

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE

Année 2012

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Approche numérique du couplage par effets de marée entre transferts thermiques internes et évolution orbitale des corps planétaires

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de la Terre et de l'Univers
Spécialité : Planétologie

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Jonathan BESSERER

Le 18 juin 2012, devant le jury ci-dessous

Président	M. Stéphane LABROSSE, Professeur des Universités, École Normale Supérieure de Lyon
Rapporteurs	M. Tim VAN HOOLST, Professeur, Observatoire Royal de Belgique (ORB) M. Stéphane LABROSSE, Professeur des Universités, École Normale Supérieure de Lyon
Examineurs	M. Marc MONNEREAU, Chargé de Recherches CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées M. Valéry LAINEY, Astronome Adjoint, IMCCE – Observatoire de Paris
Directeur de thèse	M. Antoine MOCQUET, Professeur des Universités, Université de Nantes
Co-encadrant	M. Gabriel TOBIE, Chargé de Recherches CNRS, LPG Nantes
Membre invité	M. Gaël CHOBLET, Chargé de Recherches CNRS, LPG Nantes

Directeur de thèse : M. Antoine MOCQUET, Professeur des Universités, Université de Nantes

Version définitive (septembre 2012)

Contact : jbesserer@gmail.com

Remerciements

Mes premiers mots iront à mes trois encadrants, Antoine, Gabriel (dit Gaby!) et Gaël : merci mille fois de m’avoir fait confiance, de m’avoir accordé une grande liberté et, surtout, d’avoir fait preuve d’une infinie patience¹ ! Je n’oublierai pas de sitôt les passionnantes après-midis discussion-calculs (et pauses rébus) au tableau avec Antoine, éleveur d’ornithorynques à ses heures, les fructueux échanges d’idées avec Gaby et les stimulantes conversations et autres casse-têtes numériques mémorables avec Gaël. Ce trio d’encadrants constitua, je pense, une excellente « école » ; la conjonction de trois personnalités radicalement différentes fut une aventure qui s’avéra pleine de rebondissements, de remise en question et de rigueur : c’est cela même qui fit de la thèse une expérience passionnante ! Évidemment, il y a des hauts et des bas dans une thèse, et je remercie mes encadrants – en particulier Antoine – de m’avoir soutenu dans les moments difficiles.

Je remercie également les autres membres de mon jury de thèse de s’être déplacés des quatre coins de la France (voire au-delà) pour venir assister à la soutenance. Tout d’abord, le président du jury et aussi (cumul des mandats !) l’un des deux rapporteurs du mémoire, Stéphane Labrosse. Sa présence fut à la fois un immense honneur et un très grand plaisir. Merci aussi pour les différents échanges – électroniques ou de vive voix – que nous avons eus au cours de cette thèse, ainsi que pour m’avoir fait réaliser l’importance des types dérivés en Fortran ! Merci ensuite à Tim Van Hoolst, pour sa grande gentillesse, sa rigueur... astronomique ! mais aussi pour m’avoir accueilli et permis de faire un séminaire à l’Observatoire Royal de Belgique, à Bruxelles. Merci également à Marc Monnereau, « convecteur » toulousain bien connu, pour ses remarques constructives et les échanges passionnants² que nous avons pu avoir suite à la soutenance. Merci enfin à Valéry Lainey pour les discussions sur le formalisme de Kaula.

1. Je me demande encore comment ils ont pu supporter mon perfectionnisme presque maladif...
2. J’ai enfin trouvé un autre admirateur de Patankar !

Je n'oublie pas les collègues et amis du LPG Nantes ; merci à Olivia, avant tout pour toutes les bosses de rire que nous nous sommes payées (ah, la lointaine époque du [mythique] bureau 27...), mais aussi pour notre soutien mutuel de galériens à certains moments de nos thèses respectives. Je lui souhaite de trouver sa voie ultime – dans le désert d'Afrique ou ailleurs – et d'être heureuse. Puisqu'il a été question du bureau 27 (!), j'en profite pour remercier également les deux autres fous qui ont partagé cet asile : Morgan (dit Duncan ! ou encore le Pèreu Dussauze) et Julie (souvenirs du tiroir métallique !). Merci également à l'équipe des fidèles de la cafet' : Éric (merci pour tous les coups de main et autres dépannages informatiques d'urgence !), Hervé (sacré bricoleur !), Olivier (le gars toujours de bonne humeur !), Téo *sensei* et... emacs-Manu ! Merci Manu pour toutes les discussions unix-ciné (Kubrix !) et pour m'avoir ouvert l'esprit sur de nombreux aspects de l'informatique en général. Merci aussi à Éric Beucler pour sa disponibilité permanente, ses précieux conseils GMT et, surtout, sa très (très très) grande compétence en \LaTeX : sur cet aspect, il est incontestablement devenu mon mentor. Je n'oublierai jamais non plus la découverte de Linux, lorsque j'avais Éric en tant que prof, mais aussi les enseignements que nous avons pu faire ensemble, par la suite, pendant le monitorat et l'ATER. Merci infiniment pour tout cela ! Merci à Olivier Verhoeven pour toutes les discussions passionnantes sur la physique et les maths en général, pour les encouragements et pour avoir été un collègue précieux dans l'enseignement. Merci également à Caroline, ma « tutrice pédagogique ». Même si nous n'avons enseigné ensemble qu'au début de cette thèse, je garde un bon souvenir de notre fameuse semaine paléontologique. Merci également aux autres permanents : Hagay, pour sa bienveillance et les discussions (scientifiques ou non) fort sympathiques, Véronique Ansan, pour sa gentillesse, Olivier Bourgeois, pour sa très grande clarté et son esprit de synthèse (j'en suis toujours jaloux !), Sabrina, pour son regard de mécanicienne des fluides, Olivier Grasset, pour son grand pragmatisme et sa vision large de l'exploration de notre Système Solaire, Benoit Langlais, notamment pour son expertise GMT (je lui dois une fière chandelle pour mon dressage de la bête !), Patrick Launeau, pour m'avoir « permis » d'enseigner la télédétection en master et, par là même, de renouer avec mon passé d'« hyperspectralien », Stéphane Le Mouëlic, pour son soutien permanent et nos stimulantes collaborations martiennes passées – avec les collègues de Cambridge – et, plus récemment, notre passionnant travail sur l'exposition *Voyages Planétaires*, ainsi que les échanges sur notre passion commune : les (vieux) livres ! Également merci à Daniel, pour sa sympathie, Yves (« toujours les mêmes ! »), qui va finir par sédimenter dans la cave du labo s'il continue, Stéphane Pochat, pour ses éternuements qu'on entend à travers tout le Système Solaire (il est long, ce couloir du LPG Nantes !), Pierre Vacher, pour m'avoir « confié » un petit module d'enseignement en géodynamique : l'expérience fut fort intéressante. Merci également aux autres et à ceux que j'oublierais, par mégarde.

Je tiens particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à Christophe Sotin, qui est *la* personne qui m'a véritablement lancé dans la planétologie. Cette rencontre, en janvier 1998, lors d'une conférence organisée par la Société d'Astronomie de Nantes³, a probablement été importante dans ma décision de devenir planétologue. Christophe m'a toujours encouragé durant mon parcours et, pour cela, je le remercie chaleureusement. Mon intérêt pour la Science et la nature en général remonte à mon enfance, essentiellement grâce à mon père – trop tôt disparu – qui sut éveiller en moi la flamme de la curiosité ; merci Papa !

Enfin, toujours au LPG Nantes, merci à tous les doctorants et post-doctorants côtoyés durant ces années de thèse, en particulier à toute la clique des anciens combattants : Carlos, toujours dans la joie et la bonne humeur, Guillaume, estimé collègue et ami convecteur qui a réussi à simuler une planète dans un avion toulousain !, Marie, envoyée spéciale pragoise et désormais jeune maman, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à échanger sur de nombreux sujets de recherche, Alex (dite Tornado les talons !), MA-THIEU ! (merci notamment pour nos échanges et pour la « routine » optimisée de calcul des fonctions radiales !), mais aussi Péyuco, Déborah, Marion, Cécile, Katya et tous les autres. Merci et bon courage aux « p'tits jeunes », qui débutent ou qui terminent, notamment Thibault, Mélanie-sismo et Olivier Bollengier. Une petite pensée pour la miss Gaëlle, qui va bientôt terminer sa thèse : courage !

Un petit mot spécial également pour mes deux collègues de bureau, que je vais bientôt abandonner : Philippe (Don Cance !), qui essaye d'homogénéiser une tambouille sismique avec sa grande cuiller à soupe numérique, et Benjamin, géodynamicien (le seul vrai géologue du bureau !), que je félicite pour son tout récent recrutement à Rennes ! Merci les gars pour votre sympathie et pour la bonne ambiance de travail dans le bureau 26 !

Merci aussi à Carole et à Erwan, pour leur bonhomie, ainsi qu'au personnel administratif, notamment Isabelle, experte en mise en page WYSIWYG en tout genre (je lui dois une fière chandelle pour de nombreux documents administro-déprimants à remplir dans des formats bizarres...), Stéphanie, sa très attentionnée « remplaçante », Colette, pour ses nombreux dépannages, ainsi que Marie-Claire (MC B !), pour toutes les « urgences » de missions. Merci aussi au personnel du Prêt Entre Bibliothèques, pour leur aide précieuse et pour m'avoir aidé à maintes reprises à dénicher quelques perles ! À ce sujet, merci infiniment à Sir Timothy John Berners-Lee, principal inventeur du *World Wide Web* qui, sans le savoir, m'a filé un sacré coup de main (notamment pour la recherche bibliographique !) : merci Tim pour avoir rendu accessible ce merveilleux outil qu'est Internet !

3. J'en profite pour saluer les membres de celle-ci et leur souhaiter une bonne continuation dans leurs actions !

Merci de même à Rose-Marie, pour nos discussions célestes de dernière minute, Lucile, pour sa gentillesse, Susan, ex-collègue et collaboratrice anglo-martienne, grande amatrice de fromage (merci pour les relectures *native-speaking* de CV et de lettres dans la langue de SHAKESPEARE!), François, géologue-saxophoniste, bientôt au Groenland!, Adriana, qui fait toujours passer un laser dans ses glaçons, Colleen, disciple de G. Schubert (!), de passage au LPG Nantes.

Merci également aux collègues et/ou collaborateurs extérieurs, notamment Nicola Tosi, confrère et ami qui partage ma passion physico-numérique pour le problème de convection, pour son aide précieuse dans le triturage des équations anélastiques et pour la collaboration que nous avons commencée, qui promet d'être fructueuse; John Hernlund, que je vais probablement côtoyer durant mon post-doc à l'Université de Californie à Santa Cruz, pour les quelques discussions riches (malheureusement uniquement électroniques) que nous avons eues au cours de cette thèse (bravo John pour cette idée simple mais lumineuse de l'anneau sphérique!), Paul Tackley, pour sa très grande expérience de numéricien qu'il n'a pas hésité à partager avec moi, les quelques fois où nos chemins se sont croisés, Patrick Corde, pour m'avoir fait découvrir le véritable pouvoir du Fortran 95 puis, au lendemain de ma soutenance, du Fortran 2003 (il faut vivre avec son temps!) : merci pour tous ces échanges que nous avons pu avoir sur ce passionnant langage et objet historique (mais vivant!) qu'est Fortran! Merci également à Axel Bazin, stagiaire avec l'aide duquel j'ai pu dompter le calcul des fonctions G_{lpq} et F_{lmp} de Kaula, et désormais thésard à Grenoble. Merci également à Vincent Deparis, rencontré brièvement à un congrès d'Histoire des Sciences, de m'avoir spontanément autorisé à utiliser une partie de son travail sur l'histoire de la force de marée dans ce mémoire. Merci aussi aux divers étudiants qui, probablement sans le savoir, ont contribué, par leurs remarques et leurs questions, à développer mon intérêt pour la pédagogie et porté à mon esprit de nombreux questionnements (l'enseignement est vraiment de nature bilatérale!).

Puisque la fin d'une thèse, c'est aussi la fin des études, je n'oublie pas mes professeurs, que ce soit dans mes jeunes années de collège-lycée : merci à Pierre Macé, qui m'a fait aimer La mathématique, à M. Bernard, avec qui nous avons de passionnantes discussions sur la relativité d'Einstein, ou bien, plus tard, à la fac de Sciences de Nantes – certains des enseignants-chercheurs sont devenus de véritables collègues de travail durant la thèse – et merci notamment à Cyril Lupi (aux grands cœur et carrure!) et Jean-Christophe Thomas, qui m'ont fait savourer la mécanique, ainsi qu'à Arezki Mokrani, grâce à qui j'ai découvert avec bonheur l'analyse et les méthodes numériques; son cours m'a également permis d'avoir mes premières réelles prises de tête – tout à fait savoureuses cependant – avec Fortran (77!). Je remercie enfin l'Université de Nantes, qui vient de fêter ses 50 ans⁴!

4. Il s'agit cependant de l'anniversaire de sa *renaissance*; l'Université d'origine fut créée un demi-millénaire plus tôt, le 4 avril 1460!

Ensuite, un merci – un peu spécial j’en conviens ! – à Giovanni Rana, chef italien qui m’a, à de nombreuses reprises, sauvé la vie durant les périodes de pointe, grâce à ses délicieux raviolis magiques ! Merci aussi à tous ces compositeurs de génie, qui ont fait bien plus qu’égayer certaines longues heures techniques, telles que celles consommées par la réalisation de figures : notamment Rachmaninov, Bax, Bary, Williams, Mozart, etc.

Merci également à tous les amis « extérieurs » pour les soirées improvisées, les jeux (notamment les Jenga mémorables avec Max et Tijézu) et autres défouloirs gastronomico-humoristiques. Ce fut l’une des mes plus importantes bouffées d’oxygène régulières : merci à tous, sincèrement ! Merci également aux vieux, voire très vieux amis : Gwen, FR (futur Georges Lemaître ?), Jean-Yves, Edwige, . . . Une mention spéciale pour Benjamin Roche, ami depuis presque 22 ans ! Merci pour toutes les discussions que nous avons pu avoir, sur nos travaux respectifs comme sur à peu près . . . tout ! Benjamin est l’autre personne « responsable » depuis le début (mille fois merci pour cela !) de mon intérêt pour la Science. Un merci particulier pour Olivier Sauzereau, avec qui j’ai eu le bonheur d’échanger sur les nombreuses passions que nous avons en commun, notamment l’histoire de Nantes, les livres et l’astronomie.

Enfin, mes derniers mots – mais les plus importants – iront à ma chère famille : merci du fond du cœur pour vos encouragements et pour votre soutien permanent ! En particulier, un incommensurable MERCI!!! à ma bien aimée fiancée Nolwenn – qui peut se vanter d’être probablement la seule personne extérieure à avoir relu l’intégralité de ce manuscrit – pour son infini dévouement et son précieux soutien moral sans faille ! Je lui dédie ce mémoire.

À Nolwenn

Sommaire

Remerciements	i
Introduction	1
1 Évolution des corps planétaires : éléments théoriques	7
1.1 Objets et effets de marée	7
1.1.1 Objets étudiés	7
1.1.2 Aperçu historique des marées	12
1.1.3 Principe de la force de marée	15
1.1.4 Transferts de moment cinétique	20
1.2 Rhéologie générale	32
1.2.1 Réponse d'un matériau à une sollicitation simple	32
1.2.2 Réponse d'un matériau à une histoire de sollicitation	33
1.2.3 Sollicitation périodique et dissipation d'énergie	37
1.2.4 Modèles rhéologiques viscoélastiques	41
1.3 Transferts thermiques et convection	47
1.3.1 Les manteaux planétaires : des fluides géologiques particuliers	47
1.3.2 Principes de la convection thermique	48
1.3.3 Approximations physiques	57
1.3.4 Rhéologie visqueuse	63
2 Méthodologie numérique employée : transferts de chaleur	69
2.1 Méthodologie générale	69
2.1.1 L'approche numérique pour les planètes	69
2.1.2 Importance de la sphéricité des modèles	74
2.1.3 Une géométrie originale : l'anneau sphérique	79
2.1.4 La méthode des volumes finis	89
2.1.5 Maillage du modèle	96
2.2 Résolution de l'équation de Stokes	104

2.2.1	Cœur du problème	104
2.2.2	Couplage vitesse-pression	114
2.2.3	Accélération de la convergence : la méthode multigrille	123
2.3	Résolution de l'équation de la chaleur	134
2.3.1	Généralités	134
2.3.2	Traitement de la conduction thermique	135
2.3.3	Prise en compte de l'advection de la chaleur	139
3	Le code de convection : principe et validation	149
3.1	Principe de l'outil CHEOPS-2D	149
3.1.1	Philosophie suivie	149
3.1.2	Structure globale	150
3.1.3	Le problème de la rotation globale	153
3.2	Aperçu des tests numériques	156
3.2.1	Précision pour l'équation de STOKES	156
3.2.2	Performance du solveur multigrille	162
3.2.3	Conduction thermique et solutions analytiques	168
3.2.4	Minimisation de la diffusion numérique dans l'advection	171
3.3	Éléments de validation finale de l'outil	177
3.3.1	<i>Benchmark</i> cartésien	179
3.3.2	<i>Benchmarks</i> partiels en géométrie annulaire	195
4	Couplage avec la dissipation de marée	219
4.1	Méthodologie générale	219
4.1.1	Motivations	219
4.1.2	Potentiel de marée employé	220
4.1.3	Contraintes et déformation de marée	223
4.1.4	Réponse moyenne du corps et dissipation	226
4.1.5	Réduction à une géométrie annulaire	229
4.2	<i>Coupling heat transfer and tidal dissipation in planetary mantles with CHEOPS-2D</i>	232
4.2.1	Introduction	232
4.2.2	Model	234
4.2.3	Defining comparable cases	242
4.2.4	Results	246
4.2.5	Appendices	262
5	Un premier couplage avec l'évolution orbitale	269
5.1	Évolution orbitale d'un satellite	269
5.1.1	Théorie de la perturbation	270
5.1.2	Effet de la dissipation dans la planète	277

5.1.3	Effet de la dissipation dans le satellite	283
5.1.4	Algorithme d'évolution orbitale	285
5.2	Un premier exemple : évolution thermo-orbitale d'un corps de type Lune	286
5.2.1	Modèle	286
5.2.2	Résultats	288
5.2.3	Quelques améliorations physiques possibles	305
Conclusion et perspectives		309
A Quelques précisions sur les équations		315
A.1	Précautions d'écriture pour l'équation de la chaleur	315
A.2	Récupération de l'entropie relative	317
A.3	Formulation du bilan de quantité de mouvement en développant la divergence des contraintes pour une géométrie annulaire	318
A.4	L'approximation de FRANK-KAMENETSKII	319
A.5	Le formalisme de Kaula	320
B <i>Benchmark</i> anélastique		323
Bibliographie		358

Table des figures

1	<i>Principe général du couplage thermo-orbital étudié dans cette thèse.</i>	4
1.1	<i>Structures internes typiques du corps secondaire.</i>	11
1.2	<i>La force de marée selon NEWTON.</i>	14
1.3	<i>Principe de la force de marée.</i>	16
1.4	<i>Géométrie de travail pour le potentiel de marée d'un corps perturbateur.</i>	17
1.5	<i>Description planaire d'une orbite.</i>	21
1.6	<i>Orientation spatiale d'une orbite.</i>	22
1.7	<i>Influence du bourrelet de marée du corps primaire sur l'orbite du corps secondaire.</i>	27
1.8	<i>Influence du bourrelet de marée du corps primaire sur l'inclinaison de l'orbite du corps secondaire.</i>	29
1.9	<i>Influence du bourrelet de marée du corps secondaire sur sa propre orbite.</i>	30
1.10	<i>Principe d'une déformation visco-élastique élémentaire.</i>	34
1.11	<i>Exemples de modèles viscoélastiques 1D.</i>	42
2.1	<i>Les premiers ordinateurs utilisés pour la simulation numérique.</i>	71
2.2	<i>Exemples de maillages pour la géométrie sphérique.</i>	76
2.3	<i>Les différentes géométries courbes</i>	78
2.4	<i>L'anneau sphérique</i>	81
2.5	<i>Coupe à travers les anneaux cylindrique ($d = 1$) et sphérique ($d = 2$).</i>	81
2.6	<i>Extension latérale des géométries bidimensionnelles sphériques.</i>	86
2.7	<i>Deux techniques de discrétisation d'un domaine géométrique.</i>	91
2.8	<i>Effet d'une interpolation artificielle dans la visualisation.</i>	93
2.9	<i>Domaine géométrique utilisé pour le modèle de transferts de chaleur.</i>	97
2.10	<i>Maillage entrelacé utilisé dans cette étude.</i>	99
2.11	<i>Le raffinement radial du maillage.</i>	102
2.12	<i>Nomenclature des grandeurs discrètes sur le domaine \mathcal{D}.</i>	107
2.13	<i>Détail d'un volume de contrôle en géométrie annulaire.</i>	108

2.14	<i>Reconstructions nécessaires pour la discrétisation de l'équation de S.</i>	112
2.15	<i>Structure typique d'un système linéaire à relaxer au sein de S.</i>	119
2.16	<i>Cartes du résidu relatif de continuité à différentes itérations de S.</i>	124
2.17	<i>Le problème de la longueur d'onde de l'erreur.</i>	126
2.18	<i>Variété des cycles multigrille</i>	129
2.19	<i>Opérations de prolongation et de restriction.</i>	133
2.20	<i>Principe de la méthode d'advection à haute résolution.</i>	142
3.1	<i>Structure générale du code CHEOPS-2D.</i>	151
3.2	<i>Mesure de la réponse du solveur en rotation solide (milieu isovisqueux).</i>	158
3.3	<i>Mesure de la réponse du solveur en rotation solide : viscosité variable radialement.</i>	159
3.4	<i>Mesure de la réponse du solveur en cisaillement.</i>	161
3.5	<i>Performance du solveur multigrille couplé par rapport à la méthode SIMPLER.</i>	164
3.6	<i>Exemple de variation de la vitesse de convergence du solveur multigrille selon le type de cycle.</i>	165
3.7	<i>Efficacité du solveur multigrille couplé par rapport à la méthode SIMPLER en fonction de la taille du maillage.</i>	167
3.8	<i>Tests analytiques sur la diffusion thermique.</i>	170
3.9	<i>Effet de la diffusion numérique sur l'advection d'un échelon de température en schéma amont.</i>	172
3.10	<i>Évolution quantitative de la diffusion numérique en schéma amont.</i>	173
3.11	<i>Effet des méthodes à haute résolution sur l'advection d'un échelon de température.</i>	175
3.12	<i>Advection en flux alternés.</i>	176
3.13	<i>Exemple de champs pour les cas 1a et 1c de Blankenbach et al. (1989).</i>	182
3.14	<i>Exemple de profils moyens pour les cas 1a et 1c de Blankenbach et al. (1989).</i>	183
3.15	<i>Exemple de champs pour les cas 2a et 2b de Blankenbach et al. (1989).</i>	185
3.16	<i>Exemple de profils moyens pour les cas 2a et 2b de Blankenbach et al. (1989).</i>	186
3.17	<i>Test du comportement en temps à l'aide du benchmark de Travis et al. (1990).</i>	189
3.18	<i>Exemple de champs pour le cas $Ra = 10^4$, $Di = 1$ (ALA) du benchmark de King et al. (2010).</i>	192
3.19	<i>Exemple de profils moyens pour le cas $Ra = 10^5$ (ALA) du benchmark de King et al. (2010).</i>	193
3.20	<i>Exemple de champs obtenus dans le cas du benchmark en anneau cylindrique (TALA).</i>	201

3.21	<i>Champs de chauffage et de contrainte visqueux obtenus dans le cas du benchmark en anneau cylindrique.</i>	202
3.22	<i>Exemple de comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie d'anneau sphérique [...].</i>	204
3.23	<i>Exemples de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas isovisqueux de Hernlund et Tackley (2008).</i>	207
3.24	<i>Exemple de comparaison entre la géométrie d'anneau sphérique et deux géométries cylindriques différentes.</i>	208
3.25	<i>Exemple de comparaison de résultats entre les géométries 2D (anneau sphérique) et 3D (sphérique complet)</i>	210
3.26	<i>Exemples de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas à en chauffage interne pur de Hernlund et Tackley (2008).</i>	213
3.27	<i>Exemples de profils moyens obtenus en anneau sphérique dans les cas en chauffage interne pur de Hernlund et Tackley (2008).</i>	214
3.28	<i>Exemple de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas à viscosité variable de Hernlund et Tackley (2008).</i>	216
4.1	<i>Detailed structure of the coupling method for heat transfer and tidal dissipation in CHEOPS-2D</i>	235
4.2	<i>Working geometry of CHEOPS-2D</i>	241
4.3	<i>Density and temperature reference profiles.</i>	244
4.4	<i>Semi-analytical solutions for the tidal response of an isoviscous body.</i> .	247
4.5	<i>Evolution of tidal power distribution in space and frequency for two eccentricity values.</i>	249
4.6	<i>Comparison of steady state convective solutions without tidal heating.</i>	251
4.7	<i>Comparison of convection solutions with tidal heating.</i>	254
4.8	<i>Temperature and various internal heating fields for the ALA-Co = 0.5 case.</i>	256
4.9	<i>Laterally-averaged profiles for the case shown in figure 4.8.</i>	257
4.10	<i>Variability of the tidal heating profiles with orbital period and compressibility.</i>	259
4.11	<i>Temperature and various internal heating fields for a high Rayleigh number case.</i>	261
4.12	<i>Laterally-averaged profiles for the case shown in figure 4.8.</i>	262
5.1	<i>Principe de la conservation du moment cinétique d'un système planète-satellite isolé.</i>	275
5.2	<i>Effet de différentes approximations en excentricité sur l'évolution du demi-grand axe résultant de la dissipation dans le corps central.</i> . . .	281

5.3	<i>Effet de différentes approximations en excentricité sur l'évolution de cette même quantité résultant de la dissipation dans le corps central.</i>	282
5.4	<i>Les différentes étapes de calcul de l'évolution orbitale et leurs interactions.</i>	285
5.5	<i>Champ de température initial pour le modèle de Lune convective choisi.</i>	292
5.6	<i>Profils moyens caractéristiques du modèle de Lune convective.</i>	293
5.7	<i>Évolution du demi-grand axe et de l'excentricité de l'orbite pour le modèle de Lune simplifié.</i>	295
5.8	<i>Évolution de la puissance de marée globale dissipée et de la température moyenne dans le modèle de Lune.</i>	298
5.9	<i>Exemples de champ de dissipation de marée à deux dates au cours de l'évolution thermo-orbitale du modèle de Lune.</i>	299
5.10	<i>Évolution du flux de chaleur et de la vitesse convective dans le modèle de Lune.</i>	301
5.11	<i>Évolution des angles d'orientation du modèle de système Terre-Lune simplifié et de la durée du jour terrestre.</i>	302
5.12	<i>Mesure de la conservation de l'énergie et du moment cinétique au cours des simulations du modèle de système Terre-Lune simplifié.</i>	304
5.13	<i>Évolution de la puissance globale initiale dissipée dans le modèle de Lune avec l'excentricité.</i>	307
5.14	<i>Le système Io-Europe.</i>	312

Liste des tableaux

1.1	<i>Exemples de systèmes pour lesquels l'outil générique développé dans cette thèse a été conçu.</i>	8
2.1	<i>Mesure de la proximité d'un domaine annulaire à un domaine cartésien.</i>	103
3.1	<i>Résumé des données disponibles pour le benchmarking de CHEOPS-2D.</i>	178
3.2	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (BA).</i>	181
3.3	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS [...] (ALA, $D_i = 1$).</i>	190
3.4	<i>Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : BA</i>	197
3.5	<i>Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : EBA</i>	198
3.6	<i>Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : TALA</i>	199
3.7	<i>Exemple de résultats de CHEOPS-2D en géométrie cylindrique : ALA</i>	199
4.1	Variables and symbols	262
4.2	Values of the various parameters used in this work	265
4.3	Eccentricity polynomials for the semi-analytical expressions of the contributions $\Pi_{ij}(\omega)$ to tidal dissipation.	266
5.1	<i>Paramètres géométriques choisis pour le système Terre-Lune</i>	289
5.2	<i>Propriétés thermo-mécaniques choisies pour le manteau lunaire</i>	290
5.3	<i>Paramètres numériques des simulations</i>	291
A.1	<i>Polynômes en excentricité pour la famille de fonctions $\{G_{2pq}\} [o(e^4)]$.</i>	322
B.1	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (EBA, $D_i = 0, 25$).</i>	325
B.2	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (EBA, $D_i = 0, 5$).</i>	326
B.3	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (EBA, $D_i = 1$).</i>	327

B.4	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 0, 25).</i>	328
B.5	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 0, 5).</i>	329
B.6	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 1).</i>	330
B.7	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 1, 25).</i>	331
B.8	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 1, 5).</i>	332
B.9	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 1, 75).</i>	333
B.10	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (TALA, Di = 2).</i>	334
B.11	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 0, 25).</i>	335
B.12	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 0, 5).</i>	336
B.13	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 0, 75).</i>	337
B.14	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 1, 25).</i>	338
B.15	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 1, 5).</i>	339
B.16	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 1, 75).</i>	340
B.17	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D [...] (ALA, Di = 2).</i>	341
B.18	<i>Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,999$) avec ceux d'autres codes : viscosité variable.</i>	342

Introduction

La force de marée qui s'exerce sur une planète ou un satellite résulte de l'attraction différentielle d'un ou plusieurs corps perturbateurs. La déformation de ses enveloppes qui en résulte conduit à une certaine dissipation d'énergie mécanique. Celle-ci peut, par exemple, avoir lieu par friction visqueuse au sein des couches solides, mais aussi fluides (océans sur Terre, atmosphère, noyau liquide).

La dissipation de marée dans le manteau d'un corps planétaire, qui sera celle considérée dans cette thèse, peut, dans certains cas, affecter significativement le bilan thermique de celui-ci. Si l'on soupçonnait depuis longtemps la prédominance de cette source d'énergie pour certains corps du Système Solaire (p. ex. [Kaula, 1964](#) ; [Peale et Cassen, 1978](#) ; [Peale *et al.*, 1979](#)), aucune preuve n'avait toutefois permis de la mettre directement en évidence avant le passage des sondes *Voyager* par le système de Jupiter, à la fin des années 1970. Les images récupérées au cours de la mission *Voyager 1* permirent ainsi la découverte d'un volcanisme extrêmement intense sur un corps rocheux légèrement plus gros que la Lune, Io, l'un des quatre satellites galiléens ([Morabito *et al.*, 1979](#) ; [Strom *et al.*, 1979](#)). L'explication actuellement admise pour cette étonnante activité est un emballement du chauffage de marée, qui tire son origine dans la friction visqueuse interne résultant de la déformation périodique du satellite sur son orbite. Plus récemment, sur Encelade, minuscule lune de glace de la planète Saturne, une anomalie thermique a été mise en évidence ([Porco *et al.*, 2006](#) ; [Spencer *et al.*, 2006](#)). D'intensité moindre mais remarquable en importance par rapport à la taille du satellite – dont le rayon n'est que de 15 % de celui de la Lune – l'activité observée au pôle sud d'Encelade est vraisemblablement due aux effets de marée de Saturne. Ce sont là deux exemples d'objets du Système Solaire pour lesquels les phénomènes de marée ont non seulement eu – et ont encore actuellement – un impact majeur sur leur histoire thermique, mais aussi sur l'évolution de leur orbite. Les satellites Europe, Triton, Titan, ou encore le couple Pluton-Charon constituent d'autres exemples d'objets ayant probablement été affectés par cette source d'énergie.

Vingt ans après l'annonce de la première détection d'une planète extrasolaire (Wolszczan et Frail, 1992), pas moins de 763 de ces objets ont été découverts⁵. La précision des méthodes de détection s'étant améliorée, ces dernières années ont vu la découverte – certes indirecte – de corps qui semblent être les premières super-Terres (p. ex. Charbonneau *et al.*, 2009), voire même de planètes d'une taille similaire à celle de la Terre (Fressin *et al.*, 2012). Étant données l'excentricité élevée – lorsqu'elle a pu être mesurée – de certains de ces objets et leur relative proximité à leur étoile hôte (p. ex. excentricité $\sim 30\%$, période orbitale ~ 3 jours ; Forveille *et al.*, 2012), il y a tout lieu de penser que des phénomènes de marée importants sont probablement en jeu dans ces systèmes planétaires lointains, gouvernant ainsi leur évolution thermo-orbitale. Les marées solides semblent donc voir leur champ d'application grandir d'année en année et il paraît plus important que jamais de comprendre la nature du couplage qu'elles induisent entre, d'une part les transferts thermiques qui gouvernent l'intérieur des corps planétaires – que ceux-ci soient de type (super-)Terre ou bien satellite de planète géante (rocheux ou de glace) et, d'autre part, leur évolution orbitale.

C'est précisément ce couplage et ses conséquences, aux diverses échelles de temps et d'espace, qui ont constitué le fil conducteur de ce travail. En effet, la déformation de marée, responsable d'une certaine production de chaleur (friction visqueuse), est contrôlée par la rhéologie, elle-même fortement dépendante de la température. Or, cette dissipation d'énergie va régir l'évolution de l'orbite du corps ; elle représente ainsi, lorsqu'elle a lieu au sein d'un satellite, une certaine perte d'énergie orbitale. Il existe donc un couplage naturel entre ces effets de marée et les transferts de chaleur qui ont lieu au sein de ces corps. En outre, pour des objets tels que les planètes telluriques de type Terre ou super-Terre, la pression en leur intérieur est telle que la densité de leurs couches – en particulier leur manteau silicaté – va naturellement augmenter avec la profondeur ; une certaine compressibilité doit ainsi être considérée. Cette thèse a été dédiée à la construction d'un modèle numérique permettant de simuler de manière cohérente la convection thermique dans un manteau planétaire compressible, à viscosité variable et soumis à un chauffage de marée hétérogène, ainsi que l'évolution orbitale du corps qui en résulte.

Un tel outil était inexistant jusqu'à présent. En effet, les études sur ce couplage, par ailleurs nombreuses, qui ont été conduites par divers auteurs depuis les années 1980 ont, par exemple, consisté en des approches couplées orbite-dynamique interne, mais cependant paramétrées ou semi-paramétrées en ce qui concerne les transferts de chaleur (p. ex. Ojakangas et Stevenson, 1986 ; Ross et Schubert, 1989 ; Showman

5. à la date d'écriture de cette introduction ; source : l'Encyclopédie des Planètes Extrasolaires (<http://exoplanet.eu> – site consulté le 17 avril 2012)

et al., 1997 ; Hussmann *et Spohn*, 2004). D'autres ont eu pour but d'évaluer l'importance potentielle de la dissipation de marée au sein des exoplanètes de type Terre, sans toutefois considérer l'évolution de leur orbite, ni prendre en compte les variations de température interne nécessairement impliquées par les transferts thermiques (p. ex. Henning *et al.*, 2009). Enfin, un troisième type d'approche qui a été mené consiste en le calcul explicite des transferts de chaleur par convection sous l'influence du chauffage de marée (p. ex. Tackley *et al.*, 2001 ; Tobie *et al.*, 2003 ; Roberts *et Nimmo*, 2008 ; Běhounková *et al.*, 2010, 2011). Là encore, ces travaux ont été réalisés pour une configuration orbitale fixe, qui plus est pour des corps incompressibles. Récemment, une première tentative de couplage thermo-orbital avec une description cohérente des transferts thermiques et des effets de marée a été menée par Robuchon *et al.* (2011). Cependant, seuls les transferts de chaleur par conduction sont considérés dans cette première étape. Ce travail de thèse s'inscrit donc dans la continuité des études précédemment mentionnées, en apportant une approche cohérente du couplage des transferts de chaleur convectifs au sein d'un manteau planétaire, de la dissipation de marée et de l'évolution orbitale qui en résulte. Cette dernière implique un changement de la sollicitation de marée, donc de la chaleur produite et de son influence sur les transferts thermiques. En outre, ceux-ci gouvernent le champ de température du manteau, donc la dissipation de marée. Et la boucle est bouclée (cf. fig. 1)! Il importe ainsi de recourir à un calcul couplé de ces différents effets, notamment via la viscosité des matériaux, dont la dépendance en température joue un rôle central ; les transferts de chaleur ont lieu sur des échelles de temps très longues (de la centaine de millions à quelques milliards d'années) comparativement aux périodes de marées (quelques heures à quelques jours). Les moyens informatiques actuels rendent possible la résolution des équations régissant ces phénomènes, dont les solutions sont bien souvent trop complexes pour être déterminées analytiquement. Il a donc été choisi, pour ce travail, de tirer parti des moyens offerts par la modélisation numérique pour tenter de comprendre le couplage thermo-orbital par effets de marées.

Ce mémoire s'organise en cinq chapitres. Le premier donne quelques éléments théoriques-clés pour comprendre la méthodologie employée dans ce travail. Après quelques généralités sur les objets étudiés, le principe de la force de marée, centrale dans cette étude, est rappelé. Une description qualitative – géométrique – illustre ensuite les divers effets de la dissipation de marée dans le système sur l'orbite du satellite. Un accent est ensuite mis sur la rhéologie générale des matériaux, puisque celle-ci contrôle à la fois l'efficacité des transferts thermiques internes et la réponse viscoélastique de marée, à l'origine de la dissipation d'énergie et donc de la source de chaleur ainsi que de l'évolution orbitale résultantes. Enfin, la théorie générale employée pour la description des transferts de chaleur est présentée.

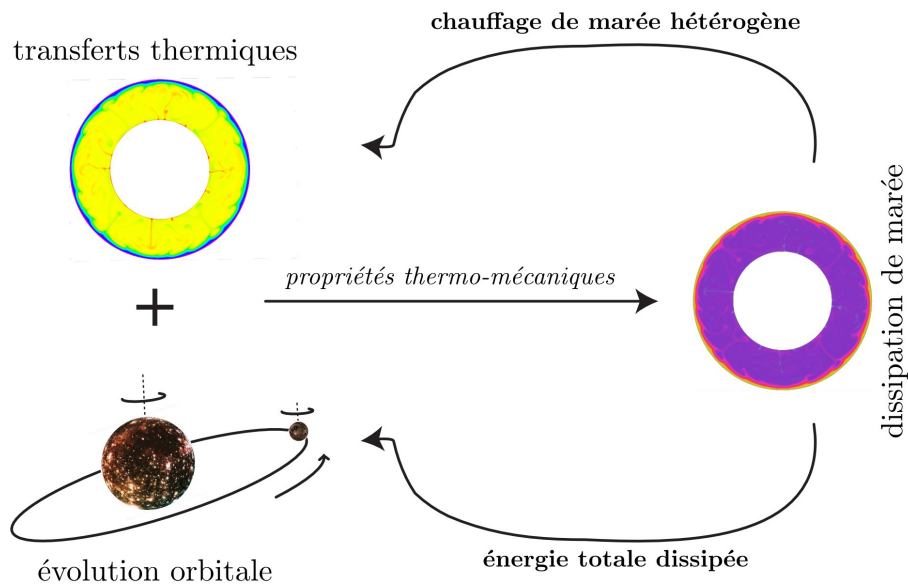


FIGURE 1 – Principe général du couplage thermo-orbital étudié dans cette thèse. Les transferts thermiques gouvernent le champ de température ; pour une configuration orbitale et des propriétés thermo-mécaniques (viscosité, rigidité, etc.) données, le corps perturbé est sujet à une certaine dissipation de marée. Ceci conduit, d'une part, à un chauffage de marée hétérogène, par dissipation visqueuse, qui va influencer les transferts de chaleur et, d'autre part, à une modification de l'orbite. Ces deux changements impliquent alors une variation de la dissipation, et ainsi de suite...

Le deuxième chapitre présente les méthodes numériques employées pour la description – cruciale – des transferts de chaleur. Dans un premier temps, la méthodologie générale est introduite, notamment à travers le choix de la géométrie (bidimensionnelle) utilisée – l’anneau sphérique, du maillage associé et le traitement des équations de conservation par la technique des volumes finis. Dans un deuxième temps, la résolution de l’équation de bilan de quantité de mouvement régissant l’écoulement visqueux d’un manteau planétaire en convection est détaillée, tant sur le mode de couplage vitesse-pression choisi que sur la méthode multigrille associée mise en œuvre. Enfin, dans un troisième temps, le traitement de l’équation de conservation d’énergie qui, associée au bilan de quantité de mouvement, contrôle l’évolution thermique du manteau, est exposé avec, en particulier, un accent sur la méthode employée pour obtenir une estimation précise de l’advection.

Le troisième chapitre est consacré à l’introduction générale de l’outil développé au cours de cette thèse, le code CHEOPS-2D⁶, ainsi qu’à la validation du traitement des transferts thermiques. Après quelques mots sur la philosophie générale et la structure du code, un certain nombre de tests caractéristiques de précision et de performance sont présentés pour les différents éléments-clés de CHEOPS-2D (précision du calcul de l’écoulement, minimisation de la diffusion numérique dans le traitement de l’advection, etc.). Ce chapitre s’achève par la validation finale (*benchmark*) du code de convection dans les diverses géométries et approximations thermodynamiques auxquelles il permet d’accéder.

Le quatrième chapitre est consacré à l’approche mise en œuvre pour le couplage des transferts de chaleur avec la dissipation de marée. Il se découpe en deux sections générales. La première expose la méthode employée pour le traitement de la déformation de marée et l’évaluation de la dissipation d’énergie associée. Elle aboutit à l’obtention, pour le calcul du chauffage de marée, d’une solution semi-analytique dérivée au cours de ce travail. La seconde section de ce chapitre est constituée du corps (en langue anglaise) d’un article en préparation qui présente une application préliminaire de l’outil CHEOPS-2D, orientée sur l’influence de la compressibilité dans le traitement du problème de convection couplée avec la dissipation de marée.

Enfin, le dernier chapitre présente une première approche de couplage thermo-orbital pour un système planète-satellite générique, avec calcul des transferts de chaleur dans le satellite. La théorie classique d’évolution orbitale du satellite est d’abord rappelée, notamment le formalisme de [Kaula \(1964\)](#), employé pour l’effet de la dissipation dans la planète centrale. Puis le traitement de l’effet de la dissipation dans le satellite est détaillé, à travers une technique qui tire parti du calcul du

6. *Coupling Heat transfer and Evolution of the Orbit of Planets and of their Satellites in 2-Dimensional geometry*

chauffage de marée permis par la méthode exposée au quatrième chapitre. Pour terminer, un premier exemple d'évolution couplée thermo-orbitale est présenté, à travers le cas d'un système de type Terre-Lune simplifié.

En conclusion, une discussion présente un bilan sur l'approche menée pendant cette thèse et sur les perspectives d'applications futures de l'outil CHEOPS-2D.

Évolution des corps planétaires : éléments théoriques

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à décrire quelques phénomènes responsables de l'évolution des planètes et satellites de type tellurique. Nous commencerons par de courtes généralités sur les objets qui nous intéressent, suivies d'une introduction sur la nature des phénomènes de marée et leurs effets sur l'orbite d'un satellite. Un soin particulier sera ensuite apporté à une description rigoureuse des théories utilisées dans cette thèse pour la caractérisation de la rhéologie générale des manteaux planétaires et l'étude des transferts de chaleur qui y règnent.

1.1 Objets et effets de marée

1.1.1 Objets étudiés

Nous nous intéressons ici au couplage entre les transferts thermiques et les effets de marée dans les corps planétaires. Il peut aussi bien s'agir de planètes extrasolaires telluriques, en orbite excentrique proche de leur étoile et subissant, de ce fait, d'importants effets de marée, que de satellites de planètes géantes (rocheux, comme Io, satellite de Jupiter, ou bien glacés, comme Encelade, satellite de Saturne) ou encore de satellites de taille plus importante relativement à leur planète hôte (systèmes Terre-Lune ou Pluton-Charon).

Variété des objets D'une manière générale, on considérera un corps secondaire – de rayon R_{II} et de masse M_{II} – en orbite autour d'un corps primaire – R_I , M_I . Les développements réalisés dans le cadre de cette thèse sont théoriquement applicables pour décrire l'évolution thermo-orbitale de systèmes multiples, objectif initial de ce travail. Cependant, par souci de simplicité dans cette première approche, cette étude

a été focalisée sur les dynamiques interne (transferts de chaleur et déformation de marée) et orbitale du corps secondaire. Le tableau 1.1 caractérise divers exemples pour lesquels le modèle développé durant cette thèse peut s'appliquer.

TABLE 1.1 – *Exemples de systèmes pour lesquels l'outil générique développé dans cette thèse a été conçu. Les paramètres présentés correspondent aux valeurs actuelles : période orbitale T_o , excentricité e , rapport de masse et de volume et paramètre de marée α [éq. (1.1)]. Ce dernier caractérise l'attraction du corps primaire.*

Corps central	Système	T_o (j)	e (%)	M_{II}/M_I (%)	$(R_{II}/R_I)^3$ (%)	α ($\times 10^{-3}$)
étoile	Gl 581 (e)	3,1	32 ± 9	$(1,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$?	?
	Soleil-Mercure	88,0	20,6	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$
géante gazeuse	Jupiter-Io	1,8	0,4	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	1,7
	Saturne-Encelade	1,4	0,5	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-6}$	6,2
silicaté ou glacé	Terre-Lune	27,3	5,5	1,2	2,0	$7,5 \cdot 10^{-3}$
	Pluton-Charon	6,4	0,0	13	12	0,21

Quelques remarques s'imposent quant aux données figurant dans ce tableau. Tout d'abord, il est important de noter que seule la quantité α est révélatrice pour les marées (pour une orbite fixée, c.-à-d. des valeurs de T_o et e données) : elle caractérise l'attraction du corps primaire sur le corps secondaire. C'est le paramètre de marée, défini par :

$$\alpha := \frac{M_I}{M_{II}} \left(\frac{R_{II}}{a} \right)^3, \quad (1.1)$$

avec a le demi-grand axe de l'orbite du corps secondaire.

Ainsi, il n'est pas étonnant de constater que Io et Encelade se démarquent des autres corps par leur configuration de marée exceptionnellement favorable (valeur élevée de α). De surcroît, ces deux satellites subissent des résonances orbitales qui entretiennent l'excentricité de leur orbite (ou tout du moins limitent sa réduction) : ces résonances ont lieu avec Europe et Ganymède dans le cas de Io (résonance de LAPLACE) et avec Dione dans le cas d'Encelade. Io est particulièrement chaud et présente un volcanisme abondant et intense, qui fut prédit par [Peale *et al.* \(1979\)](#) et découvert quelques mois plus tard ([Morabito *et al.*, 1979](#)). Celui-ci est dû à l'intense friction de marée qui règne au sein du satellite, elle-même favorisée par la température élevée qui règne dans le manteau. Il semble que, à l'heure actuelle, la puissance de marée produite dans Io, estimée à une valeur de l'ordre de 100 TW ([Lainey *et al.*, 2009](#)), soit comparable à celle mesurée (infrarouge thermique) en surface (p. ex. [Veerder *et al.*, 2011](#)), indiquant ainsi une situation proche de l'équilibre thermique sur ce satellite.

Encelade, corps beaucoup plus froid et petit, est par conséquent moins dissipatif. Cependant, des jets de vapeur et de particules de glace ont été détectés il y a quelques années au niveau du pôle sud du satellite (Porco *et al.*, 2006) : ils sont associés à une anomalie thermique (Spencer *et al.*, 2006) et semblent dus au moins en partie aux effets de marée de Saturne amplifiés par la présence d'une couche liquide découplant le manteau de glace du noyau (p. ex. Roberts et Nimmo, 2008 ; Tobie *et al.*, 2008).

Ensuite, il faut noter les cas particuliers des systèmes Terre-Lune et Pluton-Charon. Actuellement peu dissipatifs (du moins en ce qui concerne la Lune pour la Terre), ces systèmes ont la particularité de posséder une fraction non négligeable de leur masse dans le corps secondaire. C'est ainsi que Pluton et Charon forment un système double¹ (si l'on néglige Nix, Hydra et P4, les trois autres lunes connues de Pluton, qui représentent moins de 1 ‰ de la masse totale du système). Dans le cas du système Terre-Lune, l'essentiel de la dissipation de marée a lieu actuellement dans les océans (friction le long des côtes et sur les fonds) et la Lune, en résonance spin-orbite 1 : 1, s'éloigne progressivement de la Terre au rythme de 3,8 cm par an (Dickey *et al.*, 1994). Notons que la dissipation par friction aux interfaces, dont celle des océans est un exemple, est due à des contrastes rhéologiques élevés ; elle reste relativement mal connue actuellement, notamment à la limite manteau-noyau. Elle ne sera pas considérée dans cette thèse.

Dans le cas du système Pluton-Charon, les effets de marée conjoints des deux corps ont conduit à une configuration actuelle dite double synchrone (résonance spin-orbite 1 : 1 du corps secondaire, de période égale à celle de la rotation propre du corps primaire).

Un cas intéressant est également le système de Gliese 581, une naine rouge située à 20 années-lumière de la Terre. Il s'agit d'un système de quatre planètes (Forveille *et al.*, 2012) dont l'une, Gliese 581 e, semble particulièrement favorable à des effets de marée importants. Bien que son rayon soit inconnu à l'heure actuelle (détection par la méthode des vitesses radiales), sa masse² est estimée à 1,94 fois celle de la Terre, ce qui en fait très certainement une planète tellurique. Ce corps est situé très près de son étoile (cf. T_o , tab. 1.1) et sur une orbite très excentrique ; les effets de marée sont peut-être comparables à ceux de Io sur ce corps exotique.

Enfin, mentionnons le cas intéressant de Mercure pour laquelle la dissipation de marée a pu jouer un rôle significatif par le passé. Cette planète est, en effet, bloquée actuellement en résonance spin-orbite 3 : 2 sur une orbite très excentrique.

1. Le centre de masse du système se situe en dehors des corps, si bien qu'aucun des deux n'orbite vraiment autour de l'autre. . .

2. à un facteur « $\sin I$ » près, avec I l'inclinaison de son orbite autour de l'étoile hôte. . .

Structures internes La réponse du corps à une sollicitation de marée va non seulement dépendre de son état thermique, mais aussi de sa structure interne. Que ce soit la Terre, la Lune ou des satellites comme Ganymède, Europe ou Encelade, l'intérieur de ces objets inclut une partie rocheuse, éventuellement différenciée en un manteau silicaté et un noyau métallique. Dans le cas des satellites de glace, la partie silicatée peut contenir une certaine proportion de glace ou est directement recouverte d'un manteau glacé plus ou moins important, dont une partie peut être liquide.

L'approche menée dans cette thèse porte précisément sur la partie silicatée. Les couches situées au-dessus ou en dessous de celle-ci ont la possibilité d'être considérées, par exemple à travers des conditions aux limites appropriées, mais ne font pas l'objet d'un couplage convection thermique - dissipation de marée. Dans ce travail, seul un modèle générique simple à deux couches est utilisé pour l'intérieur rocheux, qui s'identifie en fait au corps complet : celui-ci est constitué d'un manteau homogène de silicates (type olivine), dont la base est un noyau métallique entièrement liquide. Le rapport f du rayon du noyau à celui du manteau est variable. Les valeurs $f = 0,5$ et $f = 0,2$ sont choisies, respectivement pour une planète de type Terre (chap. 4) et un satellite de type Lune (chap. 5). Les couches situées au-dessus des silicates, nécessairement présentes pour les corps de type satellites de glace ou bien la Terre (océans), ne sont donc pas considérées dans ce travail. Dans le cas du système générique de type Terre-Lune simplifié modélisé au chapitre 5, la présence d'océans sera cependant approchée par le biais d'un facteur de dissipation élevé pour la pseudo-Terre.

La figure 1.1 représente des exemples typiques de structures internes du corps secondaire pour lesquels l'outil générique développé dans cette thèse peut être appliqué, ainsi que les deux modèles de référence employés pour ce travail. Les niveaux de gris indiquent la nature générale des couches.

Les phénomènes de marée qui sont en jeu pour ces différents corps peuvent, dans certains cas, affecter significativement le bilan de chaleur de ceux-ci et plus généralement leur bilan énergétique – thermique comme orbital. Ce point constitue l'aspect central de cette thèse. Il importe donc de comprendre la nature des interactions de marée entre un corps primaire et un corps secondaire, et l'influence qui en résulte sur la dynamique orbitale du système. C'est l'objet des paragraphes qui suivent.

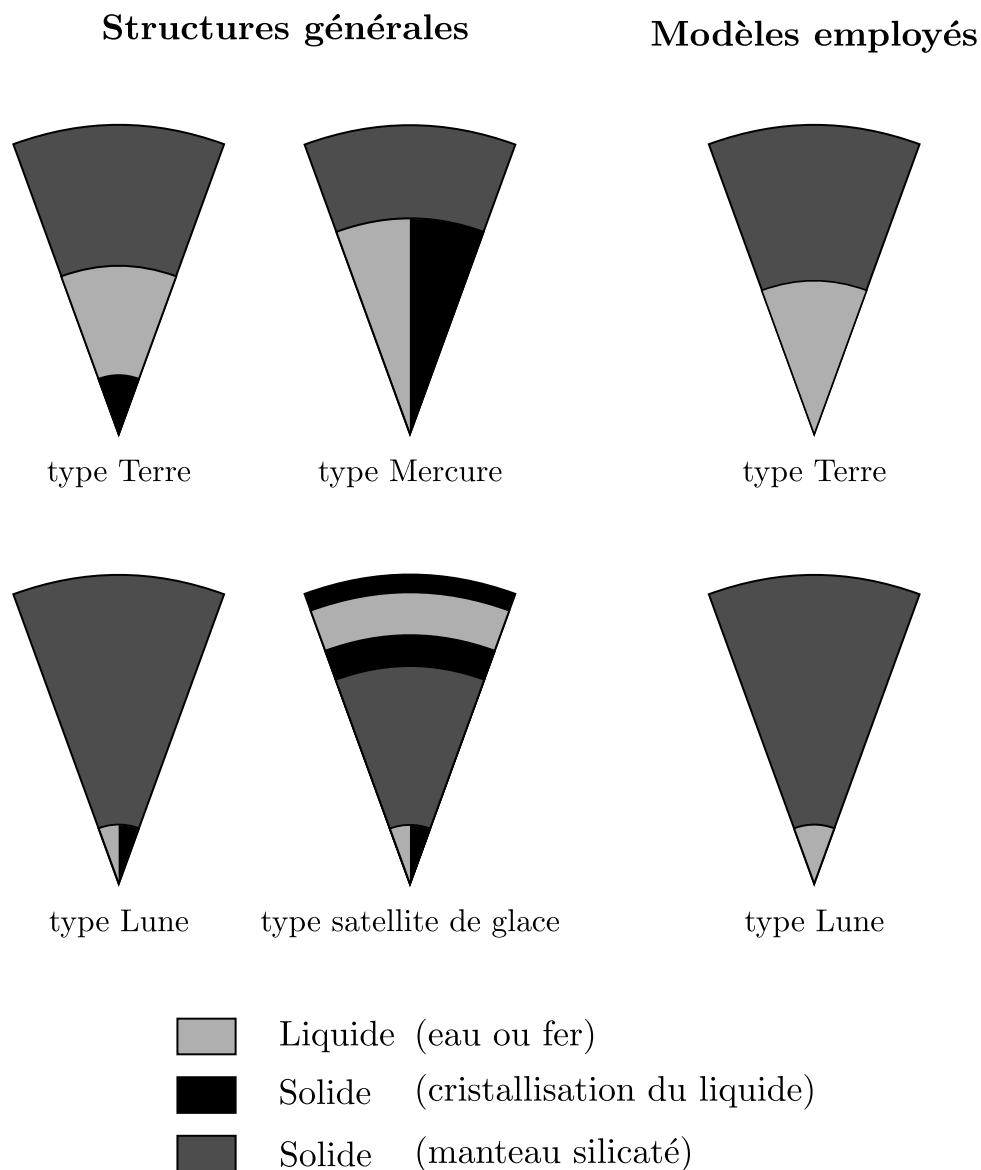


FIGURE 1.1 – Structures internes typiques du corps secondaire. Quatre familles sont représentées de manière générique, avec les différentes phases constituant les couches. Le liquide, en gris clair, correspond à de l'eau (satellite de glace) ou à du fer (partie profonde des modèles); le solide en noir indique du fer ou de la glace. Pour cette dernière, on distinguera la glace de type I (basse pression, c.-à-d. en surface) de la glace haute pression (p. ex. type VI), vraisemblablement absente dans le cas d'Europe (contact eau-silicates). Le solide représenté en gris correspond à des silicates, ou bien à un possible mélange glace-silicates (exemple probable de Callisto). Les parties bichromes indiquent la présence éventuelle d'un noyau métallique au moins en partie liquide (pour les satellites de glace, il s'agit de l'exemple de Ganymède). Ces structures génériques sont représentées de manière relative (« tailles » identiques des objets) et les épaisseurs des couches ne sont qu'indicatives; toute croûte est négligée. Les deux modèles de référence employés dans ce travail (à droite) sont de type Terre ou de type Lune. Seule la partie silicatée est traitée de manière détaillée (couplage convection thermique - dissipation de marée).

1.1.2 Aperçu historique des marées

Cette brève introduction sur les marées ne correspond qu'à une pâle synthèse réalisée via une partie de l'ouvrage de [Deparis et Legros \(201x\)](#), en cours d'écriture. Que les auteurs de ce livre soient remerciés de m'avoir spontanément confié – et en avance ! – le fruit de leur recherche et permis de l'utiliser dans ce modeste paragraphe. Le lecteur restant sur sa faim et désireux d'en savoir plus est invité à consulter le futur ouvrage en question.

Les toutes premières observations connues du phénomène des marées océaniques remontent à l'Antiquité ; mais l'on imagine sans peine que l'Homme a pu être intrigué par ce fait dès les premiers temps de son mode de vie sédentaire (Mésolithique). Les récits des voyageurs sortis de la Mer Méditerranée – celle-ci ne présente, en effet, qu'une très faible amplitude de marée – ont permis aux savants grecs de se pencher sur le problème. PYTHÉAS (IV^e siècle av. J.-C.) est ainsi l'un des premiers à considérer le phénomène de manière scientifique : il constate une corrélation entre les marées et les mouvements de la Lune. ÉRATOSTHÈNE (III^e-II^e siècle av. J.-C.), connu pour sa remarquable estimation du rayon de la Terre, relie de même les courants dans le détroit de Sicile aux flux et reflux de la mer corrélés à la position de la Lune dans le ciel. POSEIDONIOS (II^e-I^{er} siècle av. J.-C.) poursuit les analyses de ses prédécesseurs. Il remarque notamment des variations de l'amplitude du phénomène avec les phases de la Lune (marées de vives-eaux et marées de mortes-eaux) et des variations annuelles (marées d'équinoxes, plus fortes). Enfin, soulignons que PLINE L'ANCIEN (I^{er} siècle) note le retard entre le passage de la Lune au méridien local et la pleine mer. Si le lien avec la Lune semble plus ou moins ancré dans les esprits des savants à la fin de l'Antiquité, le phénomène exact responsable de l'action de notre satellite sur les eaux reste mystérieux (lumière ? « affinité humide » ? etc.).

Au Moyen Âge apparaît pour la première fois l'idée que la Lune puisse attirer l'eau de la Terre telle un aimant dans les écrits de GUILLAUME D'Auvergne (XII^e-XIII^e siècle) ; une idée qui sera largement reprise par la suite. Les savants hésitent globalement entre deux tendances pour l'explication du flux et du reflux de la mer : soit les marées correspondent à un apport d'eaux (regurgitation par des gouffres, condensation de vapeur en régions polaires, ...) qui vont ensuite se retirer, soit elles sont le simple résultat du gonflement des eaux, par le biais de l'action de la Lune et/ou du Soleil. Par la suite, au XVI^e siècle, le développement de la théorie des marées devra beaucoup aux médecins et aux astrologues. Ainsi, FRÉDÉRIC DE GRISOGONE (médecin) émet l'idée de décomposer la marée en deux effets : ceux du Soleil et de la Lune. La mer est ainsi déformée en deux ellipsoïdes de révolution, d'amplitudes différentes, qui se combinent de diverses manières selon les positions respectives des deux astres (p. ex. addition des phénomènes dans les syzygies). Si

KEPLER (XVI^e-XVII^e siècle) est convaincu que c'est l'attraction réciproque³ entre la Terre et la Lune qui est responsable du phénomène, GALILÉE – considéré bien souvent comme le père de la Physique, à la même époque, est, lui, partisan d'un effet des mouvements de la Terre : selon sa théorie, c'est la combinaison de la rotation de la Terre sur elle-même et de sa révolution autour du Soleil qui est responsable de l'oscillation des mers. La cause première est donc indépendante de la Lune dans ce cas. GALILÉE compare ainsi la Terre à un vase contenant de l'eau : en subissant des accélérations et décélérations, celui-ci voit affluer ou refluer (par inertie) le liquide contenu. Cette idée d'oscillations, bien qu'incorrecte pour l'explication du phénomène de marée, est cependant intéressante : elle préfigure, en quelque sorte, les phénomènes de résonances dans les mers et océans, dont on sait aujourd'hui qu'ils sont responsables de la grande variabilité du marnage⁴ à la surface de la Terre. Citons enfin les travaux parallèles de DESCARTES, qui font appel à quelque obscure notion de tourbillon, chère au savant. Ainsi, un tourbillon de « matière subtile » est produit par la rotation de la Terre et entraîne la Lune autour de celle-ci. DESCARTES affirme que notre satellite ne se déplace pas aussi vite que le tourbillon. En conséquence, l'écoulement symétrique de ce dernier est perturbé et une pression différentielle de la matière subtile à la surface des mers en résulte ; d'où le phénomène de marée.

C'est finalement le grand NEWTON qui trouve la solution au problème. Il montre, dans son ouvrage *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* (Newton, 1687), que la force de marée provient de la variation, à la surface de la Terre, de l'intensité de l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil. Cette idée géniale est venue à NEWTON en premier lieu pour expliquer le mouvement rétrograde (précession) des nœuds (cf. 1.1.4) de l'orbite lunaire, de période 18,6 ans (fig. 1.2). La force d'attraction du Soleil n'étant pas la même au centre de l'orbite (Terre) et sur la Lune, il en résulte une perturbation de la trajectoire de notre satellite. Cette différence d'attraction est précisément la force de marée (cf. 1.1.3).

C'est ensuite en transposant son raisonnement à l'échelle de la Terre, et non plus de l'orbite lunaire, que NEWTON comprend qu'une perturbation de même nature intervient à la surface de notre planète, mettant ainsi les masses d'eau en mouvement. Cette étape décisive dans la compréhension du phénomène confère donc au savant britannique le titre de père de la théorie de la marée.

Notons, pour terminer, que la théorie de NEWTON n'est cependant que statique et ne permet pas de calculer les effets du phénomène. Il faudra pour cela attendre les travaux de LAPLACE (XVIII^e-XIX^e siècles), qui introduit le concept de potentiel de marée (voir plus bas) et développe en grande partie la théorie dynamique des

3. qu'il considère comme celle d'un aimant

4. Quelques centimètres en Méditerranée... jusqu'à 15 m dans la baie du Mont St-Michel!

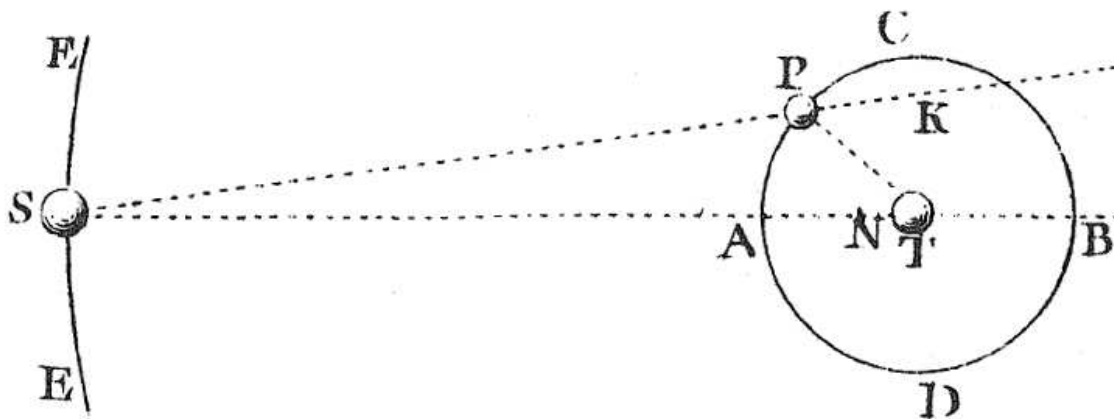


FIGURE 1.2 – *La force de marée selon NEWTON. Cette figure est extraite des Principia (Newton, 1687, fig. 121). S représente le Soleil, dont l'attraction est différente entre les points T (Terre) et P (Lune). NEWTON montre que c'est précisément cette différence qui explique la perturbation de l'orbite de la Lune, notamment la précession des nœuds de celle-ci. Dans son raisonnement, il a ensuite considéré le cercle ACBD comme la Terre elle-même; la force de marée agit donc sur la planète de la même manière qu'elle procède sur l'orbite (cor. XIX de la prop. LXVI, livre I & prop. XXIV, livre III) : les eaux sont ainsi perturbées et mises en mouvement. Voir [Deparis et Legros \(201x\)](#) pour une analyse détaillée du raisonnement de NEWTON. Noter que la figure est représentée dans le référentiel géocentrique...*

marées. On lui doit la dérivation des équations générales du mouvement de l’océan ainsi que la découverte des harmoniques sphériques, essentielles à sa théorie. La compréhension actuelle des phénomènes de marée – océaniques ou non – repose en très grande partie sur les travaux du savant français.

1.1.3 Principe de la force de marée

Avant de comprendre quels sont les effets de marée sur la dynamique orbitale et axiale des planètes et de leurs satellites, il importe de procéder à quelques rappels. Le lecteur curieux est invité à consulter, entre autres, les ouvrages de [Coulomb et Jobert \(1972, chap. 16, 18 et 25\)](#) et de [Murray et Dermott \(1999, chap. 2 et 4 à 6\)](#).

Définition

NEWTON a montré que la force de gravitation varie en raison du produit des masses en jeu et en raison inverse du carré de la distance entre celles-ci. Or, pour un corps d’extension finie (c.-à-d. non ponctuel), la distance des points qui le composent au corps perturbateur est par définition variable. L’attraction gravitationnelle qui agit sur les particules constituant le corps perturbé varie donc au sein de celui-ci. C’est l’existence même de cette variation qui est responsable des forces de marée. Ainsi, on définira l’accélération de marée \mathbf{a}_{mar} comme étant la différence entre le champ de gravitation local, \mathbf{a}_{grav} et le champ de gravitation moyen $\langle \mathbf{a}_{\text{grav}} \rangle$ (c.-à-d. en O , centre de masse ; fig. 1.3). Ce dernier est égal à l’accélération orbitale (centrifuge) du corps perturbé, \mathbf{a}_{orb} , sur son orbite autour du centre de masse du système formé par les deux corps (on néglige ici toute rotation propre) :

$$\mathbf{a}_{\text{mar}} = \mathbf{a}_{\text{grav}} - \langle \mathbf{a}_{\text{grav}} \rangle, \quad (1.2)$$

$$= \mathbf{a}_{\text{grav}} - \mathbf{a}_{\text{orb}}. \quad (1.3)$$

La force de marée elle-même correspond à la définition ci-dessus (produit par la masse du corps perturbé), avec toutefois une somme, et non une différence, pour la force centrifuge orbitale (force inertielle d’entraînement). Cette force est conservative et, de ce fait, dérive d’une énergie potentielle. Le quotient de cette quantité par la masse du corps perturbé correspond au potentiel de marée. En réponse à celui-ci, le corps planétaire, de nature sphérique au repos, va s’ajuster en une forme ellipsoïdale à trois axes, avec une symétrie quasi-parfaite par rapport à l’axe Oo (reliant les centres de masse des deux corps du système, cf. fig. 1.3) d’une part, et par rapport au plan perpendiculaire à cette direction et passant par O , d’autre part. Notons que cette symétrie est d’autant plus respectée que le rayon du corps perturbé est petit devant la distance orbitale Oo .

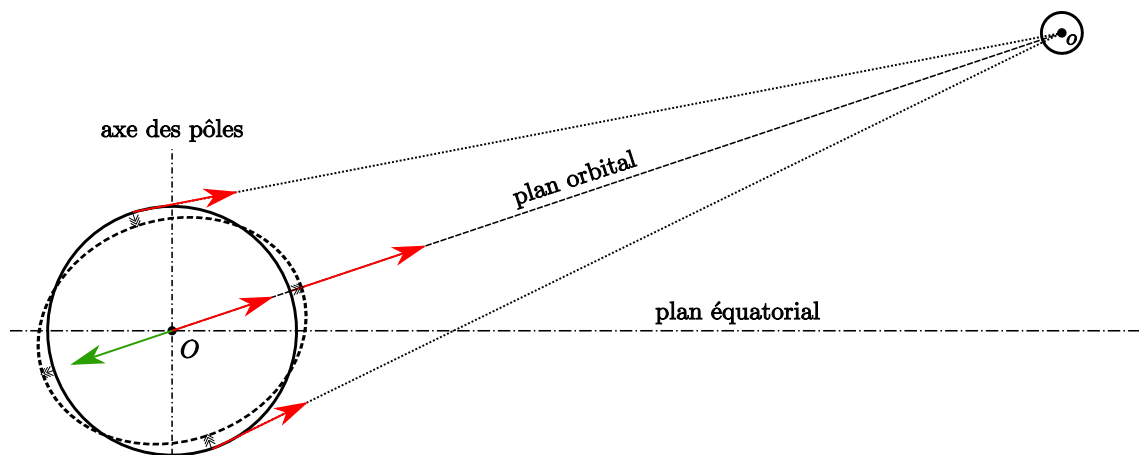


FIGURE 1.3 – Principe de la force de marée. La force de marée subie par un corps planétaire (de centre de masse O) de la part d'un corps extérieur (perturbateur, de centre de masse o) est la résultante de deux composantes : la force d'attraction gravitationnelle du corps perturbateur, variable en chaque point du corps perturbé (vecteurs rouges) et la force centrifuge (vecteur vert, constant) due au mouvement de ce dernier autour du barycentre du système (rotation propre négligée). Noter l'inclinaison de l'orbite du corps perturbateur par rapport à l'équateur du corps central. Ce dernier, de nature sphérique à l'état non perturbé (trait plein), possède une forme ellipsoïdale triaxiale (tiretés) en raison des forces de marée.

Il s'agit là bien évidemment de la réponse instantanée d'une planète à la force de marée. En effet, non seulement celle-ci est en rotation autour de son axe des pôles mais, en outre, dans le cas d'un système planète-satellite, la période de cette rotation est, en général, différente de celle de la révolution du satellite autour de la planète. Il en résulte que le bourrelet de marée se déplacera pour faire face au satellite ; il s'agit de la marée dynamique. En réalité, la formation du bourrelet au passage du satellite à une position donnée n'est pas instantanée. Une certaine anélasticité de la planète est responsable d'un délai temporel (et donc angulaire) entre la sollicitation de marée et la formation du bourrelet « à l'équilibre » correspondant. Ce phénomène correspond à une dissipation d'énergie à l'intérieur du corps (cf. 1.2) : c'est la dissipation de marée, responsable notamment d'une certaine production de chaleur.

Potentiel de marée

Nous avons vu précédemment que la force de marée est un phénomène différentiel, dû à la variation du champ de gravitation d'un corps perturbateur au sein d'un corps perturbé. En un point M donné du corps perturbé (figure 1.4), le champ de gravitation exercé par le corps externe s'écrit ainsi :

$$\mathbf{a}_{\text{grav}} = -\nabla U^*, \quad (1.4)$$

avec U^* le potentiel de gravitation du corps extérieur au point M :

$$U^* = -\frac{\mathcal{G}m^*}{oM}, \quad (1.5)$$

\mathcal{G} étant la constante de gravitation universelle et oM la distance du point M au centre de masse o du corps perturbateur (cf. fig. 1.4) ; le potentiel, défini à une constante près, est ici choisi nul à l'infini.

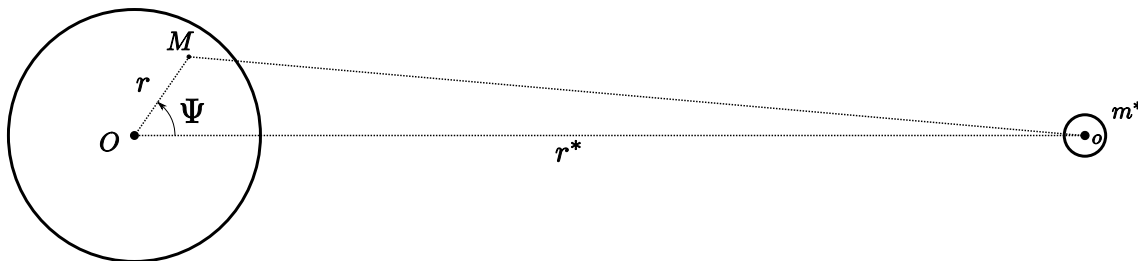


FIGURE 1.4 – Géométrie de travail pour le potentiel de marée d'un corps perturbateur. Noter que le point M – vu ici en projection – peut être n'importe où dans la sphère constituée par le corps perturbé. Voir texte pour les détails.

Le potentiel ainsi défini est négatif⁵ : nous choisissons là une convention classique en physique. En géodésie, il est courant de choisir la convention inverse (soit $\mathbf{a}_{\text{grav}} = \nabla U^*$) ; c'est par exemple ainsi que procèdent [Kaula \(1964\)](#) et [Lambeck \(1979\)](#) dans leurs travaux. Nous reviendrons plus loin sur ce point (chap. 5).

La distance oM est directement reliée au rayon r et à la distance $Oo := r^*$ entre les centres de masse des deux corps. Ainsi, en utilisant le théorème d'AL-KASHI dans le triangle OMo , il est possible d'exprimer la quantité $1/oM$ en fonction des autres longueurs et de l'angle Ψ , appelé distance zénithale. En factorisant l'expression par $1/r^*$, il vient :

$$\frac{1}{oM} = \frac{1}{r^*} \left[1 + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 - 2 \frac{r}{r^*} \cos \Psi \right]^{-1/2}. \quad (1.6)$$

Cette expression peut être rendue plus commode grâce à un développement en série de FOURIER-LEGENDRE. L'équation (1.5) devient alors :

$$U^* = -\frac{\mathcal{G}m^*}{r^*} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*} \right)^l P_l(\cos \Psi), \quad (1.7)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} U_l^*, \quad (1.8)$$

avec U_l^* la contribution de degré l du potentiel et $P_n(x)$ le polynôme de LEGENDRE de degré n , exprimé par la formule de RODRIGUES :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1.9)$$

Grâce à la décomposition précédente [éq. (1.8)], l'accélération de marée peut s'écrire [éq. (1.2) et (1.4)] :

$$\mathbf{a}_{\text{mar}} = -\nabla U_0^* - \nabla U_1^* - \sum_{l=2}^{\infty} \nabla U_l^* - \langle \mathbf{a}_{\text{grav}} \rangle. \quad (1.10)$$

La contribution U_0^* est le potentiel gravitationnel au centre de masse du corps perturbé. Il est donc constant et, par conséquent, ne participe pas à la force de marée ; le premier terme du second membre de l'équation ci-dessus s'annule. En revanche, U_1^* n'est invariant que sur le plan perpendiculaire à la droite (Oo) et passant par M (fig. 1.4). Son gradient est, lui, constant et correspond exactement au champ de gravitation moyen $\langle \mathbf{a}_{\text{grav}} \rangle$ exercé sur le corps perturbé, c'est-à-dire à l'accélération

5. Il en sera de même dans tout le manuscrit.

orbitale de celui-ci [cf. éq. (1.3)]. On en déduit finalement que l'accélération de marée dérive d'un potentiel, U_{mar}^* :

$$U_{\text{mar}}^* = -\frac{\mathcal{G}m^*}{r^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*}\right)^l P_l(\cos \Psi). \quad (1.11)$$

Expression du potentiel dans le référentiel du corps perturbé

De manière classique (p. ex. [Kaula, 1964](#) ; [Coulomb et Jobert, 1972](#)), on transpose l'expression du potentiel de marée dans un référentiel lié au corps perturbé et muni d'un système de coordonnées planétographiques de centre O . Ainsi, le théorème d'AL-KASHI, cette fois-ci généralisé pour un triangle sphérique, nous permet de développer le cosinus de l'angle zénithal en fonction de la latitude λ et de la longitude ϕ du système de coordonnées. Plaçons-nous dans le triangle sphérique formé par le point M (cf. fig. 1.4), de coordonnées (r, λ, ϕ) , et par les points correspondant aux projections, sur la sphère de rayon r centrée en O – suivant un axe dirigé vers ce même centre, du pôle nord du corps perturbé et du centre o du corps perturbateur, de coordonnées respectives $(r, 0, 0)$ et (r, λ^*, ϕ^*) . Dans ce triangle sphérique, on a :

$$\cos \Psi = \sin \lambda \sin \lambda^* + \cos \lambda \cos \lambda^* \cos(\phi - \phi^*). \quad (1.12)$$

Le théorème d'addition pour les harmoniques sphériques zonales nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P_l(\cos \Psi) &= \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Y_{ml}(\lambda, \phi) \bar{Y}_{ml}(\lambda^*, \phi^*), \\ &= \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \lambda) P_{lm}(\sin \lambda^*) \cos[m(\phi - \phi^*)], \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec $Y_{nm}(\lambda, \phi) := P_{nm}(\sin \lambda) e^{im\phi}$ l'harmonique sphérique de degré n et d'ordre m , la notation $\bar{\bullet}$ pour le complexe conjugué et P_{nm} la fonction de LEGENDRE associée (non normalisée) :

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (1.14)$$

Le potentiel de marée s'écrit finalement, dans le référentiel planétocentrique :

$$U_{\text{mar}}^* = -\frac{\mathcal{G}m^*}{r^*} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \lambda) P_{lm}(\sin \lambda^*) \cos[m(\phi - \phi^*)]. \quad (1.15)$$

Il peut toujours se décomposer en la somme d'une partie statique $U_{\text{mar}}^{*,\text{stat}}$, qui gouverne la forme moyenne du corps et une partie dynamique, $U_{\text{mar}}^{*,\text{dyn}}(t)$. C'est cette dernière, variable au cours de l'orbite, qui est responsable de la déformation périodique de marée et donc de la chaleur produite par ce mécanisme.

1.1.4 Transferts de moment cinétique

La dissipation visqueuse de marée, tant dans le corps primaire que dans le corps secondaire, va modifier la répartition d'énergie au sein du système formé par les deux objets. En particulier, l'énergie orbitale s'en trouve modifiée. Pour comprendre ce phénomène, il importe de rappeler, dans un premier temps, la description classique d'une orbite.

Éléments elliptiques d'une orbite

Dans le cadre de cette étude, une approche képlérienne des orbites est amplement suffisante et il sera fait abstraction de tout effet non newtonien dans l'évolution de celle-ci. Pour décrire l'orbite d'un corps secondaire autour d'un corps primaire⁶, cinq paramètres géométriques sont nécessaires : deux pour la forme de cette orbite (fig. 1.5), trois pour son orientation spatiale (fig. 1.6). Ils sont complétés par un élément supplémentaire qui précise la position de l'objet sur son orbite. Les éléments elliptiques usuels forment donc un sextuplet caractérisant complètement le mouvement tridimensionnel – mais non perturbé⁷ – d'un objet en orbite ; ils sont, dans l'ordre mentionné ci-dessus :

- a : le demi-grand axe de l'ellipse ;
- e : son excentricité ;
- ω : l'argument du périastre ;
- Ω : la longitude du nœud ascendant ;
- I : l'inclinaison de l'orbite ;
- ν : l'anomalie vraie.

Dans la figure 1.5, on notera C le centre de l'ellipse, P le périastre, A l'apoastre, F_1 et F_2 les foyers de l'ellipse (corps central ici en F_2), \wp et ϑ les nœuds, respectivement ascendant et descendant – définissant la ligne des nœuds – et M le point coïncidant avec la position courante de l'objet en orbite, à une distance r du second foyer. Rappelons qu'une ellipse est fondamentalement une conique, c'est-à-dire l'ensemble des points tels que le rapport de leurs distances à un point (ici F_2) et à une droite (une directrice \mathcal{D} , cf. fig. 1.5) – respectivement les longueurs r et ℓ – soit une constante, e , appelée excentricité de la conique ($e \in [0, 1[$ pour une ellipse).

6. tous deux considérés comme ponctuels dans ce paragraphe

7. Problème à deux corps *ponctuels*, c.-à-d. pas d'interaction de marée...

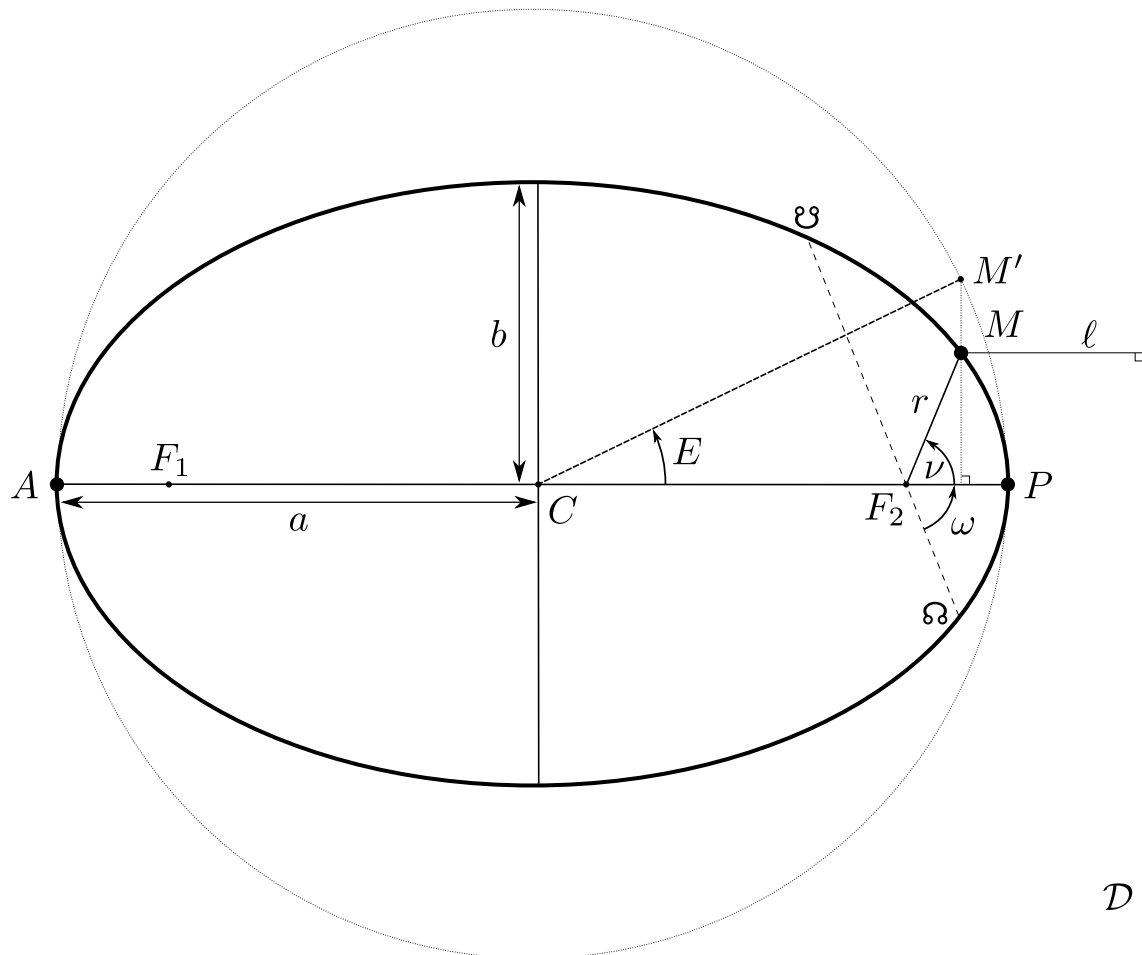


FIGURE 1.5 – Description planeaire d'une orbite. Les différents angles, longueurs et points caractéristiques sont présentés sur une vue dans le plan orbital (cf. texte pour leurs définitions) ; b désigne le demi-petit axe de l'ellipse.

Sur la figure 1.6, Π désigne un plan de référence (inertiel et incluant la ligne des nœuds) et γ une direction de référence dans ce plan⁸. Cette dernière sera associée à un axe x , générateur d'un trièdre direct (x, y, z) , avec la direction y incluse dans le plan Π . Enfin, la direction normale au plan orbital lui-même est notée z' . Chaque direction \bullet est orientée par un vecteur unitaire $\hat{\bullet}$ (non représenté sur la figure 1.6).

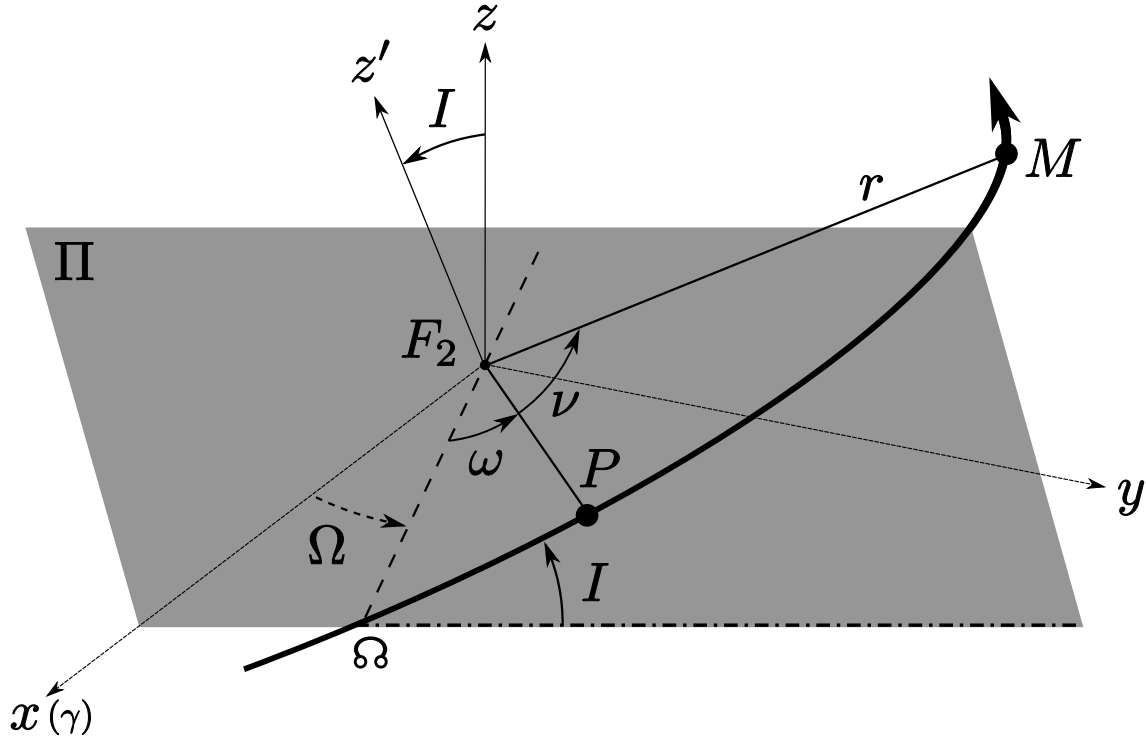


FIGURE 1.6 – Orientation spatiale d'une orbite. Les différents angles, longueurs, points et directions caractéristiques sont présentés sur une vue en perspective présentant l'orbite (une portion de celle-ci) inclinée par rapport à un plan de référence (Π). Voir texte pour les détails.

Les éléments elliptiques sont alors définis ainsi :

$$a := \frac{AP}{2} = CP, \quad e := \frac{r}{\ell} = \frac{CF_2}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \omega := (\mathbf{F}_2\delta, \mathbf{F}_2\mathbf{P}), \quad (1.16)$$

$$\Omega := (\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{F}_2\delta), \quad I := (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}') = (\Pi, \mathcal{T}), \quad \nu := (\mathbf{F}_2\mathbf{P}, \mathbf{F}_2\mathbf{M}), \quad (1.17)$$

avec \mathcal{T} la tangente à l'orbite au niveau du nœud ascendant.

8. Dans le cas de la Terre, γ est classiquement la direction du point vernal – position de l'équinoxe de printemps – autrement dit l'intersection de l'écliptique (le plan Π dans ce cas) et du plan équatorial terrestre.

D'autres paramètres sont parfois définis et appelés longitudes par abus de langage⁹ : la longitude du périastre ($\varpi := \Omega + \omega$), la longitude moyenne ($\varpi + \mathcal{M}$, avec \mathcal{M} l'anomalie moyenne ; cf. ci-dessous) ou encore la longitude vraie ($\varpi + \nu$).

Notons enfin que l'on peut définir l'anomalie excentrique E (fig. 1.5) et la longitude excentrique ($\varpi + E$) correspondante ; E correspond à l'angle orienté $(\mathbf{CP}, \mathbf{CM}')$, avec M' le point du cercle de centre C et de rayon a le plus proche de M dont le projeté orthogonal sur la ligne des apsides (AP) est le même que celui de M . L'anomalie moyenne, couramment utilisée, est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{M} := n(t - t_P) = \frac{2\pi}{T_o}, \quad (1.18)$$

avec n le moyen mouvement du corps en orbite, t un instant donné, t_P l'instant de passage au périastre et T_o la période orbitale.

Elle peut être interprétée comme l'angle $(\mathbf{CP}, \mathbf{CM}'')$, où M'' serait un point parcourant une orbite circulaire – même cercle que pour l'anomalie excentrique – avec une vitesse angulaire constante et égale à n . Elle est ainsi reliée à l'anomalie excentrique E par l'équation de KEPLER :

$$\mathcal{M} = E - e \sin E. \quad (1.19)$$

Cas d'un système de corps étendus

Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, les deux corps en interaction ne sont pas simplement des points. Ils possèdent une certaine étendue spatiale, responsable – entre autres – de l'apparition de forces de marée. L'énergie totale du système primaire-secondaire, E_{tot} se décompose alors en la somme de trois contributions : l'énergie orbitale, E_{orb} , l'énergie de rotation du corps primaire et celle du corps secondaire, E_{rot}^\bullet . Ainsi, on a, dans l'ordre :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{orb}} + E_{\text{rot}}^I + E_{\text{rot}}^{II}, \quad (1.20)$$

$$= -\frac{\mathcal{G}(M_I + M_{II})M_{II}}{2a} + \frac{1}{2}C_I\dot{\theta}_I^2 + \frac{1}{2}C_{II}\dot{\theta}_{II}^2, \quad (1.21)$$

avec C_\bullet les moments d'inertie par rapport à l'axe polaire¹⁰ des deux corps, les indices I et II se rapportant respectivement au corps primaire et au corps secondaire. La quantité $\dot{\theta} := \partial\theta/\partial t$ est la vitesse de rotation propre (*spin*) des corps (θ est l'angle entre une direction liée au corps en rotation et une direction fixe donnée ; il s'agit typiquement de l'angle horaire du point vernal, appelé *temps sidéral*).

9. somme d'angles non coplanaires...

10. c.-à-d. à l'axe de rotation

Le moment cinétique total du système, \mathbf{L}_{tot} , tient lui aussi compte de la rotation propre des corps. Sa projection selon le pôle de l'orbite du corps secondaire (direction z' , cf. fig. 1.5, avec Π le plan équatorial du corps primaire) s'écrit, avec les mêmes notations que précédemment et dans le cas d'un corps secondaire d'obliquité nulle sur son orbite :

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} \cdot \hat{\mathbf{z}}' := L_{\text{tot}}^{z'} = L_{\text{orb}}^{z'} + L_{\text{rot}}^{z',I} + L_{\text{rot}}^{z',II}, \quad (1.22)$$

$$= \frac{M_I M_{II}}{M_I + M_{II}} r^2 \dot{\nu} + C_I \dot{\theta}_I \cos I + C_{II} \dot{\theta}_{II}. \quad (1.23)$$

Dans la plupart des cas, la masse du corps secondaire est négligeable devant celle du corps primaire, ce qui amène un certain nombre de simplifications. Cependant, en toute rigueur, il importe de conserver les expressions précédentes ; elles sont incontournables dans certains systèmes, tels que le système Terre-Lune ou, exemple encore plus significatif, le couple Pluton-Charon.

Expression du potentiel de marée dans le repère orbital képlérien

[Kaula \(1961\)](#)¹¹ a proposé une formulation du potentiel ne faisant intervenir que des éléments orbitaux. Ce changement de variable aboutit à l'expression suivante :

$$U^*(r, \lambda, \phi) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{lmpq}^*, \quad (1.24)$$

avec :

$$U_{lmpq}^* := -\frac{\mathcal{G}m^*}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(I) G_{lpq}(e) P_{lm}(\sin \lambda) \\ \times J_{lm} [v_{lmpq} - m(\phi + \theta)] \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}), \quad (1.25)$$

avec F_{lmp} et G_{lpq} les fonctions d'inclinaison et d'excentricité de [Kaula \(1961\)](#), et J_{lm} une fonction qui s'identifie à la fonction cosinus lorsque $(l-m)$ est pair et à la fonction sinus si $(l-m)$ est impair (cf. annexe A.5 pour les détails). La quantité angulaire v_{lmpq} est une combinaison de différents angles intervenant dans la description de l'orbite (cf. plus haut ; fig. 1.5 et 1.6) : l'argument du périastre ω , la longitude du nœud ascendant Ω et l'anomalie moyenne \mathcal{M} . Son expression est :

$$v_{lmpq}(t) := (l-2p)\omega + (l-2p+q)\mathcal{M} + m\Omega, \quad (1.26)$$

11. voir aussi l'ouvrage de [Kaula \(1966\)](#), pour une explication plus accessible

et permet de définir une fréquence angulaire ω_{lmpq} associée à chaque quadruplet (l, m, p, q) :

$$\omega_{lmpq} := \dot{\nu}_{lmpq} - m\dot{\theta}, \quad (1.27)$$

$$= (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{\mathcal{M}} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}). \quad (1.28)$$

Action de la dissipation de marée sur le système

Comme nous l'enseigne la mécanique classique, la variation d'énergie mécanique (c.-à-d. totale) d'un système isolé est égale au travail des forces non conservatives. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse que les marées sont la seule source de dissipation d'énergie dans le système et que celui-ci est isolé (actions externes négligeables), il vient l'égalité suivante :

$$\dot{E}_{\text{tot}} = -\mathcal{P}_{\text{mar}}, \quad (1.29)$$

avec \mathcal{P}_{mar} la puissance de marée dissipée dans les deux corps du système. Comme nous le verrons au chapitre 4, toute la difficulté consiste à évaluer correctement ce terme, essentiel pour le bilan de chaleur dans les cas qui intéressent cette étude.

De plus, comme le système est considéré comme isolé, il n'y a pas de couple de force qui s'exerce dessus. Ainsi, le moment cinétique total du système se conserve et l'on a la relation fondamentale :

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

La dissipation de marée qui a lieu dans les deux corps donne lieu à des transferts internes de moment cinétique au sein du système. Les calculs pratiques de ceux-ci, c'est-à-dire de la répartition du moment cinétique dans les différentes composantes, impliquent des choix méthodologiques qui seront détaillés au chapitre 5. Nous décrivons ici ces transferts d'énergie et de moment cinétique de manière qualitative, en nous concentrant sur la nature géométrique des phénomènes mis en jeu.

Effet de la dissipation de marée dans le corps central

L'écart à l'élasticité parfaite du corps central est responsable du délai de formation du bourrelet de marée (cf. 1.2). Ce délai peut être vu, par exemple, comme un retard temporel Δt de la déformation de marée. Ce déphasage va s'ajouter à un retard ou à une avance systématique, selon que le corps central tourne sur lui-même à une vitesse de rotation plus élevée ou plus faible que la vitesse angulaire de révolution du corps en orbite. La situation dans laquelle le bourrelet du corps primaire est toujours aligné avec la direction primaire-secondaire correspond au cas

particulier d'une orbite circulaire synchrone ($e = 0$, $\dot{\theta}_I = n$) ou bien d'un corps (idéal) parfaitement élastique.

Ainsi, dans le cas d'un spin central plus élevé que le moyen mouvement du corps secondaire ($\dot{\theta}_I > n$; corps secondaire au-delà de l'orbite synchrone), le bourrelet de marée, qui met un certain temps à se former, c'est-à-dire à s'ajuster au potentiel de marée, va être entraîné par la rotation de la planète. Il se retrouvera alors systématiquement en avance, d'un angle $(\dot{\theta}_I - n)\Delta t$ par rapport à la direction primaire-secondaire (fig. 1.7a). C'est le cas du système Terre-Lune ($\dot{\theta}_I \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $n \approx 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), dans lequel l'essentiel de la dissipation de marée se fait, actuellement, dans les océans, principalement par frottement sur les domaines côtiers et sur les fonds océaniques (p. ex. [Egbert et Ray, 2000](#)).

Il en résulte un couple de force exercé par le bourrelet sur le corps secondaire (traction symbolisée par les vecteurs rouges sur la figure 1.7). La composante effective de cette force est dirigée vers l'avant sur la trajectoire du corps secondaire. Ce dernier est ainsi accéléré et donc mené sur une orbite plus large. Ainsi, la dissipation dans le corps central a tendance à faire augmenter le demi-grand axe a de l'orbite. À titre d'exemple, rappelons que la Lune, en raison de la dissipation dans les océans terrestres, s'éloigne ainsi d'environ 3,8 cm par an ([Dickey et al., 1994](#)). En outre, comme le moment cinétique total est conservé, la quantité $a(1 - e^2)$ doit rester inchangée¹². L'excentricité de l'orbite augmente donc également dans ce cas de figure. En contrepartie, une traction identique est exercée par le satellite sur le bourrelet, ce qui a tendance à freiner la rotation de la planète; c'est l'augmentation de la durée du jour pour le corps central. Il semble, par exemple, que celle-ci soit passée – dans le cas de la Terre – d'environ 20h à 24h durant les deux derniers milliards d'année ([Williams, 2000](#)).

À l'inverse, pour un cas où l'on a $\dot{\theta}_I < n$ (corps secondaire en dessous de l'orbite synchrone), le bourrelet de marée va se trouver en deçà de la direction formée par le centre des deux corps. Il présentera un retard angulaire $(n - \dot{\theta}_I)\Delta t$ (fig. 1.7b). C'est le cas du système Mars-Phobos, pour lequel on a $\dot{\theta}_I \approx 7,08 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $n \approx 2,28 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La traction effective du bourrelet a alors tendance à freiner le satellite sur son orbite, diminuant son demi-grand axe et, par conséquent, son excentricité. Ce phénomène est ainsi responsable de l'orbite actuelle de Phobos ($a \approx 2,77R_M$, $e \approx 0,015$; R_M est le rayon moyen de Mars), lune qui devrait s'écraser sur Mars d'ici 30 à 50 Ma (p. ex. [Mignard, 1981](#)). Dans le cas où le moment cinétique est beaucoup moins concentré dans le corps central, on parvient non plus à la chute (ou désintégration au niveau de la limite de ROCHE) du corps secondaire sur le corps primaire mais à un état d'équilibre ultime : l'orbite double-synchrone ($\dot{\theta}_I = \dot{\theta}_{II} = n$). De plus, inversement au cas précédent, le spin du corps central se trouve cette fois-ci

12. en faisant fi, ici – pour la compréhension du phénomène – de la rotation propre

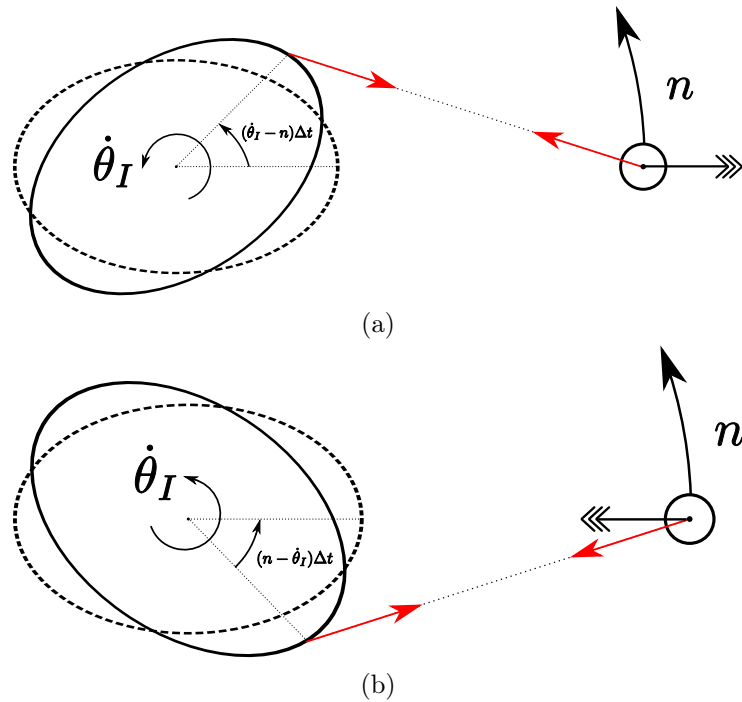


FIGURE 1.7 – Influence du bourrelet de marée du corps primaire sur l'orbite du corps secondaire. Le corps primaire est animé d'une rotation propre, de vitesse angulaire $\dot{\theta}_I$, alors que le corps secondaire est en orbite (vitesse angulaire égale à son moyen mouvement n). Le retard temporel Δt de formation du bourrelet, dû à la dissipation d'énergie, implique un déphasage angulaire $|n - \dot{\theta}_I|\Delta t$. La traction résultante (en rouge) est responsable de l'accélération (a) ou de la décélération (b) du corps secondaire sur son orbite et donc de son éloignement (a) ou de son rapprochement (b) de la planète centrale (flèche à pointes multiples).

accélération (raccourcissement de la durée du jour). Le couple Pluton-Charon est un exemple actuel de système double-synchrone.

Un cas un peu particulier est celui d'un satellite en orbite rétrograde autour de sa planète (système Neptune-Triton). La situation géométrique est alors identique à celle représentée à la figure 1.7a, avec toutefois une vitesse angulaire de révolution opposée ($-n$) pour le corps secondaire. Le résultat est ici une diminution du demi-grand axe et une augmentation du spin du corps primaire (c.-à-d. diminution de sa durée du jour). Si l'on imagine que le cas décrit précédemment est valable en vue polaire, au-dessus du pôle nord du corps primaire, alors la vision depuis son pôle sud fait apparaître un dernier cas, encore plus anecdotique : celui d'un satellite en orbite (prograde) autour d'une planète en rotation rétrograde. On comprend dès lors que les effets de marée orbitaux sont exactement les mêmes que dans le cas précédent.

Le bourrelet de marée du corps central présente un dernier effet sur l'orbite : il a tendance à faire diminuer l'inclinaison de celle-ci (fig. 1.8). En effet, celui-ci est, pendant l'intervalle Δt , entraîné par la rotation de la planète (en avant ou en arrière par rapport à la direction du corps secondaire, cf. précédemment). Il se retrouve alors au-dessus ou en dessous du plan orbital. Le résultat est un couple de force ayant tendance à attirer le satellite vers l'équateur de la planète. L'effet revient à rapprocher le plan orbital de l'équateur du corps primaire, diminuant ainsi son inclinaison (flèches vertes), via un couple de forces effectif s'exerçant sur le plan orbital (vecteurs rouges). Sur la figure 1.8, le bourrelet est présenté avec un décalage volontairement important (trait plein) par rapport au bourrelet « instantané » (c.-à-d. élastique pur ; en tirets), afin de rendre l'effet de traction plus facilement compréhensible.

Ce phénomène est cette fois-ci valable dans tous les cas de figure (excepté pour l'orbite synchrone). Comme nous le verrons plus loin, seuls les effets de marée sur a , e , I , $\dot{\theta}_I$ et $\dot{\theta}_{II}$ seront considérés dans cette étude. Ceux sur les éléments Ω et ω seront ignorés, puisque l'on se restreindra à un système primaire-secondaire isolé.

Effet de la dissipation de marée dans le corps en orbite

Nous allons voir que la dissipation de marée dans le corps secondaire implique un comportement inverse de celui entraîné par la dissipation dans le corps primaire. Afin de bien comprendre le phénomène, nous nous placerons dans le cas d'un corps en résonance spin-orbite 1 : 1 (c.-à-d. $\dot{\theta}_{II} = \langle \dot{\nu} \rangle = n$). C'est le cas de la plupart des satellites dans le Système Solaire. Pour l'explication, la rotation du corps central – et même la dissipation d'énergie au sein de celui-ci – sera ignorée. Il faut distinguer deux types de bourrelets de marées. Le premier est le bourrelet statique, représenté en noir sur la figure 1.9. Celui-ci correspond à la forme d'équilibre que le corps secondaire aurait sur une orbite circulaire équivalente. Il s'agit classiquement d'un

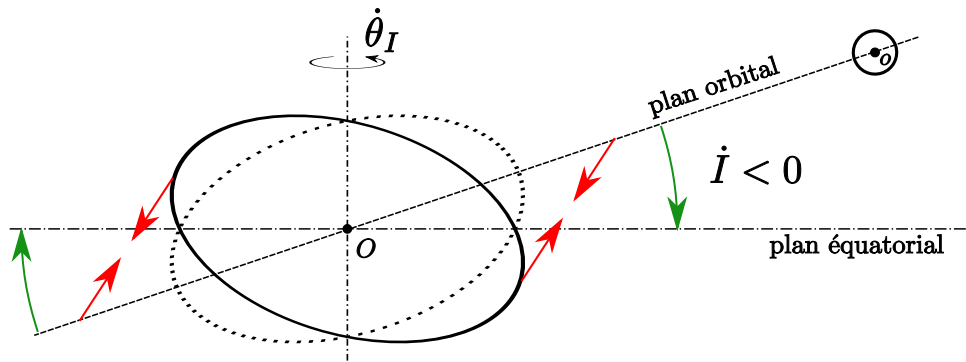


FIGURE 1.8 – Influence du bourrelet de marée du corps primaire sur l’inclinaison de l’orbite du corps secondaire. La rotation du corps central (de vitesse $\dot{\theta}_I$) entraîne le bourrelet au-dessus/en dessous du plan orbital, provoquant un couple de forces effectif (vecteurs rouges) qui a tendance à rabattre le plan orbital sur le plan équatorial. Le résultat est une diminution de l’inclinaison orbitale I . Notons que ce cas de figure correspond à un moment cinétique de rotation du corps primaire (ici d’obliquité nulle) très grand devant le moment cinétique de l’orbite du corps secondaire ; le plan équatorial peut alors être raisonnablement considéré comme un plan de référence inertiel (Π). Un cas plus général est visible à la figure 5.1.

ellipsoïde triaxial, dont le plus petit axe est dans la direction polaire (axe de rotation) et dont le plus grand est orienté dans la direction planète-satellite. Or, l’orbite, ici de période égale à celle de la rotation propre du corps secondaire, est elliptique, ce qui implique que la vitesse angulaire de révolution instantanée ($\dot{\nu}$) varie au cours de l’orbite, afin de satisfaire à la troisième loi de KEPLER (En tout point de l’orbite, pour une durée égale, les aires balayées par le segment reliant les centres de deux corps sont égales ; cf. zones grises sur la figure 1.9). Ainsi, le bourrelet statique se trouve tantôt en retard par rapport à la direction du corps central, tantôt en avance. Les deux seuls points de l’orbite pour lesquels le bourrelet statique est orienté vers la planète centrale sont le périastre (P) et l’apoastre (A).

Le second est le bourrelet dynamique (en rouge sur le figure 1.9). Il correspond à la réponse dynamique du corps orbitant au potentiel de marée du corps central. Comme expliqué plus haut, la réponse du corps secondaire n’est pas instantanée (anélasticité) : il y a dissipation d’énergie ; le délai temporel résultant, dans la formation du bourrelet, implique que celui-ci sera décalé d’un certain angle – constant en première approximation – par rapport à la direction pointant vers le corps central (en vert). C’est véritablement ce retard angulaire qui va contrôler l’effet de la dissipation de marée dans le corps secondaire sur l’orbite de celui-ci. La situation géométrique est similaire à celle visible dans la figure 1.7b : un couple de force va s’exercer sur le bourrelet dynamique, ici celui du secondaire, ce qui va avoir tendance

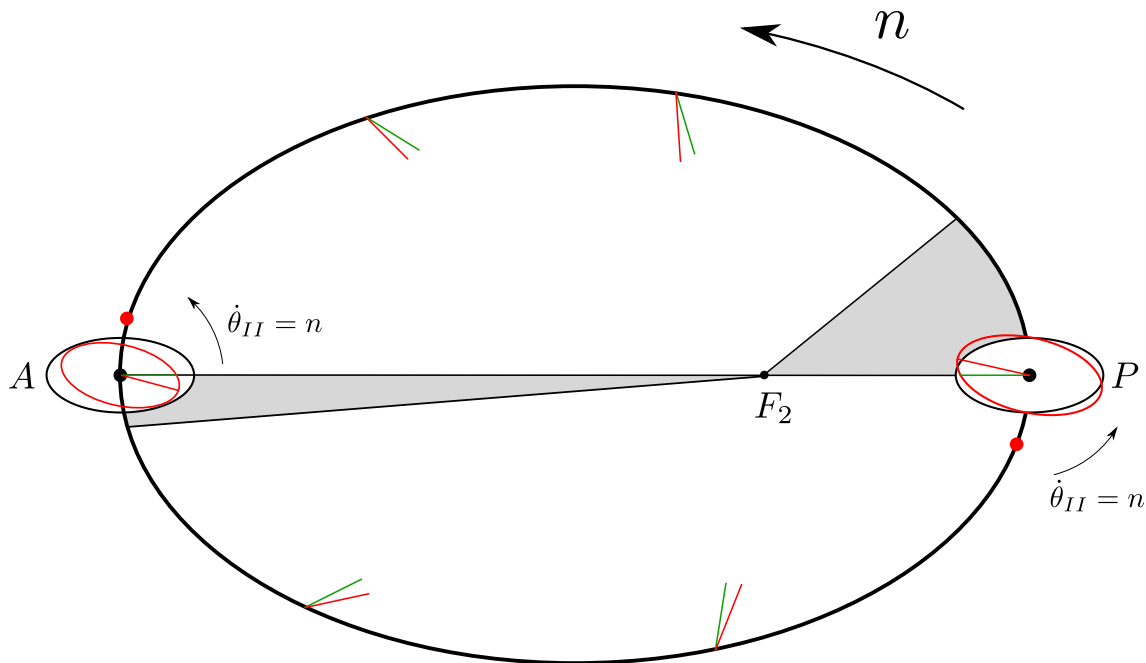


FIGURE 1.9 – Influence du bourrelet de marée du corps secondaire sur sa propre orbite. Le corps secondaire se déplace à une vitesse angulaire moyenne n sur une orbite elliptique dont le corps primaire occupe l'un des foyers (ici F_2 ; on suppose donc que l'on a $M_{II} \ll M_I$). La troisième loi de KEPLER stipule que les aires balayées en tout point de l'orbite (p. ex. ici en gris) sont égales pour une même durée. La vitesse angulaire instantanée du corps secondaire varie donc, provoquant alternativement un retard ou une avance du bourrelet statique (en noir – amplitude ici arbitraire; retard nul en A et P) par rapport à la direction corps primaire - corps secondaire. Le bourrelet dynamique est représenté en rouge : il se forme avec un certain délai temporel (retard angulaire par rapport à la direction primaire-secondaire, représentée en vert) et correspond à la réponse instantanée qu'aurait le corps en une position légèrement en retard sur l'orbite (points rouges). Noter l'amplitude variable du bourrelet dynamique, maximale en P . Le couple de force résultant sur le bourrelet du corps secondaire va circulariser et rétrécir l'orbite.

à accélérer son spin. Par conséquent, sa distance au corps primaire va diminuer (résonance 1 : 1). Ainsi, il se produit un freinage orbital, avec un effet d'autant plus fort au périastre – par rapport à celui produit à l'apoastre – que l'orbite est excentrique. L'orbite est ainsi rétrécie (diminution du demi-grand axe) et, par conservation du moment cinétique, circularisée (chute de e).

Dans ce travail, il a été négligé toute obliquité du corps secondaire sur son orbite. De ce fait, l'effet du bourrelet du corps en orbite sur l'inclinaison orbitale sera ignoré. De même, l'effet de la dissipation dans le corps secondaire sur le spin du corps central sera négligé.

En résumé, les effets de la dissipation de marée dans le corps secondaire sur le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite de celui-ci sont antagonistes de ceux produits par la dissipation dans le corps primaire. L'évolution orbitale qui en résulte dépend donc de l'importance relative de ces deux phénomènes. La déformation de marée – et donc la dissipation d'énergie associée – dépend non seulement de la structure interne des corps, mais aussi de leur état thermique et de leur propriétés rhéologiques aux fréquences des marées (viscoélasticité).

1.2 Rhéologie générale

La présentation généraliste qui suit est une synthèse réalisée notamment à partir des ouvrages de [Salençon \(2009\)](#) et de [Karato \(2008, chap. 3\)](#). Nous verrons plus loin comment ce formalisme, qui s'applique à un milieu continu général viscoélastique, englobe le comportement fluide, caractéristique de la convection thermique (cf. [1.3](#)) et peut s'appliquer au problème du chauffage de marée (chap. [4](#)).

1.2.1 Réponse d'un matériau à une sollicitation simple

Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, caractérisée par l'utilisation du tenseur des contraintes de CAUCHY $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de déformation infinitésimal, linéarisé¹³ au premier ordre en déplacement.

Considérons, dans un premier temps, un milieu continu soumis à une contrainte échelon (saut $\boldsymbol{\sigma}_0$), appliquée instantanément à une date t_0 . Il s'agit alors de déterminer quelle est la réponse du milieu – sa déformation – et comment celle-ci va croître dans le temps : c'est l'expérience de retard (ou de fluage) isotherme. La contrainte appliquée s'écrit ainsi, à un instant t :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_0 H(t - t_0), \quad (1.31)$$

où H est la fonction de HEAVISIDE (ou fonction échelon) :

$$H : x \mapsto H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.32)$$

Ainsi, $H(t - t_0)$ s'identifie à la fonction indicatrice de l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à t_0 : $1_{[t_0; +\infty[}$.

De la même manière, une expérience dite de relaxation peut être menée ; la sollicitation correspond ici à une déformation imposée (saut $\boldsymbol{\varepsilon}_0$) et peut se mettre sous une forme similaire à celle de l'équation [\(1.31\)](#). La réponse du milieu se caractérise alors par une certaine contrainte qui va diminuer (relaxation) au cours du temps.

La rhéologie du matériau est caractérisée complètement par la fonctionnelle reliant la contrainte à la déformation (loi constitutive) ou bien sa fonctionnelle inverse. Dans l'hypothèse d'un milieu boltzmannien, c'est-à-dire pour lequel le principe de superposition peut s'appliquer, ces fonctionnelles doivent être linéaires, et par conséquent indépendantes de l'amplitude de la sollicitation.

13. contrairement à ce qui est fait pour la mécanique des fluides [cf. plus loin, [eq. \(1.93\)](#)]....

Sous ces conditions, les réponses du milieu pour les expériences de retard et de relaxation s'écriront respectivement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{J}(t_0, t) : \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (1.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t_0, t) : \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (1.34)$$

où \mathbf{J} et \mathbf{R} sont des fonctions tensorielles appelées tenseur (du quatrième ordre) de retard et tenseur de relaxation, respectivement croissante (accumulation de la déformation) et décroissante (relâchement de la contrainte) dans le temps.

Dans l'hypothèse d'un matériau dont le comportement instantané est purement élastique, on retrouve, pour $t = t_0$, la caractéristique du milieu boltzmannien le plus classique : le matériau élastique linéaire. Ainsi, $\mathbf{J}(t_0, t_0)$ est le tenseur des complaisances¹⁴ instantanées et $\mathbf{R}(t_0, t_0)$ celui des modules élastiques instantanés. Dans cette situation particulière, les deux tenseurs sont inverses l'un de l'autre. Dans le cas d'un comportement élastique pur (c.-à-d. constant en fonction du temps), $\mathbf{R}(t_0, t_0)$ caractérise complètement le matériau ; il s'identifie au tenseur de rigidité \mathbf{C} . Les symétries matérielles vont permettre de réduire le nombre de composantes indépendantes des tenseurs \mathbf{J} et \mathbf{R} . Par exemple, dans le cas particulier de $\mathbf{J}(t_0, t_0)$ et $\mathbf{R}(t_0, t_0)$, la symétrie de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi que l'existence du potentiel thermoélastique restreignent à 21 (au lieu de 81) le nombre de ces coefficients pour chaque tenseur.

1.2.2 Réponse d'un matériau à une histoire de sollicitation

La déformation d'un milieu viscoélastique observée à un instant donné est le résultat de l'accumulation de tout l'historique de déformation. Ce dernier correspond à une certaine histoire des contraintes (nulle en dessous de l'instant initial t_0 de la sollicitation). Cette histoire peut être vue comme une somme infinie d'expériences de retard (cf. plus haut), d'amplitude $d\boldsymbol{\sigma}$ – ou bien d'amplitude finie (saut) pour certains instants, à différentes dates τ (fig. 1.10).

L'histoire de la contrainte s'écrit alors sous la forme d'une intégrale de STIELTJES¹⁵ :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tau}(\tau) d\tau. \quad (1.35)$$

Or, pour un milieu boltzmannien, on peut, par définition, appliquer le principe de superposition ; la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ est ainsi la superposition de toutes les déformations résultant de chacune des expériences de retard infinitésimales et

14. *compliance* en anglais. . .

15. la dérivée doit être prise au sens des distributions car des sauts peuvent être présents dans l'histoire des contraintes. . .

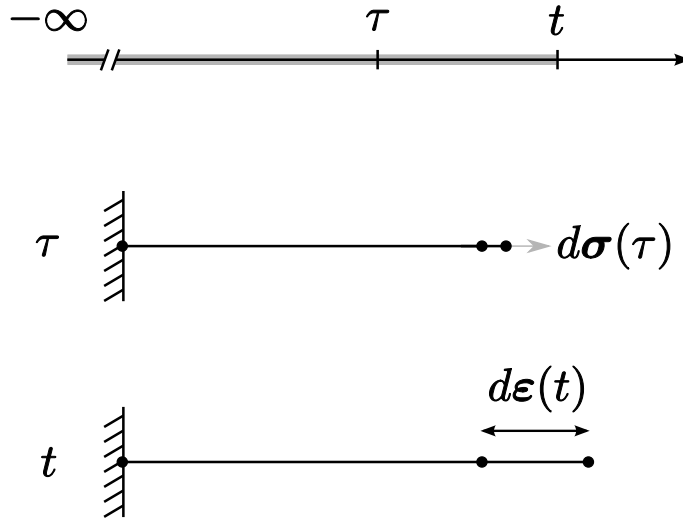


FIGURE 1.10 – Principe d'une déformation visco-élastique élémentaire. À un instant τ , une contrainte élémentaire $d\boldsymbol{\sigma}$ (« vecteur » gris) est appliquée à un solide (ici unidimensionnel). Il en résulte une petite déformation instantanée et réversible correspondant à la réponse élastique du solide. À un certain instant t ultérieur, la déformation élémentaire (cumulée) observée est $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Pour connaître la déformation totale à ce même instant, il faut intégrer l'ensemble de l'histoire de la déformation (zone grise symbolisée sur l'axe du temps).

d'amplitude élémentaire (ou non) ; les équations (1.33) et (1.35) permettent ainsi d'obtenir la réponse (déformation) à l'histoire de sollicitation (contrainte) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(\tau, t) : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tau}(\tau) d\tau. \quad (1.36)$$

En intégrant par partie on parvient, comme la contrainte est nulle à « l'origine » ($t \rightarrow -\infty$), à la formule de BOLTZMANN :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{J}(t, t) : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^t \left(-\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau}(\tau, t) \right) : \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (1.37)$$

Le premier terme du second membre de cette équation représente la réponse instantanée – élastique – à la sollicitation à l'instant t . Le tenseur de complaisances élastiques $\mathbf{J}(t, t)$ (cf. plus haut) représente donc la réponse instantanée à l'échelon de contrainte unité appliqué à l'instant t . L'intégrale correspond, elle, à un terme de mémoire de toute l'histoire antérieure à t et décrit le comportement différé du milieu. $-\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau}(\tau, t)$ est ainsi la réponse, observée à l'instant t , à l'impulsion unité de contrainte appliquée à l'instant $\tau < t$.

Cas d'un milieu isotrope non-vieillissant

Le milieu sera considéré comme non-vieillissant, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques – donc la forme de ses tenseurs de retard et de relaxation – seront invariantes dans le temps. Ainsi, $\mathbf{J}(t_0, t)$ et $\mathbf{R}(t_0, t)$ [cf. éq. (1.33) et (1.34)] ne dépendront finalement que d'une seule variable : la durée $(t - t_0)$ écoulée depuis la sollicitation à la date t_0 . L'équation (1.36) peut ainsi s'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t - \tau) : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tau}(\tau) d\tau. \quad (1.38)$$

L'hypothèse d'isotropie du matériau va considérablement simplifier cette équation : à l'instar de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides newtoniens, en milieu isotrope, les propriétés rhéologiques sont complètement caractérisées par la donnée de fonctions scalaires. Ainsi, pour les expériences de retard et de relaxation, on montre que les équations (1.33) et (1.34) s'écrivent, respectivement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = J(t - t_0) [(1 + \nu)\boldsymbol{\sigma}_0 - \nu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_0)\mathbf{G}], \quad (1.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \lambda(t - t_0) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{G} + 2\mu(t - t_0)\boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (1.40)$$

avec \mathbf{G} le tenseur métrique¹⁶ et $\operatorname{tr}(\bullet) := \mathbf{G} : \bullet$ la trace d'un tenseur d'ordre 2. La fonction $\nu(t - t_0)$ s'identifie au coefficient de POISSON, généralement considéré comme constant (d'où l'écriture d'un simple « ν »). Les fonctions scalaires restantes sont explicitées ci-dessous :

- $J(t)$ est la fonction de retard en traction simple (parfois appelée fonction de fluage) ;
- $\mu(t)$ est la fonction de relaxation en cisaillement simple ;
- la combinaison $\lambda(t) + 2\mu(t)$ constitue la fonction de relaxation en extension simple ;
- enfin, $3K := 3\lambda(t) + 2\mu(t)$ est la fonction de relaxation en compression isotrope.

À titre de remarque, notons que l'on peut montrer, via le caractère réciproque des tenseurs $\mathbf{J}(0)$ et $\mathbf{R}(0)$, les relations suivantes pour les fonctions scalaires décrites ci-dessus (pour la partie instantanée de la réponse) :

$$\mu(0) = \frac{J(0)^{-1}}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad K(0) = \frac{J(0)^{-1}}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.41)$$

16. Il sera souvent utilisé par la suite, en raison du choix d'écritures générales pour les équations, sans hypothèse *a priori* sur une base ou un système de coordonnées.

Si le milieu a un comportement en déformation uniquement instantané, on retrouve les relations classiques de l'élasticité linéaire, avec $\lambda \equiv \lambda(0)$ et $\mu \equiv \mu(0)$ les paramètres de LAMÉ, $K \equiv K(0)$ le coefficient d'incompressibilité et $J(0)^{-1} \equiv E$ le module de YOUNG. L'équation (1.40) s'identifie alors à la loi classique de HOOKE pour un milieu isotrope.

La propriété triviale de causalité, incluse dans les fonctions de retard et de relaxation [c.-à-d. $J(t) = 0$ si $t < 0$; de même pour $\lambda(t)$ et $\mu(t)$], permet en fait d'écrire l'équation (1.38) sous la forme d'un produit de convolution \star (l'intégrale sur $] - \infty; t]$ peut s'effectuer sur \mathbb{R}). La réponse d'un milieu isotrope à une histoire de contrainte s'écrit donc sous la forme élégante suivante [éq. (1.36), (1.39) et (1.40)] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = J \star [(1 + \nu)\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nu \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{G}]. \quad (1.42)$$

De la même manière, la réponse en relaxation d'un milieu isotrope à une histoire de sollicitation en déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \lambda \star \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{G} + 2\mu \star \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.43)$$

Cette dernière équation met particulièrement en relief la généralité du formalisme présenté dans cette section. En effet, nous avons vu plus haut que les équations de l'élasticité linéaire étaient un cas particulier des équations générales de la réponse d'un matériau viscoélastique soumis à une sollicitation quelconque : il s'agit du cas extrême « situé » à la date courante t pour les fonctions de retard ou de relaxation. À l'inverse, l'équation (1.43), prise pour un temps de relaxation infini (date $t \rightarrow \infty$), correspond à un comportement purement visqueux (irréversible) : c'est le comportement fluide, ici dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements. On comprend dès lors que, dans ce cas précis, les coefficients constants $K(\infty) := \lambda(\infty) + 2\mu(\infty)/3$ et $\mu(\infty)$ s'identifient respectivement aux viscosités de volume (ζ) et de cisaillement (η) du fluide – introduits plus loin – et que, par conséquent, les produits de convolution dans l'équation (1.43) se réduisent à des produits simples.

Pour ce qui est des fluides de type manteaux planétaires (cf. 1.3.2), il n'est plus pertinent de travailler en petits déplacements. Ainsi émergent les deux descriptions possibles de la déformation (lagrangienne et eulérienne), alors qu'elles restent parfaitement équivalentes dans l'hypothèse des petits déplacements. Au tenseur des taux de déformation linéarisé $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ doit donc être substitué le tenseur des taux de (grande) déformation¹⁷ \mathbf{D} . Cependant, seule la partie déviatorique $\boldsymbol{\tau}$ du tenseur des contraintes contribue à la déformation, sa partie sphérique étant simplement un terme de pression hydrostatique isotrope. On retrouve ainsi l'équation pour un fluide newtonien isotrope¹⁸. Celle-ci correspond donc à un cas particulier du formalisme présenté ici,

17. Parfois appelé tenseur des vitesses de déformation pour un fluide...

18. cf. plus loin, éq. (1.95)

et découlerait directement de l'équation (1.43) si cette dernière avait été dérivée sans l'hypothèse des petits déplacements.

1.2.3 Sollicitation périodique et dissipation d'énergie

Nous serons amenés à étudier, au cours de cette thèse, le comportement d'un milieu viscoélastique – une planète ou un satellite – soumis à des sollicitations périodiques : les contraintes de marée. Il importe donc d'examiner la réponse d'un tel milieu. L'équation (1.43) revêt toute son importance pour ce problème.

En effet, appliquons-lui la transformation de LAPLACE (bilatérale), définie par :

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto \mathcal{L}_f(s) \equiv \check{f}(s) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.44)$$

avec s la variable de LAPLACE. Dans toute la suite, on prendra $s = i\omega$ (ω étant une certaine fréquence et i l'unité imaginaire).

Notons que, dans ce cas, $\check{f}(s)$ s'identifiera à la transformée de FOURIER $\check{f}(\omega)$, suffisante dans notre cas. Nous ne nous intéresserons, en effet, qu'au régime harmonique établi et non à des aspects transitoires que permettrait de prendre en compte une variable plus générale de la forme $s = i\omega + q$ dans la transformation de LAPLACE. Notons enfin le recours, dans certains ouvrages, à la transformée de LAPLACE-CARSON, $\check{\check{f}}(s)$: il s'agit d'une variante pour laquelle $f(t)$ doit être remplacée par $\dot{f}(t)$ dans le dernier membre de l'équation (1.44) ; son expression est donc simplement, pour des conditions aux limites nulles en temps, $\check{\check{f}}(s) = s \mathcal{L}_f(s)$.

Ainsi, la transformée de LAPLACE-CARSON de l'équation (1.43) devient :

$$\check{\check{\sigma}}(s) = \check{\check{\lambda}}(s) \operatorname{tr} [\check{\check{\epsilon}}(s)] \mathbf{G} + 2\check{\check{\mu}}(s)\check{\check{\epsilon}}(s). \quad (1.45)$$

L'avantage net de travailler dans l'espace des fréquences (ω est, dans ce cas, la fréquence angulaire – ou pulsation – de la sollicitation) est ainsi visible : le problème viscoélastique linéaire en petits déplacements peut toujours¹⁹ être ramené à un problème élastique équivalent (principe de correspondance ; Biot, 1954), au moyen de paramètres de LAMÉ effectifs (complexes), $\check{\check{\lambda}}$ et $\check{\check{\mu}}$. L'équation (1.45) est, en effet, de type loi de HOOKE (isotrope). Nous verrons plus loin (chap. 4) que la partie réelle de ces coefficients contient l'information liée à la composante purement élastique de la réponse du milieu, alors que la partie imaginaire concerne la déformation purement visqueuse (donc dissipative).

Considérons à présent une sollicitation périodique appliquée au milieu, par exemple une contrainte, au sein d'une planète, résultant du potentiel de marée d'un satellite en orbite. Par soucis de clarté, nous poursuivrons le raisonnement dans le cas d'un

19. Aucune hypothèse de modèle rhéologique viscoélastique n'a été faite pour l'instant...

problème unidimensionnel (fig. 1.10). Ainsi, dans le cadre d'une expérience de sollicitation harmonique sur un solide 1D, initiée à un instant $t_0 = 0$ (ce choix permet d'alléger les écritures), l'histoire de la contrainte peut s'écrire :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t) H(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.46)$$

$$= \sigma_0 \operatorname{Im} [e^{i\omega t}] H(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.47)$$

où σ_0 est l'amplitude de la sollicitation ; ω est la pulsation de celle-ci, suffisamment faible pour que les effets inertiels puissent être considérés comme négligeables.

Notons dès à présent que le choix d'un sinus est presque arbitraire. Il aurait tout aussi bien pu s'agir d'un cosinus ; le raisonnement qui suit n'aurait été changé en aucun point. Toutefois, le sinus permet de se retrouver dans une configuration telle que, à la date t_0 , la sollicitation soit nulle ; celle-ci est appliquée graduellement, contrairement au cas des expériences de retard et de relaxation présentées plus haut.

Dans le cas d'un matériau non vieillissant, de la même manière que pour l'équation (1.38), on montre (p. ex. Salençon, 2009) que l'équation de BOLTZMANN peut s'écrire comme la convolution entre l'histoire de la contrainte et la dérivée temporelle de la fonction de fluage soit, ici (cas 1D) :

$$\varepsilon(t) = \dot{J}(t) \star \sigma(t). \quad (1.48)$$

Au moyen de l'équation (1.47) et en remarquant que l'on a $H(t-\tau) = 1 - H(\tau-t)$, la déformation peut s'écrire²⁰, pour $t \geq 0$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \operatorname{Im} \left[e^{i\omega t} \int_{\mathbb{R}} \dot{J}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] - \sigma_0 \operatorname{Im} \left[e^{i\omega t} \int_t^{\infty} \dot{J}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right], \quad (1.49)$$

soit

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \operatorname{Im} [e^{i\omega t} i\omega \check{J}(i\omega)] H(t) - \sigma_0 \operatorname{Im} \left[e^{i\omega t} \int_t^{\infty} \dot{J}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] H(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.50)$$

L'équation précédente fait intervenir deux termes particuliers dans le second membre. Le premier est la partie harmonique pure de la réponse. Le second est un terme transitoire qui tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini ; à partir de ce moment, il y a accommodation et la réponse en déformation a atteint un régime harmonique asymptotique. La déformation s'écrit alors simplement :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \operatorname{Im} [e^{i\omega t} i\omega \check{J}(i\omega)]. \quad (1.51)$$

20. τ est la variable d'intégration utilisée dans la convolution.

On définit souvent la complaisance dynamique – inverse du module complexe – de la manière suivante :

$$\check{J}(i\omega) := i\omega\check{J}(i\omega), \quad (1.52)$$

$$= J_1(\omega) - iJ_2(\omega), \quad (1.53)$$

$$= |\check{J}(i\omega)| e^{i\delta(\omega)}, \quad (1.54)$$

avec $\delta(\omega) := \arg[\check{J}(i\omega)]$ un certain angle.

$\check{J}(i\omega)$ s'identifie donc à la transformée de LAPLACE-CARSON de la fonction de fluage. Ainsi, en écrivant explicitement celle-là, il vient :

$$J_1(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \dot{J}(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad J_2(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \dot{J}(t) \sin(\omega t) dt. \quad (1.55)$$

On peut montrer que ces deux intégrales sont positives. Par conséquent, l'angle $\delta(\omega)$ est négatif, et l'on a :

$$\delta(\omega) = \arctan\left(-\frac{J_2(\omega)}{J_1(\omega)}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]. \quad (1.56)$$

Compte tenu de ce qui précède, l'équation (1.51) peut finalement s'écrire :

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\sigma_0 |\check{J}(i\omega)|}_{\varepsilon_0} \sin[\omega t + \delta(\omega)]. \quad (1.57)$$

Nous constatons que la réponse en déformation à l'excitation par une contrainte harmonique est naturellement harmonique elle-même (hypothèse de milieu boltzmannien) et d'amplitude ε_0 directement reliée à l'amplitude de la déformation par la complaisance dynamique. En outre, l'angle δ s'identifie à un déphasage de la réponse par rapport à l'excitation. Compte tenu du signe de celui-ci [éq. (1.56)], la déformation présente un certain retard de phase par rapport à la contrainte appliquée ; celui-ci se traduit par un délai temporel $\Delta t(\omega)$:

$$\Delta t(\omega) := -\frac{\delta(\omega)}{\omega}. \quad (1.58)$$

Le déphasage traduit l'irréversibilité d'une partie de la déformation : une partie de l'énergie de déformation est convertie sous forme d'énergie interne par friction visqueuse, principalement sous forme de chaleur, mais pas exclusivement. Des changements de phase et/ou des modifications des propriétés mécaniques (p. ex. fatigue du matériau) peuvent également avoir lieu. C'est ce mécanisme de friction visqueuse qui sera invoqué pour la chaleur de marée dans cette thèse (cf. chap. 4).

Dissipation d'énergie

La quantité d'énergie ΔE dissipée au cours d'un cycle de forçage s'écrit :

$$\Delta E := \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt. \quad (1.59)$$

Grâce aux équations (1.46)²¹ et (1.57), on obtient :

$$\Delta E(\omega) = -\pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \delta(\omega). \quad (1.60)$$

On constate que cette dissipation d'énergie est directement proportionnelle au sinus du déphasage observé. Pour évaluer la dissipation moyenne d'énergie sur un cycle de forçage (de période $\tau := 2\pi/\omega$),

$$\langle \dot{E} \rangle := \Delta E / \tau, \quad (1.61)$$

on utilise fréquemment la relation empirique ci-dessous, valable pour un comportement linéaire :

$$\langle \dot{E}(\omega) \rangle \equiv \omega Q^{-1}(\omega) E_{\max}(\omega), \quad (1.62)$$

où la quantité Q^{-1} est appelée facteur de dissipation (inverse du facteur de qualité) ; E_{\max} est le maximum d'énergie atteint au cours du cycle de forçage.

Compte tenu de la définition (1.61), on pose donc la définition suivante :

$$Q^{-1}(\omega) := \frac{\Delta E(\omega)}{2\pi E_{\max}(\omega)}. \quad (1.63)$$

Le facteur de dissipation généralement utilisé est celui pour lequel la quantité E_{\max} correspond au maximum d'énergie élastique de déformation atteint pendant le cycle de forçage : celle-ci est emmagasinée pendant le premier quart de cycle et restituée pendant le suivant. L'expression résultante est alors

$$Q^{-1}(\omega) = -\sin \delta(\omega), \quad (1.64)$$

$$= \frac{J_2(\omega)}{|\check{J}(i\omega)|}. \quad (1.65)$$

Si la dissipation d'énergie reste modérée par rapport à l'énergie de déformation totale mise en jeu – ce qui constitue le cadre de la présente étude, on a $J_2 \ll J_1$. Ainsi, pour de faibles déphasages (typiquement $|\delta(\omega)| \leq 10^\circ$), on aboutit à une relation classique dans la littérature expérimentale (p. ex. [Karato, 2008](#)) :

21. En régime asymptotique, on a $H(t) \equiv 1$.

$$Q^{-1}(\omega) \approx -\tan \delta(\omega), \quad (1.66)$$

$$\approx \frac{J_2(\omega)}{J_1(\omega)}. \quad (1.67)$$

Puisque ces deux relations sont asymptotiquement équivalentes à faible déphasage, il a été choisi, par simplicité, d'utiliser la première dans ce travail pour l'application au problème des marées [cf. chap. 5, p. ex. éq. (5.16)]. C'est, en outre, le sinus du déphasage du bourrelet de marée qui est utilisé dans l'approche orbitale de [Kaula \(1964\)](#), adoptée pour ce travail.

Cependant, le facteur de qualité n'est qu'un moyen indirect d'accéder à l'énergie dissipée. Dans ce travail, il n'est utile que pour estimer l'effet de la dissipation de marée dans le corps primaire sur l'orbite du corps secondaire. Pour calculer la dissipation d'énergie au sein de ce dernier, une méthode plus précise et explicite – couplée au calcul de convection thermique dans le manteau silicaté – est mise en place au chapitre 4. Elle permet d'évaluer directement et localement la puissance moyenne dissipée au cours d'un cycle orbital (c.-à-d. $\langle \dot{E}(\omega) \rangle$). Les transferts de chaleur au sein du corps central ne sont pas considérés, que celui-ci soit une planète tellurique, comme dans le cas du système Terre-Lune (chap. 5), une étoile (chap. 4 : le corps secondaire est une planète de type Terre) ou encore une planète géante. Une formulation paramétrée du type de l'équation (1.64) est donc suffisante dans ce cas.

1.2.4 Modèles rhéologiques viscoélastiques

Achevons cette section sur la rhéologie d'un corps en petits déplacements en présentant quelques modèles simples (1D), classiques mais nécessaires pour appliquer le formalisme de la viscoélasticité linéaire.

Le modèle le plus simple est celui d'un comportement élastique pur, qu'on représente souvent par un ressort (fig. 1.11).

Il se caractérise uniquement par une rigidité μ , intervenant dans une loi constitutive qui traduit la proportionnalité de la déformation à la contrainte appliquée :

$$\sigma = \mu \varepsilon. \quad (1.68)$$

Étant donnée la relation (1.48), la fonction de retard²² est la suivante :

$$J^{\text{el}}(t) = \frac{1}{\mu} H(t). \quad (1.69)$$

22. Comme précédemment, l'instant initial t_0 d'application de la contrainte est pris à 0.

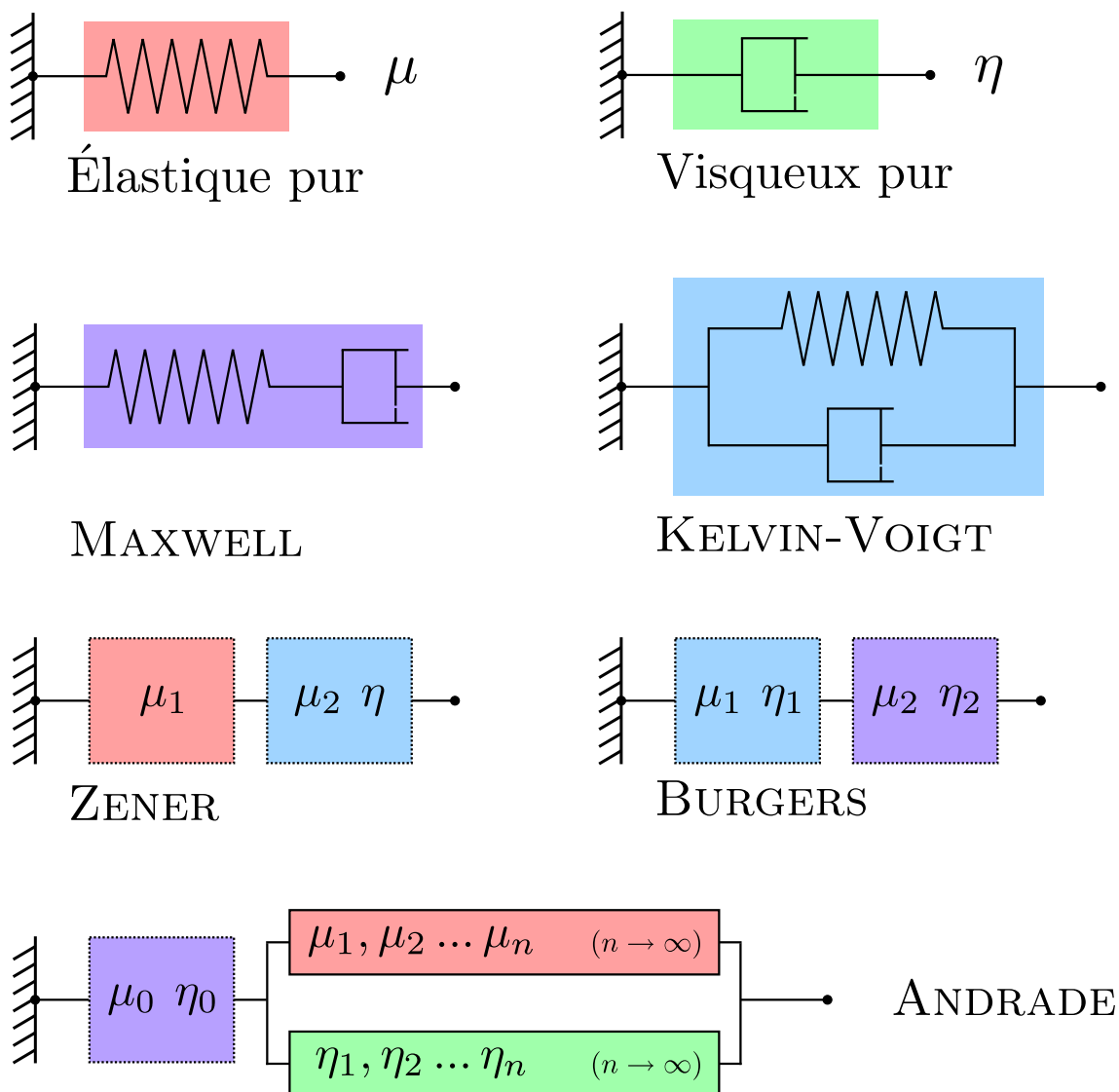


FIGURE 1.11 – Exemples de modèles viscoélastiques 1D. La diversité de ceux-ci est obtenue en assemblant ressorts (modèle élastique pur) et pistons (modèle visqueux pur) de différentes manières (en série ou en parallèle). Les couleurs permettent d'identifier les unités fondamentales qui composent les modèles viscoélastiques plus complexes. Voir le texte pour le détail des notations.

Son image par la transformation de LAPLACE-CARSON permet d'obtenir la complaisance dynamique, qui se traduit par les deux termes suivants [éq. (1.53)] :

$$J_1^{\text{el}}(\omega) = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad J_2^{\text{el}}(\omega) = 0. \quad (1.70)$$

Le facteur Q^{-1} résultant [éq. (1.65) ou (1.67)], est naturellement nul.

Le second cas trivial correspond au comportement opposé, c'est-à-dire visqueux pur, caractérisé par une viscosité η et représenté analogiquement par un amortisseur (fig. 1.11). Dans ce cas, c'est le taux de déformation qui est proportionnel à la contrainte :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (1.71)$$

La fonction de fluage et les coefficients de la complaisance dynamique sont, respectivement :

$$J^{\text{visq}}(t) = \frac{t}{\eta} H(t), \quad (1.72)$$

$$J_1^{\text{visq}}(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad J_2^{\text{visq}}(\omega) = \frac{1}{\eta\omega}. \quad (1.73)$$

Le facteur de qualité est cette fois-ci maximal et égal à l'unité [éq. (1.65)]; la définition (1.67) n'est plus adaptée ici].

À partir de ces deux pôles extrêmes de modèles, un grand nombre de solides viscoélastiques peut être établi, par simple assemblage en série ou en parallèle. Le modèle de MAXWELL correspond ainsi à la première des deux possibilités (fig. 1.11) ; sa loi constitutive s'obtient ainsi en sommant les taux de déformation – obtenus à partir des équations (1.68) et (1.71) – de chacun des deux composants :

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_M} \sigma = \mu \dot{\varepsilon}, \quad (1.74)$$

avec $\tau_M := \eta/\mu$ le temps caractéristique de la relaxation, appelé temps de MAXWELL. Pour se donner une idée du sens physique de ce dernier, on peut recourir à la fonction de relaxation R^M [éq. (1.34) ; fonction scalaire $R(t)$, ici, telle que $\sigma(t) = R(t) \star \varepsilon(t)$] :

$$R^M(t) = \mu e^{-\frac{t}{\tau_M}} H(t). \quad (1.75)$$

τ_M est donc la durée caractéristique de décroissance de la contrainte (relaxation) suite à une sollicitation en déformation d'un solide de MAXWELL.

La fonction de retard et la complaisance dynamique s'obtiennent simplement par sommation²³ (montage en série) de celles des deux solides élémentaires présentés en premier :

$$J^M(t) = J^{\text{él}}(t) + J^{\text{visq}}(t), \quad (1.76)$$

$$= \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{t}{\tau_M} \right) H(t); \quad (1.77)$$

$$J_1^M(\omega) = J_1^{\text{él}}(\omega) + J_1^{\text{visq}}(\omega) = \frac{1}{\mu}, \quad (1.78)$$

$$J_2^M(\omega) = J_2^{\text{él}}(\omega) + J_2^{\text{visq}}(\omega) = \frac{1}{\omega\eta}. \quad (1.79)$$

Dans le cas du modèle de MAXWELL, le facteur de dissipation est caractérisé par une dépendance inverse en fréquence. On a ainsi [éq. (1.65)] :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_M^2}}, \quad (1.80)$$

soit, pour de très petits déphasages ou, de manière équivalente ici, pour une fréquence de sollicitation très élevée [éq. (1.67); $J_2^M \ll J_1^M \Rightarrow \omega \gg \tau_M^{-1}$] :

$$Q^{-1}(\omega) \approx \frac{1}{\omega\tau_M}. \quad (1.81)$$

En raison de sa simplicité de mise en œuvre et du faible nombre de paramètres caractéristiques qu'il requiert, le solide de MAXWELL est utilisé dans cette étude pour modéliser la réponse de marée du manteau d'une planète de type Terre (cf. chap. 4). Cependant, il entraîne une sous-estimation importante de la dissipation pour les fréquences très grandes devant celle de MAXWELL (τ_M^{-1} ; p. ex. [Sotin *et al.*, 2009](#)). Or, dans l'étude présentée au chapitre 4, les paramètres choisis impliquent une valeur de l'ordre de 800 jours pour τ_M , alors que la période de sollicitation n'est que de 20 à 30 jours. La mise à l'échelle de [Běhouňková *et al.* \(2010, 2011\)](#)²⁴, basée sur les valeurs terrestres du facteur de qualité, permet de régler partiellement ce problème : un ajustement (artificiel) la viscosité du modèle de MAXWELL est réalisé, de telle sorte que l'on obtienne des valeurs de dissipation cohérentes avec celles que l'on estime sur Terre. Cette technique a été employée pour ce travail (cf. chap. 4).

23. Notons que l'on peut aussi – notamment pour des cas plus complexes – tirer profit du fait que J est l'élément inverse de R vis-à-vis de la convolution ; ceci s'exprime, par exemple, par la relation $\check{J}(i\omega)\check{R}(i\omega) = 1$.

24. cf. plus loin [éq. (4.71)]

Le modèle de MAXWELL présente toutefois un inconvénient majeur : il se caractérise par un découplage des déformations visqueuse et élastique. Nous allons survoler quelques modèles rhéologiques plus complexes qui peuvent être proposés pour pallier ce problème. Le premier est un montage aussi simple que celui de MAXWELL, mais en parallèle (couplage des déformations visqueuse et élastique) ; il s'agit du solide de KELVIN-VOIGT (fig. 1.11). La fonction de retard et la complaisance dynamique s'écrivent dans ce cas²⁵ :

$$J^{K-V}(t) = \frac{1}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_M}}\right) H(t) \quad \text{et} \quad \check{J}^{K-V}(i\omega) = \frac{1}{\mu} \frac{1 - i\omega\tau_M}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (1.82)$$

Le facteur de dissipation résultant possède une dépendance en fréquence inverse de celle du modèle de MAXWELL ; son expression est ainsi obtenue en substituant $(\omega\tau_M)^{-1}$ à $\omega\tau_M$ dans les équations (1.80) et (1.81). Le solide de KELVIN-VOIGT recèle toutefois deux inconvénients plutôt « indésirables » pour un matériau géophysique : il ne présente aucun comportement instantané et produit un effet d'élasticité retardé.

L'étape naturelle suivante consiste donc en la connexion d'un modèle purement élastique en série avec ce solide : ceci débouche sur le modèle de ZENER (fig. 1.11), appelé solide de KELVIN-VOIGT à élasticité instantanée par certains auteurs²⁶. Les fonctions J et \check{J} d'un tel système sont donc obtenues en sommant celles du solide de KELVIN-VOIGT [éq. (1.82), avec $\mu \equiv \mu_2$ et $\tau_M \equiv \tau_{M_1}$ et éq. (1.69)-(1.70) avec $\mu \equiv \mu_1$; cf. fig. 1.11 pour la signification des indices] et du ressort.

L'examen de la fonction de ce solide de relaxation rend compte, cependant, d'un fait important : il n'y a plus, à long terme ($t \rightarrow \infty$), de comportement visqueux. Pour combler ce manque, il faut adjoindre un amortisseur, caractérisé par une viscosité à long terme μ_2 : c'est le modèle de BURGERS (fig. 1.11). Celui-ci revient donc à la mise en série des solides de KELVIN-VOIGT et de MAXWELL. La fonction de retard – *a fortiori* la complaisance dynamique – s'obtient donc aisément par sommation de celles de ces deux modèles [éq. (1.77) à (1.79), avec $\mu \equiv \mu_2$ et $\tau_M \equiv \tau_{M_2} := \eta_2/\mu_2$ (viscosité η_2 à long terme) ; éq. (1.82), avec $\mu \equiv \mu_1$ et $\tau_M \equiv \tau_{M_1} := \eta_1/\mu_1$ (viscosité η_1 à court terme)].

Certains modèles rhéologiques sont caractérisés par un grand nombre des solides fondamentaux présentés ci-dessus, voire par une distribution continue de ceux-ci (p. ex. le modèle de BURGERS généralisé de [Faul et Jackson, 2005](#)), permettant ainsi de prendre en compte divers mécanismes de relaxation.

25. Ici, ce sont les fonctions de relaxation du ressort et de l'amortisseur qui doivent être additionnées (montage en parallèle).

26. L'appellation « modèle de ZENER » est alors réservée au montage *en parallèle* d'un ressort et d'un solide de MAXWELL. Ces deux versions sont les deux solides linéaires standards, bien connus des mécaniciens.

Citons, pour terminer, un modèle rhéologique particulièrement intéressant pour le problème des marées : celui d'ANDRADE (Andrade, 1910) ; il est utilisé au chapitre 5 pour modéliser la réponse viscoélastique d'un corps de type Lune. Ce solide peut être vu comme un solide de MAXWELL auquel on adjoint en série le montage (en parallèle) d'une infinité de ressorts et de pistons (fig. 1.11). Ce terme additionnel, dont la description est purement empirique, permet de décrire la réponse transitoire non-linéaire du corps, via simplement deux paramètres expérimentaux : α et β . Le modèle d'ANDRADE rend compte d'un grand nombre de données expérimentales sur divers métaux et minéraux (p. ex. Jackson, 1993). Sa fonction de fluage est relativement simple, puisque la description – *a priori* complexe – du spectre de temps de relaxation n'est pas requise ; celle-ci est « incluse » dans les paramètres α et β et l'on a :

$$J^A(t) = J^M(t) + \beta t^\alpha H(t). \quad (1.83)$$

Le paramètre α voit sa valeur varier entre 0,1 et 0,5 [p. ex. $\alpha = 1/3$ chez Jackson (1993)] pour des roches riches en olivine. Il caractérise la durée de la phase transitoire de la première partie (fluage primaire) de la réponse du matériau. β est lié à l'intensité de la friction anélastique. La complaisance dynamique résultante peut s'écrire :

$$\check{J}^A(i\omega) = \frac{1}{\mu_0} \left[1 - \frac{i}{\omega\tau_{M_0}} + \frac{i^{-\alpha}}{\omega^\alpha\tau_A^\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \right], \quad (1.84)$$

avec τ_A un temps caractéristique anélastique (temps d'ANDRADE ; Efroimsky, 2012), tel que $\beta = (\mu_0\tau_A^\alpha)^{-1}$, et la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma : z \mapsto \Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \forall z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) > 0. \quad (1.85)$$

Pour l'étude du chapitre 5, une version simplifiée de ce modèle est utilisée. Elle ne nécessite plus qu'un seul paramètre empirique : α . En effet, Castillo-Rogez *et al.* (2011) ont remarqué que, pour diverses données expérimentales sur l'olivine, une corrélation est approximativement vérifiée entre α et β :

$$\beta \approx \frac{1}{\mu_0\tau_{M_0}^\alpha}, \quad \text{soit} \quad \tau_A \approx \tau_{M_0}. \quad (1.86)$$

La complaisance dynamique prend alors la forme finale ci-dessous :

$$\check{J}^A(i\omega) \approx \frac{1}{\mu_0} \left[1 + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(i\omega\tau_{M_0})^\alpha} \right] - \frac{i}{\omega\eta_0}. \quad (1.87)$$

La déformation viscoélastique de marée d'un corps en orbite est responsable, on l'a vu, d'une production de chaleur, par friction visqueuse. Afin de décrire correctement les transferts thermiques dans le manteau du corps, ce terme de chauffage de marée doit être inclus dans l'équation de la chaleur à résoudre. Le choix de celle-ci, et plus généralement de la description de la convection thermique dans le manteau, repose sur un certain nombre d'hypothèses et d'approximations physiques. C'est l'objet de la partie qui suit, qui vient clore ce chapitre.

1.3 Transferts thermiques et convection

1.3.1 Les manteaux planétaires : des fluides géologiques particuliers

Les manteaux des planètes telluriques et des satellites naturels peuvent être considérés comme des fluides à l'échelle des temps géologiques. Ils sont, en outre, soumis à diverses sources de chaleur interne (radioactivité, dissipation de marée, etc.) et sujets à un écart de température significatif entre la base (limite manteau-noyau) et la surface de la planète (atmosphère ou vide spatial).

Plaçons-nous dans un cas simple sans chauffage interne. En tant que fluide, le manteau va devoir transférer la chaleur de sa base vers la surface. Le processus immédiat pour réaliser ce transfert est la conduction thermique²⁷, c'est-à-dire la diffusion de chaleur de proche en proche. Mathématiquement, la propagation par diffusion thermique est toujours une solution – statique (sans écoulement) – de l'équation de la chaleur. Cependant, les roches du manteau (péridotites) sont de bien piètres conducteurs thermiques. La théorie des transferts de chaleur dans un milieu continu – ici le manteau – nous montre que la convection thermique est un processus bien plus efficace – dans la plus grande partie du milieu – pour transférer de la chaleur. Les exceptions se trouvent au niveau des couches limites thermiques, dans lesquelles la conduction de chaleur est le processus dominant. Par exemple, la couche limite thermique froide d'une planète peut être assimilée à la lithosphère (thermique) de celle-ci. Cette « préférence » pour la convection thermique correspond physiquement à un nombre de RAYLEIGH élevé du fluide « manteau », du moins supérieur à une certaine valeur critique.

Notons enfin que la plus grosse différence entre un fluide classique et un manteau planétaire – outre l'inertie quasi-nulle de ce dernier – réside sans doute dans leurs lois de viscosité. Cette grandeur a la particularité d'être extrêmement variable, au sein des roches du manteau, avec diverses quantités, en premier lieu la température

27. Les processus radiatifs sont probablement négligeables dans ce cas (manteau opaque).

(cf. 1.3.4). Ceci rend la dynamique²⁸ des intérieurs planétaires assez différente de celle d'un fluide classique. L'idée de convection thermique dans le manteau terrestre remonte au début du vingtième siècle; elle est généralement attribuée à HOLMES (1931). Ce dernier proposa un mécanisme de convection sous les continents en raison des sources de chaleur générées par l'abondance d'éléments radioactifs²⁹, ceci quelques temps après la publication de la théorie – alors très controversée – de la dérive des continents de WEGENER (1912).

Pour plus de détails sur l'histoire de la compréhension du phénomène de convection thermique pour le manteau, en lien avec la dynamique globale de la Terre et, plus tardivement, avec la tectonique des plaques, mais aussi sur l'état actuel des connaissances, le lecteur consultera par exemple le chapitre de Bercovici (2007, plus généralement le volume 7 du *Treatise on Geophysics*) ainsi que l'ouvrage majeur de Deparis et Legros (2000).

Nous n'entrerons pas plus dans les détails sur la description phénoménologique de la convection thermique. La fin du chapitre 3 sera l'occasion de rappeler quelques traits de ce phénomène, à travers une série d'expériences numériques classiques qui ont permis la validation de l'outil. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons nous concentrer essentiellement sur la description théorique (mécanique des fluides) des transferts de chaleur.

1.3.2 Principes de la convection thermique

Cette sous-section est une synthèse en partie alimentée par les ouvrages de Schubert *et al.* (2001) et de Garrigues (2007).

La mécanique des milieux continus repose sur quatre principes fondamentaux de la physique classique : le *principe de conservation de la masse*, le *principe fondamental de la mécanique* et les *premier et deuxième principes de la thermodynamique*. Appliqués à un milieu continu – en particulier à un fluide – les trois premiers permettent d'obtenir les équations fondamentales que sont les équations de conservation de la masse, de bilan de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie. Nous donnerons ici la forme locale de ces équations. Ces équations différentielles scalaires ou vectorielles, accompagnées d'une loi de comportement du milieu, permettent de décrire complètement le comportement thermo-mécanique de celui-ci. Les différents champs de grandeur utiles (p. ex. masse volumique, vitesse) doivent être compris ici dans leur description eulérienne.

28. Les mécaniciens des fluides parleraient plutôt de « quasi-statique », en raison de la très faible importance des termes inertiels dans les équations ($Pr \rightarrow \infty$; voir plus loin).

29. Rappelons que la découverte de la radioactivité naturelle était alors relativement récente (BECQUEREL, 1896). Son impact fut conséquent en géophysique, notamment pour ce qui est de l'âge de la Terre...

Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse pour un milieu continu, sous sa forme locale, conduit à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.88)$$

où ρ est la masse volumique du milieu, \mathbf{V} son champ de vitesse et t le temps.

L'emploi de la dérivée particulaire, définie par $\frac{D\bullet}{Dt} := \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \bullet$, permet de réécrire l'équation (1.88) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (1.89)$$

Cette écriture montre que le taux de variation relative de masse volumique d'une particule du milieu³⁰ est entièrement lié à la divergence du champ de vitesse, c'est-à-dire au taux de dilatation volumique local. Autrement dit, la production de masse est nulle. Ainsi, pour un milieu incompressible ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$), l'équation de continuité devient très simple : $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Les équations (1.88) et (1.89) sont valables à chaque instant et en tout point d'un milieu matériel continu, quel que soit le système de coordonnées choisi (orthogonal ou non).

Bilan de quantité de mouvement

Le principe de « conservation » de la quantité de mouvement³¹ pour un milieu continu, sous sa forme locale, conduit à l'équation de mouvement :

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v, \quad (1.90)$$

avec \mathbf{a} , $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{f}_v respectivement l'accélération, la contrainte et une force volumique d'action à distance. Cette équation est valable en tout point et à chaque instant d'un milieu matériel continu.

Or, $\boldsymbol{\sigma}$ est un champ tensoriel d'ordre 2. Il peut donc se décomposer, de manière unique, en une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph}(\boldsymbol{\sigma}) + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) := \underbrace{\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}}_{-P} \mathbf{G} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{G}}_{\boldsymbol{\tau}}, \quad (1.91)$$

30. c.-à-d. de masse constante

31. À l'inverse de la masse et de l'énergie (totale), la quantité de mouvement n'a aucune raison d'être conservée. On parlera donc plutôt de *bilan* de celle-ci, tout en étant conscient que l'appellation *conservation* est plus conventionnelle.

où P est la pression mécanique, $\boldsymbol{\tau}$ la partie déviatorique du tenseur des contraintes – encore appelée tenseur des contraintes visqueuses – et \mathbf{G} le tenseur métrique.

L'équation de mouvement devient alors :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_v. \quad (1.92)$$

Cependant, le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ peut s'exprimer en fonction du champ de vitesse. Pour cela, nous considérons désormais un cas particulier de milieux continus : les fluides visqueux et plus précisément les fluides de STOKES, dont la loi de comportement mécanique ne dépend que du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} . Ce dernier correspond à la partie symétrique du gradient du champ de vitesse :

$$\mathbf{D} := \text{sym}(\nabla \mathbf{V}) := \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T]. \quad (1.93)$$

Parmi les fluides de STOKES, les plus simples sont les fluides newtoniens. Ils se caractérisent par une loi de comportement linéaire entre la partie déviatorique du tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H} : \mathbf{D}, \quad (1.94)$$

\mathbf{H} étant le tenseur de viscosité³² (d'ordre 4).

Notons que, pour un fluide parfait – $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ négligeable devant les autres termes³³ – l'équation (1.92) est appelée équation d'EULER. La définition de \mathbf{D} montre que les contraintes visqueuses – et donc le transfert de quantité de mouvement – sont nulles pour un champ de vitesse uniforme (translation) ou correspondant à une rotation de solide. À l'instar de ce qui a été présenté plus haut pour les tenseurs de retard et de relaxation [cf. éq. (1.33) et (1.34)], on peut montrer que, de par la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ ³⁴ et de \mathbf{D} , \mathbf{H} possède la propriété de symétrie mineure. Celle-ci implique que, parmi les 81 composantes du tenseur de viscosité, 36 seulement sont indépendantes. De plus, l'existence d'une fonction de dissipation – définie plus loin – implique la propriété de symétrie majeure pour \mathbf{H} , ce qui réduit à 21 le nombre de composantes à connaître. Aux considérations précédentes est adjointe ici l'hypothèse d'isotropie³⁵ du fluide. La relation linéaire précédente se réduit finalement à l'équation simple ci-dessous :

32. cf., p. ex., Landau et Lifshitz (1970), éq. (34.3).

33. Pour un tel fluide, le terme $\nabla \cdot \mathbf{q}$, dans l'équation (1.99), doit aussi être négligeable (cf. plus loin).

34. et donc de $\boldsymbol{\tau}$; la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ n'est valable que pour un milieu continu non polarisé.

35. c.-à-d. $\mathbf{H} = \lambda \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \eta \mathbf{G} + \delta \mathbf{G}$, avec λ, η, δ des scalaires. \mathbf{G} et \mathbf{G} sont définis tels que, pour tout tenseur d'ordre 2 \mathbf{A} , on ait $\mathbf{G} : \mathbf{A} = \mathbf{A}$ et $\mathbf{G} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. La symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ implique l'égalité $\eta = \delta$ [cf. éq. (1.95)].

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + \lambda\text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{G}, \quad (1.95)$$

$$= 2\eta\text{dev}(\mathbf{D}) + \underbrace{\zeta\text{tr}(\mathbf{D})}_{\nabla\cdot\mathbf{V}}\mathbf{G}, \quad (1.96)$$

Il ne reste ainsi que deux coefficients scalaires caractéristiques : la viscosité dynamique η – ou viscosité de cisaillement – et le second coefficient de viscosité λ ; $\zeta := \lambda + \frac{2}{3}\eta$ est la viscosité de volume – parfois appelée viscosité de compression isotrope – et mesure la dissipation d'énergie par compression ou dilatation. L'équation (1.92) devient ainsi :

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \left\{ \eta[\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T] + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{G} \right\} + \mathbf{f}_v, \quad (1.97)$$

L'effet d'une viscosité anisotrope reste, actuellement, négligé dans les études de convection mantellique, principalement en raison de la complexité du traitement – physique comme numérique – que cela induit. Cependant, certains auteurs ont développé des approches simplifiées pour le traitement d'une viscosité anisotrope (p. ex. [Pouilloux *et al.*, 2007](#)) et ont suggéré des conséquences dynamiques potentiellement importantes au niveau de la zone de transition. L'étude récente de [Becker et Kawakatsu \(2011\)](#) montre toutefois que l'effet sur l'écoulement d'une viscosité anisotrope dans la lithosphère, dans un modèle de convection³⁶, resterait faible ou du moins inférieur à l'effet des variations isotropes de viscosité avec la température ou encore la taille de grain. Le débat reste cependant ouvert.

L'équation (1.97) est donc valable pour un fluide newtonien isotrope, quel que soit le système de coordonnées considéré. Notons que, dans le cas d'un fluide incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$), l'équation est dite de NAVIER-STOKES.

Toutefois, pour un grand nombre de fluides, la viscosité de volume est négligeable (approximation de STOKES). L'équation (1.96) nous montre que, pour ceux-là, la contrainte visqueuse n'est due qu'à la partie déviatorique du tenseur des taux de déformation, c'est-à-dire que la dissipation d'énergie par changement de volume est nulle. De plus, le milieu qui nous intéresse – le manteau solide d'une planète – ne subit que la pesanteur (\mathbf{g}) comme action à distance³⁷. Enfin, comme nous le verrons par la suite, cette étude sera restreinte à des systèmes de coordonnées munis d'une base orthonormée ; dans ce cas, le tenseur métrique \mathbf{G} se réduira au tenseur identité d'ordre 2 : \mathbf{I} . L'équation (1.97) se simplifie donc dans le cadre de cette étude :

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \left\{ \eta \left[\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T - \frac{2\nabla \cdot \mathbf{V}}{3}\mathbf{I} \right] \right\} + \rho\mathbf{g}. \quad (1.98)$$

36. Un modèle toutefois sans évolution thermique, pour l'instant...

37. La force d'inertie de CORIOLIS et la force de LORENTZ sont ici négligeables ; ce ne serait pas le cas pour la partie liquide du noyau métallique d'une planète.

Il faut noter ici que la viscosité dynamique η est une propriété du milieu pouvant dépendre de diverses grandeurs, en particulier de la température (cf. 1.3.4).

Conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un milieu continu conduit à l'équation de conservation de l'énergie. Sous sa forme locale, elle peut s'écrire par exemple :

$$\rho \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} + \frac{De_m}{Dt} \right) = \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho H, \quad (1.99)$$

avec e_m l'énergie interne massique, \mathbf{q} le flux – ou courant – de chaleur et H un terme source de chaleur³⁸ (puissance thermique massique). Dans le cas des manteaux planétaires silicatés, H correspond essentiellement à un chauffage H_{rad} produit par la désintégration d'éléments radioactifs (^{232}Th , ^{238}U , ^{40}K , etc.). Dans le cadre de cette étude, la chaleur de marée interviendra également (H_{mar}). Le chauffage interne total s'écrira donc :

$$H = H_{\text{rad}} + H_{\text{mar}}. \quad (1.100)$$

En tenant compte des équations (1.90) et (1.91), la forme (1.99) devient :

$$\rho \frac{De_m}{Dt} = -P \text{tr}(\mathbf{D}) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho H. \quad (1.101)$$

La somme des deux premiers termes du second membre de cette équation correspond, au signe près, à la puissance mécanique (volumique) des efforts intérieurs ; la seconde somme s'identifie, elle, à la puissance thermique échangée avec l'extérieur.

Sous l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, le premier principe permet de décomposer la variation d'énergie interne, au cours d'une transformation infinitésimale, en la somme de deux contributions : un travail réversible et une chaleur élémentaires, respectivement les formes différentielles δW_m et δQ_m (massiques). Pour un fluide, cette décomposition s'écrit :

$$de_m = \delta Q_m + \delta W_m = T ds_m - p dv_m, \quad (1.102)$$

38. La chaleur est ici reçue à l'intérieur du milieu mais est – d'un point de vue thermodynamique – d'origine extérieure au système. Si H est négatif, la chaleur est perdue dans l'extérieur (puits). Si l'énergie libérée par les éléments radioactifs peut, en fait, être considérée comme d'origine interne au système (éléments *inclus* dans le milieu et liés à celui-ci), il n'en va pas de même pour la chaleur de marée, dont la source excitatrice est d'origine extérieure au manteau.

avec T la température et $p := - \left(\frac{\partial e_m}{\partial v_m} \right)_{s_m}$ la pression thermodynamique³⁹ – constantes localement sous l’hypothèse d’équilibre local ; s_m et $v_m := 1/\rho$ sont respectivement l’entropie et le volume massiques.

La combinaison des équations (1.89) et (1.102) permet d’exprimer la dérivée particulaire de l’énergie interne à partir de celle de l’entropie :

$$\frac{De_m}{Dt} = T \frac{Ds_m}{Dt} - \frac{p}{\rho} \underbrace{\text{tr}(\mathbf{D})}_{\nabla \cdot \mathbf{v}}, \quad (1.103)$$

ce qui permet d’écrire l’équation (1.101) sous la forme du bilan d’entropie suivant, valable cette fois-ci pour les milieux continus particuliers que sont les fluides :

$$\rho \frac{Ds_m}{Dt} = \underbrace{-\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \rho \frac{H}{T}}_{\text{échange}} + \underbrace{\frac{1}{T} \left[(p - P) \text{tr}(\mathbf{D}) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \right]}_{\text{création}}. \quad (1.104)$$

Notons que H est un terme d’échange d’entropie *uniquement* du point de vue thermodynamique (cf. note 38, p. 52) : tout se passe, dans les faits, comme s’il y avait création d’entropie au sein du milieu étudié.

Sous cette forme, le bilan d’entropie se décompose en deux termes d’échange avec l’extérieur et trois termes de *création* ; le deuxième principe de la thermodynamique impose, en effet, la positivité de la quantité ci-dessous, appelée dissipation (puissance volumique) :

$$\Phi := \underbrace{\rho T \frac{\partial s_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho H}_{\Phi^{\text{int}}} - \underbrace{\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T}_{\Phi^{\text{th}} \geq 0} \geq 0. \quad (1.105)$$

Φ^{th} et Φ^{int} sont les dissipations thermique et intrinsèque. Le terme global de création de l’équation (1.104) est donc le taux de production massique d’entropie Φ/T .

Pour parvenir à une relation en température – plus classique – il suffit d’utiliser les relations usuelles de thermodynamique. Ainsi, il vient l’expression :

$$\frac{Ds_m}{Dt} = \underbrace{\left(\frac{\partial s_m}{\partial T} \right)_p}_{c_p/T} \frac{DT}{Dt} + \underbrace{\left(\frac{\partial s_m}{\partial p} \right)_T}_{-\alpha/\rho} \frac{Dp}{Dt}. \quad (1.106)$$

Les scalaires⁴⁰ c_p et α sont respectivement la capacité thermique massique et le coefficient de dilatation (thermique) isobares.

39. que l’on distinguera de la pression mécanique P [éq. (1.91)] pour un fluide général.

40. hypothèse de milieu isotrope

La définition de \mathbf{D} [cf. éq. (1.93)] implique l'égalité $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V}$. Grâce à la relation (1.106), l'équation (1.104) peut prendre la forme :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \underbrace{(p - P) \nabla \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V}}_{\Phi^{\text{int}}} + \rho H \quad (1.107)$$

Pour décrire le flux de chaleur, il est nécessaire de disposer d'une loi de comportement thermique pour le fluide. La plus couramment utilisée (et aussi la plus simple mathématiquement), dite loi de FOURIER, relie linéairement le courant de chaleur au gradient de température :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T, \quad (1.108)$$

\mathbf{K} étant le tenseur de conductivité thermique⁴¹ (d'ordre 2 et symétrique près de l'équilibre thermique). Pour un milieu isotrope ($\mathbf{K} = k\mathbf{G}$), l'équation précédente se réduit à :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (1.109)$$

où k est un scalaire appelé conductivité thermique.

À cette relation caractéristique sont adjointes les lois de comportement mécanique d'un fluide newtonien isotrope que sont d'une part l'équation (1.95) et, d'autre part, la relation ci-dessous entre pressions thermodynamique et mécanique :

$$p = P + \zeta \text{tr}(\mathbf{D}). \quad (1.110)$$

Cette équation met en évidence le fait que, pour un fluide newtonien dont la viscosité de volume (ζ) est nulle, ou du moins dont le mouvement est incompressible [$\text{tr}(\mathbf{D}) \equiv 0$], la pression thermodynamique p (équilibre local) et son homologue mécanique P (« composante » isotrope de la contrainte) sont confondues. Ainsi, via l'application de la décomposition (1.91) au tenseur \mathbf{D} et l'utilisation des équations (1.109) et (1.110), la dissipation s'écrit :

$$\Phi = \Phi^{\text{int}} + \Phi^{\text{th}} \geq 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Phi^{\text{int}} = 2\zeta [\text{tr}(\mathbf{D})]^2 + 2\eta \|\mathbf{dev}(\mathbf{D})\|^2, \\ \Phi^{\text{th}} = \frac{k}{T} |\nabla T|^2 \geq 0, \end{cases} \quad (1.111)$$

où $\|\bullet\| := \sqrt{\bullet : \bullet}$ est la norme euclidienne d'un tenseur d'ordre 2. Φ^{int} peut être appelée ici la dissipation visqueuse. Notons que, compte tenu de l'équation ci-dessus, le deuxième principe de la thermodynamique implique la positivité de ζ , η et k ⁴², car la dissipation doit aussi être positive, indépendamment de la conduction.

41. p. ex. Landau et Lifshitz (1970), éq. (33.1)

42. Pour un fluide anisotrope, c'est la positivité des valeurs propres de \mathbf{H} et de \mathbf{K} .

Finalement, dans l'approximation de STOKES ($\zeta = 0$), il vient la forme suivante pour l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi^{\text{int}} + \rho H, \quad (1.112)$$

avec l'expression ci-dessous pour la dissipation visqueuse :

$$\Phi^{\text{int}} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V} = 2\eta \|\mathbf{dev}(\mathbf{D})\|^2, \quad (1.113)$$

soit

$$\Phi^{\text{int}} = 2\eta \left\| \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{G} \right\|^2. \quad (1.114)$$

Équation d'état

La description des transferts de chaleur au sein du manteau d'une planète passe donc, pour cette étude, par la résolution des équations (1.88), (1.98) et (1.112). Désignons par n la dimension de l'espace affine considéré pour traiter le problème : elle vaut généralement 2 ou 3 dans les études de géodynamique, selon la possibilité qu'un milieu puisse être raisonnablement décrit avec seulement deux des dimensions d'espace ou bien que les trois doivent nécessairement être considérées. En tous les cas, les équations précédemment mentionnées constituent un système de $n+1$ équations⁴³ (une équation vectorielle et une scalaire) à $n+2$ inconnues ($\{V_i\}_{i=1,n}$, p et T ; V_i est la i -ème composante de la vitesse \mathbf{V}). Il est donc nécessaire de recourir à une relation supplémentaire pour avoir un système bien déterminé.

C'est là qu'intervient l'équation d'état du milieu. Son utilisation est justifiée par l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local. Nous ne tiendrons pas compte, ici, des transitions de phase et de la variation de composition du manteau : la masse volumique de ce dernier ne dépendra donc que de la pression et de la température. Ces dernières ne vont induire que de petites variations par rapport à une référence moyenne $\bar{\rho}$ (variable seulement avec la profondeur), ce qui justifie l'expression linéaire suivant pour ρ :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \approx \bar{\rho}(\bar{p}, \bar{T}) + (\bar{\chi}_T p' - \bar{\alpha} T') \bar{\rho}, \quad (1.115)$$

avec \bullet' l'écart par rapport à l'état de référence $\bar{\bullet}$, pour une variable donnée. χ_T est le coefficient de compressibilité isotherme, inverse du coefficient d'incompressibilité⁴⁴ correspondant, K_T .

43. L'équation de continuité (1.88) doit être comprise comme une condition à respecter pour l'équation de bilan de quantité de mouvement (1.98).

44. Parfois appelé module de compressibilité...

La simplification des équations passe classiquement par l'adimensionnement des différentes grandeurs par des échelles caractéristiques, à savoir un écart ΔT pour la température (de valeur T_s en surface du domaine), l'épaisseur b de la couche convective (manteau) pour les longueurs (l) et des valeurs caractéristiques \bullet_c des grandeurs thermo-mécaniques. Les variables adimensionnées sont notées $\tilde{\bullet}$:

$$\tilde{T} := \frac{T - T_s}{\Delta T}, \quad \tilde{l} := l/b \quad \text{et} \quad \tilde{\bullet} := \bullet / \bullet_c. \quad (1.116)$$

De là découle l'adimensionnement du temps, des vitesses, de la pression et du chauffage interne :

$$\tilde{t} := t/t_c^d, \quad \tilde{V} := \frac{t_c^d}{b} V, \quad \tilde{p} := \frac{t_c^d}{\eta_c} p \quad \text{et} \quad \tilde{H} := H/H_c, \quad (1.117)$$

avec $t_c^d := \frac{b^2}{\kappa_c}$ le temps caractéristique de la diffusion thermique et $H_c := c_p \Delta T / t_c^d$ l'échelle de chauffage caractéristique. $\kappa := \frac{k}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique .

L'équation d'état adimensionnée (1.115) s'écrit alors :

$$\tilde{\rho} = \tilde{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}'}{\tilde{\bar{\rho}}} \right) = \tilde{\bar{\rho}} \left(1 + \tilde{\chi}_T \tilde{p}' \text{Ma}^2 \text{Pr} - \tilde{\alpha} \tilde{T}' \epsilon \right). \quad (1.118)$$

L'écriture ci-dessus fait apparaître trois nombres sans dimension ; il s'agit du nombre de MACH Ma – rapport de la vitesse caractéristique à celle du son dans le milieu, du nombre de PRANDTL Pr – mesure du rapport des forces visqueuses aux forces inertielles – et d'un paramètre additionnel (ϵ ; il s'agit d'une dilatation thermique relative caractéristique). L'expression de ces quantités est donnée ci-dessous :

$$\text{Ma} := \frac{\kappa_c}{b} \sqrt{\chi_{T_c} \rho_c}, \quad \text{Pr} := \nu_c / \kappa_c \quad \text{et} \quad \epsilon := \alpha_c \Delta T, \quad (1.119)$$

avec $\nu = \eta / \rho$ la viscosité cinématique⁴⁵.

Une estimation des valeurs typiques de ces nombres pour le manteau terrestre donne : $\text{Pr} \approx 2,5 \cdot 10^{23}$, $\text{Ma} \approx 3,7 \cdot 10^{-17}$ et $\epsilon \approx 3,0 \cdot 10^{-2}$. Ainsi, comme on a $\text{Ma}^2 \text{Pr} \ll 1$ et $\epsilon \ll 1$, les variations de densité ρ' [éq. (1.118)] sont bien petites par rapport à l'état de référence $\bar{\rho}$, ce qui justifie le choix de l'équation d'état (1.115).

45. Elle peut être comprise comme une diffusivité de la quantité de mouvement

1.3.3 Approximations physiques

Approximation anélastique-liquide

Au paragraphe précédent, nous avons montré que l'on pouvait écrire, dans le cas d'un manteau planétaire :

$$\text{Ma}^2 \text{Pr} \ll 1 \quad \text{et} \quad \epsilon \ll 1. \quad (1.120)$$

Il s'agit, pour un fluide à nombre de PRANDTL infini, de l'approximation dite anélastique-liquide (Jarvis et McKenzie, 1980). Nous verrons qu'elle fournit une meilleure approche thermodynamique des équations de conservation que la traditionnelle approximation de BOUSSINESQ, encore largement utilisée pour les manteaux planétaires.

L'infinité supposée de Pr traduit le fait que, selon la définition de ce nombre [cf. équ. (1.119)], la quantité de mouvement est diffusée infiniment plus rapidement que la chaleur (c.-à-d. instantanément : les manteaux planétaires possèdent, en effet, très très peu d'inertie). Comme nous le verrons plus bas, la dynamique du système est alors entièrement contrôlée par les transferts de chaleur. Ma exprime, lui, le rapport entre la vitesse caractéristique et la vitesse des ondes acoustiques (élastiques) dans ce milieu : cette dernière est donc négligée ici, d'où l'appellation « approximation anélastique ». Ces ondes se propagent en effet sur des échelles de temps totalement différentes : elles n'agissent donc pas sur la dynamique du manteau. Enfin, ϵ exprime la variation relative de la masse volumique liée aux écarts de température caractéristiques ΔT du milieu : cette quantité est également faible.

Les équations de conservation (1.88), (1.98) et (1.112)⁴⁶ peuvent désormais être réécrites dans l'approximation anélastique-liquide à nombre de PRANDTL infini, sous forme adimensionnée [cf. équ. (1.116) et (1.117)]. On obtient :

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad (1.121)$$

$$\mathbf{0} = -\tilde{\nabla} \tilde{p}' + \tilde{\nabla} \cdot \left\{ \tilde{\eta} \left[\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}} + (\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{V}})^{\text{T}} - \frac{2\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}}{3} \mathbf{I} \right] \right\} + \left(\tilde{\chi}_T \frac{\text{Di } c_{p_c}}{\gamma_c c_{v_c}} \tilde{p}' - \tilde{\alpha} \text{Ra} \tilde{T}' \right) \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{g}}, \quad (1.122)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \frac{\text{D}\tilde{T}}{\text{D}t} = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{k} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{\Phi}^{\text{int}} \frac{\text{Di}}{\text{Ra}} + \tilde{\alpha} \tilde{\rho} \text{Di}(\tilde{T} + \text{T}_0) \tilde{\mathbf{g}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\rho} \frac{\text{Ra}_H}{\text{Ra}}, \quad (1.123)$$

46. L'approximation $p' \ll \bar{p}$ permet d'éliminer la pression dans l'équation de conservation de l'énergie.

avec $\gamma = \alpha/(\rho c_v \chi_T)$ le paramètre de GRÜNEISEN (de l'ordre de l'unité pour le manteau terrestre) – dans sa définition macroscopique, c_v la capacité thermique massique isochore et T_0 la température de surface sans dimension (cf. définition plus bas). L'équation (1.122) est dite de STOKES (effets inertiels négligeables devant les effets visqueux). Quatre nombres sans dimension caractérisent donc la convection thermique en approximation anélastique-liquide, pour une géométrie et un jeu de conditions aux limites donnés (et à viscosité constante) :

$$\text{Ra} := \frac{\alpha_c \rho_c g_c \Delta T b^3}{\kappa_c \eta_c}, \quad \text{Ra}_H := \tilde{H} \text{Ra}, \quad \text{Di} := \frac{\alpha_c g_c b}{c_p}, \quad \text{et} \quad T_0 := \frac{T_s}{\Delta T}. \quad (1.124)$$

Le premier est le nombre de RAYLEIGH ($\sim 10^7$ à 10^8 pour le manteau terrestre) : il représente le rapport de l'énergie interne fournie par la flottabilité d'origine thermique [terme moteur de la convection, proportionnel à Ra dans l'équation (1.122)] à l'énergie dissipée thermiquement et mécaniquement, respectivement via la diffusion thermique et la diffusion de quantité de mouvement (termes frein de la convection). Ainsi, Ra doit être supérieur à un seuil critique pour que la convection thermique puisse se développer. Ceci peut également se comprendre en définissant des temps caractéristiques visqueux t_c^v et convectif t_c^c ; Ra se met alors sous la forme :

$$\text{Ra} = \text{Gr Pr} = \frac{t_c^v t_c^d}{(t_c^c)^2} \quad \text{avec} \quad t_c^v := b^2/\nu_c \quad \text{et} \quad t_c^c := \left(\frac{b}{\alpha_c g_c \Delta T} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.125)$$

Gr est le nombre de GRASHOF, mesurant le rapport de la flottabilité à la friction visqueuse. Avec ces écritures, la condition nécessaire à la convection s'écrit donc : $Ra \gg 1$. Notons que certains auteurs (p. ex. Ricard, 2007) utilisent non pas le temps diffusif t_c^d mais la quantité $(t_c^c)^2/t_c^v$ basée sur la vitesse de STOKES – $bt_c^v/(t_c^c)^2$ – pour l'adimensionnement du temps. Il en résulte que l'équation (1.118) inclut le nombre de RAYLEIGH et que l'approximation anélastique-liquide requiert une contrainte plus forte sur la première des conditions (1.120) : $\text{RaMa}^2\text{Pr} \ll 1$. Elle reste cependant vérifiée pour les manteaux planétaires classiques. Le nombre de RAYLEIGH se trouve alors à des endroits différents dans les équations (1.122) et (1.123). Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la synthèse de Ricard (2007).

Ra_H est le nombre de RAYLEIGH de chauffage interne⁴⁷. Notons que si un flux de chaleur basal vertical de norme q_{base} est prescrit au lieu d'une température, l'adimensionnement de cette dernière se fait généralement par une échelle plus adaptée que le saut de température à travers la couche – *a priori* inconnu et non homogène dans ce cas : on choisira dans ce cas un écart ΔT_{q_H} correspondant à la variation de

47. Certains auteurs parlent du nombre de RAYLEIGH-ROBERTS.

température due à la puissance caractéristique associée au flux q_{base} et à un éventuel chauffage caractéristique (volumique) $H_c^v = \rho_c H_c$ appliqué durant le temps conducteur :

$$\Delta T_{qH} := \frac{q_{\text{base}}/b + H_c^v}{\rho_c c_{p_c}} t_c^d. \quad (1.126)$$

C'est ainsi que, dans le cas d'une configuration de RAYLEIGH-ROBERTS (H_c^v constant et $q_{\text{base}} = 0$), Ra doit être remplacé par Ra_H dans les équations (1.122) et (1.123). De plus, dans ce cas, il est peu judicieux de faire intervenir la valeur en surface T_s dans l'adimensionnement de la température (voir annexe A.1 à ce sujet).

Le troisième terme de l'équation (1.124) est le nombre de dissipation, Di ($\sim 0,25 - 0,8$ pour le manteau terrestre ; typiquement 0,5), correspondant au rapport de l'épaisseur de la couche convective à l'échelle de hauteur pour la température⁴⁸, h_T : $\text{Di} := b/h_T$. Son quotient par le paramètre de GRÜNEISEN caractéristique (γ_c) mesure le rapport de l'épaisseur de la couche convective à l'échelle de hauteur pour la masse volumique de référence et constitue un nouveau nombre sans dimension.

Ra est donc une mesure de la vigueur de la convection thermique, de même que Ra_H , qui inclut la contribution du chauffage interne à celle-ci. Ces deux nombres peuvent être compris comme les moteurs de la convection. En revanche, Di représente un frein à la convection : il « s'oppose » à Ra dans le terme de flottabilité de l'équation (1.122) mais aussi dans le terme de dissipation visqueuse de l'équation (1.123). Cette dernière est à l'origine de la transformation d'une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique. Di va également contrôler l'importance du « chauffage (ou refroidissement) adiabatique⁴⁹ » [troisième terme du second membre de l'équation (1.123)].

Notons enfin que, au sein de la flottabilité, dans l'approximation anélastique-liquide [troisième et dernier terme de l'équation (1.122)], le rapport des capacités thermiques est le plus souvent pris égal à l'unité. La formule de REECH,

$$\chi_T = \frac{c_p}{c_v} \chi_\varsigma, \quad (1.127)$$

avec χ_ς le coefficient de compressibilité isentropique⁵⁰, nous permet de mettre le terme de flottabilité, dans l'équation (1.122), sous la forme suivante (p. ex. Leng et

48. Par définition, il s'agit de la distance qu'une particule de fluide doit parcourir verticalement pour voir sa température varier de e – base du logarithme népérien – par compression ou décompression adiabatique.

49. Il s'agit en fait du travail (puissance volumique) de la flottabilité. La première dénomination – classique dans la littérature sur la convection thermique – sera cependant conservée pour la suite. Le terme « chauffage » est en lui-même trompeur, puisqu'il n'y a pas de création d'entropie ici . . .

50. Pour une composition homogène du manteau planétaire – ce qui sera le cas dans cette étude, χ_c s'identifie au coefficient de compressibilité adiabatique χ_a .

Zhong, 2008), plus commode :

$$\tilde{\mathbf{f}}_v = \left(\frac{\text{Co}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}_p} p' - \tilde{\rho} \text{Ra} \tilde{T}' \right) \tilde{\alpha}\tilde{\mathbf{g}}, \quad (1.128)$$

avec Co le nombre de compressibilité (p. ex. Tackley, 1996), défini par

$$\text{Co} := \text{Di}/\gamma_c, \quad (1.129)$$

ce qui correspond à une compressibilité caractéristique adimensionnée⁵¹ :

$$\text{Co} = \tilde{\chi}_{T_c} := \chi_{T_c} \rho_c g_c b, \quad (1.130)$$

$$= \text{Ma}^2 (t_c^{\text{d}})^2 \frac{g_c}{b}. \quad (1.131)$$

État de référence

La résolution des équations (1.121) à (1.123) permet de calculer les transferts de chaleur en approximation anélastique-liquide. Comme on l'a vu précédemment, celle-ci est construite à partir de perturbations (petites) des variables autour d'un état de référence ; il correspond à un milieu hydrostatique, isentropique et stationnaire. Cet état se caractérise par des profils de valeurs de référence $[\bar{\bullet}(r)]$, avec r le rayon mesuré depuis le centre du corps planétaire] des principales variables thermodynamiques.

L'expression exacte de ces profils dépend des hypothèses choisies sur le comportement thermo-mécanique du milieu à l'état de référence. Dans cette thèse, il a été choisi d'utiliser une configuration relativement simple, correspondant à l'équation d'ADAMS-WILLIAMSON pour un cas à propriétés thermodynamiques constantes⁵². Cette caractéristique permet de ne conserver que l'effet de la compressibilité (approximation anélastique-liquide) sur la densité $\bar{\rho}$ et sur le profil isentropique, \bar{T} . Nous nous plaçons ainsi dans des conditions similaires à celles des études de Leng et Zhong (2008) et de King *et al.* (2010). L'avantage est double : en plus d'autoriser une comparaison directe des résultats sur les transferts thermiques sans chauffage de marée (*benchmark* ; voir chap. 3), cette simplification nous permet de ne pas cumuler trop d'effets physiques dans le modèle et ainsi de ne conserver que l'influence de la compressibilité dans le calcul des transferts de chaleur avec chauffage de marée et évolution orbitale.

51. Notons que l'adimensionnement est fait ici via une pression hydrostatique caractéristique $\rho_c g_c b$, bien évidemment plus adaptée qu'une pression dynamique caractéristique basée sur la viscosité dynamique [cf. éq. (1.117)]. La variation de K_r est, en effet, principalement due à celle de la pression hydrostatique (dominante).

52. L'équation d'ADAMS-WILLIAMSON comprend également une homogénéité chimique.

Une modélisation plus réaliste serait accessible via un état de référence plus sophistiqué, telle la configuration polytropicque (p. ex. [Bercovici *et al.*, 1989](#)), basée sur l'équation d'état de BIRCH-MURNAGHAN. Ce genre de configuration est cependant excessivement complexe par rapport aux incertitudes dans la connaissance de l'intérieur de la Terre et, *a fortiori*, des autres planètes. Elle tire son origine des premières études numériques des dynamos stellaires.

Une justification thermodynamique détaillée conduisant au choix de l'état de référence employé dans ce travail est présentée au chapitre 4; celle-ci est légèrement différente – moins restrictive – que celles habituellement introduites (p. ex. [Leng et Zhong, 2008](#)). Notons, au passage, que le chapitre en question présente les équations dans un cadre dimensionné, de manière complémentaire au formalisme adimensionnel présenté ci-dessus.

Ainsi, en notant R_i et R_e les rayons respectifs (adimensionnels) de la limite manteau-noyau et de la surface de la planète (croûte négligée), on obtient les expressions suivantes – sans dimension – pour les profils de référence de masse volumique et de compressibilité isotherme du manteau de la planète :

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) = \exp[\text{Co}(R_i - \tilde{r})] \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_T(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{\rho}(\tilde{r})}. \quad (1.132)$$

L'expression de l'équation de continuité se réduit alors à :

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \text{Co} \tilde{V}_r. \quad (1.133)$$

Puisque l'on a l'égalité $\tilde{T} = \tilde{T} - \tilde{T}' - T_0$ [voir annexe A.1; T_0 est la température de surface sans dimension, cf. éq. (1.124)], l'expression du profil de température de référence est, pour des températures imposées $\tilde{T}(R_i) = 1$ et $\tilde{T}(R_e) = 0$:

$$\tilde{T}(\tilde{r}) = T_0 \{ \exp[\text{Di}(R_e - \tilde{r})] - 1 \}. \quad (1.134)$$

Compte tenu des hypothèses mentionnées plus haut, les autres profils de référence sont constants ($\bullet \equiv 1$)⁵³.

53. Notons tout de même que, dans le manteau terrestre, α varie d'un facteur de l'ordre de 3 entre la surface et la limite manteau-noyau. L'isentropie \bar{T} possède alors une courbure inverse (Labrosse, communication personnelle).

Autres approximations

À partir des équations en approximation anélastique-liquide (acronyme anglais ALA), il est aisé de revenir aux approximations plus classiques, toutefois thermodynamiquement moins correctes.

Ainsi, négliger l'influence de la pression dynamique \tilde{p}' dans le terme de flottabilité (c.-à-d. $\tilde{\chi}_T = 0!$) de l'équation (1.122) conduit à l'approximation anélastique-liquide tronquée (TALA, p. ex. Ita et King, 1994 ; King *et al.*, 2010). Leng et Zhong (2008) ont montré que c'est précisément cette omission qui est à l'origine d'un écart pouvant atteindre quelques pourcents entre les moyennes volumiques globales de la dissipation visqueuse et du chauffage adiabatique. On montre en effet que ces deux grandeurs doivent se compenser non seulement à l'état d'équilibre final, mais aussi à tout instant (p. ex. Leng et Zhong, 2008, et références incluses).

Si, en outre, les profils $\tilde{\rho} = 1$ et $\tilde{T} = 0$ sont imposés, l'approximation obtenue est dite de BOUSSINESQ étendue (EBA, p. ex. Ita et King, 1994 ; King *et al.*, 2010). Par rapport à l'approximation classique de BOUSSINESQ (BA), elle présente notamment l'avantage d'inclure l'effet de la friction visqueuse et du chauffage adiabatique dans l'équation de l'énergie.

Enfin, l'approximation la plus classique est celle de BOUSSINESQ. Elle correspond au cas :

$$\text{Ma}^2\text{Pr} \ll 1, \quad \epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{Co} \ll 1.$$

Les équations (1.121) à (1.123) sont alors fortement simplifiées : $\tilde{\rho} \equiv 1$ et $\text{Di} = 0$. La dynamique d'un système isovisqueux est alors complètement caractérisée par le seul nombre de RAYLEIGH.

À titre de remarque, notons que l'approximation de BOUSSINESQ a permis de montrer certains résultats théoriques fondamentaux pour la convection thermique dans le manteau. Ainsi, si celle-ci nécessite une résolution numérique des équations de conservation (cf. chap. 2), Tabata et Suzuki (2000) sont cependant parvenus à démontrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de convection de RAYLEIGH-BÉNARD pour un fluide à nombre de PRANDTL infini, de viscosité constante et dans une coquille sphérique. Plus récemment, Tabata (2006) a également abouti à cette propriété – « rassurante » pour les numériciens – dans un cas général à propriétés thermo-mécaniques variables avec la température (en particulier la viscosité). Ces travaux remarquables, mêlant géophysique et mathématique appliquée, sont – à la connaissance de l'auteur – les seuls de ce genre.

1.3.4 Rhéologie visqueuse

Comme nous l'avons vu précédemment, tant pour les transferts convectifs que pour la déformation viscoélastique, la viscosité des manteaux planétaires est un élément crucial à prendre en compte. Après quelques généralités sur la rhéologie visqueuse en grandes déformations⁵⁴, nous verrons quels sont les choix qui ont été effectués pour ce travail de thèse.

Cas général d'un fluide isotrope

Nous avons vu précédemment que, dans le cas d'un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ pouvait s'écrire comme la contraction double entre un tenseur de viscosité \mathbf{H} et le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} [éq. (1.94)]. En outre, l'approximation de STOKES ($\zeta \equiv 0$) et l'hypothèse d'isotropie ont permis d'aboutir à la formulation suivante pour la loi constitutive du fluide [cf. éq. (1.96)], utilisée pour dériver la forme finale des équations de bilan de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathfrak{D}, \quad (1.135)$$

avec la notation $\mathfrak{D} := \mathbf{dev}(\mathbf{D})$ employée ici dans le seul but d'alléger les écritures.

De manière plus générale, pour un fluide non-newtonien, on a la relation (p. ex. [Karato, 2008](#)) :

$$\boldsymbol{\tau} = F_1(\mathfrak{D}) \mathfrak{D}, \quad (1.136)$$

où F_1 est une fonction scalaire, d'argument tensoriel d'ordre 2. Nous nous placerons de nouveau dans l'hypothèse d'un fluide isotrope ; F_1 doit donc posséder elle-même cette propriété. Or, la théorie des fonctions isotropes nous enseigne que toute fonction isotrope à valeur scalaire et d'arguments tensoriels implique⁵⁵ l'existence d'une fonction F_2 d'arguments scalaires telle que l'on ait – dans notre cas particulier :

$$F_1(\mathfrak{D}) = F_2(\mathfrak{D}_I, \mathfrak{D}_{II}, \mathfrak{D}_{III}). \quad (1.137)$$

Les trois arguments sont les invariants fondamentaux du tenseur \mathfrak{D} :

$$\mathfrak{D}_I := \text{tr}(\mathfrak{D}), \quad (1.138)$$

$$\mathfrak{D}_{II} := \frac{[\text{tr}(\mathfrak{D})]^2 - \text{tr}(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D})}{2}, \quad (1.139)$$

$$\mathfrak{D}_{III} := \det(\mathfrak{D}). \quad (1.140)$$

54. Pour le formalisme dans l'hypothèse des petites perturbations, on se reportera au 1.2.

55. La réciproque est vraie.

Le tenseur \mathfrak{D} étant déviatorique, sa trace est par définition nulle ($\mathfrak{D}_I = 0$). Le déterminant⁵⁶ du tenseur \mathfrak{D} symétrique (\mathfrak{D}_{II}) est une mesure du changement de forme des particules de fluide lié à l'écoulement. On supposera que cette quantité n'interviendra pas dans la fonction F_2 (p. ex. Karato, 2008).

Il ne reste donc que le second invariant du tenseur des taux de déformation déviatorique comme argument de F_2 . La contrainte visqueuse résultante peut par exemple s'écrire sous la forme d'une loi de puissance (p. ex. Karato, 2008 ; Ismail-Zadeh et Tackley, 2010). L'équation (1.136) prend ainsi la forme typique suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = C^{\frac{1}{n}} \mathfrak{D}_{II}^{\frac{1}{n}-1} \mathfrak{D}, \quad (1.141)$$

avec C un facteur qui dépend de diverses conditions thermodynamiques (voir plus bas) et n un certain exposant. Ainsi, pour $n = 1$, on retrouve le cas d'un fluide newtonien de viscosité $\eta = C/2$ – dans l'approximation de STOKES. Une remarque s'impose quant à la forme du second invariant dans l'équation (1.141). En effet, un grand nombre d'auteurs emploient une variante, d'expression

$$\mathfrak{D}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D})}. \quad (1.142)$$

Cette forme n'est valable que pour un tenseur déviatorique (trace nulle). Elle correspond, dans ce cas, à la racine⁵⁷ de l'opposé de l'expression (1.139). Cette quantité a donc l'avantage de posséder strictement la dimension d'un taux de déformation. Elle s'identifie, en effet – à un facteur près – au taux de déformation scalaire équivalent $\mathfrak{D}_e := \sqrt{-\frac{4}{3}\mathfrak{D}_{II}}$ (Karato, 2008) :

$$\mathfrak{D}_{II} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathfrak{D}_e. \quad (1.143)$$

De manière analogue à l'équation (1.135), on peut définir une viscosité effective η_{eff} , telle que

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_{\text{eff}} \mathfrak{D}. \quad (1.144)$$

56. Grâce à l'identité de CAYLEY-HAMILTON et en utilisant le fait que, ici, la trace de \mathfrak{D} est nulle, on parvient à l'expression $\det(\mathfrak{D}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D})$.

57. Il s'agit donc toujours d'un invariant mais qui ne peut plus prétendre au titre d'*invariant fondamental* (c.-à-d. coefficient du polynôme caractéristique de la matrice des composantes mixtes de \mathfrak{D}).

Les fluides pour lesquels on a $n \neq 1$ sont dits non-newtonien (c.-à-d. non linéaires). Notons que, dans ce cas, l'utilisation de la loi non-linéaire (1.141) complique substantiellement les termes $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}$ dans les équations (1.92) et (1.101). Si cela ne pose aucun problème particulier pour l'équation de la chaleur (le champ de viscosité doit simplement être correctement calculé), la difficulté est là, en revanche, pour la résolution de l'équation de bilan de quantité de mouvement. L'approche classique consiste à réaliser des approximations successives via la viscosité effective (p. ex. [Ismail-Zadeh et Tackley, 2010](#)).

Loi d'ARRHENIUS

Le facteur C de la loi (1.141) traduit la dépendance en température, pression, taille de grain (d), composition, etc. On l'écrit généralement sous la forme d'une loi d'ARRHENIUS ([Arrhenius, 1887](#) ; [Weertman, 1970](#)), modifiée, qui traduit des processus thermiquement activés (p. ex. le fluage par diffusion) :

$$C(T, p, d) = (2A)^n d^m \exp\left(\frac{Q_a}{RT}\right), \quad (1.145)$$

où A est un facteur pré-exponentiel qui peut, par exemple, varier avec la composition ou encore la teneur en eau ; m est l'exposant de taille de grain et R la constante des gaz parfaits. Q_a est l'enthalpie d'activation, reliée aux énergies et volumes du même nom, E_a et V_a .

Compte tenu des équations (1.141) à (1.145), la viscosité effective s'écrit ainsi :

$$\eta_{\text{eff}}(T, p, \mathfrak{D}, d) = A d^{\frac{m}{n}} \mathfrak{D}_{II}^{\frac{1}{n}-1} \exp\left(\frac{E_a + pV_a}{nRT}\right). \quad (1.146)$$

La « constante » A est généralement déterminée expérimentalement par l'évaluation de la viscosité dans des conditions de référence. Ainsi, la valeur $\eta_{\text{eff}}^{\text{ref}}$ trouvée à une température et une pression de référence (variables « \bullet^{ref} »), pour une taille de grain (moyenne) et un taux de déformation donné, permet d'aboutir à l'expression ci-dessous :

$$\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{eff}}^{\text{ref}} \left(\frac{d}{d^{\text{ref}}}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{\mathfrak{D}_{II}}{\mathfrak{D}_{II}^{\text{ref}}}\right)^{\frac{1}{n}-1} \exp\left\{\frac{1}{nRT^{\text{ref}}}\left[E_a\left(\frac{T^{\text{ref}}}{T} - 1\right) + V_a\left(\frac{T^{\text{ref}}}{T}p - p^{\text{ref}}\right)\right]\right\}. \quad (1.147)$$

En dehors du cas newtonien standard ($n = 1, m = 0$), les couples $(n; m)$ typiques sont, pour les deux principaux mécanismes de déformation du manteau : $(1; 2, 5)$ pour le fluage par diffusion, très sensible à la taille de grain mais pas à la contrainte⁵⁸ (donc newtonien) et $(3, 5; 0)$ pour le fluage par dislocation, dominant pour les fortes

58. ni donc au taux de déformation...

contraintes. Notons enfin que les volumes et surtout les énergie d'activation sont sensibles à la teneur en eau. Ainsi, selon le type de fluage et l'hydratation, les valeurs s'étalent entre 250 et 550 kJ · mol⁻¹ pour E_a et entre 5 et 15 cm³ · mol⁻¹ pour V_a (Karato et Wu, 1993). Les valeurs des volumes d'activation restent cependant largement méconnues.

Approximations choisies

L'étude menée dans cette thèse est principalement orientée vers le couplage des transferts thermiques avec les effets de marée. Ainsi, s'il est instructif de comprendre quelle peut être la complexité de la rhéologie des matériaux planétaires (comportement non-newtonien, etc.), il serait cependant imprudent de vouloir incorporer trop d'effets complexes dans un modèle numérique pour l'étude dudit couplage ; ce serait prendre le risque de ne plus être capable de séparer l'influence des différents phénomènes physiques.

Nous allons donc recourir à quelques simplifications. En premier lieu, nous considérerons que les fluides newtoniens (dans l'approximation de STOKES) sont une bonne approximation des manteaux planétaires. En outre, la taille de grain sera considérée comme constante ou, du moins, comme n'influençant pas la rhéologie. Nous nous restreindrons donc, dans cette thèse, aux valeurs $n = 1$ et $m = 0$. En outre, bien que certains tests numériques de l'outil développé dans cette thèse aient été effectués avec une dépendance en pression de la viscosité (cf. chap. 3), celle-ci sera négligée dans le cas général. L'influence de la température est, en effet, dominante sur celle de la pression⁵⁹. Ceci revient à prendre un volume d'activation nul.

L'équation (1.146) devient donc une simple loi d'ARRHENIUS et la grandeur obtenue est la viscosité réelle du fluide et non plus une valeur effective :

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right). \quad (1.148)$$

Dans le même esprit que ce qui a été présenté au paragraphe 1.3.2, la version adimensionnée de l'équation ci-dessus est donnée par l'expression

$$\tilde{\eta} = \exp\left[\tilde{E}_a \left(\frac{1}{\tilde{T} + T_0} - \frac{1}{\tilde{T}_c + T_0}\right)\right], \quad (1.149)$$

avec $\tilde{E}_a := \frac{E_a}{R\Delta T}$ l'énergie d'activation sans dimension et \tilde{T}_c la température adimensionnée [éq. (1.116)] correspondant à la viscosité caractéristique $\eta_c = \eta(T_c)$ utilisée dans l'adimensionnement. Notons que T_c n'est autre que la valeur de référence T^{ref} de l'équation (1.147), qui permet de déterminer l'expression de A ; de même, on a

59. du moins pour les manteaux planétaires de type terrestre . . .

ici $\eta_c \equiv \eta^{\text{ref}}$. Rappelons que T_0 est la température de surface sans dimension [éq. (1.124)].

Dans cette thèse, il a été choisi de prendre les valeurs de référence à la base du manteau (variables « \bullet_b »), ce qui revient en particulier à définir le nombre de RAYLEIGH en cet endroit. La température caractéristique choisie sera donc $T_c \equiv T_b := T_s + \Delta T$ [soit $\tilde{T}_c = 1$ dans l'équation (1.149)]; on a ainsi $\eta_c \equiv \eta_b$.

La plupart du temps (sauf au chap. 5), nous utiliserons une version simplifiée de la loi d'ARRHENIUS (1.148) : l'approximation de FRANK-KAMENETSKII (Frank-Kamenetskii, 1938, 1969). Son expression repose sur une linéarisation de l'argument de l'exponentielle (cf. annexe A.4). Elle prend la forme simple ci-dessous, qui possède cependant l'intérêt de conserver une dépendance exponentielle en température de la viscosité :

$$\eta = \eta_b \exp\left(\Upsilon \frac{T_b - T}{\Delta T}\right), \quad (1.150)$$

soit, sous forme adimensionnée :

$$\tilde{\eta} = \exp[\Upsilon(1 - \tilde{T})], \quad (1.151)$$

avec Υ le paramètre de FRANK-KAMENETSKII (cf. annexe A.4).

Reese *et al.* (1999) ont montré que cette approximation était satisfaisante pour le régime de couvercle stagnant : une comparaison rigoureuse des résultats obtenus pour le régime de convection avec une loi d'ARRHENIUS et avec une loi exponentielle dans l'approximation de FRANK-KAMENETSKII montre ainsi que les températures sont sous-estimées de 4 à 5 % avec cette dernière⁶⁰. En effet, si cette approximation est tout à fait correcte dans les régions chaudes (cf. annexe A.4), les valeurs de viscosité obtenues avec celle-ci s'écartent significativement de celles correspondant à une loi d'ARRHENIUS dans le couvercle froid et rigide – ce qui reste raisonnable, au vu des faibles vitesses qui y règnent – mais aussi dans la partie instable de la couche limite thermique froide, juste sous le couvercle. Ce domaine se trouve anormalement épaissi, dans le cas de l'approximation de FRANK-KAMENETSKII, puisque celle-ci induit une diminution plus faible de la viscosité avec la température. Les instabilités froides s'en trouvent ainsi renforcées et le transfert thermique est plus efficace, réduisant la température interne par rapport au cas utilisant la loi d'ARRHENIUS.

Comme nous nous placerons dans un régime de variations de viscosité suffisamment fortes (donc régime de couvercle stagnant), l'équation (1.151) est suffisante et permet d'éviter le recours à une troncature artificielle⁶¹ de la viscosité dans le cas

60. Du moins dans le cas en chauffage interne pur présenté par Reese *et al.* (1999).

61. cependant utilisée au chapitre 5

de l'utilisation de l'équation (1.148). Cette dernière implique, en effet, des valeurs de viscosité extrêmement fortes en surface qui non seulement n'ont alors plus trop de sens physique⁶², mais aussi vont poser problème (numériquement) pour la résolution de l'équation de bilan de quantité de mouvement.

La résolution des équations de conservation gouvernant les transferts de chaleur nécessite le recours à des techniques numériques adaptées aux diverses complexités que celles-là contiennent (p. ex. la non-linéarité du terme d'advection de chaleur, la variabilité de la viscosité avec la température, etc.) : la méthodologie adoptée dans ce travail constitue le sujet du chapitre suivant.

62. Une rhéologie strictement visqueuse n'est plus tellement adaptée dans cette région...

Méthodologie numérique employée : transferts de chaleur

Ce chapitre présente le modèle numérique de convection utilisé, entièrement développé durant cette thèse. Il s'organise en trois sections. La première présente la méthodologie générale et le contexte numérique dans lequel elle s'insère. La deuxième détaille la résolution de l'équation de STOKES, partie la plus « gourmande » du code de calcul. Enfin, la troisième section, plus brève, présente le traitement particulier de l'équation de la chaleur. Le lecteur sera peut-être surpris de la taille importante de ce chapitre, mais il se rapporte au modèle de transfert thermique construit pendant cette thèse, sur lequel repose tout le reste. L'élaboration de celui-ci et les réflexions développées dans ce chapitre ont représenté une partie significative de la thèse.

2.1 Méthodologie générale

Dans cette section, nous montrerons l'importance de l'approche numérique en géophysique planétaire. Un accent particulier sera ensuite mis sur la géométrie des modèles. Nous terminerons par la présentation de la technique numérique générale choisie pour le programme de calcul élaboré au cours de ce travail.

2.1.1 L'approche numérique pour les planètes

Le puits le plus profond jamais réalisé sur Terre – le forage soviétique SG-3 du *Kola Superdeep Borehole* – a atteint la modeste profondeur de 12,25 kilomètres, au niveau du craton scandinave, dans la péninsule de Kola, en Russie (cf. p. ex. [Kerr, 1984a,b](#)). Comparée à l'épaisseur moyenne de la croûte continentale (environ 35 km), cette profondeur ne représente que 35 %, soit 5,5 ‰ du rayon terrestre moyen. Au vu de ces chiffres, est-il utile de préciser que la plus grande partie de

l'information concernant la structure et la composition de l'intérieur de la Terre a été obtenue indirectement ? Parmi les diverses méthodes d'investigation de l'intérieur de la Terre, la sismologie est de loin la plus précise. En effet, la connaissance que nous avons des enveloppes internes de notre planète résulte essentiellement de l'étude de la propagation des ondes élastiques au sein de celles-ci. Mais, de manière générale, ces informations ne nous donnent accès qu'à une vision instantanée de notre planète, à des résolutions verticales et horizontales de plusieurs dizaines, voire centaines de kilomètres, respectivement. La situation dynamique ne peut être approchée que par le biais de modèles théoriques d'évolution de la Terre – à quelque échelle que ce soit – et ce en étroite liaison avec des observations issues de disciplines telles que la géochimie (isotopes, éléments traces), la sismologie, la géodésie ou encore la gravimétrie. Dans le vaste domaine des disciplines de la géodynamique, une en particulier va nous intéresser dans ce mémoire : la géodynamique numérique.

Aux origines de la simulation numérique

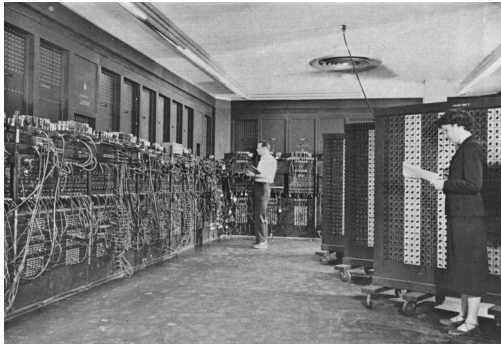
Les équations qui régissent la dynamique interne d'une planète ainsi que sa dynamique orbitale, telles que celles présentées aux chapitres 1 et 5, ne possèdent de solutions analytiques que dans certains cas extrêmement simplifiés. Dans les situations plus « réalistes », ces équations ne peuvent être résolues par des méthodes d'analyse classique et nécessitent le recours à l'analyse numérique. Celle-ci résulte à l'origine des travaux pionniers de NEWTON, EULER, LAGRANGE et GAUSS : elle consiste en l'étude et la mise au point d'algorithmes pour résoudre des problèmes de l'analyse mathématique – appliqués ou non à la physique – au moyen de calculs arithmétiques. Son application à la résolution d'équations aux dérivées partielles¹ pour un problème physique émergea véritablement après la seconde guerre mondiale, de par les retombées technologiques associées.

L'ENIAC² fut ainsi le premier véritable ordinateur entièrement électronique (voir figure 2.1a) et servit aux calculs – jusqu'alors fastidieux – des tables de référence pour les trajectoires d'obus, au lendemain de la seconde guerre mondiale. Plus tard, il permit des travaux pionniers, comme l'une des toutes premières simulations numériques à caractère scientifique, réalisée dans le domaine de la météorologie (Charney *et al.*, 1950). Ce fait n'est pas étonnant si l'on tient compte du climat de guerre froide qui régnait à cette époque : le Saint Graal de l'armée américaine était alors le contrôle du climat – l'arme atomique étant acquise – notamment au-dessus des territoires soviétiques. Et ceci passait naturellement par sa compréhension et donc par sa simulation. Par la suite, l'utilisation des ordinateurs comme véritables moyens d'expérimentation numérique prit de plus en plus d'ampleur, jusqu'à l'explosion au

1. Ce sont celles qui nous intéressent ici (cf. chapitre 1).

2. acronyme de *Electronic Numerical Integrator And Computer*

cours des années 1970, et surtout 1980, grâce aux grands développements que connut l'informatique à cette période.



(a)



(b)

FIGURE 2.1 – *Les premiers ordinateurs utilisés pour la simulation numérique. (a) L'ENIAC, conçu à l'origine en 1946, utilisé pour les calculs de [Charney et al. \(1950\)](#). Il fut utilisé jusqu'en 1955. Crédit : U.S. Army. (b) Le CDC 3600, conçu en 1963, le premier de la série des CDC 3000 de la Control Data Corporation. Les simulations de [Deardorff \(1964\)](#) furent réalisées sur un ordinateur de ce type. Crédit : George A. Michael.*

Vers une application à la géodynamique

Les premières véritables simulations numériques de convection thermique de type RAYLEIGH-BÉNARD furent menées dans les études de [Deardorff \(1964\)](#) et [Fromm \(1965\)](#). Ces expériences numériques cartésiennes bidimensionnelles furent conduites grâce aux ordinateurs de dernière génération de l'époque (voir fig. 2.1b), pour des fluides de type air dans l'approximation de BOUSSINESQ (cf. 1.3.3). L'étude de [Deardorff \(1964\)](#) se concentrait sur un cas bien particulier de convection thermique turbulente alors que celle de [Fromm \(1965\)](#) visait à explorer de manière systématique la dynamique du système, allant du démarrage de la convection (Ra proche de sa valeur critique) à la turbulence thermique. Alors que les travaux de [Deardorff \(1964\)](#) étaient plutôt liés à l'étude de l'atmosphère terrestre, ceux de [Fromm \(1965\)](#) s'inscrivaient dans une série de grands développements numériques voulue par le Laboratoire de Los Alamos. Ce dernier disposait, en effet, des tout derniers ordinateurs de l'époque. Le fameux groupe T-3 (*Computational Fluid Dynamics*) du célèbre institut s'était en fait, dès les années 50, intéressé à la modélisation des écoulements de fluides.

Il faut attendre encore quelques années pour que la modélisation numérique entre au service d'étude de la convection dans le manteau terrestre ($Pr \rightarrow \infty$). Les travaux pionniers de [Torrance et Turcotte \(1971\)](#) marquent ainsi le début de cette ère et présentent les tout premiers modèles 2D de convection thermique dans le manteau. Mentionnons également les modèles de [Turcotte *et al.* \(1973\)](#), incluant déjà un traitement de la dissipation visqueuse dans le manteau, ainsi que d'une viscosité dépendante de la température, de même que les travaux historiques de [McKenzie *et al.* \(1974\)](#), qui visaient à une comparaison systématique des résultats de modèles de convection avec les observables géophysiques. Tous ces modèles étaient toutefois restreints au manteau supérieur. Cette particularité avait cependant l'avantage de justifier l'utilisation d'une géométrie cartésienne (2D).

Complémentarité avec les autres approches

Le phénomène de convection thermique fut étudié pour la première fois par JAMES THOMSON et présenté à la *Philosophical Society* de Glasgow en 1882 ([Thomson, 1912](#)) ; le frère aîné de WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) observa, en effet, des structures géométriques à fort degré de symétrie en surface d'une eau savonneuse uniformément chaude et refroidie par sa surface. L'utilisation d'un colorant – l'aniline – permit à THOMSON de pressentir fortement la nature convective des mouvements de fluide formant ces structures en surface. Il faut attendre une vingtaine d'années pour que soient menées les premières expériences quantitatives et systématiques sur ce phénomène, par le biais des travaux pionniers³ de [Bénard \(1900\)](#). Par la suite, [Rayleigh \(1916\)](#) développa la théorie de la stabilité linéaire qui permit notamment de prédire les conditions de démarrage et la longueur d'onde préférentielle de la convection thermique dans des cas simples.

Les études mentionnées précédemment constituent un bel exemple de complémentarité entre l'approche dite analogique et les développements théoriques. Cependant, la difficulté que représentent les mesures expérimentales (température, pression, etc.) conjuguée à la complexité de l'analyse ou de la résolution des équations de NAVIER-STOKES ont tout naturellement conduit à l'utilisation des techniques issues de l'analyse numérique. En effet, la théorie de RAYLEIGH et celles qui ont suivi ne permettaient pas d'approcher l'aspect temporel de la convection thermique, c'est-à-dire la phase transitoire du phénomène, qui suit son démarrage, ou encore la turbulence thermique, ni même la convection développée. L'étude de [Deardorff \(1964\)](#) constitue, à ce titre, un exemple historique de complémentarité entre les approches numérique et expérimentale⁴. Elle a, de plus, montré toute l'importance

3. On s'est cependant rendu compte, dans les années 1950, que la dynamique, dans les expériences de [Bénard \(1900\)](#), était produite par la variation de la tension de surface avec la température (p. ex. [Pearson, 1958](#)). On parle désormais de convection de BÉNARD-MARANGONI.

4. Ici, à l'opposé des études du manteau, le fluide modélisé et celui utilisé dans l'expérience

des termes non linéaires dans les équations du transfert thermique, terme que seule une intégration numérique des équations pouvait correctement traiter. Toutefois, les études analogiques pouvaient certes partiellement combler cette lacune, mais au prix de conditions aux limites restreintes (p. ex. difficulté de mise en oeuvre d'un glissement libre⁵) et d'un contrôle difficile sur les différentes variables. De plus, la mesure même de grandeurs physiques non géométriques, comme par exemple la température se devait de perturber le moins possible le déroulement naturel de l'expérience. . .

Pour terminer, il est nécessaire de mentionner un biais majeur de l'approche analogique : la géométrie. La plupart des expériences de laboratoire pour des fluides mimant les fluides géophysiques ont été – et le sont toujours – faites dans des cuves à géométrie cartésienne (p. ex. [Davaile et Jaupart, 1993](#)). Mentionnons toutefois les travaux, uniques à ce jour, conduits lors des expériences *Geoflow I* et *II*. L'intérêt de ces expériences analogiques est justement leur géométrie sphérique (p. ex. [Futterer et al., 2008](#)), fondamentalement requise pour l'étude des planètes : un fluide est observé en convection dans une coquille sphérique. De plus – et c'est là un point remarquable, l'expérience est conduite en micro-gravité – *Skylab* pour *Geoflow I*, Station Spatiale Internationale pour *Geoflow II* – ce qui permet d'exercer une force magnétique centrale sur un fluide sensible au champ magnétique (ferro-fluide). Ce dernier point est particulièrement astucieux puisqu'il permet d'obtenir une attraction classique « en $1/r^2$ » et constitue ainsi un bon analogue du champ de gravitation. La sphéricité d'un modèle, qu'il soit numérique ou analogique, est un élément-clé pour la simulation de la convection du manteau des planètes à l'échelle globale.

À l'inverse, l'expérimentation numérique rend possible l'utilisation de conditions aux limites variées et complexes et la détermination de la valeur des différentes variables « en tout point ». De plus, les paramètres-clés tels que le nombre de PRANDTL peuvent être choisis réalistes ($Pr \rightarrow \infty$, cf. [1.3.2](#)), ce que ne permet pas, à ce jour, la modélisation analogique. Enfin, un calcul numérique peut être conduit sur une durée longue à souhait ; ceci est difficilement le cas d'une manipulation en laboratoire. Cependant, cette approche se fait naturellement à l'aide d'ordinateurs et c'est ce qui constitue son inévitable faiblesse : le caractère approximatif. En effet, la résolution des équations du transfert thermique est souvent réalisée via, d'une part, des versions approximées de celles-ci (p. ex. l'approximation de BOUSSINESQ, cf. [1.3.3](#)) et, d'autre part, des méthodes d'analyse numérique dans leur version appliquée sur ordinateur – donc approximative.

avaient les mêmes propriétés : il s'agissait d'air.

5. condition aux limites utilisée à l'origine dans les travaux de [Rayleigh \(1916\)](#)

2.1.2 Importance de la sphéricité des modèles

Le principe de CURIE nous dit que les effets d'un phénomène physique doivent en posséder les symétries (Curie, 1894). Comme l'a montré NEWTON dans ses *Principia* (Newton, 1687, prop. XI, LXXV), la force de gravitation est centrale, donc à symétrie sphérique. Or, la formation des planètes – l'accrétion – est un processus gravitationnel. De plus l'équilibre hydrostatique, qui donne sa forme globale aux planètes, est dû à la gravitation. Les planètes sont donc des objets fondamentalement sphériques. La rotation propre de ces objets et l'attraction de corps externes – par exemple d'un satellite naturel – sont deux phénomènes qui vont toutefois entraîner un petit écart à la sphéricité. Si seul le premier effet est effectif, la symétrie axiale de la force d'inertie d'entraînement va imposer une forme globale à l'équilibre pourvue d'une symétrie axiale (sphéroïde aplati). Cependant, dans la plupart des cas, l'aplatissement des planètes est négligeable devant leur taille, si bien que l'hypothèse de sphéricité parfaite est amplement suffisante pour modéliser un intérieur planétaire.

Notons toutefois le contre-exemple remarquable de la planète naine Hauméa, un plutoïde découvert en 2004 (Brown *et al.*, 2005). Ce petit corps, extrêmement aplati, possède une forme de type ellipsoïde triaxial⁶, avec les dimensions $(1960 \pm 74) \times (1518 \pm 48) \times (996 \pm 8)$ km (Rabinowitz *et al.*, 2006). Il faut cependant savoir que la forme de ce petit corps n'a été estimée qu'indirectement, à partir de sa rotation (variation de luminosité) et de sa masse, sous l'hypothèse d'équilibre hydrostatique. Sa période de rotation exceptionnellement courte de 3,9 h laisse tout de même penser que l'aplatissement est significatif, quel que soit le modèle invoqué pour sa structure interne. Naturellement, dans un cas aussi exotique, la géométrie sphérique n'est plus du tout adaptée à l'étude des transferts thermiques !

Les modèles à géométrie sphérique

Il a fallu attendre le milieu des années 80 et une augmentation significative de la puissance de calcul et de la mémoire des ordinateurs pour voir apparaître les premières simulations de convection mantellique en géométrie tridimensionnelle sphérique. Ce sont les travaux de Baumgardner (1985) qui marquèrent le début de cette nouvelle ère. Le code de convection en question, TERRA⁷ repose sur une méthode aux éléments finis et surtout sur un maillage icosaédrique (Baumgardner et Frederickson, 1985). En effet, le défi majeur des outils sphériques est le maillage : la discrétisation de la sphère ne peut se faire classiquement, c'est-à-dire via une grille latitude-longitude sans rencontrer des singularités au niveau des pôles. Toute l'astuce revient alors à découper la sphère judicieusement pour à la fois éviter les singularités et garder une résolution la plus uniforme possible (stabilité numérique). Notons,

6. C'est, du moins, la meilleure approximation actuelle.

7. le plus ancien, encore en utilisation/développement aujourd'hui !

au passage, que ces difficultés sont propres aux méthodes aux éléments ou volumes finis. Les méthodes spectrales, elles, « ignorent » simplement ces inconvénients mais en présentent au moins un autre, de taille : un traitement difficile des variations azimutales de viscosité, ce qui est problématique pour l'étude de la dynamique du manteau. Les codes spectraux ont toutefois eu leur heure de gloire (p. ex. [Glatzmaier, 1988](#)).

Un principe qui fut largement utilisé est la projection, sur ladite sphère, de l'un des cinq polyèdres réguliers convexes que sont les solides de PLATON, dont le centre coïncide avec celui de la sphère. La projection (centrale) des arêtes définit alors des domaines de la sphère de tailles identiques qui n'ont plus qu'à être éventuellement redécoupés, et surtout maillés individuellement. Le maillage du code TERRA est ainsi basé sur la projection d'un icosaèdre régulier (fig. 2.2a). Chacun des vingt triangles sphériques ainsi obtenus est ensuite découpé en trois sous-triangles, et ainsi de suite récursivement – à la manière du triangle de Sierpiński (figure fractale) – pour produire un maillage de résolution souhaitée. Citons également l'utilisation d'autres solides de PLATON : le tétraèdre régulier – dont chaque face est subdivisée en trois parties presque égales, base du code en éléments finis CitComS ([Zhong et al., 2000](#)) ; le cube, qui permet de dériver le système de coordonnées de la sphère cubique ([Ronchi et al., 1996](#)), utilisé notamment dans le programme en volumes finis CEDIPE ([Choblet, 2005](#) ; [Choblet et al., 2007](#)) – ce maillage est visible à la figure 2.2b ; enfin, l'octaèdre régulier, utilisé indirectement dans l'approche de [Tabata \(2006\)](#), basée elle-même sur les travaux de [Suzuki et al. \(1999\)](#).

Plus récemment, deux approches novatrices ont fait leur apparition : la grille dite *Ying-Yang*, proposée et utilisée originellement par [Kageyama et Sato \(2004\)](#) pour l'étude de la convection du manteau aussi bien que de la géodynamo (noyau liquide) et utilisée notamment dans le code en volumes finis StagYY de [Tackley \(2008\)](#). Le principe, illustré à la figure 2.2c, repose sur deux domaines sphériques identiques, semblables à ceux visibles sur une balle de tennis. Les singularités aux pôles sont ainsi naturellement évitées. D'un tout autre point de vue, [Hüttig et Stemmer \(2008b\)](#) ont proposé une approche extrêmement intéressante : la *grille spirale* (fig. 2.2d). Toute la puissance de ce maillage, constitué de polygones de VORONOÏ (p. ex. [Hüttig et Stemmer, 2008a](#)) dont les centres – à un niveau de sphère donné – sont distribués le long d'une spirale hélicoïdale, est sa complète déstructuration. Ainsi, contrairement à toutes les méthodes évoquées plus haut, la résolution spatiale, radiale comme latérale, peut être choisie arbitrairement, d'où la puissance de la méthode.

Soulignons également l'utilisation de maillages cartésiens tridimensionnels à haute résolution pour inclure une sphère – approximative (« pixellisée ») – en leur intérieur (cf. p. ex. [Gerya, 2010](#)). Cette technique permet notamment de traiter une sphère complète, autrement dit d'éviter le problème de la singularité au centre. Enfin, bien que le panorama donné ci-dessus soit loin d'une liste exhaustive, men-

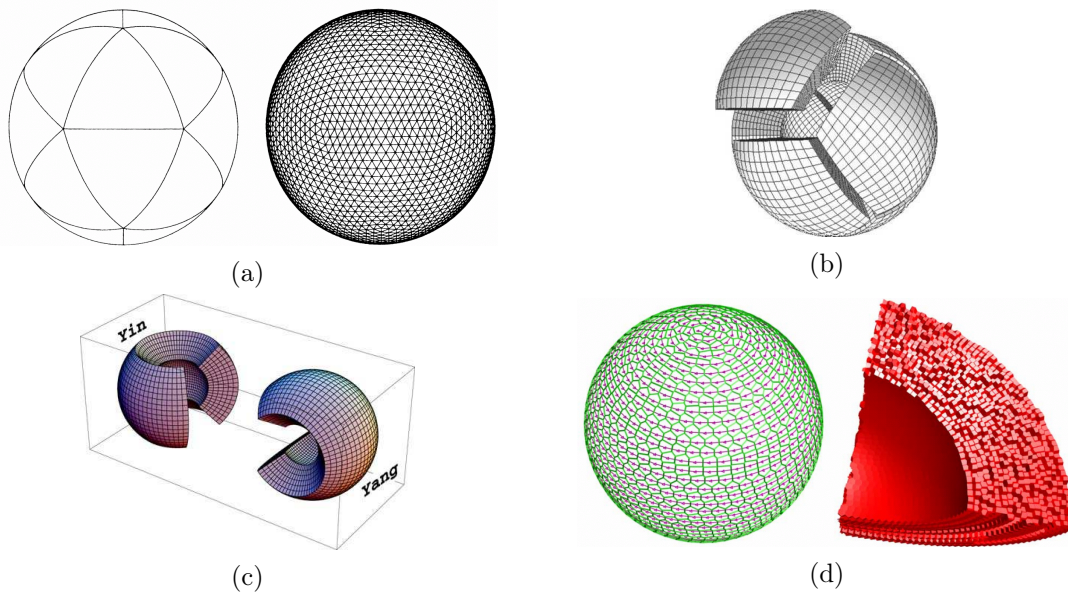


FIGURE 2.2 – Exemples de maillages pour la géométrie sphérique. (a) La grille icosaédrique du programme TERRA : à gauche, la projection de l'icosaèdre régulier sur la sphère, à droite, un niveau de raffinement géométrique possible (d'après Baumgardner et Frederickson, 1985). (b) Le maillage de la sphère cubique, dans sa version étendue radialement, utilisé dans EDIPE (d'après Choblet et al., 2007). (c) Le maillage Ying-Yang, ici dans sa version la plus simple (non optimale), utilisé dans StagYY (d'après Kageyama et Sato, 2004). (d) La grille spirale du programme GAIA : à gauche, une visualisation de la spirale hélicoïdale (en violet) qui, plaquée sur une sphère, engendre les positions des centres des cellules ; ceux-ci forment la base d'un pavage de Voronoï qui définit le maillage (en vert). À droite, une vue en tranche du maillage tridimensionnel déstructuré résultant (d'après Hüttig et Stemmer, 2008b).

tionnons la toute dernière⁸ méthode de maillage de la sphère, proposée par [Oldham et al. \(2011\)](#). Elle repose sur l'utilisation d'un polyèdre régulier générique et peut donc se voir plutôt comme une généralisation des méthodes basées sur les solides de PLATON évoquées plus haut que comme une méthode véritablement nouvelle.

Les approches bidimensionnelles

Encore à ce jour, les calculs tridimensionnels – en particulier en géométrie sphérique – restent lourds, que ce soit en terme de temps de calcul ou de développement nécessaire. Le recours à des machines parallèles est presque incontournable pour atteindre des résolutions spatiales et des temps d'exécution raisonnables pour de telles simulations. Une alternative consiste alors à utiliser des géométries bidimensionnelles curvilignes pour approximer la sphéricité.

Historiquement, les premières approches de ce genre pour le manteau furent réalisées dans une géométrie dite sphérique axisymétrique (p. ex. [Machetel et Rabinowicz, 1985](#) ; [Machetel et Yuen, 1986](#)). Le principe, très simple, consiste à négliger toute variation en longitude dans un système de coordonnées sphériques. Les équations (2D) simplifiées qui en résultent dérivent donc directement des équations en géométrie sphérique complète et, de ce fait, un maximum de propriétés géométriques (p. ex. la variation des volumes élémentaires « en r^2 ») sont conservées dans la réduction $3D \rightarrow 2D$. En revanche, un inconvénient majeur est la taille maximale du domaine d'étude : au mieux, seul un demi-anneau est autorisé avec, qui plus est, des frontières latérales à symétrie axiale obligatoire (miroirs), par construction. Nous reviendrons sur ce point au 2.1.3. L'utilisation d'une géométrie annulaire simple permet de contourner ce dernier problème. C'est le principe de l'anneau cylindrique, dont les premiers travaux le mettant en œuvre sont ceux de [Travis et Brandow \(1984\)](#), dans le cadre d'une étude pionnière de la dynamique du manteau terrestre avec inclusion et transport (advection) d'éléments radioactifs producteurs de chaleur, puis de [Gurnis et Zhong \(1991\)](#). Cette étude est la première en géométrie courbe à inclure des plaques rigides, « tectoniques », dans la convection thermique. Cette géométrie, qui permet les premières simulations du manteau terrestre dans son ensemble, semble donc, *a priori*, plus adaptée. La figure 2.3, inspirée de celle de [van Keken \(2001, fig. 1\)](#), présente une comparaison visuelle des différentes géométries curvilignes 2D avec l'approche sphérique 3D.

Toutefois, il faut garder à l'esprit que la géométrie d'anneau cylindrique consiste en fait en un simple système de coordonnées polaires. En effet, la réduction $3D \rightarrow 2D$ décrite plus haut consiste à négliger les variations en cote (z) dans un système de coordonnées cylindriques. Un problème majeur se pose alors, en particulier si l'on s'intéresse au flux de chaleur en surface d'une planète ou à la frontière manteau-

8. à la connaissance de l'auteur et au moment de l'écriture de cette thèse...

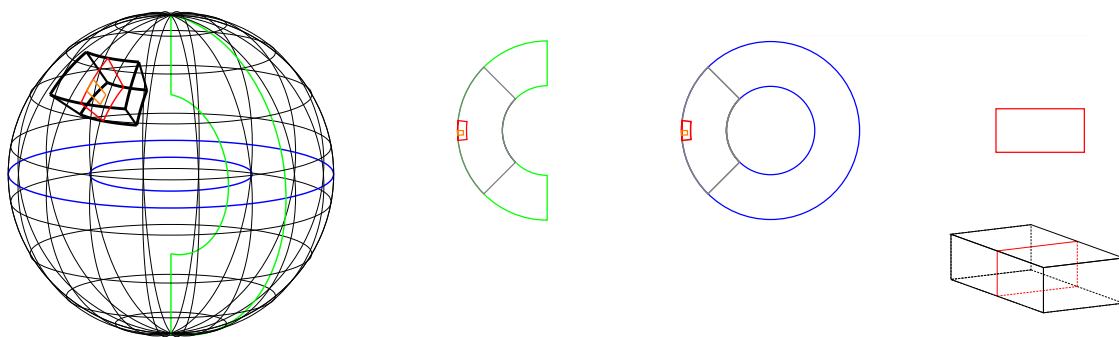


FIGURE 2.3 – Les différentes géométries courbes. Les couleurs permettent d'identifier, comparativement à la géométrie sphérique complète, les différentes approches 2D possibles : axisymétrique sphérique (vert) ou cylindrique (orange) et annulaire cylindrique ou sphérique (bleu ; portions en gris). Le cas cartésien (3D et 2D) est représenté pour information, tout à droite. Les domaines courbes quasi-cartésiens équivalents apparaissent en noir (3D ; traits gras) et en rouge (2D).

noyau (CMB) de celle-ci : le rapport de ces deux surfaces, dans cette géométrie 2D, est clairement différent. Il implique une importance relative moins forte du flux de chaleur à la CMB par rapport à celui de la surface : $1/f$ fois moins forte, si l'on note f le quotient du rayon du noyau par celui de la planète ($f \approx, 55$ pour la Terre). Le rapport des surfaces vaut alors f dans le cas cylindrique, au lieu du f^2 requis pour une géométrie sphérique⁹.

Une solution astucieuse, proposée originellement par [Vangelov et Jarvis \(1994\)](#), consiste alors à redimensionner les rayons interne et externe de l'anneau cylindrique, de telle sorte que leur rapport soit égal à f^2 , contournant ainsi le biais de la géométrie cylindrique qui débouchait notamment sur une surestimation des flux de chaleur en surface et de la température moyenne par rapport à l'approche sphérique. Cette idée, suggérée dans les lois d'échelle de [Vangelov et Jarvis \(1994\)](#), fut reprise plus tard par [van Keken \(2001\)](#) dans des calculs plus sophistiqués (approximation de BOUSSINESQ étendue, voir [1.3.3](#)) qui permirent de montrer la grande similarité des transports de masse et de chaleur entre la géométrie cylindrique avec rayons modifiés et la géométrie sphérique axisymétrique. Il faut cependant souligner trois points qui font défaut dans une telle approche, si l'on souhaite représenter au mieux ce qui se passe dans une géométrie sphérique complète. Le premier est que la remise à l'échelle des rayons donne lieu à un rayon du noyau artificiellement plus petit (cf. chap. [3](#)), ce qui va impliquer une dynamique particulière, par exemple des panaches thermiques qui se retrouvent plus confinés vers la base du manteau... Le deuxième point est à rapprocher du premier : si les surfaces interne et externe de l'anneau cylindrique sont

9. Notons, au passage, que la géométrie sphérique axisymétrique respecte cette propriété fondamentale.

bien dans le bon rapport (sphérique), il n'en reste pas moins que la variation des volumes élémentaires – donc de la métrique – reste purement cylindrique, « en r » et non r^2 . Enfin, le troisième point concerne le rapport d'aspect du domaine d'étude. [Jarvis \(1994\)](#) a montré toute l'importance de conserver le même pour la comparaison de résultats de simulations en géométrie cylindrique à différents rapports de courbure f : ceci requiert des domaines géométriques sous la forme d'une fraction d'anneau. Or, la remise à l'échelle de [Vangelov et Jarvis \(1994\)](#) et [van Keken \(2001\)](#) conduit à un changement – artificiel – du degré de courbure ; la comparaison avec un modèle sphérique doit donc se faire avec un rapport d'aspect identique pour garder tout son sens, ce sur quoi repose l'étude de [van Keken \(2001\)](#). Cette géométrie perd donc tout son intérêt si l'on souhaite pouvoir modéliser le manteau complet d'une planète, ce qui nécessite un anneau entier et donc l'impossibilité de faire varier le rapport d'aspect comme dans le cas d'une fraction d'anneau.

2.1.3 Une géométrie originale : l'anneau sphérique

Récemment, une nouvelle approche géométrique bidimensionnelle a été proposée, dite de l'« anneau sphérique » ([Hernlund et Tackley, 2008](#)). Le principe de construction repose sur l'intersection d'une coquille sphérique avec un plan passant par le centre de celle-ci. Un domaine annulaire est ainsi défini. Il est semblable à celui obtenu par la même opération géométrique appliquée à un ensemble de deux cylindres concentriques¹⁰. Cependant, nous allons voir que les propriétés géométriques intrinsèques des deux anneaux sont sensiblement différentes.

Le système de coordonnées associé à l'anneau sphérique consiste en la restriction à l'équateur¹¹ d'un système classique de coordonnées sphériques. Pour cela, deux hypothèses sont faites : l'une, purement géométrique, consiste à négliger les variations des quantités dans la direction normale au plan d'intersection ; l'autre, cinématique, revient à imposer l'orthogonalité à ce plan de la vorticité ($\nabla \times \mathbf{V}$) de tout mouvement dans la portion annulaire, ce qui inhibe ainsi tout déplacement normal à l'anneau.

L'anneau est alors muni d'un système de coordonnées polaires (r, θ) muni d'une base orthonormée $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. θ est une coordonnée angulaire correspondant en fait à la longitude du système de coordonnées sphériques, les variations selon la colatitude ϑ étant négligées. Il en résulte une modification des opérateurs vectoriels classiques.

10. Le plan d'intersection doit toutefois être normal à l'axe z des cylindres, afin de conserver un domaine circulaire.

11. donc le lieu de colatitude $\frac{\pi}{2}$

Ainsi, pour toute fonction scalaire F et tout champ vectoriel $\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$, on a :

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^d} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^d \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^d} \frac{\partial}{\partial r} (r^d A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.4)$$

Notons qu'étant donné le caractère bidimensionnel du système de coordonnées annulaires, seule la norme du produit (2.4) possède un sens. Les écritures $\nabla \times \mathbf{A}$ et $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ sont, bien entendu, abusives.

Le paramètre d est un degré de courbure effectif. Dans le cas de l'anneau sphérique, il vaut 2. L'élégance de cette formulation générale, due à [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), vient du fait que l'anneau cylindrique classique n'est autre que le cas correspondant à $d = 1$. Ainsi, la différence fondamentale entre ses deux systèmes de coordonnées réside dans l'expression du jacobien¹² : $J = r^d$. Dans le cas sphérique complet, celui-ci vaut $J = r^2 \sin \vartheta$. On voit donc que, pour l'anneau sphérique, ce facteur est identique à son homologue sphérique dans le plan équatorial. La conséquence est de taille : la variation relative des volumes entre les rayons interne (R_i) et externe (R_e) de l'anneau/coquille sphérique suit la même loi (variation en r^2). Ceci vient pallier le défaut majeur de l'anneau cylindrique. Notons que la géométrie sphérique axisymétrique présente elle aussi cet atout.

À l'instar de ce qui est proposé dans l'article de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), nous pouvons représenter graphiquement la géométrie de l'anneau sphérique en attribuant à cet objet bidimensionnel une épaisseur virtuelle¹³ J/r mesurant la direction (implicite) des variations négligées ($\frac{\partial \bullet}{\partial \vartheta} \equiv 0$ pour $d = 2$, $\frac{\partial \bullet}{\partial z} \equiv 0$ pour $d = 1$). Le résultat est visible dans la figure 2.4.

Une coupe en épaisseur virtuelle à travers les deux types d'anneaux ($d = 1$ et $d = 2$) permet de comprendre leur différence majeure (fig. 2.5). L'anneau sphérique possède ainsi un degré de courbure effectif $d = 2$, car il est issu d'une coquille sphérique, elle-même pourvue de deux degrés de courbure. L'anneau cylindrique classique provient, lui, de deux cylindres coaxiaux qui, eux, ne présentent qu'un seul degré de courbure.

12. Rappelons qu'il s'agit du déterminant de la matrice Jacobienne du changement de variable permettant de passer de coordonnées curvilignes données à des coordonnées cartésiennes.

13. Il s'agit bien d'une géométrie 2D, sans épaisseur (réelle) dans la troisième dimension.

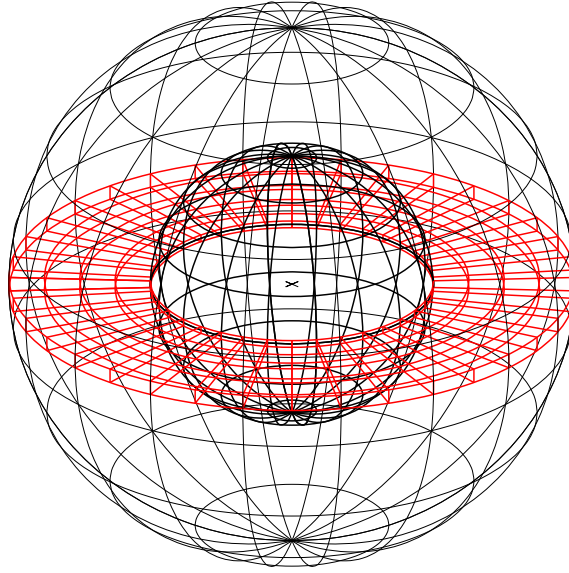


FIGURE 2.4 – L’anneau sphérique. La construction, proposée par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), est obtenue via l’intersection d’une coquille sphérique (sphère interne en traits épais, sphère externe en traits fins) par un plan puis la restriction du système de coordonnées sphériques dans cette zone. Le résultat est une portion d’anneau (en rouge), munie d’une épaisseur virtuelle $J/r = r$.

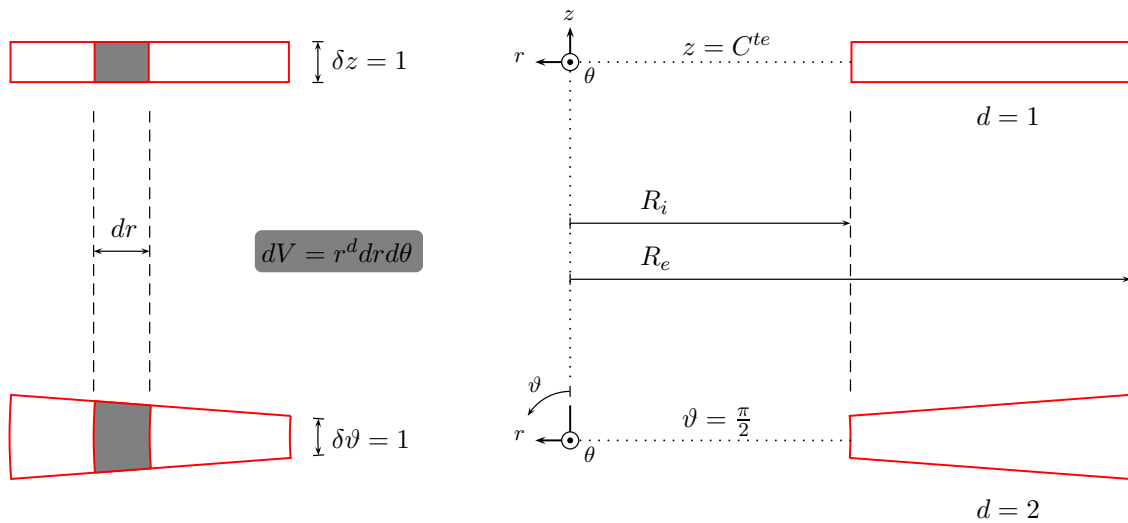


FIGURE 2.5 – Coupe à travers les anneaux cylindrique ($d = 1$) et sphérique ($d = 2$). Les volumes élémentaires sont – exagérément – représentés en gris. L’épaisseur virtuelle est constante dans le cas cylindrique et vaut $\delta z \equiv 1$, alors qu’elle varie dans le cas sphérique : $r\delta\vartheta = r$. Comme les volumes élémentaires, vus ici en coupe, s’étendent sur une longueur d’arc $r\delta\theta$ dans la direction θ , il en résulte une évolution de ces volumes en r^d , soit r^2 dans le cas sphérique. R_i et R_e sont respectivement les rayons interne et externe du domaine annulaire.

La géométrie de l’anneau sphérique possède donc le double avantage de respecter une loi d’échelle sphérique pour les volumes élémentaires et de disposer de l’intégralité (2π) de l’anneau. En effet, comme nous l’avons mentionné plus haut, le choix d’une géométrie sphérique axisymétrique permet lui aussi de respecter cette loi d’échelle, mais oblige à n’utiliser qu’un demi-anneau. Cette propriété intrinsèque introduit un biais majeur : la présence de deux frontières artificielles sur l’axe de symétrie¹⁴, imperméables et sur lesquelles doivent obligatoirement être appliquées des conditions aux limites de type miroir sur tous les champs. Le second inconvénient majeur la géométrie axisymétrique réside dans le jacobien du système, qui vaut alors $J = r^2 \sin \vartheta$: si du matériau se déplace à un rayon constant, la variation du jacobien implique alors des « cisaillements » artificiels. Le développement de mouvements de rotation solide de certaines parties du milieu (par exemple des déplacements de plaques tectoniques en surface) est alors inhibé. De même, selon [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), cet inconvénient compliquerait l’introduction d’une rhéologie qui dépend de la contrainte.

L’outil numérique développé au cours de cette thèse utilise la géométrie de l’anneau sphérique, au regard des nombreux avantages qu’offre celle-ci. À la connaissance de l’auteur, c’est la géométrie bidimensionnelle qui se rapproche le plus, actuellement, d’une géométrie sphérique complète (3D). [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) ont montré que, dans le cadre des simulations de convection thermique qu’ils ont menées, l’anneau sphérique permettait, dans la majorité des cas, d’obtenir des résultats plus proches du sphérique que n’importe quelle autre géométrie 2D courbe. Nous y reviendrons plus loin (cf. chap. 3).

Conséquences sur les équations de conservation

Les équations adimensionnées présentées au 1.3.3 peuvent maintenant être développées dans le système de coordonnées de l’anneau sphérique. Dans le modèle numérique, il a été pris soin de conserver une formulation générale avec un degré de courbure effectif d . Nous verrons que la possibilité de choisir $d = 1$ au lieu de 2 comme paramètre d’entrée permet d’accéder indirectement à une géométrie quasi-cartésienne, en plus de la configuration cylindrique classique. Cette souplesse géométrique a été particulièrement utile pour la validation du code de convection (cf. chap. 3).

14. c.-à-d. l’axe polaire du système de coordonnées sphériques

L'équation de continuité (1.121) devient ainsi, en géométrie annulaire (2D), munie des coordonnées polaires adimensionnées¹⁵ (\tilde{r}, θ) :

$$\frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{r}^d \tilde{V}_r) + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (2.5)$$

Notons que, à l'instar de ce qui se fait traditionnellement dans l'approximation de BOUSSINESQ, il est possible de définir une fonction de courant $\tilde{\psi}$ satisfaisant l'équation (2.5), telle que :

$$\tilde{V}_r = \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}^d} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_\theta = -\frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}^{d-1}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}. \quad (2.6)$$

Toutefois, pour des raisons discutées plus loin, notamment la nécessité de connaître le champ de pression dynamique, une formulation en variables primitives sera utilisée pour les équations de l'écoulement, à l'instar de ce qui a été présenté précédemment (chap. 1).

L'équation de STOKES [éq. (1.122) et (1.128)] s'écrit, puisque $\boldsymbol{\tau}$ est symétrique :

$$-\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^d \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta} + \tilde{\tau}_{\vartheta\vartheta}}{\tilde{r}} + \left(\tilde{\rho} \text{Ra} \tilde{T}' - \frac{\text{Co}}{\tilde{\gamma} \tilde{c}_p} \tilde{p}' \right) \tilde{\alpha} \tilde{g} = 0, \quad (2.7)$$

selon la direction $\hat{\mathbf{r}}$ et

$$-\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \theta} + \frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^d \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{\tau}_{r\theta}}{\tilde{r}} = 0, \quad (2.8)$$

selon la direction $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, avec les composantes :

$$\tilde{\tau}_{rr} = 2\tilde{\eta} \left(\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \tilde{r}} - \frac{1}{3} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \right), \quad (2.9)$$

$$\tilde{\tau}_{\theta\theta} = 2\tilde{\eta} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} - \frac{1}{3} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \right), \quad (2.10)$$

$$\tilde{\tau}_{\vartheta\vartheta} = 2\tilde{\eta}(d-1) \left(\frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} - \frac{1}{3} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \right), \quad (2.11)$$

$$\tilde{\tau}_{r\theta} = \tilde{\tau}_{\theta r} = \tilde{\eta} \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \theta} + \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \right) \right]. \quad (2.12)$$

15. La coordonnée θ est déjà – par définition – adimensionnée, puisqu'elle est de nature purement angulaire (c.-à-d. rapport de deux longueurs)...

L'expression de la divergence du champ de vitesse est la suivante :

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r}^d \tilde{V}_r \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta}. \quad (2.13)$$

Notons que, dans le cas de l'anneau sphérique ($d = 2$), un terme de contrainte normale purement sphérique $\tilde{\tau}_{\vartheta\vartheta}$ subsiste, *a priori* étrangement... D'un point de vue analytique, sa présence est due au fait que certains termes, dans son expression complète en coordonnées sphériques, ne s'annulent pas lorsque l'on néglige les variations en ϑ et que l'on se place à $\vartheta = \pi/2$. Physiquement, ceci peut s'interpréter comme le cisaillement pur que va subir du matériau se déplaçant radialement, en raison de la variation du rayon de courbure entre les volumes internes et périphériques – épaisseur virtuelle valant r (cf. fig. 2.5 ; contraction du volume élémentaire vers l'intérieur) ; ceci n'intervient pas en géométrie d'anneau cylindrique ($d = 1$), qui ne possède qu'un seul degré de courbure : le volume élémentaire est d'épaisseur virtuelle constante et unitaire.

Au paragraphe précédent, nous avons évoqué des cisaillements artificiels subis par le matériau lors d'un déplacement latéral en géométrie sphérique axisymétrique (jacobien variable avec la colatitude) ; il s'agit exactement du même phénomène que celui décrit ci-dessus : en plus du terme $\tilde{\tau}_{\vartheta\vartheta}$ – naturel dans ce cas – interviendrait ainsi une contrainte $\tilde{\tau}_{\phi\phi}$, ϕ étant la longitude.

Enfin, l'équation de conservation de l'énergie (1.123) devient :

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t}(\tilde{T}) = \frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{k} \tilde{r}^d \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\tilde{k}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \theta^2} + \tilde{\Phi}^{int} \frac{\text{Di}}{\text{Ra}} - \tilde{\alpha} \tilde{\rho} \text{Di}(\tilde{T} + \text{T}_0) \tilde{g} \tilde{V}_r + \tilde{\rho} \frac{\text{Ra}_H}{\text{Ra}}, \quad (2.14)$$

avec l'expression suivante pour la fonction de dissipation visqueuse :

$$\tilde{\Phi}^{int} = \tilde{\eta} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + (d-1) \left(\frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{3} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}})^2 \right] + \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \theta} + \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \right) \right]^2 \right\}. \quad (2.15)$$

Le modèle numérique de dynamique interne consiste alors à résoudre, de manière couplée et à chaque instant, les équations (2.5), (2.7), (2.8) et (2.14). Pour cela, diverses techniques issues de la mécanique des fluides et de l'ingénierie numérique ont été employées.

Réalisme et sens physique de l’anneau sphérique

L’utilisation d’une géométrie particulière comme l’anneau sphérique pose naturellement la question du sens de cette approximation géométrique. Tout d’abord, il faut bien garder à l’esprit que, malgré la conservation de certaines propriétés fondamentales de la géométrie sphérique (voir plus haut), cette approche reste bidimensionnelle, avec deux inconvénients classiques : impossibilité d’un quelconque accès prédictif à la troisième dimension et surtout diminution du nombre de degrés de liberté par rapport à une géométrie tridimensionnelle. De plus, dans les cas de convection avec chauffage interne uniquement, cette géométrie aussi bien que l’ensemble de ses consœurs 2D sont plutôt inadaptées par rapport à une géométrie 3D ; en effet, la dynamique est alors dominée par les instabilités au niveau de la couche limite thermique froide et l’écoulement possède une structure nécessairement tridimensionnelle. Les vitesses (notamment verticales) sont donc naturellement plus élevées dans le cas de l’anneau sphérique que celles rencontrées dans celui de la géométrie sphérique (Hernlund et Tackley, 2008) puisque les transferts d’énergie peuvent se faire plus facilement en 3D qu’en 2D (latéralement, dans la troisième dimension) ; dans un domaine bidimensionnel, l’écoulement est, en quelque sorte, confiné dans un plan. Il importe cependant de garder à l’esprit que le choix d’utiliser la géométrie d’anneau sphérique, dans ce travail de thèse, a été motivé par la volonté de quantifier au mieux les transferts de chaleur et notamment l’efficacité du refroidissement d’une planète et non le détail de la dynamique associée. Pour étudier cette dernière, la géométrie sphérique complète reste incontournable.

La question de l’interprétation des structures (p. ex. panaches thermiques) obtenues dans une solution bidimensionnelle est en soi intéressante : les géométries 2D peuvent être vues, en effet, comme une simplification de géométries 3D plus complexes ; le modélisateur est alors en droit de se questionner sur la nature de ces structures et leur lien avec la géométrie 3D approximée. Ainsi, un panache thermique obtenu en géométrie d’anneau cylindrique peut être vu comme un feuillet infini¹⁶ puisque la variation négligée se trouve selon l’axe z du cylindre, dont cet anneau est une coupe transversale. Un courant chaud ascendant, obtenu en géométrie sphérique axisymétrique s’interprétera, dans la troisième dimension (variations en longitude ϕ) de différentes manières selon sa position en latitude : ainsi, s’il se trouve à l’un des pôles, il s’apparentera à une structure de type panache thermique (axisymétrique) alors qu’à l’équateur, un même courant 2D équivaldra à un feuillet circulaire¹⁷, donc fermé. Dans les régions intermédiaires, la structure sera plutôt de type feuillet conique (fig. 2.6a). Cette non-équivalence entre les structures selon leur position,

16. au même titre, d’ailleurs, que dans la géométrie cartésienne 2D

17. là réside le degré de courbure supplémentaire de cette géométrie, comme celle de l’anneau sphérique, par rapport à la géométrie cylindrique classique.

intuitive, se traduit réellement dans un comportement différent : les équations de conservation associées conservent certaines des propriétés géométriques du système de coordonnées sphériques, via le jacobien (voir plus haut). L'interprétation dans la troisième dimension n'est donc pas si abstraite. Cette différence de comportement d'une même structure en différents lieux du domaine géométrique n'est bien évidemment pas propre à la géométrie sphérique complète. Cet inconvénient majeur a déjà été évoqué plus haut, notamment pour la difficulté qu'il occasionnerait dans le traitement de « plaques tectoniques » en surface.

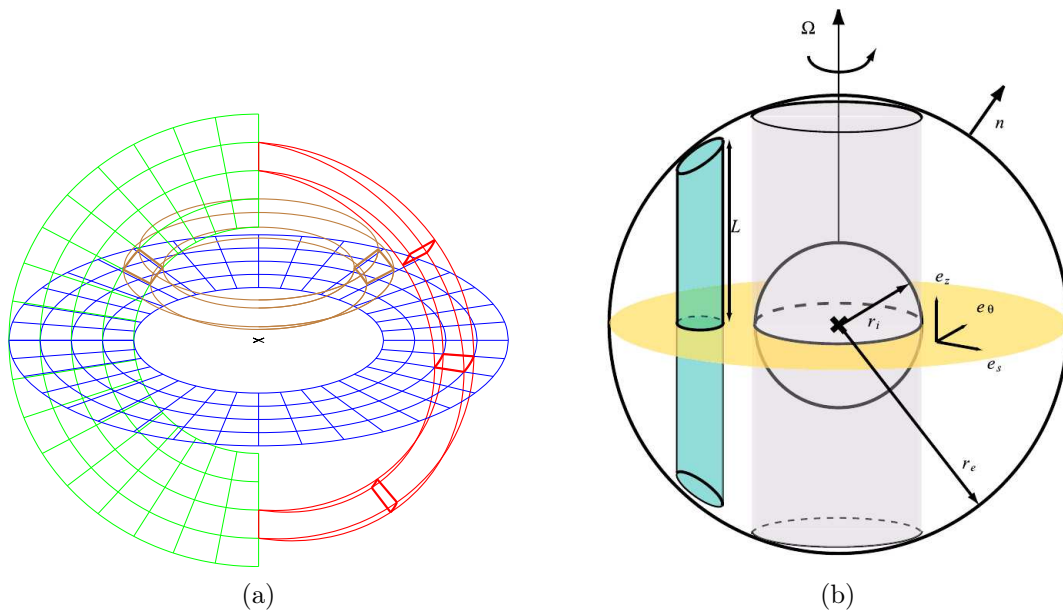


FIGURE 2.6 – *Extension latérale des géométries bidimensionnelles sphériques. (a) Volumes effectifs associés aux aires élémentaires dans le cas des géométries sphérique axisymétrique (en marron) et d'anneau sphérique (rouge). Les aires élémentaires sont volontairement exagérées ici et représentées sous forme d'un maillage; le code de couleur pour celui-ci est le même que celui de la figure 2.3. (b) Principe de la restriction au plan équatorial d'une sphère impliqué par l'approximation quasi-géostrophique pour la modélisation de la dynamique du noyau liquide de la Terre (figure de Aubert et al., 2003). Notons que la géométrie 2D utilisée pour le traitement dans le plan équatorial est de type anneau cylindrique (domaine en jaune; base locale indiquée). La zone en bleu représente la colonne sur laquelle sont intégrées les équations de la dynamique pour chaque aire élémentaire du domaine cylindrique 2D. Notons qu'il s'agit ici d'un domaine en rotation rapide (vitesse de rotation Ω indiquée) et non négligeable par rapport aux échelles de temps de la dynamique du liquide (cf. texte).*

Enfin, attardons-nous sur l'interprétation de l'anneau sphérique, puisque c'est bien cette géométrie qui a été choisie pour l'outil de convection développé. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, ce sont les variations en latitude ϑ qui sont négligées. La restriction au plan équatorial présente ainsi l'avantage d'offrir des contributions égales aux structures, quelle que soit leur position latérale. En revanche, il ne s'agit plus de feuillets axisymétriques, comme dans le cas de la géométrie sphérique axisymétrique, mais plutôt de feuillets en deux « demi-croissants », qui se prolongent jusqu'aux pôles tout en s'amincissant (fig. 2.6a). Comme le soulignent [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), cette interprétation n'est toutefois valide qu'au voisinage de l'anneau (c.-à-d. du plan équatorial du système de coordonnées sphériques) car, sinon, deux structures différentes, de localisations diamétralement opposées dans l'anneau, « se rejoindraient » et seraient donc paradoxalement confondues au niveau des pôles. L'extension latérale des structures obtenues dans l'anneau sphérique est donc, en dehors du voisinage de l'anneau sphérique, complètement indéterminée par ce qu'il se passe dans cet anneau. Un exemple particulièrement parlant, toujours cité par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), est celui d'une zone de subduction : bidimensionnelle localement, elle peut se prolonger latéralement car elle suit également la courbure de la Terre, mais dans une certaine limite puisque sa géométrie peut aussi changer de direction à la surface de la sphère. Ce dernier comportement est complètement non-contraint par la réalisation de l'approximation 2D locale de la zone de subduction.

Notons que les deux géométries 2D précédemment citées étant directement issues de la géométrie sphérique ($\partial \bullet / \partial \phi \equiv 0$ ou $\partial \bullet / \partial \vartheta \equiv 0$), elle permettent une comparaison aisée des résultats avec ceux obtenus dans une géométrie sphérique 3D. Ainsi, du volume élémentaire sphérique $dV^S = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi$ découlent les pseudovolumes élémentaires associés à la géométrie sphérique axisymétrique et à celle de l'anneau sphérique, respectivement δV^{SA} et δV^{AS} :

$$\delta V^{SA} = \int_{\phi=0}^{2\pi} dV^S = 2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta, \quad (2.16)$$

$$\delta V^{AS} = \int_{\vartheta=0}^{\pi} dV^S = 2r^2 dr d\phi. \quad (2.17)$$

Le volume total V^{CS} d'une coquille sphérique, de rayons interne et externe R_i et R_e , se retrouve alors par l'intégration sur le domaine de définition \mathcal{D}^\bullet de la géométrie 2D :

$$V^{CS} = \int_{\mathcal{D}^\bullet} \delta V^\bullet, \quad (2.18)$$

$$= \int_{r=R_i}^{R_e} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \delta V^{SA}, \quad (2.19)$$

$$= \int_{r=R_i}^{R_e} \int_{\phi=0}^{2\pi} \delta V^{AS}, \quad (2.20)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(R_e^3 - R_i^3). \quad (2.21)$$

De cette manière, si la valeur associée à chacun des points du domaine \mathcal{D}^\bullet est ramenée au pseudo-volume élémentaire δV^\bullet , une grandeur globale comme la puissance thermique totale est directement comparable avec la puissance totale obtenue en géométrie sphérique 3D. Cette cohérence n'est pas présente dans la géométrie cylindrique (ou cartésienne 2D) car les pseudo-volumes élémentaires associés sont infinis. Tout au plus peut-on dériver une puissance totale par unité d'épaisseur, mesurée selon l'axe z , via des volumes « élémentaires » d'épaisseur unité ($r^2 dr d\vartheta \times 1$).

Il faut noter que les trois géométries 2D curvilignes évoquées ci-dessus ne sont en elles-mêmes que des moyens plus ou moins artificiels pour approximer une géométrie courbe plus complexe (sphérique). Le fait de négliger les variations selon la troisième dimension n'est absolument pas justifié physiquement pour l'anneau sphérique ($\partial \bullet / \partial \vartheta \equiv 0$). L'hypothèse d'axisymétrie semblerait, elle, plus justifiée dans certains cas très particuliers, puisque, à nombre de RAYLEIGH peu élevé ou même proche du nombre de RAYLEIGH critique, la solution convective est effectivement axisymétrique. Mais ce cas idéal est loin d'être pertinent pour la réalité d'une planète. Les deux autres approches 2D classiques que sont les géométries cartésienne ou cylindrique axisymétrique (fig. 2.3), encore plus simples, paraissent plus justifiées dans une utilisation locale. En particulier, la seconde est particulièrement pertinente pour l'étude d'un panache thermique axisymétrique ou de tout autre phénomène présentant cette symétrie en bonne approximation (p. ex. [Monteux et al., 2007](#)).

Nous terminerons par citer un bel exemple dans lequel une géométrie 2D curviligne possède une justification physique : il s'agit de l'hypothèse d'équilibre quasi-géostrophique, utilisée pour la modélisation de la convection dans une coquille sphérique en rotation rapide ([Aubert et al., 2003](#)). Le principe est basé sur le théorème de TAYLOR-PROUDMAN¹⁸ qui stipule que, à l'équilibre géostrophique¹⁹, le champ de

18. démontré en prenant le rotationnel de l'équation d'équilibre géostrophique (p. ex. [Kennett et Bunge, 2008](#), p. 129).

19. c.-à-d. que les forces de pression compensent la force de CORIOLIS.

vitesse est invariant selon l'axe z de rotation. Cependant, cette propriété ne pouvant être vérifiée dans un domaine à frontières courbes (coquille sphérique, cf. fig. 2.6b), il est nécessaire d'apporter une correction pour tenir compte de la géométrie. Ainsi, le principe est de moyenniser les équations du transfert thermique selon la direction z ; les mouvements dans le plan équatorial déterminent alors entièrement ceux dans le reste de la sphère ; l'équation de vorticité moyennée est traitée dans une géométrie d'anneau cylindrique. Un terme source additionnel permet de tenir compte de la condition de frontières indéformables et de la condition limite en viscosité (pompage d'EKMAN). En outre, la conservation totale (3D) de la masse est assurée grâce à ce terme dans l'approche de [Schaeffer et Cardin \(2006\)](#).

Cette approche est donc appliquée à l'étude des mouvements dans le noyau liquide d'une planète. Cependant, la particularité de ce type de fluide, outre son nombre de PRANDTL faible ($Pr \sim 0,1$), est de produire, de par ses mouvements, un champ magnétique qui, en retour, va agir sur le fluide. L'approche quasi-géostrophique a montré sa puissance pour la modélisation de ce type de phénomènes (cf. [Schaeffer et Cardin, 2006](#), pour plus de détails).

2.1.4 La méthode des volumes finis

Principe général

La méthode des volumes finis est une technique puissante de résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle est particulièrement adaptée pour les équations de conservation non linéaires. Son origine remonte au début des années 70 ([Patankar et Spalding, 1972](#)). Classiquement utilisée en mécanique des fluides, elle repose sur deux étapes essentielles. Tout d'abord, le domaine d'étude est discr etis e en un nombre fini de volumes, appel es volumes²⁰ de contrôle. Puis l'équation à résoudre est intégrée sur chacun de ceux-là. Nous présentons ci-dessous un exemple avec l'advection d'une quantité volumique F^v d'une variable scalaire F quelconque. En formalisme eulérien, celle-ci se traduit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F^v}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla F^v, \quad (2.22)$$

avec \mathbf{V} le champ de vitesse.

Soit Ω_i un volume de contrôle générique, de surface fermée $S := \partial\Omega_i$. En utilisant l'égalité suivante :

$$\mathbf{V} \cdot \nabla F^v = \nabla \cdot (F^v \mathbf{V}) - F^v \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (2.23)$$

20. au sens topologique du terme

l'intégration de l'équation (2.22) sur Ω_i donne, pour un fluide incompressible²¹ ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}^v \Omega_i) = - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (F^v \mathbf{V}) d\Omega_i, \quad (2.24)$$

avec \mathcal{F}^v la valeur moyenne de F^v sur le volume de contrôle. En vertu du théorème d'OSTROGRADSKI, l'intégrale sur le volume de contrôle peut être transformée en une intégrale sur la surface de celui-ci. En notant \mathbf{F}_{F^v} le flux de quantité F^v qui passe à travers S et $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire normal à celle-ci et orienté vers l'extérieur de S , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}^v \Omega_i) = - \oint \mathbf{F}_{F^v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.25)$$

La quantité à droite correspond au bilan algébrique ΔF^v de la quantité F^v entrant dans le volume par unité de temps (débit). Enfin, dans le cas d'une méthode explicite à l'ordre 1 en temps, l'intégration sur un certain intervalle de temps δt permet de connaître la variation de la valeur moyenne \mathcal{F}^v entre deux instants discrets successifs :

$$\mathcal{F}^v(t + \delta t) = \mathcal{F}^v(t) + \frac{1}{\Omega_i} \int_t^{t+\delta t} \Delta F^v dt. \quad (2.26)$$

Un raisonnement similaire peut être mené pour la diffusion de F^v . De plus il faut tenir compte des sources et/ou puits de cette même quantité. On tient ainsi l'ensemble des équations de la mécanique des fluides nécessaires pour l'étude de la convection thermique. L'essence de la méthode des volumes finis n'est donc rien d'autre qu'un bilan de flux (advectif et diffusif) et de production de quantité F^v au sein de volumes de contrôle. Toute la difficulté de la méthode consiste en une évaluation correcte de ces flux. L'avantage incontestable est que cette technique est conservative, de par sa nature même.

À ce titre, on notera que le cheminement présenté ci-dessus correspond à l'inverse de celui qui est généralement utilisé pour parvenir aux équations de conservation locales (cf. 1.3.2); celles-ci sont, en effet, également issues d'un bilan de quantité sur un volume quelconque qui est ensuite ramené à un volume infinitésimal. Ce sont donc les formes intégrales des équations de conservation qui sont utilisées dans les méthodes en volumes finis. Nous laisserons le mot de la fin à Patankar (1980) :

21. ou, du moins, à écoulement incompressible

Indeed, deriving the control-volume discretization by integrating the differential equation over a finite control volume is a rather roundabout process, much like preparing mashed potatoes from dehydrated potato powder. [. . .] It is useful to imagine ourselves to be in the pre-calculus days; then the control-volume equation would have been our only way of stating the conservation principle.

Volumes finis, différences finies

Comme nous le verrons plus loin, les opérateurs différentiels, dans les méthodes aux volumes finis, sont très souvent évalués avec des approximations aux différences finies. Ceci n'en fait pas pour autant une méthode aux différences finies proprement dite. Celle-ci n'a, en effet, aucune garantie d'être conservative ; elle ne repose que sur l'évaluation des opérateurs différentiels par différences finies en utilisant des valeurs sur un maillage constitué de nœuds discrets. La figure 2.7 présente cette importante différence conceptuelle entre les deux méthodes. Un même domaine d'étude sera ainsi *échantillonné* par des nœuds dans le cas des différences finies ou bien *subdivisé – pavé* – en des cellules dans le cas des volumes finis, mais aussi dans celui des éléments finis.

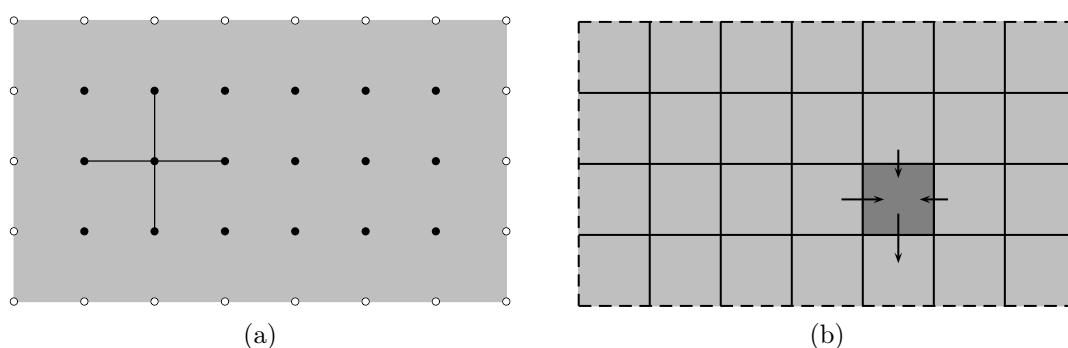


FIGURE 2.7 – *Deux techniques de discrétisation d'un domaine géométrique. Un même espace peut être échantillonné par un ensemble fini de points ou nœuds (a) – principe des méthodes en différences finies – ou bien pavé en une certaine partition spatiale (b) – principe des méthodes aux éléments finis, dont la technique des volumes finis peut être vue comme un cas particulier (cf. texte). Pour la première méthode, les opérateurs différentiels en un point donné sont approximés par des combinaisons arithmétiques des valeurs associées à ce point et à certains de ses voisins, comme représenté en (a). Dans le cas des volumes finis, un bilan de quantité – flux, sources/puits – est individuellement effectué sur des volumes de contrôle [(b), en gris foncé] qui peuvent ou non coïncider avec la partition spatiale de base. Dans les deux cas, un traitement particulier doit être appliqué aux bords du domaine [(a), nœuds blancs ; (b), en tiretés].*

Toutefois, dans les deux cas, le résultat final est de nature comparable ; une approximation de la solution (à une précision souhaitée) est connue par :

- la valeur « exacte » en chaque nœud pour les différences finies ;
- la valeur moyenne sur chaque volume pour les volumes finis, *définie* au centre de celui-ci.

Dans les deux cas, toute tentative de récupérer une valeur autre pour la solution requiert une certaine interpolation, que ce soit pour la variation de la solution entre les nœuds ou bien au sein d'un volume ; elle est donc subjective. Notons que de telles interpolations sont cependant réalisées pour un schéma discret donné (par exemple pour l'évaluation d'une température à l'interface entre deux volumes) ; en revanche, il n'y a aucune raison *a priori*, de choisir, pour une quantité donnée, le même type d'interpolation dans les différents schémas (advection de la quantité, diffusion, etc.) ou même pour les divers opérateurs différentiels nécessaires pour décrire un phénomène. Nous pouvons exagérer quelque peu en affirmant que tous les schémas d'interpolation se valent *a priori* ; il n'y a donc pas de raison de privilégier un type plutôt qu'un autre pour la détermination *a posteriori* d'une quantité en dehors des lieux où celle-ci est définie. Ceci est donc bien entendu valable pour la représentation visuelle de cette valeur. C'est dans cette optique que seront présentés les différents résultats obtenus avec l'outil en volumes finis développé dans cette étude. La figure 2.8 illustre notre propos en présentant l'effet d'une interpolation « abusive ». Ainsi, pour un exemple de solution – ici un champ de température – obtenue avec une basse résolution (32×32), la représentation correspondant à celle que nous adopterons est visible à la figure 2.8a ; une visualisation interpolée plus esthétique mais trompeuse est présentée à la figure 2.8b.

Une technique de visualisation idéalement honnête serait de ne représenter les valeurs d'un champ qu'en chacun des centres des cellules, lieux où elles sont définies. Cette représentation, parfaitement adaptée pour les résultats d'une méthode aux différences finies, laisserait toutefois penser que ces valeurs ne seraient valables qu'en ces seuls points, et non pour tout un volume autour de chacun d'entre eux. D'où le choix fait ici de représenter la valeur moyenne du champ – par définition constante dans un volume de contrôle donné – sur toute la cellule. Il est évident que ces deux modes d'affichage deviennent visuellement de plus en plus semblables à mesure que le maillage est affiné ; la question du choix ne se pose donc plus pour des maillages suffisamment fins par rapport à l'échelle d'observation.

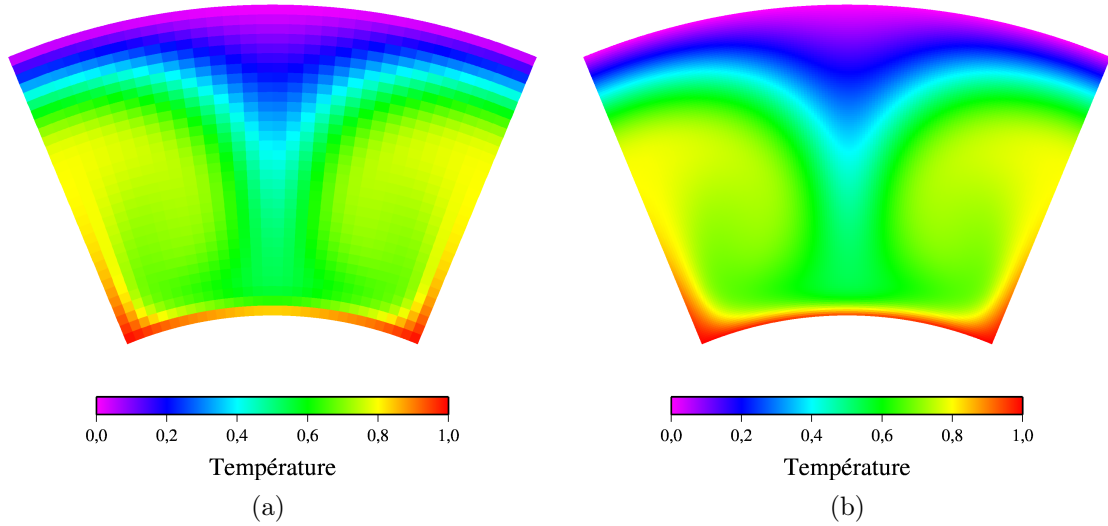


FIGURE 2.8 – *Effet d’une interpolation artificielle dans la visualisation. Champ de température obtenu à convergence sur un maillage grossier ($n_r = n_\theta = 32$, pour $f = 0,55$, $d = 2$, $\Delta\theta = \pi/4$; cf. 2.1.5 pour la définitions de ces grandeurs) pour les paramètres $Ra_b = 10^6$, $\Upsilon = 8$ (convection de RAYLEIGH-BÉNARD, approximation de BOUSSINESQ; cf. chap. 1). La figure (a) représente simplement la valeur moyenne de la température pour chaque volume de contrôle; dans la figure (b), chacun d’entre eux est artificiellement subdivisé en 5 dans les directions $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – soit un « pseudo-maillage » de $25 \times 32 \times 32$ cellules : dans ces sous-cellules, la valeur est calculée par interpolation bilinéaire. La représentation la moins esthétique mais cependant la moins trompeuse est celle illustrée en (a). Elle permet notamment de garder à l’esprit la résolution spatiale – garante de la précision numérique – utilisée pour parvenir au résultat visualisé.*

Avantages et inconvénients par rapport aux autres méthodes

Deux autres méthodes générales sont classiquement employées pour la résolution des équations aux dérivées partielles en mécanique des fluides : la technique des éléments finis et les méthodes spectrales. La première repose, à l'instar de son homologue aux volumes finis, sur la discrétisation du domaine spatial \mathcal{D} en un nombre fini N d'éléments²² Ω_i :

$$\bigcup_{i \in [1, N]} \Omega_i := \mathcal{D}. \quad (2.27)$$

Pour un problème bidimensionnel, ceux-ci sont souvent triangulaires ou quadrangulaires. L'étape suivante est une technique très générale appelée parfois méthode des résidus pondérés : l'équation différentielle est, dans un premier temps, multipliée par une certaine fonction test, w , puis intégrée sur le domaine spatial \mathcal{D} . L'équation obtenue est appelée formulation variationnelle du problème d'origine dont l'équation différentielle est dite formulation forte. Les solutions de la première équation sont aussi solutions de la seconde²³. Les champs inconnus – par exemple la température – sont alors remplacés par une décomposition suivant une certaine base de fonctions.

La méthode des éléments finis est un cas particulier de celle résumée ci-dessus : elle utilise des polynômes – notamment les polynômes de LAGRANGE – définis localement, comme base de fonctions pour chaque Ω_i . Chacun des éléments est, au sein du maillage, constitué d'un certain nombre de nœuds sur lesquels « s'appuient » les polynômes. La formulation variationnelle, après quelques étapes de calcul supplémentaires, est alors ramenée à un ensemble de n équations discrètes formant un système linéaire à résoudre, dont chacune des n inconnues est la valeur de la fonction en un nœud. L'avantage certain est que la détermination des n valeurs discrètes de cette fonction permet de reconstruire, via les polynômes, la solution sur tout le domaine \mathcal{D} . Ce point est une différence fondamentale par rapport aux méthodes aux différences ou aux volumes finis, purement discrètes par nature : la grandeur recherchée est ici définie en tout point du domaine spatial²⁴. Ceci est un avantage considérable pour le calcul différentiel ; par exemple, pour calculer l'intégrale de la variable cherchée sur une région donnée, nul besoin (théoriquement) de discrétiser

22. L'auteur confondra volontairement la notion d'élément et de sous-ensemble du domaine \mathcal{D} , tout en ayant conscience que cela ferait bondir au plafond tout mathématicien ou « élément-finissien ». De plus, la notation \mathcal{D} ou Ω sera indifféremment utilisée pour les éléments ou leurs volumes associés ; le même type de liberté sera pris pour leurs bords et les surfaces associées. . .

23. La formulation variationnelle a cependant l'avantage de permettre l'utilisation de propriétés issues de l'analyse fonctionnelle.

24. Ceci est dû au fait que la méthode des éléments finis suppose *a priori* (et localement, indépendamment pour chaque élément) la nature de la fonction – un polynôme – pour la variable considérée, ce que ne font pas les deux autres méthodes.

ledit domaine comme en différences/volumes fini(e)s. Toutefois, il faut noter un inconvénient qui peut devenir important dans certains contextes : toutes les équations aux dérivées partielles ne possèdent pas une formulation variationnelle.

La méthode des volumes finis peut, à son tour, être vue comme un cas particulier, cette fois-ci de celle des éléments finis (Patankar, 1980). En effet, en choisissant une fonction-test w définie localement telle que, pour chaque ensemble Ω_i , w soit égale à la fonction indicatrice de celui-ci²⁵ :

$$w(\Omega_j) = \delta_{ij}, \quad \forall \Omega_i \subset \mathcal{D}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad (2.28)$$

avec δ_{ij} le symbole de KRONECKER, on retombe sur la méthode des volumes finis puisque l'équation différentielle se retrouve simplement intégrée sur chacun des éléments, appelés dans ce cas volumes de contrôle.

La méthode des volumes finis hérite donc de la souplesse géométrique des éléments finis : elle permet de discrétiser un domaine spatial à géométrie complexe [cf., p. ex., 2.1.2, pour le programme GAIA développé par Hüttig et Stemmer (2008a,b)]. De plus, bien souvent, les opérateurs différentiels sont approximés en différences finies ; la forme des équations discrètes reflète alors assez fidèlement celle des équations de conservation d'origine. Ce « sens physique » sur lequel repose la technique des volumes finis n'est pas étranger au caractère conservatif de ces méthodes. Nous reviendrons sur ce point au 2.2.1.

Mentionnons un dernier avantage des méthodes aux volumes finis. Dans le cas de systèmes de coordonnées et de maillages orthogonaux – en particulier en géométrie cartésienne, les équations discrètes s'apparentent (très) fortement à celles qui seraient obtenues avec une méthode aux différences finies pure ; elles ont donc l'avantage de posséder des expressions relativement simples, permettant de garder en permanence une intuition des phénomènes en jeu à la seule lecture des équations discrètes. En revanche, malgré leur ressemblance dans ce cas géométrique précis, elles ne sont pas pour autant confondues. Il importe de garder à l'esprit que la technique des volumes finis présente l'avantage d'être conservative. De ce fait, certains auteurs (p. ex. Gerya, 2010) parlent, dans ce cas, de différences finies conservatives. Notons que le maillage associé à une grille orthogonale est généralement structuré (connectivité régulière des éléments). La disposition spatiale relative des volumes peut alors être facilement mise en correspondance avec la disposition en mémoire des valeurs associées, sans nécessiter de stocker explicitement des informations sur leur positionnement. Ceci n'est bien entendu pas partagé par les maillages déstructurés, ce qui peut devenir problématique en terme de mémoire dans le cas de géométries tridimensionnelles.

25. cf. note 22, p. 94.

Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de Patankar (1980), qui constitue une excellente introduction à la « philosophie » des volumes finis (ainsi qu'à l'algorithme de couplage vitesse-pression utilisé dans cette étude, cf. 2.2.2). Plus rattachés aux thématiques de la géodynamique, le récent ouvrage de Ismail-Zadeh et Tackley (2010), ainsi que le chapitre de Zhong *et al.* (2007) permettent de se faire une bonne idée des autres méthodes. Enfin, le livre de Gerya (2010) traite en détail l'application des différences finies conservatives en géodynamique. Certaines des réflexions présentées dans cette section ont ainsi été alimentées par la lecture de ces ouvrages.

Nous passerons ici sous silence les autres types de méthodes existant (spectrales, pseudo-spectrales, éléments spectraux, volumes spectraux, etc.), pour lesquelles le lecteur pourra éventuellement trouver des éléments plus ou moins détaillés dans les divers ouvrages cités précédemment.

2.1.5 Maillage du modèle

Le domaine géométrique

Le domaine géométrique \mathcal{D} sur lequel sont résolues les équations de conservation dans l'outil élaboré au cours de cette thèse – éq. (2.5), (2.7)-(2.8) et (2.14) – est constitué d'un secteur d'anneau, de rayon interne R_i , de rayon externe R_e et d'amplitude angulaire $\Delta\theta$:

$$\mathcal{D} := \{(\tilde{r}, \theta) \in [R_i; R_e] \times [0; \Delta\theta]; R_i/R_e = f, f \in]0; 1[, \Delta\theta \in]0; 2\pi]\}, \quad (2.29)$$

La quantité f est le rapport de courbure²⁶ de \mathcal{D} ²⁷. Comme le calcul est fait dans un formalisme adimensionnel basé, pour les longueurs, sur l'épaisseur du milieu étudié – le manteau d'une planète (cf. 1.3.2) – il est nécessaire que la différence $R_e - R_i$ soit égale à l'unité. Une valeur imposée de f implique donc les expressions uniques suivantes pour les rayons interne et externe :

$$R_i = \frac{f}{1-f} \quad \text{et} \quad R_e = \frac{1}{1-f}. \quad (2.30)$$

Le domaine est ainsi entièrement caractérisé par la donnée du couple $(f, \Delta\theta)$. La figure 2.9 présente une visualisation de celui-ci. Sur celle-ci apparaissent les diffé-

26. Rappelons que la *courbure* d'une portion de courbe de rayon de courbure r est $1/r$; $f = \frac{1}{R_e} / \frac{1}{R_i}$ est donc un *rapport* de courbe...

27. Pour le manteau de la Terre, on a $f \approx 0,55$, si R_i et R_e sont identifiés respectivement au rayon du noyau et à celui de la planète (croûte négligée ou non).

rentes parties Γ_\bullet du bord $\partial\mathcal{D}$ du domaine :

$$\partial\mathcal{D} := \Gamma_i \cup \Gamma_e \cup \Gamma_g \cup \Gamma_d. \quad (2.31)$$

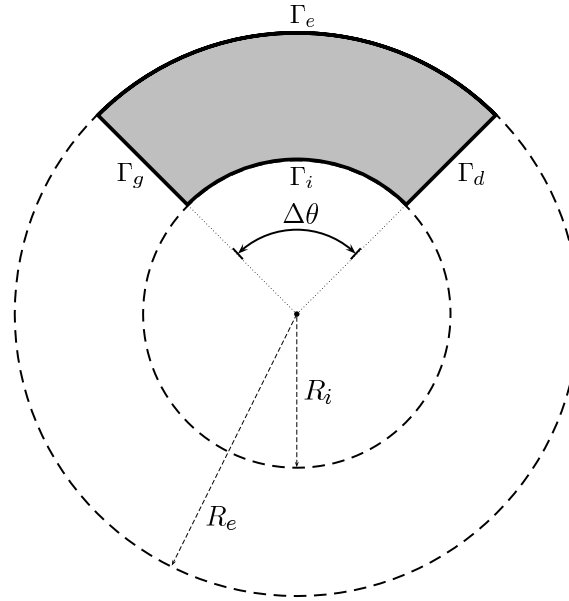


FIGURE 2.9 – *Domaine géométrique utilisé pour le modèle de transferts de chaleur. Il s'agit d'un secteur d'anneau – représenté ici en gris – d'amplitude angulaire $\Delta\theta$ et de rayons interne et externe R_i et R_e . Les bords interne, externe, gauche et droit sont notés respectivement Γ_i , Γ_e , Γ_g et Γ_d , et représentés en traits épais. Cette figure correspond au cas $f = 0,55$ et $\Delta\theta = \pi/2$.*

On définit alors le rapport d'aspect R_A du domaine :

$$R_A := \frac{\frac{R_i+R_e}{2} \Delta\theta}{R_e - R_i} \quad \text{soit} \quad R_A = \frac{1+f}{1-f} \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (2.32)$$

Discrétisation du domaine géométrique

La discrétisation du domaine repose sur la définition de volumes de contrôle (Pantankar, 1980) pour chaque variable primitive : n_r volumes dans la direction radiale, n_θ dans la direction orthoradiale. Ces variables, au nombre de quatre dans notre cas bidimensionnel, peuvent être subdivisées en deux groupes. Un maillage de type entrelacé sera ainsi utilisé, avec les pressions \tilde{p}' et températures \tilde{T} définies au centre des mailles et les composantes des vitesses, $\tilde{\mathbf{V}}_r = \tilde{V}_r \hat{\mathbf{r}}$ et $\tilde{\mathbf{V}}_\theta = \tilde{V}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$, définies sur les centres des bords des cellules. Notons que la première utilisation de ce type de maillage remonte aux travaux de Harlow et Welch (1965). La figure 2.10 présente un tel maillage. Les frontières de cellules sont systématiquement orthogonales à l'une

des deux directions ($\hat{\mathbf{r}}$ ou $\hat{\boldsymbol{\theta}}$). Ce type d'approche présente un avantage majeur par rapport à un maillage collocatif. Il permet de faire intervenir des nœuds voisins dans l'expression discrète (cf. 2.2) du gradient de pression présent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Non seulement un gain en précision est obtenu, mais surtout des oscillations artificielles de pression d'une cellule à l'autre (champ « en échiquier »), qui peuvent intervenir au cours d'un processus itératif, ne restent pas sans effet ici et peuvent être corrigées (annulées) par ledit processus ; un maillage collocatif simple pour $\tilde{\mathbf{V}}$ et \tilde{p}' considérerait, en effet, un tel champ en échiquier comme uniforme... Un problème très similaire intervient pour l'équation de continuité : le maillage entrelacé permet d'éviter les champs de vitesse artificiellement oscillants et évite ainsi un découplage artificiel des vitesses et des pressions.

La conséquence majeure est que toutes les dérivées intervenant dans les équations de continuité et de mouvement sont précises à l'ordre deux en espace²⁸ et font intervenir des nœuds adjacents. Cette disposition entrelacée offre ainsi une précision en espace quasi-équivalente à celle qui serait obtenue avec un positionnement centré classique deux fois plus dense (cf., p. ex., Brandt et Livne, 2011). En fait, pour les dérivées premières développées en différences finies à l'ordre 2 en espace²⁹, on peut montrer que, pour un maillage régulier, l'erreur commise est quatre fois plus faible que celle qui serait obtenue, au même ordre d'approximation, sur un maillage collocatif (p. ex. Fornberg, 1998).

Enfin, nous verrons plus loin (2.2) qu'un dispositif entrelacé offre deux avantages considérables pour la stabilité numérique dans le cadre des problèmes à viscosité variable.

Raffinement géométrique radial

Au cours du processus de convection thermique d'un fluide, la distribution de la température est telle que les plus grandes variations de celle-ci sont présentes au voisinage des panaches et dans les couches limites thermiques. Ces dernières, pour une convection de type RAYLEIGH-BÉNARD, sont disposées au voisinage des deux surfaces isothermes, sur une épaisseur d'autant plus fine que la convection est vigoureuse. Dans le cœur convectif, les variations de température sont généralement plus modérées, du moins pour une convection de type purement thermique. On comprend dès lors que la discrétisation spatiale doit être d'autant plus fine dans les couches limites thermiques. Dans un domaine annulaire ($d = 1$ ou 2) ou sphérique, la dissymétrie des surfaces interne et externe – la CMB et la surface de la planète – conduit, de part l'égalité des puissances à l'équilibre thermique, à un flux de chaleur $1/f^d$ fois plus fort dans la couche limite thermique chaude. Un soin particulier doit

28. Ceci n'est rigoureusement valable que pour un maillage uniforme

29. ce qui sera le cas des schémas en volumes finis utilisés dans cette étude

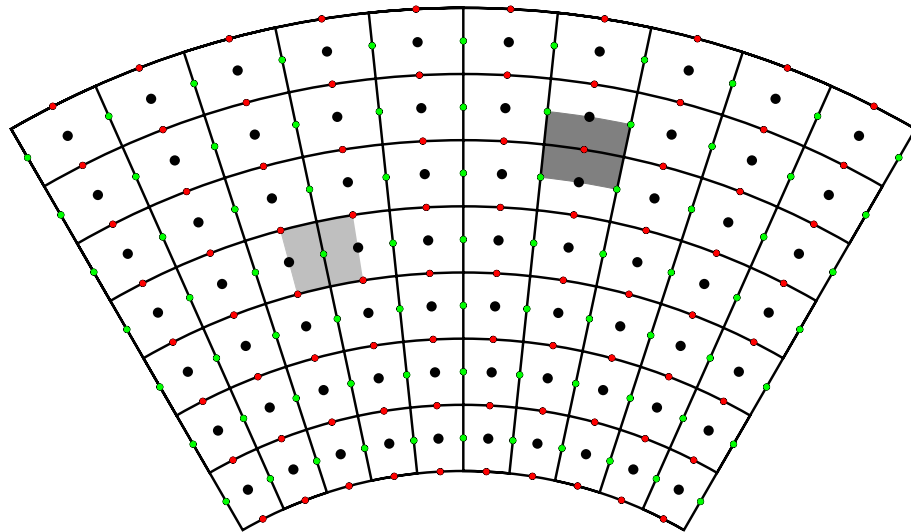


FIGURE 2.10 – Maillage entrelacé utilisé dans cette étude. Le découpage principal correspond aux volumes de contrôle des pressions et températures, définies en chaque point de symbole \bullet . Les quantités \tilde{V}_r et \tilde{V}_θ sont décalées pour être définies sur les faces des mailles principales (symboles \circ , respectivement rouges et verts). Les volumes de contrôle de \tilde{V}_r et \tilde{V}_θ sont également décalés; un exemple de chaque type est visible, respectivement en gris et gris clair. Dans cette figure, une grille à faible résolution $(n_r, n_\theta) = (7, 10)$ est utilisée pour discrétiser un domaine défini par $f = 0, 49$ et $\Delta\theta = \pi/3$.

donc être apporté au traitement numérique de cette zone.

Pour ce faire, le maillage choisi, décrit plus haut, a été muni d'un pas radial variable de discrétisation spatiale $\{\delta\tilde{r}_i\}_{i=1,n_r}$. Le pas latéral, $\delta\theta$, a été choisi constant ; il n'y a, en effet – dans les cas simples de convection thermique traités dans cette étude – aucune raison *a priori* de privilégier la discrétisation latérale d'une région plutôt qu'une autre puisque l'anneau entier sera considéré dans la majeure partie des cas. En revanche, des gradients importants (température, viscosité) peuvent apparaître dans des zones très variables au cours du phénomène de convection. Un maillage invariant dans le temps, même raffiné aussi latéralement, perd alors son intérêt. Dans ce cas, une description fine des phénomènes associés nécessiterait un maillage de type adaptatif, c'est-à-dire qui se verrait raffiné en fonction des contrastes locaux de champs comme la température (cf., p. ex., [Leng et Zhong, 2011](#)) ; des phénomènes à différentes échelles peuvent ainsi être traités – dans l'idéal – avec une précision numérique comparable. Ceci est valable en particulier dans l'étude de la convection de type thermo-chimique. C'est l'objet des techniques de type AMR (*Adaptive Mesh Refinement*), bien connues des mécaniciens des fluides.

En outre, le raffinement de maillage permet d'atteindre une résolution souhaitée dans certaines régions à forts gradients et de garder une résolution plus grossière ailleurs. Ainsi, un gain significatif est réalisé en temps de calcul comme en espace mémoire. En effet, une résolution spatiale suffisamment fine dans les couches limites thermiques, pour un maillage à pas constant, implique immédiatement un grand nombre de cellules et donc d'équations à résoudre.

Nous présentons maintenant la technique simple utilisée dans l'outil de cette thèse pour raffiner radialement la résolution. L'idée-clé est que le pas $\delta\tilde{r}_i$ ne doit pas varier trop d'une cellule à la suivante. Des exemples de maillages raffinés ou non sont présentés à la figure [2.11](#). En effet, comme nous le verrons plus loin ([2.2.1](#)), la discrétisation choisie pour les équations de conservation repose notamment sur l'approximation *locale* (pour les quantités interpolées dans les équations discrètes) :

$$\delta\tilde{r}_i \approx \delta\tilde{r}_{i+1}, \quad i \in \llbracket 1, n_r - 1 \rrbracket. \quad (2.33)$$

Ainsi, pour un facteur de croissance R de l'étendue radiale de deux cellules voisines, on peut se donner la suite géométrique simple suivante, de raison R :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 := \delta\tilde{r}_k \\ u_{i+1} := R u_i \end{cases}, \quad (2.34)$$

restreinte à l'ensemble $\llbracket 0, N_r - 1 \rrbracket$ et telle que $\sum_{n=0, N_r-1} u_n = (R_e - R_i)N_r/n_r$. k et N_r sont des valeurs génériques. Pour un maillage raffiné symétriquement dans sa partie interne et dans sa partie externe (fig. [2.11c](#)), on choisira successivement ($k = n_r/2, N_r = n_r/2$) puis ($k = n_r/2 + 1, N_r = n_r/2$) pour procéder aux deux

raffinements symétriques³⁰. Si l'on ne souhaite raffiner que la partie interne (fig. 2.11d) ou externe du domaine, on prendra respectivement ($k = 1, N_r = n_r$) ou ($k = n_r, N_r = n_r$). Ainsi, pour un facteur de raffinement \mathcal{F} souhaité entre la première et la N_r -ième cellule de la zone à raffiner progressivement, les propriétés élémentaires des suites géométriques conduisent à :

$$\delta\tilde{r}_k = (R_e - R_i) \frac{N_r}{n_r} \frac{1 - R}{1 - R^{N_r}}, \quad (2.35)$$

avec

$$R = \mathcal{F}^{\frac{1}{N_r - 1}}. \quad (2.36)$$

Cette formulation, qui a le mérite d'être simple, ne permet toutefois qu'un raffinement relatif (c.-à-d. d'un facteur donné entre deux zones). Une approche plus judicieuse consiste à se donner un facteur de raffinement absolu pour une zone donnée. Ainsi, \mathcal{F} sera cette fois-ci défini de telle sorte que la taille de la cellule de résolution la plus fine corresponde à $1/\mathcal{F}$ fois celle qui serait obtenue pour un maillage à pas constant $\delta\tilde{r}$ avec le même nombre de cellules :

$$\mathcal{F} := \frac{\delta\tilde{r}}{\delta\tilde{r}_k} = \frac{R_e - R_i}{n_r \delta\tilde{r}_k}. \quad (2.37)$$

L'équation (2.35) reste valable, puisqu'on souhaite toujours un raffinement progressif, mais la condition (2.36) est remplacée par la précédente, ce qui conduit à l'équation :

$$R^{N_r} - \mathcal{F}N_r R + \mathcal{F}N_r - 1 = 0. \quad (2.38)$$

Ainsi, dans le cadre d'un raffinement absolu, la détermination du facteur de croissance R du pas radial n'est pas aussi simple que dans le cas d'un raffinement relatif [éq. (2.36)]; la résolution de l'équation polynomiale (2.38) doit être effectuée numériquement, puisque son degré est nécessairement élevé (typiquement $N_r = 16$ dans le « meilleur » des cas). Dans le cadre de l'outil numérique développé au cours de cette thèse, une méthode itérative de NEWTON-RAPHSON est utilisée, celle-ci étant à la fois simple et suffisamment efficace pour ce type de problème. Il faut toutefois prendre garde à choisir une solution initiale qui soit suffisamment éloignée de la solution triviale $R = 1$, mais aussi suffisamment proche de celle qu'on attend (on choisira typiquement³¹ 1,1). Rappelons que, le maillage étant invariant au cours d'une simulation, ce calcul n'est effectué qu'une seule fois (initialisation des facteurs géométriques); la valeur de R est toujours calculée jusqu'à la précision numérique.

30. Dans ce cas, un raffinement au centre peut être obtenu avec $R < 1$.

31. On prendra garde à choisir des raffinements, pour une résolution donnée, qui ne conduisent pas à une valeur excessivement élevée de R , afin de ne pas trop s'éloigner de l'approximation (2.33).

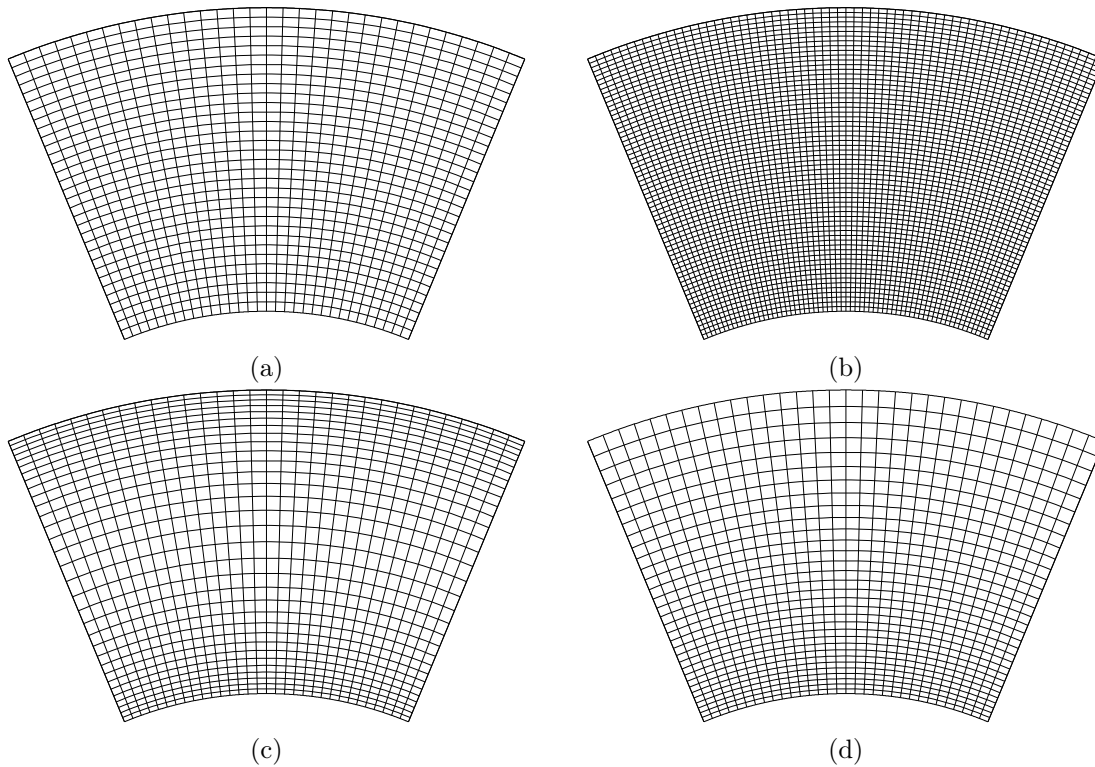


FIGURE 2.11 – Le raffinement radial du maillage. Exemple de différentes discrétisations spatiales pour un domaine annulaire restreint ($\Delta\theta = \pi/4$, $f = 0,55$; $R_A \approx 1,35$), avec ou sans raffinement absolu. (a) Maillage 32×32 simple. (b) Maillage 64×64 simple. (c) Maillage 32×32 raffiné d'un facteur 2 au sommet et à la base; $R \approx 1,086$. (d) Maillage 32×32 raffiné d'un facteur 2 à la base uniquement; $R \approx 1,041$.

Flexibilité du domaine discrétisé

La combinaison d'un domaine géométrique tel que défini plus haut et de l'approche généraliste annulaire de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) permet d'accéder à plusieurs configurations bidimensionnelles. Ainsi, une portion d'anneau ($\Delta\theta \in]0; 2\pi[$) ou bien tout l'anneau, cylindrique (si $d = 1$, cf. [2.1.3](#)) ou sphérique ($d = 2$), peuvent être utilisés. De plus, pour le cas $d = 1$, une petite portion d'anneau va asymptotiquement se rapprocher d'un domaine cartésien au fur et à mesure que f va tendre vers l'unité. Le cas cartésien parfait serait atteint pour la limite $f \rightarrow \infty$, mais les rayons R_i et R_e deviendraient infinis. . . Quoi qu'il en soit, une valeur de f suffisamment proche de 1 permet d'obtenir des résultats dignes d'une approche purement cartésienne (cf. [3.3.1](#)). Cependant, la rigueur fait que l'on attribuera le qualificatif de « pseudo-cartésienne » à ladite approche.

La proximité d'une telle géométrie à une vraie géométrie cartésienne peut être appréhendée simplement, via la mesure de la variation relative $\Delta_{A_{ie}}$ d'une surface élémentaire (ou d'un volume « élémentaire » d'épaisseur unité) entre les rayons R_i et R_e . Dans cette géométrie simple ($d = 1$), cela revient à mesurer la variation relative des deux rayons :

$$\Delta_{A_{ie}} := \frac{R_e - R_i}{R_i} \quad \text{soit} \quad \Delta_{A_{ie}} = \frac{1}{f} - 1. \quad (2.39)$$

Cette mesure, valable pour des valeurs élémentaires, fournit donc, en quelque sorte, la valeur maximale de la précision qui pourra être atteinte par rapport à un domaine (maillage) cartésien. Le tableau [2.1](#) ci-dessous donne les valeurs de cette quantité pour une certaine gamme de rapports de courbure f .

TABLE 2.1 – *Mesure de la proximité d'un domaine annulaire à un domaine cartésien. Pour chaque valeur du rapport de courbure f , la variation relative $\Delta_{A_{ie}}$ d'un volume élémentaire entre les rayons interne et externe est indiquée.*

f	0,980	0,990	0,995	0,999	0,9999
$\Delta_{A_{ie}}(\%)$	2,04	1,01	0,50	0,100	0,01000

Pour les calculs cartésiens présentés dans cette thèse (cf. chap. [3](#)), sauf mention contraire, on prendra donc $f = 0,9999$.

Notons enfin que le domaine géométrique défini plus haut permet aussi de se ramener facilement à la géométrie cylindrique ($d = 1$) redimensionnée, utilisée dans l'étude de [van Keken \(2001\)](#), présentée au [2.1.2](#) (p. 78). Ainsi, en changeant les rayons interne et externe pour la définition de l'espace \mathcal{D} :

$$R_i = \frac{f^2}{1 - f^2} \quad \text{et} \quad R_e = \frac{1}{1 - f^2}, \quad (2.40)$$

on obtient un domaine annulaire dont le rapport des « surfaces » interne et externe – le simple quotient des rayons, en cylindrique – est égal à celui qui serait obtenu en géométrie sphérique, c'est-à-dire à f^2 , tout en préservant une différence unitaire entre R_e et R_i .

2.2 Résolution de l'équation de Stokes

2.2.1 Cœur du problème

L'équation de conservation de la quantité de mouvement adoptée pour décrire l'écoulement du manteau est, on l'a vu (cf. [1.3.2](#)), dépourvue de termes inertiels en raison d'un nombre de PRANDTL considéré comme infini. Elle possède la forme générale adimensionnée suivante :

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = -\tilde{f}_v, \quad (2.41)$$

soit, en développant le tenseur des contraintes visqueuses, $\tilde{\tau}$, en fonction de celui des vitesses de déformation, $\tilde{\mathbf{D}}$, pour un fluide newtonien dans l'approximation de STOKES :

$$\tilde{\nabla} \cdot \underbrace{\left\{ 2\tilde{\eta} \left[\tilde{\mathbf{D}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\mathbf{D}}) \right] \right\}}_{\tilde{\tau}} - \tilde{\nabla} \tilde{p}' = -\tilde{f}_v. \quad (2.42)$$

La forme utilisée dans cette étude, exprimée en coordonnées polaires pour une géométrie annulaire, est présentée au [2.1.3](#) [éq. (2.7) et (2.8)]. L'approximation en nombre de PRANDTL infini supprime, comme on l'a vu, la principale non-linéarité du problème – terme advectif dans la dérivée particulaire du champ de vitesse – et fait que l'évolution temporelle des transferts de chaleur dans le manteau est entièrement contrôlée par l'équation de la chaleur. La résolution de l'équation de STOKES revient donc à calculer un état d'équilibre du champ tensoriel des contraintes $\tilde{\sigma}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}_n)$ sur le domaine \mathcal{D} , à un instant \tilde{t}_n donné, pour un certain champ de flottabilité $\tilde{f}_v(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}_n)$ et un champ scalaire³² de viscosité $\tilde{\eta}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}_n)$. Le champ des vitesses $\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{r}, \theta, \tilde{t}_n)$ associé

32. Rappelons que seuls des fluides isotropes sont considérés dans cette étude.

à cet état d'équilibre doit, de plus, vérifier la contrainte forte qu'est l'équation de continuité caractérisant un régime stationnaire ($\text{Pr} \rightarrow \infty$), pour un profil de masse volumique de référence donné $\tilde{\rho}(\tilde{r})$:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = -\frac{\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} = -\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial r} \tilde{V}_r. \quad (2.43)$$

Principales difficultés

Deux termes a priori complexes dans l'équation (2.42) – $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ et $\tilde{\mathbf{f}}_v$ – requièrent toute notre attention. Le premier est non linéaire en ce sens qu'il peut dépendre de nombreux facteurs tels que le taux de déformation dans le cas d'une rhéologie non-newtonienne, ou encore la taille de grain ; deux facteurs particulièrement importants pour la viscosité sont la pression et la température. Dans le cadre de cette étude, seule une dépendance plus ou moins forte en température sera considérée, via une loi exponentielle dite de FRANK-KAMENETSKII (Frank-Kamenetskii, 1938, 1969). Cette loi simple (cf. 1.3.4) correspond en fait à une linéarisation (cf. annexe A.4) de l'argument de l'exponentielle de la loi d'ARRHENIUS qui, elle, est basée sur des données expérimentales (Arrhenius, 1887 ; Weertman, 1970 ; Karato et Wu, 1993). Les variations de viscosité avec la température résultant de la première loi sont plus faibles que celles obtenues avec la seconde loi mais le caractère exponentiel de la dépendance en température est conservé. Ainsi, un seul paramètre va contrôler l'importance de cette dépendance en température : Υ , le paramètre de FRANK-KAMENETSKII, qui n'est rien d'autre qu'une énergie d'activation adimensionnée (cf. annexe A.4). Dans l'adimensionnement des équations (cf. 1.3.2, p. 56), le choix d'une viscosité caractéristique située en base du domaine \mathcal{D} – maintenue à la température constante $\tilde{T}(\Gamma_i) = 1$ – conduit à la forme suivante de la loi :

$$\tilde{\eta}(\tilde{T}) = \exp \left[\Upsilon(1 - \tilde{T}) \right]. \quad (2.44)$$

Puisque le sommet du domaine est, lui, maintenu à la température $\tilde{T}(\Gamma_e) = 0$, le contraste global de viscosité $\Delta\eta$ vaut :

$$\Delta\eta := \frac{\max_{(\tilde{r}, \theta) \in \mathcal{D}}(\eta)}{\min_{(\tilde{r}, \theta) \in \mathcal{D}}(\eta)} = \frac{\eta(\Gamma_e)}{\eta(\Gamma_i)} = \frac{\tilde{\eta}(\Gamma_e)}{\tilde{\eta}(\Gamma_i)} = \exp \Upsilon. \quad (2.45)$$

La température, dont dépend fortement la viscosité – et donc les contraintes – est contrôlée par l'équation de conservation de l'énergie et peut donc être fortement hétérogène. Or, l'équation de la chaleur est intimement couplée à celle de conservation de la quantité de mouvement ; le champ de vitesse va, en effet, donner lieu à une certaine advection d'énergie. On comprend dès lors la nécessité d'un soin particulier à apporter au traitement de la viscosité dans la résolution de l'équation de

STOKES. Dans cette partie, le champ de température sera vu comme une constante dans le temps, c'est-à-dire que son évolution temporelle sera simplement ignorée, pour se concentrer sur la détermination des champs $\tilde{\mathbf{V}}$ et \tilde{p}' à un instant \tilde{t}_n donné. Le couplage avec l'équation de la chaleur ne sera abordé que dans la section suivante.

Le second terme complexe est la flottabilité, qui va non seulement dépendre de la température mais aussi – dans le cadre de l'approximation anélastique-liquide complète – de la pression dynamique. Toutefois, cette dépendance est linéaire car, rappelons-le, l'expression de la flottabilité peut être écrite sous la forme de la décomposition suivante [éq. 1.128] :

$$\tilde{\mathbf{f}}_v = \tilde{\mathbf{f}}_v^p(\tilde{p}') + \tilde{\mathbf{f}}_v^T(\tilde{T}'), \quad (2.46)$$

avec $\tilde{\mathbf{f}}_v^p$ et $\tilde{\mathbf{f}}_v^T$ deux termes respectivement proportionnels à \tilde{p}' et \tilde{T}' .

Il est donc nécessaire de disposer d'une valeur calculée précisément pour la pression dynamique, non seulement pour l'évaluation de son gradient et donc du champ de vitesse associé, mais aussi pour calculer correctement l'effet de celle-ci sur la flottabilité du matériel mantellique. La dépendance en température est beaucoup moins problématique que dans le cas des contraintes visqueuses.

Ces difficultés à l'esprit, nous pouvons passer à la discrétisation des équations nécessaires pour la résolution de l'équation de STOKES.

Discrétisation des équations

La méthode aux volumes finis utilisée repose, on l'a vu (fig. 2.10), sur un maillage entrelacé. Les variables pression, température, viscosité et profils de référence sont définies au niveau de nœuds situés au centre des volumes de contrôle principaux. Les variables composantes des vitesses sont, elles, définies au centre des faces de ces derniers, selon la normale locale, et orientées selon la coordonnée \bullet croissante de la direction $\hat{\bullet}$ à laquelle est perpendiculaire la face. Cette disposition, ainsi que l'indexation associée des variables nécessaires, est présentée à la figure 2.12.

Nous détaillons ci-dessous la discrétisation de l'équation de continuité, la plus simple. Un principe similaire sera appliqué à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour laquelle seuls certains termes de la forme discrète finale seront donnés.

En reprenant les notations introduites au 2.1.4, nous pouvons intégrer l'équation de continuité sur un volume de contrôle Ω_{ij} :

$$\int_{\Omega_{ij}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) d\Omega = \oint_{S_{ij}} \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_{ij} = 0, \quad (2.47)$$

avec $S_{ij} := \partial\Omega_{ij}$ la frontière du volume de contrôle et $\hat{\mathbf{n}}$ la normale locale (unitaire), orientée vers l'extérieur de celui-ci. Cette équation exprime simplement la nullité du

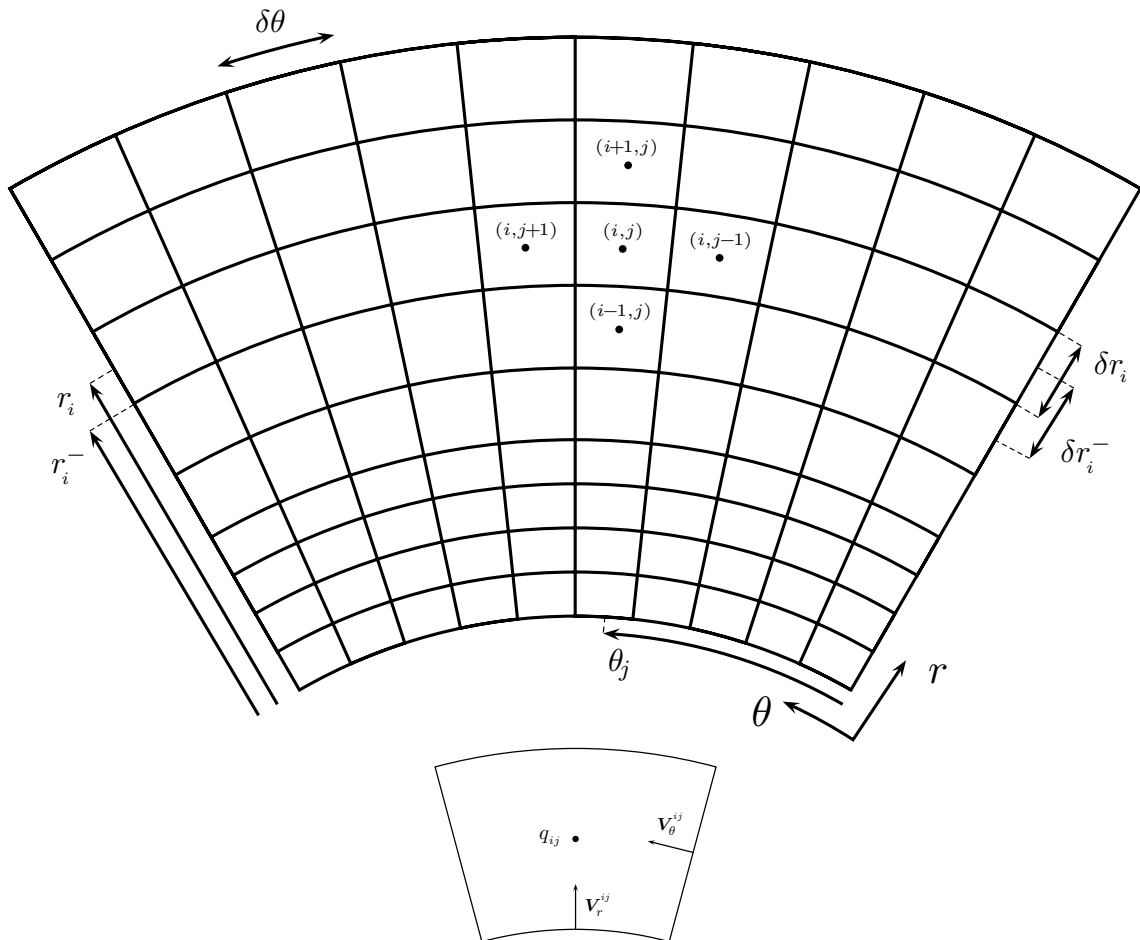


FIGURE 2.12 – Nomenclature des grandeurs discrètes sur le domaine \mathcal{D} . Le maillage consiste en $n_r \times n_\theta$ cellules, toutes identifiées par un couple de valeurs, par exemple (i, j) pour la cellule courante Ω_{ij} , dont le centre (nœud) est situé aux coordonnées polaires (r_i, θ_j) . Le rayon r_i^- correspond à la base d'une maille donnée. Pour celle-ci, ainsi que pour ses quatre voisines immédiates, les nœuds sont représentés. Seule l'amplitude radiale des cellules peut varier (δr_i , et donc δr_i^- , la distance entre les nœuds), mais pas leur étendue angulaire ($\delta \theta$). Au bas de la figure, détail d'une maille : toute quantité scalaire q_{ij} est définie au centre et les deux composantes des vitesses selon $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ aux centres des bords, respectivement inférieur et « droit ».

débit-masse total à travers S_{ij} ; il ne peut y avoir de création ni de disparition de masse au sein de Ω_{ij} . La figure 2.13a présente la localisation des normales locales ainsi que leur nomenclature et celle des faces associées, pour un volume de contrôle donné. La définition des cellules (2.1.5, p. 97) et le caractère orthonormé du système de coordonnées utilisé font que, pour tout volume de contrôle Ω_{ij} , les normales s'identifient – au signe près – aux vecteurs de base :

$$\hat{\mathbf{n}}_{N_{ij}} = -\hat{\mathbf{n}}_{S_{ij}} = \hat{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}}_{W_{ij}} = -\hat{\mathbf{n}}_{E_{ij}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.48)$$

où les « points cardinaux » \bullet_{ij} indiquent la localisation des différentes facettes d'un volume de contrôle Ω_{ij} donné (fig. 2.13a).

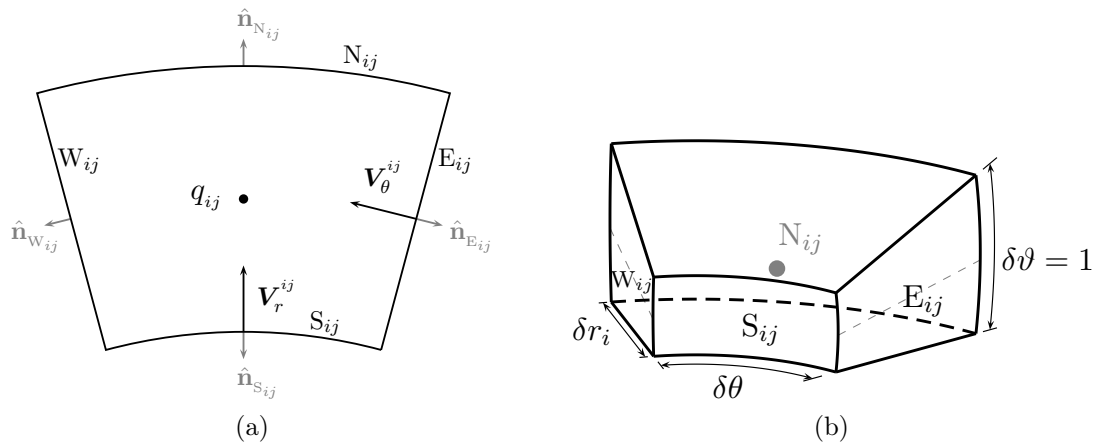


FIGURE 2.13 – Détail d'un volume de contrôle en géométrie annulaire. (a) Nomenclature des quatre facettes \bullet_{ij} , des normales $\hat{\mathbf{n}}_{\bullet_{ij}}$ associées (en gris) et définition des composantes des vitesses $\mathbf{V}_{\bullet}^{ij}$ et de toute quantité scalaire q_{ij} , pour un volume de contrôle Ω_{ij} donné. (b) Représentation du même volume de contrôle muni d'une épaisseur virtuelle r^{d-1} : il s'agit ici du cas $d = 2$ (anneau sphérique) ; voir aussi la sous-section 2.1.3, en particulier les figures 2.4 et 2.5. L'intersection du plan équatorial du système de coordonnées sphériques avec les facettes « ouest » et « est » est matérialisée par deux lignes grises en tireté.

Pour aller plus loin, il est nécessaire de recourir à une première hypothèse de discrétisation : le courant volumique de masse local $\tilde{\varrho}_{\bullet_{ij}} \tilde{\mathbf{V}}_{\bullet}^{ij}$ sera supposé constant sur la face \bullet_{ij} – de surface $S^{\bullet_{ij}}$ – au centre de laquelle $\tilde{\mathbf{V}}_{\bullet}^{ij}$ est défini, et représentatif du flux de masse à travers celle-ci. $\tilde{\varrho}_{\bullet_{ij}}$ représente la masse volumique *reconstruite* au niveau des faces ; celle-ci n'est, en effet, *définie* qu'au centre du volume de contrôle. Le deuxième membre de l'équation (2.47) peut désormais être développé :

$$\tilde{\varrho}_{N_{ij}} \tilde{\mathbf{V}}_r^{N_{ij}} S^{N_{ij}} - \tilde{\varrho}_{S_{ij}} \tilde{\mathbf{V}}_r^{S_{ij}} S^{S_{ij}} + \tilde{\varrho}_{W_{ij}} \tilde{\mathbf{V}}_\theta^{W_{ij}} S^{W_{ij}} - \tilde{\varrho}_{E_{ij}} \tilde{\mathbf{V}}_\theta^{E_{ij}} S^{E_{ij}} = 0. \quad (2.49)$$

D'après la définition et l'indexation choisies pour les composantes des vitesses, on a la correspondance directe (cf. fig. 2.12) :

$$\tilde{V}_r^{N_{ij}} = \tilde{V}_r^{i+1j}, \quad \tilde{V}_r^{S_{ij}} = \tilde{V}_r^{ij}, \quad (2.50)$$

$$\tilde{V}_\theta^{W_{ij}} = \tilde{V}_\theta^{ij+1}, \quad \tilde{V}_\theta^{E_{ij}} = \tilde{V}_\theta^{ij}. \quad (2.51)$$

Pour la reconstruction des masses volumiques, on supposera une évolution linéaire entre deux nœuds. De plus, il faut garder à l'esprit que, dans le cadre de l'approximation anélastique-liquide, il s'agit de profils radiaux de masse volumique $\tilde{\rho}(r)$, invariants selon θ (et, qui plus est, constants³³, c'est-à-dire invariants également selon t). On peut donc écrire simplement :

$$\tilde{\varrho}_{N_{ij}} = \frac{\tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_{i+1}}{2}, \quad \tilde{\varrho}_{S_{ij}} = \frac{\tilde{\rho}_{i-1} + \tilde{\rho}_i}{2}, \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho}_{W_{ij}} = \tilde{\varrho}_{E_{ij}} = \tilde{\rho}_i. \quad (2.52)$$

Notons ici que, en toute rigueur, le pas radial δr_i étant variable (cf. 2.1.5), il serait plus correct de substituer aux moyennes arithmétiques de l'équation (2.52) des formules pondérées par les deux incréments consécutifs définissant la taille des volumes de contrôle situés de part et d'autre d'une facette donnée. Cependant, à la section précédente, nous avons veillé à définir la suite des δr_i telle que la variation relative entre deux termes consécutifs – δr_i et δr_{i+1} – soit faible [approximation (2.33)]. Ceci permet de justifier l'emploi de formules simples pour toute interpolation radiale des variables au niveau des facettes³⁴.

Enfin, pour évaluer correctement les flux à travers les frontières d'un volume de contrôle, il faut apporter un soin particulier au calcul de l'aire³⁵ de ses facettes. Ceci est particulièrement valable pour les maillages déstructurés, comme présentés plus haut. Ici, la structuration est complète et basée sur le système de coordonnées annulaires, muni d'un degré de courbure effectif d (cf. 2.1.3) ; on a alors (cf. fig. 2.12 et 2.13b) :

$$S^{N_{ij}} = (\tilde{r}_{i+1}^-)^d \delta\theta, \quad S^{S_{ij}} = (\tilde{r}_i^-)^d \delta\theta \quad \text{et} \quad S^{W_{ij}} = S^{E_{ij}} = \tilde{r}_i^{d-1} \delta\tilde{r}_i. \quad (2.53)$$

Ainsi, en effectuant, dans l'équation (2.49), la substitution des différents termes par les expressions fournies aux équations (2.50) à (2.53), suivie du quotient par la

33. Cependant, pour l'étude de l'évolution à long terme d'une planète, il serait nécessaire de prendre en compte l'évolution séculaire des profils radiaux.

34. Cependant, à terme, une réécriture et une étude plus systématique des équations discrètes sont prévues avec, entre autres, cette pondération par le pas radial. . .

35. Au sens topologique du terme ; il en va de même, rappelons-le, quand on parle de volumes (ici en 2D).

quantité³⁶ $\tilde{r}_i^d \delta\theta \delta\tilde{r}_i$, on aboutit à la forme suivante :

$$\frac{1}{2\tilde{r}_i^d \delta\tilde{r}_i} \left[(\tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_{i+1})(\tilde{r}_{i+1}^-)^d \tilde{V}_r^{i+1j} - (\tilde{\rho}_{i-1} + \tilde{\rho}_i)(\tilde{r}_i^-)^d \tilde{V}_r^{ij} \right] + \frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{r}_i \delta\theta} \left(\tilde{V}_\theta^{ij+1} - \tilde{V}_\theta^{ij} \right) = 0. \quad (2.54)$$

Comparons maintenant l'expression ci-dessus avec l'équation (2.5) : nous remarquons alors qu'il s'agit exactement de la traduction en différences finies – en raisonnant sur un volume de contrôle – de l'équation de continuité développée dans le système de coordonnées de l'anneau sphérique. Nous mettons ainsi en évidence une propriété particulièrement agréable des méthodes aux volumes finis ; pour des maillages structurés orthogonaux – tel que celui utilisé dans cette étude – la discrétisation repose simplement sur deux procédés :

1. les opérateurs différentiels sont approximés en différences finies ;
2. les autres quantités sont estimées via des profils donnés (typiquement par interpolation linéaire).

Toutefois, rappelons le très gros avantage des volumes finis par rapport aux différences finies classiques : leur caractère conservatif. Ainsi, pour des maillages orthogonaux, moyennant quelques hypothèses de discrétisation – telles que celles mentionnées plus haut – ces méthodes deviennent des *différences finies conservatives* (cf. 2.1.4).

Pour la discrétisation en volumes finis de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous donnons ci-dessous uniquement la discrétisation de certains termes à titre illustratif. La discrétisation se fait en raisonnant cette fois-ci sur des volumes de contrôle décalés (fig. 2.10), centrés sur les composantes $\tilde{\mathbf{V}}_r^{ij}$ pour l'équation (2.7) et $\tilde{\mathbf{V}}_\theta^{ij}$ pour l'équation (2.8).

Ainsi, le deuxième terme de l'équation (2.7) – $\frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^d \tilde{\tau}_{rr})$ – s'écrit :

$$\frac{1}{(\tilde{r}_i^-)^d} \frac{\tilde{r}_i^d \tilde{\tau}_{rr}^{ij} - \tilde{r}_{i-1}^d \tilde{\tau}_{rr}^{i-1j}}{\delta\tilde{r}_i^-}, \quad (2.55)$$

avec :

$$\tilde{\tau}_{rr}^{ij} = 2\tilde{\eta}_{ij} \left[\frac{\tilde{V}_r^{i+1j} - \tilde{V}_r^{ij}}{\delta\tilde{r}_i} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tilde{r}_i^d} \frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^d \tilde{V}_r^{i+1j} - (\tilde{r}_i^-)^d \tilde{V}_r^{ij}}{\delta\tilde{r}_i} + \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{V}_\theta^{ij+1} - \tilde{V}_\theta^{ij}}{\delta\theta} \right) \right]. \quad (2.56)$$

36. Notons, au passage, que celle-ci correspond à une expression approximative du volume de la cellule Ω_{ij} ; l'expression correcte est, en effet : $\frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^{d+1} - (\tilde{r}_i^-)^{d+1}}{d+1} \delta\theta$. Pour $d = 1$, les deux formes sont toutefois équivalentes.

De même, le troisième terme $-\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta}$ – peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\tilde{r}_i^-} \frac{\tilde{\tau}_{r\theta}^{ij+1} - \tilde{\tau}_{r\theta}^{ij}}{\delta \theta}, \quad (2.57)$$

avec :

$$\tilde{\tau}_{r\theta}^{ij} = (\tilde{\eta}_{ij} \tilde{\eta}_{i-1j} \tilde{\eta}_{ij-1} \tilde{\eta}_{i-1j-1})^{\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{\tilde{r}_i^-} \frac{\tilde{V}_r^{ij} - \tilde{V}_r^{ij-1}}{\delta \theta} + \tilde{r}_i^- \frac{\tilde{V}_\theta^{ij}/\tilde{r}_i - \tilde{V}_\theta^{i-1j}/\tilde{r}_{i-1}^-}{\delta r_i^-} \right]. \quad (2.58)$$

Le premier terme de l'équation (2.8) $-\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{r}}$ – est discrétisé de la manière suivante :

$$-\frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{p}'_{ij} - \tilde{p}'_{ij-1}}{\delta \theta}. \quad (2.59)$$

Enfin, le quatrième terme $-\frac{\tilde{\tau}_{r\theta}}{\tilde{r}}$ – s'écrit :

$$\frac{1}{\tilde{r}_i} (\tilde{\eta}_{ij} \tilde{\eta}_{ij-1})^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\frac{1}{2}(\tilde{V}_r^{i+1j} + \tilde{V}_r^{ij}) - \frac{1}{2}(\tilde{V}_r^{i+1j-1} + \tilde{V}_r^{ij-1})}{\delta \theta} + \tilde{r}_i \frac{\frac{1}{2}(\tilde{V}_\theta^{i+1j} + \tilde{V}_\theta^{ij})/\tilde{r}_{i+1}^- - \frac{1}{2}(\tilde{V}_\theta^{ij} + \tilde{V}_\theta^{i-1j})/\tilde{r}_i^-}{\delta \tilde{r}_i} \right]. \quad (2.60)$$

On comprend aisément que l'écriture complète des équations discrètes est particulièrement longue et fastidieuse. La discrétisation entière de l'équation de STOKES selon les deux directions spatiales reste peu ou prou similaire aux quelques exemples présentés ci-dessus. Cependant, deux aspects importants doivent être soulignés. Tout d'abord, les expressions de la plupart des composantes du tenseur des contraintes visqueuses nécessitent une valeur de la viscosité en des endroits du maillage où celle-ci n'est pas définie [seules $\tilde{\tau}_{rr}$ et $\tilde{\tau}_{\theta\theta}$ pour l'équation (2.8) font figures d'exception]. Il est alors nécessaire de « reconstruire » la viscosité en ces points. Il en va de même pour les composantes de la vitesse [pour $\tilde{\tau}_{\theta\theta}$, $\tilde{\tau}_{\theta\vartheta}$, ainsi que $\tilde{\tau}_{r\theta}$ du dernier terme de l'équation (2.8)]. La figure 2.14 permet de visualiser ces différentes reconstructions par rapport aux trois volumes de contrôle.

La viscosité est ainsi interpolée au niveau des coins des volumes de contrôle principaux (c.-à-d. ceux de la pression/température), ainsi qu'au centre des faces de ceux-ci (fig. 2.14c). La vitesse est, quant à elle, interpolée uniquement au centre des volumes (fig. 2.14d) pour la composante radiale et sur les coins pour la composante azimutale. Le schéma d'interpolation diffère cependant pour ces deux quantités. Si, pour la vitesse, de simples moyennes arithmétiques sont effectuées [éq. (2.60)] pour récupérer les valeurs en dehors des points de définition, il n'en va pas de même pour la viscosité. En effet, comme celle-ci varie suivant une loi exponentielle en

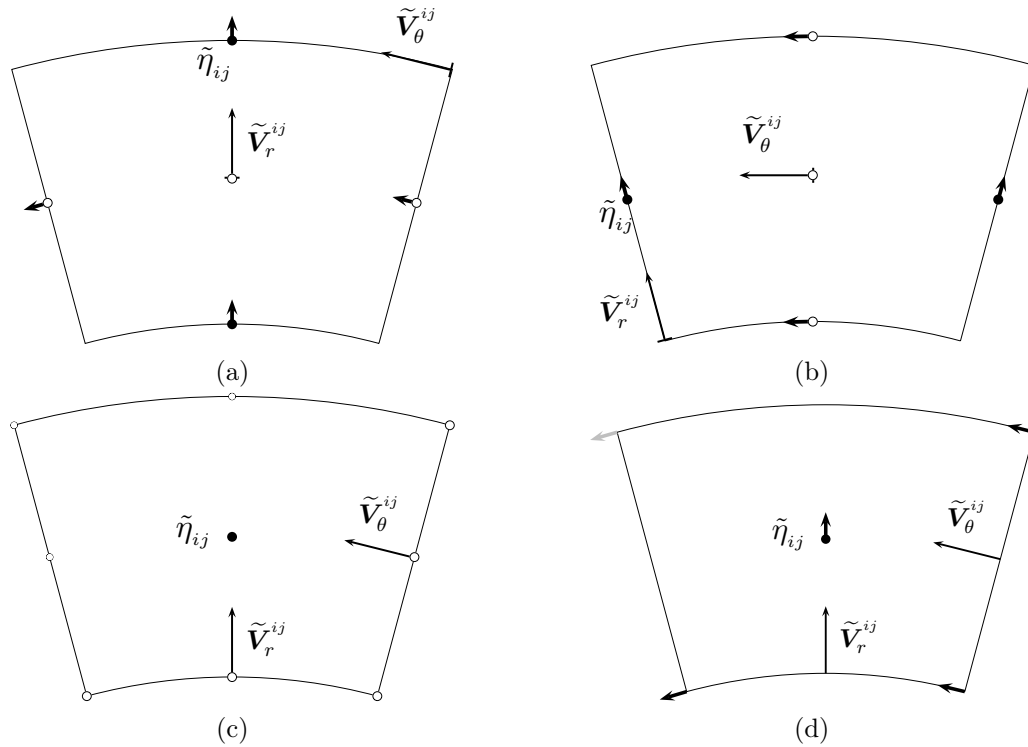


FIGURE 2.14 – Reconstitutions nécessaires pour la discrétisation de l'équation de STOKES. Les trois volumes de contrôle sont représentés : ceux de la composante radiale de la vitesse (a), de sa composante orthoradiale (b) et de la pression (c)-(d). Les variables déjà définies sur le maillage sont représentées – certaines – par des nœuds pleins (viscosités) ou des vecteurs anotés (vitesses) ; les variables reconstruites apparaissent toutes (pour le « point de vue » de chacun des volumes de contrôle) en nœuds vides (viscosités) ou en petits vecteurs (vitesses). Voir aussi figure 2.12.

température, une moyenne géométrique sera utilisée pour estimer la viscosité en dehors de ses lieux de définition – éq. (2.58) et (2.60). En effet, celle-ci correspond à une moyenne arithmétique sur les températures ; cette dernière est ainsi utilisée pour la température dans la discrétisation de la flottabilité (ainsi que dans la discrétisation de l'équation de la chaleur, cf. 2.3) ; il en ira d'ailleurs de même pour les différentes autres quantités (p. ex. $\tilde{\alpha}$ et \tilde{g}) intervenant dans ce terme.

Système matriciel à résoudre

La discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement permet d'aboutir à des systèmes linéaires de la forme :

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}, \quad (2.61)$$

où \mathcal{A} est une matrice carrée de grande taille – de l'ordre de $n_r \times n_\theta$ – mais creuse³⁷, \mathcal{X} le vecteur d'inconnues – par exemple les composantes de vitesse – et \mathcal{B} un vecteur second membre (termes sources). La résolution de ces systèmes de manière efficace et précise représente le cœur du problème pour les volumes finis, mais aussi toute la difficulté.

La matrice \mathcal{A} est construite à partir des coefficients de discrétisation associés à chaque volume de contrôle. D'une manière générale, la discrétisation de l'ensemble des équations de conservation³⁸ ramène au système global non-linéaire suivant (p. ex. Trompert et Hansen, 1996 ; Pernice, 2000) :

$$\begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ G + F_p & Q[\{\tilde{\eta}(\{\tilde{T}\})\}] & F_T \\ 0 & 0 & C(\{\tilde{\mathbf{V}}\}, \{\tilde{T}\}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\tilde{p}'\} \\ \{\tilde{\mathbf{V}}\} \\ \{\tilde{T}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

avec les symboles suivants représentant des opérateurs discrets : Q pour l'opérateur de transport de quantité de mouvement (équivalant à la divergence des contraintes visqueuses), G pour l'opérateur gradient (au signe près), F_\bullet pour celui de flottabilité (contribution de la variable \bullet) et D pour celui de divergence du courant volumique de masse. C correspond au transport et à la production (algébrique) de chaleur. Les symboles R_\bullet désignent des résidus à un instant donné (leur importance ne sera évoquée qu'au 2.2.3 ; il peuvent être considérés comme nuls pour l'instant). Enfin, la notation $\{\bullet\}$ est utilisée pour désigner un vecteur contenant l'ensemble des inconnues correspondant à la variable \bullet .

37. Grâce au maillage entrelacé, le schéma discret ne fait intervenir, pour un point donné, que les plus proches voisins.

38. La discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie sera explicitée au 2.3.

Résoudre le problème de convection [éq. (2.5), (2.7), (2.8) et (2.14)] revient donc à déterminer, à chaque instant \tilde{t} – pour un jeu donné de conditions aux limites et initiales – la solution $\left(\{\tilde{p}'(\tilde{t})\}, \{\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{t})\}, \{\tilde{T}(\tilde{t})\}\right)^T$ du système (2.62). Comme nous le verrons au 2.3, une méthode explicite a été employée pour la résolution de l'équation de conservation de l'énergie³⁹. De ce fait, le traitement de l'équation de la chaleur est effectué de manière indépendante de celui des équations de continuité et d'écoulement. Ainsi, pour un champ discret de flottabilité ($F := F_p \{\tilde{p}'\} + F_T \{\tilde{T}\}$) donné, il s'agira de calculer l'écoulement à l'équilibre⁴⁰ (absence de termes inertiels). Autrement dit, pour un champ de température donné, seule la résolution du système matriciel formé par les deux premières lignes de l'équation (2.62) est nécessaire. La progression en temps se fait uniquement via l'évolution de la température, gouvernée par l'équation de la chaleur.

2.2.2 Couplage vitesse-pression

La détermination correcte des vitesses repose sur une évaluation précise du champ de pression dynamique. De plus, dans le cadre de l'approximation anélastique-liquide, il est nécessaire de connaître la valeur même de la pression et non uniquement son gradient – comme ce serait le cas en approximation de BOUSSINESQ (chap. 1). C'est là l'une des raisons du choix d'une formulation du problème en variables primitives et non, par exemple, au moyen d'une fonction de courant [éq. (2.6)]. L'intérêt de cette dernière est, justement, d'éliminer la pression dans les équations à résoudre. . .

L'algorithme SIMPLE(R)

La résolution du système (2.62) – avec ou sans la partie équation de la chaleur – n'est pas possible avec les méthodes itératives classiques puisque les termes diagonaux de la matrice ne sont pas tous non-nuls. De plus, comme l'indiquent les dépendances des opérateurs, dans la matrice de l'équation (2.62), en les différentes variables de celle-ci, le système est fortement non linéaire. Il importe donc de recourir à une méthode de couplage vitesse-pression adaptée, basée sur la formulation en variables primitives utilisée ici. Le choix s'est naturellement porté sur l'algorithme SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), proposé originellement par Patankar et Spalding (1972) et véritable succès populaire en mécanique des fluides. L'idée fondamentale de cette méthode est simple et intuitive : il s'agit de calculer itérativement les champs de vitesse et de pression de manière couplée, le but étant de satisfaire progressivement l'équation de continuité. Ainsi, si – localement – le champ de vitesse est convergent, la pression est augmentée et inversement pour un

39. c.-à-d. la troisième ligne du système (2.62).

40. sachant que \tilde{p}' est ajusté de manière dynamique au cours du calcul – itératif – de l'écoulement.

champ divergent. Pour cela, une correction de pression est nécessaire : elle est basée sur la discrétisation de l'équation de continuité et permet de corriger de manière cohérente les vitesses.

L'algorithme SIMPLE est donc le suivant :

1. Estimation de la vitesse à partir de la pression
 - (a) estimer un champ de pression « initial »
 - (b) résoudre⁴¹ l'équation de conservation de la quantité de mouvement
2. Réduction de la divergence du courant volumique
 - (a) résoudre⁴¹ l'équation de correction de pression
 - (b) corriger le champ de pression
 - (c) corriger le champ de vitesse
3. Si la divergence (une certaine norme de celle-ci) est supérieure à la précision souhaitée, retourner à l'étape 1, en considérant le champ de pression corrigé comme champ « initial »
Sinon, terminer : la convergence est atteinte.

Notons que, dans une formulation complète de SIMPLE (Patankar, 1980), un calcul supplémentaire est réalisé entre les étapes 2 et 3 : il s'agit de la résolution de l'équation de conservation de l'énergie (ou de toute autre quantité : advection d'une espèce chimique, etc.). Cette étape est nécessaire dans le cas d'une méthode implicite ou semi-implicite pour le traitement de l'équation de la chaleur ; par conséquent, elle n'est pas mentionnée ici, puisque l'on utilise une méthode explicite. L'advection d'énergie est, en effet, réalisée pour un champ de vitesse à l'équilibre obtenu avec l'algorithme de couplage vitesse-pression (cf. 2.3.3).

Dans le modèle numérique développé pour cette étude, une version améliorée de l'algorithme SIMPLE a été implémentée : il s'agit de la méthode SIMPLER (*SIMPLE Revised*, Patankar, 1981). En effet, dans SIMPLE, le changement de pression local, au centre d'un volume de contrôle, est supposé n'affecter que les vitesses sur les faces de celui-ci, et non toutes celles du domaine géométrique. Le résultat est une correction de pression trop forte, débouchant sur une estimation assez approximative du champ de pression. Une sous-relaxation des vitesses devient souvent nécessaire dans le processus itératif. Dans SIMPLER, cette approximation n'est pas réalisée : une équation supplémentaire – l'équation de pression – doit alors être résolue. La pression est donc calculée de manière auto-cohérente et seules les vitesses sont corrigées. Le résultat est une convergence plus rapide de l'algorithme, avec cependant une quantité de calcul et de stockage mémoire⁴² plus importante.

41. Ou, du moins, effectuer plusieurs itérations d'une méthode itérative (p. ex. GAUSS-SEIDEL) afin d'obtenir une première approximation de la solution de cette équation.

42. Problème d'importance moindre de nos jours, surtout en 2D...

Concrètement, l'algorithme SIMPLER englobe en quelque sorte SIMPLE : il s'agit cette fois-ci de partir d'un champ de vitesse initial et, de là, de résoudre en plus une équation de POISSON pour déterminer directement le champ pression :

1. Estimation de la pression à partir de la vitesse
 - (a) estimer un champ de vitesse « initial »
 - (b) résoudre l'équation de pression
2. SIMPLE – *sauf étape 2(b)* – avec la pression calculée comme champ initial

Mathématiquement parlant, l'algorithme SIMPLER revient à résoudre le système réduit :

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ G & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\tilde{p}'\} \\ \{\tilde{\mathbf{V}}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 - F \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

En décomposant la matrice Q en parties diagonale (S), triangulaire inférieure ($-L$) et supérieure ($-U$), on a, pour un champ de vitesse initial $\{\tilde{\mathbf{V}}_0\}$ [étape 1(a)] :

$$G\{\tilde{p}'\} + [S - (L + U)]\{\tilde{\mathbf{V}}_0\} = R_2 - F. \quad (2.64)$$

En appliquant S^{-1} à l'équation (2.64), il vient :

$$\{\tilde{\mathbf{V}}_0\} + S^{-1}G\tilde{p}' = S^{-1}(L + U)\{\tilde{\mathbf{V}}_0\} + S^{-1}(R_2 - F). \quad (2.65)$$

Le membre de gauche de l'équation (2.65) correspond aux « pseudo-vitesses » définies par Patankar (1980), qui peuvent être vues comme des vitesses – artificielles – intermédiaires, « affranchies » de l'effet de la pression.

Or, on a $D\{\tilde{\mathbf{V}}_0\} = R_1$ (continuité). Ainsi, en remarquant l'égalité $S^{-1}(L + U) = I - S^{-1}Q$ – avec I la matrice identité, l'application de D à l'égalité (2.65) permet d'aboutir à l'équation de pression :

$$DS^{-1}G\{\tilde{p}'\} = DS^{-1}(R_2 - F) + D(I - S^{-1}Q)\{\tilde{\mathbf{V}}_0\} - R_1. \quad (2.66)$$

Celle-ci constitue un premier système linéaire à résoudre [étape 1(b)].

L'étape suivante est la résolution du système⁴³ :

$$Q\{\tilde{\mathbf{V}}\} = R_2 - (F + G\{\tilde{p}'\}) \quad [\text{étape 1(b) de SIMPLE}]. \quad (2.67)$$

Elle permet d'aboutir à une meilleure estimation des vitesses qui, cependant, ne satisfont pas nécessairement à la continuité. Il importe donc de recourir de nouveau à l'équation de continuité pour obtenir une équation de correction de pression. Cette

43. En réalité un système linéaire par direction spatiale, soit deux ici : pour \tilde{V}_r et \tilde{V}_θ .

dernière servira, de manière analogue à SIMPLE, à corriger les vitesses (uniquement), la pression elle-même étant déterminée par l'équation (2.66).

Soit $\delta\bullet := \bullet^c - \bullet$ une correction de la variable \bullet , avec \bullet^c la valeur corrigée. On a alors, en écrivant l'équation de conservation de quantité de mouvement successivement pour les valeurs obtenues à l'étape précédente puis pour les valeurs corrigées, et en soustrayant les deux équations obtenues :

$$\{\tilde{\mathbf{V}}^c\} = \{\tilde{\mathbf{V}}\} - S^{-1}G\{\delta\tilde{p}'\}, \quad (2.68)$$

si l'on ne considère, comme dans SIMPLE, qu'un changement sur les vitesses du volume de contrôle local (c.-à-d. $Q \approx S$). Il s'agit de l'équation de correction de vitesse [étape 2(c) de SIMPLE].

Comme ces nouvelles vitesses doivent satisfaire à la continuité – c'est là le but de la correction de pression, on a la condition : $D\{\tilde{\mathbf{V}}^c\} = R_1$. Elle permet ainsi, via la formule (2.68), d'obtenir l'équation de correction de pression :

$$DS^{-1}G\{\delta\tilde{p}'\} = D\{\tilde{\mathbf{V}}\} - R_1. \quad (2.69)$$

Il s'agit d'un dernier système linéaire à résoudre [étape 2(a) de SIMPLE].

Méthode de relaxation

L'algorithme SIMPLER nécessite, dans notre cas bidimensionnel, la résolution de quatre systèmes linéaires [éq. (2.66), (2.67) et (2.69)]. Ces systèmes sont certes de grande taille mais creux. Une méthode de relaxation classique, de type GAUSS-SEIDEL, a été choisie pour leur résolution. Cette technique simple a l'avantage d'être un bon lisseur pour une méthode multigrille (p. ex. [Pernice, 2000](#)), comme nous le verrons au 2.2.3.

Pour chacun de ces systèmes, de la forme (2.61), les coefficients a_{ij} de la matrice A sont déterminés grâce aux équations discrétisées, mises sous la forme ([Patankar, 1980](#)) :

$$a_P x_P = \sum_{vs} a_{vs} x_{vs} + b_P, \quad (2.70)$$

avec $a_P \equiv a_{ii}$ le coefficient associé à la valeur x_i du point courant et les a_{vs} les coefficients associés aux valeurs des voisins immédiats : x_N , x_S , x_W et x_E (notations identiques à celles de la figure 2.13).

Le terme source b_P est capital. Pour l'équation de pression, il s'identifie – au signe près – à la divergence du courant volumique de masse associé aux pseudo-vitesses. Dans le cas de l'équation de correction de pression, il s'agit directement du résidu de l'équation de continuité ($R_1 - D\{\tilde{\mathbf{V}}\}$). Ce dernier peut donc être vu comme une source de masse que la correction de pression va petit à petit annuler – itérativement.

Il s'agit donc du critère de convergence de SIMPLE(R). Enfin, b_P contient, dans le cas de la conservation de la quantité de mouvement pour une direction donnée, le gradient de pression selon cette direction, la flottabilité (seulement dans le cas de la direction $\hat{\mathbf{r}}$) et tous les termes liés à la composante de la vitesse dans l'autre direction. En ce sens, b_P tient donc ici un rôle central dans le couplage de ces deux équations du mouvement entre elles. Notons que, dans la pratique, le gradient de pression est extrait du terme source pour l'algorithme SIMPLE(R) [cf. Patankar (1980)].

Comme les coefficients a_{ij} sont rangés en colonne – chaque colonne de la matrice correspond, spatialement, à l'ensemble des points de coordonnée θ_j – \mathcal{A} possède une structure à bandes diagonales (fig. 2.15). Le vecteur \mathcal{X} correspond donc à l'ensemble des points pour des r_i croissants, et ce pour chaque θ_j . Pour cet arrangement, le schéma itératif de relaxation utilisé est le suivant, à une itération n donnée :

$$x_i^{(n+1)} = \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(n+k)} - \sum_{j \geq i} a_{ij} x_j^{(n)} \left(1 + \delta_{ij} \frac{1 - 2\varpi}{\varpi} \right) \right] \frac{\varpi}{a_{ii}}, \quad (2.71)$$

avec ϖ un paramètre de relaxation et k un paramètre entier. Si $k = 0$, il s'agit de la méthode de JACOBI, la méthode de GAUSS-SEIDEL – de convergence deux fois plus rapide (pour $\varpi = 1$) – correspondant à $k = 1$. On retrouve ainsi, pour $1 < \varpi < 2$ et $k = 1$, la méthode SOR (*Successive Over-Relaxation*). Dans le code de convection développé, une sous-relaxation des pressions (c.-à-d. $\varpi < 1$; $k = 1$) sera utilisée pour la stabilité du schéma. Notons que, au regard de la structure de la matrice \mathcal{A} (fig. 2.15) et de la construction de ces coefficients, la méthode convergera généralement pour $\varpi = 1$ (\mathcal{A} est à diagonale [strictement] dominante) mais, de par la dissymétrie de \mathcal{A} , ne convergera pas nécessairement pour $\varpi \neq 1$. Ces faits sont cependant de moindre importance pour la technique numérique utilisée ici : en effet, nous verrons que, la relaxation, au sein de l'algorithme SIMPLER couplée à une méthode multigrille, n'est – dans notre cas – jamais effectuée que sur quelques itérations (typiquement moins de 20).

Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites sur les vitesses sont traitées par une construction spéciale de la matrice. Avant tout, il est important de prendre conscience de la structure des tableaux utilisés pour approximer les différents champs. Ainsi, les champs de composantes $\tilde{\mathbf{V}}_r$ et $\tilde{\mathbf{V}}_\theta$, de même que le champ scalaire \tilde{p}' , sur le domaine géométrique \mathcal{D} discrétisé, sont approximés par des tableaux bidimensionnels \tilde{V}_r^{ij} , \tilde{V}_θ^{ij} et \tilde{p}'_{ij} , de taille $(n_r + 2) \times (n_\theta + 2)$; pour toute variable générique \bullet , on a :

$$\bullet \approx \{ \bullet_{ij}; (i, j) \in \llbracket 0, n_r + 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n_\theta + 1 \rrbracket \}. \quad (2.72)$$

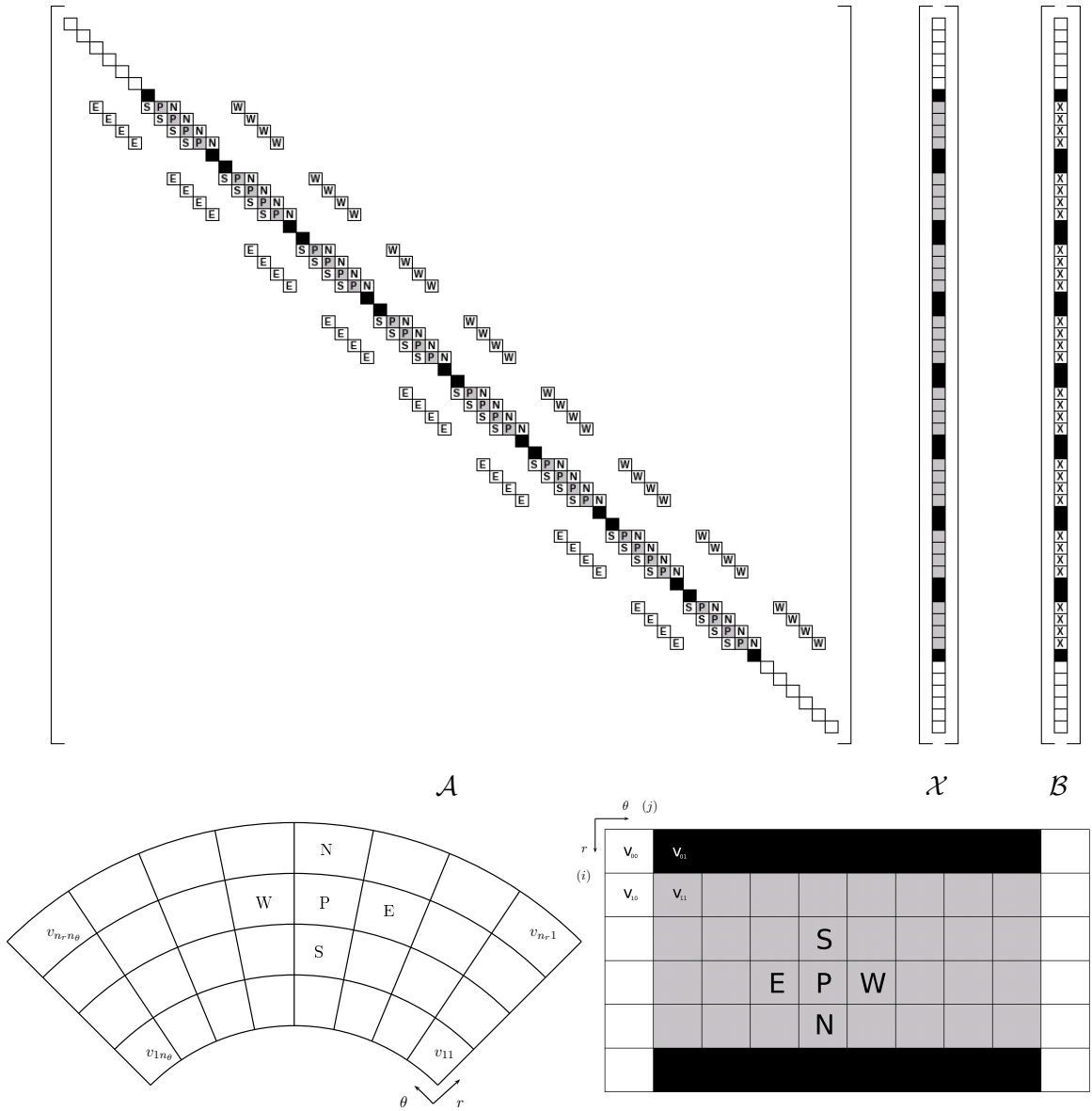


FIGURE 2.15 – Structure typique d'un système linéaire à relaxer au sein de SIMPLER. Exemple d'un maillage $(n_r, n_\theta) = (4, 8)$. Les trois niveaux de gris indiquent d'une part les correspondances entre les coefficients la matrice creuse \mathcal{A} et les composantes des vecteurs solution \mathcal{X} et second membre \mathcal{B} du système $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$ (haut de la figure), et, d'autre part, la localisation des volumes finis correspondants dans le maillage (bas de la figure). Les composantes inchangées de \mathcal{X} , pendant une relaxation donnée au sein de SIMPLER, apparaissent en noir ou en blanc (coefficients unité dans \mathcal{A} et \mathcal{B}) : il s'agit des $2(n_r + n_\theta + 2)$ cellules fantômes par lesquelles sont appliquées les conditions aux limites. Le parcours (c.-à-d. la relaxation) est effectué suivant r puis θ (c.-à-d., ici, en colonnes). Les « points cardinaux » correspondent chacun à un voisin immédiat du point courant P (« X » dans \mathcal{B}). Cette notation sera reprise par la suite pour la discrétisation.

Le domaine \mathcal{D} est réellement représenté par une sous-partie de l'ensemble ci-dessus, obtenue pour $(i, j) \in \llbracket 1, n_r \rrbracket \times \llbracket 1, n_\theta \rrbracket$. La partie complémentaire est purement « artificielle » et sert à la prescription des conditions aux limites. On parlera de cellules fantômes pour les maillages correspondant à ces bords tampons⁴⁴.

Ainsi, afin de ne pas calculer les différents champs dans ces bords au cours d'une méthode de relaxation, les lignes correspondantes (fig. 2.15) de la matrice \mathcal{A} ne contiennent qu'un seul coefficient non-nul, égal à l'unité : le coefficient diagonal. Ainsi, pour ces lignes neutres, on a $a_{ij} = \delta_{ij}$. Par conséquent, les blocs supérieur gauche et inférieur droit de \mathcal{A} sont des matrices unité.

Les conditions aux limites sont appliquées après chaque relaxation d'un système linéaire. Dans l'algorithme SIMPLE(R), seules des conditions aux limites sur les vitesses sont nécessaires, les pressions étant calculées de manière couplée, elles s'ajustent automatiquement en fonction du champ de vitesse. Dans notre cas, il s'agira de prescrire, selon les cas, des conditions aux limites en bord libre (contrainte cisailante et vitesse normale nulles) sur une surface donnée :

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - [(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ la normale locale à la surface, ou bien des conditions en bord rigide (vitesse tangentielle imposée et vitesse normale nulle) :

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}^{\text{surf}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

avec $\tilde{\mathbf{V}}^{\text{surf}}$ la vitesse imposée de la surface.

En géométrie annulaire complète ($\Delta\theta = 2\pi$), seules des conditions aux limites sur les bords interne Γ_i et externe Γ_e (fig. 2.9) ont besoin d'être prescrites ($\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{r}}$). Ainsi, la condition en bord rigide s'écrit comme une condition de DIRICHLET : $\tilde{V}_r = \tilde{V}_\theta = 0$. Celle en bord libre s'écrit $\{\tilde{\tau}_{\theta r} = 0, \tilde{V}_r = 0\}$, ce qui revient, pour la composante orthoradiale de la vitesse, à une condition de NEUMANN sur $\tilde{V}_\theta/\tilde{r}$ [éq. (2.12)] :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \right) = 0. \quad (2.75)$$

Puisque les équations de conservation ont été développées dans la base physique (base naturelle normée), $\tilde{V}_\theta/\tilde{r}$ représente une vitesse angulaire. La condition (2.75)

44. Cette expression est volontairement utilisée dans la mesure où ces bords seront ceux-là même utilisés dans une future version parallèle de l'outil numérique ; il s'agira alors de prescrire, via ces bords tampons, les conditions aux limites (raccords) entre des zones du domaine \mathcal{D} traitées par différents processeurs.

exprime donc l'égalité de ces vitesses angulaires de part et d'autre de la frontière. On comprend dès lors l'absence de cisaillement qui en résulte.

Dans les cas où seule une portion d'anneau est traitée ($\Delta\theta < 2\pi$), des conditions doivent également être choisies sur les bords latéraux Γ_g et Γ_d . On choisira, selon les cas, des bords libres ($\{\tilde{\tau}_{r\theta} = 0, \tilde{V}_\theta = 0\}$, soit $\partial\tilde{V}_r/\partial\theta = 0$) ou périodiques, c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathbf{V}}(\Gamma_g) \equiv \tilde{\mathbf{V}}(\Gamma_d) \quad \text{et} \quad \tilde{p}'(\Gamma_g) \equiv \tilde{p}'(\Gamma_d). \quad (2.76)$$

Conformément au schéma de discrétisation [cf. 2.2.1, p. ex. éq. (2.60)], les conditions aux limites pour les bords Γ_i et Γ_e s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}_r(\Gamma_i) \approx \tilde{V}_r^{1j} = 0, \\ \tilde{V}_r(\Gamma_e) \approx \tilde{V}_r^{n_r+1j} = 0, \\ \tilde{V}_\theta^{0j} = \tilde{r}_0 \left[(2w-1) \frac{\tilde{V}_\theta^{1j}}{\tilde{r}_1} + 2(1-w) \frac{\tilde{V}_\theta(\Gamma_i)}{R_i} \right], \\ \tilde{V}_\theta^{n_\theta+1j} = \tilde{r}_{n_\theta+1} \left[(2w-1) \frac{\tilde{V}_\theta^{n_\theta j}}{\tilde{r}_{n_\theta}} + 2(1-w) \frac{\tilde{V}_\theta(\Gamma_e)}{R_e} \right], \\ \forall (j, w) \in \llbracket 0, n_\theta + 1 \rrbracket \times [0; 1]. \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Il s'agit en fait, ici, de conditions aux limites mécaniques de ROBIN sur \tilde{V}_θ : w est un poids relatif associé à la condition en bord libre dans la combinaison linéaire entre celle-ci et la condition en vitesse imposée ; $\tilde{V}_\theta(\Gamma_\bullet)$ est la vitesse azimutale imposée sur les bords, pouvant être quelconque et variable latéralement. Pour $w = 1$, on retrouve une condition en bord libre ; celle en bord rigide est obtenue pour $w = \tilde{V}_\theta(\Gamma_\bullet) = 0$.

De même, pour les bords latéraux Γ_g et Γ_d , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}_r^{i0} = V_r^{ik(n_\theta-1)+1}, \\ \tilde{V}_r^{in_\theta+1} = V_r^{in_\theta+k(1-n_\theta)}, \\ \tilde{V}_\theta^{i1-k} = k\tilde{V}_\theta^{in_\theta}, \\ \tilde{V}_\theta^{in_\theta+1} = k\tilde{V}_\theta^{i1}, \\ \tilde{p}'_{i0} = p_{in_\theta} \quad \text{si et seulement si} \quad k = 1, \\ \tilde{p}'_{in_\theta+1} = p_{i1} \quad \text{si et seulement si} \quad k = 1, \\ \forall (i, k) \in \llbracket 0, n_r + 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 1 \rrbracket, \end{array} \right. \quad (2.78)$$

avec k un entier valant 1 pour des bords périodiques et 0 sinon (bords libres).

Cas particulier de la pression dynamique

Une des particularité de l'approximation anélastique-liquide est de nécessiter la valeur absolue de la pression dynamique, et non simplement son gradient [p. ex. éq. (2.7)]. Or, dans le maillage utilisé, les volumes de contrôle forment une partition du domaine géométrique \mathcal{D} (cf. p. ex. fig. 2.12). Ceux situés au voisinage des bords du domaine voient donc une, voire deux de leurs frontières coïncider avec ces derniers.

La vitesse normale étant prescrite en ces points, il n'y a nul besoin d'information sur la pression en ces lieux. Par conséquent, la version fondamentale de l'algorithme SIMPLE(R) ne détermine le champ de pression qu'à une constante près, puisque une valeur relative est habituellement nécessaire.

Déterminer la pression dynamique absolue \tilde{p}' requiert seulement la connaissance de sa valeur en un seul point (appartenant, par exemple, à l'un des bords Γ_\bullet), puisque son gradient est déterminé sans ambiguïté sur \mathcal{D} , via SIMPLE(R). La pression totale en surface d'un planète s'écrit, en utilisant la décomposition introduite pour l'équation (1.115) :

$$p_{surf} := p(R_p) = \bar{p}(R_p) + p'(R_p), \quad (2.79)$$

avec R_p le rayon de la planète. En surface, la pression totale est approximativement nulle (« vide » spatial) ou égale à celle qui règne à la base d'une enveloppe fluide (atmosphère ou océan). Dans tous les cas, la valeur p en surface est approximativement négligeable devant celles qui règnent à l'intérieur du manteau. Il en va de même pour la pression dans l'état de référence (hydrostatique) $\bar{p}(R_p)$. Ainsi, en surface, on peut raisonnablement considérer que l'on a une pression dynamique nulle⁴⁵. Cette hypothèse est complètement valide pour des planètes sans atmosphère ou d'enveloppe fluide « négligeable ». Ceci nous permet d'écrire la condition suivante pour la pression dynamique ($\tilde{R}_p := R_e$) :

$$\tilde{p}'(\tilde{R}_p) \approx \tilde{p}'(\Gamma_e) = 0. \quad (2.80)$$

Cette condition nécessite cependant d'être incluse directement dans le processus itératif de SIMPLE(R) et peut devenir problématique pour la stabilité de l'algorithme (expérience personnelle de l'auteur), qui n'a pas été conçu pour cela. Une condition plus simple a donc été choisie : il s'agit d'imposer une pression dynamique moyenne nulle en surface du modèle. En effet, la valeur moyenne de la pression en surface s'écrit :

$$\langle p_{surf} \rangle = \langle \bar{p}(R_p) \rangle + \langle p'(R_p) \rangle. \quad (2.81)$$

Il semble raisonnable de considérer qu'en moyenne, la pression en surface est égale à la pression hydrostatique, ce qui revient à une pression dynamique moyenne nulle : $\langle p'(R_p) \rangle = 0$. Cette condition simple et bien entendu discutable, a toutefois le mérite d'être très répandue dans la communauté des modélisateurs de la convection, en particulier dans le cas de rhéologies complexes (p. ex. des rhéologies visco-élasto-plastiques). Elle facilite donc la comparaison entre modèles ; c'est

45. sur la surface déformée, en toute rigueur, mais rappelons qu'il s'agit ici d'un *bord* libre (indéformable ; $V_r = 0$), et non d'une *surface* libre...

pourquoi le *benchmark* de King *et al.* (2010) repose dessus⁴⁶ pour la partie en approximation anélastique-liquide complète (ALA ; cf. chap. 3).

Ainsi, pour obtenir une pression dynamique satisfaisant à la condition ci-dessus on soustraira au champ de pression dynamique relatif obtenu par SIMPLE(R) – \tilde{p}'_{rel} , sa valeur moyenne en surface – du moins son estimation $\langle \tilde{p}'_{surf} \rangle := \langle \tilde{p}'(\Gamma_e) \rangle$:

$$\tilde{p}' \approx \tilde{p}'_{rel} - \langle \tilde{p}'_{surf} \rangle. \quad (2.82)$$

Les bords tampons étant inutiles dans le cas de la pression pour SIMPLE(R) – aucune condition aux limites n'est requise dans le processus itératif, seules les valeurs associées aux volumes de contrôle du domaine géométrique \mathcal{D} ont un sens (exception faite des bords tampons latéraux en cas de condition périodique). La pression moyenne en surface ne peut donc être qu'approximativement estimée. Pour ce faire, il a été choisi d'appliquer la méthode suivante : on supposera un profil parabolique $\tilde{p}'(r)$ au voisinage de la frontière Γ_e ; la pression dynamique au niveau de la surface de chaque volume de contrôle $\Omega_{n_r,j}$ coïncidant avec le bord $\Gamma_e - \tilde{p}'_{n_r+\frac{1}{2}j}$ – peut alors être évaluée par extrapolation quadratique à partir des valeurs de pression associées aux trois volumes $\{\Omega_{ij}\}_{i \in [n_r-2, n_r]}$ voisins.

De là est estimée la valeur moyenne :

$$\langle \tilde{p}'_{surf} \rangle \approx \frac{1}{n_\theta} \sum_{j=1}^{n_\theta} \tilde{p}'_{n_r+\frac{1}{2}j}. \quad (2.83)$$

La correction [éq. (2.82) et (2.83)] est effectuée à la fin de chaque cycle multigrille (cf. 2.2.3) du solveur. Finalement, cette méthode approximative s'est avérée suffisamment efficace pour la précision numérique attendue, comme cela sera montré par le *benchmark* du modèle en approximation anélastique-liquide non tronquée (cf. 3.3).

2.2.3 Accélération de la convergence : la méthode multigrille

L'algorithme SIMPLER est particulièrement robuste pour la résolution de l'équation de STOKES. Cependant, sa vitesse de convergence reste limitée et, pour des maillages de taille standard, elle devient rapidement problématique : un très grand nombre d'itérations est alors nécessaire pour obtenir une convergence de la solution $(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{p}')$ à un degré satisfaisant de précision. Ainsi, l'efficacité de la méthode décroît avec la taille du maillage : le temps de calcul est proportionnel⁴⁷ au carré de l'étendue maximale du maillage $\max(n_r, n_\theta)$.

46. King (communication personnelle)

47. Plus ou moins approximativement, car cela dépend bien évidemment de divers facteurs, tels que les paramètres de relaxation utilisés pour les différentes résolutions de systèmes linéaires au sein de SIMPLER.

Un problème de longueur d'onde...

La cause de la lenteur des techniques itératives, telles que les méthodes de JACOBI, GAUSS-SEIDEL ou encore SIMPLE(R) peut être appréhendée en examinant conjointement la convergence de l'algorithme – via un certain critère – et la répartition spatiale des résidus (voir paragraphe suivant pour la définition) à diverses itérations n [éq. (2.61)]. La figure 2.16 illustre cette distribution.

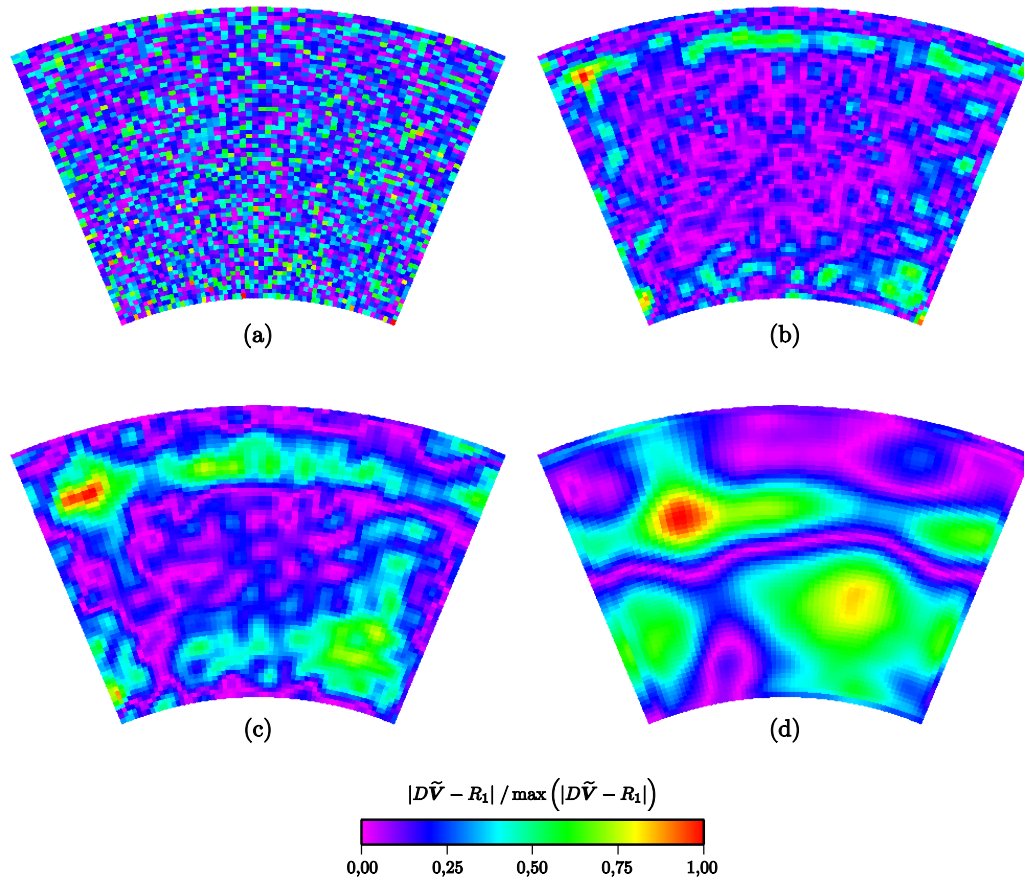


FIGURE 2.16 – Cartes du résidu relatif de continuité à différentes itérations de SIMPLER. (a) Champ initial. (b) Après 2 itérations. (c) Après 3 itérations. (d) Après 5 itérations. Problème physique : approximation de BOUSSINESQ, $Ra = 10^5$, $\Psi = 0$, bord rigide pour Γ_i et Γ_e , bord libre pour Γ_g et Γ_d . Paramètres géométriques et numériques : $f = 0,55$, $\Delta\theta = \pi/4$, $d = 2$, $n_r = n_\theta = 64$, valeurs initiales aléatoires pour les différents champs. Le résidu de continuité ($D\tilde{V} - R_1$) est ici présenté normalisé à son maximum et en valeur absolue.

Nous pouvons remarquer que, dans un premier temps, ce sont les composantes à petite longueur d'onde du résidu qui sont rapidement éliminées. Les grandes longueurs d'ondes sont rapidement dominantes et perdurent longtemps. Ce sont ces dernières que la méthode itérative peine à réduire efficacement : elles sont donc

directement responsables de sa lenteur et de son inefficacité pour les maillages importants. En effet, pour une taille identique du domaine géométrique, plus la grille est fine, plus une composante de résidu – de taille donnée – est « perçue » à grande longueur d'onde par le maillage. La capacité des méthodes itératives à réduire efficacement les courtes longueurs d'onde du résidu – et donc de l'erreur – est appelée propriété de lissage.

Pour pallier ce problème, Brandt (1977) a montré toute l'efficacité d'une méthode très générale dite *multigrille*, dont les différents ingrédients ont été pressentis dès les années 60, voire même avant ; la propriété de lissage des méthodes itératives est, par exemple, connue depuis les années 40-50. Le lecteur intéressé par l'histoire des méthodes multigrilles trouvera plus de détails et un bon point de départ dans l'ouvrage de Trottenberg *et al.* (2001) et les références qu'il inclut. L'idée est à la fois simple et puissante : il s'agit d'utiliser un ensemble de grilles de résolutions spatiales différentes afin de lisser l'erreur efficacement pour chaque famille de longueurs d'onde. Ainsi, pour une grille donnée, le lissage des résidus (donc de l'erreur sur la solution) devra être effectué jusqu'à ce que seules subsistent les composantes de l'erreur à grande longueur d'onde ; il est alors inutile de poursuivre les itérations, en raison de l'inefficacité déjà évoquée. Il s'agit ensuite de ramener le problème à un niveau de grille plus grossier : de manière un peu simpliste, les grandes longueurs d'onde de l'erreur sont alors « vues » comme des courtes sur ce nouveau maillage (fig. 2.17), ce qui permet de les réduire efficacement. L'information nouvellement obtenue est alors retransférée sur le niveau de grille fin : c'est la correction de grille grossière.

Principe de la correction de grille grossière

Afin de comprendre l'intérêt de l'utilisation d'une grille grossière en plus de la grille standard, repartons du système linéaire général à résoudre : $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$. Au cours d'un processus itératif pour résoudre ce système, on peut définir, à une itération n donnée, un résidu :

$$\mathcal{R}^{(n)} := \mathcal{A}\mathcal{X}^{(n)} - \mathcal{B}, \quad (2.84)$$

qui est une mesure indirecte de l'écart de la solution courante $\mathcal{X}^{(n)}$ par rapport à la solution exacte \mathcal{X}^{exa} . Cet écart est en fait l'erreur, que l'on va chercher à minimiser :

$$\mathcal{E}^{(n)} := \mathcal{X}^{(n)} - \mathcal{X}^{\text{exa}}. \quad (2.85)$$

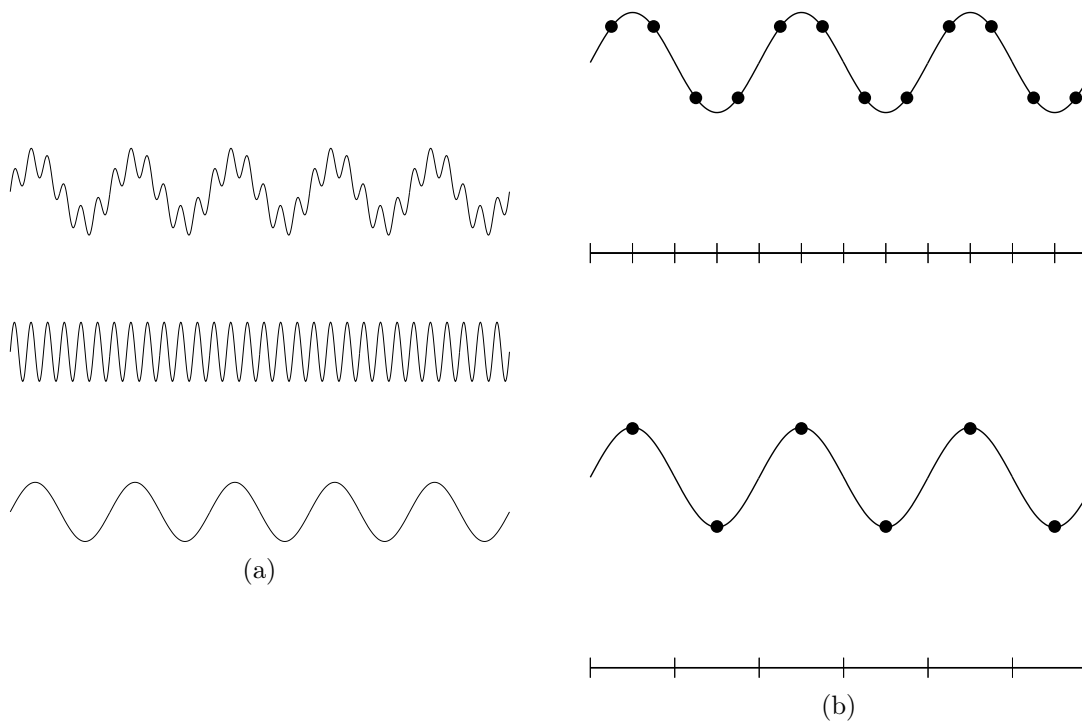


FIGURE 2.17 – Le problème de la longueur d’onde de l’erreur. (a) Exemple d’un signal d’erreur simple et unidimensionnel (en haut) et de ses deux composantes à petite (au milieu) et grande longueur d’onde (en bas). (b) Discrétisation de la composante à grande longueur d’onde sur une grille fine (en haut) et une grille deux fois plus grossière (en bas). Dans ce dernier cas, cette composante est « vue » à petite longueur d’onde par le maillage grossier.

En partant de la condition à satisfaire, $\mathcal{A}\mathcal{X}^{\text{exa}} = \mathcal{B}$, on parvient, en utilisant le fait que \mathcal{A} est un opérateur linéaire, à un système annexe, cette fois-ci sur l'erreur elle-même :

$$\mathcal{A}\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{R}^{(n)}. \quad (2.86)$$

Sur une grille donnée (la *grille fine*), il s'agit d'effectuer un certain nombre d'itérations (ν_1) afin de lisser le résidu \mathcal{R} . Celui-ci ne présente alors plus de composantes à courte longueur d'onde⁴⁸. L'idée de la correction de grille grossière est alors de transférer ce résidu sur une grille à pas plus large (typiquement d'un facteur 2) pour ensuite résoudre l'équation (2.86) sur celle-ci. Il en ressort une certaine approximation de l'erreur $\mathcal{E}^{(n)}$, non seulement parce que le transfert du résidu introduit nécessairement des approximations mais aussi parce que l'on peut choisir de ne pas résoudre complètement le système annexe (c.-à-d. effectuer ν_0 itérations seulement ; c'est le cas dans l'outil développé).

Cette estimation de l'erreur peut alors être retransférée vers la grille grossière⁴⁹ pour venir corriger l'estimation de grille fine de la solution. Un nombre additionnel ν_2 d'itérations est ensuite effectué : on parle de post-lissage.

Ainsi, en introduisant les notations \bullet_δ et $\bullet_{2\delta}$ pour les variables et opérateurs sur les deux types de grille – respectivement fine, de pas δ , et (deux fois plus) grossière, de pas 2δ – la correction de grille grossière peut se résumer ainsi :

1. pré-lissage : ν_1 itérations sur le système $\mathcal{A}_\delta \mathcal{X}_\delta = \mathcal{B}$ (solution initiale $\mathcal{X}_\delta^{(0)}$ quelconque), donnant $\mathcal{X}_\delta^{(\nu_1)}$;
2. restriction du résidu : $\mathcal{R}_{2\delta} = \mathcal{I}_\delta^{2\delta} \mathcal{R}_\delta = \mathcal{I}_\delta^{2\delta} (\mathcal{A}_\delta \mathcal{X}_\delta^{(\nu_1)} - \mathcal{B})$;
3. « résolution » (ν_0 itérations) du système $\mathcal{A}_{2\delta} \mathcal{E}_{2\delta} = \mathcal{R}_{2\delta}$ (solution initiale : $\mathcal{E}_{2\delta}^{(0)} = 0$), donnant $\mathcal{E}_{2\delta}^{(\nu_0)}$;
4. prolongation de l'erreur estimée : $\mathcal{E}_\delta = \mathcal{I}_{2\delta}^\delta \mathcal{E}_{2\delta}^{(\nu_0)}$;
5. correction de l'estimation de grille fine : $\mathcal{X}_\delta^c = \mathcal{X}_\delta^{(\nu_1)} + \mathcal{E}_\delta$;
6. post-lissage : ν_2 itérations sur le système $\mathcal{A}_\delta \mathcal{X}_\delta = \mathcal{B}$ (solution initiale \mathcal{X}_δ^c).

Les opérateurs de restriction et de prolongement, respectivement $\mathcal{I}_\delta^{2\delta}$ et $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$, permettent de transférer⁵⁰ de l'information de la grille fine vers la grille grossière (résidu) ou bien l'inverse (estimation de l'erreur). Dans la pratique, il s'agit simplement d'opérations de moyenne et d'interpolation.

48. On sous-entendra toujours « longueur d'onde *relativement au pas de la grille* » ...

49. On introduit là de nouveau de petites erreurs durant cette opération.

50. Il s'agit d'un simple transfert, donc d'une sorte d'identité (idéalement) ; d'où le symbole \mathcal{I}_\bullet .

La méthode multigrille

À l'issue de la correction de grille grossière, on obtient une première estimation $\mathcal{X}_\delta^{(\nu_1 + \frac{\nu_0}{2^{\dim(\mathcal{D})}} + \nu_2)}$, dont les composantes à petite *et* à grande longueur d'onde ont été diminuées (plus ou moins selon les valeurs des paramètres ν_\bullet). Or, rappelons-le, cette longueur d'onde est toujours relative au pas de la grille. Ainsi, même la grille grossière va être limitante pour les parties aux plus grandes longueurs d'onde du signal (l'erreur)...

Le principe de la méthode multigrille va être d'utiliser cette grille grossière de manière récursive : au sein d'une correction de grille grossière (étape 3), la grille de pas 2δ peut être vue comme une grille fine ; l'estimation de l'erreur sur ce maillage va alors, à son tour, subir une correction au moyen d'une grille encore plus grossière (de pas 4δ), et ainsi de suite... Après retour sur la grille fine de départ (nécessitant au moins une série de prolongations $\mathcal{I}_{2\ell_\delta}^{2^{\ell-1}\delta}$ et de post-lissages pour chaque niveau de grille ℓ), on a ainsi corrigé la valeur de grille la plus fine ($\ell = 1$) de toutes les familles de longueurs d'onde possibles dans la décomposition spectrale de l'erreur (jusqu'à la grille la plus grossière choisie, c.-à-d. le niveau maximal ℓ_{\max}). On parvient à ce que l'on appelle un cycle multigrille (c.-à-d. correction de grille grossière récursive).

Le schéma le plus classique est de ne passer qu'une seule fois par chaque niveau de grille et conduit au cycle V (fig. 2.18). Il existe toutefois différents schémas, suivant le nombre et l'ordre des passages par les différents niveaux de grille, plus ou moins adaptés selon le problème (c.-à-d. le système linéaire à résoudre), comme par exemples les cycles W et F (fig. 2.18). Notons, par exemple, que des cycles V sont généralement utilisés dans le solveur du code de convection écrit durant cette thèse. Dans certains cas⁵¹, le cycle F s'avère particulièrement efficace, de même que le cycle W. Le premier s'avère cependant le plus économique en temps de calcul.

Ainsi, toute une famille de cycles multigrille (cycles μ) peut être résumée par le processus récursif présenté ci-dessous⁵², toutefois valable pour $\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$.

$$\mathcal{X}_\delta \leftarrow \text{MG}_\delta^\mu(\mathcal{X}_\delta, \mathcal{B}_\delta) :$$

1. pré-relaxation de $\mathcal{A}_\delta \mathcal{X} = \mathcal{B}_\delta$ en ν_1 itérations, solution initiale \mathcal{X}_δ ;
2. si $\ell(\delta) = \ell_{\max}$ alors
aller au 4

sinon

$$\mathcal{B}_\delta \leftarrow \mathcal{I}_\delta^{2\delta}(\mathcal{A}_\delta \mathcal{X}_\delta - \mathcal{B}_\delta)$$

$$\mathcal{X}_{2\delta} \leftarrow 0$$

51. principalement dans le cas d'un faible nombre total de grilles dans la méthode multigrille (condition de stabilité nécessaire pour des cas à viscosité fortement variable...)

52. Nous reprenons ici une présentation équivalente à celle utilisée dans l'ouvrage de Briggs *et al.* (2000) ; le consulter pour une discussion plus approfondie (cependant à caractère introductif).

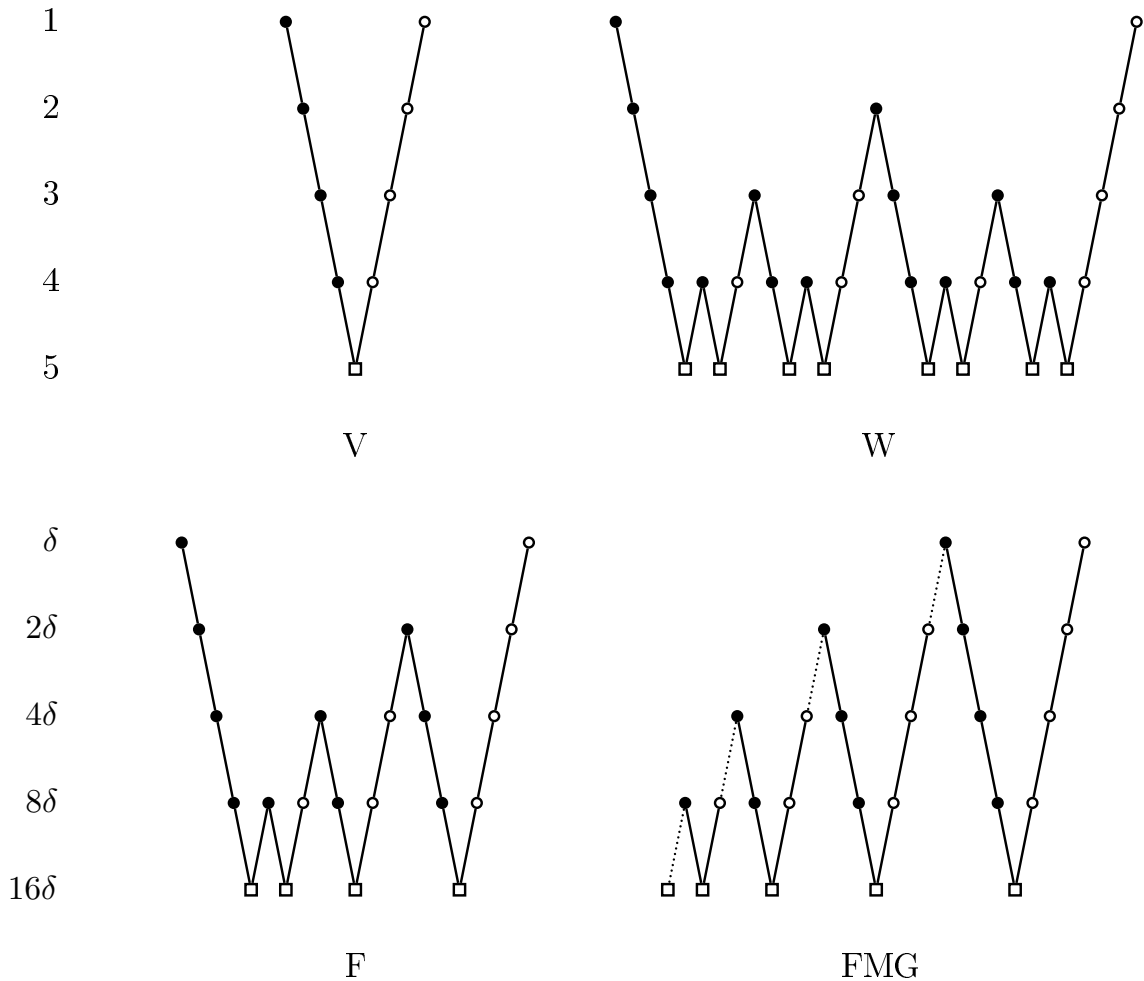


FIGURE 2.18 – Variété des cycles multigrille. Quatre type de cycles sont représentés ici : les classiques V (cycle $\mu = 1$), W (cycle $\mu = 2$) et F , ainsi que le cycle FMG (full multigrid) de type V . Les différents niveaux de grille sont indiqués par leur indice ℓ , en haut, ou bien par la largeur caractéristique $2^{\ell-1}\delta$ des cellules de chaque niveau. Les opérateurs de transfert sont représentés par les symboles \backslash (restriction) et $/$ (prolongation). Les pointillés indiquent une prolongation spécifique au FMG (plus précise). Enfin, les symboles des « nœuds » représentent les étapes de pré-lissage (\bullet : ν_1 itérations), post-lissage (\circ : ν_2 itérations) et d'itération de grille grossière (\square : ν_0 itérations).

$$\mathcal{X}_{2\delta} \leftarrow \text{MG}_{2\delta}^{\mu}(\mathcal{X}_{2\delta}, \mathcal{B}_{2\delta}) \quad \mu \text{ fois}$$

fin si ;

$$3. \mathcal{X}_{\delta} \leftarrow \mathcal{X}_{\delta} + \mathcal{I}_{2\delta}^{\delta} \mathcal{X}_{2\delta} ;$$

4. post-relaxation de $\mathcal{A}_{\delta} \mathcal{X} = \mathcal{B}_{\delta}$ en ν_2 itérations, solution initiale \mathcal{X}_{δ} .

Le cas pour $\mu = 1$ correspond au cycle V et celui pour $\mu = 2$ au cycle W. Le cycle FMG, non testé durant cette thèse, présente un fonctionnement un peu différent : l'idée est de partir cette fois-ci de la grille la plus grossière et de raffiner progressivement la solution avec des grilles de plus en plus fines (cf. fig. 2.18). Celui-ci est particulièrement efficace en cas de solution initiale inconnue au début des itérations. Dans notre cas, les champs de vitesse et de pression ne vont cependant pas varier significativement entre deux instants donnés d'une simulation, ce qui nous place en dehors du contexte idéal pour le cycle FMG.

Comme on l'a mentionné plus haut, les différents jeux de restriction et de prolongation vont nécessairement introduire des erreurs additionnelles. C'est pour cela que, pour minimiser cet effet, il importe d'effectuer plusieurs cycles multigrilles à suivre, et ce jusqu'à ce que le résidu (une certaine norme de celui-ci) parvienne à une valeur suffisamment petite. La technique multigrille est donc itérative à deux échelles : au niveau des trois étapes-clés (lissages à ν_1 , ν_0 et ν_2 itérations) de la correction de grille grossière réursive *et* au niveau des cycles multigrilles eux-mêmes.

Notons enfin que la méthode multigrille employée dans l'outil développé au cours de cette thèse vient englober l'algorithme SIMPLER. En effet, le choix aurait pu être d'appliquer simplement une méthode multigrille à chacune des quatre relaxations de l'algorithme de couplage vitesse-pression. Cependant, dans le solveur mécanique, il est important de garder un couplage maximal entre les vitesses et la pression. C'est pour cela que SIMPLER a été employé comme lisseur même du solveur multigrille. Cela ajoute un certain nombre de spécificités à ce dernier. Par exemple, les résidus à transmettre sur la grille grossière sont celui de l'équation de continuité et ceux [2 composantes, suivant ($\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$)] de l'équation de bilan de quantité de mouvement⁵³. Il correspondent aux notations R_{\bullet} de l'équation (2.63). En revanche, les informations à prolonger sur la grille fine correspondent aux erreurs estimées sur les composantes des vitesses et sur la pression.

53. Bien évidemment, si la restriction a lieu d'une grille grossière vers la suivante, encore plus grossière, il s'agit de résidus sur les équations en *erreur* (cf. plus haut : l'équation n'est plus $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$ mais $\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{R} \dots$).

Avantage de la méthode multigrille

Le résultat principal de la méthode multigrille est que – de manière un peu simpliste – les composantes à toutes les longueurs d'ondes de l'erreur sont réduites en même temps, au cours d'un cycle multigrille. Il en résulte une vitesse de convergence considérablement accélérée par rapport à une méthode itérative classique (ici SIMPLER). De plus, une proportion importante des calculs est réalisée sur des grilles plus grossières que la grille de base ($n_r \times n_\theta$), nécessitant ainsi nettement moins de temps⁵⁴. Le résultat principal est que le temps de calcul ne devient non plus proportionnel au carré d'un nombre de cellules mais directement au nombre de cellules lui-même. L'efficacité d'un solveur multigrille est donc d'autant plus grande – par rapport à une méthode itérative – que le maillage est important.

Importance des opérateurs de transfert

Le passage de l'information entre les différents niveaux de grille est un point-clé des méthodes multigrilles. En effet, comme on l'a vu précédemment, une fois effectuées quelques itérations sur la grille fine, il est inutile de continuer à traiter le problème sur cette même grille : la vitesse de convergence va considérablement ralentir lorsque les composantes à courte longueur d'onde de l'erreur seront atténuées. Le principe est donc de poursuivre la résolution du problème (c.-à-d. continuer à itérer) sur une grille de pas plus large, ce qui implique la transmission de l'information de la grille fine vers une grille plus grossière. Cette opération ne peut être effectuée que de manière approximative, par définition, puisque les grilles fines et grossières n'ont pas la même résolution spatiale.

Ce transfert est classiquement réalisé par une opération de moyennage. Dans notre cas, le nombre de cellules sera divisé par deux dans les deux directions spatiales et il s'agira d'une simple moyenne des quatre valeurs de grille fine pour produire la nouvelle valeur (de grille grossière). Le principe est exposé à la figure 2.19 ; étant donnée la nature curviligne du maillage, cette moyenne doit tenir compte des volumes des cellules, variables radialement (même en cas de δr uniforme, cf. note 36, p. 110). Il s'agira donc d'une moyenne, arithmétique ou géométrique selon les champs⁵⁵. La prolongation est, elle, réalisée par simple interpolation bilinéaire de valeurs de la grille grossière vers la grille fine, avec le même type de correction de courbure que celui de la restriction. Dans la figure 2.19, les « zones d'influence » des opérateurs de transfert sont symboliquement représentées en grisé. Elle indiquent les aires qui vont entrer en compte dans la pondération. Les bandes grises étroites indiquent une

54. Ceci est encore plus vrai pour un maillage tridimensionnel. . .

55. La méthode multigrille implémentée dans l'outil développé est optimale pour des moyennes arithmétiques pour tous les champs sauf la viscosité qui, elle, sera restreinte par une moyenne géométrique, plus en accord avec le schéma de discrétisation de l'équation de STOKES employé.

simple moyenne dans le procédé, sans courbure qui entre en jeux. Par exemple, dans la figure 2.19b, la première partie (1) du transfert $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$ consiste à trouver les valeurs de \tilde{V}_r sur les bords horizontaux des cellules de grille grossière découpés en deux, grâce aux voisins immédiats. Il s'agit ici d'une simple interpolation linéaire, sans prise en compte de courbure puisque l'opération se fait à un même rayon. Il n'en va pas de même pour les valeurs de grille fine [même figure, opération (2)] à retrouver sur les nouveaux bords construits (en tireté).

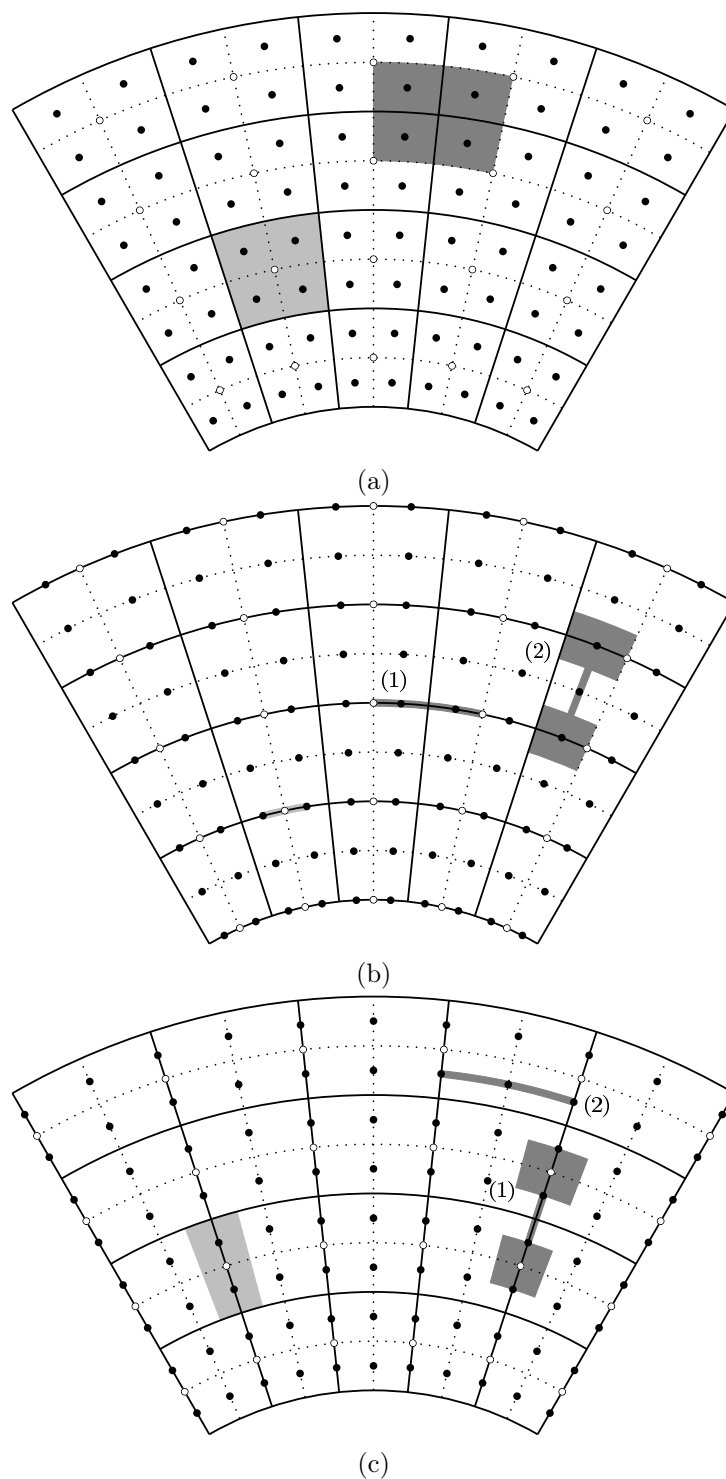


FIGURE 2.19 – Opérations de prolongation et de restriction. (a) Champs scalaires : résidu de continuité ou viscosité pour $\mathcal{I}_8^{2\delta}$; erreur sur la pression pour $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$. (b) Composante radiale de la vitesse pour $\mathcal{I}_8^{2\delta}$, erreur sur celle-ci pour $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$. (c) Composante azimutale de la vitesse pour $\mathcal{I}_8^{2\delta}$, erreur sur celle-ci pour $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$. Exemple pour un maillage $n_r = 8$, $n_\theta = 10$ ($f \approx 0,45$, $\Delta\theta = \pi/3$). La grille grossière (variables \circ) est représentée en traits pleins ; des traits en pointillés viennent compléter ces derniers pour représenter la grille fine (variables \bullet), de pas deux fois plus petit. Les parties grisées représentent la zone d'influence (cf. texte) de la restriction $\mathcal{I}_8^{2\delta}$ (gris clair) et de la prolongation $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$ (gris foncé). Les numéros indiquent l'ordre des opérations pour $\mathcal{I}_{2\delta}^\delta$ si nécessaire.

2.3 Résolution de l'équation de la chaleur

La résolution de l'équation de conservation de l'énergie est primordiale dans tout code de convection mantellique puisque c'est cette équation qui va véritablement contrôler l'évolution temporelle du système ($\text{Pr} \rightarrow \infty$); le champ de vitesse-pression est donc simplement « ajusté » (solveur multigrille basé sur l'algorithme SIMPLER), à chaque instant, au champ de flottabilité. Si la détermination de la solution numérique de l'équation de la chaleur peut être délicate pour la partie advective de celle-ci, elle reste cependant très légère en temps de calcul, comparativement à la détermination de l'écoulement, puisqu'une méthode purement explicite en temps a été choisie. Aucune technique particulière ne sera donc nécessaire pour accélérer la convergence, comme ce fut le cas pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement (méthode multigrille *nécessaire*). Ainsi, les développements requis furent moins problématiques; nous nous attarderons donc moins sur la description de la méthode de calcul elle-même dans cette partie.

2.3.1 Généralités

La discrétisation est ici basée sur les mêmes volumes de contrôle que ceux de la pression. La méthode (classique) employée dans l'outil de cette thèse consiste à traiter séparément la conduction et l'advection thermiques. La discrétisation repose sur une forme un peu différente – mais équivalente – de l'équation (2.14). Il faut garder à l'esprit que les profils de référence sont constants dans le temps, par définition de l'approximation anélastique-liquide⁵⁶ (cf. 1.3.3). De plus, l'adimensionnement choisi pour la température [éq. (1.116)] implique que l'écriture générale de perturbation autour de l'état de référence,

$$T = \bar{T} + T', \quad (2.87)$$

devient, dans sa forme sans dimension :

$$\tilde{T} = \tilde{\bar{T}} + \tilde{T}' + T_0. \quad (2.88)$$

L'équation (2.14) peut ainsi s'écrire, après quelques simplifications⁵⁷, comme une

56. cf. note 33, p. 109

57. Par exemple, le gradient adiabatique, inclus dans la dérivée totale de l'équation (2.14), annule exactement la partie proportionnelle à $\tilde{\bar{T}}$ du quatrième terme du second membre.

équation sur la température potentielle \tilde{T}' (voir aussi annexe A.1) :

$$\tilde{\rho}\tilde{c}_p \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{t}} = \underbrace{\frac{1}{\tilde{r}^d} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{k} \tilde{r}^d \frac{\partial (\tilde{T} + \tilde{T}')}{\partial \tilde{r}} \right]}_{\text{traitement conductif}} + \frac{\tilde{k}}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}'}{\partial \theta^2} + \tilde{H}_{tot} - \underbrace{\tilde{\rho}\tilde{c}_p \left(\tilde{V}_r \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \theta} \right)}_{\text{traitement advectif}}, \quad (2.89)$$

avec \tilde{H}_{tot} un terme source de chaleur incluant les trois types de chauffage (interne [c.-à-d. radioactif et de marée], visqueux et adiabatique) :

$$\tilde{H}_{tot} = \tilde{\rho} \frac{\text{Ra}_H}{\text{Ra}} + \frac{\tilde{\Phi}^{int}}{\text{Ra}} - \tilde{\alpha}\tilde{\rho} \text{Di} (\tilde{T}' + T_0) \tilde{g} \tilde{V}_r. \quad (2.90)$$

Notons que nous aurions pu également développer le terme radial de diffusion de l'équation (2.89). La discrétisation utilisée dans le cadre du code de convection développé correspond cependant à la forme exacte présentée dans cette équation (cf. plus bas).

Le principe du solveur de l'équation de la chaleur mis en place repose sur les calculs indépendants de la diffusion (conduction) thermique et de l'advection [cf. éq. (2.89)]. Le traitement du premier phénomène ne pose pas de problème particulier. En revanche, celui du second requiert un soin particulier dans la discrétisation, comme nous le verrons plus bas, afin de minimiser la diffusion numérique.

Enfin, comme la méthode employée est purement explicite en temps, cela apporte l'inconvénient d'une stabilité dépendant fortement des conditions de calcul (maillage, champ de vitesse, etc.); ainsi sera-t-il nécessaire de respecter un critère de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (Courant *et al.*, 1928). L'avantage est cependant de taille en ce qui concerne le traitement de l'advection thermique. En effet, les méthodes implicites sont souvent assez diffusives pour ce type de calcul (cf. p. ex. Ismail-Zadeh *et Tackley*, 2010); la formulation explicite rend possible, comme nous le verrons plus loin, un traitement particulièrement précis de l'advection.

2.3.2 Traitement de la conduction thermique

Schéma discret

La diffusion de la chaleur est réalisée via une discrétisation en volumes finis à l'ordre 2 en espace⁵⁸ et 1 en temps (méthode explicite). Cette dernière approximation temporelle s'est avérée largement suffisante dans les cas présentés dans cette thèse et reste classique dans les codes de convection thermique pour les manteaux planétaires (p. ex. Choblet *et al.*, 2007; Tackley, 2008). En effet, la précision temporelle va devenir importante dans certains cas critiques (régime transitoire devant être décrit

58. comme dans le cas de l'équation de bilan de quantité de mouvement

précisément, etc.) mais, compte tenu des larges incertitudes sur notre connaissance des propriétés des intérieurs planétaires, l'erreur provenant de ces dernières sera prédominante. Il serait par exemple bien peu raisonnable d'avoir un schéma à l'ordre 5 en temps, aussi précis soit-il, pour décrire l'évolution d'un fluide dont les propriétés sont peu certaines.

Avec les notations introduites précédemment dans ce chapitre – le raisonnement se fait sur un volume de contrôle de type pression (cf. fig. 2.12 et 2.13) – la discrétisation de l'équation de conduction,

$$\tilde{\rho}_i \tilde{c}_p \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\nabla} \cdot \left[\tilde{k} \tilde{\nabla} (\tilde{T} + \tilde{T}') \right] + \tilde{H}_{tot}, \quad (2.91)$$

donne [cf. éq. (2.89)], entre deux instants discrets successifs \tilde{t} et $\tilde{t} + \delta\tilde{t}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i \tilde{c}_p \frac{\widetilde{T'_{i+1j}{}^{t+\delta t}} - \widetilde{T'_{ij}{}^t}}{\delta\tilde{t}} &= \frac{1}{\tilde{r}_i^d \delta\tilde{r}_i} \left[\frac{2\tilde{k}_i \tilde{k}_{i+1}}{\tilde{k}_i + \tilde{k}_{i+1}} (\tilde{r}_{i+1}^-)^d \frac{\left(\widetilde{T}_{i+1} + \widetilde{T'_{i+1j}{}^t} \right) - \left(\widetilde{T}_i + \widetilde{T'_{ij}{}^t} \right)}{\delta\tilde{r}_{i+1}^-} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\tilde{k}_{i-1} \tilde{k}_i}{\tilde{k}_{i-1} + \tilde{k}_i} (\tilde{r}_i^-)^d \frac{\left(\widetilde{T}_i + \widetilde{T'_{ij}{}^t} \right) - \left(\widetilde{T}_{i-1} + \widetilde{T'_{i-1j}{}^t} \right)}{\delta\tilde{r}_i^-} \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{r}_i^2} \frac{\widetilde{T'_{ij+1}{}^t} + \widetilde{T'_{ij-1}{}^t} - 2\widetilde{T'_{ij}{}^t}}{\delta\theta^2} + \tilde{H}_{tot}^{ij}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Le terme source de chaleur est discrétisé de la même manière, en utilisant le maillage entrelacé introduit plus haut pour les valeurs discrètes des composantes des vitesses [chauffages visqueux et adiabatique, cf. éq. (2.15) et (2.90)]. Contrairement au cas de l'équation de STOKES, seules les vitesses nécessitent d'être reconstruites pour le schéma discrets de \tilde{H}_{tot}^{ij} ; la viscosité, nécessaire pour le terme $\tilde{\Phi}_{ij}^{int}$, est directement la valeur correspondant au nœud du centre du volume de contrôle, $\tilde{\eta}_{ij}$. Notons enfin qu'une moyenne harmonique est utilisée pour la reconstruction de la conductivité thermique aux interfaces orthoradiales⁵⁹ de la cellule. Ce schéma simple permet de bien mieux tenir compte des variations importantes possibles de cette propriété d'une cellule à l'autre (Patankar, 1980, § 4.2-3) ; il est donc préférable, dans le cas général.

59. Rappelons que \tilde{k} est, par définition, invariant avec θ .

De la même manière que pour le calcul de l'écoulement de STOKES, l'équation discrète précédente est mise sous la forme (2.70), chère à Patankar (1980), ce qui permet d'écrire le schéma suivant pour la conduction :

$$\widetilde{T'_{ij}}^{t+\delta t} = \widetilde{T'_{ij}}^t + \left(\delta \widetilde{T'_{ij}} \right)_{\text{cond}}, \quad (2.93)$$

avec

$$\left(\delta \widetilde{T'_{ij}} \right)_{\text{cond}} = \frac{\delta \tilde{t}}{\tilde{\rho}_i \tilde{C}_{p_i}} \left[\sum_{vs} a_{vs}^{T'} \left(\widetilde{T'_{vs}}^t - \widetilde{T'_{ij}}^t \right) + b_{ij}^{T'} \right]. \quad (2.94)$$

Les coefficients $a_{vs}^{T'}$ sont directement issus de la discrétisation (2.92) ; ils sont associés aux températures des quatre nœuds \bullet_{i-1j} , \bullet_{i+1j} , \bullet_{ij-1} et \bullet_{ij+1} (plus proches voisins du point courant $\widetilde{T'_p}^t \equiv \widetilde{T'_{ij}}^t$). Le terme source $b_{ij}^{T'}$ contient tous les termes proportionnels aux valeurs du profil de température de référence \tilde{T}_\bullet , ainsi que le terme incluant l'ensemble des sources de chaleur, \tilde{H}_{tot}^{ij} .

Critère CFL

Le choix d'une méthode explicite, pour des raisons invoquées plus haut, nécessite le recours à une condition spécifique sur la valeur du pas de temps $\delta \tilde{t}$ qui est choisie. La forme (2.94) prend ici tout son intérêt. En effet, le critère de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (Courant *et al.*, 1928) se retrouve simplement par la condition fondamentale de positivité des coefficients (Patankar, 1980, § 3.4 et 4.3-2). Celle-ci s'écrit ici :

$$a_P^{T'} - \sum_{vs} a_{vs}^{T'} > 0, \quad (2.95)$$

avec $a_P^{T'} = \frac{\tilde{\rho}_i \tilde{C}_{p_i}}{\delta \tilde{t}}$ le coefficient associé au nœud courant \bullet_{ij} . Ainsi, afin de toujours prendre la plus grande valeur possible du pas de temps $\delta \tilde{t}$, la forme suivante est obtenue, à partir de la condition (2.95) :

$$\delta \tilde{t}_{\text{cond}}^{CFL} = \frac{\min_{i \in \llbracket 1, n_r \rrbracket} (\tilde{\rho}_i \tilde{C}_{p_i})}{\max_{i \in \llbracket 1, n_r \rrbracket} \left(\frac{2(\tilde{r}_i^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i \delta \tilde{r}_i^-} \frac{\tilde{k}_{i-1} \tilde{k}_i}{\tilde{k}_{i-1} + \tilde{k}_i} + \frac{2(\tilde{r}_{i+1}^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i \delta \tilde{r}_{i+1}^-} \frac{\tilde{k}_i \tilde{k}_{i+1}}{\tilde{k}_i + \tilde{k}_{i+1}} + \frac{2\tilde{k}_i}{\tilde{r}_i^2 \delta \theta^2} \right)} \quad (2.96)$$

La complexité apparente de la condition CFL précédente est due à deux facteurs. Le premier est la présence, dans l'approximation anélastique-liquide, de profils de référence $\tilde{\bullet}$ pouvant varier *a priori* indépendamment (au moins pour \tilde{c}_p et \tilde{k}) ; le second facteur complexifiant l'expression est purement numérique : il vient du choix

d'un maillage pouvant être raffiné radialement⁶⁰. Il faut donc en tenir compte dans la détermination de la taille critique des cellules pour calculer l'effet de la diffusion thermique durant une certaine durée finie $\delta\tilde{t}$.

Conditions aux limites

La résolution de l'équation différentielle de la chaleur, pour être complète, nécessite bien évidemment des conditions aux limites en température. On supposera ici un profil linéaire pour la reconstruction de cette grandeur aux interfaces des cellules. Une reconstruction plus fine est cependant nécessaire pour la description de l'advection thermique (cf. 2.3.3). Ceci n'est cependant pas incompatible puisque, comme nous l'avons déjà évoqué au 2.2.2, les bords Γ_i et Γ_e seront considérés comme des murs (impénétrables). Or, c'est précisément sur ces bords que la température sera imposée, via des cellules fantômes (comme pour l'équation de STOKES), par une reconstruction linéaire simple. Cette dernière n'est donc pas en contradiction avec le schéma d'advection à haute résolution qui sera présenté plus loin puisqu'aucune reconstruction de température sur les bords Γ_i et Γ_e n'est nécessaire (advection nulle en ces lieux).

Sur les bords verticaux Γ_g et Γ_d , une condition de flux de chaleur nul sera imposée dans le cas d'une géométrie en fraction d'anneau ($\Delta\theta < 2\pi$) à bords miroirs [murs impénétrables, c.-à-d. $\tilde{V}_\theta(\Gamma_g) = \tilde{V}_\theta(\Gamma_d) \equiv 0$]. Dans le cas à bords périodiques ou bien d'un anneau complet ($\Delta\theta = 2\pi$), la condition est évidente. Sans entrer dans les détails, les conditions aux limites précédemment décrites sont numériquement imposées d'une manière similaire à celle présentée dans les jeux d'équations (2.77) et (2.78). Ainsi, pour prescrire, par exemple, une certaine température (constante) $\tilde{T}'(\Gamma_i)$ sur le bord intérieur en approximation de BOUSSINESQ, on procédera en imposant la température dans les cellules fantôme correspondantes, c'est-à-dire de rang 0 (cf., p. ex., fig. 2.15) :

$$\tilde{T}'_{0,j} = 2\tilde{T}'(\Gamma_i) - \tilde{T}'_{1,j}, \quad \forall j \in \llbracket 1, n_\theta \rrbracket. \quad (2.97)$$

Une condition en flux (condition de NEUMANN) peut également être prescrite, en raisonnant cette fois-ci sur l'expression discrète du flux de chaleur radial (purement conductif, car $\tilde{V}_r(\Gamma_i) \equiv 0$) : $-\tilde{k}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{r}}$. Si la prescription de ces conditions ne pose pas de problème particulier dans le cas de l'approximation de BOUSSINESQ, il faut cependant être vigilant dans le cas de l'approximation anélastique-liquide. En effet, l'outil développé durant cette thèse résout l'équation de la chaleur en température potentielle⁶¹ (\tilde{T}'). Ainsi, les conditions aux limites classiques de surfaces isothermes,

60. Ces deux facteurs font que le critère CFL n'est basé ici que sur des quantités variant radialement.

61. Choix « historique » de l'auteur...

pour la température totale,

$$\tilde{T}(\Gamma_i) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\Gamma_e) \equiv 0, \quad (2.98)$$

s'écrivent-elles, compte-tenu de la décomposition (2.88) et du cas simple de profils de références basés sur l'équation d'ADAMS-WILLIAMSON considéré dans cette thèse [cf. éq. (1.134); cf. aussi annexe A.1] :

$$\tilde{T}'(\Gamma_i) \equiv 1 - T_0 \exp(\text{Di}) \quad \text{et} \quad \tilde{T}'(\Gamma_e) \equiv -T_0. \quad (2.99)$$

2.3.3 Prise en compte de l'advection de la chaleur

L'équation générale pour l'advection d'une quantité scalaire C (p. ex. une concentration en un élément chimique donné) s'écrit sous la forme d'une équation de transport la plus simple possible :

$$\frac{DC}{Dt} = 0. \quad (2.100)$$

Dans notre cas, il s'agira de l'advection de chaleur soit, de manière équivalente [cf. éq. (1.107)], de l'advection de température. L'équation peut ainsi s'écrire, en faisant apparaître la divergence du champ vitesse :

$$\frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \tilde{T}') + \tilde{T}' \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \quad (2.101)$$

Schéma de discrétisation

La discrétisation en volumes finis de cette équation passe par son intégration sur une cellule générique du maillage $[(\tilde{r}, \theta) \in [\tilde{r}^-, \tilde{r}^+] \times [\theta^-, \theta^+]]$, de centre (\tilde{r}, θ) , et sur l'intervalle de temps discret $(\tilde{t} \in [\tilde{t}, \tilde{t} + \delta \tilde{t}])$; on obtient ainsi, toujours avec une méthode explicite à l'ordre 1 en temps, l'équation suivante pour la variation de température due à l'advection :

$$\begin{aligned} \left(\delta \tilde{T}' \right)_{\text{adv}} &= \frac{\delta \tilde{t}}{\tilde{r}^d \delta \tilde{r}} \left[(\tilde{r}^-)^d \tilde{V}_r^- \tilde{T}'_{r^-} - (\tilde{r}^+)^d \tilde{V}_r^+ \tilde{T}'_{r^+} \right] + \frac{(\tilde{r}^+)^d - (\tilde{r}^-)^d}{d \tilde{r}^d \delta \tilde{r} \delta \theta} \delta \tilde{t} \left[\tilde{V}^{\theta^-} \tilde{T}'_{\theta^-} - \tilde{V}^{\theta^+} \tilde{T}'_{\theta^+} \right] \\ &\quad - \tilde{T}' \frac{\delta \tilde{t}}{\tilde{r}^d \delta \tilde{r}} \left[(\tilde{r}^-)^d \tilde{V}_r^- - (\tilde{r}^+)^d \tilde{V}_r^+ \right] - \tilde{T}' \frac{(\tilde{r}^+)^d - (\tilde{r}^-)^d}{d \tilde{r}^d \delta \tilde{r} \delta \theta} \delta \tilde{t} \left[\tilde{V}^{\theta^-} - \tilde{V}^{\theta^+} \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

L'équation précédente peut se simplifier, en remarquant que, pour $d = 1$ ou $d = 2$, on a $\frac{(\tilde{r}^+)^d - (\tilde{r}^-)^d}{d \tilde{r}^d \delta \tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{r}}$. Quelques commentaires s'imposent sur cette forme. En effet, dans la discrétisation du premier terme du second membre de l'équation (2.101), les

températures sur les bords de la cellule (\tilde{T}'_{r-} , \tilde{T}'_{r+} , $\tilde{T}'_{\theta-}$ et $\tilde{T}'_{\theta+}$) sont nécessaires. Nous verrons que c'est à ce niveau qu'intervient la méthode à haute résolution employée : leur calcul est crucial pour une évaluation précise de l'advection thermique. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant. Notons enfin que, pour la partie proportionnelle à la divergence du champ de vitesse, l'hypothèse d'une température constante dans la cellule a été adoptée. Ceci semble en contradiction avec des valeurs possiblement différentes de la température sur les bords de la cellule. Cependant, il faut bien garder à l'esprit qu'il n'y a *a priori* aucune raison de prendre les mêmes hypothèses de variation d'une quantité donnée au sein d'une cellule ou bien entre deux cellules dans les diverses parties d'un schéma de discrétisation (p. ex. Patankar, 1980). Ainsi, les divers tests numériques effectués ont montré que cette discrétisation était amplement suffisante pour le traitement de notre problème de convection d'un fluide compressible (ALA).

Le moyen de plus simple d'évaluer la température à une interface donnée est de considérer que celle-ci est égale à la température associée au nœud situé immédiatement en amont de l'écoulement, c'est-à-dire sur le plus proche voisin (dans la direction correspondante, r ou θ) dans le sens opposé à la composante locale de la vitesse. Par exemple, pour une cellule Ω_{ij} , si la valeur discrète \tilde{V}_r^{ij} sur son bord inférieur est positive (flux entrant dans le volume), la température, sur cette même interface (soit $\tilde{T}'_{r_{ij}}$), sera considérée comme égale à celle de la cellule du dessous, soit directement T'_{i-1j} . Pour cette raison, on parle de schéma de discrétisation « amont » (ou *upwind*). Cette méthode est cependant peu précise : elle est sujette à une importante diffusion numérique, artificielle (cf. chap. 3).

Une méthode plus précise est celle originellement issue des travaux de Godunov (1959) ; on parle de schéma à haute résolution. La température aux interfaces peut alors s'écrire comme celle évaluée en schéma amont pur à laquelle on rajoute une certaine correction $\partial\tilde{T}'_{ij}$ due à la méthode haute résolution. Sans détailler d'avantage, pour l'instant, la forme de cette correction, la discrétisation (2.102) peut donc s'écrire, sous la forme de Patankar (1980) et avec nos notations habituelles (cf. fig. 2.12 et 2.13) :

$$\left(\delta\tilde{T}'_{ij}\right)_{\text{adv}} = \delta\tilde{t} \left[\check{a}_{P_{ij}}^{T'} \tilde{T}'_{ij} + \sum_{vs} \check{a}_{vs}^{T'} \widetilde{T}'_{vs} + \check{b}_{ij}^{T'} \right], \quad (2.103)$$

avec les coefficients (notation habituelle pour les plus proches voisins ; cf. fig. 2.15) :

$$\begin{aligned} \check{a}_{P_{ij}}^{T'} = & \frac{(\tilde{r}_i^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta\tilde{r}_i} \frac{1 - \text{sgn}(\tilde{V}_r^{ij})}{2} \tilde{V}_r^{ij} - \frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta\tilde{r}_i} \frac{\text{sgn}(\tilde{V}_r^{i+1j}) + 1}{2} \tilde{V}_r^{i+1j} \\ & + \frac{1}{\tilde{r}_i^d \delta\theta} \left(\frac{1 - \text{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij})}{2} \tilde{V}_\theta^{ij} - \frac{\text{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij+1}) + 1}{2} \tilde{V}_\theta^{ij+1} \right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\check{a}_{S_{ij}}^{T'} = \frac{(\tilde{r}_i^-)^d \operatorname{sgn}(\tilde{V}_r^{ij}) + 1}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{ij}, \quad (2.105)$$

$$\check{a}_{N_{ij}}^{T'} = \frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^d \operatorname{sgn}(\tilde{V}_r^{i+1j}) - 1}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{i+1j}, \quad (2.106)$$

$$\check{a}_{W_{ij}}^{T'} = \frac{1}{\tilde{r}_i \delta \theta} \frac{\operatorname{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij+1}) - 1}{2} \tilde{V}_\theta^{ij+1}, \quad (2.107)$$

$$\check{a}_{E_{ij}}^{T'} = \frac{1}{\tilde{r}_i \delta \theta} \frac{\operatorname{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij}) + 1}{2} \tilde{V}_\theta^{ij}, \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \check{b}_{ij}^{T'} &= \frac{(\tilde{r}_i^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{ij} \partial \tilde{T}_{ij}^r - \frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{i+1j} \partial \tilde{T}_{i+1j}^r + \frac{1}{\tilde{r}_i \delta \theta} \left(\tilde{V}_\theta^{ij} \partial \tilde{T}_{ij}^\theta - \tilde{V}_\theta^{i+1j} \partial \tilde{T}_{i+1j}^\theta \right) \\ &\quad - \tilde{T}_{ij} \left[\frac{(\tilde{r}_i^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{ij} - \frac{(\tilde{r}_{i+1}^-)^d}{\tilde{r}_i^d \delta \tilde{r}_i} \tilde{V}_r^{i+1j} + \frac{1}{\tilde{r}_i \delta \theta} \left(\tilde{V}_\theta^{ij} - \tilde{V}_\theta^{i+1j} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Les coefficients $\check{a}_{\bullet_{ij}}^{T'}$ correspondent à un schéma d'advection amont pur. Le terme source $\check{b}_{ij}^{T'}$ se décompose en deux parties : l'une (première ligne) correspond à la méthode haute résolution employée – via les corrections de température $\partial \tilde{T}_{ij}^\bullet$ aux interfaces de la cellule⁶² – et l'autre (seconde ligne) traduit l'influence de la compressibilité du milieu (divergence non nulle possible du champ de vitesse).

Méthode à haute résolution

Les corrections de température $\partial \tilde{T}_{ij}^\bullet$ sont calculées avec une méthode à haute résolution. Le principe général de cette dernière est très simple ; il est présenté à la figure 2.20. Sur celle-ci est représenté un cas unidimensionnel, plus simple pour le raisonnement. Trois volumes de contrôle apparaissent, chacun muni d'un nœud auquel est associée une température. L'hypothèse la plus simple pour l'évolution de la température au sein du volume est de considérer celle-ci comme constante. On obtient un champ de température reconstruit en échelons (fig. 2.20a). Ce cas correspond au degré 0 de la méthode à haute résolution et s'identifie au schéma amont (Godunov, 1959) ; étant donnée l'orientation du champ de vitesse ambiant \mathbf{V} , la température aux deux interfaces du volume de contrôle de coordonnée nodale x_i correspond à chaque fois à celle du nœud situé à gauche de chacun de ces bords (croix rouges).

62. Elle s'annule donc dans le cas d'un schéma amont simple.

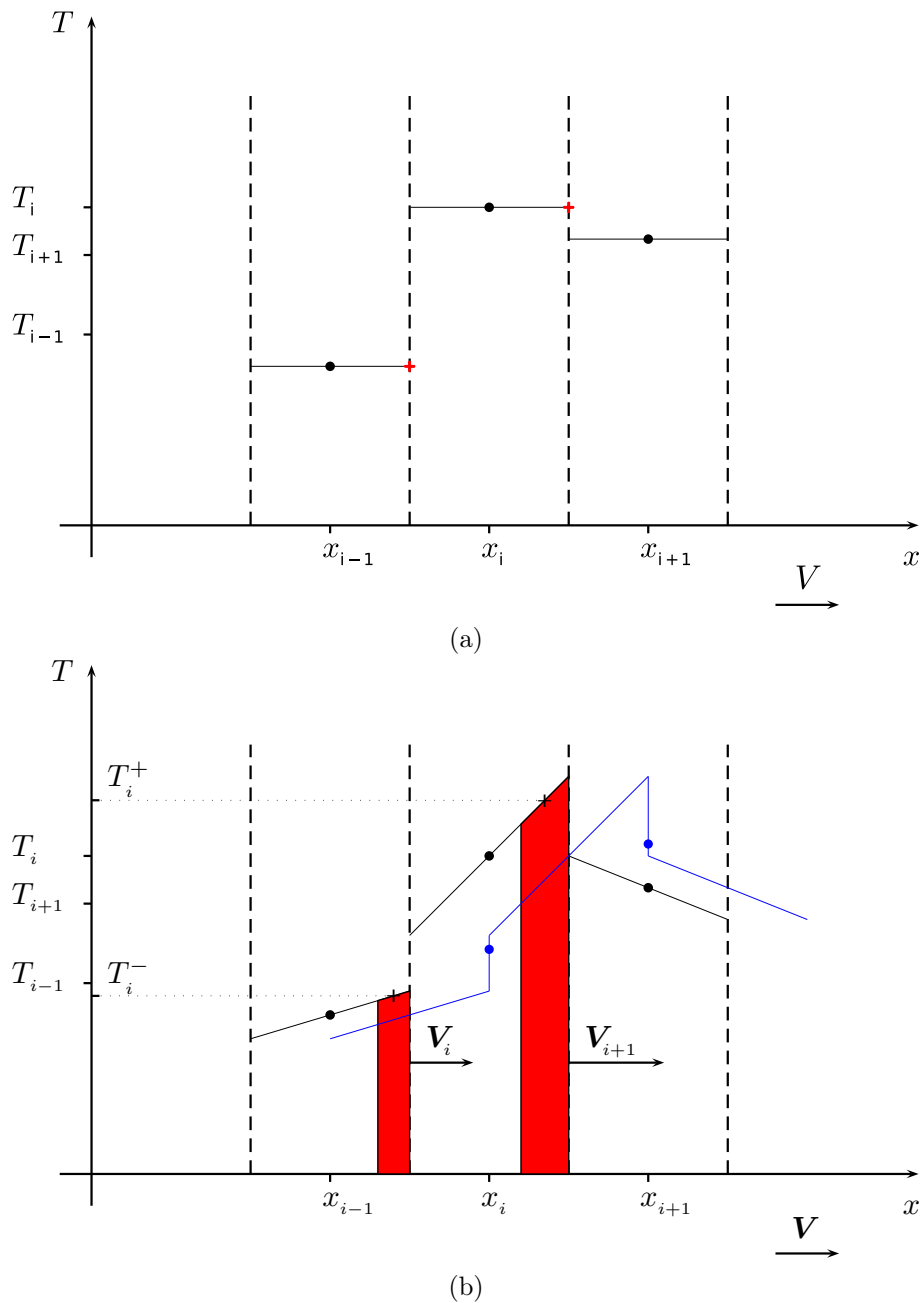


FIGURE 2.20 – Principe de la méthode d'advection à haute résolution. Un maillage 1D est représenté ici, avec trois volumes de contrôle voisins. La hauteur (ordonnée) des nœuds de chacun correspond à la température qui leur est associée, c'est-à-dire à la valeur moyenne de cette grandeur au sein de la cellule. L'hypothèse la plus simple sur l'évolution de la température au sein des volumes est de la considérer constante (a); les températures « entrantes/sortantes » pour la cellule centrale sont alors déterminées par un schéma amont (cf. texte; croix rouges). La méthode haute résolution consiste à supposer une certaine variation linéaire au sein de la cellule (b), définissant ainsi de nouvelles températures (croix noires) associées à l'énergie entrant/sortant du volume (zones rouges). Les pentes des profils de température doivent cependant être limitées, afin de ne pas parvenir à des oscillations artificielles comme c'est le cas ici [le profil advecté (en bleu) implique une température moyenne (nœuds bleus) plus forte dans la cellule en x_{i+1} que dans la cellule en x_i .]

Un modèle simple mais plus réaliste consiste à considérer que la température varie linéairement au sein des volumes de contrôle, via un profil de pente ξ non nulle. Le résultat est visible à la figure 2.20b (pour des pentes « arbitraires ») : la température caractéristique du flux entrant (T_i^-)/sortant (T_i^+), que l'on considère comme celle de l'interface dans la discrétisation présentée plus haut, est choisie équivalente à la valeur moyenne de cette grandeur correspondant à la quantité d'énergie advectée (en rouge) pendant la durée $\delta\tilde{t}$. Celle-ci dépend bien évidemment de la vitesse locale, sur l'interface de la cellule. En conséquence, la méthode haute résolution peut être vue comme un schéma *upwind* généralisé : la température pour l'interface de la cellule dépend non seulement du sens de la vitesse (principe amont), mais aussi de la valeur absolue de son amplitude. En outre, la valeur de cette température est directement contrainte par celle de la pente choisie pour le volume de contrôle amont. Dans le cas de la figure 2.20b, la pente pour la cellule centrale est trop forte ; en effet, après advection de la température, le nouveau profil, en bleu, implique une température moyenne (points bleus) de la cellule x_{i+1} plus importante que celle de la cellule x_i . L'augmentation, certes obligatoire au vu de l'importante quantité d'énergie advectée de la cellule x_i vers sa voisine aval, est cependant trop forte et une oscillation artificielle apparaît dans le champ de température.

Rappelons que la variation $\left(\delta\tilde{T}'\right)_{\text{adv}}$ déterminée précédemment [équ. (2.103)] porte sur la valeur *moyenne* de la température dans la cellule⁶³ (cf. 2.1.4). La valeur de \tilde{T}'_{ij} associée au nœud central du volume de contrôle correspond, en effet, à la valeur moyenne de la température dans toute la cellule. Ainsi, plusieurs types de profil de température peuvent être envisagés (reconstruits) au sein du volume de contrôle, du moment que la valeur moyenne soit respectée.

Il importe donc de considérer des valeurs raisonnables pour les pentes de ces profils. C'est tout l'intérêt de la technique appelée « limiteur de pente », classiquement associée à la méthode haute résolution. Nous verrons que cette technique repose sur un critère plus ou moins strict, basé sur les valeurs de température nodale de la cellule et de ses plus proches voisines. Le but est de ne pas faire augmenter une certaine quantité globale, dite *variation totale* du champ ; on parle de schéma TVD (*Total Variation Diminishing*), généralisant le schéma amont. Ceci permet d'éviter les oscillations artificielles précédemment évoquées. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur cette classe de méthodes⁶⁴ très performantes pour le traitement de l'advection en général pourra consulter l'ouvrage de Leveque (2002, notamment chap. 4 et 6), mais aussi le livre de Ismail-Zadeh et Tackley (2010, chap. 3 et 7, § 7.9), présentant plus le point de vue de la géodynamique.

63. méthode aux volumes finis!

64. originellement introduites pour la capture correcte des ondes de choc dans les fluides

Une fois les deux familles de pentes – que l'on notera $\{\xi_{ij}^r\}$ et $\{\xi_{ij}^\theta\}$ – calculées pour les volumes de contrôle (advection successivement dans les direction r et θ), les corrections de température sont immédiates. Le principe de la construction peut être compris, là encore, avec un raisonnement 1D (fig. 2.20b, symboles +). Finalement, dans notre cas bidimensionnel de géométrie annulaire, ces corrections s'écrivent :

$$\partial \tilde{T}_{ij}^r = \frac{\xi_{i-1j}^r \left(\delta \tilde{r}_{i-1} - \tilde{V}_r^{ij} \delta \tilde{t} \right) \left[\text{sgn}(\tilde{V}_r^{ij}) + 1 \right] + \xi_{ij}^r \left(\delta \tilde{r}_i - \tilde{V}_r^{ij} \delta \tilde{t} \right) \left[\text{sgn}(\tilde{V}_r^{ij}) - 1 \right]}{4}, \quad (2.110)$$

$$\partial \tilde{T}_{ij}^\theta = \frac{1}{4} \left(\delta \theta - \frac{\tilde{V}_\theta^{ij}}{\tilde{r}_i} \delta \tilde{t} \right) \left\{ \xi_{ij-1}^\theta \left[\text{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij}) + 1 \right] + \xi_{ij}^\theta \left[\text{sgn}(\tilde{V}_\theta^{ij}) - 1 \right] \right\}. \quad (2.111)$$

Limiteurs de pente

Les valeurs des pentes sont calculées de différentes manières selon le limiteur choisi. Rappelons que le cas $\xi_{ij}^\bullet \equiv 0$ correspond au schéma amont classique (Godunov, 1959). À l'instar d'une discrétisation en différences finies classiques, les trois méthodes les plus simples pour estimer la pente du profil de température d'un volume de contrôle consistent en une pente rétrograde (méthode de BEAM-WARMING),

$$\xi_{ij}^{r,BW} := \frac{\tilde{T}'_{ij} - \tilde{T}'_{i-1j}}{\delta \tilde{r}_i^-} \quad \text{et} \quad \xi_{ij}^{\theta,BW} := \frac{\tilde{T}'_{ij} - \tilde{T}'_{ij-1}}{\delta \theta}, \quad (2.112)$$

une pente prograde (méthode de LAX-WENDROFF),

$$\xi_{ij}^{r,LW} := \frac{\tilde{T}'_{i+1j} - \tilde{T}'_{ij}}{\delta \tilde{r}_{i+1}^-} \quad \text{et} \quad \xi_{ij}^{\theta,LW} := \frac{\tilde{T}'_{ij+1} - \tilde{T}'_{ij}}{\delta \theta}, \quad (2.113)$$

ou bien une pente centrée (méthode de FROMM),

$$\xi_{ij}^{r,F} := \frac{\tilde{T}'_{i+1j} - \tilde{T}'_{i-1j}}{\delta \tilde{r}_i^- + \delta \tilde{r}_{i+1}^-} \quad \text{et} \quad \xi_{ij}^{\theta,F} := \frac{\tilde{T}'_{ij+1} - \tilde{T}'_{ij-1}}{2\delta \theta}. \quad (2.114)$$

Cependant, ce calcul peut donner lieu à des oscillations artificielles dans les régions à fort gradient de température, ainsi que cela a été évoqué plus haut. La limitation des pentes passe donc par ce type de calcul, mais en prenant la valeur la plus faible de celles obtenues, au sens d'un certain critère sur leur valeur absolue.

Une des méthodes les plus simples, dite du *minmod*, repose sur la comparaison des valeurs des pentes amont et aval : c'est la plus faible en valeur absolue qui est choisie. Dans le cas où les deux pentes sont de signes opposés (c.-à-d. forte variation

locale du champ), la pente est choisie nulle – retour au schéma amont. Le limiteur *minmod* (limitation la moins forte) s'écrit donc ainsi :

$$\xi_{ij}^{\bullet M} := \minmod \left(\xi_{ij}^{\bullet BW}, \xi_{ij}^{\bullet LW} \right), \quad (2.115)$$

avec la fonction *minmod* définie de la manière suivante :

$$\minmod(a, b) := \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ et } ab > 0, \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ et } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (2.116)$$

Un limiteur plus contraignant est celui proposé par [van Leer \(1977\)](#), dit limiteur MC (*Monotonized Central-difference*) et se construit comme suit :

$$\xi_{ij}^{\bullet MC} := \minmod(\xi_{ij}^{\bullet F}, 2\xi_{ij}^{\bullet BW}, 2\xi_{ij}^{\bullet LW}). \quad (2.117)$$

La fonction *minmod* est ici utilisée dans sa version à 3 arguments. Sa forme générale à n arguments est la suivante :

$$\minmod(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_1) \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|) & \text{si } \operatorname{sgn}(x_i) = \operatorname{sgn}(x_{i+1}) \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.118)$$

Enfin, le limiteur le plus fort – celui qui a été utilisé ici pour le calcul des pentes – est celui donné par la méthode dite *superbee* ([Roe, 1986](#)). En particulier, celle-ci se révèle extrêmement efficace pour l'advection de discontinuités. Les pentes s'écrivent alors, pour chacune des deux directions r et θ :

$$\xi_{ij}^{\bullet S} := \maxmod \left[\minmod(\xi_{ij}^{\bullet LW}, 2\xi_{ij}^{\bullet BW}), \minmod(2\xi_{ij}^{\bullet LW}, \xi_{ij}^{\bullet BW}) \right], \quad (2.119)$$

avec la fonction *maxmod* définie de la même manière que son homologue *minmod* [éq. (2.118), avec *max* au lieu de *min*].

Une dernière technique qui a été testée est le calcul des pentes via une approche géométrique (p. ex. [Hourdin et Armengaud, 1999](#) ; [Choblet et al., 2007](#)). Il s'agit d'évaluer une pente effective, définie par (exemple de la direction r) :

$$\xi_{ij}^{r \text{ geom.}} := \begin{cases} \frac{\xi_{ij}^{r LW} \xi_{ij}^{r BW}}{\xi_{ij}^{r F}} & \text{si } \tilde{T}'_{i-1j} \leq \tilde{T}'_{ij} \leq \tilde{T}'_{i+1j} \text{ ou } \tilde{T}'_{i-1j} \geq \tilde{T}'_{ij} \geq \tilde{T}'_{i+1j}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.120)$$

Une méthode classique, encore largement utilisée dans les codes de convection actuels (p. ex. [Tackley, 2008](#)), est connue sous l'acronyme MPDATA (*Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm* ; [Smolarkiewicz, 1984](#)). Il s'agit

également, ici, d'apporter une correction au schéma *upwind*, mais *a posteriori*, par application d'un champ de vitesse anti-diffusif, et ce de manière récursive. Celui-ci est dérivé via une analyse de l'erreur de troncature du schéma amont avec l'hypothèse d'un écoulement uniforme. Si cet algorithme a largement fait ses preuves, il reste cependant rapidement consommateur de temps de calcul, par rapport aux méthodes à haute résolution, très légères.

Pour terminer, précisons que, dans le code de convection développé, l'advection est réalisée en outre grâce à une méthode en flux alternés. Ceci permet d'augmenter la précision du calcul lorsque le champ de vitesse est diagonal par rapport aux cellules du maillage, évitant ainsi des distorsions artificielles du champ lorsque l'advection est réalisée simultanément dans les deux directions r et θ (p. ex. Hourdin et Armengaud, 1999). Si, pour un pas de temps $\delta\tilde{t}$ déterminé par le critère CFL (cf. plus bas), la variation du champ de température par conduction est bien déterminée en une fois, l'advection est, elle, calculée en n sous-pas de temps $\delta\tilde{t}/n$, dans les directions r et θ alternativement. Un compromis raisonnable à $n = 10$ a été utilisé afin de ne pas trop pénaliser le temps de calcul du solveur thermique⁶⁵.

Critère CFL

À l'instar du traitement de la conduction thermique, présenté plus haut, le calcul de l'advection thermique est effectué via une méthode purement explicite en temps. La stabilité du schéma repose donc de nouveau sur la réalisation d'un critère de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (Courant *et al.*, 1928). Mathématiquement semblable, celui-ci est cependant plus intuitif que dans le cas de la diffusion de la chaleur ; il peut être évalué en raisonnant sur la quantité totale d'énergie entrant dans le volume par advection : celle-ci ne doit pas dépasser une certaine limite (correspondant *idéalement* à tout le volume). Numériquement, bien entendu, rien n'est jamais aussi simple ! Aussi, prendra-t-on soin de pondérer – classiquement – ce critère par une certaine constante C , qui dépendra notamment de la géométrie du problème (p. ex. cartésien ou anneau sphérique) mais aussi du schéma de discrétisation employé.

Le critère ainsi déterminé, suffisant dans le cadre du code de convection élaboré, correspond au calcul suivant du pas de temps :

$$\delta\tilde{t}_{\text{adv}}^{\text{CFL}} = \min_{(i,j) \in \llbracket 1, n_r \rrbracket \times \llbracket 1, n_\theta \rrbracket} \left(\delta\tilde{t}_{\text{adv}}^{ij} \right), \quad (2.121)$$

65. qui demeure cependant très « léger » devant le solveur mécanique, principalement en raison de l'utilisation d'une méthode explicite.

avec

$$\begin{aligned} \delta \tilde{t}_{\text{adv}}^{ij} &:= \frac{C}{d+1} \left[(\tilde{r}_{i+1}^-)^{d+1} - (\tilde{r}_i^-)^{d+1} \right] \delta \theta \\ &\times \left\{ \left[\max(0, \tilde{V}_r^{ij}) (\tilde{r}_i^-)^d + \left| \min(\tilde{V}_r^{i+1j}, 0) \right| (\tilde{r}_{i+1}^-)^d \right] \delta \theta \right. \\ &\quad \left. + \left[\max(0, \tilde{V}_\theta^{ij}) + \left| \min(\tilde{V}_\theta^{ij+1}, 0) \right| \right] \tilde{r}_i^{d-1} \delta \tilde{r}_i \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

La constante C sera typiquement choisie égale à $\frac{1}{2}$. Notons enfin que, dans notre cas, la méthode en flux alternés contribue à renforcer la stabilité du critère CFL : l'advection est, en effet, réalisée en sous-pas de temps plus petits.

Finalement, le pas de temps effectif, $\delta \tilde{t}^{CFL}$, réellement utilisé pour la conduction comme pour l'advection, c'est-à-dire pour le schéma d'évolution temporelle du code, est le plus faible trouvé, pour être certain de la stabilité du schéma en toute cellule du maillage et à tout instant :

$$\delta \tilde{t}^{CFL} = \min(\delta \tilde{t}_{\text{cond}}^{CFL}, \delta \tilde{t}_{\text{adv}}^{CFL}). \quad (2.123)$$

Puisque la température est au cœur du couplage thermo-orbital modélisé dans cette thèse, il importe de s'assurer que les méthodes choisies, et surtout leur implémentation, aboutissent à une estimation correcte des transferts thermiques. La validation du code de convection a donc été une étape cruciale dans ce travail. Elle fait l'objet du chapitre suivant.

Le code de convection : principe et validation

Ce chapitre présente certains des tests-clés qui ont permis de valider l’outil élaboré durant cette thèse pour le calcul des transferts thermiques au sein d’un manteau planétaire. La première partie est consacrée aux principes généraux du code de convection. La deuxième présente quelques-uns des tests de précision et de performance de l’outil. Enfin, la troisième section présente un aperçu de la validation du code final pour les transferts thermiques (*benchmark*). Celle-ci sera l’occasion, de rappeler – qualitativement – quelques-unes des propriétés phénoménologiques de la convection.

3.1 Principe de l’outil CHEOPS-2D

3.1.1 Philosophie suivie

Cette thèse a été consacrée au développement d’un outil numérique permettant de simuler conjointement la dynamique interne d’une planète (ou de son satellite), le chauffage de marée associé et sa rétro-action, ainsi que l’évolution orbitale du système formé par ces deux corps. Le lecteur notera qu’il y a certes pléthore de codes de convection, en particulier en géométrie bidimensionnelle. À l’instar de leurs homologues géophysiques, les programmes d’évolution orbitale sont nombreux de par le monde. En revanche, à la connaissance de l’auteur, aucun outil n’existe réellement pour décrire de manière complètement cohérente¹ les deux phénomènes conjointement et étudier les interactions associées. Une discussion plus détaillée des approches déjà existantes (paramétrées ou semi-paramétrées) sera donnée au chapitre 5.

1. On ne le sera cependant jamais assez. . . principe premier du numéricien !

Il a été décidé, au commencement de ce travail, de réécrire un outil complet de dynamique interne et orbitale en utilisant, entre autres, des techniques numériques qui ont fait leurs preuves dans d'autres codes. À titre d'exemple, les travaux de Gaël Choblet (p. ex. Choblet, 2005 ; Choblet *et al.*, 2007) et de Paul Tackley (p. ex. Tackley, 1994, 2008), tous deux auteurs respectifs des codes CEDIPE et StagYY (3D sphériques), ont été une véritable source – parmi tant d'autres – d'inspiration intellectuelle. Le temps passé à penser, écrire, déboguer (...), tester et valider un code complet est certes (très) long, qui plus est lorsqu'on en multiplie les possibilités (géométries, approximations, etc.) mais il est toutefois largement compensé par les compétences acquises pendant cette tâche et la connaissance de l'outil final dans ses moindres détails. Ce dernier point est crucial, tant pour les applications possibles que pour les développements qui pourront être apportés dans le futur. Un soin particulier a ainsi été apporté aux caractères modulaire et explicite du code, facilitant les possibilités d'extensions futures, mais aussi la prise en main aisée de l'outil – l'auteur l'espère – par de futurs collaborateurs.

Ainsi est né CHEOPS-2D² (Besserer *et al.*, 201x). Ce code a été développé en Fortran 95, afin de tirer parti à la fois de la puissance de ce langage pour le calcul scientifique³ et de la possibilité (apparue avec la norme Fortran 90) de programmation moderne qu'il offre⁴.

3.1.2 Structure globale

Le schéma général de fonctionnement de CHEOPS-2D est présenté à la figure 3.1. Les méthodes numériques employées pour chacune des composantes de l'outil ont été décrites, pour la plupart, au chapitre 2. Les parties correspondant à l'évaluation du chauffage de marée et au calcul de l'évolution orbitale résultante seront présentées respectivement aux chapitres 4 et 5.

L'initialisation (cf. fig. 3.1) concerne tant les quantités géométriques, telles que le maillage ou encore la partie purement géométrique (donc constante) des coefficients de discrétisation des équations, que des quantités plus physiques, comme par exemple les profils de référence, constants⁵ dans l'approximation anélastique-liquide. Dans ce bloc figurent également des aspects purement pratiques : vérification de compatibilité des paramètres entrés par l'utilisateur, redémarrage à partir d'une simulation précédente, fichiers de sorties et de sauvegarde, etc. La simulation est ensuite lancée via le choix d'un nombre donné de pas de temps. On favorisera cette méthode à tout

2. *Coupling Heat transfer and Evolution of the Orbit of Planets and of their Satellites in 2-Dimensional geometry*

3. La toute première version, FORTRAN, fut définie voici 58 ans (Backus *et al.*, 1954) ; elle est apparue « concrètement » deux ans plus tard.

4. p. ex. l'allocation dynamique de mémoire et l'encapsulation de données.

5. cf. note 33, p. 109

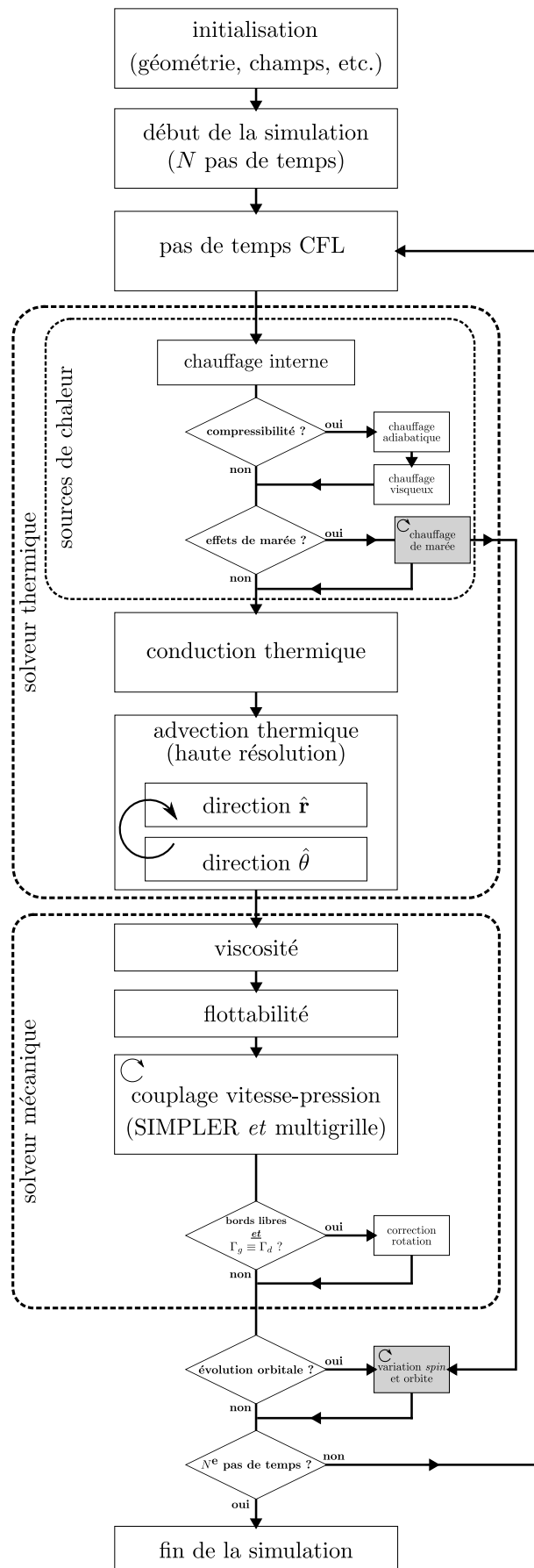


FIGURE 3.1 – Structure générale du code CHEOPS-2D. Les flèches circulaires indiquent que des processus itératifs sont en jeu. Les parties grisées correspondent à des « solveurs » à part entière et interagissent en fait entre elles (cf. chap. 4 et 5).

type d'arrêt automatique, qui serait basé sur un critère généraliste plus ou moins complexe (et toujours incertain). Sur ce point, la possibilité de visualiser diverses grandeurs moyennes (notamment $\langle \tilde{T} \rangle$, \tilde{V}_{RMS} , équilibre des flux de chaleur moyens sur Γ_i et Γ_e) au cours d'une simulation permet à l'utilisateur de décider lui-même du moment où il est raisonnable de stopper celle-ci, s'il y a convergence avant la fin de l'exécution des N itérations en temps prescrites. Cette approche empirique est de loin préférée par l'auteur, qui a toujours souhaité garder un contrôle sur le jugement – pas toujours simple – de la convergence ou non d'un calcul.

S'en suit l'exécution d'une boucle générale sur le temps, dont le pas est déterminé de manière optimale, à chaque itération (condition CFL, cf. 2.3). Les diverses sources de chaleur sont évaluées dans un premier temps. Dans le cas de l'approximation de BOUSSINESQ (BA), il s'agit simplement du chauffage interne (par exemple associé à une décroissance radioactive des sources). En revanche, dans les approximations de BOUSSINESQ étendue (EBA) et anélastique-liquide [tronquée (TALA) ou non (ALA)], deux sources de chaleur additionnelles, directement liées à l'écoulement, doivent être ajoutées : la dissipation visqueuse et le chauffage/refroidissement adiabatique. En outre, si les effets de marées sont pris en compte, la source d'énergie correspondante est également incluse. L'évaluation correcte de cette dernière a demandé un effort particulier. Nous verrons au chapitre 4 qu'une méthode semi-analytique a pour cela été développée. Celle-ci tient notamment compte du fait que le problème de la marée est intrinsèquement tridimensionnel (sphérique) alors que les transferts de chaleurs sont évalués dans une géométrie « 2D-sphérique », explicitée au chapitre 2 (pour des raisons de temps de calcul essentiellement).

La conduction thermique est ensuite évaluée (cf. 2.3.2), avec l'application des conditions aux limites appropriées. L'advection est alors calculée, via la méthode à haute résolution en flux alternés présentée à la fin du chapitre précédent. Une sous-boucle temporelle est réalisée en n pas de temps et l'advection est, à chaque itération, évaluée (calcul des pentes et coefficients discrets, application du schéma discret avec les conditions aux limites requises), pour une durée $\delta\tilde{t}/n$, dans la direction r puis dans la direction θ . Nous verrons plus loin que cela minimise une certaine distorsion d'anomalies thermiques advectées diagonalement par rapport au maillage orthogonal de CHEOPS-2D.

L'étape suivante est de loin celle qui a demandé le plus d'effort en terme de développement et d'optimisation : il s'agit du solveur mécanique, permettant de déterminer l'écoulement [solution $(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{p}')$], pour un jeu de champs de flottabilité et de viscosité donné. Cette dernière quantité peut être évaluée via une loi d'ARRHENIUS ou, le plus souvent dans notre cas, avec l'approximation de FRANK-KAMENETSKII, avec ou sans dépendance en pression hydrostatique. Le couplage entre les champs de vitesse et de pression est réalisé, comme on l'a vu précédemment, via l'algorithme SIMPLER. Afin d'accélérer la convergence de la méthode, celui-ci est imbriqué au

sein d'une méthode multigrille géométrique. Un certain nombre de cycles V^6 permettent alors de réduire significativement les résidus de l'équation de continuité et des composantes des vitesses ($\tilde{V}_r, \tilde{V}_\theta$). Le critère de convergence est basé sur le passage en dessous d'une certaine tolérance – choisie par l'utilisateur ; typiquement 10^{-4} pour une simulation de convection standard – de la norme « infini » des résidus. Notons, au passage, que les résidus sur les vitesses sont « normalisés » par la flottabilité, afin que la tolérance choisie garde un sens générique et donc que ceux-ci soient comparables aux résidus de continuité. En effet, un écoulement de convection à fort nombre de RAYLEIGH induit nécessairement une flottabilité importante et donc des vitesses élevées. L'« erreur » (résidu) absolue tolérée sur les vitesses peut donc être raisonnablement plus forte ; c'est l'erreur *relative* qui importe alors.

À l'issue de la détermination de l'écoulement, qui demande plus de 90 % du temps de calcul de CHEOPS-2D, une correction de la rotation moyenne est éventuellement effectuée (cf. plus loin). La dernière étape, avant les divers stockages de données (grandeurs moyennes globales, profils moyens, champs 2D, etc.) et de « sauvegardes » (fichier de redémarrage), est le calcul de l'évolution orbitale associée du système planète-satellite ou (exo)planète-étoile considéré, si l'on a choisi de prendre en compte les effets de marée sur l'orbite. L'évolution des éléments orbitaux qui en résulte (demi-grand axe, excentricité, inclinaison et vitesses de rotation-propre ; cf. chap. 5) est calculée via une sous-boucle temporelle, avec un pas de temps typiquement de l'ordre de 10 000 ans, et ce sur une durée totale rigoureusement égale au pas de temps utilisé pour le calcul des transferts de chaleur. Ce dernier n'est, en effet, pas adapté pour les calculs orbitaux : il varie typiquement de $\sim 10^5$ à $\sim 10^6$ années, selon le nombre de RAYLEIGH du problème.

Lorsque la N^e itération temporelle globale a été effectuée, l'algorithme s'arrête de lui-même, quel que soit l'état des divers champs et quantités calculés. Comme mentionné précédemment, l'utilisateur peut bien entendu décider d'arrêter la simulation au moment où il juge qu'un état stationnaire a été atteint (au sens d'une précision raisonnable).

3.1.3 Le problème de la rotation globale

Le calcul d'un écoulement en géométrie annulaire munie de conditions en bords libres (c.-à-d. contrainte cisailante nulle sur les bords Γ_i et Γ_e) implique que la solution déterminée est toujours valable à une composante en rotation solide près. En effet, puisqu'aucune vitesse n'est imposée sur les deux bords du modèle – autrement dit la surface de la planète et sa limite manteau-noyau – un déplacement global peut apparaître. En particulier, les méthodes itératives employées (SIMPLER et cycles multigrille) pour le calcul des vitesses vont avoir naturellement tendance à

6. F dans les cas à fortes variations de viscosité

favoriser l'émergence de cette rotation, qui se trouve comme « mise en route » par le bruit résiduel – décroissant avec les itérations – du solveur. En effet, si une certaine rotation peut bien avoir lieu, par exemple pour la partie lithosphérique par rapport à l'asthénosphère, en lien avec les mouvements associés aux transferts de chaleur interne, il n'y a pas de raison *a priori* de développer un mouvement de rotation d'ensemble. En outre, les équations de LIOUVILLE qui décriraient cette rotation n'étant pas prises en compte dans cette étude, il est légitime ici de contraindre l'écoulement en le corrigeant de ce mouvement d'ensemble.

Il est donc important de soustraire cette rotation artificielle au champ de vitesse obtenu. Celle-ci devient, en effet, de par le solveur mécanique itératif employé, de plus en plus forte et n'a jamais tendance à se résorber. Puisqu'il s'agit d'une rotation globale (s'identifiant à une rotation de solide), le transfert de chaleur n'est théoriquement pas affecté. Cependant, de l'expérience de l'auteur, ce phénomène va impliquer des vitesses azimutales toujours plus élevées à mesure que la vitesse de rotation augmente. Celles-ci vont, à terme, devenir problématiques pour le solveur mécanique (ralentissement de la convergence) comme pour le solveur thermique ; par exemple, l'advection latérale se faisant avec des valeurs de plus en plus fortes de vitesse, il en résulte un pas de temps CFL de plus en plus faible, allongeant considérablement le nombre d'itérations temporelles nécessaires pour une durée physique donnée de simulation.

Diverses méthodes sont utilisées par les auteurs pour retirer cette rotation moyenne, caractéristique du mouvement de solide (vecteur rotation $\tilde{\Omega}_{sol}$). Par exemple, [Tackley \(2008\)](#) procède en évaluant la rotation par rapport à trois axes orthogonaux. [Zhong et al. \(2008\)](#) procèdent un peu différemment en passant par le moment d'inertie \tilde{I} de la coquille sphérique (de masse volumique constante $\tilde{\rho}$). Ainsi, grâce à l'expression de ce dernier,

$$\tilde{I} = \frac{8\pi}{15} \tilde{\rho}(R_e^5 - R_i^5), \quad (3.1)$$

ainsi qu'à celle du moment cinétique du fluide – par rapport au centre O de la coquille de volume $\tilde{\mathcal{V}}$ – animé du champ de vitesse $\tilde{\mathbf{V}}^*$,

$$\tilde{\mathbf{L}}_O = \tilde{\rho} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{V}}^* d\mathcal{V}, \quad (3.2)$$

avec $\tilde{\mathbf{r}}$ le vecteur position, d'origine O , la relation simple caractérisant un mouvement de rotation solide de vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$,

$$\tilde{\mathbf{L}}_O = \tilde{I}\tilde{\Omega}, \quad (3.3)$$

permet à [Zhong et al. \(2008\)](#) de déduire le vecteur rotation moyen du fluide dans la coquille sphérique :

$$\tilde{\Omega}_{sol} := \frac{15}{8\pi(R_e^5 - R_i^5)} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{V}} d\mathcal{V}. \quad (3.4)$$

Le champ de vitesse final, $\tilde{\mathbf{V}}$, est alors déterminé par la correction simple suivante :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}^* - \tilde{\Omega}_{sol} \times \tilde{\mathbf{r}}. \quad (3.5)$$

Une méthode équivalente consiste à directement évaluer le vecteur rotation moyen par le calcul suivant :

$$\tilde{\Omega}_{sol} := \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \frac{\tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{V}}^*}{\|\tilde{\mathbf{r}}\|^2} d\tilde{\mathcal{V}}. \quad (3.6)$$

Celle-ci a été adoptée récemment pour le code GAIA ([Hüttig et Stemmer, 2008a,b](#)), qui n'était pas, jusqu'à présent, doté d'une telle correction pour les simulations en bords libres (Tosi, communication personnelle). L'ajout de cette possibilité, de même que la compressibilité (EBA et TALA), fruit du travail de Nicola Tosi (DLR, Berlin), a fait partie des éléments-clés pour l'étude – débutée en collaboration avec ce collègue – de *benchmarking* de codes de convection pour un manteau compressible en géométrie cylindrique (voir plus bas).

Pour notre part, la correction est plus simple puisqu'il s'agit d'une géométrie bidimensionnelle. Ainsi, à l'instar de ce que fait Tackley (communication personnelle) dans son code StagYY ([Tackley, 2008](#)) en mode « anneau sphérique » ([Hernlund et Tackley, 2008](#)), le retrait de la rotation moyenne dans CHEOPS-2D est effectué via le simple calcul de la vitesse angulaire (c.-à-d. $\tilde{V}_\theta/\tilde{r}$) moyenne dans l'anneau. Ainsi, la composante du vecteur rotation moyen, nécessairement orthogonale au plan de l'anneau, s'exprime de la manière suivante :

$$\tilde{\Omega}_{sol} := \frac{d+1}{\Delta\theta (R_e^{d+1} - R_i^{d+1})} \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{\Delta\theta} \tilde{V}_\theta \tilde{r}^{d-1} d\tilde{r} d\theta, \quad (3.7)$$

avec, rappelons-le, d le degré de courbure effectif du domaine.

Dans la pratique, l'expression ci-dessus est évaluée par simple moyenne, pondérée par les volumes des cellules, de la quantité $\tilde{V}_\theta/\tilde{r}$, afin de rester cohérent avec la précision numérique de calcul employée.

Notons que le problème de la rotation moyenne apparaît non seulement en géométrie annulaire complète ($\Delta\theta = 2\pi$), que ce soit en anneau sphérique ou cylindrique, mais aussi dans le cas d'une fraction d'anneau ($\Delta\theta < 2\pi$) ou bien d'une géométrie cartésienne (*pseudo*-cartésienne dans notre cas, avec $d = 1$ et $f \rightarrow 1$) munies de

bords latéraux périodiques. Dans ce dernier cas, la rotation moyenne s'identifie à un flux latéral (profil de vitesse ; plus de notion de courbure ici), également artificiel et à retirer de la solution.

3.2 Aperçu des tests numériques

3.2.1 Précision pour l'équation de STOKES

Quelle est la précision pouvant être obtenue avec la méthode de couplage vitesse-pression implémentée dans CHEOPS-2D pour la résolution de l'équation de STOKES ? Nous nous focaliserons ici sur quelques tests-clés pour montrer que la méthode employée – le solveur écrit – fournit précisément les solutions attendues dans la géométrie d'anneau sphérique. Étant donnée la complexité intrinsèque du problème de STOKES, seuls quelques cas simples, pourvus d'une solution analytique, ont été envisagés ; il s'agit de résoudre l'équation (2.7) tout en satisfaisant à la condition (2.5), avec $\tilde{\rho} = 1$ et $Ra = Co = 0$. La véritable validation finale – le *benchmark* – de l'outil numérique (équations de conservation couplées) ne sera présenté qu'au 3.3. En outre, si de multiples tests ont été effectués dans les différentes géométries rendues possibles par l'outil (cf. p. 103), seuls les cas en géométrie annulaire complète ($d = 1$ ou 2 , $\Delta\theta = 2\pi$) seront présentés dans cette sous-section.

Notons qu'aucune information sur la convergence de la méthode ne sera donnée ici, puisque celle-ci (SIMPLER) n'est qu'un élément – le lisseur – du solveur multigrille final. Cet aspect ne sera donc abordé qu'à la sous-section suivante.

Rotation solide

Un test simple mais instructif est d'imposer une vitesse azimutale proportionnelle au rayon au niveau de la surface interne et de la surface externe de l'anneau :

$$\tilde{V}_\theta(\Gamma_i) \equiv kR_i, \quad \tilde{V}_\theta(\Gamma_e) \equiv kR_e, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

La solution devant être obtenue est une rotation de type solide rigide, c'est-à-dire :

$$\tilde{V}_r(\tilde{r}, \theta) \equiv 0, \quad \tilde{V}_\theta(\tilde{r}, \theta) = kr, \quad \forall(\tilde{r}, \theta) \in \mathcal{D}, \quad (3.9)$$

k étant la vitesse angulaire du milieu.

La figure 3.2 présente un exemple de résultat pour une rotation unitaire ($k = 1$). Pour illustrer la qualité de la réponse du solveur à cette sollicitation de rotation solide, diverses informations sont données sur les deux composantes de la vitesse.

Pour \tilde{V}_r , la moyenne est évaluée à chaque rayon r_i , ainsi l'amplitude maximale (fig. 3.2a). Pour \tilde{V}_θ (fig. 3.2b), l'erreur RMS (e_{RMS}^i) est représentée :

$$e_{RMS}^i(\tilde{V}_\theta) = \left[\frac{1}{n_\theta} \sum_{j=1}^{n_\theta} (\tilde{V}_\theta^{ij} - k\tilde{r}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i \in \llbracket 1, n_r \rrbracket. \quad (3.10)$$

Au regard de la figure 3.2a, les plus grandes erreurs sur la vitesse radiale – courbes en tiretés – sont de l'ordre de grandeur de la tolérance choisie pour le solveur et croissent logiquement lorsqu'on s'éloigne des bords, sur lesquels sont appliquées les conditions aux limites (3.8). Les valeurs moyennes – qui s'identifient ici aux erreurs moyennes, puisque la solution est $\tilde{V}_r(\tilde{r}, \theta) \equiv 0$ – suivent globalement la même tendance, mais leur amplitude est trois ordres de grandeur en dessous de celle des erreurs maximales. Cette caractéristique s'explique non seulement par le calcul de moyenne, qui va « artificiellement » améliorer les valeurs, mais aussi par le fait que la moyenne de la vitesse radiale, à un rayon donné, se doit d'être nulle, par conservation de la masse⁷, et reflète donc directement cette propriété. C'est d'ailleurs sur cette dernière qu'est basé le critère de convergence de l'algorithme SIMPLER. Dans les deux cas, les ruptures de pente brutales sont dues au changement de signe de l'erreur (ici représentée en valeur absolue). L'écart entre ces deux courbes, pour une tolérance donnée, est une mesure de la dispersion des valeurs : celle-ci diminue avec la précision du solveur et devient quasi-nulle lorsqu'on tend vers la précision numérique⁸. L'erreur quadratique moyenne sur \tilde{V}_θ (fig. 3.2b) est nécessairement plus importante, puisqu'elle est un résultat plus intriqué de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Toutefois, sa valeur est de l'ordre de grandeur de la tolérance choisie, ce qui est souhaitable. Là encore, les erreurs sont minimales au voisinage des limites.

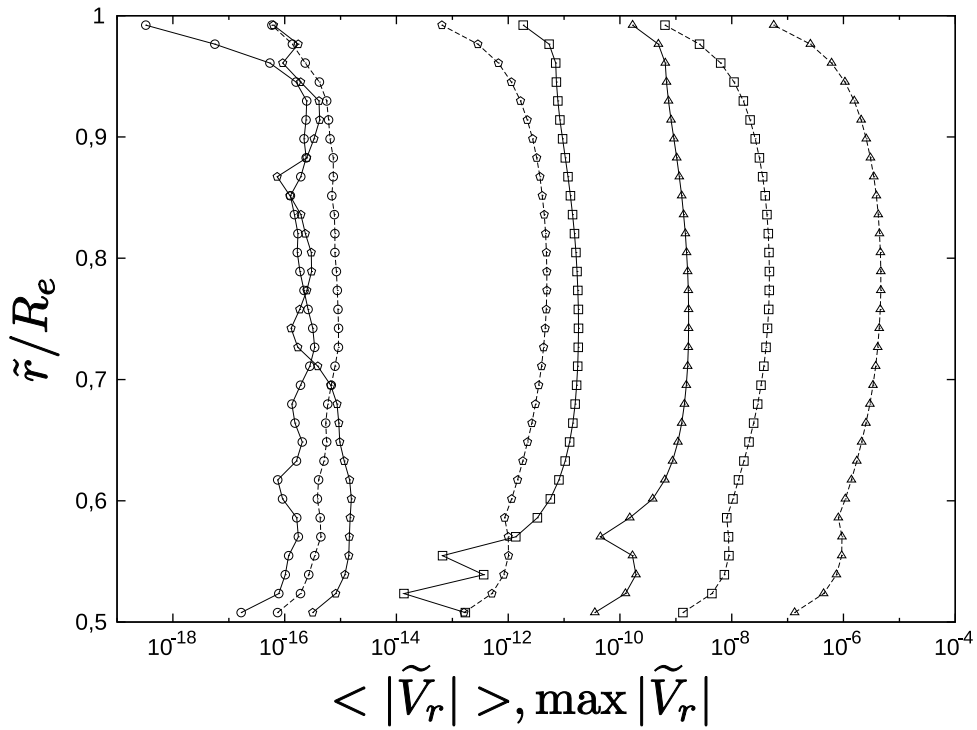
Le comportement de rotation solide est théoriquement indifférent au champ de viscosité utilisé. Numériquement, cela se vérifie exactement quelle que soit la valeur mise pour $\tilde{\eta}$ ⁹ ; le cas présenté ci-dessus a été réalisé dans des conditions isovisqueuses (c.-à-d. $\tilde{\eta} \equiv 1$). La figure 3.3 illustre l'effet d'une viscosité variable avec le rayon. Pour cela, la loi de viscosité choisie est de type exponentielle en température (loi de FRANK-KAMENETSKII) avec un profil de température conductif (tel que $\tilde{T}(\Gamma_i) = 1$, $\tilde{T}(\Gamma_e) = 0$, $\tilde{H} \equiv 0$). Les profils d'erreur RMS sur \tilde{V}_θ sont visibles sur la figure 3.3a, de même que les profils de viscosité correspondants (fig. 3.3b).

Ainsi, la variation de la viscosité avec le rayon va impliquer des zones de plus en plus visqueuses – « rigides » – à mesure que l'on s'approche de la surface externe.

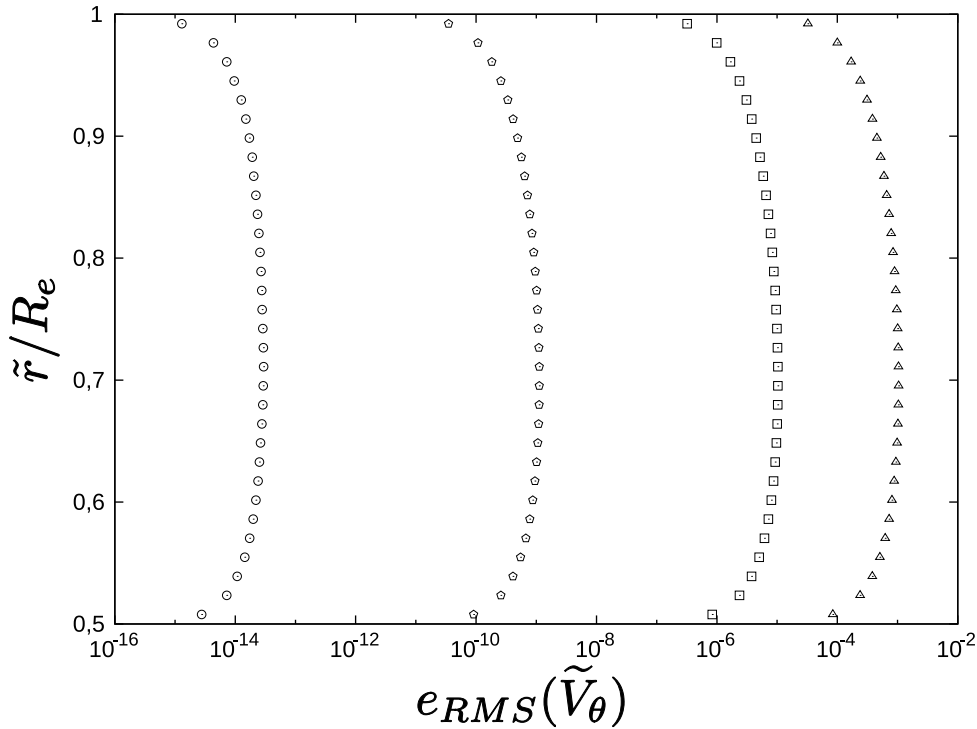
7. Ceci est valable puisque l'on a deux surfaces imperméables : cf. condition (2.77).

8. Dans l'outil CHEOPS-2D, tous les calculs portant sur les nombres à virgule flottante sont effectués dans le standard IEE double précision (c.-à-d. 15 à 16 chiffres décimaux significatifs : représentation de chacun de ces nombres sur 64 bits).

9. La vitesse de convergence vers la solution est cependant variable...



(a)



(b)

FIGURE 3.2 – Mesure de la réponse du solveur en rotation solide (milieu isovisqueux). (a) Profils de vitesse radiale (\tilde{V}_r) : les lignes en trait plein correspondent aux profils moyens (en valeur absolue) alors que celles en tiretés identifient les vitesses radiales de plus grande amplitude, pour chaque rayon. (b) Profil d'erreur RMS sur la valeur de la composante azimutale de la vitesse (\tilde{V}_θ). Les symboles désignent la tolérance du solveur employée (c.-à-d. sur le résidu de continuité dans SIMPLER) : $\triangle \equiv 10^{-4}$, $\square \equiv 10^{-6}$, $\diamond \equiv 10^{-10}$, $\circ \equiv 1,5 \cdot 10^{-14}$. Paramètres géométriques et numériques : $f = 0,5$, $\Delta\theta = 2\pi$, $d = 2$; $n_r = 32$, $n_\theta = 256$.

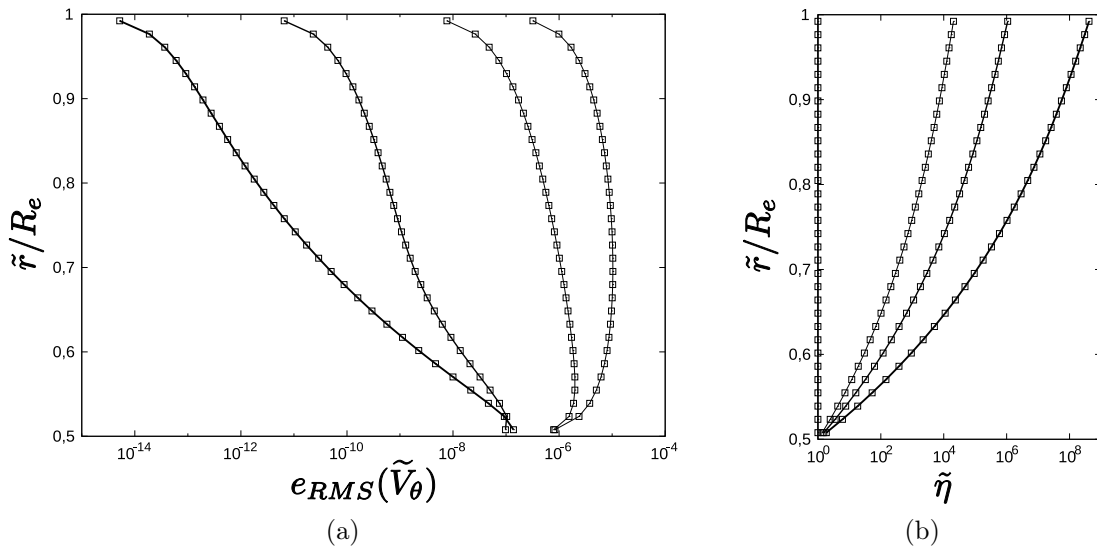


FIGURE 3.3 – Mesure de la réponse du solveur en rotation solide : viscosité variable radialement. (a) Erreur RMS sur la vitesse azimutale. (b) Profils de viscosité correspondants. L'épaisseur croissante du trait indique un contraste de viscosité $\Delta\eta$ de plus en plus fort, successivement : 1 (isovisqueux, courbe tout à droite), 2, $2 \cdot 10^4$, 1, $2 \cdot 10^6$ et 4, $9 \cdot 10^8$. Les carrés suivent la même logique de symbole qu'à la figure 3.2 (c.-à-d. tolérance du solveur de 10^{-6}). Paramètres identiques à ceux de la figure précédente.

Celles-ci seront donc beaucoup plus facilement sujettes¹⁰ à un mouvement de rotation solide que les zones peu visqueuses, proches de la surface interne. C'est pour cette même raison que l'on observe des profils d'erreur de plus en plus « faibles » quand les profils de viscosité correspondants sont de plus en plus « forts ».

Cisaillement simple

Une autre solution analytique simple est l'écoulement induit par la rotation différentielle des deux surfaces de l'anneau. Une dérivation élégante de la solution à ce problème est présentée dans l'ouvrage de Landau et Lifshitz (1989), en géométrie cylindrique (p. 55 de l'ouvrage) ou sphérique¹¹ (p. 65), pour un fluide isovisqueux et incompressible.

En généralisant cette approche pour un profil de viscosité simple du type $\tilde{\eta} = \tilde{r}^n$ tel que $n \in \llbracket -1, 1 \rrbracket$, on trouve, en géométrie annulaire munie des conditions aux limites suivantes (surface interne immobile et surface externe en rotation uniforme) :

$$\tilde{V}_\theta(\Gamma_i) \equiv 0, \quad \tilde{V}_\theta(\Gamma_e) \equiv kR_e, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

10. dans le processus numérique

11. donc valable aussi pour l'anneau sphérique, si l'on se restreint à la zone équatoriale de la coquille...

une solution de la forme :

$$\tilde{V}_r(\tilde{r}, \theta) \equiv 0, \quad \tilde{V}_\theta(\tilde{r}, \theta) = \frac{kR_e^{d+n+1}}{R_e^{d+n+1} - R_i^{d+n+1}} \left(\tilde{r} - \frac{R_i^{d+n+1}}{\tilde{r}^{d+n}} \right), \quad \forall (\tilde{r}, \theta) \in \mathcal{D}. \quad (3.12)$$

La figure 3.4 présente un exemple de test en cisaillement du solveur, pour le cas simple $n = 0$ et montre, là-encore, le bon accord des résultats obtenus avec les solutions théoriques. Le problème extrême du cisaillement reste cependant moins simple physiquement – donc numériquement – que celui-ci de la rotation solide et, à maillage identique, les erreurs sont un peu plus importantes, notamment à la base de l’anneau. Ceci est un des (nombreux) points sur lesquels le solveur développerait mériterait d’être amélioré. Toutefois, nous verrons plus loin que la version présentée dans cette thèse s’est avérée largement suffisante pour la résolution du problème de convection thermique (cf. *benchmarks* dans la dernière partie de ce chapitre).

Couplage de \tilde{V}_r et \tilde{V}_θ

Le test final, que nous ne ferons simplement que mentionner ici, consiste à vérifier une partie du couplage des deux composantes de la vitesse. Il s’agit d’ajouter une composante \tilde{V}_r non nulle aux configurations en cisaillement précédemment exposées. Par exemple, le choix $\tilde{V}_r = \tilde{r}^{-d}$ permet de ne pas affecter l’équation de continuité [éq. (2.5); rappelons que $\tilde{\rho} \equiv 1$ ici]. De plus, comme pour tous ces tests simples, l’équation de la chaleur n’intervient pas; le problème de STOKES est donc linéaire, ce qui permet d’utiliser le principe de superposition¹².

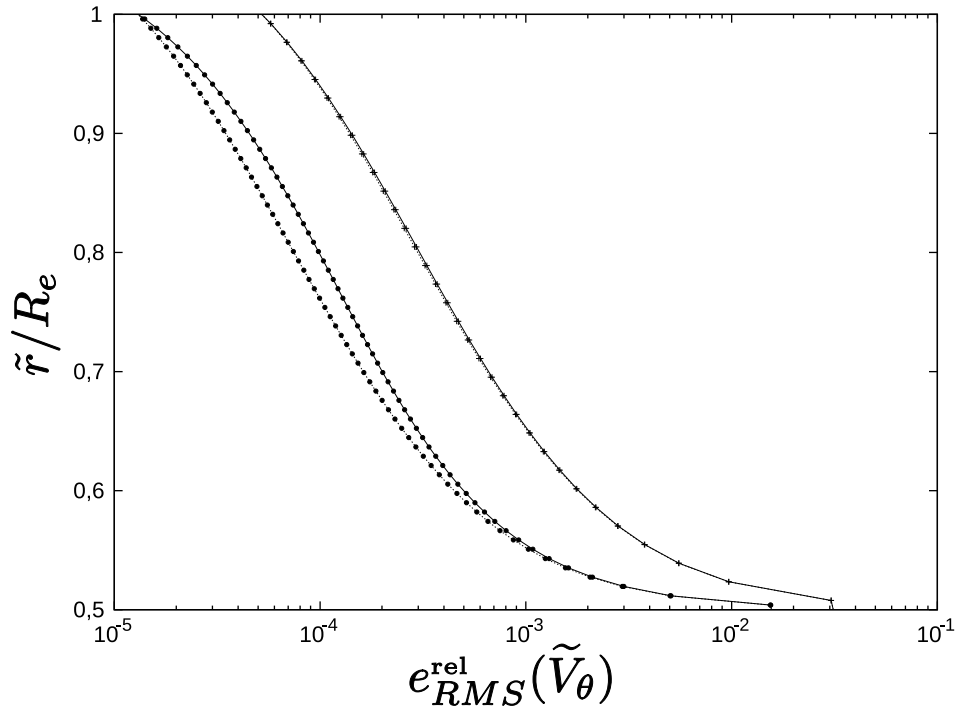
Ainsi, l’écoulement $\tilde{V} = \hat{\mathbf{r}}/\tilde{r}^d$ ne doit pas modifier le précédent [éq. (3.12)] : les deux doivent se superposer. Aux équations (3.11) seront ainsi adjointes les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{V}_r(\Gamma_i) = R_i^{-d}, \quad \tilde{V}_r(\Gamma_e) = R_e^{-d}. \quad (3.13)$$

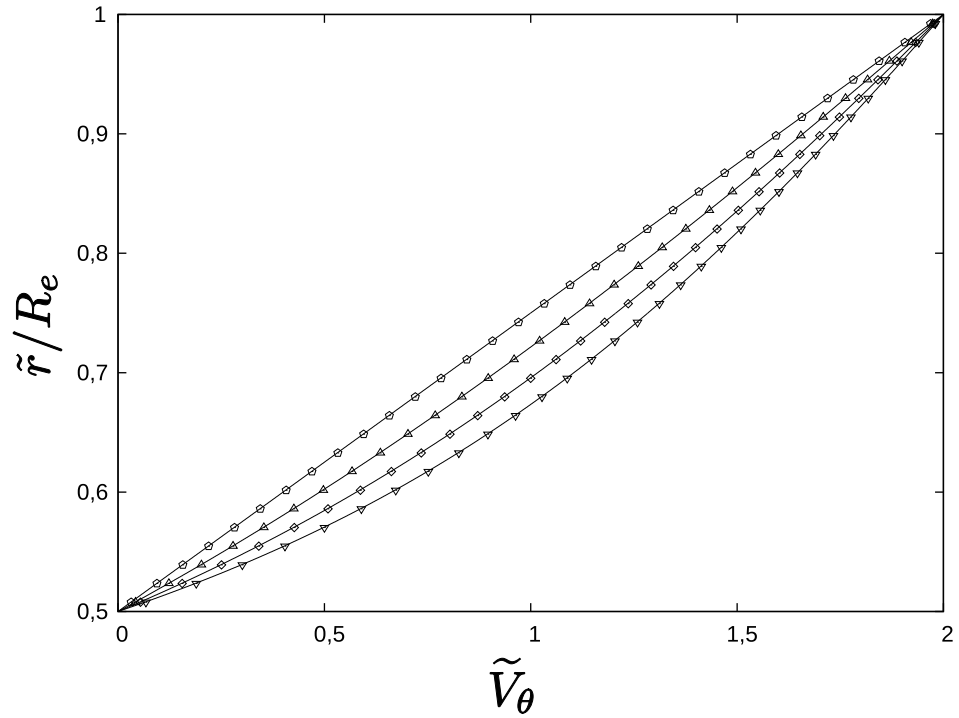
Dans tout le domaine \mathcal{D} , \tilde{V}_r doit avoir la forme requise.

Un test ultime aurait pu être le cas – classique en mécanique des fluides – de la cavité entraînée [$\Delta\theta < 2\pi$ et $k = 0$ dans l’équation (2.78), avec p. ex. $\tilde{V}_\theta(\Gamma_i) \equiv 0$ et $\tilde{V}_\theta(\Gamma_e) \neq 0$, cf. éq. (2.77)]. Toutefois, il n’existe pas, à la connaissance de l’auteur, de solution simple à ce type de problème de STOKES (en dehors des *benchmark* numériques), qui plus est en géométrie d’anneau sphérique. Comme mentionné précédemment, la phase logique suivante pour le test du solveur de l’écoulement est la confrontation à des solutions numériques – tabulées – dans le cas du problème de convection thermique.

12. déjà utilisé pour déterminer l’écoulement entre deux sphères en rotation (cf. paragraphe précédent)



(a)



(b)

FIGURE 3.4 – Mesure de la réponse du solveur en cisaillement. Exemple du cas $d = 2$, $k = 2$ et $n = 0$ [éq. (3.12)]. (a) Erreur RMS relative sur la vitesse azimutale ; noter les valeurs artificiellement élevées vers la base ($\tilde{V}_\theta \rightarrow 0$). Les traits pleins correspondent à une tolérance du solveur de 10^{-6} et ceux en pointillés, à une tolérance de 10^{-10} ; les symboles « + » et « • » correspondent respectivement à des résolutions spatiales (n_r, n_θ) de $(32, 256)$ et $(64, 512)$. (b) Exemple de profils de vitesse théoriques obtenus à partir de l'équation (3.12). Les symboles ont la signification suivante pour les couples (n, d) : $\triangle \equiv (0, 1) \equiv (-1, 2)$, $\diamond \equiv (0, 2) \equiv (1, 1)$, $\nabla \equiv (1, 2)$, $\circ \equiv (-1, 1)$.

3.2.2 Performance du solveur multigrille

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de caractérisation du solveur multigrille couplé à l'algorithme SIMPLER (notation « MG-SIMPLER » dans la suite), mis en place pour la résolution de l'équation de STOKES. Celui-ci, décrit en partie au chapitre précédent (cf. 2.2), occupe une place centrale dans le code CHEOPS-2D, tant par la durée qui y a été consacrée durant la thèse que par la proportion significative du temps de calcul qu'il représente au sein de l'outil numérique.

Le premier exemple illustre l'accélération obtenue sur la convergence de la méthode itérative par rapport à la technique de base SIMPLER, c'est-à-dire par rapport à l'algorithme MG-SIMPLER pour un seul niveau de grille (pas de grille grossière du tout). Rappelons que le solveur est automatiquement stoppé via le passage de la norme « infini » des résidus sur \tilde{V}_r , \tilde{V}_θ et $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}})$. Or, c'est sur le troisième qu'est basée la convergence de SIMPLER (il s'agit du terme source de masse sur lequel est basée la correction de pression, cf. 2.2.2). Une comparaison rigoureuse des deux méthodes requiert donc un arrêt la convergence sur ce seul critère au sein du solveur multigrille. Nous pourrions nous contenter de comparer la décroissance de grandeurs caractéristiques en fonction du temps de calcul sur une même machine. Mais une quantité plus significative et classiquement utilisée est le nombre équivalent sur SIMPLER d'itérations de grille fine pour MG-SIMPLER. L'idée est que, en négligeant le « temps » de calcul consommé par les opérations de prolongation et de restriction entre les grilles, une itération sur une grille deux fois plus grossière $(n_r/2, n_\theta/2)$ que le maillage de base (n_r, n_θ) – le seul pour SIMPLER – « coûte » environ quatre fois moins de temps de calcul. Sur la base de ce raisonnement, on peut montrer, par exemple en s'aidant de la figure 2.18, les formules suivantes de calcul du nombre équivalent d'itérations de grille fine $n_{\text{GF}}(\bullet)$ pour les trois types de cycles (V, W et F) implémentés dans CHEOPS-2D :

$$n_{\text{GF}}(V) = \nu_1 + 4 \left[(\nu_1 + \nu_2) \sum_{\ell=2}^{\ell_{\text{max}}-1} \frac{1}{4^\ell} + \frac{\nu_0}{4^{\ell_{\text{max}}}} \right], \quad (3.14)$$

$$n_{\text{GF}}(W) = \nu_1 + 2 \left[\sum_{\ell=2}^{\ell_{\text{max}}-1} \frac{\nu_1 + \frac{\nu_2}{2}}{2^\ell} + \frac{\nu_0}{2^{\ell_{\text{max}}+1}} \right], \quad (3.15)$$

$$n_{\text{GF}}(F) = \nu_1 + 4 \left[\sum_{\ell=2}^{\ell_{\text{max}}-1} \frac{\ell \nu_1 + (\ell - 1) \nu_2}{4^\ell} + \frac{(\ell_{\text{max}} - 1) \nu_0}{4^{\ell_{\text{max}}}} \right], \quad (3.16)$$

avec, rappelons-le, ν_1 le nombre d'itérations de pré-relaxation du lisseur (SIMPLER), ν_2 celui correspondant à la post-relaxation et ν_0 le nombre d'itérations sur la grille la plus grossière. ℓ est l'indice – le rang – de la grille (fig. 2.18), pour un cycle basé sur ℓ_{max} grilles. Le cas $\ell_{\text{max}} = 1$ correspond à SIMPLER sans multigrille (ν_1 itérations).

La figure 3.5 présente ainsi un exemple d'évolution du résidu de continuité (son maximum en valeur absolue sur tout le maillage) pour un problème simple mais pour un maillage à haute résolution, dans le cas d'un cycle V et pour différentes quantités totales de grilles considérées. Ainsi, la seule correction de grille grossière (c.-à-d. $\ell_{\max} = 2$) permet déjà un gain considérable en vitesse de convergence. Plus le nombre de grilles est important, plus l'efficacité de la méthode multigrille est révélée. Les dernières courbes sont cependant confondues sur ce graphe : dans ce cas simple d'écoulement, qui plus est isovisqueux, la méthode est optimale pour une hiérarchie de 5 grilles [le niveau le plus grossier est ici de taille (8, 16)] et un gain négligeable est obtenu avec plus de niveaux de grille. On corrige ainsi la majeure partie des composantes (longueurs d'onde) des erreurs en même temps (c.-à-d. au sein d'un cycle). En complément, la figure 3.6 présente un cas de figure similaire, mais pour deux types de cycles (V et W). Dans ce cas simple, la vitesse de convergence optimale a été trouvée pour un cycle minimaliste V(1,1).

Dans les cas à viscosité variables, non présentés dans cette partie synthétique de tests, l'efficacité du multigrille s'avère moindre, cependant, et nécessite de recourir non seulement à une quantité d'itérations de relaxation parfois plus importante, mais surtout à un nombre de (corrections de) grilles (grossières) moindre. L'inconvénient des méthodes multigrille géométriques réside, en effet, dans leur sensibilité et leur perte « rapide » d'efficacité pour des variations fortes des coefficients d'une cellule à l'autre. En effet, cette information à courte longueur d'onde est rapidement « mal perçue » sur les grilles plus grossières (problème dû notamment aux restrictions successives qui la détériorent) ; l'erreur associée est donc réduite beaucoup moins efficacement, voire même augmentée si le nombre de grilles est trop élevé : les erreurs remontées, pour la correction de grille grossière récursive (cf. 2.2.3) perdent alors de leur sens. La solution est, par exemple, une amélioration des opérateurs de grille grossière (approximation de GALERKIN, cf. Briggs *et al.*, 2000) ou de transferts (prolongation/restriction).

En conclusion, dans le cadre de cette thèse, il a été trouvé que, dans des cas plus réalistes de simulations de convection thermique dans un anneau complet ($d = 1$ ou 2) comme en géométrie cartésienne, la méthode est performante (idéalement optimale) pour des cycles V(2,1) sur toute la hiérarchie de grilles, soit pour $\ell_{\max} = \log_2 [\min(n_r, n_\theta)]$ niveaux de maillage, dans les cas isovisqueux et à variations de viscosité modérées ($\Upsilon < 8$, environ). Pour les cas à variations plus importantes de viscosité, on choisira par exemple des cycles V(3,2), avec une à deux grilles de moins que le nombre maximal. Pour ce qui est des fortes variations de viscosité, on prendra trois à quatre grilles au maximum. Dans ce cas, le cycle W devient plus stable et performant que le cycle V ; le cycle F confère également une certaine robustesse au solveur dans cette configuration. Cependant, si le schéma de parcours des différents niveaux de grille – qui conditionne la stabilité dans ces cas de figure – est comparable

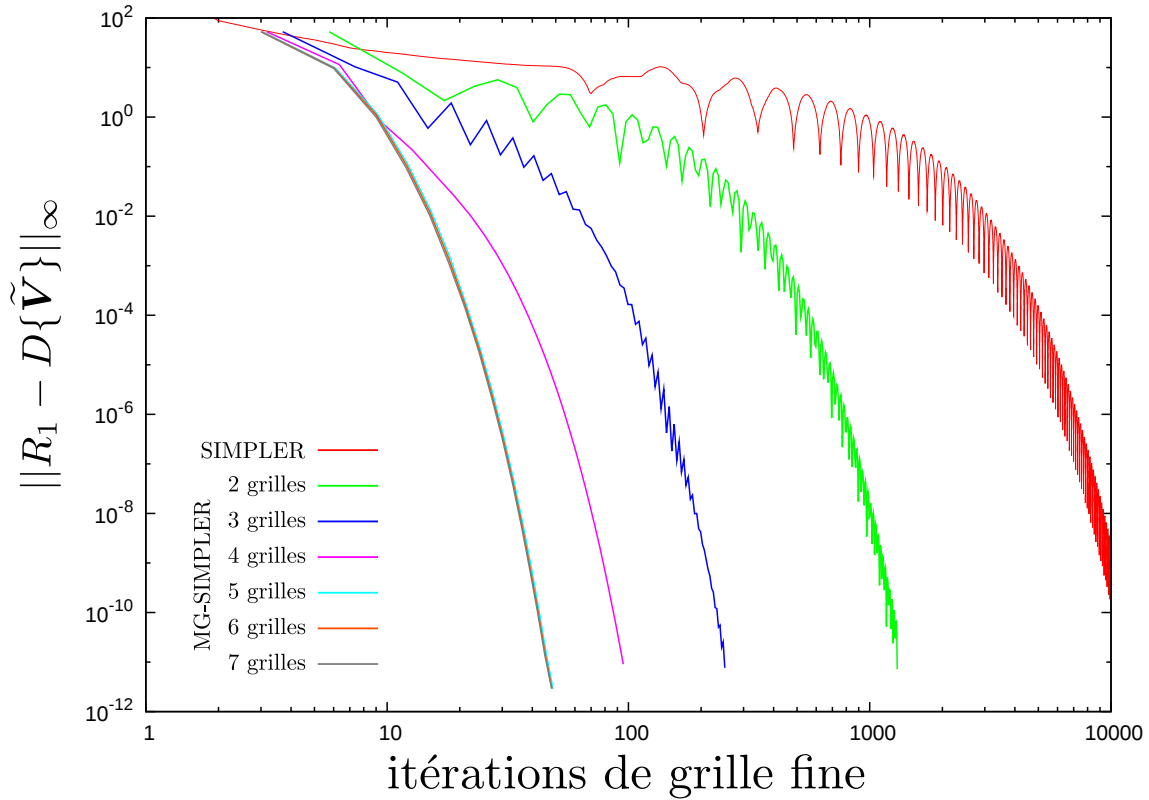


FIGURE 3.5 – Performance du solveur multigrille couplé (MG-SIMPLER) par rapport à la méthode SIMPLER. La décroissance de la norme « infini » du résidu de continuité est représentée en fonction du nombre d'itérations de grille fine [cf. éq. (3.14)], pour différentes quantités de grilles employées considérées dans la hiérarchie de corrections de grille grossière de l'algorithme multigrille. $f = 0,8$, $\Delta\theta = \pi/6$, $d = 1$, $n_r = 128$, $n_\theta = 256$. Cycles multigrille $V [(\nu_1, \nu_2, \nu_0) = (2, 1, 15)]$, tolérance du solveur fixée à 10^{-11} . Cet exemple correspond à des champs initiaux ($\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{p}'$, etc.) « aléatoires » pour une configuration telle que l'écoulement solution est nul. La comparaison a été réalisée pour des paramètres idéalement optimaux dans les deux méthodes (nombre d'itérations de GAUSS-SEIDEL sur les vitesses, pressions et corrections de pression au sein du lisseur, paramètres de relaxation ϖ associés, etc.).

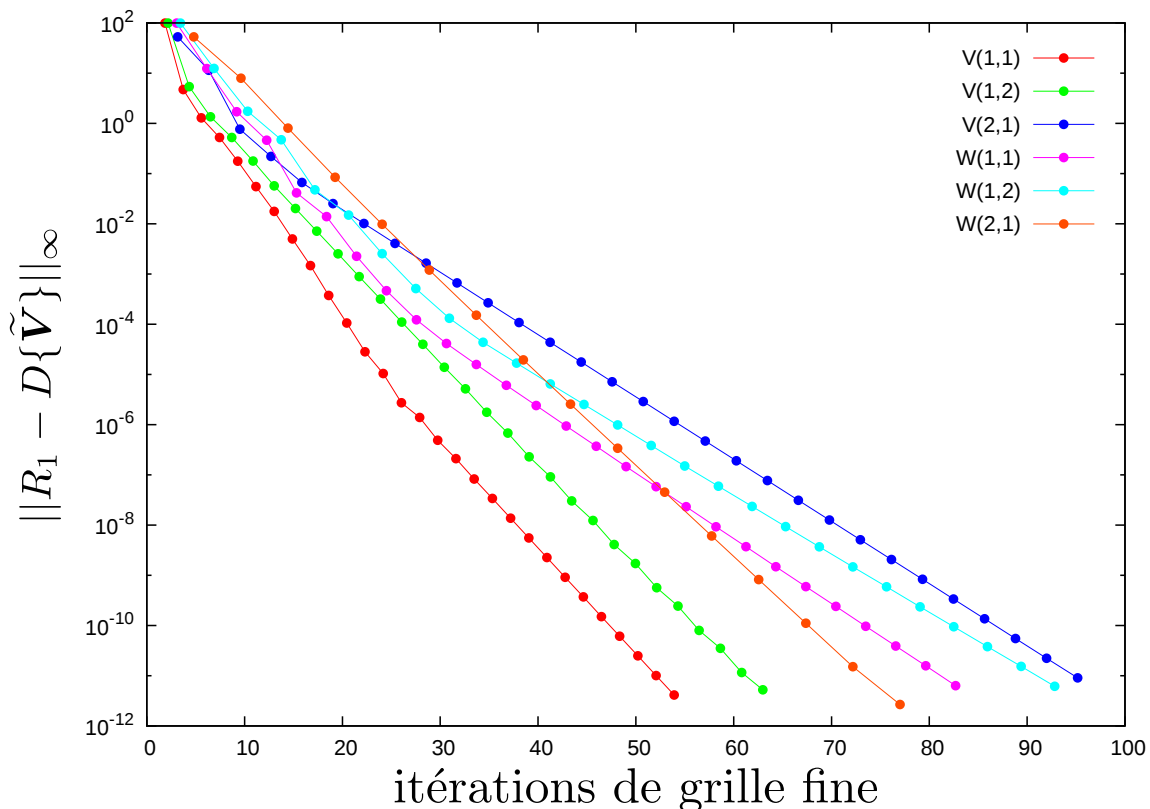


FIGURE 3.6 – Exemple de variation de la vitesse de convergence du solveur multigrille selon le type de cycle. La décroissance de la norme « infini » du résidu de continuité est représentée en fonction du nombre d'itérations de grille fine [cf. éq. (3.14) et (3.15)], pour différents types de cycles considérés dans l'algorithme MG-SIMPLER [cycles $V(\nu_1, \nu_2)$ et $W(\nu_1, \nu_2)$; $\nu_0 = 15$]. Mêmes paramètres et cas d'étude qu'à la figure 3.5.

à celui mis en œuvre au sein du cycle W (cf. fig. 2.18), le cycle F est, en revanche, plus léger en terme de nombre d'itérations de grille fine. Ainsi, on choisira des cycles F(3,2), avec $\ell_{\max} = 3$ à 4 dans ces cas de figure. Si le but de CHEOPS-2D n'est pas spécialement de traiter de très forts contrastes de viscosité – il fonctionne très bien pour des valeurs de Υ jusqu'à 17 ou un peu plus – des simulations extrêmes ont cependant pu être menées avec des contrastes globaux importants, typiquement de l'ordre de $\Delta\eta = 10^{12}$ (soit $\Upsilon \approx 27,6$), pour une résolution raisonnable en terme de temps de calcul ($n_r = 64$, $n_\theta = 512$), avec toutefois un nombre de RAYLEIGH à la base relativement faible ($3 \cdot 10^7$). Ce dernier, outre le fait de modérer la résolution spatiale nécessaire, permet surtout de ne pas avoir un écoulement à trop petite longueur d'onde dans ce cas. Les contrastes locaux de viscosité, les plus problématiques pour la méthode multigrille, sont ainsi acceptables.

Pour plus de détails sur l'optimisation d'un solveur multigrille (avec viscosité variable ou non), le lecteur pourra par exemple consulter le paragraphe 1.2 de l'annexe A1 de la thèse de Deschamps (1997). Des méthodes particulièrement performantes pour « digérer » les forts contrastes de viscosité ont plus récemment été élaborées, notamment par Tackley (2008), en particulier la réalisation d'un schéma optimal de prolongation de pression. Celles-ci sont discutées plus en détails dans l'ouvrage de Gerya (2010). Enfin, des méthodes qui ont fait leurs preuves dans d'autres domaines et réellement prometteuses pour la géodynamique sont celles dites de *multigrille algébrique*¹³ (cf. p. ex. Briggs *et al.*, 2000, pour une introduction). En deux mots, celles-ci, par ailleurs particulièrement efficaces pour les grilles hautement déstructurées ou irrégulières, ne sont pas perturbées par des modes à haute fréquence de l'erreur qui peuvent persister sur la grille fine en raison d'une mauvaise remontée d'information par les corrections de grille grossière (c'est le cas en viscosité fortement variable). En effet, la définition d'un niveau de grille grossier repose alors non plus sur une agglomération géométrique de cellules (quatre par quatre, dans notre cas) mais algébrique : il s'agit de rassembler, sur un même niveau, des zones non indépendantes (notamment de valeurs de résidus comparables). La localisation géométrique des cellules rassemblées ainsi est donc *a priori* inconnue et évolutive.

Le dernier point qu'il convient de discuter dans cette partie est l'évolution de l'efficacité du solveur multigrille couplé par rapport à la méthode SIMPLER en fonction de la taille du maillage. En effet, le temps de calcul d'une méthode itérative de type GAUSS-SEIDEL (employée au sein de SIMPLER dans notre cas) ou JACOBI est théoriquement proportionnel au carré de la plus grande étendue du maillage [$\max(n_r, n_\theta)$]. Cependant, une propriété fondamentale de la méthode multigrille est de réduire (idéalement) toutes les longueurs d'onde à la fois (au cours d'un cycle). On montre que le temps de calcul s'en trouve directement proportionnel au nombre

13. Dans notre cas, il s'agit d'une méthode multigrille dite géométrique, classique.

d'inconnues (donc de cellules ; trois inconnues par cellule pour le solveur : $\tilde{V}_r, \tilde{V}_r, \tilde{p}'$). Ainsi, cette évolution théoriquement linéaire implique que le solveur multigrille doit être d'autant plus efficace, par rapport à SIMPLER, que le maillage est important. On comprend ainsi toute l'utilité de ces méthodes pour les codes tridimensionnels ! Ceci est illustré à la figure 3.7, qui montre que la méthode multigrille implémentée dans CHEOPS-2D s'avère efficace ; elle vérifie remarquablement la propriété fondamentale énoncée précédemment.

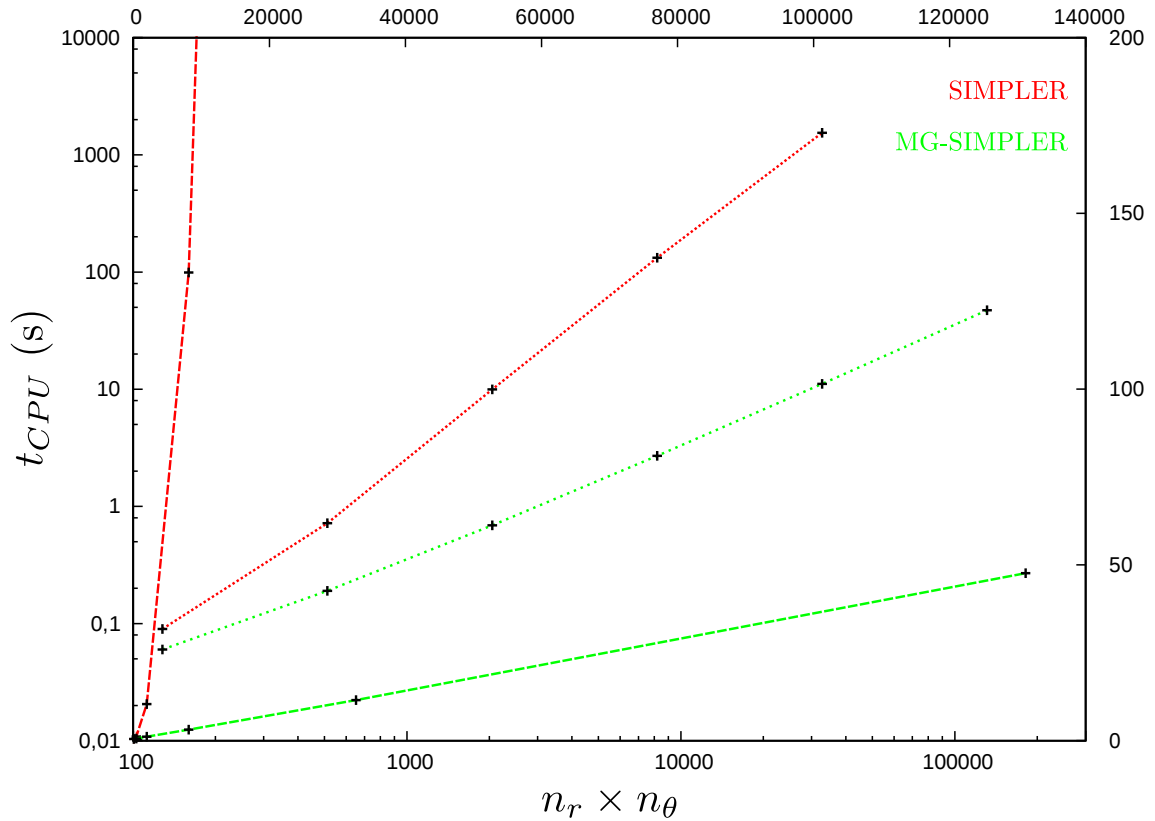


FIGURE 3.7 – Efficacité du solveur multigrille couplé (MG-SIMPLER) par rapport à la méthode SIMPLER en fonction de la taille du maillage. Le temps de calcul (croix noires) est représenté en fonction du nombre de cellules du domaine physique du maillage (c.-à-d. $n_r \times n_\theta$). Les courbes en pointillés correspondent à l'ensemble des valeurs ; elles se lisent avec les axes de gauche et du bas (logarithmiques). Les courbes en tirets correspondent, elles, à un détail de ces points (visualisation avec les axes droit et du haut, linéaires). Mêmes paramètres et cas d'étude qu'à la figure 3.5. Ici, 6 différentes tailles de maillage ont été testées, $(n_r, n_\theta) = (8, 16), (16, 32), \dots, (256, 512)$; tolérance du solveur fixée à 10^{-10} .

3.2.3 Conduction thermique et solutions analytiques

Nous présentons ici deux exemples de tests fondamentaux pour le traitement de l'équation de la chaleur dans le cas d'un champ de vitesse nul (c.-à-d. advection inexistante). La méthodologie numérique employée a été décrite au 2.3.2. Il s'agit d'une part de s'assurer que la solution numérique, pour un problème donné (jeu de conditions aux limites en température, par exemple) converge bien vers la solution attendue. D'autre part, il importe de vérifier que l'évolution temporelle associée est correctement décrite.

Considérons dans un premier temps l'équation de la chaleur [éq. (2.14)] en régime stationnaire. Dans l'état purement conductif et pour un fluide à propriétés constantes ($\tilde{\kappa}$), celle-ci devient une équation de POISSON :

$$\nabla^2 \tilde{T} = -\tilde{H}. \quad (3.17)$$

Considérons le problème d'un domaine homogène maintenu à des températures constantes $\tilde{T}(\Gamma_i) \equiv 1$ et $\tilde{T}(\Gamma_e) \equiv 0$ sur ses bords. La solution à ce problème, via l'intégration de l'équation (3.17) est extrêmement simple dans le cas de l'anneau cylindrique. Dans le cas d'une coquille sphérique, les développements sont un peu plus longs [p. ex. Schubert *et al.* (2001), éq. (7.7.6)]. En généralisant le raisonnement à notre domaine annulaire habituel, on trouve la solution suivante pour le profil de température conductif :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\text{cond}}(\tilde{r}, d) = & \frac{\frac{\tilde{H}}{2(d+1)}(R_e^2 - R_i^2) - 1}{\ln^{(d-1)}(R_e) - \ln^{(d-1)}(R_i)} \ln^{(d-1)}(\tilde{r}) \\ & + \frac{\tilde{H}}{2(d+1)} \left\{ \frac{(-1)^d \ln^{2-d}(R_i)R_e^2 + \ln^{2-d}(R_e)R_i^2}{\ln^{2-d}(R_e/R_i)} + (d-1)R_iR_e - \tilde{r}^2 \right\} \\ & - \frac{(d-1)R_i + (d-2)\ln R_e}{\left[\ln^{(d-1)}(R_e) \right]^{3-2d} - \left[\ln^{(d-1)}(R_i) \right]^{3-2d}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Rappelons que, dans notre cas, on a $f := R_i/R_e$ et $R_e - R_i = 1$. Par exemple, dans le cas d'un chauffage interne nul, la forme ci-dessus se simplifie grandement. On a alors :

$$\tilde{T}_{\text{cond}}(\tilde{r}, 1) = \frac{\ln[\tilde{r}(1-f)]}{\ln f} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{\text{cond}}(\tilde{r}, 2) = \frac{f}{(1-f)^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}} + f - 1 \right). \quad (3.19)$$

La forme (3.18) a permis de tester systématiquement le comportement en conduction (radiale) de CHEOPS-2D. Un cas simpliste à conductivité variable $\tilde{\kappa} = 1/\tilde{r}$ nous

permet également de dériver une solution analytique. En géométrie d'anneau cylindrique ($d = 1$), le profil de température obtenu est linéaire [$\tilde{T}_{\text{cond}}(\tilde{r}, 1) = 2 - r$] et permet ainsi de « mimer » une conduction en géométrie cartésienne (effets de courbure annulés) ; pour le cas sphérique, la solution est exactement celle obtenue avec la forme (3.18) pour $d = 1$ et $\tilde{H} \equiv 0$. Notons que, avec cette loi radiale inverse pour la conductivité thermique, le schéma discret [cf. éq. (2.3.2)] permet de récupérer la valeur exacte de la conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle, puisqu'une moyenne harmonique a été employée pour reconstruire celle-là. Ceci apporte une propriété intéressante de ce test : il s'agit de tester la conduction, numériquement calculée, sans aucune approximation sur le profil réel de conductivité imposé.

La figure 3.8a présente un exemple de cas testés dans les configurations mentionnées ci-dessus. Sans entrer dans les détails, l'accord est globalement bon entre les solutions théoriques et les approximations numériques obtenues pour celles-ci (moins de 0,01 % d'erreur). Cette comparaison nous amène toutefois à une observation intéressante sur l'anneau sphérique. En effet, non seulement la solution obtenue ici est rigoureusement identique à celle à laquelle on parviendrait avec une coquille sphérique complète – c'est là l'un des nombreux avantages de cette géométrie 2D – mais, en outre, la comparaison avec l'anneau cylindrique ($d = 1$) montre que, pour de mêmes conditions, les profils de température obtenus sont systématiquement plus « froids » en anneau sphérique qu'en anneau cylindrique. Ceci est la conséquence physique de la différence de jacobien des systèmes de coordonnées ($J = r^d$, cf. 2.1.3) : J contrôle la variation des volumes élémentaires et donc l'évolution du « confinement » de l'énergie thermique en fonction du rayon dans le domaine géométrique 2D. Aux abords des frontières de celui-ci, les profils se confondent bien sûr en raison des conditions aux limites.

Un test de comportement en temps de la diffusion dans une coquille sphérique – donc dans un anneau sphérique également – initialement froide [$\tilde{T}(t = 0) \equiv 0$] et chauffée par la base [$\tilde{T}(\Gamma_i, t) \equiv 1$] est présenté ci-dessous. La solution analytique à ce problème peut être obtenue via un développement en série de FOURIER¹⁴ [Carslaw et Jaeger (1995), éq. (4), p. 233]. Elle s'exprime ici de la manière suivante :

$$\tilde{T}_{\text{cond}}(\tilde{r}, 2, t) = \frac{R_i}{\tilde{r}} [R_i + 1 - \tilde{r}] - \frac{2R_i}{\pi\tilde{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[n\pi(\tilde{r} - R_i)]}{n} e^{-\tilde{\kappa}n^2\pi^2t}. \quad (3.20)$$

Lorsque t tend vers l'infini, la forme précédente tend bien entendu vers l'équilibre stationnaire (3.19). La figure 3.8b montre ainsi la progression du profil de tempé-

14. La solution en série de FOURIER converge rapidement à temps longs, mais mal à temps courts, pour lesquels il est préférable d'utiliser un développement en somme de fonctions erreur (Labrosse, communication personnelle).

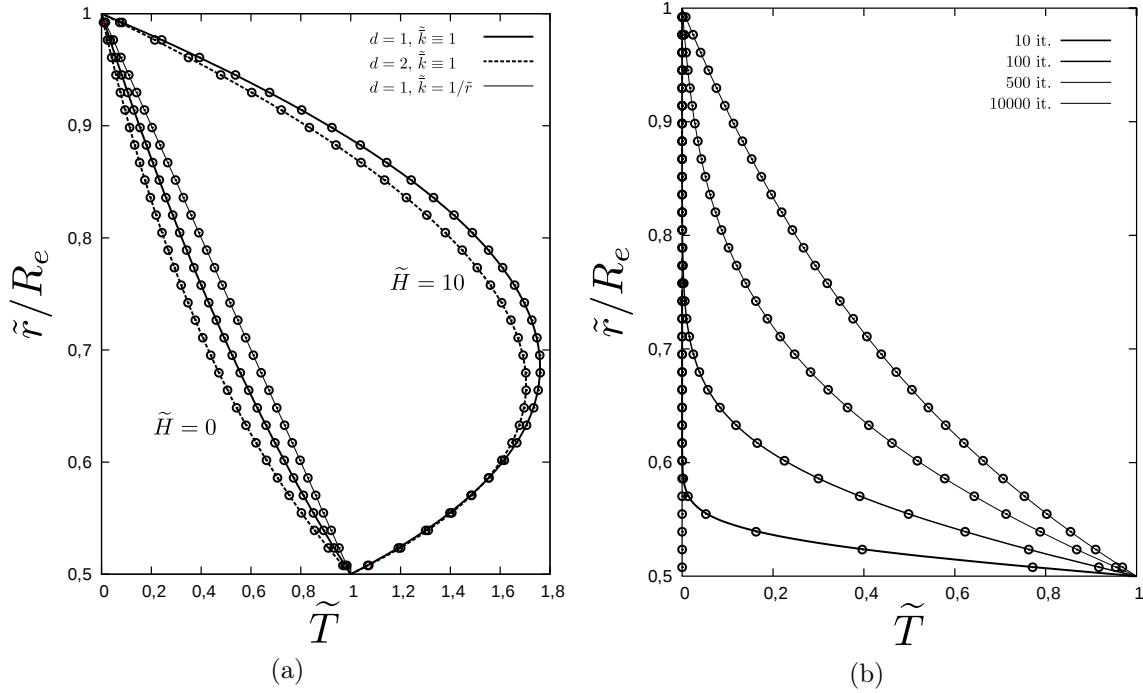


FIGURE 3.8 – Tests analytiques sur la diffusion thermique. (a) Profils de température à l'état stationnaire dans différentes configurations géométriques ($d = 1$ ou 2) et thermiques (conductivité thermique variable, chauffage interne) : solutions analytiques et valeurs discrètes. (b) Évolution temporelle du profil de température d'une coquille sphérique homogène, initialement froide ($\tilde{T} \equiv 0$), chauffée par la base [$\tilde{T}(\Gamma_i) \equiv 1$], pour différentes itérations (« it. »). Les courbes correspondent à la solution analytique [éq. (3.20)]; les points indiquent les valeurs numériques obtenues ($d = 2$; $\delta\tilde{t} \approx 1,736 \cdot 10^{-4}$). $f = 0,5$, $n_r = 32$, $n_\theta = 256$, $\Delta\theta = 2\pi$.

rature trouvée, à différents instants (c.-à-d. itérations temporelles). La conduction thermique semble donc non seulement conduire à la solution finale (stationnaire) correcte, mais, en outre, l'évolution temporelle qui y mène est bien celle attendue. Rappelons, au passage, que le temps \tilde{t} est adimensionné par rapport à la durée caractéristique de la diffusion, t_c^d [cf. éq. (1.117)]. La dernière courbe de la figure 3.8b (10 000 itérations, soit une durée d'environ $1,736 t_c^d$) correspond donc à un équilibre thermique largement atteint. Le pas de temps CFL conductif [éq. (2.96)] s'est, par ailleurs, révélé extrêmement robuste. Cependant, par précaution, dans CHEOPS-2D, il sera toujours choisi à 90 % de sa valeur optimale. Il en ira de même pour celui impliqué dans l'advection.

3.2.4 Minimisation de la diffusion numérique dans l'advection

Nous présentons ici l'intérêt des méthodes à haute résolution pour la description de l'advection thermique. Ainsi, une caractérisation quantitative de la diffusion thermique avec un schéma amont simple sera présentée ; puis, un exemple-clé d'advection d'un échelon de température dans un anneau viendra appuyer notre propos sur l'apport des corrections à haute résolution sur le schéma amont classique. Enfin, l'intérêt d'une subdivision spatio-temporelle de l'advection sera présenté. Dans tous les cas, la diffusion thermique a naturellement été annulée dans les calculs.

Méthode à haute résolution

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la méthode amont, intuitive, est cependant sujette à une diffusion numérique particulièrement importante. Il est instructif de caractériser celle-ci dans le cas de notre géométrie annulaire. La figure 3.9 présente ainsi un exemple de test d'advection circulaire d'un échelon de température, pour différentes résolutions de maillage. Une rotation de type solide [éq. (3.9)] est ainsi appliquée jusqu'à ce que l'anomalie initiale ait subi 20 révolutions complètes dans l'anneau. À chaque tour effectué, le profil azimutal de température (ici au niveau du rayon moyen de l'anneau) est représenté.

Nous constatons une propriété classique de la méthode *upwind* en maillage isotrope et régulier : l'échelon thermique n'est pas conservé et une certaine diffusion numérique – artificielle – apparaît ; la symétrie du schéma discret et du maillage font que l'anomalie de température se transforme rapidement en une gaussienne qui va progressivement s'étaler latéralement. En outre, la largeur de celle-ci tend asymptotiquement vers une certaine limite. Ce comportement, certes de plus en plus lent et de moins en moins problématique, reste cependant important sur un maillage fin

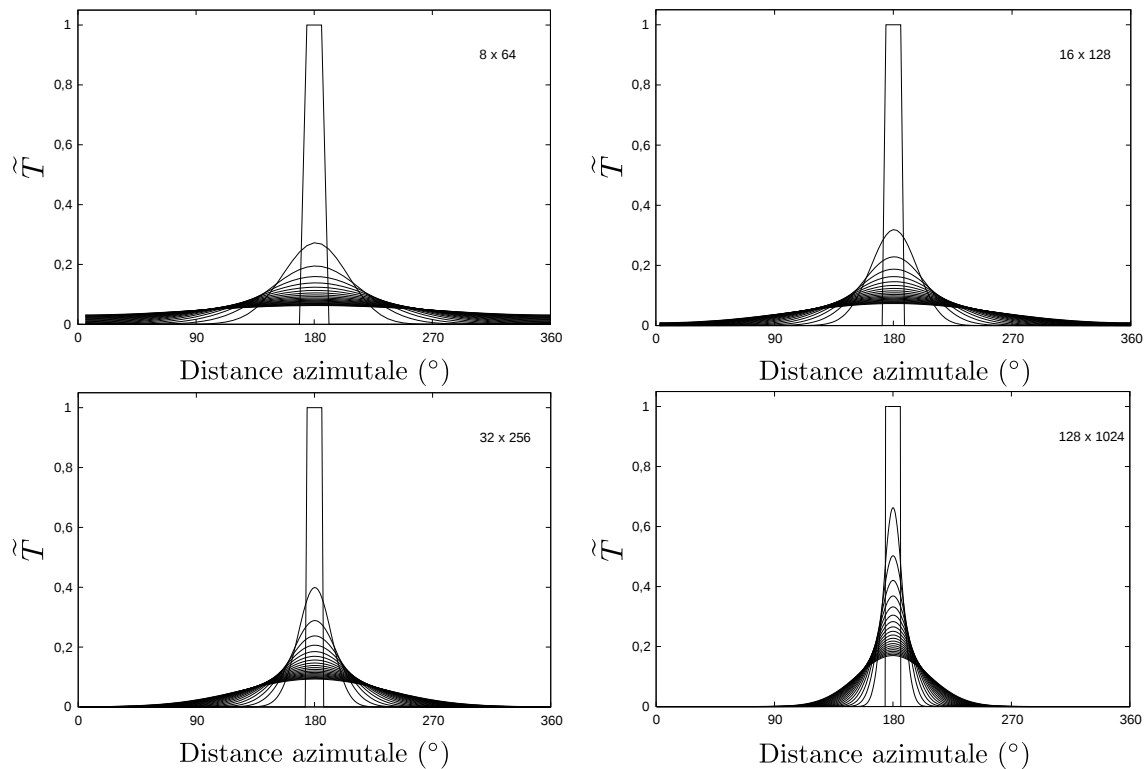


FIGURE 3.9 – Effet de la diffusion numérique sur l’advection d’un échelon de température en schéma amont. L’anomalie thermique initiale correspond à une température constante (unitaire) radialement, sur une largeur d’environ $11,25^\circ$. Pour chaque graphe, les différentes courbes représentent le champ de température au rayon central de l’anneau $[(R_i + R_e)/2]$, à l’état initial ainsi qu’après chacune des 20 rotations effectuées ; la résolution spatiale ($n_r \times n_\theta$) est indiquée. $f = 0,5$, $\Delta\theta = 2\pi$, $d = 2$.

[cas $(n_r, n_\theta) = (128, 1024)$], ce qui n'est pas souhaitable. L'évolution des paramètres des gaussiennes correspondant à la figure 3.9 est illustrée à la figure 3.10.

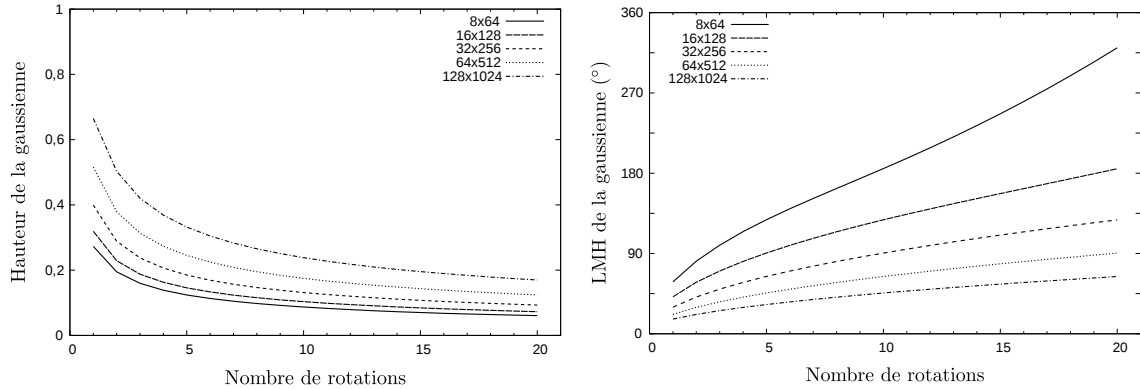


FIGURE 3.10 – Évolution quantitative de la diffusion numérique en schéma amont. La variation de la hauteur (température ; à gauche) et de la largeur à mi-hauteur (LMH ; à droite) des courbes gaussiennes caractérisant la diffusion numérique associée à l'advection d'un échelon de température (cf. fig. 3.9 ; mêmes paramètres). Les divers types de traits correspondent à différentes résolutions spatiales $(n_r \times n_\theta)$.

Les techniques à haute résolution, présentées au chapitre précédent (cf. 2.3.3), permettent précisément de corriger en partie le défaut de la méthode *upwind*, à savoir l'estimation trop grossière de la température des interfaces dans le schéma discret, tout en conservant l'esprit de cette technique intuitive. En effet, nous avons montré plus haut que l'écriture discrète employée mettait en évidence des coefficients classiques d'un schéma amont, avec un terme source incluant des termes correctifs provenant de la discrétisation à haute résolution [cf. éq. (2.103)].

La figure 3.11 donne ainsi un exemple de test similaire à celui présenté plus haut (advection circulaire d'un échelon de température). La déformation artificielle de l'échelon est visualisée pour différents types de limiteurs de pente associés à la méthode à haute résolution. Pour comparaison, le cas de référence en schéma amont est adjoint. Ainsi, après une rotation complète dans l'anneau (échelon revenu au même endroit ; fig. 3.11a), la méthode à haute résolution implémentée dans l'outil CHEOPS-2D donne de bons résultats quel que soit le limiteur de pente qui lui est associé ; les différences de précision (conservation d'un échelon) restent subtiles, mais l'on pressent déjà que le limiteur *superbee* est le plus performant. Ceci se confirme sur la figure 3.11b, qui montre le même échelon mais après vingt rotations complètes. Comme dans le cas de la figure 3.9, on constate que l'advection par la méthode *upwind* est sévèrement diffusive. De même, après un grand nombre de révolutions dans l'anneau, le limiteur *minmod* (cf. 2.3.3), le plus « doux », devient problématique. Contrairement aux autres, il ne respecte plus la hauteur de l'échelon

de température. Les méthodes MC et géométriques deviennent ici problématiques pour deux raisons. D'une part, une déformation importante de l'échelon est observée. D'autre part, celle-ci est asymétrique, ce qui n'est pas souhaitable. Cette déformation géométrique se comprend aisément au vu de la symétrie présente dans la définition du limiteur *minmod* [éq. (2.115)], mais absente dans celle des limiteurs MC, *superbee* et géométrique [éq. (2.117), (2.119) et (2.120)].

Il faut rappeler que la diffusion numérique, qui persiste quelque peu (inévitablement) avec l'utilisation de la technique *superbee*, reste cependant minime par rapport à la diffusion réelle – thermique – qui a lieu au cours des transferts de chaleur. Pour cette raison, le schéma d'advection choisi reste suffisant pour notre étude. En outre, on peut invoquer les mêmes raisons que pour le choix de l'ordre 1 en temps de la méthode explicite (cf. 2.3.2) : étant données les incertitudes importantes existant dans notre connaissance des propriétés des intérieurs planétaires, il serait illusoire d'espérer décrire parfaitement le transfert thermique au moyen d'un schéma d'advection idéalement précis. On pourra cependant objecter que, pour un jeu de paramètres donnés, bien que ceux-ci soient incertains par rapport à la réalité de l'objet décrit, il est souhaitable de décrire au mieux les phénomènes physiques associés, afin de ne pas perturber la compréhension des effets résultants par des comportements faussés (numériquement). En somme, en modélisation numérique, tout est affaire de compromis, comme partout ailleurs !

Notons, pour finir, que le limiteur *superbee* ne doit pas non plus être perçu comme une panacée. En effet, son fort pouvoir limitant le rend particulièrement performant pour l'advection de discontinuités. Toutefois, il faut savoir que cette méthode possède une tendance – cependant acceptable dans notre cas – à artificiellement accentuer les variations plus progressives des « zones » advectées (p. ex. [Ismail-Zadeh et Tackley, 2010](#)). Ainsi, à terme, un faible gradient va progressivement se transformer en forte variation (voire en discontinuité). Ce point est important pour les développements futurs dans CHEOPS-2D et constitue l'un des points-clés à améliorer dans le cœur de l'outil, avec la robustesse et la performance du solveur mécanique.

Méthode en flux alternés

Le dernier point que nous présentons concernant le traitement de l'advection dans CHEOPS-2D est l'intérêt de la méthode en flux alternés. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le calcul de la variation de température due à l'advection simultanément pour les deux directions peut devenir responsable d'une certaine distorsion artificielle lorsque le champ de vitesse « porteur » est oblique par rapport au maillage. On montre classiquement que, dans le cas d'un maillage orthogonal bidimensionnel, le coefficient (local) de diffusion numérique associé est proportionnel à la quantité $V \sin(2\alpha)$, avec α l'angle entre la direction de l'écoulement (de vitesse

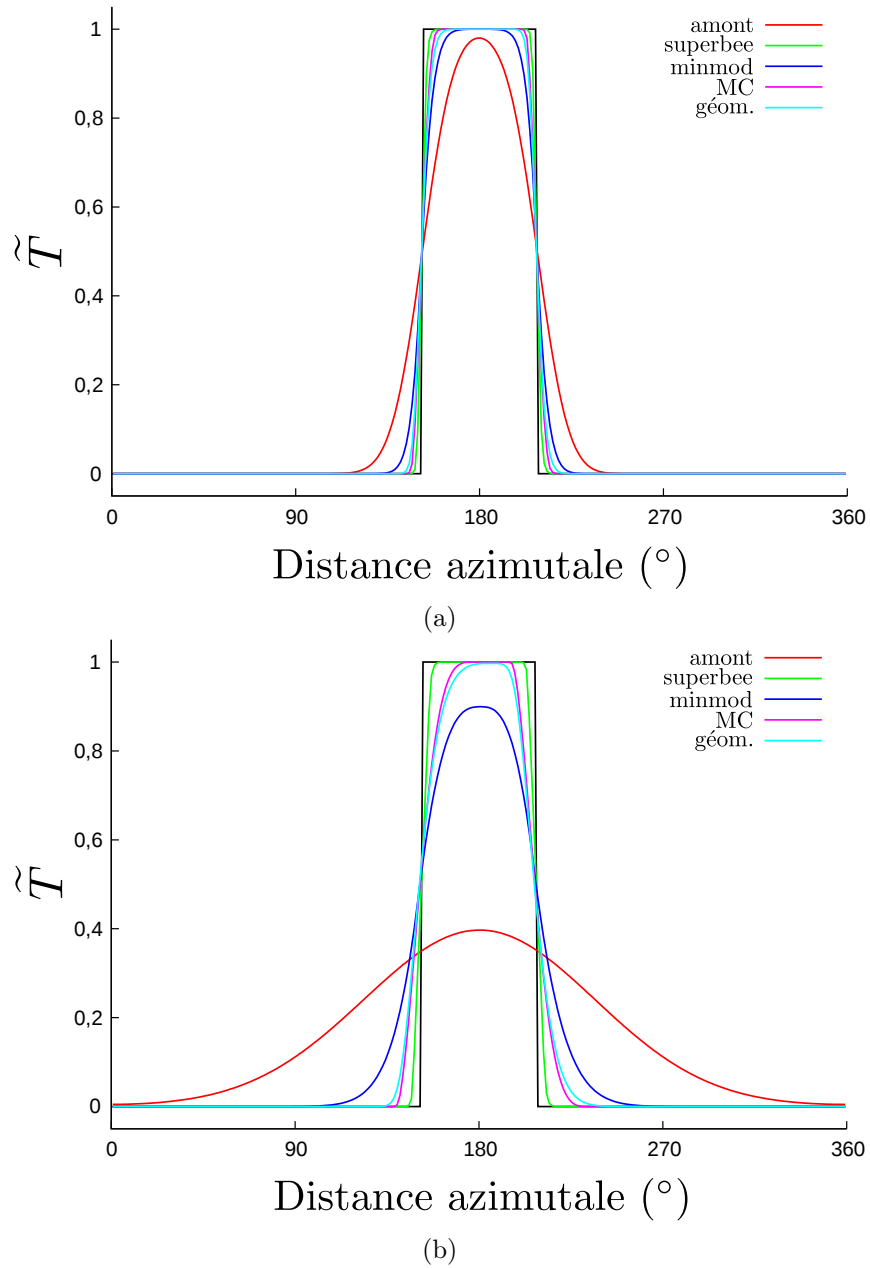


FIGURE 3.11 – *Effet des méthodes à haute résolution sur l’advection d’un échelon de température. Même type de représentation qu’à la figure 3.9, ici pour un échelon initial large d’environ $57,6^\circ$; mêmes paramètres géométriques. (a) Après 1 rotation complète; (b) après 20 rotations. Résolution : $n_r = 32$, $n_\theta = 256$. Les couleurs correspondent à différents types de limiteurs de pente. La notation « géom. » correspond au calcul géométrique des pentes [éq. (2.120)].*

de norme V) et celle du maillage (direction r ou θ dans notre cas). Le phénomène est ainsi maximal pour une advection diagonale par rapport à la grille (cf., p. ex., Patankar, 1980, § 5.6).

Ce phénomène peut être réduit par l'astuce suivante : si l'on ne peut bien évidemment pas changer la direction de l'écoulement (α), il est possible, en revanche, de diminuer la valeur effective de V . En procédant en un certain nombre de sous-pas de temps et, qui plus est, alternativement dans les deux directions du maillage, il devient possible de faire chuter de manière importante le coefficient de diffusion numérique. La figure 3.12 illustre notre propos : elle présente un exemple d'advection diagonale d'une anomalie « sphérique » de température au sein d'une portion d'anneau. Afin de ne pas conserver trop d'effets – naturels – de « distorsion » de l'anomalie durant sa remontée vers la surface de l'anneau (jacobien en r^d), le maillage est choisi à faible degré de courbure ($f = 0,98$, $d = 1$). En outre, l'advection, dans le cas de droite, a été réalisé sans subdivision du pas de temps, c'est-à-dire simplement selon les directions r puis θ .

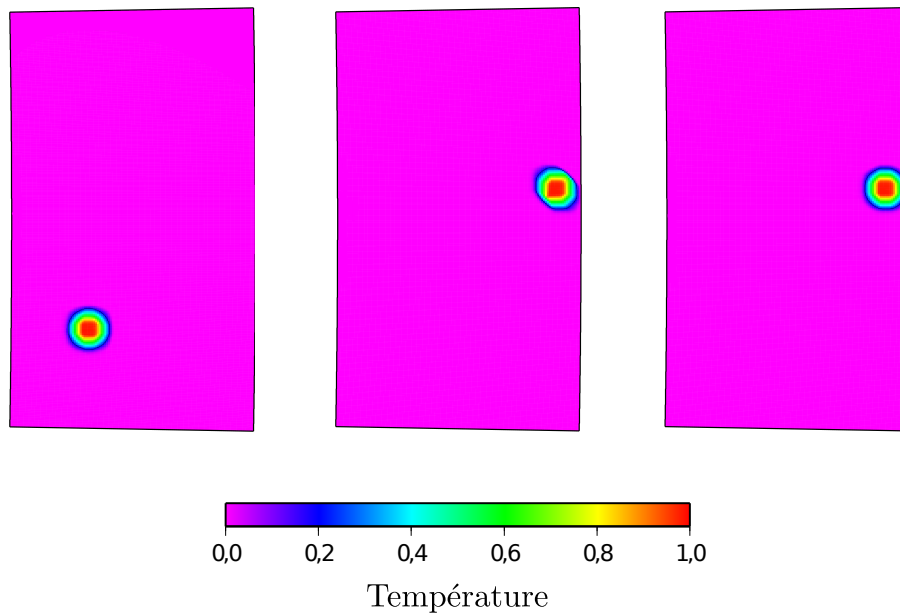


FIGURE 3.12 – *Advection en flux alternés.* À gauche, position d'une anomalie de température initiale (chaude), « sphérique », dans un milieu homogène (froid). Au centre, advection – après 2400 itérations en temps – de l'anomalie par un champ de vitesse quasi-diagonal par rapport au maillage ($\tilde{V}_r \equiv \tilde{V}_\theta \equiv 50$). À droite, même advection, mais en flux alternés (direction r puis θ), minimisant ainsi la distorsion artificielle. $f = 0,98$, $\Delta\theta = \pi/90$, $n_r = 128$, $n_\theta = 256$, $d = 1$.

L'effet de ce changement est déjà très important : la distorsion de l'anomalie thermique, relativement importante (figure centrale), même pour le maillage à haute résolution employé ici, est minimisée par cette simple décorrélation des directions

de l’advection. L’amélioration qui serait apportée par l’utilisation de sous-pas de temps serait plus délicate à voir sur ce type de figure. De la même manière, une simulation de convection avec un schéma *upwind*, pourtant très diffusif, peut paraître visuellement correcte (champ de température, etc.) ; d’autant plus qu’une diffusion thermique importante a lieu au sein des couches limites thermiques.

3.3 Éléments de validation finale de l’outil

La véritable validation du code élaboré doit être menée sur des cas de convection plus ou moins complexes, pour lesquels seules des solutions numériques (c.-à-d. tabulées) existent. C’est le principe des *benchmarks* existant dans la littérature, anglicisme que l’on pourrait grossièrement traduire par « simulations de référence ». Nous verrons que toute la difficulté – en partie liée à la « gourmandise numérique » de l’auteur qui a souhaité développer un code dans diverses géométries et approximations thermodynamiques – est de pouvoir valider l’outil dans suffisamment de configurations différentes pour commencer à avoir confiance en celui-ci. Les *benchmarks* bidimensionnels existant dans la littérature les plus abondants sont cependant, pour la plupart, en géométrie cartésienne ; d’où l’importance d’avoir cette possibilité dans l’outil CHEOPS-2D. Les résultats principaux cités ci-dessous sont donc dans cette géométrie (*benchmarks* les plus fiables). Dans le cas des configurations curvilignes 2D (ici anneau cylindrique ou sphérique), nous verrons que les données disponibles sont bien plus éparpillées, voire tout simplement inexistantes. À cela s’ajoutent les différents choix possibles d’approximations thermodynamiques (BOUSSINESQ, anélastique, etc.) et de propriétés fondamentales (p. ex. loi de viscosité).

Le tableau 3.1 présente une vision globale de l’ensemble des cas de figure testés et accessibles dans la littérature pour la réalisation du *benchmarking*. Les zones non testées dans cet espace de paramètres sont donc des données manquantes actuellement. Cependant, comme nous le verrons plus bas, le respect de certains critères (p. ex. conservation globale de l’énergie, via l’équilibre des puissances thermiques moyennes à la base et au sommet de l’anneau ou via l’égalité raisonnable entre les valeurs moyennes de chauffage adiabatique et de dissipation visqueuse) et le comportement global de CHEOPS-2D dans ces configurations laissent penser que le code permet une modélisation correcte de la convection thermique pour celles-ci.

En outre, bien que certains cas de figure n’aient pas pu être rigoureusement testés (absence de données de référence), la validation de l’outil dans les autres configurations – complémentaires – est rassurante quant à son comportement par ailleurs. Ainsi, par exemple, des résultats préliminaires encourageants ont été obtenus avec la comparaison, en géométrie d’anneau cylindrique, des codes CHEOPS-2D et GAIA (cf. 3.3.2), pour les configurations thermodynamiques BA, EBA et TALA.

TABLE 3.1 – *Résumé des données disponibles pour le benchmarking de CHEOPS-2D. L'absence de données est indiquée par un « - » ; la notation « \sim OK » indique des données non publiées (c.-à-d. travail en cours) ou partielles. Les exposants indiquent que le comportement en temps a été testé (\bullet^t) ou que des cas à viscosité variable avec la température (\bullet^T) et/ou la pression (\bullet^p) ont également été examinés. Les cas cartésiens correspondent au benchmark exhaustif de [King et al. \(2010\)](#), ainsi qu'à ceux, plus anciens – donc moins vastes – mais complémentaires, de [Blankenbach et al. \(1989\)](#) et de [Travis et al. \(1990\)](#). Les cas cylindriques correspondent à l'article de [Jarvis \(1993\)](#) et surtout à un travail en cours mené en collaboration avec Nicola Tosi (DLR, Berlin). Enfin, les cas sphériques (2D) correspondent à ceux présentés dans l'étude de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#).*

Approximation	Cartésien	A. cylindrique	A. sphérique
BA	OK ^{T,p,t}	\sim OK	\sim OK ^T
EBA	OK ^T	\sim OK	-
TALA	OK ^T	\sim OK	-
ALA	OK ^T	-	-

Ceci, associé au fait que le comportement de l'outil développé est correct en mode BA dans l'anneau sphérique, laisse raisonnablement penser qu'il en va de même pour les modes EBA, TALA (et ALA) dans cette même géométrie. Cependant, comme le modélisateur n'est – par définition – jamais sûr de rien et qu'il finit par douter de tout (paranoïa acquise), nous nous contenterons d'affirmer que, jusqu'à présent, aucun indice qui suggère que le code contiendrait une erreur fondamentale¹⁵ n'a été détecté.

Un petit bémol...

Signalons ici, après cette présentation optimiste de l'outil obtenu, qu'un problème demeure cependant dans CHEOPS-2D. Il reste, pour l'instant, un mystère pour l'auteur. Le solveur multigrille élaboré devient instable dans des configurations à viscosité variable lorsqu'une condition en bord libre est prescrite sur la frontière externe, Γ_e (et ce indépendamment de la condition mécanique sur Γ_i), pour un anneau complet ou bien, de manière équivalente, pour une fraction d'anneau munie de conditions aux limites latérales périodiques. SIMPLER seul (c.-à-d. une seule grille) fonctionne très bien dans cette configuration ; mais le maillage accessible ne peut être

15. L'avenir nous le dira ; c'est un risque qu'il faut cependant accepter ! De même que l'idée que les données produites sont nécessairement entachées d'erreurs, qu'il faut idéalement chercher à minimiser...

qu’à résolution faible si l’on souhaite conserver des temps de calcul raisonnables. Ce problème, qui semble pourtant simple, a déjà fait perdre tant de cheveux à l’auteur qu’il a été décidé de laisser ce cas de côté – temporairement ! Cependant, les cas en bord rigide sur Γ_e , quelles que soient les conditions restantes (Γ_i , viscosité variable ou non, etc.) ne posent heureusement aucun problème. . .

3.3.1 *Benchmark* cartésien

Comme nous l’avons vu au chapitre 2 (cf. 2.1.5), l’outil CHEOPS-2D développé durant cette thèse permet d’accéder à une géométrie pseudo-cartésienne. Il suffit pour cela de prendre un rapport de courbure f suffisamment proche de l’unité, ainsi qu’un degré de courbure effectif d égal à 1. Comme nous le verrons plus bas, les effets curvilignes deviennent alors négligeables et les résultats sont quasi-identiques à ceux obtenus avec des codes cartésiens purs.

Approximation de BOUSSINESQ classique

Le cas simple de l’approximation de BOUSSINESQ est amplement documenté. De nombreux tests ont été effectués sur l’outil CHEOPS-2D dans cette approximation. Nous en présentons quelques-uns ci-dessous. Tout code de convection cartésien doit commencer par vérifier un *benchmark* classique et incontournable : celui de [Blankenbach et al. \(1989\)](#). Un certain nombre de cas sont définis dans ce dernier, en grande partie pour une boîte cartésienne de rapport d’aspect unitaire et munie de bords libres sur toutes ses faces. Celle-ci contient un fluide ($\text{Pr} \rightarrow \infty$) chauffé par la base [$\tilde{T}(R_i) \equiv 1$] et refroidi par le sommet [$\tilde{T}(R_e) \equiv 0$]; elle constitue le cas le plus classique de convection de RAYLEIGH-BÉNARD que l’on puisse imaginer. L’intérêt de cette configuration simple est qu’elle a non seulement permis de vérifier que le comportement de CHEOPS-2D était correct en terme de phénoménologie de la convection, mais aussi que la géométrie pseudo-cartésienne accessible via notre domaine annulaire donnait des résultats extrêmement comparables à ceux attendus avec un outil purement cartésien.

L’étude de [Blankenbach et al. \(1989\)](#) a défini trois cas isovisqueux qui nous intéressent : 1a, 1b, 1c, correspondant respectivement à des nombres de RAYLEIGH de 10^4 , 10^5 et 10^6 . Elle fut complétée récemment par celle de [King et al. \(2010\)](#), dans le cadre d’un *benchmark* plus général (anélastique). Le tableau 3.2 présente ainsi une comparaison systématique des résultats de CHEOPS-2D face à ceux d’autres codes pour les cas évoqués précédemment. Des grandeurs globales sont comparées, à savoir la température moyenne, $\langle \tilde{T} \rangle$ et la vitesse RMS, \tilde{V}_{RMS} , mais aussi plus locales :

le nombre de NUSSELT¹⁶ moyen Nu (ici en surface; équivalent à celui à la base du modèle, à l'équilibre thermique) ainsi que les vitesses maximale et moyenne en surface, $\tilde{V}_{\max}^{\text{surf}}$ et $\langle \tilde{V}^{\text{surf}} \rangle$.

L'accord des données produites par CHEOPS-2D est bon dans l'ensemble, pour le cas d'un rapport de courbure f de 0,999. Un cas avec $f = 0,9999$ est également inclus et montre un raccord excellent sur le cas cartésien pur. Ceci est visible en particulier sur la température moyenne qui devient, au sens de la précision requise pour le *benchmark*, parfaitement égale à sa valeur théorique de 0,5. Globalement, nous pouvons constater que les valeurs obtenues avec CHEOPS-2D sont comprises dans l'intervalle des variations observées entre les résultats des autres codes.

À titre d'exemple, les figures 3.13 et 3.14 illustrent visuellement les résultats obtenus pour les cas 1a et 1c de Blankenbach *et al.* (1989). Les champs de température, de vitesse [via la fonction de courant $\tilde{\Psi}$, cf. éq. (2.6), la composante \tilde{V}_r et la vorticité ($\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{V}}$)] et du second invariant de la contrainte déviatorique $\boldsymbol{\tau}$. La seconde figure représente les profils associés, moyennés horizontalement. Afin de ne pas surcharger ces derniers, la discrétisation (nœuds habituels sur les courbes) n'est plus repr sent e dans ce cas; la résolution  lev e des simulations pr sent es rend raisonnable cette représentation. Nous adopterons systématiquement ce choix par la suite, sauf dans les cas à résolution radiale n_r de 64 cellules ou moins. Rappelons (cf. fig. 2.8) que, dans les figures de champ 2D pr sent es dans ce mémoire, aucune interpolation n'a été r alis e, y compris dans les cas avec raffinement de maillage.

Grâce à ces figures, nous retrouvons les principaux traits de la convection thermique, qu'il est instructif de commenter un minimum : une cellule de convection unique (vorticité de signe constant) est ici observ e et il y a parfaite symétrie entre le panache chaud montant et le panache froid descendant (zones à forte valeur absolue de \tilde{V}_r); une symétrie centrale qui se retrouve dans tous les champs et profils présentés. Cet exemple de comparaison montre également le rétrécissement (et *a fortiori* la symétrie persistante) des couches limites thermiques chaude et froide, respectivement à la base et au sommet de la boîte, lorsque le nombre de RAYLEIGH (grossièrement la vigueur de la convection) augmente. Ces zones sont marqu es par de forts gradients de température permettant de « compenser » un intérieur isotherme en moyenne (flux advectif dominant). Dans le cas 1c, les couches limites thermiques (p. ex. flux conductif dominant) sont rendues très fines par la pouss e des panaches qui viennent véritablement s'écraser et s'étaler sur les bords horizontaux de la boîte; cette caractéristique est marqu e par des bosses sur le profil de température moyen et des gradients importants dans les profils de températures extrêmes.

16. Il s'agit, par définition, du rapport du flux de chaleur réel (convection thermique)   celui qui serait observé dans un état purement conductif. Dans le cadre cartésien, il s'identifie donc simplement au flux de chaleur adimensionné.

TABLE 3.2 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation de BOUSSINESQ. Les valeurs sont extraites du benchmark de King et al. (2010). Les codes indiqués par UM (P.E. van Keken – University of Michigan), VT (S.D. King – Virginia Tech), CU (W. Leng et S. Zhong – University of Colorado) et CT (E. Tan – Caltech) reposent sur la méthode des éléments finis alors que ceux indiqués par CZ (N. Tosi – Charles University) et KS (M.C. Kameyama – Ehime University) sont basés sur celle des volumes finis (pour les détails, cf. King et al., 2010). Les cas 1(a), 1(b) et 1(c) du benchmark de Blankenbach et al. (1989) sont également reportés. Dans certains cas – indiqués par un « r » – le maillage est raffiné dans les couches limites thermiques horizontales (δz variable). Pour le code développé durant cette thèse – CHEOPS-2D : $n_x \equiv n_\theta$ et $n_z \equiv n_r$. Pour comparaison, un exemple à $f = 0,9999$ est indiqué (*).

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	$\tilde{V}_{\max}^{\text{surf}}$	$\langle \tilde{V}^{\text{surf}} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$
UM	60 × 68r	10 ⁴	4,8800	42,9000	61,6000	41,4000	0,5000
VT	64 × 64		4,8900	43,0300	61,6000	41,4000	0,5000
CU	64 × 64r		4,8800	42,9000	61,7000	41,4000	0,5002
CT	64 × 64		4,8869	42,8921	61,6623	41,4334	0,5000
CZ	70 × 70r		4,8600	43,2100	62,1700	41,7600	0,5000
KS	128 × 128		4,8814	42,8450	61,5900	41,3980	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		4,8849	42,8646	61,6276	41,4281	0,4998
Blankenbach 1(a)			4,8844	42,8649			
UM	60 × 68r	2.10 ⁴	6,1900	68,2000	97,1000	67,3000	0,5000
VT	64 × 64		6,2000	68,6100	97,1800	67,1000	0,5000
CU	64 × 64r		6,1900	68,3000	97,2000	67,3000	0,5002
CT	64 × 64		6,2011	68,2763	97,1841	67,3052	0,5000
CZ	70 × 70r		6,1600	68,8400	98,0300	67,9000	0,5000
KS	128 × 128		6,1893	68,1750	97,0470	67,2220	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		6,1969	68,2182	97,1185	67,2881	0,4998
UM	60 × 68r	5.10 ⁴	8,3800	123,9000	173,3000	125,1000	0,5000
VT	64 × 64		8,4100	124,8300	173,2700	125,1700	0,5000
CU	64 × 64r		8,3900	123,9000	173,2000	125,1000	0,5002
CT	64 × 64		8,4111	123,9547	173,2740	125,1729	0,5000
CZ	70 × 70r		8,3500	125,0200	174,8400	126,3800	0,5000
KS	128 × 128		8,3846	123,7300	173,0000	124,9600	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		8,4056	123,8592	173,1881	125,1589	0,4998
UM	60 × 68r	10 ⁵	10,4900	193,3000	266,4000	198,2000	0,5000
VT	64 × 64		10,5400	195,0800	266,3700	198,2800	0,5000
CU	64 × 64r		10,5000	193,4000	266,3000	198,2000	0,5001
CT	64 × 64		10,5421	193,4284	266,3764	198,2904	0,5000
CZ	70 × 70r		10,4600	195,0000	268,6100	200,2200	0,5000
KS	128 × 128		10,4950	192,8700	265,7400	197,7600	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		10,5392	193,1980	266,1756	198,2311	0,4998
CHEOPS – 2D*	128 × 256	10,5390	193,2245	266,2139	198,2695	0,5000	
Blankenbach 1(b)			10,5341	193,2145			
UM	60 × 68r	2.10 ⁵	13,0800	300,5000	408,5000	311,9000	0,5000
VT	64 × 64		13,1900	300,9600	408,7900	312,2800	0,5000
CU	64 × 64r		13,1000	300,8000	408,5000	312,0000	0,5002
CT	64 × 64		13,1814	300,9805	408,7873	312,2900	0,5000
CZ	70 × 70r		13,0600	303,1400	411,7800	315,2100	0,5000
KS	128 × 128		13,0890	299,5700	407,0800	310,9000	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		13,1782	300,3654	408,1621	312,0129	0,4999
UM	60 × 68r	5.10 ⁵	17,4300	537,3000	718,9000	564,2000	0,5000
VT	64 × 64		17,6400	538,9808	720,5100	565,6900	0,5000
CU	64 × 64r		17,4700	538,2000	719,5000	564,8000	0,5002
CT	64 × 64		17,6568	538,9814	720,4860	565,6980	0,5000
CZ	70 × 70r		17,0700	542,8700	726,3500	571,4900	0,5000
KS	128 × 128		17,4420	537,4900	714,9600	561,1600	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		17,6533	537,1465	718,5242	564,5840	0,4999
UM	60 × 68r	10 ⁶	21,5900	834,0000	1104,4000	880,8000	0,5000
VT	64 × 64		22,0200	838,0237	1108,7000	884,5200	0,5000
CU	64 × 64r		21,6400	836,1000	1106,3000	882,5000	0,5002
CT	64 × 64		21,9848	838,0348	1108,6764	884,5452	0,5000
CZ	70 × 70r		21,0400	842,7800	1116,2700	892,5100	0,5000
KS	128 × 128		21,6040	827,4300	1095,6000	873,7900	0,5000
CHEOPS-2D	128 × 256		21,9992	833,9605	1104,1592	881,7233	0,5000
Blankenbach 1(c)			21,9725	833,9898			

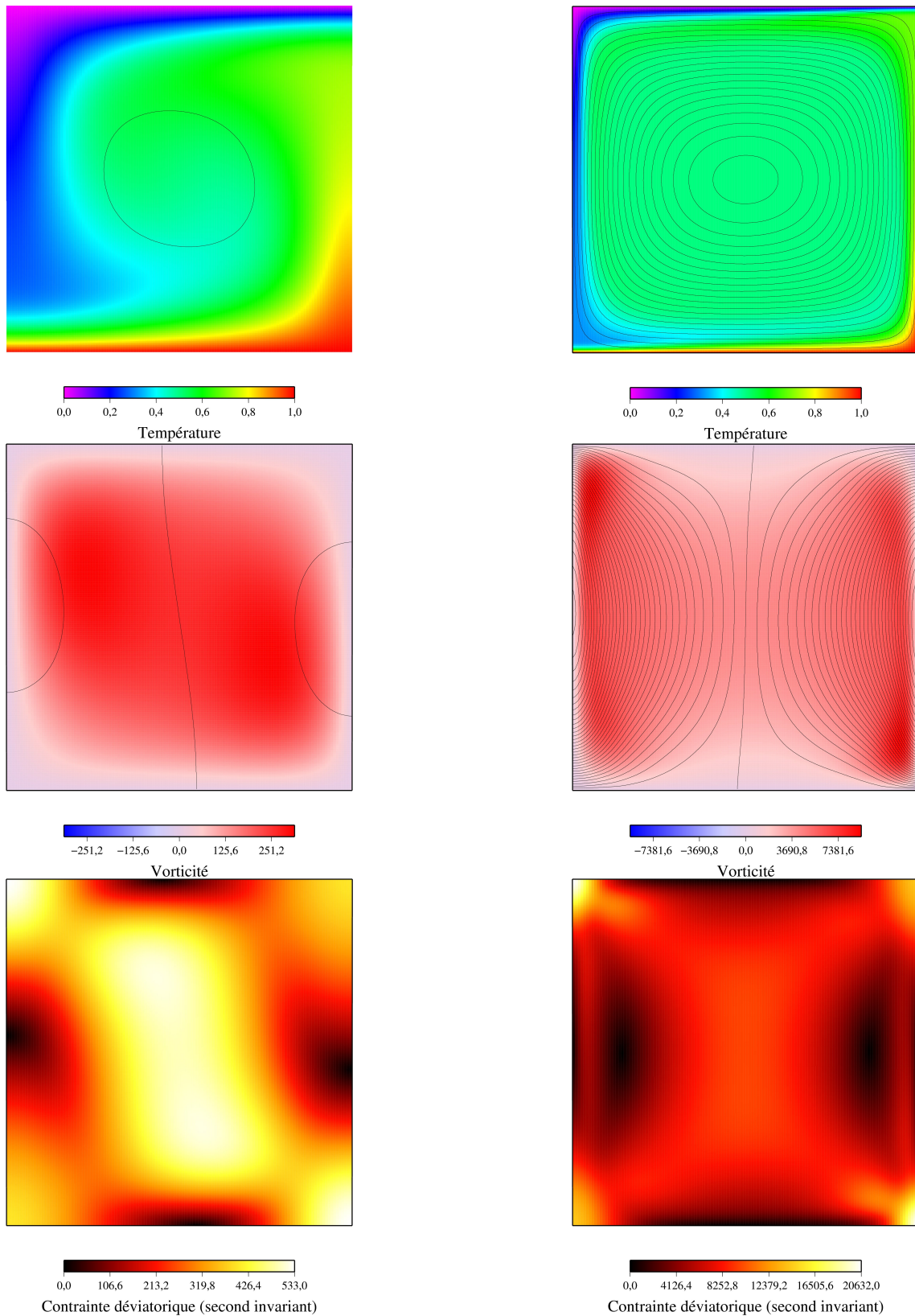


FIGURE 3.13 – Exemple de champs pour les cas 1a et 1c de *Blankenbach et al. (1989)*. Colonne de gauche : *Blankenbach-1a* ($Ra = 10^4$); colonne de droite : *Blankenbach-1c* ($Ra = 10^6$). Les isolignes correspondent à la fonction de courant $\tilde{\psi}$ (première ligne, intervalle de 15) et à la valeur de \tilde{V}_r (deuxième ligne, intervalle de 50). $f = 0,999$, $n_r = 256$, $n_\theta = 128$, $d = 1$, $R_A = 1$.

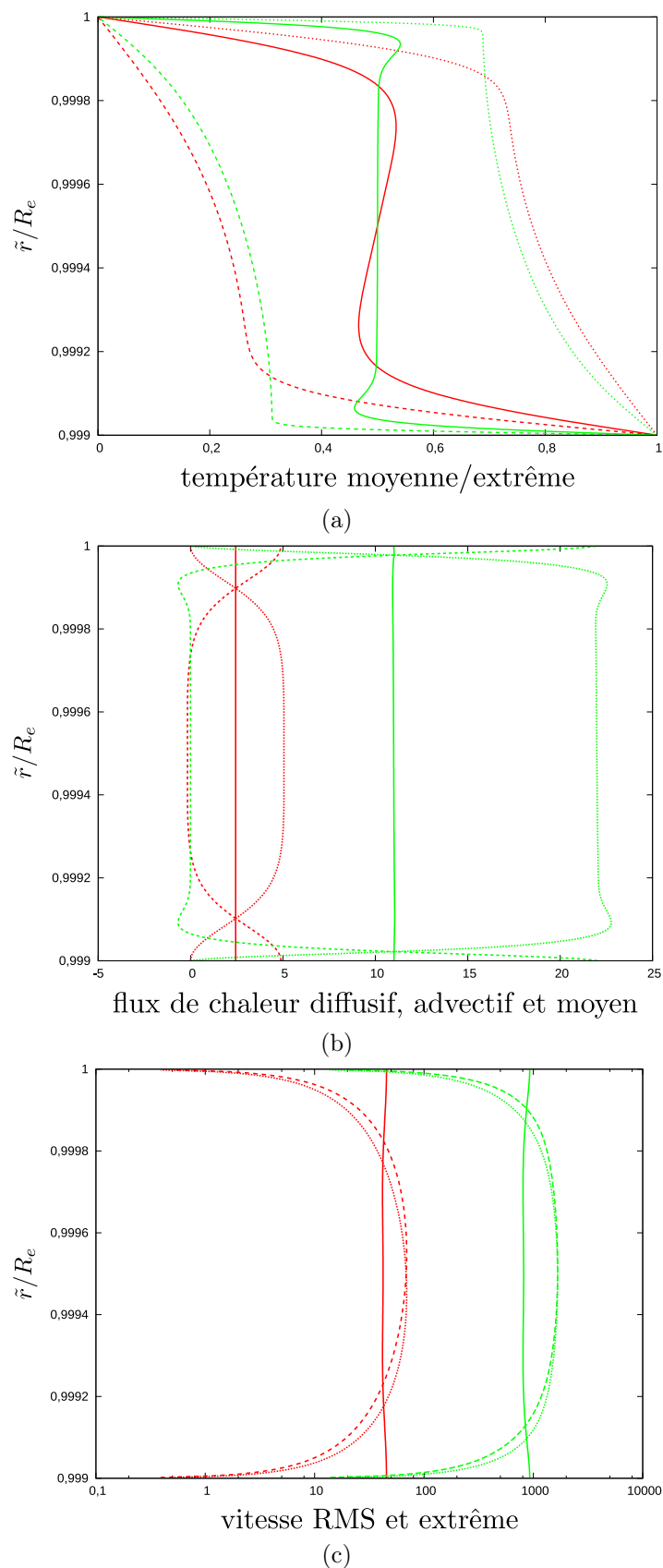


FIGURE 3.14 – Exemple de profils moyens pour les cas 1a et 1c de [Blankenbach et al. \(1989\)](#) [1a en rouge, 1c en vert]. (a) Température moyenne, minimale (tiretés) et maximale (pointillés). (b) moyen, advectif (tiretés) et diffusif (pointillés). (c) Vitesse RMS, maximale descendante (tiretés) ou ascendante (pointillés). Voir figure 3.13 pour les divers paramètres.

Notons enfin la remarquable constance avec la profondeur du flux de chaleur moyen. Certains pourraient arguer qu'elle n'est due ici qu'à la très haute résolution radiale employée ($n_r = 256$). Si ce fait contribue, en effet, au respect de cette propriété phénoménologique essentielle de la convection, cela n'est cependant qu'un aspect annexe. En effet, nous verrons plus loin qu'une constance quasi-similaire a été obtenue pour des cas à résolution radiale bien moindre (typiquement $n_r = 64$ ou même 32)¹⁷. Ceci s'explique par un calcul rigoureux des flux de chaleur verticaux employés pour réaliser ces profils moyens. Ainsi, afin de rester parfaitement cohérent avec la discrétisation employée pour l'équation de la chaleur, le flux conductif est calculé avec un schéma au même ordre en espace (c.-à-d. 2) que celui employé pour le traitement de l'équation de conduction. De la même manière, le flux advectif est calculé à partir d'un schéma à haute résolution. Une tentative de calculer un flux plus précis (dérivée à l'ordre 3, etc.) serait vaine puisque la précision dépasserait alors celle de l'outil : les variations qui pourraient alors apparaître le long du profil de flux de chaleur moyen ne seraient qu'une sorte de bruit numérique. . .

L'étude de [Blankenbach *et al.* \(1989\)](#) fournit également des cas à viscosité variable. Les figures 3.15 et 3.16 présentent les mêmes exemples de champ que précédemment, pour les cas 2a et 2b du *benchmark* de [Blankenbach *et al.* \(1989\)](#). Il s'agit d'examiner l'effet d'une viscosité variable avec la température [loi de FRANK-KAMENETSKII; cf. éq. (1.151)] et la pression. À nouveau, le cas 2a a été étendu dans l'étude de [King *et al.* \(2010\)](#) pour les approximations BA, EBA, TALA et ALA. Le lecteur intéressé pourra trouver une comparaison systématique des résultats de CHEOPS-2D dans ces cas de figure dans l'annexe B (tab. B.18). Celle-ci rassemble tous les résultats obtenus pour les cas de l'article de [King *et al.* \(2010\)](#).

Ces figures illustrent que le changement principal apporté par la variations de la viscosité avec la température est une rupture de symétrie et une augmentation globale de la température du milieu. En effet, le panache chaud, dans l'exemple présenté, se trouve associé à des vitesses radiales bien plus importantes que son homologue froid, en raison de la chute de la viscosité avec la température. Ce fait est par exemple visible via les isolignes de \tilde{V}_r et les profils de vitesse ascendante et descendante, mais aussi à travers l'écrasement des lignes de courant dans le panache chaud. La couche limite thermique chaude s'en trouve ainsi très amincie (cf. fig. 3.16a et 3.16c). En outre, la grande mobilité du panache chaud va, on l'a vu, contribuer à un réchauffement du milieu convectif plus efficace : le contraste de température associé est donc moins marqué. En effet, dans la figure 3.16a, l'écart entre les courbes

17. C'est là l'un des inconvénients de travailler en géométrie annulaire complète ($\Delta\theta = 2\pi$) : le nombre de cellules requis est rapidement important, limitant, de ce fait, la résolution radiale. C'est l'une des raisons de l'existence du raffinement de maillage dans CHEOSP-2D. Une parallélisation de l'outil (réalisation des calculs sur plusieurs processeurs) est prévue, à terme, afin de pallier ce problème majeur.

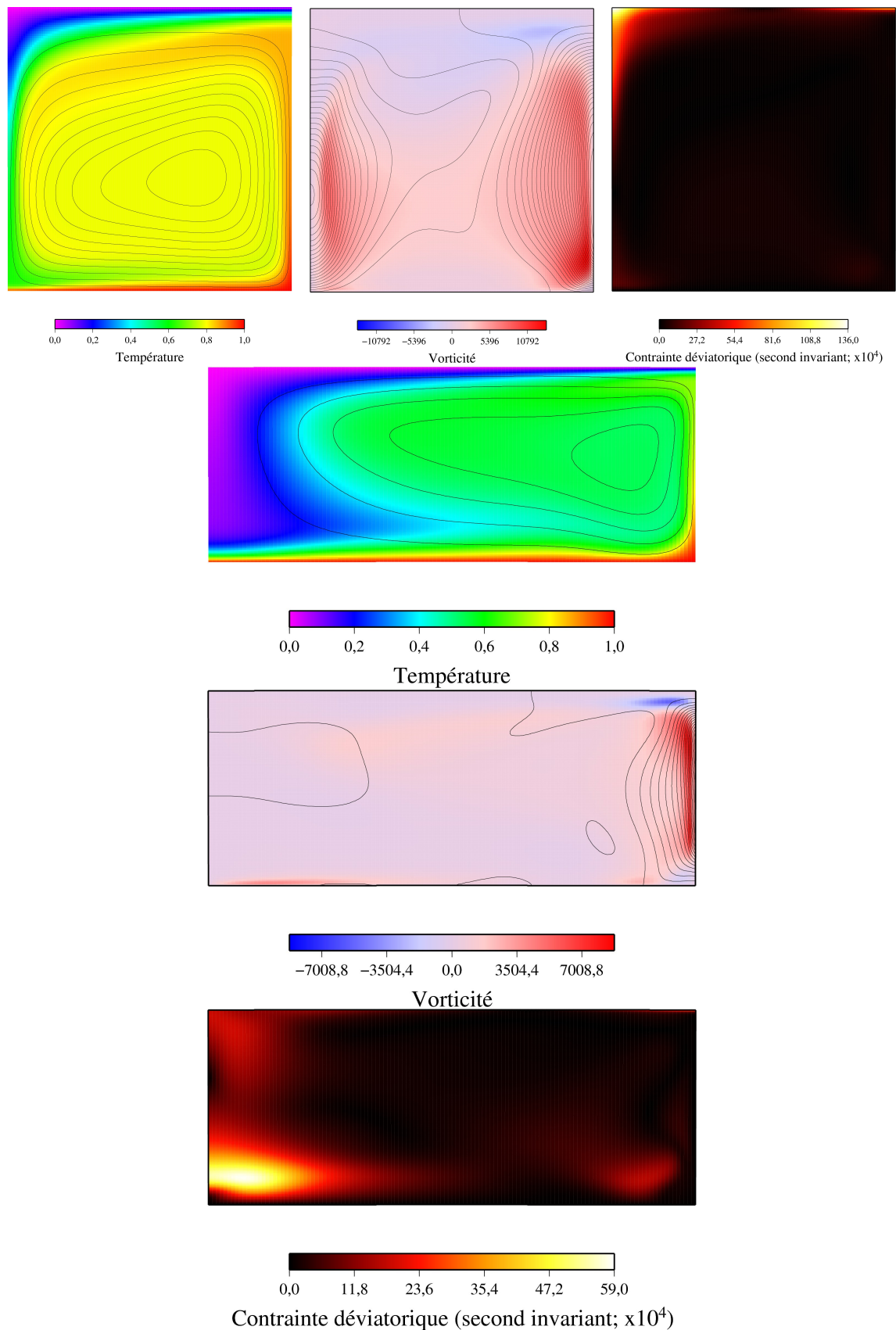


FIGURE 3.15 – Exemple de champs pour les cas 2a et 2b de [Blankenbach et al. \(1989\)](#). Ligne du haut : Blankenbach-2a ($\Delta\eta_T = 10^3$); lignes restantes : Blankenbach-2b ($\Delta\eta_T = 2^{14} = 2^8 \Delta\eta_p$) – $Ra_{surf} = 10^4$. Les isolignes correspondent à celles de la figure 3.13. $f = 0,999$, $n_r = n_\theta = 128$, $d = 1$, $R_A = 1$ (première ligne) ou $R_A = 2,5$.

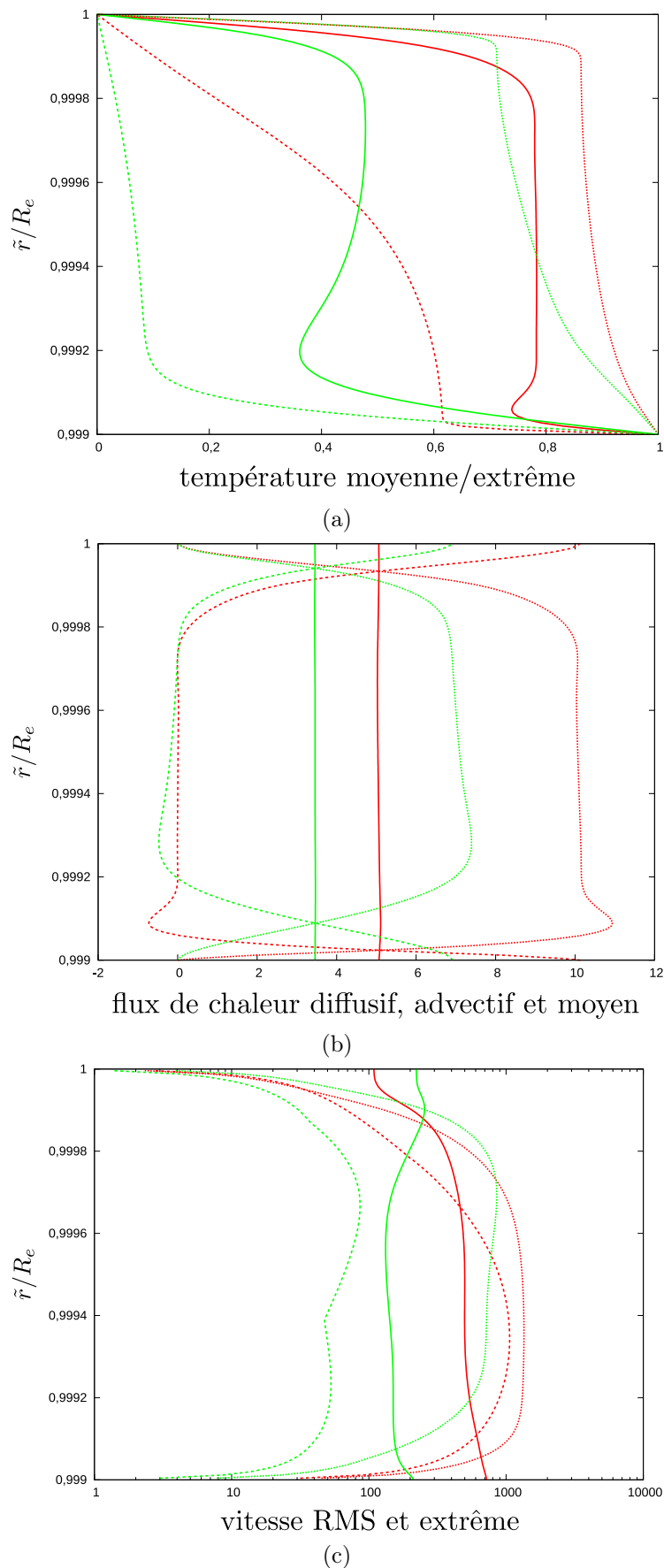


FIGURE 3.16 – Exemple de profils moyens pour les cas 2a et 2b de [Blankenbach et al. \(1989\)](#) [2a en rouge, 2b en vert]. Même signification des différents types de traits qu'à la figure 3.14. Voir figure 3.15 pour les divers paramètres.

rouges en trait plein et en pointillés est peu important et l’on observe une absence de « bosse » dans le profil moyen avant la couche limite thermique froide. La différence de température moyenne par rapport à la base chauffée est donc moindre que celle caractérisant la couche limite thermique froide, mais comme l’épaisseur associée est aussi plus faible, le flux de chaleur conductif reste comparable dans les deux couches. La forte augmentation de la viscosité à faible température – en haut de la couche – explique la formation d’une zone visqueuse épaisse¹⁸ qui participe beaucoup moins activement à la convection. Il en résulte un découplage partiel de cette couche avec la partie convective, d’où les petites zones à vorticité negative présentes au-dessus des deux panaches. Enfin, comme la contrainte convective est directement proportionnelle à la viscosité, les valeurs fortes de celle-ci se trouvent regroup es dans la zone froide (très visqueuse) et au-dessus du panache froid (contraintes normales importantes et confinement dans le coin de la boîte).

Le cas 2b du benchmark de Blankenbach *et al.* (1989) nous montre que l’effet de la pression sur la viscosité donne une tendance grossièrement inverse à ce qui a été mentionné précédemment, avec pourtant, dans ce cas, un ordre de grandeur de plus pour le contraste purement thermique de viscosité. Globalement, la vigueur de l’écoulement est moindre (voir, par exemple les profils de vitesse et de flux advectif). La température du milieu est ainsi similaire à celle rencontr e dans le cas 2a. Une différence importante résident dans l’importance du panache froid : celui-ci, très visqueux (puisque à basse température et à profondeur – pression – importante), est peu mobile et à l’origine de la plus forte zone de contraintes. L’essentiel des valeurs fortes de vitesse radiale et de vorticité est donc visible dans une zone situ e au niveau du panache chaud, bien plus fin et mobile.

  l’instar de ce que nous avons vu précédemment pour les tests numériques sur la conduction (cf. 3.2.3), il est important de vérifier le comportement temporel de CHEOPS-2D pour des solutions convectives. Les donn es sont bien moindres dans ce cas. Nous illustrons cette démarche avec la figure 3.17 ci-dessous. Il s’agit des cas B2, B3 et B4 du *benchmark* de Travis *et al.* (1990). Si la géométrie est la même que celle requise précédemment, la configuration thermique est ici sensiblement différente : un fluide est chauffé de l’intérieur (\tilde{H} homogène) et refroidi par le haut. Le bord inférieur est thermiquement isolé. Les figures 3.17a et 3.17b – qui sont exactement celles pr sent es par Travis *et al.* (1990, fig. 7 et 13) – ainsi que les profils associés (fig. 3.17c) nous permettent de retrouver les caractéristiques bien connues de la convection dans cette configuration dite de RAYLEIGH-ROBERTS : le transfert de chaleur est dominé par les instabilités (ici une seule, en raison du rapport d’aspect unitaire de la boîte) qui naissent dans la couche limite thermique froide. La remont e de matériau « chaud » (on devrait plutôt dire « moins froid ») n’est que passive, par

18. Il ne s’agit toutefois pas vraiment d’un couvercle stagnant comme dans un cas à contraste global de viscosité plus élevé. . .

conservation de la masse. En effet, la condition en flux de chaleur nul à la base résulte en l'absence de couche limite thermique chaude. Les contrastes de température (cf. fig. 3.17c) sont naturellement plus forts dans le haut de la boîte.

Le test sur le comportement en temps a d'abord porté sur une évolution transitoire vers un état d'équilibre final stationnaire. Il s'agit du cas B3 du *benchmark* de Travis *et al.* (1990). La simulation est démarrée à partir de la solution obtenue pour le cas B2 (fig. 3.17a) mais avec une augmentation brutale (instantanée) du nombre de RAYLEIGH. La solution devient donc instable, oscillante et un nouvel équilibre va petit à petit s'instaurer. Ce changement temporel est ici visualisé à la figure 3.17d, à travers la variation de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement. Un examen attentif de la figure 13 de Travis *et al.* (1990) correspondant révèle que les données issues de CHEOPS-2D sont en excellent accord. Il en est de même pour le test, présenté à la figure 3.17e, dans lequel, suite à une variation transitoire, un état d'équilibre oscillant (statistiquement stationnaire) est atteint. Bien que le détail de la période transitoire, plus complexe que dans le cas B3, diffère un peu de celui présenté par Travis *et al.* (1990, fig. 17a), l'état d'équilibre final atteint est très semblable (cycles à deux périodes, de l'ordre de 0,0044 et 0,0022). Il faut noter que, dans l'article de Travis *et al.* (1990), les auteurs admettent une certaine variabilité dans les résultats obtenus avec les différents codes pour la partie transitoire. Ceci est bien normal car ces détails fins sont directement dépendants des méthodes numériques associées et du maillage choisi. Il est raisonnable de penser que, pour des maillages extrêmement fins, tous les codes convergeraient vers le même comportement transitoire, sous réserve d'un ordre en temps comparable des méthodes et de conditions initiales identiques. À ce propos, notons que les solutions initiales employées pour les calculs illustrés dans ce chapitre consistent – sauf mention contraire – en un état purement conducteur muni de petites perturbations pseudo-aléatoires¹⁹.

Approximations en compressibilité non nulle

Le comportement de l'outil est donc validé en approximation de BOUSSINESQ dans une géométrie cartésienne. L'étape naturelle suivante est la validation dans un comportement compressible (approximations EBA, TALA et ALA). Un soin particulier a été apporté à cette partie puisque, d'une part, le seul *benchmark* de convection compressible actuellement disponible est celui de King *et al.* (2010), qui reprend – de manière exhaustive – le flambeau allumé vingt ans plus tôt par Blankenbach *et al.* (1989) et Travis *et al.* (1990) et, d'autre part, la compressibilité a un rôle central dans la première application de l'outil CHEOPS-2D (cf. chap. 4).

19. c.-à-d. au sens d'un ordinateur... qui plus est de Fortran 95 (sans changement du germe d'initialisation, afin de garder une comparaison possible entre deux simulations partant du *même* état initial perturbé)

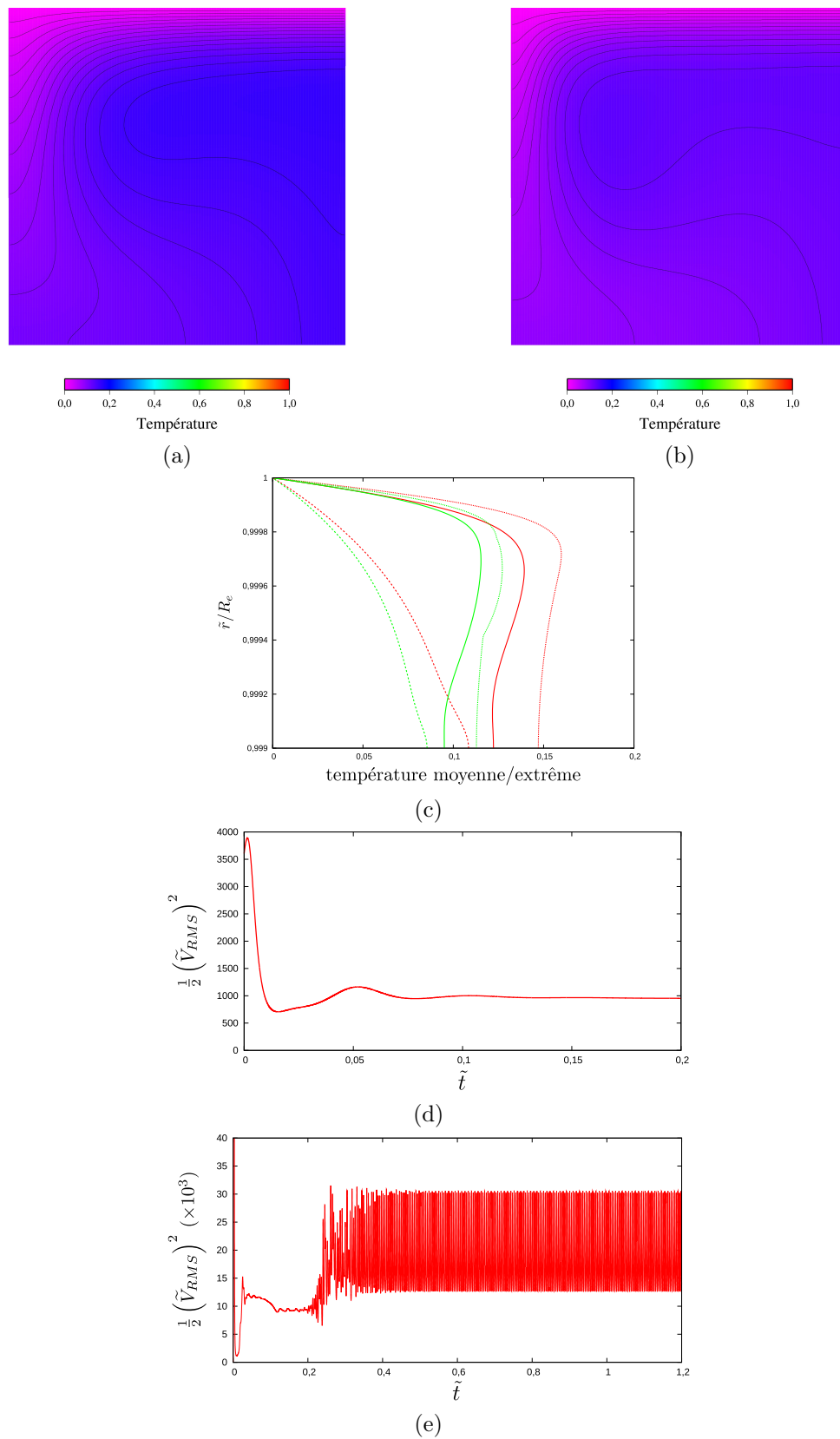


FIGURE 3.17 – Test du comportement en temps à l'aide du benchmark de *Travis et al. (1990)*. Champ de température final (stationnaire) des problèmes B2 [$Ra_H = 38880$] (a) et B3 [$Ra_H = 129600$] (b) – contour à 0,01 – et profils associés (c) [cf. fig. 3.14a]. Évolution transitoire de B2 vers B3 (d) et évolution de B4 [$Ra = 10^5$] vers un équilibre statistique (e). $f = 0,999$, $n_r = n_\theta = 128$, $d = 1$, $R_A = 1$ (B2, B3) ou $R_A = 2$ (B4).

Le tableau 3.3 ci-dessous présente un exemple des résultats obtenus durant la campagne de tests menée pour comparer les résultats de CHEOPS-2D, dans les diverses approximations compressibles, avec les données fournies par six autres codes (éléments ou volumes finis). Notons que ce tableau, correspondant au cas ALA, ne laisse apparaître que trois autres codes (UM, VT et CU; cf. tab. 3.2). Il faut mentionner ici un point important : seuls ceux-ci, dans le *benchmark* de King *et al.* (2010), ont été « capables » de fonctionner dans l’approximation anélastique-liquide complète; la pression dynamique doit, en effet, être incluse dans la flottabilité et donc, pour cela, être calculée de manière précise et auto-cohérente. CHEOPS-2D est donc entré dans le club plutôt fermé des codes pouvant réaliser l’approximation ALA, qui plus est pour diverses géométries et grâce à une méthode en volumes finis; les trois outils mentionnés plus haut reposent tous sur la méthode des éléments finis. En outre, CHEOPS-2D constitue actuellement, à la connaissance de l’auteur, l’un des trois seuls outils, avec les codes par ailleurs sphériques StagYY (Tackley, 2008) et GAIA (Hüttig et Stemmer, 2008a,b), qui fonctionnent dans ces approximations en géométries annulaires ($d = 1$ seulement pour GAIA).

TABLE 3.3 – *Comparaison des résultats de CHEOPS en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d’autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 1$). Mêmes notations qu’au tableau 3.2.*

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	$\tilde{V}_{\max}^{\text{surf}}$	$\langle \tilde{v}^{\text{surf}} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{\text{vis}} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{\text{ad}} \rangle $	
UM	$60 \times 68r$	10^4	2,438	24,663	36,767	-23,811	0,512	1,343	1,349	
VT	64×64		2,4716	25,0157	37,6020	24,4009	0,5100	1,3622	1,3621	
CU	$64 \times 64r$		2,4700	24,9000	37,6000	24,4000	0,5103	1,3627	1,3638	
CHEOPS	64×128		2,4712	24,9395	37,5987	24,4058	0,5101	1,3638	1,3643	
UM	$60 \times 68r$	$2 \cdot 10^4$	2,878	38,453	57,992	-37,973	0,517	1,761	1,771	
VT	64×64		2,9155	39,0295	59,1039	38,7772	0,5153	1,7840	1,7840	
CU	$64 \times 64r$		2,9100	38,8000	59,1000	38,8000	0,5155	1,7845	1,7864	
CHEOPS	64×128		2,9150	38,8543	59,0970	38,7952	0,5154	1,7881	1,7895	
UM	$60 \times 68r$	$5 \cdot 10^4$	3,51	64,925	100,244	-66,063	0,524	2,375	2,391	
VT	64×64		3,5481	65,8980	101,5172	67,0285	0,5234	2,4029	2,4030	
CU	$64 \times 64r$		3,5400	65,4000	101,5000	67,0000	0,5236	2,4031	2,4074	
CHEOPS	64×128		3,5441	65,3538	101,4614	66,9722	0,5239	2,4130	2,4172	
UM	$60 \times 68r$	10^5	3,857	84,587	136,877	-88,567	0,53	2,742	2,765	
VT	64×64		3,8780	85,5803	137,1660	88,7874	0,5294	2,7610	2,7614	
CU	$64 \times 64r$		3,8800	84,6000	137,2000	88,8000	0,5294	2,7652	2,7742	
CHEOPS	64×128		3,8498	83,5057	135,8279	87,6282	0,5302	2,7604	2,7702	
UM ^a	$60 \times 68r$	$2 \cdot 10^5$	4,84	103,194	147,369	-25,531	0,523	3,714	3,785	
VT	64×64		4,0780	100,9249	171,5152	105,6082	0,5340	2,9982	2,9992	
CU	$64 \times 64r$		4,0700	99,0000	171,6000	105,7000	0,5339	3,0054	3,0235	
CHEOPS	64×128		4,0336	97,0902	168,5287	103,1912	0,5352	2,9869	3,0080	
UM ^a	$60 \times 68r$	$5 \cdot 10^5$	6,103	156,946	225,07	0,161	0,523	4,993	5,14	
VT ^a	64×64		6,1681	161,7634	226,4310	0,0000	0,5245	5,0752	5,0777	
CU ^a	$64 \times 64r$		6,1400	157,9000	226,3000	143,6000	0,5242	5,0842	5,1340	
CHEOPS ^a	64×128		6,1262	155,9104	224,6596	-0,0018	0,5251	5,0963	5,1597	
UM ^a	$60 \times 68r$	10^6	6,994	202,086	320,782	-0,083	0,524	5,902	6,144	
VT	64×64		État final instationnaire							
CU	$64 \times 64r$		État final instationnaire							
CHEOPS	64×128	État final instationnaire								

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

Les quantités indiquées dans le tableau 3.3 sont les mêmes que celles présentées plus haut (tab. 3.2), auxquelles sont adjointes les moyennes globales du chauffage adiabatique, $|\langle \tilde{H}_{\text{ad}} \rangle|$ (la moyenne $\langle \tilde{H}_{\text{ad}} \rangle$ est négative) et de la dissipation visqueuse, $\langle \tilde{H}_{\text{vis}} \rangle$. L’accord visible est largement raisonnable, en particulier à faible nombre de RAYLEIGH. Comme dans les cas précédents, ainsi que dans ceux présentés dans l’annexe B, les variations observées par rapport aux valeurs moyennes fournies par le *benchmark* de King *et al.* (2010) sont en bon accord avec la variabilité de ces données elles-mêmes au sein du *benchmark*. Un examen attentif des valeurs de chauffage, qui doivent être, on l’a vu, idéalement identiques deux à deux, permet de juger de la conservation globale de l’énergie dans les différents codes. Ainsi, grâce à ce seul critère – certes restrictif – nous voyons que la performance obtenue par l’outil est comparable à celle réalisée avec le code de Leng et Zhong (2008), dénommé « CU » dans le tableau (CitCom). Elle semble meilleure que celle obtenue par Peter van Keken (« UM ») mais nettement moins bonne que la conservation de l’énergie à laquelle parviennent Scott King et ses collègues (« VT » ; Conman) qui, il faut bien l’avouer, remportent haut la main le titre de rigueur énergétique du code. Par exemple, dans le cas $\text{Ra} = 10^5$, les valeurs moyennes du chauffage adiabatique et de la dissipation visqueuse diffèrent de 0,84 % (UM), 0,33 % (CU), 0,36 % (CHEOPS-2D) et 0,01 % (VT). Ces faibles écarts sont réellement rendus possibles par l’utilisation de l’approximation anélastique-liquide *non tronquée*. En effet, dans exactement le même cas mais en version tronquée (TALA ; cf. tab. B.6), cinq des six codes du *benchmark* de King *et al.* (2010) donnent un écart supérieur à 1 voire à 2 % (1,91 % pour CHEOPS-2D). Le gain ainsi apporté par le passage du mode TALA au mode ALA se confirme dans les autres cas testés (cf. annexe B).

Pour terminer, il est instructif de visualiser le type de solution obtenue pour les cas du tableau 3.3. La figure 3.18 présente ainsi, de la même manière que précédemment, la simulation pour $\text{Ra} = 10^4$ référencée dans ce tableau. Elle constitue exactement le prolongement du cas (incompressible) 1a du *benchmark* de Blankenbach *et al.* (1989). Ainsi, le lecteur est encouragé à comparer ces résultats avec ceux visibles à la colonne de gauche de la figure 3.13. Les profils de la figure 3.19 résument, eux, les cas pour $\text{Ra} = 10^5$ et $\text{Di} = 0,5$ ou 1. Ils peuvent être examinés conjointement – et prudemment (différents Ra) – avec les profils présentés à la figure 3.14.

Le premier effet notable impliqué par la compressibilité (ALA) sur la convection est une diminution de la vigueur de l’écoulement, marquée notamment par des panaches thermiques bien moins développés (voir aussi la carte des contraintes, qui sont de plus faible amplitude, par rapport au cas BA correspondant). La température présente, en outre, une certaine augmentation globale avec la profondeur (gradient adiabatique, ici isentropique, car la composition est homogène), par définition nulle dans le cas BA ; son importance est d’autant plus marquée que le nombre de dissipation est élevé (fig. 3.19a). Une certaine conduction thermique a donc lieu « le long »

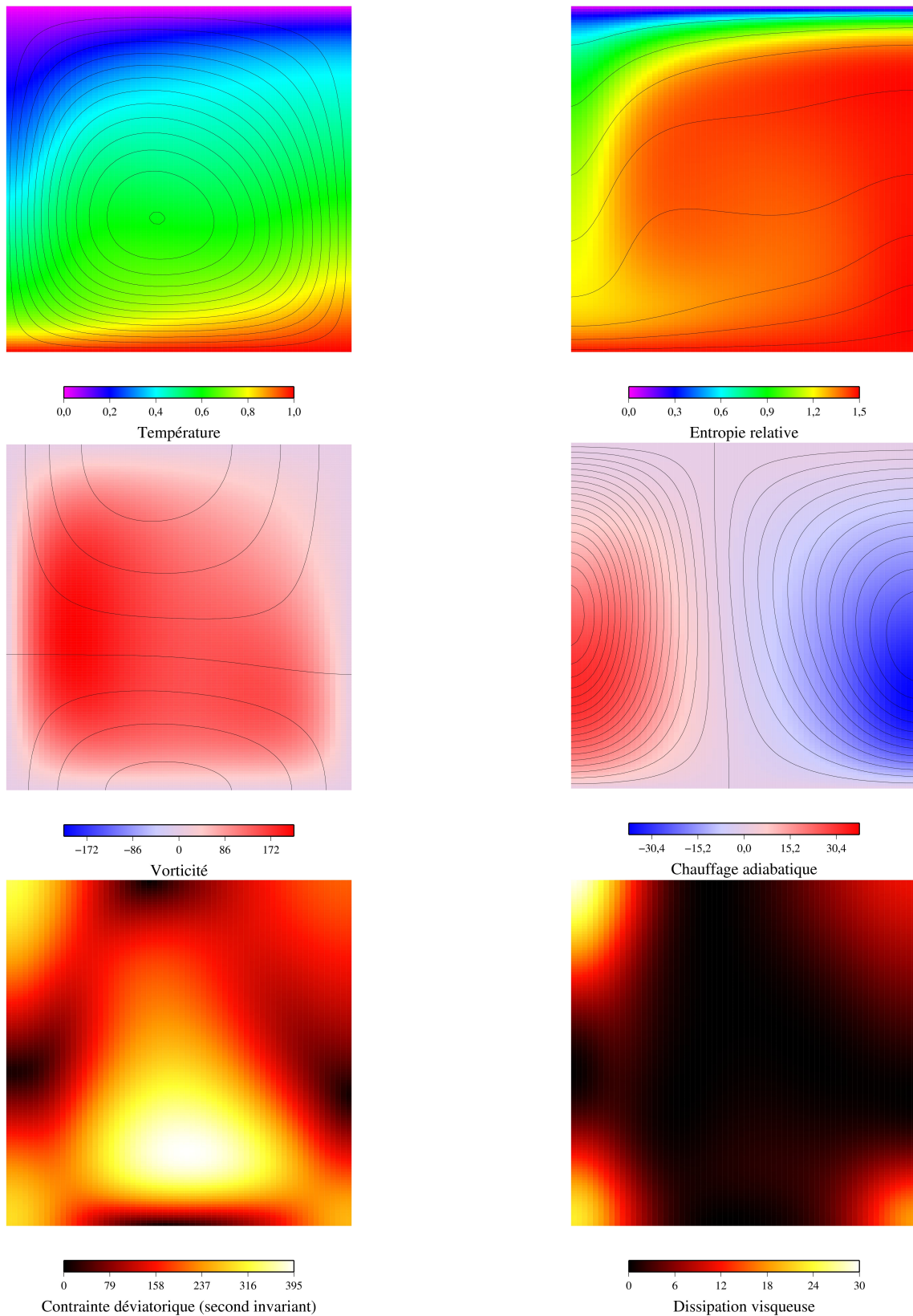


FIGURE 3.18 – Exemple de champs pour le cas $Ra = 10^4$, $Di = 1$ (ALA) du benchmark de [King et al. \(2010\)](#). Les isolignes correspondent aux grandeurs suivantes (de gauche à droite puis de haut en bas) : $\tilde{\psi}$ (contour : 0,5), $\tilde{T} - \tilde{T}$ (cont. 0,1), \tilde{V}_θ (cont. 10) et $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}$ (cont. 5); $T_0 := T_{surf}/\Delta T = 273/3000 = 0,091$. $f = 0,9999$, $n_r = 128$, $n_\theta = 64$, $d = 1$, $R_A = 1$.

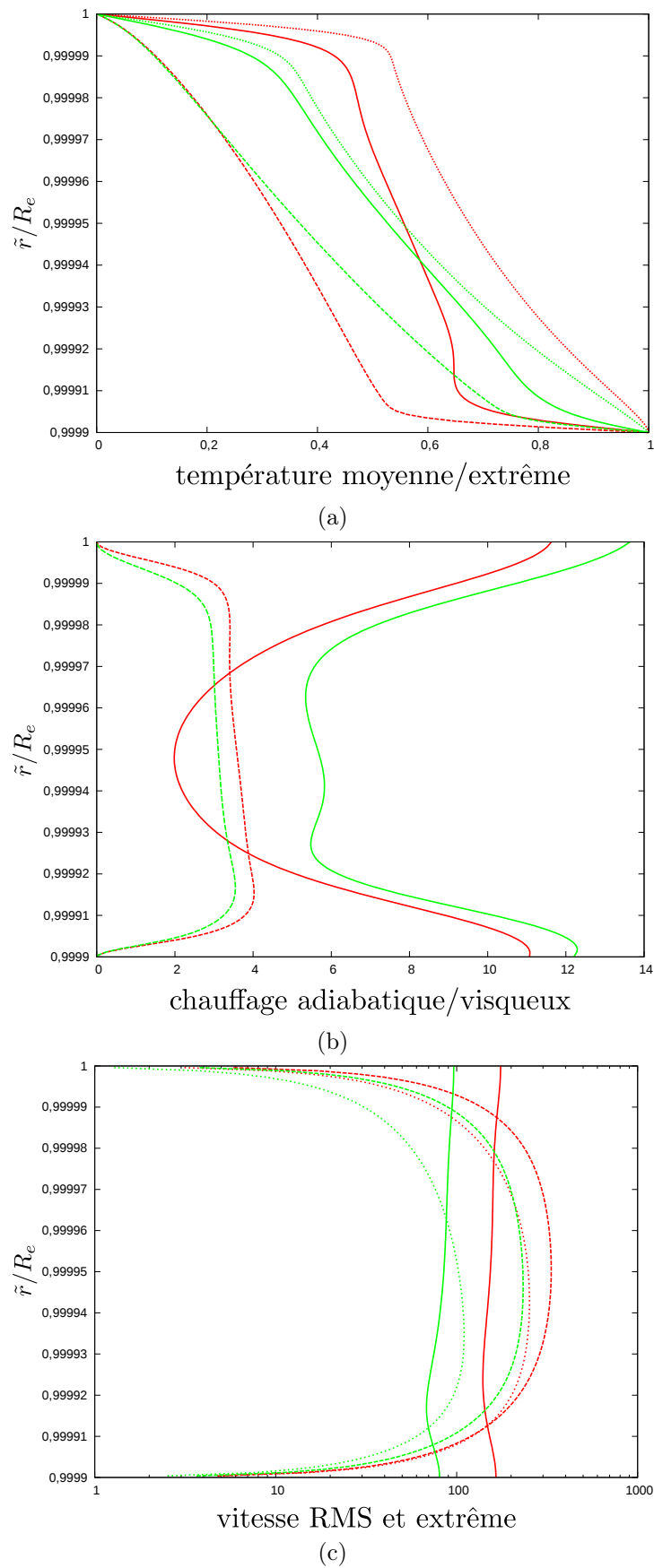


FIGURE 3.19 – Exemple de profils moyens pour le cas $Ra = 10^5$ (ALA) du benchmark de King et al. (2010) [en rouge, $Di = 0,5$, en vert, $Di = 1$]. Même signification des différents types de traits qu'à la figure 3.14; pour (b), le « chauffage » adiabatique ($-\tilde{H}_{ad}$) est représenté en tiretés. Voir figure 3.18 pour les divers paramètres.

de ce profil adiabatique, en plus de celle qui a lieu au sein des couches limites thermiques. Cette dernière est cependant la plus marquée. Or, la diffusion thermique est responsable d'une certaine dissipation (thermique) d'énergie et est, par conséquent, génératrice d'entropie [cf. chap. 1, p. ex. éq. (1.104) et (1.105)]. Cette diffusion est très importante dans les couches limites thermiques. Ce fait est clairement visible dans la carte d'entropie (cf. annexe A.2) de la figure 3.18 : cette grandeur y est représentée en différence par rapport à la valeur au sommet isentropique et croît de manière importante dans la couche limite thermique froide. Il faut noter ici que l'entropie, en convection anélastique, est réellement l'analogie de la température en approximation de BOUSSINESQ (cf. fig. 3.13).

L'autre caractéristique importante impliquée par la compressibilité est la dissymétrie apportée. En effet, les cartes de chauffage/refroidissement adiabatique et de dissipation visqueuse nous montrent deux phénomènes antagonistes. En effet, le panache chaud est affecté par deux sources de chauffage en compétition, toutes deux liées à son écoulement, mais localisées dans des zones différentes : la dissipation visqueuse, qui vient réchauffer son sommet et sa base (ici les coins du domaine géométrique) – car c'est à ces endroits qu'on rencontre de forts gradients de vitesse – et le refroidissement par décompression adiabatique, qui a lieu en son cœur, où les vitesses ascensionnelles sont importantes. Il faut noter, au passage, la corrélation naturelle observée entre les cartes de chauffage/refroidissement adiabatique et celles de la divergence de la vitesse ($\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}} > 0$ au sein du panache montant). Le panache froid est, au contraire, « réchauffé de toutes parts » (chauffage visqueux et compression adiabatique). Le résultat de tout ceci est un panache « froid » qui perd de son ampleur, au profit de celle du panache « chaud » (cf. carte d'entropie). La perte de chaleur de celui-ci est donc prédominante (voir carte) et le bilan est un chauffage adiabatique moyen²⁰ négatif (refroidissement), qui vient compenser exactement – en théorie – le chauffage visqueux à l'échelle globale (c.-à-d. valeurs moyennes sur le domaine). Ceci peut aussi se voir de la manière suivante, équivalente : l'anomalie thermique advectée depuis la base (panache chaud) est plus importante, en valeur absolue, que celle qui est advectée depuis la surface. Or, le chauffage adiabatique [3^e terme du second membre de l'équation (1.123)] est lié au déplacement de long de l'*adiabat* et est donc proportionnel à la température ; d'où le refroidissement du panache chaud plus important que le chauffage du panache froid. Dans le cas présenté, la conservation de la masse à un rayon donné peut être « sentie » en comparant la carte représentant la température et la fonction de courant (fig. 3.18a) : les lignes de vitesse²¹ sont plus resserrées (flux plus important ; cf. courbes de vitesse descendantes, en tiretés sur la figure 3.19c) pour le panache froid qui est plus étroit que le panache chaud. La dissymétrie générale impliquée par la compressibilité est

20. aussi bien pour une moyenne locale (c.-à-d. à un rayon donné) que globale

21. c.-à-d. les trajectoires des particules, puisqu'on est à l'état stationnaire (en outre, $\text{Pr} \rightarrow \infty$)

particulièrement visible lorsque l’on compare les cartes de vorticité et surtout de contrainte des figures 3.18 et 3.13. Elle s’accroît lorsque le nombre de dissipation augmente (fig. 3.19c).

3.3.2 *Benchmarks* partiels en géométrie annulaire

Comme nous l’avons mentionné au début de cette section, les *benchmarks* au sens propre n’ont pu être réalisés complètement que dans le cadre cartésien. En géométrie annulaire, nous commencerons par examiner brièvement le cas cylindrique, dont une exploration systématique a été débutée dans les approximations BA, EBA et TALA, en collaboration avec Nicola Tosi. Nous nous attarderons ensuite un peu plus pour examiner des cas dans la géométrie qui nous intéresse le plus dans CHEOPS-2D : l’anneau sphérique.

Géométrie d’anneau cylindrique ($d = 1$)

Les cas cylindriques examinés sont les quelques exemples de Jarvis (1993), non présentés ici (BA, fraction d’anneau pour diverses valeurs de f) et un certain nombre de cas choisis dans le même esprit que ceux de King *et al.* (2010), mais pour un anneau complet. Ce type de domaine, plus étendu, suggère notamment le test de différents types de solutions initiales. Les tableaux 3.4 à 3.7 présentent ainsi les résultats préliminaires d’une étude menée en collaboration avec Nicola Tosi (DLR, Berlin). Ils comparent divers résultats additionnels par rapport à ceux présents dans la *benchmark* cartésien : la comparaison des nombres de NUSSELT en surface *et* à la base (ceux-ci doivent être égaux en théorie, du moins leur moyenne temporelle pour des cas instationnaires) et les moyennes RMS des composantes \tilde{V}_r et \tilde{V}_θ . Notons en outre que, pour le cas en approximation de BOUSSINESQ (tab. 3.4), les valeurs moyennes du chauffage adiabatique et de la dissipation visqueuse – bien que ces sources/puits de chaleur n’interviennent pas dans les équations – sont tout de même examinées en tant que quantités diagnostiques. Notons que deux cas en mode ALA ont été ajoutés pour le seul CHEOPS-2D. Ils permettent de se rendre compte, comme dans les cas cartésiens, du gain en précision sur la conservation de l’énergie qui est apporté par l’inclusion de la pression dynamique dans la flottabilité (cf. le cas $Ra = 10^4$ -Di = 1,25 dans les tableaux 3.6 et 3.7 : l’écart entre $|\langle \tilde{H}_{ad} \rangle|$ et $\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$ passe de 6,55 à 1,35 %). Le code GAIA – dont la version cylindrique a été utilisée pour cette étude – ne permet pas, pour l’instant, d’accéder au mode ALA.

L'examen des différents cas montre que, dans l'ensemble, les résultats sont en bon accord, ce qui est encourageant pour la suite de l'étude et nous met raisonnablement en confiance pour les cas compressibles en géométrie annulaire en général. Le mode de degré 4 a été trouvé particulièrement stable en géométrie annulaire ($f = 0,55$) au cours des différentes investigations avec CHEOPS-2D comme avec GAIA ; d'où l'initialisation choisie couramment à ce mode, afin d'accélérer la convergence vers la solution dans cette première étape de test.

Notons enfin qu'une comparaison instructive porte sur la température moyenne. En effet, en géométrie d'anneau cylindrique (BA), [Jarvis \(1993\)](#) a proposé, via une analyse de couche limite thermique, la relation²² suivante pour la température moyenne :

$$\langle \tilde{T}' \rangle (d = 1) = \frac{1}{1 + f^{-3/4}}, \quad (3.21)$$

soit $\langle \tilde{T}' \rangle = 0,3897$ pour notre cas-test à $f = 0,55$. Il est remarquable de constater que les valeurs présentées dans le tableau 3.4 s'écartent seulement de 1,5 à 2,1 % de celles déterminées grâce à la formule théorique (3.21). Ceci montre que cette loi d'échelle simple reste valable, même à nombre de RAYLEIGH modéré.

22. On doit tendre vers cette solution à fort nombre de RAYLEIGH...

TABLE 3.4 – Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : approximation de BOUSSINESQ. Résolution de CHEOPS-2D : $n_r = 64$, $n_\theta = 512$ (les cas « * » correspondent à une résolution azimutale 2 fois moindre). Résolution de GAIA : $n_r \approx 60$ [maillage destructuré, méthode en volumes finis, Hütting et Stemmer (2008a,b)]. Cas isovisqueux ; les solutions initiales sont soit purement conductives, soit « convectives » [CLT : 2 couches limites thermiques artificielles (fonction erreur) d'épaisseur $0, 2(R_e - R_i)$ et intérieur isotherme ($\tilde{T} \equiv 0, 5$)]. Elles sont perturbées aléatoirement ou bien par un certain mode de degré ℓ . Noter que certaines simulations repartent d'une solution stationnaire à Ra plus faible. $f = 0, 55$, $\Delta\theta = 2\pi$ ($d = 1$), bords libres (retrait de la rotation moyenne).

Code	Ra	État initial	État final	$\langle \tilde{T} \rangle$	$Nu(R_i)$	$Nu(R_e)$	\tilde{V}_r^{RMS}	\tilde{V}_θ^{RMS}	\tilde{V}^{RMS}	\tilde{v}_{max}^{surf}	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $	$\langle \tilde{H}_{ois} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{ois} \rangle / Ra$
CHEOPS-2D*	10^4	CLT + $\ell = 4$	4	0,3814	4,7078	4,7045	28,1124	36,7242	46,2490	72,4595	3,6342	3,6278	3,6278
CHEOPS-2D	10^4	CLT + $\ell = 4$	4	0,3818	4,6983	4,6962	28,0844	36,7312	46,2376	72,4696	3,6252	3,6233	3,6233
GAIA	10^4	CLT + $\ell = 4$	4	0,3823	4,6639	4,7120	28,0992	36,7611	46,2703	72,5559	3,6222	3,6202	3,6202
CHEOPS-2D*	10^4	CLT + aléatoire	5	0,3823	4,7127	4,7145	29,2113	31,6351	43,0590	69,6954	3,6403	3,6341	3,6341
CHEOPS-2D	10^4	CLT + aléatoire	5	0,3827	4,7120	4,7145	29,3031	31,5688	43,0728	68,4263	3,6397	3,6380	3,6380
GAIA	10^4	CLT + aléatoire	5	0,3829	4,6686	4,7167	29,1987	31,6142	43,0351	69,5427	3,6263	3,6210	3,6210
CHEOPS-2D*	10^4	conductif + $\ell = 4$	4	0,3814	4,7078	4,7045	28,1124	36,7242	46,2490	72,4594	3,6342	3,6278	3,6278
CHEOPS-2D	10^4	conductif + $\ell = 4$	4	0,3818	4,6983	4,6962	28,0844	36,7312	46,2376	72,4696	3,6252	3,6233	3,6233
CHEOPS-2D*	10^4	conductif + aléatoire	5	0,3823	4,7245	4,7249	29,3435	31,5666	43,0986	68,6519	3,6515	3,6452	3,6452
CHEOPS-2D	10^4	conductif + aléatoire	5	0,3827	4,7124	4,7148	29,3071	31,5670	43,0741	68,4118	3,6401	3,6383	3,6383
CHEOPS-2D*	10^5	Ra= 10^4 ($\ell = 4$)	4	0,3829	9,5499	9,5301	123,1321	148,5922	192,9796	274,6093	8,3237	8,2309	8,2309
CHEOPS-2D	10^5	Ra= 10^4 ($\ell = 4$)	4	0,3814	9,5555	9,5351	123,0843	148,6124	192,9647	274,6720	8,3301	8,3048	8,3048
GAIA	10^5	CLT + $\ell = 4$	4	0,3825	9,3759	9,5085	122,6398	147,9110	192,1410	273,3396	8,2868	8,2264	8,2264
CHEOPS-2D*	10^6	Ra= 10^5 ($\ell = 4$)	4	0,3957	18,7917	18,5532	515,2755	596,9522	788,5825	1241,7506	17,1066	16,5301	16,5301
cas oscillant : amplitude des variations (crête à crête).				(0,0003)	(0,7598)	(1,0791)	(37,1754)	(46,3496)	59,3586	(283,6309)	(2,2228)	(2,1663)	(2,1663)

TABLE 3.5 – *Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : approximation de BOUSSINESQ étendue. Mêmes paramètres et notations qu'au tableau 3.4 ; $T_0 = 0.091$. Les amplitudes d'oscillation indiquées ($Ra = 10^6$) correspondent en fait aux maxima des variations (les variations crête à crête effectives sont plus faibles).*

Code	Ra	Di	État initial	État final	$\langle \tilde{T} \rangle$	$Nu(R_i)$	$Nu(R_e)$	\bar{V}_r	\bar{V}_θ	\bar{V}_{RMS}	\bar{V}_{RMS}	\bar{V}_{surf} \bar{V}_{max}	$ \langle \bar{H}_{ad} \rangle $	$ \langle \bar{H}_{vis} \rangle $
CHEOPS-2D	10^4	0,5	BA, Ra= 10^4 ($\ell=4$)	4	0,3806	3,4409	3,4387	23,0159	30,3192	38,0656	59,9299	1,1966	1,1962	
CHEOPS-2D	10^4	0,5	CLT + $\ell = 4$	4	0,3806	3,4409	3,4387	23,0160	30,3193	38,0656	59,9303	1,1966	1,1962	
GAIA	10^4	0,5	CLT + $\ell = 4$	4	0,3809	3,4139	3,4487	22,9975	30,3007	38,0399	59,9257	1,1921	1,1925	
CHEOPS-2D	10^4	1,25	BA, Ra= 10^4 ($\ell=4$)	4	0,3745	1,8755	1,8744	14,0249	18,7395	23,4065	37,8381	1,0781	1,0779	
CHEOPS-2D	10^4	1,25	CLT + $\ell = 4$	4	0,3745	1,8755	1,8744	14,0249	18,7395	23,4065	37,8379	1,0781	1,0779	
GAIA	10^4	1,25	CLT + $\ell = 4$	4	0,3747	1,8600	1,8791	13,9864	18,6878	23,3421	37,7629	1,0701	1,0701	
CHEOPS-2D	10^5	0,5	BA, Ra= 10^5 ($\ell=4$)	4	0,4069	6,6047	6,5840	100,1714	119,1853	155,6902	228,8643	2,7410	2,7340	
GAIA	10^5	0,5	BA, Ra= 10^5 ($\ell=4$)	4	0,4063	6,5176	6,5769	99,5212	118,5924	154,8181	228,0249	2,6893	2,6970	
CHEOPS-2D	10^5	1,25	BA, Ra= 10^5 ($\ell=4$)	4	0,3930	3,0068	2,9899	61,0413	71,6013	94,0893	143,6696	2,4724	2,4679	
CHEOPS-2D	10^6	0,5	EBA, Ra= 10^5 , Di=0,5	5	0,4154	11,4462	11,3699	354,0798	381,7129	521,4683	1193,2403	5,1669	5,1199	
			cas oscillant (amplitude)		(0,0148)	(4,7174)	(3,6311)	(254,2153)	(324,1488)	(373,2285)	(1359,1173)	(4,9808)	(4,9808)	
CHEOPS-2D	10^6	1,25	EBA, Ra= 10^5 , Di=1,25	9-12	0,3920	5,0589	4,9630	202,0448	165,5769	261,6773	622,0906	5,1574	5,1038	
			cas oscillant (amplitude)		(0,0095)	(1,8012)	(1,1064)	(170,5383)	(200,3716)	(225,5010)	(1039,2797)	(5,3885)	(5,3666)	

TABLE 3.6 – Comparaison préliminaire des résultats de CHEOPS-2D avec ceux du code GAIA (2D), en géométrie cylindrique : approximation anélastique-liquide tronquée. Mêmes paramètres qu'aux tableaux 3.4 et 3.5. État de référence correspondant à l'équation d'ADAMS-Williamson avec propriétés constantes, comme dans l'étude de King *et al.* (2010) et dans cette thèse.

Code	Ra	Di	État initial	État final	$\langle \tilde{T} \rangle$	$Nu(R_i)$	$Nu(R_e)$	\tilde{V}_r^{RMS}	\tilde{V}_θ^{RMS}	\tilde{V}^{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$ \langle \tilde{H}_{ed} \rangle $	$ \langle \tilde{H}_{vis} \rangle $
CHEOPS-2D	10^4	0.5	EBA, Ra= 10^4 ($\ell = 4$), Di=0,5	4	0,4191	4,0015	4,0167	24,7993	33,2907	41,5124	67,8669	1,4323	1,4468
GAIA	10^4	0.5	CLT + $\ell = 4$	4	0,4194	3,9619	4,0266	24,7421	33,2175	41,4196	67,7477	1,4480	1,4249
CHEOPS-2D	10^4	1,25	EBA, Ra= 10^4 ($\ell = 4$), Di=1,25	4	0,4190	2,1512	2,2453	14,7613	21,2823	25,9004	46,1128	1,2722	1,3614
GAIA	10^4	1,25	EBA, Ra= 10^4 ($\ell = 4$), Di=1,25	4	0,4213	2,0836	2,2573	14,6120	21,0886	25,6561	45,8652	1,3852	1,2379
CHEOPS-2D	10^4	1,25	CLT + $\ell = 4$	4	0,4190	2,1512	2,2453	14,7613	21,2823	25,9005	46,1122	1,2722	1,3614
GAIA	10^4	1,25	CLT + $\ell = 4$	8	0,4100	1,9937	2,0941	13,0776	12,3895	18,0146	32,4615	1,2113	1,1281
CHEOPS-2D	10^5	0.5	EBA, Ra= 10^5 ($\ell = 4$), Di=0,5	4	0,4539	7,3781	7,3970	102,5009	121,9112	159,2758	254,9592	3,0696	3,0846

TABLE 3.7 – Exemple de résultats de CHEOPS-2D en géométrie cylindrique : approx. anélastique-liquide ($\langle \tilde{p}'_{surf} \rangle = 0$).

Code	Ra	Di	État initial	État final	$\langle \tilde{T} \rangle$	$Nu(R_i)$	$Nu(R_e)$	\tilde{V}_r^{RMS}	\tilde{V}_θ^{RMS}	\tilde{V}^{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$ \langle \tilde{H}_{ed} \rangle $	$ \langle \tilde{H}_{vis} \rangle $
CHEOPS-2D	10^4	1,25	TALA, Ra= 10^4 ($\ell = 4$), Di=1,25	4	0,4204	2,1394	2,1243	13,8559	19,6381	24,0341	41,0198	1,2522	1,2355
CHEOPS-2D	10^5	1,25	ALA, Ra= 10^4 ($\ell = 4$), Di=1,25	6	0,4324	3,4258	3,3671	54,5223	48,8014	73,1728	120,7262	2,8083	2,7374

Les figures 3.20 et 3.21 illustrent deux des cas du *benchmark* présenté ci-dessus, à travers des cartes de champ de température, d'entropie relative [écart par rapport à la valeur en surface (isentropique)], de chauffage/refroidissement adiabatique, de vitesse azimutale, de dissipation visqueuse et de contrainte visqueuse effective (second invariant), pour un nombre de RAYLEIGH de 10^4 .

L'effet de l'augmentation du nombre de dissipation montre ainsi la diminution de la vigueur de la convection, qui se marque, par exemple, par une importance moindre des panaches thermiques (cf. isolignes de température, fig. 3.20a). Un effet intéressant est également (voir cas à $Di = 0,5$) le renforcement de la dissymétrie entre les valeurs et la morphologie des champs de chauffage et de refroidissement adiabatique par rapport au cas cartésien. Il s'agit d'un effet de la géométrie curviligne, sur lequel nous reviendrons dans la sous-section suivante : la surface inférieure (bord Γ_i) est f^{-d} fois plus petite que son homologue supérieure. À l'équilibre thermique, l'égalité des puissances sur ces surfaces implique donc un flux de chaleur plus important à la base de la couche convective qu'au sommet, qui se manifeste ici par un saut de température plus fort dans la couche limite thermique chaude ; ceci est associé à une température moyenne plus faible dans le milieu (c.-à-d. largement inférieure à 0,5 dans le cas BA). Il en ressort des panaches chauds plus fins et rapides (\tilde{V}_r) que les panaches froids, qui sont plus amples ; on a ainsi toujours un flux de masse moyen nul, à un rayon donné. Cette dissymétrie, propre aux géométries curvilignes, est évidemment renforcée dans le cas sphérique ($d = 2$ ou 3D) : elle vient accentuer celle qui a déjà lieu dans le cas cartésien (cf. p. 194) due à l'augmentation du gradient adiabatique avec la température. La figure 3.20c montre ainsi, au niveau des structures montantes, d'étroites zones pourvues d'un refroidissement adiabatique très intense par rapport au réchauffement des zones descendantes, plus diffus.

Entre les figures 3.20c et 3.20d, l'augmentation du nombre de dissipation diminue la vigueur de la convection thermique et augmente la contribution adiabatique (proportionnelle à Di) : les valeurs du profil de température adiabatique sont plus élevées et les écarts de température \tilde{T}' par rapport à ce profil sont plus faibles [cf. condition (2.99)], ce qui rend la convection moins intense ; le nombre de RAYLEIGH effectif pour la convection, calculé à partir de l'écart de température super-adiabatique $\Delta\tilde{T}_{sa} = \Delta T - \Delta\tilde{T}$, est donc plus faible (c.-à-d. proche de sa valeur critique). La dissymétrie est ainsi moins accentuée entre chauffage et refroidissement adiabatique.

Il est remarquable de constater que, bien que les valeurs de ces champs soient naturellement plus élevées dans le cas à fort nombre de dissipation (le chauffage visqueux est également proportionnel à Di), la morphologie générale du champ de dissipation visqueuse n'est que peu affectée (fig. 3.21a et 3.21b), sauf près de la surface, où une différence existe pour les panaches chauds et froids. Cette similitude se retrouve dans la carte de la contrainte effective (second invariant τ_{II}). En effet, rappelons que la dissipation visqueuse est directement reliée à la contrainte et

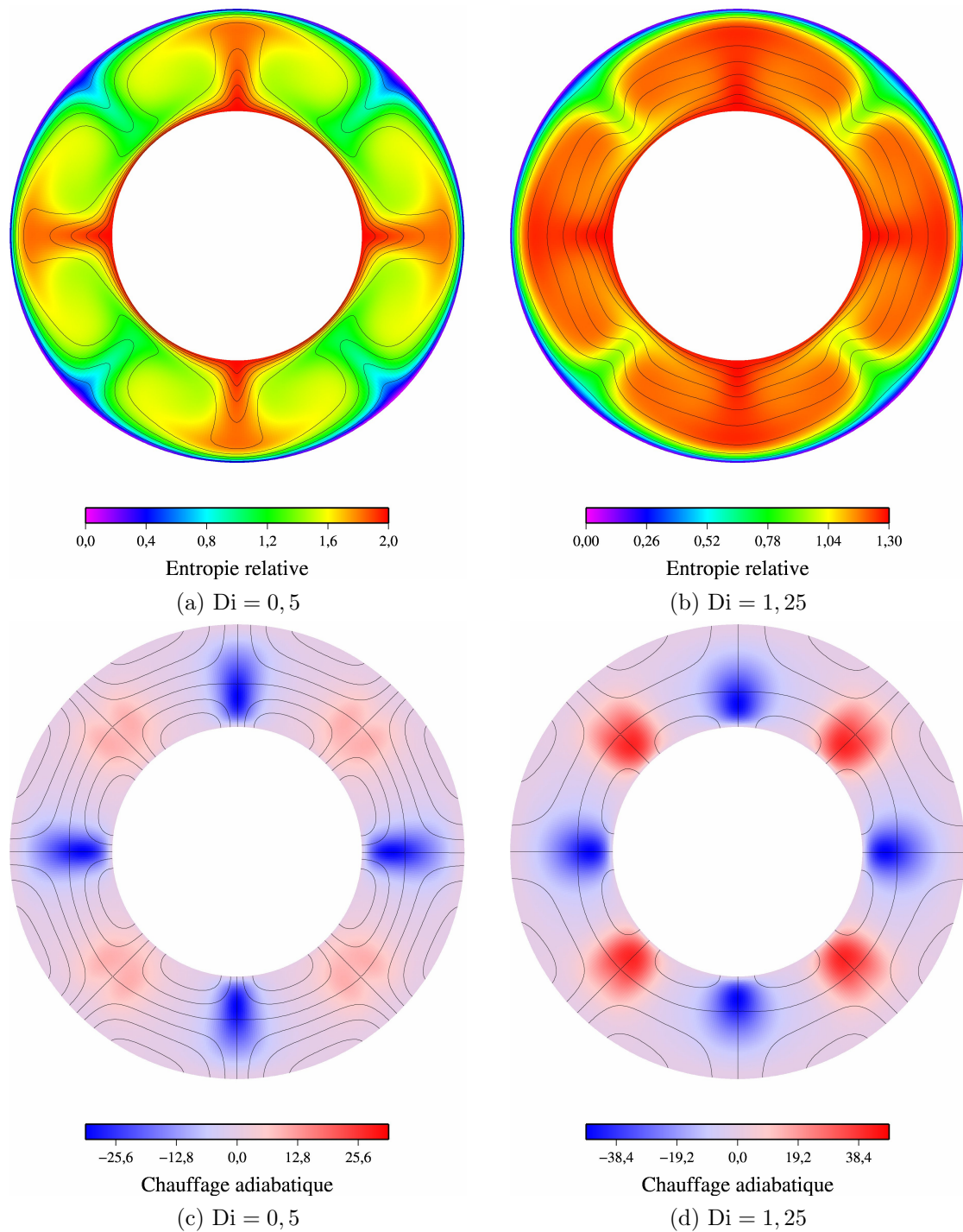


FIGURE 3.20 – Exemple de champs obtenus dans le cas du benchmark en anneau cylindrique (TALA). Les isolignes représentent la température [contour à 0,1; (a) et (b)] et la composante \tilde{V}_θ [cont. à 20; (c) et (d)]. $Ra = 10^4$, $T_0 = 0,091$; bords libres; $f = 0,55$, $n_r = 64$, $n_\theta = 512$, $d = 1$.

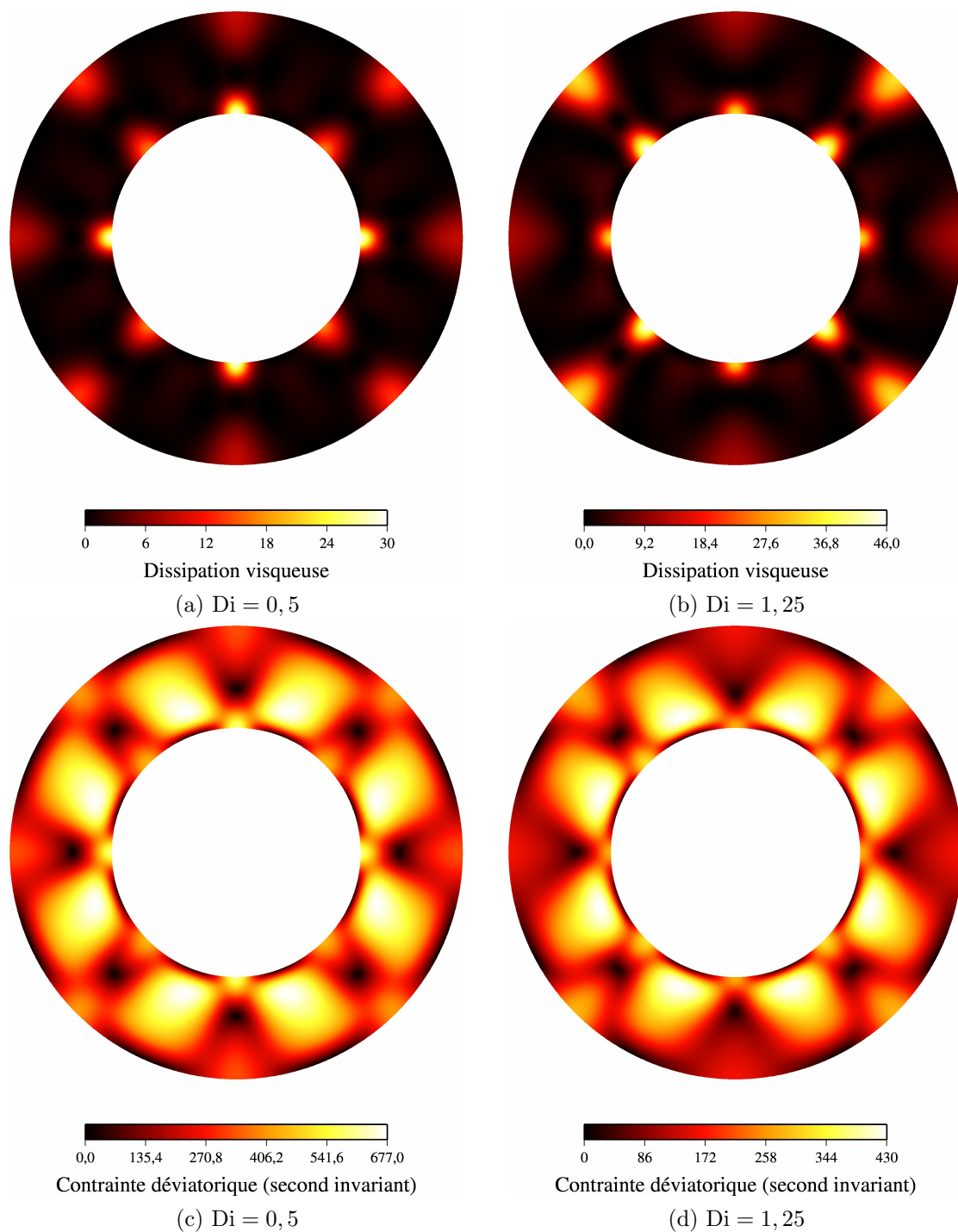


FIGURE 3.21 – *Champs de chauffage et de contraintes visqueux obtenus dans le cas du benchmark en anneau cylindrique. Mêmes paramètres qu'à la figure 3.20.*

s’exprime par le produit $\tilde{\tau} : \tilde{\nabla}\tilde{V}$ [éq. (1.113)]. En raison de l’écoulement nettement moins vigoureux pour le cas $Di = 1,25$ que pour celui à $Di = 0,5$, les valeurs des contraintes associées sont plus faibles.

Géométrie d’anneau sphérique ($d = 2$)

Terminons ce chapitre en présentant quelques résultats obtenus en géométrie d’anneau sphérique. Nous insistons ici sur le fait que cette configuration n’a malheureusement pu être testée que partiellement, puisque les seules données disponibles à l’heure actuelle sont celles de l’article de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) – fondateur de cette géométrie – dans le cas de l’approximation de BOUSSINESQ. En outre, ces valeurs ne sont fournies qu’à titre indicatif, dans l’optique d’une comparaison de résultats entre les différents cas curvilignes 2D et une référence 3D sphérique, au moyen d’un même code (StagYY) ; il ne s’agit donc pas d’un *benchmark* et la comparaison quantitative des résultats de CHEOPS-2D, sur laquelle nous ne nous attarderons que peu dans cette partie, doit être menée avec prudence.

L’étude de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) définit quatre cas de référence : deux pour un fluide isovisqueux, avec ou sans chauffage interne uniforme et deux autres pour un fluide avec une variation importante de viscosité ($\Delta\eta = 10^6$), également avec ou sans source de chaleur. Les simulations présentées par ces auteurs ont été menées pour diverses valeurs du nombre de RAYLEIGH et en bords libres (retrait de la rotation explicité plus haut, cf. 3.1.3) et pour une résolution $(n_r, n_\theta) = (32, 256)$ ou $(64, 512)$. En outre, le maillage a été raffiné deux fois dans les couches limites thermiques (Tackley, communication personnelle). Afin d’obtenir une comparaison la plus cohérente possible, ces mêmes conditions ont été appliquées dans les simulations menées avec CHEOPS-2D.

La figure 3.22 présente un exemple-clé de comparaison des résultats obtenus avec ceux de deux simulations de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). Pour un fluide isovisqueux de convection de RAYLEIGH-BÉNARD, un exemple de cas stationnaire ($Ra = 10^4$) et un autre pour un équilibre statistiquement stationnaire ($Ra = 10^5$) sont présentés, à travers la convergence (temporelle) du nombre de NUSSELT et de la vitesse RMS vers les valeurs correspondantes de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#).

Dans cet exemple, nous constatons la bonne correspondance entre les résultats de CHEOPS-2D et ceux de StagYY pour un faible nombre de RAYLEIGH. Pour le cas $Ra = 10^5$, les données sont en bon accord, mais cependant moins similaires que dans un cas stationnaire. L’utilisation du même raffinement de maillage (courbes vertes) que celui choisi par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) permet de se rapprocher au mieux des valeurs de ces auteurs (fig. 3.22a), confirmant au passage la validité et l’utilité de cette souplesse géométrique implémentée dans CHEOPS-2D. Malgré cela, si les valeurs moyennes \tilde{V}_{RMS} et surtout Nu semblent en bon accord, l’amplitude des

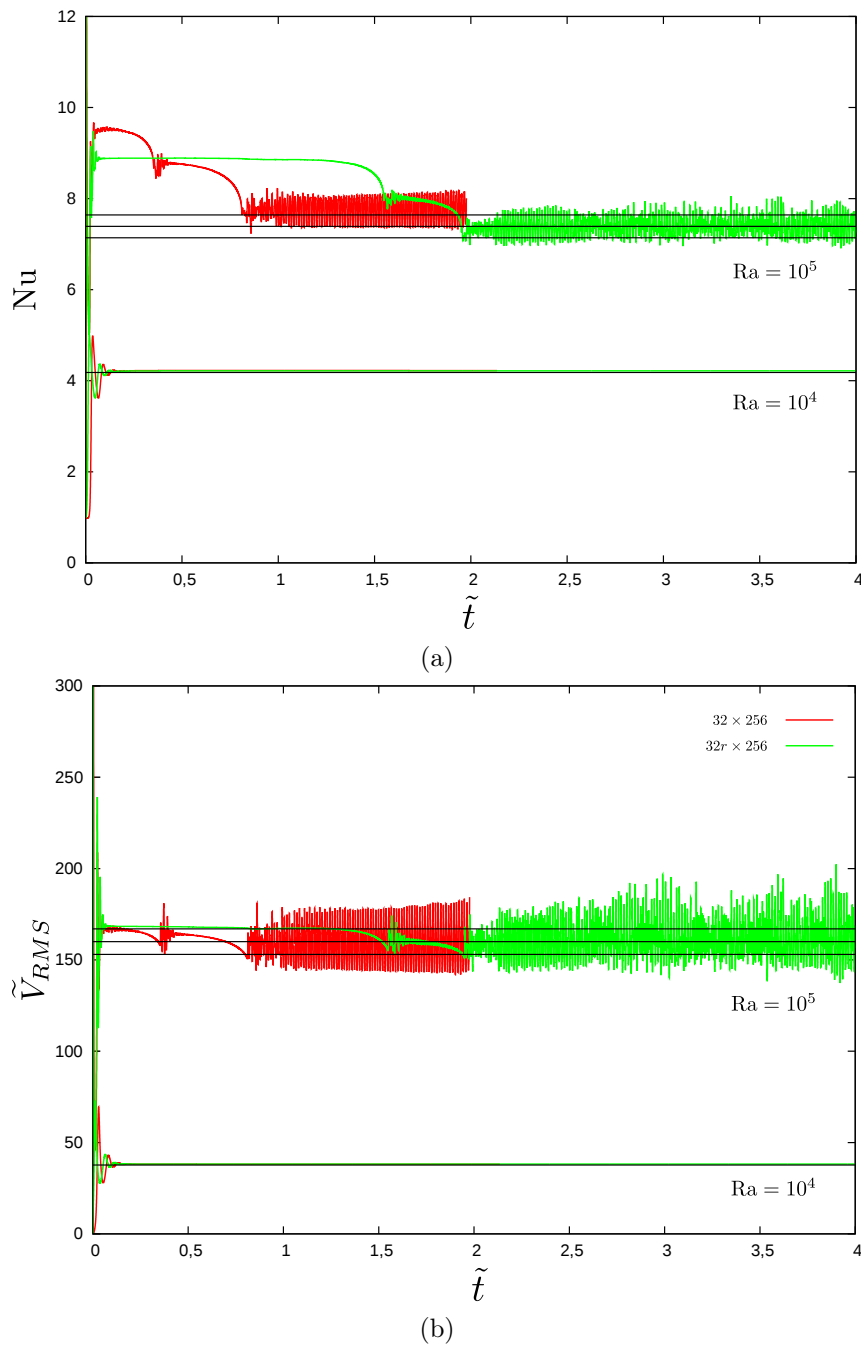


FIGURE 3.22 – Exemple de comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie d’anneau sphérique avec ceux de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), pour un fluide isovisqueux. Évolution temporelle du nombre de NUSSELT (a) et de la vitesse RMS (b). En vert, cas à raffinement radial de maillage (2 fois) dans les couches limites thermiques. Simulations en bords libres. Les segments noirs indiquent la valeur ($Ra = 10^4$) ou bien la valeur moyenne et l’intervalle d’oscillation associé ($Ra = 10^5$) tabulés dans l’article de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). Solutions initiales : état thermique conductif, perturbé aléatoirement (cas sans raffinement) ou bien par un degré $\ell = 5$. $f = 0,55$, $n_r = 32$, $n_\theta = 256$, $\Delta\theta = 2\pi$, $d = 2$.

variations obtenues est plus importante dans le cas de CHEOPS-2D. Ceci est particulièrement vrai pour la vitesse RMS. Si les écarts des résultats entre différents codes sont compréhensibles dans un état oscillant entre deux codes indépendants, il n’en reste pas moins qu’une comparaison plus systématique (de type *benchmark*) devra être envisagée à l’avenir afin de comprendre et – pourquoi pas – de réduire au mieux ces écarts. Une partie importante de ceux-ci s’explique probablement par la différence de nature des solveurs mécaniques de CHEOPS-2D et de StagYY (bien que ceux-ci soient conceptuellement proches), mais surtout par le traitement fondamentalement différent de l’advection : CHEOPS-2D est basé sur une méthode à haute résolution alors que StagYY utilise l’algorithme MPDATA (Smolarkiewicz, 1984), qui semble *a priori* plus diffusif, du moins si l’on ne choisit qu’un nombre trop restreint de corrections anti-diffusives. L’éventuelle future étude commune, mentionnée précédemment, devra se pencher sur ces aspects. Par exemple, une méthode particulièrement performante pour approcher une advection sans diffusion numérique est celle introduite par Prather (cf. p. ex. Hourdin et Armengaud, 1999) dans un schéma d’advection à l’ordre 3, ou encore une technique lagrangienne comme l’advection au moyen de traceurs (p. ex. Gerya, 2010, § 10.4).

La figure 3.23 montre quatre exemples de champs de température obtenus en géométrie d’anneau sphérique dans le cadre de la campagne de tests menée pour comparer les résultats de CHEOPS-2D avec ceux publiés par Hernlund et Tackley (2008), dans les cas correspondant à ceux de la figure précédente. Outre la structure globale des panaches thermiques qui diffère sensiblement de celle obtenue en géométrie cylindrique – nous reviendrons sur ce point un peu plus loin – l’examen des figures 3.23a à 3.23c est instructif, tant du point de vue du problème théorique de la convection thermique que de celui de son traitement par le code CHEOPS-2D. En effet, il faut noter la très grande stabilité du mode $\ell = 4$ (c.-à-d. 4 panaches chauds et 4 panaches froids, dans ce cas 2D annulaire) dans la convection observée dans ces cas (également le cas de l’anneau cylindrique, cf. plus haut). L’initiation, pour ces derniers, a été réalisée à partir d’une perturbation (amplitude 0,05) du champ de température en mode 4 ou 5, ou bien d’une perturbation de même amplitude mais pseudo-aléatoire²³. Le mode final observé est cependant toujours celui de degré 4. La figure 3.23c est intéressante en ce sens qu’elle montre que la solution obtenue, orientée arbitrairement par rapport au domaine annulaire, est bien insensible à la frontière virtuelle de ce dernier ; celle-ci est toujours verticale et située en bas (« pôle sud ») dans toutes les figures ($\Delta\theta = 2\pi$) présentées dans ce mémoire. En effet, le domaine annulaire complet est numériquement représenté par un tableau (non-circulaire) dont les bords – frontières Γ_g et Γ_d du domaine – sont raccordés par des conditions aux limites périodiques (cf., p. ex., 2.2.2) ; cette limite azimu-

23. cf. note 19, p. 188

tale, purement numérique, ne doit théoriquement en rien gêner toute quantité qui la franchit.

La figure 3.23a montre l'effet des conditions aux limites mécaniques (bords Γ_i et Γ_e). Elle correspond toujours au même cas ($Ra = 10^4$), mais munie de bords rigides ; il n'y a donc plus lieu ici de corriger le champ de vitesse d'une rotation moyenne. Les murs sans glissement possible que constituent ici les bords du domaine limitent l'étalement latéral des panaches sur ces premiers, par rapport aux cas en bords libres (p. ex. fig. 3.23b) ; les couches limites thermiques sont donc plus épaisses, notamment aux endroits où, en bords libres, celles-ci sont fortement « écrasées » par les panaches. Notons, au passage, que la solution présentée à la figure 3.23a est parfaitement alignée avec l'axe des « pôles » de l'anneau ; ceci s'explique par la perturbation initiale, choisie de degré 4 et alignée sur cet axe (premier panache dessus). Ceci nous amène au fait que, durant les tests effectués, il a été remarqué que, pour le cas simple à $Ra = 10^4$, la solution obtenue par [Hernlund et Tackley \(2008, fig. 3\)](#) était quelque peu différente. En effet ces auteurs déterminent un mode final $\ell = 5$. Or, la simulation correspondant à la figure 3.23b ci-dessus a précisément été initialisée à ce mode de perturbation. L'évolution temporelle observée, au regard des valeurs de [Hernlund et Tackley \(2008, tab. 1\)](#), ajoutée au fait qu'aucun cas stable à $\ell = 5$ n'a été trouvé dans la série de simulations réalisées, suggère que la solution obtenue par ces auteurs n'est pas tout à fait convergée. En effet, la solution de la figure 3.23b, au cours de son histoire, semble tout d'abord converger vers un état de mode $\ell = 5$, avec des valeurs diagnostiques $Nu = 4, 19$ et $\tilde{V}_{RMS} = 38, 1$, très proches de celles déterminées par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) : $Nu = 4, 18$ et $\tilde{V}_{RMS} = 37, 7$. En revanche, après une durée d'environ 5 fois le temps diffusif (c.-à-d. $\Delta\tilde{t} \approx 5$), une fusion de deux panaches s'opère, augmentant ainsi la vitesse RMS (les 4 panaches obtenus sont plus « puissants ») à une valeur finale²⁴ de $\tilde{V}_{RMS} = 40, 6$; le nombre de NUSSELT est, lui, réduit à une valeur de $Nu = 4, 16$.

La géométrie d'anneau sphérique a précisément été créée pour représenter au mieux une géométrie sphérique dans une approche bidimensionnelle (cf. 2.1.3). À ce titre, il est toujours intéressant d'examiner comment la convection obtenue dans cette géométrie se positionne par rapport à celle observée dans les autres géométries (voir aussi la discussion de [Hernlund et Tackley, 2008](#)) : la figure 3.24 montre une comparaison des champs de température et des profils moyens de flux de chaleur associés, pour les trois géométries curvilignes accessibles dans l'outil CHEOPS-2D.

Ainsi, dans le cas cylindrique pur ($d = 1$), la température est globalement plus élevée dans le milieu convectif et les panaches chauds sont plus étendus, par rapport au cas sphérique ($d = 2$; cf. fig. 3.23b) ; l'explication est à rapprocher ici de la notion d'épaisseur virtuelle de l'anneau (cf. p. ex. fig. 2.5) : l'énergie advectée de la base

24. Elle devient alors semblable à celle obtenue par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) dans le cas d'une géométrie sphérique axisymétrique ($\tilde{V}_{RMS} = 41, 0$)...

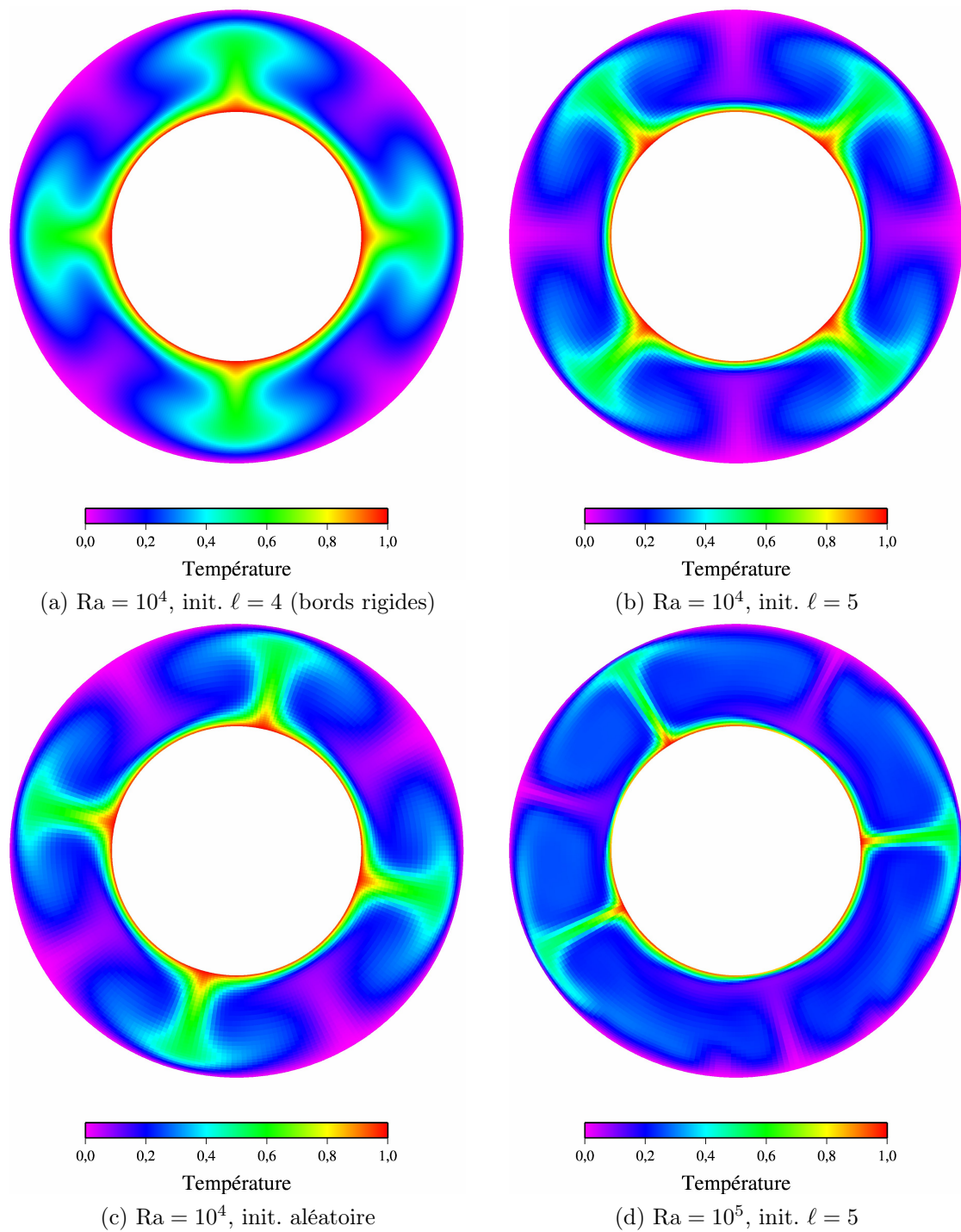


FIGURE 3.23 – Exemples de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas isovisqueux de *Hernlund et Tackley (2008)*. Solutions finales trouvées à convergence [statistique dans le cas (d) : champ instantané visualisé] pour différentes perturbations initiales d'un état conductif. Mêmes paramètres qu'à la figure 3.22 (avec raffinement de maillage), sauf pour le cas (a) ($n_r = 64$, $n_\theta = 512$, sans raffinement; bords rigides).

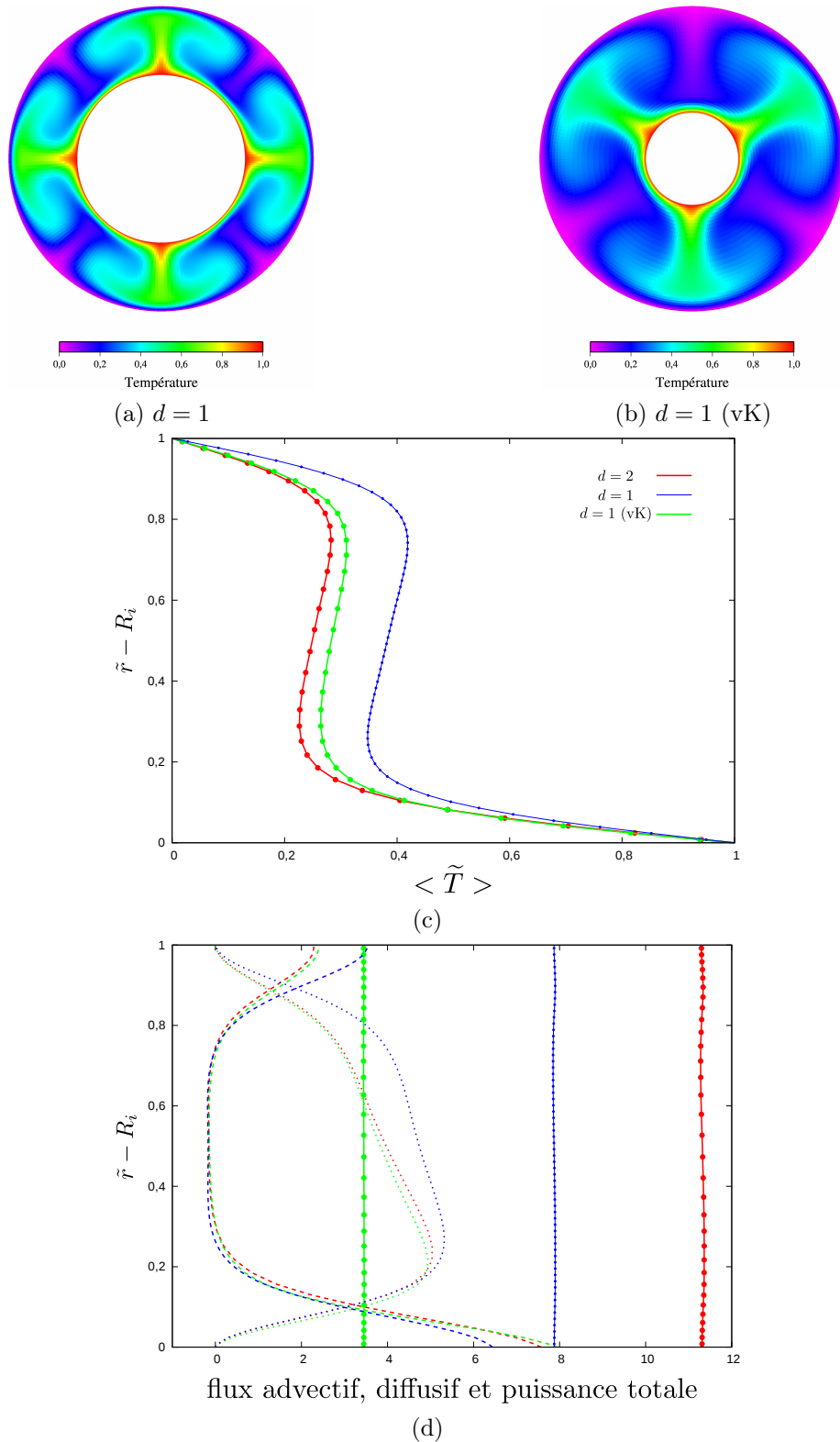


FIGURE 3.24 – Exemple de comparaison entre la géométrie d’anneau sphérique et deux géométries cylindriques différentes. Cas isovisqueux ($Ra = 10^4$) de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). Champ de température obtenu en anneau cylindrique classique [(a); $n_r = 64$, $n_\theta = 256$] ou redimensionné – cf. [van Keken \(2001\)](#) – [(b); $n_r = 32$ (raffinement double des couches limites), $n_\theta = 256$; notation « vK »]. (c) Profils moyens de température associés, ainsi que pour le cas correspondant en anneau sphérique (fig. 3.23). (d) Comparaison des profils associés de flux conductif (tiretés), advectif (pointillés) et de la puissance totale.

chaude de l’anneau vers sa surface possède, en effet, plus d’espace pour s’étaler dans le cas de l’anneau sphérique (volumes élémentaires – jacobien – en r^d), d’où la surestimation de la température qui est faite dans le cas cylindrique. Si, dans ce dernier, les rayons interne et externe sont remis à l’échelle – idée proposée originellement par [Vangelov et Jarvis \(1994\)](#) et reprise par [van Keken \(2001\)](#), voir [2.1.2](#), on obtient la solution visible à la figure [3.24b](#). L’identité du rapport des surfaces externe et interne entre le cas sphérique et cette approche cylindrique particulière, qui est la justification fondamentale de celle-ci, implique que l’on a bien une description quasi-identique des couches limites thermiques. Le flux de chaleur est donc très proche de celui obtenu dans le cas sphérique (ici 2D), ce qui est le but de l’approche de [van Keken \(2001\)](#). En revanche, le milieu convectif voit sa température sur-estimée, pour la même raison que celle évoquée précédemment dans le cas cylindrique pur. En effet, le redimensionnement des rayons R_i et R_e [éq. [\(2.40\)](#)] implique certes des flux de chaleur comparables à ceux du cas sphérique, au voisinage de chacune des frontières, mais ne change en rien le fait que le jacobien reste celui d’une géométrie cylindrique. En outre – et c’est là l’un des inconvénients majeurs de cette approche – le rayon interne (c.-à-d. le noyau) s’en trouve artificiellement plus petit. Une conséquence est la diminution du degré de la convection ; un mode $l = 3$ est ici obtenu, à l’instar de ce qui est présenté dans l’étude de [Tackley \(2008, fig. 3\)](#). Pour avoir une comparaison avec l’anneau sphérique qui ait réellement un sens, il importe de recourir à une certaine *fraction* d’anneau cylindrique remis à l’échelle ([van Keken, 2001](#)), afin de faire coïncider les rapports d’aspect, en plus du rapport des surfaces externe et interne. On perd toutefois l’intérêt d’un domaine annulaire entier !

Notons enfin que la figure [3.24d](#) montre la dissymétrie, évoquée précédemment dans ce chapitre, qui caractérise les flux de chaleur à la base et au sommet d’un domaine en géométrie curviligne (cf. aussi fig. [3.24c](#)). La surface interne est, en effet, f^{-d} fois plus petite que celle située au sommet. Or, lorsque l’équilibre thermique est atteint, la puissance reçue (chauffage à la base ici) doit être identique à celle évacuée au sommet ; d’où le flux de chaleur (purement conductif) f^{-d} fois plus fort au niveau de la base (couche limite thermique chaude). Cette dissymétrie est donc sous-estimée en géométrie cylindrique ; elle est, par définition, rigoureusement respectée dans le cas de la remise à l’échelle des rayons. Les profils de puissance totale présentés à la figure [3.24c](#) ne sont pas directement comparables (puisque liés aux volumes élémentaires, et donc aux rayons !), mais leur relative constance avec la profondeur illustre un aspect du respect de la conservation de l’énergie au sein de l’outil CHEOPS-2D.

La comparaison du comportement de l’anneau sphérique face à la géométrie sphérique complète, que le premier est censé mimer au mieux, mériterait toute une étude à elle seule. Quelques éléments de réflexion ont déjà été donnés au [2.1.3](#). En complément, la figure [3.25](#) présente un exemple de comparaison directe des résul-

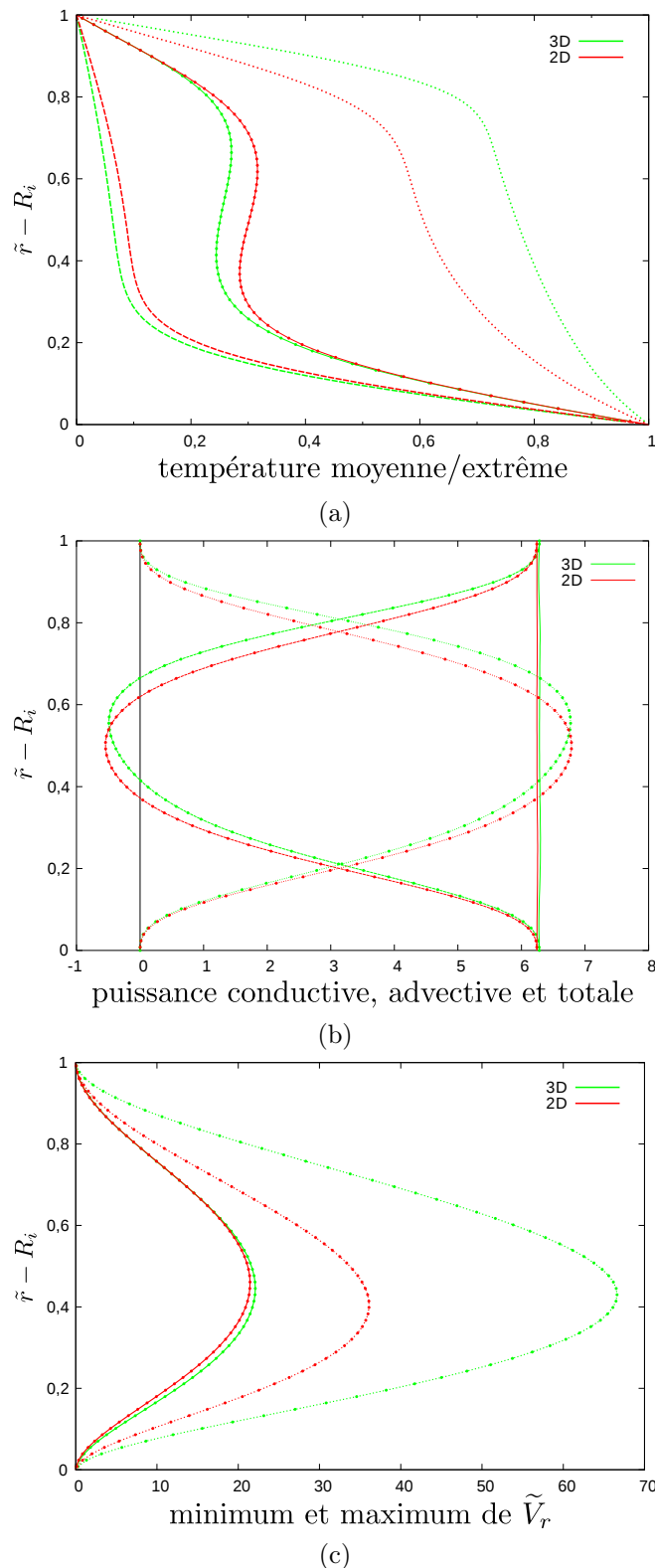


FIGURE 3.25 – Exemple de comparaison de résultats entre les géométries 2D (anneau sphérique) et 3D (sphérique complet). (a) Profils de température moyenne, minimale et maximale; (b) profils de puissance thermique (mêmes types de traits qu'à la fig. 3.24d); (c) profils de vitesse verticale extrême (maximale ascendante, en pointillés et maximale descendante). Cas 2D : celui de la figure 3.23a. Cas 3D : mêmes conditions, solution cubique (mêmes paramètres – code `EDIPE` – c.-à-d. résolution $6 \times 64 \times 128 \times 128$).

tats bidimensionnels de CHEOPS-2D avec ceux du code sphérique CEDIPE (Choblet *et al.*, 2007). Nous pouvons remarquer deux caractéristiques essentielles – et liées – constituant les principaux inconvénients de l’anneau sphérique. Si la distribution moyenne de température dans les couches limites thermiques 3D est remarquablement bien approchée dans le cas 2D, il n’en va pas tout à fait de même pour la zone convective. La raison est à rapprocher de celle qui a été évoquée pour la surestimation de la température en anneau cylindrique ; l’extension latérale possible (c.-à-d. le nombre de degrés de liberté) de l’énergie est, en effet, plus importante dans le cas sphérique 3D.

Ceci est à l’origine de la différence notable observée sur les profils de température maximale, véritables traces des panaches thermiques chauds. En effet, la structure thermique de la convection, dans ce cas à faible nombre de RAYLEIGH est, rappelons-le, composée de panaches chauds de forme plutôt cylindrique et de « feuillets » descendants, froids (solution 3D cubique, dans notre cas, c.-à-d. 6 panaches chauds). Il n’est donc pas étonnant que de tels feuillets ($\approx 2D$, avec un certain degré de courbure²⁵ qui suit celui de la sphère) soient mieux approximés, dans la géométrie 2D utilisée, que des panaches cylindriques, dont la structure est purement tridimensionnelle (voir la discussion au 2.1.3). Les panaches chauds ont donc une importance relative, par rapport à leurs homologues froids, qui est sous-estimée dans le cas de l’anneau sphérique. Dans cette géométrie, en effet, les structures observées par exemple à la figure 3.23b ont toutes la même « valeur » (feuillets courbes), quelque soit leur localisation dans le domaine, et la distinction précédemment mentionnée – feuillets vs cylindres, propre au cas sphérique, n’est pas présente. Ceci s’observe notamment sur les figures 3.25a et 3.25c (vitesse maximale ascendante sous-estimée). Comme nous l’avons évoqué au 2.1.3, l’anneau sphérique sera de plus en plus inadapté à mesure que l’écoulement aura une structure de plus en plus tridimensionnelle. C’est là une limite naturelle de toute géométrie bidimensionnelle, quel que soit son degré de raffinement.

Notons enfin que la couche limite thermique chaude est remarquablement bien décrite en 2D, par rapport au cas sphérique. Cependant, l’absence de la dissymétrie structurelle précédemment mentionnée entre les deux types de panaches va accentuer les différences dans les profils de puissance advective – et par conséquent conductive – au fur et à mesure que l’on se rapproche de la surface externe (fig. 3.25b). La conséquence de panaches chauds plus « puissants » est, par exemple, la réduction (écrasement) de l’épaisseur moyenne de la couche limite thermique²⁶ froide. Ces différences, subtiles – car présentées ici en moyennes radiales – ne doivent cependant pas masquer la remarquable similitude des profils de puissance totale 2D et 3D.

25. respecté, en principe, par l’anneau sphérique

26. prise ici au sens de la zone dans laquelle la diffusion moyenne est dominante par rapport à l’advection

Terminons par illustrer brièvement deux autres familles de tests réalisés (BA), proposés par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). La première concerne des cas à chauffage interne pur. À l’instar de ce qui est fait habituellement, la condition thermique en surface reste inchangée (température \tilde{T} constante et nulle) mais la base est maintenue en flux de chaleur nul. Le chauffage interne imposé, \tilde{H} , constant et uniforme, est choisi tel que les flux de chaleur en surface des états obtenus dans les simulations de RAYLEIGH-BÉNARD soient identiques à ceux observés pour les cas sans chauffage interne correspondant – même nombre de RAYLEIGH (cf. [Hernlund et Tackley, 2008](#)). La figure [3.26](#) illustre ces cas, dont la structure thermique des solutions obtenues à convergence est bien similaire à celle obtenue par [Hernlund et Tackley \(2008, p. ex. fig. 3\)](#). Les profils moyens correspondants illustrent notamment la diminution de la couche limite thermique lorsque l’on passe d’un régime stationnaire (ici $\text{Ra}_H = 3,4 \cdot 10^4$) à un régime oscillant mais statistiquement stationnaire (ici $\text{Ra}_H = 6,6 \cdot 10^5$). Ici encore, la puissance thermique totale moyenne est bien trouvée égale, à chaque rayon, à la puissance thermique produite par le chauffage interne (fig. [3.27b](#) et [3.27c](#), courbes marquées de la discrétisation). Les profils en trait plein représentent ainsi la différence entre ces deux quantités (« puissance résiduelle »). Il faut noter que, pour le cas instationnaire, les profils (en vert) ont été moyennés dans le temps sur un grand nombre de données régulièrement stockées.

Notons un effet important, dû au caractère bidimensionnel de la géométrie : le champ de température est ici composé de panaches froids, actifs, et de « panaches » chauds, passifs. Bien que ces derniers soient plus étroits à la base et plus étendus au sommet, leur structure n’est due qu’au confinement 2D de l’écoulement, autrement dit à l’absence d’une troisième dimension qui favoriserait leur étalement latéral. En effet, les simulations en géométrie 3D sphérique (p. ex. [Tackley, 2008, fig. 3](#)) ou cartésienne (p. ex. [Sotin et Labrosse, 1999, fig. 4](#)) montrent la prépondérance des instabilités de la couche limite thermique froide dans les cas à fort chauffage interne (c.-à-d. dominant sur le chauffage basal). L’étalement latéral des panaches froids à la base peut donner lieu à la formation (par « compression ») de petits panaches montants de matériau un peu plus chaud. La remontée se fait cependant plutôt de manière diffuse (conservation de la masse). L’anneau sphérique n’est donc pas réellement adapté à la description de ce type d’écoulement ; pour cela, la géométrie sphérique, reste, à terme, incontournable.

Un cas en géométrie cartésienne a été ajouté (fig. [3.26c](#)), « équivalent » à celui de la figure [3.26a](#) en ce sens qu’il est muni de bords périodiques (Γ_g et Γ_d) et d’un rapport d’aspect identique à celui de l’anneau. L’absence de courbure implique, dans ce cas, un étalement horizontal semblable des structures thermiques antagonistes. En outre, il en résulte une surestimation importante des températures par rapport au cas curviligne.

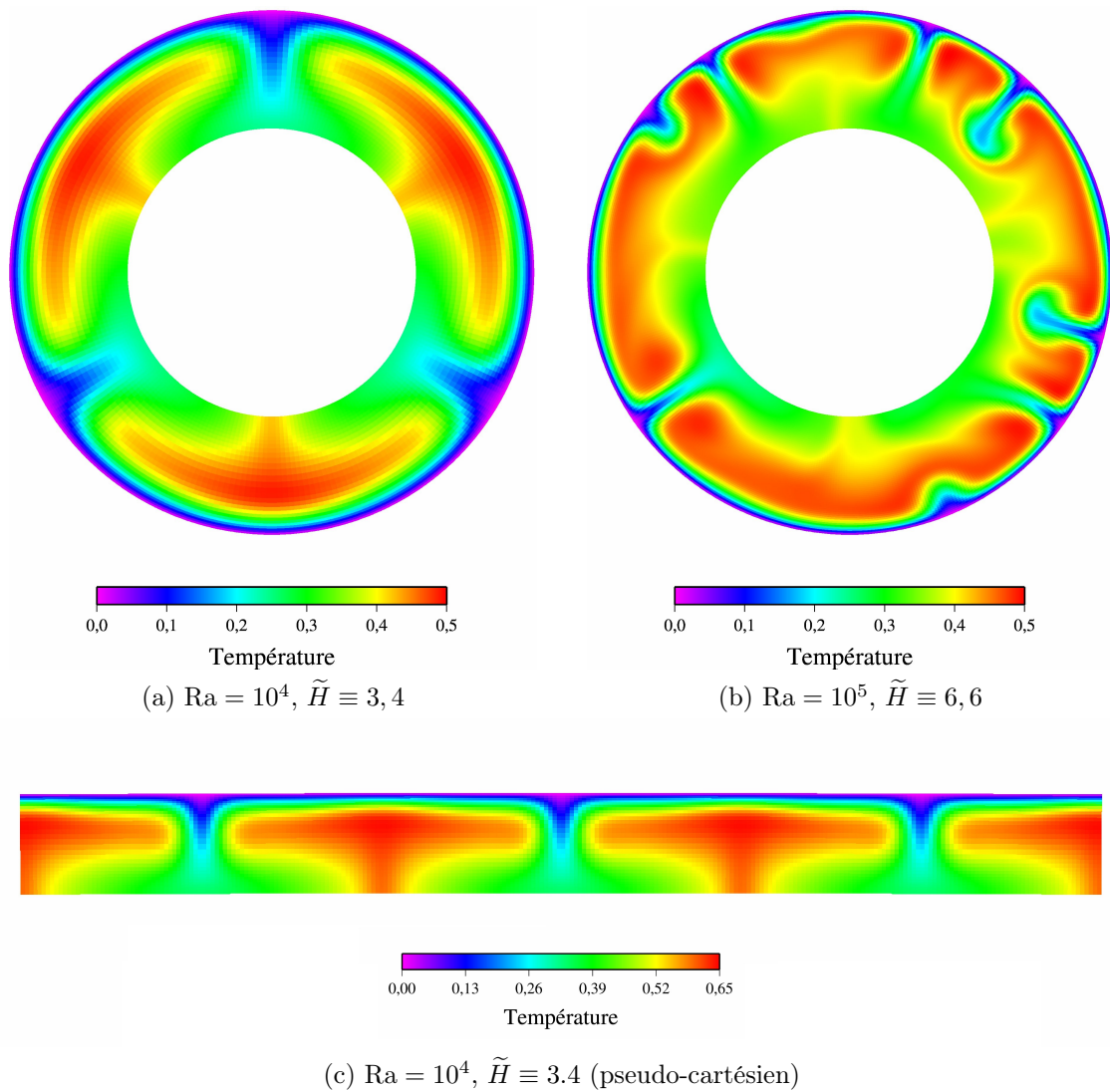


FIGURE 3.26 – Exemples de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas à chauffage interne pur de *Hernlund et Tackley (2008)*. Solutions finales trouvées à convergence [statistique pour le cas (b)]. Mêmes paramètres géométriques que dans les figures précédentes – $n_r = 32$ (raffinement double dans la couche limite thermique froide et à la base), $n_\theta = 256$ [cas (a) et (c)]; $n_r = 64$, $n_\theta = 512$ [cas (b)]. La sous-figure (c) est un exemple de résultat pseudo-cartésien « équivalent » à celui du cas (a) présenté (même rapport d'aspect $R_A \approx 10,8$; $f = 0,999$), $\Delta\theta \approx 0,011$ rad, $d = 1$.

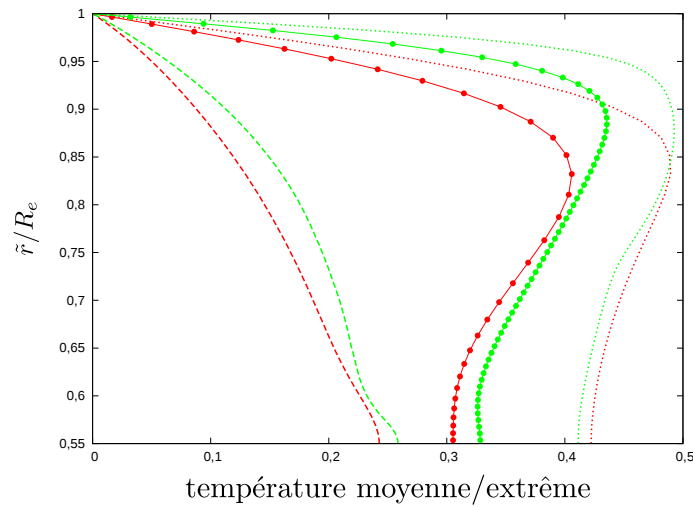
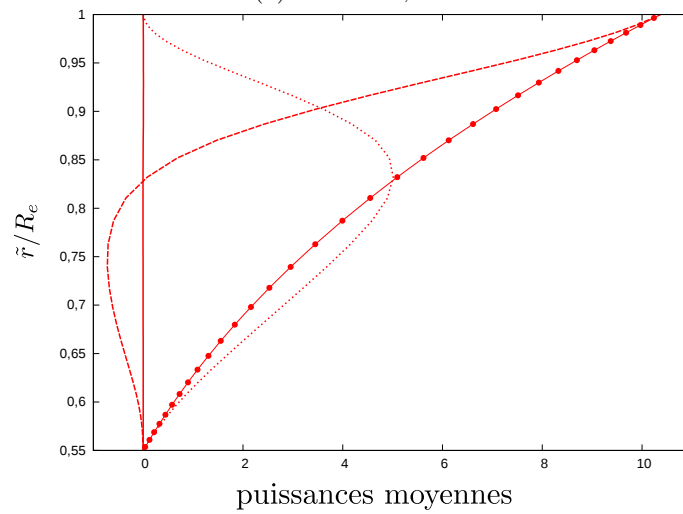
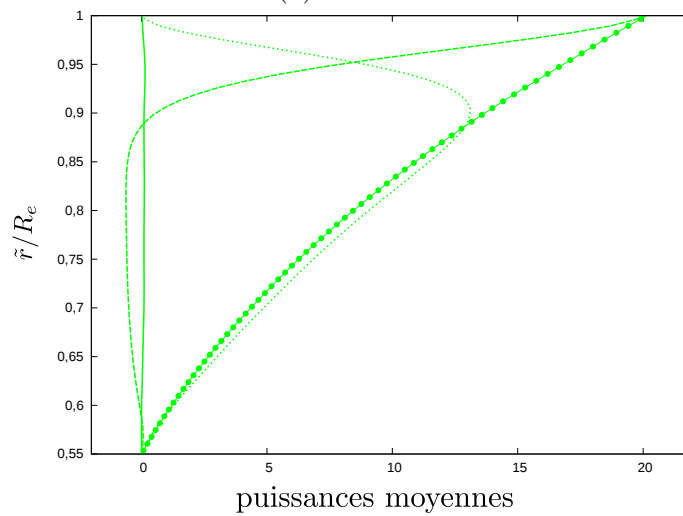
(a) $Ra = 10^4, 10^5$ (b) $Ra = 10^4$ (c) $Ra = 10^5$

FIGURE 3.27 – Exemples de profils moyens obtenus en anneau sphérique dans les cas en chauffage interne pur de [Herlund et Tackley \(2008\)](#). Les cas sont ceux des figures 3.26a (en rouge) et 3.26b (en vert; moyenne temporelle). (a) Profils de températures moyenne, minimale et maximale (cf. p. ex. fig. 3.14a). (b) et (c) : profils moyens de puissance conductive (tiretés), advective (pointillés), interne (trait plein avec points) et écart résiduel (trait plein simple). Les points marquent la discrétisation.

L’autre famille de cas testés par rapport aux données de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) est constituée de simulations en viscosité variable. Il faut d’ores et déjà mentionner la difficulté rencontrée pour l’obtention de ces résultats. En effet, comme explicité au [3.3](#), la condition en bord libre en surface (sur Γ_e) reste, à l’heure actuelle, problématique dans les cas en viscosité variable pour le solveur multigrille de CHEOPS-2D. Seul l’algorithme SIMPLER (c.-à-d. une seule grille) permet de contourner ce problème. De telles simulations n’ont donc pu être réalisées de manière stable que sur un maillage de faible densité, par exemple une fraction d’anneau d’amplitude $\Delta\theta = \pi/2$ et de résolution $n_r = 32$, $n_\theta = 64$. Si les résultats obtenus sont plutôt proches de ceux de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), cela reste cependant insuffisant pour prétendre valider l’outil CHEOPS-2D en viscosité variable dans l’anneau sphérique. Cependant, compte tenu, d’une part, des validations effectuées rigoureusement en viscosité variable pour la géométrie cartésienne (BA, TALA, ALA ; cf. p. ex. tab. [B.18](#)) et du comportement vraisemblablement correct du code de convection en géométrie d’anneau sphérique pour des cas isovisqueux, il semble raisonnable de conclure qu’il en va de même pour cette dernière famille de cas présentée ici. En outre, les simulations en viscosité variable (voire fortement variable, cf. [3.2.2](#)) ont été obtenues sans problème avec un bord libre à la base et un bord rigide au sommet du domaine. C’est cette configuration mécanique, raisonnablement réaliste en régime de couvercle stagnant, qui sera utilisée au chapitre [4](#).

La figure [3.28](#) présente quatre exemples de champs de température obtenu pour les cas à viscosité variable de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), c’est-à-dire dans un anneau sphérique complet. Nous insistons sur le fait que ceux-ci sont simplement présentés à titre d’illustration ; en effet, ils ont pu être obtenus via le solveur multigrille, mais par le biais d’un certain nombre d’astuces numériques, voire d’approximations grossières [tolérance du solveur mécanique peu restrictive, maillage sous-résolu (fig. [3.28a](#) et [3.28c](#)), etc.]. Ils représentent cependant une première étape vers la validation de CHEOPS-2D pour le cas de figure problématique évoqué ci-dessus. Cependant, puisque, au premier ordre, l’examen des données de ces simulations montre qu’elles peuvent être considérées en bon accord avec celles de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), il est instructif d’examiner les traits principaux des solutions obtenues.

Notons que le nombre de RAYLEIGH qui doit être respecté est ici défini pour une viscosité telle que la température adimensionnée correspondante vale 0,5 [soit $\tilde{\eta}(\tilde{T} = 0,5) := 1$]. Les simulations-tests de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#) sont ainsi basées sur les valeurs $\text{Ra}_{1/2} := \text{Ra}[\eta(T = T_s + \Delta T/2)] = 10^5$ et $\text{Ra}_{1/2} = 10^6$. Les champs de température obtenus montrent un trait classique de la convection pour une viscosité fortement variable avec la température : la présence du couvercle stagnant, très froid donc visqueux, qui ne participe pas à la convection ; seules des instabilités froides, qui se forment juste sous sa base, vont se détacher et tomber vers la base (« noyau »). Tous les cas présentés à la figure [3.28](#) sont instationnaires.

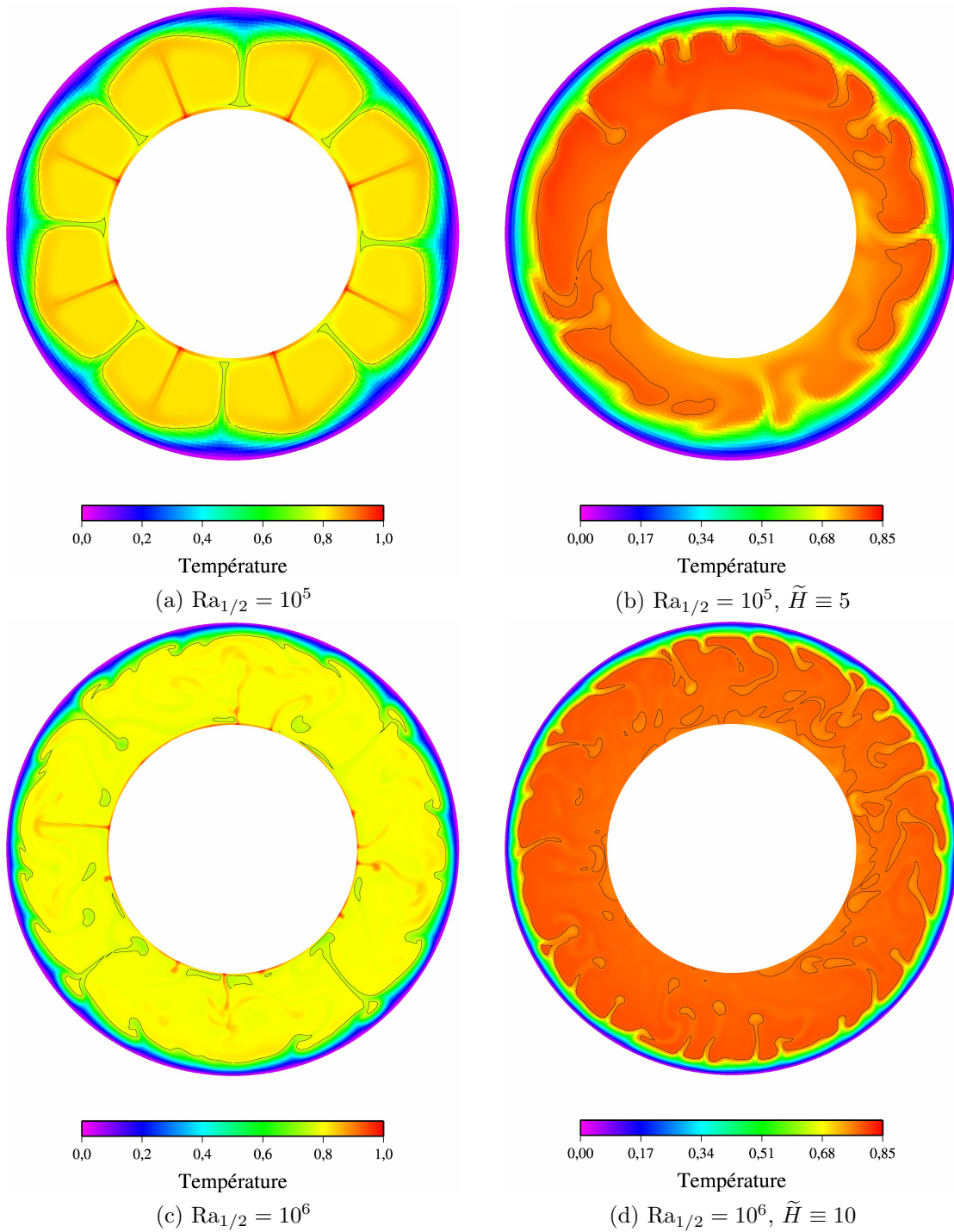


FIGURE 3.28 – Exemple de champs de température obtenus en anneau sphérique dans les cas à viscosité variable de *Hernlund et Tackley (2008)*. Instantanés des solutions finales trouvées à convergence statistique avec (colonne de droite) ou sans chauffage interne. Les isolignes correspondent à la valeur $\tilde{T} = 0,775$. Contraste de viscosité global : $\Delta\eta = 10^6$ (c.-à-d. $\Upsilon \approx 13,8$). $f = 0,55$, $d = 2 - n_r = 32$, $n_\theta = 256$ [cas (a) et (b)]; $n_r = 64$, $n_\theta = 512$ [cas (c) et (d)].

Comme ce qui a été mentionné dans le cadre cartésien, la variation de la viscosité avec la température est responsable de structures chaudes (panaches) particulièrement fines et munies d'une flottabilité importante. Ceci est ici renforcé par la dissymétrie des flux de chaleur propre aux géométries curvilignes, notamment sphérique.

Lorsque le nombre de RAYLEIGH est augmenté (fig. 3.28a → 3.28c ou 3.28b → 3.28d), le couvercle conductif va petit à petit subir une érosion thermique et une nouvelle épaisseur d'équilibre sera atteinte. La présence d'un chauffage interne pur, en viscosité variable (fig. 3.28b et 3.28d), implique un transfert thermique interne (sous le couvercle) dominé par les anomalies froides, à l'instar de ce qui a lieu dans les cas isovisqueux, mais celles-ci correspondent à des structures à plus courte longueur d'onde. En outre, l'essentiel des variations de température est dû à la conduction thermique, au sein du couvercle.

Le code de convection développé au cours de ce travail se révèle suffisamment précis et performant dans les diverses géométries et approximations thermodynamiques testées. Pour la suite, on ne considérera plus que la géométrie d'anneau sphérique, la plus adaptée pour modéliser les transferts de chaleur dans un manteau planétaire entier. La dissipation de marée peut désormais être incluse comme source de chaleur additionnelle dans le traitement de l'équation de l'énergie. Ce couplage avec le chauffage de marée, ainsi qu'une application préliminaire associée, sont présentés au chapitre qui suit.

Couplage avec la dissipation de marée

Ce chapitre est constitué d'une première partie détaillant la méthode de calcul mise en œuvre pour l'évaluation de la dissipation de manière couplée avec les transferts de chaleur. La seconde partie est écrite en langue anglaise : elle représente le corps d'un article en préparation (Besserer *et al.*, 201x). Notons que, de manière complémentaire à ce qui figure dans les chapitres 1 et 2, toutes les équations y sont présentées dans leur version dimensionnée. Les symboles et notations utilisés diffèrent donc parfois de ceux employés dans le reste du mémoire.

4.1 Méthodologie générale

4.1.1 Motivations

L'approche générale qui a été menée pour calculer la dissipation de marée repose sur des choix géométriques particuliers. En effet, bien que la description des transferts de chaleur soit réalisée via une approche bidimensionnelle (chap. 2 et 3), il faut garder à l'esprit que le problème de la déformation de marée est tridimensionnel par nature. Une approche couplée complète, c'est-à-dire 3D sphérique à la fois pour le traitement de la dissipation de marée et des transferts de chaleur, a récemment été développée par Běhounková *et al.* (2010) : l'outil obtenu, baptisé Antigone, est basé sur un couplage entre, d'une part, le traitement de la convection thermique via le code CEDIPE de Choblet *et al.* (2007) et, d'autre part, l'évaluation de la dissipation de marée selon l'approche de Tobie *et al.* (2008). Toutefois, il faut souligner que, en plus de nécessiter des temps de calcul importants consécutifs au caractère tridimensionnel de la géométrie employée, cette approche ne traite le problème qu'avec l'hypothèse d'incompressibilité inhérente à l'outil CEDIPE. En outre, le traitement de la déformation viscoélastique dans le domaine temporel rend complexe la prise en compte de la variabilité fréquentielle de celle-ci ; cette dépendance est donc ignorée.

De ce fait, cela limite fortement les types de rhéologie accessibles pour le calcul de la dissipation de marée. Enfin, il est difficile, avec le code Antigone, de résoudre le couplage convection-dissipation dans plusieurs corps simultanément, ainsi que les interactions orbitales mutuelles résultantes.

Ce sont notamment ces quatre raisons qui ont motivé la réalisation de l’outil CHEOPS-2D. Le problème du temps de calcul est amoindri par l’utilisation d’une géométrie curviligne bidimensionnelle, l’anneau sphérique (Hernlund et Tackley, 2008, cf. aussi 2.1.3), conçue pour approximer les transferts de chaleur tridimensionnels sphériques. Pour tenir compte de la compressibilité du milieu étudié – le manteau du corps planétaire – les équations de conservation, qui permettent de décrire les transferts de chaleur, sont traitées dans l’approximation anélastique-liquide (Jarvis et McKenzie, 1980). En outre, l’équation du mouvement résolue pour la déformation sphéroïdale de marée prend également en compte une certaine compressibilité, variable radialement. Cette équation est traitée dans le domaine fréquentiel, selon l’approche de Tobie *et al.* (2005), qui rend aisée l’utilisation de nombreuses rhéologies viscoélastiques. Enfin, CHEOPS-2D permet de calculer de manière cohérente l’évolution orbitale qui résulte de la dissipation de marée, ainsi que la rétroaction de celle-ci. Ce dernier point sera l’objet du chapitre 5. Ici, nous considérerons simplement une configuration orbitale fixe.

L’idée générale de la méthode de couplage mise en œuvre est la suivante : dans un premier temps, la réponse de marée moyenne du corps est calculée, en ne considérant que des variations radiales. Cette technique permet, à partir de profils radiaux moyens de propriétés thermo-mécaniques¹, d’employer la méthode mise en œuvre par Castillo *et al.* (2000) et Tobie *et al.* (2005) pour le calcul des fonctions radiales. La réponse moyenne tridimensionnelle est ensuite remise à l’échelle dans la géométrie d’anneau sphérique, via une moyenne longitudinale de la réponse 3D (le plan « équatorial » correspond ici au plan orbital du corps perturbateur). Cette approche permet de déboucher sur une formulation semi-analytique de la réponse moyenne équivalente bidimensionnelle (annulaire) du corps. Enfin, une correction du champ de dissipation de marée résultant est réalisée afin de tenir compte des variations latérales de température.

4.1.2 Potentiel de marée employé

Dans ce chapitre, il est question du couplage entre les transferts de chaleur ayant lieu au sein d’un corps secondaire (satellite ou planète), et la dissipation de marée engendrée par une déformation anélastique de celui-ci en réponse au potentiel excitateur d’un corps central (planète ou étoile), autour duquel le corps secondaire

1. pouvant varier avec la température, selon le profil moyen de celle-ci obtenu, à un instant donné, à partir du module décrivant les transferts de chaleur dans CHEOPS-2D

décrit une orbite excentrique. L'équation (1.15) doit donc être comprise, ici, comme l'expression du potentiel excitateur appliqué au corps orbitant, c'est-à-dire lié aux effets de marée résultant de l'interaction gravitationnelle avec le corps central. On a donc la décomposition (cf. p. 20) :

$$U_{\text{mar}} = U_{\text{mar}}^{\text{stat}} + \Phi(t), \quad (4.1)$$

avec Φ la partie périodique du potentiel (potentiel dynamique).

L'expression classiquement employée dans la littérature (p. ex. Murray et Dermott, 1999 ; Tobie *et al.*, 2005) est généralement celle, pour un satellite en résonance spin-orbite 1 : 1, obtenue à partir de la formule dérivée par Kaula (1964) [éq. (1.25)], au degré $l = 2$, au premier ordre en excentricité et en supposant une obliquité nulle du satellite sur son orbite (c.-à-d. une inclinaison nulle de l'orbite de la planète centrale dans le référentiel du satellite). En effet, l'obliquité d'un corps bloqué en résonance spin-orbite est généralement faible (p. ex. Bills, 2005). L'expression du potentiel dynamique, dans le système de coordonnées sphériques associé au satellite, peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(r, \vartheta, \phi, t) = -\frac{r^2 n^2}{2} \mathcal{F}(\vartheta, \phi, e, t), \quad (4.2)$$

avec la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\vartheta, \phi, e, t) = & 3eP_{20}(\cos \vartheta) \cos(nt) \\ & - \frac{e}{2} P_{22}(\cos \vartheta) [3 \cos(nt) \cos(2\phi) + 4 \sin(nt) \sin(2\phi)], \end{aligned} \quad (4.3)$$

où r , ϑ et ϕ sont respectivement le rayon, la colatitude et la longitude dans le repère lié au corps orbitant ; n est le moyen mouvement de ce dernier le long de son orbite d'excentricité e .

Cependant, si l'on souhaite décrire précisément la dissipation de marée dans des cas à excentricité importante (typiquement plus que quelques pourcents), il convient d'utiliser une expression moins approximative. Le choix s'est porté sur un développement du potentiel à un ordre plus élevé en e , toujours à partir de l'expression générale de Kaula (1964), de l'hypothèse d'une obliquité négligeable du corps secondaire sur son orbite et d'un degré $l = 2$ largement prédominant. Cette dernière hypothèse reste valable si le rapport du rayon du corps perturbé au demi-grand axe de son orbite est petit. La restriction principale est une troncature à l'ordre 4 des fonctions d'excentricité G_{lpq} de Kaula (1964). Ainsi, dans le cas d'une résonance spin-orbite $k : j$, on trouve la forme suivante pour la fonction \mathcal{F} (p. ex.

Běhounková *et al.*, 2010), généralisant ainsi l'expression (4.3) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t) = & P_{20}(\cos \vartheta) \left[3e \cos(nt) + \frac{9}{2}e^2 \cos(2nt) + \frac{27}{8}e^3 \cos(nt) + \frac{7}{2}e^4 \cos(2nt) \right] \\
& - \frac{1}{2}P_{22}(\cos \vartheta) \left\{ \cos \left[2\phi + 2 \left(\frac{k}{j} - 1 \right) nt \right] \right. \\
& - \frac{1}{2}e \left[\cos \left(2\phi + \left(2\frac{k}{j} - 1 \right) nt \right) - 7 \cos \left(2\phi + \left(2\frac{k}{j} - 3 \right) nt \right) \right] \\
& - \frac{1}{2}e^2 \left[5 \cos \left(2\phi + 2 \left(\frac{k}{j} - 1 \right) nt \right) - 17 \cos \left(2\phi + 2 \left(\frac{k}{j} - 2 \right) nt \right) \right] \\
& + \frac{1}{16}e^3 \left[\cos \left(2\phi + \left(2\frac{k}{j} - 1 \right) nt \right) - 123 \cos \left(2\phi + \left(2\frac{k}{j} - 3 \right) nt \right) \right] \\
& \left. + \frac{1}{2}e^4 \left[\frac{13}{8} \cos \left(2\phi + 2 \left(\frac{k}{j} - 1 \right) nt \right) - \frac{115}{3} \cos \left(2\phi + 2 \left(\frac{k}{j} - 2 \right) nt \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans cette thèse, en première approche, seul le cas d'une résonance 1 : 1 a été considéré. L'expression ci-dessus se simplifie donc quelque peu pour la partie d'ordre azimutal égal à 2. En particulier, certains termes ne dépendent plus du temps et peuvent donc être ignorés. On a ainsi, en isolant les fonctions circulaires du temps :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t) = & P_{20}(\cos \vartheta) \left[3e \cos(nt) + \frac{9}{2}e^2 \cos(2nt) + \frac{27}{8}e^3 \cos(nt) + \frac{7}{2}e^4 \cos(2nt) \right] \\
& - \frac{1}{2}P_{22}(\cos \vartheta) \{ e [3 \cos(2\phi) \cos(nt) + 4 \sin(2\phi) \sin(nt)] \\
& + \frac{17}{2}e^2 [\cos(2\phi) \cos(2nt) + \sin(2\phi) \sin(2nt)] \\
& - \frac{1}{8}e^3 [61 \cos(2\phi) \cos(nt) + 62 \sin(2\phi) \sin(nt)] \\
& - \frac{115}{6}e^4 [\cos(2\phi) \cos(2nt) + \sin(2\phi) \sin(2nt)] \}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ainsi, pour une résonance 1 : 1 et une précision à l'ordre 4 en excentricité, on voit qu'émergent deux fréquences angulaires dans le signal du potentiel dynamique : n (le moyen mouvement) et $2n$; il n'y en a qu'une seule (n) dans le cas de l'expression simplifiée (4.3). Cet aspect sera important pour la suite : il sera nécessaire, pour calculer la dissipation de marée dans le corps en orbite, d'évaluer les paramètres viscoélastiques de celui-ci à ces deux fréquences.

4.1.3 Contraintes et déformation de marée

L'approche employée pour évaluer les contraintes et les déformations de marée est celle de [Tobie *et al.* \(2005\)](#), basée sur le formalisme des fonctions radiales ([Pekeris et Jarosch, 1958](#) ; [Takeuchi et Saito, 1972](#) ; [Molodenskiy, 1976](#)). Celui-ci repose sur l'hypothèse d'un milieu à symétrie sphérique, autrement dit ne permet de prendre en compte que des variations purement radiales des propriétés du corps. C'est la raison pour laquelle nous ne pouvons l'employer que pour calculer la réponse moyenne du corps. Dans ce formalisme, l'équation du mouvement, traitée ici dans l'hypothèse des petites perturbations, ainsi que l'équation de POISSON sur le potentiel induit par la redistribution de masse qu'engendre la déformation de marée du corps [cf. plus loin, éq. (4.58) et (4.59)] sont transformées en un système équivalent de six équations différentielles, dans le domaine fréquentiel, que l'on peut résumer sous la forme suivante :

$$\frac{d\tilde{y}_i^l(r, \omega)}{dr} = \sum_{j=1,6} a_{ij}(\omega) \tilde{y}_j^l(r, \omega) \quad \forall i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \quad (4.6)$$

où r est le rayon, mesuré depuis le centre du corps, ω la fréquence angulaire de la sollicitation et y_i^l la i -ème fonction radiale de la planète, à une fréquence et un degré l donnés. Le coefficient a_{ij} est l'élément d'un opérateur matriciel \mathcal{A} portant sur les fonctions \tilde{y}_i^l et leurs dérivées radiales. Celui-ci dépend notamment de la fréquence et des propriétés (radiales) que sont la masse volumique ρ , la gravité g , le coefficient d'incompressibilité K et la rigidité μ .

Le problème viscoélastique de la déformation de marée dans le domaine temporel se ramène ainsi à une formulation élastique équivalente dans l'espace des fréquences, via la définition de modules complexes $\tilde{K}(r, \omega)$ et $\tilde{\mu}(r, \omega)$; c'est l'idée du principe de correspondance ([Biot, 1954](#) ; [Cathles, 1975](#)). La notation « $\tilde{\bullet}$ » indique des transformées de LAPLACE. Notons que, dans notre cas où les signaux sont purement périodiques – potentiel de marée sans aspect transitoire – ces transformées sont rigoureusement équivalentes à celles qui seraient obtenues avec une transformation de FOURIER unilatérale.

La résolution du système (4.6) ne sera pas détaillée ici ; il s'agit, en effet, de l'une des deux seules parties² de l'outil CHEOPS-2D qui n'a pas été écrite par l'auteur de ces lignes. Le lecteur intéressé trouvera une explication détaillée dans la thèse de [Tobie \(2003\)](#). Mentionnons simplement que le solveur employé repose sur une méthode de RUNGE-KUTTA à l'ordre 4, munie d'un pas radial adaptatif afin d'optimiser les calculs. Cette amélioration a été récemment apportée par Mathieu Le Feuvre, dans le cadre de son post-doctorat au LPG Nantes.

2. l'autre étant le calcul des fonctions d'excentricité et d'inclinaison de [Kaula \(1964\)](#) ; voir chapitre 5

Une fois déterminées les six fonctions radiales, pour les deux fréquences $\omega = n$ et $\omega = 2n$ qui nous intéressent, il devient possible d'accéder aux champs tridimensionnels sphériques de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ de marée. Cette reconstruction peut se faire séparément pour chaque composante de ces tenseurs symétriques, via les fonctions radiales et la décomposition en harmoniques sphériques de la transformée de LAPLACE du potentiel perturbateur Φ [éq. (4.2) et (4.5)] en surface du corps secondaire de rayon R . Les formules de reconstruction obtenues illustrent le principe de séparation de variables, puisque chaque terme peut être évalué comme le produit d'une fonction à variations strictement radiales par une autre, purement azimutale. En effet, on a, pour chacune des douze composantes \bullet_{ij} sphériques qui nous intéressent, la décomposition suivante (Takeuchi et Saito, 1972 ; Tobie *et al.*, 2003) :

$$\tilde{\bullet}_{ij}(r, \vartheta, \phi, \omega) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \bullet^{lm}, \quad (4.7)$$

avec

$$\tilde{\varepsilon}_{rr}^{lm} = \frac{\partial \tilde{y}_1^l(r, \omega)}{\partial r} \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.8)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}^{lm} = \frac{\tilde{y}_3^l(r, \omega)}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta^2}(R, \vartheta, \phi, \omega) + \tilde{y}_1^l(r, \omega) \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.9)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\phi\phi}^{lm} = \tilde{y}_3^l(r, \omega) \left\{ \frac{\csc^2 \vartheta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi^2}(R, \vartheta, \phi, \omega) + \cot \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \phi, \omega) \right\} + \tilde{y}_1^l(r, \omega) \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.10)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{r\vartheta}^{lm} = \frac{\tilde{y}_4^l(r, \omega)}{\tilde{\mu}(r, \omega)} \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.11)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{r\phi}^{lm} = \frac{\tilde{y}_4^l(r, \omega)}{\tilde{\mu}(r, \omega)} \csc \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi}(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.12)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\vartheta\phi}^{lm} = \frac{2\tilde{y}_3^l(r, \omega)}{r} \csc \vartheta \left[\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi \partial \vartheta}(R, \vartheta, \phi, \omega) - \cot \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi}(R, \vartheta, \phi, \omega) \right] \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

et

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{lm} = \tilde{y}_2^l(r, \omega) \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta}^{lm} = & \left\{ \tilde{\lambda}(r, \omega) \frac{d\tilde{y}_1^l(r, \omega)}{dr} + \frac{\tilde{\lambda}(r, \omega) + 2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} [2\tilde{y}_1^l(r, \omega) - l(l+1)\tilde{y}_3^l(r, \omega)] \right. \\ & \left. - \frac{2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} \tilde{y}_1^l(r, \omega) \right\} \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega) \\ & - \frac{2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} \tilde{y}_3^l(r, \omega) \left[\cot \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \phi, \omega) + \csc^2 \vartheta \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi^2}(R, \vartheta, \phi, \omega) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\phi\phi}^{lm} = & \left\{ \tilde{\lambda}(r, \omega) \frac{d\tilde{y}_1^l(r, \omega)}{dr} + \frac{\tilde{\lambda}(r, \omega) + 2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} [2\tilde{y}_1^l(r, \omega) - l(l+1)\tilde{y}_3^l(r, \omega)] \right. \\ & \left. - \frac{2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} \tilde{y}_1^l(r, \omega) \right\} \tilde{\Phi}_l^m(R, \vartheta, \phi, \omega) \\ & - \frac{2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} \tilde{y}_3^l(r, \omega) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta^2}(R, \vartheta, \phi, \omega), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\vartheta}^{lm} = \tilde{y}_4^l(r, \omega) \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta}(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.18)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\phi}^{lm} = \tilde{y}_4^l(r, \omega) \csc \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi}(R, \vartheta, \phi, \omega), \quad (4.19)$$

$$\tilde{\sigma}_{\vartheta\phi}^{lm} = \frac{2\tilde{\mu}(r, \omega)}{r} \tilde{y}_3^l(r, \omega) \left[\csc \vartheta \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \vartheta \partial \phi}(R, \vartheta, \phi, \omega) - \cot \vartheta \csc \vartheta \frac{\partial \tilde{\Phi}_l^m}{\partial \phi}(R, \vartheta, \phi, \omega) \right]. \quad (4.20)$$

$\tilde{\lambda}$ est, à l'instar de $\tilde{\mu}$, un paramètre de LAMÉ effectif, défini par :

$$\tilde{\lambda}(r, \omega) := K(r) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}(r, \omega). \quad (4.21)$$

Cette définition implique que la dissipation d'énergie de marée par changement de volume est négligée. Rappelons que cette hypothèse est également appliquée pour le calcul des transferts de chaleur (cf. approximation de STOKES, cf. 1.3.2). La dissipation, dans l'approche choisie, est donc considérée n'avoir lieu que par cisaillement. Les grandeurs complexes $\tilde{\bullet}$, dans les équations précédentes, incluent toujours une part élastique (partie réelle de la grandeur), c'est-à-dire correspondant à la réponse instantanée du corps, et une part visqueuse (partie imaginaire; nulle pour K ici), à savoir la partie différée de la réponse (retard de phase, cf. 1.2.3). En vertu du principe de correspondance (Biot, 1954 ; Cathles, 1975), la technique de Takeuchi et Saito (1972), originellement développée pour un milieu élastique, peut être appliquée pour des fonctions radiales complexes (\tilde{y}_i).

Notons que deux des fonctions radiales n'apparaissent pas dans les équations précédentes. Il s'agit de y_6 , qui permet de tenir compte de la continuité du gradient du potentiel d'autogravitation du corps et de y_5 , qui caractérise le potentiel induit par la redistribution de masse qu'engendre la déformation de marée du corps (p. ex. [Tobie et al., 2005](#)). La valeur en surface de y_5 permet d'accéder directement au nombre de LOVE k_l ([Love, 1909](#)), défini comme le rapport du potentiel induit au potentiel perturbateur, à un degré l donné. Entre deux composantes du potentiel perturbateur Φ et du potentiel gravitationnel total U , on a la relation générique suivante :

$$U = y_5 \Phi, \quad (4.22)$$

soit ici

$$\tilde{k}_l(\omega) = \tilde{y}_5^l(R, \omega) - 1. \quad (4.23)$$

Si l'on suppose que toute la dissipation est « incluse » dans le déphasage du nombre de LOVE \tilde{k}_2 , le facteur de dissipation s'écrit :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\text{Im}[\tilde{k}_2(\omega)]}{|\tilde{k}_2(\omega)|}. \quad (4.24)$$

Par ailleurs, le second nombre de LOVE, h_l , et le nombre de SHIDA, ℓ_l , caractérisant respectivement les déplacements verticaux et horizontaux, sont reliés aux valeurs des fonctions y_1 et y_3 et de la norme du champ de gravité en surface :

$$\tilde{h}_l(\omega) = \tilde{y}_1^l(R, \omega)g(R), \quad (4.25)$$

$$\tilde{\ell}_l(\omega) = \tilde{y}_3^l(R, \omega)g(R). \quad (4.26)$$

4.1.4 Réponse moyenne du corps et dissipation

La source de chaleur de marée que nous souhaitons évaluer est, classiquement, la puissance moyenne dissipée au cours d'un cycle orbital. En notant $\langle P \rangle$ cette grandeur et $T_o := 2\pi/n$ la période de l'orbite, on a :

$$\langle P \rangle := \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt = \frac{1}{T_o} \oint \sum_{k,l} \sigma_{kl}(t) \dot{\epsilon}_{kl}(t) dt, \quad (4.27)$$

avec les indices k et l correspondant successivement aux trois directions habituelles r , ϑ et ϕ des coordonnées sphériques.

Pour la suite du raisonnement, nous emploierons la notation réduite ci-dessous :

$$\langle P \rangle = \sum_{k,l} \pi_{kl}, \quad \text{avec} \quad \pi_{kl} := \frac{1}{T_o} \oint \sigma_{kl}(t) \dot{\varepsilon}_{kl}(t) dt. \quad (4.28)$$

En utilisant la décomposition de FOURIER des fonctions $\sigma_{kl}(t)$ et $\dot{\varepsilon}_{kl}(t)$, il vient, pour un spectre discret de fréquences entières³ :

$$\pi_{kl} = \frac{1}{T_o} \oint \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \times \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\dot{\varepsilon}}_{kl}(\omega_{n'}) e^{i\omega_{n'} t} dt, \quad (4.29)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\dot{\varepsilon}}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'}) t} dt, \quad (4.30)$$

avec $\omega_n = n\omega$ ($n \in \mathbb{Z}$) ; la notation $\tilde{\bullet}$ traduit des spectres au sens de la transformation de FOURIER classique (c.-à-d. bilatérale).

La première somme peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\dot{\varepsilon}}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'}) t} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\dot{\varepsilon}}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'}) t} dt, \end{aligned} \quad (4.31)$$

puisque l'on a $\tilde{\sigma}_{kl}(0) \tilde{\dot{\varepsilon}}_{kl}(0) = 0$.

En utilisant la propriété d'orthogonalité

$$\frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'}) t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = -n' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.32)$$

3. C'est bien le cas pour les potentiels de marées qui nous intéressent dans cette thèse, c'est-à-dire ceux correspondant à une résonance spin-orbite donnée.

l'équation (4.31) devient :

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{n'=1}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'})t} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n + \omega_{n'})t} dt, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n'=1}^{+\infty} \underbrace{\tilde{\sigma}_{kl}(-\omega_n)}_{\tilde{\sigma}_{kl}^*(\omega_n)} \tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega_{n'}) \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_{n'} - \omega_n)t} dt \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{n'=1}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \underbrace{\tilde{\varepsilon}_{kl}(-\omega_{n'})}_{\tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega_{n'})} \frac{1}{T_o} \oint e^{i(\omega_n - \omega_{n'})t} dt, \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec la notation « \bullet^* » pour le complexe conjugué.

Les deux intégrales de l'expression (4.34) sont sujettes à la propriété (4.32), mais cette fois avec l'égalité $n = n'$ comme condition principale. La puissance π_{kl} prend donc la forme simple suivante :

$$\pi_{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}^*(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega_n), \quad (4.35)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega_n) \right]^* + \tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega_n) \right\}, \quad (4.36)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\tilde{\sigma}_{kl}(\omega_n) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega_n) \right]. \quad (4.37)$$

Finalement, en revenant sur des transformées de LAPLACE classiques $\tilde{\bullet} \equiv 2\tilde{\bullet}$, qui sont celles utilisées dans la formulation du problème des déformations de marées [cf. éq. (4.6)], on parvient à une forme analogue à ce qui est couramment utilisé en électromagnétisme :

$$\pi_{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} [\mathcal{P}_{kl}(\omega_n)], \quad (4.38)$$

avec

$$\mathcal{P}_{kl}(\omega) := \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega), \quad (4.39)$$

$$= -\frac{i\omega}{2} \tilde{\sigma}_{kl}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{kl}^*(\omega) \quad \text{si} \quad \varepsilon_{kl}(t=0) = 0, \quad (4.40)$$

la puissance complexe volumique, pour une fréquence ω donnée. Notons que le raisonnement ci-dessus pourrait tout à fait être transposé au cas d'un spectre continu de fréquences.

Ainsi, une fois les diverses composantes des tenseurs de contrainte et de déformation viscoélastiques de marée correctement estimées dans le domaine fréquentiel, via l'équation (4.7) – il s'agit donc de déterminer précisément les fonctions radiales – la dissipation de marée $\langle P \rangle$ est calculée très simplement, grâce aux équations (4.28), (4.38) et (4.40).

4.1.5 Réduction à une géométrie annulaire

Les composantes de contrainte et de déformation précédemment obtenues sont celles de la réponse moyenne du corps planétaire, en considérant des variations purement radiales – dominantes – de ses propriétés thermo-mécaniques. Cependant, cette réponse est tridimensionnelle (sphérique). Or, afin de pouvoir coupler transferts de chaleur et dissipation de marée, cette dernière doit pouvoir être employée comme un terme source de chaleur dans l'équation de conservation de l'énergie résolue dans l'outil bidimensionnel annulaire développé. Ceci nécessite donc le recours à une certaine réduction géométrique.

Dans le cas de la résonance spin-orbite 1 : 1 qui nous intéresse particulièrement, les variations les plus importantes sont celles en latitude, puisque l'obliquité du corps perturbé est considérée nulle. Afin que la réduction préserve un maximum d'information sur ces variations, il a été choisi de considérer l'anneau sphérique (c.-à-d. le domaine géométrique correspondant au manteau convectif) comme orthogonal à l'équateur du corps planétaire (secondaire), autrement dit perpendiculaire au plan orbital. C'est ainsi la moyenne en longitude de la dissipation de marée 3D – réponse moyenne – qui sera « incluse » dans l'anneau. Cette moyenne peut être réalisée analytiquement, en tirant parti du formalisme présenté plus haut et des propriétés remarquables des harmoniques sphériques.

Ainsi, on peut toujours écrire le jeu d'équations (4.7) sous la forme très générale suivante :

$$\tilde{\sigma}_{kl}(\omega) \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \mathcal{F} \left[\{ \tilde{y}_i^l(\omega) \}_{i=1,6} \right] \underbrace{C_l^m(\omega) Y_l^m(\theta, \phi)}_{\tilde{\Phi}_l^m}, \quad (4.41)$$

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}_{kl}^*(\omega) \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \mathcal{G}^* \left[\{ \tilde{y}_i^l(\omega) \}_{i=1,6} \right] \underbrace{D_l^{m*}(\omega) Y_l^{m*}(\theta, \phi)}_{\tilde{\Phi}_l^{m*}}, \quad (4.42)$$

avec \mathcal{F} et \mathcal{G} deux fonctions des \tilde{y}_i et de leurs dérivées radiales et Y_l^m les harmoniques

sphériques⁴ (C_l^m et D_l^m étant des coefficients complexes associés) :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (4.43)$$

La moyenne en longitude de la puissance π_{kl} [éq. (4.38)], associée aux composantes \bullet_{kl} des contraintes et déformations de marée, s'écrit simplement :

$$\Pi_{kl} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_{kl} d\phi. \quad (4.44)$$

Ainsi, nous avons, dans le cas général d'un spectre continu en fréquence :

$$\begin{aligned} \Pi_{kl} &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left(\sum_{l,m} \mathcal{F}_l^m C_l^m Y_l^m \right) \left(\sum_{l',m'} \mathcal{G}_{l'}^{m'*} D_{l'}^{m'*} Y_{l'}^{m'*} \right) d\omega d\phi, \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left[\sum_{l,l',m,m'} \mathcal{F}_l^m C_l^m \mathcal{G}_{l'}^{m'*} D_{l'}^{m'*} \int_0^{2\pi} Y_l^m Y_{l'}^{m'*} d\phi \right] d\omega. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Or, on a la forme suivante de propriété d'orthogonalité pour les harmoniques sphériques :

$$\int_0^{2\pi} Y_l^m Y_{l'}^{m'*} d\phi = P_l^m P_{l'}^{m'} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi, \quad (4.46)$$

$$= 2\pi P_l^m P_{l'}^{m'} \delta_{mm'}, \quad (4.47)$$

avec δ_{ij} le symbole de KRONECKER, ce qui permet de simplifier l'expression (4.45) :

$$\begin{aligned} \Pi_{kl} &= -2i \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left(\sum_{l,l',m,m'} \mathcal{F}_l^m C_l^m \mathcal{G}_{l'}^{m'*} D_{l'}^{m'*} P_l^m P_{l'}^{m'} \delta_{mm'} \right) d\omega, \\ &= -2i \sum_{l,l',m} P_l^m P_{l'}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \mathcal{F}_l^m(r, \omega) \mathcal{G}_{l'}^{m*}(r, \omega) C_l^m(\omega) D_{l'}^{m*}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dans le cas du potentiel qui nous intéresse, c'est-à-dire pour une résonance spin-orbite 1 : 1 et à l'ordre 4 en excentricité, l'intégrale peut s'écrire sous forme discrète, ce qui donne l'expression finale suivante :

$$\Pi_{kl} = -2i \sum_{l,l',m} P_l^m P_{l'}^m \sum_{n=-2}^2 \omega_n \mathcal{F}_l^m(r, \omega_n) \mathcal{G}_{l'}^{m*}(r, \omega_n) {}^n C_l^m {}^n D_{l'}^{m*}, \quad (4.49)$$

4. Ici, le raisonnement et les calculs finaux ont été effectués avec des fonctions de LEGENDRE associées (de première espèce) normalisées (P_l^m). Ceci est cependant un choix purement pratique... Noter que des fonctions non normalisées (P_{lm}) sont employées aux chapitres 1 et 5.

avec $\omega_n = n\omega_o$ et $\omega_o = 2\pi/T_o$ la fréquence orbitale principale (c.-à-d. le moyen mouvement), ${}^nC_l^m$ et ${}^nD_l^m$ étant des coefficients complexes.

Finalement, la puissance moyennée en longitude, $\langle P \rangle_\phi$, qui sera utilisée pour caractériser la réponse moyenne du corps en géométrie annulaire (anneau disposé selon un méridien) s'écrira, puisqu'elle doit inclure les contributions de chacune des composantes \bullet_{kl} des contraintes de marée (aux différentes fréquences) :

$$\langle P \rangle_\phi(r, \theta) := \frac{1}{2\pi} \oint \langle P \rangle(r, \vartheta, \phi) d\phi \quad (4.50)$$

$$= \sum_{kl} \Pi_{kl}(r, \theta), \quad (4.51)$$

avec r et θ les coordonnées polaires associées à l'anneau sphérique.

Les fonctions Π_{kl} , dérivées au moyen de l'équation (4.49), sont présentées en annexe de l'article qui suit (cf. 4.2.5, p. 265). Les avantages de ces solutions semi-analytiques sont la simplicité qu'elles permettent pour l'évaluation de la dissipation de marée et la rapidité de calcul qui en découle : en effet, aucun passage en géométrie 3D sphérique n'est réalisé en pratique. Ceci permet de recalculer le champ de dissipation de marée à chaque instant, dans une simulation de convection thermique. Dans la méthode tridimensionnelle de Běhouňková *et al.* (2010), certes plus correcte par essence, l'évaluation du champ de dissipation reste coûteuse en temps de calcul ; pour cette raison, celui-ci n'est pas remis à jour à chaque instant. L'approche utilisée par Roberts et Nimmo (2008) pour évaluer la dissipation de marée au sein d'Encelade, qui s'inspire étroitement des travaux de Tobie *et al.* (2005), repose, elle aussi, sur un calcul 3D du champ de dissipation. Celui-ci est certes nécessaire pour les quelques simulations sphériques que présentent ces auteurs, mais il induit vraisemblablement un surcoût important dans le cas de leurs simulations 2D sphériques axisymétriques. Ces auteurs ne calculent la réponse moyenne qu'une seule fois, au début d'une simulation, et appliquent ensuite des corrections locales à partir de cet unique champ de dissipation moyen. La méthode semi-analytique élaborée durant cette thèse permet, entre autres, de contourner ce problème, dont on peut penser qu'il conduirait à des imprécisions croissantes pour un calcul à long terme (p. ex. avec une évolution orbitale).

Comme cela est présenté dans l'article qui suit [éq. (4.69)], le chauffage de marée à inclure dans les calculs de transfert de chaleur [éq. (2.14)] doit tenir compte des variations latérales (2D) de température et non plus simplement de la variation radiale (1D), comme c'est le cas pour le calcul de la réponse de marée moyenne du corps. Ces variations latérales n'ont *a priori* aucune raison de posséder une quelconque symétrie : l'anneau sphérique permet de s'affranchir de ce problème tout en conservant une variation correcte (c.-à-d. sphérique) des volumes élémentaires (cf. 2.1.3).

4.2 Article: *Coupling heat transfer and tidal dissipation in planetary mantles with CHEOPS-2D: Role of compressibility*

4.2.1 Introduction

Tidal dissipation plays a fundamental role in the energy budget and in the thermal-orbital evolution of various bodies in our Solar system, including Io (*e.g.*, Moore, 2003 ; Lainey *et al.*, 2009), Europa (Hussmann *et al.*, 2002 ; Tobie *et al.*, 2003 ; Nimmo *et al.*, 2007) and Enceladus (*e.g.*, Roberts et Nimmo, 2008 ; Tobie *et al.*, 2008), and probably also in other planetary systems (*e.g.*, Henning *et al.*, 2009 ; Běhounková *et al.*, 2011). Part of the mechanical energy due to tides is dissipated in solid and liquid layers through various frictional processes. In the solid mantle, dissipation mostly results from visous friction, which strongly depends on rheology, hence on temperature. As a consequence, there is a natural coupling between these effects and heat transfer inside planetary mantles. This coupling is a key feature for satellites or planets orbiting at a close distance to their central companion. In particular, it is fundamental to understand if a planet or satellite may remain thermally stable or may be subjected to thermal runaways (*e.g.*, Běhounková *et al.*, 2011).

Some authors already modeled the thermal-orbital evolution of the Galilean moons, including Ganymede (Showman *et al.*, 1997 ; Bland *et al.*, 2009) and the Io-Europa system (Ojakangas et Stevenson, 1986 ; Fischer et Spohn, 1990 ; Hussmann et Spohn, 2004), the long-term Earth-Moon system (Ross et Schubert, 1989), the early Moon (Meyer *et al.*, 2010), and super-Earths (Tachinami et Yuen, 2010). These pioneer studies all used parameterized or semi-parameterized models to describe heat transfer. However, these parameterized models do not accurately describe solid-state convection, particularly when feedbacks occur due to heterogeneous internal heating caused by tidal dissipation (Roberts et Nimmo, 2008 ; Běhounková *et al.*, 2010, 2011). Recently, Robuchon *et al.* (2011) modeled the coupled thermal-orbital evolution of two satellites of Saturn, Enceladus and Dione, with a self-consistent (*i.e.* not parameterized) treatment of thermal conduction. Their results highlighted the importance of thermal feedbacks on the tidal parameters of the satellites and consequently on their orbital evolution.

In order to fully model the thermal-orbital evolution of planetary bodies, one needs to take into account the internal heat transfer in a self-consistent way (wether these involve developed convection or exclusively thermal conduction). The major drawback of the previously mentioned coupled studies is the lack, or the oversimplification, of heat transport by thermal convection inside the bodies. We have devel-

oped a new numerical tool to overcome this simplification, CHEOPS-2D (Coupling Heat transfer and Evolution of the Orbit of Planets and of their Satellites in 2-Dimensional geometry). Conservation equations for heat transfer are treated through a compressible, anelastic formulation. Indeed, planetary mantles of Earth-like bodies are subjected to long-term (*i.e.* convective) viscous heating that can be locally important, particularly in hot and cold thermal plumes (*e.g.*, van den Berg et Yuen, 1997). On the other hand, tidal dissipation, which is probably crucial for the orbital evolution of close-in Earth-like extrasolar planets on highly eccentric orbits (*e.g.*, Gl 581 e, Forveille et al., 2012), is another kind of viscous heating, occurring at very short timescales when compared to convective dissipation. This heat source is highly temperature-dependent (*e.g.*, Mitri et Showman, 2008 ; Běhounková et al., 2010 ; Běhounková et al., 2012). The feedbacks and interactions between these viscous dissipations in the mantle of tidally heated bodies are poorly known. So far, tidally heated thermal convection was modeled within an incompressible framework (*e.g.*, Tackley et al., 2001 ; Tobie et al., 2003 ; Roberts et Nimmo, 2008 ; Běhounková et al., 2010, 2011), which is well justified for small bodies, like icy and/or rocky moons of giant planets. However, in Earth-like planets, and all the more in potential super-Earths, compressibility may hardly be neglected. The anelastic-liquid formalism of Jarvis et McKenzie (1980) enables us to consistently include adiabatic heating/cooling sources and both tidal and convective viscous dissipation in numerical models. Compressibility is also considered in the viscoelastic tidal response of the body, through an approach based on the work of Tobie et al. (2005). The resulting orbital evolution that will in fact change the tidal response, mainly through orbital eccentricity and semi-major axis (therefore tidal forcing frequency), is computed within the formalism of Kaula (1964). In the present study, we consider a fixed orbital configuration (here 1 : 1 spin-orbit resonance) as an illustrative example of the method, in order to focus on the coupling between compressible convection and tidal dissipation. More general coupled orbital-thermal evolutions will be addressed in forthcoming papers.

The model is detailed in section 4.2.2, where the general philosophy of our approach is outlined, the governing equations for compressible heat transfer and tidal dissipation feedback are presented, and the numerical methodology is described. Section 4.2.3 presents the physical hypotheses chosen in order to compare tidally heated compressible and incompressible cases. Then, section 4.2.4 presents key results of the application of our model to Earth-like planets, focusing on the effect of compressibility on, first, isothermal viscoelastic models (*i.e.* without heat transfer) and, second, on tidally heated heat transfer.

4.2.2 Model

A self-consistent description of the evolution of a tidally heated planet and/or a satellite, requires to account for the tidal energy dissipation feedbacks on both thermal and orbital evolutions. Even though this highly coupled problem should ideally be treated in a fully spherical geometry, such approaches often require high computational times and, therefore, limit the parameter range that can be explored. In order to save computational time without too much loss of physical accuracy, two different geometrical approaches are combined in our model: the spherical annulus (Hernlund et Tackley, 2008) for thermal transfer and a spherically symmetric geometry for tidal dissipation.

The coupling mechanism between thermal transfer and tidal dissipation is detailed in figure 4.1. The various steps and symbols in this diagram will be detailed in the two next sections. The general idea of the coupling method is as follows: 2D heat transfer (spherical annulus computation) governs the temperature field, from which a radially averaged distribution is extracted, at a given time step. This distribution, together with the associated mechanical properties, are the inputs for the computation of the complex radial functions of the planet, namely its viscoelastic response to tidal forcing. For a given tidal perturbing potential, the semi-analytical solution corresponding to the longitudinally averaged response of the spherical body is used to project it back to the spherical annulus geometry. The resulting mean tidal dissipation field is locally corrected to account for lateral variations of temperature. The corresponding tidal heating field (H_{tide}) is then used as a heterogeneous heat source in the computation of heat transfer, yielding a new average temperature profile at the next time step, and so forth...

When orbital evolution is included, the tidal heating field is integrated over the entire volume of the mantle and the resulting global dissipated power is introduced in the computation of the orbital evolution: changes of the semi-major axis, eccentricity, inclination, and rotational states of the bodies. The result is a modified tidal potential, that will ultimately affect the mean tidal response. We stress here the pivotal role of the temperature field (see fig. 4.1), which controls both viscous (convective) and viscoelastic (tidal) rheologies, and buoyancy of the mantle, hence modulating tidal response and heat transfer efficiency. For this reason, thermal convection must be accurately computed to describe thermo-orbital evolution.

Thermal convection

We describe the solid state heat transfer in the compressible mantle by solving the usual conservation equations for thermal convection in the infinite Prandtl number anelastic-liquid approximation (ALA), introduced by Jarvis et McKenzie (1980). Within this framework, the primitive variable forms of the conservation equations

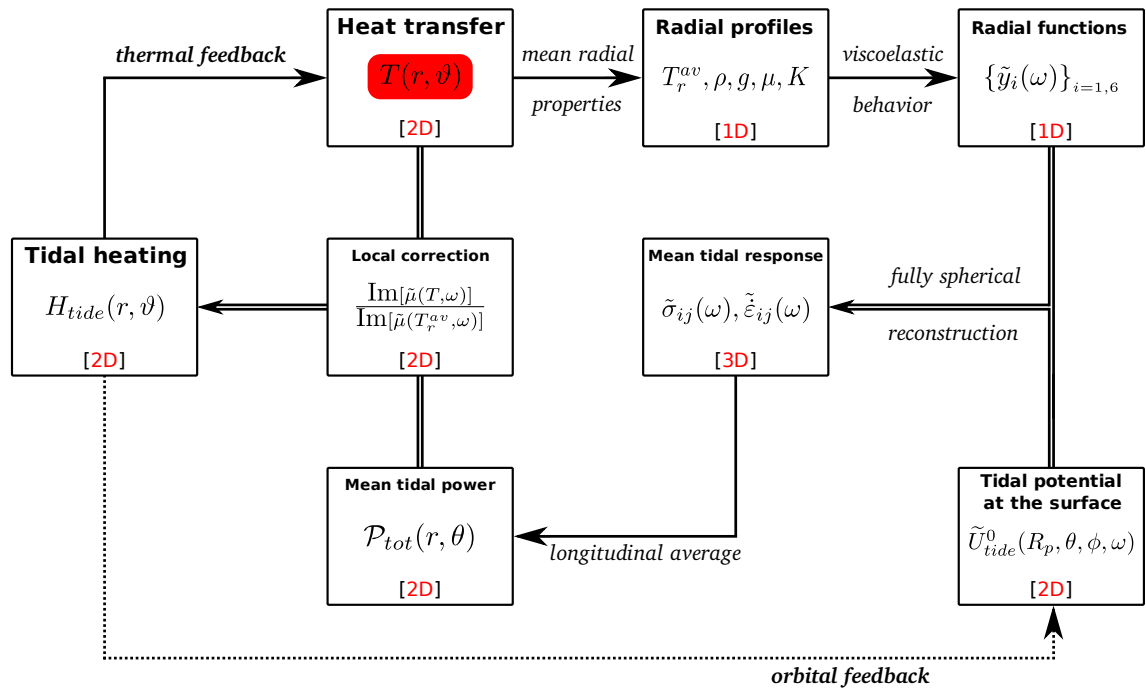


Figure 4.1 : Detailed structure of the coupling method for heat transfer and tidal dissipation in CHEOPS-2D. The intrinsic geometry of each sub-problem is indicated in square brackets. Hollow arrows stand for combination of phenomena while simple ones only represent direct consequences; the dotted one stands for the orbital feedback (not considered in this paper). Note the pivotal role of the temperature field $[T(r, \vartheta)]$. In fact, the reconstruction of the fully spherical mean tidal response is only virtual here and does not need to be explicitly performed, thanks to our semi-analytical solution derived for the 2D mean tidal power $[\mathcal{P}_{tot}(r, \vartheta)]$. See text for the signification of the various symbols and details.

of mass, momentum and energy are, respectively, for any coordinate system:

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (4.52)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla(p - \bar{p}) + \left[\bar{\alpha}(T - \bar{T}) - \frac{p - \bar{p}}{\bar{K}_T} \right] \bar{\rho} \mathbf{g}, \quad (4.53)$$

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\bar{k} \nabla T) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \bar{\alpha} T \bar{\rho} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \bar{\rho} H, \quad (4.54)$$

where ρ is the density, \mathbf{v} is the velocity, p is the pressure, \mathbf{g} is the acceleration of gravity, α is the thermal expansivity, T is the temperature, K_T is the isothermal bulk modulus, c_p is the specific heat at constant pressure, $\frac{D\bullet}{Dt}$ is the Lagrangian time derivative, k is the thermal conductivity, $\boldsymbol{\tau}$ is the viscous stress tensor, and H is an internal heating rate per unit mass; $\bar{\bullet}$ stands for hydrostatic, adiabatic depth-dependent values in the reference state.

Since this study deals with tidally heated bodies, we decompose the internal heat sources into radiogenic and tidal contributions: $H = H_{rad} + H_{tide}$. The second and third terms of the right-hand side of equation (4.54) correspond to the viscous dissipation and to the adiabatic heating/cooling contributions, respectively. The viscous stress tensor is developed here as a function of velocity, for a Newtonian-Stokesian, isotropic fluid:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2 \nabla \cdot \mathbf{v}}{3} \mathbf{G} \right], \quad (4.55)$$

with η the dynamic viscosity and \mathbf{G} the metric tensor; \bullet^T stands for second-order tensor transposition.

Two important dimensionless numbers characterize the isoviscous thermal convection under the ALA: the Rayleigh number, Ra and the dissipation number, Di. These are defined by:

$$\text{Ra} := \frac{\alpha_0 c_{p0} \Delta T_{sa} \rho_0^2 g_0 L^3}{k_0 \eta_0}, \quad (4.56)$$

$$\text{Di} := \frac{\alpha_0 g_0 L}{c_{p0}}, \quad (4.57)$$

where ΔT_{sa} is the super-adiabatic temperature jump across the mantle of thickness L and \bullet_0 refers to the characteristic values that scale the different variables. Here, Ra and Di are defined at the core-mantle boundary (*i.e.* characteristic values defined at radius $R_0 := R_p - L$, R_p being the planetary body's radius). The ratio Di/γ , with γ the Grüneisen parameter, defines a compressibility number Co (*i.e.* dimensionless characteristic compressibility). Ra roughly characterizes the vigor of convection

while Di controls the importance of viscous dissipation and adiabatic heating/cooling (temperature stratification) and Co directly the density stratification.

For further details on the ALA equations, the reader is referred to the book of Schubert *et al.* (2001). We stress here that we are not neglecting the dynamic pressure ($p - \bar{p}$) in the buoyancy term of the momentum conservation equation, in order to keep full energetic consistency (Leng et Zhong, 2008).

The thermal transfer equations (4.52)-(4.54) are solved in the spherical annulus geometry (Hernlund et Tackley, 2008). The goal of this approach is to capture as much of the essential characteristics of the fully spherical geometry as possible in a 2D framework, associated with a polar coordinate system (r, ϑ) , and an orthonormal basis (*i.e.* $\mathbf{G} \equiv \mathbf{I}$, with \mathbf{I} the second-order identity tensor). The two-dimensionality has the advantage of requiring smaller computational times, thus allowing for a wider parameter space in simulations. This point is crucial when considering fully coupled thermal-orbital evolutions.

Hernlund et Tackley (2008) proposed a generic formulation, with an effective degree of curvature d . For $d = 1$, the equations correspond to the classical cylindrical annulus geometry and, for $d = 2$, to the case of the spherical annulus. This formulation also allows for a quasi-cartesian geometry, by taking $d = 1$, a curvature f close to unity (*e.g.*, $f := R_0/R_p = 0.9999$), and an annulus segment of tiny angular extent (*see, e.g., Jarvis, 1993*). When compared to other two-dimensional curvilinear geometries (*e.g.*, spherical-axisymmetric), the spherical annulus approach yields the closest approximation of the fully spherical geometry for most of the convection cases investigated by Hernlund et Tackley (2008).

The tidal effects are intrinsically three-dimensional. For this reason, the tidal stresses and the associated strain rates are computed in the fully spherical geometry, with a radial function-based method for the tidal response of the planet, as explained below, and the corresponding volumetric power is averaged over the longitudinal direction.

Tidal dissipation computation and feedback

A self-gravitating planet or moon subjected to periodic tidal forcing undergoes spheroidal deformations, which are governed by a Poisson equation and the equation of motion for small perturbations:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = -\frac{1}{4\pi G} \nabla^2 U_{tide}, \quad (4.58)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \nabla (U_g + U_{tide}^0 + U_{tide}^i), \quad (4.59)$$

where \mathbf{u} and $\boldsymbol{\sigma}$ are the tidally induced displacement and stress tensor, G is the

gravitational constant and U_g , U_{tide}^0 and U_{tide}^i are the gravitational, tidal perturbing and tidally induced potentials, respectively.

The viscoelastic behavior of planetary materials may be described by various rheological models. In the present study, we consider an isotropic compressible Maxwell viscoelastic rheology. The stress and strain rate tensors are then related by the following constitutive equation:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \frac{\mu}{\eta_{eff}} \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{G} \right] = 2\mu \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left(K - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{G}, \quad (4.60)$$

with μ the shear modulus, η_{eff} the effective viscosity relevant to tidal frequencies, K the bulk modulus; $\text{tr}(\bullet) := \mathbf{G} : \bullet$ stands for the trace of a second-order tensor and $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ is the infinitesimal strain rate tensor.

These equations can be transposed into the frequency domain by taking their Laplace transforms and applying the correspondence principle (Biot, 1954 ; Cathles, 1975). The constitutive equation (4.60) becomes a Hooke-like equation, characterized by complex effective Lamé parameters $\tilde{\lambda}(\omega)$ and $\tilde{\mu}(\omega)$, at any angular frequency ω ; $\tilde{\bullet}$ indicates Laplace transforms. The frequency version of the system (4.58)-(4.59) is then treated in the fully spherical coordinate system, extending from the center to the surface of the planet (*i.e.* standard coordinates r, θ, ϕ ; $\mathbf{G} \equiv \mathbf{I}$) and within the formalism of Pekeris et Jarosch (1958), valid for spherically-layered bodies. This provides a laterally-averaged tidal response through the radial functions $\{\tilde{y}_i(r, \omega)\}_{i=1,6}$ (see *e.g.*, Takeuchi et Saito, 1972 ; Molodenskiy, 1976 ; Tobie *et al.*, 2005).

The different steps of the coupling method are presented in figure 4.1. First, an average radial distribution $T_r^{av}(r)$ is extracted from the 2D-temperature field, $T(r, \vartheta)$, at a given time. Then, for a given set of mechanical radial distributions [here $\bar{\rho}(r)$, $\mu(r)$ and $K(r)$], the resulting effective Lamé parameters profiles $\tilde{\lambda}(r, \omega)$ and $\tilde{\mu}(r, \omega)$ are computed. For a Maxwell viscoelastic rheology, considering only shear dissipation, these functions are given by:

$$\tilde{\mu}(T_r^{av}, \omega) = \frac{i\omega\mu(r)}{i\omega + \frac{\mu(r)}{\eta_{eff}(T_r^{av}, \omega)}}, \quad (4.61)$$

$$\tilde{\lambda}(T_r^{av}, \omega) = K(r) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}(T_r^{av}, \omega), \quad (4.62)$$

with i the imaginary unit.

All the results presented here assumed a Maxwell compressible rheology. Note, however, that any other behavior (Burgers, Andrade, etc.) may be considered in our approach as long as complex shear and bulk modulus, $\tilde{\mu}$ and \tilde{K} can be defined in the frequency domain. The main motivation of using a Maxwell model is to reduce the number of free parameters to explore.

Following the elastic formulation of [Takeuchi et Saito \(1972\)](#), the tidal stress and strain rate tensor components \bullet_{ij} (spherical coordinates), in the frequency domain, are written in their most general form as:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{R}_l^m(r, \theta, \phi, \omega) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.63)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(r, \theta, \phi, \omega) = i\omega \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{S}_l^m(r, \theta, \phi, \omega) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.64)$$

where R_l^m and S_l^m are functions that contain the mechanical behavior of the planet (*i.e.* the aforementioned functions $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ and $\{\tilde{y}_i\}_{i=1,6}$), but also the surface tidal perturbing potential $\tilde{U}_{tide}^0(R_p, \theta, \phi, \omega)$ and its azimuthal first and second spatial derivatives (see [Tobie et al., 2005](#), for details) in their spherical harmonic decomposition form. $Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi)$ is the usual spherical harmonic of degree l and order m , with P_l^m the fully normalized associated Legendre polynomials.

The volumetric complex power \mathcal{P} is then:

$$\mathcal{P}(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{i,j} \mathcal{P}_{ij}(r, \theta, \phi, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}^*, \quad (4.65)$$

with \bullet^* standing for the complex conjugate. Indices i and j in the sum stand for the spherical coordinates r , θ or ϕ .

For the heat transfer description, this 3D spherical energy source is included in a 2D framework (spherical annulus) by averaging it on longitudes, hence preserving the most important, latitudinal variations (the 2D annular domain used to describe heat transfer is considered perpendicular to the orbital plane of the perturbed body around its perturber), resulting in:

$$\Pi_{ij}(r, \theta, \omega) := \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{P}_{ij} d\phi, \quad (4.66)$$

which reduces to

$$\Pi_{ij} = -i\omega \sum_{l,l',m} \tilde{R}_l^m \tilde{S}_{l'}^{m*} P_l^m P_{l'}^m, \quad (4.67)$$

taking advantage of the orthogonality property of spherical harmonics.

As an illustrative example, we consider here the tidal perturbing potential in the form used by [Běhounková et al. \(2010, 2011\)](#), *i.e.* derived from [Kaula \(1964\)](#), for a zero obliquity of the perturbed body, up to the fourth order in eccentricity and to the order $l = 2$, here for a 1:1 spin-orbit resonance. In this particular case, only two forcing frequencies appear: ω_o , the orbital frequency (*i.e.* mean motion), and $2\omega_o$.

The resulting six contributions Π_{ij} corresponding to the \bullet_{ij} components of the tidal stress and strain rate tensors are given in appendix 4.2.5 in a semi-analytical form (*i.e.* only the radial functions must be numerically computed).

The real part of the complex power gives the contribution of the dissipated power averaged over one orbital cycle, \mathcal{P}_{tot} , at a given angular frequency ω :

$$\mathcal{P}_{tot}(r, \theta, \omega) = \sum_{i,j} \text{Re} [\Pi_{ij}(\omega)], \quad (4.68)$$

The term \mathcal{P}_{tot} represents the longitudinally-averaged mean response of the body. It is therefore symmetric with respect to the polar axis. However, tidal dissipation depends on the local temperature field which can be “arbitrarily” spatially heterogeneous. Therefore, a correction from the 2D-temperature field $T(r, \vartheta)$ is applied, resulting in a temperature- and frequency-dependent tidal heating field per unit mass:

$$H_{tide}(r, \vartheta) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[\tilde{\mu}(T(r, \vartheta), \omega)]}{\text{Im}[\tilde{\mu}(T_r^{av}, \omega)]} \mathcal{P}_{tot}(r, \vartheta, \omega) d\omega. \quad (4.69)$$

This term represents an internal heating source (from external origin) which is heterogeneous both in space and time and must be included in the energy equation (4.54). Recall that, in the particular case of a 1 : 1 spin-orbit resonance, only two frequencies appear in the perturbing potential. The integral in equation (4.69) is thus simply evaluated as the sum of two contributions (at ω_o and $2\omega_o$).

Numerical solvers

Conservation equations (4.52)-(4.54) are discretized on an orthogonal staggered mesh, through a finite volume method (Patankar, 1980), using the spherical annulus geometry of Hernlund et Tackley (2008), with radial mesh refinement in thermal boundary layers. Momentum equations are then solved using a geometric multi-grid method (Brandt, 1977), with V- or F-cycles and a SIMPLER-based smoother (Patankar, 1981 ; Trompert et Hansen, 1996) that couples pressure and velocity. Relaxation at each level of the SIMPLER algorithm is performed using a standard Gauss-Seidel method: coupled to multigrid, this simple method has been proven to be very efficient (*e.g.*, Choblet, 2005). Coarse grids operators are derived from the fine grid discretization. Restrictions and prolongations between the grid levels are done through bilinear, curvature-corrected averaging and interpolating schemes.

Conservation of energy is treated with a second-order method, centered derivatives for heat diffusion and a high resolution Godunov method together with a “superbee” slope limiter for the advective term (Godunov, 1959 ; Roe, 1986), thus minimizing numerical diffusion. Advancing in time is performed using an explicit

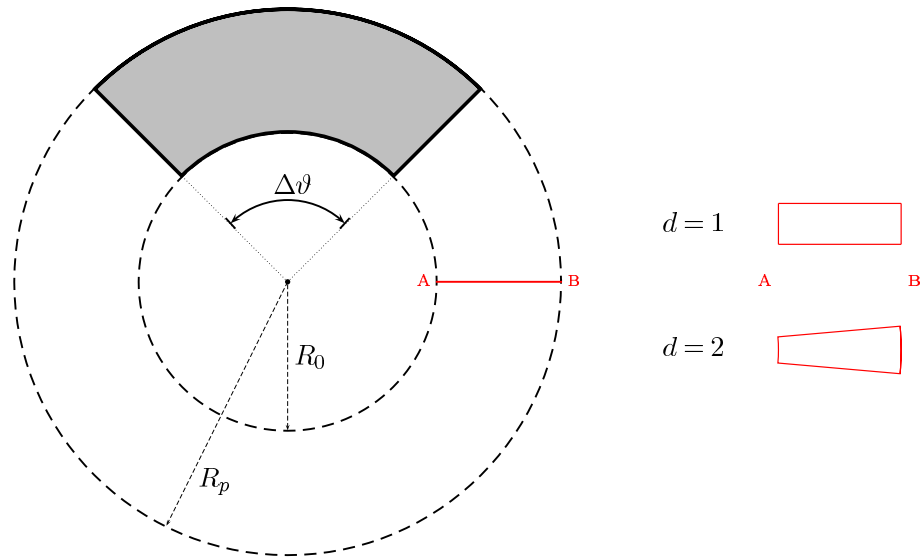


Figure 4.2 : Working geometry of CHEOPS-2D. The physical domain, here in solid gray, is an annulus (full or segment of angular extent $\Delta\vartheta$), delimited by its inner (R_0) and outer (R_p) radii. The red line is a radial cross-section through the annulus, showing the intrinsic degree of curvature for the cylindrical ($d = 1$) and spherical ($d = 2$) annulus. The corresponding slices, on the right side, represent the different radial evolutions of the “virtual” thickness r^{d-1} (see [Hernlund et Tackley, 2008](#)).

method with a standard Courant-Friedrichs-Lewy criterion. This makes the treatment of the energy equation (4.54) completely decoupled from those of equations (4.52) and (4.53).

The thermal convection part of CHEOPS-2D was benchmarked against several data sets: the 2D-Cartesian benchmark of [King et al. \(2010\)](#) [box of aspect ratio • *i.e.* $\Delta\vartheta = 2 \bullet (1 - f)/(1 + f)$, with $f = 0.9999$ and $d = 1$; see figure 4.2] in Boussinesq (BA), extended-Boussinesq (EBA), truncated anelastic-liquid (TALA) and anelastic-liquid (ALA) approximations and also the complementary BA benchmarks of [Blankenbach et al. \(1989\)](#) and of [Travis et al. \(1990\)](#). Thermal convection in the spherical annulus ($\Delta\vartheta = 2\pi$; $d = 2$) and rescaled cylindrical annulus ($d = 1$, $R_0/R_p = f^2$; *e.g.*, [van Keken, 2001](#)) has been tested against the simple BA test cases presented in [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). Note that the equations for the various thermodynamic approximations can be retrieved from equations (4.52) to (4.54): TALA cases correspond to an infinite bulk modulus \bar{K}_T and EBA cases to the additional condition of constant values for $\bar{\rho}$ and \bar{T} . Further neglecting other variations of properties •, and the viscous and adiabatic heating terms in equation (4.54), results in the BA. See for example [King et al. \(2010\)](#) for a detailed discussion on this topic.

The equation of motion for computing the tidal dissipation [eq. (4.59)] is solved by using the radial function-based method of Takeuchi et Saito (1972), applied here to the viscoelastic response of a body to a given forcing tidal potential (*e.g.*, Molodenskiy, 1976 ; Tobie *et al.*, 2005). The system of ordinary differential equations that governs the six radial functions of the viscoelastic body is solved by a fourth-order Runge-Kutta method, with an optimized, adaptative spatial step.

For the convective part, thermomechanical boundary conditions are the following: the inner surface (radius R_0) of the mantle is considered free-slip, undeformable and isothermal – $T(R_0) := T_0$, corresponding to the presence of a liquid core, and the outer surface (R_p) is considered no-slip, undeformable and isothermal – $T(R_p) := T_s$. For the tidal deformation part, the radial functions are integrated from the center of the body to its surface. A fully liquid core is assumed, with no inner solid core. A resolution of 64x512 cells is used to perform the simulations, with double radial mesh refinement in the thermal boundary layers. The same radial mesh discretization was used to compute the radial functions, with discrete nodes located at radii corresponding to the cell centers.

4.2.3 Defining comparable cases

Thermodynamic properties

The thermodynamic dependence of shear viscosity inside planetary mantles, whether these are composed of silicates or of ice, can be described by an Arrhenius law (Arrhenius, 1887 ; Weertman, 1970). Considering that we only focus on the effect of elastic compressibility on tidally heated convection, we use a simpler exponential form of the shear viscosity law and consider the Frank-Kamenetskii approximation (Frank-Kamenetskii, 1969), *i.e.* the pressure, stress and grain-size dependences of shear viscosity are not taken into account. This approximation is appropriate here, because we consider convection cases in the stagnant lid regime. The viscosity is thus given by:

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\Upsilon \frac{T_0 - T}{\Delta T}\right), \quad (4.70)$$

where Υ is the non-dimensional Frank-Kamenetskii parameter, therefore adding a third dimensionless number characterizing thermal convection in the ALA. $\Delta T = \bar{T}(R_0) - \bar{T}(R_p) + \Delta T_{sa}$ is the *total* temperature jump accross the mantle, whereas ΔT_{sa} is the super-adiabatic jump.

For sake of simplicity, the nature of the temperature dependence of the effective viscosity η_{eff} used for the tidal dissipation computation is the same as in equation (4.70), but with potentially different parameters: η_0^{eff} and Υ_{eff} . Table 4.2 gives the various thermodynamic parameters and their associated values used for this study.

We consider the same temperature-dependence for both long-term (convective) and tidal (effective) viscosity (*i.e.* $\Upsilon \equiv \Upsilon_{eff}$). The latter is strongly frequency-dependent and, given our Maxwell rheology, is related to the dissipation factor Q^{-1} by:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta_{eff}}{\mu} \omega\right)^2}}. \quad (4.71)$$

The value of η_0^{eff} is evaluated using the same empirical, Earth-like scaling law as in Běhounková *et al.* (2011), that is $Q_0^{-1} = \left(350 - \frac{10\pi}{\omega_o}\right)^{-1}$.

To define a simple reference state in the thermal convection problem, we consider a mantle with a radial reference density distribution in the general form: $\bar{\rho}(r) = a \exp(br)$, a and b being real constants. Hence, we have:

$$\frac{\partial \log(\bar{\rho})}{\partial r} = b = \frac{\bar{c}(r)}{\bar{\gamma}(r)}, \quad (4.72)$$

with c a given variable. For an adiabatic reference state, $c(r)$ is equal to $\frac{\bar{\alpha}\bar{g}}{\bar{c}_p}$. Given the definition of the Grüneisen parameter:

$$\gamma := \frac{\alpha K_S}{\rho c_p}, \quad (4.73)$$

with K_S the isentropic bulk modulus, in case of constant gravity $\bar{g} \equiv g_0$ and with the approximation $K_S \approx K_T$ this finally gives the constraint of a constant $\bar{K}(r)/\bar{\rho}(r)$ ratio.

For sake of simplicity, thermal expansion and specific heat are assumed constant. This choice enables us to focus on the effect of compressibility. The resulting expressions for the reference state density and temperature (adiabat) profiles are those of a simplified Adams-Williamson reference state (see figure 4.3):

$$\bar{\rho}(r) = \rho_0 \exp\left(\text{Co} \frac{R_0 - r}{L}\right), \quad (4.74)$$

$$\bar{T}(r) = T_s \exp\left(\text{Di} \frac{R_p - r}{L}\right). \quad (4.75)$$

In this case, the super-adiabatic temperature jump across the mantle is given by:

$$\Delta T_{sa} = \Delta T + T_s [1 - \exp(\text{Di})]. \quad (4.76)$$

Since the deviations from the reference state are small, the density profile used for computing the tidal response, $\rho(r)$ [eq.(4.58)-(4.59)], is considered equal to the

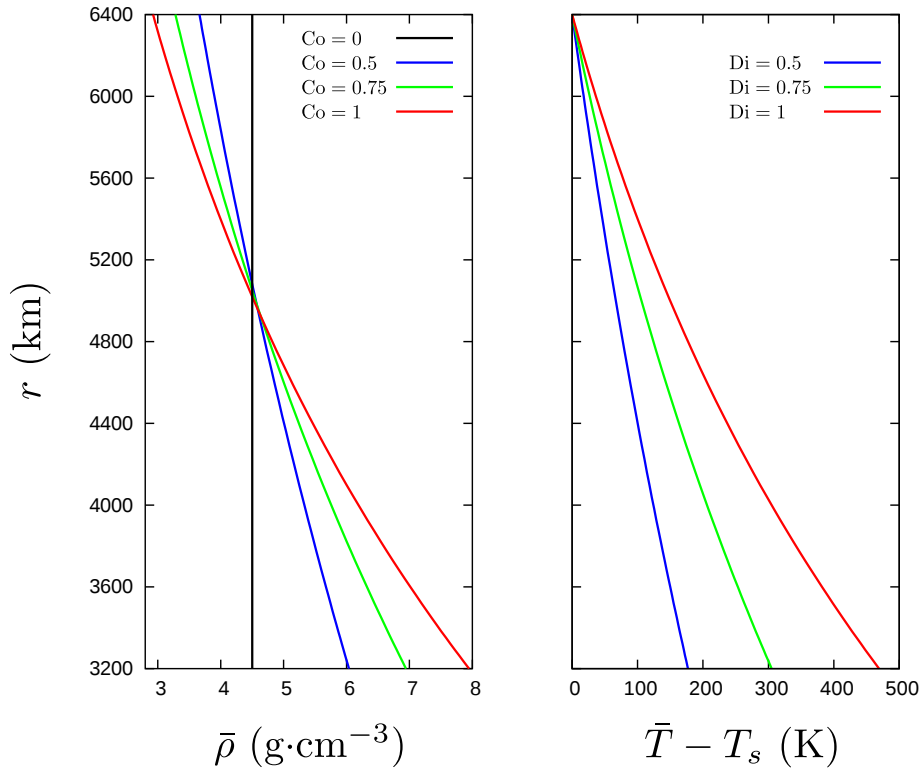


Figure 4.3 : Density and temperature reference profiles. The density variation (left) is shown as a function of depth and of the three compressibility numbers considered in this study. The various profiles are scaled such as the total mass of the mantle remains the same (see text). The common average value is shown with the vertical line, corresponding to the constant density profile in incompressible cases (BA and EBA; $\text{Co} = 0$). The reference adiabat relative to the surface temperature T_s is shown (right) for the corresponding dissipation numbers.

reference state variable $\bar{\rho}$, hence $K(r) \equiv \bar{K}_T$ [eq. (4.60) and (4.62)]. We additionally assume the classical relation $\mu(r) \approx \frac{3}{5}K(r)$ valid for PREM-like lower mantle properties (e.g., Dziewonski et Anderson, 1981).

Finally, the core is considered liquid ($\mu \equiv 0$), incompressible – therefore keeping the effect of mantle compressibility only – and of constant density ρ_C .

Scaling between cases

For sake of comparison between the compressible and incompressible cases, we defined the density, bulk and shear modulus in the incompressible case as the spherically-averaged values $\langle \bullet \rangle$ obtained in the compressible case. Hence, given the density distribution (4.74), we have:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\rho} \rangle = & \frac{3\rho_0/\text{Co}^2}{1+f+f^2} \left\{ (1-f) [(1+f)(2-\text{Co}) - 4] \right. \\ & \left. + [1 - \exp(-\text{Co})] \left[2(1-f) \left(1 + \frac{1-f}{\text{Co}} \right) + \text{Co} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

which reduces to a simple average (*i.e.* no curvature correction) in the Cartesian case ($f = 1$). This scaling between incompressible and compressible cases allows us to compare models with the same total mass and the same averaged elasticity. The values chosen for $\langle \rho \rangle$ and $\langle K \rangle$ are indicated in table 4.2. In the compressible case, the radial distributions $\rho(r)$, $K(r)$ and $\mu(r)$ are related through the constant ratios K/ρ and μ/K (see above and tab. 4.2). Given (4.56), these relations define a scaling between the Rayleigh numbers of the ALA, BA, and EBA simulations:

$$\text{Ra}^{(E)BA} = \left[\frac{\langle \bar{\rho} \rangle}{\rho_0(f, \text{Co})} \right]^2 \text{Ra}^{ALA}, \quad (4.78)$$

where ρ_0 is given by formula (4.77) for a given curvature f and compressibility number Co .

For sake of consistency between the compressible and incompressible cases (especially when tidal dissipation is included), we also need to use a similar depth-dependence of the long-term viscosity [eq. (4.70)] in (E)BA, and in ALA cases. Otherwise, the difference between incompressible and compressible cases would be dominated by this depth-dependence, interfering with our goal of examining the role of compressibility in tidally heated convection. This dependence is only due to the adiabat \bar{T} , which is constant ($\bar{T} \equiv T_s$) in (E)BA cases. Therefore, the scaled viscosity for BA and EBA cases is simply:

$$\eta^{(E)BA}(T, r) = \eta[T + \bar{T}^{ALA}(r)], \quad (4.79)$$

$$= \eta_0 \exp\left(\Upsilon \frac{T_0 - T - \bar{T}^{ALA}(r)}{\Delta T}\right), \quad (4.80)$$

where $\bar{T}^{ALA}(r)$ is obtained from (4.75).

4.2.4 Results

Effects of compressibility on the tidal response

Before investigating the role of compressibility on tidally heated convection, it is convenient to examine the general behavior of the semi-analytical solution derived for this study. In this paragraph, the tidal dissipation patterns and the associated global powers are analyzed as a function of compressibility factors and core sizes. These test cases have been computed for models with homogeneous viscosities ($\Upsilon = \Upsilon_{eff} = 0$). In this case, the solutions exhibit two intrinsic simplifications. First, since local corrections are not required [eq. (4.69)], the volumetric dissipation power field is directly the axisymmetric mean response \mathcal{P}_{tot} . Second, neglecting the temperature-dependence of both viscous (*i.e.* convective) and viscoelastic (*i.e.* tidal) rheologies implies that the solutions obtained are time-independent, for a given orbital configuration.

Bulk modulus Figure 4.4 shows typical examples of the tidal dissipation fields obtained. The left column shows the influence of the sole, constant bulk modulus value, K . The effect of K alone is rather subtle: in general, the maximum tidal heating values are obtained in the polar region, where tidal shear stress is maximal: this is a well-known pattern in case of a mantle that is tidally deformed above a liquid core, in a 1 : 1 spin-orbit resonance (*e.g.*, Tobie *et al.*, 2005 ; Běhounková *et al.*, 2010). Here, the effect of compressibility is to increase the size of the “hot” polar lenses which are subjected to intense tidal heating, as compared to the rest of the mantle, and the associated maximum values are located at the core-mantle boundary. This polar increase takes place at the expense of the regions with moderate tidal heating, resulting in a more concentrated dissipation in the case of compressible mantles. However, the global power P_{tide} of the entire mantle is only weakly changed.

“Main frequency” approximation These test cases offer the opportunity to check the hypothesis used by Běhounková *et al.* (2010, 2011), namely the assumption that the effective viscosity might be approximated by its main frequency (ω_o) value. This approximation only induces a small (about 1 %) underestimation of the

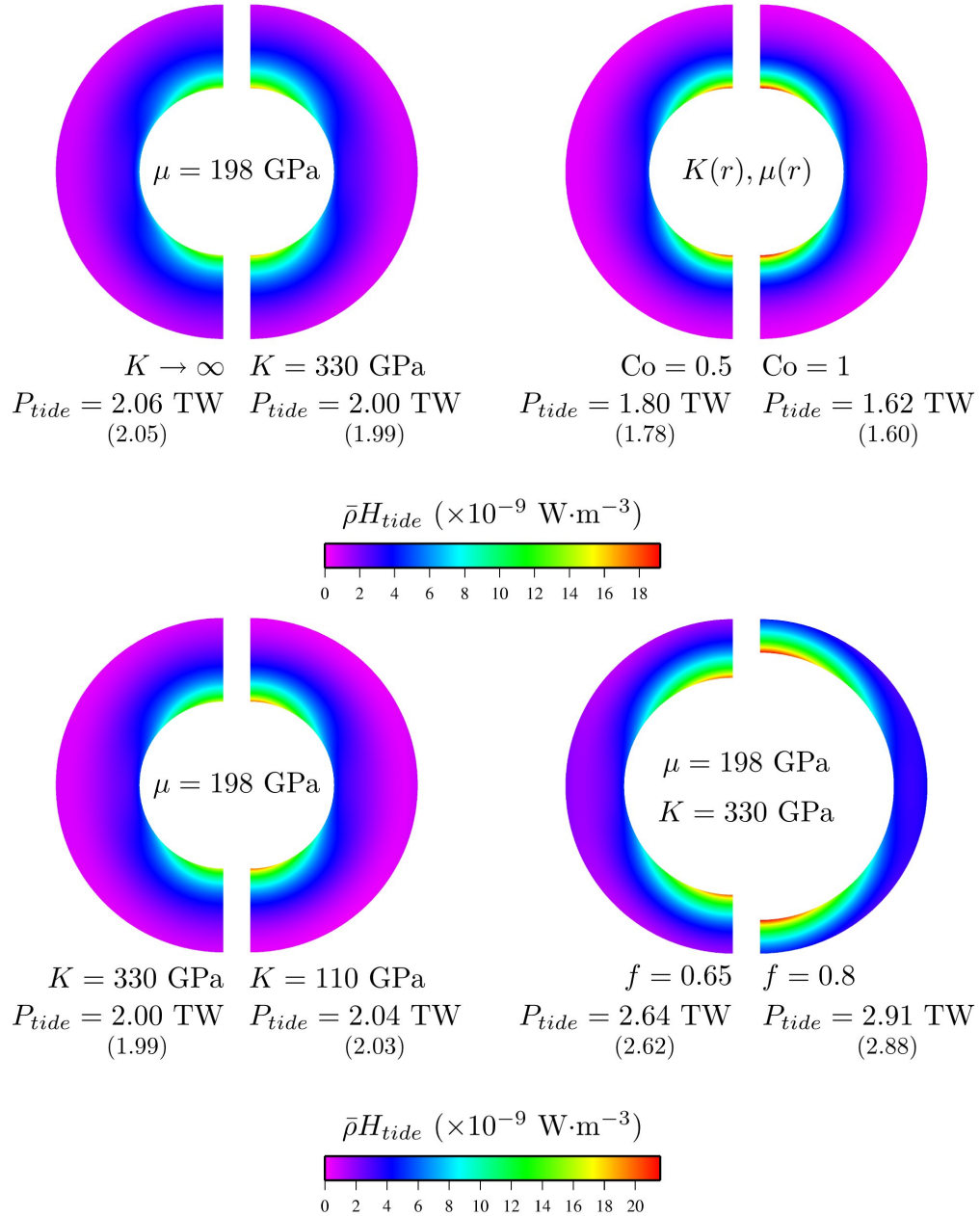


Figure 4.4 : *Semi-analytical solutions for the tidal response of an isoviscous body. The eccentricity and orbital period are $e = 0.05$ and $T_o = 20$ days. Influence of compressibility through the bulk modulus (K) value (left column) or its radial variation as characterized by the compressibility number (top right, $\langle K \rangle = 330 \text{ GPa}$). The ratio K/ρ is kept constant. Core size effect is shown through two thinner mantle cases (bottom right). Note that color scales are slightly different. For each case, the global dissipated power is indicated (P_{tide}); the values in brackets indicate the power obtained in the “main frequency” approximation used by Běhounková et al. (2010, 2011) for the viscoelastic rheology (see text for details).*

total dissipated power (bracketed values in figure 4.4). Indeed, though the effective viscosities at ω_o and $2\omega_o$ are different by about half an order of magnitude [here $\eta_{eff}(\omega_o) \approx 1.4 \cdot 10^{19}$ Pa·s and $\eta_{eff}(2\omega_o) \approx 8.2 \cdot 10^{18}$ Pa·s], the ω_o term dominates the perturbing tidal potential and the resulting global dissipation power is dominated by the main frequency contribution. This can be understood via the theoretical formula derived by Běhounková *et al.* (2010) for the total power, hereafter denoted by \mathcal{P}_{tot}^{th} , which is a generalization of the equation of Segatz *et al.* (1988) for the tidal potential up to fourth order in eccentricity and for 1 : 1 spin-orbit resonance:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{tot}^{th} &= \mathcal{P}_{tot}^{th}(\omega_o) + \mathcal{P}_{tot}^{th}(2\omega_o) \\ &= -\frac{(\omega_o R_p)^5}{8G} \left[k_2(\omega_o) Q^{-1}(\omega_o) (84e^2 - 303e^4 + 366e^6) \right. \\ &\quad \left. + k_2(2\omega_o) Q^{-1}(2\omega_o) \left(\frac{1815}{2}e^4 - 3847e^6 + \frac{26597}{6}e^8 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

where k_2 is the second-degree Love number. The $k_2 Q^{-1}$ factor, in our radial function approach, simply corresponds to the imaginary part of the complex value $\tilde{y}_5(R_p, \omega)$.

For moderate eccentricities, $\mathcal{P}_{tot}^{th}(\omega_o)$ will be the dominant term, a balance which is expected to change at higher eccentricities. The global power derived with our method were systematically compared with the values derived from the formulae of Segatz *et al.* (1988), valid up to first order in eccentricity, and of Běhounková *et al.* (2011): for the all the cases shown in figure 4.4, the relative deviations from the formulae were 1.32 % and only $0.63\text{-}9.33 \times 10^{-3}$ %, respectively. We stress here that our results show a remarkable agreement with the values obtained from the theoretical formula (4.81), which was derived for an homogeneous, incompressible body. However, core compressibility is expected to be more critical.

Density increase The top right part of figure 4.4 shows the volumetric power fields obtained for the two extreme compressibility numbers considered in this study. The general effect is to focus tidal dissipation in the lower part of the mantle and, even if the local, polar values are higher than in the homogeneous case (fig. 4.4, top left), the total dissipation is smaller, due to the relative small volume of the dissipative areas, as compared to the whole mantle. This effect is enhanced with an increasing compressibility number. This is explained by the higher densities in the bottom part of the mantle (see fig. 4.3), that limits the tidal deformation and consequently the amount of shear heating in these regions.

Core size A last effect examined here is the increase of the core size For the two cases shown in figure 4.4 (bottom right), namely $f = 0.65$ and $f = 0.8$, the values core density ρ_C are equal to $7913 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ and $6331 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, respectively, in order to

keep a constant total mass of the planet. A core size increase yields to wider polar lenses of intense tidal heating, and to a general increase of dissipation levels in the whole mantle. For $f = 0.8$, the global tidal dissipation is almost 50 % greater than in the standard case ($f = 0.5$). The dissipation is homogeneously distributed in non-polar regions of the mantle. As f is further increased, the global tidal power values drop: for two extreme cases with $f = 0.9$ and $f = 0.95$ (not shown here), we found 2.31 TW and 1.49 TW, respectively. The configuration $f = 0.8$ therefore seems to be close to an optimal one for tidal dissipation, at least for the 1 : 1 resonant case examined here (and $e = 0.05$).

Eccentricity As previously mentioned, one expects that the tidal power contains a more significant contribution of the second frequency ($2\omega_o$) for higher eccentricities. Figure 4.5 illustrates this case by comparing the space and frequency distributions of tidal dissipation for two eccentricities: $e = 0.05$ and $e = 0.10$. In addition to an increase of the total dissipated power, a higher eccentricity induces a larger contribution of the $2\omega_o$ term in polar regions and a less contrasted distribution of the dissipation between the top and the bottom of the mantle. The $2\omega_o$ term contributes to 2 % and 8 % of the total dissipated power for $e = 0.05$ and $e = 0.10$ %, respectively.

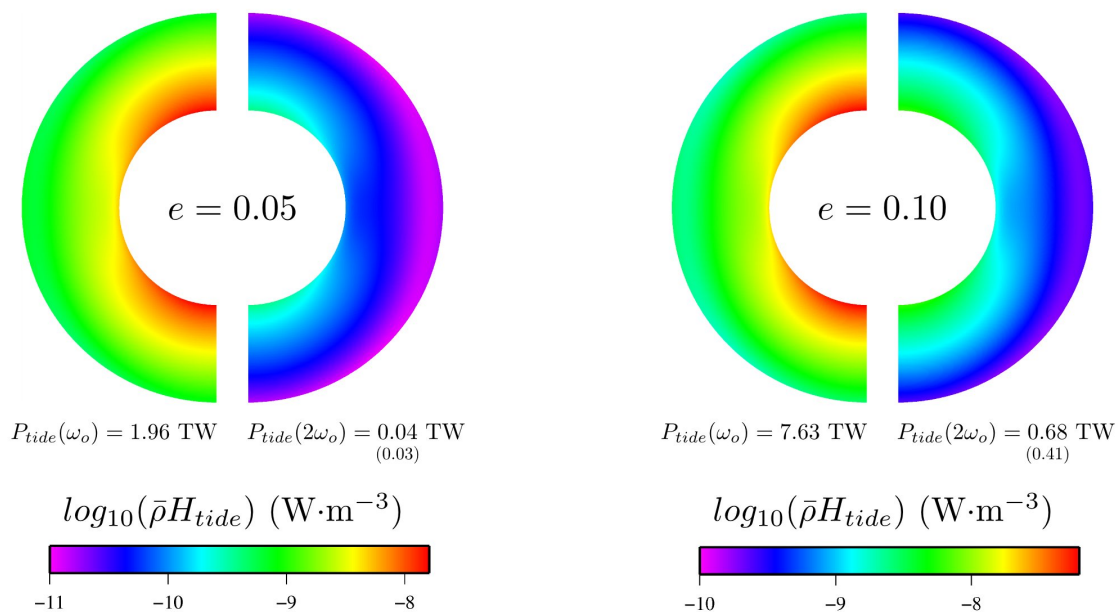


Figure 4.5 : Evolution of tidal power distribution in space and frequency for two eccentricity values. The values of the global tidal power contributions at both frequencies are indicated. The values in brackets are those found by considering the same effective viscosity for both power contributions (i.e. the approach of Běhounková et al., 2010, 2011).

This result points out the importance of higher order terms in eccentricity: the value $P_{tide} = 8.31$ TW for $e = 0,10$ (figure 4.5) deviates by only 2.47×10^{-2} % from the theoretical value (4.81), while the value calculated using the first order approximation (Segatz *et al.*, 1988) differs by more than 5 %.

Comparison of simple convection cases

Heat transfer in planetary mantles is governed by solid state convection. In this process, compressibility effects can be measured by the two characteristic dimensionless numbers introduced before, *i.e.* Di and Co. The dissipation number Di controls the rate at which mechanical energy is converted into heat by viscous friction and compressive, adiabatic increase of temperature with depth [see eq. (4.75)], hence the adiabatic heating/cooling sources. On the other hand, Di gives the ratio between viscous dissipation and heat flow (*e.g.*, Hewitt *et al.*, 1975). The compressibility number Co mainly controls the increase of density with depth. For the constant, unitary Grüneisen parameter that we assumed as a working hypothesis, Di and Co definitions merge. Therefore, we will hereafter use the sole notation Co to denote the overall effects of compressibility. These effects have been extensively studied by various authors for thermal convection in 2D-3D Cartesian (*e.g.*, Turcotte *et al.*, 1974 ; Jarvis et McKenzie, 1980 ; Tackley, 1996 ; van den Berg et Yuen, 1997) and spherical geometries (*e.g.*, Bercovici *et al.*, 1992). In this section, we present a general overview of the convective solutions that we used as initial solutions for the tidally heated configurations (see next section). We analyze the differences induced by compressibility effects for the cases presented in section 4.2.3, before including any tidal feedback. Indeed, since tidal heating will be controlled by the temperature distribution, we will see that even subtle changes in this field can drive different feedback behaviors between tidal dissipation and heat transfer.

Figure 4.6 shows the steady state temperature fields for a characteristic set of nine simulations. Three different values of the compressibility number were chosen: a standard one (Co = 0.5), which is typical for the Earth, an extreme one (Co = 1), which might be representative of an excessively thermally expandable mantle, or with a particularly high thermal capacity [see eq. (4.57)], and intermediate case (Co = 0.75). The results presented below were obtained for a willfully low Rayleigh number ($\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} Ra = 10^7$), in order to obtain fully (or close to) steady states in the final, tidally heated solutions. The comparison between the behavior of compressible (ALA) and incompressible (BA, EBA) cases is then easier, avoiding potential complexities such as thermal turbulence. One more realistic case ($\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} Ra = 10^9$) will be shown at the end of this paper.

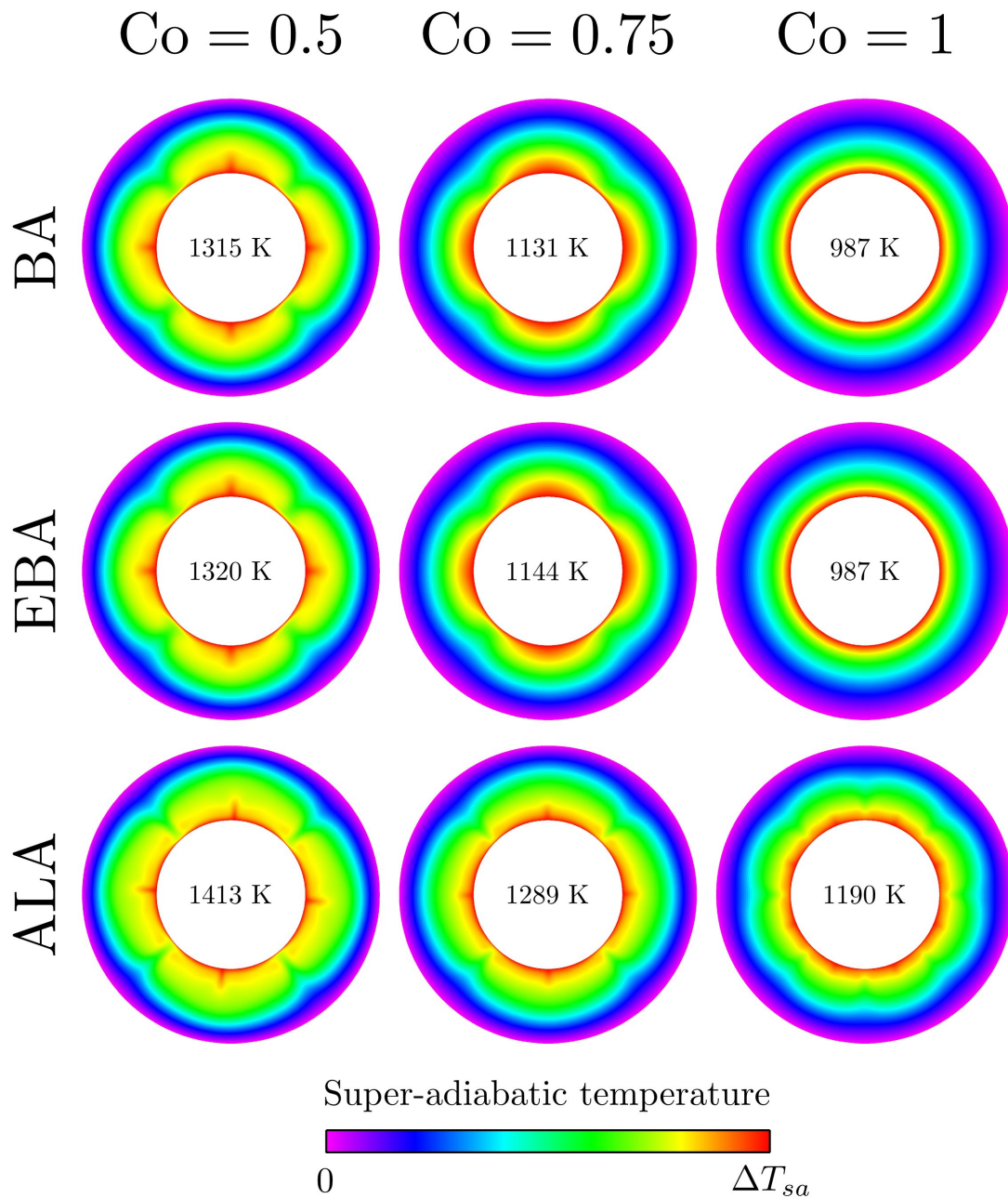


Figure 4.6 : Comparison of steady state convective solutions without tidal heating. The volume-averaged temperature value is shown for each case. The respective values of the super-adiabatic temperature jump ΔT_{sa} (scale) are: 2323 K ($Co = 0.5$), 2195 K ($Co = 0.75$) and 2031 K ($Co = 1$). Bottom Rayleigh numbers of Boussinesq (BA) and Extended Boussinesq (EBA) cases are scaled with respect to the value of the anelastic case (ALA), chosen such that $\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} Ra = 10^7$ [see eq. (4.78)]. The polar axis of the planet is parallel to a vertical line on this figure (i.e. as in fig. 4.4 and other ones in this paper).

Since the essence of the conservation equations used to describe convective heat transfer relies on perturbations around an adiabatic, hydrostatic reference state, comparisons of temperature fields will make sense only with the departures from this reference state, *i.e.* with the super-adiabatic temperature fields. Recall, however, that super-adiabatic and total temperatures are equivalent in the BA, but also in the EBA, where the inclusion of adiabatic heating (in addition to viscous one) is rather arbitrary: this latter approximation offers us the possibility to isolate the effect of these two heat sources on tidally heated convection, without any density increase.

An examination of the solutions presented in figure 4.6 reveal that, for a small, Earth-like compressibility number, the super-adiabatic temperature fields are very similar in compressible (ALA) and incompressible (BA, EBA) cases, as expected. In the anelastic case, hot and cold thermal plumes display a finer structure. This is due to a combination of two factors: (1) the bottom Ra is twice larger in this case when compared to the reference incompressible case (see 4.2.3), a consequence of our choice to keep the same mass of the mantle, in order to have a meaningful comparison of cases with tidal heating - this is the main effect; (2) the reinforced adiabatic heating in the downwellings in the ALA cases due to the increase in density and adiabatic temperature with depth [see eq. (4.54)]. As compared to BA and EBA cases, the effect of a non-constant adiabat in ALA also yields an average temperature that is necessarily higher (here 1413 K instead of 1315-1320 K), in addition to the effect of a more efficient heat transport (higher Ra) that contributes to the homogeneization and increase of the temperature in the convective layer.

The differences between the three cases are coherently increasing with the compressibility number. In the incompressible cases, a very low convection vigor is found, or even no convection at all [*i.e.*, purely conductive states; (E)BA-Co = 1 cases], as a consequence of a RAYLEIGH number close to its critical value. Note that the expected decrease of convection vigor with increasing compressibility (*e.g.*, ALA case in figure 4.6), also holds in the incompressible cases. This is due to our choice of keeping the same depth-dependence of viscosity in all cases for a given value of Co (see 4.2.3) in order to isolate the sole effect of compressibility.

Tidally heated convection: effect of compressibility

The convective solutions without tidally dissipated power displayed in figure 4.6 were used as initial conditions for the simulations with tidal heating. A fixed eccentricity of 0.05 was chosen for the orbit of the planet around its central, perturbing body. For each of the nine reference (*i.e.* convective) cases, simulations with three different orbital periods were conducted: $T_o = 30, 25$ and 20 days. This a rather small interval but recall that tidal dissipated power scale with T_o^{-5} [eq. (4.81)]. Simulations were run until a new thermal equilibrium was reached (in the statistical

sense for the ALA- $Co = 0.5$ case). Note that thermal convection solutions of figure 4.6 were deliberately aligned on the polar axis. In this case, convergence to the tidally heated steady states was reached more rapidly. Tests that were performed with initially non-aligned solutions confirmed that they converged toward the same final state, *i.e.* to a configuration with predominant polar plumes [consistent with 3D simulations performed by Běhounková *et al.* (2010)]. In fact, the initial solutions that were used to obtain the convective solutions were a conductive state [exactly the (E)BA- $Co = 1$ cases of figure 4.6] perturbed by small amplitude temperature anomalies that were either random or modal (*i.e.* sinusoidal). The first kind of perturbation yielded the arbitrarily-aligned cases mentioned before. The solutions aligned on the polar axis were simply obtained by imposing a degree 4 perturbation, ultimately leading to a degree 4 solution, a particularly stable mode in annular geometry.

Figure 4.7 displays the super-adiabatic temperature fields obtained with an orbital period of 20 days. The general behavior is consistent with the tidal dissipation patterns obtained in the simple isoviscous cases (fig. 4.4): tidal heating concentrates at the bottom of the mantle in polar regions. This results in the growth of polar plumes at the expense of equatorial ones. As a consequence of their rather similar behavior in the absence of tidal feedback, the BA and EBA cases also display very minor differences, both in thermal structure and total dissipated power (1-4.8 % deviations in the values of P_{tide}). Interestingly, the two sub-critical cases (E)BA- $Co = 1$ display a weak, but bipolar convection.

One important result is that the differences in the convective patterns between compressible and incompressible cases are increased by tidal heating. This is obvious for the Earth-like, $Co = 0.5$ cases. The initially steady convective ALA solution becomes oscillatory when tidal heating is introduced, with the two polar plumes acting as particularly efficient traps for hot anomalies that develop in the wide hot polar regions. The two initial equatorial plumes are confined in small regions subject to cold instabilities, which disappear in the case of intermediate compressibility. The corresponding scaled incompressible solution for $Co = 0.5$ displays a more pronounced concentration of heat, hence of tidal dissipation (positive feedback), at the poles since the smaller, scaled Rayleigh number implies a less efficient heat transport. Consequently, the hot polar zones are of smaller extent, keeping “alive” the equatorial plumes. As a consequence of the structural difference between the equilibrium thermal fields, the associated globally dissipated tidal power is $\sim 5-8\%$ higher in the incompressible cases, as compared to the compressible (ALA) ones, except for the extreme value of Co , for which the difference falls to 2.5% . The latter result is due to the restriction of tidal dissipation within a small volume at the base of the mantle. The optimal dissipation value is found with $Co = 0.75$ for ALA, and with $Co = 0.5$ for BA and EBA. The reappearance of the equatorial plumes in

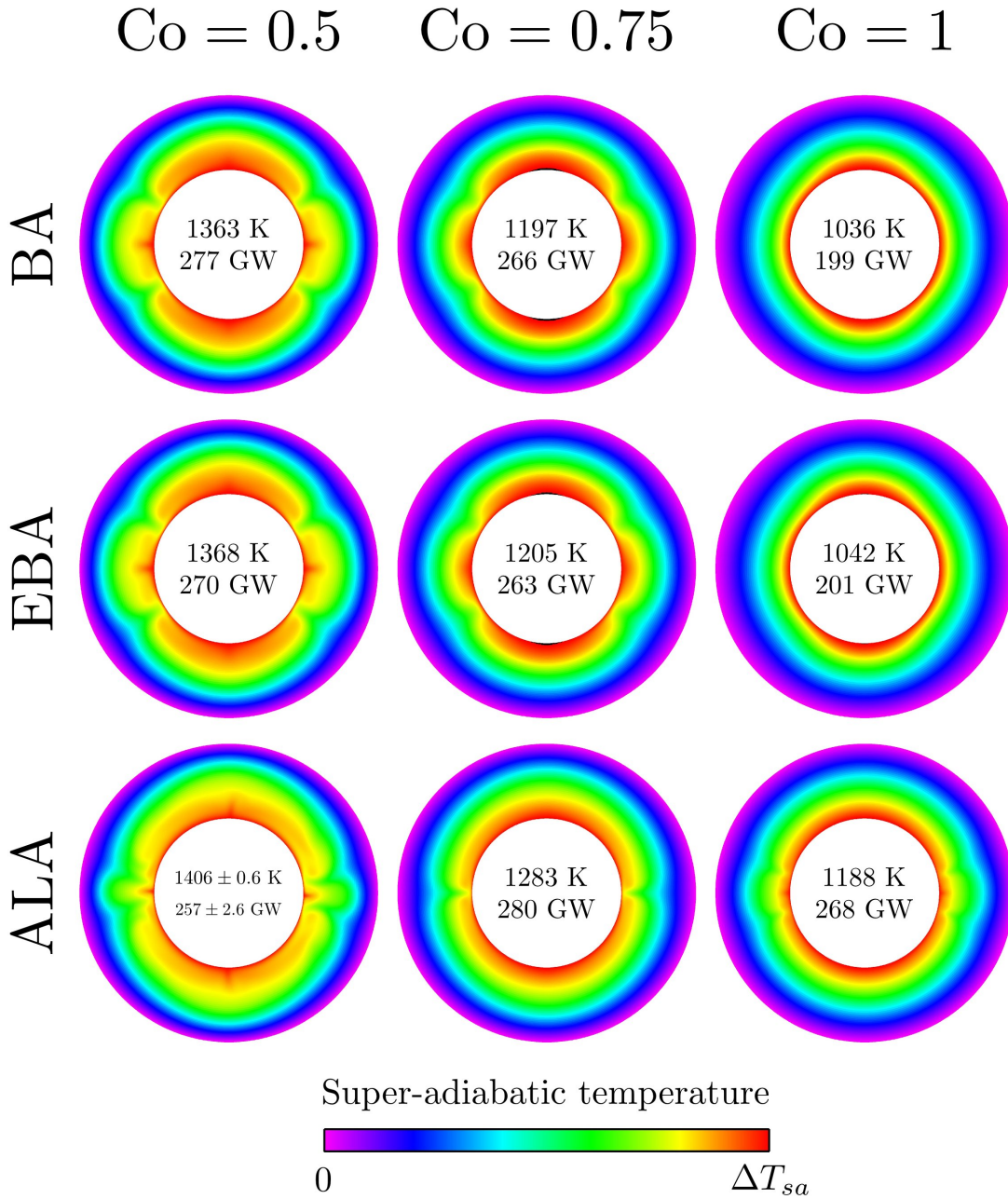


Figure 4.7 : Comparison of convection solutions with tidal heating. The various cases are the same as in fig. 4.6, except that tidal dissipation occurs. ($e = 0.05$, $T_o = 20$ days). The volume-averaged temperature value and the global dissipated power (P_{tide}) are shown for each case. For the oscillatory ALA- $Co = 0.5$ case, these values are indicated by the average ones and the corresponding peak-to-peak amplitude of oscillations. The respective values of the super-adiabatic temperature jump ΔT_{sa} (scale) are: 2323 K ($Co = 0.5$), 2195 K ($Co = 0.75$) and 2031 K ($Co = 1$). The thin, black areas at the bottom of the polar regions (cases BA- $Co = 0.75$ and EBA- $Co = 0.75-1$) indicate a temperature that is higher than the constant value prescribed at the bottom.

the ALA-Co = 1 yields a less effective heat concentration in the poles and explains the decrease of global dissipation, as compared to ALA-Co = 0.75. The associated reduction of the convection wavelength is due to a thinner convective layer, which originates in the strong thermal stratification that characterizes the convective initial solution (fig. 4.6): since the adiabatic gradient is proportional to temperature, more heat can be conducted along the adiabat and the stable upper layer expands, at the expense of the bottom, unstable one. Note that for the BA-Co = 0.75 and EBA-Co = 0.75 – 1 of figure 4.7, temperature values in deep polar regions are higher than the value that is prescribed at the bottom of the mantle ($T_0 = 2773$ K). Such “core-heating” effect is probably due to the scaling adopted for comparing incompressible cases with compressible ones, since it does not appear in the ALA cases.

The temperature field in anelastic convection is shaped by various heterogeneous internal heating fields: viscous heating, adiabatic heating or cooling, and, in our case, tidal viscous heating. The first two contributions directly depend on the flow field and scale here with Co, whereas the tidally generated heat source solely depends on the temperature dependent effective viscosity. Figure 4.8 shows the spatial distribution of the various terms, with the associated temperature field. The corresponding laterally-averaged radial distributions are displayed in figure 4.9.

Figure 4.8b highlights the tidal heating patterns: this source is restricted to the hot, convective regions and becomes predominant in the polar areas, as a consequence of the 1 : 1 spin-orbit resonance that we consider (see fig. 4.4). As illustrated here for the ALA-Co = 0.5 case, in all simulations that were run, the convective viscous heating was found to occur in regions that are complementary as regard to the regions with tidal viscous heating. Hence, the total viscous heating patterns are found to be well distributed in the mantle [see, *e.g.*, figure 4.8c]. In detail, viscous friction produced by convective motions is dominant at intermediate depths in the mantle, especially in the regions associated to the cold, equatorial [“tropical” in EBA and ALA-Co = 1 cases, see figure 4.7] plumes, as a natural consequence of the temperature-dependent viscosity; shear stress can become greater in the hot polar regions if small-scale structures exist. However, the associated dissipation remains at a lower level than tidal dissipation in these regions. The cooling of hot plumes by adiabatic decompression can be locally very intense [fig. 4.8d], much more than the diffuse adiabatic heating that is observed in downwellings. The consequence is a net, global cooling, which is characteristic of convection experiments in EBA and ALA. Hence, the opposite value of adiabatic heating is presented in figure 4.9c. In the bottom part of the mantle – over ~ 34 % of its thickness – tidal dissipation, for the orbital period and eccentricity considered here, prevails over convective dissipation, becoming almost 20 times greater at the core-mantle boundary. The amount of adiabatic cooling surpasses convective viscous heating in the major part of the convective layer, except in a 140 km thick region above the core-mantle boundary.

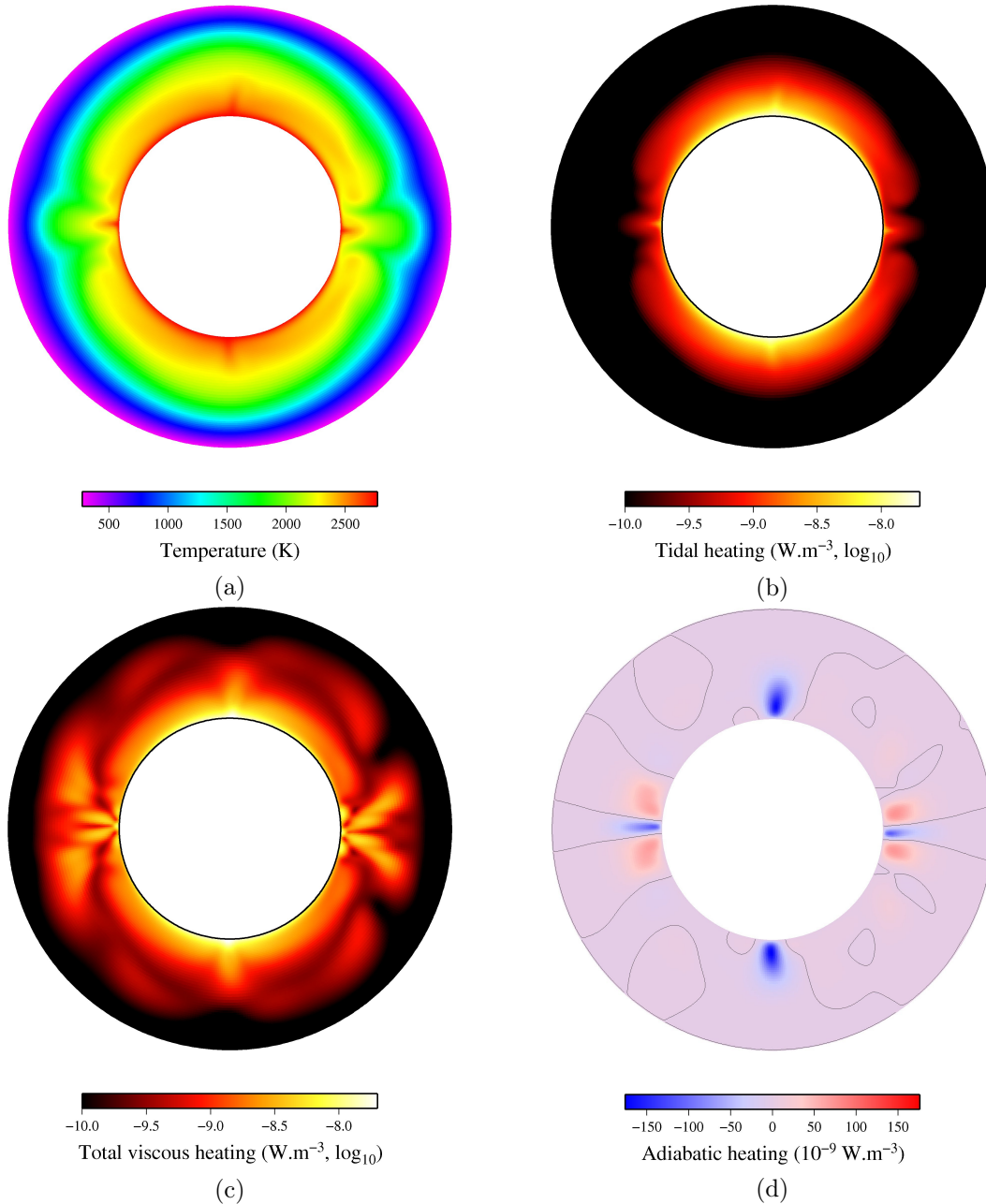


Figure 4.8 : *Temperature and various internal heating fields for the ALA-Co = 0.5 case (snapshot). Here, the temperature field is displayed (a), whereas figure 4.7 presents super-adiabatic values. The patterns are basically the same but the temperature scale here is ΔT . The various kinds of heat sources are tidal viscous heating (b), or more generally the total (tidal+convective) viscous heating (c) and the adiabatic heat sources/sinks. For this last component, the zero value isoline is displayed, in order to discriminate between globally cooled and heated regions.*

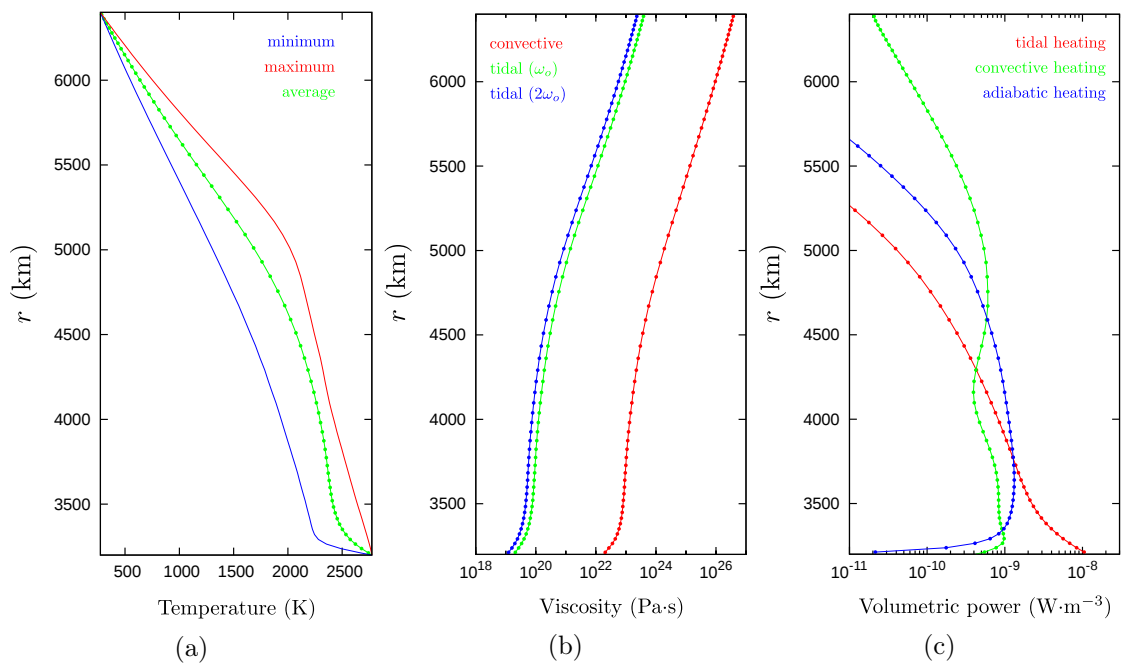


Figure 4.9 : Laterally-averaged profiles for the case shown in figure 4.8. (a) Temperature average, minimal and maximal values; (b) long-term (convective) and short-term (tidal, i.e. effective) viscosities; (c) tidal and convective viscous dissipation, and adiabatic cooling (opposite value, see text). The numerical discretization is indicated with points that correspond to the location of the control volume centers of the mesh.

On a global scale, adiabatic and viscous heating terms should theoretically cancel each other in a convective system described by the anelastic-liquid approximation, whether there is internal (tidal) heating or not (see, *e.g.*, the demonstration of [Leng et Zhong, 2008](#)). Here, a deviation of only 0.28 % is found (0.24 % without tidal heating). This precision is mostly due to the inclusion of the pressure effect in the buoyancy term of equation (4.53), that ensures energetic consistency ([Leng et Zhong, 2008](#)). The tidal dissipation surpasses the adiabatic cooling in the bottom 18 % of the mantle.

The frequency dependence of tidal heating is shown in figure 4.10a, where the laterally-averaged radial distributions of the two different viscous dissipations are shown: tidal heating, which is the result of shear stress associated to a periodic deformation of the planet on a timescale of 20-30 days, and convective viscous heating, which is due to mantle flow over much longer timescales (typically tens of million years). It can be seen that the case $T_o = 20$ days is the only one for which tidal dissipation becomes dominant in the lower, hot part of the mantle. In fact, the solution corresponding to those in figure 4.7 for the two longest orbital periods (25 and 30 days; fields not shown here) do not display strong modifications by tidal heating, like the cases shown for $T_o = 20$ days: the final solutions were very close to the initial, purely convective one, displayed in figure 4.6. Therefore, the predominance of tidal heating over convective viscous dissipation seems to be a necessary condition for tidal dissipation to significantly affect anelastic thermal convection, *i.e.* to reshape mantle flow patterns.

The effect of compressibility on the average tidal viscous dissipation is examined in figure 4.10b, for the ALA cases and $T_o = 20$ days. The increase of the compressibility number from 0.5 to 0.75 leads to a more dissipative mantle in the bottom region, yielding a global dissipation power increase of almost 10 % (see values on figure 4.7). A larger compressibility ($Co = 1$) implies, as seen above, a very weak convection in the cases of this study and the associated dissipated power becomes smaller. In this case, the tidal heating field basically shows patterns that are very similar to those of the simple case displayed in figure 4.4. However, the global dissipated power is only 268 GW, instead of 1.62 TW. This decrease of more than 80 % is due to the temperature-dependence of the effective viscosity, that is ignored in the simplified cases of figure 4.4: a major part of the mantle, including the stagnant, conductive lid above the convecting layer, is cold, hence very viscous, whereas low viscosity regions are confined in the bottom part of the mantle, focusing tidal dissipation in this low volume region. Finally, a comparison of the average tidal dissipation between an incompressible (BA) and a compressible case [fig. 4.10c] shows that, for an Earth-like compressibility, the combined density and reference temperature increases with depth [absent in (E)BA] imply lower values of dissipation in the convective region and higher (though still small) values in the conductive lid, a

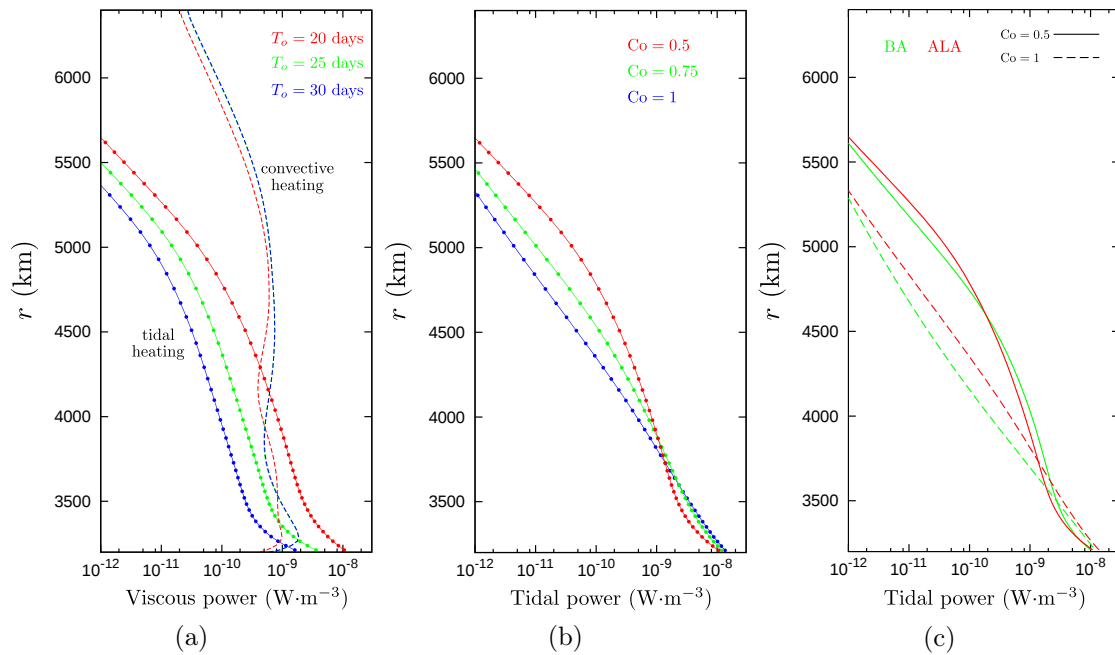


Figure 4.10 : Variability of the tidal heating profiles with orbital period and compressibility. (a) Variation of the two kinds of viscous heating (tidal and convective) with the orbital period for the ALA- $Co = 0.5$ case – note that the convective heating profiles are almost superimposed for $T_o = 25$ days and $T_o = 30$ days; (b) ALA cases for $T_o = 20$ days; (c) comparison of BA and ALA cases for the two extreme values of Co and $T_o = 20$ days. Note that, in these three subfigures, red solid lines depict the ALA- $Co = 0.5$ case, detailed in figure 4.8 and 4.9.

fact which is consistent with the thermal structure and the larger dissipated power in the BA case [see fig. 4.7]. In contrast, for an extreme compressibility, the close-to-critical Rayleigh number, bipolar BA solution of figure 4.7 is associated to lower dissipation values in the whole mantle (fig. 4.10c).

We present below a last case, with a more realistic Rayleigh number, for the same value of the orbital period ($T_o = 20$ days) and an Earth-like compressibility. This is obtained by decreasing the bottom long-term viscosity η_0 by two orders of magnitude, giving a value of $\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} \text{Ra} = 10^9$. The result is depicted in figures 4.11 and 4.12, which display similar fields and profiles as for the corresponding low Rayleigh number case in figure 4.8 and 4.9. As compared to the case in figure 4.8, heat transfer is characterized by a much more efficient heat transport, here by almost-whole mantle thermal turbulence, yielding a more homogeneously distributed temperature in a wider convective region [fig. 4.11a], as depicted with the closer profiles of figure 4.12a. Note that the fields and profiles shown here are a snapshot of a highly oscillatory state. Cold thermal instabilities develop from a small region below the “stagnant” lid and fall toward the core, undergoing particularly high adiabatic heating [fig. 4.11d, ~ 40 times higher than the diffuse heating observed in the low Rayleigh number case (fig. 4.8d)]. As these instabilities reach the core-mantle boundary, their still colder temperature locally decreases the tidal viscous dissipation [fig. 4.11b]. However, such narrow, cold plumes locally lead to very high convective viscous heating [fig. 4.11c], up to $6.3 \times 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$. Average profiles [fig. 4.12c] show that this kind of viscous heating dominates as a heat source (with the adiabatic cooling/heating); the tidal heating is rather similar to the one in the low Rayleigh number case, even if a bit smaller ($P_{tide} \approx 240 \text{ GW}$, instead of $\sim 257 \text{ GW}$; see fig. 4.7). The convection is therefore unaffected by the tidal dissipation, as it was obtained in the low frequency case [$T_o = 25 - 30$ days, see fig. 4.10a], here with a more acute difference of values between viscous heating terms. Indeed, the high efficiency of heat transport by the arrival of cold anomalies on the core balances the weak upward energy advection (characterizing the hot plumes in this region) to evacuate energy from the bottom mantle region, in particular from polar areas. Consequently, we did not observe here a positive feedback like the one that shaped the solutions depicted in figure 4.7. Such a positive feedback would be obtained either with a more compressible mantle, a way to decrease convection vigor, hence heat transfer efficiency in polar regions, or with a shorter orbital period (or a higher eccentricity), inscreasing tidal viscoelastic shear heating.

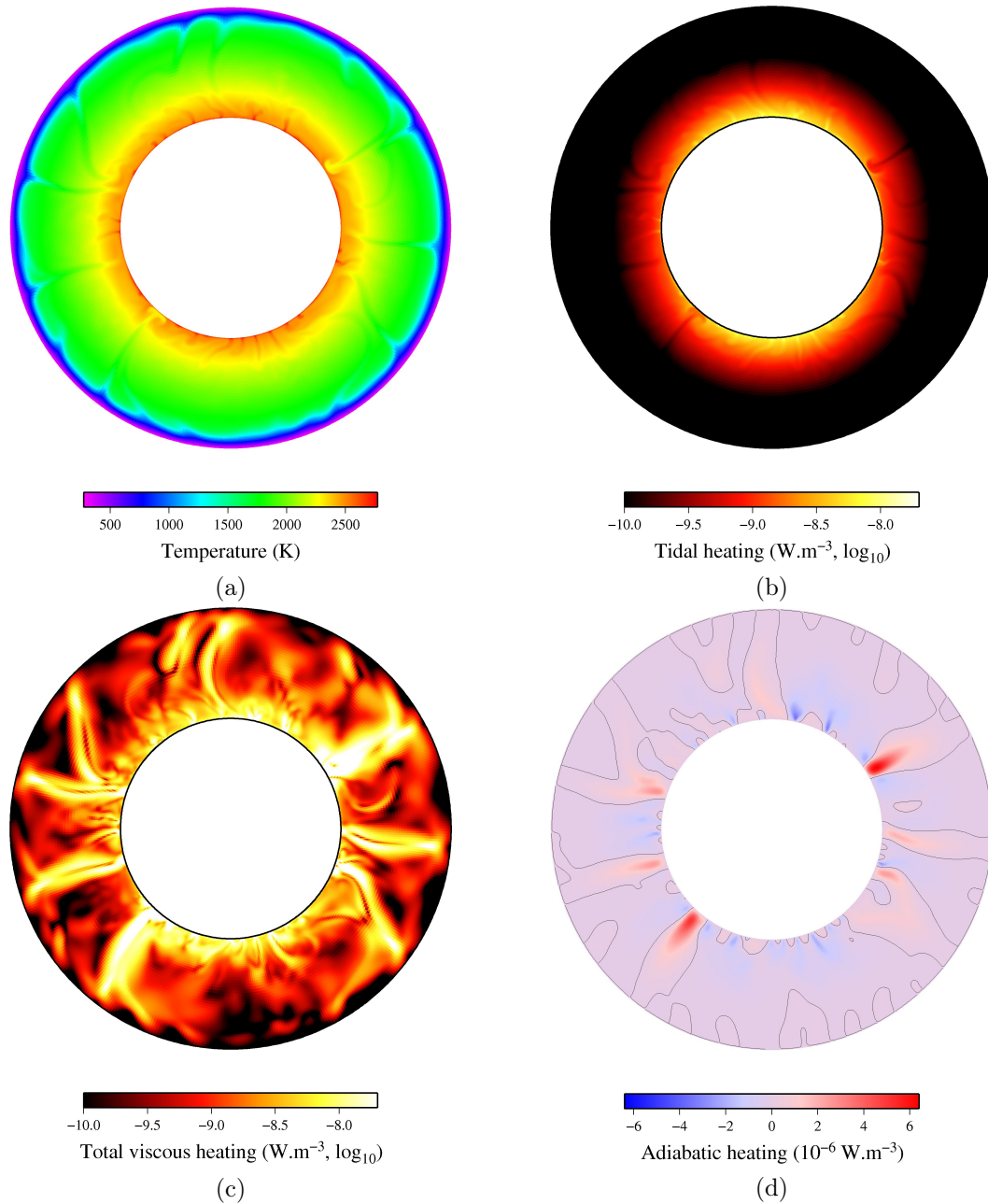


Figure 4.11 : Temperature and various internal heating fields for a high Rayleigh number case; $ALA-Co = 0.5$, $\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} Ra = 10^9$. Same display and scales as in figure 4.8. Note that scale in (c) is deliberately saturated for the highest values.

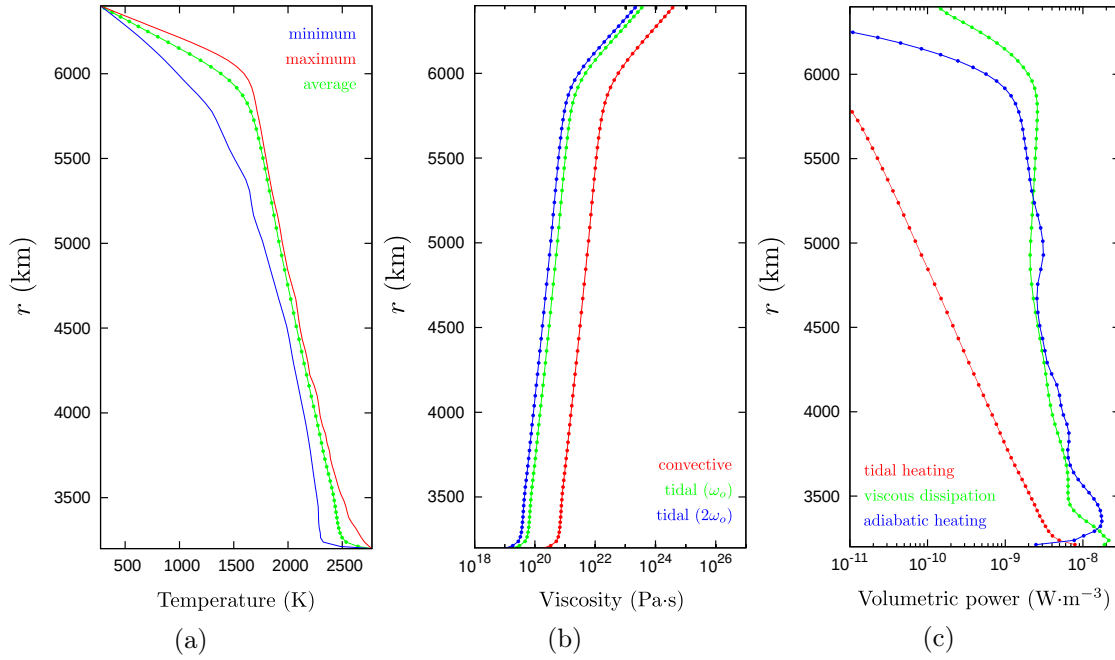


Figure 4.12 : *Laterally-averaged profiles for the case shown in figure 4.11. Same display as in figure 4.9.*

4.2.5 Appendices

Variables and symbols

Table 4.1: Variables and symbols. Equation numbers refer to first use/definition.

Variable/symbol	Description	Equation
<i>Heat transfer</i>		
Co	Compressibility number	(4.74)
c_p	specific heat at constant pressure	(4.54)
Di	Dissipation number	(4.57)
\mathbf{g} (g)	acceleration of gravity (norm)	(4.53)
H	internal heating rate per unit mass	(4.54)
H_{rad}	radiogenic heat source	-
H_{tide}	tidal heat source	(4.69)
k	thermal conductivity	(4.54)
K_T, K_S	isothermal, isentropic bulk modulus	(4.53), (4.73)
L	thickness of the mantle	(4.56)
p	pressure	(4.53)
Ra	bottom Rayleigh number (at $r = R_0$)	(4.56)
T	temperature	(4.54)

Variable/symbol	Description	Equation
<i>table 4.1 (continued)</i>		
T_s	surface temperature	(4.75)
T_r^{av}	average temperature profile	(4.62)
\mathbf{v}	velocity	(4.53)
α	thermal expansivity	(4.54)
γ	Grüneisen parameter	(4.72)
ΔT	total temperature jump	(4.70)
ΔT_{sa}	super-adiabatic temperature jump	(4.56)
η	dynamic viscosity	(4.55)
ρ	density	(4.53)
$\boldsymbol{\tau}$	viscous stress tensor	(4.53)
Υ	Frank-Kamenetskii parameter	(4.70)
\bullet	reference state profile	(4.52)
\bullet_0	characteristic value (at $r = R_0$)	(4.56)
<i>Geometry</i>		
d	effective degree of curvature (annulus)	-
f	curvature	(4.77)
\mathbf{G}	metric tensor	(4.55)
R_0	radius of the core-mantle boundary	(4.74)
R_p	radius of the body	(4.75)
r, ϑ	polar coordinates (annulus)	(4.68)
r, θ, ϕ	usual spherical coordinates	(4.63)
$\Delta\vartheta$	annulus angular extent	-
$\langle \bullet \rangle$	spherical average	(4.77)
<i>Tidal effects</i>		
e	orbital eccentricity	(4.82)
G	gravitational constant	(4.58)
K	bulk modulus	(4.60)
l, m	degree and order	(4.63)
R_l^m, S_l^m	mechanical functions	(4.63)
U_g	gravitational potential	(4.59)
U_{tide}^0	tidal perturbing potential	(4.59)
U_{tide}^i	tidally induced potential	(4.59)
\mathbf{u}	tidally induced displacement	(4.58)
Y_l^m	spherical harmonic	(4.63)
$\mathcal{P}, \mathcal{P}_{ij}$	volumetric complex power	(4.65)
\mathcal{P}_{tot}	orbit-averaged dissipated volumetric power	(4.68)
P_l^m	associated Legendre polynomial	(4.67)
P_{tide}	global dissipated power	-

Variable/symbol	Description	Equation
<i>table 4.1 (continued)</i>		
P_{tide}^{th}	theoretical global dissipated power	(4.81)
p_n	eccentricity polynomial	(4.82)
y_i	radial function	(4.82)
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	tidally induced strain rate tensor	(4.60)
λ, μ	Lamé parameters	(4.62), (4.60)
Π_{ij}	longitudinally-averaged complex power	(4.66)
ρ_C	core density	-
$\boldsymbol{\sigma}$	tidally induced stress tensor	(4.59)
ω	angular frequency	(4.61)
ω_o	orbital angular frequency	-
$\bullet_{eff}, \bullet^{eff}$	effective parameter	(4.60)
<i>Miscellaneous</i>		
a, b, c	generic real variables	(4.72)
i	imaginary unit	(4.61)
\bullet^*	complex conjugate	(4.65)
$\text{Re}(\bullet), \text{Im}(\bullet)$	real, imaginary part of a complex number	(4.68), (4.69)
∇	del operator	(4.52)
$\frac{D\bullet}{Dt} := \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\bullet$	Lagrangian time derivative	(4.54)
$\tilde{\bullet}$	Laplace transform	(4.61)
\mathbf{I}	second-order identity tensor	-
\bullet^T	second-order tensor transposition	(4.55)
$\text{tr}(\bullet) := \mathbf{G} : \bullet$	trace of a second-order tensor	(4.60)

Table 4.2: Values of the various parameters used in this work. See table 4.1 for the definition of the symbols.

Parameter	Value	Units	Parameter	Value	Units
Heat transfer			Tidal effects		
c_p	1200	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	e	0 – 0.10	\emptyset
Co	0 – 1	\emptyset	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Di	0 – 1	\emptyset	$\langle K \rangle$	330	GPa
g_0	10	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	μ/K	3/5	\emptyset
H_{rad}	0		ρ_C	12000	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
k_0	4	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	ω_o	$2\pi/(20 - 30)$	$\text{rad} \cdot \text{day}^{-1}$
L	3200	km	η_0^{eff}	see eq. (4.71)	
$\frac{\Delta T}{\Delta T_{sa}} \text{Ra}$	10^{7-9}	\emptyset	Geometry		
T_s	273	K	d	2	\emptyset
α_0	$2 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}	f	0.5	\emptyset
γ	1	\emptyset	R_0	3200	km
ΔT	2500	K	R_p	6400	km
η_0	see eq. (4.56) and (4.77)		$\Delta\vartheta$	2π	\emptyset
$\langle \rho \rangle$	4500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$			
$\Upsilon = \Upsilon_{eff}$	10	\emptyset			

Semi-analytical solutions for the 2D-tidal power

The analytical integration used to scale the 3D global tidal response down to a 2D one [eq. (4.66)] gives, by using eq. (4.63) and (4.64) (see Takeuchi et Saito, 1972 ; Tobie et al., 2005), the following expressions for the six contributions $\Pi_{ij}(\omega)$ [see table 4.3 for the expression for the eccentricity polynomials $p_n(e, \omega)$]:

$$\Pi_{rr}(r, \theta, \omega) = \frac{R_p^4 \omega^5}{4i} \tilde{y}_2(\omega) \frac{\partial \tilde{y}_1(\omega)^*}{\partial r} [p_1(e, \omega) P_2^0(\cos \theta)^2 + p_2(e, \omega) P_2^2(\cos \theta)^2], \quad (4.82)$$

$$\Pi_{r\theta}(r, \theta, \omega) = R_p^4 \omega^5 \frac{|\tilde{y}_4(\omega)|^2}{i \tilde{\mu}^*(\omega)} p_3(e, \omega) \sin^2(2\theta), \quad (4.83)$$

$$\Pi_{r\phi}(r, \theta, \omega) = 9R_p^4 \omega^5 \frac{|\tilde{y}_4(\omega)|^2}{i \tilde{\mu}^*(\omega)} p_2(e, \omega) \sin^2(\theta), \quad (4.84)$$

$$\Pi_{\theta\phi}(r, \theta, \omega) = 36R_p^4 \omega^5 \frac{|\tilde{y}_3(\omega)|^2}{i r^2} \tilde{\mu}(\omega) p_2(e, \omega) \cos^2(\theta), \quad (4.85)$$

Table 4.3: Eccentricity polynomials for the semi-analytical expressions of the contributions $\Pi_{ij}(\omega)$ to tidal dissipation.

n	$p_n(e, \omega_o)$	$p_n(e, 2\omega_o)$
1	$9 \left(e + \frac{9}{8} e^3 \right)^2$	$\frac{1}{2} (9e^2 + 7e^4)^2$
2	$\frac{1}{8} \left(25e^2 - \frac{431}{4} e^4 + \frac{7565}{64} e^6 \right)$	$\frac{1}{8} \left(17e^2 - \frac{115}{3} e^4 \right)^2$
3	$\frac{9}{32} \left(43e^2 - \frac{175}{2} e^4 + \frac{9023}{256} e^6 \right)$	$\frac{9}{8} \left(\frac{185}{2} e^4 - \frac{883}{3} e^6 + \frac{6833}{18} e^8 \right)$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\theta\theta}(r, \theta, \omega) = & \frac{R_p^4 \omega^5}{4i} \frac{1}{r^2} \left\{ \left[2 \left(\tilde{\lambda}(\omega) + \tilde{\mu}(\omega) \right) \tilde{y}_1(\omega) + \tilde{\lambda}(\omega) \frac{\partial \tilde{y}_1(\omega)}{\partial r} r \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6 \left(4\tilde{\mu}(\omega) \frac{\cos(2\theta)}{3 \cos(2\theta) + 1} + \tilde{\lambda}(\omega) \right) \tilde{y}_3(\omega) \right] \right. \\
 & \times \left[\tilde{y}_1^*(\omega) - \frac{12 \cos(2\theta)}{3 \cos(2\theta) + 1} \tilde{y}_3^*(\omega) \right] p_1(e, \omega) P_2^0(\cos \theta)^2 \\
 & + \left[2 \left(\tilde{\lambda}(\omega) + \tilde{\mu}(\omega) \right) \tilde{y}_1(\omega) + \tilde{\lambda}(\omega) \frac{\partial \tilde{y}_1(\omega)}{\partial r} r \right. \\
 & \left. + 2 \left(2\tilde{\mu}(\omega)(\csc^2 \theta - 2) - 3\tilde{\lambda}(\omega) \right) \tilde{y}_3(\omega) \right] \\
 & \left. \times \left[\tilde{y}_1^*(\omega) + 2(\csc^2 \theta - 2) \tilde{y}_3^*(\omega) \right] p_2(e, \omega) P_2^2(\cos \theta)^2 \right\}, \tag{4.86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\phi\phi}(r, \theta, \omega) = & \frac{R_p^4 \omega^5}{4i} \frac{1}{r^2} \left\{ \left[2 \left(\tilde{\lambda}(\omega) + \tilde{\mu}(\omega) \right) \tilde{y}_1(\omega) + \tilde{\lambda}(\omega) \frac{\partial \tilde{y}_1(\omega)}{\partial r} r \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6 \left(4\tilde{\mu}(\omega) \frac{\cos^2(\theta)}{3 \cos(2\theta) + 1} + \tilde{\lambda}(\omega) \right) \tilde{y}_3(\omega) \right] \right. \\
 & \times \left[\tilde{y}_1^*(\omega) - \frac{12 \cos^2(\theta)}{3 \cos(2\theta) + 1} \tilde{y}_3^*(\omega) \right] p_1(e, \omega) P_2^0(\cos \theta)^2 \\
 & + \left[2 \left(\tilde{\lambda}(\omega) + \tilde{\mu}(\omega) \right) \tilde{y}_1(\omega) + \tilde{\lambda}(\omega) \frac{\partial \tilde{y}_1(\omega)}{\partial r} r \right. \\
 & \left. - 2 \left(2\tilde{\mu}(\omega)(\csc^2 \theta + 1) + 3\tilde{\lambda}(\omega) \right) \tilde{y}_3(\omega) \right] \\
 & \left. \times \left[\tilde{y}_1^*(\omega) - 2(\csc^2 \theta + 1) \tilde{y}_3^*(\omega) \right] p_2(e, \omega) P_2^2(\cos \theta)^2 \right\}. \tag{4.87}
 \end{aligned}$$

These semi-analytical functions were accurately tested against the solutions obtained from a numerical integration. Note that each of the functions that must be included in 2D annular ($\Delta\vartheta = 2\pi$) geometry, $\Pi_{ij}(r, \vartheta, \omega)$, is simply constructed with a reflective symmetry, about the polar axis of the planetary body, of the longitudinal averages $\Pi_{ij}(r, \theta, \omega)$. The symmetry is lost after the local correction (4.69).

Corrigendum to Tobie *et al.* (Icarus 177, pp. 534-549)

We found two misprints that appeared in equation (10) of Tobie *et al.* (2005), in the expressions of two components of the tidal strain tensor. Below are the correct formulae [the notations match those used in Tobie *et al.* (2005)]:

$$\epsilon_{\theta\phi} = \frac{2}{r} \sum_{l,m} y_3(r, \omega_l^m) \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \Phi_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi \partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial \Phi_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right], \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\phi\phi} = & \frac{1}{r} \sum_{l,m} y_3(r, \omega_l^m) \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + y_3(r, \omega_l^m) \cot \theta \frac{\partial \Phi_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \\ & + y_1(r, \omega_l^m) \Phi_l^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Fortunately, all the computations presented in Tobie *et al.* (2005) were carried out with the correct expressions.

This research was financed by the French Ministry of Research and Education. J. B. also thanks M. Le Feuvre for his contribution to enhancing the solving method for the radial functions and N. Tosi for valuable discussions and benchmark on the ALA.

La dissipation de marée dans un corps, modulée par les transferts de chaleur et agissant en retour sur ceux-ci, donne lieu à une certaine modification de l'orbite de l'objet. Dans ce chapitre, seuls des équilibres thermiques pour une configuration orbitale fixe ont été considérés, afin de comprendre la nature du couplage convection-dissipation de marée dans un manteau compressible. Une approche cohérente requiert toutefois la considération d'un couplage également avec l'orbite, afin de conserver l'énergie totale du système corps primaire - corps secondaire. Cette ultime étape constitue l'objet du chapitre final, où un modèle complet d'évolution thermo-orbitale est établi.

Un premier couplage avec l'évolution orbitale

Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques éléments de la théorie classique de l'évolution orbitale d'un système planète-satellite qui résulte des effets de marée et décrirons la méthode employée pour traiter ce problème dans le code CHEOPS-2D. Nous présenterons ensuite quelques résultats préliminaires et illustratifs du modèle complet d'évolution couplée orbite-dynamique interne – l'essentiel de cette thèse ayant été consacré à l'élaboration dudit modèle.

5.1 Évolution orbitale d'un satellite

Dans cette partie, il sera volontairement fait un amalgame entre les notions de corps primaire et de planète (centrale), d'une part, et entre celles de corps secondaire et de satellite, d'autre part. Les modifications orbitales de ce dernier sont induites par les variations d'énergie du système planète-satellite, le moment cinétique devant être conservé¹.

La méthode mise en œuvre dans ce chapitre pour calculer les variations orbitales repose en grande partie sur l'approche de [Kaula \(1964\)](#). Cette dernière est par exemple adaptée pour un système de type Terre-Lune – l'étude originale de [Kaula \(1964\)](#) porte précisément sur celui-ci – ou encore pour le système Mars-Phobos (p. ex. [Lambeck, 1979](#)). Cependant, comme la dissipation dans le satellite est calculée de manière explicite dans la méthode développée au cours de cette thèse (cf. chap. 4), une technique alternative est utilisée ici pour décrire l'effet de la dissipation dans le satellite sur son orbite; elle est basée directement sur le bilan d'énergie et la conservation du moment cinétique, et tire parti de la méthode présentée au chapitre

1. hypothèse de système compact isolé

précédent. Ceci évite notamment de passer par un facteur de dissipation global pour le satellite, principe nécessaire dans l'approche de [Kaula \(1964\)](#).

5.1.1 Théorie de la perturbation

L'évolution orbitale du satellite est décrite par les équations de LAGRANGE, au moyen d'un potentiel perturbateur qui dépend de la nature des corps impliqués (par exemple leur structure interne). La présentation qui suit est en partie basée sur les ouvrages de [Coulomb et Jobert \(1972\)](#) et de [Kaula \(1966\)](#). On pourra également consulter le livre de [Murray et Dermott \(1999\)](#).

Équations de LAGRANGE

Considérons un système formé d'une planète et de son satellite, dans le référentiel lié au centre de masse de la planète (cf. point F_2 , fig. 1.5, p. 21). Le potentiel de la planète, qui détermine la force agissant sur le satellite, se décompose en deux termes de marée : le premier est une composante intrinsèque à la planète (c'est-à-dire qui agirait seule si celle-ci n'était pas déformée par le satellite) ; le second est un terme induit par le changement de la répartition de masse que la déformation de marée du satellite entraîne. Une telle décomposition concerne également le satellite agissant sur le corps central. Les deux potentiels induits par la réponse de chaque corps dépendent de la structure interne de ceux-ci et de leurs propriétés dissipatives, donc de leur état thermique.

En première approche, on considérera constantes la structure et les propriétés dissipatives de la planète. Ceci revient donc, dans la méthode utilisée, à considérer un facteur de dissipation Q_I^{-1} du corps constant dans le temps. En revanche, les transferts de chaleur au sein du satellite et donc les modifications des propriétés dissipatives qui en résultent sont calculés explicitement. Ceci permet d'examiner l'impact des variations internes du corps orbitant sur l'évolution globale du système. À terme, une approche complète devra également prendre en compte l'évolution des propriétés intrinsèques de la planète.

L'équation du mouvement du satellite est donnée par :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla(U_0 + \mathcal{R}), \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{r} := r \hat{\mathbf{r}}$ le vecteur position par rapport au centre de la planète, $U_0 := -\mathcal{G}M_I/r$ le terme de degré 0 du potentiel gravitationnel de celle-ci [cf. éq. (1.8), en inversant les rôles pour la planète et le satellite] et \mathcal{R} la contribution des degrés $l \geq 2$ de ce potentiel (c.-à-d. le potentiel de marée).

\mathcal{R} est généralement appelée la fonction de perturbation puisque l'équation (5.1) est très générale, l'expression de \mathcal{R} gouvernant sa complexité. Le problème classique

à deux corps est retrouvé pour $\mathcal{R} \equiv 0$. Rappelons que la convention de signe utilisée dans l'équation (5.1) est celle de la physique (cf. p. 18), contrairement à ce qui est fait dans les travaux (convention géodésique) de Kaula (1964, 1966) et Lambeck (1979).

Dans les modèles de mécanique céleste à l'échelle du Système Solaire, il est commode de travailler avec des coordonnées cartésiennes² (p. ex. Murray et Dermott, 1999) pour décrire l'évolution des composantes du vecteur \mathbf{r} , puisqu'un grand nombre de corps peut entrer en jeu. La fonction de perturbation peut alors revêtir des formes particulièrement complexes. Dans notre problème simple d'un système planète-satellite isolé, il est cependant plus pratique d'exprimer l'équation (5.1) dans l'espace des éléments elliptiques de l'orbite du satellite, à savoir a , e , ω , Ω , I et \mathcal{M} (cf. fig. 1.5 et 1.6). Le résultat forme un jeu de six équations différentielles, appelées équations de LAGRANGE :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}}, \\ \dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[\sqrt{1-e^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right], \\ \dot{\omega} = \frac{1}{na^2} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \right), \\ \dot{\Omega} = \frac{\csc I}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \\ \dot{I} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\cot I \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \csc I \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \right), \\ \dot{\mathcal{M}} = n - \frac{1}{na} \left(\frac{1-e^2}{ae} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + 2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Notons que les six éléments orbitaux ainsi calculés n'ont bien évidemment qu'une valeur instantanée : on parle d'éléments osculateurs. Ceux-ci correspondent en fait, à un instant donné, aux éléments képlériens qui décriraient l'orbite du corps si les perturbations cessaient à cet instant (c.-à-d. $\mathcal{R} \equiv 0$).

2. par exemple un système de coordonnées dont l'origine coïncide avec le centre de masse du Système Solaire et dont les axes sont orientés vers trois étoiles lointaines « fixes ».

Expression du potentiel perturbateur

Le potentiel de marée du corps perturbateur (ici le satellite), U_{mar} , va déformer le corps perturbé (ici la planète). Plus généralement, c'est le potentiel gravitationnel U du corps perturbateur qui agit – sachant que seuls les degrés $l \geq 2$ contribuent à la déformation de marée [éq. (1.10) et (1.11)]. Il en résulte un potentiel induit V du corps central qui s'écrit, à un rayon r donné du centre de celui-ci et dans le formalisme de Kaula (1964) :

$$V(r) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} V_{lmpq}(r), \quad (5.3)$$

avec

$$V_{lmpq}(r) = \left(\frac{R_I}{r} \right)^{l+1} k_{lmpq} U_{lmpq}^{\text{ret}}(R_I), \quad (5.4)$$

par définition³ du second nombre de LOVE élastique (Love, 1909) du corps déformé [$k_{lmpq} \equiv k(\omega_{lmpq})$]. La notation \bullet^{ret} (pour « retardé ») indique que, en raison de l'anélasticité du corps perturbé (dissipation d'énergie dans la planète, de rayon R_I), il y a un certain retard de la réponse de celui-ci. La partie imaginaire du nombre de LOVE [cf., p. ex., éq. (4.23)] est ici « incluse » dans ce terme de retard.

Pour la gamme de périodes étudiées dans cette thèse, la valeur élastique k_{lmpq} varie relativement peu et sera donc considérée constante par la suite, pour un degré l donné (notation k_l). La réponse V_{lmpq} du corps, observée à un instant t donné, correspond à la sollicitation du potentiel à l'instant $t - \Delta t_{lmpq}$, avec Δt_{lmpq} le retard temporel de la réponse. Ce dernier se traduit par un retard de phase ϵ_{lmpq} de la déformation – c'est-à-dire de la composante du bourrelet de marée correspondant à la fréquence ω_{lmpq} , tel que :

$$\epsilon_{lmpq} = \omega_{lmpq} \Delta t_{lmpq}, \quad (5.5)$$

ω_{lmpq} étant la fréquence angulaire donnée par l'expression (1.28). Notons que ϵ_{lmpq} est l'analogie du déphasage $-\delta(\omega)$ introduit au chapitre 1 [éq. (1.56)].

La composante V_{lmpq} du potentiel induit s'écrit donc, de manière similaire à l'équation (1.25) du chapitre 1 (Kaula, 1964 ; Lambeck, 1979) :

$$\begin{aligned} V_{lmpq}(r, \lambda, \phi) = & -\frac{\mathcal{G}M_{II}}{a} \left(\frac{R_I}{a} \right)^l \left(\frac{R_I}{r} \right)^{l+1} k_l F_{lmp}(I) G_{lpq}(e) P_{lm}(\sin \lambda) \\ & \times J_{lm} [v_{lmpq} - \epsilon_{lmpq} - m(\phi + \theta)] \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

3. En surface de la planète, le rapport du potentiel induit au potentiel gravitationnel du corps perturbateur définit le nombre de LOVE.

avec, rappelons-le, a le demi-grand axe de l'orbite du satellite, e son excentricité, F_{lmp} et G_{lpq} les fonctions d'inclinaison et d'excentricité de [Kaula \(1964\)](#), λ et ϕ les latitude et longitude (référentiel planétocentrique), θ le temps sidéral et v_{lmpq} la fonction angulaire définie dans l'équation (1.26).

Remarquons dès maintenant une différence subtile entre l'écriture due à [Kaula \(1964\)](#) et celle employée par [Lambeck \(1979\)](#) : chez ce dernier, l'expression de v_{lmpq} inclut le facteur « $-m\theta$ » ; on a ainsi directement – de manière plus cohérente – $\omega_{lmpq} := \dot{v}_{lmpq}$ [cf. éq. (1.27)]. À cette correction mineure s'ajoute le changement de signe suivant, toujours chez [Lambeck](#) : le retard de phase ϵ_{lmpq} est ajouté et non soustrait à la fonction angulaire v_{lmpq} dans l'équation (5.6). Cette seconde différence – majeure – explique l'absence du signe moins dans les équations d'évolution orbitale [cf. éq. (5.9)-(5.11)] de [Lambeck \(1979\)](#).

Notons enfin une petite simplification par rapport au formalisme de [Kaula \(1964\)](#) : le corps perturbateur et le corps perturbé par le potentiel que la déformation du corps central induit seront confondus dans cette thèse. Le formalisme généraliste de [Kaula \(1964\)](#) est, en effet, valable pour deux satellites, dont l'un subit les effets de la perturbation de marée engendrée par l'autre sur la planète.

Équations finales de [Kaula](#) pour l'évolution orbitale du satellite

Ainsi que nous l'avons vu précédemment dans cette thèse (chap. 4), il sera fait l'hypothèse de variations négligeables de l'argument du périastre et de la longitude du nœud ascendant :

$$\dot{\omega} \ll \dot{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad \dot{\Omega} \ll \dot{\mathcal{M}}. \quad (5.7)$$

Comme la dernière équation du système (5.2) n'exprime que la vitesse angulaire instantanée du corps sur son orbite, il ne reste que trois équations pour décrire l'évolution de l'orbite elle-même : les deux premières (\dot{a} , \dot{e}) et l'avant-dernière (\dot{I}) du système.

Finalement, si l'on remplace la fonction de perturbation \mathcal{R} , dans ces trois équations, par l'expression du potentiel induit⁴ dérivée par [Kaula \(1964\)](#) [éq. (5.3) et (5.6)], l'on obtient, au moyen de la troisième loi de KEPLER pour le système planète-

4. correspondant au *potentiel de marée* de [Kaula \(1964\)](#) – définition différente de celle employée dans cette thèse

satellite et en utilisant les notations de [Lambeck \(1979\)](#), le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a}_I = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \dot{a}_{lmpq}^I, \\ \dot{e}_I = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \dot{e}_{lmpq}^I, \\ \dot{I} = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \dot{I}_{lmpq}, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

avec :

$$\dot{a}_{lmpq}^I := -2K_{lmpq}(l-2p+q)k_l^I \sin \epsilon_{lmpq}^I, \quad (5.9)$$

$$\dot{e}_{lmpq}^I := -K_{lmpq} \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae} \left[(l-2p+q)\sqrt{1-e^2} - l + 2p \right] k_l^I \sin \epsilon_{lmpq}^I, \quad (5.10)$$

$$\dot{I}_{lmpq} := -K_{lmpq} \frac{(l-2p)\cos\gamma - m}{a\sqrt{1-e^2}\sin\gamma} k_l^I \sin \epsilon_{lmpq}^I \quad (5.11)$$

et

$$K_{lmpq} := \frac{GM_{II}}{\sqrt{G(M_I + M_{II})}a} \left(\frac{R_I}{a} \right)^{2l+1} [F_{lmp}(\gamma) G_{lpq}(e)]^2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}). \quad (5.12)$$

Les indices ou exposants « \bullet_I » et « \bullet_{II} » se rapportent respectivement aux corps primaire (planète centrale) et secondaire (ici satellite); l'exposant « \bullet^I » sur les dérivées temporelles signifie donc que les variations correspondantes sont dues à la dissipation de marée au sein de la planète. Une méthode différente sera utilisée pour traiter les effets de la dissipation dans le satellite. γ désigne la somme de l'obliquité β de la planète sur le plan de référence (inertiel) et de l'inclinaison I du satellite par rapport à ce même plan (cf., p. ex., [Ross et Schubert, 1989](#)), comme indiqué dans la figure 5.1 : il s'agit donc de l'inclinaison du satellite par rapport à l'équateur de la planète.

On a les deux relations suivantes entre les angles β et I (cf. fig. 5.1) :

$$\|\mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{rot}^{II}\| \sin I + \|\mathbf{L}_{rot}^I\| \sin \beta = 0, \quad (5.13)$$

$$\|\mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{rot}^{II}\| \cos I + \|\mathbf{L}_{rot}^I\| \cos \beta = \mathbf{L}_{tot}. \quad (5.14)$$

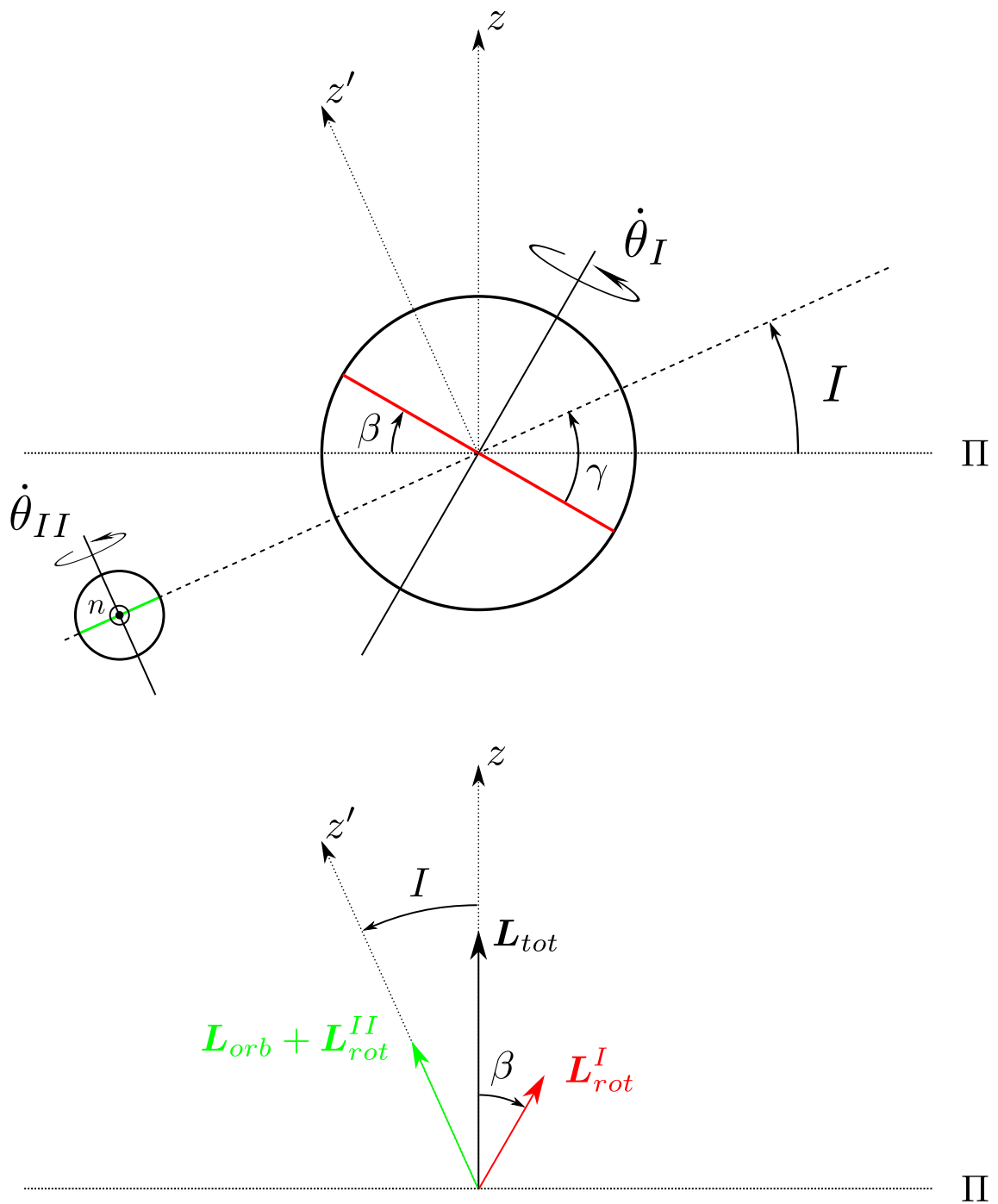


FIGURE 5.1 – Principe de la conservation du moment cinétique d'un système planète-satellite isolé. L'obliquité β_{II} du satellite est considérée comme nulle. Afin de conserver le moment cinétique total \mathbf{L}_{tot} , par rapport au centre de masse du système et dans le référentiel du plan de référence Π (inertiel), une variation d'inclinaison I de l'orbite du satellite (de pôle z') par rapport au plan Π (de pôle z) implique nécessairement un changement – de signe opposé – de l'obliquité de la planète ($\beta_I \equiv \beta$). Les couleurs se réfèrent à l'équateur (en haut) ou au moment cinétique (en bas) de la planète (en rouge; rotation propre $\dot{\theta}_I$) ou du satellite (en vert; rotation propre $\dot{\theta}_{II}$ et moyen mouvement n). Ce schéma a été inspiré par la figure 1 de [Ross et Schubert \(1989\)](#).

Celles-ci [p. ex. éq. (5.13)] permettent de calculer la variation d'obliquité $\dot{\beta}$; le changement d'inclinaison relative γ s'écrit donc naturellement :

$$\dot{\gamma} = \dot{I} + \dot{\beta}, \quad (5.15)$$

c'est-à-dire directement en fonction de la variation d'inclinaison \dot{I} obtenue via la troisième équation du système (5.8).

La condition (5.7) permet d'écrire l'égalité (p. ex. [Efroimsky et Williams, 2009](#)) :

$$\sin \epsilon_{lmpq}^I = \text{sgn}(\omega_{lmpq}) Q_{lmpq}^{-1}, \quad (5.16)$$

avec $Q_{lmpq}^{-1} = Q_I^{-1}(|\omega_{lmpq}|)$ le facteur de dissipation de la planète centrale et

$$\omega_{lmpq} \equiv (l - 2p + q)n - m\dot{\theta}_I. \quad (5.17)$$

Équations de [Kaula](#) réduites

Dans la littérature (p. ex. [Noyelles, 2005](#), § 4.3 et références associées), on trouve classiquement des formulations approchées, dérivées des équations de [Kaula \(1964\)](#). Ainsi, dans le cas d'une inclinaison orbitale négligeable et de l'hypothèse d'un déphasage ϵ_{lmpq} indépendant de la fréquence, on obtient, via une troncature au degré $l = 2$ du développement de Kaula et à l'ordre 2 en excentricité, le jeu d'équations suivant pour l'effet de la dissipation dans le corps central :

$$\begin{cases} \frac{d^I}{dt} \ln e = \frac{57}{8} \left(\frac{k_2}{Q} \right)_I \frac{M_{II}}{M_I} \left(\frac{R_I}{a} \right)^5 n, \\ \frac{d^I}{dt} \ln a = \frac{8}{19} \left(1 + \frac{51}{4} e^2 \right) \frac{d^I}{dt} \ln e, \end{cases} \quad (5.18)$$

avec Q le facteur de qualité, inverse du facteur de dissipation Q^{-1} . L'expression $\frac{k_2}{Q}$ est volontairement employée ici en raison de son caractère standard dans la littérature.

Pour l'effet de la dissipation dans le satellite, sous les mêmes hypothèses⁵, les équations classiquement obtenues sont :

$$\begin{cases} \frac{d^{II}}{dt} \ln e = -\frac{21}{2} \left(\frac{k_2}{Q} \right)_{II} \frac{M_I}{M_{II}} \left(\frac{R_{II}}{a} \right)^5 n, \\ \frac{d^{II}}{dt} \ln a = 2e^2 \frac{d^{II}}{dt} \ln e. \end{cases} \quad (5.19)$$

5. C'est l'*obliquité* du satellite sur son orbite qui est considérée comme négligeable ici, autrement dit l'inclinaison de l'orbite de la planète *dans le référentiel du satellite*...

Notons que l'obtention de ce dernier système d'équations est moins évidente que celle du précédent. Elle passe par un bilan d'énergie, pour \dot{a}_{II} et par la conservation du moment cinétique, pour \dot{e}_{II} (voir [Noyelles, 2005](#), § 4.3). Nous verrons plus loin que cette méthode a inspiré celle de cette thèse pour traiter l'effet de la dissipation dans le satellite sur son orbite, sans restriction sur l'excentricité autre que celle imposée par le potentiel considéré. L'effet de la dissipation au sein de la planète sera directement évalué via les équations complètes de [Kaula \(1964\)](#), avec toutefois une troncature à l'ordre 4 en e des fonctions d'excentricité (cf. annexe [A.5](#)), ceci afin de rester cohérent avec le potentiel utilisé pour évaluer le chauffage de marée dans le satellite (cf. chap. [4](#)).

5.1.2 Effet de la dissipation dans la planète

La réponse spatio-temporelle de la planète centrale – le bourrelet de marée – induit un couple de force sur le satellite perturbateur. Il en résulte une modification des trois éléments principaux de son orbite : a , e et I (cf. chap. [1](#), fig. [1.7](#) et [1.8](#)). Dans le code CHEOPS-2D, cette variation est calculée par l'approche de [Kaula \(1964\)](#), c'est-à-dire grâce aux trois équations du système [\(5.8\)](#).

Puisque la révolution du satellite autour de sa planète est modifiée, un changement de l'état de rotation des deux corps en résulte, par conservation du moment cinétique total. Nous ferons l'hypothèse que le satellite est bloqué en résonance spin-orbite $\alpha : \delta$, fixant ainsi *a priori* la variation de sa vitesse de rotation propre. Celle-ci résulte alors directement de l'évolution du demi-grand axe [\dot{a}_I ; cf. [\(5.8\)](#)]. En effet, puisque l'on a la relation de résonance

$$\delta \dot{\theta}_{II} = \alpha n, \quad (5.20)$$

la loi d'évolution résultante est simplement obtenue via la forme newtonienne de la troisième loi de KEPLER⁶, qui permet d'écrire

$$n = [G(M_I + M_{II})]^{1/2} a^{-3/2}, \quad (5.21)$$

soit

$$\ddot{\theta}_{II} = -\frac{3\alpha n}{2\delta} \frac{\dot{a}_I}{a}. \quad (5.22)$$

Cette équation caractérise complètement le changement de l'état de rotation du satellite, puisque celui-ci est supposé posséder une obliquité nulle sur son orbite.

6. Rappelons que celle-ci, purement empirique et due à KEPLER (1618) – obtenue grâce aux observations de TYCHO BRAHÉ – n'a été démontrée que près de 70 ans plus tard par NEWTON.

Évolution des éléments de la planète : obliquité et rotation propre

La planète centrale voit également un changement de son moment cinétique ; par exemple, le moment cinétique gagné dans l'orbite du satellite est, *a contrario*, perdu pour la rotation du corps central (cf. 1.1.4). Puisque la masse de celui-ci est constante et que l'on peut, en première approximation, négliger les variations de sa répartition impliquées par sa déformation de marée, son moment d'inertie est donc invariant. La variation impliquée porte donc uniquement sur le vecteur rotation propre, autrement dit sur sa norme ($\dot{\theta}_I$) et son orientation. Pour cette dernière, un seul angle suffit ici, puisque le système planète-satellite est considéré comme isolé ; il s'agit de l'obliquité β de la planète.

Les quantités $\dot{\beta}_I \equiv \dot{\beta}$ et $\ddot{\theta}_I$ peuvent être déterminées par l'équation de conservation du moment cinétique du système,

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{total}} = \dot{\mathbf{L}}_I + \underbrace{\dot{\mathbf{L}}_{II}^{\text{rot}} + \dot{\mathbf{L}}_{II}^{\text{orb}}}_{\dot{\mathbf{L}}_{II}} = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

La projection de la relation précédente sur la direction z (normale au plan inertiel ; cf. fig. 5.1), qui est celle du moment cinétique total, implique, dans notre cas, la relation suivante :

$$\frac{d^I L_{\text{total}}^z}{dt} = \dot{L}_I^z + \frac{d^I L_{II}^z}{dt} = 0, \quad (5.24)$$

soit

$$\dot{L}_I^z = -\frac{d^I}{dt} (L_{II}^{z'} \cos I) = -\frac{d^I L_{II}^{z'}}{dt} \cos I + L_{II}^{z'} \dot{I} \sin I. \quad (5.25)$$

Dans l'équation précédente, la dérivée \dot{I} est obtenue grâce au système (5.8). L'expression de la composante sur la direction z' (pôle orbital) du moment cinétique du secondaire, ainsi que de sa dérivée, peut être obtenue aisément :

$$L_{II}^{z'} = M_I M_{II} \left[\frac{G}{M_I + M_{II}} a(1 - e^2) \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{\delta} C_{II} n, \quad (5.26)$$

soit

$$\frac{d^I L_{II}^{z'}}{dt} = M_I M_{II} \left(\frac{G}{M_I + M_{II}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1 - e^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\dot{a}_I}{2} - \left(\frac{a}{1 - e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{e}_I e \right] - \frac{3\alpha n}{2\delta} C_{II} \frac{\dot{a}_I}{a}, \quad (5.27)$$

avec C_I et C_{II} les moments d'inertie de la planète et du satellite par rapport à leurs axes polaires respectifs.

La variation du moment cinétique de la planète est donc déterminée grâce à l'équation (5.25). Elle permet d'accéder à la variation de l'obliquité⁷. En effet, on a (fig. 5.1) :

$$L_I^z = C_I \dot{\theta}_I \cos \beta, \quad (5.28)$$

ce qui implique

$$\dot{\beta} = \frac{1}{\dot{\theta}_I} \left[\ddot{\theta}_I \cot \beta - \frac{\dot{L}_I^z}{C_I} \csc \beta \right]. \quad (5.29)$$

Ceci nécessite donc de connaître la variation $\ddot{\theta}_I$ de la rotation propre de la planète. Celle-ci peut être calculée en faisant cette fois-ci intervenir la combinaison de la projection de l'équation (5.23) sur l'axe z et celle sur un axe orthogonal [c.-à-d. dans le plan Π ; cf. éq. (5.13) et (5.14)] – « élimination » de $\dot{\beta}$. On obtient :

$$\ddot{\theta}_I = \frac{1}{C_I} \left[L_{II}^{z'} \dot{I} \sin \gamma - \frac{d^l L_{II}^{z'}}{dt} \cos \gamma \right], \quad (5.30)$$

avec, rappelons-le, $\gamma := I + \beta$ l'inclinaison de l'orbite du satellite par rapport à l'équateur de la planète.

Les évolutions \dot{a}_I (donc \dot{n}_I) et $\ddot{\theta}_I$ contrôlent la valeur de la fréquence angulaire ω_{lmpq} et donc celle du déphasage ϵ_{lmpq} [éq. (5.16)].

Importance de la précision en excentricité

Dans ce travail, le potentiel de marée perturbateur considéré est celui obtenu à partir de la formule de Kaula (1964), pour une obliquité nulle du satellite (cf. chap. 4), un degré $l = 2$ et une troncature à l'ordre 4 des fonctions d'excentricité. Or, la méthode employée pour décrire l'évolution orbitale du satellite qui résulte de la dissipation dans la planète est précisément basée sur le formalisme de Kaula (1964). Une approche cohérente requiert donc la troncature au même ordre en excentricité dans les fonctions G_{lpq} de Kaula (1964), pour le potentiel comme pour les équations paramétrées de l'orbite. Ainsi, pour l'intégration du système (5.8), l'expression du facteur K_{lmpq} se simplifie grandement, puisqu'il ne reste plus que 13 valeurs non-nulles de la fonction G_{lpq} (cf. tab. A.1). On évite ainsi le calcul complet de cette fonction, plutôt lourd numériquement. Cependant, le calcul de la fonction F_{lmp} de Kaula (1964) reste inévitable si l'on veut pouvoir considérer des systèmes à inclinaison non nulle. À ce titre, mentionnons l'aide apportée par Axel Bazin (stage de

7. On supposera que seule la dissipation dans la planète affecte la rotation propre de celle-ci et l'inclinaison de l'orbite (voir la partie consacrée à l'effet de la dissipation dans le satellite), c.-à-d. $\frac{d^{lI} \dot{\theta}_I}{dt} = \dot{I}_{II} = 0$; d'où les notations allégées $\ddot{\theta}_I$ et \dot{I} employées. De même, on a noté \dot{L}_I^\bullet au lieu de $\frac{d^l L_I^\bullet}{dt}$ et $\dot{\beta}$ au lieu de $\dot{\beta}_I$.

Master 1), pour le calcul des fonctions F_{lmp} et G_{lpq} ; la méthode employée est décrite dans l'article de [Szeto et Lambeck \(1982\)](#).

Il convient maintenant de comparer les résultats d'un calcul d'évolution orbital avec ou sans l'approximation à l'ordre 4 en e , afin de déterminer quelle est la gamme d'excentricité dans laquelle l'approche utilisée reste raisonnable. Pour cela, un certain nombre de tests ont été effectués; une partie de ceux-ci est résumée par les figures 5.2 et 5.3 ci-dessous.

Les tests présentés ici ont été réalisés en inclinaison nulle, afin de permettre également une comparaison avec les formules classiques à l'ordre 2 en excentricité [éq. (5.18)]. Il permettent véritablement de visualiser l'accumulation des erreurs de troncature avec le temps, pour diverses valeurs d'excentricité initiale. Ainsi, sur une simulation étalée sur 4,5 Ga – soit une durée correspondant à l'âge approximatif du système Terre-Lune – la troncature à l'ordre 4 en e reste tout à fait acceptable pour une excentricité initiale de 5 %, qui augmente alors progressivement jusqu'à une valeur de presque 30 % (fig. 5.3a), avec un résultat très proche de celui obtenu sans troncature. L'écart final n'est que de 0,43 % pour e et de 0,17 % pour a (demi-grand axe). Il atteint cependant des valeurs correspondantes de 9,6 % et 2,3 % dans le cas d'une troncature à l'ordre 2 (courbes bleues). Cette dernière est donc à utiliser avec prudence et ne prend son sens qu'à de très faibles excentricités; par exemple, pour les satellites galiléens. Au vu des figures présentées ici, il ressort que la formulation en e^4 utilisée dans cette thèse reste satisfaisante jusqu'à une excentricité de l'ordre de 10 %. Au-delà, il est nécessaire d'utiliser les fonctions G_{lpq} complètes ou bien de recourir à une troncature des expressions à un ordre plus avancé. Notons toutefois que cette restriction ne concerne que l'algorithme d'évolution orbitale lui-même. La dissipation de marée peut être calculée raisonnablement jusqu'à 20 % d'excentricité (p. ex. [Běhounková et al., 2010](#)) : une erreur sera nécessairement commise sur le potentiel, mais « moins grave » que celle qui résulte de l'accumulation d'imprécisions sur une évolution orbitale. Notons enfin que les écarts importants observés dans ces tests pour une excentricité initiale de 20 % sont renforcés par le fait que celle-ci va augmenter jusqu'à plus de 40 % et que, dans ce cas, l'évolution orbitale avec des fonctions G_{lpq} tronquées en e^4 n'est plus tellement pertinente.

L'exemple d'évolution couplée qui sera présenté plus loin est basé sur une configuration orbitale initiale d'excentricité égale à 5,3 %, pour laquelle l'approche au quatrième ordre utilisée est raisonnable.

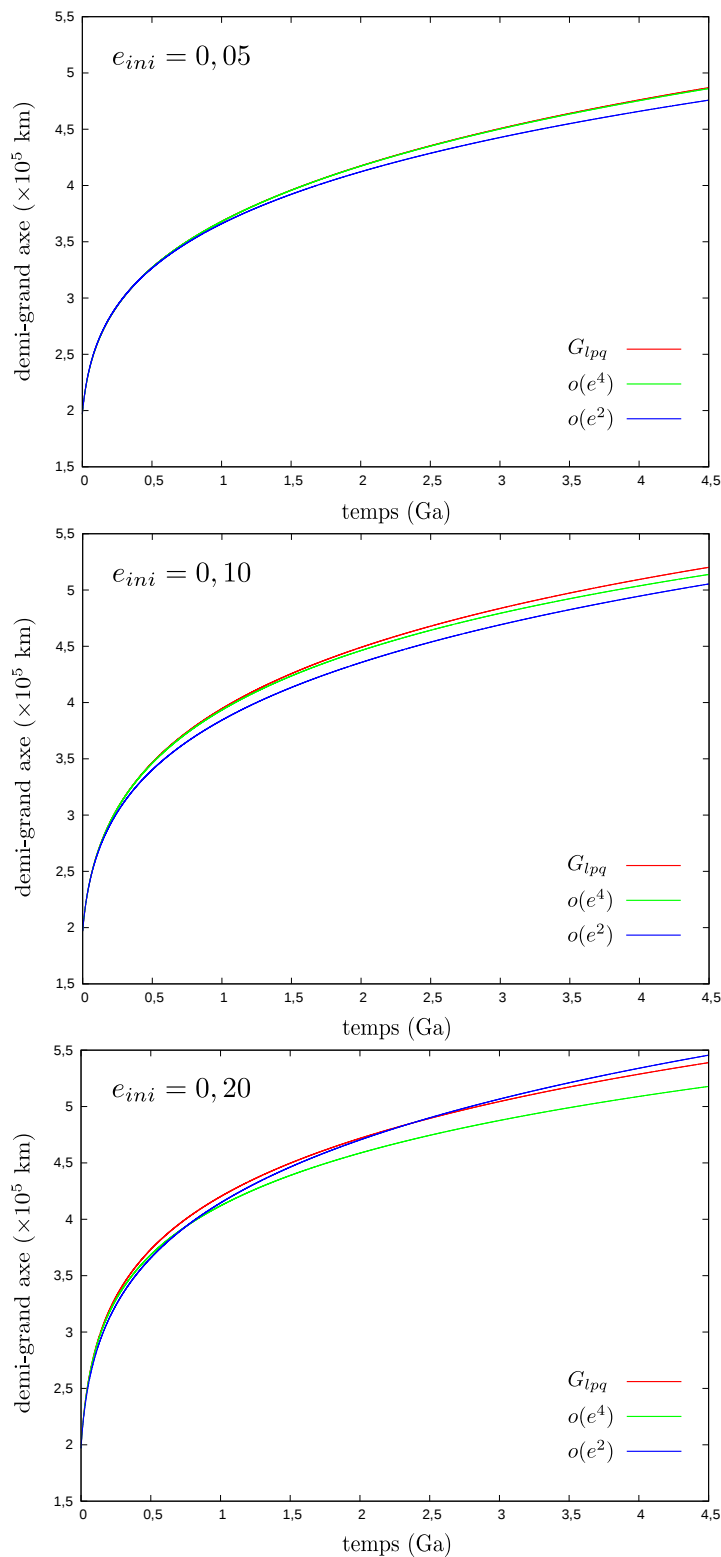


FIGURE 5.2 – Effet de différentes approximations en excentricité sur l'évolution du demi-grand axe résultant de la dissipation dans le corps central. Pour différentes valeurs d'excentricité initiale (e_{ini}), l'évolution orbitale a été calculée avec les fonctions de [Kaula \(1964\)](#) complètes (notation « G_{lpq} »), tronquées à l'ordre 4 [$o(e^4)$] ou via les équations simplifiées (5.18) [$o(e^2)$]. Les paramètres des corps primaire et secondaire correspondent au système de type Terre-Lune simplifié étudié par la suite (ici $Q_I^{-1} = 0,0755$, cf. tab. 5.1), avec toutefois des obliquité et inclinaison nulles. Pas de temps orbital : 40 000 a.

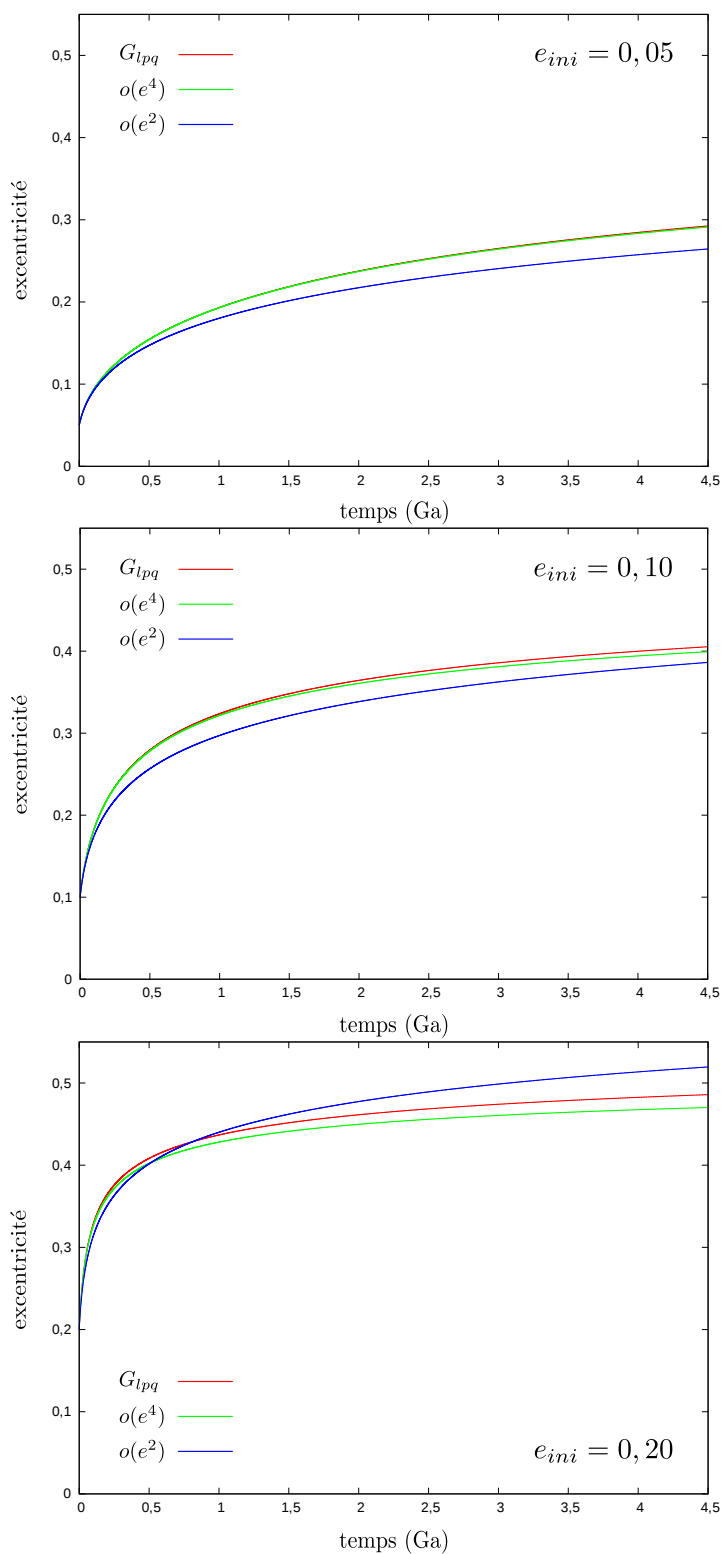


FIGURE 5.3 – *Effet de différentes approximations en excentricité sur l'évolution de cette même quantité résultant de la dissipation dans le corps central. Mêmes notations et paramètres qu'à la figure 5.2.*

5.1.3 Effet de la dissipation dans le satellite

Contrairement au cas du corps central, la dissipation de marée dans le satellite est directement évaluée en interaction avec le calcul des transferts de chaleurs qui gouvernent l'état thermique de son manteau. La méthode semi-analytique développée durant cette thèse, et présentée au chapitre 4, permet, en effet, d'obtenir le champ de chauffage de marée dans le satellite pour un manteau à viscosité variable avec la température [p. ex. éq. (4.69)]. L'intégration de celui-ci sur le volume du manteau donne la puissance globale dissipée, moyennée sur une orbite, que nous noterons ici $\mathcal{P}_{\text{mar}}^{II}$.

Puisque la rotation propre de la planète est supposée ne pas être affectée par la dissipation de marée dans le satellite, le bilan d'énergie (1.29) du système s'écrit, en supposant que le phénomène de marée est la seule source de dissipation d'énergie :

$$\frac{d^{II} E_{\text{orb}}}{dt} + \dot{E}_{\text{rot}}^{II} = -\mathcal{P}_{\text{mar}}^{II}, \quad (5.31)$$

avec les expressions suivantes pour les énergies orbitale et de rotation du satellite :

$$E_{\text{orb}} = -\frac{G(M_I + M_{II})M_{II}}{2a}, \quad (5.32)$$

$$E_{\text{rot}}^{II} = \frac{1}{2}C_{II}\dot{\theta}_{II}^2. \quad (5.33)$$

Les trois équations scalaires précédentes permettent d'aboutir à la loi décrivant l'évolution du demi-grand axe de l'orbite du satellite en raison de la dissipation d'énergie qui a lieu en son sein. Ainsi, puisque l'on a supposé une résonance spin-orbite $\alpha : \delta$, cette loi peut être écrite sous la forme :

$$\dot{a}_{II} = a \frac{\mathcal{P}_{\text{mar}}^{II}}{E_{\text{orb}}} \left[1 - \frac{3\alpha^2}{\delta^2} \left(\frac{C}{MR^2} \right)_{II} \left(\frac{R_{II}}{a} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (5.34)$$

Par conservation du moment cinétique, on a [cf. éq. (5.24)] :

$$\frac{d^{II} L_{II}^z}{dt} = -\frac{d^{II}}{dt} (C_I \dot{\theta}_I \cos \beta), \quad (5.35)$$

soit, avec les hypothèses $\dot{I}_{II} = 0$ (donc $\dot{\beta}_I = 0$; l'obliquité du satellite sur son orbite est considérée comme nulle) et $\frac{d^{II} \dot{\theta}_I}{dt} = 0$:

$$\frac{d^{II} L_{II}^z'}{dt} = 0. \quad (5.36)$$

Autrement dit, la dissipation dans le satellite est supposée ne pas affecter l'état de rotation (vitesse de rotation propre et obliquité) de la planète, d'où la conservation du moment cinétique (orbital et de rotation) du satellite. Grâce à l'équation (5.27), on obtient :

$$\frac{d^{II}}{dt} \ln(1 - e^2) = -\frac{\dot{a}_{II}}{a} \left[1 - \frac{3\alpha}{\delta} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{C}{MR^2} \right)_{II} \left(\frac{R_{II}}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{M_{II}}{M_I} \right) \right]. \quad (5.37)$$

Les expressions (5.34) et (5.37) amènent une remarque générale sur l'approche mise en œuvre pour calculer l'évolution orbitale. En effet, nous pouvons remarquer que, dans ces équations, deux valeurs numériques relativement mineures interviennent : le facteur de moment d'inertie du satellite, $C_{II}/(M_{II}R_{II}^2)$, ainsi que le rapport de son rayon au demi-grand axe. Le premier traduit directement la différenciation du corps, avec une valeur maximale à 0,4 correspondant au cas d'un corps (sphérique) homogène. Le second, est, en règle générale, très faible, d'autant plus qu'il est élevé au carré ; il ne devient généralement important qu'aux abords de la limite de ROCHE. Les systèmes doubles, tels le couple Pluton-Charon, font toutefois figure d'exception. Enfin, le rapport de masse, à la fin de l'équation (5.37), est généralement faible, puisque, dans les cas extrêmes des systèmes Terre-Lune et Pluton-Charon, il atteint seulement les valeurs respectives de 0,0123 et 0,130 ($1,7 \cdot 10^{-8}$ pour le système Mars-Phobos!).

L'approche classiquement utilisée consiste à négliger l'énergie et le moment cinétique liés à la rotation du satellite, qui n'apparaissent que mineurs dans les bilans de quantités totales du système. Si cela est amplement raisonnable pour les lunes des planètes géantes, par exemple les satellites galiléens, cela paraît toutefois moins justifié pour des systèmes comme celui formé par notre planète et son satellite. Les expressions complètes (5.26), (5.27), (5.34) et (5.37) ont été conservées dans l'approche menée dans cette thèse, ceci afin de non seulement garder un caractère généraliste mais aussi de décrire au mieux la conservation du moment cinétique et le bilan d'énergie au sein du système.

Notons toutefois que, dans la méthode employée pour l'évolution orbitale, toutes les autres composantes possibles d'énergie et de moment cinétique ont été ignorées. Ces facteurs négligés peuvent par exemple être la dissipation d'énergie au sein des couches fluides ou aux interfaces entre celles-ci et les couches solides, comme c'est probablement le cas à la limite manteau-noyau sur Terre, laquelle possède une certaine topographie. Il peut aussi s'agir des transferts de moment cinétique entre la planète et ses enveloppes fluides externes (océans et/ou atmosphère). Dans cette approche préliminaire, ces différents effets sont considérés de second ordre (sauf la dissipation des océans). Dans le cas du corps central, ils peuvent cependant être

« inclus » de manière paramétrée dans la valeur du facteur de dissipation Q_I^{-1} : celui-ci caractérise la réponse de l'ensemble de la planète. Cette technique permet, par exemple, d'inclure l'effet de la dissipation des océans dans le système Terre-Lune (cf. plus loin).

5.1.4 Algorithme d'évolution orbitale

L'algorithme mis en œuvre pour décrire l'évolution orbitale qui résulte de la dissipation de marée au sein de la planète et de son satellite – pour lequel sont calculés les transferts de chaleur – est illustré à la figure 5.4. Les différentes quantités indiquées sont calculées via les formules présentées précédemment.

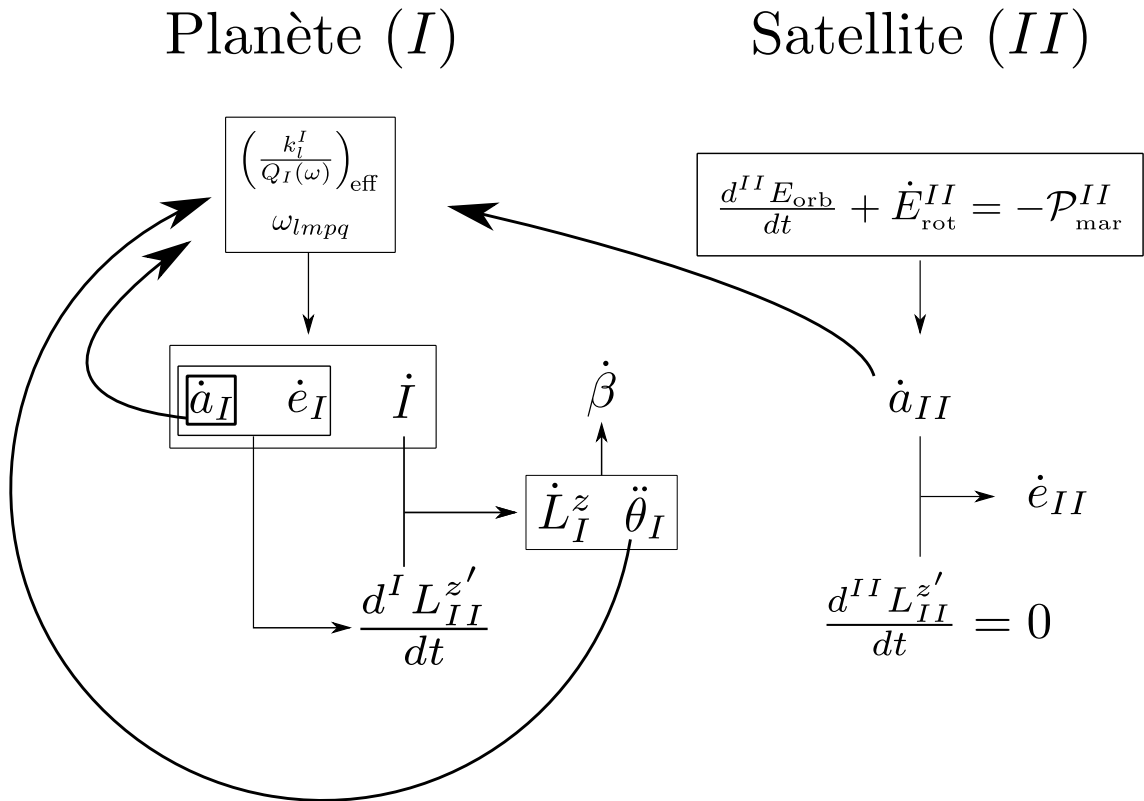


FIGURE 5.4 – Les différentes étapes de calcul de l'évolution orbitale et leurs interactions. Noter les rétro-actions (flèches courbes) via la dépendance fréquentielle possible de la dissipation de marée dans la planète [$Q_I^{-1}(\omega)$; la dépendance fréquentielle de Q_I^{-1} est toutefois ignorée dans cette première approche]. La notation « eff » indique une valeur effective pour le facteur k_I^I/Q_I de la planète ; elle permet de tenir compte de formes additionnelles de dissipation d'énergie (par exemple celle des océans) ou encore d'une certaine compressibilité. En réalité, une dépendance fréquentielle est également incluse dans le terme $\mathcal{P}_{\text{mar}}^{II}$ (cf. chap. 4), mais celle-ci n'intervient pas explicitement dans le calcul de l'évolution orbitale.

Le schéma temporel d'évolution utilisé pour l'intégration des équations d'évolution des éléments a , e , I , β et $\dot{\theta}_I$ est, à l'heure actuelle, une simple méthode d'EULER (c.-à-d. à l'ordre 1 en temps). Cette approche est justifiée par deux points. D'une part, le pas de temps orbital utilisé est généralement de l'ordre de 10 000 ans, ce qui reste faible devant les durées envisagées dans cette thèse, sachant qu'un pas de temps convectif est généralement de l'ordre de $\sim 10^5$ années. D'autre part, étant donné que la précision requise pour décrire les orbites est relativement mineure dans notre cas, ce schéma s'avère suffisant. En effet, la seule hypothèse de système primaire-secondaire isolé justifie de ne pas employer de schéma trop précis : il serait par exemple illusoire de vouloir décrire, avec un système aussi simple, l'orbite de la Lune avec une précision similaire à celle obtenue par les méthodes modernes de la mécanique céleste, qui incluent l'interaction avec les autres corps du Système Solaire (notamment Jupiter) et les effets relativistes (p. ex. [Fienga *et al.*, 2008](#)). Quoi qu'il en soit, l'approche utilisée dans ce travail ne consiste qu'en un calcul des variations séculaires des éléments orbitaux, et non de la dynamique orbitale du système.

5.2 Un premier exemple : évolution thermo-orbitale d'un corps de type Lune

Dans cette partie sont présentés quelques résultats de simulations qui ont été menées pour un couplage complet entre les transferts de chaleur, la dissipation de marée et l'évolution orbitale résultante. Le système choisi est de type Terre-Lune simplifié. En effet, d'une part, toute la complexité des objets n'a pas été envisagée pour cette première approche. Par exemple, une Lune en convection sera considérée, mais sans refroidissement séculaire. L'enjeu n'est pas, en effet, de tenter de reconstituer l'évolution exacte de la Lune mais plutôt de comprendre quelques-unes des grandes lignes du couplage thermo-orbitale mis en jeu ici. D'autre part, l'outil CHEOPS-2D ne permet pas, pour l'instant, de traiter simultanément les transferts de chaleur dans les deux corps. En conséquence, ceux-ci ne sont traités que dans la Lune, ainsi que l'énergie de marée qu'elle dissipe. La Terre est simplement considérée par des valeurs constantes du nombre de LOVE k_I^I et du facteur de dissipation Q_I^{-1} .

5.2.1 Modèle

Si le rayon de la Lune est connu depuis fort longtemps, sa valeur précise a surtout été déterminée à partir de la période Apollo (altimétrie laser). On peut actuellement admettre un rayon lunaire moyen de $R_{II} = 1737,103 \pm 0,015$ km ([Smith *et al.*, 1997](#), données lidar, sonde Clémentine). La masse de la Lune peut être estimée grâce à son champ de gravitation ; on trouve ainsi $M_{II} = 7,34767 \pm 0,00033 \cdot 10^{22}$ kg

(p. ex. [Wieczorek et al., 2006](#)), soit une masse volumique moyenne de $\langle \rho_{II} \rangle = 3346,45 \pm 0,17 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En outre, le moment d'inertie polaire de notre satellite est évalué à $C_{II} = 0,3936 \pm 0,0002 M_{II} R_{II}^2$ ([Konopliv et al., 1998](#)).

Les divers paramètres choisis pour respecter ces contraintes pour le modèle simplifié de système Terre-Lune sont présentés au tableau [5.1](#). Un aspect important réside dans le choix de la taille du noyau lunaire, sous réserve que ce dernier existe bien. L'étude de [Weber et al. \(2011\)](#), basée sur un traitement nouveau des données sismologiques Apollo, suggère la présence de celui-ci et que 60 % de son volume serait liquide. La meilleure estimation que ces auteurs avancent est un rayon de la limite manteau-noyau de $330 \pm 20 \text{ km}$ ⁸. Le choix s'est donc porté sur un rapport f de ce rayon à celui de la surface de 0,2 pour le modèle de corps de type Lune employé ici. En outre, le noyau a été considéré comme entièrement liquide.

Une fois choisis ces divers paramètres géométriques fondamentaux, la question de la configuration initiale se pose, tant du point de vue thermique qu'orbital. La solution orbitale considérée au début de chacune des simulations présentées plus bas (cf. tab. [5.1](#)) correspond aux valeurs des paramètres orbitaux qui sont obtenues à la date $t = 200 \text{ Ma}$ dans le modèle de [Ross et Schubert \(1989, fig. 3](#) – version sans dissipation des océans), dont l'approche a véritablement inspiré la dernière partie de cette thèse. Le modèle de ces auteurs fait notamment intervenir une Lune et une Terre en convection thermique à chauffage interne pur (radioactif), de manière paramétrée et emploie le formalisme de [Kaula \(1964\)](#) pour la description de l'effet de la dissipation de marée dans la planète *et* dans le satellite. Notons cependant que ces auteurs considèrent une dépendance fréquentielle des facteurs de dissipation des deux corps, alors qu'elle est ignorée pour la Terre dans notre illustration. L'approche choisie dans cette thèse, à l'instar de celle de [Ross et Schubert \(1989\)](#), ne prend aucunement en compte l'effet du Soleil. Il s'agit simplement du problème à deux corps isolés et les valeurs finales obtenues (notamment l'obliquité de la Terre et l'inclinaison de la Lune) ne peuvent être directement comparables avec les valeurs réelles actuelles ($\beta = 23,44^\circ$; $I = 5,145^\circ$). En outre, il faut mentionner l'obliquité non-négligeable de la Lune ($\sim 6,69^\circ$), qui n'est pas prise en compte dans ces modèles. Dans le cas d'étude présenté ici, la Lune commencera ainsi son évolution à une distance (demi-grand axe) de 42 rayons terrestres (voir tableau [5.1](#) pour les valeurs des autres éléments).

Notons qu'un degré maximal $l = 2$ est considéré pour l'évolution orbitale [cf. [éq. \(5.8\)](#)], à l'instar de ce qui a été choisi pour la dérivation du potentiel de marée responsable de la dissipation dans le satellite (cf. [chap. 4](#)). Cette hypothèse est justifiée tant que le rayon des corps reste faible devant le demi-grand axe. Elle n'est

8. Il s'agit cependant de la limite inférieure proposée pour la taille du noyau lunaire (p. ex. [Wieczorek et al., 2006](#)).

cependant plus valable pour le cas du système Mars-Phobos [développement jusqu'à $l = 3$ ou 4 nécessaire, cf. [Lambeck \(1979\)](#)].

L'état thermique de la Lune et la description du transfert de chaleur en son sein sont importants. Le manteau lunaire est considéré ici comme incompressible⁹ et homogène. En effet, le nombre de dissipation que l'on peut estimer pour la Lune est faible, de l'ordre de $Di \approx 0,04$. Les transferts thermiques ont donc été décrits dans l'approximation de BOUSSINESQ, en première approche. Les divers paramètres thermo-mécaniques qui ont été choisis sont indiqués dans le tableau 5.2. En particulier, un chauffage radioactif constant dans le manteau et dans le temps a été choisi, ainsi qu'un chauffage par la base (noyau liquide, température imposée), lui aussi constant en première approche. Un point important concerne les rhéologies employées pour le manteau lunaire. La viscosité convective est ainsi décrite par une loi d'ARRHENIUS (cf. p. 65), munie d'une énergie d'activation réaliste pour un processus de fluage par diffusion (newtonien). L'hypothèse de la prédominance de ce dernier est justifiée par la faible épaisseur du manteau lunaire. Les pressions modérées mises en jeu permettent par ailleurs de négliger la dépendance en profondeur de la viscosité. La rhéologie visco-élastique de la Lune est décrite au moyen d'un modèle d'ANDRADE (cf. p. 46), pourvu de la formulation réduite proposée par [Castillo-Rogez et al. \(2011\)](#), adaptée aux propriétés d'atténuation mesurées pour l'olivine [cf. équ. (1.87)]; celle-ci aboutit à un seul paramètre d'ANDRADE, α_A , dont le choix reste cependant assez arbitraire : une valeur « standard » de 0,33 ([Jackson, 1993](#)) a été adoptée. Notons enfin que la viscosité effective, par simplicité, a également été décrite via une loi d'ARRHENIUS (même énergie d'activation).

Les paramètres numériques (maillage, etc.) pour les simulations réalisées sont indiqués dans le tableau 5.3.

5.2.2 Résultats

État thermique initial

La solution thermique initiale qui a été adoptée pour la Lune consiste en un transfert de chaleur convectif à l'équilibre. Rappelons qu'il s'agit ici d'une convection munie d'un chauffage à la base *et* interne, avec de fortes variations de viscosité et sans refroidissement séculaire. Cependant, étant donnée l'importance relative du chauffage interne et la faiblesse de l'écart global de température ($\Delta T = 1300$ K) choisis, la convection obtenue est naturellement proche d'une convection de RAYLEIGH-ROBERTS, c'est-à-dire en chauffage interne pur (faible flux de chaleur à la base ici). La structure à l'équilibre (statistique) de la solution obtenue est visible grâce aux figures 5.5 et 5.6 ci-dessous. Il s'agit d'un cas classique de convection à régime de

9. aux échelles de temps de la convection uniquement (voir plus loin, tab. 5.2)

TABLE 5.1 – Paramètres géométriques choisis pour le système Terre-Lune. La Lune est considérée en résonance spin-orbite 1 : 1.

Dénomination	Symbole	Valeur
Lune : structure		
Rayon ^a	R_{II}	1737 km
Masse ^a	M_{II}	7,349 10 ²² kg
Moment d'inertie ^a	C_{II}	0,397 $M_{II}R_{II}^2$
Intensité du champ de pesanteur en surface ^b	g	1,62 m · s ⁻²
Épaisseur du manteau ^{c, d}	b	1407 km
Masse volumique du manteau ^c	ρ_M	3326 kg · m ⁻³
Masse volumique du noyau ^{c, d}	ρ_N	6500 kg · m ⁻³
Terre : structure et propriétés globales		
Rayon ^e	R_I	6371 km
Masse ^e	M_I	5,974 10 ²⁴ kg
Moment d'inertie ^e	C_I	0,331 $M_I R_I^2$
Nombre de Love ^f	k_2^I	0,298
Facteur de dissipation	Q_I^{-1}	0,0027 ^g -0,0755 ^h
Système Terre-Lune : configuration initiale ⁱ		
Demi-grand axe	a	42 R_I
Excentricité	e	0,053
Période orbitale	$2\pi/n$	15,95 j
Durée du jour terrestre	$2\pi/\dot{\theta}_I$	13 h
Inclinaison de la Lune sur l'écliptique	I	2,9°
Obliquité de la Terre	β	6,6°

^a. [Wieczorek et al. \(2006\)](#)
^b. Valeur résultante
^c. Conséquence du choix du modèle (cf. tab. 5.2)
^d. [Weber et al. \(2011\)](#)
^e. p. ex. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
(site consulté le 16 mars 2012)
^f. [Benjamin et al. \(2006\)](#)
^g. [Ray et al. \(1996\)](#) – donnée d'origine : Q=370 (période de 12,4 h)
^h. [Kaula \(1964\)](#) ; [Kantha et al. \(1998\)](#)
ⁱ. [Ross et Schubert \(1989\)](#), date $t = 200$ Ma (cf. p. 287)

TABLE 5.2 – Propriétés thermo-mécaniques choisies pour le manteau lunaire. La dépendance en pression de la viscosité (convective ou effective) est ignorée.

Dénomination	Symbole	Valeur
Transferts thermiques		
Coefficient de dilatation (thermique) isobare ^a	α	$2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Saut de température à travers le manteau ^a	ΔT	1300 K
Conductivité thermique ^a	k	$4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Capacité thermique massique isobare ^a	c_p	$1,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Énergie d'activation ^b	E_a	$300 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
Viscosité à la base ^c	η_{base}	$10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Température de surface ^a	T_s	273 K
Chauffage interne (radioactif) ^a	H_{rad}	$2 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$
Nombres caractéristiques résultants		
Nombre de RAYLEIGH basal	Ra_{base}	$3,9 \cdot 10^7$
Nombre de RAYLEIGH-ROBERTS basal	Ra_H^{base}	$3,0 \cdot 10^8$
Température de surface sans dimension	T_0	0,21
Nombre de dissipation	Di	0,038 (négligé ici)
Dissipation de marée		
Coefficient d'incompressibilité du manteau ^d	K_M	120 GPa
Module de rigidité du manteau ^d	μ_M	62 GPa
Coefficient d'incompressibilité du noyau ^c	K_N	∞
Module de rigidité du noyau ^c	μ_N	0
Viscosité du noyau ^c	η_N	0
Énergie d'activation ^{b, c}	E_a^{eff}	$300 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
Viscosité à la base ^c	η_{eff}^{base}	$10^{17-18} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Paramètre d'Andrade ^e	α_A	0,33

a. Valeur en accord avec celle de l'étude de [Ziethe et al. \(2009\)](#)

b. [Karato et Wu \(1993\)](#)

c. Choix du modèle

d. [Weber et al. \(2011\)](#)

e. [Jackson \(1993\)](#)

TABLE 5.3 – *Paramètres numériques des simulations. Noter le choix d'une limitation, pour des raisons purement numériques, du contraste de viscosité global (cf. aussi fig. 5.6a).*

Dénomination	Symbole et valeur ou spécificité
Rapport de courbure	$f = 0, 2$
Amplitude angulaire du domaine	$\Delta\theta = 2\pi$
Degré de courbure effectif	$d = 2$
Résolution radiale	$n_r = 64$
Résolution azimutale	$n_\theta = 256$
Raffinement de maillage	double vers la base
Bord interne (Γ_i)	isotherme et libre
Bord externe (Γ_e)	isotherme et rigide
Contraste maximal de viscosité	$\Delta\eta^{max} = \Delta\eta_{eff}^{max} = 10^8$
Degré maximal pour l'évolution orbitale	$l = 2$
Pas de temps orbital	$\delta t_{orb} = 10\,000$ a

couvercle stagnant épais et dominé par les instabilités froides qui se forment dans une mince région sous celui-ci. Il s'apparente fortement aux solutions cartésiennes de [Grasset et Parmentier \(1998\)](#). Notons que, pour cette simulation initiale, un maillage raffiné deux fois à la base du manteau a été choisi. Il permet non seulement de décrire plus finement les transferts de chaleur dans cette région – question importante puisque l'essentiel de la dissipation de marée aura lieu en ce lieu – mais aussi, par la même occasion, d'obtenir un rapport d'aspect plus homogène des cellules du maillage dont la courbure est nécessairement importante ($f = 0, 2$).

Le milieu convectif est de température relativement homogène ; l'essentiel de la variation de viscosité se situe au niveau du couvercle stagnant [fig. 5.6a] et la convection sous-jacente est donc presque isovisqueuse. La condition imposée à la base étant en bord libre (noyau liquide), le maximum des vitesses d'écoulement latéral est donc en ce lieu (fig. 5.6b), alors que la vitesse d'ascension optimale des panaches se situe au cœur du milieu convectif, pour lequel le flux de chaleur advectif devient prédominant (fig. 5.6c). La faiblesse du flux de chaleur basal est directement due à la température élevée du milieu convectif. Dans le couvercle, on retrouve une évolution du flux de chaleur qui est quasiment celle d'un flux conductif en chauffage interne pur [fig. 5.6c, courbe bleue] : le petit écart observé est dû à la « composante » en chauffage basal de la convection qui a lieu ici : étant donnée la courbure ($d = 2$ et $f = 0, 2$), le flux additionnel en surface est mineur (f^2 fois celui à la base).

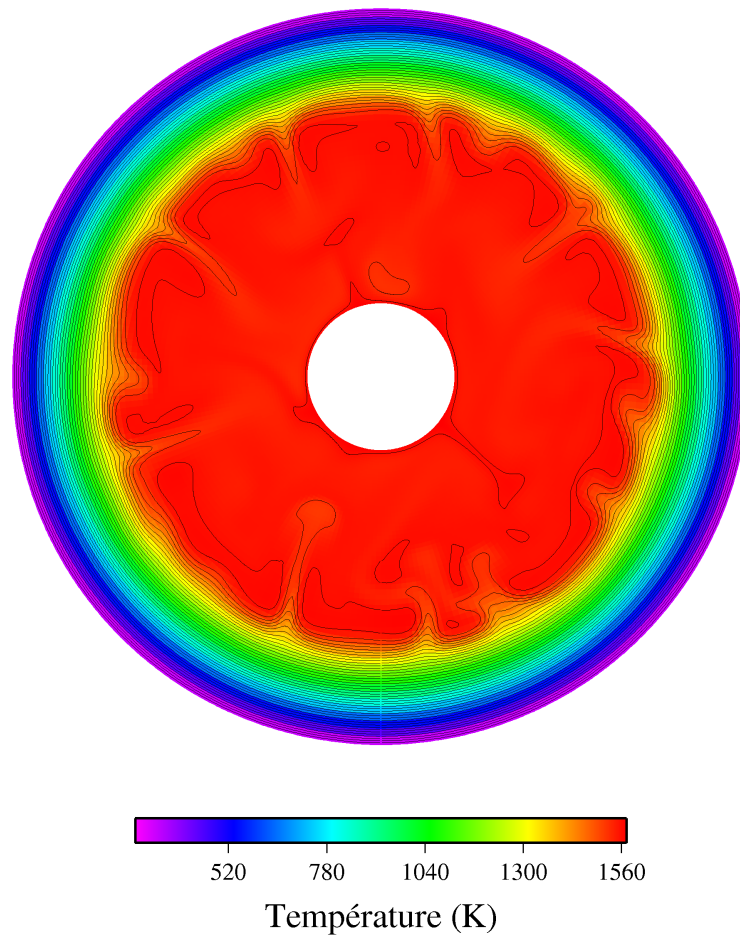


FIGURE 5.5 – *Champ de température initial pour le modèle de Lune convective choisi. Exemple d'un instantané de la solution après convergence statistique. Les isolignes correspondent à un intervalle de 30 K.*

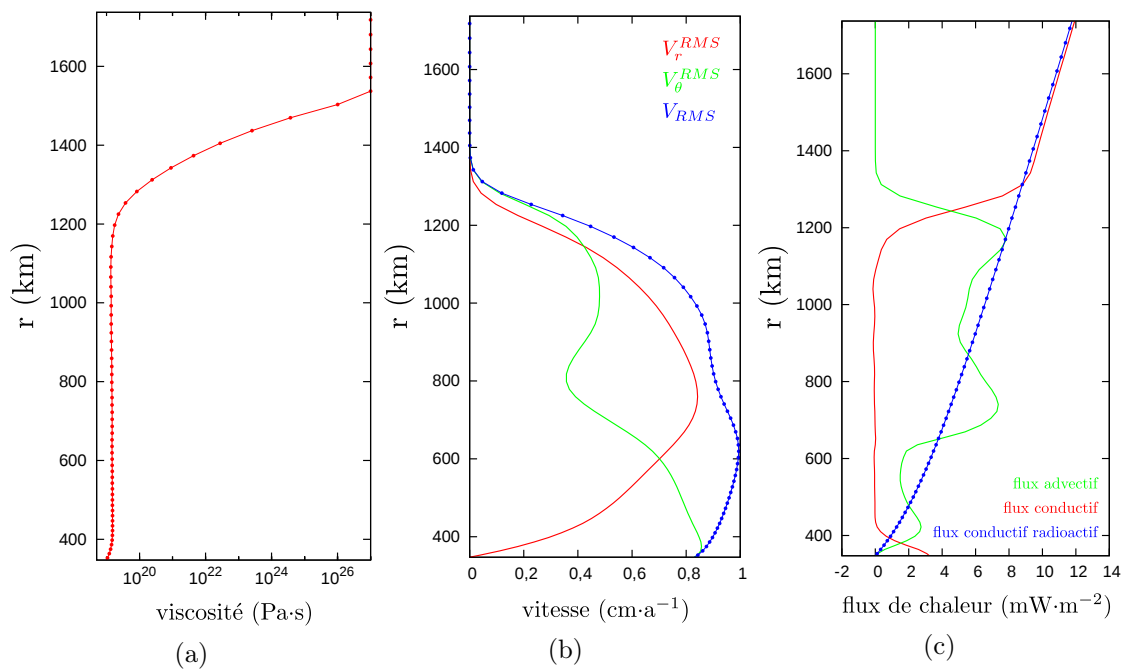


FIGURE 5.6 – Profils moyens caractéristiques du modèle de Lune convective (instantanés). Noter la troncature artificielle de la variation de viscosité imposée dans le couvercle [stabilité numérique ; fig. 5.6a]. Les points représentent la discrétisation employée (ils correspondent aux centres des cellules du maillage).

Évolution thermo-orbitale

Une fois la solution thermique initiale obtenue, un ensemble de six cas différents ont été testés, regroupés en deux familles. Pour la première, un facteur de dissipation terrestre a été choisi à $Q_I^{-1} = 0,0755$ (soit $Q_I \approx 13,2$), simulant ainsi une Terre actuelle, c'est-à-dire pourvue d'océans. Il s'agit de celui employé dans l'étude de [Kaula \(1964\)](#). Notons que les valeurs mesurées, pour le facteur de qualité effectif de la Terre, s'étalent approximativement de 5 à 23, respectivement pour des périodes d'une demi-journée à quelques jours ([Kantha et al., 1998](#)); la valeur choisie ici correspond à la marée diurne. La seconde famille de simulations a été réalisée pour une valeur de Q_I^{-1} de 0,0027, ce qui correspond approximativement à une Terre sans océan ([Ray et al., 1996](#)). Pour chacun de ces deux cas extrêmes, trois simulations ont été menées : pour une Lune non dissipative, ou bien dissipative avec deux valeurs différentes de viscosité effective à la base du manteau ($\eta_{eff}^{base} = 10^{18}$ Pa·s et $\eta_{eff}^{base} = 10^{17}$ Pa·s). Nous insistons ici sur le fait que le facteur de dissipation de la Terre a été choisi constant, à la fois en fréquence et durant l'évolution thermo-orbitale, afin de ne pas trop complexifier le système dans cette première approche. La rétroaction de l'évolution de la fréquence orbitale sur celui-ci [cf. $\dot{a}_{II} \rightarrow Q^{-1}(\omega)$, fig. 5.4] est donc ignorée ici. Notons enfin que ces simulations ont été réalisées sur une durée de 4,5 Ga.

La figure 5.7 présente les évolutions du demi-grand axe et de l'excentricité de l'orbite de la Lune, qui sont gouvernées à chaque instant par un équilibre entre les modifications de ces quantités dues à la dissipation dans la Lune et celles, de signe opposé, dues à la dissipation dans la Terre. Le demi-grand axe de la Lune n'évolue que peu dans le cas d'un faible facteur de dissipation de la Terre et atteint à peine 300 000 km (la valeur actuelle est de 384 399 km). À l'inverse, l'éloignement de la Lune est beaucoup trop fort dans les cas munis d'un facteur de dissipation actuel pour la Terre : ainsi, pour une Lune non dissipative, le demi-grand axe finit par atteindre 461 332 km. Il n'est toutefois pas tellement pertinent ici de comparer les résultats obtenus pour ce modèle simplifié avec les valeurs caractéristiques réelles du système Terre-Lune. Il est en revanche intéressant de comprendre les comportements visibles dans les figures 5.7 à 5.9. Ainsi, il est remarquable de constater le faible effet obtenu de la dissipation dans la Lune sur sa vitesse d'éloignement dans un cas à Terre peu dissipative [$Q_I^{-1} = 0,0027$, fig. 5.7a]; l'excentricité, elle, est rapidement atténuée pour une Lune dissipative [fig. 5.7b, courbes rouges et vertes] et ne fait bien évidemment qu'augmenter en cas d'absence de dissipation dans le satellite. Cette grande sensibilité de l'évolution de l'excentricité e peut être comprise en partie en raisonnant à l'ordre 2 [cf. éq. (5.19)] : on trouve ainsi que la modification du demi-grand axe due à la dissipation dans le satellite (\dot{a}_{II}) est proportionnelle à e^2 ; elle est donc moins critique que la modification de l'excentricité (\dot{e}_{II}), proportionnelle directement à e .

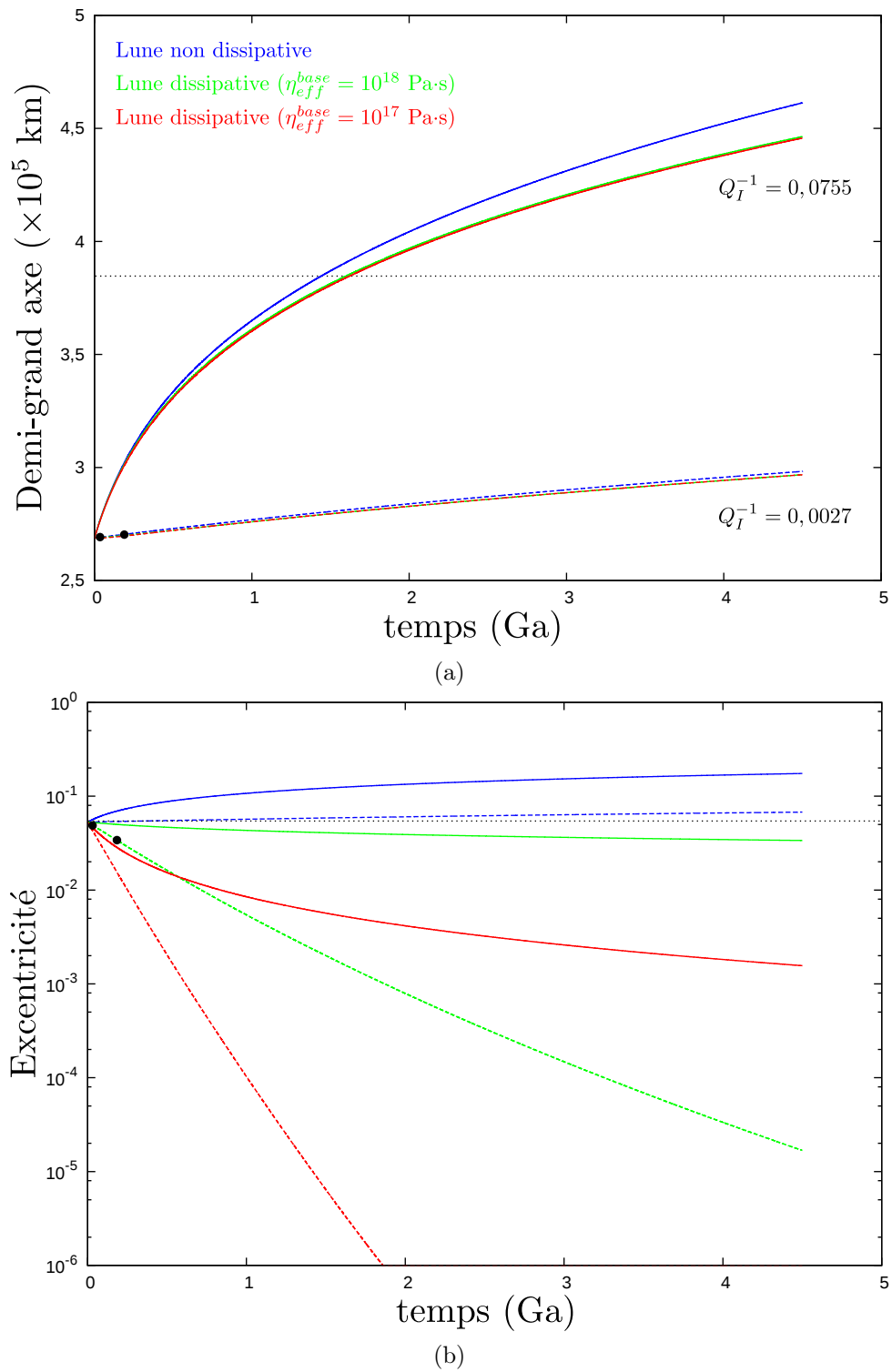


FIGURE 5.7 – Évolution du demi-grand axe et de l'excentricité de l'orbite pour le modèle de Lune simplifié. Les différents cas testés sont identifiés par une couleur (lune dissipative ou non) et un type de trait (tiretés pour une Terre sans océan, trait plein pour une Terre actuelle). Les deux points correspondent à la localisation temporelle des champs de la figure 5.9. La ligne noire en pointillés indique la valeur actuelle (p. ex. [Wieczorek et al., 2006](#)).

Dans le cas d'une Terre avec océans [$Q_I^{-1} = 0,0755$], la dissipation dans la Lune, contrôlée par les transferts thermiques qui ont lieu en celle-ci, implique une atténuation progressive de la vitesse de croissance de l'orbite, pour finalement arriver, au bout de 4,5 Ga, à un écart de presque 15 000 km sur la distance finale, valeur quasiment identique dans le cas d'une Lune plus dissipative ($\eta_{eff}^{base} = 10^{17}$ Pa·s). L'effet est à nouveau plus marqué pour l'évolution de l'excentricité [fig. 5.7b, courbes rouge et vertes en traits pleins] mais l'atténuation est moins forte en raison de l'excitation importante de e par la dissipation dans la Terre. Ainsi, la valeur initiale $e_{ini} = 0,053$ choisie dans ces simulations chute à 3,4 % à la fin de l'évolution, dans le cas d'une Lune modérément dissipative ($\eta_{eff}^{base} = 10^{18}$ Pa·s), alors qu'elle s'accroît et parvient à 17,7 % lorsque seule la Terre dissipe de l'énergie de marée. La dissipation dans la Lune a donc ici une influence considérable sur la circularisation de son orbite. En outre, contrairement à la vitesse d'éloignement du satellite, cette circularisation se révèle particulièrement sensible à la viscosité effective de la Lune : la diminution d'un ordre de grandeur de celle-ci implique une valeur finale passant de 3,4 à 0,16 % seulement. La chute de l'excentricité, alliée à l'augmentation du demi-grand axe (diminution de la fréquence ω_o) conduit à une décroissance de la dissipation globale dans la Lune (fig. 5.8a) qui, en retour, implique une dominance de plus en plus forte des effets de la dissipation dans la Terre. La puissance dissipée lunaire diminue bien plus rapidement dans les cas à Terre sans océan, pour lesquels l'excentricité est rapidement atténuée, que dans le cas d'une Terre de type actuel. Ceci se retrouve dans la similitude existant entre les courbes en trait plein des figures 5.8a et 5.7b. Par exemple, dans le cas d'une Lune modérément dissipative et d'une Terre sans océan, vers la date $t = 30,7$ Ma, la dissipation globale est de 21,3 GW. Environ 150 Ma plus tard, celle-ci a décliné de moitié.

La figure 5.9 présente le champ de chauffage de marée dans la Lune à ces deux instants. Leur localisation dans le temps est indiquée par deux points sur les figures 5.7 à 5.10. La dissipation est restreinte à la zone convective quasi-isotherme et représente, de ce fait, un terme additionnel de chauffage interne approximativement constant dans une grande partie du manteau convectif. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les zones de chauffage maximal sont situées au niveau des pôles, pour ce cas à noyau liquide et à résonance spin-orbite 1 : 1. En raison de la relative homogénéité du champ de température sous le couvercle conducteur, les anomalies « peu froides » qui descendent sur le noyau n'affectent que peu le chauffage de marée local, contrairement au cas d'une convection vigoureuse et sans chauffage radioactif de la figure 4.11. La structure du chauffage de marée reste la même au cours de l'évolution thermo-orbitale, mais sa valeur globale diminue grandement (fig. 5.8a et 5.9b). Ces champs montrent également à quel point il est important de considérer la structure thermique de la Lune (essentiellement radiale dans ce cas simple) si l'on souhaite estimer correctement ses propriétés dissipatives et donc l'évolution orbitale qui en

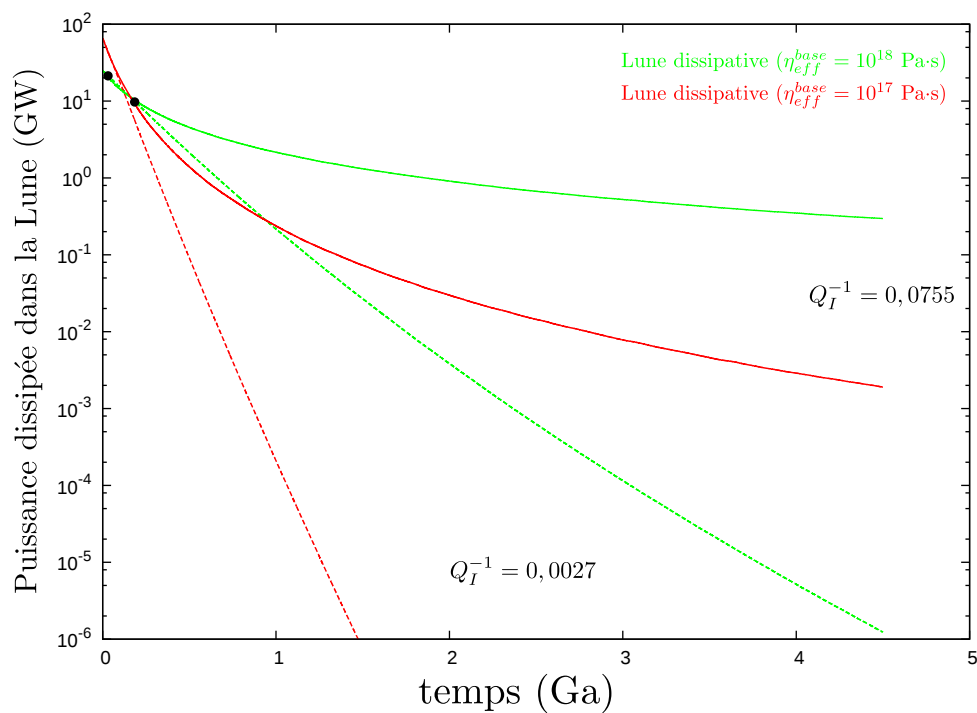
résulte. Une approche qui considérerait, par exemple, une Lune thermiquement homogène, serait inappropriée.

La figure 5.8b présente l'évolution de la température moyenne à l'intérieur de la Lune. Celle-ci amène divers commentaires. Tout d'abord, nous pouvons remarquer l'extrême faiblesse des variations générales constatées (moins de 2,5 K). Ceci s'explique par la conjugaison de deux faits : non seulement les modifications locales du champ de température sont faibles dans le cas testé, pour lequel le chauffage de marée n'a pas l'importance relative présentée dans les simulations du chapitre 4 mais, en outre, cette augmentation de la température a lieu essentiellement dans les zones proches du noyau. Or, ces dernières sont de très faible volume relativement aux zones proches de la surface qui, elles, sont caractérisées par un couvercle froid, et dont les variations de température avec le temps sont mineures. Le résultat est une faible influence sur la moyenne globale (volumique) de la température.

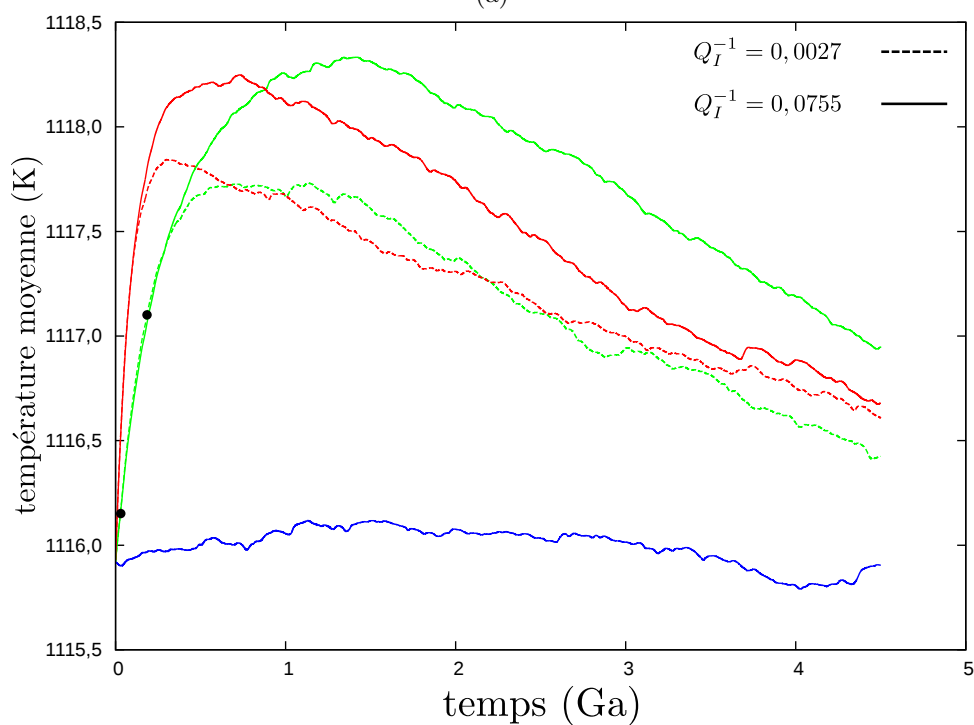
Si l'on s'affranchit des valeurs, la variation observée est toutefois intéressante : dans un premier temps, lorsque la dissipation de marée dans la Lune est suffisamment élevée (au cours des premières dizaines de millions d'années, fig. 5.8a), la température moyenne augmente rapidement puis va progressivement rediminuer pour, à la fin de l'évolution, retomber à des valeurs plus faibles. Ces dernières, si les simulations étaient poursuivies au-delà de 4,5 Ga, deviendraient comparables aux valeurs initiales. Cette évolution traduit une accumulation d'énergie thermique durant les premières centaines de millions à premier milliard d'années selon les cas. Du point de vue de la convection thermique, elle correspond à un ajustement de la solution à un chauffage de marée imposé brutalement au début des simulations. La décroissance rapide du chauffage de marée fait que cet ajustement transitoire laisse rapidement place à un refroidissement séculaire. Les petites variations qui se superposent à ces évolutions générales de la température moyenne sont caractéristiques de la convection instationnaire qui règne dans le modèle de Lune : il s'agit de l'influence de la plongée des nombreux petits panaches froids qui se forment sous le couvercle conducteur et parviennent sur la frontière manteau-noyau (fig. 5.5 et 5.9).

Cet état instationnaire de la convection est également illustré à la figure 5.10, qui représente l'évolution du flux de chaleur et de la vitesse caractéristique du manteau lunaire. Au niveau du noyau, cette quantité oscille ainsi autour d'une valeur faible de $4 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$, avec des valeurs extrêmes entre 2,4 et $6,4 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$, en raison de l'arrivée des panaches « froids » sur le noyau [anomalies de l'ordre de 60 K, cf. fig. 5.9a]. Le flux de chaleur en surface ($11,9 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$) présente des variations de beaucoup plus faible amplitude, mais aussi à plus basse fréquence¹⁰ (de l'ordre de 7 fois plus faible) : ceci illustre les effets d'atténuation et de filtre exercés par l'épais couvercle conducteur sur les variations de flux de chaleur qui ont lieu à sa base. Ces courbes, ainsi que celle

10. au sens temporel

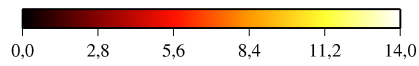


(a)



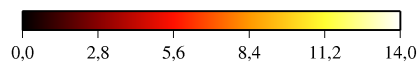
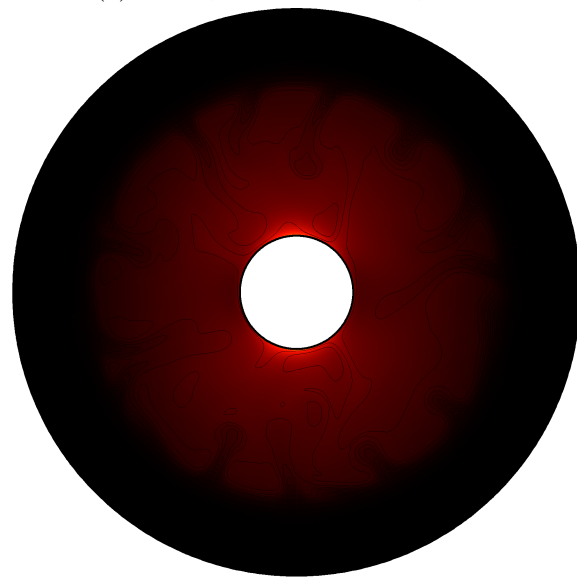
(b)

FIGURE 5.8 – Évolution de la puissance de marée globale dissipée et de la température moyenne dans le modèle de Lune. Notations identiques à celles de la figure 5.7.



Chauffage de marée (10^{-9} W.m^{-3})

(a) $t = 30,7 \text{ Ma}$, $P_{diss} = 21,3 \text{ GW}$



Chauffage de marée (10^{-9} W.m^{-3})

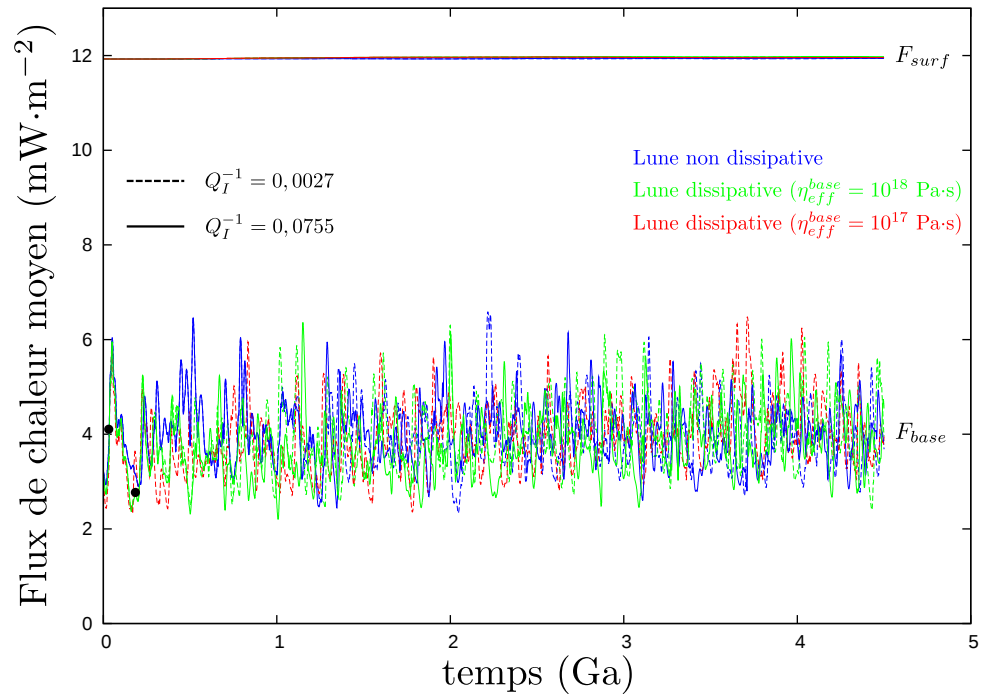
(b) $t = 184,8 \text{ Ma}$, $P_{diss} = 10,0 \text{ GW}$

FIGURE 5.9 – Exemples de champ de dissipation de marée à deux dates au cours de l'évolution thermo-orbitale du modèle de Lune. Les isolignes correspondent à la température (intervalle de 15 K). $Q_1^{-1} = 0,0027$, $\eta_{eff}^{base} = 10^{18} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Noter la chute rapide de la dissipation en raison de l'éloignement de la Lune et de la circularisation de son orbite [cf. fig. 5.7].

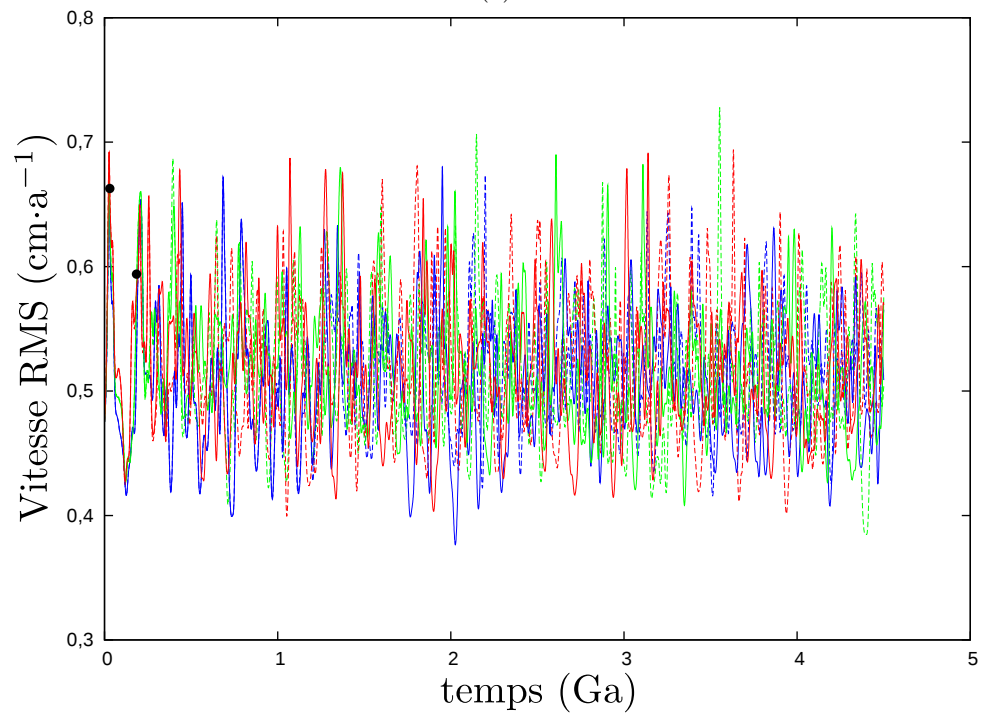
de la vitesse RMS [fig. 5.10b], montrent que, dans les cas considérés, les transferts de chaleur ne sont que peu affectés par le chauffage de marée, puisque l'histoire des quantités visualisées (F_{surf} , F_{base} et V_{RMS}) reste comparable, mais avec des décalages temporels. Ceux-ci, minimes au début de l'évolution, s'accroissent par la suite. De même, on ne voit pas de fluctuations dans les paramètres orbitaux aux fréquences caractéristiques de la convection.

Pour achever de caractériser les diverses simulations réalisées pour l'histoire thermo-orbitale d'un système Terre-Lune simplifié, il convient d'examiner les dernières quantités dont l'évolution est calculée dans l'algorithme (fig. 5.4) : il s'agit des angles d'orientation du système (obliquité β et inclinaison I) et de la période de rotation de la Terre (c.-à-d. la durée du jour). Leurs évolutions sont représentées à la figure 5.11. Rappelons que, lors de la dérivation des diverses équations qui ont conduit à l'algorithme d'évolution orbitale (cf. début du chapitre), il a été fait l'hypothèse – raisonnable puisque l'obliquité de la Lune est considérée comme nulle – que seule la dissipation au sein de la planète influençait sa rotation propre et l'inclinaison de l'orbite du satellite. Un schéma cohérent numériquement doit donc respecter ce type d'hypothèse. La figure 5.11a montre que c'est bien le cas pour les angles d'orientation du système : pour une Lune dissipative ou non, les histoires $\beta(t)$ et $I(t)$ sont seulement contrôlées par le choix du facteur de dissipation de la Terre, Q_I^{-1} . Ainsi, la dissipation dans la Terre implique une atténuation progressive de l'inclinaison orbitale (fig. 1.8) et, par conservation du moment cinétique, une augmentation – certes moindre en amplitude en raison des différences de masse en jeu – de l'obliquité de la planète centrale (fig. 5.1). Cet effet est bien évidemment plus marqué lorsque la dissipation dans la Terre est augmentée.

Un point marquant concerne le comportement de CHEOPS-2D sur l'évolution de la période de rotation propre du corps central. En effet, si la durée du jour augmente bien en raison de la dissipation au sein du corps primaire (couple de rappel du corps orbitant, [cf. fig. 1.7a] – et cela de manière d'autant plus aiguë que la valeur Q_I^{-1} est élevée – le comportement à long terme semble quelque peu étrange dans un cas à forte dissipation. En effet, le schéma semble ne pas respecter totalement l'hypothèse d'une influence nulle de la dissipation dans le corps secondaire puisque, dans le cas d'une Lune dissipative [courbe rouge de la figure 5.11b], un écart significatif apparaît progressivement avec le cas où seule la Terre dissipe de l'énergie de marée. Celui-ci atteint finalement 1,3 % à l'issue des 4,5 Ga écoulées durant la simulation. Ceci interroge naturellement sur la pertinence et la précision du schéma choisi pour ce travail. Il importe donc de déterminer quelles sont les erreurs commises durant ces simulations.

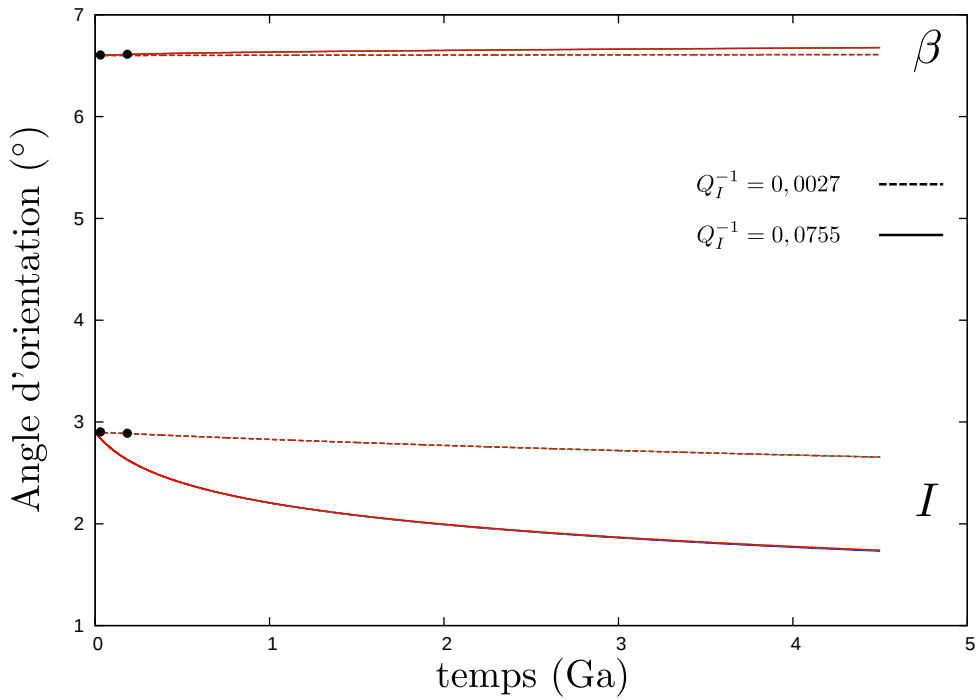


(a)

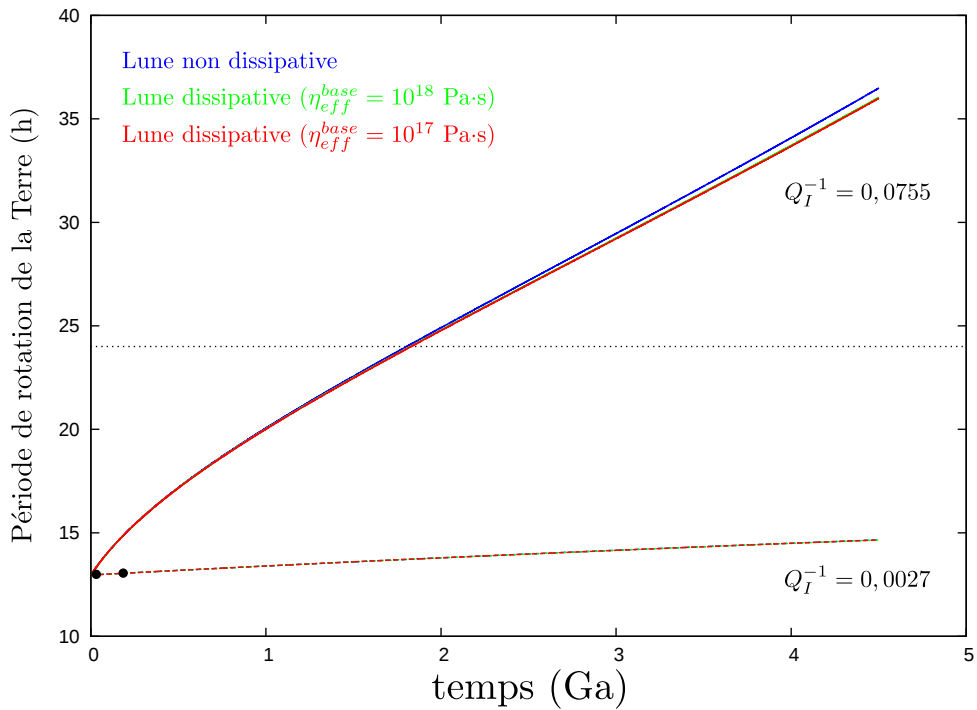


(b)

FIGURE 5.10 – Évolution du flux de chaleur et de la vitesse dans le modèle de Lune ; (a) flux de chaleur moyen à la base du manteau (F_{base}) et en surface (F_{surf}) ; (b) vitesse RMS dans le manteau. Notations identiques à celles de la figure 5.7.



(a)



(b)

FIGURE 5.11 – Évolution des angles d'orientation du modèle de système Terre-Lune simplifié et de la durée du jour terrestre. Notations identiques à celles de la figure 5.7.

Respect du bilan d'énergie et de la conservation du moment cinétique

Nous proposons ici d'examiner la précision du schéma d'évolution orbitale mis en œuvre lors de la conception de l'outil CHEOPS-2D via deux quantités simples. La première est le résidu relatif de puissance totale. En effet, la conservation de l'énergie totale du système planète-satellite s'écrit, en considérant la marée comme seule source de dissipation d'énergie :

$$\dot{E}_{orb} + \dot{E}_{rot}^I + \dot{E}_{rot}^{II} = -(\mathcal{P}_{mar}^I + \mathcal{P}_{mar}^{II}), \quad (5.38)$$

et l'on peut définir un résidu R sur ces puissances, qui n'est autre que l'écart relatif

$$R := -\frac{\mathcal{P}_{mar}^I + \mathcal{P}_{mar}^{II} + \dot{E}_{orb} + \dot{E}_{rot}^I + \dot{E}_{rot}^{II}}{\dot{E}_{orb} + \dot{E}_{rot}^I + \dot{E}_{rot}^{II}}. \quad (5.39)$$

La puissance dissipée à l'intérieur du corps primaire peut être estimée par le biais de l'équation (32) de [Kaula \(1964\)](#), correspondant à la valeur moyennée sur une orbite :

$$\mathcal{P}_{mar}^I \equiv \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{mar}^{I,lm pq} \quad (5.40)$$

avec [cf. éq. (5.17)]

$$\mathcal{P}_{mar}^{I,lm pq} := -M_{II} \sqrt{\frac{G(M_I + M_{II})}{a}} K_{lm pq} |\omega_{lm pq}| \left(\frac{k_l}{Q_{lm pq}} \right)_I. \quad (5.41)$$

Le second critère choisi est la conservation du moment cinétique total, \mathbf{L}_{tot} . Cette propriété est évaluée cette fois-ci par la valeur de la variation relative de sa norme, L_{tot}^z , au cours des simulations, par rapport à sa valeur initiale. Dans un schéma idéalement précis, cette quantité, ainsi que le résidu de puissance R devraient être nuls à tout instant. La figure 5.12 présente l'évolution de ces quantités pour l'ensemble des simulations réalisées. Il ressort ainsi que la quantité la mieux conservée par le schéma est le moment cinétique total. En effet, l'accumulation d'erreurs numériques au cours du calcul implique que l'on a une variation finale de 0,033 % à la fin de l'ensemble des simulations (avec ou sans dissipation lunaire), pour $Q_I^{-1} = 0,0027$; elle reste encore largement inférieure à 1 % (0,17 %) dans les cas à forte dissipation terrestre.

Tout n'est cependant pas aussi rose en ce qui concerne la conservation de l'énergie du système. En effet, la figure 5.12a montre que, dans le cas à dissipation terrestre modérée, le résidu relatif de puissance totale s'élève rapidement à presque 1,28 % lors du premier demi-milliard d'années d'évolution puis décroît légèrement. En ce qui concerne les cas à forte dissipation dans la Terre, le comportement est assez

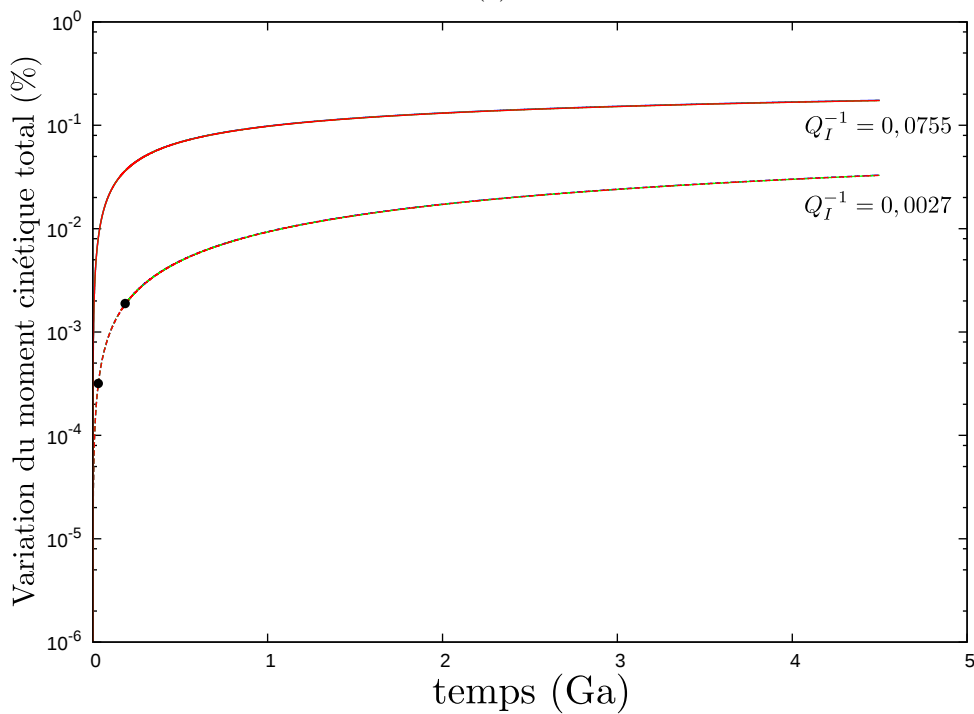
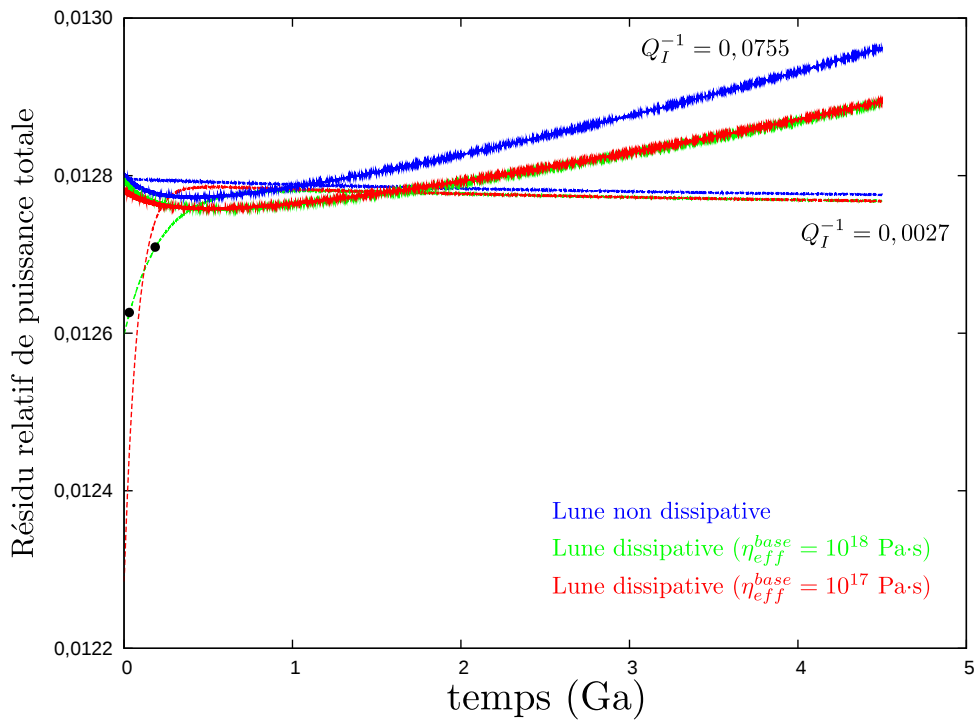


FIGURE 5.12 – *Mesure de la conservation de l'énergie et du moment cinétique au cours des simulations du modèle de système Terre-Lune simplifié : (a) écart relatif entre la puissance résultant des modifications orbitales et la puissance totale dissipée dans le système ; (b) variation relative du moment cinétique total du système. Notations identiques à celles de la figure 5.7.*

différent. En effet, la valeur initiale de ce résidu, en plus d'être initialement du même ordre que la valeur maximale atteinte dans le cas $Q_T^{-1} = 0,0027$, décroît d'abord légèrement puis, à l'issue de la période « critique » des 500 premiers millions d'années, se met à augmenter progressivement. En outre, son comportement est nettement plus oscillant. Une analyse détaillée de ces erreurs sera nécessaire prochainement, mais l'on peut déjà pronostiquer qu'une partie au moins du problème provient de l'utilisation d'un schéma d'EULER pour la description de l'avancée temporelle du problème. En effet, dans ces simulations, les variations les plus abruptes des diverses quantités orbitales sont rencontrées au début de l'évolution [p. ex. fig. 5.7a, 5.11a et 5.11b] et il semble raisonnable de penser qu'un schéma à l'ordre 1 en temps implique de petites imprécisions qui vont facilement s'accumuler au cours du calcul. Soulignons cependant que la précision du schéma reste largement acceptable pour la première approche qui a été présentée ici, puisque des erreurs vraisemblablement plus critiques seront nécessairement commises en raison du manque de connaissance des propriétés elles-mêmes des corps mis en jeu ainsi que des processus physiques à l'œuvre. Par exemple, l'influence du Soleil a ici été négligée sur des échelles de temps de l'ordre de l'âge du Système Solaire, ce qui paraît difficilement réaliste. Cette hypothèse a cependant permis de dériver une approche simple, basée sur des expressions classiques de conservation.

5.2.3 Quelques améliorations physiques possibles

Le système Terre-Lune constitue un élément particulièrement intéressant à étudier avec un modèle thermo-orbital, en particulier en ce qui concerne les premiers temps qui ont suivi la formation de la Lune, probablement suite à un impact géant (Hartmann et Davis, 1975 ; Cameron et Ward, 1976) d'un objet – baptisé Théia – d'une taille comparable à celle de Mars avec la proto-Terre, 32 à 110 Ma après l'accrétion de celle-ci (p. ex. Jacobsen *et al.*, 2009). En effet, la proximité de la Lune à la Terre, conjuguée au fait que ces deux corps devaient être particulièrement chauds à cette période, implique que la dissipation de marée a dû être intense ; l'influence de celle-ci a pu être cruciale pour l'histoire orbitale de la Lune. Cependant, si l'on souhaite pousser plus en avant l'étude de la Lune, il importe de disposer de divers éléments additionnels dans le modèle de système Terre-Lune, tels que la possibilité de fusion partielle ou encore une configuration orbitale plus générale (p. ex. sans résonance spin-orbite). Ceci permettrait par exemple d'apporter des éléments de réponse sur des points comme la possibilité d'un volcanisme précoce sur la Lune (p. ex. Haruyama *et al.*, 2009) ou les conséquences d'une réorientation de la Lune par un impact géant (Wieczorek et Le Feuvre, 2009). En outre, du point de vue de la dynamique interne de la Lune, le rôle du champ de gravité, certes faible, mais particulièrement variable dans le manteau lunaire, ainsi que celui d'une surface aux

propriétés thermiquement isolantes (régolithe ; équilibre radiatif en surface, et non température constante), seraient particulièrement intéressants à examiner au moyen de l'approximation anélastique employée dans cette thèse. En effet, celle-ci fait naturellement intervenir une variation radiale possible de la gravité et de la conductivité thermique. Enfin, deux facteurs importants n'ont pas été pris en compte ici : le refroidissement séculaire de la Lune (noyau maintenu à température constante dans cette approche préliminaire) ainsi qu'un chauffage radioactif décroissant avec le temps.

D'un point de vue purement orbital, il sera prochainement question de réaliser des simulations avec une excentricité initiale plus grande afin de déterminer les conditions dans lesquelles le chauffage de marée dans la Lune peut réellement influencer les transferts de chaleur. À titre préliminaire, la figure 5.13 ci-dessous indique les valeurs de dissipation qui ont été obtenues avec le modèle de système Terre-Lune utilisé dans ce chapitre, pour différentes valeurs de période orbitale et d'excentricité (limitée à 20 %, étant donnée l'approximation à l'ordre 4 en e dans le potentiel de marée exciteur utilisé) et sans évolution (ni thermique, ni orbitale). Les autres paramètres sont inchangés, c'est-à-dire que leurs valeurs sont celles initialement choisies pour les cas d'évolution couplée décrits plus haut (cf. tab. 5.2). Les résultats obtenus montrent que, dans le cas du modèle employé ici, la puissance de marée dissipée devient comparable ou supérieure au chauffage radioactif (actuel) à partir d'une excentricité de 7,5 % si la période orbitale n'est que de 10 jours. Comme cette dissipation décroît rapidement avec la période orbitale, une augmentation de cette dernière de 5 jours implique que l'excentricité-limite donnée plus haut s'élève à 18,4 %. Même si aucun couplage n'est considéré dans ces calculs, on constate que, pour une Lune relativement chaude telle que celle modélisée ici, le chauffage par les éléments radioactifs devient rapidement dominant sur la dissipation lorsque la période orbitale augmente (éloignement de la Lune). Cependant, pendant la courte période à laquelle cette source d'énergie est intense pour le manteau lunaire, il y a tout lieu de penser qu'elle pourrait influencer significativement la convection thermique et, par là même, provoquer par exemple d'intenses épisodes de fusion partielle. La prise en compte d'excentricités plus élevées nécessiterait le recours à un autre type de techniques de calculs que celui employé dans ce travail. . .

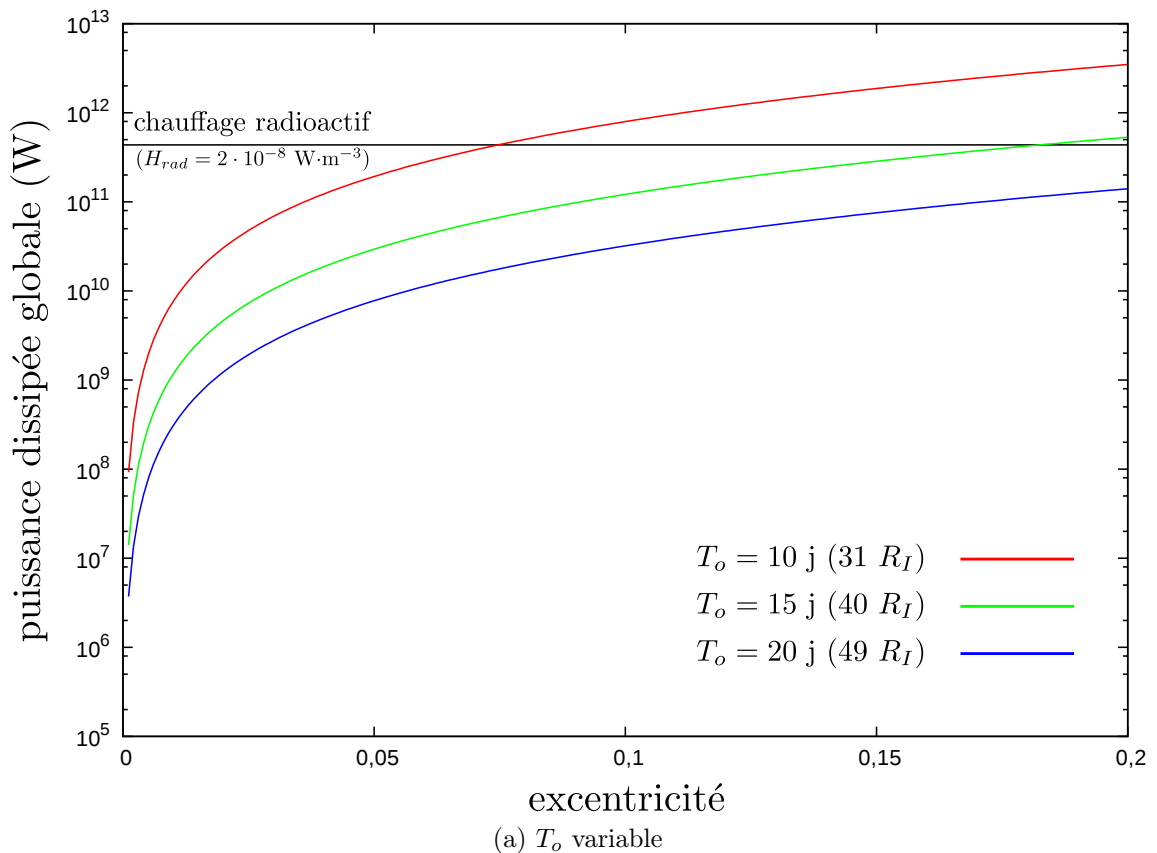


FIGURE 5.13 – Évolution de la puissance globale initiale dissipée dans le modèle de Lune en fonction de l'excentricité, pour différentes périodes orbitales. Les valeurs entre parenthèses indiquent la distance Terre-Lune correspondante (R_I correspond au rayon de la Terre). La dissipation est calculée à partir du champ de température initial considéré pour les simulations d'évolution thermo-orbitale (c.-à-d. fig. 5.5). La puissance radioactive globale est indiquée (cf. tab. 5.2 pour les autres paramètres.)

Conclusion et perspectives

Cette thèse a vu la naissance d'un outil numérique nouveau, CHEOPS-2D, permettant de simuler l'évolution couplée thermique et orbitale d'un satellite en orbite autour d'une planète, en prenant en compte la convection thermique dans celui-ci. L'approche qui a été adoptée durant ce travail est par nature pluridisciplinaire, et ce couplage – par effets de marée – requiert la considération d'échelles de temps très variées. Elle relève à la fois de la mécanique des fluides, qui permet de décrire les transferts de chaleur au sein d'un manteau planétaire sur des échelles de temps géologiques ($t \sim 10^{8-9}$ a), de la mécanique des solides visco-élastiques en oscillations forcées, pour le calcul de la dissipation de marée solide ($t \sim 10^{0-1}$ j), et de la mécanique céleste classique, requise pour la description de l'effet de cette dissipation d'énergie sur les éléments orbitaux du satellite ($t \sim 10^{5-9}$ a).

Un accent particulier a été mis sur une description précise de la convection thermique, puisque celle-ci gouverne l'évolution de la température, grandeur qui se situe au cœur du couplage modélisé dans cette thèse. Le formalisme thermodynamique rigoureux de l'approximation anélastique-liquide (Jarvis et McKenzie, 1980 ; Leng et Zhong, 2008) a ainsi rendu possible un premier examen de l'effet de la chaleur de marée sur les transferts thermiques dans un manteau compressible. Les résultats préliminaires obtenus à l'issue de l'achèvement du modèle montrent que, dans le cas des (exo)planètes de type Terre, le chauffage de marée par dissipation visqueuse doit être au moins comparable au chauffage visqueux issu des mouvements convectifs pour significativement influencer les transferts thermiques. Dans ce cas, l'évacuation de la chaleur n'est pas assez efficace pour compenser l'apport d'énergie par friction de marée. Une convection plus vigoureuse ($Ra_{base} \sim 10^9$) dans le manteau autorise ainsi un forçage de marée plus intense. Le fait que la forme de la convection, pour des nombres de dissipation du type de celui de la Terre ($Di \approx 0,5$), ne présente que peu de différences – si ce n'est localement – dans un cas compressible, par rapport à un cas incompressible (p. ex. Schubert *et al.*, 2001), semble cependant mis en défaut lorsqu'un chauffage de marée significatif est à l'œuvre. L'effet de la compressibilité

aux échelles de temps des marées reste, lui, mineur : l'influence de la taille du noyau est prédominante.

Le choix d'une approche bidimensionnelle pour le calcul des transferts de chaleur a été décisif pour la réalisation de l'outil de couplage. En effet, un compromis a dû être trouvé entre précision physique et numérique, d'une part, et temps de calcul pratique, d'autre part. À ce titre, l'utilisation de la géométrie d'anneau sphérique, proposée par [Hernlund et Tackley \(2008\)](#), a non seulement offert une approximation 2D intéressante de la convection 3D-sphérique, mais aussi a permis d'accéder à diverses géométries bidimensionnelles classiques, qui se retrouvent ainsi comme autant de cas particuliers qu'englobe le formalisme de [Hernlund et Tackley \(2008\)](#). Cette souplesse géométrique apportée dans l'outil CHEOPS-2D, associée à l'utilisation de divers niveaux possibles d'approximation thermodynamique (BOUSSINESQ, BOUSSINESQ étendue, anélastique-liquide tronquée ou non), pour la partie du code concernant les transferts de chaleur, a été cruciale pour la validation de celui-ci.

En plus de représenter un outil actuellement unique de couplage cohérent thermo-orbital, CHEOPS-2D constitue également un objet intéressant pour l'étude du phénomène de convection lui-même et a été écrit dans l'optique d'une utilisation générale sur différents problèmes en planétologie. Dans ce cadre, il vient compléter la gamme de codes numériques développés cette dernière décennie au Laboratoire de Planétologie et Géodynamique de Nantes pour le calcul des transferts thermiques au sein des planètes. Par exemple, CHEOPS-2D offre une complémentarité intéressante avec le code tridimensionnel sphérique EDIPE ([Choblet *et al.*, 2007](#)), puisque ce dernier est restreint, actuellement, à l'approximation de BOUSSINESQ. En revanche, l'intérêt d' EDIPE porte notamment sur la géométrie sphérique, incontournable si l'on veut décrire correctement la dynamique des manteaux planétaires. On peut donc imaginer, pour les problèmes planétologiques qui seront étudiés à l'avenir, utiliser de concert le code issu de cette thèse pour une exploration étendue des gammes de paramètres et déterminer des cas importants à étudier plus en détail au moyen de simulations sphériques grâce à EDIPE . De même, l'implémentation d'éléments physiques complexes (p. ex. fusion partielle, évolution de taille de grain, rhéologies complexes¹¹, etc.) sera moins coûteuse en développements dans CHEOPS-2D, principalement en raison de son caractère bidimensionnel et du maillage orthogonal simple associé, permettant ainsi d'examiner la cohérence et l'effet d'un nouveau phénomène physique que l'on souhaite prendre en compte, avant de l'établir en géométrie sphérique complète. Cette approche conjointe 2D-3D sphériques est par exemple celle adoptée depuis quelques années par Tackley et ses collaborateurs à l'ETH de Zürich (p. ex. [Nakagawa et Tackley, 2010](#)).

11. Une viscosité anisotrope est cependant exclue en 2D...

Une première tentative de traitement de l'évolution orbitale a été menée dans la dernière partie de cette thèse. Restreinte à un couple planète-satellite isolé (système compact), l'approche employée est basée sur le formalisme classique de [Kaula \(1964\)](#) pour la description de l'effet de la dissipation de marée dans la planète sur les éléments orbitaux. La dissipation dans le satellite, qui est évaluée de manière cohérente avec les transferts de chaleurs ayant lieu au sein de celui-ci, est directement exploitée dans un schéma simple de conservation de l'énergie et du moment cinétique du système ; ceci permet de déterminer les modifications du demi-grand axe et de l'excentricité qui résultent de cette perte d'énergie pour l'orbite. Un premier exemple est présenté à la fin de cette thèse pour illustrer l'influence du couplage entre transfert thermique et dissipation de marée sur l'évolution orbitale. Il reprend en partie le cas envisagé dans l'étude pionnière de [Ross et Schubert \(1989\)](#). Cet exemple a surtout permis de valider l'outil final CHEOPS-2D pour un couplage thermo-orbital complet. Pour les quelques simulations présentées, l'effet de la dissipation de marée dans un modèle de Lune convective reste peu important sur son évolution orbitale et est dominé par celui du facteur Q^{-1} de la Terre, qui contrôle l'éloignement de la Lune. La dissipation dans celle-ci a conduit, dans la plupart des cas testés, à une chute rapide de l'excentricité et l'effet principal qui persiste est l'éloignement du satellite à diverses vitesses. Si la friction de marée actuelle dans le système Terre-Lune est principalement celle des océans terrestres, il n'en va probablement pas de même pour les premiers temps qui ont suivi la formation de la Lune. Celle-ci, alors plus chaude et plus proche de notre planète (elle-même plus chaude), a vraisemblablement été sujette à une intense dissipation de marée ; les effets résultants sont probablement déterminants pour l'évolution à long terme de son orbite. Ils constituent l'une des perspectives d'application intéressante de l'outil CHEOPS-2D.

Soulignons ici que le but ultime de l'outil mis en œuvre durant cette thèse est de parvenir à une description couplée de l'orbite et des transferts de chaleur au sein de plusieurs corps en convection. On comprend ici la complexité inhérente à un tel modèle physique et la nécessité de recourir à une approche bidimensionnelle pour le calcul des transferts de chaleur. Le cas de la résonance 1 : 1 considérée dans cette thèse, à titre de première approche, reste adapté pour décrire individuellement l'évolution récente de la plupart des satellites naturels du Système Solaire, en particulier les satellites galiléens. Cependant, tout l'intérêt d'un ultime outil de couplage serait de permettre de prendre en compte les interactions mutuelles entre différents satellites en orbite et pourvus chacun d'une certaine dynamique des transferts de chaleur. Le cas des satellites galiléens est particulièrement intéressant. En effet, les trois les plus proches de la planète centrale (Jupiter), Io, Europe et Ganymède, se trouvent dans une configuration telle que leurs périodes orbitales sont dans le rapport 1 : 2 : 4. Il s'agit d'une résonance dite de LAPLACE, dont l'une des conséquences est d'entretenir l'excentricité de Io, corps volcanique soumis à une intense dissipa-

tion de marée. Par ailleurs, Europe, lune silicatée recouverte de glace, a très bien pu subir un intense chauffage de marée par le passé, à l’instar de Ganymède, pour lequel un ou plusieurs épisodes de resurfaçage ont probablement eu lieu au cours de son évolution thermo-orbitale (Showman et Malhotra, 1997 ; Bland *et al.*, 2009).

L’étude du système Io-Europe (fig. 5.14) devrait constituer la première véritable application de l’outil CHEOPS-2D. Il est prévu de coupler ce dernier avec un code d’évolution orbitale (Zhang et Nimmo, 2009) adapté aux interactions résonantes de satellites et récemment utilisé dans un couplage thermo-orbital avec prise en compte cohérente (c.-à-d. sphérique et non paramétrée) de la conduction thermique (Robuchon *et al.*, 2011). Le but de ce travail futur est notamment de contraindre la possibilité d’un volcanisme silicaté à la base de l’océan d’Europe. Combien d’épisodes volcaniques ont pu avoir lieu ? Pendant combien de temps ? Quelle est la quantité d’énergie apportée à la base de l’océan ? Une telle activité existe-t-elle toujours aujourd’hui ? Telles sont quelques-unes des questions qui ont motivé ce projet. En effet, les traces d’activité en surface du satellite sont nombreuses (*chaos*, failles, etc.) mais l’origine de celles-ci reste encore mystérieuse. La source est peut-être la dissipation qui a lieu dans la couche de glace externe (Sotin *et al.*, 2002 ; Schmidt *et al.*, 2011) ou bien une intense activité à la base de l’océan d’Europe (Thomson et Delaney, 2001). La dissipation de marée dans la partie silicatée d’Europe a pu, par exemple, affecter l’épaisseur de la couche de glace externe, facilitant ainsi les échanges entre la surface et l’océan interne très probable du satellite : l’intérêt exobiologique devient alors un enjeu de premier plan dans cette étude.

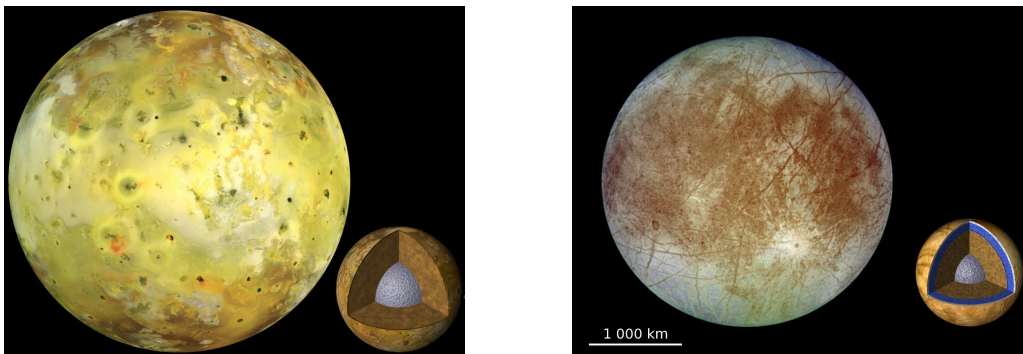


FIGURE 5.14 – Le système Io-Europe. Io (à gauche) possède une surface soufrée, siège d’un volcanisme intense (les points noirs correspondent à des volcans) ; celle d’Europe (à droite) est glacée, relativement jeune et fracturée. Les deux images ont été acquises par la sonde Galileo (en 1999 et 1996, respectivement) et sont présentées ici à la même échelle. Leur structure interne probable est donnée schématiquement : un noyau de fer entouré d’un manteau de silicates avec, pour Europe, une couche externe d’eau liquide, surmontée d’une fine coquille de glace. Crédits : NASA/JPL/University of Arizona/DLR.

Annexes

Quelques précisions sur les équations

A.1 Précautions d'écriture pour l'équation de la chaleur

Cette partie a pour but d'éclaircir quelques points souvent obscurs dans la littérature. En effet, nous allons voir que les formes que peut prendre l'équation de la chaleur (exprimée ici en température) sont sensiblement différentes selon qu'il est choisi de prendre en compte ou non la température de surface dans l'adimensionnement. De même, la formulation en température totale ou potentielle invite à la prudence quant à la définition des conditions aux limites.

Rappelons, tout d'abord, qu'une des clefs de l'approximation anélastique-liquide (cf. p. 57) est la décomposition suivante pour la température :

$$T = \bar{T} + T'. \quad (\text{A.1})$$

Ici se trouve un premier piège. En effet, si l'on choisit l'adimensionnement suivant, à l'instar, par exemple, de ce qui est fait dans l'ouvrage de [Schubert *et al.* \(2001\)](#) :

$$\tilde{T} = \frac{T}{\Delta T}, \quad (\text{A.2})$$

avec, rappelons-le, $\Delta T = \Delta \bar{T} + \Delta T_{sa}$, la version sans dimension de la relation (A.1) est immédiate :

$$\tilde{T} = \tilde{\bar{T}} + \tilde{T}'. \quad (\text{A.3})$$

En revanche, le choix de faire intervenir la température de surface T_s dans l'adimensionnement (p. ex. [Leng et Zhong, 2008](#)), par ailleurs classique pour l'approxi-

mation de BOUSSINESQ :

$$\tilde{T} = \frac{T - T_s}{\Delta T}, \quad (\text{A.4})$$

implique l'égalité

$$\tilde{T} = \tilde{\tilde{T}} + \tilde{T}' + T_0, \quad (\text{A.5})$$

avec $T_0 := \frac{T_s}{\Delta T}$ la température de surface sans dimension¹.

L'équation de conservation de l'énergie adimensionnée [éq. (1.123)] peut ainsi s'écrire de quatre manières différentes dans l'approximation anélastique-liquide (les « \sim » sont volontairement omis ici) :

$$\bar{\rho}\bar{c}_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\bar{k}\nabla T) + \Phi^{int} \frac{Di}{Ra} + \bar{\alpha}\bar{\rho}Di(T - \bar{T})\bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{V} + \bar{\rho} \frac{Ra_H}{Ra}, \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\rho}\bar{c}_p \frac{DT'}{Dt} = \nabla \cdot [\bar{k}\nabla(\bar{T} + T')] + \Phi^{int} \frac{Di}{Ra} + \bar{\alpha}\bar{\rho}DiT'\bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{V} + \bar{\rho} \frac{Ra_H}{Ra}, \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\rho}\bar{c}_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\bar{k}\nabla T) + \Phi^{int} \frac{Di}{Ra} + \bar{\alpha}\bar{\rho}Di(T + T_0)\bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{V} + \bar{\rho} \frac{Ra_H}{Ra}, \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\rho}\bar{c}_p \frac{DT'}{Dt} = \nabla \cdot [\bar{k}\nabla(\bar{T} + T')] + \Phi^{int} \frac{Di}{Ra} + \bar{\alpha}\bar{\rho}Di(T' + T_0)\bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{V} + \bar{\rho} \frac{Ra_H}{Ra}. \quad (\text{A.9})$$

Les deux premières formes correspondent à l'adimensionnement (A.2) et sont exprimées en température totale (T) ou bien en température potentielle (T'). Les deux dernières variantes sont, elles, valables pour la mise sans dimension (A.4).

Le second piège – qui résulte directement du premier – se trouve dans les conditions aux limites associées aux quatre équations précédentes. Plaçons-nous, par exemple, dans une configuration de RAYLEIGH-BÉNARD. On souhaite que les températures imposées en surface et à la base, $T_s := T(z = 0)$ et $T_b := T(z = b)$, correspondent respectivement aux températures totales adimensionnées 0 et 1.

Ainsi, les conditions aux limites pour les équations (A.6) et (A.8) sont tout simplement :

$$\tilde{T}(\tilde{z} = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\tilde{z} = 1) = 1. \quad (\text{A.10})$$

En revanche, dans le cas des équations (A.7) et (A.9), où l'inconnue est \tilde{T}' , il est nécessaire de tenir compte de la décomposition (A.3) ou (A.5) et donc aussi de l'expression du profil thermique de référence (adiabatique). Ce dernier prend deux formes légèrement différentes, selon l'adimensionnement (voir ci-dessous).

1. et non *adimensionnée* au sens strict du terme ; il faut la voir comme un nombre sans dimension de plus caractérisant la convection thermique dans l'approximation anélastique [cf. éq. (1.124)]

$$\text{Adimensionnement (A.2) : } \quad \tilde{T}(\tilde{z}) = T_0 \exp(\text{Di}\tilde{z}). \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Adimensionnement (A.4) : } \quad \tilde{T}(\tilde{z}) = T_0 [\exp(\text{Di}\tilde{z}) - 1]. \quad (\text{A.12})$$

Ainsi, les conditions aux limites (A.10) pour les équations (A.6) et (A.8) deviennent :

$$\tilde{T}'(\tilde{z} = 0) = -T_0 \quad \text{et} \quad \tilde{T}'(\tilde{z} = 1) = 1 - T_0 \exp(\text{Di}). \quad (\text{A.13})$$

Les différentes formulations énoncées ci-dessus sont, évidemment, équivalentes. Le choix de l'adimensionnement est toujours discutable et chacune des possibilités présente ses avantages, mais aussi ses dangers, comme nous l'avons vu. Ceci est parfois à l'origine de nombreuses petites coquilles et autres incohérences dans la littérature (p. ex. King *et al.*, 2010). Dans ce travail de thèse, il a été choisi de prendre en compte T_s dans la mise sans dimension de la température.

L'adoption d'une formulation en température totale ou bien potentielle résulte, quant à elle, de choix qui sont davantage d'ordre technique (c.-à-d. numériques). Durant cette thèse, il a été choisi, pour des raisons « historiques », de recourir à la seconde possibilité.

A.2 Récupération de l'entropie relative

L'entropie, en convection compressible (approximation anélastique-liquide), joue un rôle similaire à celui de la température dans le cas incompressible (cf., p. ex., Jarvis *et McKenzie*, 1980). En particulier, le cœur convectif dans un fluide compressible est isentropique, alors qu'il est isotherme pour un fluide incompressible. Il est donc particulièrement utile d'avoir accès à cette grandeur (S) pour visualiser les résultats d'une simulation de convection compressible (p. ex. fig. 3.18). Mais la méthode de traitement de l'équation de la chaleur est basée, dans l'outil de cette thèse, sur une formulation en température. Cependant, dans le cas de l'approximation anélastique-liquide munie de valeurs constantes pour les profils de référence de capacité et de coefficient de dilatation thermiques², $c_p \equiv \bar{c}_p$ et $\alpha \equiv \bar{\alpha}$, la décomposition³

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p}_{c_p/T} \frac{\partial T}{\partial r} + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T}_{-\alpha/\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\text{A.14})$$

permet d'obtenir, en négligeant l'effet de la pression dynamique (c.-à-d. qu'on suppose l'équilibre hydrostatique $\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g$, avec $p \equiv \bar{p}$) et en intégrant entre un rayon

2. C'est bien le cas des calculs réalisés dans cette thèse.

3. analogue à l'équation (1.106)

r donné et la surface du fluide ($r = r_s$), la valeur *relative* de l'entropie par rapport à celle en surface :

$$\Delta S := S(r_s) - S(r) \quad (\text{A.15})$$

$$= c_p \ln \left(\frac{T_s}{T} \right) + \alpha g(r_s - r). \quad (\text{A.16})$$

En introduisant l'entropie adimensionnée,

$$\tilde{S} := S/c_p, \quad (\text{A.17})$$

il vient, avec les formes sans dimension classiques (cf. 1.3.2), l'expression suivante :

$$\Delta \tilde{S} := \tilde{S}(R_e) - \tilde{S}(\tilde{r}) \quad (\text{A.18})$$

$$= \ln \left(\frac{\tilde{T} + T_0}{T_0} \right) + \text{Di}(\tilde{r} - R_e). \quad (\text{A.19})$$

L'équation (A.19), extrêmement simple, a ainsi pu être utilisée pour produire les quelques cartes d'entropie présentées au chapitre 3.

A.3 Formulation du bilan de quantité de mouvement en développant la divergence des contraintes pour une géométrie annulaire

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{r}} + \left(\frac{C_0}{\tilde{\gamma} \tilde{c}_p} \tilde{p}' - \tilde{\rho} Ra \tilde{T}' \right) \tilde{\alpha} \tilde{g} \\ & + \tilde{\eta} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{V}_r - d \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\tilde{\eta}}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \\ & - \frac{2 \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}}{3} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{r}} + 2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \left[\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \theta} \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \theta} + \tilde{\eta} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{V}_\theta - d \frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\tilde{\eta}}{3} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \\ & - \frac{2 \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}}{3} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{V}_r}{\tilde{r}} \right) + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{r}} \left[\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{V}_\theta}{\tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Ces écritures permettent notamment de visualiser la forme simplifiée des équations dans le cas d'un fluide isovisqueux (c.-à-d. $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \bullet} \equiv 0$).

A.4 L'approximation de FRANK-KAMENETSKII

La viscosité des manteaux planétaires, qu'ils soient faits de silicates ou de glaces, est classiquement décrite par une loi d'ARRHENIUS (Arrhenius, 1887 ; Weertman, 1970 ; Karato et Wu, 1993) :

$$\eta = A \exp\left(\frac{Q_a}{RT}\right), \quad (\text{A.22})$$

avec A le facteur pré-exponentiel, qui peut dépendre de divers paramètres physiques. Le remplacement de la température par son expression adimensionnée (cf. section A.1) donne :

$$\eta = A \exp\left[\frac{Q_a}{R(T_s + \tilde{T}\Delta T)}\right], \quad (\text{A.23})$$

soit

$$\eta = A \exp\left[\frac{Q_a}{RT_b \left[1 + \frac{\Delta T}{T_b}(\tilde{T} - 1)\right]}\right]. \quad (\text{A.24})$$

$T_b = T_s + \Delta T$ est la température à la base du manteau. L'approximation de FRANK-KAMENETSKII (Frank-Kamenetskii, 1938, 1969) consiste à linéariser l'argument de l'exponentielle. Un développement de TAYLOR au premier ordre permet d'établir que :

$$\eta = A \exp\left\{\frac{Q_a}{RT_b} \left[1 - \frac{\Delta T}{T_b}(\tilde{T} - 1)\right]\right\} + o\left[\frac{\Delta T}{T_b}(1 - \tilde{T})\right], \quad (\text{A.25})$$

soit, sous réserve de la validité de la condition $\frac{\Delta T}{T_b}(1 - \tilde{T}) \ll 1$,

$$\eta \approx \underbrace{A \exp\left(\frac{Q_a}{RT_b}\right)}_B \exp\left[\frac{Q_a \Delta T}{RT_b^2}(1 - \tilde{T})\right]. \quad (\text{A.26})$$

On trouve aisément que cette condition équivaut à avoir $\tilde{T} \gg 0$, ce qui montre que l'approximation de FRANK-KAMENETSKII n'est justifiée que dans les régions « chaudes », c'est-à-dire pas dans la couche limite thermique froide (p. ex. couvercle stagnant). Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la section 1.3.4 et, par exemple, l'article de Reese *et al.* (1999).

Dans une configuration classique de RAYLEIGH-BÉNARD la température adimensionnée vaut 1 à la base, ce qui implique l'égalité $\eta(\tilde{T} = 1) = B = \eta_b$. La loi de

viscosité dans l'approximation de FRANK-KAMENETSKII s'écrit finalement⁴ :

$$\tilde{\eta} = \exp[\Upsilon(1 - \tilde{T})] \quad \text{ou} \quad \eta = \eta_b \exp\left(\Upsilon \frac{T_b - T}{\Delta T}\right), \quad (\text{A.27})$$

avec $\Upsilon = \frac{Q_a \Delta T}{RT_b^2}$ le paramètre dit de FRANK-KAMENETSKII. Le rapport $\frac{Q_a}{R}$ est parfois appelé la température d'activation.

Pour comparaison, la loi d'ARRHENIUS adimensionnée s'écrit :

$$\tilde{\eta} = \exp\left[\tilde{Q}_a \left(\frac{1}{\tilde{T} + T_0} - \frac{1}{1 + T_0}\right)\right], \quad (\text{A.28})$$

avec $\tilde{Q}_a := \frac{Q_a}{R\Delta T}$ et, rappelons-le, $T_0 = \frac{T_s}{\Delta T}$. Les deux expressions adimensionnées ci-dessus pour la viscosité ne sont parfaitement équivalentes que pour la valeur $\tilde{T} = \frac{T_s T_b}{\Delta T^2} = T_0(1 + T_0)$.

A.5 Le formalisme de Kaula

Kaula (1961, 1964) a proposé la description suivante pour le potentiel de marée dans le repère képlérien (éléments orbitaux) :

$$U^*(r, \lambda, \phi) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{lmpq}^*, \quad (\text{A.29})$$

avec [l'équation (1.25)] :

$$U_{lmpq}^* := -\frac{\mathcal{G}m^*}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(I) G_{lpq}(e) P_{lm}(\sin \lambda) J_{lm} [v_{lmpq} - m(\phi + \theta)] \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{0m}). \quad (\text{A.30})$$

Nous détaillons ici les quatre fonctions contenues dans cette expression. Tout d'abord, F_{lmp} est la fonction d'inclinaison, définie par :

$$F_{lmp}(x) := \sum_{t=0}^{\min(p, E(\frac{l-m}{2}))} \frac{[2(l-t)]!}{t!(l-t)!(l-m-2t)! 2^{2(l-t)}} \sin^{l-m-2t}(x) \\ \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s(x) \sum_{c \in \mathbb{N}} \binom{l-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \quad (\text{A.31})$$

avec $E(\bullet)$ la fonction partie entière et $\binom{n}{k} \equiv C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ un coefficient binomial.

4. Rappelons le choix de la valeur caractéristique $\eta_c = \frac{\eta}{\tilde{\eta}}$ pour l'adimensionnement de la viscosité dans cette thèse : $\eta_c = \eta_b$.

Ensuite, G_{lpq} est la fonction d'excentricité. Son expression est plus complexe et peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
G_{lpq}(x) &:= \left[1 + \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right)^2 \right]^l \left(-\frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right)^{|q|} \\
&\times \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^h \binom{2(p'-l)}{h-r} \frac{1}{r!2^r} \left[(2p'-l-q')(1 + \sqrt{1-x^2}) \right]^r \\
&\times \sum_{s=0}^{h'} \binom{-2p'}{h'-s} \frac{1}{s!2^s} \left[(l-2p'+q')(1 + \sqrt{1-x^2}) \right]^s,
\end{aligned} \tag{A.32}$$

avec :

$$p' := \begin{cases} p & \text{si } p \leq l/2, \\ l-p & \text{sinon,} \end{cases} \tag{A.33}$$

$$q' := \begin{cases} q & \text{si } p \leq l/2, \\ -q & \text{sinon,} \end{cases} \tag{A.34}$$

$$h := \begin{cases} k+q' & \text{si } q' > 0, \\ k & \text{si } q' < 0, \end{cases} \tag{A.35}$$

et

$$h' := \begin{cases} k & \text{si } q' > 0, \\ k-q' & \text{si } q' < 0. \end{cases} \tag{A.36}$$

De plus, on notera l'égalité $G_{lpq} \equiv X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}$, avec $X_{\bullet\bullet\bullet}$ la fonction de HANSEN.

Les différentes expressions polynomiales de la fonction d'excentricité G_{lpq} telle qu'utilisée dans cette thèse [c.-à-d. $l = 2$ et $o(e^4)$; cf. chap. 4 et 5] sont tabulées ci-dessous (tab. A.1). Pour les expressions jusqu'au degré $l = 4$, on se reportera à l'ouvrage de Kaula (1966, chap. 3, tab. 2).

La fonction de LEGENDRE associée, P_{lm} , se définit en fonction du pôleynome de LEGENDRE [éq. (1.14)], ce qui permet d'aboutir à l'expression :

$$P_m(x) = \frac{1}{l!2^l} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \tag{A.37}$$

soit (Kaula, 1966, éq. [1.30]) :

$$P_{lm}(x) = \sin^m \vartheta \sum_{t=0}^{E(\frac{l-m}{2})} \frac{(-1)^t [2(l-t)]!}{2^l t! (l-t)! (l-m-2t)!} \cos^{l-m-2t} \vartheta \quad \text{si } x = \cos \vartheta. \tag{A.38}$$

TABLE A.1 – Polynômes en excentricité pour la famille de fonctions $\{G_{2pq}\} [o(e^4)]$.
 Noter que toutes ces expressions – sauf la dernière – sont valables pour deux couples (p, q) .

p	q	$G_{2pq}(e)$	p	q
0	-2	0	2	2
0	-1	$-\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3$	2	1
0	0	$1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4$	2	0
0	1	$\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3$	2	-1
0	2	$\frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4$	2	-2
1	-2	$\frac{9}{4}e^2 + \frac{7}{4}e^4$	1	2
1	-1	$\frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3$	1	1
1	0	$1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4$		

Enfin, la fonction J_{lm} est introduite ainsi dans le formalisme de Kaula :

$$J_{lm}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } (l - m) \text{ pair,} \\ \sin x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.39}$$

Elle peut s'écrire explicitement⁵ :

$$J_{lm}(x) := \frac{1}{2} \frac{\exp(ix) + (-1)^{l-m} \exp(-ix)}{i^{1(l-m)}}, \tag{A.40}$$

avec $1_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \rightarrow \llbracket 0; 1 \rrbracket, x \mapsto 1_{\mathbb{I}}(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{I} \equiv 2\mathbb{N} + 1$ des entiers naturels impairs.

5. Bien que cette forme paraisse moins élégante, elle a le mérite d'être complètement explicite, contrairement à l'expression (A.39)...

Benchmark anélastique

Comme on l'a vu au chapitre 2 (p. 103), la géométrie annulaire permet de se ramener très simplement à une configuration quasi-cartésienne ($d = 1$ et $f \rightarrow 1$). Ceci autorise une comparaison directe avec des valeurs numériques de référence tabulées (*benchmarks*) disponibles dans la littérature. Celles-ci sont, en effet, la plupart du temps (en 2D), valables pour une géométrie cartésienne.

L'essentiel des cas traités (tableaux 3.2, 3.3 et B.1 à B.18) repose sur l'étude de King *et al.* (2010).

Un certain nombre de quantités diagnostiques sont présentées dans les tableaux qui suivent et comparées à celles obtenues avec d'autres codes pour simuler la convection thermique.

Il s'agit d'abord de grandeurs globales, telle que la vitesse RMS, définie comme suit pour le domaine \mathcal{D} [éq. (2.29)] :

$$\tilde{V}_{RMS} := \frac{1}{\mathcal{D}} \left(\int_{\mathcal{D}} |\tilde{\mathbf{V}}|^2 d\mathcal{D} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{1}{\mathcal{D}} \left[\int_{\mathcal{D}} (\tilde{V}_r^2 + \tilde{V}_\theta^2) d\mathcal{D} \right]^{1/2}, \quad (\text{B.2})$$

$$= \left[(\tilde{V}_r^{RMS})^2 + (\tilde{V}_\theta^{RMS})^2 \right]^{1/2}, \quad (\text{B.3})$$

mais aussi les valeur moyennes de température, $\langle \tilde{T} \rangle$, de chauffage visqueux $\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$ et de chauffage adiabatique (en valeur absolue), $|\langle \tilde{H}_{ad} \rangle|$, avec

$$\tilde{H}_{vis} := \tilde{\Phi}^{int} \frac{Di}{Ra}, \quad (\text{B.4})$$

$$\tilde{H}_{ad} := \tilde{\alpha} \tilde{\rho} Di (\tilde{T} + T_0) \tilde{\mathbf{g}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}, \quad (\text{B.5})$$

et la moyenne sur le domaine :

$$\langle \bullet \rangle := \frac{1}{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \bullet d\mathcal{D}. \quad (\text{B.6})$$

On présentera également des valeurs définies en surface. La première est le nombre de NUSSELT moyen, correspondant au rapport du flux de chaleur total, $|\mathbf{q}|$, à celui qui existerait à l'état conductif, $|\mathbf{q}_{\text{cond}}|$, et s'écrit

$$\text{Nu} := \left[\frac{1}{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} |\mathbf{q}(\Gamma_e)| d\Gamma_e \right] / |\mathbf{q}_{\text{cond}}(R_e)|, \quad (\text{B.7})$$

avec, en géométrie annulaire et pour une configuration thermique de RAYLEIGH-BÉNARD, l'expression générale

$$q_{\text{cond}}(\tilde{r}) = -\frac{\tilde{k}(\tilde{r})}{(\tilde{r} \ln f)^d} \left\{ 1 + (1-d) \left[1 + f \left(\frac{\ln f}{1-f} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.8})$$

Les deux autres quantités caractérisent la vitesse en surface, via sa valeur moyenne :

$$\langle \tilde{V}^{\text{surf}} \rangle := \frac{1}{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} \tilde{V}_{\theta}(\Gamma_e) d\Gamma_e, \quad (\text{B.9})$$

et le maximum local de sa norme :

$$\tilde{V}_{\text{max}}^{\text{surf}} := \max_{\Gamma_e} |\tilde{V}_{\theta}|. \quad (\text{B.10})$$

Le *benchmark* de King *et al.* (2010) – pour la partie présentée ici – traite de la convection dans un domaine cartésien carré (c.-à-d. $R_A = 1$) pourvu de frontières en bords libres. Les surfaces inférieure et supérieure sont isothermes :

$$\tilde{T}(\Gamma_i) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\Gamma_e) \equiv 0. \quad (\text{B.11})$$

Les deux autres sont isolantes :

$$\tilde{\mathbf{q}}(\Gamma_g) = \tilde{\mathbf{q}}(\Gamma_d) \equiv 0. \quad (\text{B.12})$$

De plus, quelle que soit l'approximation thermodynamique considérée, tous les profils de référence sont choisis constants, exceptés (cas TALA et ALA) ceux de masse volumique $\tilde{\rho}$ et de température \tilde{T} .

Précisons en outre deux paramètres¹ thermiques additionnels : $T_s = 273$ K et $\Delta T = 3000$ K (c.-à-d. $T_0 = 0,091$). Pour des détails complémentaires sur le *benchmark*, le lecteur est invité à consulter l'article de King *et al.* (2010) et l'annexe A.1 de cette thèse.

1. Le premier n'apparaît pas explicitement dans l'article de King *et al.* (2010).

TABLE B.2 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation de BOUSSINESQ étendue ($Di = 0,5$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{v}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		3,3700	33,9000	48,0000	31,8000	0,4822	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		3,3827	33,9177	48,0882	31,7990	0,4821	1,1890	1,1891
CU	64 × 64r		3,3800	33,9000	48,1000	31,8000	0,4823	1,1896	1,1905
CT	64 × 64	10 ⁴	3,3643	33,9205	48,0899	31,8003	0,4820	1,1253	1,1892
CZ	70 × 70r		3,3347	33,7603	47,8664	31,6457	0,4816	1,1762	1,1767
KS	128 × 128		3,3804	33,8790	48,0330	31,7710	0,4821	1,1870	1,1870
CHEOPS-2D	64 × 128		3,3832	33,9227	48,0818	31,8129	0,4821	1,1904	1,1906
UM	60 × 68r		4,2100	54,4000	76,5000	51,9000	0,4860	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		4,2200	54,4078	76,5601	51,9394	0,4859	1,6067	1,6068
CU	64 × 64r		4,2200	54,4000	76,6000	51,9000	0,4861	1,6074	1,6088
CT	64 × 64	2.10 ⁴	4,1958	54,4130	76,5625	51,9415	0,4858	1,5175	1,6069
CZ	70 × 70r		4,1602	54,1711	76,2412	51,7151	0,4851	1,5899	1,5908
KS	128 × 128		4,2149	54,3190	76,4420	51,8710	0,4859	1,6021	1,6022
CHEOPS-2D	64 × 128		4,2210	54,4297	76,5700	51,9767	0,4859	1,6095	1,6101
UM	60 × 68r		5,5800	98,8000	137,3000	96,5000	0,4939	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		5,6023	98,8462	137,3547	96,5175	0,4939	2,2957	2,2960
CU	64 × 64r		5,5900	98,8000	137,3000	96,5000	0,4940	2,2956	2,2983
CT	64 × 64	5.10 ⁴	5,5697	98,8585	137,3575	96,5223	0,4937	2,1634	2,2963
CZ	70 × 70r		5,5167	98,3567	136,7003	96,0723	0,4926	2,2691	2,2710
KS	128 × 128		5,5888	98,5860	137,0200	96,2990	0,4938	2,2838	2,2843
CHEOPS-2D	64 × 128		5,6062	99,0095	137,5118	96,6935	0,4941	2,3052	2,3071
UM	60 × 68r		6,8600	153,0000	211,0000	151,7000	0,5017	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		6,8953	153,3941	210,9661	151,7382	0,5017	2,9408	2,9411
CU	64 × 64r		6,8800	153,1000	210,9000	151,7000	0,5017	2,9402	2,9443
CT	64 × 64	10 ⁵	6,8554	153,0937	210,9541	151,7394	0,5015	2,7665	2,9413
CZ	70 × 70r		6,7867	152,2689	209,8677	151,0408	0,4997	2,9054	2,9088
KS	128 × 128		6,8744	152,5100	210,2800	151,2500	0,5015	2,9192	2,9203
CHEOPS-2D	64 × 128		6,9114	153,6753	211,7151	152,3025	0,5023	2,9662	2,9703
UM	60 × 68r		8,3400	232,0000	319,8000	233,0000	0,5107	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		8,3952	232,8304	319,6146	233,0634	0,5109	3,6915	3,6921
CU	64 × 64r		8,3600	232,2000	319,5000	233,0000	0,5108	3,6894	3,6971
CT	64 × 64	2.10 ⁵	8,3473	232,1744	319,5560	233,0726	0,5106	3,4674	3,6919
CZ	70 × 70r		8,2603	230,9460	317,8150	232,1748	0,5080	3,6424	3,6486
KS	128 × 128		8,3619	231,0500	318,1500	232,2100	0,5107	3,6502	3,6524
CHEOPS-2D	64 × 128		8,4040	232,5928	320,4007	233,4082	0,5122	3,7187	3,7270
UM	60 × 68r		9,3800	307,4000	448,7000	314,3000	0,5225	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		9,4190	306,3868	449,6629	315,6399	0,5226	4,2337	4,2348
CU	64 × 64r		9,4200	309,6000	450,6000	316,3000	0,5224	4,2393	4,2577
CT	64 × 64	5.10 ⁵			État final instationnaire				
CZ	70 × 70r				État final instationnaire				
KS	128 × 128		9,6938	323,7600	467,8200	331,6200	0,5213	4,3005	4,3057
CHEOPS-2D	64 × 128				État final instationnaire				
UM	60 × 68r				État final instationnaire				
VT	64 × 64				État final instationnaire				
CU	64 × 64r				État final instationnaire				
CT	64 × 64	10 ⁶			État final instationnaire				
CZ	70 × 70r				État final instationnaire				
KS	128 × 128				État final instationnaire				
CHEOPS-2D	64 × 128				État final instationnaire				

TABLE B.3 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation de BOUSSINESQ étendue ($Di = 1$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		2,1900	24,2000	34,2000	22,2000	0,4669	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		2,1941	24,2321	34,2603	22,2428	0,4669	1,1877	1,1878
CU	64 × 64r		2,1900	24,2000	34,3000	22,2000	0,4671	1,1884	1,1894
CT	64 × 64	10 ⁴	2,1760	24,2371	34,2652	22,2462	0,4668	1,1263	1,1882
CZ	70 × 70r		2,1534	23,9496	33,8713	21,9833	0,4658	1,1588	1,1592
KS	128 × 128		2,1932	24,2020	34,2190	22,2220	0,4669	1,1855	1,1856
CHEOPS-2D	64 × 128		2,1945	24,2472	34,2663	22,2590	0,4668	1,1903	1,1903
UM	60 × 68r		2,6400	39,5000	55,4000	36,7000	0,4680	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		2,6509	39,4931	55,3977	36,6826	0,4679	1,6397	1,6398
CU	64 × 64r		2,6500	39,5000	55,4000	36,7000	0,4682	1,6406	1,6421
CT	64 × 64	2.10 ⁴	2,6267	39,5029	55,4067	36,6892	0,4678	1,5515	1,6405
CZ	70 × 70r		2,6016	39,0730	54,8275	36,2946	0,4664	1,6026	1,6033
KS	128 × 128		2,6489	39,4200	55,3000	36,6300	0,4680	1,6345	1,6346
CHEOPS-2D	64 × 128		2,6520	39,5476	55,4329	36,7330	0,4679	1,6457	1,6461
UM	60 × 68r		3,3500	71,6000	99,5000	67,6000	0,4743	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		3,3619	71,6272	99,5183	67,6470	0,4742	2,3439	2,3442
CU	64 × 64r		3,3600	71,6000	99,5000	67,6000	0,4744	2,3446	2,3469
CT	64 × 64	5.10 ⁴	3,3295	71,6549	99,5427	67,6670	0,4740	2,2134	2,3458
CZ	70 × 70r		3,2972	70,8498	98,4471	66,9496	0,4719	2,2902	2,2918
KS	128 × 128		3,3567	71,3890	99,2300	67,4700	0,4747	2,3288	2,3292
CHEOPS-2D	64 × 128		3,3656	71,8974	99,7804	67,8703	0,4742	2,3633	2,3647
UM	60 × 68r		3,9400	108,1000	150,2000	103,2000	0,4822	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		3,9654	108,1412	150,1800	103,2033	0,4821	2,9424	2,9428
CU	64 × 64r		3,9600	108,2000	150,1000	103,2000	0,4823	2,9427	2,9469
CT	64 × 64	10 ⁵	3,9279	108,1973	150,2237	103,2481	0,4819	2,7759	2,9450
CZ	70 × 70r		3,8924	107,1299	148,6977	102,3793	0,4789	2,8789	2,8820
KS	128 × 128		3,9571	107,6500	149,6100	102,8500	0,4820	2,9143	2,9152
CHEOPS-2D	64 × 128		3,9740	108,9764	151,0915	103,8364	0,4823	2,9891	2,9925
UM	60 × 68r		4,4200	147,3000	209,4000	141,1000	0,4937	0,0000	0,0000
VT	64 × 64		4,4370	147,1003	208,9151	140,8588	0,4938	3,4174	3,4180
CU	64 × 64r		4,4300	147,4000	209,2000	141,1000	0,4937	3,4226	3,4305
CT	64 × 64	2.10 ⁵	4,4020	147,2940	209,0816	141,0470	0,4934	3,2289	3,4215
CZ	70 × 70r		4,3979	147,9816	209,4869	142,2407	0,4893	3,3810	3,3873
KS	128 × 128		4,4409	146,9800	208,7800	141,0800	0,4934	3,3834	3,3854
CHEOPS-2D	64 × 128		4,4254	147,2302	208,9240	140,3798	0,4948	3,4690	3,4770
UM	60 × 68r					État final instationnaire			
VT	64 × 64		6,9258	204,3737	241,4118	0,0000	0,4994	5,9146	5,9167
CU	64 × 64r		5,8600	273,0000	379,5000	208,1000	0,5044	7,5270	7,5549
CT	64 × 64	5.10 ⁵				État final instationnaire			
CZ	70 × 70r					État final instationnaire			
KS	128 × 128					État final instationnaire			
CHEOPS-2D	64 × 128					État final instationnaire			
UM	60 × 68r					État final instationnaire			
VT	64 × 64		6,6662	213,8986	348,0533	0,0000	0,5064	7,0953	7,0988
CU	64 × 64r		6,6500	251,1000	318,4000	202,1000	0,4938	5,6958	5,7411
CT	64 × 64	10 ⁶				État final instationnaire			
CZ	70 × 70r					État final instationnaire			
KS	128 × 128					État final instationnaire			
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		6,6040	216,6963	292,7403	80,7817	0,4821	5,7157	5,7678

a. Mode à 3 cellules de convection.

TABLE B.4 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 0,25$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		4,4160	40,0430	58,7100	39,2760	0,5130	0,8500	0,8500
VT	64 × 64		4,4300	40,2000	58,7400	39,3000	0,5127	0,8535	0,8510
CU	64 × 64r		4,4200	40,1000	58,7000	39,3000	0,5129	0,8539	0,8521
CT	64 × 64	10 ⁴	4,4124	40,0745	58,7413	39,3013	0,5127	0,8068	0,8510
CZ	70 × 70r		4,37	40,22	58,99	39,45	0,512	0,8588	0,8621
KS	128 × 128		4,4237	40,0480	58,7110	39,2890	0,5128	0,8530	0,8505
CHEOPS-2D	64 × 128		4,4267	40,0610	58,7227	39,3056	0,5128	0,8539	0,8515
UM	60 × 68r		5,5400	63,5220	92,5500	63,5640	0,5170	1,1300	1,1310
VT	64 × 64		5,5600	63,9000	92,6100	63,6000	0,5175	1,1360	1,1330
CU	64 × 64r		5,5500	63,6000	92,6000	63,6000	0,5177	1,1362	1,1341
CT	64 × 64	2.10 ⁴	5,5399	63,5745	92,6088	63,6041	0,5175	1,0716	1,1327
CZ	70 × 70r		5,4900	63,8600	93,0700	63,9100	0,5165	1,1448	1,1494
KS	128 × 128		5,5504	63,4970	92,5000	63,5500	0,5175	1,1335	1,1305
CHEOPS-2D	64 × 128		5,5585	63,5495	92,5442	63,6141	0,5177	1,1362	1,1336
UM	60 × 68r		7,42	114,922	165,463	117,824	0,524	1,598	1,601
VT	64 × 64		7,4500	115,8300	165,4800	117,9000	0,5246	1,6080	1,6040
CU	64 × 64r		7,4400	115,0000	165,4000	117,8000	0,5247	1,6076	1,6056
CT	64 × 64	5.10 ⁴	7,4291	114,9913	165,4749	117,8702	0,5245	1,5134	1,6039
CZ	70 × 70r		7,3500	115,5400	166,3200	118,5400	0,5222	1,6238	1,6304
KS	128 × 128		7,4324	114,7500	165,1900	117,6600	0,5245	1,6014	1,5978
CHEOPS-2D	64 × 128		7,4581	115,0134	165,5214	117,9635	0,5249	1,6105	1,6083
UM	60 × 68r		9,211	178,56	254,716	185,982	0,53	2,046	2,053
VT	64 × 64		9,2300	178,6000	254,6000	186,0000	0,5303	2,0597	2,0573
CU	64 × 64r		9,2600	180,2000	254,7000	186,0000	0,5303	2,0600	2,0550
CT	64 × 64	10 ⁵	9,2330	178,6302	254,6538	186,0194	0,5301	1,9350	2,0551
CZ	70 × 70r		9,1300	179,4000	255,7200	187,1000	0,5273	2,0815	2,0895
KS	128 × 128		9,2249	177,9900	253,8900	285,4300	0,5300	2,0458	2,0419
CHEOPS-2D	64 × 128		9,2784	178,7347	254,8633	186,2557	0,5310	2,0655	2,0644
UM	60 × 68r		11,361	274,825	389,491	290,161	0,536	2,585	2,598
VT	64 × 64		11,3900	275,1000	389,5000	290,2000	0,5362	2,6053	2,6061
CU	64 × 64r		11,4600	278,0000	389,7000	290,4000	0,5362	2,6090	2,6040
CT	64 × 64	2.10 ⁵	11,4218	275,1620	389,6517	290,4432	0,5360	2,4463	2,6039
CZ	70 × 70r		11,2600	276,0400	390,4500	291,8800	0,5316	2,6352	2,6434
KS	128 × 128		11,3850	273,6500	387,6900	289,0500	0,5354	2,5792	2,5755
CHEOPS-2D	64 × 128		11,4697	274,9173	389,6889	290,4099	0,5375	2,6117	2,6133
UM	60 × 68r		14,591	463,226	661,985	497,244	0,542	3,396	3,426
VT	64 × 64		14,6500	464,3000	662,7000	498,0000	0,5431	3,4350	3,4426
CU	64 × 64r		14,7800	469,8700	662,5600	497,8000	0,5430	3,4420	3,4370
CT	64 × 64	5.10 ⁵	14,7311	464,2262	662,6993	498,1367	0,5427	3,2207	3,4375
CZ	70 × 70r		14,6700	478,9500	676,4900	515,0000	0,5345	3,5354	3,5378
KS	128 × 128		14,7470	467,6500	664,3100	502,1300	0,5411	3,4041	3,4022
CHEOPS-2D	64 × 128		14,6000	453,5941	652,1857	487,5328	0,5449	3,3893	3,4002
UM	60 × 68r					État final instationnaire			
VT	64 × 64					État final instationnaire			
CU	64 × 64r					État final instationnaire			
CT	64 × 64	10 ⁶				État final instationnaire			
CZ	70 × 70r					État final instationnaire			
KS	128 × 128		16,488	599,89	886,36	656,78	0,53881	3,8285	3,832
CHEOPS-2D	64 × 128					État final instationnaire			

TABLE B.5 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 0,5$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		3,851	36,307	54,275	36,082	0,519	1,404	1,391
VT	64 × 64		3,8600	36,4000	54,3000	36,1000	0,5188	1,4100	1,3930
CU	64 × 64r		3,8600	36,3000	54,3000	36,1000	0,5191	1,4103	1,3948
CT	64 × 64	10 ⁴	3,8400	36,3371	54,3184	36,1051	0,5187	1,3327	1,3933
CZ	70 × 70r		3,8000	36,3500	54,3400	36,1000	0,5171	1,4083	1,4100
KS	128 × 128		3,8631	36,3230	54,3030	36,1080	0,5189	1,4097	1,3932
CHEOPS-2D	64 × 128		3,8640	36,3298	54,2952	36,1128	0,5189	1,4107	1,3944
UM	60 × 68r		4,755	57,299	85,427	58,063	0,526	1,851	1,836
VT	64 × 64		4,7700	57,6000	85,5000	58,1000	0,5261	1,8600	1,8400
CU	64 × 64r		4,7700	57,4000	85,5000	58,1000	0,5263	1,8609	1,8421
CT	64 × 64	2.10 ⁴	4,7440	57,3478	85,4802	58,0982	0,5260	1,7556	1,8402
CZ	70 × 70r		4,6900	57,4100	85,6000	58,1600	0,5236	1,8620	1,8650
KS	128 × 128		4,7701	57,2770	85,4020	58,0590	0,5262	1,8569	1,8367
CHEOPS-2D	64 × 128		4,7752	57,3465	85,4681	58,1234	0,5263	1,8625	1,8430
UM	60 × 68r		6,238	102,617	152,25	106,519	0,536	2,586	2,57
VT	64 × 64		6,2700	103,4000	152,3000	106,6000	0,5368	2,6020	2,5760
CU	64 × 64r		6,2600	102,7000	152,3000	106,5000	0,5369	2,6013	2,5790
CT	64 × 64	5.10 ⁴	6,2312	102,6912	152,3057	106,5677	0,5366	2,4496	2,5765
CZ	70 × 70r		6,1600	102,9200	152,6000	106,8800	0,5326	2,6109	2,6162
KS	128 × 128		6,2560	102,4000	151,9600	106,3400	0,5366	2,5879	2,5631
CHEOPS-2D	64 × 128		6,2754	102,7992	152,4347	106,7134	0,5373	2,6102	2,5875
UM	60 × 68r		7,588	156,503	232,079	165,097	0,545	3,258	3,245
VT	64 × 64		7,6300	157,9300	231,9000	165,1000	0,5454	3,2790	3,2500
CU	64 × 64r		7,6100	156,5000	231,9000	165,0000	0,5455	3,2779	3,2552
CT	64 × 64	10 ⁵	7,5868	156,5378	231,9270	165,1083	0,5452	3,0825	3,2509
CZ	70 × 70r		7,5000	157,7400	233,2700	166,6500	0,5386	3,3108	3,3169
KS	128 × 128		7,6105	155,9000	231,1900	164,6100	0,5449	3,2511	3,2238
CHEOPS-2D	64 × 128		7,6444	156,7842	232,4319	165,3571	0,5466	3,2983	3,2755
UM	60 × 68r		8,913	223,601	336,567	239,862	0,553	3,921	3,922
VT	64 × 64		8,9800	226,0300	336,1000	239,6000	0,5540	3,9530	3,9260
CU	64 × 64r		8,9400	223,6000	336,2000	239,7000	0,5540	3,9519	3,9353
CT	64 × 64	2.10 ⁵	8,9286	223,6042	336,2790	239,8384	0,5536	3,7156	3,9279
CZ	70 × 70r		8,9300	231,1600	344,6900	248,4000	0,5446	4,0600	4,0633
KS	128 × 128		8,9981	224,8600	337,6500	241,5100	0,5529	3,9279	3,9027
CHEOPS-2D	64 × 128		8,8970	219,7563	332,0415	235,7950	0,5559	3,9279	3,9141
UM	60 × 68r		9,252	249,871	401,392	276,315	0,561	4,093	4,143
VT	64 × 64				État final instationnaire				
CU	64 × 64r				État final instationnaire				
CT	64 × 64	5.10 ⁵			État final instationnaire				
CZ	70 × 70r				État final instationnaire				
KS	128 × 128		9,4328	255,92	411,44	284,43	0,55981	4,1475	4,142
CHEOPS-2D	64 × 128				État final instationnaire				
UM	60 × 68r		10,275	312,092	510,491	343,34	0,573	4,593	4,687
KS	128 × 128	10 ⁶			État final instationnaire				
CHEOPS-2D	64 × 128				État final instationnaire				

TABLE B.6 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 1$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		2,556	26,007	40,595	26,416	0,509	1,459	1,396
VT	64 × 64		2,5700	26,1000	40,6000	26,4000	0,5088	1,4650	1,4000
CU	64 × 64r		2,5700	26,0000	40,6000	26,4000	0,5092	1,4651	1,4019
CT	64 × 64	10 ⁴	2,5419	26,0368	40,6299	26,4400	0,5088	1,3874	1,4014
CZ	70 × 70		2,5100	25,9900	40,4800	26,3500	0,5051	1,4550	1,4245
KS	128 × 128		2,5681	26,0110	40,6140	26,4360	0,5091	1,4640	1,3999
CHEOPS-2D	64 × 128		2,5673	26,0305	40,6073	26,4404	0,5090	1,4666	1,4026
UM	60 × 68r		3,004	40,293	63,214	41,594	0,515	1,888	1,813
VT	64 × 64		3,0200	40,5000	63,2000	46,6000	0,5146	1,8970	1,8200
CU	64 × 64r		3,0200	40,3000	63,2000	41,6000	0,5148	1,8982	1,8234
CT	64 × 64	2.10 ⁴	2,9871	40,3493	63,2631	41,3691	0,5145	1,7943	1,8217
CZ	70 × 70		2,9600	40,4900	63,3300	41,7500	0,5098	1,8985	1,8626
KS	128 × 128		3,0171	40,2340	63,1570	41,5710	0,5148	1,8895	1,8133
CHEOPS-2D	64 × 128		3,0185	40,3495	63,2560	41,6440	0,5148	1,9015	1,8256
UM	60 × 68r		3,621	67,071	106,988	70,690	0,523	2,493	2,414
VT	64 × 64		3,6400	67,7000	107,0000	70,7000	0,5234	2,5090	2,4260
CU	64 × 64r		3,6400	67,2000	107,0000	70,7000	0,5235	2,5117	2,4326
CT	64 × 64	5.10 ⁴	3,6050	67,1859	107,0605	70,7875	0,5232	2,3725	2,4302
CZ	70 × 70		3,6100	68,7400	108,8900	72,5200	0,5163	2,5594	2,5216
KS	128 × 128		3,6369	66,8050	106,6700	70,5430	0,5235	2,4846	2,4030
CHEOPS-2D	64 × 128		3,6365	67,0798	106,8988	70,6271	0,5239	2,5196	2,4400
UM	60 × 68r		3,907	85,105	141,607	91,345	0,529	2,802	2,75
VT	64 × 64		3,9200	86,0800	141,3000	91,1000	0,5297	2,8210	2,7570
CU	64 × 64r		3,9200	85,1000	141,4000	91,3000	0,5297	2,8278	2,7725
CT	64 × 64	10 ⁵	3,8939	85,1496	141,5171	91,3767	0,5294	2,6753	2,7645
CZ	70 × 70		3,9800	91,0600	149,1100	98,1400	0,5208	2,9744	2,9547
KS	128 × 128		3,9326	84,9430	141,4700	91,5030	0,5296	2,7912	2,7295
CHEOPS-2D	64 × 128		3,8931	83,8820	139,6556	89,8228	0,5305	2,8174	2,7642
UM ^a	60 × 68r		4,959	105,571	140,526	8,59	0,522	3,849	3,837
VT	64 × 64				État final instationnaire				
CU	64 × 64r		4,1000	99,2000	175,0000	107,3000	0,5344	3,0460	3,0193
CT	64 × 64	2.10 ⁵	4,0842	99,3175	175,2978	107,5874	0,534	2,8927	3,0045
CZ	70 × 70				État final instationnaire				
KS	128 × 128		4,1232	98,961	175,29	108,02	0,53432	2,9959	2,957
CHEOPS-2D	64 × 128		4,0603	97,2391	171,8063	104,6540	0,5357	3,0239	3,0015
UM ^a	60 × 68r		6,174	157,989	230,856	0,126	0,523	5,083	5,165
VT	64 × 64				État final instationnaire				
CU	64 × 64r				État final instationnaire				
CT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	6,1744	159,1369	232,122	0	0,5236	4,8806	5,1223
CZ	70 × 70				État final instationnaire				
KS	128 × 128				État final instationnaire				
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		6,1928	156,7426	229,9087	-0,0045	0,5250	5,1751	5,1876
CHEOPS-2D	64 × 128	10 ⁶			État final instationnaire				

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

TABLE B.7 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 1,25$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		1,902	19,072	30,817	19,585	0,494	1,021	0,956
VT	64 × 64		1,9092	19,1449	30,8372	19,5994	0,4942	1,0248	0,9613
CU	64 × 64r		1,9100	19,1000	30,8000	19,6000	0,4946	1,0251	0,9624
CT	64 × 64	10 ⁴	1,8912	19,1045	30,8541	19,6115	0,4942	0,97	0,9627
CZ	70 × 70		1,8859	19,126	30,8052	19,6146	0,4918	1,0212	0,9784
KS	128 × 128		1,9091	19,0560	30,8130	19,5830	0,4945	1,02	0,9593
CHEOPS-2D	64 × 128		1,9088	19,0889	30,8238	19,5976	0,4943	1,0261	0,9627
UM	60 × 68r		2,151	29	47,338	30,065	0,497	1,315	1,24
VT	64 × 64		2,1604	29,1821	47,3627	30,0949	0,4969	1,3215	1,2476
CU	64 × 64r		2,1600	29,0000	47,4000	30,1000	0,4972	1,3220	1,2497
CT	64 × 64	2.10 ⁴	2,1390	29,0685	47,4022	30,1249	0,4968	1,2537	1,2497
CZ	70 × 70		2,1422	29,3531	47,699	30,4204	0,4939	1,3306	1,28
KS	128 × 128		2,1579	28,9010	47,2310	29,9980	0,4972	1,3118	1,2389
CHEOPS-2D	64 × 128		2,1593	29,0292	47,3361	30,0786	0,4971	1,3241	1,2511
UM	60 × 68r		2,444	45,127	76,279	47,331	0,501	1,682	1,611
VT	64 × 64		2,4559	45,6250	76,3289	47,3811	0,5012	1,6959	1,6251
CU	64 × 64r		2,4600	45,2000	76,3000	47,4000	0,5014	1,6978	1,6307
CT	64 × 64	5.10 ⁴	2,4341	45,2941	76,4667	47,4936	0,5010	1,6113	1,6302
CZ ^a	70 × 70		2,4206	34,4727	41,2956	0	0,4867	1,7064	1,6452
KS	128 × 128		2,4507	44,7950	75,9280	47,1030	0,5014	1,6691	1,6004
CHEOPS-2D	64 × 128		2,4491	45,0120	76,0191	47,1231	0,5016	1,6983	1,6315
UM ^a	60 × 68r		2,944	53,887	68,697	1,43	0,491	2,3	2,259
VT	64 × 64		2,5955	56,9971	100,1792	58,7830	0,5038	1,8977	1,8436
CU ^a	64 × 64r		2,9600	54,0000	67,6000	42,6000	0,4918	2,3326	2,2748
CT	64 × 64	10 ⁵	2,5779	56,3319	100,4788	59,0548	0,5035	1,8108	1,8532
CZ ^a	70 × 70		2,9101	54,0581	67,6126	0	0,4886	2,3131	2,2387
KS	128 × 128		2,5937	55,6310	99,7770	58,5900	0,5040	1,8600	1,8086
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,9643	54,1222	67,6625	0,0177	0,4920	2,3499	2,2916
UM ^a	60 × 68r		3,505	79,61	107,771	1,123	0,493	2,993	2,972
VT ^a	64 × 64		3,5336	81,0501	107,1631	0,0000	0,4935	3,0365	2,9679
CU ^a	64 × 64r		3,5300	79,7000	107,1000	67,3000	0,4935	3,0431	2,9907
CT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	3,4922	79,0000	107,3079	0,0000	0,4932	2,8844	2,98
CZ ^a	70 × 70		3,4692	81,1915	107,8932	0	0,4885	3,0605	2,9935
KS ^a	128 × 128		3,5289	78,1750	106,5400	0,0000	0,4936	2,9354	2,8734
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		3,5302	79,6852	107,0571	-0,0244	0,4939	3,0797	3,0312
UM ^a	60 × 68r		4,274	118,761	183,282	0,546	0,493	3,972	4,03
VT ^a	64 × 64		4,3109	121,7197	182,9307	0,0000	0,4942	4,0440	3,9919
CU ^a	64 × 64r		4,3000	118,6000	183,0000	113,2000	0,4940	4,0642	4,0538
CT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	4,2658	118,8382	183,3963	0,0000	0,4935	3,8403	4,0157
CZ ^a	70 × 70		4,2639	122,0449	186,8631	0	0,4885	4,1332	4,1361
KS ^a	128 × 128		4,3104	115,9900	181,8000	0,0000	0,4942	3,8544	3,8146
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		4,2868	117,5241	181,8844	0,0145	0,4946	4,0968	4,1009
UM	60 × 68r							État final instationnaire	
VT	64 × 64							État final instationnaire	
CU	64 × 64r							État final instationnaire	
CT	64 × 64	10 ⁶						État final instationnaire	
CZ	70 × 70							État final instationnaire	
KS	128 × 128							État final instationnaire	
CHEOPS-2D	64 × 128							État final instationnaire	

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

TABLE B.8 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 1,5$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{v}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		1,359	11,027	19,557	11,704	0,478	0,477	0,445
VT	64 × 64		1,3619	11,0726	19,5571	11,7097	0,4781	0,4795	0,4484
CU	64 × 64r		1,3600	11,0000	19,6000	11,7000	0,4784	0,4797	0,4493
CT	64 × 64	10 ⁴	1,3532	11,0511	19,5727	11,7207	0,4780	0,4572	0,4492
CZ	70 × 70		1,3493	11,1559	19,6363	11,8283	0,476	0,4797	0,4544
KS	128 × 128		1,3621	11,0040	19,5390	11,6890	0,4783	0,4780	0,4472
CHEOPS-2D	64 × 128		1,3616	11,0324	19,5453	11,7011	0,4781	0,4798	0,4490
UM	60 × 68r		1,467	16,486	29,644	17,2	0,476	0,63	0,591
VT	64 × 64		1,4714	16,6066	29,6534	17,2130	0,4761	0,6336	0,5977
CU	64 × 64r		1,4700	16,5000	29,7000	17,2000	0,4764	0,6343	0,5995
CT	64 × 64	2.10 ⁴	1,4612	16,5373	29,6900	17,2407	0,4761	0,6043	0,5991
CZ	70 × 70		1,4629	16,9203	30,1098	17,6791	0,4737	0,644	0,6129
KS	128 × 128		1,4703	16,3860	29,5350	17,1120	0,4764	0,6274	0,5922
CHEOPS-2D	64 × 128		1,4707	16,4914	29,6063	17,1870	0,4762	0,6345	0,5992
UM ^a	60 × 68r		1,758	24,169	31,793	0,144	0,462	1,049	1,017
VT	64 × 64		1,6118	25,8851	48,1001	25,7446	0,4745	0,8441	0,8085
CU ^a	64 × 64r		1,7700	24,2000	31,7000	20,0000	0,4623	1,0609	1,0222
CT	64 × 64	5.10 ⁴	1,6010	25,6743	48,2145	25,8443	0,4744	0,8069	0,8120
CZ ^a	70 × 70		1,7312	24,1692	31,4598	-0,0005	0,4597	1,0462	0,9943
KS	128 × 128		1,6071	25,1850	47,6300	25,3250	0,4749	0,8241	0,7899
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,7659	24,2222	31,7152	0,0023	0,4622	1,0633	1,0240
UM ^a	60 × 68r		2,041	37,519	51,588	0,357	0,461	1,455	1,422
VT ^a	64 × 64		2,0524	38,1449	51,3533	0,0000	0,4612	1,4729	1,4229
CU	64 × 64r		2,0500	37,6000	51,4000	32,1000	0,4614	1,4763	1,4320
CT ^a	64 × 64	10 ⁵	2,0294	37,6657	51,4167	0,0000	0,4611	1,4057	1,4289
CZ ^a	70 × 70		2,0156	37,8632	51,238	0,0008	0,4587	1,4690	1,4087
KS ^a	128 × 128		2,0530	36,9510	51,2150	0,0000	0,4615	1,4333	1,3863
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,0518	37,6118	51,3541	0,0059	0,4614	1,4844	1,4404
UM ^a	60 × 68r		2,369	55,204	80,834	0,121	0,46	1,957	1,94
VT ^a	64 × 64		2,3850	56,4498	80,8895	0,0000	0,4608	1,9701	1,9183
CU ^a	64 × 64r		2,3800	55,4000	80,9000	50,1000	0,4609	1,9766	1,9366
CT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	2,3573	55,4823	81,0616	0,0000	0,4605	1,8792	1,9301
CZ ^a	70 × 70		2,3492	56,2773	81,2775	-0,0004	0,4579	1,9822	1,9321
KS ^a	128 × 128		2,3808	53,8680	80,2730	0,0000	0,4611	1,8820	1,8356
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,3829	55,2753	80,8118	-0,0066	0,4610	1,9938	1,9567
UM ^a	60 × 68r		2,833	84,435	138,079	0,016	0,46	2,673	2,711
VT ^a	64 × 64		2,8546	87,1560	138,6849	0,0000	0,4602	2,6920	2,6494
CU ^a	64 × 64r		2,8500	84,8000	138,8000	83,6000	0,4601	2,7148	2,7002
CT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	2,8249	85,0069	139,2285	0,0000	0,4597	2,5682	2,6741
CZ ^a	70 × 70		2,8287	86,7323	140,8995	-0,0013	0,4571	2,7467	2,7274
KS ^a	128 × 128		2,8454	81,7640	136,9300	0,0000	0,4606	2,5138	2,4798
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,8466	84,3891	138,1755	0,0205	0,4604	2,7425	2,7394
UM	60 × 68r							État final instationnaire	
VT	64 × 64							État final instationnaire	
CU	64 × 64r							État final instationnaire	
CT	64 × 64	10 ⁶						État final instationnaire	
CZ	70 × 70							État final instationnaire	
KS	128 × 128							État final instationnaire	
CHEOPS-2D	64 × 128							État final instationnaire	

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

TABLE B.9 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 1,75$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r				Pas de résultat rapporté				
VT	64 × 64		1,1362	6,1690	13,3932	7,6099	0,4766	0,2130	0,2035
CU	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT	64 × 64	10 ⁴	1,1312	6,1580	13,3999	7,6143	0,4765	0,2037	0,2036
CZ	70 × 70		1,1232	6,0947	13,2347	7,5716	0,4752	0,2046	0,1984
KS	128 × 128		1,1375	6,1578	13,4180	7,6213	0,4766	0,2140	0,2044
CHEOPS-2D	64 × 128		1,1362	6,1501	13,3774	7,6042	0,4766	0,2132	0,2036
UM	60 × 68r				Pas de résultat rapporté				
VT	64 × 64		1,1983	9,8336	21,2109	11,5084	0,4694	0,3114	0,2980
CU	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT	64 × 64	2.10 ⁴	1,1915	9,7936	21,2217	11,5164	0,4693	0,2976	0,2981
CZ	70 × 70		1,1824	9,7574	21,0607	11,522	0,4672	0,302	0,2925
KS	128 × 128		1,1997	9,7630	21,2090	11,4970	0,4697	0,3112	0,2977
CHEOPS-2D	64 × 128		1,1981	9,7756	21,1656	11,4919	0,4694	0,3116	0,2982
UM ^a	60 × 68r		1,347	15,811	24,906	0,033	0,448	0,553	0,536
VT ^a	64 × 64		1,2728	16,1937	35,5295	17,4209	0,4619	0,4347	0,4188
CU	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT	64 × 64	5.10 ⁴	1,2643	16,0615	35,5600	17,4548	0,4617	0,4155	0,4192
CZ	70 × 70		1,2664	16,1436	35,6693	17,8717	0,4609	0,4291	0,42
KS	128 × 128		1,2733	15,8620	35,3210	17,1260	0,4626	0,4287	0,4128
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,3530	15,8374	24,9017	0,0009	0,4477	0,5603	0,5390
UM ^a	60 × 68r		1,463	24,121	38,904	0,086	0,439	0,747	0,731
VT ^a	64 × 64		1,4704	24,5146	38,8889	0,0000	0,4387	0,7566	0,7313
CU	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT ^a	64 × 64	10 ⁵	1,4535	24,1918	38,8996	0,0000	0,4385	0,7235	0,7327
CZ ^a	70 × 70		1,4566	23,9201	38,6876	0	0,4393	0,7356	0,7164
KS ^a	128 × 128		1,4751	23,8920	38,8970	0,0000	0,4393	0,7435	0,7187
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,4702	24,1515	38,8564	0,0029	0,4389	0,7603	0,7373
UM ^a	60 × 68r		1,609	35,391	59,645	0,217	0,433	0,996	0,986
VT ^a	64 × 64		1,6172	36,1790	59,5014	0,0000	0,4326	1,0122	0,9860
CU ^a	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	1,5978	35,5073	59,5607	0,0000	0,4323	0,9690	0,9904
CZ ^a	70 × 70		1,6636	34,9413	60,3582	-0,0009	0,4407	0,9795	0,9752
KS ^a	128 × 128		1,6205	34,6490	59,2260	0,0000	0,4334	0,9722	0,9474
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,6173	35,4309	59,5060	0,0041	0,4328	1,0220	1,0019
UM ^a	60 × 68r				Pas de résultat rapporté				
VT ^a	64 × 64		1,8574	57,9307	101,6750	0,0000	0,4278	1,4389	1,4156
CU	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	1,8360	56,4381	101,9663	0,0000	0,4275	1,3786	1,4281
CZ ^a	70 × 70		1,8481	56,0726	101,9857	-0,0004	0,4283	1,4146	1,4035
KS ^a	128 × 128		1,8518	53,8510	99,8800	0,0000	0,4287	1,3249	1,3042
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,8589	56,3466	101,6756	0,0192	0,4280	1,4683	1,4626
UM ^a	60 × 68r		1,847	56,326	101,937	0,512	0,428	1,414	1,428
VT ^a	64 × 64		2,0577	80,1415	148,1155	0,0012	0,4256	1,7999	1,7830
CU ^a	64 × 64r				Pas de résultat rapporté				
CT ^a	64 × 64	10 ⁶	2,0378	77,6205	148,8825	0,0000	0,4252	1,7243	1,8050
CZ ^a	70 × 70		2,0469	78,159	149,9892	-0,0003	0,4248	1,823	1,7699
KS ^a	128 × 128		2,0358	72,3650	143,4600	0,0000	0,4266	1,5881	1,5737
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,0623	77,6673	148,5411	0,0348	0,4257	1,8612	1,8794

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

TABLE B.10 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide tronquée ($Di = 2$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\bar{V}_{RMS}	$\bar{V}_{\text{surf}}^{\text{max}}$	$\langle \bar{V}_{\text{surf}} \rangle$	$\langle \bar{T} \rangle$	$\langle \bar{H}_{\text{vis}} \rangle$	$ \langle \bar{H}_{\text{ad}} \rangle $
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64								
CU	64 × 64r								
CT	64 × 64	10 ⁴	1,0292	2,7344	7,2806	4,0132	0,4923	0,0539	0,0551
CZ	70 × 70		1,0406	2,279	6,1926	3,6551	0,4979	0,0368	0,0363
KS	128 × 128								
CHEOPS-2D	64 × 128		1,0313	2,7442	7,2988	4,0246	0,4923	0,0573	0,0556
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64								
CU	64 × 64r								
CT	64 × 64	2.10 ⁴	1,0991	6,4514	16,2366	8,3594	0,4795	0,1775	0,1706
CZ	70 × 70		1,1100	6,4000	16,3000	8,4000	0,4815	0,1797	0,1729
KS	128 × 128		1,0944	6,4282	16,2508	8,3700	0,4794	0,1688	0,1706
CHEOPS-2D	64 × 128		1,0992	6,4150	16,2149	8,3490	0,4795	0,1776	0,1705
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64								
CU ^a	64 × 64r								
CT	64 × 64	5.10 ⁴	1,1507	11,3168	28,6461	12,8102	0,4705	0,2707	0,2607
CZ	70 × 70		1,2000	11,4000	21,3000	13,4000	0,4590	0,3575	0,3437
KS ^a	128 × 128		1,1444	11,2777	28,7535	13,0091	0,4703	0,2574	0,2613
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,1998	11,3909	21,2171	0,0003	0,4583	0,3561	0,3415
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64								
CU ^a	64 × 64r								
CT ^a	64 × 64	10 ⁵	1,1627	20,4347	33,2509	0,0000	0,3776	0,4990	0,4820
CZ ^a	70 × 70		1,2700	17,7000	33,0000	20,5000	0,4485	0,4769	0,4608
KS ^a	128 × 128		1,2493	17,6427	32,9342	0,0000	0,4476	0,4487	0,4572
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,2636	17,6130	32,8798	0,0015	0,4481	0,4763	0,4593
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64								
CU ^a	64 × 64r								
CT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	1,3267	26,1985	49,2101	0,0000	0,4385	0,5996	0,5827
CZ ^a	70 × 70		1,3300	25,8000	49,2000	30,0000	0,4386	0,6008	0,5852
KS ^a	128 × 128		1,3101	25,7536	49,2140	0,0000	0,4381	0,5668	0,5812
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,3270	25,7007	49,1522	0,0044	0,4387	0,6034	0,5871
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64								
CU ^a	64 × 64r								
CT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	1,4140	40,9532	80,7812	0,0000	0,4266	0,7813	0,7687
CZ ^a	70 × 70		1,4100	39,9000	80,8000	47,1000	0,4265	0,7834	0,7730
KS ^a	128 × 128		1,3942	39,9070	80,8116	0,0000	0,4259	0,739	0,7663
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,4140	39,7985	80,5098	0,0125	0,4268	0,7903	0,7810
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64								
CU ^a	64 × 64r								
CT ^a	64 × 64	10 ⁶	1,4799	55,4043	114,4546	0,0000	0,4184	0,9218	0,9163
CZ ^a	70 × 70		1,4700	53,6000	114,4000	63,2000	0,4178	0,9270	0,9245
KS ^a	128 × 128		1,4584	53,614	114,6176	0	0,4174	0,8721	0,9121
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,4796	53,5279	114,1629	0,0234	0,4184	0,9402	0,9412

a. Mode varié ou à 2 cellules de convection.

TABLE B.11 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 0,25$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r	10 ⁴	4,406	39,952	58,048	38,808	0,515	0,847	0,849
VT	64 × 64		4,4144	40,0951	58,0846	38,8370	0,5146	0,8490	0,8490
CU	64 × 64r		4,4100	40,0000	58,1000	38,8000	0,5148	0,8494	0,8501
CHEOPS-2D	64 × 128		4,4148	39,9417	58,0657	38,8411	0,5147	0,8493	0,8496
UM	60 × 68r	2 · 10 ⁴	5,529	63,387	91,627	62,881	0,52	1,127	1,129
VT	64 × 64		5,5436	63,7224	91,6792	62,9232	0,5193	1,1304	1,1304
CU	64 × 64r		5,5400	63,4000	91,7000	62,9000	0,5195	1,1307	1,1318
CHEOPS-2D	64 × 128		5,5444	63,3719	91,6214	62,9333	0,5195	1,1307	1,1314
UM	60 × 68r	5 · 10 ⁴	7,407	114,694	163,973	116,7	0,526	1,594	1,6
VT	64 × 64		7,4355	115,5236	163,9887	116,7456	0,5262	1,6011	1,6012
CU	64 × 64r		7,4200	114,7000	163,9000	116,7000	0,5263	1,6007	1,6028
CHEOPS-2D	64 × 128		7,4407	114,7125	164,0230	116,8373	0,5266	1,6037	1,6055
UM	60 × 68r	10 ⁵	9,196	178,229	252,54	184,336	0,532	2,041	2,051
VT	64 × 64		9,2428	179,7523	252,4588	184,3711	0,5318	2,0518	2,0519
CU	64 × 64r		9,2100	178,2000	252,4000	184,3000	0,5319	2,0503	2,0540
CHEOPS-2D	64 × 128		9,2583	178,2961	252,6659	184,6028	0,5326	2,0575	2,0613
UM	60 × 68r	2 · 10 ⁵	11,344	274,378	386,259	287,772	0,537	2,579	2,596
VT	64 × 64		11,4402	277,3524	386,4043	288,0402	0,5377	2,6004	2,6005
CU	64 × 64r		11,3700	274,3000	386,1000	287,7000	0,5380	2,5952	2,6014
CHEOPS-2D	64 × 128		11,4471	274,3131	386,4236	288,0147	0,5390	2,6027	2,6098
UM	60 × 68r	5 · 10 ⁵	14,577	462,878	657,024	493,879	0,544	3,391	3,425
VT	64 × 64		14,7653	469,3189	657,5943	494,4812	0,5444	3,4339	3,4343
CU	64 × 64r		14,6300	463,7000	657,7000	494,6000	0,5444	3,4267	3,4397
CHEOPS-2D	64 × 128		14,5846	453,2507	647,5777	484,5222	0,5463	3,3825	3,3986
UM	60 × 68r	10 ⁶	14,772	495,573	753,942	542,921	0,538	3,436	3,495
VT	64 × 64		État final instationnaire						
CU	64 × 64r		État final instationnaire						
CHEOPS-2D	64 × 128		État final instationnaire						

TABLE B.12 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 0,5$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $	
UM	60 × 68r	10 ⁴	3,812	35,936	52,694	34,969	0,522	1,381	1,381	
VT	64 × 64		3,8218	36,0425	52,8172	35,0583	0,5214	1,3812	1,3812	
CU	64 × 64r		3,8200	35,9000	52,8000	35,1000	0,5217	1,3818	1,3830	
CHEOPS-2D	64 × 128		3,8221	35,9114	52,7882	35,0667	0,5215	1,3822	1,3826	
UM	60 × 68r	2.10 ⁴	4,71	56,752	83,187	56,443	0,529	1,824	1,825	
VT	64 × 64		4,7284	57,0197	83,3502	56,5644	0,5285	1,8266	1,8266	
CU	64 × 64r		4,7200	56,7000	83,3000	56,6000	0,5286	1,8272	1,8291	
CHEOPS-2D	64 × 128		4,7265	56,7304	83,3305	56,5919	0,5287	1,8287	1,8298	
UM	60 × 68r	5.10 ⁴	6,185	101,722	148,711	103,892	0,539	2,552	2,558	
VT	64 × 64		6,2134	102,4165	148,8866	104,0604	0,5388	2,5607	2,5608	
CU	64 × 64r		6,2000	101,7000	148,8000	104,0000	0,5389	2,5604	2,5637	
CHEOPS-2D	64 × 128		6,2173	101,7860	149,0155	104,2099	0,5393	2,5691	2,5723	
UM	60 × 68r	10 ⁵	7,532	155,304	227,068	161,439	0,548	3,221	3,233	
VT	64 × 64		7,5719	156,5589	227,1246	161,6041	0,5472	3,2344	3,2346	
CU	64 × 64r		7,5500	155,1000	227,1000	161,5000	0,5472	3,2330	3,2392	
CHEOPS-2D	64 × 128		7,5819	155,4271	227,6071	161,8767	0,5483	3,2534	3,2599	
UM	60 × 68r	2.10 ⁵	8,871	222,771	330,776	235,953	0,555	3,893	3,917	
VT	64 × 64		8,9294	225,0393	330,6127	235,9581	0,5554	3,9170	3,9173	
CU	64 × 64r		8,9000	222,6000	330,7000	236,0000	0,5555	3,9151	3,9266	
CHEOPS-2D	64 × 128		8,8572	219,0799	327,0326	232,5387	0,5572	3,8956	3,9086	
UM	60 × 68r	5.10 ⁵	9,237	249,626	398,695	274,946	0,562	4,079	4,143	
VT	64 × 64		État final instationnaire							
CU	64 × 64r		État final instationnaire							
CHEOPS-2D	64 × 128		État final instationnaire							
UM	60 × 68r	10 ⁶	10,26	311,304	507,696	341,937	0,574	4,576	4,686	
VT	64 × 64		État final instationnaire							
CU	64 × 64r		État final instationnaire							
CHEOPS-2D	64 × 128		État final instationnaire							

TABLE B.13 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 0,75$). Mêmes notations qu'au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r	10 ⁴	3,138	30,832	45,564	-29,939	0,521	1,541	1,541
VT	64 × 64		3,1564	30,9950	45,9445	30,2160	0,5197	1,5444	1,5444
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128		3,1564	30,8919	45,9429	30,2253	0,5198	1,5460	1,5465
UM	60 × 68r	2.10 ⁴	3,8	48,41	71,916	-48,078	0,528	2,022	2,024
VT	64 × 64		3,8234	48,7428	72,4248	48,4599	0,5267	2,0290	2,0290
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128		3,8238	48,5175	72,4360	48,4923	0,5269	2,0329	2,0342
UM	60 × 68r	5.10 ⁴	4,84	85,036	127,32	-86,848	0,538	2,784	2,791
VT	64 × 64		4,8731	85,7933	127,9885	87,3850	0,5372	2,7983	2,7984
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128		4,8742	85,2830	128,1380	87,5068	0,5377	2,8113	2,8152
UM	60 × 68r	10 ⁵	5,644	122,469	186,629	-127,755	0,546	3,387	3,401
VT	64 × 64		5,6787	123,6666	187,0503	128,1764	0,5458	3,4035	3,4038
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128		5,6624	121,9893	186,5990	127,6179	0,5470	3,4186	3,4270
UM	60 × 68r	2.10 ⁵	5,934	141,566	230,08	-153,011	0,551	3,63	3,665
VT	64 × 64		5,9556	143,6047	229,3043	152,5447	0,5516	3,6535	3,6542
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128		5,8747	137,4777	224,2830	148,4133	0,5531	3,6163	3,6353
UM	60 × 68r	5.10 ⁵	6,569	178,912	308,928	-197,085	0,561	4,1	4,182
VT	64 × 64								
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64x128								
UM	60 × 68r	10 ⁶	7,318	226,266	408,774	-253,058	0,566	4,651	4,788
VT ^a	64 × 64		10,0108	268,4870	403,0670	0,0000	0,5466	6,7282	6,7316
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64x128								

TABLE B.14 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 1,25$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r	10 ⁴	1,779	17,385	26,438	16,675	0,495	0,886	0,899
VT	64 × 64		1,8202	17,9566	27,6953	17,5333	0,4944	0,9208	0,9207
CU	64 × 64r		1,8200	17,9000	27,7000	17,5000	0,4947	0,9210	0,9219
CHEOPS-2D	64 × 128		1,8196	17,9010	27,6691	17,5291	0,4945	0,9217	0,9221
UM	60 × 68r	2.10 ⁴	2,029	26,895	41,681	26,282	0,497	1,177	1,195
VT	64 × 64		2,0712	27,7083	43,2727	27,3967	0,4967	1,2146	1,2146
CU	64 × 64r		2,0700	27,6000	43,3000	27,4000	0,4969	1,2151	1,2166
CHEOPS-2D	64 × 128		2,0700	27,5595	43,2332	27,3813	0,4968	1,2169	1,2181
UM	60 × 68r	5.10 ⁴	2,36	43,465	70,45	43,666	0,501	1,581	1,604
VT	64 × 64		2,3919	44,4493	71,8972	44,6742	0,5006	1,6145	1,6147
CU	64 × 64r		2,3900	44,1000	71,9000	44,7000	0,5008	1,6163	1,6204
CHEOPS-2D	64 × 128		2,3861	43,8852	71,6388	44,4697	0,5009	1,6179	1,6219
UM	60 × 68r	10 ⁵	2,859	52,269	64,505	1,185	0,491	2,187	2,242
VT	64 × 64		2,5597	56,5646	96,4695	57,0013	0,5031	1,8492	1,8499
CU ^a	64 × 64r		2,8900	52,8000	64,3000	40,5000	0,4915	2,2390	2,2478
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,8926	52,9411	64,3507	0,0207	0,4917	2,2552	2,2646
UM	60 × 68r	2.10 ⁵	3,424	78,121	102,7	1,135	0,493	2,879	2,958
VT ^a	64 × 64		3,4626	79,8860	102,7942	0,0000	0,4933	2,9410	2,9422
CU ^a	64 × 64r		3,4600	78,5000	102,7000	64,6000	0,4933	2,9472	2,9651
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		3,4593	78,5975	102,7169	0,0090	0,4936	2,9840	3,0054
UM ^a	60 × 68r	5.10 ⁵	Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64		4,2500	120,7501	177,4668	0,0000	0,4941	3,9622	3,9656
CU ^a	64 × 64r		4,2400	117,6000	177,5000	109,9000	0,4938	3,9817	4,0270
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		4,2268	116,6606	176,4885	0,0167	0,4945	4,0174	4,0762
UM	60 × 68r	10 ⁶	Pas de résultat rapporté						
VT	64 × 64		État final instationnaire						
CU	64 × 64r		État final instationnaire						
CHEOPS-2D	64 × 128		État final instationnaire						

TABLE B.15 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 1,5$). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r	10 ⁴	1,285	9,835	16,242	9,683	0,479	0,393	0,396
VT	64 × 64		1,3107	10,2396	17,2320	10,3023	0,4783	0,4166	0,4167
CU	64 × 64r		1,3100	10,2000	17,2000	10,3000	0,4786	0,4167	0,4174
CHEOPS-2D	64 × 128		1,3104	10,2028	17,2171	10,2938	0,4783	0,4169	0,4172
UM	60 × 68r	2.10 ⁴	1,391	15,99	26,831	15,746	0,476	0,579	0,579
VT	64 × 64		1,4213	15,6609	26,7156	15,4916	0,4760	0,5713	0,5715
CU	64 × 64r		1,4200	15,6000	26,7000	15,5000	0,4763	0,5720	0,5733
CHEOPS-2D	64 × 128		1,4207	15,5547	26,6712	15,4704	0,4760	0,5722	0,5730
UM	60 × 68r	5.10 ⁴	1,758	28,758	51,953	18,826	0,495	1,236	1,19
VT	64 × 64		1,5695	25,0036	44,5456	23,8607	0,4742	0,7901	0,7905
CU ^a	64 × 64r		1,7100	23,4000	29,5000	18,6000	0,4621	0,9910	0,9944
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,7130	23,3682	29,4848	0,0022	0,4620	0,9931	0,9960
UM ^a	60 × 68r	10 ⁵	1,973	36,141	47,779	0,29	0,461	1,362	1,406
VT ^a	64 × 64		1,9972	37,1300	48,3021	0,0000	0,4609	1,3977	1,3985
CU ^a	64 × 64r		2,0000	36,6000	48,3000	30,2000	0,4611	1,4009	1,4080
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,9964	36,6156	48,2974	0,0060	0,4611	1,4086	1,4157
UM ^a	60 × 68r	2.10 ⁵	2,306	53,947	76,153	0,136	0,46	1,863	1,93
Vt ^a	64 × 64		2,3306	55,4384	76,9096	0,0000	0,4605	1,8944	1,8959
CU ^a	64 × 64r		2,3300	54,4000	76,9000	47,7000	0,4606	1,9004	1,9141
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,3286	54,3132	76,8487	0,0109	0,4607	1,9177	1,9342
UM ^a	60 × 68r	5.10 ⁵			Pas de résultat rapporté				
VT ^a	64 × 64		2,8077	86,2791	133,5982	0,0000	0,4600	2,6256	2,6296
CU ^a	64 × 64r		2,8000	83,9000	133,7000	80,7000	0,4599	2,6473	2,6804
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		2,8000	83,5895	133,1208	0,0208	0,4603	2,6766	2,7203
UM	60 × 68r	10 ⁶			Pas de résultat rapporté				
VT	64 × 64				État final instationnaire				
CU	64 × 64r				État final instationnaire				
CHEOPS-2D	64 × 128				État final instationnaire				

TABLE B.16 – *Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 1,75$). Mêmes notations qu'au tableau 3.2.*

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	$\tilde{V}_{\max}^{\text{surf}}$	$\langle \tilde{V}^{\text{surf}} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{\text{vis}} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{\text{ad}} \rangle $
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64	10 ⁴	1,1087	5,6011	11,6070	6,6056	0,4786	0,1773	0,1774
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128								
			1,1086	5,5856	11,5900	6,5986	0,4786	0,1773	0,1774
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64	2.10 ⁴	1,1678	9,1330	18,7729	10,1553	0,4709	0,2731	0,2733
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D	64 × 128								
			1,1676	9,0810	18,7295	10,1380	0,4709	0,2732	0,2735
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64	5.10 ⁴	1,3158	15,2527	22,8298	0,0000	0,4487	0,5109	0,5114
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D ^a	64 × 128								
			1,3155	15,1081	22,8029	0,0009	0,4488	0,5119	0,5132
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64	10 ⁵	1,4318	23,6624	36,1449	0,0000	0,4391	0,7063	0,7072
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D ^a	64 × 128								
			1,4314	23,3163	36,1060	0,0028	0,4393	0,7097	0,7131
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	1,5795	35,3013	56,0252	0,0000	0,4327	0,9618	0,9636
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D ^a	64 × 128								
			1,5794	34,5839	56,0175	0,0071	0,4328	0,9713	0,9795
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	1,8236	57,1250	97,1252	0,0000	0,4278	1,3926	1,3968
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D ^a	64 × 128								
			1,8248	55,5841	97,1134	0,0188	0,4279	1,4214	1,4442
UM	60 × 68r								
VT ^a	64 × 64	10 ⁶	2,0272	79,3737	142,6095	0,0000	0,4256	1,7570	1,7653
CU	64 × 64r								
CHEOPS-2D ^a	64 × 128								
			2,0312	76,9467	142,9291	0,0340	0,4256	1,8174	1,8627

TABLE B.17 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,9999$; $R_A = 1$) avec ceux d'autres codes : approximation anélastique-liquide ($Di = 2$). Mêmes notations qu'au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Ra	Nu	\tilde{V}_{RMS}	$\tilde{V}_{surf_{max}}$	$\langle \tilde{V}_{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r				Pas de résultat rapporté				
VT	64 × 64	10 ⁴	1,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0002
CU	64 × 64r		1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000
CHEOPS-2D	64 × 128		1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT	64 × 64	2.10 ⁴	1,0784	5,8394	14,0303	7,1726	0,4817	0,1478	0,1481
CU	64 × 64r		1,0900	5,8000	14,1000	7,2000	0,4837	0,1496	0,1501
CHEOPS-2D	64 × 128		1,0784	5,8078	14,0014	7,1601	0,4817	0,1478	0,1479
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64	5.10 ⁴	1,1718	10,8346	19,1455	0,0000	0,4602	0,3176	0,3183
CU ^a	64 × 64r		1,1800	10,8000	19,2000	12,1000	0,4611	0,3195	0,3209
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,1719	10,7399	19,1124	0,0003	0,4603	0,3181	0,3186
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64	10 ⁵	1,2344	17,0521	30,2104	0,0000	0,4493	0,4366	0,4377
CU ^a	64 × 64r		1,2400	16,9000	30,3000	18,8000	0,4500	0,4386	0,4408
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,2344	16,8272	30,1562	0,0015	0,4495	0,4379	0,4393
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64	2.10 ⁵	1,2988	25,3235	45,8115	0,0000	0,4394	0,5633	0,5655
CU ^a	64 × 64r		1,3000	24,9000	45,8000	27,9000	0,4396	0,5644	0,5683
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,2988	24,8494	45,7520	0,0043	0,4396	0,5669	0,5702
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64	5.10 ⁵	1,3899	40,1472	76,5227	0,0000	0,4271	0,7503	0,7550
CU ^a	64 × 64r		1,3900	39,1000	76,5000	44,7000	0,4270	0,7522	0,7603
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,3898	39,0370	76,2714	0,0120	0,4273	0,7591	0,7683
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						
VT ^a	64 × 64	10 ⁶	1,4591	54,6776	109,4483	0,0000	0,4188	0,8948	0,9036
CU ^a	64 × 64r		1,4500	52,8000	109,3000	60,6000	0,4179	0,8977	0,9111
CHEOPS-2D ^a	64 × 128		1,4796	53,5279	114,1629	0,0234	0,4184	0,9402	0,9412
UM	60 × 68r		Pas de résultat rapporté						

TABLE B.18 – Comparaison des résultats de CHEOPS-2D en géométrie quasi-cartésienne ($f = 0,999$) avec ceux d'autres codes : viscosité variable. Approximation de BOUSSINESQ ($Di = 0$), anélastique-liquide ($Di \neq 0$) tronquée (CT, CZ, KS, CHEOPS-2D) ou complète (UM, VT, CU, CHEOPS-2D); $Ra_{\text{surf}} = 10^4$ et $\Delta\eta = 10^3$. Les valeurs sont extraites du benchmark de King et al. (2010). Le cas 2(a) de Blankenbach et al. (1989) est également reporté. Pour comparaison, un exemple à $f = 0,9999$ est indiqué (*). Les notations sont les mêmes que celles utilisées au tableau 3.2.

Code	$n_x \times n_z$	Di	Nu	\tilde{V}_{RMS}	\tilde{V}_{max}^{surf}	$\langle \tilde{V}^{surf} \rangle$	$\langle \tilde{T} \rangle$	$\langle \tilde{H}_{vis} \rangle$	$ \langle \tilde{H}_{ad} \rangle $
UM	60 × 68r		10,041	478,600	143,000	98,200	0,000	0	0
VT	64 × 64		10,076	495,080	143,780	98,761	0,741	0	0
CU	64 × 64r		10,060	485,300	144,100	98,900	0,740	0	0
CT	64 × 64	0	10,079	485,860	143,763	98,748	0,741	0	0
CZ	70 × 70		10,060	490,940	138,530	95,150	0,752	0	0
KS	128 × 128		10,086	487,960	146,120	100,240	0,736	0	0
CHEOPS-2D	64 × 128		10,139	480,158	146,020	100,350	0,740	0	0
CHEOPS-2D*	64 × 128		10,141	480,387	145,974	100,317	0,740	0	0
Blankenbach 2(a)			10,066	480,430					
UM	60 × 68r		7,670	370,057	118,106	80,746	0,707	1,636	1,633
VT	64 × 64	0,25	7,710	381,690	118,600	81,090	0,707	1,644	1,647
CU	64 × 64r		7,680	371,700	118,500	81,000	0,706	1,643	1,650
CHEOPS-2D	64 × 128		7,749	373,792	120,141	82,250	0,707	1,653	1,662
CT	64 × 64		7,739	377,130	121,236	82,956	0,706	1,522	1,660
CZ	70 × 70		7,680	366,090	118,920	81,390	0,705	1,605	1,607
KS	128 × 128	0,25	7,796	374,150	122,340	83,729	0,704	1,653	1,635
CHEOPS-2D	64 × 128		7,827	376,928	122,799	84,143	0,706	1,689	1,677
UM	60 × 68r		5,424	238,631	86,455	58,703	0,658	2,101	2,106
VT	64 × 64	0,5	5,470	247,660	87,020	59,100	0,658	2,122	2,126
CU	64 × 64r		5,450	238,400	86,700	58,900	0,658	2,108	2,111
CHEOPS-2D	64 × 128		5,471	239,877	87,498	59,521	0,658	2,139	2,153
CT	64 × 64		5,526	244,390	90,989	61,944	0,657	2,026	2,158
CZ	70 × 70		5,520	238,240	90,320	61,490	0,655	2,089	2,075
KS	128 × 128	0,5	5,629	245,980	92,468	63,004	0,657	2,180	2,121
CHEOPS-2D	64 × 128		5,586	242,535	91,350	62,292	0,657	2,234	2,186
UM	60 × 68r		2,476	90,879	38,398	24,829	0,557	1,300	1,330
VT	64 × 64	1	2,520	96,790	39,460	25,560	0,557	1,352	1,358
CU	64 × 64r		2,390	89,500	16,800	10,700	0,556	1,257	1,267
CHEOPS-2D	64 × 128		2,509	93,687	39,375	25,503	0,557	1,374	1,388
CT	64 × 64		2,594	95,487	43,399	28,187	0,558	1,378	1,393
CZ	70 × 70		2,610	92,170	43,510	28,340	0,555	1,346	1,312
KS	128 × 128	1	2,663	93,893	44,601	29,115	0,558	1,443	1,354
CHEOPS-2D	64 × 128		2,611	95,533	43,077	27,955	0,558	1,500	1,422
UM	60 × 68r		1,650	46,188	22,897	14,053	0,508	0,692	0,716
VT	64 × 64	1,25	1,670	49,740	23,640	14,480	0,509	0,728	0,734
CU	64 × 64r		1,690	47,200	12,000	7,600	0,506	0,758	0,765
CHEOPS-2D	64 × 128		1,674	48,836	23,802	14,617	0,509	0,753	0,762
CT	64 × 64		1,722	49,082	26,365	16,078	0,510	0,762	0,751
CZ	70 × 70		1,710	46,310	25,700	15,690	0,508	0,701	0,680
KS	128 × 128	1,25							
CHEOPS-2D	64 × 128		1,739	50,060	26,532	16,201	0,510	0,839	0,782
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64	1,5	1,290	21,340	17,150	10,410	0,478	0,367	0,374
CU	64 × 64r		1,280	18,400	8,500	5,400	0,475	0,353	0,355
CHEOPS-2D	64 × 128		1,292	20,949	17,171	10,443	0,478	0,372	0,375
CT	64 × 64		1,328	21,942	19,483	11,756	0,478	0,402	0,386
CZ	70 × 70		1,290	19,540	18,290	10,990	0,475	0,341	0,328
KS	128 × 128	1,5							
CHEOPS-2D	64 × 128		1,338	22,036	19,518	11,783	0,479	0,432	0,393
UM	60 × 68r								
VT	64 × 64	2	1,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000
CU	64 × 64r		1,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000
CHEOPS-2D	64 × 128		1,063	6,754	9,518	5,542	0,487	0,103	0,103
CT	64 × 64								
CZ	70 × 70								
KS	128 × 128	2							
CHEOPS-2D	64 × 128		1,085	7,441	11,213	6,415	0,486	0,132	0,116

Bibliographie

- Andrade E. N. da C. (1910), On the viscous flow in metals, and allied phenomena, *Proceedings of the Royal Society of London (Section A)*, 84 (567), 1–12. *Cité page 46.*
- Arrhenius S. (1887), Über die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker durch Säuren, *Zeitschrift für Physikalische Chemie, Stöchiometrie und Verwandtschaftslehre*, 4, 226–248. *4 citations pages 65, 105, 242 et 319.*
- Aubert J., Gillet N. et Cardin P. (2003), Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 4 (7), 1052–1070. *2 citations pages 86 et 88.*
- Backus J. W., Herrick H. et Ziller I. (1954), *Preliminary Report: Specifications for the IBM Mathematical FORMula TRANslating System, FORTRAN*, Programming Research Group, Applied Science Division, International Business Machines Corporation, New York (États-Unis), 29 p. *Cité page 150.*
- Baumgardner J. R. (1985), Three-dimensional treatment of convective flow in the Earth's mantle, *Journal of Statistical Physics*, 39 (5-6), 501–511. *Cité page 74.*
- Baumgardner J. R. et Frederickson P. O. (1985), Icosahedral discretization of the two-sphere, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22 (6), 1107–1115. *2 citations pages 74 et 76.*
- Becker T. W. et Kawakatsu H. (2011), On the role of anisotropic viscosity for plate-scale flow, *Geophysical Research Letters*, 38 (17), L17307. *Cité page 51.*
- Bénard H. (1900), Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11, 1261–1271 et 1309–1328. *Cité page 72.*
- Benjamin D., Wahr J., Ray R. D., Egbert G. D. et Desai S. D. (2006), Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the J₂ anomaly, *Geophysical Journal International*, 165 (27), 3–16. *Cité page 289.*

- Bercovici D. (2007), Mantle dynamics past, present, and future: An introduction and overview. In : *Treatise on Geophysics* (Schubert G., éd.), vol. 7, Elsevier, Amsterdam (Pays-Bas), chap. 1, 1–30. *Cité page 48.*
- Bercovici D., Schubert G. et Glatzmaier G. A. (1989), Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle, *Science*, 244 (4907), 950–955. *Cité page 61.*
- Bercovici D., Schubert G. et Glatzmaier G. A. (1992), Three-dimensional convection of an infinite-Prandtl-number compressible fluid in a basally heated spherical shell, *Journal of Fluid Mechanics*, 239, 683–719. *Cité page 250.*
- Besserer J., Tobie G., Choblet G. et Mocquet A. (201x), Coupling heat transfer and tidal dissipation with CHEOPS-2D: Role of compressibility, *en préparation*. *2 citations pages 150 et 219.*
- Bills B. G. (2005), Free and forced obliquities of the Galilean satellites of Jupiter, *Icarus*, 175 (1), 233–247. *Cité page 221.*
- Biot M. A. (1954), Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena, *Journal of Applied Physics*, 25 (11), 1385–1391. *4 citations pages 37, 223, 225 et 238.*
- Bland M. T., Showman A. P. et Tobie G. (2009), The orbital thermal evolution and global expansion of Ganymede, *Icarus*, 200 (1), 207–221. *2 citations pages 232 et 312.*
- Blankenbach B., Busse F., Christensen U., Cserepes L., Gunkel D., Hansen U., Harder H., Jarvis G., Koch M., Marquart G., Moore D., Olson P., Schmeling H. et Schnaubelt T. (1989), A benchmark comparison for mantle convection codes, *Geophysical Journal International*, 98 (1), 23–38. *15 citations pages xviii, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 191, 241 et 342.*
- Brandt A. (1977), Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, *Mathematics of Computation*, 31 (8), 333–390. *2 citations pages 125 et 240.*
- Brandt A. et Livne O. E. (2011), *Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics, Revised Edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphie (États-Unis), chap. 17, 135–142. *Cité page 98.*
- Briggs W. L., Henson V. E. et McCormick S. F. (2000), *A Multigrid Tutorial* (2^e éd.), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphie (États-Unis), 193 p. *3 citations pages 128, 163 et 166.*
- Brown M. E., Bouchez A. H., Rabinowitz D., Sari R., Trujillo C. A., van Dam M., Campbell R., Chin J., Hartman S., Johansson E., Lafon R., Le Mignant D., Stomski P., Summers D. et Wizinowich P. (2005), Keck observatory laser guide star adaptive optics discovery and characterization of a satellite to the large Kuiper belt object 2003 EL₆₁, *The Astrophysical Journal*, 632 (1), L45–L48. *Cité page 74.*

- Běhounková M., Tobie G., Choblet G. et Čadek O. (2010), Coupling mantle convection and tidal dissipation: Applications to Enceladus and Earth-like planets, *Journal of Geophysical Research*, 115 (E9), E09011. 14 citations pages 3, 44, 219, 222, 231, 232, 233, 239, 246, 247, 248, 249, 253 et 280.
- Běhounková M., Tobie G., Choblet G. et Čadek O. (2011), Tidally induced thermal runaways on extrasolar Earths: Impact on habitability, *The Astrophysical Journal*, 728 (2), 89–95. 10 citations pages 3, 44, 232, 233, 239, 243, 246, 247, 248 et 249.
- Běhounková M., Tobie G., Choblet G. et Čadek O. (2012), Tidally-induced melting events as the origin of south-pole activity on Enceladus, *Icarus* (sous presse). Cité page 233.
- Cameron A. G. W. et Ward W. R. (1976). The Origin of the Moon. In : *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, vol. 7, 120–122. Cité page 305.
- Carslaw H. S. et Jaeger J. C. (1995), *Conduction of Heat in Solids* (2^e éd.), Oxford University Press, Oxford (Royaume-Uni), 526 p. Cité page 169.
- Castillo J., Mocquet A. et Sotin C. (2000), Détecter la présence d'un océan dans Europe à partir de mesures altimétriques et gravimétriques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série IIA - Sciences de la Terre et des planètes*, 330 (9), 659–666. Cité page 220.
- Castillo-Rogez J. C., Efroimsky M. et Lainey V. (2011), The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model, *Journal of Geophysical Research*, 116 (E9), E09008. 2 citations pages 46 et 288.
- Cathles L. M. (1975), *The Viscosity of the Earth Mantle*, Princeton University Press, Princeton (États-Unis), chap. 2, 23–29. 3 citations pages 223, 225 et 238.
- Charbonneau D., Berta Z. K., Irwin J., Burke C. J., Nutzman P., Buchhave L. A., Lovis C., Bonfils X., Latham D. W., Udry S., Murray-Clay R. A., Holman M. J., Falco E. E., Winn J. N., Queloz D., Pepe F., Mayor M., Delfosse X. et Forveille T. (2009), A super-Earth transiting a nearby low-mass star, *Nature*, 462 (7275), 891–894. Cité page 2.
- Charney J. G., Fjørtoft R. et von Neumann J. (1950), Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, 2 (3), 237–254. 2 citations pages 70 et 71.
- Choblet G. (2005), Modelling thermal convection with large viscosity gradients in one block of the “cubed sphere”, *Journal of Computational Physics*, 205 (1), 269–291. 3 citations pages 75, 150 et 240.
- Choblet G., Čadek O., Couturier F. et Dumoulin C. (2007), ŒDIPUS: a new tool to study the dynamics of planetary interiors, *Geophysical Journal International*, 170 (1), 9–30. 8 citations pages 75, 76, 135, 145, 150, 211, 219 et 310.

- Coulomb J. et Jobert G. (1972), *Traité de Géophysique Interne. Tome I : Sismologie et Pesanteur*, Masson et Cie, Paris (France), 646 p. 3 citations pages 15, 19 et 270.
- Courant R., Friedrichs K. et Lewy H. (1928), Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 100 (1), 32–74. 3 citations pages 135, 137 et 146.
- Curie P. (1894), Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3 (1), 393–415. Cité page 74.
- Davaille A. et Jaupart C. (1993), Transient high-Rayleigh-number thermal convection with large viscosity variations, *Journal of Fluid Mechanics*, 253, 141–166. Cité page 73.
- Deardorff J. W. (1964), A numerical study of two-dimensional parallel-plate convection, *Journal of Atmospheric Sciences*, 21 (4), 419–438. 2 citations pages 71 et 72.
- Deparis V. et Legros H. (2000), *Voyage à l'Intérieur de la Terre : De la Géographie Antique à la Géophysique Moderne. Une Histoire des Idées*, Paris (France), 630 p. Cité page 48.
- Deparis V. et Legros H. (201x), *Une Histoire de la Force de Marée des Anciens à Laplace*, ouvrage en préparation. 2 citations pages 12 et 14.
- Deschamps F. (1997), *Convection de Rayleigh-Bénard à viscosité variable. Applications géophysiques et planétologiques*, thèse de doctorat, Université de Paris XI. 250. Cité page 166.
- Dickey J. O., Bender P. L., Faller J. E., Newhall X. X., Ricklefs R. L., Ries J. G., Shelus P. J., Veillet C., Whipple A. L., Wiant J. R., Williams J. G. et Yoder C. F. (1994), Lunar Laser Ranging: A continuing legacy of the Apollo program, *Science*, 265 (5171), 482–490. 2 citations pages 9 et 26.
- Dziewonski A. M. et Anderson D. L. (1981), Preliminary reference Earth model, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25 (4), 297–356. Cité page 245.
- Efroimsky M. (2012), Bodily tides near spin-orbit resonances, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112 (3), 283–330. Cité page 46.
- Efroimsky M. et Williams J. G. (2009), Tidal torques: a critical review of some techniques, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104 (3), 257–289. Cité page 276.
- Egbert G. D. et Ray R. D. (2000), Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data, *Nature*, 405 (6788), 775–778. Cité page 26.

- Faul U. H. et Jackson I. (2005), The seismological signature of temperature and grain size variations in the upper mantle, *Earth and Planetary Science Letters*, 234 (1-2), 119–134. *Cité page 45.*
- Fienga A., Manche H., Laskar J. et Gastineau M. (2008), INPOP06: a new numerical planetary ephemeris, *Astronomy and Astrophysics*, 477 (1), 315–327. *Cité page 286.*
- Fischer H.-J. et Spohn T. (1990), Thermal-orbital histories of viscoelastic models of Io (J1), *Icarus*, 83 (1), 39–65. *Cité page 232.*
- Fornberg B. (1998), *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), chap. 5, 89–93. *Cité page 98.*
- Forveille T., Bonfils X., Delfosse X., Alonso R., Udry S., Bouchy F., Gillon M., Lovis C., Neves V., Mayor M., Pepe F., Queloz D., Santos N. C., Segransan D., Almenara J. M., Deeg H. et Rabus M. (2012), The HARPS search for southern extra-solar planets XXXII. Only 4 planets in the Gl 581 system, *Astronomy and Astrophysics*. Soumis. *3 citations pages 2, 9 et 233.*
- Frank-Kamenetskii D. A. (1938), The temperature distribution in a reaction vessel and the stationary theory of thermal explosions, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, XVIII (7), 413–414. *3 citations pages 67, 105 et 319.*
- Frank-Kamenetskii D. A. (1969), *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Plenum Press, New York (États-Unis), chap. VI, 300–373. *4 citations pages 67, 105, 242 et 319.*
- Fressin F., Torres G., Rowe J. F., Charbonneau D., Rogers L. A., Ballard S., Batalha N. M., Borucki W. J., Bryson S. T., Buchhave L. A., Ciardi D. R., Désert J.-M., Dressing C. D., Fabrycky D. C., Ford E. B., Gautier, III T. N., Henze C. E., Holman M. J., Howard A., Howell S. B., Jenkins J. M., Koch D. G., Latham D. W., Lissauer J. J., Marcy G. W., Quinn S. N., Ragozzine D., Sasselov D. D., Seager S., Barclay T., Mullally F., Seader S. E., Still M., Twicken J. D., Thompson S. E. et Uddin K. (2012), Two Earth-sized planets orbiting Kepler-20, *Nature*, 482 (7384), 195–198. *Cité page 2.*
- Fromm J. E. (1965), Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer, *The Physics of Fluids*, 8 (10), 1757–1769. *Cité page 71.*
- Futterer B., Gellert M., von Larcher T. et Egbers C. (2008), Thermal convection in rotating spherical shells: An experimental and numerical approach within GeoFlow, *Acta Astronautica*, 62 (4-5), 300–307. *Cité page 73.*
- Garrigues J. (2007), *Fondements de la Mécanique des Milieux Continus*, Hermès Science Publications-Lavoisier, Paris (France), 250 p. *Cité page 48.*

- Gerya T. V. (2010), *Numerical Geodynamic Modelling*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 345 p. 5 citations pages 75, 95, 96, 166 et 205.
- Glatzmaier G. A. (1988), Numerical simulations of mantle convection: time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 43 (2), 223–264. Cité page 75.
- Godunov S. K. (1959), A finite difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics, *Matematicheskii Sbornik (N.S.)*, 47(89) (3), 271–306. 4 citations pages 140, 141, 144 et 240.
- Grasset O. et Parmentier E. M. (1998), Thermal convection in a volumetrically heated, infinite Prandtl number fluid with strongly temperature-dependent viscosity: Implications for planetary evolution, *Journal of Geophysical Research*, 103 (B8), 18171–18181. Cité page 291.
- Gurnis M. et Zhong S. (1991), Generation of long wavelength heterogeneity in the mantle by the dynamic interaction between plates and convection, *Geophysical Research Letters*, 18 (4), 581–584. Cité page 77.
- Harlow F. H. et Welch J. E. (1965), Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, 8 (12), 2182–2189. Cité page 97.
- Hartmann W. K. et Davis D. R. (1975), Satellite-sized planetesimals and lunar origin, *Icarus*, 24 (4), 504–514. Cité page 305.
- Haruyama J., Ohtake M., Matsunaga T., Morota T., Honda C., Yokota Y., Abe M., Ogawa Y., Miyamoto H., Iwasaki A., Pieters C. M., Asada N., Demura H., Hirata N., Terazono J., Sasaki S., Saiki K., Yamaji A., Torii M. et Josset J.-L. (2009), Long-Lived Volcanism on the Lunar Farside Revealed by SELENE Terrain Camera, *Science*, 323 (5916), 905–908. Cité page 305.
- Henning W. G., O’Connell R. J. et Sasselov D. D. (2009), Tidally heated terrestrial exoplanets: Viscoelastic response models, *The Astrophysical Journal*, 707 (2), 1000–1015. 2 citations pages 3 et 232.
- Hernlund J. W. et Tackley P. J. (2008), Modeling mantle convection in the spherical annulus, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 171 (1-4), 48–54. 27 citations pages xiv, 79, 80, 81, 82, 85, 87, 103, 155, 178, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 212, 213, 214, 215, 216, 220, 234, 237, 240, 241 et 310.
- Hewitt J. M., McKenzie D. P. et Weiss N. O. (1975), Dissipative heating in convective flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 68 (4), 721–738. Cité page 250.
- Hourdin F. et Armengaud A. (1999), The use of finite-volume methods for atmospheric advection of trace species. Part I: Test of various formulations in a general circulation model, *Monthly Weather Review*, 127 (5), 822–837. 3 citations pages 145, 146 et 205.

- Hussmann H. et Spohn T. (2004), Thermal-orbital evolution of Io and Europa, *Icarus*, 171 (2), 391–410. *2 citations pages 3 et 232.*
- Hussmann H., Spohn T. et Wiczerkowski K. (2002), Thermal equilibrium states of Europa’s ice shell: Implications for internal ocean thickness and surface heat flow, *Icarus*, 156 (1), 143–151. *Cité page 232.*
- Hüttig C. et Stemmer K. (2008a), Finite volume discretization for dynamic viscosities on Voronoi grids, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 171 (1-4), 137–146. *5 citations pages 75, 95, 155, 190 et 197.*
- Hüttig C. et Stemmer K. (2008b), The spiral grid: A new approach to discretize the sphere and its application to mantle convection, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9 (2), 2018–2030. *6 citations pages 75, 76, 95, 155, 190 et 197.*
- Ismail-Zadeh A. et Tackley P. J. (2010), *Computational Methods for Geodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 313 p. *6 citations pages 64, 65, 96, 135, 143 et 174.*
- Ita J. et King S. D. (1994), Sensitivity of convection with an endothermic phase change to the form of governing equations, initial conditions, boundary conditions, and equation of state, *Journal of Geophysical Research*, 99 (B8), 15919–15938. *Cité page 62.*
- Jackson I. (1993), Dynamic compliance from torsional creep and forced oscillation tests: An experimental demonstration of linear viscoelasticity, *Geophysical Research Letters*, 20 (19), 2115–2118. *3 citations pages 46, 288 et 290.*
- Jacobsen S. B., Remo J. L., Petaev M. I. et Sasselov D. D. (2009), Hf-W chronometry and the timing of the giant Moon-forming impact on Earth, *Lunar and Planetary Science Conference*, 40, abstract n° 2054. *Cité page 305.*
- Jarvis G. T. (1993), Effects of curvature on two-dimensional models of mantle convection - Cylindrical polar coordinates, *Journal of Geophysical Research*, 98 (B3), 4477–4485. *4 citations pages 178, 195, 196 et 237.*
- Jarvis G. T. (1994), The unifying role of aspect ratio in cylindrical models of mantle convection with varying degrees of curvature, *Geophysical Journal International*, 117 (2), 419–426. *Cité page 79.*
- Jarvis G. T. et McKenzie D. P. (1980), Convection in a compressible fluid with infinite Prandtl number, *Journal of Fluid Mechanics*, 96 (3), 515–583. *7 citations pages 57, 220, 233, 234, 250, 309 et 317.*
- Kageyama A. et Sato T. (2004), “Yin-Yang grid”: An overset grid in spherical geometry, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 5 (9), Q09005. *2 citations pages 75 et 76.*

- Kantha L. H., Stewart J. S. et Desai S. D. (1998), Long-period lunar fortnightly and monthly ocean tides, *Journal of Geophysical Research*, 103 (C6), 12639–12648. *2 citations pages 289 et 294.*
- Karato S. et Wu P. (1993), Rheology of the upper mantle: A synthesis, *Science*, 260 (5109), 771–778. *4 citations pages 66, 105, 290 et 319.*
- Karato S.-i. (2008), *Deformation of Earth Materials: An Introduction to the Rheology of Solid Earth*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 463 p. *4 citations pages 32, 40, 63 et 64.*
- Kaula W. M. (1961), Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites, *Geophysical Journal International*, 5 (2), 104–133. *2 citations pages 24 et 320.*
- Kaula W. M. (1964), Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2 (4), 661–685. *24 citations pages 1, 5, 18, 19, 41, 221, 223, 233, 239, 269, 270, 271, 272, 273, 276, 277, 279, 281, 287, 289, 294, 303, 311 et 320.*
- Kaula W. M. (1966), *Theory of Satellite Geodesy. Applications of Satellites to Geodesy*, Dover Publications (2000), Mineola, NY (États-Unis), 124 p. *4 citations pages 24, 270, 271 et 321.*
- Kennett B. L. N. et Bunge H.-P. (2008), *Geophysical Continua*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 432 p. *Cité page 88.*
- Kerr R. A. (1984a), Continental Drilling Heading Deeper, *Science*, 224 (4656), 1418–1420. *Cité page 69.*
- Kerr R. A. (1984b), The deepest hole in the world, *Science*, 224 (4656), 1420. *Cité page 69.*
- King S. D., Lee C., van Keken P. E., Leng W., Zhong S., Tan E., Tosi N. et Kameyama M. C. (2010), A community benchmark for 2-D Cartesian compressible convection in the Earth’s mantle, *Geophysical Journal International*, 180 (1), 73–87. *20 citations pages xiii, 60, 62, 123, 178, 179, 181, 184, 188, 190, 191, 192, 193, 195, 199, 241, 317, 323, 324 et 342.*
- Konopliv A. S., Binder A. B., Hood L. L., Kucinskas A. B., Sjogren W. L. et Williams J. G. (1998), Improved Gravity Field of the Moon from Lunar Prospector, *Science*, 281 (5382), 1476–1480. *Cité page 287.*
- Lainey V., Arlot J., Karatekin Ö. et van Hoolst T. (2009), Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations, *Nature*, 459 (7249), 957–959. *2 citations pages 8 et 232.*

- Lambeck K. (1979), On the orbital evolution of the Martian satellites, *Journal of Geophysical Research*, 84 (B10), 5651–5658. 7 citations pages 18, 269, 271, 272, 273, 274 et 288.
- Landau L. D. et Lifshitz E. M. (1970), Theory of Elasticity. In : *Course of Theoretical Physics*, vol. 7, Pergamon Press, Oxford (Royaume-Uni), chap. V, 150–162. 2 citations pages 50 et 54.
- Landau L. D. et Lifshitz E. M. (1989), Fluid Mechanics. In : *Course of Theoretical Physics* (2^e éd.), vol. 6, Butterworth-Heinemann, Oxford (Royaume-Uni). Cité page 159.
- Leng W. et Zhong S. (2008), Viscous heating, adiabatic heating and energetic consistency in compressible mantle convection, *Geophysical Journal International*, 173 (9), 693–702. 9 citations pages 59, 60, 61, 62, 191, 237, 258, 309 et 315.
- Leng W. et Zhong S. (2011), Implementation and application of adaptive mesh refinement for thermochemical mantle convection studies, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 12 (4), Q04006. Cité page 100.
- Leveque R. J. (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 578 p. Cité page 143.
- Love A. E. H. (1909), The yielding of the Earth to disturbing forces, *Proceedings of the Royal Society of London (Series A)*, 82 (551), 73–88. 2 citations pages 226 et 272.
- Machetel P. et Rabinowicz M. (1985), Transitions to a two mode axisymmetrical spherical convection: application to the Earth's mantle, *Geophysical Research Letters*, 12 (5), 227–230. Cité page 77.
- Machetel P. et Yuen D. A. (1986), The onset of time-dependent convection in spherical shells as a clue to chaotic convection in the Earth's mantle, *Geophysical Research Letters*, 13 (13), 1470–1473. Cité page 77.
- McKenzie D. P., Roberts J. M. et Weiss N. O. (1974), Convection in the Earth's mantle: towards a numerical simulation, *Journal of Fluid Mechanics*, 62 (3), 465–538. Cité page 72.
- Meyer J., Elkins-Tanton L. et Wisdom J. (2010), Coupled thermal-orbital evolution of the early Moon, *Icarus*, 208 (1), 1–10. Cité page 232.
- Mignard F. (1981), Les effets de marée dans l'évolution des satellites naturels, *Annales de Géophysique*, 37 (1), 173–178. Cité page 26.
- Mitri G. et Showman A. P. (2008), A model for the temperature-dependence of tidal dissipation in convective plumes on icy satellites: Implications for Europa and Enceladus, *Icarus*, 195 (2), 758–764. Cité page 233.

- Molodenskiy S. M. (1976), Changes in the Love numbers during variation of an Earth structure scheme, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2, 13–21. *3 citations pages 223, 238 et 242.*
- Monteux J., Coltice N., Dubuffet F. et Ricard Y. (2007), Thermo-mechanical adjustment after impacts during planetary growth, *Geophysical Research Letters*, 34 (24), L24201. *Cité page 88.*
- Moore W. B. (2003), Tidal heating and convection in Io, *Journal of Geophysical Research*, 108 (E8), 15 :1–6. *Cité page 232.*
- Morabito L. A., Synnott S. P., Kupferman P. N. et Collins S. A. (1979), Discovery of currently active extraterrestrial volcanism, *Science*, 204 (4396), 972. *2 citations pages 1 et 8.*
- Murray C. D. et Dermott S. F. (1999), *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 592 p. *4 citations pages 15, 221, 270 et 271.*
- Nakagawa T. et Tackley P. J. (2010), Influence of initial CMB temperature and other parameters on the thermal evolution of Earth's core resulting from thermochemical spherical mantle convection, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 11 (6), Q06001. *Cité page 310.*
- Newton I. (1687), Du mouvement des corps - Livre premier. In : *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle - Traduction par la Marquise du Châtelet*, Dunod (2005), Paris (France), 25–173. *3 citations pages 13, 14 et 74.*
- Nimmo F., Thomas P. C., Pappalardo R. T. et Moore W. B. (2007), The global shape of Europa: Constraints on lateral shell thickness variations, *Icarus*, 191 (1), 183–192. *Cité page 232.*
- Noyelles B. (2005), *Effets des Marées sur la Dynamique des Satellites de Jupiter et de Saturne*, thèse de doctorat, Observatoire de Paris. *2 citations pages 276 et 277.*
- Ojakangas G. W. et Stevenson D. J. (1986), Episodic volcanism of tidally heated satellites with application to Io, *Icarus*, 66 (2), 341–358. *2 citations pages 2 et 232.*
- Oldham D., Davies J. H. et Phillips T. N. (2011), Generic polyhedron grid generation for solving partial differential equations on spherical surfaces, *Computers and Geosciences*, 39, 11–17. *Cité page 77.*
- Patankar S. V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C. (États-Unis), 197 p. *13 citations pages 90, 95, 96, 97, 115, 116, 117, 118, 136, 137, 140, 176 et 240.*

- Patankar S. V. (1981), A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 4 (4), 409–425. 2 citations pages 115 et 240.
- Patankar S. V. et Spalding D. B. (1972), A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 (10), 1787–1806. 2 citations pages 89 et 114.
- Peale S. J. et Cassen P. (1978), Contribution of tidal dissipation to lunar thermal history, *Icarus*, 36 (2), 245–269. Cité page 1.
- Peale S. J., Cassen P. et Reynolds R. T. (1979), Melting of Io by tidal dissipation, *Science*, 203 (4383), 892–894. 2 citations pages 1 et 8.
- Pearson J. R. A. (1958), On convection cells induced by surface tension, *Journal of Fluid Mechanics*, 4 (5), 489–500. Cité page 72.
- Pekeris C. L. et Jarosch H. (1958), The free oscillation of the Earth. In : *Contribution in Geophysics in Honor of Beno Gutenberg* (Benioff H., éd.), Pergamon Press, Londres (Royaume-Uni), 171–192. 2 citations pages 223 et 238.
- Pernice M. (2000), A hybrid multigrid method for the steady-state incompressible Navier-Stokes equations, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 10, 74–91. 2 citations pages 113 et 117.
- Porco C. C., Helfenstein P., Thomas P. C., Ingersoll A. P., Wisdom J., West R., Neukum G., Denk T., Wagner R., Roatsch T., Kieffer S., Turtle E., McEwen A., Johnson T. V., Rathbun J., Veverka J., Wilson D., Perry J., Spitale J., Brahic A., Burns J. A., DelGenio A. D., Dones L., Murray C. D. et Squyres S. (2006), Cassini observes the active south pole of Enceladus, *Science*, 311 (5766), 1393–1401. 2 citations pages 1 et 9.
- Pouilloux L., Kaminski E. et Labrosse S. (2007), Anisotropic rheology of a cubic medium and implications for geological materials, *Geophysical Journal International*, 170 (2), 876–885. Cité page 51.
- Rabinowitz D. L., Barkume K., Brown M. E., Roe H., Schwartz M., Tourtellotte S. et Trujillo C. (2006), Photometric observations constraining the size, shape, and albedo of 2003 EL61, a rapidly rotating, Pluto-sized object in the Kuiper Belt, *The Astrophysical Journal*, 639 (2), 1238–1251. Cité page 74.
- Ray R. D., Eanes R. J. et Chao B. F. (1996), Detection of tidal dissipation in the solid Earth by satellite tracking and altimetry, *Nature*, 381 (6583), 595–597. 2 citations pages 289 et 294.

- Rayleigh L. (1916), On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Philosophical Magazine*, 32 (192), 529–546. *2 citations pages 72 et 73.*
- Reese C. C., Solomatov V. S. et Moresi L.-N. (1999), Non-newtonian stagnant lid convection and magmatic resurfacing on Venus, *Icarus*, 139 (1), 67–80. *2 citations pages 67 et 319.*
- Ricard Y. (2007), Physics of mantle convection. In : *Treatise on Geophysics* (Schubert G., éd.), vol. 7, Elsevier, Amsterdam (Pays-Bas), chap. 2, 31–87. *Cité page 58.*
- Roberts J. H. et Nimmo F. (2008), Tidal heating and the long-term stability of a subsurface ocean on Enceladus, *Icarus*, 194 (2), 675–689. *5 citations pages 3, 9, 231, 232 et 233.*
- Robuchon G., Zhang K. et Nimmo F. (2011), Coupling satellite thermal and orbital evolution: Application to Enceladus and Dione, *EPSC-DPS Joint Meeting*, abstract n° 1178. *3 citations pages 3, 232 et 312.*
- Roe P. L. (1986), Characteristic-based schemes for the Euler equations, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18, 337–365. *2 citations pages 145 et 240.*
- Ronchi C., Iacono R. et Paolucci P. S. (1996), The “cubed sphere”: a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry, *Journal of Computational Physics*, 124 (1), 93–114. *Cité page 75.*
- Ross M. N. et Schubert G. (1989), Evolution of the lunar orbit with temperature- and frequency-dependent dissipation, *Journal of Geophysical Research*, 94 (B7), 9533–9544. *7 citations pages 2, 232, 274, 275, 287, 289 et 311.*
- Salençon J. (2009), *Viscoélasticité Pour le Calcul des Structures*, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau (France), 151 p. *2 citations pages 32 et 38.*
- Schaeffer N. et Cardin P. (2006), Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number, *Earth and Planetary Science Letters*, 245 (3-4), 595–604. *Cité page 89.*
- Schmidt B. E., Blankenship D. D., Patterson G. W. et Schenk P. M. (2011), Active formation of ‘chaos terrain’ over shallow subsurface water on Europa, *Nature*, 479 (7374), 502–505. *Cité page 312.*
- Schubert G., Turcotte D. L. et Olson P. (2001), *Mantle Convection in the Earth and Planets*, Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 940 p. *5 citations pages 48, 168, 237, 309 et 315.*
- Segatz M., Spohn T., Ross M. N. et Schubert G. (1988), Tidal dissipation, surface heat flow, and figure of viscoelastic models of Io, *Icarus*, 75 (2), 187–206. *2 citations pages 248 et 250.*

- Showman A. P. et Malhotra R. (1997), Tidal evolution into the Laplace resonance and the resurfacing of Ganymede, *Icarus*, 127 (1), 93–111. *Cité page 312.*
- Showman A. P., Stevenson D. J. et Malhotra R. (1997), Coupled orbital and thermal evolution of Ganymede, *Icarus*, 129 (2), 367–383. *2 citations pages 2 et 232.*
- Smith D. E., Zuber M. T., Neumann G. A. et Lemoine F. G. (1997), Topography of the Moon from the Clementine LIDAR, *Journal of Geophysical Research*, 102 (E1), 1591–1611. *Cité page 286.*
- Smolarkiewicz P. K. (1984), A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion, *Journal of Computational Physics*, 54 (2), 325–362. *2 citations pages 145 et 205.*
- Sotin C., Head J. W. et Tobie G. (2002), Europa: Tidal heating of upwelling thermal plumes and the origin of lenticulae and chaos melting, *Geophysical Research Letters*, 29 (8), 1233. *Cité page 312.*
- Sotin C. et Labrosse S. (1999), Three-dimensional thermal convection in an isoviscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below: applications to the transfer of heat through planetary mantles, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 112 (3-4), 171–190. *Cité page 212.*
- Sotin C., Tobie G., Wahr J. et McKinnon W. B. (2009), Tides and Tidal Heating on Europa. In : *Europa* (Pappalardo R. T., McKinnon W. B., et Khurana K. K., éd.), University of Arizona Press, Tucson (États-Unis), 85–117. *Cité page 44.*
- Spencer J. R., Pearl J. C., Segura M., Flasar F. M., Mamoutkine A., Romani P., Buratti B. J., Hendrix A. R., Spilker L. J. et Lopes R. M. C. (2006), Cassini encounters Enceladus: Background and the discovery of a south polar hot spot, *Science*, 311 (5766), 1401–1405. *2 citations pages 1 et 9.*
- Strom R. G., Terrile R. J., Hansen C. et Masursky H. (1979), Volcanic eruption plumes on Io, *Nature*, 280, 733–736. *Cité page 1.*
- Suzuki A., Tabata M. et Honda S. (1999), Numerical solution of an unsteady Earth's mantle convection problem by a stabilized finite element method, *Theoretical and Applied Mechanics*, 48, 371–378. *Cité page 75.*
- Szeto A. et Lambeck K. (1982), On eccentricity functions for eccentric orbits, *Celestial Mechanics*, 27 (4), 325–337. *Cité page 280.*
- Tabata M. (2006), Finite element approximation to infinite Prandtl number Boussinesq equations with temperature-dependent coefficients – Thermal convection problems in a spherical shell, *Future Generation Computer Systems*, 22 (4), 521–531. *2 citations pages 62 et 75.*
- Tabata M. et Suzuki A. (2000), A stabilized finite element method for the Rayleigh-Bénard equations with infinite Prandtl number in a spherical shell,

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 (3-4), 387–402.
Cité page 62.
- Tachinami C. et Yuen D. A. (2010), Coupled thermal- and orbital-evolution of close-in super Earths with convective regulated tidal dissipation inside it, *AGU Fall Meeting, abstract n° 1589*.
Cité page 232.
- Tackley P. J. (1994), *Three-dimensional Models of Mantle Convection: Influence of Phase Transitions and Temperature-dependent Viscosity*, thèse de doctorat, California Institute of Technology.
Cité page 150.
- Tackley P. J. (1996), Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles, *Journal of Geophysical Research*, 101 (B2), 3311–3332.
2 citations pages 60 et 250.
- Tackley P. J. (2008), Modelling compressible mantle convection with large viscosity contrasts in a three-dimensional spherical shell using the yin-yang grid, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 171 (1-4), 7–18. *10 citations pages 75, 135, 145, 150, 154, 155, 166, 190, 209 et 212.*
- Tackley P. J., Schubert G., Glatzmaier G. A., Schenk P., Ratcliff J. T. et Matas J.-P. (2001), Three-dimensional simulations of mantle convection in Io, *Icarus*, 149 (1), 79–93.
2 citations pages 3 et 233.
- Takeuchi H. et Saito M. (1972), Seismic Surface Waves. In : *Methods in Computational Physics* (Bolt B. A., éd.), vol. 11, Academic Press, New York (États-Unis), 217–295.
7 citations pages 223, 224, 225, 238, 239, 242 et 265.
- Thomson J. (1912), On changing tessellated structures in certain liquids. In : *Collected Papers in Physics and Engineering* (Larmor J. et Thomson J., éd.), Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 136–141. *Cité page 72.*
- Thomson R. E. et Delaney J. R. (2001), Tidal dissipation in the rocky core drives oceanic processes on Europa, *AGU Fall Meeting, abstract n° U12B-07*.
Cité page 312.
- Tobie G. (2003), *Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan*, thèse de doctorat, Université de Paris 7. *Cité page 223.*
- Tobie G., Choblet G. et Sotin C. (2003), Tidally heated convection: Constraints on Europa's ice shell thickness, *Journal of Geophysical Research*, 108 (E11), 5124.
4 citations pages 3, 224, 232 et 233.
- Tobie G., Mocquet A. et Sotin C. (2005), Tidal dissipation within large icy satellites: applications to Europa and Titan, *Icarus*, 177 (2), 534–549. *12 citations pages 220, 221, 223, 226, 231, 233, 238, 239, 242, 246, 265 et 267.*
- Tobie G., Čadek O. et Sotin C. (2008), Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the south pole hotspot on Enceladus, *Icarus*, 196 (2), 642–652.
3 citations pages 9, 219 et 232.

- Torrance K. E. et Turcotte D. L. (1971), Structure of convection cells in the mantle, *Journal of Geophysical Research*, 76 (5), 1154–1161. *Cité page 72.*
- Travis B. J., Anderson C., Baumgardner J., Gable C. W., Hager B. H., O’Connell R. J., Olson P., Raefsky A. et Schubert G. (1990), A benchmark comparison of numerical methods for infinite Prandtl number thermal convection in two-dimensional Cartesian geometry, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 55 (3), 137–160. *6 citations pages xiii, 178, 187, 188, 189 et 241.*
- Travis B. J. et Brandow B. (1984), A numerical study of mantle convection with radiochemical transport, *Terra Cognita*, 4, 244. *Cité page 77.*
- Trompert R. A. et Hansen U. (1996), The application of a finite volume multigrid method to three-dimensional flow problems in a highly viscous fluid with a variable viscosity, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 83 (3), 261–291. *2 citations pages 113 et 240.*
- Trottenberg U., Oosterlee C. W. et Schüller A. (2001), *Multigrid*, Elsevier Academic Press, Londres (Royaume-Uni), 23–24, § 1.5.5. *Cité page 125.*
- Turcotte D. L., Hsui A. T., Torrance K. E. et Schubert G. (1974), Influence of viscous dissipation on Benard convection, *Journal of Fluid Mechanics*, 64 (2), 369–374. *Cité page 250.*
- Turcotte D. L., Torrance K. E. et Hsui A. T. (1973), Convection in the Earth’s mantle. In : *Methods in Computational Physics* (Bolt B. A., éd.), vol. 13, Academic Press, New York (États-Unis), 431–454. *Cité page 72.*
- van den Berg A. P. et Yuen D. A. (1997), The role of shear heating in lubricating mantle flow, *Earth and Planetary Science Letters*, 151 (1-2), 33–42. *2 citations pages 233 et 250.*
- van Keken P. (2001), Cylindrical scaling for dynamical cooling models of the Earth, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 124 (1-2), 119–130. *7 citations pages 77, 78, 79, 104, 208, 209 et 241.*
- van Leer B. (1977), Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection, *Journal of Computational Physics*, 23 (3), 276–279. *Cité page 145.*
- Vangelov V. I. et Jarvis G. T. (1994), Geometrical effects of curvature in axisymmetric spherical models of mantle convection, *Journal of Geophysical Research*, 99 (B5), 9345–9358. *3 citations pages 78, 79 et 209.*
- Veeder G. J., Davies A. G., Williams D. A., Matson D. L., Johnson T. V. et Radebaugh J. (2011), Io: Heat flow from dark paterae, *Icarus*, 212 (1), 236–261. *Cité page 8.*

- Weber R. C., Lin P.-Y., Garnero E. J., Williams Q. et Lognonné P. (2011), Seismic detection of the lunar core, *Science*, 331 (6015), 309–312. 3 citations pages 287, 289 et 290.
- Weertman J. (1970), The creep strength of the Earth's mantle, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 8 (1), 145–168. 4 citations pages 65, 105, 242 et 319.
- Wieczorek M. A., Jolliff B. L., Khan A., Pritchard M. E., Weiss B. P., Williams J. G., Hood L. L., Righter K., Neal C. R., Shearer C. K., McCallum I. S., Tompkins S., Hawke B. R., Peterson C., Gillis J. J. et Bussey B. (2006), The constitution and structure of the lunar interior, *Reviews in Mineralogy and Geochemistry*, 60 (1), 221–364. 3 citations pages 287, 289 et 295.
- Wieczorek M. A. et Le Feuvre M. (2009), Did a large impact reorient the Moon?, *Icarus*, 200 (2), 358–366. Cité page 305.
- Williams G. E. (2000), Geological constraints on the Precambrian history of Earth's rotation and the Moon's orbit, *Reviews of Geophysics*, 38 (1), 37–60. Cité page 26.
- Wolszczan A. et Frail D. A. (1992), A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, *Nature*, 355, 145–147. Cité page 2.
- Zhang K. et Nimmo F. (2009), Recent orbital evolution and the internal structures of Enceladus and Dione, *Icarus*, 204 (2), 597–609. Cité page 312.
- Zhong S., McNamara A., Tan E., Moresi L. et Gurnis M. (2008), A benchmark study on mantle convection in a 3-D spherical shell using CitcomS, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9 (10), Q10017. 2 citations pages 154 et 155.
- Zhong S., Zuber M. T., Moresi L. et Gurnis M. (2000), Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection, *Journal of Geophysical Research*, 105 (B5), 11063–11082. Cité page 75.
- Zhong S. J., Yuen D. A. et Moresi L. N. (2007), Numerical methods for mantle convection. In : *Treatise on Geophysics* (Schubert G., éd.), vol. 7, Elsevier, Amsterdam (Pays-Bas), chap. 5, 227–252. Cité page 96.
- Ziethé R., Seiferlin K. et Hiesinger H. (2009), Duration and extent of lunar volcanism: Comparison of 3D convection models to mare basalt ages, *Planetary and Space Sciences*, 57 (7), 784–796. Cité page 290.

Approche numérique du couplage par effets de marée entre transferts thermiques internes et évolution orbitale des corps planétaires

Résumé Les effets de marée qui ont lieu au sein de certains corps du Système Solaire et probablement dans un grand nombre des planètes extrasolaires détectées jusqu'à présent associent la friction visqueuse produite par la déformation cyclique de leurs enveloppes internes et éventuellement externes (atmosphère et océans) à une modification de leurs paramètres orbitaux. La dissipation d'énergie de marée étant fortement dépendante de la rhéologie et donc de la température, il existe naturellement un couplage entre ces effets et les transferts de chaleur au sein des corps planétaires.

Cette thèse a été dédiée à la construction d'un modèle numérique permettant de simuler de manière cohérente la convection thermique dans un manteau planétaire compressible, à viscosité variable et soumis à un chauffage de marée hétérogène, ainsi que l'évolution orbitale du corps. Les équations de conservation pour la dynamique du manteau sont traitées via une méthode en volumes finis dans la géométrie bidimensionnelle d'anneau sphérique; cette dernière permet d'approximer des transferts thermiques tridimensionnels sphériques en gardant des temps de calcul raisonnables. En particulier, un solveur mécanique multigrille et un schéma à haute résolution pour l'advection de la chaleur ont été implémentés. La dissipation de marée qui influence l'évolution orbitale est ensuite évaluée via une solution semi-analytique dérivée au cours de ce travail.

Deux applications préliminaires sont présentées pour examiner, d'une part, l'influence de la compressibilité dans le traitement du problème de convection couplée avec la dissipation de marée et, d'autre part, l'effet de ce couplage sur l'évolution orbitale.

Mots-clés : *Marées solides, Convection thermique, Évolution orbitale, Couplage thermo-mécanique, Modélisation numérique, Volumes finis, Compressibilité, Anneau sphérique*

Numerical modeling of the tidally induced coupling between internal heat transfer and orbital evolution of planetary bodies

Abstract Tidal effects that occur in some objects of the Solar System, and probably in a great part of the extrasolar planets detected so far, associate the viscous friction induced by the periodic deformation of their internal, possibly external layers (atmosphere and oceans), to a change of their orbital parameters. Since tidal dissipation strongly depends on rheology, hence on temperature, there is a natural coupling between these effects and heat transfer inside planetary bodies.

This thesis was devoted to the building of a numerical model that self-consistently simulates thermal convection in a compressible mantle with variable viscosity and subjected to heterogeneous tidal heating, and the orbital evolution of the body. Conservation equations for mantle dynamics are treated by a finite volume method based on the bi-dimensional spherical annulus geometry; this approach approximates three-dimensional heat transfer while keeping moderate computational time. In particular, a multigrid mechanical solver and a high resolution advection scheme for the heat equation were implemented. The dissipation of tidal energy, which influences orbital evolution, is then computed through a semi-analytical solution derived during this work.

Two preliminary applications are presented to investigate, on one hand the influence of compressibility in the treatment of the convection problem coupled with tidal dissipation and, on the other hand the effect of this coupling on orbital evolution.

Keywords: *Solid tides, Thermal convection, Orbital evolution, Thermo-mechanical coupling, Numerical modeling, Finite volumes, Compressibility, Spherical annulus*