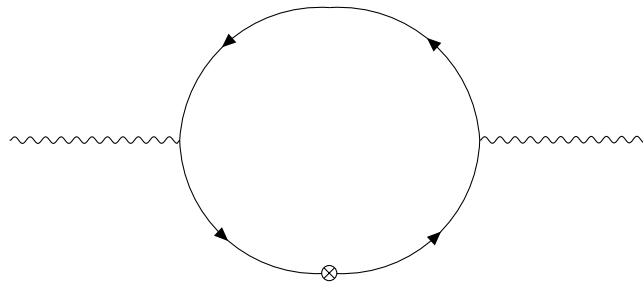


FIGURE 2.5 – Self-énergie du photon au deuxième ordre, le propagateur marqué d'une croix est un propagateur effectif

La méthode de calcul est basée sur la prescription de Braaten-Yuan [34]. Cette dernière consiste à décomposer le taux d'amortissement vis-à-vis du fermion

échangé dans les processus considérés. Lorsque celui-ci a une impulsion suffisamment faible, on évalue le taux via la partie imaginaire de la relation de dispersion ; donc, via la self-énergie au deuxième ordre (la partie imaginaire du premier ordre étant nulle) dans l'approximation HTL. Cela consiste simplement à remplacer l'un des deux propagateurs de la boucle fermionique par un propagateur effectif HTL (figure 2.5). Et quand son impulsion est grande, on peut calculer le taux à partir des éléments de matrices usuelles en pondérant l'espace des phases avec des distributions de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac. In fine, le taux d'amortissement est donné par

$$\gamma_T = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha_{QED}^2 T^2}{k} \ln \frac{0.3090p}{\alpha_{QED} T} . \quad (2.94)$$

On retiendra, pour la suite du propos, le comportement en $1/k$.

Maintenant, passons au cas QCD. L'utilisation de la technique HTL seule permet uniquement d'évaluer le taux d'amortissement d'un gluon au repos. L'approche HTL a d'ailleurs été couronnée de succès grâce, entre autres, au fait qu'elle a résolu les problèmes liés à l'évaluation de cette quantité¹⁵. Braaten et Pisarski [35] montrent que les plasmons et les gluons transverses ont, au repos, le même taux d'amortissement :

$$\gamma_{L/T} = 6.63538 \frac{g^2 T}{8\pi} . \quad (2.95)$$

On retient, ici, le caractère positif de ce taux qui permet d'assurer, au moins au premier ordre de la théorie des perturbations, la stabilité du PQG. De plus, le calcul de ce taux permet d'appréhender les phénomènes physiques à l'origine de l'amortissement. En effet, la constante 6.63538 vient de l'intégration numérique d'une fonction faisant intervenir ce que l'on appelle les densités spectrales (longitudinale et transverse) qui sont directement liées à la partie imaginaire des polarisations. Une densité spectrale possède la forme générale suivante :

$$\rho_{L/T}(\omega, k) = \frac{Z_{L/T}(k)}{2\omega_{L/T}(k)} [\delta(\omega - \omega_{L/T}(k)) - \delta(\omega + \omega_{L/T}(k))] + \beta_{L/T}(\omega, k) \theta(k^2 - \omega^2) . \quad (2.96)$$

Les deux fonctions δ et leur facteur correspondent à la propagation des gluons transverses ou des gluons longitudinaux (plasmons) avec une masse thermique m_g provenant d'un pôle dans la self-énergie tandis que la fonction échelon et son coefficient impliquent une coupure dans la fonction lorsque $|\omega| \leq k$. Cette dernière a pour origine physique l'amortissement de Landau (c'est-à-dire l'absorption ou l'émission d'un gluon de genre espace par un quark ou gluon dur). Ainsi, un produit de ces densités engendre différents termes auxquels on peut associer des mécanismes physiques :

- produit de la propagation d'un gluon avec une coupure de Landau : diffusion deux vers deux dans laquelle un gluon mou diffuse sur un quark ou gluon dur. La particule dure emporte l'impulsion du gluon mou qui est alors au repos.
- produit d'une coupure avec une autre : processus inélastique deux vers trois dans lequel deux particules dures échangent un gluon mou. Les deux particules dures sont réabsorbées dans le bain thermique laissant une quantité d'énergie de l'ordre de m_g donnant naissance à un gluon au repos.

15. notamment, des difficultés à avoir des résultats invariants de jauge.

- les produits propagation-propagation correspondent à des processus deux vers un interdits par la cinématique et n'apportent donc aucune contribution.

Notons que, via la fonction échelon, l'amortissement de type Landau n'apparaît que lorsque la vitesse de phase de l'onde est inférieure à c ce qui corrobore le propos sur les modes supraluminiques non amortis dans le cas classique.

L'extension à des particules en mouvement est un peu plus périlleuse, même dans le cadre HTL. Il est nécessaire d'introduire une masse magnétique de l'ordre de g^2T en plus de la masse thermique du gluon gT . Cela donne lieu à un taux d'amortissement ayant la forme suivante [36] :

$$\gamma = \frac{3g^2T}{8\pi} \ln \frac{m_g^2}{m_{mag}^2} = \frac{3g^2T}{4\pi} \ln \frac{1}{g} . \quad (2.97)$$

Ce qui est intéressant réside dans le caractère constant de ce taux, aussi bien pour un gluon au repos qu'en mouvement. En effet, des tentatives d'inclure « à la main » un taux d'amortissement en QCD dans l'indice de réfraction du milieu ont été effectuées [37] avec la paramétrisation suivante :

$$n(\omega)^2 = 1 - \frac{m^2}{\omega^2} + 4i \frac{\gamma}{\omega} . \quad (2.98)$$

Ici, la masse introduite est la masse thermique (équivalent la pulsation plasma en physique classique). On voit donc que la dépendance en $1/k$ du taux de la QED est un frein notoire à un amortissement notable. En effet, pour les hautes énergies, on se situe au voisinage de $\omega = k$. Ainsi, le taux d'amortissement apparaît comme une correction en $[E]^{-2}$ dans le cas QED alors que, pour la QCD, celle-ci est seulement en $[E]^{-1}$. Nous aurons l'occasion de revenir sur cela lors de la problématisation finale de ce travail de thèse en fin de chapitre 3.

Conclusion du chapitre 2

Nous avons, dans ce chapitre, mis en exergue les grands concepts associés à la physique des plasmas et, notamment, aux phénomènes de propagations et d'amortissements pouvant y prendre place. Après avoir introduit les grandeurs fondamentales du plasma que sont la longueur de Debye λ_D et la pulsation plasma ω_P , nous avons mis en avant l'importance du phénomène d'amortissement dans le cadre d'un milieu opaque. Pour bien comprendre cette notion, nous l'avons étudiée dans un plasma classique puis dans un plasma quantique. A l'aide du tenseur diélectrique, objet contenant toute l'information nécessaire sur les phénomènes électromagnétiques pouvant se produire à l'intérieur du plasma, nous avons déterminé les relations de dispersion dans un plasma classique (électromagnétique en l'occurrence). La partie réelle de ces relations donne une information sur les modes pouvant se propager dans le milieu tandis que la partie imaginaire quantifie, quant à elle, l'amortissement de ces mêmes modes. Ainsi, nous avons pu voir que, dans le cas classique, les modes longitudinaux étaient amortis par l'interaction résonnante pouvant avoir lieu avec les particules du milieu ayant une vitesse proche de la vitesse de phase de l'onde. C'est l'amortissement Landau. Les modes transverses, quant à eux, ne sont pas amortis car leur vitesse de phase est superluminique. Pour ce qui est du plasma quantique, nous avons pu regarder les choses du point de vue de la QED (plasma d'électrons, de positrons et de photons) et de la QCD (PQG). Dans le premier cas, nous avons retrouvé des résultats similaires au cas classique, tout en notant que l'amortissement était un effet apparaissant à l'ordre supérieur en la constante de couplage par rapport à la propagation. Pour la QCD, nous avons trouvé un taux d'amortissement constant par rapport à l'énergie.

CHAPITRE 3

DE LA PERTE D'ÉNERGIE

La conclusion du chapitre 1 indique que, pour décrire le plasma de quarks et de gluons, nous devons maîtriser le mieux possible les interactions y prenant place. Un aspect particulier de cette quête réside dans la compréhension des interactions jalonnant la propagation d'une sonde dure (un quark lourd typiquement). On rappelle, en effet, que ces sondes, créées dans la première phase de la collision entre deux ions lourds (noyaux de plomb par exemple), vont « assister » à toute l'évolution du PQG en le traversant et en interagissant avec lui. Ainsi, étudier les produits de désintégration ou d'hadronisation venant des ces particules sondes sera forcément instructif vis-à-vis du PQG et de l'interaction forte de manière générale.

Aussi, pour faire un pas notable dans le sens de cette compréhension, nous devons connaître la manière dont les échanges énergétiques se font entre la particule sonde et le milieu. Autrement dit, nous devons maîtriser la perte d'énergie de la première dans le second. Ce travail de thèse s'inscrit dans la problématique générale suivante : quelle est la quantité d'énergie perdue par une particule donnée lorsqu'elle traverse une portion donnée de PQG ? Le but de ce chapitre est de donner au lecteur un aperçu rapide de la multitude de travaux ayant eu trait à cette question. Il sera, cependant, compliqué de rendre honneur à tous les physiciens concernés par cette activité de recherche et nous conseillons, à cet égard, les chapitres 2 et 3 de l'HDR de Pol-Bernard Gossiaux [38] qui étudient de manière beaucoup plus exhaustive les différentes approches traitant de la perte d'énergie.

Sommaire

3.1	Problématique du chapitre	49
3.2	Perte d'énergie collisionnelle	50
3.2.1	Dans la matière ordinaire	50
3.2.2	Dans un plasma	53
3.2.3	Passage à la QCD pour un plasma	57
3.3	Perte d'énergie radiative	58
3.3.1	Phénomène de Bremsstrahlung en QED	59
3.3.2	Approche de Gunion-Bertsch	60
3.3.3	Apportons un peu de cohérence à tout cela...	62
3.4	Hypothèse vis-à-vis d'un effet tenant compte du caractère absorbant du milieu	68

3.1 Problématique du chapitre

La première chose à faire consiste à définir ce dont nous allons parler tout au long de ce chapitre : la perte d'énergie. Si une particule se propage dans le vide sans subir d'action de la part du monde extérieur, elle se propagera *ad vitam aeternam*¹. Cependant, dès lors qu'elle va rencontrer de la matière, peu importe la forme sous laquelle celle-ci se trouve, elle va commencer à interagir. Interagir est une autre manière de dire « échanger de l'énergie ». La perte d'énergie désigne, tout simplement, les conséquences de cette interaction entre notre particule initiale et le milieu. D'emblée, il est à noter que le terme « perte » est quelque peu un abus de langage conduisant à penser que les échanges ne peuvent se faire que dans le sens de la particule vers le milieu. En effet, nous pouvons très bien imaginer une interaction entre un milieu et une particule conduisant à une augmentation de l'énergie de cette dernière, i.e. un gain d'énergie. Malgré cela, nous ne chercherons pas à corriger cet abus et parlerons de perte d'énergie étant donné que le cas le plus courant est celui d'un transfert d'énergie de la particule au milieu.

Quand on parle d'une perte d'énergie, un certain nombre de choses sont à spécifier. La première d'entre elles est l'interaction que l'on considère. Typiquement, on peut interagir et, par suite, perdre de l'énergie par interaction électromagnétique ou par interaction forte. La première voie sera qualifiée de perte d'énergie QED et la seconde de perte d'énergie QCD. Plusieurs différences essentielles impliquent une complexité supérieure dans le cas QCD. La plus notable réside dans le fait que le gluon peut interagir avec lui-même. De plus, la constante de couplage de l'interaction forte est plus proche de 1 que ne l'est celle de l'interaction électromagnétique conduisant à l'apparition de subtilités techniques importantes dans le traitement perturbatif de ces processus. Enfin, les quarks et les gluons sont voués à se hadroniser² à un moment ou à un autre et ce mécanisme non-perturbatif est encore mal compris à l'heure actuelle. Heureusement, nombre de caractéristiques de la perte d'énergie QCD peuvent se déduire, plus ou moins heuristiquement, depuis les résultats de la QED. Aussi, nous mettrons l'accent sur les formules de perte d'énergie de la QED avant de se diriger vers les résultats correspondants en QCD.

Le deuxième aspect qui va particulariser une perte d'énergie est le milieu traversé. Nous séparerons l'étude en deux cas. Tout d'abord, pour des questions de logique historique, nous aborderons la matière condensée³. Ensuite, nous dirigerons vers le type de milieu qui nous intéresse particulièrement, à savoir le plasma.

Troisième caractéristique : le type de particule qui traversera le milieu. Des effets particuliers peuvent apparaître selon que cette particule est massive ou légère. Pour la QED, cela consiste à savoir si l'on considère un électron ou un muon. Dans le cas de la QCD, des différences pourront s'observer entre le comportement des quarks légers (u, d, s) et des gluons et celui des quarks lourds (c et b principalement). Dans la suite de ce chapitre, comme nous considérerons exclusivement des particules ultrarelativistes, la masse jouera un rôle très secondaire.

1. Et ce en vertu du principe d'inertie de Newton.

2. Alors qu'un électron traversant un milieu pourra être détecté tel quel.

3. ou matière usuelle ou hadronique.

Enfin, le dernier attribut à renseigner réside dans le mécanisme associé à la perte d'énergie. La Nature peut parfois paraître complexe mais elle n'a conçu que deux voies pour perdre de l'énergie. Premièrement, une particule peut perdre son énergie dans un milieu par un mécanisme collisionnel. En traversant, elle va diffuser sur les différentes particules composant le milieu. Ces diffusions vont générer des déflexions angulaires et un changement de l'impulsion-énergie pour la particule sonde. Et deuxièmement, nous avons un mécanisme dit radiatif. Celui-ci est une extension du premier dans lequel la diffusion s'accompagne de l'émission d'un quantum d'énergie⁴. Ce mécanisme est communément qualifié de rayonnement de freinage et est bien connu de la mécanique classique⁵. C'est cette distinction de mécanisme qu'on utilisera comme premier moyen de classification des pertes d'énergie. En effet, la prochaine section sera consacrée aux pertes d'énergies collisionnelles et celle d'après aux radiatives.

Nous terminerons cette introduction en spécifiant certaines des notations qui nous accompagneront tout au long de ce chapitre. Nous allons considérer une particule sonde caractérisée par les propriétés suivantes :

- une masse M que nous ferons souvent tendre vers 0,
- une charge e ou g ,
- une énergie E qui sera très souvent prise comme l'échelle la plus grande du problème, i.e. $E \rightarrow \infty$,
- une impulsion $\vec{P} = M\gamma\vec{V}$, avec γ le facteur de Lorentz de la particule et $\vec{V}$ sa vitesse ($\vec{\beta}$ est la vitesse réduite).

Les particules du milieu seront, quant à elles, caractérisées par les grandeurs suivantes :

- une masse m systématiquement négligée devant les autres paramètres du système (sauf contre-indication),
- une charge e ou g ,
- une énergie ϵ ,
- une impulsion p .

De plus, P indiqué sans flèche représentera le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule considéré (ici $P = (E, \vec{P})$).

3.2 Perte d'énergie collisionnelle

3.2.1 Dans la matière ordinaire

Le premier champ d'activité ayant mené à la question de perte d'énergie en physique des particules est la radioactivité ; plus précisément la radioprotection. En effet, la question était, par exemple, de savoir quel volume de plomb mettre autour d'une source radioactive pour que les particules émises soient stoppées par celui-ci. Ainsi, le milieu considéré était de la matière ordinaire, autrement dit des atomes. Dès lors, une particule incidente peut interagir soit avec les électrons soit avec les noyaux des atomes. Les deux interactions sont différentes. Les électrons sont la cause principale de la perte d'énergie collisionnelle du fait de leur faible masse. Les noyaux, quant à eux, sont responsables des changements de direction

4. photon ou gluon selon l'interaction considérée.

5. Toute charge accélérée rayonne d'après l'électromagnétisme de Maxwell.

de la particule⁶.

Premiers travaux de Bohr, Bethe et Bloch

Le premier à avoir étudié ce phénomène de propagation dans un milieu ordinaire est Bohr [39, 40]. Ce dernier considère l'interaction entre une particule incidente et les électrons du milieu. Il utilise une approche dite des collisions indépendantes consistant à prendre chaque interaction entre la particule incidente et une particule du milieu comme étant décorrelée des autres. Il suffit donc de connaître la perte d'énergie causée par une particule du milieu et de sommer sur toutes ces particules.

Bohr faisant ce premier calcul à une époque où la mécanique quantique n'en est qu'à ses balbutiements, il adopte une approche classique. La variation d'énergie due à une particule du milieu en fonction du paramètre d'impact b est donnée par [41] :

$$\Delta E(b) = \frac{2z^2(\alpha_{QED}\hbar c)^2}{mV^2b^2} . \quad (3.1)$$

Ici, z est la charge de la particule sonde et on notera Z la charge du noyau atomique. La perte d'énergie est ensuite trouvée en intégrant $\Delta E(b)$ sur b . Pour ce faire, il faut trouver les bornes minimale et maximale de ce paramètre d'impact. En effet, intégrer naïvement de 0 à l'infini mène à une divergence⁷. La borne inférieure b_{min} correspond au transfert d'énergie le plus important ; ce dernier étant donné par la cinématique de la réaction : $b_{min} = \frac{z\alpha_{QED}\hbar c}{V} \sqrt{\frac{2}{m\Delta E_{max}}}$ avec⁸

$$\Delta E_{max} = 2m\gamma^2V^2 . \quad (3.2)$$

L'apparition d'une borne supérieure peut être vue comme une conséquence de l'écrantage existant à grandes distances. Bohr choisit de prendre pour borne supérieure b_{max} une distance telle que le temps d'interaction du champ électrique produit par la particule incidente soit supérieur à la période de révolution de l'électron considéré : $b_{max} = \frac{\gamma V}{\omega_{rev}}$. Ce choix de b_{max} est justifié par le fait que si le paramètre d'impact est inférieur alors l'électron avec lequel collisionne la particule incidente peut être considéré comme libre. Dans le cas contraire, l'interaction durera sur plusieurs rotations de l'électron autour de son noyau et l'influence de la particule sonde sera adiabatique et n'entraînera pas de transfert d'énergie [41]. Ainsi, on peut calculer la perte d'énergie pour une longueur donnée de milieu traversé :

$$\frac{dE_{coll}}{dz} = 2\pi n_e \int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta E(b) b db , \quad (3.3)$$

n_e étant la densité volumique d'électrons⁹ dans la matière envisagée. Une fois l'intégration faite, Bohr trouve le résultat suivant :

$$\frac{dE_{coll}}{dz} = 4\pi n_e \frac{z^2(\alpha_{QED}\hbar c)^2}{mc^2\beta^2} \left[\ln \left(\frac{1.123mc^2\beta^3\gamma^2}{z\alpha_{QED}\hbar <\omega_{rev}>_Z} \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (3.4)$$

6. Le noyau, étant très lourd, peut être considéré comme statique conduisant à une perte d'énergie nulle mais à un changement du vecteur impulsion.

7. C'est le même type de raisonnement que celui conduisant à l'introduction de la longueur de Debye pour un plasma dans le chapitre 2.

8. Dans l'hypothèse où $E \ll \frac{M^2}{2m}$.

9. $n_e = n_{atomique}Z$ avec $n_{atomique}$ la densité atomique de la matière traversée.

avec $\langle \omega_{rev} \rangle_Z$ la fréquence orbitale moyenne des atomes du milieu. On retiendra surtout de (3.4) le comportement en $\ln(\gamma^2)$, venant de la dépendance en γ des bornes d'intégration.

Bethe fut à l'initiative du traitement quantique de la perte d'énergie collisionnelle [42]. Une des différences principales avec le cas classique de Bohr réside dans le fait que la distance minimale d'approche b_{min} ne doit pas devenir plus petite que la longueur d'onde de de Broglie. En effet, dans le cas contraire, le paquet d'onde incident ne serait pas résolu et il n'y aurait pas d'interaction. Ainsi, on substitue à b_{min} , dans (3.3), $\lambda = \frac{h}{|P|}$ ¹⁰. Finalement, nous arrivons à la formule tenant compte des effets quantiques suivante :

$$\frac{dE_{coll}}{dz} = 4\pi n_e \frac{z^2 (\alpha_{QED} \hbar c)^2}{mc^2 \beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta E_{max}}{I_Z^2} \right) - \beta^2 \right]. \quad (3.5)$$

L'énergie moyenne d'excitation I_Z remplace, maintenant, la fréquence orbitale moyenne et est la quantité la plus importante à déterminer pour le calcul de la perte d'énergie. De plus, la longueur d'onde de de Broglie étant généralement plus grande que b_{min} , la formule de Bohr avait tendance à surestimer la perte d'énergie collisionnelle. Cependant, il est à noter que le comportement en $\ln(\gamma^2)$ persiste. Cette formule est appelé formule de Bethe ou parfois de Bethe-Bloch¹¹. Enfin, notons que la notion de perte d'énergie moyenne est sujette à des fluctuations qui ne seront pas évoquées ici.

Inclusion des effets de milieu

Inclure les effets de milieu est une manière de dire que l'on va revenir sur l'hypothèse des collisions indépendantes. En effet, les formules de Bohr et de Bethe ayant du mal à s'accorder aux expériences pour des énergies de particule incidente trop importantes ou bien pour des milieux trop denses, vers la fin des années 1930, certains physiciens comprirent que pour des paramètres d'impact suffisamment grands, les effets de polarisation du milieu ne pouvaient être négligés. Un électron du milieu situé à une distance importante de la particule sonde va sentir le champ électrique de celle-ci mais aussi celui créé par les autres électrons du milieu l'entourant. Cet effet (qui est une sorte d'écrantage) se ressent d'autant plus que l'énergie de la particule sonde est grande ou que le milieu est dense. Finalement, il serait nécessaire de séparer le calcul de la perte d'énergie en deux parties. Jusqu'à un certain paramètre d'impact, de l'ordre d'une fraction de distance inter-atomique, nous pouvons continuer d'utiliser les approches de Bohr ou de Bethe. Mais, au delà de ce paramètre d'impact, il faut prendre en compte les interactions ayant lieu entre les particules du milieu.

C'est Fermi [44] qui, le premier, par un calcul d'électrodynamique classique, va évaluer la contribution de ces collisions à grands paramètres d'impact. Son approche est basée sur une description du milieu via la permittivité diélectrique suivante :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + i\omega\Gamma - \omega_0^2} \quad (3.6)$$

10. Le calcul étant fait dans le référentiel du centre de masse.

11. Bloch a affiné un peu plus la prise en compte de effets quantiques faite par Bethe lui valant l'association de son nom à cette formule [43].

avec ω_0 la fréquence de résonance atomique et ω_P la fréquence plasma définie dans le chapitre précédent (2.15). L'étude du champ électrique résultant dans un tel milieu traversé par une particule sonde nous apprend que celui-ci, à partir d'un facteur de Lorentz critique dépendant de ω_0 et de ω_P , ne peut se développer à de grandes distances transverses, expliquant ainsi la réduction de la perte d'énergie collisionnelle dans un milieu dense ou pour des particules ultrarelativistes.

En 1960, Landau [45] reprend l'approche de Fermi et la généralise à une permittivité diélectrique quelconque. Il conserve, notamment, la distinction entre les transferts d'impulsion supérieurs à une certaine échelle q_0 traités « à la Bohr » et les transferts d'impulsion inférieurs à q_0 évalués, quant à eux, via le travail effectué par la force de Lorentz induite sur la particule incidente. Il aboutit à la relation suivante :

$$\frac{dE_{coll}}{dz} = 4\pi n_e \frac{z^2 \alpha_{QED}^2 \hbar c^2}{mc^2 \beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta E_{max}}{I_Z^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]. \quad (3.7)$$

Dans cette formule, l'énergie d'excitation I_Z ainsi que la correction induite par la densité finie δ peuvent, chacune, s'exprimer grâce à la permittivité :

$$\ln I_Z = \frac{2}{\pi \omega_P^2} \int_0^\infty \omega \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{\epsilon(\omega)} \right] \ln(\hbar \omega) d\omega \quad (3.8)$$

$$\delta = \frac{2}{\pi \omega_P^2} \int_0^\infty \omega \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{\epsilon(\omega)} \right] \ln \left(1 + \frac{\xi^2}{\omega^2} \right) d\omega - \frac{\pi \xi^2}{2\gamma^2}, \quad (3.9)$$

ξ étant un paramètre intervenant dans le calcul de Landau via la relation implicite $\beta^2 \epsilon(i\xi) = 1$. Ainsi, on comprend que l'effet de densité est important lorsque l'on considère les hautes énergies.

Ces traitements classique (Fermi) et semi-classique (Landau) ont été corroborés par des descriptions plus quantiques [46, 47]. De plus, de nombreux travaux ont tenté d'établir des relations semi-empiriques pour la correction de densité finie δ . Ainsi, l'expression (3.7) reste une approximation plus que correcte de la perte d'énergie collisionnelle dans la matière condensée.

3.2.2 Dans un plasma

Extension de la méthode de calcul de la perte d'énergie

Nous passons, maintenant, de la matière ordinaire à un plasma électronique. Le plasma est un état de la matière pouvant apparaître quand la température est élevée et qu'elle permet l'extraction des électrons de leurs orbitales atomiques. Lorsque l'énergie cinétique moyenne de ces électrons devient supérieure à l'énergie potentielle moyenne, on parle de plasmas chauds¹². Dans un plasma, plusieurs choses diffèrent par rapport à la matière ordinaire. Par exemple, la structure de résonance atomique disparaît. Ainsi, l'expression de la permittivité diélectrique (3.6) se simplifie. De plus, on observe une richesse accrue concernant les modes collectifs (plasmons) et ces derniers peuvent, alors, se propager dans le plasma. C'est d'ailleurs l'objet central du chapitre précédent.

12. En mécanique quantique, on peut aussi considérer des plasmas dits froids mais cela ne sera pas évoqué ici.

Nous nous plaçons, à présent, dans un plasma chaud de densité volumique n et de température T . Les échelles de longueur d'importance sont la distance moyenne entre deux particules chargées $r_0 \propto n^{-1/3}$ et la longueur de Debye λ_D définie par $\lambda_D^{-2} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 T}$. Cette longueur d'écrantage est introduite en détail dans la section 2.1.2. Dans un plasma, cette longueur décrit une frontière entre phénomènes collectifs et individuels. En effet, pour des longueurs plus grandes que la longueur de Debye, on peut montrer que le plasma a un comportement collectif en réponse aux perturbations. D'un autre côté, pour les petites longueurs, l'atténuation de ces modes collectifs devenant du même ordre de grandeur que leur énergie elle-même, il est plus logique de raisonner en terme de particules individuelles. Au total, on retrouve quand même le raisonnement de Fermi ou de Landau sur la décomposition en deux contributions aux interactions.

La stratégie du calcul de la perte d'énergie collisionnelle dans le cas d'un plasma chaud est donc une simple extension de celle utilisée pour la matière ordinaire. Celle-ci a été réalisée au début des années 1990 par Braaten et Yuan [34] et ce dans le cadre de la théorie quantique des champs. D'un côté, ils évaluent la contribution des interactions à courte distance (avec un paramètre d'impact inférieur à r_0) comme si il n'y avait pas de milieu, i.e. dans l'hypothèse des collisions indépendantes. D'un autre côté, ils calculent, grâce à un propagateur de photon modifié pour tenir compte des effets du plasma, la contribution des collisions à grande distance (avec un paramètre d'impact supérieur à λ_D). Ensuite, il ne reste plus qu'à raccorder les deux quantités. Quand bien même les deux régions ne se recoupent pas, en pratique, Braaten et Yuan ont montré qu'en prenant une échelle de raccord intermédiaire, le résultat pour bon nombre d'observable ne dépendait pas de l'échelle en question ; assurant ainsi la solidité de leur méthode.

Dans la suite de cette sous-section, nous allons regarder plus en avant, l'application de la méthode de Braaten et Yuan à deux types de plasmas chauds : non relativiste et ultrarelativiste. La distinction entre ces deux catégories de plasma réside dans la comparaison entre l'énergie de masse et l'énergie cinétique moyenne des particules chargées. Lorsque la seconde excède notablement la première, nous parlerons de plasma ultrarelativiste et dans le cas contraire de plasma non relativiste.

Enfin, nous nous placerons désormais dans le système d'unités naturelles où $\hbar = 1$, $c = 1$, $\epsilon_0 = 1$ et $k_B = 1$.

Plasma non relativiste

Comme indiqué plus haut, nous allons distinguer la contribution des collisions à grands paramètres d'impact (que l'on appellera contribution collective) et celle des collisions proches.

Le calcul de la contribution collective repose sur une approche de type Vlasov couplée aux équations de Maxwell, comme nous avons pu en voir dans le chapitre 2. Thoma et Gyulassy ont montré [48], avec un formalisme classique, que l'on pouvait relier la perte d'énergie aux composantes longitudinale et transverse du

tenseur diélectrique de la manière suivante :

$$\frac{dE_{coll}^{far}}{dz} = -\alpha_{QED} \operatorname{Im} \left(\int \frac{PdP d\cos\theta}{\pi \cos\theta} \left[\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_L(P)} + \frac{\sin^2\theta}{\epsilon_T(P) - c^2/(V \cos\theta)^2} \right] \right) . \quad (3.10)$$

La partie imaginaire de l'inverse de ϵ_L et ϵ_T est relié aux densités spectrales introduites en fin de chapitre 2 (2.96). On voit aussi dans cette formule que l'on peut dissocier une contribution longitudinale, correspondant au premier terme, d'une contribution transverse, deuxième terme. Si l'on remplace ϵ_L par son expression dépendant de la fonction de dispersion du plasma W , on arrive à évaluer la partie longitudinale de la perte d'énergie collisionnelle :

$$\frac{dE_{coll,L}^{far}}{dz} = \frac{\alpha_{QED} k_D^2}{2\pi} f_L \left(\frac{V}{\sqrt{T/m}} \right) . \quad (3.11)$$

La quantité $\sqrt{T/m}$ est proportionnelle à la vitesse quadratique moyenne des particules du plasma et correspond, à un facteur près, à la vitesse du son dans le milieu.

On peut aller plus loin analytiquement à condition de considérer les limites $\frac{V}{\sqrt{T/m}} \gg 1$ et $\frac{V}{\sqrt{T/m}} \ll 1$. Dans le premier cas, f_L peut être approximée par un logarithme :

$$\frac{dE_{coll,L}^{far}(\frac{V}{\sqrt{T/m}} \gg 1)}{dz} \simeq \frac{n\alpha_{QED}^2}{mV^2} \ln \left(\frac{V}{\sqrt{T/m}} \right) . \quad (3.12)$$

Le deuxième cas conduit, quant à lui, à la contribution linéaire suivante :

$$\frac{dE_{coll,L}^{far}(\frac{V}{\sqrt{T/m}} \ll 1)}{dz} \simeq \frac{n\alpha_{QED}^2}{T} \frac{V}{\sqrt{T/m}} . \quad (3.13)$$

Les deux régimes se raccordent dans la région autour de $V = \sqrt{T/m}$ et la perte d'énergie longitudinale y passe par un maximum.

Nous n'évoquerons pas plus en avant le cas transverse. En effet, son étude peut être menée sensiblement de la même manière. Cependant, on aboutit à une contribution largement inférieure à celle longitudinale.

Pour ce qui est de la contribution des collisions proches, on peut évaluer celle-ci à partir de la section efficace élastique de Rutherford [11] :

$$\frac{dE_{coll}^{close}}{dz} = - \int d^3p f(\vec{p}) \times \text{flux} \times \int dt \frac{d\sigma_{el}}{dt} \omega . \quad (3.14)$$

Dans cette formule, f est la fonction de distribution à un corps du plasma (on prendra typiquement une fonction de Maxwell-Boltzmann). t représente la variable de Mandelstam. Le facteur de flux est, quant à lui, défini de manière standard par

$$\frac{\sqrt{(P \cdot p)^2 - M^2 m^2}}{E] . \quad (3.15)$$

Là encore, on peut extraire des formules analytiques dans les cas limites où la vitesse de la particule est grande ou petite devant celle du son dans le plasma.

Dans le premier cas, on voit que la perte d'énergie ne dépend que de la densité de celui-ci et pas de l'agitation thermique :

$$\frac{dE_{coll}^{close}(V \gg \sqrt{T/m})}{dz} \simeq \frac{n\alpha_{QED}^2}{2mV^2} \ln \left(\frac{4m^2V^2}{k_D^2} \right) . \quad (3.16)$$

En ajoutant à cette dernière expression, la contribution correspondante pour les collisions lointaines (3.12), nous obtenons la perte d'énergie collisionnelle totale d'une particule rapide dans un plasma non-relativiste :

$$\frac{dE_{coll}(V \gg \sqrt{T/m})}{dz} \simeq \frac{n\alpha_{QED}^2}{mV^2} \ln \left(\frac{2mV^2}{2\pi\omega_p} \right) . \quad (3.17)$$

Dans ce cas, la température du milieu n'intervient pas car la particule incidente est trop énergétique pour être sensible à l'agitation thermique et seule la densité de particules a un impact. Pour des faibles vitesses, la particule sonde est, au contraire, sensible à la température du plasma :

$$\frac{dE_{col}^{close}(V \ll \sqrt{T/m})}{dz} \simeq \frac{2n\alpha_{QED}^2}{3T} \frac{V}{\sqrt{T/m}} \left(1 - \frac{3T}{MV^2} \right) \left[\ln \left(\frac{8mT}{k_D^2} \right) - \gamma_E \right] . \quad (3.18)$$

Cette dépendance vis-à-vis de la température permet de conclure que, lorsque celle-ci augmente, la perte d'énergie décroît pour un plasma chaud non relativiste.

Plasma ultrarelativiste : utilisation des boucles thermiques dures

L'étude du plasma ultrarelativiste et le calcul de la perte d'énergie d'un fermion très énergétique ont été réalisés par Braaten et Thoma [49, 50]. Ces derniers utilisent aussi la prescription de Braaten-Yuan pour séparer la contribution des collisions proches de celles lointaines. L'introduction d'une échelle intermédiaire q^* porte sur la norme du quadrivecteur Q échangé entre la particule sonde et les particules du milieu. Pour des normes de Q supérieures à cette échelle (région « dure »), les effets de polarisation du milieu sont négligeables et nous pouvons prendre simplement le propagateur à température nulle. La seule chose à bien prendre en compte réside dans l'espace des phases des particules du milieu : celles-ci étant thermiques, il faut pondérer leur espace des phases par une fonction de distribution de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac selon le cas considéré. Pour la région de plus basse énergie dite « douce », les effets de milieu sont importants et l'utilisation des propagateurs HTL, introduit dans le chapitre 2, est nécessaire (2.79-2.80).

Pour cette partie « douce » de la perte d'énergie, Braaten et Thoma arrive à l'expression suivante :

$$\frac{dE_{coll}^{douce}}{dz} = \frac{e^2}{4\pi V^2} \int_0^{q^*} dq q \int_{-Vq}^{Vq} d\omega \omega \left[\rho_L(\omega, q) + \left(V^2 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \rho_T(\omega, q) \right] \quad (3.19)$$

dans laquelle, les fonctions ρ_L et ρ_T sont appelées fonctions spectrales et sont associées aux propagateurs HTL :

$$\rho_{L/T} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} D_{L/T}^*(\omega + i\epsilon, \vec{q}) . \quad (3.20)$$

L'intégration, en partie numérique, permet d'aboutir à la perte d'énergie collisionnelle dite « douce » :

$$\frac{dE_{coll}^{douce}}{dz} = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[\frac{1}{V} - \frac{1-V^2}{2V^2} \ln \frac{1+V}{1-V} \right] \left[\ln \frac{q^*}{eT} + A_{douce}(V) \right]. \quad (3.21)$$

La fonction $A_{douce}(V)$ est déduite numériquement mais ne jouera pas un grand rôle dans la perte d'énergie totale.

L'évaluation de la partie dure de la perte d'énergie collisionnelle dans un plasma ultrarelativiste est assez complexe et on aboutit à

$$\frac{dE_{coll}^{dure}}{dz} = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[\frac{1}{V} - \frac{1-V^2}{2V^2} \ln \frac{1+V}{1-V} \right] \left[\ln \frac{ET}{Mq^*} + A_{dure}(V) \right]. \quad (3.22)$$

Là aussi, la fonction $A_{dure}(V)$ ne joue pas de rôle majeur dans la perte d'énergie totale. Cette dernière est obtenue en sommant les deux contributions. Comme prévu par la prescription de Braaten-Yuan, l'échelle intermédiaire q^* disparaît lorsque les logarithmes s'additionnent et on arrive à la perte d'énergie suivante :

$$\frac{dE_{coll,BT}}{dz} = \frac{e^4 T^2}{24\pi} \left[\frac{1}{V} - \frac{1-V^2}{2V^2} \ln \frac{1+V}{1-V} \right] \ln \left(\frac{E}{Me} \right). \quad (3.23)$$

On a négligé dans cette dernière expression les fonctions numériques A_{dure} et A_{douce} qui sont de l'ordre de l'unité et donc très petites devant le logarithme de E/Me (d'autant plus dans le cas ultrarelativiste).

3.2.3 Passage à la QCD pour un plasma

Nous allons maintenant nous tourner vers l'étude de la perte d'énergie collisionnelle dans le cadre de la chromodynamique quantique tout en restant, cependant, dans la situation d'un plasma ¹³.

Approche de Bjorken

Le premier à avoir étudié la propagation d'un parton dans la matière particulière que constitue le PQG est Bjorken au début des années 1980 [11]. Utilisant un modèle de collisions non écrantées entre la particule sonde et les partons du plasma, il trouve un résultat très proche de celui que Braaten et Thoma obtiendront plus tard pour le cas d'un plasma ultrarelativiste QED :

$$\frac{dE_{Bjork}}{dz} = C_{q/g} \left(1 + \frac{N_f}{6} \right) \pi \alpha_s^2 T^2 \ln \left(\frac{4ET}{\mu^2} \right). \quad (3.24)$$

Le facteur de couleur dépend du fait que l'on considère un quark ($C_q = C_f = 4/3$) ou un gluon ($C_g = N_c = 3$) pour la particule incidente.

Ultérieurement, Thoma et Gyulassy [48] reprennent les travaux de Bjorken en changeant d'approche dans le sens où ils considèrent une réponse plutôt macroscopique du plasma. Pour un quark léger, ils démontrent que

$$\frac{dE_{TG}}{dz} = C_f \left(1 + \frac{N_f}{6} \right) \pi \alpha_s^2 T^2 \ln \left(\frac{E}{gT} \right) \left(\frac{1}{V} - \frac{1-V^2}{2V^2} \ln \frac{1+V}{1-V} \right). \quad (3.25)$$

13. L'objet d'étude principal étant le PQG.

Approche de Braaten-Thoma

L'approche de Braaten et Thoma [49], plus récente, est, une fois encore, basée sur la démarche de Braaten-Yuan. L'échelle intermédiaire q^* est une fois de plus introduite pour différencier les collisions de type collectifs, caractérisées par des petits échanges, des collisions de type particulaire, correspondant aux échanges plus importants, plus durs. A fortiori, le calcul de la perte d'énergie dans un plasma de type QCD ressemble fortement à celui mené en QED et peut même être déduit de ce dernier en effectuant simplement quelques modifications comme par exemple la substitution $m_\gamma^2 \rightarrow m_g^2 = (1 + N_f/6) \frac{g_s^2 T^2}{3}$. Dans le cas ultrarelativiste, on obtient la formulation suivante pour la perte d'énergie :

$$\frac{dE_{BT}}{dz} = \frac{8\pi\alpha_s^2 T^2}{3} \left(1 + \frac{N_f}{6}\right) \ln \left(0.920 \times 2^{\frac{N_f}{6+N_f}} \frac{\sqrt{ET}}{m_g}\right). \quad (3.26)$$

Maintenant que nous avons fait un tour d'horizon du calcul de la perte d'énergie collisionnelle dans différentes conditions, il est temps de considérer le second mécanisme : les processus radiatifs.

3.3 Perte d'énergie radiative

Depuis que l'électromagnétisme a été théorisé par Maxwell, on sait que toute charge accélérée rayonne des photons. Or, une particule sonde traversant un milieu diffuse sur les champs créés par les particules de celui-ci. Toute diffusion s'accompagne d'un changement d'impulsion pour la particule sonde et donc d'un changement de vitesse. Ainsi, dès lors qu'il y a diffusion, il y a une probabilité non-nulle d'avoir du rayonnement.

En théorie quantique des champs, lors du calcul des sections efficaces et, donc, des probabilités de ces processus, on note d'emblée que ces derniers semblent pénalisés par un facteur α_{QED} supplémentaire par rapport à leurs homologues collisionnels. La constante de couplage de l'électrodynamique quantique étant petite devant 1, cela explique le fait que la perte d'énergie collisionnelle soit dominante à basse énergie. Cependant, il s'avère que la dépendance en γ ¹⁴ de ces pertes d'énergies joue un rôle clé. En effet, on trouve que la probabilité de perdre une énergie donnée lors d'un processus collisionnel est proportionnelle à $\ln \gamma$ alors que lors d'un processus radiatif elle est proportionnelle à γ . Ainsi, on comprend pourquoi à haute énergie la perte d'énergie radiative devient dominante, et ce malgré une pénalité en ce qui concerne la constante de couplage.

Dans cette section, nous allons parcourir, de manière quasi-historique, les différents résultats ayant conduit à notre compréhension actuelle de la perte d'énergie radiative. En effet, après avoir vu comment celle-ci a été évaluée dans le cadre de la QED, nous étudierons l'approche non-abélienne de la chose. Ensuite, nous regarderons les différents effets de milieu pouvant jouer un rôle sur ces phénomènes.

14. Le facteur de Lorentz de la particule sonde.

3.3.1 Phénomène de Bremsstrahlung en QED

En QED, le phénomène de Bremsstrahlung a été étudié pour la première fois par Bethe et Heitler en 1934 [51]. Ils ont calculé, dans le cadre d'un formalisme de type théorie quantique des champs « pré-règles de Feynman », le spectre de rayonnement associé à une interaction. Dans une version diagramme de Feynman, il s'agit de la probabilité associée aux deux diagrammes de la figure 3.1 représentant une émission ayant lieu soit en aval, soit en amont de la diffusion.

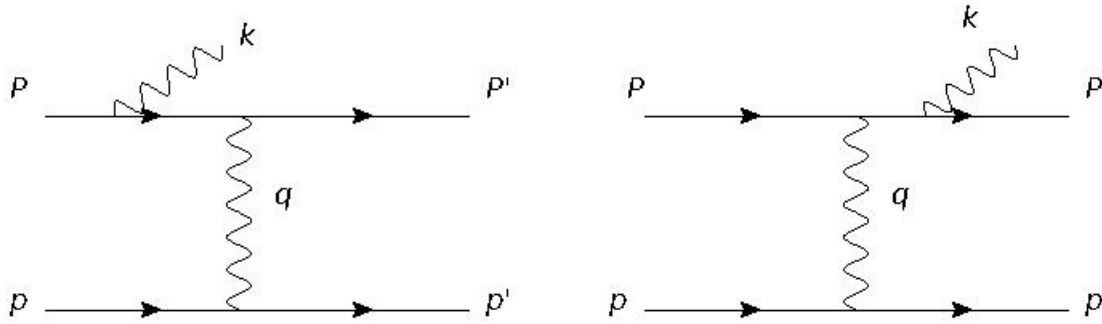


FIGURE 3.1 – Diagrammes de Feynman contribuant à la perte d'énergie radiative en QED

On va chercher à évaluer la section efficace de rayonnement d'une particule sonde de quadri-impulsion $P = (E, \vec{P})$ et de charge Z diffusant sur une particule du milieu de charge z tel que $P' = P + q$. q est donc le quadrivecteur associé au photon échangé durant la diffusion (avec, notamment, $\vec{q}_t$ son impulsion transverse) et on appellera $k = (\omega, \vec{k})$ celui du photon émis. Pour retrouver cette section efficace et, par la suite, le spectre d'énergie rayonnée par unité de longueur, on se place dans l'approximation des photons mous, i.e. on considère que la fraction d'énergie x emportée par le photon est négligeable devant l'énergie E de la particule émettrice :

$$x = \frac{\omega}{E} \ll 1. \quad (3.27)$$

Sous cette hypothèse, on peut, grâce à l'algèbre de Dirac¹⁵, factoriser la section efficace élastique de la manière suivante :

$$\omega \frac{d\sigma_{rad}}{d^3k dQ^2} = |\mathcal{M}_{rad}|^2 \frac{d\sigma_{el}}{d^2\vec{q}_t} = \frac{z^2 \alpha_{QED}}{4\pi^2} \left| \frac{\epsilon^* \cdot P'}{k \cdot P'} - \frac{\epsilon^* \cdot P}{k \cdot P} \right| \frac{d\sigma_{el}}{d^2\vec{q}_t}. \quad (3.28)$$

La section efficace élastique est, quant à elle, écrantée par un régulateur μ de telle sorte que

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} \approx \frac{4\pi Z^2 z^2 \alpha_{QED}^2}{(t - \mu^2)^2} \quad (3.29)$$

avec $t = q^2 \simeq -q_t^2$ la variable de Mandelstam.

Ainsi, après intégration sur l'espace des phases et dans le cas où la masse M de la particule sonde est négligeable devant le régulateur μ ¹⁶, on aboutit à la section

15. En utilisant le fait que $\not{\epsilon}^* \not{P}' = 2\epsilon^* \cdot P' - \not{P}' \not{\epsilon}^*$ (relation d'anticommutation) ainsi que l'équation de Dirac $(\not{P} - M)u(P) = 0$.

16. C'est typiquement le cas dans un plasma ultrarelativiste.

efficace différentielle par rapport à l'énergie du photon suivante :

$$\omega \frac{d\sigma_{rad}}{d\omega} \approx \frac{16Z^2 z^4 \alpha_{QED}^3}{\mu^2} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right) . \quad (3.30)$$

On peut alors en déduire le spectre rayonné par collision :

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{1}{\sigma_{el}} \omega \frac{d\sigma_{rad}}{d\omega} = \frac{4z^2 \alpha_{QED}}{\pi} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right) . \quad (3.31)$$

La quantité qui nous intéresse tout particulièrement pour évaluer la perte d'énergie est le spectre rayonné par collision et par unité de longueur. Il s'agit simplement de diviser le spectre par collision par le libre parcours moyen $\lambda = \frac{1}{n\sigma_{el}}$:

$$\frac{d^2 I}{d\omega dz} = \frac{4z^2 \alpha_{QED}}{\pi \lambda} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right) . \quad (3.32)$$

Ce spectre est celui que l'on appellera par la suite spectre Bethe-Heitler. Il correspond à la probabilité d'émission ne tenant pas compte des effets de milieu.

Enfin, on peut définir la perte d'énergie moyenne par unité de longueur dE/dz par l'intégrale sur ω allant de 0 à E (autrement dit, les énergies disponibles pour le photon) :

$$\frac{dE}{dz} = \int_0^E d\omega \frac{d^2 I}{d\omega dz} . \quad (3.33)$$

Pour le cas Bethe-Heitler, on trouve facilement le résultat suivant :

$$\frac{dE_{BH}}{dz} \simeq 16nZ^2 z^4 \alpha_{QED}^3 \frac{E}{\mu^2} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right) . \quad (3.34)$$

Il s'agit de la perte d'énergie radiative par unité de longueur que subit une particule sonde traversant un milieu caractérisé par un régulateur infrarouge μ . On note une dépendance linéaire vis-à-vis de l'énergie de la particule incidente. L'hypothèse sous-jacente consiste à dire que chaque collision est indépendante. Ainsi, on peut associer la probabilité évaluée plus haut à chaque diffusion. C'est ce que l'on appelle le régime Bethe-Heitler itéré.

3.3.2 Approche de Gunion-Bertsch

Le cas des processus radiatifs en chromodynamique quantique a été traité pour la première fois dans les années 1980 par Gunion et Bertsch [52]. La difficulté notable, par rapport au cas QED, réside dans l'existence d'un troisième diagramme à considérer. En effet, la possibilité d'auto-interaction pour les gluons entraîne le fait qu'un gluon peut être émis par le gluon échangé lors de la diffusion. Notons que ce diagramme décrit l'émission d'un gluon par la particule sonde, le dit gluon allant diffuser sur une particule du milieu comme cela est montré à la figure 3.2.

Gunion et Bertsch étudient le rayonnement produit par une particule ultra-relativiste (on se place ainsi dans l'approximation des gluons mous) sans masse. Ils parviennent à montrer qu'une factorisation du processus élastique est toujours

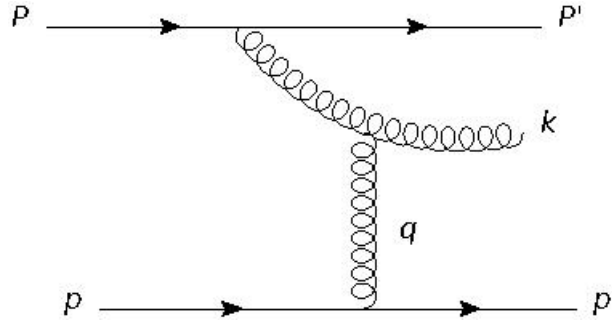


FIGURE 3.2 – Troisième diagramme à prendre en compte dans le cas QCD, possible à cause de l'auto-interaction du gluon.

possible, à l'instar du cas QED. Les trois amplitudes à considérer s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{M_{rad}^{post}}{M_{el}} = T_{A'A}^a (T^c T^a)_{B'B} 2g_s (1-x) \vec{j}_{post} \cdot \vec{\epsilon}_t, \quad (3.35)$$

$$\frac{M_{rad}^{pr}}{M_{el}} = -T_{A'A}^a (T^a T^c)_{B'B} 2g_s (1-x) \vec{j}_{pr} \cdot \vec{\epsilon}_t, \quad (3.36)$$

$$\frac{M_{rad}^{3gl}}{M_{el}} = i f_{abc} T_{A'A}^a T_{B'B}^b 2g_s (1-x) \vec{j}_{3gl} \cdot \vec{\epsilon}_t. \quad (3.37)$$

On a introduit, ici, A et A' les couleurs initiale et finale de p , B et B' pour P et a , b et c les configurations des gluons aux différents vertex. M_{el} est donnée par $2g_s^2 s/q_t^2$ où s est la variable de Mandelstam et les trois courants sont définis comme suit

$$\vec{j}_{pr} = \frac{\vec{k}_t - x\vec{q}_t}{(\vec{k}_t - x\vec{q}_t)^2}, \quad \vec{j}_{post} = \frac{\vec{k}_t}{k_t^2}, \quad \vec{j}_{3gl} = \frac{\vec{q}_t - \vec{k}_t}{(\vec{q}_t - \vec{k}_t)^2}. \quad (3.38)$$

En utilisant l'algèbre de couleur, il est possible d'arriver à la forme suivante pour l'amplitude totale de rayonnement

$$\frac{M_{rad}}{M_{el}} = g_s (1-x) T_{A'A}^a \left[\{T^a, T^c\}_{B'B} (\vec{j}_{pr} - \vec{j}_{post}) \cdot \vec{\epsilon}_t + i f_{abc} T_{B'B}^b (2\vec{j}_{3gl} + \vec{j}_{pr} + \vec{j}_{post}) \cdot \vec{\epsilon}_t \right] \quad (3.39)$$

que l'on peut réécrire, en introduisant $\vec{j}_{QED} = \vec{j}_{pr} - \vec{j}_{post}$ et $\vec{j}_{QCD} = \vec{j}_{3gl} + \frac{\vec{j}_{pr} + \vec{j}_{post}}{2}$,

$$\frac{M_{rad}}{M_{el}} = g_s (1-x) T_{A'A}^a \left[\{T^a, T^c\}_{B'B} \vec{j}_{QED} + 2i f_{abc} T_{B'B}^b \vec{j}_{QCD} \right] \cdot \vec{\epsilon}_t. \quad (3.40)$$

Après avoir sommé sur les couleurs finales et sur les polarisations du gluon émis et moyenné sur les couleurs initiales, on obtient l'amplitude de rayonnement au carré suivante :

$$|M_{rad}|^2 = 2C_F g_s^2 (1-x)^2 \left[j_{QCD}^2 + \frac{N_c^2 - 2}{4N_c^2} j_{QED}^2 \right] \frac{4g_s^4 s^2}{(q_t^2 + \mu^2)^2} \quad (3.41)$$

avec μ le régulateur de la partie élastique.

On peut montrer que la partie en j_{QED} , une fois intégrée sur l'espace des phases, va redonner le pendant « QCD » du spectre de Bethe-Heitler. Ce que l'on

appelle le spectre Gunion-Bertsch correspond, quant à lui, à ce qui vient de la partie proportionnelle à j_{QCD} . On constate, ainsi, que la section efficace déduite de cette amplitude va avoir plusieurs soucis de divergence : lorsque ω devient très petit, lorsque $\vec{k}_t$ s'annule et lorsque $\vec{k}_t = \vec{q}_t$. On va voir dans la suite comment régulariser tout cela.

La régularisation sur les grandeurs transverses s'obtient simplement en considérant une masse non nulle M pour le quark émetteur. Le seul changement pour l'amplitude de rayonnement apparaît dans les différents vecteurs courant $\vec{j}_{xxx}$.

$$\vec{j}_{pr} = \frac{\vec{k}_t - x\vec{q}_t}{(\vec{k}_t - x\vec{q}_t)^2 + x^2 M^2}, \vec{j}_{post} = \frac{\vec{k}_t}{\vec{k}_t^2 + x^2 M^2}, \vec{j}_{3gl} = \frac{\vec{q}_t - \vec{k}_t}{(\vec{q}_t - \vec{k}_t)^2 + x^2 M^2}. \quad (3.42)$$

Nous obtenons, après intégration sur les composantes transverses, l'expression suivante pour la section efficace de rayonnement différentielle en l'énergie du gluon

$$\omega \frac{d\sigma_{rad}}{d\omega} = \frac{8C_F\alpha_s^3}{\mu^2} \left[\log\left(\frac{E}{\omega}\right) + 2\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \log\left(\frac{\mu}{M}\right) \right]. \quad (3.43)$$

On peut identifier, dans cette dernière formule, la contribution du terme QED et celle du terme QCD (contribution principale ici).

On trouve, ensuite, le spectre de rayonnement par unité de longueur comme étant

$$\frac{dI_{GB}}{dzd\omega} \approx \frac{4N_c\alpha_s}{\pi\lambda_q} \log\left(\frac{E}{\omega} \left(\frac{\mu}{M}\right)^{\frac{2C_F}{N_c}}\right) \quad (3.44)$$

avec λ_q le libre parcours moyen associé au quark. Enfin, on trouve la perte d'énergie par unité de longueur dite Gunion-Bertsch¹⁷ :

$$\frac{dE_{GB}}{dz} \approx \frac{8C_F\alpha_s^3 n_q E}{\mu^2} \left[1 + \frac{2C_F}{N_c} \log\left(\frac{\mu}{M}\right) \right] \approx \frac{\alpha_s E}{\lambda}. \quad (3.45)$$

En réalité cette expression a été obtenue en considérant que la forme du spectre se prolonge jusqu'à des valeurs finies de x pour pouvoir intégrer. On verra, plus tard, qu'un moyen de régulariser cette divergence en x est de considérer une masse thermique de gluon.

Notons aussi, au passage, que la perte d'énergie Gunion-Bertsch est paramétriquement similaire à celle Bethe-Heitler pour la QED (3.34).

3.3.3 Apportons un peu de cohérence à tout cela...

Nous avons établi, dans la sous-section précédente, la perte d'énergie radiative que subit une particule chargée ultrarelativiste dans le vide. Il s'agit maintenant d'évaluer comment celle-ci est modifiée lorsque la particule en question se propage dans un milieu donné.

Si on se place dans un milieu, la première chose à noter est que la particule va pouvoir effectuer des diffusions successives sur les différentes particules constituant le milieu. A titre d'exemple, considérons un plasma ultrarelativiste de type

17. Que l'on appelle comme cela bien qu'on ait ajouté une masse au quark contrairement à l'étude initiale de Gunion et Bertsch.

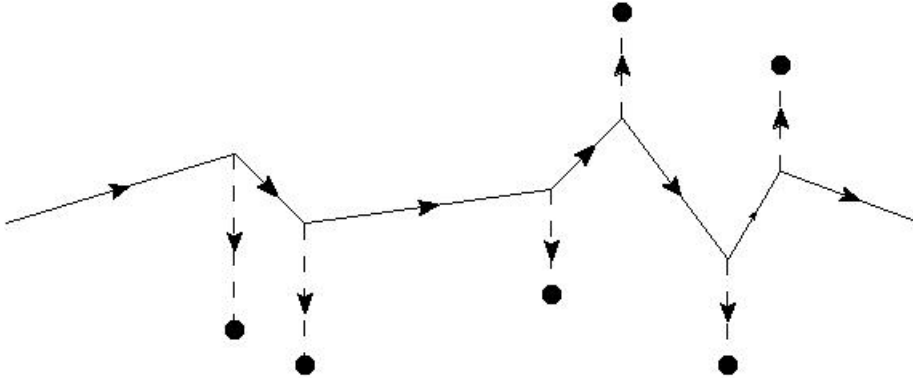


FIGURE 3.3 – Exemple de diffusion multiple dans un cas général. La distance moyenne entre deux interactions est le libre parcours moyen λ . Ici, on a remplacé la ligne de fermion des particules du milieu par de simples vertex pour ne pas encombrer le diagramme.

QED. Lorsqu'un muon, lui aussi ultrarelativiste, se propage dans un tel milieu, il peut diffuser sur les électrons et les positrons qui s'y trouvent. C'est le phénomène de la diffusion multiple (Figure 3.3). Un exemple en QCD est le plasma de quarks et de gluons composé majoritairement de quarks légers (u, d et s) ainsi que de gluons sur lesquels un quark plus lourd (c ou b) très énergétique va pouvoir diffuser. Finalement, notre particule subit régulièrement des changements de direction et d'énergie au hasard de ces diffusions successives dans le milieu. Au cours d'une telle évolution, nous avons déjà défini une quantité très importante pour la suite de l'exposé : le libre parcours moyen (3.32), noté λ . Ce dernier représente la distance moyenne que parcourt la particule dans le milieu entre deux diffusions. Il doit être bien clair que le but ici n'est pas de revenir sur la discussion autour de l'hypothèse d'indépendance des différents centres diffuseurs¹⁸. Ainsi, dans la suite de cette partie (et, plus généralement, dans la suite de ce mémoire), nous traiterons les diffusions successives ayant lieu lors de la diffusion multiple d'une particule dans un milieu comme indépendantes les unes des autres. Cependant, il faut bien garder en tête que, maintenant que nous avons introduit les processus radiatifs, à chaque diffusion est associé une probabilité de rayonner un quantum d'énergie. L'idée est donc d'évaluer si cette probabilité est modifiée dans le cadre de la diffusion multiple.

Pour répondre à cette question, nous allons introduire une quantité centrale dans la physique du rayonnement. Il s'agit de la notion de temps de formation ou longueur de formation t_f ¹⁹. L'idée, très simple, cachée derrière ce concept est qu'émettre un quantum d'énergie est un processus qui prend du temps ! Autrement dit, cette durée est le temps qu'il faut attendre pour que le système composé d'un fermion et d'un quantum possède une phase relative suffisante pour être discerné comme deux particules distinctes du point de vue de la mécanique quantique²⁰. Une autre manière, plus imagée, de le concevoir est de dire que cela correspond au temps mis par le champ du photon pour « s'extirper » du champ du fermion. D'un point de vue plus formel, définissons cette phase relative, dite de Landau ([53]). De

18. Cela ayant été fait plus haut dans le cadre des pertes d'énergies collisionnelles.

19. Les particules que nous étudions étant ultrarelativistes, les deux termes sont interchangeables.

20. Cette phase critique est de l'ordre de π .

manière classique, on peut définir le rayonnement de photons mous comme suit :

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega d\omega \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\vec{k} \wedge \vec{V}(t) \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}(t) - \omega t)} \right|^2. \quad (3.46)$$

La phase de Landau Φ est celle se trouvant dans l'exponentielle. Cette phase dépend du temps et résoudre l'équation $\Phi(t_f) \simeq \pi \simeq 1$ donne une approximation de l'expression du temps de formation. Ainsi, on a, pour la QED (cadre du calcul de Landau) :

$$\Phi_{QED}(t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}(t) \quad (3.47)$$

avec $\vec{r}(t)$ la trajectoire du fermion émetteur.

La généralisation à la QCD peut être faite via la phase suivante :

$$\Phi_{QCD}(t) = \int_0^t P(t') \cdot k(t') \frac{dt'}{E} \quad (3.48)$$

où $P(t')$ et $k(t')$ sont les quadrivecteurs du quark émetteur et du gluon émis. A cause des rediffusions possibles pour le gluon, les composantes de ce dernier varient avec le temps induisant la présence de l'intégration temporelle. Il est simple de retrouver, dans l'hypothèse où le gluon ne rediffuse pas (et donc se comporte comme un photon dont le quadrivecteur ne dépend pas du temps), la phase de Landau QED précédente, à partir de son équivalent QCD. Nous utiliserons cette notion de phase de Landau dans le dernier chapitre de cet exposé.

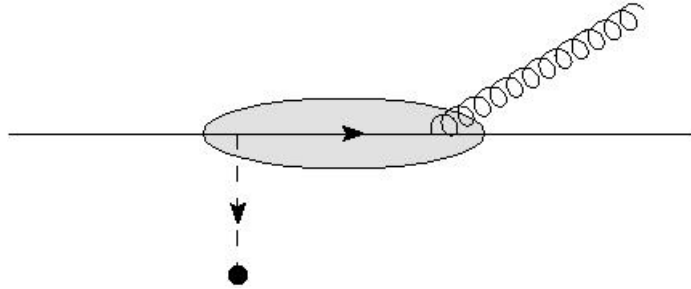


FIGURE 3.4 – Le « blob » représente le temps de formation (d'un gluon ici).

Nous allons, pour l'heure donner des expressions pour les différents temps de formations existants basée sur une méthode plus heuristique en commençant par la QED. Premièrement, définissons le temps de formation pour un rayonnement ayant lieu sur un centre diffuseur unique. Nous le noterons $t_{f,uni}$. La manière la plus naturelle de faire cela est de se placer dans le référentiel du système fermion-quantum et d'associer le temps de formation à l'inverse de l'écart de la masse invariante à la masse au repos M . On peut ainsi montrer que

$$t_{f,uni} = \frac{2(1-x)}{\omega \left(\frac{M^2}{E^2} + \left(\frac{\vec{k}_t}{\omega} - \frac{\vec{q}_t}{E} \right)^2 \right)}. \quad (3.49)$$

En toute rigueur, il s'agit, ici, du temps de formation lorsque le photon est émis après la diffusion. Si l'on considère le deuxième diagramme de Feynman possible, cela conduit à la même expression dans laquelle il suffit de substituer $\frac{\vec{k}_t}{\omega}$ à $\frac{\vec{k}_t}{\omega} - \frac{\vec{q}_t}{E}$. Puisque l'on évoque les diagrammes de Feynman, remarquons que le temps de formation est, finalement, la distance moyenne entre les deux vertex de la ligne

supérieure dans les diagrammes de la figure 3.1.

Il est facile, à la vue de l'expression (3.49), de mettre en avant les deux paramètres qui influent principalement sur le temps de formation. Le premier est la masse M du fermion émetteur. En effet, ce dernier ne peut progresser à la vitesse de la lumière comme le photon conduisant à ce que l'on appelle une décohérence massive. Le deuxième réside dans le $\vec{q}_t$ et s'appelle la décohérence collisionnelle car trouvant sa source dans la collision élastique nécessaire à tout rayonnement.

Pour se situer dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire la limite ultrarelativiste, on va négliger la masse M devant E et considérer que :

$$\frac{\vec{k}_t}{\omega} \gg \frac{\vec{q}_t}{E} . \quad (3.50)$$

Ainsi, on obtient une expression unique pour les deux diagrammes de Feynman que l'on retiendra pour la suite :

$$t_{f,uni} = \frac{2\omega}{\vec{k}_t^2} . \quad (3.51)$$

Nous avons désormais à notre disposition deux longueurs ou temps caractéristiques : le libre parcours moyen et le temps de formation. Il est naturel de regarder ce qui se passe selon leur hiérarchie. La première possibilité est que λ soit plus grand que t_f . Dans ce cas, les choses sont parfaitement définies : la particule diffuse avec une certaine probabilité d'émission et si émission il y a, celle-ci est terminée avant de passer à la diffusion suivante. Tout est décorrélé²¹. La deuxième situation apparaît lorsque λ devient plus petit que t_f . Maintenant, s'il y a émission lors d'une première diffusion, la diffusion suivante peut arriver avant la fin de la formation du quantum rayonné. Dans ce cas, le rayonnement est émis par l'ensemble des centres diffuseurs rencontrés durant le temps de sa formation (Figure 3.5). On parle de phénomène de cohérence ou d'émission cohérente. Nous appellerons N_{coh} , le nombre de centre diffuseurs concernés par une émission. Il est évalué, en toute logique, par la relation suivante :

$$N_{coh} = \frac{t_{f,mult}}{\lambda} . \quad (3.52)$$

Nous avons introduit un nouveau temps de formation correspondant à la situation de la diffusion sur plusieurs centres diffuseurs. Celui-ci est donné par l'extension de (3.49) faite en remplaçant le transfert unique $\vec{q}_t$ par le transfert total provenant des N_{coh} centres diffuseurs $\vec{Q}_t$.

$$t_{f,mult} = \frac{2}{\omega \left(\frac{M^2}{E^2} + \left(\frac{\vec{k}_t}{\omega} - \frac{\vec{Q}_t(l_{f,mult})}{E} \right)^2 \right)} \quad (3.53)$$

La subtilité de cette relation réside dans le fait que le transfert total $\vec{Q}_t$ dépend lui-même de la longueur de formation. Nous avons donc une équation auto-consistante.

Pour aller plus loin, on peut, par exemple, modéliser la dépendance du transfert total avec la longueur de formation. L'exemple le plus standard dans la littérature

21. On retrouve le régime Bethe-Heitler itéré en QED ou Gunion-Bertsch itéré en QCD.

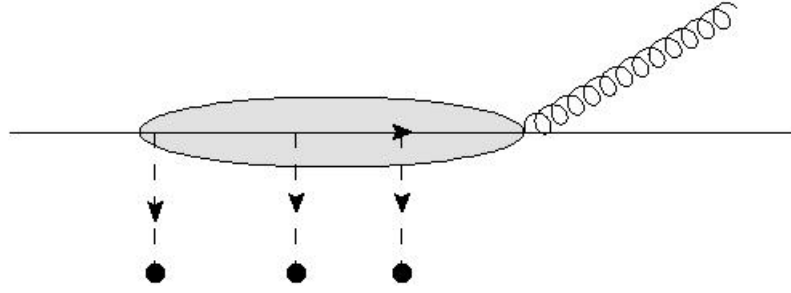


FIGURE 3.5 – Situation où le temps de formation est plus long que le libre parcours moyen : il n'y a qu'une seule émission cohérente sur les trois centres diffuseurs concernés.

consiste à supposer que le transfert est proportionnel à la longueur de formation via un coefficient de transport nommé $\hat{q}$, représentant le transfert d'impulsion au carré moyen par unité de longueur ou de temps :

$$\langle Q_t^2 \rangle(t_{f,mult}) = \hat{q} t_{f,mult} \quad (3.54)$$

Dans une telle configuration, nous pouvons alors écrire une relation permettant de déterminer la longueur de formation lorsque celle-ci est supérieure au libre parcours moyen :

$$\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{M^2}{E^2} + \frac{\vec{k}_t^2}{\omega^2} \right) t_{f,mult} + \frac{\hat{q}}{E^2} t_{f,mult}^2 \right] = 1 . \quad (3.55)$$

Dans cette situation, l'impulsion transverse échangée totale pouvant être grande, on considère que :

$$\frac{\vec{k}_t}{\omega} \ll \frac{\vec{Q}_t}{E} , \quad (3.56)$$

si bien que l'on prendra pour temps de formations multiples l'expression suivante :

$$t_{f,mult} = \sqrt{\frac{2E^2}{\hat{q}\omega}} . \quad (3.57)$$

La dernière chose importante à remarquer est que, quand la décohérence massive ne sera pas affectée par ce phénomène de cohérence, la décohérence collisionnelle, elle, va forcément être accrue²² conduisant à une « résolution » plus effaçante de la paire en formation et à la hiérarchie suivante entre les deux régimes de temps de formations²³ :

$$t_{f,mult} < t_{f,uni} . \quad (3.58)$$

Maintenant, intéressons nous aux conséquences de ce changement de régime sur les spectres de rayonnements, toujours dans le cas de la QED. Le spectre de référence est celui de Bethe-Heitler (3.34). Cependant, dès lors qu'un rayonnement a lieu de manière cohérente sur un ensemble plus ou moins grand de centres diffuseurs au lieu d'avoir un rayonnement associé à chacun de ses centres, nous voyons

22. En effet, dans un même temps, on va avoir plus de diffusions élastiques et donc, en moyenne, un plus grand transfert d'impulsion transverse.

23. Cette hiérarchie peut parfois induire une confusion. En effet, il ne faut pas interpréter le passage à un régime cohérent par une augmentation du temps de formation (qui a lieu sur plusieurs libres parcours moyen) mais bien comme une diminution de celui-ci (à cause des différentes dépendances en ω).

que le rayonnement par unité de longueur et, a fortiori, la perte d'énergie radiative seront bien inférieurs à la situation Bethe-Heitler. Cet effet de diminution du spectre avec la cohérence a été mis en exergue pour la première fois dans une approche semi-classique par Landau et Pomeranchuk [53]. Par la suite, Migdal [54] a effectué le même calcul mais avec une approche quantique plus rigoureuse. Ainsi, on parle d'effet LPM en l'honneur de ces trois physiciens. Un cas particulier de ce régime a lieu lorsque le temps de formation devient supérieur même au temps passé dans le milieu. Dès lors, le rayonnement s'effectue de manière cohérente sur toute l'épaisseur du milieu. On appelle cela le régime de factorisation.

Dans le cadre de la QED et avec une approche diagrammatique, Baier, Dokshitzer, Mueller, Peigné et Schiff ont retrouvé les résultats de la perte d'énergie LPM [55]. Il a été montré que dans l'approximation des photons mous, dans la limite d'un électron d'énergie ultrarelativiste et dans un milieu infini constitué de diffuseurs Coulombiens, le spectre de rayonnement se mettait sous la forme suivante²⁴ :

$$\frac{dI}{d\omega dz} = \frac{\alpha_{QED}}{\lambda\pi} \sqrt{\frac{\lambda\mu^2\omega}{E^2}} = \frac{\alpha_{QED}}{\pi\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{LPM}}} \quad (3.59)$$

où $\omega_{LPM} = \frac{E^2}{\lambda\mu^2}$ est l'énergie frontière en dessous de laquelle les photons sont émis selon le régime LPM (au dessus de cette fréquence, ils sont émis selon le spectre Bethe-Heitler). Concrètement, nous passons d'un spectre de rayonnement ne variant pas avec ω dans le cas de Bethe-Heitler à un comportement en $\sqrt{\omega}$ pour le cas LPM. Cela se traduit sur la perte d'énergie de la manière suivante²⁵ :

$$\frac{dE_{LPM}}{dz} \approx \sqrt{n} Z z^3 \alpha_{QED}^3 \sqrt{E} . \quad (3.60)$$

Il est temps maintenant de se tourner vers la chromodynamique quantique. En QCD, comme évoqué plus haut, le changement crucial réside dans l'apparition d'un troisième diagramme de Feynman à prendre en compte. Nous allons suivre exactement le même raisonnement pour déterminer le spectre de rayonnement et la perte d'énergie dans ce cas.

Premièrement, regardons les temps de formations en QCD. Sans surprise, les temps associées aux deux diagrammes que l'on peut qualifier de « QED-like »²⁶ ne sont pas impactés par ce changement d'interaction fondamentale. De plus, le temps de formation associé au diagramme à trois gluons est donné par

$$t_{f,uni}^{3gl} = \frac{2(1-x)}{\omega \left[\frac{M^2}{E^2} + \left(\frac{\vec{k}_t}{\omega} - \frac{\vec{q}_t}{\omega} \right)^2 \right]} \simeq \frac{2\omega}{\vec{k}_t^2} . \quad (3.61)$$

Ainsi, on voit que, dans les mêmes limites que précédemment, le temps de formation sur un seul centre diffuseur se met sous la même forme générique.

24. La différence formelle avec l'équation (4.45) de [55] vient du fait que l'objet dI n'est pas défini de la même manière ici. En effet, ce que [55] appelle dI est en réalité un $dN = dI/\omega$.

25. Au lieu d'intégrer une constante de 0 à E (donnant une perte d'énergie linéaire avec E), on intègre $\sqrt{\omega}$ conduisant à une dépendance en $E^{(3/2)}$. Mais, avec le E déjà présent dans le spectre, la perte d'énergie est bien en $\sqrt{E}$.

26. Correspondant à une émission par le quark.

Regardons, ensuite, le temps de formation multiple en QCD. On détaillera le calcul de la phase de Landau QCD permettant d'obtenir ce temps dans la sous-section 6.3.1. Le résultat en est :

$$t_{f,mult} = \sqrt{\frac{2\omega}{\hat{q}}} . \quad (3.62)$$

On voit ici une nette différence par rapport à la QED. En effet, quand, en QED, le temps de formation multiple était inversement proportionnel à la racine de l'énergie du photon émis, en QCD, celui-ci est proportionnel à la racine de celle du gluon. Cela va induire un comportement diamétralement opposé pour les spectres de rayonnement.

Baier, Dokshitzer, Peigné et Schiff ont poussé l'étude au cas de la QCD [56] et ont montré que le spectre de rayonnement était le suivant :

$$\frac{dI}{d\omega dz} = \frac{3\alpha_s}{2\pi} \frac{C_R}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda\mu^2}{\omega}} = \frac{3\alpha_s}{2\pi} \frac{C_R}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{BDMPS}}{\omega}} \quad (3.63)$$

C_R représente le facteur de couleur. Ce dernier vaut C_F si la particule émettrice est un quark et N_C s'il s'agit d'un gluon. ω_{BDMPS} désigne la fréquence pivot entre le régime Gunion-Bertsch et le régime BDMPS (nom qu'on donnera au régime LPM en QCD). On voit donc qu'on a, maintenant, un comportement en $1/\sqrt{\omega}$ impliquant que l'effet BDMPS est à prendre en compte pour les gluons émis avec des énergies supérieures à ω_{BDMPS} .

Dès lors, sans surprise, nous obtenons pour la perte d'énergie en intégrant le spectre précédent et en négligeant la borne inférieure ω_{BDMPS} devant l'énergie du quark émetteur E .

$$\frac{dE_{BDMPS}}{dz} \approx \frac{3C_R\alpha_s}{\pi} \sqrt{\frac{\mu^2 E}{\lambda_g}} . \quad (3.64)$$

Malgré les différentes dépendances dans les spectres de rayonnement entre la QED et la QCD, il est à noter que la perte d'énergie possède la même variation selon E . Ce qu'il faut retenir principalement de cette perte réside dans sa dépendance en $\sqrt{E}$ et pour bien observer la suppression par rapport au cas étudié par Gunion et Bertsch, nous pouvons réécrire cela comme suit

$$\frac{dE_{BDMPS}}{dz} \approx \sqrt{\frac{\omega_{BDMPS}}{E}} \frac{dE_{GB}}{dz} . \quad (3.65)$$

Aujourd'hui, pour évoquer toute cette physique associée à la cohérence du rayonnement, on parle de théorie BDPMS-Z, en référence aux physiciens ayant étudié les premiers cette notion. Le Z fait référence, lui, à Zakharov qui a déterminé le spectre de rayonnement cohérent avec une approche type intégrale de chemin ²⁷ [58].

3.4 Hypothèse vis-à-vis d'un effet tenant compte du caractère absorbant du milieu

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit plusieurs concepts relatifs à la physique des plasmas. Nous avons utilisé certains de ces concepts dans ce cha-

27. L'équivalence entre les deux approches ayant été démontrée en 1998 [57].

pitre pour déduire les formules caractérisant la perte d'énergie dans un plasma. Il est temps à présent de poser la problématique principale de ce travail de thèse.

Comme évoqué succinctement dans le chapitre introductif, nous voulons investiguer les effets sur la perte d'énergie radiative d'une propriété particulière du plasma : son caractère opaque. L'hypothèse de base est que ce caractère conduirait à une diminution du spectre de rayonnement et, par extension, de la perte d'énergie.

Ce qui nous fait dire cela réside dans une étude récente menée par Bluhm, Gossiaux et Aichelin [37]. Dans ces travaux est calculée la perte d'énergie d'une particule ultrarelativiste dans un milieu modélisé par un indice de réfraction complexe pour prendre en compte les effets de dispersion (écart à 1 de la partie réelle) et d'absorption (partie imaginaire).

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{m^2}{\omega^2} + 2i\frac{\Gamma}{\omega} \quad (3.66)$$

Il a été trouvé que cela conduisait, lorsqu'on calcule la perte d'énergie de manière semi-classique, à une diminution exponentielle de celle-ci. L'approche utilisée était d'évaluer l'opposé du travail à fournir par la particule sonde pour évoluer dans le champ électrique produit par les particules du milieu ; travail quantifié par la relation suivante :

$$W = 2 \operatorname{Re} \left(\int d^3\vec{r} \int_0^\infty d\omega \vec{E}(\vec{r}, \omega) \vec{j}(\vec{r}, \omega) \right) \quad (3.67)$$

dans laquelle $\vec{E}$ est le champ électrique déduit des équations de Maxwell dans le milieu considéré et $\vec{j}$ est le courant généré par la particule incidente dont on évalue la perte d'énergie. La perte d'énergie est alors trouvée proportionnelle à un terme de la forme

$$\exp(-\Gamma r) . \quad (3.68)$$

Le but ultime de cette thèse est, finalement, de trouver une justification plus microscopique que l'approche semi-classique de Bluhm *et al.* L'idée de fond des prochains chapitres est alors basée sur le raisonnement suivant.

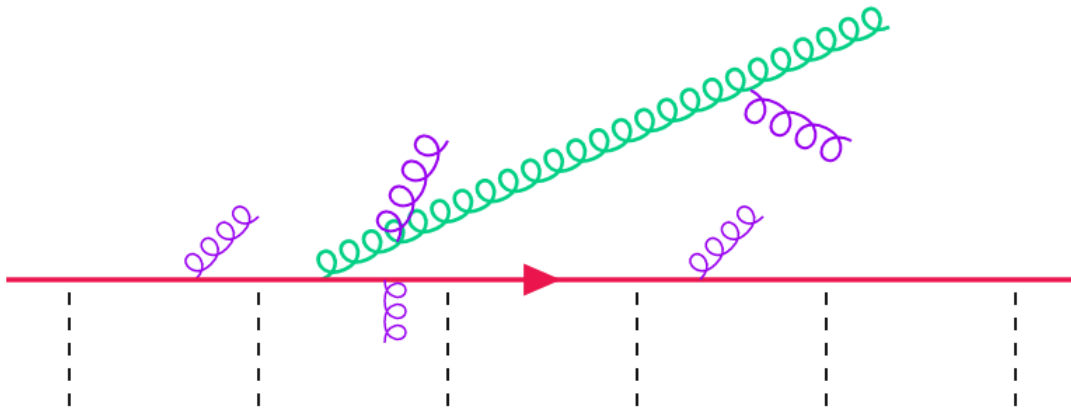


FIGURE 3.6 – Exemple de diagramme que l'on va étudier

Lorsqu'une particule (en rouge dans la Fig. 3.6) se propage dans un milieu dense en diffusant sur les différents constituants de celui-ci, il est possible de lui associer une probabilité d'émission. Supposons, qu'à un instant t , justement, une émission ait lieu (en vert dans la Fig. 3.6). Pour être plus rigoureux, disons qu'à cet instant t , l'émission commence. En vertu de la notion de temps de formation, nous pouvons affirmer que l'émission se termine à l'instant $t + t_f$ ²⁸. En QCD, nous avons vu que ce temps de formation était proportionnel à l'énergie du gluon ω . Donc, prenant une particule ultrarelativiste, cela donne une fenêtre en énergie pour le gluon émis et donc pour le temps de formation correspondant assez large. Suffisamment large en tout cas pour que, si le libre parcours moyen associé au milieu le permette ($\lambda \ll l_f$), le système composite quark-gluon en train de se former puisse continuer de diffuser dans le milieu. A ces diffusions ayant lieu durant le temps de formation du système susnommé, il est encore possible d'associer une probabilité d'émission. Typiquement, l'idée est que durant son propre temps de formation, un gluon peut diffuser dans le milieu et, donc, émettre lui-même des gluons (en violet dans la Fig. 3.6) de plus basse énergie (conservation de l'énergie oblige) et, a fortiori, de temps de formation plus court qui pourront alors être compris entre t et t_f . L'idée physique est, dès lors, d'associer ce rayonnement secondaire à un processus d'absorption et d'étudier quel effet il peut avoir sur l'existence même du rayonnement principal. Autrement dit, est-ce que ce rayonnement secondaire peut avoir une influence sur la perte d'énergie de la particule sonde ? Est-ce que ce rayonnement secondaire induit une modification, une diminution d'après les travaux de Bluhm *et al*, de la perte d'énergie radiative ? Notons au passage que ce raisonnement est impossible à mener en QED. En effet, les photons concernés par une émission cohérente sur plusieurs centres diffuseurs sont ceux à plus basses énergies. Il est, dès lors, compliqué d'imaginer une fenêtre possible pour l'émission de photons secondaires (par le quark) d'énergies inférieures au photon primaire.

Typiquement, cela revient à évaluer la classe de diagramme représentée Fig. 3.6.

28. La question de savoir s'il faut utiliser le temps de formation associé à une diffusion ou un temps de formation multiple (autrement dit, si le quantum est émis selon un spectre Gunion-Bertsch ou BDMPS-Z) dépend du libre parcours moyen associé au milieu.

Conclusion du chapitre 3

Tout au long de ce chapitre, nous avons mis en avant le calcul de la perte d'énergie subie par une particule incidente dans un milieu et ce, dans divers situations, que ce soit en QED ou en QCD.

Pour ce qui est de la perte d'énergie collisionnelle, nous pouvons retenir les comportements suivants en mettant de côté les logarithmes.

matière condensée	plasma non-relativiste	plasma ultrarelativiste
$\frac{dE_{coll}}{dz} \sim \frac{n_e \alpha_{QED}^2}{mV^2}$	$\frac{dE_{coll}}{dz} \sim \frac{n_e \alpha_{QED}^2}{T}$	$\frac{dE_{coll}}{dz} \sim \alpha_{QED}^2 T^2$

Il est intéressant de noter qu'un plasma non relativiste (avec une densité n_e fixée ; autrement dit, à l'équilibre thermodynamique) laisse d'autant plus facilement une particule sonde passer qu'il est chauffé et que cette tendance s'inverse brutalement lorsque le plasma devient relativiste.

La perte d'énergie collisionnelle dans un plasma QCD s'obtient aisément, en première approximation, en substituant simplement α_s à α_{QED} et en tenant compte des facteurs de couleurs. Les dépendances principales vis-à-vis de T restent les mêmes.

Lors de l'étude des pertes d'énergies radiatives, nous avons mis en avant l'existence de deux régimes bien distincts selon la hiérarchie entre le libre parcours moyen λ et le temps de formation associé au quantum rayonné t_f . En effet, lorsque $\lambda \gg t_f$, chaque diffusion se voit attribuer une probabilité d'émission et ce de manière indépendante. C'est le régime de Bethe-Heitler itéré (ou de Gunion-Bertsch en QCD) caractérisé par :

$$\frac{dE_{rad}}{dz} \sim \frac{\alpha E}{\lambda} \quad (3.69)$$

Mais lorsque $\lambda \ll t_f$, alors des phénomènes de cohérence apparaissent. En effet, l'émission d'un quantum d'énergie se fait maintenant sur un nombre t_f/λ de centres diffuseurs entraînant une diminution du rayonnement comme suit :

$$\frac{dE_{BDMPS/LPM}}{dz} \sim \sqrt{\frac{\omega_{LPM}}{E}} \frac{dE_{GB/BH}}{dz} \quad (3.70)$$

C'est ce que l'on appelle l'effet LPM en QED ou BDMPS-Z en QCD.

Ainsi, d'après la notion de temps de formation et car celui-ci, en QCD, est proportionnel à l'énergie du quantum rayonné, il peut y avoir, dans un milieu le permettant, du rayonnement dit secondaire ayant lieu pendant l'émission d'un rayonnement primaire. La question qui se pose alors est la suivante : **est-ce que ce rayonnement secondaire a un impact sur la perte d'énergie radiative de la particule incidente et peut-on l'associer au caractère opaque du milieu ?**

CHAPITRE 4

DE LA MODÉLISATION DE LA DIFFUSION ÉLASTIQUE DANS UN MILIEU

Commençons ce chapitre en rappelant la question sur laquelle nous avons terminé le chapitre 3 : quel est l'impact d'un rayonnement secondaire de gluons ayant lieu durant le temps de formation d'une paire quark-gluon par rayonnement de freinage sur la création même de celle-ci ? Y répondre sera l'objectif des trois prochains chapitres.

Pour y parvenir, la manière la plus naturelle à laquelle on peut penser consiste à évaluer la section efficace associée à la classe de diagramme défini par la figure 3.6. Cependant, cela implique l'étude d'une infinité de diagrammes si l'on veut tenir compte de toutes les émissions possibles. Aussi, nous allons chercher à mettre en place un formalisme effectif nous évitant cela.

Sommaire

4.1	Principe du formalisme	75
4.2	Approche « corrélateur » et interaction unique	76
4.2.1	Travail originel	76
4.2.2	Introduction du corrélateur et calcul de la probabilité d'interaction unique avec le potentiel $\tilde{A}$	77
4.2.3	Évaluation explicite du corrélateur	83
4.2.4	Étude analytique du corrélateur élastique	85
4.3	Interactions multiples et ligne de Wilson	86
4.3.1	Une interaction unique	87
4.3.2	Deux interactions	88
4.3.3	Généralisation à n diffusions	89
4.4	Probabilité totale et retour du corrélateur	90

4.1 Principe du formalisme

L'objectif premier est d'étudier la propagation d'une particule à travers un milieu dans la limite eikonale. Techniquement, la particule sonde peut être vue comme un courant J^μ qui interagit avec le milieu via un potentiel effectif $\tilde{A}_\mu$. Ainsi, une interaction sera décrite par un produit du type

$$\int d^4x J^\mu(x) \tilde{A}_\mu(x) . \quad (4.1)$$

Si la description du courant J^μ est plutôt standard, tout l'intérêt est dans la modélisation du potentiel $\tilde{A}_\mu$. En effet, selon les hypothèses faites lors de son élaboration, celui-ci sera en mesure de retranscrire tel ou tel phénomène pouvant avoir lieu dans le milieu. Dans la littérature, on trouve des travaux basés sur ce type de potentiel dans le cadre de la diffusion multiple. Deux en particulier retiendront notre attention car ils apportent un éclairage complémentaire sur le phénomène.

Le premier est l'approche de Blaizot, Dominguez, Iancu et Mehtar-Tani [59] que l'on notera « BDIM » par la suite. Dans ces travaux, la description du milieu est construite autour d'un objet appelé « corrélateur » qui découle du potentiel $\tilde{A}_\mu$. Via cet objet, les auteurs sont à même d'évaluer des quantités telles que la probabilité que la particule sonde se retrouve, au bout d'une longueur donnée, à une impulsion transverse donnée $\frac{dP}{d^2\vec{P}_t}(L, \vec{P}_t)$, qui dépend de l'exponentielle du corrélateur, ou bien la probabilité d'émission BDMPS-Z qui peut s'exprimer via une fonctionnelle plus compliquée de ce même corrélateur.

Le second est détaillé dans un cours d'école d'été faite par Casallerrey-Solana et Salgado [60] que nous appellerons « CSS ». L'étude porte plus sur l'interaction multiple et l'approche est concentrée sur la dérivation du fait que l'élément de matrice S de la diffusion d'un projectile sur le champ de la cible $\tilde{A}_\mu$ se met sous la forme d'une ligne de Wilson. Les conclusions physiques restent les mêmes.

Ces deux visions partagent, néanmoins, une hypothèse forte : le potentiel effectif $\tilde{A}_\mu$ ne dépend pas de la composante « $-$ » dans les coordonnées cône de lumière. Cette hypothèse a notamment comme conséquence que l'énergie de la particule sonde est conservée lors des interactions multiples dans le milieu. Ainsi, dans ce type de formalisme, seules les diffusions élastiques sont décrites. Autrement dit, on regarde seulement la déviation dans le plan transverse de la particule sonde pendant son parcours dans le milieu. Le but de ce chapitre est de reposer, dans cette hypothèse d'indépendance vis-à-vis de x^- , ce formalisme de potentiel $\tilde{A}_\mu$ en exploitant, d'une part, l'aspect corrélateur (que l'on peut associer à une interaction unique) et, d'autre part, l'aspect ligne de Wilson apparaissant dans les interactions multiples et de faire le lien entre les deux.

L'idée sous-jacente et qui sera mise en oeuvre dans le chapitre suivant est de permettre de petites pertes d'énergie pour la particule sonde en relaxant l'hypothèse d'indépendance en x^- du potentiel. Ces petites pertes seront assimilées au rayonnement de gluons secondaires évoqué à la fin du chapitre 3 et qu'on souhaite considérer comme une caractéristique du milieu : son caractère opaque.

On se placera à présent dans les coordonnées cône de lumière en adoptant la

convention suivante :

$$a^\mu = (a^+ = \frac{a^0 + a^3}{\sqrt{2}}, a^1, a^2, a^- = \frac{a^0 - a^3}{\sqrt{2}}) . \quad (4.2)$$

On utilisera par la suite la notation $\vec{a}_t = (a^1, a^2)$. Pour plus de détails sur les coordonnées cône de lumière, on pourra se reporter à l'annexe A. On définit aussi ici les quadrvecteurs que l'on utilisera dans la suite. P et P' désignent la particule sonde avant et après l'interaction alors que p et p' représentent la particule du milieu sur laquelle a lieu l'interaction. Lorsque l'on étendra le formalisme au cas radiatif, on notera k le quadrvecteur du quantum rayonné.

$$\begin{aligned} P &= (P^+, \frac{M^2}{P^+}, \vec{0}_t) & P' &= (P'^+, \frac{M^2 + P_t^2}{P'^+}, \vec{P}_t) \\ p &= (0, p^-, \vec{0}_t) & p' &= (\frac{m^2 + p_t^2}{p'^-}, p'^-, \vec{p}_t) \\ k &= (xP^+, \frac{m_g^2 + k_t^2}{xP^+}, \vec{k}_t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ainsi, on considère que la particule sonde possède une masse alors qu'on négligera (tant que possible) la masse des particules du milieu : $m \rightarrow 0$. Le fait qu'en pratique, la particule sonde soit plutôt associée à des quarks lourds et que le milieu soit composé essentiellement de quarks légers ou de gluons permet de valider assez facilement cette hypothèse. La masse donnée au gluon, quant à elle, servira de régulateur le moment venu.

Enfin, tout au long de ce chapitre, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein stipulant que lorsque deux indices sont répétés, la somme est implicite.

4.2 Approche « corrélateur » et interaction unique

4.2.1 Travail originel

Dans l'approche BDIM, un parton ultrarelativiste est produit à l'intérieur du milieu par un processus dur avant de se propager sur une distance L dans celui-ci. Durant ce parcours, il interagit avec le milieu via un potentiel $\tilde{A}$ en échangeant avec ce dernier de l'impulsion transverse et de la couleur. En pratique, les auteurs se limitent au cas où le parton considéré est un gluon.

Ensuite, basée sur plusieurs hypothèses physiques, ils proposent une fonction de corrélation appelée corrélateur et associée au potentiel $\tilde{A}$ dans l'idée de rendre compte d'un potentiel de fond aléatoire.

$$\langle \tilde{A}_a^-(x^+, x^-, \vec{x}_t) \tilde{A}_b^-(y^+, y^-, \vec{y}_t) \rangle = \delta_{ab} \delta(x^+ - y^+) \gamma_t(\vec{x}_t - \vec{y}_t) \quad (4.4)$$

Les hypothèses sous-jacentes à cette expression sont les suivantes :

- Le parton, ultrarelativiste, interagit avec le milieu dans le cadre de l'approximation eikonale. Ainsi, le courant J^μ associé à cette particule sonde est dominé par sa composante « + » et l'interaction sera proportionnelle à $J^+ \tilde{A}^-$.
- On suppose aussi, toujours lié à cette limite eikonale, que le parton sonde ne perd pas d'énergie dans le milieu. Donc, on peut dire que la composante « + » de ce dernier n'est pas modifiée par la propagation impliquant une

indépendance vis-à-vis de la composante spatio-temporelle « $-$ » du potentiel et, par extension, du corrélateur. On retrouve, ici, cette idée importante que l'indépendance en x^- du potentiel induit une impossibilité pour les interactions à impliquer des processus inélastiques (i.e. une perte d'énergie).

- La dépendance vis-à-vis de la composante « $+$ », quant à elle, est justifiée par la dilatation du temps induite par la relativité restreinte. En effet, dans ce cadre, la particule sonde aura une mauvaise résolution dans cette direction et les corrélations du milieu lui apparaîtront comme locales d'où la présence du delta de Dirac.
- Enfin, la dépendance en les variables transverses est prise en compte via une fonction γ dans laquelle, par homogénéité dans le plan transverse¹, seule la différence $\vec{x}_t - \vec{y}_t$ apparaît.

Une modèle particulier pour cette fonction γ_t est ensuite proposé en considérant un plasma de quarks et de gluons faiblement couplés et à haute température T . En supposant que les charges dans le milieu sont corrélées sur des distances déterminées à partir de la longueur de Debye μ^{-1} , BDIM donnent

$$\gamma_t(\vec{x}_t - \vec{y}_t) = g^2 \rho_2 \int \frac{d^2 \vec{q}_t}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{q}_t \cdot (\vec{x}_t - \vec{y}_t)}}{(\vec{q}_t^2 + \mu^2)^2} \quad (4.5)$$

avec ρ_2 la densité du milieu pondérée par les bons facteurs de couleur (proportionnelle à la température au cube) et $1/(\vec{q}_t^2 + \mu^2)$ le propagateur de Coulomb écranté². Cette densité n'inclut pas, ici, les facteurs de dégénérescences liés à la couleur et au spin ; la pondération par les facteurs de couleur signifiant qu'il faut les rajouter lors de l'évaluation d'observables physiques comme c'est fait par les auteurs dans la suite de l'article, pour le calcul de $\hat{q}$ par exemple. On pourra motiver cette expression (4.5) lors du calcul de la probabilité d'une diffusion (section 4.2.3).

Par la suite, il est montré que la propagation d'un parton très énergétique dans la limite eikonale peut être décrite grâce à un propagateur dans le plan transverse. Ce dernier est mis sous la forme d'une intégrale de chemin dans le plan transverse pondérée par une ligne de Wilson décrivant les interactions milieu-particule

$$\langle \vec{x}_t | \mathcal{G}(x^+, y^+; P^+) | \vec{y}_t \rangle = \int \mathcal{D}\vec{r}_t e^{i \frac{P^+}{2} \int_{y^+}^{x^+} dt \frac{d\vec{r}_t}{dt} \cdot \vec{r}_t} \text{T exp} \left(ig \int_{y^+}^{x^+} dt \tilde{A}^-(t, \vec{r}_t(t)) \right) \quad (4.6)$$

T étant le produit ordonné en temps. Lors de l'évaluation de processus concrets comme la diffusion multiple ou le splitting du parton, ce propagateur apparaît au carré et sa moyenne sur le milieu fait donc intervenir le corrélateur.

4.2.2 Introduction du corrélateur et calcul de la probabilité d'interaction unique avec le potentiel $\tilde{A}$

Dans cette partie et dans la suivante, on se propose de retrouver les expressions proposées par BDIM pour le corrélateur (4.4) et (4.5). Pour cela, nous commençons par évaluer la probabilité associée à l'élément de la matrice de diffusion S suivant³ :

$$S = \langle (P', s', i'), (p', r', j') | \text{T exp} \left(-i \int d^4 x H_{int}(x) \right) | (P, s, i), (p, r, j) \rangle . \quad (4.7)$$

1. Homogénéité qui sera mise en évidence plus tard.
 2. q est donc le quadrivecteur échangé dans l'interaction.
 3. Que l'on notera S aussi par abus de langage.

Finalement, ici, nous cherchons simplement à calculer la probabilité que, lors d'une diffusion dans le milieu (quarks légers ou gluons), notre particule sonde (quark c ou b) passe d'un état $|P, s, i\rangle$, où P est son quadrivecteur impulsion, s son état de spin et i son état de couleur, à un état $|P', s', i'\rangle$. De plus, étant dans les coordonnées cône de lumière, on va faire l'hypothèse que la particule sonde se propage le long de la direction « + » et que les particules du milieu se propagent le long de la direction « - »⁴.

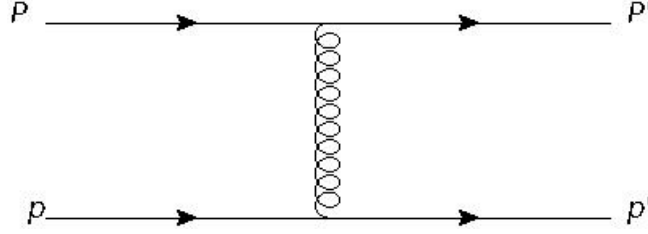


FIGURE 4.1 – Diagramme étudié dans cette section

Il nous faut aussi spécifier quel hamiltonien d'interaction nous allons utiliser. De manière standard, nous considérons des interactions de type $j^\mu A_\mu$; j^μ pouvant désigner le courant de la particule sonde comme celui de la particule du milieu. A ce stade, le potentiel A_μ est strictement le potentiel du boson de la théorie (photon ou gluon selon le cas et gluon dans la suite de ce calcul).

$$\begin{aligned} H_{int}(x) &= g (\bar{\Psi}_1^{i'}(x) \gamma^\mu T^a \Psi_1^i(x) + \bar{\Psi}_2^{j'}(x) \gamma^\mu T^a \Psi_2^j(x)) A_\mu^a(x) \\ &= g (J_{ii'}^{\mu,a}(x) + j_{jj'}^{\mu,a}(x)) A_\mu^a(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\Psi_1 (J^\mu)$ désigne le champ (le courant) de la particule sonde et $\Psi_2 (j^\mu)$ le champ (le courant) d'une particule du milieu. De plus, on prend la même constante de couplage g pour les interactions avec chaque type de courant car celle-ci est universel en QCD.

Dans (4.7), le terme d'ordre 0 correspond à une situation sans aucune interaction et ne nous intéresse pas. Ensuite, le terme d'ordre 1 est nul puisque ne respectant pas la conservation de l'énergie entre l'état initial et l'état final. C'est donc seulement à l'ordre 2 que se trouve la quantité d'intérêt. Ainsi, en développant l'exponentielle à cet ordre et après application du théorème de Wick, l'élément de matrice se met sous la forme d'une double intégrale,

$$S = (ig)^2 \int d^4x d^4y \langle P', s', i' | J_{ii'}^{\mu,a}(x) | P, s, i \rangle \langle p', r', j' | j_{jj'}^{\nu,b}(y) | p, r, j \rangle \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) , \quad (4.9)$$

avec $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y)$ le propagateur de gluon défini de la manière suivante :

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) = \langle 0 | T(A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \frac{i N_{\mu\nu}(k)}{k^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)} . \quad (4.10)$$

$N_{\mu\nu}(k)$ est un tenseur qui dépend de la jauge. Par exemple, en jauge cône de lumière, où A^μ est choisi tel que $A \cdot n = 0$, $N_{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu}{n \cdot k}$. n est un vecteur de type lumière fixé, i.e. $n^2 = 0$. Il est important de fixer la jauge lors d'un

4. Ainsi, l'énergie de la particule sonde sera proportionnelle à P^+ et celle de la particule du milieu à p^- .

calcul explicite et on précisera ce choix le moment venu.

On voit ainsi que pour aboutir à une forme comme celle proposée dans (4.1), il nous faut simplement poser :

$$\boxed{\tilde{A}_\mu^a(x; p', p) = ig \int d^4y \langle p', r', j' | j_{jj'}^{\nu, b}(y) | p, r, j \rangle \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y)} \quad (4.11)$$

et par conséquent,

$$S = ig \int d^4x \langle P', s', i' | J_{ii'}^{\mu, a}(x) | P, s, i \rangle \tilde{A}_\mu^a(x; p', p) . \quad (4.12)$$

On peut aller plus loin dans l'expression de ce que nous appellerons le potentiel de fond élastique en évaluant le courant j^ν avec l'introduction de u et $\bar{u}$, deux spineurs de Dirac,

$$\langle p', r', j' | j_{jj'}^{\nu, b}(y) | p, r, j \rangle = \bar{u}(p', r') \gamma^\nu T_{jj'}^b u(p, r) e^{i(p' - p) \cdot y} , \quad (4.13)$$

permettant de faire les intégrations sur y puis sur k pour aboutir à l'expression suivante :

$$\tilde{A}_\mu^a(x; p', p) = -g \bar{u}(p', r') \gamma_\mu T_{jj'}^a u(p, r) \frac{N_{\mu\nu}(p' - p)}{(p' - p)^2 + i\epsilon} e^{i(p' - p) \cdot x} . \quad (4.14)$$

Ici, on considère l'interaction avec un quark du milieu. L'approche BDIM, quant à elle, regarde le cas où le parton du milieu est un gluon. Il est montré (dans l'appendice A de [59]) que c'est le vertex à trois gluons qui interviendrait dans (4.13). On aurait, en effet, à la place pour cette équation :

$$\langle p', r', j' | j_{jj'}^{\nu, b}(y) | p, r, j \rangle = -g f^{bcd} [g^{\nu\rho} (k - p)^\sigma + g^{\rho\sigma} (p + p')^\nu + g^{\sigma\nu} (-p' - k)^\rho] \epsilon_\rho^{*c}(p) \epsilon_\sigma^d(p') . \quad (4.15)$$

Finalement, on écrit l'élément de matrice comme suit, en exprimant de même le courant associé à la particule sonde :

$$S = ig \int d^4x \bar{u}(P', s') \gamma^\mu T_{ii'}^a u(P, s) e^{i(P' - P) \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x; p', p) , \quad (4.16)$$

ce qui peut aussi être vu directement à partir des règles de Feynman de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S &= \langle (P', s', i'), (p', r', j') | i\mathcal{T} | (P, s, i), (p, r, j) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p') i\mathcal{M}(P, P', p, p') \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p') \bar{u}(P', s') ig \gamma^\mu T_{ii'}^a u(P, s) \\ &\quad \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) \bar{u}(p', r') ig \gamma^\nu T_{jj'}^b u(p, r) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, en transformant le delta de Dirac en exponentielle complexe, on retombe bien sur (4.16)

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x e^{i(P' + p' - P - p) \cdot x} \bar{u}(P', s') ig \gamma^\mu T_{ii'}^a u(P, s) , \\ &\quad \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) \bar{u}(p', r') ig \gamma^\nu T_{jj'}^b u(p, r) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$S = ig \int d^4x \bar{u}(P', s') \gamma^\mu T_{ii}^a u(P, s) e^{i(P'-P) \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x; p', p) \quad (4.19)$$

Maintenant, nous allons passer à l'évaluation de la probabilité. Pour cela, d'après la théorie quantique des champs, il faut évaluer la quantité suivante :

$$P = \int d^3\tilde{P}' d^3\tilde{p}' | \langle (P', s', i'), (p', r', j') | S | in \rangle |^2 \quad (4.20)$$

avec

$$|in\rangle = \int d^3\tilde{P} d^3\tilde{p} f_1(P) f_2(p) | (P, s, i), (p, r, j) \rangle \quad (4.21)$$

et, dans les coordonnées cône de lumière :

$$d^3\tilde{q} = \frac{dq^+ d^2\vec{q}_t}{(2\pi)^3 2q^+} = \frac{dq^- d^2\vec{q}_t}{(2\pi)^3 2q^-} . \quad (4.22)$$

La version en « + » sera utilisée pour la particule sonde P (et P') tandis que la version « - » le sera pour les particules du milieu p (et p').

Étant donné que l'on cherche à évaluer un taux d'interaction, il nous faut utiliser des états normalisables. On impose donc la normalisation suivante : $\langle in | in \rangle = 1$. Ainsi, comme on a aussi $\langle (P', s', i') | (P, s, i) \rangle = (2\pi)^3 2P^+ \delta^{ii'} \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{P}' - \vec{P})$, on peut écrire :

$$\langle in | in \rangle = \int d^3\tilde{P} d^3\tilde{p} |f_1(P)|^2 |f_2(p)|^2 = 1 . \quad (4.23)$$

Cela est satisfait si l'on choisit la normalisation suivante pour les fonctions f_1 et f_2 :

$$\int d^3\tilde{P} |f_1(P)|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \int d^3\tilde{p} |f_2(p)|^2 = 1 \quad (4.24)$$

et, alors, on peut identifier l'intégrand précédent à une densité de particules dans l'espace des impulsions :

$$\rho_1(P) = \frac{|f_1(P)|^2}{(2\pi)^3 2P^+} \quad \text{et} \quad \rho_2(p) = \frac{|f_2(p)|^2}{(2\pi)^3 2p^-} . \quad (4.25)$$

Notons que dans la situation dans laquelle nous nous plaçons, f_1 dépend uniquement de P^+ et de $\vec{P}_t$ tandis que f_2 dépend de p^- et de $\vec{p}_t$.

La probabilité s'écrit donc, en moyennant sur le spin et la couleur des particules entrantes (ce qui donne le facteur $(1/2N_C)^2$) et en sommant sur les spins et les couleurs sortantes, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P = & \int d^3\tilde{P}' d^3\tilde{p}' d^3\tilde{P}_1 d^3\tilde{P}_2 d^3\tilde{p}_1 d^3\tilde{p}_2 f_1(P_1) f_1^*(P_2) f_2(p_1) f_2^*(p_2) \\ & \frac{1}{(2N_C)^2} \sum_{\text{couleurs, spins}} (\bar{u}(P', s') \gamma^\mu T_{i'i_1}^a u(P_1, s_1)) (\bar{u}(P', s') \gamma^\nu T_{i_2i}^b u(P_2, s_2))^* \\ & g^2 d^4x_1 d^4x_2 e^{i(P'-P_1) \cdot x_1} e^{-i(P'-P_2) \cdot x_2} \tilde{A}_\mu^a(x_1; p', p_1) \tilde{A}_\nu^{b*}(x_2; p', p_2) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dans cette longue expression, tout ce qui dépend du milieu (à travers p et p') va constituer le corrélateur⁵.

$$\boxed{\gamma_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{1}{2N_C} \text{Tr} \int d^3\tilde{p}' d^3\tilde{p}_1 d^3\tilde{p}_2 f_2(p_1) f_2^*(p_2) \tilde{A}_\mu^a(x_1; p', p_1) \tilde{A}_\nu^{b*}(x_2; p', p_2)} \quad (4.27)$$

Dans cette équation, on note Tr la somme sur les couleurs et les spins de la particule du milieu p' .

Regardons en premier dans (4.26) la fonction f_1 . En faisant l'hypothèse que le paquet d'onde est fortement piqué autour de la valeur moyenne $\bar{P}$, on peut écrire la transformée de Fourier de celui-ci (pondérée par $2P^+$) $\psi_1(x_1)$ ⁶ sous la forme suivante, en introduisant $\Delta P_1 = P_1 - \bar{P}$:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= \int d^3\tilde{P}_1 f_1(P_1) e^{-iP_1 \cdot x_1} \\ &= e^{-i\bar{P} \cdot x_1} \int \frac{d^3\Delta P_1}{(2\pi)^3 2(\bar{P}^+ + \Delta P_1^+)} f_1(\Delta P_1) e^{-i\Delta P_1 \cdot x_1} \simeq \frac{e^{-i\bar{P} \cdot x_1}}{2\bar{P}^+} f_1(x_1) . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pour écrire la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\bar{P}^+ \gg \Delta P_1^+$. La fonction $f_1(x_1)$ est, quant à elle, la « vraie » transformée de Fourier du paquet d'onde. De la condition de normalisation (4.24) et en utilisant les propriétés des transformées de Fourier, on déduit la densité volumique de probabilité de présence de la particule 1 :

$$\rho_1(x_1) = \frac{|f_1(x_1)|^2}{2\bar{P}^+} . \quad (4.29)$$

Pour ce qui est de l'espace de couleur, on doit évaluer $T_{ij}^a T_{ji}^b$ qui correspond à $\text{Tr}(T^a T^b)$ et qui est égal à $\delta^{ab}/2$. En ce qui concerne l'espace des spins, on va rencontrer, comme $P_1 \simeq P_2 \simeq \bar{P}$, de manière usuelle :

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(P' \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu) = 2(P'^\mu \bar{P}^\nu + P'^\nu \bar{P}^\mu - P' \cdot \bar{P} g^{\mu\nu}) . \quad (4.30)$$

Ainsi, à ce stade, on est en mesure d'écrire la probabilité de diffusion de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P &= g^2 \int d^3\tilde{P}' d^4x_1 d^4x_2 e^{i(P' - \bar{P}) \cdot (x_1 - x_2)} f_1(x_1) f_1^*(x_2) \\ &\quad \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) \frac{2(P'^\mu \bar{P}^\nu + P'^\nu \bar{P}^\mu - P' \cdot \bar{P} g^{\mu\nu})}{(2\bar{P}^+)^2} . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dans un souci de garder des notations simples, on notera $\bar{P} = P$. On poursuit en supposant que le milieu est homogène ce qui implique que le corrélateur dépend uniquement de la différence $x_1 - x_2$. Cette hypothèse motive alors le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ \Delta x &= x_1 - x_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

5. On utilisera la notation γ pour désigner le corrélateur entier alors que BDIM utilise cette notation pour la partie dépendante des variables transverses du corrélateur seulement (ce que nous appelons, nous, γ_t).

6. Et faire de même pour $f_1(P_2)$.

dont le jacobien est égal à 1, et permet de mettre la probabilité sous la forme :

$$P = g^2 \int d^3 \tilde{P}' d^4 X d^4 \Delta x e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} f_1(X + \frac{\Delta x}{2}) f_1^*(X - \frac{\Delta x}{2}) \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{\mu\nu}^{ab}(\Delta x) \frac{2(P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - P' \cdot P g^{\mu\nu})}{(2P^+)^2} . \quad (4.33)$$

Il est légitime d'affirmer que la distance relative Δx est négligeable devant l'extension en X . Ainsi, $f_1(X + \frac{\Delta x}{2}) f_1^*(X - \frac{\Delta x}{2}) \simeq |f_1(X)|^2$. Il ne reste plus qu'à introduire la densité associée à la particule sonde $\rho_1(X)$ définie par (4.29). Cette dernière dépend essentiellement de $\vec{X}_t$ et de X^- ⁷. La probabilité de ce processus prend donc la forme finale suivante :

$$P = g^2 \int d^3 \tilde{P}' d^4 X \rho_1(X) d^4 \Delta x e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{\mu\nu}^{ab}(\Delta x) \frac{2(P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - P' \cdot P g^{\mu\nu})}{2P^+} . \quad (4.34)$$

On peut maintenant, pour simplifier encore un peu plus la forme, utiliser le fait que le couplage entre la particule sonde et le milieu est étudié dans la limite eikonale. Cela conduit à supposer que la variation de l'énergie de la particule sonde pendant la diffusion multiple est très faible et donc négligeable. La conséquence formelle en est que le corrélateur est un objet de type « -- » dans l'espace de Lorentz et en coordonnées cône de lumière⁸ ; il se contractera donc avec des objets de type « ++ » venant de la ligne dite « du haut » (si on se réfère au diagramme 4.1) correspondant à la particule énergétique traversant le milieu. Alors, $P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - P' \cdot P g^{\mu\nu} = 2P'^+ P^+$ et, dans la limite eikonale, $P'^+ \simeq P^+$, permettant d'obtenir la forme suivante pour la probabilité :

$$P = g^2 \int d^4 X 2P^+ \rho_1(X) d^3 \tilde{P}' d^4 \Delta x e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{ab}^{--}(\Delta x) . \quad (4.35)$$

On peut, ainsi, définir une probabilité d'interaction par unité de flux entrant de la particule sonde de la manière suivante :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho_1(X)} \frac{dP}{dX^- d^2 \vec{X}_t} = 2P^+ g^2 \int dX^+ d^4 \Delta x d^3 \tilde{P}' e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{ab}^{--}(\Delta x) . \quad (4.36)$$

Le taux de diffusions par unité de chemin parcouru dans le milieu peut donc s'écrire

$$\frac{d\mathcal{P}}{dX^+} = 2P^+ g^2 \int d^4 \Delta x d^3 \tilde{P}' e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N_C} \gamma_{ab}^{--}(\Delta x) \quad (4.37)$$

et le taux d'interaction différentiel vis-à-vis de l'espace des phases de la particule sortante s'écrit

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{dX^+ d^3 P'} = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d^4 \Delta x e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N_c} \gamma_{ab}^{--}(\Delta x) ,} \quad (4.38)$$

7. Puisque la particule sonde se déplace selon x^+ .

8. On sous-entend, ici, que lors de l'évocation d'un objet de type « xx », ce sont des coordonnées contravariantes. Ainsi, dans la convention choisie pour les coordonnées cône de lumière, on a : $\gamma_{++} = \gamma^{--}$ (ce qui ne serait pas forcément le cas dans une autre convention).

qui est simplement la transformée de Fourier du corrélateur introduit. On rappelle, ici, que $P' = (P'^+, P'^-(P'^+, \vec{P}_t), \vec{P}_t)$.

Notons au passage que traiter le cas QED nous conduirait à une expression très similaire puisqu'il suffit de supprimer le facteur de couleur :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dX^+ d^3 P'} = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d^4 \Delta x e^{i(P'-P) \cdot \Delta x} \gamma^{--}(\Delta x) . \quad (4.39)$$

4.2.3 Évaluation explicite du corrélateur

Nous allons maintenant revenir sur la définition du corrélateur pour en extraire une expression plus explicite. Commençons par rappeler comment nous avons introduit celui-ci :

$$\gamma_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{1}{2N_C} \text{Tr} \int d^3 \tilde{p}' d^3 \tilde{p}_1 d^3 \tilde{p}_2 f_2(p_1) f_2^*(p_2) \tilde{A}_\mu^a(x_1; p', p_1) \tilde{A}_\nu^{b*}(x_2; p', p_2) , \quad (4.40)$$

dans lequel

$$\tilde{A}_\mu^a(x; p', p) = ig \int d^4 y \langle p' | j^{\alpha,c}(y) | p \rangle \Delta_{\mu\alpha}^{ac}(x - y) . \quad (4.41)$$

Donc, la quantité à étudier est la suivante⁹ :

$$\gamma_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{g^2}{2N_C} \text{Tr} \int d^3 \tilde{p}' d^3 \tilde{p}_1 d^3 \tilde{p}_2 d^4 y_1 d^4 y_2 f_2(p_1) f_2^*(p_2) \langle p' | j^{\alpha,c}(y_1) | p_1 \rangle \langle p' | j^{\beta,d}(y_2) | p_2 \rangle^* \Delta_{\mu\alpha}^{ac}(x_1 - y_1) (\Delta_{\nu\beta}^{bd}(x_2 - y_2))^* . \quad (4.42)$$

Dans les coordonnées cône de lumière et dans la limite eikonale¹⁰, les courants peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \langle p', s' | j^{\alpha,c}(y_1) | p_1, s_1 \rangle &\simeq (p_1 + p')^- e^{i(p'-p_1) \cdot y_1} \delta^{\alpha-} T^c \delta^{s' s_1} \\ \langle p', s' | j^{\beta,d}(y_2) | p_2, s_2 \rangle^* &\simeq (p_2 + p')^- e^{-i(p'-p_2) \cdot y_2} \delta^{\beta-} T^d \delta^{s' s_2} . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Deux possibilités s'offrent à nous. On peut commencer par intégrer sur les variables y_1 et y_2 et utiliser la forme intégrale du propagateur comme fait dans l'équation (4.14). L'autre stratégie est celle que nous allons suivre est d'intégrer d'abord sur p_1 et p_2 ce qui va générer des fonctions $\psi_2(y_1)$ et $\psi_2(y_2)$ de la même manière que dans (4.28)¹¹.

$$\int d^3 \tilde{p}_1 f_2(p_1) e^{-ip_1 \cdot y_1} = \psi_2(y_1) = \frac{e^{-i\vec{p} \cdot y_1}}{2\bar{p}^-} f_2(y_1) \quad (4.44)$$

On rappelle que, dans la situation que l'on regarde, la fonction $f_2(p)$ a une faible dépendance en p^+ et $\psi_2(y)$ en y^- . De plus, l'introduction de la fonction $\psi_2(y_2)$ se fait de la même manière :

$$\int d^3 \tilde{p}_2 f_2^*(p_2) e^{ip_2 \cdot y_2} = \psi_2(y_2) = \frac{e^{-i\vec{p} \cdot y_2}}{2\bar{p}^-} f_2^*(y_2) , \quad (4.45)$$

9. Pour ne pas alourdir les notations, on sous-entend, dans la suite, le spin et la couleur dans les bras et les kets.

10. Cette limite nous indique que la composante « - » de la particule du milieu se conserve.

11. C'est-à-dire dans l'hypothèse d'une fonction f_2 très piquée autour d'une valeur $\bar{p}$.

permettant de réécrire le corrélateur suivant (en utilisant le fait que dans la limite eikonale $p_1^- = p_2^- = \bar{p}^-$)

$$\gamma_{++}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{g^2}{2N_C} \text{Tr} \int d^3\tilde{p}' d^4y_1 d^4y_2 f_2(y_1) f_2^*(y_2) e^{i(p' - \bar{p}) \cdot (y_1 - y_2)} T^c T^d \Delta_{+-}^{ac}(x_1 - y_1) (\Delta_{+-}^{bd}(x_2 - y_2))^* . \quad (4.46)$$

On va maintenant passer à l'intégration sur p' . La partie transverse va simplement donner un delta de Dirac $\delta^{(2)}(\vec{y}_{1t} - \vec{y}_{2t})$. Pour ce qui est de la partie longitudinale, le facteur $2p'^-$ au dénominateur de la mesure pose problème. Cependant, toujours dans la limite eikonale, on peut dire que $p'^- \simeq \bar{p}^-$ puis introduire la densité de particules dans le milieu comme suit :

$$\tilde{\rho}_2(y_1, y_2) = \frac{f_2(y_1) f_2^*(y_2)}{2\bar{p}^-} . \quad (4.47)$$

Ainsi, l'intégration sur p'^- donne aussi un delta de Dirac $\delta(y_1^+ - y_2^+)$. Une fois ces fonctions de Dirac utilisées pour intégrer sur les composantes spatio-temporelles y_2^+ et $\vec{y}_{2t}$, on obtient

$$\gamma_{++}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{g^2}{2N_C} \text{Tr} \int d^4y_1 d^4y_2^- \tilde{\rho}_2(y_1^-, y_1^+, \vec{y}_{1t}, y_2^-, y_1^+, \vec{y}_{1t}) T^c T^d \Delta_{+-}^{ac}(x_1 - y_1) \Delta_{+-}^{bd}(x_2 - y_2)^* . \quad (4.48)$$

On a négligé, dans la dernière expression, l'exponentielle restante étant donné que la composante « + » de $p' - \bar{p}$ est extrêmement petite. De plus, on sait aussi que la densité $\tilde{\rho}_2$ a une dépendance très faible vis-à-vis des variables « - » donc on les néglige. Finalement, en introduisant la variable absolue $Y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, on peut mettre le corrélateur sous la forme

$$\gamma_{++}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{g^2}{2N_C} \text{Tr} T^c T^d \int d^2\vec{Y}_t dY^+ \rho_2(\vec{Y}_t, Y^+) \int dy_1^- \Delta_{+-}^{ac}(x_1 - y_1) \int dy_2^- (\Delta_{+-}^{bd}(x_2 - y_2))^* , \quad (4.49)$$

où $y_{1/2} = (Y^+, y_{1/2}^-, \vec{Y}_t)$.

La prochaine étape consiste à évaluer l'intégrale sur la composante « - » des propagateurs. Pour cela, on va considérer un propagateur standard régularisé par la masse de Debye μ . On se place, de plus, dans la jauge de Feynman. Ainsi $N_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}$ et $N_{+-} = -1$.

$$\Delta_{+-}^{ac}(x_1 - y_1) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta^{ac} \frac{e^{iq \cdot (x_1 - y_1)}}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (4.50)$$

Son intégrale sur y_1^- s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} \int dy_1^- \Delta_{+-}^{ac}(x_1 - y_1) &= -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta^{ac} \frac{e^{iq^+ x_1^-} e^{iq^- (x_1^+ - Y^+)} e^{-i\vec{q}_t \cdot (\vec{x}_{1t} - \vec{Y}_t)}}{2q^+ q^- - q_t^2 - \mu^2} \delta(q^+) \\ &= i \delta^{ac} \int \frac{d^2\vec{q}_t}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\vec{q}_t \cdot (\vec{x}_{1t} - \vec{Y}_t)}}{q_t^2 + \mu^2} \delta(x_1^+ - Y^+) \\ &= i \delta^{ac} \Phi(\vec{x}_{1t} - \vec{Y}_t) \delta(x_1^+ - Y^+) . \end{aligned} \quad (4.51)$$

En faisant la même chose pour le deuxième propagateur et en procédant à la trace, on obtient :

$$\gamma_{++}^{ab}(x_1, x_2) = \frac{g^2 \delta^{ab}}{2N_C} \delta(x_1^+ - x_2^+) \int d^2 \vec{Y}_t \rho_2(\vec{Y}_t, x_1^+) \Phi(\vec{x}_{1t} - \vec{Y}_t) \Phi(\vec{x}_{2t} - \vec{Y}_t) . \quad (4.52)$$

Ainsi, on trouve que le corrélateur est simplement la convolution de la densité de la cible avec le champ de fond. Pour retrouver l'expression proposée par BDIM, il nous suffit de faire l'hypothèse que la densité est uniforme et de faire ressortir le facteur de dégénérescence $2N_C$ de notre densité ρ_2 pour le simplifier avec le facteur venant de la moyenne sur les couleurs.

$$\begin{aligned} \gamma_{++}^{ab}(x_1, x_2) &= g^2 \delta^{ab} \rho_2 \delta(x_1^+ - x_2^+) \int d^2 \vec{Y}_t \Phi(\vec{x}_{1t} - \vec{Y}_t) \Phi(\vec{x}_{2t} - \vec{Y}_t) \\ &= g^2 \delta^{ab} \rho_2 \delta(x_1^+ - x_2^+) \int \frac{d^2 \vec{q}_t}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\vec{q}_t \cdot (\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t})}}{(q_t^2 + \mu^2)^2} \\ &= \gamma_{ab}^{--}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Les facteurs de couleurs sont cohérents puisque le δ^{ab} restant dans le corrélateur associé au $\frac{\delta^{ab}}{2N_C}$ présent dans l'expression de la probabilité (4.38) donnent bien un facteur C_F attendu pour la situation d'une diffusion que l'on regarde. On note, au passage, que l'on retrouve le fait que le corrélateur dépend uniquement de la différence $x_1 - x_2$ vérifiant l'hypothèse d'homogénéité.

Si on reprenait l'évaluation du corrélateur en supposant que le milieu est un vrai état fermionique à N corps, on aboutirait à l'analogie de (4.48) avec $\tilde{\rho}_2$ l'opérateur densité à un corps. Cela se généralisant aussi aux états impurs, on peut, alors, faire le lien avec le PQG et utiliser des distributions quantiques de type Fermi-Dirac. On trouverait ensuite que la limite eikonale permet de passer d'un opérateur densité à une densité de probabilité dans l'espace physique (comme on le voit, par exemple, sur (4.52)).

4.2.4 Étude analytique du corrélateur élastique

Poursuivre la voie analytique va s'avérer très rapide. En effet, partant de (4.4), il ne reste plus qu'à intégrer sur l'impulsion transverse échangée $\vec{q}_t$. Autrement dit, nous avons

$$\gamma^{--}(\Delta x) = g^2 \delta(\Delta x^+) \rho_2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{q_t dq_t d\theta}{(2\pi)^2} \frac{e^{iq_t \Delta x_t \cos \theta}}{(q_t^2 + \mu^2)^2} \quad (4.54)$$

où q_t et Δx_t sont les normes des vecteurs correspondants. L'intégration angulaire donne une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0

$$\gamma^{--}(\Delta x) = g^2 \delta(\Delta x^+) \rho_2 \int_0^\infty \frac{q_t dq_t}{(2\pi)^2} \frac{J_0(q_t \Delta x_t)}{(q_t^2 + \mu^2)^2} . \quad (4.55)$$

L'intégration sur la norme q_t , quant à elle, donne une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et de premier ordre. On obtient, alors, comme expression analytique finale pour le corrélateur élastique :

$$\gamma^{--}(\Delta x) = g^2 \delta(\Delta x^+) \rho_2 \frac{\Delta x_t}{2\pi} \frac{K_1(\Delta x_t \mu)}{2\mu} . \quad (4.56)$$

Finalement, on voit les dépendances suivantes apparaître :

- en x^- : indépendance par construction.
- en x^+ : un delta de Dirac traduisant le fait que les corrélations ne peuvent avoir lieu qu'entre des points situés au même x^+ . Cela illustre l'idée que la particule sonde « voit » les tranches successives du milieu en x^+ indépendamment.
- en x_t : une corrélation dans la région $\Delta x_t \leq 1/\mu$ dont l'allure est représentée Fig. 4.2.

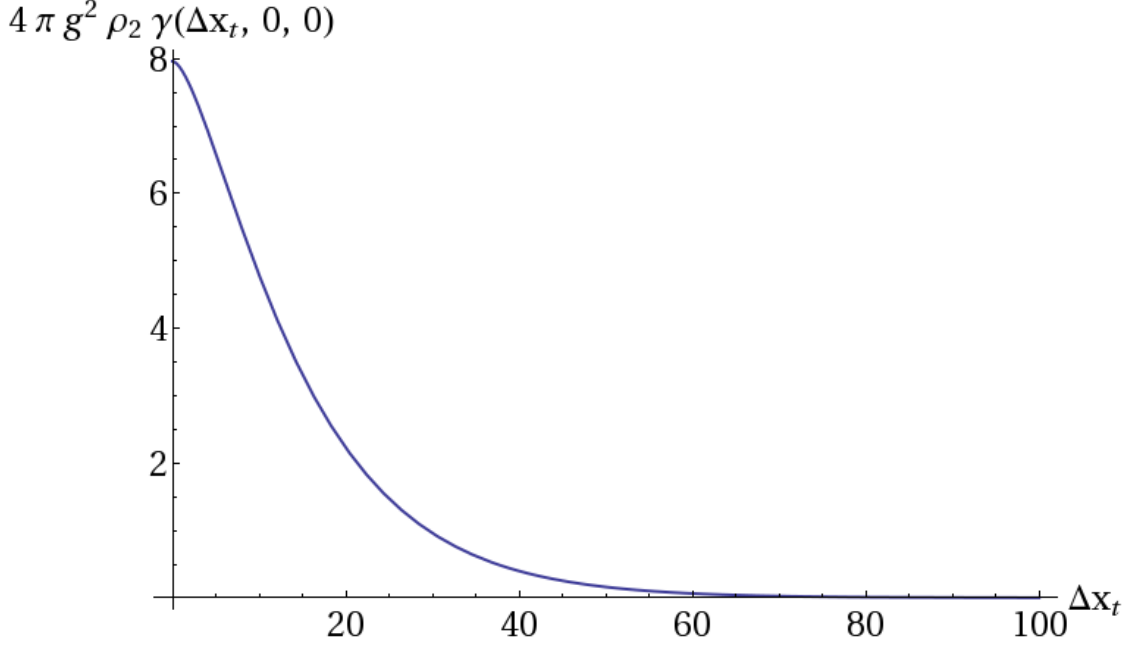


FIGURE 4.2 – Corrélateur élastique selon Δx_t pour $\mu = 0.1$ GeV.

4.3 Interactions multiples et ligne de Wilson

Dans cette partie, on va s'intéresser au problème d'une particule sonde traversant un milieu et interagissant avec celui-ci via un hamiltonien d'interaction de la forme $g J^{\mu,a} \tilde{A}_\mu^a$; $\tilde{A}_\mu^a$ étant le même potentiel que celui défini en (4.11). L'amplitude de diffusion que l'on va donc évaluer est la suivante :

$$S = \langle (P', s', i') | \text{T exp} \left(-i \int d^4 x H_{int}(x) \right) | (P, s, i) \rangle . \quad (4.57)$$

On peut développer cette exponentielle par rapport à la constante de couplage g comme suit :

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \\ S &= \langle P' | P \rangle + ig \int d^4 x \langle P' | \text{T} J^{\mu,a}(x) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) \\ &\quad + \frac{(ig)^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle P' | \text{T} J^{\mu,a}(x) J^{\nu,b}(y) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) \tilde{A}_\nu^b(y) + \dots \end{aligned} \quad (4.58)$$

Le premier terme correspond à la situation où il n'y a pas d'interaction car il est proportionnel à $\delta^{(3)}(\vec{P}' - \vec{P})$. Le second terme correspond à l'ordre 1, c'est-à-dire à l'amplitude associée à une diffusion sur le champ $\tilde{A}$. Le troisième terme

correspond à une situation à deux interactions et ainsi de suite. On va chercher la forme de ces différents termes et dégager le motif de récurrence qui apparaît.

4.3.1 Une interaction unique

On a déjà regardé cette situation et abouti à l'équation (4.19). Pour ne pas être redondant et dans un souci de complétude, on va, ici, retrouver la forme du courant associé au champ de Dirac (4.13). Repartons donc de

$$S_1 = ig \int d^4x \langle P' | T J^{\mu,a}(x) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) . \quad (4.59)$$

Le courant $J^{\mu,a}$ est donné, de manière standard, par

$$J^{\mu,a}(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu T^a \Psi(x) \quad (4.60)$$

avec

$$\Psi(x) = \int d^3\tilde{p} \sum_s \sum_i (a_p^{s,i} u^{s,i}(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{s,i,\dagger} v^{s,i}(p) e^{ip \cdot x}) . \quad (4.61)$$

Dans l'expression du champ associé à une particule type QCD, s représente le spin et i la couleur. La quantité importante à évaluer est la contraction de ce courant de Dirac par les états P' et P . Si on considère uniquement des particules¹², on peut l'écrire comme

$$\begin{aligned} \langle P' | T J^{\mu,a}(x) | P \rangle &= \int d^3\tilde{p}_1 d^3\tilde{p}_2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \langle 0 | T (a_{P'}^{s',i'} a_{p_1}^{s_1,i_1\dagger} a_{p_2}^{s_2,i_2} a_P^{s,i\dagger}) | 0 \rangle \\ &\quad \bar{u}^{s_1,i_1}(p_1) \gamma^\mu T^a u^{s_2,i_2}(p_2) e^{i(p_1-p_2) \cdot x} . \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pour évaluer les contractions présentes dans le T-produit, on utilise le théorème de Wick. Ici, il y a deux possibilités. Cependant, la contraction de P' avec P donne une situation sans interaction et ne sera pas prise en compte. Il ne reste donc qu'une seule possibilité conduisant à

$$\begin{aligned} \langle P' | J^{\mu,a}(x) | P \rangle &= \int d^3p_1 d^3p_2 \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \delta^{(3)}(\vec{P}' - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{P} - \vec{p}_2) \\ &\quad \delta_{s's_1} \delta_{ss_2} \delta_{i'i_1} \delta_{ii_2} \bar{u}^{s_1,i_1}(p_1) \gamma^\mu T^a u^{s_2,i_2}(p_2) e^{i(p_1-p_2) \cdot x} . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Une fois les deltas utilisés pour faire les intégrations sur les impulsions et les sommes sur les spins et les couleurs, on obtient pour l'amplitude S_1 :

$$S_1 = ig \int d^4x \bar{u}^{s',i'}(P') \gamma^\mu T^a u^{s,i}(P) e^{i(P'-P) \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x) . \quad (4.64)$$

Pour aller plus loin, rappelons les hypothèses fortes dans lesquelles on souhaite se placer : limite eikonale et indépendance du potentiel vis-à-vis de la composante x^- ¹³. La première nous permet de simplifier la partie spinorielle en utilisant

$$\bar{u}^{s',i'}(P') \gamma^\mu u^{s,i}(P) \simeq (P' + P)^\mu . \quad (4.65)$$

La seconde, quant à elle, permet d'intégrrer sur x^- ce qui donne une delta sur la composante « + » de la particule sonde. C'est toujours cette même idée que

12. On ne s'occupe pas des termes impliquant des opérateurs b et $b^\dagger$.

13. Hypothèse faite en début de chapitre et valable pour l'entièreté de celui-ci.

l'indépendance du potentiel vis-à-vis de la composante x^- implique la conservation de la composante « + » (et donc de l'énergie) de la particule traversant le milieu. Dans ces conditions, on a

$$S_1 = ig2P^+2\pi\delta(P'^+ - P^+) \int dx^+ d^2\vec{x}_t T^a e^{i(P'-P)^-x^+} e^{-i(\vec{P}'_t - \vec{P}_t) \cdot \vec{x}_t} \tilde{A}_+^a(x^+, \vec{x}_t) . \quad (4.66)$$

La dernière chose à faire consiste à se rappeler que la particule sonde se propage avec de très petits P^- de telle sorte que l'on va négliger l'exponentielle en dépendant : $e^{i(P'-P)^-x^+} \simeq 1$. Ainsi, on peut réécrire l'amplitude de diffusion pour une interaction

$$S_1 = 2\pi2P^+\delta(P'^+ - P^+) \int d^2\vec{x}_t e^{-i(\vec{P}'_t - \vec{P}_t) \cdot \vec{x}_t} \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_+^a(x^+, \vec{x}_t) \right] . \quad (4.67)$$

4.3.2 Deux interactions

Lorsque l'on considère deux interactions, l'amplitude de diffusion s'écrit comme suit :

$$S_2 = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \langle P' | T J^{\mu,a}(x) J^{\nu,b}(y) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) \tilde{A}_\nu^b(y) . \quad (4.68)$$

On doit, maintenant, regarder la contraction de deux opérateurs courant entre les états P et P' . Par application du théorème de Wick, on sait que seulement deux termes du produit ordonné en temps vont survivre dans cette contraction.

$$\begin{aligned} \langle P' | T J^{\mu,a}(x) J^{\nu,b}(y) | P \rangle &= \langle P' | \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu T^a \Psi(x) \overline{\bar{\Psi}(y) \gamma^\nu T^b \Psi(y)} | P \rangle \\ &+ \langle P' | \overline{\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu T^a \Psi(x)} \bar{\Psi}(y) \gamma^\nu T^b \Psi(y) | P \rangle \end{aligned} \quad (4.69)$$

Cependant, on se rend compte que ces deux termes sont équivalents par inversion de x et de y . Ainsi, l'amplitude prend la forme suivante :

$$S_2 = (ig)^2 \int d^4x d^4y e^{iP' \cdot y} \bar{u}^{s'i'}(P') \gamma^\nu T^b S_F^{ii'}(x-y) \gamma^\mu T^a u^{si}(P) e^{-iP \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x) \tilde{A}_\nu^b(y) , \quad (4.70)$$

ou bien, en remplaçant le propagateur intermédiaire de quark par son expression¹⁴ dans la limite où la masse du quark est négligeable devant les autres paramètres et toujours dans la jauge de Feynman,

$$\begin{aligned} S_2 &= (ig)^2 \int d^4x d^4y e^{iP' \cdot y} \bar{u}^{s'i'}(P') \gamma^\nu T^b \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\not{p}}{p^2 + i\epsilon} \delta^{ii'} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &\gamma^\mu T^a u^{si}(P) e^{-iP \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x) \tilde{A}_\nu^b(y) . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Toujours dans l'approximation scalaire et en ne gardant que les composantes « + », on montre que :

$$\bar{u}^{s'i'}(P') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu u^{si}(P) \simeq (P^+ + p^+)(p^+ + P'^+) \simeq (2P'^+)^2 . \quad (4.72)$$

Dans la dernière égalité, on utilise le fait que, dans la limite eikonale, la composante « + » est conservée lors de la propagation dans le milieu¹⁵. Ainsi, dans ces

14. Ici, l'impulsion intermédiaire est notée p .

15. Sauf dans l'exponentielle pour conserver une intégration sur p^+ . Cette hypothèse sera rediscutée lorsque l'on étendra le formalisme au delà de la limite eikonale dans le prochain chapitre.

conditions et en négligeant la composante transverse de l'impulsion intermédiaire dans le dénominateur du propagateur, les intégrations sur d^4p se font aisément ¹⁶ :

$$\int dp^- \frac{e^{i(x^+ - y^+)p^-}}{2P^+p^- + i\epsilon} = -\Theta(y^+ - x^+) \frac{2i\pi}{2P^+} , \quad (4.73)$$

$$\int dp^+ e^{i(x^- - y^-)p^+} = 2\pi\delta(x^- - y^-) , \quad (4.74)$$

$$\int d^2\vec{p}_t e^{-i(\vec{x}_t - \vec{y}_t) \cdot \vec{p}_t} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{x}_t - \vec{y}_t) . \quad (4.75)$$

En injectant tout cela dans l'amplitude de diffusion double, en effectuant les intégrations possibles avec les deltas de Dirac et en faisant l'intégration sur x^- comme dans le cas à une diffusion, on arrive à

$$S_2 = (ig)^2 2\pi\delta(P'^+ - P^+) 2P^+ \int d^2\vec{x}_t dx^+ dy^+ e^{-i\vec{x}_t \cdot (\vec{P}'_t - \vec{P}_t)} \Theta(y^+ - x^+) T^a \tilde{A}_a^-(x) T^b \tilde{A}_b^-(y) . \quad (4.76)$$

On introduit enfin l'ordonnancement selon l'axe « + » des champs $\tilde{A}$ représenté par $\mathcal{P}$ en utilisant la relation suivante :

$$\int dx^+ dy^+ \Theta(y^+ - x^+) T^a \tilde{A}_a^-(x) T^b \tilde{A}_b^-(y) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_a^-(x) \right]^2 . \quad (4.77)$$

Ainsi, on obtient finalement, pour l'amplitude de diffusion double, l'expression suivante :

$$S_2 = 2\pi\delta(P'^+ - P^+) 2P^+ \int d^2\vec{x}_t e^{-i\vec{x}_t \cdot (\vec{P}'_t - \vec{P}_t)} \frac{1}{2} \mathcal{P} \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_a^-(x^+, \vec{x}_t) \right]^2 . \quad (4.78)$$

4.3.3 Généralisation à n diffusions

La généralisation à un nombre arbitraire d'interactions se fait aisément en suivant les mêmes méthodes que pour deux diffusions. En effet, les intégrations sur les impulsions intermédiaires introduiront autant de fonctions deltas et de fonctions échelons que nécessaire pour aboutir à une généralisation de l'équation (4.76). De plus, (4.77) s'étend, de même, au cas de n champs :

$$\int dx_1^+ dx_2^+ \dots dx_n^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) \dots \Theta(x_n^+ - x_{n-1}^+) \tilde{A}^-(x_1^+) \dots \tilde{A}^-(x_n^+) = \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left[\int dx^+ \tilde{A}(x^+) \right]^n . \quad (4.79)$$

Donc, on peut écrire S_n , l'amplitude associée à n interactions dans le milieu, comme

$$S_n = 2\pi\delta(P'^+ - P^+) 2P^+ \int d^2\vec{x}_t e^{-i\vec{x}_t \cdot (\vec{P}'_t - \vec{P}_t)} \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_a^+(x^+, \vec{x}_t) \right]^n . \quad (4.80)$$

16. On note, tout de même, que l'intégrale sur p^- comporte aussi un terme en $\Theta(x^+ - y^+)$ mais que celui-ci correspond à de fortes violations de la conservation de P^+ lors de la propagation. On le négligera donc.

On reconnaît ainsi, le terme d'ordre n d'une exponentielle et on peut écrire l'amplitude totale d'interaction dans le milieu définie par

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \quad (4.81)$$

comme

$$S = 2\pi\delta(P'^+ - P^+)2P^+ \int d^2\vec{x}_t e^{-i\vec{x}_t \cdot (\vec{P}'_t - \vec{P}_t)} \mathcal{P} \exp \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_a^+(x^+, \vec{x}_t) \right]. \quad (4.82)$$

On définit, dans cette dernière expression, la ligne de Wilson suivante :

$$W(\vec{x}_t) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_a^-(x^+, \vec{x}_t) \right]. \quad (4.83)$$

On retiendra cette expression pour l'amplitude totale d'interaction dans le cas où initialement la particule n'a pas de moment transverse :

$$S = 2P^+ \int d^2\vec{x}_t dx^- e^{-i\vec{x}_t \cdot \vec{P}'_t} e^{i(P'^+ - P^+)x^-} W(\vec{x}_t). \quad (4.84)$$

En conclusion de cette section, on voit que l'on a aboutit à une équation régissant la propagation dans un milieu ayant une configuration donnée par le champ $\tilde{A}$. On constate que, dans l'hypothèse où ce dernier ne dépend pas de x^- et dans la limite eikonale, l'effet du milieu est simplement d'induire une rotation dans l'espace de couleur à chaque diffusion mais sans changement d'hélicité. De plus, la particule sonde conserve sa composante « + » lors de son parcours dans le milieu : la perte d'énergie associée à cette propagation est donc négligée. On comprend aisément qu'il va falloir aller au-delà de cette hypothèse d'indépendance en x^- du champ pour induire une perte d'énergie sur la particule sonde.

4.4 Probabilité totale et retour du corrélateur

Dans cette section, nous allons évaluer la probabilité associée à l'amplitude (4.84). On a vu dans la première section de ce chapitre, que la probabilité associée à une interaction pouvait s'écrire simplement comme une transformée de Fourier du corrélateur. Ensuite, on a obtenu que l'amplitude totale pouvait s'exponentier en introduisant une ligne de Wilson. On va démontrer, maintenant, que l'évaluation de la probabilité totale entraîne l'exponentiation du corrélateur.

Cette probabilité totale s'écrit, dans la continuité de la section précédente,

$$P = \int d^3\tilde{P}' d^3\tilde{P}_1 d^3\tilde{P}_2 f_1(P_1) f_1^*(P_2) \langle SS^* \rangle \quad (4.85)$$

avec $\langle \dots \rangle$ une moyenne sur le milieu à préciser. En injectant (4.84) dans la probabilité, on peut arriver à

$$P = \int d^3\tilde{P}' d^3\tilde{P}_1 d^3\tilde{P}_2 f_1(P_1) f_1^*(P_2) d^3x_1 d^3x_2 4P_1^+ P_2^+ e^{i(P'^+ - P_1^+)x_1^-} e^{-i(P'^+ - P_2^+)x_2^-} e^{-i(\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t}) \cdot \vec{P}'_t} \langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle. \quad (4.86)$$

En utilisant les relations (4.28) et (4.29), on introduit la densité associée à la particule sonde. De plus, on va montrer que le produit des lignes de Wilson moyenné sur le milieu ne dépend que de la différence $\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t}$. Donc, on va pouvoir effectuer le changement de variable déjà rencontré en (4.32) et la probabilité devient

$$P = \int d^3\tilde{P}' d^3\Delta x d^3X 2P^+ \rho_1(X) e^{i(P'-P)\cdot\Delta x} \langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle . \quad (4.87)$$

On peut, maintenant, introduire la probabilité d'interaction par unité de flux entrant de la particule sonde $\mathcal{P}$ (4.36) :

$$\mathcal{P} = 2P^+ \int d^3\tilde{P}' d^3\Delta x e^{i(P'-P)\cdot\Delta x} \langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle \quad (4.88)$$

et, finalement, en intégrant sur Δx^- (ce qui donne un delta de Dirac étant donné que la ligne de Wilson dépend uniquement des variables transverses) puis sur P'^+ (en utilisant ce delta de Dirac) :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2\vec{P}_t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{\Delta} x_t e^{i\vec{P}_t \cdot \vec{\Delta} x_t} \langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle . \quad (4.89)$$

On voit, ainsi, que la moyenne sur le milieu concerne uniquement le produit des lignes de Wilson. Une fois développées, les exponentielles contenues dans ces lignes de Wilson vont faire apparaître des objets de la forme

$$\langle \tilde{A}(x_1) \tilde{A}(x_2) \dots \tilde{A}^*(x_{n-1}) \tilde{A}^*(x_n) \rangle, \quad (4.90)$$

n correspondant aux nombres d'interactions. Il est à noter que, dans cette expression, $x_i = (x_i^+, \vec{x}_{it})$ mais que les moyennes sur le milieu seront vraies aussi dans le cas d'une dépendance en x_i^- .

Notons maintenant $p_1, p_2, \dots, p_N$, les N particules constituant le milieu dans l'amplitude initiale et $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N$, les mêmes particules dans l'amplitude conjuguée initiale. On considérera, de même, $p'_1, p'_2, \dots, p'_N$, les N particules constituant le milieu dans l'état final. Les diffusions étant élastiques, p_i dans l'état initial correspond à p'_i dans l'état final. La moyenne sur toutes ces variables est donc faite comme suit :

$$\langle (\dots) \rangle \equiv \frac{1}{(2N_c)^N} \text{Tr} \int \prod_{i=1}^N (d^3\tilde{p}'_i d^3\tilde{p}_i d^3\tilde{\bar{p}}_i) f_2(p_1, p_2, \dots, p_N) f_2^*(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) (\dots) . \quad (4.91)$$

Avant de regarder ce que donne la moyenne sur le milieu d'un ou plusieurs champs $\tilde{A}$, il nous faut rappeler la définition explicite de ce dernier (4.11) :

$$\tilde{A}_\mu^a(x; p', p) = ig \int d^4y \langle p', r', j' | j_{jj'}^{\nu b}(y) | p, r, j \rangle \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) . \quad (4.92)$$

Ce champ a été défini lors de l'étude d'une diffusion sur une particule du milieu. Cependant, cette manière de poser les choses laisse de côté les autres particules du milieu et, dans le but de calculer les moyennes sur toutes ces particules, on peut montrer que le champ $\tilde{A}$ est correctement défini par l'expression plus générale

suivante¹⁷ :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu^a(x; p'_1, \dots, p'_N, p_1, \dots, p_N) &= ig \int d^4y \langle p'_1 \dots p'_N | j^{\nu, b}(y) | p_1 \dots p_N \rangle \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x - y) , \\ \tilde{A}_+^a(x; p'_1, \dots, p'_N, p_1, \dots, p_N) &= ig T^a \sum_{k=1}^N 2p_k^- \frac{e^{i(p'_k - p_k) \cdot x}}{(p'_k - p_k)^2} \prod_{i=1, i \neq k}^N 2p_i^- (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) .\end{aligned}\tag{4.93}$$

Ce champ indique que la particule sonde interagit avec la k -ème particule du milieu laissant les $N - 1$ autres intactes. Il faut, donc, ensuite, considérer la diffusion sur chacune des N particules ; ce que fait la somme sur k .

On peut, désormais, regarder la moyenne sur les différentes puissances de ce champ. Tout d'abord, il est trivial, ayant posé correctement les normalisations, que $\langle 1 \rangle = 1$. Ensuite, dans le terme $\langle \tilde{A}_+^a(x) \rangle$, on trouve une trace sur T^a ce qui donne 0. Passons au terme suivant :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^{b*}(y) \rangle &= \frac{|ig|^2}{(2N_c)^N} \text{Tr} \int \prod_{i=1}^N (d^3 \tilde{p}'_i d^3 \tilde{p}_i d^3 \tilde{\bar{p}}_i) f_2(p_1, p_2, \dots, p_N) f_2^*(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) \\ &\quad \sum_{k, \bar{k}} 2p_k^- T^a \frac{e^{i(p'_k - p_k) \cdot x}}{(p'_k - p_k)^2} \prod_{i=1, i \neq k}^N 2p_i^- (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) \\ &\quad 2p_{\bar{k}}^- T^b \frac{e^{-i(p'_{\bar{k}} - \bar{p}_{\bar{k}}) \cdot y}}{(p'_{\bar{k}} - \bar{p}_{\bar{k}})^2} \prod_{i=1, i \neq \bar{k}}^N 2p_i^- (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}'_i - \vec{p}_i) .\end{aligned}\tag{4.94}$$

Cette double somme comprend toutes les combinaisons possibles. Cependant, on peut montrer que seuls les termes de la somme pour lesquels $k = \bar{k}$ sont pertinents. En effet, si les deux interactions ont lieu sur deux particules différentes dans le milieu, alors on aura, du point de vue de la couleur des contributions proportionnelles à $\text{Tr} T^a \text{Tr} T^b$ donnant 0. Dans les cas $k = \bar{k}$, par contre, on obtient la trace $\text{Tr} T^a T^b$ qui est non nulle. On obtient donc, après intégration sur tous les deltas de Dirac

$$\begin{aligned}\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^{b*}(y) \rangle &= g^2 \frac{\delta^{ab}}{2N_c} \sum_{k=1}^N \int d^3 \tilde{p}'_k d^3 \tilde{p}_k d^3 \tilde{\bar{p}}_k f_2(p_k) f_2^*(\bar{p}_k) \\ &\quad 2p_k^- \frac{e^{i(p'_k - p_k) \cdot x}}{(p'_k - p_k)^2} 2p_k^- \frac{e^{-i(p'_k - \bar{p}_k) \cdot y}}{(p'_k - \bar{p}_k)^2} .\end{aligned}\tag{4.95}$$

On reconnaît, à l'intérieur de la somme, le corrélateur défini en (4.27) avec le champ $\tilde{A}$ originel. Dorénavant, on appellera corrélateur, cette somme sur tous les centres diffuseurs du corrélateur précédent de telle sorte que

$$\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^{b*}(y) \rangle = \gamma(x - y) .\tag{4.96}$$

On pourrait se poser la question suivante : que fait-on des termes du type $\langle \tilde{A}(x_1) \tilde{A}(x_2) \rangle$ ou $\langle \tilde{A}^*(x_1) \tilde{A}^*(x_2) \rangle$? En fait, on pourrait montrer, au vu du produit

17. Par souci de simplicité dans les notations, on omet, ici, la couleur et le spin associés à chaque particule du milieu.

des lignes de Wilson (4.89) que de tels objets sont évalués au même point de l'espace transverse et sont proportionnels $\delta(x_1^+ - x_2^+)\gamma_t(\vec{0}_t)$. Cela étant dit, il n'est, désormais, plus nécessaire de préciser $\tilde{A}$ ou $\tilde{A}^*$.

On peut désormais passer à la moyenne sur le milieu de trois champs $\tilde{A}$. On se limite aux situations où l'on a, au maximum, deux interactions sur une même particule. Ainsi, réutilisant l'argument précédent sur la couleur, on est assuré que toutes les moyennes impliquant un nombre impair de $\tilde{A}$ seront nulles. En effet, il restera forcément une trace $\text{Tr } T^a$ toute seule, comme le montre la figure 4.3.

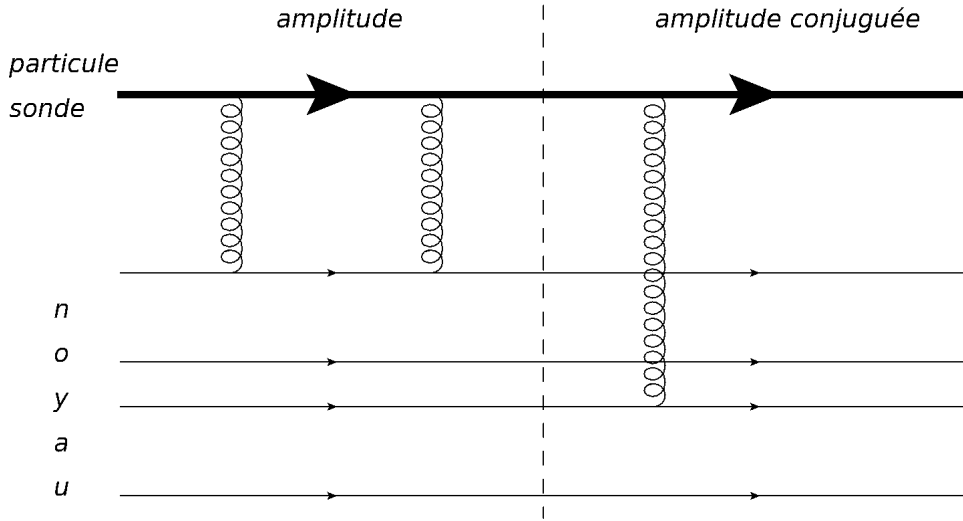


FIGURE 4.3 – Les traces sont évaluées sur les lignes du noyau. S'il y a un unique attachement pour une ligne, cela correspond à un terme proportionnel à $\text{Tr } T^a = 0$.

Reste à voir ce qu'il se passe pour un nombre pair de champ $\tilde{A}$. Dans l'hypothèse où les centres diffuseurs sont indépendants les uns des autres, on peut dire qu'il faut qu'il y ait exactement deux attachements (ou 0 bien sûr) par particule du milieu. Et si l'on suppose que la partie connexe du corrélateur $\langle A^4 \rangle$ est petite¹⁸, alors la moyenne d'un nombre pair de champ donnera la somme de toutes les combinaisons deux à deux possibles ; une combinaison de deux champs étant égale au corrélateur. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(x_1)\tilde{A}(x_2)\tilde{A}(x_3)\tilde{A}(x_4) \rangle &= \gamma(x_1 - x_2)\gamma(x_3 - x_4) + \\ &\quad \gamma(x_1 - x_3)\gamma(x_2 - x_4) + \gamma(x_1 - x_4)\gamma(x_2 - x_3) . \end{aligned} \quad (4.97)$$

Maintenant que nous avons plus clairement défini les moyennes sur le milieu, voyons quelles sont justement les contributions à prendre en compte au vu de l'ordonnancement le long de la ligne de Wilson. En effet, dans la moyenne d'un nombre pair de champ, certaines combinaisons seront rendues impossibles par cet arrangement en x^+ . Regardons ce qu'il se passe ordre par ordre en développant les exponentielles présentes dans l'expression suivante

$$\begin{aligned} \langle W(\vec{x}_{1t})W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle &= \\ \langle \mathcal{P} \exp \left(ig \int dx^+ \tilde{A}^-(x^+, \vec{x}_{1t}) \right) \mathcal{P} \exp \left(-ig \int dx^+ \tilde{A}^-(x^+, \vec{x}_{2t}) \right) \rangle . \end{aligned} \quad (4.98)$$

18. On néglige en fait le premier terme dans le développement $\langle A^4 \rangle = \langle A^4 \rangle_C + \langle A^2 \rangle \langle A^2 \rangle$. Cela revient à négliger les corrélations entre les particules du milieu.

La contribution d'ordre 0 est triviale puisqu'elle correspond au 1. On a donc, comme vu plus haut, après moyenne, toujours 1. La contribution d'ordre 1 va impliquer la moyenne sur un seul champ et sera donc nulle ainsi que toutes les contributions d'ordre impair¹⁹.

Passons à la contribution en g^2 ²⁰. Il y a trois termes qui y contribuent : le produit de l'ordre 1 de la première exponentielle avec l'ordre 1 de la seconde que l'on note (1) et les deux termes venant du produit d'un ordre 0 avec un ordre 2 qui sont équivalents et que l'on note (2).

$$\begin{aligned} (1) &= -(ig)^2 C_F \int dx_1^+ dx_2^+ \langle \tilde{A}^-(x_1^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_2^+, \vec{x}_{2t}) \rangle \\ &= g^2 C_F \int dx_1^+ dx_2^+ \gamma(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Il n'y a plus qu'à remplacer l'expression du corrélateur par celle obtenue en (4.53). On peut alors intégrer sur x_2^+ et l'intégrale restante sur x_1^+ correspond à la distance parcourue dans le milieu que l'on notera L .

$$(1) = g^2 C_F L \gamma_t(\vec{\Delta x}_t) \quad (4.100)$$

Passons aux deux autres termes :

$$\begin{aligned} (2) &= 2(ig)^2 C_F \int dx_1^+ dx_2^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) \langle \tilde{A}^-(x_1^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_2^+, \vec{x}_{1t}) \rangle \\ &= -2g^2 C_F \int dx_1^+ dx_2^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) \delta(x_2^+ - x_1^+) \gamma_t(\vec{0}) \\ &= -g^2 C_F L \gamma_t(\vec{0}) . \end{aligned} \quad (4.101)$$

Le passage à la dernière ligne se fait en utilisant, d'une part que $\Theta(x_2^+ - x_1^+) \Theta(x_2^+ - x_1^+) = \Theta(x_2^+ - x_1^+)$ et, d'autre part que

$$\int dx_1^+ dx_2^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) = \frac{1}{2} \int dx_1^+ dx_2^+ \quad (4.102)$$

où, dans la deuxième expression, il n'y a plus d'ordonnancement. Ainsi, la contribution totale en g^2 s'écrit

$$\langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle_{g^2} = -g^2 C_F L (\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t)) . \quad (4.103)$$

On va passer, ensuite, à la contribution en g^4 . C'est cette dernière qui va nous montrer comment l'ordonnancement le long de la ligne de Wilson vient sélectionner certains termes. Cinq termes contribuent à cet ordre. Regardons celui qui vient du produit 1 par g^4 (qui est égal à celui venant de g^4 par 1). On le note (1).

$$\begin{aligned} (1) &= (ig)^4 \int dx_1^+ dx_2^+ dx_3^+ dx_4^+ \Theta(x_4^+ - x_3^+) \Theta(x_3^+ - x_2^+) \Theta(x_2^+ - x_1^+) \\ &\quad \langle \tilde{A}^-(x_1^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_2^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_3^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_4^+, \vec{x}_{1t}) \rangle \end{aligned} \quad (4.104)$$

19. Il est intéressant de noter que cette disparition de tous les ordres impairs n'est pas uniquement dû à l'argument de la couleur. En effet, on peut montrer que la contribution à l'ordre 1 vient de deux termes qui sont conjugués hermitiques l'un par rapport à l'autre. Ces termes étant imaginaire pur, leur différence est nulle. Cela est vrai à tous les ordres impairs et ainsi, cette propriété est vraie aussi bien en QCD qu'en QED.

20. On ne compte pas, dans ce calcul d'ordre, la constante de couplage « rangée » dans le champ $\tilde{A}$.

Sur les trois combinaisons possibles avec ces 4 champs, le fait que $x_4^+ \geq x_3^+ \geq x_2^+ \geq x_1^+$ implique que seule la combinaison x_1^+ avec x_2^+ et x_3^+ avec x_4^+ est non nulle (Fig. 4.4). En effet, imaginons que l'on combine le champ en x_1^+ avec celui en x_4^+ . Etant donné que le corrélateur contient un delta de Dirac sur les composantes $+$, alors cette situation entraîne l'égalité entre les composantes $+$ des 4 champs. Cela revient à n'avoir qu'une seule interaction et on exclut, donc, ces cas de figure. La troisième combinaison tombe grâce au même argument. Finalement, on a :

$$\begin{aligned} (1) &= (ig)^4 C_F^2 \int dx_1^+ dx_3^+ \Theta(x_3^+ - x_1^+) \Theta(0)^2 \gamma_t(\vec{0}) \\ &= g^4 C_F^2 \frac{L^2}{2} \Theta(0)^2 \gamma_t(\vec{0})^2 . \end{aligned} \quad (4.105)$$

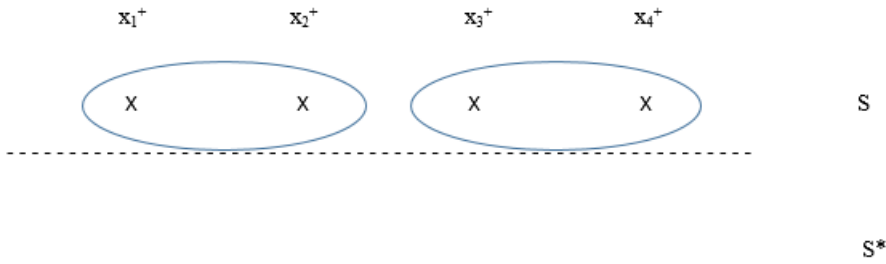


FIGURE 4.4 – Seule combinaison possible en accord avec l'ordonnancement en x^+ lorsque tous les champs sont dans l'amplitude (ou dans l'amplitude conjuguée).

Passons aux deux termes venant d'un ordre 1 multiplié par un ordre 3 que l'on note (2) :

$$\begin{aligned} (2) &= -(ig)^4 C_F^2 \int dx_1^+ dx_2^+ dx_3^+ dx_4^+ \Theta(x_4^+ - x_3^+) \Theta(x_3^+ - x_2^+) \\ &\quad \langle \tilde{A}^-(x_1^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_2^+, \vec{x}_{2t}) \tilde{A}^-(x_3^+, \vec{x}_{2t}) \tilde{A}^-(x_4^+, \vec{x}_{2t}) \rangle . \end{aligned} \quad (4.106)$$

Ici, il y a uniquement 2 combinaisons qui sont non-nulles, pour les mêmes raisons que précédemment (Fig. 4.5). Il s'agit de celles où x_1^+ (qui est, par exemple, dans l'amplitude) se contracte avec x_2^+ ou x_4^+ .

$$\begin{aligned} (2) &= -2g^4 C_F^2 \int dx_1^+ dx_3^+ \Theta(0) \Theta(x_3^+ - x_1^+) \gamma_t(\vec{0}) \gamma_t(\vec{\Delta x}_t) \\ &= -2g^4 C_F^2 \frac{L^2}{2} \Theta(0) \gamma_t(\vec{0}) \gamma_t(\vec{\Delta x}_t) \end{aligned} \quad (4.107)$$

Enfin, regardons le dernier terme correspondant au produit d'un ordre 2 dans l'amplitude avec un ordre 2 dans l'amplitude conjuguée et que l'on note (3).

$$\begin{aligned} (3) &= (ig)^4 C_F^2 \int dx_1^+ dx_2^+ dx_3^+ dx_4^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) \Theta(x_4^+ - x_3^+) \\ &\quad \langle \tilde{A}^-(x_1^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_2^+, \vec{x}_{1t}) \tilde{A}^-(x_3^+, \vec{x}_{2t}) \tilde{A}^-(x_4^+, \vec{x}_{2t}) \rangle \end{aligned} \quad (4.108)$$

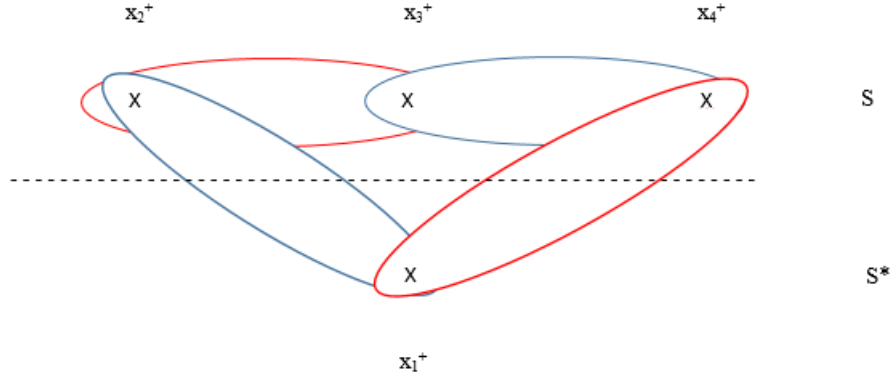


FIGURE 4.5 – Ici deux combinaisons différentes (représentées par différentes couleurs) sont possibles.

Dans cette situation, deux combinaisons sont possibles (Fig. 4.6) : on peut former deux corrélateurs au même point transverse ou bien deux corrélateur en $\vec{\Delta}x_t$:

$$\begin{aligned} (3) &= g^4 C_F^2 \int dx_1^+ dx_2^+ \Theta(x_2^+ - x_1^+) \gamma_t^2(\vec{\Delta}x_t) + g^4 \int dx_1^+ dx_3^+ \Theta(0)^2 \gamma_t^2(\vec{0}) \\ &= g^4 C_F^2 \frac{L^2}{2} \gamma_t^2(\vec{\Delta}x_t) + g^4 C_F^2 L^2 \Theta(0)^2 \gamma_t^2(\vec{0}) . \end{aligned} \quad (4.109)$$

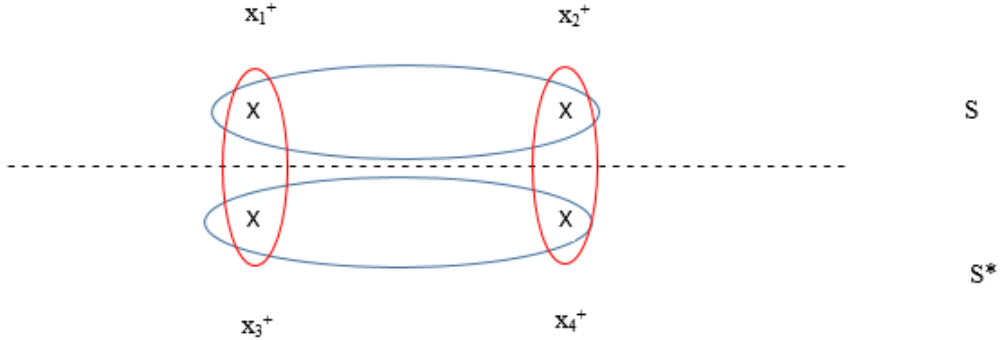


FIGURE 4.6 – Dans cette situation, soit on forme deux corrélateurs en $\vec{\Delta}x_t = 0$ en associant les deux champs dans l'amplitude et dans l'amplitude conjuguée (en bleu), soit on forme deux corrélateurs en $\vec{\Delta}x_t$ en prenant un champ dans l'amplitude et un dans l'amplitude conjuguée (en rouge). La possibilité obtenue par croisement n'est pas viable de par l'ordonnancement selon x^+ .

Après addition de tous les termes et en prenant $\Theta(0) = 1/2$, on trouve la contribution en g^4 :

$$\langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle_{g^4} = 2(1) + 2(2) + (3) = \frac{1}{2} g^4 C_F^2 L^2 (\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta}x_t))^2 . \quad (4.110)$$

Ainsi, on voit un schéma d'exponentiation apparaître si bien que :

$$\langle W(\vec{x}_{1t})W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle = \exp \left(-g^2 C_F L(\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t)) \right) . \quad (4.111)$$

Pour terminer, on peut donc réécrire la probabilité de diffusion totale dans le milieu en injectant la moyenne des lignes de Wilson dans l'expression (4.89) :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2\vec{P}_t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{\Delta x}_t e^{i\vec{P}_t \cdot \vec{\Delta x}_t} \exp \left(-g^2 C_F L(\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t)) \right) . \quad (4.112)$$

On retrouve, ainsi, l'expression démontrée par BDIM [59]. Ayant fait le travail avec un gluon comme particule sonde, ils obtiennent un facteur de couleur N_C au lieu du C_F présent ici pour un quark.

Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, nous avons résumé une manière d’appréhender la diffusion élastique dans un milieu en supposant que ce dernier interagit avec la particule sonde via un potentiel $\tilde{A}$, qui s’avère être classique. L’hypothèse la plus importante est l’indépendance de celui-ci par rapport à la variable cône de lumière x^- . Celle-ci découle du fait que la diffusion élastique ne modifie pas la composante « + » de l’impulsion de la particule sonde. En lien avec cela, on se place aussi dans le cadre de la limite eikonale : la composante « + » de l’impulsion de la particule sonde et la composante « – » de l’impulsion des particules du milieu sont très grandes devant toutes les autres échelles du problème.

Dans cette situation, nous avons pu retrouver les principaux résultats de BDIM et CSS. Concernant le propagateur, nous avons donné une démonstration de la forme proposée par BDIM (4.53) :

$$\gamma^{ab}(x_1 - x_2) = g^2 \delta^{ab} \rho_2 \delta(x_1^+ - x_2^+) \int \frac{d^2 \vec{q}_t}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\vec{q}_t \cdot (\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t})}}{(q_t^2 + \mu^2)^2}$$

et établi que la probabilité d’une diffusion unique dans le milieu était simplement reliée à la transformée de Fourier du corrélateur.

Ensuite, nous avons retrouvé le fait que l’amplitude de diffusion multiple dans le milieu pouvait se mettre sous la forme d’une ligne de Wilson (4.84) comme suit :

$$S = 2\pi \delta(P'^+ - P^+) 2P^+ \int d^2 \vec{x}_t e^{-i\vec{x}_t \cdot \vec{P}'_t} W(\vec{x}_t) .$$

De plus, cette exponentiation se retrouve au niveau de la probabilité. En effet, on retrouve le résultat de BDIM concernant la probabilité totale de diffusion dans un milieu. L’aspect important dans le cas de la diffusion élastique réside dans le plan transverse. Si l’on avait plusieurs particules sondes distribuées selon une densité de probabilité gaussienne, alors, suite à la diffusion dans le milieu, cette gaussienne subirait un élargissement lié à (4.112).

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2 \vec{P}_t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \Delta x_t e^{i\vec{P}_t \cdot \Delta x_t} \exp \left(-g^2 C_F L (\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\Delta x_t)) \right)$$

Le but du prochain chapitre va être de relaxer l’hypothèse principale de celui-ci ; à savoir, le caractère élastique des interactions modélisées par $\tilde{A}$. Cela va se faire en ajoutant une dépendance en x^- dans ce dernier.

CHAPITRE 5

DE LA MODÉLISATION DE LA DIFFUSION INÉLASTIQUE DANS UN MILIEU

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur l'hypothèse principale du chapitre précédent. On considérera toujours la propagation d'une particule sonde dans un milieu avec une interaction modélisée par un potentiel $\tilde{A}(x)$. Cependant, pour envisager une perte d'énergie de la particule traversant le milieu, nous avons vu qu'il fallait avoir une dépendance vis-à-vis de la variable cône de lumière x^- . Le processus physique que l'on souhaite associer à l'interaction avec ce nouveau potentiel effectif sera l'émission d'un rayonnement de faible énergie. Nous allons donc étudier les conditions dans lesquelles le formalisme du chapitre précédent peut être étendu.

Dans la même logique, nous allons faire intervenir un corrélateur que nous qualifierons, cette fois, d'inélastique. Aussi, nous généraliserons, pour la première fois dans la littérature, l'amplitude de diffusion totale dans le milieu exprimée sous la forme d'une ligne de Wilson.

Sommaire

5.1	Interaction multiple dans un champ dépendant de x^-	101
5.1.1	Une interaction unique	101
5.1.2	Deux interactions	102
5.1.3	Généralisation à n diffusions	105
5.2	Probabilité d'interaction et corrélateur inélastique . .	106
5.2.1	Introduction d'un corrélateur inélastique	106
5.2.2	Calcul de la probabilité totale d'interaction dans le milieu	106
5.3	Corrélateur inélastique	108
5.3.1	Lien entre section efficace et corrélateur élastique	108
5.3.2	Définition de l'espace des phases du gluon rayonné . . .	110

5.1 Interaction multiple dans un champ dépendant de x^-

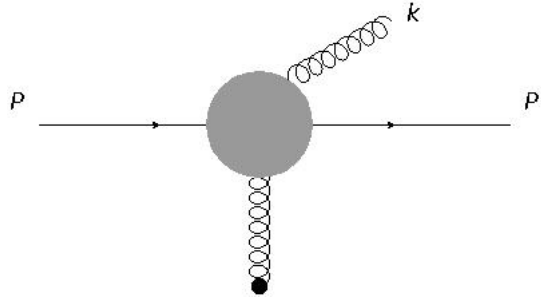
On va considérer le même problème que dans la section 4.3 ; à savoir la diffusion multiple d'une particule sonde ultrarelativiste dans un milieu interagissant via un hamiltonien d'interaction de la forme $H_{int}(x) = gJ^{\mu,a}(x)\tilde{A}_\mu^a(x)$. Cependant, désormais, on prend en compte la dépendance en x^- du potentiel effectif $\tilde{A}$. On cherche toujours à évaluer la quantité

$$S = \langle (P', s', i') | T \exp \left(-i \int d^4x H_{int}(x) \right) | (P, s, i) \rangle \quad (5.1)$$

et la décomposition suivante est toujours valable

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \\ S &= \langle P' | P \rangle + ig \int d^4x \langle P' | T J^{\mu,a}(x) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) \\ &\quad + \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \langle P' | T J^{\mu,a}(x) J^{\nu,b}(y) | P \rangle \tilde{A}_\mu^a(x) \tilde{A}_\nu^b(y) + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Du point de vue des diagrammes de Feynman, l'interaction de la particule sonde avec le champ $\tilde{A}$ peut être représentée comme une diffusion radiative :



Dans cette figure, le « blob » représente les trois diagrammes différents à prendre en compte lors d'une émission de gluon. On se permet de reformuler ce type de processus sous forme d'un potentiel effectif car on va considérer uniquement des gluons de suffisamment faible énergie pour que le temps de formation soit court et, ainsi, qu'on puisse considérer les deux vertex présents dans le diagramme réel comme un seul. En fait, on reformule le phénomène radiatif comme une interaction de type $J^+ \tilde{A}_{\text{eff}}^-$ tout en sachant que ce champ effectif contient un propagateur¹.

5.1.1 Une interaction unique

Dans le cas d'une seule interaction avec le milieu, on peut reprendre l'équation (4.64), dernière expression de S_1 avant utilisation de l'hypothèse d'indépendance vis-à-vis de x^- :

$$S_1 = ig \int d^4x \bar{u}^{s',i'}(P') \gamma^\mu T^a u^{s,i}(P) e^{i(P'-P) \cdot x} \tilde{A}_\mu^a(x) . \quad (5.3)$$

1. On omettra l'indice eff pour le champ dans la suite par souci de lisibilité.

On va garder, tout de même, la limite eikonale permettant de simplifier l'écriture du courant et des spineurs de Dirac. Ainsi, on a

$$S_1 = (P'^+ + P^+) \int d^4x e^{i(P'-P) \cdot x} T^a \tilde{A}_+^a(x) . \quad (5.4)$$

Comme dans la version indépendante de x^- , on négligera les P^- dans l'exponentielle. De plus, dans l'optique de retrouver une ligne de Wilson pour l'amplitude totale, on va considérer que $P'^+ + P^+ \simeq 2P'^+$ mais garder explicite la différence $P'^+ - P^+$. On obtient, finalement, l'expression finale de S_1 dans cette version :

$$S_1 = 2P'^+ \int d^2\vec{x}_t dx^- e^{i(P'^+ - P^+)x^-} e^{-i(\vec{P}'_t - \vec{P}_t) \cdot \vec{x}_t} \left[ig \int dx^+ T^a \tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{x}_t) \right] . \quad (5.5)$$

5.1.2 Deux interactions

Pour la situation où la particule sonde interagit deux fois dans le milieu, on peut repartir de l'expression suivante :

$$S_2 = (ig)^2 (P'^+ + P^+)^2 \int d^4x d^4y e^{iP' \cdot y} e^{-iP \cdot x} \underbrace{\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{ie^{il \cdot (x-y)}}{l^2 + i\epsilon}}_{(1)} T^a \tilde{A}_+^a T^b \tilde{A}_+^b . \quad (5.6)$$

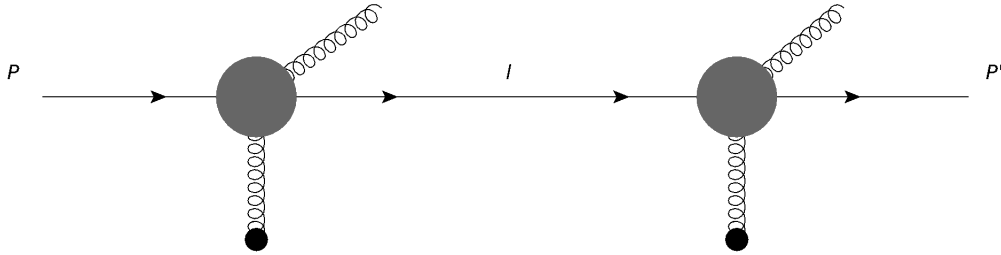


FIGURE 5.1 – Diagramme de Feynman illustrant deux interactions avec $\tilde{A}$.

On notera que l'on est, ici, dans la situation où $t_f \ll \lambda$ ². Ainsi, les gluons émis sont considérés comme étant émis selon le spectre Gunion-Bertsch (3.44). Ce qui va changer par rapport au cas du chapitre précédent, c'est la manière de gérer l'intégration dans le propagateur intermédiaire (1), l étant la quadri-impulsion du fermion se propageant entre les deux interactions. Quand le potentiel ne dépendait pas de x^- , il nous suffisait de négliger la composante transverse devant l^+l^- dans le dénominateur. L'intégration sur la composante transverse donnait alors un delta de Dirac et, comme la composante « + » de la particule sonde était conservée le long de son parcours dans le milieu, on avait $l^+ = P^+ = P'^+$. L'intégration sur l^- se faisait par le théorème des résidus et celle sur l^+ donnait aussi un delta de Dirac.

Désormais, on a $l^+ \neq P^+$. On pourrait toujours négliger la composante transverse et obtenir un delta de Dirac pour les coordonnées transverses mais cela conduirait à une intégration en l^+ divergente. Ainsi, on fait le choix de conserver tout le dénominateur du propagateur.

2. Ceci est cohérent avec le fait de proposer un modèle effectif comme dit plus haut.

On commence par intégrer sur l^- toujours grâce au théorème des résidus. Le pôle se situe désormais en $l^- = \frac{l_t^2}{2l^+} - i\epsilon$ ³ et

$$(1) = \int \frac{dl^+ d^2 \vec{l}_t}{(2\pi)^3} \frac{e^{il^+(x^- - y^-)}}{2l^+} e^{i\frac{l_t^2}{2l^+}(x^+ - y^+)} e^{-i\vec{l}_t \cdot (\vec{x}_t - \vec{y}_t)} \Theta(y^+ - x^+) . \quad (5.7)$$

L'intégration sur $\vec{l}_t$ peut se faire exactement et donne le résultat suivant :

$$(1) = -i \int \frac{dl^+}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\frac{l^+}{2} \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{x^+ - y^+}}}{2(x^+ - y^+)} e^{il^+(x^- - y^-)} \Theta(y^+ - x^+) . \quad (5.8)$$

On voit, enfin, que l'intégrale sur l^+ donne simplement un delta de Dirac :

$$\begin{aligned} (1) &= -\frac{i}{(2\pi)} \Theta(y^+ - x^+) \frac{\delta((x^- - y^-) - \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)})}{2(x^+ - y^+)} \\ (1) &= \frac{\Theta(y^+ - x^+)}{2i\pi} \delta((x - y)^2) . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ainsi, on peut réécrire l'amplitude associée à une double diffusion dans le milieu comme suit

$$S_2 = (ig)^2 \frac{(P'^+ + P^+)^2}{2i\pi} \int d^4x d^4y e^{iP' \cdot y} e^{-iP \cdot x} T^a \tilde{A}_+^a(x) T^b \tilde{A}_+^b(y) \Theta(y^+ - x^+) \delta((x - y)^2) . \quad (5.10)$$

On voit maintenant clairement l'obstacle à l'obtention d'une ligne de Wilson dans cette nouvelle situation : les champs $\tilde{A}$ ne sont pas évalués au même x^- ni au même $\vec{x}_t$. Dans la suite, nous allons voir sous quelle condition on peut contourner ce problème et obtenir une ligne de Wilson généralisée. Pour cela, on va considérer la représentation mixte du potentiel effectif suivante :

$$\tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk^+ e^{ik^+ x^-} \tilde{A}_+^a(x^+, k^+, \vec{x}_t) . \quad (5.11)$$

Regardons ensuite en détail les intégrales sur les composantes « - ». On lit sur l'expression de S_2 :

$$\int dx^- dy^- e^{iP'^+ y^-} e^{-iP^+ x^-} e^{ik_1^+ x^-} e^{ik_2^+ y^-} \delta(2(x^+ - y^+)(x^- - y^-) - (\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2) . \quad (5.12)$$

On propose le changement de variable $\Delta x^- = y^- - x^-$ permettant de réécrire (5.12) comme suit

$$\int dx^- d\Delta x^- e^{i(P'^+ - P^+ + k_1^+ + k_2^+)x^-} e^{i(P'^+ + k_2^+)\Delta x^-} \delta(-2(x^+ - y^+)\Delta x^- - (\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2) . \quad (5.13)$$

Ensuite, on intègre sur Δx^- grâce au delta de Dirac :

$$\int dx^- e^{i(P'^+ - P^+ + k_1^+ + k_2^+)x^-} \frac{e^{-i(P'^+ + k_2^+) \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)}}}{2(x^+ - y^+)} . \quad (5.14)$$

3. Et non plus en 0.

Ainsi, on peut réécrire l'amplitude S_2 , toujours dans cette représentation mixte,

$$S_2 = (ig)^2 \frac{(P'^+ + P^+)^2}{2i\pi} \int d^4x d^2\vec{y}_t dy^+ \int \frac{dk_1^+ dk_2^+}{2\pi} e^{i(P'^+ - P^+ + k_1^+ + k_2^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t} e^{i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \frac{e^{-i(P'^+ + k_2^+) \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)}}}{2(x^+ - y^+)} T^a \tilde{A}_+^a(x^+, k_1^+, \vec{x}_t) T^b \tilde{A}_+^b(y^+, k_2^+, \vec{y}_t) \Theta(y^+ - x^+) . \quad (5.15)$$

Il ne reste plus qu'à repasser de la représentation mixte à celle de départ pour trouver :

$$S_2 = (ig)^2 \frac{(P'^+ + P^+)^2}{2i\pi} \int d^4x d^2\vec{y}_t dy^+ e^{i(P'^+ - P^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t} e^{i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \frac{e^{-iP'^+ \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)}}}{2(x^+ - y^+)} T^a \tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{x}_t) T^b \tilde{A}_+^b(y^+, x^- - \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)}, \vec{y}_t) \Theta(y^+ - x^+) . \quad (5.16)$$

On voit que pour pouvoir généraliser ce que l'on avait pour un potentiel effectif indépendant de x^- (4.78), il faudrait avoir $P'^+ \simeq P^+$. Autrement dit, cela implique qu'il faudrait négliger les k_i^+ devant P^+ et P'^+ . La conséquence en serait, alors, que le deuxième champ serait évalué uniquement en x^- et non plus en $x^- - \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{2(x^+ - y^+)}$. Si l'on redonne un peu de sens physique à ce calcul, on voit que cette hypothèse est raisonnable. En effet, on souhaite assimiler l'interaction avec un champ dépendant de x^- à la possibilité de perdre de l'énergie pour la particule sonde. Ainsi, les k_i^+ représentent l'énergie emmenée par les quanta lors des interactions. On souhaite, de plus, travailler dans le régime où la fraction d'énergie emportée est négligeable devant l'énergie du parton sonde elle-même. Finalement, faisant cela, on étudie la perte d'énergie d'une particule ultrarelativiste en considérant que son énergie varie suffisamment peu pour que celle-ci soit un effet d'ordre supérieur. Autrement dit, cela corrobore le fait que $P'^+ + P^+ \simeq 2P'^+ \simeq 2P^+$ mais que $P'^+ - P^+ \neq 0$. Et finalement, en introduisant une intégrale de chemin en s'appuyant sur l'égalité suivante [61] :

$$\frac{P'^+}{2i\pi(x^+ - y^+)} \exp\left(-i \frac{P'^+}{2} \frac{(\vec{x}_t - \vec{y}_t)^2}{(x^+ - y^+)}\right) = \int \mathcal{D}\vec{r}_t \exp\left(i \frac{P^+}{2} \int dx'^+ \left[\frac{d\vec{r}_t}{dx'^+}\right]^2\right) = \mathcal{G}_0(\vec{y}_t - \vec{x}_t) \quad (5.17)$$

dans laquelle les chemins $\vec{r}_t(x'^+)$ ⁴ connectent $\vec{x}_t$ et $\vec{y}_t$, on met S_2 sous sa forme finale exacte. Pour cela, on introduit aussi, comme dans le chapitre précédent, l'ordonnancement en x^+ représenté par $\mathcal{P}$.

$$S_2 = (ig)^2 \frac{(P'^+ + P^+)^2}{2P'^+} \int dx^- d^2\vec{x}_t d^2\vec{y}_t e^{i(P'^+ - P^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t} e^{i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \int \mathcal{D}\vec{r}_t \exp\left(i \frac{P'^+}{2} \int dx^+ \left[\frac{d\vec{r}_t}{dx^+}\right]^2\right) \frac{1}{2} \mathcal{P} \left[\int dx^+ T^a \tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{r}_t(x^+)) \right]^2 . \quad (5.18)$$

4. On notera $x'^+ \equiv x^+$ dans la suite étant donné que l'on aura plus besoin de la notation x^+ .

On peut alors mettre S_2 sous la forme finale approchée suivante :

$$S_2 = 2P^+ \int d^2\vec{x}_t dx^- d^2\vec{y}_t e^{i(P'^+-P^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t + i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \int \mathcal{D}\vec{r}_t \exp \left(i \frac{P^+}{2} \int dx^+ \left[ig \frac{d\vec{r}_t}{dx^+} \right]^2 \right) \frac{1}{2} \mathcal{P} \left[\int dx^+ T^a \tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{r}_t(x^+)) \right]^2 . \quad (5.19)$$

5.1.3 Généralisation à n diffusions

Pour généraliser la partie précédente à un nombre quelconque d'interactions dans le milieu, on peut suivre les mêmes étapes que pour deux diffusions. En effet, il suffit de négliger la somme de chaque quantum k_i^+ devant P^+ . De plus, il est nécessaire d'utiliser la propriété suivante des intégrales de chemin ⁵ :

$$\int d^2\vec{x}_t d^2\vec{z}_t d^2\vec{y}_t \mathcal{G}_0(\vec{z}_t - \vec{x}_t) \mathcal{G}_0(\vec{y}_t - \vec{z}_t) = \int d^2\vec{x}_t d^2\vec{y}_t \mathcal{G}_0(\vec{y}_t - \vec{x}_t) . \quad (5.20)$$

Ainsi, on montre aisément que l'amplitude associée à n diffusions S_n prend la forme suivante :

$$S_n = 2P^+ \int d^2\vec{x}_t d^2\vec{y}_t dx^- e^{i(P'^+-P^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t + i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \int \mathcal{D}\vec{r}_t \exp \left(i \frac{P^+}{2} \int dx^+ \left[\frac{d\vec{r}_t}{dx^+} \right]^2 \right) \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left[\int dx^+ T^a \tilde{A}_+^a(x^+, x^-, \vec{r}_t(x^+)) \right]^n . \quad (5.21)$$

Enfin, l'exponentiation a toujours lieu et on peut écrire l'amplitude totale d'interaction multiple dans le milieu sous la forme d'une ligne de Wilson incorporée dans une intégrale de chemin.

$$S = 2P^+ \int d^2\vec{x}_t d^2\vec{y}_t dx^- e^{i(P'^+-P^+)x^-} e^{-i\vec{P}'_t \cdot \vec{y}_t + i\vec{P}_t \cdot \vec{x}_t} \int \mathcal{D}\vec{r}_t \exp \left(i \frac{P^+}{2} \int dx^+ \left[\frac{d\vec{r}_t}{dx^+} \right]^2 \right) W(x^-, \vec{r}_t(x^+)) . \quad (5.22)$$

On remarque que l'on peut séparer la partie interaction libre contenue dans l'exponentielle de l'intégrale de chemin et la partie interaction avec le potentiel effectif encodée dans le ligne de Wilson W . Il est aussi à noter que dans le cas élastique on n'avait pas d'intégrale de chemin. En réalité, on aurait pu formuler l'amplitude élastique avec une intégrale de chemin mais, comme on le verra plus loin, celle-ci ne joue pas de rôle dans l'évaluation de la probabilité du processus (qu'il soit élastique ou inélastique).

Il s'agit ici d'un résultat nouveau et important. On a montré qu'il était possible dans l'hypothèse d'un rayonnement secondaire de faible énergie d'inclure ces processus radiatifs le long de la propagation dans une formulation en ligne de Wilson. En effet, on trouvait dans la littérature, jusqu'à présent, les effets dus aux diffusions élastiques seules (comme il a été rappelé dans le chapitre 4).

5. On voit ici, aussi, que si l'on ne négligeait pas l'énergie émise devant l'énergie de la particule sonde, on aurait des intégrales de chemin avec des énergies P'^+ différentes empêchant cette factorisation.

5.2 Probabilité d'interaction et corrélateur inélastique

5.2.1 Introduction d'un corrélateur inélastique

L'objectif de cette partie est de caractériser le corrélateur associé au champ $\tilde{A}(x)$ utilisé dans la section précédente et, donc, ayant une dépendance en x^- . N'ayant pu extraire la forme de ce potentiel effectif depuis les premiers principes comme c'était le cas pour la version élastique, nous allons faire l'hypothèse forte que, comme nous considérons que cette dépendance en x^- induit de faibles pertes d'énergies pour la particule sonde, le comportement vis-à-vis de la variable « + » est sensiblement le même. Plus physiquement parlant, on rappelle qu'on souhaite associer ces interactions inélastiques à un rayonnement secondaire de gluons ayant lieu durant le temps de formation d'une paire quark-gluon principale. En conséquence, la différence $x^+ - y^+$ intervenant dans le corrélateur peut être vue comme un temps de formation de ces gluons secondaires. Ce dernier allant comme $1/P^+$, on peut donc assimiler cette dépendance à un delta de Dirac. Ainsi, on va écrire le corrélateur inélastique de la manière suivante

$$\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^b(y) \rangle = \gamma_{\text{inéla}}(x - y) \quad (5.23)$$

$$= \delta(x^+ - y^+) \Gamma_{\text{inéla}}(x^- - y^-, \vec{x}_t - \vec{y}_t) . \quad (5.24)$$

On suppose, aussi, que le corrélateur reste une fonction uniquement de la différence entre les deux positions considérées.

Si on souhaite faire le parallèle avec la moyenne qui a été introduite dans le chapitre précédent (4.91), on peut donner la définition suivante (qui ne serait utile que si l'on avait une expression explicite du champ $\tilde{A}$) en introduisant les quanta rayonnés k_i :

$$\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^b(y) \rangle \equiv \frac{1}{(2N_c)^N} \text{Tr} \int \prod_{i=1}^N (d^3 \tilde{p}'_i d^3 \tilde{p}_i d^3 \tilde{p}_i d^3 \tilde{k}_i) f_2(p_1, p_2, \dots, p_N) f_2^*(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^b(y) . \quad (5.25)$$

5.2.2 Calcul de la probabilité totale d'interaction dans le milieu

On va passer, maintenant, à l'évaluation de la probabilité totale d'interaction dans le milieu.

Point sur l'intégrale de chemin

La quantité qu'il nous faut évaluer est, dans la lignée de ce qui est fait au chapitre précédent,

$$P = \int d^3 \tilde{P}' d^3 \tilde{P}_1 d^3 \tilde{P}_2 f_1(P_1) f_1^*(P_2) \langle SS^* \rangle , \quad (5.26)$$

avec cette fois S l'amplitude totale d'interaction dans un champ dépendant de x^- (5.22).

On voit que ce qui change principalement par rapport à la situation élastique est la présence de l'intégrale de chemin. Or, on peut montrer, au regard de l'appendice B de [59], que l'intégrale de chemin et la ligne de Wilson sont proportionnelles à un delta de Dirac $\delta^{(2)}((\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t}) - (\vec{y}_{1t} - \vec{y}_{2t}))$ indiquant une conservation de l'écart transverse dans l'espace physique entre l'amplitude et l'amplitude conjuguée. Ainsi, on peut réécrire la probabilité comme suit :

$$P = \int d^3\tilde{P}' d^3\tilde{P}_1 d^3\tilde{P}_2 f_1(P_1) f_1^*(P_2) d^3x_1 d^3x_2 4P_1^+ P_2^+ e^{i(P'^+ - P_1^+)x_1^-} e^{-i(P'^+ - P_2^+)x_2^-} e^{-i(\vec{x}_{1t} - \vec{x}_{2t}) \cdot \vec{P}'_t} \langle W(\vec{x}_1) W^*(\vec{x}_2) \rangle . \quad (5.27)$$

On se rend compte que c'est la même expression que l'on avait obtenue dans le cas élastique à ceci près que la ligne de Wilson dépend d'un doublet de variable supplémentaire x_1^- et x_2^- .

Il est alors simple, en suivant les mêmes étapes que dans le chapitre précédent (section 4.4), de montrer que la probabilité se met sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{d^3P'} = \int \frac{d^2\vec{\Delta}x_t dx^-}{(2\pi)^3} e^{i\vec{P}'_t \cdot \vec{\Delta}x_t} e^{i(P'^+ - P^+)\Delta x^-} \langle W(\vec{x}_1) W^*(\vec{x}_2) \rangle \quad (5.28)$$

Moyenne sur le milieu

La moyenne sur le milieu nous conduit à évaluer des objets du même type que dans le chapitre précédent :

$$\langle \tilde{A}(x_1) \tilde{A}(x_2) \dots \tilde{A}(x_n) \rangle . \quad (5.29)$$

Comme la question de la dépendance vis-à-vis de la variable x_i^- n'intervient pas dans l'évaluation de cette quantité, on va garder les mêmes règles de calcul.

$$\langle \tilde{A}_+^a(x) \tilde{A}_+^b(y) \rangle = \gamma_{\text{inela}}(x - y) \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(x_1) \tilde{A}(x_2) \tilde{A}(x_3) \tilde{A}(x_4) \rangle &= \gamma_{\text{inela}}(x_1 - x_2) \gamma_{\text{inela}}(x_3 - x_4) + \\ &\gamma_{\text{inela}}(x_1 - x_3) \gamma_{\text{inela}}(x_2 - x_4) + \gamma_{\text{inela}}(x_1 - x_4) \gamma_{\text{inela}}(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ensuite, il est trivial de se rendre compte que, la dépendance par rapport à la composante « + » du corrélateur n'ayant pas changé, on va retrouver une exponentiation dans la moyenne sur le milieu du produit des deux lignes de Wilson.

$$\langle W(\vec{x}_{1t}) W^*(\vec{x}_{2t}) \rangle = \exp \left(-g^2 C_F L (\Gamma_{\text{inela}}(\vec{0}) - \Gamma_{\text{inela}}(\vec{\Delta}x)) \right) \quad (5.32)$$

Cependant, dans cette dernière équation, le vecteur $\vec{\Delta}x$ est tridimensionnel est représente

$$\Delta x = (\Delta x^-, \vec{\Delta}x_t) . \quad (5.33)$$

On voit donc qu'il nous faut, pour avancer, une expression pour ce corrélateur inélastique ou tout du moins pour Γ . Avant cela, on va écrire la probabilité totale d'interaction. En regroupant les éléments des deux dernières paragraphes, on a alors :

$$\frac{dP}{d^3P'} = \int \frac{d^2\vec{\Delta}x_t d\Delta x^-}{(2\pi)^3} e^{i\vec{P}'_t \cdot \vec{\Delta}x_t} e^{i(P'^+ - P^+)\Delta x^-} \exp \left(-g^2 C_F L (\Gamma_{\text{inela}}(\vec{0}) - \Gamma_{\text{inela}}(\vec{\Delta}x)) \right)$$
(5.34)

5.3 Corrélateur inélastique

5.3.1 Lien entre section efficace et corrélateur élastique

Dans cette partie, nous allons établir le lien qui existe entre le corrélateur élastique et la section efficace ou, plus exactement, l'élément de matrice $\mathcal{M}$. Cette étape nous permettra d'établir une hypothèse pour étendre l'étude au cas de potentiel dépendant de la variable x^- en obtenant une expression pour $\Gamma_{\text{inéla}}(\vec{\Delta}x)$.

Repartons de l'expression finale de la probabilité d'effectuer un processus élastique dans le milieu (4.38) écrite comme suit

$$\frac{d\mathcal{P}}{dX+d^3\tilde{P}'} = g^2 2P'^+ \int d^4\Delta x e^{i(P'-P)\cdot\Delta x} \frac{\delta^{ab}}{2N} \gamma_{ab}^{--}(\Delta x) . \quad (5.35)$$

Or, nous pouvons lire dans tout bon livre de théorie quantique des champs (voir par exemple celui d'Itzykson et Zuber ([62])), la relation suivante entre la probabilité d'un processus et la matrice $\mathcal{M}$ moyennée sur les spins et les couleurs (revisitée dans les coordonnées cône de lumière) :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dX+d^3\tilde{P}'} = \frac{\rho_1(X)}{2P^+} \int \frac{d^3\tilde{p}'}{2p^-} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + p' - P - p) |\mathcal{M}|^2 . \quad (5.36)$$

En identifiant les deux expressions et en « extrayant » du corrélateur la partie concernant la couleur (un facteur δ^{ab}), on arrive à l'identité suivante

$$\int d^4\Delta x e^{i(P'-P)\cdot\Delta x} \gamma^{--}(\Delta x) = \frac{1}{C_F g^2 2P'^+ 2P^+} \frac{\rho_2(X)}{2p^-} \int d^3\tilde{p}' (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + p' - P - p) |\mathcal{M}|^2 \quad (5.37)$$

On aperçoit alors le souci suivant : dans l'exponentielle du membre de gauche, P' et P sont des quadrivecteurs avec 4 composantes alors que, dans le membre de droite, les particules sont sur couche de masse dans les voies d'entrée et de sortie impliquant seulement 3 composantes. Pour contourner cette embûche, on introduit un corrélateur dit « réduit » de la manière suivante. Dans l'hypothèse, toujours, où les composantes « $-$ » de P et P' sont négligeables devant les autres composantes, on considère que

$$(P' - P) \cdot \Delta x \simeq (P'^+ - P^+) \Delta x^- - \vec{P}'_t \cdot \vec{\Delta}x_t . \quad (5.38)$$

Ainsi, on peut définir le corrélateur réduit Γ par

$$\Gamma(\Delta x^-, \Delta \vec{x}_t) \equiv \int d\Delta x^+ \gamma^{--}(\Delta x) . \quad (5.39)$$

De cette manière, on peut extraire ce nouveau corrélateur par transformée de Fourier inverse :

$$\Gamma(\vec{\Delta}x) = \frac{\rho_2}{C_F g^2 2P'^+ 2P^+ 2p^-} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} d^3p' (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + p' - P - p) |\mathcal{M}|^2 e^{-i(\vec{P}' - \vec{P}) \cdot \vec{\Delta}x} . \quad (5.40)$$

Si on remplace l'amplitude au carré par son expression pour un processus élastique,

$$|\mathcal{M}|_{\text{ela}}^2 = \frac{C_F}{2N_c} g^4 \frac{16P^+ p^-}{(l_t^2 + \mu^2)^2} , \quad (5.41)$$

on retrouve l'expression attendue pour la partie transverse du corrélateur élastique⁶,

$$\Gamma_{\text{ela}}(\vec{\Delta}x_t) = g^2 \rho_2 \int \frac{d^2 \vec{l}_t}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{q}_t \cdot \vec{\Delta}x_t}}{(\vec{l}_t^2 + \mu^2)^2} = \gamma_t(\vec{\Delta}x_t) . \quad (5.42)$$

Nous nous proposons d'étudier le cas inélastique et, donc, d'étendre les dépendances de cet objet à des $x^- \neq 0$ en substituant à $|\mathcal{M}|^2$ l'amplitude de Gunion et Bertsch définie dans le chapitre 3. Il faut, de plus, ajouter l'intégration sur l'espace des phases d^3k du rayonnement émis.

$$\Gamma_{\text{inéla}}(\Delta x) = \frac{\rho_2}{C_F g^2 2P'^+ 2P^+ 2p^-} \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} d^3 \tilde{p}' d^3 \tilde{k} \\ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P' + p' + k - P - p) |\mathcal{M}|_{GB}^2 e^{-i(\vec{P}' - \vec{P}) \cdot \vec{\Delta}x} \quad (5.43)$$

En utilisant les quadrivecteurs définis au début du chapitre 4, on obtient les deltas de Dirac suivants :

$$\delta(P'^+ + \frac{m^2 + p_t^2}{p'^-} + xP^+ - P^+) \delta^{(2)}(\vec{P}_t - \vec{l}_t + \vec{k}_t) \delta(\frac{M^2 + P_t^2}{P'^+} + p'^- + \frac{m_g^2 + k_t^2}{xP^+} - p^- - \frac{M^2}{P^+}) . \quad (5.44)$$

Dans la limite des petites masses et en supposant que les composantes transverses sont négligeables devant P^+ et p^- , cela nous donne les relations

$$P'^+ = (1 - x)P^+ , \quad (5.45)$$

$$p'^- = p^- , \quad (5.46)$$

$$\vec{P}_t = \vec{l}_t - \vec{k}_t . \quad (5.47)$$

Ainsi, on réduit l'espace des phases à un espace à 5 dimensions et on aboutit à l'expression suivante pour $\Gamma_{\text{inéla}}$:

$$\Gamma_{\text{inéla}}(\Delta x^-, \vec{\Delta}x_t) = \frac{\rho_2}{C_F g^2 2P'^+ 2P^+ 2p^-} \int \frac{d^2 \vec{l}_t}{(2\pi)^2} d^3 \tilde{k} |M|_{GB}^2 e^{i(\vec{l}_t - \vec{k}_t) \cdot \vec{\Delta}x_t} e^{ixP^+ \Delta x^-} . \quad (5.48)$$

De plus, pour ne prendre en compte que l'émission d'un rayonnement à faible énergie, il faudra caractériser l'espace des phases correspondant. Aussi, il est à noter que le corrélateur réduit tout juste introduit, dans ces conditions, est le même objet que le $\Gamma_{\text{inéla}}$ de l'expression (5.24).

Pour utiliser l'équation (5.43), il faut donc évaluer l'amplitude dite Gunion-Bertsch. Pour le cas où la particule émettrice possède une masse M ⁷, la contribution dominante à cette amplitude s'écrit [63]

$$|\mathcal{M}|_{GB}^2 = C_A 16\pi\alpha_s (1 - x)^2 \frac{C_F}{2N_c} g^4 \frac{4s^2}{(\vec{l}_t^2 + \mu^2)^2} \left(\frac{\vec{k}_t}{\vec{k}_t^2 + x^2 M^2} - \frac{\vec{k}_t - \vec{l}_t}{(\vec{k}_t - \vec{l}_t)^2 + x^2 M^2} \right)^2 . \quad (5.49)$$

6. On a remplacé le moment transféré $\vec{q}_t$ par la notation $\vec{l}_t = -\vec{p}_t$, utilisée par [63].

7. On continuera à qualifier cette amplitude de « Gunion-Bertsch » malgré le fait que celle-ci corresponde plutôt au processus ultrarelativiste dans lequel les masses sont supposées négligeables.

5.3.2 Définition de l'espace des phases du gluon rayonné

Avant de passer au calcul en lui-même, il nous faut définir l'espace des phases du quantum émis pour rester dans la limite des faibles énergies. Pour cela, on va définir un temps de formation maximal t_f^* ⁸ tel que

$$t_f \simeq \frac{xP^+}{k_t^2} \leq t_f^* . \quad (5.50)$$

En se plaçant dans le référentiel du centre de masse, on peut dire que $t_f^* \simeq A\lambda/\gamma_{boost} \simeq A\lambda m/P^+$. A est le nombre de libre parcours moyen auquel on veut limiter nos temps de formation. Ainsi, en appelant $A\lambda m \equiv n$ (avec n un paramètre permettant d'ajuster la fenêtre en énergie des gluons rayonnés), on peut ajouter au corrélateur radiatif

$$\Theta(nk_t^2 - xP^{+2}) . \quad (5.51)$$

En plus de cette limitation sur les temps de formation, il faut tenir compte des bornes imposées par la cinématique elle-même sur l'espace des phases. En effet, cette dernière nous donne⁹

$$\Theta((x(1-x)s - xM^2 - \vec{k}_t^2 - m_g^2 + 2x\vec{k}_t \cdot \vec{l}_t)^2 - 4x(1-x)\vec{l}_t^2(xs - \vec{k}_t^2 - m_g^2)) . \quad (5.52)$$

Le s correspond à la variable de Mandelstam et vaut $2P^{+2}$. Cela nous permet de borner le domaine d'intégration sur la norme de $\vec{l}_t$ que l'on notera l_t ¹⁰ (en considérant que tous les angles varient de 0 à 2π i.e. en négligeant le $\cos\theta$ dans l'équation précédente) :

$$0 \leq l_t \leq \frac{x(1-x)s - xM^2 - k_t^2 - m_g^2}{2\sqrt{x(1-x)(xs - k_t^2 - m_g^2)}} \approx \frac{\sqrt{s}}{2} . \quad (5.53)$$

La dernière équation correspond à la limite ultrarelativiste. On en déduit ensuite une borne supérieure pour k_t^2 . De plus, la condition sur les temps de formations induit une borne inférieure pour cette même grandeur. Ainsi, on a

$$\frac{xs}{2n} \leq k_t^2 \leq x(1-x)s - xM^2 - m_g^2 \approx xs . \quad (5.54)$$

Et enfin, on peut extraire de tout cela un encadrement sur la fraction de composante « + » emportée par le gluon x ,

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} , \quad (5.55)$$

en résolvant l'équation du second degré suivante :

$$x(1-x)s - xM^2 - m_g^2 - \frac{xs}{2n} = 0 . \quad (5.56)$$

On voit apparaître l'importance de l'ajout d'une masse au gluon. En effet, sans cette dernière, on a $x_{min} = 0$ et donc, avec le comportement en $1/x$ de

8. On rappelle qu'en QCD le temps de formation augmente lorsque l'énergie du gluon émis augmente.

9. La nécessité d'introduire une masse au gluon sera explicitée plus tard.

10. Et de même pour $\vec{k}_t$.

l'intégrant¹¹, une divergence. La résolution donne des expressions compliquées pour les deux bornes :

$$x_{min} = \frac{-\sqrt{(2M^2n - 2ns + s)^2 - 16m_g^2n^2s} - 2M^2n + 2ns - s}{4ns}, \quad (5.57)$$

$$x_{max} = \frac{\sqrt{(2M^2n - 2ns + s)^2 - 16m_g^2n^2s} - 2M^2n + 2ns - s}{4ns}. \quad (5.58)$$

On note que dans la limite des grands s et pour un n suffisamment grand, la borne supérieure tend vers 1. De plus, sans masse de gluon et sans limitation sur les temps de formation, on retrouve la cinématique usuelle pour ce processus : $0 \leq x \leq 1 - M^2/s$.

11. Le $1/x$ se lit dans le $d^3\tilde{k}$. En effet, dans la limite ultrarelativiste où x est très petit devant 1, l'amplitude Gunion-Bertsch est indépendante de x .

Conclusion du chapitre 5

Dans ce chapitre, nous avons étendu le formalisme détaillé dans le chapitre précédent et relatif à la diffusion élastique dans un milieu aux processus inélastiques. Nous avons trouvé, que moyennant l'hypothèse que les quanta émis n'emportent pas une fraction trop importante de l'énergie de la particule sonde ultrarelativiste, le formalisme s'étendait simplement à la prise en compte de potentiel effectif dépendant de la variable x^- .

Finalement, on termine ce chapitre en rappelant les deux grandes formules qui nous intéressent. La première correspond à la probabilité totale d'interaction dans un milieu où celles-ci sont modélisées par des interactions dépendant de x^- (5.34) dans laquelle on intègre sur $\vec{P}_t$ et donc sur $\vec{\Delta}x_t$ étant donné que l'on est intéressé principalement par la perte d'énergie.

$$\frac{d\mathcal{P}}{dP'^+} = \int d\Delta x^- e^{i(P'^+ - P^+)\Delta x^-} \exp\left(-g^2 C_F L(\Gamma(\vec{0}) - \Gamma(\Delta x^-, \vec{0}_t))\right) \quad (5.59)$$

La seconde correspond au postulat fait pour évaluer le corrélateur inélastique à partir de l'élément de matrice de Gunion-Bertsch.

$$\Gamma(\Delta x^-, \vec{0}_t) = \frac{\rho_2}{C_F g^2 2P'^+ 2P^+ 2p^-} \int \frac{d^2 \vec{l}_t}{(2\pi)^2} d^3 \tilde{k} |\mathcal{M}|_{GB}^2 e^{ixP^+ \Delta x^-} \quad (5.60)$$

Dans cette dernière équation, les bornes pour chaque intégration sont explicitées dans la partie précédente et l'élément de matrice Gunion-Bertsch est donné en (5.49).

L'objectif du prochain chapitre sera d'étudier plus en détail cette probabilité de perte d'énergie pour, ensuite, faire le lien avec la physique du rayonnement.

CHAPITRE 6

DE L'EXPLOITATION DU FORMALISME

Dans cet ultime chapitre, nous allons exploiter le formalisme développé dans le chapitre précédent en établissant des formules de pertes d'énergie moyenne dans le milieu (6.2). Nous allons regarder deux situations. La première consistera à ne faire aucune hypothèse sur les temps de formation associés aux gluons émis. Nous retrouverons alors le résultat standard de la perte d'énergie dite « Gunion-Bertsch ». Ensuite, nous étudierons les modifications induites lorsque l'on considère uniquement des gluons ayant un temps de formation inférieur à une certaine limite (que nous préciserons plus loin).

Enfin, nous reviendrons sur la situation initiale d'un gluon primaire en formation qui rayonne lui-même des gluons secondaires (6.3). Nous regarderons l'impact de ces gluons sur le temps de formation du primaire et formulerons une conjecture quant aux conséquences du rayonnement secondaire sur le spectre des gluons primaires.

Sommaire

6.1	Mise en forme de l'étude et hypothèse de travail . . .	115
6.1.1	Quelle intégrale va-t-on devoir calculer ?	115
6.1.2	Comment la rendre exploitable ?	116
6.2	Perte d'énergie moyenne	119
6.2.1	Perte d'énergie Gunion-Bertsch	119
6.2.2	Modification de la perte d'énergie avec la limitation des temps de formation	121
6.3	Retour sur la notion de temps de formation	123
6.3.1	Phase de Landau et temps de formation BDMPS	123
6.3.2	Modèles incluant le rayonnement secondaire de gluons .	124
6.3.3	Conséquence sur le spectre de rayonnement associé au gluon primaire	129

6.1 Mise en forme de l'étude et hypothèse de travail

En premier lieu, on va expliciter définitivement notre objet d'étude en « récoltant » ce qui a été semé dans le chapitre précédent. Puis, on fera une hypothèse majeure pour mener l'étude jusqu'à l'obtention d'une perte d'énergie moyenne.

6.1.1 Quelle intégrale va-t-on devoir calculer ?

Repartons de la fin du chapitre 5 où nous avons obtenu une expression pour la probabilité de perdre une certaine partie de son énergie pour la particule sonde ultrarelativiste (5.60). Il nous faut calculer l'objet¹ $\Gamma_{\text{inéla}}(\Delta x^-, \vec{0}_t) \equiv \Gamma(\Delta x^-)$ qui dépend, lui-même, de l'amplitude Gunion-Bertsch. En utilisant, pour cette dernière, l'expression (5.49), on met le corrélateur inélastique sous la forme suivante :

$$\Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{(2\pi)^5} \int d^2 \vec{l}_t d^2 \vec{k}_t \frac{(1-x)dx}{x} \frac{e^{ixP^+ \Delta x^-}}{(l_t^2 + \mu^2)^2} \left(\frac{\vec{k}_t}{\vec{k}_t^2 + x^2 M^2} - \frac{\vec{k}_t - \vec{l}_t}{(\vec{k}_t - \vec{l}_t)^2 + x^2 M^2} \right)^2. \quad (6.1)$$

Dans un premier temps, on va intégrer sur les angles. Seule l'intégration sur l'angle entre $\vec{l}_t$ et $\vec{k}_t$ est non triviale, la seconde intégration donnant un simple facteur 2π . On rappelle que ces intégrations sont faites de 0 à 2π car on néglige l'influence des angles dans la cinématique du processus, i.e. dans la condition 5.52. Dans ces conditions, il existe une expression analytique relativement simple pour les intégrales angulaires. Les normes des vecteurs impulsions transverses l_t et k_t n'intervenant plus qu'au carré, on peut écrire

$$\Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4(2\pi)^3} \int d(l_t)^2 d(k_t)^2 \frac{(1-x)dx}{x} \frac{e^{ixP^+ \Delta x^-}}{(l_t^2 + \mu^2)^2} F(l_t^2, k_t^2, x^2 M^2), \quad (6.2)$$

avec

$$F(l_t^2, k_t^2, x^2 M^2) = \frac{l_t^2 + 2x^2 M^2}{(k_t^2 + x^2 M^2) \sqrt{(k_t^2 + x^2 M^2 + l_t^2)^2 - 4k_t^2 l_t^2}} \quad (6.3)$$

$$- \frac{x^2 M^2}{(k_t^2 + x^2 M^2)^2} - \frac{x^2 M^2 (k_t^2 + x^2 M^2 + l_t^2)}{((k_t^2 + x^2 M^2 + l_t^2)^2 - 4k_t^2 l_t^2)^{3/2}} \quad (6.4)$$

L'ajout d'une masse de gluon m_g , essentielle dans le rôle de régulateur infrarouge radiatif², se fait facilement. En effet, on peut montrer [63] que cet ajout revient à substituer $x^2 M^2 + (1-x)m_g^2$ à $x^2 M^2$ dans les expressions précédentes.

Finalement, l'intégrale intervenant dans (5.60) et que l'on souhaite évaluer s'écrit

$$\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4(2\pi)^3} \int d(l_t)^2 d(k_t)^2 \frac{(1-x)dx}{x} \frac{F(l_t^2, k_t^2, x^2 M^2 + (1-x)m_g^2)}{(l_t^2 + \mu^2)^2} (1 - e^{ixP^+ \Delta x^-}). \quad (6.5)$$

1. On omet l'indice « inéla » à partir de maintenant.
 2. μ jouant le rôle de régulateur élastique.

6.1.2 Comment la rendre exploitable ?

Pour rendre l'expression précédente exploitable, on va effectuer plusieurs hypothèses. Premièrement, comme on veut comprendre l'objet Γ sans se perdre, à ce stade, dans les détails de l'influence relative de tel ou tel paramètre, on va en choisir un nombre minimal. Actuellement, on dispose de P^+ (que l'on remplacera ensuite par $\sqrt{s}/2$), du régulateur élastique μ et des masses M et m_g . On conserve $\sqrt{s}$ car il s'agit, à un facteur près, de l'énergie que l'on souhaite suivre. Les masses, quant à elles, viennent pour l'essentiel contrôler la partie infrarouge. Ainsi, on va faire la simplification suivante :

$$x^2 M^2 + (1-x)m_g^2 \rightarrow m_g^2 \rightarrow \mu^2 . \quad (6.6)$$

On considère que l'échelle qui régule dans l'infrarouge la partie élastique est la même que son homologue pour la partie radiative. Une des conséquences de tout cela est que la dépendance dans la variable x disparaît de la fonction F .

Pour manipuler une intégrale adimensionnée, on introduit les quantités réduites suivantes :

$$X = \frac{l_t^2}{s} , \quad Y = \frac{k_t^2}{s} , \quad x_\mu = \frac{\mu^2}{s} , \quad \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) = s F(X s, Y s, x_\mu s) . \quad (6.7)$$

Avec ces variables, l'intégrale s'écrit simplement

$$\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4s(2\pi)^3} \int \frac{dX dY}{(X + x_\mu)^2} \frac{dx}{x} \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) (1 - e^{ix\sqrt{s/2}\Delta x^-}) . \quad (6.8)$$

Ensuite, l'hypothèse la plus importante pour simplifier le corrélateur réduit inélastique Γ se déduit de ce qui est fait dans l'approche BDIM [59]. Il y est expliqué, pour l'étude des processus élastiques, que la forme analytique (4.56) ne doit être utilisée que pour des échelles de Δx_t ³ telles que, typiquement

$$\Delta x_t \ll \frac{1}{\mu} . \quad (6.9)$$

Cela conduit, en repartant de (4.54), à l'approximation « leading-log » de $\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t)$:

$$\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t) \simeq \frac{g^2 \rho_2 (\Delta x_t)^2}{16\pi} \ln \frac{1}{(\Delta x_t)^2 \mu^2} . \quad (6.10)$$

De plus, dans le régime de la diffusion multiple, on utilise généralement l'approximation harmonique qui consiste à ignorer la faible dépendance en Δx_t dans le logarithme et permet d'aboutir à l'expression simplifiée suivante :

$$g^2(\gamma_t(\vec{0}) - \gamma_t(\vec{\Delta x}_t)) \simeq \frac{\hat{q}}{C_F} \frac{(\Delta x_t)^2}{4} . \quad (6.11)$$

Ainsi, la probabilité pour que la particule acquière une impulsion transverse donnée durant un parcours L dans le milieu s'exprime comme la transformée de Fourier d'une gaussienne centrée ce qui donne aussi une gaussienne centrée. On en déduit, en effet, que

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2\vec{P}_t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{\Delta x}_t e^{i\vec{\Delta x}_t \cdot \vec{P}_t - \frac{\hat{q}L(\vec{\Delta x}_t)^2}{4}} = \frac{1}{\pi\hat{q}L} e^{-\frac{\vec{P}_t^2}{\hat{q}L}} . \quad (6.12)$$

3. Δx_t étant la norme du vecteur $\vec{\Delta x}_t$.

Finalement, dans cette approximation harmonique, la probabilité pour que la particule sonde acquière une impulsion transverse donnée est solution de l'équation de diffusion ayant comme condition initiale

$$\frac{d\mathcal{P}}{d^2\vec{P}_t}(\vec{P}_t, L=0) = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{P}_t) . \quad (6.13)$$

C'est ce que l'on appelle le « jet-broadening » [64]. Le $\hat{q}$ correspond au paramètre de « jet-quenching » phénoménologiquement proportionnel à T^3 avec T la température. Enfin, cette vision diffusive des processus élastiques provient d'une caractéristique générale de la QCD : la propagation du dipôle QCD abstrait constitué de la particule dans l'amplitude et dans l'amplitude conjuguée n'est pas affectée par les interactions dans le milieu tant que le dipôle est suffisamment petit pour être vu par le milieu comme un singulet de couleur.

Dans le même ordre d'idée, on examine les conséquences du corrélateur inélastique en cherchant son comportement à petit Δx^- . Celui-ci est obtenu en développant au deuxième ordre l'exponentielle présente dans (6.5). On obtient :

$$\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4s(2\pi)^3} \int \frac{dXdY}{(X+x_\mu)^2} \frac{dx}{x} \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \left(\frac{x^2 s}{4} (\Delta x^-)^2 - ix \sqrt{\frac{s}{2}} \Delta x^- \right) . \quad (6.14)$$

L'ordre 1 du développement donne une approximation de la partie imaginaire et l'ordre 2 celle de la partie réelle, soit

$$\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4(2\pi)^3} \left(f_2(x_\mu, n) (\Delta x^-)^2 - i f_1(x_\mu, n) \frac{\Delta x^-}{\sqrt{2s}} \right) \quad (6.15)$$

avec

$$f_1(x_\mu, n) = \int \frac{dXdY}{(X+x_\mu)^2} dx \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \quad (6.16)$$

$$f_2(x_\mu, n) = \int \frac{dXdY}{(X+x_\mu)^2} \frac{x}{4} dx \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) . \quad (6.17)$$

On rappelle que la dépendance en n se cache dans les bornes d'intégration. Le domaine de validité de ce développement peut être vu sur le graphique Fig. 6.1. En effet, pour $u = \sqrt{s/2} \Delta x^- \leq 1$, on obtient un accord satisfaisant entre la partie réelle et une pente en u^2 , d'une part, et entre la partie imaginaire et une pente en u , d'autre part.

Les fonctions f_1 et f_2 sont, à des facteurs numériques près, des moments de la section efficace de rayonnement, $x \frac{d\sigma}{dx}$. En effet, on a, d'après [63] (équation (8)) :

$$x \frac{d\sigma}{dx d^2 k_t d^2 l_t} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{8s^2 (2\pi)^5} , \quad (6.18)$$

en reprenant, ici, les notations du début du chapitre et l'amplitude (5.49). Dans la limite des grands s , l'intégration sur les orientations de $\vec{l}_t$ et $\vec{k}_t$ est possible sans changement par rapport à ce qui a été fait en début de chapitre où l'on évaluait le corrélateur inélastique en $\vec{\Delta x}_t = \vec{0}$. Avec le remplacement $x^2 M^2 \rightarrow x^2 M^2 + (1-x)m_g^2 \rightarrow \mu^2$ dans (5.49) et en intégrant sur les angles :

$$x \frac{d\sigma}{dx} = \frac{g^6 C_F}{4s(2\pi)^3} \int dXdY \frac{\mathcal{F}(X, Y, x_\mu)}{(X+x_\mu)^2} . \quad (6.19)$$

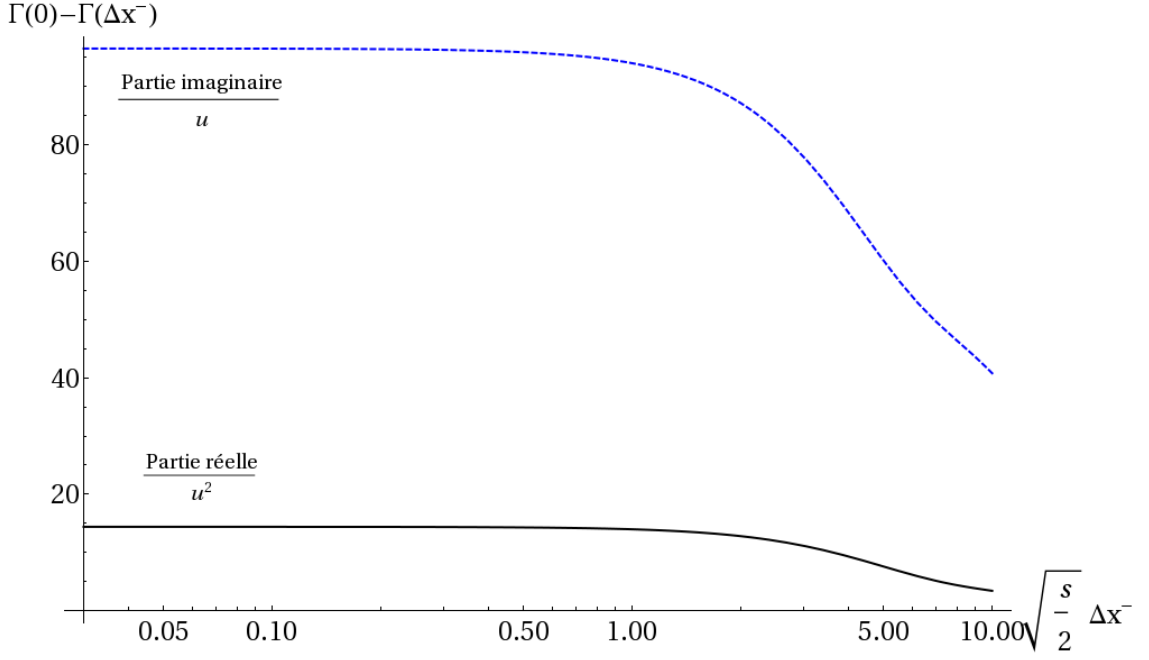


FIGURE 6.1 – Constat du comportement linéaire de la partie imaginaire (tiret bleu) et quadratique de la partie réelle (trait plein noir).

En comparant à (6.16), on reconnaît que

$$\int dx x \frac{d\sigma}{dx} = \frac{g^6 C_F}{4s(2\pi)^3} f_1(x_\mu, n) . \quad (6.20)$$

Finalement, comme [63]

$$\int dx x \frac{d\sigma}{dx} \simeq \frac{1}{\rho_2 E} \frac{dE_{\text{rad}}}{dz} , \quad (6.21)$$

on obtient pour la partie imaginaire du développement (6.15)

$$g^2 \text{Im}(\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-)) = - \left(\frac{1}{C_F} \frac{dE_{\text{rad}}}{dz} \right) \sqrt{2} \Delta x^- , \quad (6.22)$$

qui établit le lien entre le développement du corrélateur inélastique à petites distances et le coefficient de transport dE_{rad}/dz comparable à celui obtenu dans l'approximation harmonique (6.11) entre le corrélateur élastique et le coefficient $\hat{q}$. On peut également remarquer que la présence d'un terme proportionnel à Δx^- va conduire à une gaussienne excentrée dans la probabilité de perte d'énergie (contrairement au cas de la diffusion transverse).

6.2 Perte d'énergie moyenne

Commençons par rappeler les bornes d'intégration introduites en fin de chapitre 5 et écrivons les dans les variables réduites de la section précédente.

$$0 \leq X \leq \frac{1}{4} \quad (6.23)$$

$$\frac{x}{2n} \leq Y \leq x - x_\mu \quad , \quad x_\mu = \frac{\mu^2}{s} \quad (6.24)$$

$$\frac{2nx_\mu}{2n-1} \leq x \leq 1 \quad (6.25)$$

Pour la fraction de composante « + » emmenée par le gluon, on a pris la limite pour s grand des bornes (5.58). On mène, essentiellement, une étude numérique dans cette partie guidée par des approximations analytiques discutées dans l'annexe B.

6.2.1 Perte d'énergie Gunion-Bertsch

Dans un premier temps, nous considérons le cas $n \rightarrow \infty$. Cette situation revient à laisser entrer dans notre espace des phases tous les gluons sans aucune distinction sur leur temps de formation. On s'attend, dès lors, à retrouver la perte d'énergie Gunion-Bertsch donnée en (3.45).

La borne d'intégration inférieure en Y (impulsion transverse du gluon émis) devient 0 et celle en x devient juste x_μ . On étudie numériquement les fonctions f_1 et f_2 grâce au logiciel *Mathematica*. Ces deux fonctions dépendent, maintenant, uniquement de x_μ . L'intégration sur X peut être faite analytiquement ce qui va considérablement réduire le temps d'intégration total. En effet, on utilise la routine d'intégration numérique uniquement pour intégrer sur Y et x . Enfin, on regarde la dépendance de cette fonction selon x_μ . Les résultats obtenus sont montrés Fig. 6.2 guidés par les approximations analytiques présentées dans l'annexe B (équation (B.12)) où il est observé que les deux moments ont un comportement en $1/x_\mu$ à petit x_μ .

La zone d'intérêt, pour nous, se situe pour des $x_\mu \ll 1$ ⁴. Ainsi, on voit sur les deux graphiques que, dans cette région des petits x_μ , les deux fonctions peuvent bien être approximées par une fonction inverse. On peut écrire

$$f_1(x_\mu) \simeq \frac{a}{x_\mu} \quad , \quad (6.26)$$

$$f_2(x_\mu) \simeq \frac{b}{x_\mu} \quad , \quad (6.27)$$

avec a et b deux coefficients d'ajustement que l'on peut lire à l'aide des graphes Fig. 6.2.

On peut donc réécrire (6.5) comme suit

$$\Gamma(0) - \Gamma(\Delta x^-) = \frac{g^4 \rho_2}{4(2\pi)^3} \left(b \frac{s(\Delta x^-)^2}{\mu^2} - ia \sqrt{\frac{s}{2}} \frac{\Delta x^-}{\mu^2} \right) \quad (6.28)$$

4. On peut, d'ailleurs, montrer que c'est dans cette limite que la troncature à l'ordre deux de l'exponentielle est une bonne approximation.

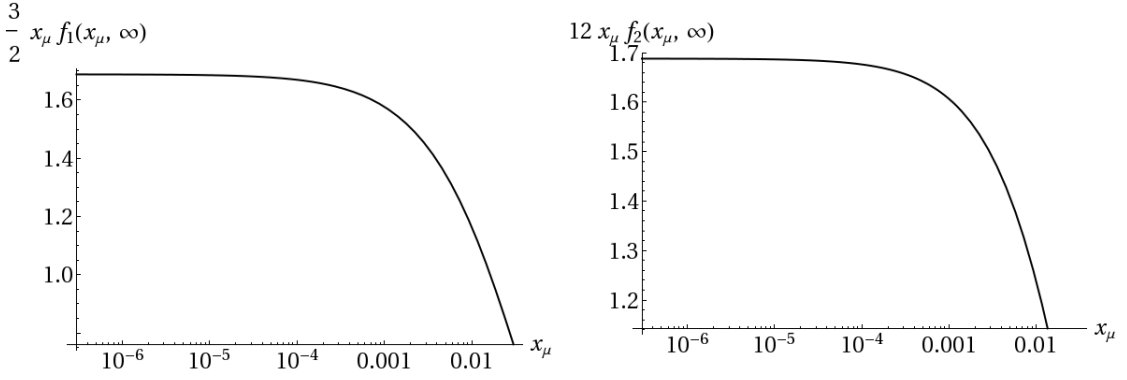


FIGURE 6.2 – A gauche : rapport entre la fonction $f_1(x_\mu)$ et la fonction $2/(3x_\mu)$. A droite : même rapport pour f_2 et $1/(12x_\mu)$.

Finalement, pour obtenir la probabilité de perte d'énergie $\frac{d\mathcal{P}}{dP'^+}$, il suffit de faire la transformée de Fourier d'une gaussienne excentrée. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dP'^+} &= \int \frac{d\Delta x^-}{2\pi} e^{i(P'^+ - P^+)\Delta x^-} \exp\left(-\frac{g^6 C_F \rho_2 L}{4\mu^2 (2\pi)^3} \left(bs(\Delta x^-)^2 - ia\sqrt{\frac{s}{2}}\Delta x^-\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi b A s}} \exp\left(-\frac{(\Delta P^+ - aA\sqrt{s/2})^2}{4bAs}\right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dans cette dernière expression, ΔP^+ est défini comme étant $P^+ - P'^+$ pour rester une quantité positive et on a posé $A = \frac{g^6 C_F \rho_2 L}{4\mu^2 (2\pi)^3}$. Enfin, on obtient la perte d'énergie moyenne dans un milieu de longueur L et de densité ρ_2 en intégrant cette densité pondérée par ΔP^+ sur toutes les pertes d'énergies possibles.

$$\Delta \bar{P}^+ = \int d\Delta P^+ \Delta P^+ \frac{d\mathcal{P}}{dP'^+} \simeq \frac{g^6 C_F \rho_2 L}{(2\pi)^3 4\mu^2} \sqrt{\frac{s}{2}} \quad (6.30)$$

En introduisant la constante de couplage $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, puis en revenant à l'énergie usuelle on obtient :

$$\Delta E_{CM} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta \bar{P}^+ = \frac{\alpha_s^3 C_F \rho_2 L}{\mu^2} \sqrt{s}. \quad (6.31)$$

On passe, ensuite, dans le référentiel du laboratoire en multipliant cette perte d'énergie par la facteur de Lorentz $\gamma = \frac{\sqrt{s}}{2m}$, m étant la masse des particules du milieu :

$$\Delta E_{lab} \simeq \frac{\sqrt{s}}{2m} \Delta E_{CM} = \frac{\alpha_s^3 C_F \rho_2 L}{\mu^2} \frac{s}{2m}. \quad (6.32)$$

Or, dans le laboratoire, on a $s = 2Em$ ce qui nous permet de retrouver le résultat standard de la perte d'énergie Gunion-Bertsch :

$$\boxed{\Delta E_{lab} \simeq \frac{\alpha_s^3 C_F \rho_2 L}{\mu^2} E \simeq \frac{\alpha_s L}{\lambda} E.} \quad (6.33)$$

On se rassure, ainsi, sur la capacité du modèle à reproduire des résultats connus de la littérature.

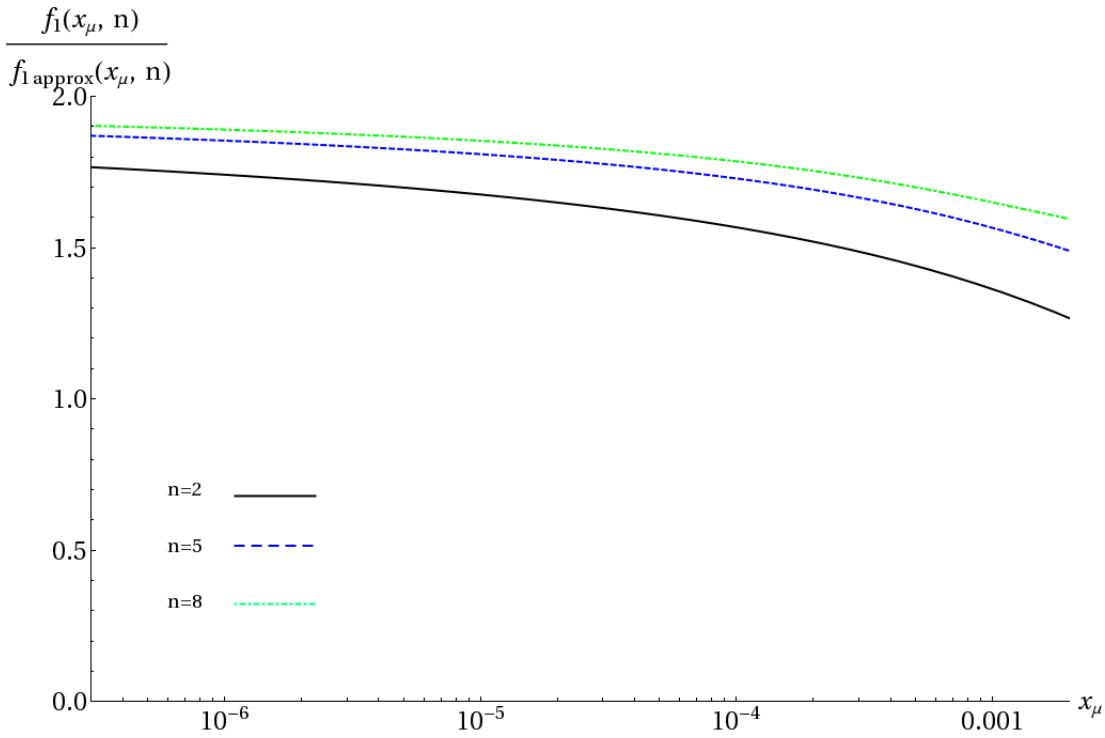


FIGURE 6.3 – Rapport entre la fonction $f_1(x_\mu, n)$ et la fonction $f_1^{(\text{approx})}(x_\mu, n)$ (6.34) pour différentes valeurs de n .

6.2.2 Modification de la perte d'énergie avec la limitation des temps de formation

On va, désormais, diminuer l'espace de phases disponible pour l'émission des gluons par la particule sonde en mettant une borne supérieure aux temps de formation. L'étude numérique se passe exactement de la même manière à ceci près que les fonctions f_1 et f_2 ont une dépendance en n maintenant. Ce n est un multiple entier de λm avec m la masse des constituants du milieu. En terme d'ordre de grandeur $\lambda \propto \frac{1}{g^2 T}$ et $m \propto gT$ implique que $n \propto g^{-1}$. Ainsi, on considérera des valeurs de n de l'ordre de l'unité (cas d'un plasma fortement couplé) jusqu'à la dizaine (lorsque $n \gg 1$, c'est le cas d'un plasma faiblement couplé).

Comme pour 6.2.1, on se réfère à l'annexe B pour déduire des lois d'échelle simples en n et x_μ . L'équation (B.15) indique que l'on peut prendre :

$$f_1(x_\mu, n) \simeq f_1^{(\text{approx})}(x_\mu, n) = \frac{2n-1}{2} \ln^2 \left(\frac{1}{2n x_\mu} \right) , \quad (6.34)$$

$$f_2(x_\mu, n) \simeq f_2^{(\text{approx})}(x_\mu, n) = (2n-1) \ln \left(\frac{1}{2n x_\mu} \right) . \quad (6.35)$$

On constate qu'à une constante multiplicative près les moments f_1 et f_2 sont bien décrits par les formes approximatives (6.34) et (6.35) pour $x_\mu \ll 1$ puisque les rapports tracés ne varient en aucun cas de plus de 20 % dans l'intervalle $[10^{-7}; 10^{-3}]$. On poursuit, donc, la discussion avec ces formes approximatives.

On déduit, comme précédemment, la densité de probabilité associée à la perte

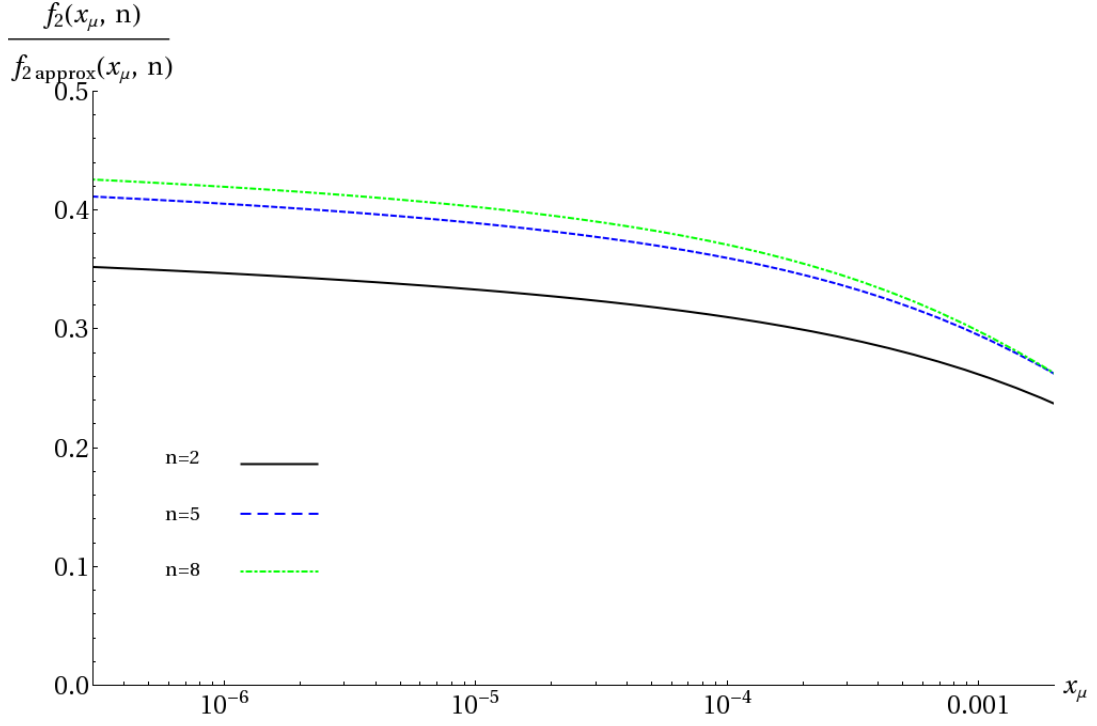


FIGURE 6.4 – Rapport entre la fonction $f_2(x_\mu, n)$ et la fonction $f_2^{(\text{approx})}(x_\mu, n)$ (6.35) pour différentes valeurs de n .

d'énergie suivante, dans le régime $x_\mu \ll 1$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dP'^+} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(g^6 C_F \rho_2 L (2n-1) b' \ln(1/(2nx_\mu)))^{1/2}} \exp \left(- (2\pi)^3 \frac{\left(\Delta P^+ - \frac{g^6 C_F \rho_2 L (2n-1) a'}{4(2\pi)^3 2\sqrt{2}s} \ln^2(1/(2nx_\mu)) \right)^2}{g^6 C_F \rho_2 L (2n-1) \ln(1/(2nx_\mu))} \right). \quad (6.36)$$

Ce qui nous donne une perte d'énergie moyenne dans le milieu égale à ⁵

$$\Delta \bar{P}^+ \simeq \frac{g^6 C_F \rho_2 L (2n-1)}{4(2\pi)^3 2\sqrt{2}s} \ln^2 \left(\frac{1}{2nx_\mu} \right). \quad (6.37)$$

Comme précédemment, on passe dans le référentiel du laboratoire et on revient à l'énergie usuelle. Pour aller un cran plus loin, on rappelle que $m \approx \mu$, que $x_\mu = \mu^2/s$ et que $n \simeq \lambda m$; ce qui nous conduit à

$$\boxed{\Delta E_{lab} \simeq \frac{\alpha_s^3 C_F \rho_2 L \lambda}{2} \ln^2 \left(\frac{E}{\lambda \mu^2} \right)}. \quad (6.38)$$

Ce résultat semble indiquer que la perte d'énergie finit par saturer à haute énergie à cause des émissions secondaires. En effet, on n'a plus cette croissance linéaire avec l'énergie démontrée par Gunion-Bertsch ni même un comportement en $\sqrt{E}$ prédit par BDMPS.

5. On introduit un signe « - » pour avoir une quantité positive.

6.3 Retour sur la notion de temps de formation

Nous souhaitons, maintenant, revenir sur le problème initial ; à savoir, l'émission d'un rayonnement secondaire de gluons durant la formation d'une paire quark-gluon primaire. Pour cela, nous allons évaluer le temps de formation dans différents modèles prenant en compte ces émissions secondaires, après avoir rappelé la méthode sur le cas LPM. Nous considérons, donc, un quark P qui émet un gluon primaire k .

6.3.1 Phase de Landau et temps de formation BDMPS

On a introduit dans le chapitre 3 la notion de phase de Landau Φ . On va, dans un premier temps, résoudre l'équation associée à celle-ci pour retrouver une approximation du temps de formation en QCD. Pour cela, on repart de l'expression QCD de la phase de Landau :

$$\Phi_{QCD}(t) = \int_0^t P(t') \cdot k(t') \frac{dt'}{E} . \quad (6.39)$$

On va commencer par redéfinir les quadrivecteurs de ce produit scalaire⁶.

$$\begin{aligned} P(t) &= \left(E, \vec{P}_t, E - \frac{M^2 + P_t^2}{2E} \right) \\ k(t) &= \left(xE, \vec{k}_t, xE - \frac{m_g^2 + k_t^2}{2xE} \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Ici, les dépendances en temps sont comprises dans les vecteurs impulsions transverses. L'évaluation du produit scalaire est purement algébrique et on obtient, en négligeant les termes du type M^4/E^2 et X_t^4/E^2 :

$$P \cdot k \simeq \frac{x}{2} \left(M^2 + \frac{m_g^2}{x} + \left(\vec{P}_t - \frac{\vec{k}_t}{x} \right)^2 \right) . \quad (6.41)$$

On calcule la phase de Landau en intégrant, sur t , $P \cdot k/E$. Les termes dépendant des masses donnent simplement quelque chose proportionnel à t . L'intégration sur les impulsions transverses est plus ardue.

$$\Phi_{QCD}(t) = \frac{\omega}{2} \left(\frac{M^2}{E^2} + \frac{m_g^2}{\omega^2} \right) t + \frac{\omega}{2E^2} \int_0^t dt' \left(\vec{P}_t - \frac{\vec{k}_t}{x} \right)^2 \quad (6.42)$$

Pour continuer, on propose un modèle simple dans lequel le quark et le gluon sont soumis à une force stochastique qui est auto-corrélée dans le temps mais qui sont non-corrélées entre elles :

$$\begin{aligned} \vec{P}_t(t') &= \int_0^{t'} dt'' \vec{q}_{q,t}(t'') \quad \text{et} \quad \langle \vec{q}_{q,t}(t'') \vec{q}_{q,t}(t''') \rangle = \hat{q}_q(t'') \delta(t''' - t'') , \\ \vec{k}_t(t') &= \int_0^{t'} dt'' \vec{q}_{g,t}(t'') \quad \text{et} \quad \langle \vec{q}_{g,t}(t'') \vec{q}_{g,t}(t''') \rangle = \hat{q}_g(t'') \delta(t''' - t'') , \\ \langle \vec{q}_{q,t}(t'') \vec{q}_{g,t}(t''') \rangle &= 0 . \end{aligned} \quad (6.43)$$

6. Avec, dans cette section, $x = \frac{\omega}{E}$

On rappelle que $\hat{q}$ peut être vu comme un coefficient de transport représentant le transfert d'impulsion transverse quadratique moyen par unité de libre parcours moyen $\frac{\langle q_t^2 \rangle}{\lambda}$. Ainsi, on montre après quelques lignes de calculs simples que la phase QCD de Landau prend la forme

$$\langle \Phi_{QCD}(t) \rangle \simeq \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{M^2}{E^2} + \frac{m_g^2}{\omega^2} \right) t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left(\frac{\hat{q}_q(t'')}{E^2} + \frac{\hat{q}_g(t'')}{\omega^2} \right) \right] . \quad (6.44)$$

L'algèbre de couleur indiquant que $\hat{q}_q = \frac{9}{4}\hat{q}_g$ et ω étant bien plus petit que E , on négligera le coefficient de transport du quark et on notera simplement $\hat{q}$ celui du gluon. On fait, de plus, l'hypothèse de stationnarité du processus de diffusion impliquant que $\hat{q}$ ne dépend pas du temps. On arrive donc, finalement, à :

$$\langle \Phi_{QCD}(t) \rangle \simeq \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{M^2}{E^2} + \frac{m_g^2}{\omega^2} \right) t + \frac{\hat{q}}{\omega^2} \frac{t^2}{2} \right] . \quad (6.45)$$

Ainsi, dans la limite où les masses sont négligeables devant les autres échelles du problème, on déduit de $\langle \Phi_{QCD}(t) \rangle \simeq 1$, le temps de formation dit BDMPS (pour la QED, ce temps était appelé LPM) :

$$t_{f,BDMPS} \simeq 2\sqrt{\frac{\omega}{\hat{q}}} . \quad (6.46)$$

Ce temps de formation est à rapprocher du temps de formation multiple défini, en QED, par (3.53). En effet, ce temps est le bon temps de formation lorsque celui-ci a lieu de manière cohérente sur plusieurs centres diffuseurs. Autrement dit, on doit avoir $t_{f,BDMPS} \geq \lambda$ ce qui se traduit en une condition sur l'énergie des gluons émis :

$$\omega \geq \hat{q}\lambda^2 \equiv \omega_{BDMPS} . \quad (6.47)$$

$\hat{q}$ étant de l'ordre de $\frac{\mu^2}{\lambda}$, cette définition de ω_{BDMPS} n'est pas en contradiction avec celle faite dans le chapitre 3.

De plus, ce temps de formation étant plus court que le temps de formation sur un seul centre diffuseur, cela implique (à ω fixée), comme expliqué dans le chapitre 3, une diminution du spectre rayonné.

6.3.2 Modèles incluant le rayonnement secondaire de gluons

On va, maintenant, étudier deux modèles décrivant la modification du temps de formation. L'idée est de supposer que le primo-gluon émis k peut perdre une partie de son énergie durant sa formation. Ainsi, on va considérer qu'il est émis avec une petite virtualité initiale de telle manière qu'à la fin de son temps de formation, il soit sur couche de masse.

Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'à des ordres de grandeur, en s'appuyant

sur ceux des quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_s &\simeq g^2 , \\ \mu &\simeq m_g \simeq gT , \\ \frac{1}{\lambda} &\simeq \sigma_{\text{el}} \rho_2 \simeq \frac{g^4}{\mu^2} T^3 \simeq g^2 T , \\ \hat{q} &\simeq \frac{\mu^2}{\lambda} \simeq g^4 T^3 , \\ \omega_{BDMPS} &= \hat{q} \lambda^2 \simeq T .\end{aligned}$$

Modèle 1 : Gluons BDMPS

Dans un premier modèle, regardons ce qu'il se passe si on considère que les gluons secondaires sont de type BDMPS, c'est-à-dire ceux émis avec des énergies ω' supérieures à ω_{BDMPS} . Autrement dit, on va regarder la contribution, du point de vue de la phase et de son changement, de la deuxième partie du spectre d'émission (cf. Fig 6.5). On notera le quadrivecteur de ces gluons secondaires comme suit : $(\omega', \vec{l}_t, l_z)$.

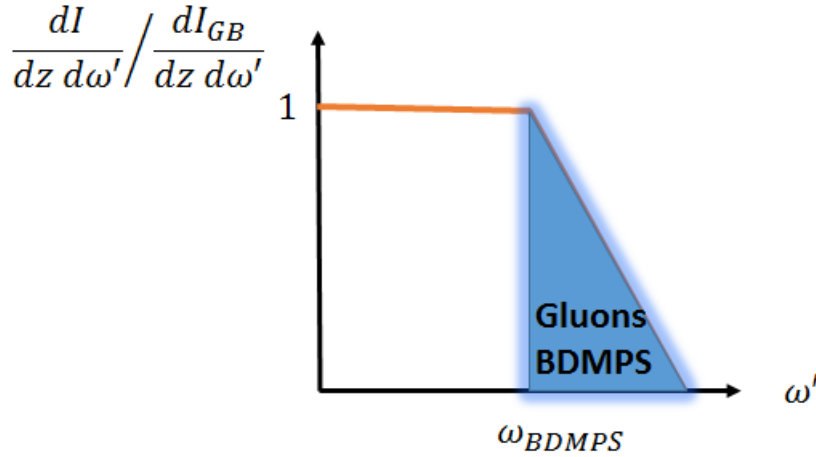


FIGURE 6.5 – Spectre d'émission des gluons secondaires normalisé par le spectre Gunion-Bertsch. ω_{BDMPS} est de l'ordre de T . La zone en bleue correspond aux gluons émis selon le spectre BDMPS.

Ces gluons secondaires vont emmener à la fois de l'énergie et de l'impulsion longitudinale. Il va donc falloir évaluer comment sont modifiées ces deux composantes du quadrivecteur $k(t)$:

$$k(t) = \left(\omega(t), \vec{k}_t(t), k_z(t) \right) , \quad (6.48)$$

le quadrivecteur $P(t)$ restant inchangé.

Cette étude sera faite en considérant que l'on peut adopter une vision probabiliste de la perte d'énergie BDMPS bien que cela n'ait pas été démontré⁷. Avec

7. On a pu établir cette vision probabiliste pour la perte d'énergie Gunion-Bertsch dans la section 5.2.2 et on l'utilisera dans la prochaine partie.

cette hypothèse, on peut proposer le modèle suivant pour $\omega(t)$, formulée de telle sorte qu'au bout du temps de formation t_f , l'énergie du gluon primaire soit $x E$:

$$\omega(t) = x E + \frac{dE_{BDMPS}}{dt}(t_f - t) . \quad (6.49)$$

avec

$$\frac{dE_{BDMPS}}{dt} = \int_{\omega_{BDMPS}}^{\omega} d\omega' \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{BDMPS}}{\omega'}} \simeq \frac{2\alpha}{\lambda} \sqrt{\omega \omega_{BDMPS}} \propto g^4 T \sqrt{T \omega} , \quad (6.50)$$

obtenue en négligeant $\omega_{BDMPS} \simeq T$ devant la borne supérieure ω . Maintenant, estimons la modification de l'impulsion longitudinale. On va écrire, dans le même esprit que pour l'énergie

$$k_z(t) = k_z(t_f) + \frac{dk_z}{dt}(t_f - t) = x E - \frac{k_t^2 + m_g^2}{2xE} + \frac{dk_z}{dt}(t_f - t) \quad (6.51)$$

avec

$$\frac{dk_z}{dt} = \int_{\omega_{BDMPS}}^{\omega} d\omega' \frac{l_z}{\omega'} \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega_{BDMPS}}{\omega'}} . \quad (6.52)$$

l_z est évaluée en prenant en compte le fait que les gluons secondaires sont émis sur couche de masse : $l_z = \sqrt{\omega'^2 - m_g^2 - l_t^2}$. Pour estimer l_t^2 , on utilise $\hat{q}$ et le temps de formation BDMPS puisque ces gluons secondaires sont émis selon la physique BDMPS :

$$l_t^2 = \hat{q} t_{f,BDMPS}(\omega') \simeq 2\sqrt{\omega' \hat{q}} . \quad (6.53)$$

On trouve donc l'expression cherchée pour l_z :

$$l_z = \sqrt{\omega'^2 - m_g^2 - 2\sqrt{\omega' \hat{q}}} \simeq \omega' - \frac{m_g^2 + 2\sqrt{\omega' \hat{q}}}{2\omega'} . \quad (6.54)$$

Le terme en $m_g^2 \propto g^2 T^2$ est négligeable devant $\sqrt{\omega' \hat{q}} \propto g^2 T \sqrt{T \omega'}$ car les gluons BDMPS ont une énergie supérieure à ω_{BDMPS} qui est de l'ordre de T . Finalement, $l_z \simeq \omega' - \sqrt{\frac{\hat{q}}{\omega'}}$ et on a

$$\frac{dk_z}{dt} \simeq \int_{\omega_{BDMPS}}^{\omega} d\omega' \left(1 - \sqrt{\frac{\hat{q}}{\omega'^3}} \right) g^4 T \sqrt{\frac{T}{\omega'}} . \quad (6.55)$$

Le premier terme de cette intégrale est exactement la perte d'énergie calculée en (6.50). Le second terme, quant à lui, donne quelque chose en $g^6 T^2$ car on néglige $1/\omega$ devant $1/T$. Ce terme est sous-dominant par rapport au premier et on conclut alors que :

$$\frac{dk_z}{dt} \simeq \frac{dE_{BDMPS}}{dt} . \quad (6.56)$$

Passons au calcul du produit scalaire $P \cdot k$. En laissant de côté les termes sous-dominants, on obtient :

$$P \cdot k(t) \simeq E \frac{dE_{BDMPS}}{dt}(t_f - t) - E \frac{dk_z}{dt}(t_f - t) + \frac{x}{2}(M^2 + P_t^2) + \frac{1}{2x}(k_t^2 + m_g^2) - \vec{P}_t \cdot \vec{k}_t . \quad (6.57)$$

On constate, donc, au vu de (6.56), que le produit scalaire n'est pas modifié par l'émission de gluons secondaires BDMPS. Ainsi, le calcul de la nouvelle phase

et, par extension, l'évaluation du temps de formation se déroule comme dans la sous-section précédente. On obtient :

$$\boxed{t_f^{(1)} \simeq t_{f,BDMPS}} . \quad (6.58)$$

Au final, on comprend qu'il y a compensation entre la perte d'énergie et la perte d'impulsion longitudinale. La modification de la phase de Landau par ces émissions type BDMPS est donc sous-dominante.

Modèle 2 : Gluons Gunion-Bertsch

Nous allons maintenant étudier le cas du rayonnement de gluons secondaires de type Gunion-Bertsch considérés comme des plasmons stationnaires entraînant une perte d'énergie sans perte d'impulsion associée : $l = (\omega', \vec{0}_t, 0)$. On peut déjà anticiper que la compensation observée dans le modèle précédent n'aura pas lieu. Le quadrivecteur $P(t)$ reste toujours inchangé mais $k(t)$ prendra maintenant la forme :

$$k(t) = \left(\omega(t), \vec{k}_t(t), xE - \frac{k_t^2 + m_g^2}{2xE} \right) . \quad (6.59)$$

Pour formuler $\omega(t)$, on reprend le même raisonnement que précédemment, toujours en adoptant une vision probabiliste de la perte d'énergie et en utilisant, cette fois, la version Gunion-Bertsch :

$$\omega(t) = xE + \frac{dE_{GB}}{dt}(t_f - t) . \quad (6.60)$$

Il nous faut ensuite évaluer $\frac{dE_{GB}}{dt}$, qui est identique à $\frac{dE_{GB}}{dz}$ dans la limite ultrarelativiste. On a vu plus haut dans le chapitre (équation (6.38)) que cette perte d'énergie était de l'ordre de ⁸ :

$$\frac{dE_{GB}}{dt} \simeq \frac{\alpha}{\lambda} \omega_{BDMPS} . \quad (6.61)$$

Ici, on considère le rayonnement émis par le gluon primaire uniquement selon le spectre Gunion-Bertsch (cf. Fig. 6.6). Comme on cherche avant tout l'ordre de grandeur de la modification du temps de formation, on va remplacer α par g^2 et λ par $\frac{1}{g^2 T}$. Ainsi, $\frac{dE_{GB}}{dt}$ va comme $g^4 T^2$.

Le calcul de $P \cdot k$ est pure algèbre et donne :

$$P \cdot k(t) = \frac{x}{2}(M^2 + P_t^2) + \frac{1}{2x}(m_g^2 + k_t^2) - \vec{k}_t \cdot \vec{P}_t + E \frac{dE_{GB}}{dt}(t_f - t) . \quad (6.62)$$

On reconnaît les trois premiers termes comme étant ceux menant à la phase de Landau dans le cas LPM. La prise en compte d'émissions secondaires de type Gunion-Bertsch induit la présence du dernier terme proportionnel à la perte d'énergie. La nouvelle phase est, au vu de la dépendance temporelle du nouveau terme, aisée à évaluer :

$$\langle \Phi_{QCD}(t) \rangle = \langle \Phi(t) \rangle_{BDMPS} + \frac{dE_{GB}}{dt} \left(t_f t - \frac{t^2}{2} \right) . \quad (6.63)$$

8. En laissant de côté le logarithme.

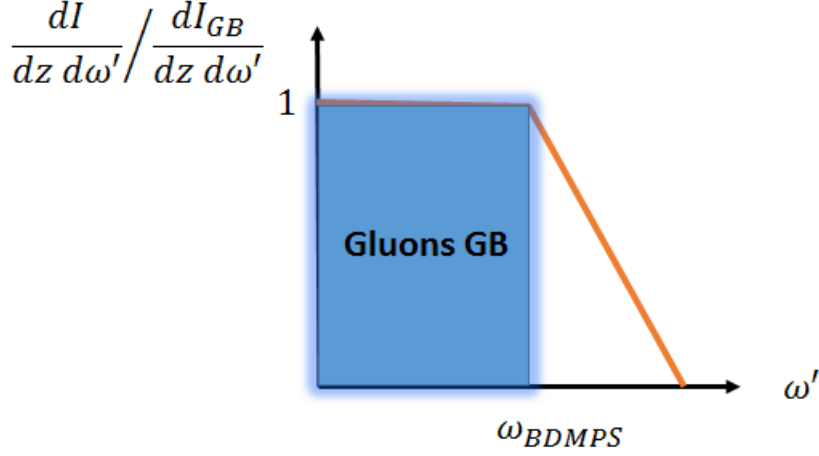


FIGURE 6.6 – Spectre d'émission des gluons secondaires normalisé par le spectre Gunion-Bertsch. ω_{BDMPS} est de l'ordre de T . La zone en bleue correspond aux gluons émis selon le spectre Gunion-Bertsch.

En remplaçant la perte d'énergie par unité de temps par son expression $g^4 T^2$ et en se rendant compte qu'elle est de l'ordre de $\frac{\hat{q}}{T}$, on peut donc mettre la phase, dans ce deuxième modèle et évaluée en t_f , sous la forme suivante :

$$\langle \Phi_{QCD}(t_f) \rangle = \frac{t_f^2}{2} \left(\frac{\hat{q}}{\omega} + \frac{\hat{q}}{T} \right) . \quad (6.64)$$

Toujours dans la limite ultrarelativiste, où $\omega \gg T$, on déduit donc le nouveau temps de formation

$$t_f^{(2)} \simeq \sqrt{\frac{2T}{\hat{q}}} \simeq \lambda . \quad (6.65)$$

Le temps de formation trouvé est alors extrêmement court, bien plus court que $t_{f,BDMPS}$, qui lui-même correspondait déjà à une durée restreinte par rapport au temps de formation en l'absence de diffusion multiple. Pour expliquer l'origine de cet effet dramatique, on rappelle que les temps de formation étudiés sont a priori beaucoup plus grands que l'échelle naturelle $1/\omega$, échelle qui n'est pertinente que dans le régime non relativiste ou celui de rayonnement à grand angle. L'émergence des grands temps de formation provient d'une compensation délicate dans le calcul de la phase (6.39) entre les termes du produit scalaire $P(t') \cdot k(t')$. La perturbation apportée dans le modèle 2 à cette compensation est suffisante pour passer de $t_{f,BDMPS} \propto \sqrt{\omega}$ à $t_f^{(2)} \simeq \lambda$ en dépit du fait que l'on a typiquement émis un seul gluon secondaire, de faible énergie $\simeq \omega_{BDMPS}$, pendant ce temps.

Cela semblerait alors indiquer que la prise en compte de ce rayonnement secondaire de gluons Gunion-Bertsch vient détruire la possibilité d'une émission cohérente, un résultat, à première vue, surprenant⁹ et qu'il s'agirait de confirmer au-delà du calcul de la phase de Landau envisagé ici.

On pourrait par exemple envisager de corriger comme on l'a fait ici sur la phase de Landau les déphasages qui apparaissent dans les amplitudes BDMPS

9. C'est a priori d'autant plus surprenant que ce ne sont pas les gluons rayonnés les plus énergétiques qui conduisent aux modifications les plus importantes.

pour contrôler que l'effet sur le temps de formation est bien celui obtenu.

6.3.3 Conséquence sur le spectre de rayonnement associé au gluon primaire

On va maintenant utiliser les résultats précédents pour déterminer les modifications à apporter au spectre de rayonnement du primo-gluon. On peut, en effet, appliquer ces derniers car les conditions $x_\mu \ll 1$ et $x_\mu \ll x$ sont toujours vérifiées. On peut voir dans l'annexe B le comportement dans ce régime de la section efficace de rayonnement (équation (B.13)) :

$$\left(x \frac{d\sigma}{dx} \right)_{x_\mu \ll x} \propto \frac{\ln x}{x} . \quad (6.66)$$

Ainsi, on peut proposer le spectre montré en Fig. 6.7. Ce dernier fait apparaître trois zones distinctes. La première, à plus basse énergie, correspond au régime Gunion-Bertsch itéré. Le rayonnement a lieu de manière indépendante sur chacun des centres diffuseurs rencontrés. Ensuite, si l'on suppose que l'on a un plasma faiblement couplé, alors, n , allant comme $1/g$, peut être relativement grand (de l'ordre de la dizaine). Ainsi, cela laisse apparaître une région intermédiaire entre les échelles x_{BDMPS} et $n x_\mu$ où le spectre va suivre le comportement BDMPS en $1/\sqrt{x}$ et où les émissions secondaires n'ont pas d'effet. Puis, au delà de $n x_\mu$, on a l'impact des rayonnements secondaires qui se fait sentir donnant lieu au nouveau régime en $\ln x/x$.

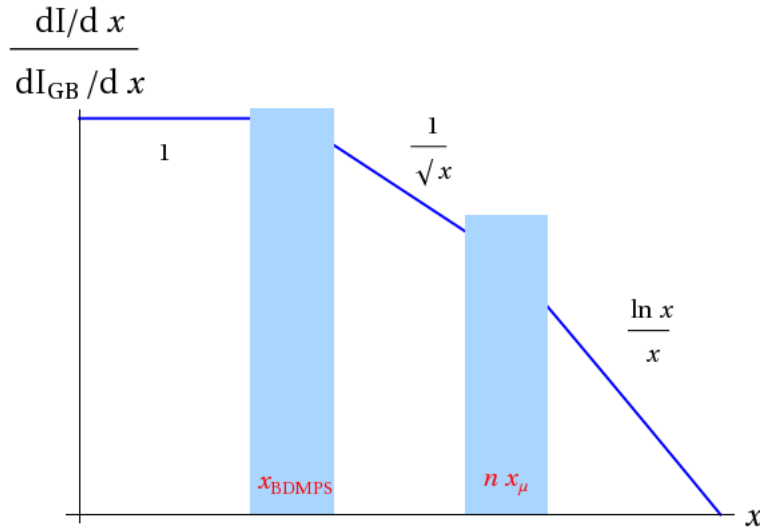


FIGURE 6.7 – Spectre d'émission du primo-gluon dans l'hypothèse d'un plasma faiblement couplé.

Cependant, on peut aussi imaginer quelle serait la situation dans un plasma fortement couplé. On aurait alors n proche de l'unité et la zone du spectre où les conclusions de BDMPS sont valides s'amenuiserait jusqu'à disparaître. Dans un tel plasma, on en conclut qu'il ne serait laissé aucune place à un régime d'émission cohérente. Ce cas est représenté sur la Fig. 6.8.

Selon le schéma traditionnel de BDMPS, il y a une transition d'un spectre en $1/\sqrt{\omega}$ à un spectre en $1/\omega$ à une échelle ω_c telle que le $t_{f,BDMPS} = \sqrt{\omega_c/\hat{q}} = L$

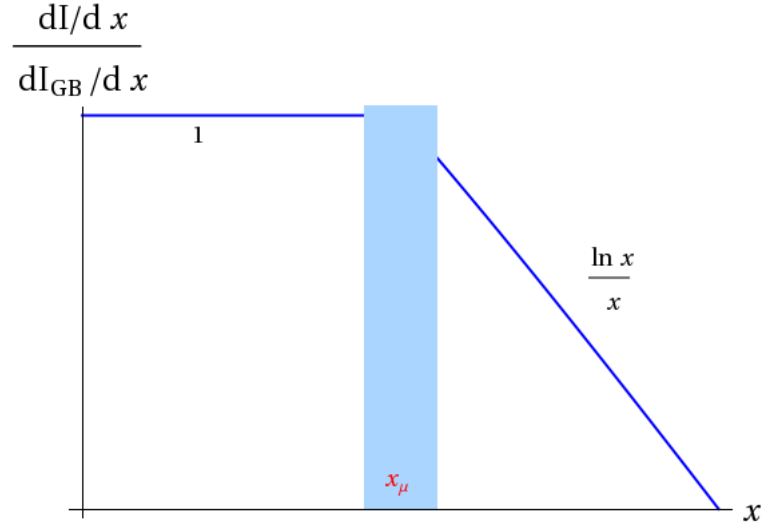


FIGURE 6.8 – Spectre d'émission du primo-gluon dans l'hypothèse d'un plasma fortement couplé.

soit $\omega_c = \hat{q}L^2$. Du coup, la perte d'énergie totale devient proportionnelle à la longueur du milieu L au carré et non pas à L comme dans Gunion-Bertsch. Or, des travaux récents [65] montrent qu'il est possible d'aller inspecter la dépendance en L au moyen du facteur de modification nucléaire R_{AA} comparé entre plusieurs systèmes. Ainsi, puisque l'effet présenté aurait tendance à restaurer un comportement proportionnel à L de la perte d'énergie totale, il y aurait potentiellement des conséquences observables.

Conclusion du chapitre 6

Dans ce dernier chapitre, nous avons exploité le formalisme et les outils mis en place dans les deux chapitres précédents. Dans un premier temps, nous avons retrouvé la perte d'énergie Gunion-Bertsch avec notre corrélateur inélastique, nous rassurant ainsi sur la capacité de ce modèle à reproduire des résultats connus. Puis, nous avons montré que le fait de limiter les temps de formation dans le cas d'un rayonnement Gunion-Bertsch induisait une diminution de la perte d'énergie (équation (6.38)).

Ensuite, nous avons étudié les conséquences de ce rayonnement secondaire sur le temps de formation du gluon primaire. Nous nous sommes rendus compte que les gluons secondaires de type Gunion-Bertsch entraînaient une diminution considérable du temps de formation qui devenait alors comparable au libre parcours moyen λ . Chose intéressante, nous avons aussi constaté que, dans l'hypothèse où les gluons BDMPS pouvait être traité de manière probabiliste comme il a été montré pour leurs compères à plus basses énergies, le rayonnement secondaire de ceux-ci ne venait pas modifier le temps de formation du primo-gluon. En reprenant le calcul du spectre de rayonnement mais en limitant les temps de formations au libre parcours moyen, nous avons mis en évidence que ce rayonnement secondaire avait pour effet sur celui-ci d'induire une allure en $1/\omega$ (au lieu du $1/\sqrt{\omega}$ prévu par BDMPS).

In fine, il est intéressant de constater que le rayonnement secondaire semble tuer le rayonnement primaire, surtout dans un plasma fortement couplé. Il y a donc une sorte de « self-quenching » dans ce processus.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Durant ces travaux de thèse, notre étude s'est portée sur la perte d'énergie radiative d'une particule sonde ultrarelativiste dans un milieu dense, type plasma de quarks et de gluons. L'idée était de considérer la possibilité pour une paire parton parent - gluon rayonné de continuer à interagir dans le milieu durant sa formation et de regarder les conséquences de l'existence, dans ce même temps, d'un rayonnement secondaire sur la perte d'énergie du quark lui-même.

Nous nous sommes appuyés sur un formalisme de la diffusion multiple qui caractérise l'interaction entre la particule sonde et le milieu par un potentiel effectif $\tilde{A}(x)$ (chapitre 4). Il est alors montré que l'on peut reformuler, d'une part, l'amplitude sous la forme d'une ligne de Wilson dépendant de ce potentiel (4.3) et, d'autre part, la probabilité d'interaction totale comme l'exponentielle d'un objet appelé corrélateur (élastique dans ce cas) (4.4). L'hypothèse majeure de ce modèle est l'indépendance de $\tilde{A}$ vis-à-vis de la variable cône de lumière x^- . Celle-ci a pour conséquence d'empêcher toute perte d'énergie pour la particule sonde qui va seulement traverser le milieu en échangeant de l'impulsion transverse avec ce dernier et en effectuant des rotations dans l'espace de couleur. Notre idée a été de revenir sur cette indépendance pour pouvoir permettre à l'interaction avec $\tilde{A}(x)$ d'induire une petite perte d'énergie (chapitre 5). Ainsi, on pourrait considérer la propagation du gluon primaire pendant sa formation comme parsemée d'interaction avec ce potentiel et entraînant du rayonnement. Nous avons alors pu montrer que, moyennant des pertes d'énergies suffisamment petites devant l'énergie du gluon primaire (et donc du quark émetteur), le formalisme développé dans le cas de la diffusion multiple s'étendait bien au cas radiatif en introduisant un corrélateur inélastique (5.1 et 5.2). Etant donné que nous avons montré que son homologue élastique se déduisait simplement de l'amplitude élastique au carré (5.3.1), nous avons fait l'hypothèse que cette relation restait vraie dans le cas radiatif et avons utilisé l'amplitude de Gunion-Bertsch. Ainsi, nous avons pu établir la perte d'énergie induite par ce rayonnement secondaire (chapitre 6). Nous avons aussi montré que le fait de limiter les temps de formation de ces gluons secondaires (dans le but de ne pas avoir à considérer, à ce niveau, la physique de la cohérence type BDMPS) entraînait un changement de comportement pour la perte d'énergie moyenne du gluon primaire vis-à-vis de l'énergie (6.2.2).

Ayant donc constaté que l'existence de ce rayonnement secondaire avait un impact sur les pertes d'énergie, nous nous sommes tournés vers les conséquences

que cela avait sur le temps de formation du primo-gluon (6.3). Il semble alors que l'émission secondaire de gluons de basses énergies (type Gunion-Bertsch) induise une diminution du temps de formation jusqu'à des valeurs de l'ordre du libre parcours moyen (6.3.2). De plus, les gluons secondaires émis à plus grandes énergies (type BDMPS), en faisant l'hypothèse que l'on peut les étudier de la même manière, ne semblent pas modifier le temps de formation du gluon principal. Cela semble plutôt consistant dans le sens où ces gluons ont moins de chance d'être émis d'après le modèle BDMPS et la dépendance en $1/\sqrt{\omega}$. Finalement, en limitant les temps de formation possibles pour le gluon primaire à des valeurs de l'ordre du libre parcours moyen, on trouve que la possibilité d'émettre des gluons de hautes énergies serait en fait pénaliser par un facteur $1/\omega$ conduisant à une perte d'énergie plus faible (6.3.3).

Pour ce qui est des perspectives, il faudrait, pour être plus rigoureux, trouver une alternative à l'hypothèse principale de l'étude concernant le passage du corrélateur élastique au corrélateur inélastique. En effet, nous avons pu déterminer le corrélateur élastique depuis les « premiers principes », i.e. depuis un élément de matrice ou via les règles de Feynman, mais, dans le cas radiatif, nous ne sommes pas parvenus à un tel résultat (au contraire du cas QED où il a été possible de déduire complètement un corrélateur radiatif) et nous nous sommes contentés de cet ansatz. En conséquence, le traitement des gluons BDMPS dans le dernier chapitre mériterait une attention plus particulière puisque, quand bien même la manière d'introduire le rayonnement de gluons de basses énergies (donc ayant des petits temps de formation) permet de conserver un semblant de localité pour l'interaction avec $\tilde{A}(x)$, la considération de gluons BDMPS vient remettre en cause cette vision. En bref, comme nous avons montré que les gluons secondaires types Gunion-Bertsch semble détruire la cohérence en faisant diminuer le temps de formation du primaire, le spectre de rayonnement est encore plus amputé que dans le modèle BDMPS pour ce qui est des gluons de plus hautes énergies. Il nous apparaît donc logique que leur participation au rayonnement secondaire (ayant lieu à plus basse énergie) soit négligeable même si cela demande à être démontré proprement. Aussi, il pourrait s'avérer intéressant de considérer un effet « cascade » dans lequel les gluons secondaires auraient un temps de formation suffisamment long pour réinteragir dans le milieu et rayonner à leur tour des gluons tertiaires et ainsi de suite. Il est à noter que cette éventuelle « cascade » détruisant la cohérence est un phénomène qui requiert que le boson émis soit lui-même porteur d'une charge et constitue un phénomène propre à la QCD (et donc absent d'un plasma électromagnétique). Une dernière perspective pourrait être, aussi, de recroiser ces résultats avec l'approche semi-classique évoqué à la fin du chapitre 3 (travail ayant motivé ces travaux de thèse). En effet, il pourrait être vu s'il est possible de reformuler toutes ces considérations sous forme d'un temps caractéristique ou d'un taux d'amortissement à la manière dont cela était formulé dans cette première approche.

ANNEXE A

COORDONNÉES CÔNE DE LUMIÈRE

L'objectif de cette annexe est de recenser les différentes formules usuelles impliquant les coordonnées cône de lumière (LC pour *light-cone*) ainsi que leur intérêt.

A.1 Quadrivecteur et métrique dans l'espace de Minkowski

En physique, un quadrivecteur est un vecteur à quatre dimensions utilisé pour représenter un événement dans l'espace-temps. En relativité restreinte, plus particulièrement, un quadrivecteur est un vecteur dans l'espace de Minkowski. Dans une base donnée d'un espace de Minkowski, on parlera de quadrivecteur contra-variant et on le représentera de la manière suivante (indices en haut) :

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) . \quad (\text{A.1})$$

On peut aussi munir l'espace de Minkowski d'un produit scalaire. Dans le but d'alléger l'écriture de ce dernier, on construit une deuxième base dite covariante. Dans cette base, les quadrivecteurs sont dits covariants et seront représentés de la manière suivante (indices en bas) :

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) . \quad (\text{A.2})$$

Le produit scalaire de l'espace-temps de Minkowski étant la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique due à l'intervalle d'espace-temps, on doit avoir :

$$a^\mu a_\mu = a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = a^0 a_0 + a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3 . \quad (\text{A.3})$$

Cela nous donne immédiatement la relation entre les quadrivecteurs contravariants et covariants :

$$(a^0 = a_0 , a^1 = -a_1 , a^2 = -a_2 , a^3 = -a_3) . \quad (\text{A.4})$$

On résume ces « règles de passage » dans un tenseur appelé tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ qui est donc tel que :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu . \quad (\text{A.6})$$

Ecrivons aussi l'élément différentiel d'espace-temps d^4a :

$$d^4a = da^0 da^1 da^2 da^3 . \quad (\text{A.7})$$

Enfin, un autre objet revenant souvent est le quadri-gradient formé par la dérivée partielle par rapport au temps et le gradient spatial. Il s'écrit comme suit :

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \quad (\text{A.8})$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) . \quad (\text{A.9})$$

Il est important de noter que le choix de la métrique n'est pas unique : on aurait pu choisir sans changer la physique un tenseur métrique de la forme.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.10})$$

A.2 Passage aux coordonnées LC et implications sur la métrique

Il existe plusieurs jeux de coordonnées pouvant prétendre au titre coordonnées LC différant les uns des autres par une constante. Le choix de cette constante est une convention et nous nous proposons d'expliciter la métrique dans les deux conventions les plus usitées.

A.2.1 Première convention

On définit désormais a^μ et a_μ de la manière suivante :

$$a^\mu = (a^+ = \frac{a^0 + a^3}{\sqrt{2}}, a^1, a^2, a^- = \frac{a^0 - a^3}{\sqrt{2}}) \quad (\text{A.11})$$

$$a_\mu = (a_+ = \frac{a_0 + a_3}{\sqrt{2}}, a_1, a_2, a_- = \frac{a_0 - a_3}{\sqrt{2}}) = (a_+ = \frac{a^0 - a^3}{\sqrt{2}}, -a^1, -a^2, a_- = \frac{a^0 + a^3}{\sqrt{2}}) \quad (\text{A.12})$$

$$a_\mu = (a^-, -a^1, -a^2, a^+) . \quad (\text{A.13})$$

On en déduit alors la métrique et les produits scalaires suivants (en demandant que $a^\mu a_\mu = a^+ a_+ + a^- a_- + a^1 a_1 + a^2 a_2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$) :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

$$a^\mu b_\mu = a^+ b^- + a^- b^+ - a^1 b^1 - a^2 b^2 \quad (\text{A.15})$$

$$a^\mu a_\mu = 2a^+ a^- - a^1 b^1 - a^2 b^2 . \quad (\text{A.16})$$

Pour évaluer le nouvel élément différentiel d'espace-temps, il faut connaître le déterminant du jacobien de la transformation. Pour cette convention, il est de 1 :

$$d^4 a = da^+ da^- da^1 da^2 . \quad (\text{A.17})$$

On réécrit aussi le quadri-gradient dans les coordonnées LC et pour cette convention :

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^+}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^-} \right) = (\partial^-, \partial^1, \partial^2, \partial^+) . \quad (\text{A.18})$$

C'est cette convention que l'on utilisera dans tout ce manuscrit.

A.2.2 Deuxième convention

On définit maintenant a^μ et a_μ comme suit :

$$a^\mu = (a^+ = a^0 + a^3, a^1, a^2, a^- = a^0 - a^3) \quad (\text{A.19})$$

$$a_\mu = (a_+ = \frac{a_0 + a_3}{2}, a_1, a_2, a_- = \frac{a_0 - a_3}{2}) = (a_+ = \frac{a_0 + a_3}{2}, -a^1, -a^2, a_- = \frac{a_0 - a_3}{2}) \quad (\text{A.20})$$

$$a_\mu = \left(\frac{a^-}{2}, -a^1, -a^2, \frac{a^+}{2} \right) . \quad (\text{A.21})$$

En demandant toujours que $a^\mu a_\mu = a^+ a_+ + a^- a_- + a^1 a_1 + a^2 a_2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$, on déduit la nouvelle métrique. Il est à noter que cette fois-ci $g^{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.22})$$

Ainsi, le produit scalaire donne :

$$a^\mu b_\mu = \frac{1}{2}(a^+ b^- + a^- b^+) - a^1 b^1 - a^2 b^2 \quad (\text{A.23})$$

$$a^\mu a_\mu = a^+ a^- - a^1 b^1 - a^2 b^2 . \quad (\text{A.24})$$

Le déterminant du jacobien de cette transformation est cette fois de 1/2 menant à :

$$d^4 a = \frac{1}{2} da^+ da^- da^1 da^2 = 2 da_+ da_- da_1 da_2 . \quad (\text{A.25})$$

Enfin, l'expression du quadri-gradient reste inchangé par rapport à la convention précédente.

A.3 Intérêt physique des coordonnées cône de lumière

Un des intérêts physiques de ce système de coordonnées se situe dans l'étude des particules ultrarelativistes. En effet, prenons une particule évoluant quasiment à la vitesse de la lumière dans le vide selon la direction z :

$$x^\mu = (vt, 0, 0, z) . \quad (\text{A.26})$$

La particule évoluant sur le cône de lumière (i.e. $v \simeq c = 1$), les deux composantes non nulles de ce quadrivecteur sont quasiment égales : $vt \simeq z$. Si on l'écrit dans les coordonnées cône de lumière, on aura la chose suivante :

$$x^\mu = (x^+ = \frac{t+z}{\sqrt{2}}, 0, 0, x^- = \frac{t-z}{\sqrt{2}}) = (x^+ = \sqrt{2}t, 0, 0, x^- \simeq 0) . \quad (\text{A.27})$$

Ainsi, si l'on appelle longitudinales les composantes « + » et « - », notre particule se déplace uniquement selon x^+ . Une collision pourra alors être vue comme l'interaction entre une particule se propageant dans la direction « + » et une autre se propageant « perpendiculairement » selon la direction « - ».

L'intérêt se poursuit si l'on passe dans l'espace des impulsions. La particule ultrarelativiste aura, pour la même raison que précédemment, une composante « + » égale à $\sqrt{2}E$ et une composante « - » quasi-nulle. On peut parler, dans ce cas, de p^+ comme de la grande composante tandis que p^- est qualifiée de petite composante. On va aussi parfois, par abus de langage, identifier la grande composante d'un quadrivecteur avec son énergie alors qu'un facteur $\sqrt{2}$ les séparent.

ANNEXE B

APPROXIMATION ANALYTIQUE POUR $xd\sigma/dx$ ET SES PREMIERS MOMENTS

Pour compléter l'étude numérique de la section 6.2, on cherche dans cette annexe des formes approximatives pour les quantités f_1 et f_2 apparaissant dans le développement du corrélateur inélastique (6.15). Dans cette partie, on supposera toujours que $x_\mu \ll 1$.

On rappelle que

$$f_1(x_\mu, n) = \int \frac{dXdY}{(X + x_\mu)^2} dx \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \quad (\text{B.1})$$

$$f_2(x_\mu, n) = \int \frac{dXdY}{(X + x_\mu)^2} \frac{x}{4} dx \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) , \quad (\text{B.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) = & \frac{X + 2x_\mu}{(Y + x_\mu)\sqrt{(X + Y + x_\mu)^2 - 4XY}} - \frac{x_\mu}{(Y + x_\mu)^2} \\ & - \frac{x_\mu(X + Y + x_\mu)}{((X + Y + x_\mu)^2 - 4XY)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour calculer les moments, on procède d'abord aux intégrales sur X puis sur Y de $\mathcal{F}$ pondérée par $1/(X + x_\mu)^2$.

B.1 Intégration sur X

On doit distinguer deux régimes en Y . Pour $Y \lesssim x_\mu$, la dynamique en Y est faible et on peut dès lors procéder à un développement limité de $\mathcal{F}$ à petit Y :

$$\mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \approx \frac{X}{(X + x_\mu)^2} , \quad (\text{B.4})$$

qui conduit à

$$\int dX \frac{X}{(X + x_\mu)^4} \approx \frac{1}{6x_\mu^2} . \quad (\text{B.5})$$

Pour $Y \gtrsim x_\mu$, on doit distinguer deux régions d'intégrations :

$$X \lesssim Y : \quad \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \approx \frac{X(Y^2 + x_\mu^2)}{(Y + x_\mu)^4} \quad (\text{B.6})$$

$$Y \lesssim X : \quad \mathcal{F}(X, Y, x_\mu) \approx \frac{X}{(Y + x_\mu)((X - Y)^2 + 2x_\mu(X + Y) + x_\mu^2)^{1/2}} . \quad (\text{B.7})$$

Dans ce régime, on trouve que

$$\int dX \frac{\mathcal{F}(X, Y, x_\mu)}{(X + x_\mu)^2} \approx \frac{2}{Y(Y + x_\mu)} \ln \frac{Y}{x_\mu} . \quad (\text{B.8})$$

Les deux régimes en Y peuvent être commodément interpolés par

$$\int dX \frac{\mathcal{F}(X, Y, x_\mu)}{(X + x_\mu)^2} \approx \frac{\ln \left(1 + \frac{Y(Y + x_\mu)}{6x_\mu^2} \right)}{Y(Y + x_\mu)} . \quad (\text{B.9})$$

B.2 Intégration sur Y avec et sans limite sur les temps de formation

On rappelle que le domaine en intégration sur Y est $[x/2n; x - x_\mu]$ (cf. (5.54)), avec une borne inférieure remplacée par 0 quand on ne limite pas les temps de formation ($n \rightarrow \infty$). Pour ce dernier cas, on trouve, en intégrant (B.9) pour des $x \gg x_\mu$,

$$\int_0^x dY \frac{\ln \left(1 + \frac{Y(Y + x_\mu)}{6x_\mu^2} \right)}{Y(Y + x_\mu)} \approx \frac{2}{3x_\mu} . \quad (\text{B.10})$$

Ce résultat étant indépendant de x , le calcul des deux moments est direct

$$f_1(x_\mu, \infty) \approx \frac{2}{3x_\mu} , \quad (\text{B.11})$$

$$f_2(x_\mu, \infty) \approx \frac{1}{12x_\mu} . \quad (\text{B.12})$$

On aboutit, finalement, à un comportement en $1/x_\mu$ pour les deux premiers moments et dans la situation où les temps de formation ne sont pas limités. Cette dépendance en x_μ est celle vérifiée numériquement dans 6.2.1.

On examine maintenant l'effet de limiter les temps de formation, $Y > x/(2n)$. L'effet de cette restriction se fait sentir de façon dramatique lorsque $x \gg 2n x_\mu$ car le domaine d'intégration sur Y est cantonné aux grands Y , régime $Y \gtrsim x_\mu$. Pour cette région de x , l'intégration sur Y donne

$$\int_{x/(2n)}^x dY \frac{2}{Y^2} \ln \frac{Y}{x_\mu} \approx \frac{2n - 1}{x} \ln \left(\frac{x}{2n x_\mu} \right) . \quad (\text{B.13})$$

Pour l'estimation des moments, la connaissance de cette forme approximative est suffisante dès lors que $2n x_\mu \ll 1$ et on obtient

$$f_1(x_\mu, n) \approx \frac{2n - 1}{2} \ln^2 \left(\frac{1}{2n x_\mu} \right) , \quad (\text{B.14})$$

$$f_2(x_\mu, n) \approx (2n - 1) \ln \left(\frac{1}{2n x_\mu} \right) . \quad (\text{B.15})$$

Les lois d'échelle des deux moments diffèrent dans le cas présent l'une de l'autre et de ce qui avait été obtenu auparavant avec un comportement en $\ln^2$ de la variable $2n x_\mu$ pour le premier moment et un simple $\ln$ pour le second. Ces dépendances en x_μ sont évaluées dans [6.2.2](#).

- [1] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? Phys. Rev. Lett., 30 :1346–1349, 1973.
- [2] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. Phys. Rev. Lett., 30 :1343–1346, 1973.
- [3] John C Collins and Malcolm J Perry. Superdense matter : neutrons or asymptotically free quarks ? Physical Review Letters, 34(21) :1353, 1975.
- [4] Rolf Wideroe. On a new principle to generate high voltages. Archive for Electronics and Uebertragungstechnik, 21(4) :387, 1928.
- [5] Georges Charpak, R Bouclier, T Bressani, J Favier, and Č Zupančič. The use of multiwire proportional counters to select and localize charged particles. Nuclear Instruments and Methods, 62(3) :262–268, 1968.
- [6] S. A. Bass, M. Gyulassy, Horst Stoecker, and W. Greiner. Signatures of quark gluon plasma formation in high-energy heavy ion collisions : A Critical review. J. Phys., G25 :R1–R57, 1999.
- [7] Jean-Yves Ollitrault. Anisotropy as a signature of transverse collective flow. Phys. Rev., D46 :229–245, 1992.
- [8] You Zhou. Anisotropic flow of identified particles in Pb–Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ALICE detector. J. Phys. Conf. Ser., 509 :012029, 2014.
- [9] T Matsui and Helmut Satz. J/ψ suppression by quark-gluon plasma formation. Physics Letters B, 178(4) :416–422, 1986.
- [10] Vardan Khachatryan et al. Charged-particle nuclear modification factors in PbPb and pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. JHEP, 04 :039, 2017.
- [11] J. D. Bjorken. Energy Loss of Energetic Partons in Quark - Gluon Plasma : Possible Extinction of High p(t) Jets in Hadron - Hadron Collisions. 1982.
- [12] I. Langmuir. The interaction of electron and positive ion space charges in cathode sheaths. Phys. Rev., 33 :954–989, Jun 1929.
- [13] L. Tonks and I. Langmuir. A general theory of the plasma of an arc. Phys. Rev., 34 :876–922, Sep 1929.

- [14] L. Tonks and I. Langmuir. Oscillations in ionized gases. Phys. Rev., 33 :195–210, Feb 1929.
- [15] E. Rutherford. The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom. Phil. Mag. Ser.6, 21 :669–688, 1911.
- [16] P. Debye and Hückel E. The theory of electrolytes. Physik. Z., 24 :185–206, 1923.
- [17] D. Pines and D. Bohm. A Collective Description of Electron Interactions : 2. Collective vs Individual Particle Aspects of the Interactions. Phys. Rev., 85 :338–353, 1952.
- [18] S. Ichimaru. Basic Principles of Plasma Physics : A Statistical Approach. A lecture note and reprint series. W. A. Benjamin, 1973.
- [19] I.U.L. Klimontovich. The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma. International series of monographs in natural philosophy. M.I.T. Press, 1967.
- [20] N. Bogoliubov. Kinetic equations. Journal of Physics, 10 :265–274, 1946.
- [21] L. D. Landau. On the vibrations of the electronic plasma. J. Phys.(USSR), 10 :25–34, 1946. [Zh. Eksp. Teor. Fiz.16,574(1946)].
- [22] D. Bohm and E. P. Gross. Theory of Plasma Oscillations. A. Origin of Medium-Like Behavior. Phys. Rev., 75 :1851–1864, 1949.
- [23] David Pines and J. Robert Schrieffer. Approach to equilibrium of electrons, plasmons, and phonons in quantum and classical plasmas. Phys. Rev., 125 :804–812, Feb 1962.
- [24] B.D. Fried and S.D. Conte. The Plasma Dispersion Function. A lecture note and reprint series. Academic, New York, 1961.
- [25] J. D. Jackson. Longitudinal plasma oscillations. Journal of Nuclear Energy, 1 :171–189, January 1960.
- [26] K Imre. Oscillations in a relativistic plasma. The Physics of Fluids, 5(4) :459–466, 1962.
- [27] Michel Le Bellac. Thermal Field Theory. Cambridge University Press, 2011.
- [28] J. I. Kapusta and Charles Gale. Finite-temperature field theory. Cambridge University Press, 2011.
- [29] Takeo Matsubara. A New approach to quantum statistical mechanics. Prog. Theor. Phys., 14 :351–378, 1955.
- [30] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [31] Markus H. Thoma and Miklos Gyulassy. Quark Damping and Energy Loss in the High Temperature QCD. Nucl. Phys., B351 :491–506, 1991.

- [32] Eric Braaten and Robert D. Pisarski. Soft Amplitudes in Hot Gauge Theories : A General Analysis. Nucl. Phys., B337 :569–634, 1990.
- [33] M. H. Thoma. Damping rate of a hard photon in a relativistic plasma. Phys. Rev., D51 :862–865, 1995.
- [34] Eric Braaten and Tzu Chiang Yuan. Calculation of screening in a hot plasma. Physical review letters, 66(17) :2183, 1991.
- [35] Eric Braaten and Robert D Pisarski. Calculation of the gluon damping rate in hot qcd. Physical Review D, 42(6) :2156, 1990.
- [36] Robert D. Pisarski. Damping rates for moving particles in hot QCD. 1992.
- [37] M. Bluhm, P. B. Gossiaux, and J. Aichelin. Radiative energy loss of relativistic charged particles in absorptive media. Nucl. Phys., A910-911 :248–251, 2013.
- [38] P.B. Gossiaux. Tomographie du Plasma de Quarks et de Gluons grâce aux Saveurs Lourdes : Éléments de Théorie, Phénomologie et Applications. Habilitation à diriger des recherches (HDR), Laboratoire SUBATECH, 2009.
- [39] Niels Bohr. On the constitution of atoms and molecules. In Niels Bohr, 1913-2013, pages 13–33. Springer, 2016.
- [40] Niels Bohr. Lx. on the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 30(178) :581–612, 1915.
- [41] John David Jackson. Classical electrodynamics, 1999.
- [42] Hans Bethe. Zur theorie des durchgangs schneller korpuskularstrahlen durch materie. Annalen der Physik, 397(3) :325–400, 1930.
- [43] Felix Bloch. Bremsvermögen von atomen mit mehreren elektronen. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 81(5) :363–376, 1933.
- [44] Enrico Fermi. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials. Physical Review, 57(6) :485, 1940.
- [45] Lev Davidovich Landau and EM Lifshitz. Course of Theoretical Physics. Vol. 8 : Electrodynamics of Continuous Media. Oxford, 1960.
- [46] U Fano. Atomic theory of electromagnetic interactions in dense materials. Physical Review, 103(5) :1202, 1956.
- [47] A Crispin and GN Fowler. Density effect in the ionization energy loss of fast charged particles in matter. Reviews of Modern Physics, 42(3) :290, 1970.
- [48] Markus H Thoma and Miklos Gyulassy. Quark damping and energy loss in the high temperature qcd. Nuclear Physics B, 351(3) :491–506, 1991.
- [49] Eric Braaten and Markus H Thoma. Energy loss of a heavy quark in the quark-gluon plasma. Physical Review D, 44(9) :R2625, 1991.
- [50] Eric Braaten and Markus H Thoma. Energy loss of a heavy fermion in a hot qed plasma. Physical Review D, 44(4) :1298, 1991.

- [51] Hans Bethe and Walter Heitler. On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons. In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 146, pages 83–112. The Royal Society, 1934.
- [52] JF Gunion and G Bertsch. Hadronization by color bremsstrahlung. Physical Review D, 25(3) :746, 1982.
- [53] Lev Davidovich Landau and II Pomeranchuk. The limits of applicability of the theory of bremsstrahlung by electrons and of the creation of pairs at large energies. In Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume 92, page 535, 1953.
- [54] Arkady B Migdal. Bremsstrahlung and pair production in condensed media at high energies. Physical Review, 103(6) :1811, 1956.
- [55] Rudolf Baier, Yu L Dokshitzer, Alfred H Mueller, S Peigne, and D Schiff. The landau-pomeranchuk-migdal effect in qed. Nuclear Physics B, 478(3) :577–597, 1996.
- [56] R. Baier, Yuri L. Dokshitzer, S. Peigne, and D. Schiff. Induced gluon radiation in a QCD medium. Phys. Lett., B345 :277–286, 1995.
- [57] Rudolf Baier, Yu L Dokshitzer, Alfred H Mueller, and D Schiff. Medium-induced radiative energy loss ; equivalence between the bdmgs and zakharov formalisms. Nuclear Physics B, 531(1-3) :403–425, 1998.
- [58] BG Zakharov. Fully quantum treatment of the landau-pomeranchuk-migdal effect in qed and qcd. JETP letters, 63(12) :952–957, 1996.
- [59] Jean-Paul Blaizot, Fabio Dominguez, Edmond Iancu, and Yacine Mehtar-Tani. Medium-induced gluon branching. JHEP, 01 :143, 2013.
- [60] Jorge Casalderrey-Solana and Carlos A. Salgado. Introductory lectures on jet quenching in heavy ion collisions. Acta Phys. Polon., B38 :3731–3794, 2007.
- [61] RP Feynman and A Hibbs. R 1965 quantum mechanics and path integrals. New York : MacGraw Hill, 1975.
- [62] C. Itzykson and J. B. Zuber. Quantum Field Theory. International Series In Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [63] Joerg Aichelin, Pol Bernard Gossiaux, and Thierry Gousset. Gluon radiation by heavy quarks at intermediate energies. Physical Review D, 89(7) :074018, 2014.
- [64] Paul E. L. Rakow and B. R. Webber. Transverse Momentum Moments of Hadron Distributions in QCD Jets. Nucl. Phys., B191 :63–74, 1981.
- [65] Magdalena Djordjevic, Dusan Zigic, Marko Djordjevic, and Jussi Auvinen. How to test path-length dependence in energy loss mechanisms : analysis leading to a new observable, 2018.

Titre : Perte d'énergie par rayonnement dans un milieu opaque

Mots clés : PQG – perte d'énergie radiative – effet LPM

Résumé : Dans le but de comprendre les résultats des expériences sur le plasma de quarks et de gluons telle qu'ALICE au LHC du CERN, il est important d'avoir des modèles précis pour étudier le comportement des particules élémentaires dans ce milieu exotique. Ce travail de thèse s'inscrit dans l'optique de l'évaluation de la perte d'énergie d'une particule ultrarelativiste se propageant dans un milieu dense. La perte d'énergie par rayonnement étant un processus caractérisé par un temps appelé temps de formation, on peut se demander si celle-ci est modifiée lorsque le gluon produit interagit lui-même dans le milieu pendant ce même temps. Du point de vue microscopique, on souhaite regarder la situation dans laquelle le libre parcours moyen dans le milieu est plus court que le temps de formation du gluon principal. Ainsi, dans cette fenêtre en temps, la paire quark-gluon

continuant d'interagir dans le milieu, on s'attend à la possibilité d'émettre d'autres gluons, secondaires, de plus basse énergie et pouvant avoir une influence sur la perte d'énergie du quark elle-même. Pour regarder cela, on propose un formalisme effectif permettant d'inclure dans la propagation du quark ou du gluon principal ce rayonnement secondaire dans une limite ultrarelativiste et pour des rayonnements dont l'énergie est négligeable devant celle de la paire principale. On montre que l'effet de ce rayonnement secondaire est de réduire le temps de formation du gluon primaire à des valeurs de l'ordre du libre parcours moyen impliquant une diminution du spectre de rayonnement et de la perte d'énergie du parton émetteur.

Title : Radiative energy loss in an opaque medium

Keywords : QGP – radiative energy loss – LPM effect

Abstract: In order to understand the results of experiments on quark-gluon plasma such as ALICE at LHC at CERN, it is important to have accurate models to study the behavior of elementary particles in this kind of exotic medium. This thesis work is incorporated within the framework of radiative energy loss of an ultrarelativistic particle propagating in a dense medium. The radiative energy loss is a process characterized by a time called formation time so one can wonder if this energy loss is modified when the emitted gluon itself interacts in the medium during its formation. From the microscopic viewpoint, we want to look at the situation in which the mean free path in the medium is shorter than the formation time of the primary gluon.

Thus, in this window of time, the quark-gluon pair being formed continues to interact in the medium with the possibility of emitting other gluons, called secondary ones, at lower energies and which could have an effect on the energy loss of the quark itself. To investigate this, we propose an effective formalism allowing us to include these secondary radiations in the propagation of the main quark or gluon in an ultrarelativistic limit and for radiations whose energy is negligible compared to the one of the principal pair. It will be shown that these secondary radiations reduce the formation time of the primary gluon to values of the order of the mean free path implying a decrease for the radiation spectrum and for the energy loss of the emitting parton.