

Thèse de Doctorat

Hèla AYADI

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de **Docteur de l'Université de Nantes**
Docteur de Université de Carthage
Label européen
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions., section CNU 26

Unité de recherche : Laboratoire des Mathématiques Jean Leray Nantes (LMJL)

Soutenue le 20 Novembre 2015

Opérateur de Gauss-Bonnet semi-Fredholm et propriétés spectrales sur les graphes infinis

JURY

Président : **M. Abderrazak KAROUI**, Professeur, Faculté des Sciences de Bizerte
Rapporteurs : **M. Aref JERIBI**, Professeur, Faculté des Sciences de Sfax
M. Luc HILLAIRET, Professeur, Université d'Orléans
Examineur : **M. Sylvain GOLÉNIA**, HDR-Maître de conférences, Institut de Mathématiques de Bordeaux
Directrices de thèse : **M^{me} Colette ANNÉ**, HDR-Chargée de Recherche au CNRS, Université de Nantes
M^{me} Nabila TORKI-HAMZA, HDR-Maître de conférences, Université de Kairouan

Remerciement

Cette thèse de Doctorat a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences de Bizerte et l'Université de Nantes (LMJL) avec le soutien financier du Ministère Tunisien de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et du Ministère des affaires étrangères de la France dans le cadre du programme PHC-Utique projet CMCU numéro 13G1501 "Graphes, Géométrie et Théorie Spectrale". De plus, j'ai bénéficié d'un soutien financier en tant que membre de l'unité de recherche Mathématiques et Applications (UR/13ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte et membre de laboratoire de Mathématiques Jean Leray de Nantes (LMJL)..

Le travail de synthèse que nécessite la rédaction d'une thèse est difficile, mais à présent que je me retrouve face à mes remerciements, je me sens toute aussi impuissante. Est ce que les mots sont suffisants pour exprimer ma sincère reconnaissance aux personnes grâce à qui je suis arrivée ici ?! Je me demande souvent est-ce-qu'il y a un autre mot plus que "merci" pour le dire. Et ma réponse est toujours "oui". En fait, il y a ma prière à Dieu à qui je demande de protéger et donner tout le bonheur de la vie à ces personnes qui m'ont aidée tout le temps. Mais quand même il faut leur dire "merci" :

Je souhaite remercier en premier lieu mes chères directrices de thèse Madame Nabila Torki-Hamza et Madame Colette Anné. L'idée de voler de ses propres ailes est un peu effrayante, mais j'ai l'impression d'avoir grandi, d'avoir acquis une certaine confiance grâce à vous. J'ai énormément appris à vos côtés. Madame Nabila vous êtes toujours très attentive à ce que je ressentais et disponible malgré votre temps qui est plus que chargé ! Vos qualités pédagogiques et scientifiques exceptionnelles, votre franchise, votre tendresse, votre encouragement et gentillesse m'ont beaucoup aidée. Madame Colette, votre attention de tout instant sur mes travaux, votre rapidité à me répondre par mail à mes questions lorsque je suis en Tunisie. Votre enthousiasme, votre brillante idée, votre encouragement et sympathie m'ont beaucoup aidée. Mesdames, vos conseils avisés et votre écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. De plus, votre confiance a été l'élément moteur pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous. Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. Merci pour tout.

Je tiens à remercier les rapporteurs pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leur rapport. Je remercie le Professeur Luc Hillairet et le Professeur Aref Jeribi d'avoir accepté cette charge. C'est avec joie que je les remercie également pour leur remarques fructueuses et les corrections proposées.

Je remercie le Professeur Abderrazak Karoui de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse, veuillez trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je tiens à remercier également le Professeur Sylvain Golénia qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examineur et pour avoir accepté de venir à Bizerte pour la soutenance. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

Je voudrai adresser ma reconnaissance à Monsieur le professeur Belgacem Draouil, directeur de l'unité de recherche Mathématiques et Applications (UR/13ES47) de la Faculté des Sciences de Bizerte pour ses qualités humaines et son encouragement.

Je remercie également Monsieur le professeur Belgacem Selmi, directeur de département de Mathématique de la Faculté des Sciences de Bizerte, pour sa compréhension, son service, disponibilité et son aide. Que vous trouvez ici ma profonde reconnaissance et mon profond respect.

Je remercie tous mes professeurs et collègues de la Faculté des Sciences de Bizerte et surtout Madame Yomna Rébai et Monsieur Chaouki Aouiti, ses deux personnes formidables qui m'ont supportée et m'ont encouragée durant mes premières années d'enseignements. Un très grand merci tout particulier à Madame Sonia Chaari et Madame Faten Khalloufi, pour leur confiance de m'avoir donnée la clef de leur bureau pour que je puisse travailler dans de bonnes conditions, pour leur gentillesse et modestie. Et je n'oublie pas de remercier également Monia la secrétaire du département de Mathématiques pour sa gentillesse, sa serviabilité et sa bonne humeur.

Je souhaite encore remercier les membres de l'administration de la la Faculté des Sciences de Bizerte, Monsieur Sami, Madame Tefaha, Madame Farida Nakach, Monsieur Hichem Hadded, Monsieur Nizar et Monsieur Mourad, pour leur services, gentillesse, aides, conseils et disponibilités.

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres du laboratoire LMJL de Nantes pour leur accueil, leur gentillesse et leur sympathie et surtout Stéphanie, Brigitte, Annick, Eric, Saiid et Monsieur Claude.

Un très grand merci tout particulier au Professeur Jun Masamune, pour son accueil lors de mes séjours à Sendai, sa disponibilité, sa générosité et sa modestie. Je lui suis également reconnaissante.

Un très grand merci à ma chère amie Marwa Balti, pour son aide, son soutien pendant mes périodes de doutes et pour nos innombrables moments avec mes meilleurs souhaits de réussite pour sa vie professionnelle et personnelle. Un grand merci aussi pour mes amis Yassin Chebbi et Zied Meddini avec mes sincères vœux de réussite.

...de sourires, de générosité, de conseils et de beaucoup de soutien, mille merci à ma chère tante Hanène qui habite à Paris pour son accueil, pour sa tendresse au moment où je suis à Nantes et pour les beaux moments qu'on a passé ensemble avec nos petites roses de la famille Tessinm, Yassmin et Fayrouz.

Dédicaces

Je dédie cette Thèse :

*À ma chère mère Shrifa pour sa patience
et sa tendresse,*

*À mon cher père Mohamed pour son sou-
tien et son amour,*

*À mon cher oncle Mounir pour son soutien
et encouragements,*

*À ma chère soeur Jouhaina qui n'a cessé
de me combler par son amour,*

*À mes chers frères Ahmed et Hamza pour
leur confiance,*

À toute ma grande famille,

*Et à tous ceux que ma réussite leur tient
à cœur,*

*Qu'ils trouvent l'expression de mon profond
respect.*

Table des matières

1	Introduction	9
2	Analyse sur les graphes	11
2.1	Quelques éléments d'analyse sur les graphes	11
2.1.1	Notion de graphe	11
2.1.2	Graphes pondérés	12
2.1.3	Notions de sous-graphes	14
2.1.4	Espaces fonctionnels	15
2.1.5	Opérateurs et propriétés	16
2.2	Graphe parabolique	20
2.2.1	Graphe parabolique	20
2.2.2	Graphe récurrent	26
2.3	Introduction au problème de Kirchhoff	28
2.3.1	Problème de Kirchhoff sur un réseau électrique résistif fini	29
2.3.2	Problème de Kirchhoff sur un réseau électrique résistif infini	31
3	Non-parabolicité à l'infini	37
3.1	Problématique	37
3.2	Opérateur de Gauss-Bonnet non parabolique à l'infini	38
3.3	Opérateur de Gauss-Bonnet Semi-Fredholm	44
3.3.1	Remarques	51
3.4	Exemples	52
3.4.1	Le graphe star-like	52
3.4.2	Arbre triadique	54
4	Spectres du Laplacien	57
4.1	Préliminaire	57
4.2	Le spectre du Laplacien	58
4.3	Le problème de zéro dans le spectre de l'opérateur Laplacien	65
4.4	Exemples :	70
4.4.1	Arbre symétrique	70
4.4.2	Arbre triadique avec une mesure particulière	72

4.4.3	Arbre triadique avec une mesure minorée par une constante strictement positive	73
5	Annexe	75
5.1	Opérateur de Fredholm	75
5.2	Problème de minimisation :	77
5.3	Spectre du Laplacien	79
5.3.1	Spectre du Laplacien sur $\mathbb{Z}$	79
5.3.2	Spectre du Laplacien sur un arbre régulier	80
5.3.3	Spectre essentiel du Laplacien	81

Introduction

Le but de cette thèse est de faire de l'analyse sur les graphes infinis pondérés et d'étudier certains opérateurs discrets et quelques problèmes liés à ces opérateurs. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude des propriétés de l'opérateur discret de Gauss-Bonnet qui est un opérateur de type Dirac (son carré est l'opérateur Laplacien), comme suite du travail de Colette Anné et Nabila Torki-Hamza [4]. De plus, nous donnons une version discrète de la notion importante de *non-parabolicité à l'infini* introduite par Gilles Carron [8] pour les variétés Riemanniennes non-compactes. En fait, le passage du modèle continu au modèle discret est motivé par le lien étroit qui existe entre les graphes et les variétés Riemanniennes. En effet, une variété Riemannienne M peut être discrétisée sous forme d'un graphe G et la géométrie de G est alors une bonne approximation de la géométrie de M . D'autre part, grâce à la condition de non-parabolicité à l'infini, l'opérateur de Gauss-Bonnet est *Semi-Fredholm* ce qui est utile dans la décomposition de Hodge pour résoudre des problèmes tel que *le problème de Kirchhoff*.

Un autre résultat principal de cette thèse est d'étudier les propriétés spectrales de l'opérateur Laplacien. Il y a plusieurs travaux récents sur ce sujet tel que [31], [15], [33] [12], [37], [23], [13], [39]... Dans notre travail, nous distinguons deux types d'opérateurs Laplaciens le premier défini sur l'espace des fonctions sur les sommets et le deuxième défini sur l'espace des fonctions sur les arêtes. Donc, c'est une question naturelle de voir le lien entre leur spectres respectifs. En utilisant, la propriété de non-parabolicité à l'infini, nous montrons que les spectre de ces deux Laplaciens coïncident en dehors de la valeur 0. De plus, nous étendons les résultats de John Lott [26] qui affirment que la valeur spectrale 0 est dans le spectre de l'un de ces deux Laplaciens.

Cette thèse se décompose en trois chapitres en plus de l'introduction, l'annexe et la

bibliographie :

-le deuxième chapitre rassemble les diverses notations et définitions, qui vont être utilisées dans les chapitres qui suivent. Notamment, nous introduisons l'opérateur de Gauss-Bonnet et l'opérateur de Laplace sur les 1-formes. Nous regroupons les propriétés principales pour étudier la notion de parabolicité sur les graphes. Et nous introduisons un problème d'application sur les réseaux électriques résistifs qui est le problème de Kirchhoff.

-Dans le troisième chapitre, nous donnons une version discrète d'une notion spécifique introduite par Gilles Carron [8] pour les variétés Riemanniennes non-compactes. En fait, nous allons considérer l'opérateur de Gauss-Bonnet *non parabolique à l'infini* qui permet d'avoir une information sur le comportement du graphe à l'infini (pas de cycle à l'infini). De plus, avec cette propriété notre opérateur est semi-Fredholm. D'autre part, comme nous travaillons sur un graphe infini connexe, l'opérateur gradient vérifie toujours cette propriété alors que l'opérateur de divergence qui est son adjoint ne vérifie pas.

-Dans le quatrième chapitre, nous introduisons la notion de spectre. Plus précisément, nous donnons les définitions et les propriétés spectrales reliées aux opérateurs bornés auto-adjoints. Dans le cadre d'un graphe infini pondéré, nous donnons de nouveaux résultats sur la relation entre le spectre du Laplacien Δ_0 défini sur les fonctions et le spectre du Laplacien Δ_1 défini sur les formes, en utilisant la propriété de non-parabolicité à l'infini introduite dans le chapitre précédent. Ces résultats sont inspirés des travaux de Shirai [33] et Strichartz [37]. De plus, nous étendons un résultat de Lott [26] concernant la caractérisation de la valeur spectrale 0, comme réponse à la question : est-ce-que la valeur 0 est dans le spectre de l'opérateur Δ_0 ou dans le spectre de l'opérateur Δ_1 ?

Et nous finissons avec un chapitre annexe qui contient les preuves des principaux résultats utilisés au cours de cette thèse.

Analyse sur les graphes

Ce chapitre présente les diverses notations et définitions utilisées dans cette thèse, en faisant de l'analyse sur les graphes (espace fonctionnels et étude des opérateurs) et en regroupant les propriétés principales pour étudier la notion de parabolicité sur les graphes. De plus, nous introduisons un problème assez important qui est le problème de Kirchhoff.

2.1 Quelques éléments d'analyse sur les graphes

Cette section contient les principales définitions et notations relatives aux graphes qui sont inspirées de références suivantes [7], [9], [17], [1] et [40].

2.1.1 Notion de graphe

Un *graphe* G est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, où $\mathcal{V}$ est un ensemble au plus dénombrable de *sommets* et $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_2(\mathcal{V})$ (l'ensemble des parties à deux éléments de $\mathcal{V}$), l'ensemble des *arêtes*. Si l'ensemble $\mathcal{V}$ est fini, on dit que le graphe G est fini. Si non, G est dit *infini*. Lorsque deux sommets x et y sont reliés par une arête e , on dit qu'ils sont *voisins* ou *adjacents*. On note alors $x \sim y$ et $e = \{x, y\}$. Parfois, on aura des graphes avec des boucles : cela veut dire qu'il y a aussi des arêtes du type $\{x, x\}$ que l'on peut dessiner comme une boucle au sommet x . En chimie les arêtes sont aussi munies de multiplicités qui indique le type de liaison entre atomes. Un graphe G *orienté* consiste à définir une partition de $\mathcal{E} : \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^- = \mathcal{E}$

$$(x, y) \in \mathcal{E}^+ \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{E}^-.$$

Dans ce cas pour $e = (x, y)$, on définit l'origine $e^- = x$, la terminaison $e^+ = y$ et l'arête opposée $-e = (y, x)$. Cette orientation est nécessaire pour définir certains opérateurs telles

que le gradient. Un *chemin* est une suite finie d'arêtes, i.e. une suite finie $\{e_k\}_{k=0,\dots,n}$ tel que si $n \geq 2$ alors $e_i^+ = e_{i+1}^-$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. Le graphe G est dit *connexe* si deux sommets quelconques x et y peuvent être reliés par un chemin avec $e_0^- = x$, $e_n^+ = y$. Un *cycle* est un chemin dont l'extrémité et l'origine sont identiques ($e_n^+ = e_0^-$). Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles. Le *degré* d'un sommet x est le nombre de ses voisins noté par

$$\deg(x) := \#\{e \in \mathcal{E}; e^- = x\}.$$

Si $\deg(x) < \infty$, G est dit *localement fini*. S'il existe une constante positive M tel que $\deg(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{V}$, le graphe G est dit *uniformément localement fini* ou à *valence bornée*. Le graphe G est *k-régulier* si $\deg(x) = k$ pour tout $x \in \mathcal{V}$.

Exemples :

- **le Graphe $\mathbb{Z}$** : $\mathcal{V} = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |x - y| = 1\}$. Plus généralement, le graphe $\mathbb{Z}^d$ appelé *réseau euclidien* qui est d -régulier tel que l'ensemble de sommet $\mathcal{V}$ est l'ensemble de d -uplet $x = (x_1, \dots, x_d)$ et l'ensemble des arêtes $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$.
- **Graphe bipartite** s'il existe deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ qui le recouvrent. Et $\mathcal{E} = \{\{x, y\}; x \in \mathcal{V}_0 \text{ et } y \in \mathcal{V}_1 \text{ ou } x \in \mathcal{V}_1 \text{ et } y \in \mathcal{V}_0\}$.
- **Graphe de Cayley** : Soit $(G, *)$ un groupe. Le graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est appelé graphe de Cayley de groupe G qu'on note (G, S) , si $(G, *)$ est un groupe et S est une partie génératrice symétrique de G , c'est à dire, l'élément neutre de groupe G n'est pas dans S et si $x \in S$ alors $x^{-1} \in S$. Et on a $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $y^{-1} * x \in S$. Par exemple, $(G, *)$ est égale à $(\mathbb{Z}, +)$ et $S = \{-1, 1\}$.

2.1.2 Graphes pondérés

Il existe différentes définitions de graphe pondéré, pour la simple raison que le genre de graphes qu'il faut considérer dépend souvent du problème dont la solution est visée. On introduit une première définition tel que le poids sur les sommets et celui sur les arêtes sont indépendants :

Définition 2.1.1. *Un graphe pondéré (G, c, r) est la donnée d'un graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, un poids sur les sommets $c : \mathcal{V} \rightarrow]0, \infty[$ et un poids sur les arêtes $r : \mathcal{E} \rightarrow]0, \infty[$ tel que $r(-e) = r(e)$.*

Une deuxième définition tel que le poids sur les sommets définis à partir du poids sur les arêtes qu'on peut considérer comme un cas particulier de la définition précédente :

Définition 2.1.2. *Un graphe pondéré normalisé est un couple (G, b) , où $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe et $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive vérifiant :*

- $b(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{V}$.

- $b(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{E}$.
- $b(x, y) = b(y, x), \forall (x, y) \in \mathcal{E}$.

Ainsi, le poids b sur $\mathcal{E}$ fait apparaître un poids sur $\mathcal{V}$ lorsque $\sum_{y \sim x} b(x, y) < \infty$:

$$\beta(x) = \sum_{y \sim x} b(x, y), \quad x \in \mathcal{V}.$$

Un cas particulier, si G est localement fini β est bien défini.

Exemples :

1. La définition 2.1.2 est souvent utilisée pour un *réseau électrique résistif* tel que G est le couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ qui est un graphe fini ou infini connexe. b est appelé la conductance et vérifie

$$\sum_{y \sim x} b(x, y) < \infty.$$

De plus, la conductance est l'inverse de la résistance.

2. Si $b(x, y) = 1, \forall (x, y) \in \mathcal{E}$ alors $\beta(x) = \deg(x), \forall x \in \mathcal{V}$.

On peut aussi citer une autre définition utilisée dans les articles du groupe allemand de Lenz [23], [24], [19] et [21].

Définition 2.1.3. *Un graphe pondéré est un couple $(\mathcal{V}, b)$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble de sommet et $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive vérifiant :*

- $b(x, x) = 0, \forall x \in \mathcal{V}$.
- $b(x, y) = b(y, x), \forall x, y \in \mathcal{V}$.
- $\sum_{y \in \mathcal{V}} b(x, y) < \infty, \forall x \in \mathcal{V}$.

Remarque 2.1.1. • *L'ensemble des arêtes $\mathcal{E}$ est défini à partir de b . En effet, deux sommets $x, y \in \mathcal{V}$ sont connectés par une arête si $b(x, y) > 0$.*

- *Le graphe est localement fini si l'ensemble $\{y \in \mathcal{V}; b(x, y) > 0\}$ est fini pour tout $x \in \mathcal{V}$.*

Exemples :

1. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble dénombrable des sommets et b une fonction positive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tel que $b(x, y) = 1, \forall x, y \in \mathcal{V}$ tel que $x \neq y$. Alors, si $\sum_{y \in \mathcal{V}; y \neq x} 1 < \infty, \forall x \in \mathcal{V}$ (graphe localement fini), on obtient alors $(\mathcal{V}, b)$ est un graphe pondéré.

2. On considère le graphe pondéré $(\mathbb{N}, b)$ tel que

$$b(n, m) = \begin{cases} \frac{\log(n+1)\log(m+1)}{(n+1)^2(m+1)^2} & \text{si } n \neq m, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\sum_{m \in \mathcal{V}} b(n, m) < \infty$, $\forall n \in \mathcal{V}$ mais ce graphe n'est pas localement fini.

2.1.3 Notions de sous-graphes

Définition 2.1.4. *Un sous-graphe de $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un graphe dont les sommets et les arêtes sont respectivement inclus dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}$.*

Définition 2.1.5. (Sous-graphe induit)

On considère une sous partie connexe K de $\mathcal{V}$ qui peut être infinie. On définit

$$\mathcal{E}_K := \{e = (x, y) \in \mathcal{E}; x, y \in K\}.$$

Alors, $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ est un sous-graphe induit de G .

Remarque 2.1.2. *Un sous-graphe induit de G est un sous-graphe mais la réciproque est fausse.*

Exemple

Soit G un graphe fini orienté tel que

$$\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et

$$\mathcal{E} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 6)\}.$$

Alors, G_K tel que $K = \{2, 3, 4, 6\}$ et $\mathcal{E}_K = \{(2, 3), (3, 4), (3, 6)\}$ est un sous graphe induit de G et $G_{K'}$ tel que l'ensemble de sommets $K' = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et l'ensemble des arêtes $\mathcal{E}_{K'} = \{(1, 2), (1, 4), (3, 4), (3, 6)\}$ est un sous-graphe de G mais n'est pas un sous-graphe induit puisque il manque les arêtes $(1, 3)$ et $(2, 3)$.

Nous introduisons d'autres définitions et notations dont nous avons besoin dans le chapitre d'après.

Définition 2.1.6. (Sous-partie de G)

Une sous-partie U de G est un couple $(\mathcal{V}_U, \mathcal{E}_U)$ tel que $\mathcal{V}_U \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{E}_U \subset \mathcal{E}$.

Remarque 2.1.3. *Une sous-partie de G n'est pas en général un sous-graphe de G .*

Exemple

Considérons le même graphe G de l'exemple précédent. Soient $\mathcal{V}_U = \{1, 4, 6\}$ et $\mathcal{E}_U = \{(1, 4), (3, 4)\}$, alors $U = (\mathcal{V}_U, \mathcal{E}_U)$ est une sous-partie de G mais n'est pas un sous-graphe de G puisque l'arête $(3, 4)$ est dans $\mathcal{E}$ mais son extrémité 3 n'est pas dans $\mathcal{V}_U$.

Nous avons aussi les sous-ensembles suivants associés à $G_K \subset G$:

Le bord de sommets G_K :

$$\partial K := \{x \notin K; \exists y \in K, y \sim x\}.$$

Le bord d'arêtes G_K :

$$\delta \mathcal{E}_K := \{e = (x, y) \in \mathcal{E}; x \in K \text{ et } y \notin K\}.$$

De plus, nous introduisons la notion de voisinage d'un sous-graphe fini G_K de G :

Définition 2.1.7. $G_{\tilde{K}}$ est un voisinage de G_K si $G_{\tilde{K}} := (\tilde{K}, \mathcal{E}_{\tilde{K}})$ est un sous-graphe fini de G tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} i) K \subset \tilde{K} \text{ fini}, \\ ii) \mathcal{E}_K \cup \partial \mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_{\tilde{K}}, \\ iii) e = (x, y) \in \mathcal{E}_{\tilde{K}} \Rightarrow x, y \in \tilde{K}. \end{array} \right.$$

Ainsi, notons le plus petit voisinage de G_K par $G_{\tilde{K}_0}$, où $G_{\tilde{K}_0}$ est un sous-graphe fini de G contenant G_K et leur bords.

Remarque 2.1.4. Dans [21], $G_{\tilde{K}_0}$ est dit voisinage combinatoire de G_K .

Désormais, nous considérons le graphe pondéré (G, c, r) de la définition 2.1.1 orienté, connexe et localement fini qui sera noté G .

2.1.4 Espaces fonctionnels

Notons l'ensemble des fonctions réelles sur $\mathcal{V}$ par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{V}) = \{f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

et celui des fonctions à support fini par $\mathcal{C}_0(\mathcal{V})$.

De même, nous avons l'ensemble des fonctions antisymétriques réelles sur $\mathcal{E}$ noté :

$$\mathcal{C}^a(\mathcal{E}) = \{\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(-e) = -\varphi(e)\}$$

et celui des fonctions à support fini noté par $\mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$.

Introduisons les espaces de Hilbert suivants associés au graphe pondéré G .

a)

$$l^2(\mathcal{V}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathcal{V}); \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) f^2(x) < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{V}} = \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) f(x) g(x)$$

dont la norme associée

$$\|f\|_{\mathcal{V}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{V}}}.$$

b)

$$l^2(\mathcal{E}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^a(\mathcal{E}); \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \varphi^2(e) < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) \varphi(e) \psi(e)$$

dont la norme associée

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{E}}}.$$

c) Ainsi, la somme directe de $l^2(\mathcal{V})$ et $l^2(\mathcal{E})$ est donnée par :

$$l^2(G) := l^2(\mathcal{V}) \oplus l^2(\mathcal{E}) = \left\{ (f, \varphi), f \in l^2(\mathcal{V}) \text{ et } \varphi \in l^2(\mathcal{E}) \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle (f, \varphi), (g, \psi) \rangle_G = \langle f, g \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Et avec la norme

$$\|(f, \varphi)\|_G^2 := \|f\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2.$$

2.1.5 Opérateurs et propriétés

Nous donnons dans cette partie les différentes expressions et propriétés des opérateurs mathématiques introduits sur les graphes tel que le gradient et son adjoint l'opérateur de divergence, l'opérateur de type Dirac et son carré le Laplacien.

L'opérateur gradient : c'est l'opérateur

$$d : \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}),$$

donné par

$$d(f)(e) = f(e^+) - f(e^-), \forall e = (e^-, e^+) \in \mathcal{E}.$$

L'opérateur divergence : c'est l'adjoint formel de d , noté δ et vérifie

$$\langle df, \varphi \rangle_{\mathcal{E}} = \langle f, \delta\varphi \rangle_{\mathcal{V}}, \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}). \quad (2.1.1)$$

De plus, nous avons la formule suivante qui caractérise δ inspirée de [4].

Lemme 2.1.1. *L'opérateur divergence δ est donné par la formule :*

$$\delta\varphi(x) = \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}).$$

Preuve

Soient $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$, en utilisant (2.1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle df, \varphi \rangle_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) df(e) \varphi(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) (f(e^+) - f(e^-)) \varphi(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathcal{V}} f(x) \left(\sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e) - \sum_{e, e^-=x} r(e)\varphi(e) \right). \end{aligned}$$

Or, $r(-e) = r(e)$ et φ est antisymétrique entraînent

$$\sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e) = - \sum_{e, e^-=x} r(e)\varphi(e).$$

Ainsi ,

$$\begin{aligned} \langle df, \varphi \rangle_{\mathcal{E}} &= \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) f(x) \left(\frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)\varphi(e) \right) \\ &= \langle f, \delta\varphi \rangle_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

□

Nous introduisons maintenant un résultat très important inspiré de [43].

Lemme 2.1.2. *Soient $x, x_0 \in \mathcal{V}$, alors il existe une constante strictement positive $C = C_{xx_0}$ tel que*

$$|f(x)| \leq C (|f(x_0)| + \|df\|_{\mathcal{E}}), \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}). \quad (2.1.2)$$

Preuve

Soient $x, x_0 \in \mathcal{V}$, comme G est connexe, il existe toujours un chemin d'arêtes γ_{xx_0} reliant x à x_0 , i. e. $\gamma_{xx_0} = \{e_k\}_{k=1, \dots, n}$ avec $e_1^- = x$, $e_n^+ = x_0$ et si $n \geq 2 \forall j ; 1 \leq j \leq (n-1) \Rightarrow e_j^+ = e_{j+1}^-$.

Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f(e_1^+) + f(e_1^+) - f(e_2^+) + \dots + f(e_{n-1}^+) - f(x_0)| \\ &\leq |df(e_1)| + |df(e_2)| + \dots + |df(e_n)| \\ &\leq \sum_{e \in \gamma_{xx_0}} \frac{1}{\sqrt{r(e)}} \sqrt{r(e)} |df(e)|. \end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \left(\sum_{e \in \gamma_{xx_0}} \frac{1}{r(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \gamma_{xx_0}} r(e) (df(e))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq S_{xx_0} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) (df(e))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq S_{xx_0} \|df\|_{\mathcal{E}}, \end{aligned}$$

$$\text{où } S_{xx_0} = \left(\sum_{e \in \gamma_{xx_0}} \frac{1}{r(e)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \\ &\leq S_{xx_0} \|df\|_{\mathcal{E}} + |f(x_0)| \\ &\leq C_{xx_0} (\|df\|_{\mathcal{E}} + |f(x_0)|), \end{aligned}$$

avec $C_{xx_0} = \max(S_{xx_0}, 1)$. □

Avant de donner un autre résultat aussi important. Pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V})$, nous définissons $\bar{f}$ par

$$\bar{f}(e) = \frac{f(e^-) + f(e^+)}{2}, \forall e \in \mathcal{E}.$$

Ainsi, nous avons de [30] la formule de dérivation suivante :

Lemme 2.1.3. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$, alors nous avons*

$$d(fg)(e) = f(e^+)dg(e) + g(e^-)df(e). \quad (2.1.3)$$

$$\delta(\bar{f}\varphi)(x) = f(x)\delta\varphi(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) d(f)(e) \varphi(e). \quad (2.1.4)$$

Preuve

Pour $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V})$ et $e \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} d(fg)(e) &= (fg)(e^+) - (fg)(e^-) \\ &= f(e^+)(g(e^+) - g(e^-)) + g(e^-)(f(e^+) - f(e^-)) \\ &= f(e^+)d(g)(e) + g(e^-)d(f)(e). \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\bar{\mathcal{E}})$ et en appliquant la formule de caractérisation de δ du lemme 2.1.1 à la fonction $\bar{f}\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\bar{\mathcal{E}})$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{f}\varphi)(x) &= \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)(\bar{f}\varphi)(e) \\
&= \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) \left(\frac{f(e^+) + f(e^-)}{2} \right) \varphi(e) \\
&= \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) f(e^+) \varphi(e) \\
&\quad + \frac{1}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) \left(\frac{f(e^-) - f(e^+)}{2} \right) \varphi(e) \\
&= \frac{f(x)}{c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) \varphi(e) + \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) d(f)(-e) \varphi(e) \\
&= f(x) \delta(\varphi)(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e) d(f)(e) \varphi(e).
\end{aligned}$$

□

Opérateur de Gauss-Bonnet : c'est l'endomorphisme

$$D = d + \delta : \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$$

tel que

$$D(f, \varphi) = (\delta\varphi, df), \text{ i.e. } D \cong \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est un opérateur de type Dirac : $D^2 = \Delta$ qui est l'opérateur Laplacien. De plus, nous avons

$$\Delta \cong \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix},$$

où $\Delta_0 = \delta d$ et $\Delta_1 = d\delta$.

Définition 2.1.8. -L'opérateur $\Delta_0 = \delta d$ qui agit sur $\mathcal{C}_0(\mathcal{V})$ est appelé le Laplacien sur les 0-formes.

-L'opérateur $\Delta_1 = d\delta$ qui agit sur $\mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ est appelé le Laplacien sur les 1-formes.

Proposition 2.1.1. Pour tout graphe G connexe et localement fini, les opérateurs d et δ sont fermables et non-symétriques et les opérateurs D et Δ sont symétriques.

Preuve

Commençons par montrer que d est fermable. Supposons qu'il existe une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V})$ convergente vers 0 pour la norme $l^2(\mathcal{V})$ et $(df_n)_n$ converge vers φ pour la norme $l^2(\mathcal{E})$. Montrons que $\varphi = 0$.

Or, la convergence dans $l^2(\mathcal{V})$ donne la convergence ponctuelle, ce qui entraîne que $(f_n(x))_n$ converge vers 0 pour tout $x \in \mathcal{V}$. Ainsi, $df_n(e) = f_n(e^+) - f_n(e^-)$ converge vers 0 et par unicité de la limite nous avons donc $\varphi(e) = 0$.

En utilisant le même raisonnement et le fait que le graphe est localement fini, nous obtenons que l'opérateur δ est aussi fermable. Pour plus de détails, voir [4] et [32].

Pour la symétrie de l'opérateur D , soient $\sigma_1 = (f_1, \varphi_1) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ et $\sigma_2 = (f_2, \varphi_2) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$, par (2.1.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle D\sigma_1, \sigma_2 \rangle_G &= \langle \delta\varphi_1, f_2 \rangle_{\mathcal{V}} + \langle df_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle \varphi_1, df_2 \rangle_{\mathcal{E}} + \langle f_1, \delta\varphi_2 \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle \sigma_1, D\sigma_2 \rangle_G \end{aligned}$$

□

2.2 Graphe parabolique

Cette section établit les rapports qui existent entre la probabilité, la théorie de graphe et la théorie de potentiel. Ces domaines sont intimement liés et permettent d'appréhender un même problème de différentes manières. Plus précisément, cette partie est consacrée à l'étude de la notion de graphe parabolique et à sa caractérisation en théorie de potentiel.

2.2.1 Graphe parabolique

Cette partie est inspiré des articles de M. Yamasaki [42], [43] et [44].

Nous considérons l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ des fonctions f sur $\mathcal{V}$ telles que $d_{ext}f \in l^2(\mathcal{E})$, où d_{ext} est l'extension de l'opérateur d sur $l^2(\mathcal{E})$. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, nous définissons la somme de Dirichlet par

$$\mathcal{D}(f) := \langle d_{ext}f, d_{ext}f \rangle_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e) d_{ext}f(e)^2.$$

Fixons $o \in \mathcal{V}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ nous définissons une norme sur $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ par :

$$\langle f, g \rangle_o = f(o)g(o) + \langle d_{ext}f, d_{ext}g \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Proposition 2.2.1. *1. Les normes $\|\cdot\|_o$ et $\|\cdot\|_{o'}$ sont équivalentes pour tout $o \neq o'$. ET la convergence pour la norme $\|\cdot\|_o$ donne la convergence ponctuelle.*

2. L'espace de Dirichlet $(\mathcal{D}(\mathcal{V}), \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$ est un espace de Hilbert.

Preuve

1. Grace à la connexité de graphe et lemme 2.1.2.

2. Il suffit de prouver que l'espace $(\mathcal{D}(\mathcal{V}), < \cdot, \cdot >_o)$ est complet.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{D}(\mathcal{V}), < \cdot, \cdot >_o)$, alors par l'assertion 1), $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ qui est complet, par suite $f_n(x)$ converge vers une limite notée $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$. Montrons que $d_{ext}f \in l^2(\mathcal{E})$ et que $(f_n)_n$ converge f pour la norme $\| \cdot \|_o$.

Soit $J \subset \mathcal{E}$ fini et comme $(f_n)_n$ une suite de Cauchy ainsi $\|d_{ext}f_n\|_{\mathcal{E}}$ est bornée par M , nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \sum_{e \in J} r(e) d_{ext}f^2(e) &= \sum_{e \in J} r(e) (f(e^+) - f(e^-))^2 \\ &= \sum_{e \in J} r(e) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^+) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e^-) \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{e \in J} r(e) d_{ext}f_n^2(e) \\ &\leq M. \end{aligned}$$

D'où, $d_{ext}f \in l^2(\mathcal{E})$.

Prouvons alors que $(f_n)_n$ converge f pour la norme $\| \cdot \|_o$. En utilisant le lemme de Fatou, nous avons donc

$$\sum_{e \in J} r(e) d_{ext}(f - f_n)^2(e) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{e \in J} r(e) d_{ext}(f_m - f_n)^2(e).$$

D'où le résultat. □

Nous introduisons maintenant une notion importante qui est la capacité d'un ensemble fini dans $\mathcal{V}$ et comme nous sommes dans le discret il suffit de la définir pour un point.

Définition 2.2.1. La capacité de $x \in \mathcal{V}$, notée $\text{cap}(x)$, est définie par

$$\text{cap}(x) = \inf \{ \|df\|_{\mathcal{E}} ; f \in C_0(\mathcal{V}) \text{ et } f(x) = 1 \}.$$

Définition 2.2.2. Le graphe G est dit parabolique s'il existe $x \in \mathcal{V}$ tel que $\text{cap}(x) = 0$. Si non G est dit non-parabolique.

Nous avons avec cette définition la caractérisation suivante de la parabolicité.

Proposition 2.2.2. G est parabolique si et seulement si $1 \in \overline{C_0(\mathcal{V})}^{\| \cdot \|_o}$.

Preuve

Commençons par prouver la première implication, c'est à dire, s'il existe $x \in \mathcal{V}$ tel que $\text{cap}(x) = 0$, existe-il une suite $(f_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ qui converge vers 1 pour la norme $\| \cdot \|_o$? Comme $\text{cap}(x) = 0$, alors il existe une suite $(f_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ telle que $f_n(x) = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|df_n\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_n(o)\|_o = \lim_{n \rightarrow \infty} \|df_n\|_{\mathcal{E}} = 0$. Et 1. de la proposition 2.2.1 entraîne que $f_n(x)$ converge ponctuellement vers $f_n(o)$. D'autre part, $f_n(x) = 1$, donc $f_n(o) = 1$ ce qui permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 1\|_o = 0$. D'où le résultat.

Pour la deuxième implication, trouver une suite $(g_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ telle que $g_n(x) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|dg_n\|_{\mathcal{E}} = 0$.

Par hypothèse, nous avons $1 \in \overline{C_0(\mathcal{V})}^{\|\cdot\|_o}$, alors il existe une suite $(f_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 1\|_o = 0$.

Posons

$$g_n = \begin{cases} 1 & \text{en } x, \\ f_n & \text{sur } G - \{x\}, \end{cases}$$

Ainsi, $(g_n)_n$ est une suite de $C_0(\mathcal{V})$, $g_n(x) = 1$ et il nous reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|dg_n\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\|dg_n\|_{\mathcal{E}} \leq \|d(g_n - f_n)\|_{\mathcal{E}} + \|df_n\|_{\mathcal{E}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - 1\|_o = 0$, ce qui entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|df_n\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

De plus, en utilisant le fait que la convergence de $(f_n)_n$ vers 1 pour la $\|\cdot\|_o$ donne la convergence ponctuelle, i. e, $f_n(x)$ converge vers 1. Nous obtenons donc,

$$d(g_n - f_n)(x, y) = (g_n - f_n)(y) - (g_n - f_n)(x) = (f_n - f_n)(y) - (1 - f_n(x)) \rightarrow 0$$

et

$$d(g_n - f_n)(y, z) = (g_n - f_n)(z) - (g_n - f_n)(y) = 0 \text{ si } y \text{ et } z \in G - \{x\}.$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|d(g_n - f_n)\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Ainsi, nous avons trouvé une suite $(g_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ telle que $g_n(x) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|dg_n\|_{\mathcal{E}} = 0$. D'où

$$\inf\{\|df\|_{\mathcal{E}}; f \in C_0(\mathcal{V}) \text{ et } f(x) = 1\} = 0$$

et cela implique que $\text{cap}(x) = 0$. □

Exemple

Le graphe $\mathbb{Z}$ est parabolique. En effet, il suffit de construire une suite de fonction à support fini sur $\mathbb{Z}$ telle qu'elle converge ponctuellement vers 1 et sa différentielle tends vers 0. Soit f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leq n, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Proposition 2.2.3. $\text{cap}(x) > 0$, pour tout $x \in \mathcal{V}$, est équivalent à l'existence de $\varphi_x \in l^2(\mathcal{E})$ tel que $\delta\varphi_x = C\chi_x$, $C > 0$.

Preuve

Soit $x \in \mathcal{V}$ tel que $\text{cap}(x) > 0$, alors il existe une unique fonction f_x^* de $C_0(\mathcal{V})$, $f_x^*(x) = 1$ et $\|df_x^*\|_{l^2(\mathcal{E})} = \text{cap}(x) := C$. De plus, pour tout $g \in C_0(\mathcal{V})$ tel que $g(x) = 0$, nous avons $\langle df_x^*, dg \rangle_{\mathcal{E}} = 0$. Posons

$$\varphi_x := df_x^*,$$

ainsi $\varphi_x \in l^2(\mathcal{E})$.

Considérons la fonction

$$g := f - f(x)f_x^*, \forall f \in C_0(\mathcal{V}).$$

Alors, g est dans $C_0(\mathcal{V})$ et $g(x) = 0$ ainsi

$$\langle \varphi_x, dg \rangle_{\mathcal{E}} = 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x, df \rangle_{\mathcal{E}} &= f(x) \langle \varphi_x, df_x^* \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= f(x) \langle df_x^*, df_x^* \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= f(x) \text{cap}(x) \\ &= f(x)C, \end{aligned}$$

or

$$\langle \varphi_x, df \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \delta\varphi_x, f \rangle_{\mathcal{V}}, \forall f \in C_0(\mathcal{V})$$

ainsi

$$\langle \delta\varphi_x, f \rangle_{\mathcal{V}} = f(x)C = \langle C\chi_x, f \rangle_{\mathcal{V}}, \forall f \in C_0(\mathcal{V}).$$

D'où le résultat.

Inversement, soit $f \in C_0(\mathcal{V})$ telle que $f(x) = 1$. Par hypothèse, il existe $\varphi_x \in l^2(\mathcal{E})$ tel que

$$\langle \delta\varphi_x, f \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \chi_x, f \rangle_{\mathcal{V}} = f(x).$$

Or,

$$\langle \delta\varphi, f \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \varphi, df \rangle_{\mathcal{E}},$$

ainsi nous obtenons

$$|f(x)| \leq |\langle \varphi, df \rangle_{\mathcal{E}}| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{E}} \|df\|_{\mathcal{E}}.$$

Par suite

$$\frac{1}{\|\varphi\|_{\mathcal{E}}} \leq \|df\|_{\mathcal{E}}.$$

D'où

$$0 < \frac{1}{\|\varphi\|_{\mathcal{E}}} \leq \text{cap}(x).$$

□

Exemple

Le graphe $\mathbb{Z}^2$ est parabolique. En effet, par [28], il existe une partition d'arêtes de $\mathbb{Z}^2$ comme suite : soit $[A^n, A^{n+1}]$ l'ensemble de $8n + 4$ arêtes d'extrémité l'une de carré A^n de longueur $2n$ et l'autre de carré A^{n+1} de longueur $2(n + 1)$. Par exemple, dans la figure suivante "le réseau $\mathbb{Z}^2$ ", nous avons A^0 est le point $o = (0, 0)$ qui est en noir et A^1 est le carré en rouge. Ainsi, l'ensemble $[A^0, A^1]$ contient les quatre arêtes d'extrémité le point noir qui est relié aux points rouges. $[A^1, A^2]$ contient les douze arêtes d'extrémité les points rouges qui sont reliés aux points verts. Et $[A^2, A^3]$ contient les vingt arêtes d'extrémité les points verts qui sont reliés aux points bleus et etc.

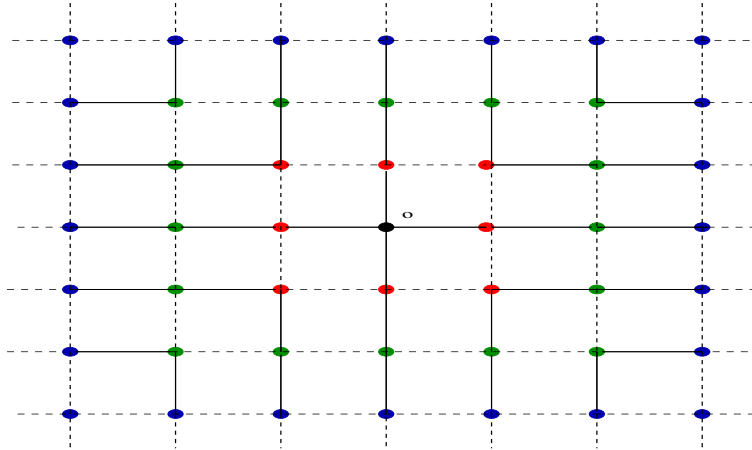


FIGURE 2.1 – Le graphe $\mathbb{Z}^2$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ tel que $\delta\varphi(o) = 1$ et $\delta\varphi(x) = 0$ tel que $x \neq o$. Alors,

$$\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e) = 1,$$

en effet, en raisonnant par récurrence, nous avons pour $n=0$

$$\sum_{e \in [A^0, A^1]} \varphi(e) = \sum_{e^+ \in A^1, e^+ \sim o} \varphi(e) = \delta\varphi(o) = 1.$$

Supposons que pour $n > 1$

$$\sum_{e \in [A^{n-1}, A^n]} \varphi(e) = 1$$

et montrons que

$$\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e) = 1.$$

Le fait que $\delta\varphi(x) = 0$ pour $x \neq o$ et φ est une fonction antisymétrique, entraînent

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\varphi(x) \\ &= \sum_{e, e^- = x \in A^n} \varphi(e) \\ &= \sum_{e^+ \in A^{n-1}, e^- = x \in A^n} \varphi(e) + \sum_{e^+ \in A^{n+1}, e^- = x \in A^n} \varphi(e) \\ &= \sum_{-e \in [A^{n-1}, A^n]} \varphi(-e) + \sum_{e^- \in A^n, e^+ = x \in A^{n+1}} \varphi(e) \\ &= - \sum_{e \in [A^{n-1}, A^n]} \varphi(e) + \sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e). \end{aligned}$$

Par suite, par l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$1 = \sum_{e \in [A^{n-1}, A^n]} \varphi(e) = \sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e),$$

D'où le résultat.

De plus, nous avons $\sum_e \varphi^2(e) = \infty$. En effet, par Cauchy-Schwarz, nous obtenons donc pour tout n

$$\left(\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e) \right)^2 \leq \sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} r(e) \varphi^2(e) \sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \frac{1}{r(e)}.$$

D'où,

$$\left(\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \frac{1}{r(e)} \right)^{-1} \underbrace{\left(\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \varphi(e) \right)^2}_{=1} \leq \sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} r(e) \varphi^2(e).$$

Or, pour $r(e) = 1$, nous obtenons

$$\left(\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} \frac{1}{r(e)} \right)^{-1} = \left(\sum_{e \in [A^n, A^{n+1}]} 1 \right)^{-1} = \frac{1}{8n+4},$$

tel que $\sum_n \frac{1}{8n+4}$ est une série divergente. Par suite, $\varphi \notin l^2(\mathcal{E})$ et par la proposition 2.2.3 le graphe $\mathbb{Z}^2$ est parabolique.

2.2.2 Graphe récurrent

Chaîne de Markov associée à un graphe pondéré :

Définition 2.2.3. Une chaîne de Markov est un couple (X, P) , où X est un ensemble fini ou dénombrable et $P = (p(x, y))_{x, y \in X}$ une matrice de transition, c'est à dire, pour tout $x \in X$, nous avons $\sum_{y \in X} p(x, y) = 1$. La quantité $p(x, y)$ représente la probabilité de passer d'un point x au point y en une itération.

Soit (G, b) un graphe pondéré. Nous associons alors à G la chaîne de Markov (X, P) où $X = \mathcal{V}$. Et nous pouvons associer à la chaîne de Markov une suite de variable aléatoires $(Z_n)_n$ sur X donnant la position aléatoire à chaque itération, Z_0 étant la position initiale. Nous définissons la quantité

$$p^n(x, y) = \mathbb{P}(Z_n = y, Z_0 = x) = \mathbb{P}_x(Z_n = y),$$

qui représente la probabilité de passer d'un point x à y en n itérations. La chaîne de Markov est irréductible si pour tout $x, y \in X$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n(x, y) > 0$ et comme G est connexe cette propriété est bien vérifiée. Le graphe G est dit *récurrent* si la chaîne de Markov associée est récurrente. Si non, G est dit *transient*. Voir aussi [11], [16], [41] et [1].

Définition 2.2.4. Une chaîne de Markov partant d'un point $x \in \mathcal{V}$ est dite *récurrente* si

$$\mathbb{P}(Z_n = x \text{ pour une infinité de valeurs de } n, Z_0 = x) = 1,$$

autrement dit, le sommet de départ x est visité une infinité de fois. Sinon, la chaîne de Markov est dite *transiente*.

Proposition 2.2.4. La chaîne de Markov (X, P) récurrente si et seulement si

$$\sum_n p^n(x, x) = \infty, \forall x \in X.$$

D'après [28], [44] et [34], nous avons le résultat suivant :

Théorème 1. G est récurrent ssi il est parabolique.

Critère de la norme de Dirichlet

Ce critère permet d'établir une condition suffisante et nécessaire pour avoir un graphe récurrent, c'est une version potentialiste basée sur la théorie d'espace de Dirichlet. Nous considérons le graphe pondéré (G, b) (définition 2) et p une fonction de transition sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ telle que elle est symétrique par rapport à β . i.e. $\beta(x)p(x, y) = \beta(y)p(y, x)$ et on note $Pf(x) = \sum_y p(x, y)f(y)$, $\forall f \in C(\mathcal{V})$.

Notons la forme de Dirichlet $a(f, f) := \|df\|_{\mathcal{E}}^2$, $\forall f \in C_0(\mathcal{V})$. De plus, par un calcul simple nous obtenons

$$a(f, f) = \langle (1 - P)f, f \rangle + \sum_{x, y} \frac{p(x, y)}{\beta(y)} (f(x) - f(y))^2 \beta(x) \beta(y) \quad (*)$$

Par suite, nous avons le résultat suivant inspiré d'Ancona [2] avec quelque modification dans la preuve :

Théorème 2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (X, P) est transient.
2. Il existe $x \in X$ et $C > 0$, tel que $f^2(x) \leq C \|df\|_{\mathcal{E}}^2$, $\forall f \in C_0(\mathcal{V})$.
3. Il existe $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\sum_{x \in X} \mu(x) \alpha(x) f^2(x) \leq C \|df\|_{\mathcal{E}}^2, \quad \forall f \in C_0(\mathcal{V}).$$

Preuve

Commençons par montrer $1) \Rightarrow 3)$. Comme (X, P) est transient, d'après la proposition 1.1 de [2], il existe une fonction P-excessive s i.e. $0 < s < \infty$ tel que $Ps < s$ (c'est équivalent à l'existence d'une fonction positive non-constante surharmonique voir Dodziuk [11]).

Posons $p_s(x, y) = s(x)^{-1}p(x, y)s(y)$ et $\mu_s(x) = s^2(x)\mu(x)$. Ainsi, p_s est bien symétrique par rapport à μ_s , en effet

$$\begin{aligned} \mu_s(x)p_s(x, y) &= s^2(x)\mu(x)s(x)^{-1}p(x, y)s(y) \\ &= s(x)\mu(x)p(x, y)s(y) \\ &= s(x)\mu(y)p(y, x)s(y) \\ &= s(x)\mu(y)p(y, x)s(y)^{-1}s^2(y) \\ &= \mu_s(y)p_s(y, x). \end{aligned}$$

De plus, $P_s 1 < 1$. La forme de Dirichlet associée à (P_s, μ_s) est donnée par $a_s(f, f) = a(sf, sf)$ et en utilisant (*), elle vérifie

$$a(sf, sf) \geq (1 - P_s 1)sf, sf = \sum_{x \in X} \mu(x) \alpha(x) f^2(x),$$

où $\alpha = s - P_s s$.

Pour prouver que $1) \Rightarrow 2)$ c'est équivalent à prouver non $2) \Rightarrow$ non $1)$. Comme l'assertion 2) est non vérifiée, alors il existe une suite $(f_n)_n$ de $C_0(\mathcal{V})$ telle que $f_n(x) = 1$ et $\|df_n\|_{\mathcal{E}}$ converge vers 0, par suite d'après la proposition 2.2.2 et le théorème 1, nous avons (X, P) est récurrent.

Pour montrer $3) \Rightarrow 2)$, il suffit de prendre $\alpha = 1$.

□

2.3 Introduction au problème de Kirchhoff

Cette section est consacrée à présenter les différentes méthodes utilisées pour résoudre *le problème de Kirchhoff* d'une manière plus simple, claire et avec quelques modifications dans les preuves. Ces résultats sont inspirés de travaux de [14], [38], [45], [35], [27] et [4].

Considérons le graphe pondéré (G, r) qui est *un réseau électrique résistif*, donné dans l'exemple 1 de la section 2.1.2.

Nous commençons par introduire des définitions et notations dont nous avons besoin dans cette partie avec un langage électrique.

- **La loi des Nœuds** : soit I une fonction antisymétrique sur l'espace des fonctions sur les arêtes qui est le courant. On dit que I vérifie *la loi des nœuds* si la somme des courants entrants en un point quelconque x de $\mathcal{V}$ est égale à la somme des courants sortants en ce point, c'est à dire

$$\delta I(x) = \sum_{e; e^- = x} I(e) = 0. \quad (2.3.5)$$

Définition 2.3.1. Soit L un cycle fini de G , la fonction indicatrice $\mathbf{1}_L$ de $C_0(\mathcal{E})$ est appelée *la fonction cycle* de L , où

$$\mathbf{1}_L(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. La fonction cycle vérifie la loi des nœuds.

- **Un flux** : soit e une arête de $\mathcal{E}$, un courant I est un flux de e^- vers e^+ si

$$\delta I = \delta \chi_e \quad (2.3.6)$$

où $\chi_e = \mathbf{1}_{\{e\}} - \mathbf{1}_{\{-e\}}$. Et notons $\mathcal{F}_e$ l'ensemble de flux de e^- vers e^+ .

Remarque 2.3.2. Soient I un flux de e^- vers e^+ , L un cycle fini de G et $\mathbf{1}_L$ sa fonction cycle associée. Alors, nous avons

$$\delta(I + \mathbf{1}_L) = \delta I = \delta \chi_e.$$

Ainsi, $I + \mathbf{1}_L$ est un élément de $\mathcal{F}_e$, c'est à dire que, la perturbation d'un élément de $\mathcal{F}_e$ par une fonction cycle est aussi un élément de $\mathcal{F}_e$.

- **La loi des mailles** est vérifiée si pour tout courant I de $C(\mathcal{E})$, nous avons

$$\sum_{e \in L} r(e)I(e) = \sum_{e \in \mathcal{E}} r(e)I(e)\mathbf{1}_L(e) = 0, \quad \forall L \text{ cycle fini de } G. \quad (2.3.7)$$

De plus, si $I \in C(\mathcal{E})$ vérifie la loi des nœuds et la loi des mailles, alors I est dit un **flux de courant**.

- **Énergie** : le flux de courant I est d'énergie finie si I est un élément de $l^2(\mathcal{E})$. Notons $E(I)$ l'énergie de I qui est égale à $\|I\|_{\mathcal{E}}^2$.

2.3.1 Problème de Kirchhoff sur un réseau électrique résistif fini

Dans cette partie nous donnons les différentes méthodes utilisées pour résoudre le problème de Kirchhoff pour un réseau électrique résistif fini.

Commençons par résoudre le problème de Kirchhoff homogène.

Lemme 2.3.1. *Considérons le problème de Kirchhoff homogène $\mathcal{K}_h$ suivant :*

$$(\mathcal{K}_h) : \begin{cases} \delta I = 0, \\ \sum_{e \in L} r(e)I(e) = 0, \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution $I = 0$.

Preuve

Comme $\sum_{e \in L} r(e)I(e) = 0, \forall L \text{ cycle de } G$, alors il existe une fonction $F \in C(\mathcal{V})$ telle que $I = dF$. De plus, $\delta I = 0$, ce qui implique que $\delta dF = 0$. Or, le graphe G est fini, ceci entraîne que la fonction F est constante. Ainsi, $I = dF = 0$. $\square$

Proposition 2.3.1. *Considérons le problème de Kirchhoff $\mathcal{K}$ suivant :*

$$(\mathcal{K}) : \begin{cases} \delta I = \delta \chi_e, \\ \sum_{e \in L} r(e)I(e) = 0, \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

Ce problème admet une unique solution I qui réalise le minimum d'énergie sur $\mathcal{F}_e$.

Preuve

Dans la preuve il suffit de considérer la résistance $r = 1$.

Par hypothèse, $\sum_{e \in L} r(e)I(e) = 0, \forall L \text{ cycle de } G$, alors I est un différentiel, c'est à dire qu'il existe une fonction F tel que $I = dF$.

Maintenant montrons l'unicité du flux I . Soient I_1 et I_2 deux solutions distinctes de $(\mathcal{K})$. Posons

$$J = I_1 - I_2.$$

Alors, $J \neq 0$ et vérifie le problème de Kirchhoff homogène $(\mathcal{K}_h)$. Supposons que $J > 0$, donc J est aussi positif le long d'un cycle ce qui implique que $\sum_{e \in L} J(e) \neq 0$ ce qui est absurde. D'où $J = 0$ et par suite $I_1 = I_2$.

L'énergie de I réalise le minimum d'énergie sur $\mathcal{F}_e$, en effet :
par un argument standard (voir l'annexe Problème de minimisation), il existe un unique $I \in \mathcal{F}_e$ qui réalise le minimum d'énergie, c'est à dire que

$$\mathbf{E}(I) = \inf \{ \mathbf{E}(\varphi), \varphi \in \mathcal{F}_e \}.$$

Montrons que ce I est un flux de courant cela revient à prouver que I vérifie la loi des mailles. En raisonnant par l'absurde et supposant qu'il existe un cycle $\tilde{L}$ tel que $\sum_{e \in \tilde{L}} I(e) \neq 0$, par exemple $\sum_{e \in \tilde{L}} I(e) < 0$. Or, l'existence d'un tel cycle donne l'existence de sa fonction cycle $\mathbf{1}_{\tilde{L}}$. Et par la remarque 2.3.2, $I + \lambda \mathbf{1}_{\tilde{L}}$ est donc un flux pour tout $\lambda > 0$.

Cherchons une condition sur λ tel que

$$\mathbf{E}(I + \lambda \mathbf{1}_{\tilde{L}}) < \mathbf{E}(I).$$

Par suite $I + \lambda \mathbf{1}_{\tilde{L}}$ réalise le minimum d'énergie ce qui est absurde.

Nous avons

$$\mathbf{E}(I + \lambda \mathbf{1}_{\tilde{L}}) < \mathbf{E}(I).$$

En utilisant la définition de l'énergie, nous obtenons

$$\lambda < I, \mathbf{1}_{\tilde{L}} >_{\varepsilon} + \lambda^2 \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\tilde{L}}) < 0.$$

Ce qui implique que

$$\underbrace{\lambda \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\tilde{L}})}_{>0} < \underbrace{- < I, \mathbf{1}_{\tilde{L}} >_{\varepsilon}}_{>0}.$$

Ainsi, il faut choisir $0 < \lambda < \frac{-< I, \mathbf{1}_{\tilde{L}} >_{\varepsilon}}{\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\tilde{L}})}$.

□

Nous finissons cette partie par résoudre le problème de Kirchhoff non-homogène.

Théorème 3. *Considérons le problème de Kirchhoff non-homogène $\mathcal{K}_s$ suivant :*

$$(\mathcal{K}_s) : \begin{cases} \delta I = \delta \chi_e, \\ \sum_{e \in L} r(e) I(e) = \sum_{e \in L} F(e), \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

avec F source finie de voltage. Alors, ce problème admet une unique solution.

Preuve

Le problème $\mathcal{K}_s$ est équivalent à

$$\begin{cases} \delta I = \delta \chi_e, \\ \sum_{e \in L} r(e) I(e) = \sum_{e \in L} r(e) \frac{1}{r(e)} F(e), \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \delta I = \delta \chi_e, \\ \sum_{e \in L} r(e) (I(e) - \chi_e) = \sum_{e \in L} r(e) \left(\frac{1}{r(e)} F(e) - \chi_e \right), \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

Posons $\tilde{I} = I - \chi_e$ et $E = \frac{1}{r(e)} F(e) - \chi_e$, donc

$$\begin{cases} \delta \tilde{I} = 0, \\ \sum_{e \in L} r(e) \tilde{I}(e) = \sum_{e \in L} r(e) E(e), \quad \forall L \text{ cycle} . \end{cases}$$

Par suite, par la deuxième équation, nous obtenons que $E - \tilde{I}$ est un élément de $(\ker \delta)^\perp$. D'où, la solution $\tilde{I}$ est la projection orthogonale de E sur $\ker \delta$.

□

2.3.2 Problème de Kirchhoff sur un réseau électrique résistif infini

Maintenant nous nous intéressons à l'étude de problème de Kirchhoff pour un réseau électrique résistif infini. Le passage de fini au infini est plus compliqué et difficile qui demande plus de conditions et de travail. De plus, l'étude de ce problème à l'infini n'a pas en réalité une signification physique c'est plutôt un problème abstrait et purement mathématique.

Commençons par présenter une historique des principaux résultats qui existent dans la littérature.

En 1971, le mathématicien américain *Harley Flanders* a publié un résultat très important [14] concernant l'unicité du flux de courant pour un réseau électrique résistif. Le problème est le suivant : soit i une source finie de courant, i.e. un élément de $C_0(\mathcal{V})$ et E une source finie de voltage, i.e. un élément de $C_0(\mathcal{E})$, existe-il un flux de courant d'énergie finie et est-il unique ? i.e. Trouver la solution I du problème de Kirchhoff $\mathcal{K}_s$

$$(\mathcal{K}_s) : \begin{cases} \delta I + i = 0, \\ \sum_{e \in L} r(e) I(e) = \sum_{e \in L} r(e) E(e), \quad \forall L \text{ cycle fini} . \end{cases}$$

Ainsi, il a prouvé que ce problème admet une unique solution I d'énergie finie sous la condition suivante

$$\langle i, 1 \rangle_V = 0.$$

De plus, I est une limite des flux des courants qui circulent dans les sous-graphes finies du graphe G , si on regarde G comme réunion croissante de parties finies.

Remarque 2.3.3. Dans notre cas $i = \delta\chi_e$ vérifie la condition de Flanders, nous avons

$$\langle i, 1 \rangle_V = \langle \delta\chi_e, 1 \rangle_V = \langle \chi_e, d1 \rangle_{\mathcal{E}} = 0.$$

Dix ans plus tard, Zemanian [45] a réécrit le résultat de Flanders avec un langage analytique qui est plutôt analyse fonctionnelle.

Théorème de Zemanian : soient G un graphe localement fini et pondéré et V une source finie de voltage. Alors, il existe un unique courant I dans $l^2(\mathcal{E})$ vérifiant les lois de Kirchhoff.

Preuve

Soient $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ l'espace engendré par les fonctions $\mathbf{1}_L$ pour tout L cycle fini et $\mathcal{L}$ sa fermeture pour la norme $l^2(\mathcal{E})$ qui est un espace fermé de $l^2(\mathcal{E})$ donc complet.

Considérons le fonctionnel suivant, pour $V \in C_0(\mathcal{E})$

$$\begin{aligned} V : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (V, \varphi) = \sum_e V(e)\varphi(e) \end{aligned}$$

qui est linéaire et continu. Alors, d'après la représentation de Riesz, il existe unique $I \in \mathcal{L}$ tel que

$$V(\varphi) = \langle I, \varphi \rangle_{\mathcal{E}} = \sum_e r(e)I(e)\varphi(e) = (rI, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}.$$

Ainsi,

$$(V, \varphi) = (rI, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}.$$

□

Remarque 2.3.4. Le résultat de Flanders est seulement pour les cycles finis, donc c'est une question naturelle de penser au "cycle infini". Colette Anné et Nabila Torki-Hamza [4] ont répondu à cette question.

Définition 2.3.2. l^2 -cycle- L est un cycle infini L tel que sa fonction cycle $\mathbf{1}_L$ est un élément de $l^2(\mathcal{E})$. De plus, $\delta\mathbf{1}_L = 0$.

De plus, elles ont donné une extension de problème de Flanders en remplaçant le cycle fini par l^2 -cycle- L . D'autre part, leurs idée est reliée à la décomposition de Hodge. En fait, la solution cherchée I peut être écrite sous la forme suivante $I = E_0 + I_0$ telle que E_0 est un élément de $\ker \delta$ et I_0 est un élément de $(\ker \delta)^\perp$.

Remarque 2.3.5. La solution cherchée I de problème $\mathcal{K}_s$ est reliée à la deuxième équation de ce problème, plus précisément au cycle fini ou infini (les sous-espaces de $\ker \delta$). Ainsi, nous allons avoir deux types de solutions donc le problème de Kirchhoff se transforme en un problème d'unicité est cela c'est l'intérêt de Russell Lyons et Yuval Peres [27] qui ont donné la réponse à ce problème lorsque il n'y a pas de source finie de voltage E .

Maintenant nous allons présenter le travail de R. Lyons et Y. Peres avec quelques modifications dans les notations et les preuves.

Considérons la fonction χ_e pour $e \in \mathcal{E}$

$$\chi_e = \mathbf{1}_{\{e\}} - \mathbf{1}_{\{-e\}}.$$

χ_e est un élément de $l^2(\mathcal{E})$ et vérifie

$$\langle \chi_e, \varphi \rangle_r = r(e)\varphi(e).$$

Par suite, la Loi des Nœuds est donnée par

$$0 = \delta\varphi(x) = \langle \delta\varphi, \mathbf{1}_x \rangle = \langle \varphi, \underbrace{d\mathbf{1}_x}_{\in \text{Im } d} \rangle = \langle \varphi, \sum_{e^- = x} \chi_e \rangle_r = \sum_{e^- = x} r(e)\varphi(e),$$

ainsi, $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp$.

De plus, pour tout cycle finie L , la Loi des mailles est donnée par

$$\langle \underbrace{\sum_{e \in L} \chi_e}_{\in \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subset \ker \delta}, \varphi \rangle_r = \sum_{e \in L} r(e)\varphi(e) = 0,$$

d'où $\varphi \in (\mathcal{L}_{\mathcal{F}})^\perp$.

Si le graphe G est **fini**, alors nous avons

$$l^2(\mathcal{E}) = \ker \delta \oplus \text{Im } d,$$

en effet : pour $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp \cap (\ker \delta)^\perp$, d'une part $\varphi \in (\text{Im } d)^\perp$ alors $\delta\varphi = 0$. D'autre part $\varphi \in (\ker \delta)^\perp$ ce qui entraîne l'existence d'une fonction F telle que $\varphi = dF$. Par suite $0 = \delta\varphi = \delta dF = \Delta_0 F$. Or, le graphe G est fini, donc la fonction F doit être constante ainsi $\varphi = dF = 0$.

Mais, pour le cas **infini** cette décomposition n'est pas vraie.

Ainsi, nous avons

$$l^2(\mathcal{E}) = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} \oplus (\mathcal{L}_{\mathcal{F}})^\perp.$$

De plus, la décomposition de Hodge donne

$$l^2(\mathcal{E}) = \ker \delta \oplus \overline{\text{Im } d}.$$

Posons

- I_f la projection orthogonale de χ_e sur $(\mathcal{L}_{\mathcal{F}})^\perp$ (Free current).
- I_w la projection orthogonale de χ_e sur $\overline{\text{Im } d}$ (Wired current).

Et montrons que

$$I_f = I_w.$$

Proposition 2.3.2. *Soit G un graphe infini tel que $G = \uplus_n G_n$ où G_n est fini. Soient $e \in G_1$ et I_n est le flux du courant de e^- vers e^+ dans G_n . Alors $\|I_n - I_f\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et nous avons $\mathbf{E}(I_f) = r(e)I_f(e)$.*

Preuve

Soit H_n l'espace engendré par les fonctions cycles de G_n , par suite pour $\chi_e \in l^2(\mathcal{E}_n)$, nous avons

$$I_n = \chi_e - Pr_{H_n} \chi_e.$$

Posons

$$Pr_H = Pr_{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}} \chi_e.$$

Donc

$$I_f = \chi_e - Pr_H \chi_e.$$

$(H_n)_n$ est une suite croissante et $P_n := Pr_{H_n}$ est une suite d'opérateur monotone. Alors, Pr_{H_n} converge vers $Pr_H = Pr_{\overline{\cup_n H_n}}$. Et cela permet de conclure que I_n converge vers I_f . De plus, nous avons

$$I_f(e)r(e) = \langle I_f, \chi_e \rangle_{\mathcal{E}} = \langle I_f, Pr_{(\mathcal{L}_{\mathcal{F}})^\perp} \chi_e \rangle_{\mathcal{E}} = \langle I_f, I_f \rangle_{\mathcal{E}}.$$

□

Proposition 2.3.3. *Soit G graphe infini tel que $G = \uplus_n G_n$ où G_n est fini. Soit G_n^W le graphe court-circuit obtenu par identifier le bord de G_n à un seul sommet. Soient $e \in G_1$ et I_n le flux du courant de e^- vers e^+ dans G_n^W . Alors $\|I_n - I_w\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et on a $\mathbf{E}(I_w) = r(e)I_w(e)$. De plus, I_w réalise le minimum d'énergie sur les flux de e^- vers e^+ .*

Preuve

Un graphe court-circuit G_n^W est un graphe obtenu par identification des points qui ne sont pas dans G_n par un nouveau point z_n . Ainsi, il existe un morphisme de graphe φ de (G_n, r) vers (G_n^W, r') tel que

$$\varphi(V_n) = V_n \cup \{z_n\}; \quad z_n \notin V_n$$

$$\varphi(E_n) = E_n \cup \{(x, z_n), x \in V_n\}$$

$\varphi(r(x, y)) = r'(x', y')$ et on suppose que

$$\frac{1}{r'(e')} = \sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} \frac{1}{r(e)}.$$

Par définition I_w est la projection orthogonale χ_e sur $\overline{\text{Im } d}$ et un flux de e^- vers e^+ d'énergie finie. Soit J_n la restriction de I_w sur G_n^W (c'est un flux de e^- vers e^+) tel que

$$J_n(e') = \sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} I_w(e).$$

Alors

$$\|J_n\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \|I_w\|_{\mathcal{E}}^2,$$

en effet, en utilisant Cauchy-Schwarz et la définition de résistance r' , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|J_n\|_{\mathcal{E}}^2 &= \sum_{e'} r'(e') J_n^2(e') \\ &= \sum_{e'} r'(e') \left(\sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} I_w(e) \right)^2 \\ &\leq \sum_{e'} r'(e') \sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} \frac{1}{r(e)} \sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} r(e) I_w^2(e) \\ &= \sum_{e'} \sum_{\{e, \varphi(e)=e'\}} r(e) I_w^2(e) \\ &= \|I_w\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, par hypothèse I_n est un flux de courant e^- vers e^+ dans G_n^W . Ce qui entraîne que

$$\delta I_n = \delta \chi_e = \delta J_n$$

Par le principe de Thomssen [35], nous avons

$$\|I_n\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \|J_n\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \|I_w\|_{\mathcal{E}}^2 < \infty$$

Par suite, I_n est bornée et admet une sous-suite qui converge faiblement vers une limite notée I qui est aussi bornée puisque $\|I\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \liminf \|I_{n,k}\|_{\mathcal{E}}^2 < \infty$. De plus,

$$\left| \|I_{n,k}\|_{\mathcal{E}} - \|I\|_{\mathcal{E}} \right| \leq \|I_{n,k} - I\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0,$$

par suite $I_{n,k}$ converge fortement vers I . Or, comme $\|I\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \|I_w\|_{\mathcal{E}}^2$ et I_w réalise le minimum d'énergie alors $I = I_w$. $\square$

Finalement, nous arrivons au résultat principal de R. Lyons et Y. Peres.

Théorème 4. $I_f = I_w$ si et seulement si $(\mathcal{L}_{\mathcal{F}})^\perp = \overline{\text{Im } d}$.

Non-parabolicité à l'infini

Dans ce chapitre, nous donnons une version discrète d'une propriété spécifiques d'opérateur déjà introduite pour les variétés Riemanniennes non-compactes par Gilles Carron [8]. En fait, nous allons considérer l'opérateur de Gauss-Bonnet *non parabolique à l'infini* qui permet d'avoir des informations sur le comportement de graphes à l'infini (par exemple pas de cycle à l'infini). De plus, avec cette propriété notre opérateur sera semi-Fredholm. D'autre part, comme nous travaillons sur un graphe infini connexe, l'opérateur gradient vérifie toujours cette propriété et cela n'est pas le cas pour son adjoint l'opérateur de divergence. Un cas particulier d'opérateur non-parabolique à l'infini est celui où 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur ou de façon équivalente celui où l'opérateur est semi-Fredholm sur son domaine.

3.1 Problématique

En 1845, Kirchhoff utilise les graphes pour étudier les circuits électriques (loi de conservation de l'énergie et la charge appelé respectivement loi des nœuds et loi des mailles). Et en 1971 Flanders a publié un résultat très important [14] concernant l'unicité de flux de courant pour un réseau électrique résistif, comme nous avons présenté dans la section 2.3 du premier chapitre. En 2012, Colette Anné et Nabila Torki-Hamza [4] donnent une nouvelle vision pour résoudre le problème de Flanders. Ainsi, elles ont remarqué que ce problème est lié à la *décomposition d'Hodge*, en effet :

$$I = I_0 + I_1$$

où $I_0 \in \ker \delta$ and $I_1 \in (\ker \delta)^\perp$. Or, si l'opérateur D est essentiellement auto-adjoint, nous avons donc

$$(\ker \delta)^\perp = \overline{\operatorname{Im} \delta^*} = \overline{\operatorname{Im} d}.$$

De plus, si $\text{Im } d$ est fermé, alors

$$I_1 \in \text{Im } d.$$

Ainsi, il faut trouver des conditions tel que l'opérateur de Gauss-Bonnet soit à image fermée.

Théorème de Colette Anné et Nabila Torki-Hamza 2014

Si le graphe G est connexe, localement fini et χ -complet et l'opérateur de Gauss-Bonnet D est essentiellement auto-adjoint et est positif à l'infini, alors D est à image fermée, et comme conséquence la propriété de Hodge est bien vérifiée et nous avons

$$l^2(\mathcal{E}) = \ker \delta \oplus \text{Im } d.$$

Les conditions de Colette Anné et Nabila Torki-Hamza sont liées à des hypothèses sur le graphe et l'opérateur mais notre condition est plutôt liée à l'opérateur. En fait, nous donnons une nouvelle propriété d'opérateur qui est la non-parabolicité à l'infini qui permet d'avoir un opérateur semi-Fredholm. Plus précisément, un opérateur à image fermée. De plus, une caractérisation des opérateurs de type Dirac de Fredholm sur leur domaine a été donnée par N. Anghel [3] qui est appelée dans [4] la *positivité à l'infini* et notre condition est plus faible.

Remarque 3.1.1. *Nous rappelons que dans [4], l'opérateur de Gauss-Bonnet D est dit positif à l'infini s'il existe un sous-graphe induit fini $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ et une constante strictement positive C tel que*

$$C \|(f, \varphi)\|_{G \setminus G_K} \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}^c) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E}^c),$$

où $G \setminus G_K := (\mathcal{V}^c, \mathcal{E}^c)$ est le graphe complémentaire de G_K . C'est à dire,

$$\mathcal{V}^c := \mathcal{V} \setminus K$$

et

$$\mathcal{E}^c := \{e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K; \text{ il n'existe pas } e = (x, y) \text{ tel que } x \in K \text{ et } y \notin K\}.$$

3.2 Opérateur de Gauss-Bonnet non parabolique à l'infini

D'après G. Carron, l'appellation de non-parabolique à l'infini est justifiée par : hors d'un compact (à l'infini) la forme quadratique $\sigma \mapsto \|D\sigma\|^2$ vérifie les estimés de non-parabolique donné par Ancona [2] théorème 2 de la partie critère de la norme de Dirichlet.

Nous introduisons la version discrète de la non-parabolicité à l'infini d'un opérateur.

Définition 3.2.1. On dit que D est non-parabolique à l'infini s'il existe un sous-graphe induit fini $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ telle que pour toute partie finie U de $G \setminus K$, il existe une constante strictement positive $C = C(U)$ telle que

$$C \|(f, \varphi)\|_U \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K). \quad (3.2.1)$$

Lemme 3.2.1. Si D est non-parabolique à l'infini alors, pour toute partie finie U de G il existe une constante positive $C' = C'(U)$ telle que

$$C' \|(f, \varphi)\|_U \leq \|D(f, \varphi)\|_G + \|(f, \varphi)\|_{G_{\tilde{K}}}, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}), \quad (3.2.2)$$

où $G_{\tilde{K}}$ est un voisinage de G_K .

Preuve

Comme U est une partie finie de G , alors elle peut être réduite à un point ou à une arête.

Soit x un sommet de $\mathcal{V}$, commençons par montrer

$$C' |f(x)| \leq \|df\|_{\mathcal{E}} + \|f\|_{\tilde{K}}, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}).$$

$G_{\tilde{K}}$ est un sous-graphe fini de G , alors en utilisant le Lemme 2.1.2, nous avons

$$f^2(x) \leq C_1 \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right), \quad (3.2.3)$$

où C_1 est une constante positive qui dépend de x et $\tilde{K}$. En effet : soient $x \in \mathcal{V}$ et $x_0 \in \tilde{K}$, par le Lemme 2.1.2, nous avons

$$f^2(x) \leq C_{xx_0} \left(f^2(x_0) + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right). \quad (3.2.4)$$

Ainsi, la multiplication de (3.2.5) par $c(x_0) > 0$ entraîne

$$\begin{aligned} c(x_0) f^2(x) &\leq C_{xx_0} \left(c(x_0) f^2(x_0) + c(x_0) \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right) \\ &\leq C_{xx_0} \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + c(x_0) \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right) \\ &\leq C'_{xx_0} \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right), \end{aligned}$$

où $C'_{xx_0} = \max(C_{xx_0}, c(x_0)C_{xx_0})$.

Par suite, nous avons

$$f^2(x) \leq \frac{C'_{xx_0}}{c(x_0)} \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right).$$

Ainsi, nous obtenons

$$f^2(x) \leq C_1 \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right)$$

avec $C_1 = \frac{C'_{xx_0}}{c(x_0)}$.

D'autre part, prouvons l'inégalité suivante, pour toute arête e de $\mathcal{E}$

$$C'' |\varphi(e)| \leq \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}} + \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{E}).$$

Pour $e \in \mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_{\tilde{K}}$ fini, nous avons

$$\varphi^2(e) \leq \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}}^2 \leq \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}}^2 + \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2.$$

Et si $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K$, nous considérons la fonction indicatrice de K^c , notée par χ

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

qui permet de définir les fonctions suivantes

$$d\chi(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in \mathcal{E}_K, \\ 1 & \text{si } e \in \partial\mathcal{E}_K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \& \quad \bar{\chi}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in \mathcal{E}_K, \\ \frac{1}{2} & \text{si } e \in \partial\mathcal{E}_K, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$, alors la fonction $\bar{\chi}\varphi$ est à support fini dans $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K$. Ainsi, en appliquant la définition de non-parabolique à l'infini de D à la fonction $(0, \bar{\chi}\varphi)$, nous obtenons

$$\|\bar{\chi}\varphi\|_U^2 \leq C \|\delta(\bar{\chi}\varphi)\|_{\mathcal{V}}^2,$$

où $C = \frac{1}{C(U)}$.

Et comme $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K$, ceci implique que

$$\varphi^2(e) \leq C \|\delta(\bar{\chi}\varphi)\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (3.2.6)$$

Or, la propriété de la dérivation de Lemme (2.1.3), donne

$$\delta(\bar{\chi}\varphi)(x) = \chi(x)\delta\varphi(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)d(\chi)(e)\varphi(e).$$

Et par inégalité de $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\delta(\bar{\chi}\varphi)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) (\delta(\bar{\chi}\varphi))^2 \\ &\leq \underbrace{2 \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) (\chi(x)\delta\varphi(x))^2}_I \\ &\quad + \underbrace{2 \sum_{x \in \mathcal{V}} c(x) \left(\frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)d(\chi)(e)\varphi(e) \right)^2}_J. \end{aligned}$$

Ainsi, pour le premier terme, nous avons

$$I = \sum_{x \in \mathcal{V} \setminus K} c(x) (\delta\varphi(x))^2 \leq \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (3.2.7)$$

Et pour le deuxième terme, nous avons

$$\begin{aligned} J &= \underbrace{\sum_{x \in K} \frac{1}{2c(x)} \left(\sum_{e, e^+ = x} r(e) d(\chi)(e) \varphi(e) \right)^2}_{J_1} \\ &+ \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{V} \setminus K} \frac{1}{2c(x)} \left(\sum_{e, e^+ = x} r(e) d(\chi)(e) \varphi(e) \right)^2}_{J_2}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En utilisant le fait que $\text{supp}(d\chi) = \partial\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_{\tilde{K}}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{x \in K} \frac{1}{2c(x)} \left(\sum_{\substack{e, e^+ = x \\ e \in \text{supp} d\chi}} r(e) \varphi(e) \right)^2 \\ &= C_K \left(\sum_{e \in \text{supp} d\chi} r(e) \varphi(e) \right)^2 \\ &\leq C_K \left(\sum_{e \in \text{supp} d\chi} r(e) \right) \left(\sum_{e \in \text{supp} d\chi} r(e) \varphi^2(e) \right) \\ &\leq C_K C'_K \sum_{e \in \mathcal{E}_{\tilde{K}}} r(e) \varphi^2(e) \\ &= C_2 \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}}^2, \end{aligned}$$

avec $C_K = \max_{x \in K} \frac{1}{2c(x)}$, $C'_K = \#\mathcal{E}_{\tilde{K}} \max_{e \in \mathcal{E}_{\tilde{K}}} r(e)$ et $C_2 = C_K C'_K$.

Et pour J_2 , nous avons $e = (e^-, e^+)$ est dans $\text{supp}(d\chi) = \partial\mathcal{E}_K$, ainsi si $e^- \in K$, $e^+ \in$

∂K , donc

$$\begin{aligned}
J_2 &= \sum_{x \in \partial K} \frac{1}{2c(x)} \left(\sum_{\substack{e, e^+ = x \\ e \in \text{supp}(\text{d}\chi)}} r(e) \varphi(e) \right)^2 \\
&= C_K'' \left(\sum_{e \in \text{supp}(\text{d}\chi)} r(e) \varphi(e) \right)^2 \\
&\leq C_K'' \left(\sum_{e \in \text{supp}(\text{d}\chi)} r(e) \right) \left(\sum_{e \in \text{supp}(\text{d}\chi)} r(e) \varphi^2(e) \right) \\
&\leq C_K'' C_K' \sum_{e \in \mathcal{E}_K^\sim} r(e) \varphi^2(e) \\
&= C_2' \|\varphi\|_{\mathcal{E}_K^\sim}^2,
\end{aligned}$$

avec $C_K'' = \max_{x \in \partial K} \frac{1}{2c(x)}$ and $C_2' = C_K'' C_K'$.

Par suite, (3.2.8) devient

$$J \leq C_2'' \|\varphi\|_{\mathcal{E}_K^\sim}^2, \quad (3.2.9)$$

où $C_2'' = \max(C_2, C_2')$.

Ainsi, (3.2.7) et (3.2.9) entraînent

$$\|\delta(\bar{\chi}\varphi)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \max(2, 2C_2'') \left(\|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\varphi\|_{\mathcal{E}_K^\sim}^2 \right). \quad (3.2.10)$$

Finalement, (3.2.6) et (3.2.10) donnent

$$\varphi^2(e) \leq \tilde{C} \left(\|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\varphi\|_{\mathcal{E}_K^\sim}^2 \right)$$

avec $\tilde{C} = 2C \max(1, C_2'')$.

□

Proposition 3.2.1. *Si D est non-parabolique à l'infini, alors on peut construire un espace de Hilbert W tel que :*

1. $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E})$ dense dans W .
2. L'injection de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E})$ vers $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W .
3. $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est un opérateur borné.

Remarque 3.2.1. Dans 1. et 2. nous utilisons la topologie ponctuelle sur $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$, c'est à dire que, la suite (f_n, φ_n) converge ponctuellement vers (f, φ) dans $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}$ et $\varphi_n(e)$ converge vers $\varphi(e)$, $\forall e \in \mathcal{E}$.

Remarque 3.2.2. Dans l'article de Carron [8], l'injection de l'espace de fonctions à support compact vers H_{loc}^1 se prolonge par continuité vers W . Alors, dans notre cas l'espace d'arrivée dans le prolongement par continuité serait un espace de type l_{loc}^2 . Mais, on n'a pas besoin d'introduire l'espace l_{loc}^2 , puisque dans le cas de graphe localement fini il est égale à l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Preuve

Soit W la fermeture de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ pour la norme

$$N_{\tilde{K}}(f, \varphi) = \left(\|(f, \varphi)\|_{G_{\tilde{K}}}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $G_{\tilde{K}}$ est un voisinage de G_K .

Étape i) : $N_{\tilde{K}}$ est une norme sur W , il suffit de prouver la nullité. Nous avons

$$\begin{aligned} N_{\tilde{K}}(f, \varphi) = 0 &\Leftrightarrow \|(f, \varphi)\|_{G_{\tilde{K}}} = 0 \text{ et } \|D(f, \varphi)\|_G = 0 \\ &\Leftrightarrow \|f\|_{\tilde{K}} = 0, \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}} = 0, \|df\|_{\mathcal{E}} = 0 \text{ et } \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}} = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{V}$ et comme $\sharp\tilde{K} < \infty$, le Lemme (3.2.1), donne

$$f^2(x) \leq C_1 \left(\|f\|_{\tilde{K}}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right). \quad (3.2.11)$$

Mais, $\|f\|_{\tilde{K}} = 0$ et $\|df\|_{\mathcal{E}} = 0$. Ainsi, $f = 0$ sur $\mathcal{V}$.

D'autre part, pour montrer que si $\|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}} = 0$ et $\|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}} = 0$ alors $\varphi = 0$. Supposons que $\varphi \neq 0$.

φ est une fonction à support fini dans $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\tilde{K}}$ et en utilisant le Lemme (3.2.1) pour U égale au support de φ , il existe une constante positive C tel que

$$C \|\varphi\|_{\mathcal{E}_U} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}} + \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}.$$

Or, $\|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}} = \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}} = 0$, ainsi $\varphi = 0$ sur $\mathcal{E}_U$, ce qui est impossible.

Étape ii) : montrons que l'espace W est indépendant du choix de $G_{\tilde{K}}$.

Soient $G_{\tilde{K}_0}$ le plus petit voisinage de G_K et $G_{\tilde{K}_1}$ un autre voisinage tel que $K \subset \tilde{K}_0 \subset \tilde{K}_1$.

Ainsi, nous avons

$$N_{\tilde{K}_0}(f, \varphi) \leq N_{\tilde{K}_1}(f, \varphi).$$

De plus, pour prouver l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $N_{\tilde{K}_1}(f, \varphi) \leq CN_{\tilde{K}_0}(f, \varphi)$, il suffit de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $\|(f, \varphi)\|_{\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_0}^2 \leq CN_{\tilde{K}_0}^2(f, \varphi)$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} N_{\tilde{K}_1}^2(f, \varphi) &= \|(f, \varphi)\|_{\tilde{K}_1}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \\ &= \|(f, \varphi)\|_{\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_0}^2 + \|(f, \varphi)\|_{\tilde{K}_0}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \\ &= \|(f, \varphi)\|_{\tilde{K}_1 \setminus \tilde{K}_0}^2 + N_{\tilde{K}_0}^2(f, \varphi). \end{aligned}$$

Or, le lemme (3.2.1) et le fait que $\sharp(\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_0) < \infty$, entraînent

$$\|f\|_{\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_0}^2 \leq C \left(\|f\|_{\widetilde{K}_0}^2 + \|df\|_{\mathcal{E}}^2 \right),$$

avec $C = C(\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_0, \widetilde{K}_0)$.

Et

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\widetilde{K}_1} \setminus \mathcal{E}_{\widetilde{K}_0}}^2 \leq C \left(\|\varphi\|_{\mathcal{E}_{\widetilde{K}_0}}^2 + \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2 \right).$$

avec $C = C(\widetilde{K}_1 \setminus \widetilde{K}_0, \widetilde{K}_0)$.

Ainsi,

$$\|(f, \varphi)\|_{G_{\widetilde{K}_1} \setminus G_{\widetilde{K}_0}}^2 \leq CN_{\widetilde{K}_0}^2(f, \varphi).$$

D'où, la construction d'une norme sur W est indépendante du choix de voisinage associé à G_K . Posons :

$$\|(f, \varphi)\|_W := \left(\|(f, \varphi)\|_{G_{\widetilde{K}_0}}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour tout $(f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$.

Étape iii) : l'injection de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W est donnée par le Lemme (3.2.1).

Étape iv) : nous avons

$$\|D(f, \varphi)\|_G^2 \leq \|(f, \varphi)\|_{G_{\widetilde{K}}}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 = \|(f, \varphi)\|_W^2.$$

D'où, $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est un opérateur borné.

□

3.3 Opérateur de Gauss-Bonnet Semi-Fredholm

Le but de ce paragraphe est d'étudier une condition assez générale qui assure que l'image d'un opérateur de type Dirac est fermée. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 5. *Soit W un espace de Hilbert tel que :*

1. $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E})$ dense dans W .
2. L'injection de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E})$ vers $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W .
3. $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est un opérateur borné.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- *i) $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm.*
- *ii) Il existe G_K un sous-graphe induit fini de G et il existe $C = C_K$ une constante strictement positive tel que*

$$C \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \times \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K). \quad (3.3.12)$$

Preuve

On reprend les mêmes arguments utilisés par G. Carron [8]. Nous commençons par montrer le sens direct, en raisonnant par absurde et en supposant que la conclusion est fausse. Alors, il existe une suite croissante de sous-graphes finis $\{G_{K_n}\}_n$ tel que $G = \bigcup_n G_{K_n}$ et une suite $\{\sigma_n\}_n$ à support fini dans $\mathcal{V} \setminus K_n$ vérifiant pour tout $n \geq 1$

$$\begin{cases} \sigma_n = (f_n, \varphi_n) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K_n) \times \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{K_n}), \\ \|\sigma_n\|_W = 1 \text{ et} \\ \|D\sigma_n\|_G \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

D'autre part, par hypothèse l'opérateur $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm. Donc, il existe un opérateur $P : l^2(G) \longrightarrow W$ continu tel que

$$P \circ D = \text{Id}_W - H, \quad (3.3.13)$$

où H est la projection orthogonale sur le noyau de D , qui est un opérateur de rang fini. De plus, la suite $\{H\sigma_n\}_n$ tend vers 0 dans W . En effet, posons

$$\sigma_n = \sigma_n^1 + \sigma_n^2 \quad (3.3.14)$$

avec $\sigma_n^1 \in \ker D$ et $\sigma_n^2 \in (\ker D)^\perp$.

Comme

$$\begin{cases} (P \circ D)\sigma_n = \sigma_n^2, \\ \|P \circ D\sigma_n\|_W \leq \|P\| \|D\sigma_n\|_G \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Alors, pour la norme de W

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = 0. \quad (3.3.15)$$

De plus, $\{\sigma_n^1\}_n$ est une suite bornée de $\ker D$ qui est de dimension fini. Alors, nous pouvons extraire une sous-suite, notée $\{\sigma_{\varphi(n)}^1\}_n$, convergente vers une limite σ dans W .

Ainsi, vu (3.3.14) et (3.3.15), nous avons aussi σ est une valeur d'adhérence de $\{\sigma_n\}_n$ dans W .

Montrons que $\sigma = 0$.

Supposons que $\sigma \neq 0$ et comme W s'injecte continûment dans $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Alors, $\{\sigma_{\varphi(n)}(x)\}_n$ converge vers $\sigma(x)$ non nul. Or, par construction de la suite $\{\sigma_n\}_n$, tends vers 0 pour la norme ponctuellement. Par suite, $\sigma(x) = 0$ ce qui est absurde.

D'où, $\sigma = 0$ et $\{\sigma_{\varphi(n)}^1\}_n$ converge vers 0 dans W . Donc, en utilisant (3.3.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\sigma_n\|_W &\leq \|P \circ D\sigma_n\|_W + \|H\sigma_n\|_W \\ &\leq \|P\| \|D\sigma_n\|_G + \|H\sigma_n\|_W \\ &\leq \left(\frac{\|P\|}{n} + \|H\sigma_n\|_W \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|\sigma_n\|_W \rightarrow 0$, qui est absurde puisque $\|\sigma_n\|_W = 1$.

Montrons maintenant la réciproque, nous allons construire un opérateur continu $Q : l^2(G) \rightarrow W$ tel que $Q \circ D - \text{Id}_W$ soit un opérateur de rang fini, ceci montrera que $D : W \rightarrow l^2(G)$ a son noyau de dimension finie et que son image est fermée.

Posons D_1 la restriction de D sur $G \setminus G_K$ de G , donc $D_1 : W(G \setminus G_K) \rightarrow l^2(G)$ est continu. De plus, par hypothèse nous avons

$$C \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \times \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

Donc, D_1 est injectif et à image fermée. Ce qui permet l'existence d'une inverse à gauche P_1 tel que

$$P_1 \circ D_1 = \text{Id}.$$

D'autre part, posons

$$D_2 : l^2(\widetilde{K}_1) \rightarrow l^2(G),$$

où $\widetilde{K}_1$ est un voisinage de K (fini).

Comme $l^2(\widetilde{K}_1)$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors D_2 est continu et à image fermée. Notons P_2 "la parametrix" qui est un opérateur continu sur $l^2(\widetilde{K}_1)$ et nous avons

$$P_2 \circ D_2 = \text{Id} - H_1,$$

où H_1 est la projection orthogonale de noyau de D_2 .

Considérons la fonctions de troncature χ comme (3.2.5) en remplaçant K par $\widetilde{K}_0$ qui permet de définir $d\chi$, $\bar{\chi}$, $1 - \chi$, $1 - \bar{\chi}$

$$(1 - \chi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \widetilde{K}_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et } (1 - \bar{\chi})(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\widetilde{K}_0}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } e \in \partial\mathcal{E}_{\widetilde{K}_0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, nous définissons l'opérateur χ qui dépend de domaine par :

Si $\chi : C_0(\mathcal{V}) \longrightarrow C_0(\mathcal{V})$ alors $\chi.f = \chi f$, pour tout $f \in C_0(\mathcal{V})$.

Si $\chi : C_0^a(\mathcal{E}) \longrightarrow C_0^a(\mathcal{E})$ ce qui donne $\chi.\varphi = \bar{\chi}\varphi$, pour tout $\varphi \in C_0^a(\mathcal{E})$.

Si $\chi : C_0(\mathcal{V}) \oplus C_0^a(\mathcal{E}) \longrightarrow C_0(\mathcal{V}) \oplus C_0^a(\mathcal{E})$ ce qui permet d'obtenir $\chi.(f, \varphi) = (\chi f, \bar{\chi}\varphi)$, pour tout $(f, \varphi) \in C_0(\mathcal{V}) \oplus C_0^a(\mathcal{E})$.

Posons

$$Q\sigma := P_2(1 - \chi)\sigma + P_1\chi\sigma,$$

avec $\sigma = (f, \varphi)$.

Vérifions que l'opérateur $Q \circ D - \text{Id}$ est de rang fini. Notons le crochet suivant de deux opérateurs A et B

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

Alors

$$\begin{aligned} Q \circ D &= P_2(1 - \chi)D + P_1\chi D \\ &= P_2D(1 - \chi) + P_2[1 - \chi, D] + P_1D\chi + P_1[\chi, D] \\ &= P_2D_2(1 - \chi) + P_2[1 - \chi, D] + P_1D_1\chi + P_1[\chi, D] \\ &= (\text{Id} - H_1)(1 - \chi) + P_2[1 - \chi, D] + \text{Id}(\chi) + P_1[\chi, D] \\ &= \text{Id} - H_1(1 - \chi) + P_2[1 - \chi, D] + P_1[\chi, D]. \end{aligned}$$

Calculons $P_2[1 - \chi, D]$ et $P_1[\chi, D]$. Nous avons

$$[1 - \chi, D] = [1 - \chi, d] + [1 - \chi, \delta].$$

Alors d'une part, nous avons

$$\begin{aligned} [(1 - \chi)., d]f(e) &= (1 - \bar{\chi})(e)d(f)(e) - d((1 - \chi)f)(e) \\ &= \frac{1}{2} \left[(1 - \chi)(e^+) + (1 - \chi)(e^-) \right] d(f)(e) \\ &\quad - (1 - \chi)(e^+)d(f)(e) - f(e^-)d(1 - \chi)(e) \\ &= -\frac{1}{2}d(1 - \chi)(e)d(f)(e) - f(e^-)d(1 - \chi)(e). \end{aligned}$$

Et d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} [(1 - \chi)., \delta]\varphi(x) &= (1 - \chi)(x)\delta(\varphi)(x) - \delta((1 - \bar{\chi})\varphi)(x) \\ &= (1 - \chi)(x)\delta(\varphi)(x) - (1 - \chi)(x)\delta(\varphi)(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e, e^+=x} d(1 - \chi)(e)\varphi(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e, e^+=x} d(1 - \chi)(e)\varphi(e). \end{aligned}$$

Or, le support de $d(1 - \chi)$ est inclu dans $\delta\mathcal{E}_{\widetilde{K}} \subset \widetilde{K}_1$ qui est fini. Donc, P_2 est à rang fini. De même, nous montrons que P_1 est un opérateur de rang fini.

Ce qui implique que l'opérateur $Q \circ D = \text{Id} + H$ avec H un opérateur de rang fini. $\square$

Il existe une deuxième méthode inspirée de [3] qui permet de prouver ii) $\Rightarrow$ i) du Théorème 5. Cela est démontré à l'aide du **critère** suivant : "Si $\sigma_n = (f_n, \varphi_n) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ une suite bornée de W et $(D\sigma_n)_n$ converge dans $l^2(G)$, alors $(\sigma_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans W ".

Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.3.1. *Soit W un espace de Hilbert vérifiant :*

1. $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ dense dans W .
2. L'injection de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W .
3. $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est un opérateur borné.

Si, il existe un sous-graphe fini G_K de G et une constante positive C telle que

$$C \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \times \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K), \quad (3.3.16)$$

Alors, l'opérateur $D : W \longrightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm.

Preuve

Commençons par montrer le **critère** : si $\sigma_n = (f_n, \varphi_n) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ une suite bornée de W et $(D\sigma_n)_n$ converge dans $l^2(G)$, alors $(\sigma_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans W .

Soit $G_{\widetilde{K}}$ un voisinage de G_K (voir Définition 2.1.7), alors $(\sigma_n|_{\widetilde{K}})_n$ est une suite bornée sur un espace vectoriel de dimension fini. Par suite, elle admet une sous-suite convergente.

Sur $G \setminus G_{\widetilde{K}}$, considérons la fonction indicatrice χ comme dans (3.2.5) en remplaçant K par $\widetilde{K}$. Ce qui permet d'obtenir une fonction à support fini dans $G \setminus G_K$: $\chi\sigma_n$ et en appliquant l'inégalité (3.3.16) à $\chi\sigma_n$, en particulier à $(\chi f_n, 0)$ et $(0, \overline{\chi}\varphi_n)$. Par suite, d'une part nous obtenons

$$\|\chi f_n\|_W \leq C \|d(\chi f_n)\|_{\mathcal{E}}.$$

Or, l'égalité (2.1.3) de Lemme (2.1.3), entraîne

$$d(\chi f_n)(e) = \chi(e^+)d(f_n)(e) + f_n(e^-)d(\chi)(e).$$

Et $(d(f_n))_n$ est une suite convergente et $\text{supp}(d\chi) \subset \mathcal{E}_{\widetilde{K}}$ est fini, ainsi, $f_n(x)_{\widetilde{K}}$ admet une sous-suite convergente.

Ce qui permet de conclure que χf_n admet une sous-suite convergente de W , c'est à dire, $(f_n|_{\mathcal{V} \setminus \widetilde{K}})_n$ admet une sous-suite convergente de W .

D'autre part, nous avons

$$\|\bar{\chi}\varphi_n\|_W \leq C \|\delta(\bar{\chi}\varphi_n)\|_{\mathcal{V}}.$$

Or, l'égalité (2.1.4) de Lemme (2.1.3) donne

$$\delta(\bar{\chi}\varphi_n)(x) = \chi(x)\delta(\varphi_n)(x) - \frac{1}{2c(x)} \sum_{e, e^+=x} r(e)d(\chi)(e)\varphi_n(e), \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

De plus, par hypothèse $(\delta\varphi_n)_n$ est convergente et $\text{supp}(d\chi) \subset \mathcal{E}_{\tilde{K}}$ est fini. Ainsi, $(\varphi_n|_{\mathcal{E}_{\tilde{K}}})$ admet une sous-suite convergente. Ce qui permet de conclure que $(\bar{\chi}\varphi_n)_n$ admet une sous-suite convergente de W , i. e., $(\varphi_n|_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\tilde{K}}})_n$ admet une sous-suite convergente de W . Ce qui prouve le critère

Maintenant, en utilisant ce critère nous montrons que l'opérateur D est semi-Fredholm.

1. D'abord, nous prouvons que $\ker D$ est de dimension fini et cela revient à montrer que $\{\sigma \in \ker D; \|\sigma\|_W = 1\}$ est compact.
Soit $(\sigma_n)_n \subset \ker D$ telle que $\|\sigma_n\|_W = 1$ et $D\sigma_n = 0$. Alors, par le critère précédent, $(\sigma_n)_n$ admet une sous-suite convergente. D'où le résultat.

2. Montrons que $\text{Im } D$ est fermé.

Soit $(y_n)_n$ une suite $\text{Im } D$ telle que la suite $(y_n)_n$ converge vers y dans $l^2(G)$. Alors, y est-t-il dans $\text{Im } D$?

Comme $(y_n)_n \subset \text{Im } D$, alors il existe $(\sigma_n)_n \subset (\ker D)^\perp$ and $\sigma_n \neq 0 \forall n$, telle que $y_n = D\sigma_n$. $(\sigma_n)_n$ est nécessairement bornée. Sinon, on peut construire $s_n = \frac{\sigma_n}{\|\sigma_n\|_W}$, tel que

$$\begin{cases} (s_n)_n \subset (\ker D)^\perp \\ \|s_n\|_W = 1 \\ Ds_n \rightarrow 0. \end{cases}$$

En utilisant le critère précédent, on peut conclure que $(s_n)_n$ admet une sous-suite convergente vers une limite notée s tel que

$$\begin{cases} s \in (\ker D)^\perp \\ \|s\|_W = 1 \\ Ds = 0. \end{cases}$$

Par suite, $s \in \ker D \cap (\ker D)^\perp = \{0\}$. D'où $s = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(\sigma_n)_n$ est bornée and comme $(D\sigma_n)_n$ converge vers y , par le critère précédent entraîne, la suite $(\sigma_n)_n$ admet une sous-suite convergente vers une limite notée σ . Or, l'opérateur D est continu, donc $D\sigma_n$ converge vers $D\sigma$ et par unicité de limite $y = D\sigma$.

□

Corollaire 3.3.1. *D est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un sous-graphe induit fini G_K de G tel que si on complète $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ par la norme*

$$\|(f, \varphi)\|_W = \left(\|(f, \varphi)\|_K^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

afin d'obtenir un espace de Hilbert W vérifiant

1. $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ dense dans W .
2. L'injection de $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W .
3. L'opérateur $D : W \rightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm.

Preuve

Si D est non-parabolique à l'infini, par la proposition 3.2.1, l'espace W est bien défini. Il nous reste à montrer, que l'opérateur $D : W \rightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm. La définition de la non-parabolicité à l'infini, entraîne l'existence d'un sous-graphe induit fini $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ telle que pour toute partie finie U de $G \setminus K$, il existe une constante strictement positive $C = C(U)$ telle que

$$C \|(f, \varphi)\|_U \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

En particulier, pour $U = G_{\tilde{K}}$, nous avons

$$C \|(f, \varphi)\|_{G_{\tilde{K}}} \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

Ainsi,

$$C^2 \|(f, \varphi)\|_{G_{\tilde{K}}}^2 + \|D(f, \varphi)\|_G^2 \leq 2 \|D(f, \varphi)\|_G^2, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

D'où,

$$C' \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

Par le théorème 5, l'opérateur $D : W \rightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm.

Inversement, si l'opérateur $D : W \rightarrow l^2(G)$ est semi-Fredholm, par le théorème 5, il existe G_K un sous-graphe induit fini de G et il existe $C = C_K$ une constante strictement positive tel que

$$C \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \times \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

Et le fait que l'injection de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E})$ vers $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \oplus \mathcal{C}^a(\mathcal{E})$ se prolonge par continuité à W , entraîne que pour toute partie finie U de $G - K$

$$C \|(f, \varphi)\|_U \leq C \|(f, \varphi)\|_W \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \times \mathcal{C}_0(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K).$$

Ainsi, D est non-parabolique à l'infini.

□

3.3.1 Remarques

1. Si l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini alors cela permet d'avoir des informations sur le comportement du graphe à l'infini. Plus précisément, il y a absence de *cycle à l'infini* (c'est un chemin qui part de l'infini et repart vers l'infini sans se recouper). En effet, si δ est non-parabolique à l'infini et $\delta\varphi = 0$ alors la fonction φ est nulle.
2. Si l'opérateur de Gauss-Bonnet D est non-parabolique à l'infini donc, l'opérateur D qui est défini sur l'espace W est semi-Fredholm, d'après le corollaire 3.3.1. Ainsi l'espace $\{\sigma = (f, \varphi) \in W; D\sigma = 0\}$ est de dimension fini et les solutions σ sont appelées dans [8] les solutions étendues.
3. Soit $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ un sous-graphe fini et $G \setminus G_K := (\mathcal{V}^c, \mathcal{E}^c)$ son graphe complémentaire, où $\mathcal{V}^c := \mathcal{V} \setminus K$ et

$$\mathcal{E}^c := \{e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K; \text{ il n'existe pas } e = (x, y) \text{ tel que } x \in K \text{ et } y \notin K\}.$$

Si $G \setminus G_K = (\mathcal{V}^c, \mathcal{E}^c)$ est un graphe de G , alors l'opérateur D est positif à l'infini [3] et [4] implique que D est non-parabolique à l'infini [8] et [5]. En effet, D est positif à l'infini ceci entraîne l'existence d'un sous-graphe fini $G_{K'}$ et une constante positive C' telle que

$$C' \|(f, \varphi)\|_{G \setminus G_{K'}} \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}^c) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E}^c).$$

Ainsi, montrer que D est non-parabolique à l'infini revient à prouver qu'il existe un sous-graphe induit fini $G_K = (K, \mathcal{E}_K)$ telle que pour toute partie finie U de $G \setminus G_K$, il existe une constante strictement positive $C = C(U)$ telle que

$$C \|(f, \varphi)\|_U \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}^c) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E}^c).$$

Prenons $G_K = G_{K'}$, alors pour tout $U \subset G \setminus G_K$ et en utilisant que D est positif à l'infini, nous obtenons

$$\|(f, \varphi)\|_U \leq C' \|(f, \varphi)\|_{G \setminus G_{K'}} \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}^c) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E}^c).$$

D'où,

$$\|(f, \varphi)\|_U \leq \frac{1}{C'} \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V}^c) \oplus \mathcal{C}_0(\mathcal{E}^c).$$

Ainsi, D est non-parabolique à l'infini.

Mais la réciproque est fausse. En effet, sur le graphe simple $\mathbb{Z}$ l'opérateur D est non-parabolique à l'infini, voir l'exemple de graphe star-like proposition 3.4.1 de la section suivante. Mais, sur le graphe simple $\mathbb{Z}$ l'opérateur D est non positif à l'infini. En fait, d'après la section 5.3.1, nous avons le spectre de Laplacien est égale à $[0, 2]$, d'où le 0 est dans le spectre essentiel de l'opérateur Laplacien Δ . Or,

d'après 5.3.1, nous obtenons pour tout sous-graphe G_K fini, 0 est dans le spectre essentiel de l'opérateur $\Delta_{G \setminus G_K}$. Ainsi, l'opérateur Laplacien ne peut pas être positif sur $G \setminus G_K$ car la définition de positif à l'infini fait que le spectre commence à une valeur strictement plus grande que 0.

4. Avoir un opérateur de Fredholm est équivalent au fait que la valeur 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur D . En fait ceci équivaut aussi à ce que le spectre essentiel de D^2 ne contient pas 0. D'après [3], la caractérisation de la positivité à l'infini permet d'avoir l'opérateur est Fredholm sur son domaine ainsi **le spectre essentiel du Laplacien est strictement positif**. De plus, par 3. ceci reste vrai pour l'opérateur non-parabolique à l'infini. Or, d'après [8] la valeur spectrale 0 peut être dans le spectre essentiel du Laplacien pour le cas continu.
5. L'importance de la non-parabolicité à l'infini est donnée par l'opérateur δ . En effet, cette propriété est toujours vraie pour l'opérateur δ grâce à la connexité du graphe.
6. La notion de graphe parabolique étudiée dans le premier chapitre est différente de la non-parabolicité à l'infini. En effet, les graphes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$ sont paraboliques, mais $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 3$ est non-parabolique. D'autre part, l'opérateur δ est non-parabolique à l'infini dans $\mathbb{Z}$ mais pour $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$, δ ne vérifie pas cette propriété (puisque il y a des cycles).

3.4 Exemples

Dans cette section nous présentons deux exemples de graphes, l'un où la propriété de non-parabolique à l'infini est vérifiée et un autre graphe sur lequel l'opérateur de Gauss-Bonnet ne satisfait pas cette propriété.

3.4.1 Le graphe star-like

Définition 3.4.1. La réunion disjointe de deux graphes $G_\alpha = (\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$ et $G_\beta = (\mathcal{V}_\beta, \mathcal{E}_\beta)$ est la réunion disjointe de l'ensemble de leur sommet et l'ensemble d'arête ne contient pas une arête qui relie $\mathcal{V}_\alpha$ et $\mathcal{V}_\beta$.

Par [10], nous avons la définition suivante :

Définition 3.4.2. Un graphe infini $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est dit **star-like**, s'il existe un sous-graphe fini G_K de G tel que $G \setminus G_K$ est la réunion fini des copies disjointes G_α de graphe $\mathbb{N}$.

Remarque 3.4.1. Dans la figure 3.1 de graphe star-like, G_K et les G_α ne sont pas en réunion disjointes mais les G_α sont deux à deux disjointes.

Proposition 3.4.1. Si le graphe star-like G est simple, alors D est non-parabolique à l'infini sur G .

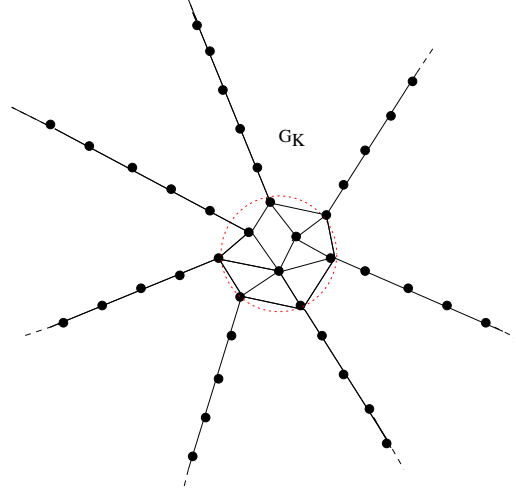


FIGURE 3.1 – Graphe star-like

Preuve

Par définition de graphe star-like, il existe un sous-graphe fini G_K de G tel que $G \setminus G_K = \sqcup_{\alpha \in J} G_\alpha$. Soit U une partie finie de $G \setminus G_K$ alors, il existe $\alpha \in J$ tel que $U \subset G_\alpha$. Notre but est de prouver l'existence d'une telle constante positive $C = C(U)$ vérifiant l'inégalité suivante

$$C \|(f, \varphi)\|_U \leq \|D(f, \varphi)\|_G, \quad \forall (f, \varphi) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K) \oplus \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K). \quad (3.4.17)$$

Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathcal{V} \setminus K)$ tel que U est incluse dans le support de f .

Comme U est une partie finie, elle peut être réduite à un singleton, par exemple $U = \{a\}$ et nous avons ainsi

$$\|f\|_U^2 = f^2(a).$$

Pour $o \in K$ et comme le graphe G est connexe, il existe un chemin γ_{oa} reliant o à a . Supposons que ce chemin est de longueur n tel que $x_0 = a$ et $x_n = o$ et en utilisant l'inégalité de Jensen et que $f(x_n) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f^2(a) &= (f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - \dots - f(x_n) + f(x_n))^2 \\ &\leq n \left((f(a) - f(x_1))^2 + \dots + (f(x_{n-1}) - f(x_n))^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$f^2(a) \leq n \|df\|_{\mathcal{E}}^2. \quad (3.4.18)$$

Remarque 3.4.2. n ne dépend que de U et K .

De même, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_K)$, nous avons

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}_U}^2 \leq C_U \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2.$$

De plus, pour $U = \{a_1, \dots, a_n\}$, montrons l'inégalité (3.4.17).

L'inégalité (3.4.18), pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donne que

$$f^2(a_i) \leq n_i \|df\|_{\mathcal{E}}^2$$

où n_i est le nombre d'arête de plus court chemin reliant a_i à un sommet de K .

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n f^2(a_i) \leq \sum_{i=1}^n n_i \|df\|_{\mathcal{E}}^2.$$

D'où

$$\|f\|_U^2 \leq C_U \|df\|_{\mathcal{E}}^2.$$

Et de même, nous montrons que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}_U}^2 \leq C_U \|\delta\varphi\|_{\mathcal{V}}^2.$$

□

3.4.2 Arbre triadique

Définition 3.4.3. *Un arbre est un graphe connexe qui ne contient pas des cycles. **L'arbre triadique** T est un arbre tel que chaque sommet de T possède 3 voisins.*

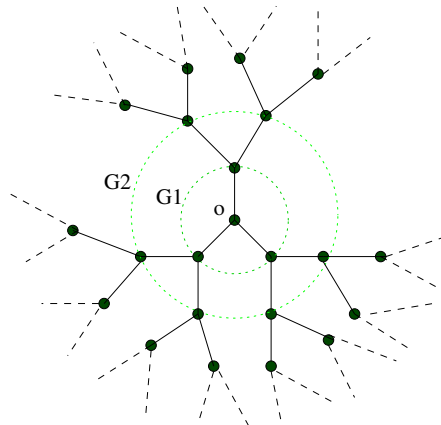


FIGURE 3.2 – Arbre triadique

Proposition 3.4.2. *Sur l'arbre triadique la propriété de "non-parabolique à l'infini" n'est pas vérifiée.*

Preuve

Fixons un point origine o de l'arbre T , voir figure 3.2, il existe une suite croissante de sous-graphe fini $\{G_n\}_n$ tel que $G_n = \{x \in \mathcal{V}; d(o, x) \leq n\}$ et $G = \bigcup_n G_n$. La contradiction de la propriété de non-parabolique à l'infini est : pour tout n il existe U hors G_n et une fonction φ_n à support fini à l'extérieur de G_n tel que $\delta\varphi_n = 0$ et $\|\varphi_n\|_U \neq 0$. Une telle fonction φ_n existe. En effet, nous allons construire une fonction antisymétrique φ_n à support à l'extérieur de G_n avec $\delta\varphi_n = 0$, comme suit : soient e_0 et b_0 les deux arêtes sortant de $x_n \in G_n$ (la troisième arête relie x_n à x_{n-1}) et notons e_m^k , $m \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^m$, resp. b_m^k , $m \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^m$, les arêtes qui partent de e_0 , resp. b_0 , de génération m (les arêtes sont orientées vers l'extérieur). On définit $\varphi_n(e_m^k) = \frac{1}{2^m}$ et $\varphi_n(b_m^k) = -\frac{1}{2^m}$ si non φ_n égale à 0. Ainsi, δ ne vérifie pas la propriété de non-parabolique à l'infini.

□

Remarque 3.4.3. *Nous pouvons généraliser l'exemple précédent pour l'arbre de degré $k \geq 3$, en utilisant le même argument avec $\varphi_n = \pm \frac{1}{(k-1)^m}$.*

Spectres du Laplacien

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de spectre. Plus précisément les définitions et les propriétés spectrales reliées aux opérateurs bornés auto-adjoints. D'autre part, dans le cadre du graphe infini pondéré, nous donnons de nouveaux résultats sur la relation entre le spectre du Laplacien Δ_0 défini sur les fonctions et le spectre du Laplacien Δ_1 défini sur les formes. Ces résultats sont inspirés de travaux de [33] et [37]. De plus, nous étendons un résultat de John Lott [26] concernant la caractérisation de la valeur spectrale 0, dans le sens, est-ce-que la valeur 0 est dans le spectre de l'opérateur Δ_0 ou dans le spectre de l'opérateur Δ_1 ?

4.1 Préliminaire

Si Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et λ un nombre complexe, $\lambda \text{Id} - \Delta$ est inversible si et seulement si il est injectif ou surjectif : dans les deux cas c'est une bijection. L'ensemble appelé **spectre** de Δ , des λ tels que $\lambda \text{Id} - \Delta$ n'est pas inversible est constitué des racines du polynôme $\det(\lambda \text{Id} - \Delta)$ qui est de degré n , donc contient au plus n valeurs qui sont les **valeurs propres** de Δ .

En dimension infinie, l'injectivité et la surjectivité ne sont plus équivalentes, et la définition du spectre est plus délicate. Bien que celle-ci puisse être donnée dans un cadre très général, les résultats fondamentaux sont obtenus pour les espaces de Banach. Le cas des espaces de Hilbert permet l'étude des opérateurs auto-adjoints, dont on sait déjà en dimension finie les remarquables propriétés spectrales.

Commençons par introduire quelques définitions nécessaires pour ce chapitre inspirées de [32], [29] et [20] :

Définition 4.1.1. Soit Δ un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

1. On appelle **ensemble résolvant** de Δ l'ensemble

$$\rho(\Delta) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{Id} - \Delta \text{ est bijectif}\}.$$

2. Si $\lambda \in \rho(\Delta)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(\Delta)$ de Δ au point λ par :

$$R_\lambda(\Delta) = (\lambda \text{Id} - \Delta)^{-1}.$$

3. Le **spectre** $\sigma(\Delta)$ de Δ est l'ensemble :

$$\sigma(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \rho(\Delta).$$

Proposition 4.1.1. $\rho(\Delta)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $\sigma(\Delta)$ est un compact.

Proposition 4.1.2. Si Δ est un opérateur auto-adjoint ($\Delta = \Delta^*$), alors $\sigma(\Delta)$ est réel.

Le résultat suivant, connu dans [32] sous le nom de **critère de Weyl**, présente un grand intérêt pratique pour la détermination du spectre d'un opérateur auto-adjoint.

Théorème 6. (Critère de Weyl)

Soit Δ un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. λ est dans le spectre de Δ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\|f_n\| = 1$ et $\|(\Delta - \lambda)f_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Nous donnons une caractérisation d'une partie du spectre appelé **spectre essentiel**.

Définition 4.1.2. λ est dans le spectre essentiel de Δ noté $\sigma_{ess}(\Delta)$ si et seulement si il existe une famille orthonormée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\|(\Delta - \lambda)f_n\|$ tends vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

La proposition suivante décrit le complémentaire de $\sigma_{ess}(\Delta)$:

Proposition et définition 4.1.1. Soit Δ un opérateur auto-adjoint et $\lambda \in \sigma(\Delta) \setminus \sigma_{ess}(\Delta)$. λ est alors isolé dans le spectre et c'est une valeur propre de multiplicité finie. Et nous notons

$$\sigma_d(\Delta) := \sigma(\Delta) \setminus \sigma_{ess}(\Delta)$$

appelé le **spectre discret** de Δ .

4.2 Le spectre du Laplacien

Dans cette partie nous considérons le graphe pondéré normalisé (G, b) de la définition 2.1.2 afin d'avoir un opérateur borné et auto-adjoint.

Nous rappelons les différents opérateurs du premier chapitre :

- L'opérateur gradient :

$$d : l^2(\mathcal{V}) \longrightarrow l^2(\mathcal{E}),$$

donné par

$$d(f)(e) = f(e^+) - f(e^-), \quad \forall e = (e^-, e^+) \in \mathcal{E}.$$

- Son adjoint l'opérateur divergence donné par la formule :

$$\delta\varphi(x) = \frac{1}{\beta(x)} \sum_{e, e^+=x} b(e)\varphi(e), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^a(\mathcal{E}).$$

- L'opérateur laplacien Δ_0 , qui égale δd , vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta_0 f(x) &= \delta(df)(x) \\ &= \frac{1}{\beta(x)} \sum_{e, e^+=x} b(e) df(e) \\ &= \frac{1}{\beta(x)} \sum_{e, e^+=x} b(e) (f(e^+) - f(e^-)) \\ &= \frac{1}{\beta(x)} \sum_{y, y \sim x} b(x, y) (f(x) - f(y)). \end{aligned}$$

- L'opérateur laplacien Δ_1 , qui égale $d\delta$, vérifiant

$$\begin{aligned} \Delta_1 \varphi(e) &= d(\delta\varphi)(e) \\ &= \delta\varphi(e^+) - \delta\varphi(e^-) \\ &= \frac{1}{\beta(e^+)} \sum_{e_1, e_1^+=e^+} b(e_1)\varphi(e_1) - \frac{1}{\beta(e^-)} \sum_{e_2, e_2^+=e^-} b(e_2)\varphi(e_2). \end{aligned}$$

Proposition 4.2.1. *Les opérateurs d et δ sont bornés.*

Preuve

En utilisant l'inégalité $(a - c)^2 \leq 2(a^2 + c^2)$ et la définition de le poids sur le sommet $\beta(x) = \sum_{y \sim x} b(x, y)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|df\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} b(x,y) (df(x,y))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} b(x,y) (f(y) - f(x))^2 \\ &\leq \sum_{(x,y) \in \mathcal{E}} b(x,y) (f^2(y) + f^2(x)) \\ &= 2 \sum_{x \in \mathcal{V}} f^2(x) \sum_{y \sim x} b(x,y) \\ &= 2 \sum_{x \in \mathcal{V}} f^2(x) \beta(x) \\ &= 2 \|f\|_{\mathcal{V}}^2. \end{aligned}$$

D'où, l'opérateur d est borné. Par suite, son adjoint l'opérateur δ est aussi borné. $\square$

Remarque 4.2.1. La proposition 4.2.1 permet de conclure que l'opérateur Δ_0 , qui est la composée de δ et d , est borné.

Il existe une autre méthode pour prouver que l'opérateur Δ_0 est borné :

Proposition 4.2.2. L'opérateur Δ_0 défini sur $l^2(\mathcal{V})$ est borné. De plus, il est un opérateur auto-adjoint.

Preuve

Soient $f, g \in l^2(\mathcal{V})$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |\langle \Delta_0 f, g \rangle_{\mathcal{V}}| &= \left| \sum_x \beta(x) \frac{1}{\beta(x)} \sum_{y, y \sim x} b(x, y) (f(x) - f(y)) g(x) \right| \\
 &\leq \sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) |(f(x) - f(y))| |g(x)| \\
 &\leq \sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) f(x) g(x) + \sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) |f(y)| |g(x)| \\
 &= \sum_x \beta(x) f(x) g(x) + \sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) |f(y)| |g(x)| \\
 &\leq \|f\|_{\mathcal{V}} \|g\|_{\mathcal{V}} + I,
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

avec $I := \sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) |f(y)| |g(x)|$.

En utilisant Cauchy-Schwarz, I est contrôlé par

$$\begin{aligned}
 I &\leq \sum_x \left(\sum_{y, y \sim x} b(x, y) |f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{y, y \sim x} b(x, y) \right)^{\frac{1}{2}} |g(x)| \\
 &\leq \sum_x \left(\sum_{y, y \sim x} b(x, y) f^2(y) \right)^{\frac{1}{2}} (\beta(x))^{\frac{1}{2}} |g(x)| \\
 &\leq \left(\sum_x \sum_{y, y \sim x} b(x, y) f^2(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_x \beta(x) g^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\sum_y \beta(y) f^2(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_x \beta(x) g^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|f\|_{\mathcal{V}} \|g\|_{\mathcal{V}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Par suite, (4.2.1) et (4.2.2) entraînent

$$|\langle \Delta_0 f, g \rangle_{\mathcal{V}}| \leq 2 \|f\|_{\mathcal{V}} \|g\|_{\mathcal{V}}.$$

Or, la définition de la norme de l'opérateur donne

$$\|\Delta_0\| = \sup_{\|f\|=1} \|\Delta_0 f\|_{\mathcal{V}} = \sup_{\|f\|=1} \sup_{\|g\|=1} \langle \Delta_0 f, g \rangle_{\mathcal{V}}$$

Ainsi,

$$\|\Delta_0\| \leq 2$$

et ceci permet de conclure que l'opérateur Δ_0 est borné.

Montrons que l'opérateur Δ_0 défini sur $l^2(\mathcal{V})$ est auto-adjoint. Comme Δ_0 est borné sur $l^2(\mathcal{V})$, il suffit de prouver qu'il est symétrique.

Soient $f, g \in l^2(\mathcal{V})$, en utilisant le fait que l'opérateur $\Delta_0 = \delta d$ et l'adjoint de l'opérateur d est l'opérateur de divergence δ , alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \Delta_0 f, g \rangle_{\mathcal{V}} &= \langle \delta d f, g \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle d f, d g \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle f, \delta d g \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle f, \Delta_0 g \rangle_{\mathcal{V}} . \end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur Δ_0 défini sur $l^2(\mathcal{V})$ est symétrique. □

Remarque 4.2.2. *l'opérateur Δ_0 est positif et borné par 2, alors son spectre est réel et inclus dans $[0, 2]$.*

Le but de cette section est de prouver la relation entre le spectre du Laplacien Δ_0 défini sur les fonctions et celui du Laplacien Δ_1 défini sur les formes.

D'abord par les travaux du [33] et [37], nous avons les lemmes suivants :

Lemme 4.2.1. *Pour $\Delta_0 = \delta d$ et $\Delta_1 = d\delta$, nous avons*

$$1. \quad d\Delta_0 = \Delta_1 d$$

$$2. \quad \delta\Delta_1 = \Delta_0 \delta.$$

Et,

Lemme 4.2.2. *1. $\ker \Delta_0 = \ker d$*

$$2. \quad \ker \Delta_1 = \ker \delta.$$

Preuve

1. C'est clair que $\ker d \subset \ker \Delta_0$.

D'autre part, si $\Delta_0 f = 0, \forall f \in l^2(\mathcal{V})$, nous avons donc

$$0 = \langle \Delta_0 f, f \rangle_{\mathcal{V}} = \langle d f, d f \rangle_{\mathcal{E}} .$$

Ainsi, $d f = 0, \forall f \in l^2(\mathcal{V})$

2. Si $\varphi \in \ker \delta$, alors $\varphi \in l^2(\mathcal{E})$ et $\delta\varphi = 0$. Ainsi, $d\delta\varphi = 0$ et nous obtenons $\varphi \in \ker \Delta_1$.

Pour l'autre inclusion, soit $f \in l^2(\mathcal{V})$ tel que

$$0 = \langle \Delta_1 \varphi, df \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \delta\varphi, \Delta_0 f \rangle_{\mathcal{V}}.$$

Si $\Delta_0 f = 0$ pour $f \in l^2(\mathcal{V})$, donc 0 est dans le spectre de Δ_0 ce qui est absurde (la fonction constante n'est pas dans $l^2(\mathcal{V})$). Par conséquent, $\delta\varphi = 0$ et nous avons φ est dans $\ker \delta$.

□

Nous arrivons à notre résultat principal.

Théorème 7. *Soit (G, b) un graphe infini pondéré normalisé, alors*

$$\sigma(\Delta_1) \setminus \{0\} = \sigma(\Delta_0) \setminus \{0\}.$$

Preuve

- En utilisant le critère de Weyl, soit $\lambda \neq 0$ dans le spectre de Δ_0 alors, il existe une suite $(f_n)_n$ de $l^2(\mathcal{V})$ telle que

$$\|f_n\|_{\mathcal{V}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} = 0.$$

Ainsi, trouver $\varphi_n \in l^2(\mathcal{E})$ telle que

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Posons

$$\varphi_n := \frac{df_n}{\|df_n\|_{\mathcal{E}}}.$$

D'abord montrons que $\|df_n\|_{\mathcal{E}} \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|df_n\|_{\mathcal{E}}^2 &= \langle \Delta_0 f_n, f_n \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle (\Delta_0 - \lambda)f_n, f_n \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \lambda f_n, f_n \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \underbrace{\langle (\Delta_0 - \lambda)f_n, f_n \rangle_{\mathcal{V}}}_{\text{tends vers 0}} + \lambda \end{aligned}$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|df_n\|_{\mathcal{E}}^2 = \lambda$. Ainsi, il existe $c > 0$, $\exists n_0$; $\forall n \geq n_0$ nous avons $\|df_n\|_{\mathcal{E}} > c$.

Et ceci implique que la suite $(\varphi_n)_n$ est bien définie. Ensuite, vérifions que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} =$

0. En utilisant la première assertion du lemme 4.2.1 et le fait que l'opérateur d est borné, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} &= \left\| (\Delta_1 - \lambda) \frac{df_n}{\|df_n\|_{\mathcal{E}}} \right\|_{\mathcal{E}} \\
 &= \frac{\|(\Delta_1 - \lambda)df_n\|_{\mathcal{E}}}{\|df_n\|_{\mathcal{E}}} \\
 &= \frac{\|d(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{E}}}{\|df_n\|_{\mathcal{E}}} \\
 &\leq \frac{\|d\|}{c} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}}
 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 0$. Et ceci permet de conclure que λ est dans le spectre de $\Delta_1 \setminus \{0\}$.

- En utilisant la même méthode que la première étape, supposons que $\lambda \neq 0$ est dans le spectre de Δ_1 alors, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de $l^2(\mathcal{E})$ telle que $\|\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 0$. Donc, il faut trouver une suite $(f_n)_n$ de $l^2(\mathcal{V})$ telle que $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} = 0$.

Posons

$$f_n := \frac{\delta\varphi_n}{\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}}.$$

D'abord montrons que $\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}} \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 &= \langle \Delta_1 \varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{E}} \\
 &= \langle (\Delta_1 - \lambda)\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{E}} + \langle \lambda\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{E}} \\
 &= \underbrace{\langle (\Delta_1 - \lambda)\varphi_n, \varphi_n \rangle_{\mathcal{E}}}_{\text{tends vers 0}} + \lambda
 \end{aligned}$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 = \lambda$. Ainsi, il existe $c > 0$, $\exists n_0$; $\forall n \geq n_0$ nous avons $\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}} > c$. Ensuite, vérifions que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} = 0$.

En utilisant la deuxième assertion du lemme 4.2.1 et le fait que l'opérateur δ est borné, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} &= \left\| (\Delta_0 - \lambda) \frac{\delta\varphi_n}{\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}} \right\|_{\mathcal{V}} \\
 &= \frac{\|(\Delta_0 - \lambda)\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}}{\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}} \\
 &= \frac{\|\delta(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{V}}}{\|\delta\varphi_n\|_{\mathcal{V}}} \\
 &\leq \frac{\|\delta\|}{c} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}}
 \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_1 - \lambda)\varphi_n\|_{\mathcal{E}} = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_0 - \lambda)f_n\|_{\mathcal{V}} = 0$. D'où λ est dans le spectre de $\Delta_0 \setminus \{0\}$.

□

Nous avons un autre résultat qui prouve que le spectre de deux différents Laplaciens coïncident lorsque la valeur 0 n'est pas dans le spectre de Δ_0 .

Lemme 4.2.3. *Si 0 n'est pas dans le spectre de Δ_0 , alors l'opérateur d défini sur $l^2(\mathcal{V})$ est à image fermée.*

Preuve

Soit $\varphi \in \overline{\text{Im } d}$, montrons que $\varphi \in \text{Im } d$, i.e, existe-t-il une fonction f de $l^2(\mathcal{V})$ telle que $\varphi = df$? Comme $\varphi \in \overline{\text{Im } d}$, alors il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de $\text{Im } d$, i.e, il existe une suite $(f_n)_n$ de $l^2(\mathcal{V})$ telle que $\varphi_n = df_n$. De plus, la suite $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $l^2(\mathcal{E})$. D'autre part, par hypothèse 0 n'est pas dans le spectre de Δ_0 ce qui entraîne l'existence d'une constante C positive tel que

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C \|\Delta_0 f\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall f \in l^2(\mathcal{V}).$$

Or, en utilisant la définition de la norme d'un opérateur et la proposition 4.2.1, nous avons

$$\|\Delta_0 f\| = \sup_{g, \|g\|_{\mathcal{V}}=1} \langle \Delta_0 f, g \rangle_{\mathcal{V}} \leq \|df\|_{\mathcal{E}} \sup_{g, \|g\|_{\mathcal{V}}=1} \|dg\|_{\mathcal{E}} \leq 2 \|df\|_{\mathcal{E}}.$$

Par suite,

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \leq 2C \|df\|_{\mathcal{E}}, \quad \forall f \in l^2(\mathcal{V}).$$

Ainsi,

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}} \leq 2C \|df_n - df_m\|_{\mathcal{E}}, \quad f_n, f_m \in l^2(\mathcal{V}).$$

D'où

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{V}} \leq 2C \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{E}}, \quad f_n, f_m \in l^2(\mathcal{V}).$$

Or, la suite $(\varphi_n)_n$ est convergente donc elle est de Cauchy ainsi la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy dans $l^2(\mathcal{V})$ qui est complet. Donc, la suite $(f_n)_n$ converge vers une limite f . Et en utilisant le fait que l'opérateur d est borné, nous obtenons que $df_n = \varphi_n$ converge vers df et par unicité de la limite $df = \varphi$. D'où φ est dans $\text{Im } d$. □

Corollaire 4.2.1. *Si 0 n'est pas dans le spectre de Δ_0 , alors*

$$\sigma(\Delta_1|_{\text{Im } d}) = \sigma(\Delta_0).$$

Preuve

D'après la première assertion du lemme 4.2.1, nous avons

$$\Delta_1 d = d \Delta_0.$$

Or, par hypothèse 0 n'est pas dans le spectre de Δ_0 , alors par la première assertion du lemme 4.2.2, l'opérateur d est aussi inversible. Par conséquent, nous obtenons

$$\Delta_1|_{\text{Im } d} = d\Delta_0 d^{-1}.$$

Ainsi,

$$\sigma(\Delta_1|_{\text{Im } d}) = \sigma(\Delta_0).$$

□

4.3 Le problème de zéro dans le spectre de l'opérateur Laplacien

Dans cette section nous nous intéressons au problème de zéro dans le spectre de l'opérateur Laplacien. Pour cela, nous introduisons une généralisation d'un résultat inspiré de l'article de John Lott [26] (Proposition 9. p. 12).

Théorème 8. *Soit (G, b) un graphe infini pondéré normalisé, connexe et localement fini tel que le poids sur les arêtes b est majoré et minoré par une constante strictement positive, c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} \leq b(x, y) \leq \alpha$, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$. Alors*

$$0 \in \sigma(\Delta_1) \text{ ou } 0 \in \sigma(\Delta_0).$$

D'abord, nous commençons par des résultats préliminaires pour arriver à montrer ce théorème.

D'après [36] et [11], nous avons

Définition 4.3.1. *Le graphe G vérifie l'inégalité isopérimétrique s'il existe une constante $C > 0$, tel que pour tout sous-graphe fini $G_U = (U, \mathcal{E}_U)$ de G , nous avons*

$$|\partial \mathcal{E}_U| \geq C |U|,$$

avec

$$|\partial \mathcal{E}_U| = \sum_{e \in \partial \mathcal{E}_U} b(e) \text{ et } |U| = \sum_{x \in U} \beta(x).$$

Lemme 4.3.1. *Si l'opérateur Δ_0 est inversible alors l'inégalité isopérimétrique est vérifiée.*

Preuve

L'opérateur Δ_0 est inversible, ceci entraîne l'existence d'une constante strictement positive C' telle que

$$\|g\|_{\mathcal{V}} \leq C' \|\Delta_0 g\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall g \in l^2(\mathcal{V}).$$

Il suffit de prendre $C = \frac{1}{C^2}$. En effet, pour tout sous-graphe U fini tel que $g = \mathbf{1}_U$, nous avons

$$\|g\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{x \in U} \beta(x) = |U|$$

et

$$\|\Delta_0 g\|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{x \in U} \sum_{y \notin U} b(x, y) = |\partial \mathcal{E}_U|.$$

□

Définition 4.3.2. • Une branche B est une suite finie de sommets $x_0, x_1, \dots, x_{m+1}$ tel que $\forall j, 1 \leq j \leq m$, nous avons $\deg(x_j) = 2$.

- La longueur de la branche B , notée $\text{long}(B)$, est le nombre de sommets dans cette branche, ici, $\text{long}(B) = m + 2$.
- L'intérieur de la branche B est l'ensemble des sommets x_j de B vérifiant $\deg(x_j) = 2, \forall j$.

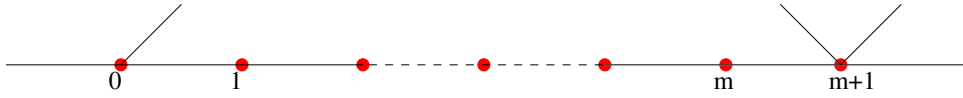


FIGURE 4.1 – Branche de longueur $m + 2$

À la place de l'argument de Lott [26] inspiré par Gromov [18] (p. 236-237), nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 4.3.2. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

- Le poids b est majoré et minoré par une constante strictement positive, c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} \leq b(x, y) \leq \alpha, \forall (x, y) \in \mathcal{E}$.
- L'opérateur Δ_0 est inversible.
- L'opérateur Δ_1 est injectif.

Alors le graphe (G, b) est un arbre qui ne contient que des branches de longueurs uniformément bornées, c'est à dire, $\exists M > 0, \forall B$ une branche de $G, \text{long}(B) \leq M$.

Preuve

D'une part, l'opérateur Δ_1 est injectif ce qui entraîne l'absence de cycle dans le graphe G , donc G est un arbre.

D'autre part, l'opérateur Δ_0 est inversible, alors le graphe G vérifie l'inégalité isopérimétrique, d'après le lemme 4.3.1, c'est à dire, il existe une constante strictement positive C telle que pour tout sous-graphe U fini, nous avons

$$|\partial \mathcal{E}_U| \geq C |U|.$$

4.3. LE PROBLÈME DE ZÉRO DANS LE SPECTRE DE L'OPÉRATEUR LAPLACIEN 67

Soit B une branche $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$. Posons $U = \{x_1, \dots, x_m\}$ qui est l'intérieur de la branche B , alors

$$b(x_0, x_1) + b(x_m, x_{m+1}) \geq C \sum_{j=1}^m \beta(x_j). \quad (4.3.3)$$

- Si $b = 1$, alors $\beta(x) = \sum_{y \sim x} b(x, y) = \sum_{y \sim x} 1 = \deg(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}$ (c'est le cas de J. Lott [26]). Par suite, l'inégalité (4.3.3) et la définition 4.3.2 donnent

$$2 \geq C \sum_{j=1}^m \deg(x_j) = C \sum_{j=1}^m 2 = 2Cm.$$

Posons $M := \frac{1}{C} + 2$ (indépendant de B), alors $\text{long}(B) \leq M$. Ainsi les branches de G sont de longueurs uniformément bornées.

- Pour $b \neq 1$ mais b est majoré et minoré par une constante strictement positive, c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} \leq b(x, y) \leq \alpha$, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$ et le graphe G est normalisé, le poids sur les sommets est $\beta(x) = \sum_{y \sim x} b(x, y)$, nous obtenons alors que le poids sur le sommet β est aussi minoré par $\frac{1}{\alpha}$.

Ainsi, par l'inégalité (4.3.3) nous avons

$$2\alpha \geq b(x_0, x_1) + b(x_m, x_{m+1}) \geq C \sum_{j=1}^m \beta(x_j) \geq Cm \frac{1}{\alpha}.$$

D'où

$$\frac{2\alpha^2}{C} \geq m.$$

Posons $M = \frac{2\alpha^2}{C} + 2$ (indépendant de B), alors $\text{long}(B) \leq M$. Ainsi les branches de G sont de longueurs uniformément bornées.

□

Nous arrivons à la preuve du théorème 8.

Preuve

En utilisant le même raisonnement que [26], supposons que les deux opérateurs Δ_0 et Δ_1 sont inversibles. Alors, le lemme 4.3.2 entraîne que le graphe G est un arbre contenant des branches de longueurs uniformément bornées voir figure 4.2.

Or, l'existence d'un tel arbre permet de construire une fonction φ de $l^2(\mathcal{E})$ qui est δ -harmonique, en effet : nous considérons une partie d'un arbre branché dans la figure 4.2 comme un exemple pour simplifier la compréhension de la construction de φ .

Premier cas : $b = 1$, prenons le point 0 comme origine. Il possède deux voisins 0^- et 1. Posons

$$\varphi(0, 0^-) = \varphi(0, 1) = 1.$$

Alors, nous obtenons $\delta\varphi(0) = 0$ (l'arbre est orienté).

Ensuite sur la branche B_1 , φ est constante, autrement dit, $\varphi(j, j+1) = 1$, pour tout j , tel

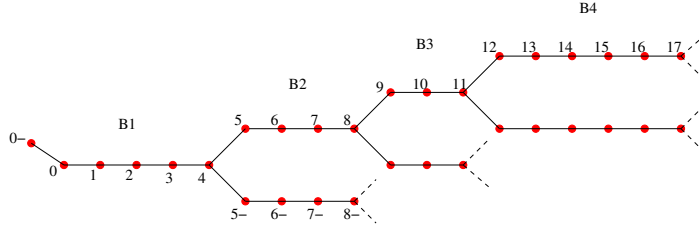


FIGURE 4.2 – Arbre Branché

que $1 \leq j \leq 3$. Et au point 4, nous avons $\varphi(4, 5) = \varphi(4, 5^-) = \frac{1}{2}$, afin d'avoir $\delta\varphi(4) = 0$. Et pour les points qui sont dans la branche B_2 , la fonction φ est aussi constante et prend la valeur $\frac{1}{2}$. Ainsi de suite au point 8, nous avons $\varphi(8, 9) = \varphi(8, 9^-) = \frac{1}{4}$, pour avoir $\delta\varphi(8) = 0$. Et pour les points qui sont dans la branche B_3 , la fonction φ est aussi constante et prend la valeur $\frac{1}{4}$. Et nous continuons de cette manière...

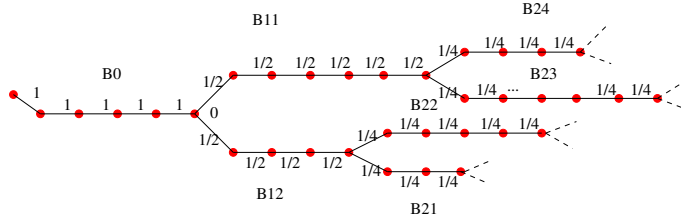


FIGURE 4.3 – Arbre Branché 1

D'une manière générale, G est un arbre ne contenant que des branches uniformément bornées et nous construisons la fonction φ sur une partie de G en choisissant toujours deux branches au points de bifurcation (il pourrait y en avoir plus de deux). Tel que la figure 4.3, la construction de φ est faite comme suit : sur B_0 la fonction φ est constante et égale à 1. Ensuite, nous ajoutons une génération, nous obtenons deux branches $B_{1,1}$ et $B_{1,2}$ tel que la fonction φ prend la valeur $\frac{1}{2}$. Et à la génération m , nous avons $B_{m,k}$ branches, où $1 \leq k \leq 2^m$, alors la fonction φ est égale à $\frac{1}{2^m}$. Par suite, nous montrons que cette construction de φ est de carré sommable. En utilisant le fait que les branches

4.3. LE PROBLÈME DE ZÉRO DANS LE SPECTRE DE L'OPÉRATEUR LAPLACIEN 69

de l'arbre sont uniformément bornées par une constante $M > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{e \in B_{m,k}} (\varphi(e))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{e \in B_{m,k}} \left(\frac{1}{2^m} \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_m 2^m M \left(\frac{1}{2^m} \right)^2 \\
 &= \frac{M}{2} \sum_m \frac{1}{2^m} < \infty.
 \end{aligned}$$

Deuxième cas : $b \neq 1$ mais b est majoré et minoré par une constante strictement positive, c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{\alpha} \leq b(x, y) \leq \alpha$, $\forall (x, y)$ dans $\mathcal{E}$. Sur la branche B_1 , comme dans la figure 4.2, le point 0 possède 2 voisins notés 0^- et 1. Comme on veut que $\delta\varphi(0) = 0$, alors on choisit la fonction φ comme suite $\varphi(0, 1) = \frac{b(0,0^-)}{b(0,1)}\varphi(0, 0^-)$. Et à l'intérieur de B_1 , on pose $\varphi(j, j+1) = \frac{b(0,0^-)}{b(j,j+1)}\varphi(0, 0^-) \forall j, 1 \leq j \leq 3$. Ensuite, on regarde le point 4 qui possède 2 voisins 5 et 5^- , afin d'avoir $\delta\varphi(4) = 0$ et comme nous avons $\varphi(3, 4) = \frac{b(0,0^-)}{b(3,4)}\varphi(0, 0^-)$. On choisit $\varphi(4, 5) = \frac{b(0,0^-)}{2b(4,5)}\varphi(0, 0^-)$ et $\varphi(4, 5^-) = \frac{b(0,0^-)}{2b(4,5^-)}\varphi(0, 0^-)$. Ainsi, à l'intérieur de la branche B_2 ,

$$\varphi(j, j+1) = \frac{b(0,0^-)}{2b(j,j+1)}\varphi(0, 0^-) \forall j, 5 \leq j \leq 7.$$

Et pour le point 8, il possède 2 voisins 9 et 9^- . Pour avoir $\delta\varphi(8) = 0$ et comme nous avons $\varphi(7, 8) = \frac{b(0,0^-)}{b(7,8)}\varphi(0, 0^-)$. On choisit $\varphi(8, 9) = \frac{b(0,0^-)}{4b(8,9)}\varphi(0, 0^-)$ et $\varphi(8, 9^-) = \frac{b(0,0^-)}{4b(8,9^-)}\varphi(0, 0^-)$. À l'intérieur de la branche B_3 ,

$$\varphi(j, j+1) = \frac{b(0,0^-)}{4b(j,j+1)}\varphi(0, 0^-) \text{ pour } j = 10.$$

Et ainsi de suite... D'une manière générale, voir figure 4.3, sur B_0 la fonction $\varphi(e_0) = \frac{b(0,0^-)}{b(e_0)}\varphi(0, 0^-)$, avec e_0 désigne les arêtes de B_0 . Ensuite, nous ajoutons une génération, nous obtenons deux branches $B_{1,1}$ et $B_{1,2}$ tel que la fonction φ prend la valeur $\varphi(e_1^1) = \frac{b(0,0^-)}{2b(e_1^1)}\varphi(0, 0^-)$, avec e_1^1 désigne les arêtes de $B_{1,1}$. Et à la génération m , nous avons $B_{m,k}$ branches, où $1 \leq k \leq 2^m$, alors la fonction φ est égale à $\varphi(e_m^k) = \frac{b(0,0^-)}{2^m b(e_m^k)}\varphi(0, 0^-)$, avec e_m^k désigne les arêtes de $B_{m,k}$. Par suite, nous montrons que cette construction de φ est de carré sommable. En utilisant le fait que les branches de l'arbre sont uniformément bornées par une constante $M > 0$ et le poids b est majoré et minoré par une constante strictement

positive, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_e b(e)(\varphi(e))^2 \\
&\leq \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{e \in B_{m,k}} b(e)(\varphi(e))^2 \\
&= \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{e \in B_{m,k}} b(e) \left(\frac{b(0,0^-)}{2^m b(e)} \varphi(0,0^-) \right)^2 \\
&= \left(b(0,0^-) \varphi(0,0^-) \right)^2 \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{e \in B_{m,k}} \frac{1}{2^{2m} b(e)} \\
&\leq \alpha^3 \left(\varphi(0,0^-) \right)^2 M \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^m} \\
&= 2M\alpha^3 \left(\varphi(0,0^-) \right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est dans $l^2(\mathcal{E})$ et δ -harmonique. Donc, $0 \in \sigma(\Delta_1)$. $\square$

Remarque 4.3.1. *En déplaçant le premier sommet 0 de la figure 4.3, nous pouvons avoir d'autres fonctions φ qui sont dans $l^2(\mathcal{E})$ et δ -harmoniques. Ainsi, 0 est une valeur propre de multiplicité infini de l'opérateur Δ_1 , donc 0 est dans $\sigma_{ess}(\Delta_1)$.*

4.4 Exemples :

Dans cette partie, nous construisons la fonction δ -harmonique φ dans différents exemples d'arbres.

4.4.1 Arbre symétrique

D'après [15], nous avons la définition suivante :

Définition 4.4.1. *L'arbre infini T_s est symétrique autour d'un point fixé x_0 avec un nombre de branchement $\{m_i\}_{i=0}^\infty$, si T_s dépend seulement de la distance d'un point fixé x_0 tel que $m_i = \deg(x)$ pour tout $x \in T$ lorsque $d(x_0, x) = i$.*

Exemple d'arbre symétrique :

Fixons un point origine o de l'arbre T_s . Posons $S_n = \{x \in T_s; d(o, x) = n\}$. Soit T_s l'arbre symétrique autour du point o avec un nombre de branchement $\{m_n\}_{n=0}^\infty$. Dans la Figure 1, nous choisissons $m_n = 3 + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui est une suite croissante. Ainsi, nous avons $m_0 = 3$, c'est à dire que, $\deg(o) = 3$. Et pour $x \in S_1$, nous obtenons $\deg(x) = m_1 = 4$. De même, si x est dans S_2 entraîne que $m_2 = 5$.

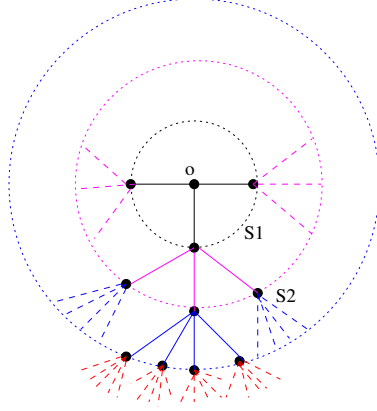


FIGURE 4.4 – Arbre symétrique

Proposition 4.4.1. *Si l'arbre symétrique T_s est simple tel que $\deg(x) > 2$, pour tout $x \in T_s$, alors il existe une fonction non nulle φ de carré sommable telle que $\delta\varphi = 0$.*

Preuve

Fixons x_0 origine de T_s tel que $\deg(x_0) = m_0$. Construisons la fonction φ tel que $\delta\varphi = 0$ comme suite : posons $\{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{m_0}\}$ les voisins sortant de x_0 qui sont dans S_1 et $\varphi(x_0, x_1^1) = 1$, $\varphi(x_0, x_1^2) = -1$, $\varphi(x_0, x_1^j) = 0$, $\forall j \in \{3, \dots, m_0\}$ ce qui entraîne que $\delta\varphi(x_0) = 0$.

Ensuite pour avoir $\delta\varphi(x_1^1) = 0$, nous prenons

$$\varphi(x_1^1, x_2^1) = \frac{1}{m_1 - 1} \varphi(x_0, x_1^1).$$

Et de même pour avoir $\delta\varphi(x_2^1) = 0$, nous avons

$$\varphi(x_2^1, x_3^1) = \frac{1}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)} \varphi(x_0, x_1^1).$$

Par la même procédure nous construisons

$$\varphi(x_{n-1}^1, x_n^1) = \frac{1}{(m_1 - 1)(m_2 - 1) \dots (m_{n-1} - 1)} \varphi(x_0, x_1^1) \quad (4.4.4)$$

afin d'avoir $\delta\varphi(x_n^1) = 0$ pour x_n^1 dans S_n .

Avec cette construction, montrons que $\varphi \in l^2(\mathcal{E})$. En utilisant (4.4.4) et le fait que

$\deg(x)$ est supérieur strictement à 2 pour tout $x \in T_s$ entraînent

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \varphi^2(e) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \sum_{j=1}^{m_{n-1}-1} \varphi^2(x_{n-1}, x_n^j) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \sum_{j=1}^{m_{n-1}-1} \left(\frac{1}{(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{n-1}-1)} \right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} (m_{n-1}-1) \left(\frac{1}{(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{n-1}-1)} \right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(m_{n-1}-1)} \left(\frac{1}{(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{n-2}-1)} \right)^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

4.4.2 Arbre triadique avec une mesure particulière

Fixons un point origine x_0 de l'arbre T tel que $\deg(x_0) = 3$ contenant $\{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}$. Soit $\varphi(x_0, x_1^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ ceci donne $\delta\varphi(x_0) = 0$. Maintenant, pour avoir $\delta\varphi(x_1^1) = 0$, nous prenons

$$\varphi(x_1^1, x_2^1) = -\varphi(x_1^1, x_2^2) \text{ et } b(x_1^1, x_2^1) = b(x_1^1, x_2^2).$$

Pour $n \geq 2$, nous considérons la fonction φ suivante :

$$\begin{cases} \varphi(x_n, x_{n-1}) = -2\varphi(x_n, x_{n+1}) \\ \varphi(x_n, x_{n+1}^1) = \varphi(x_n, x_{n+1}^2) \\ b(x_n, x_{n-1}) = \frac{b(x_n, x_{n+1}^1) + b(x_n, x_{n+1}^2)}{2} \end{cases}$$

Pour cette construction de la fonction φ , montrons qu'elle est dans $l^2(\mathcal{E})$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} b(e) \varphi^2(e) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b(x_n^j, x_{n+1}^1) \varphi^2(x_n^j, x_{n+1}^1) + b(x_n^j, x_{n+1}^2) \varphi^2(x_n^j, x_{n+1}^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2} b(x_n^j, x_{n-1}^1) \varphi^2(x_n^j, x_{n-1}^1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} S_n,
\end{aligned}$$

avec $S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b(x_n^j, x_{n-1}^1) \varphi^2(x_n^j, x_{n-1}^1)$. Or, la construction de φ donne

$$S_1 = \frac{1}{2} b(x_1^1, x_0) \varphi^2(x_1^1, x_0) = 0 \text{ et}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[b(x_2^1, x_1^1) \varphi^2(x_2^1, x_1^1) + b(x_2^2, x_1^1) \varphi^2(x_2^2, x_1^1) \right].$$

Prenons par exemple $\varphi(x_2^1, x_1^1) = 1$, ceci implique que

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[b(x_2^1, x_1^1) + b(x_2^2, x_1^1) \right] = b(x_1^1, x_0).$$

Et pour $n > 2$, nous avons

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^n} b(x_{n+1}^j, x_n^1) \varphi^2(x_{n+1}^j, x_n^1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b(x_{n+1}^j, x_n^1) \varphi^2(x_{n+1}^j, x_n^1) + b(x_{n+1}^j, x_n^2) \varphi^2(x_{n+1}^j, x_n^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left[b(x_{n+1}^j, x_n^1) + b(x_{n+1}^j, x_n^2) \right] \varphi^2(x_{n+1}^j, x_n^1) \\ &= \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b(x_n^j, x_{n-1}^1) \frac{1}{4} \varphi^2(x_n^j, x_{n-1}^1) \\ &= \frac{1}{2} S_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2} S_{n-1} = \dots = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} S_2.$$

D'où, nous obtenons

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} S_n = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} S_2 = \frac{S_2}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < \infty.$$

4.4.3 Arbre triadique avec une mesure minorée par une constante strictement positive

Soit T un arbre triadique (voir définition 3.4.2 du chapitre 3) avec un poids sur les arêtes b minoré par une constante strictement positive c .

Fixons un point origine x_0 de l'arbre T , il existe une suite croissante de sous-graphes finis $\{G_n\}_n$ tel que $G_n = \{x \in \mathcal{V}; d(x_0, x) \leq n\}$ et $G = \bigcup_n G_n$. Notons $S_n = \{x \in T; d(x_0, x) = n\}$.

Posons x_1^1, x_1^2 et x_1^3 les différents voisins de x_0 qui sont dans S_1 . Nous supposons que $\varphi(x_0, x_1^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, ce qui entraîne que $\delta\varphi(x_0) = 0$.

Fixons un sommet de S_1 par exemple $x_1 := x_1^1$, soit e_0 et w_0 les deux arêtes sortant de x_1 et notons e_m^k , $m \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^m$, resp. w_m^k , $m \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^m$, les arêtes sortant de e_0 , resp. w_0 , de génération m . Pour $m \geq 0$, on définit φ tel que

$$\varphi(e_m^k) = \frac{1}{2^m} \frac{1}{b(e_m^k)}, \quad \forall k; \quad 1 \leq k \leq 2^m.$$

$$\varphi(w_m^k) = \frac{-1}{2^m} \frac{1}{b(w_m^k)}, \quad \forall k; \quad 1 \leq k \leq 2^m.$$

Avec cette construction, nous obtenons pour chaque x_n de S_n , $\delta\varphi(x_n) = 0$, $\forall n \geq 1$ et de plus $\varphi \in l^2(\mathcal{E})$, en effet

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} b(e) \varphi^2(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} b(e_m^k) \varphi^2(e_m^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} b(e_m^k) \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{b^2(e_m^k)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{b(e_m^k)} \\ &\leq \frac{c'}{2} \sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{2^{2m}} \\ &= \frac{c'}{2} \sum_{m \geq 0} 2^m \frac{1}{2^{2m}} \\ &= \frac{c'}{2} \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2^m} \\ &= c', \end{aligned}$$

où $c' = \frac{1}{c}$.

Remarque 4.4.1. • La construction de la fonction δ -harmonique de carré sommable dépend du poids sur les arêtes.

- Pour l'arbre triadique simple, 0 est à la fois dans le spectre de Δ_0 (voir 5.3.2 du chapitre suivant) et dans le spectre de Δ_1 (voir 3.4.2 du chapitre précédent).

Annexe

Dans ce chapitre nous présentons les principaux résultats que nous avons utilisé au cours de cette thèse, concernant les propriétés des opérateurs Fredholm, le problème de minimisation et quelques résultats sur le spectre.

5.1 Opérateur de Fredholm

Dans cette section nous rappelons quelques éléments de la théorie d'opérateur de Fredholm. Plus précisément, les propriétés qui permettent d'avoir un opérateur à image fermée. Ces résultats sont inspirés de [25].

Définition 5.1.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire borné $T : X \longrightarrow Y$ est appelé un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\text{Im } T$ est fermée dans Y
2. $\dim(\ker T)$ est finie.
3. $\dim(\text{Coker } T) = \dim(Y / \text{Im } T)$ est finie.

Si l'opérateur T vérifie les conditions 1 et 2, on dit qu'il est semi-Fredholm.

Remarque 5.1.1. *Dans [22], si l'opérateur T vérifie les conditions 1 et 2, on dit qu'il est sur semi-Fredholm.*

Lemme 5.1.1. *Soient $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur continu et $K : X \longrightarrow Z$ un opérateur compact. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\|x\|_X \leq C (\|Tx\|_Y + \|Kx\|_Z) \quad (5.1.1)$$

alors $\ker T$ est de dimension finie et $\operatorname{Im} T$ est fermée, c'est à dire, l'opérateur T est semi-Fredholm.

Preuve

Commençons par prouver que $\ker T$ est de dimension finie ça revient à montrer que

$$\mathcal{B}_f = \{x \in \ker T; \|x\|_X \leq 1\}$$

est compact, par le théorème de Riesz.

Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{B}_f$, alors elle est bornée ainsi on peut extraire une sous suite $(x_{\Phi(n)})_n$ qui converge faiblement vers x dans $\mathcal{B}_f$. Or, l'opérateur K est compact, donc $K(x_{\Phi(n)})$ converge vers $K(x)$. Par suite, en utilisant (5.1.1), nous prouvons que $(x_{\Phi(n)})_n$ converge en norme vers x , en effet

$$\begin{aligned} \left| \|x_{\Phi(n)}\|_X - \|x\|_X \right| &\leq \|x_{\Phi(n)} - x\|_X \\ &\leq C \left(\underbrace{\|Tx_{\Phi(n)} - Tx\|_Y}_{=0} + \underbrace{\|Kx_{\Phi(n)} - Kx\|_Z}_{\rightarrow 0} \right) \end{aligned}$$

d'où, le résultat.

Maintenant, montrons que $\operatorname{Im} T$ est fermée.

Soit $y \in \overline{\operatorname{Im} T}$, alors il existe une suite $(y_n)_n$ de $\operatorname{Im} T$ qui converge vers y . De plus, il existe $x_n \in (\ker T)^\perp$ et $x_n \neq 0$ tel que $y_n = Tx_n$. La suite $(x_n)_n$ doit être bornée sinon, posons $\xi_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, alors $\|\xi_n\| = 1$ et $T\xi_n = 0$ ce qui entraîne que ξ_n est dans $\ker T \cap (\ker T)^\perp$ qui égale à 0 et ceci contredit le fait que $\|\xi_n\| = 1$. D'où, $(x_n)_n$ est bornée. Et par le même argument utilisé dans la première partie de la preuve, nous démontrons que $(x_n)_n$ admet une sous suite $(x_{\Phi(n)})_n$ convergente vers x . D'autre part, l'opérateur T est continu, ce qui implique que $(Tx_{\Phi(n)})_n$ converge vers Tx et par unicité de la limite y_n tend vers $y = Tx$. $\square$

Théorème 9. Soit un opérateur linéaire borné $T : X \longrightarrow Y$. Alors T est Fredholm si et seulement si il existe $H : Y \longrightarrow X$ opérateur linéaire borné tel que $TH - \operatorname{Id}$ et $HT - \operatorname{Id}$ soient des opérateurs compacts, c'est à dire, l'opérateur T est Fredholm si et seulement si il est inversible modulo les opérateurs compacts.

Preuve

Commençons par prouver la première implication et supposons que T est Fredholm. Nous avons

$$X = \ker T \oplus X_0 \text{ et } Y = \operatorname{Im} T \oplus Y_0,$$

où $X_0 = (\ker T)^\perp$ et $Y_0 = \operatorname{Coker} T$.

Soit $T_0 := T|_{X_0}$. Alors, T_0 est injectif puisque si $T_0x = 0$ pour $x \in X_0$ alors x est aussi un élément de $\ker T$, ainsi $x \in X_0 \cap \ker T$ ce qui entraîne que $x = 0$. De plus, $T_0(X) = T(X)$ qui est fermé. Par suite, l'opérateur $T_0 : X_0 \longrightarrow T(X)$ est bijectif et borné d'où inversible.

Maintenant, posons $H := T_0^{-1}Q$ où $Q : Y \longrightarrow T(X)$ est l'opérateur projection.

Nous avons $H(Y) = X_0$ et $\ker H = Y_0$. De plus, nous obtenons

$$\text{Id} - HT \text{ est la projection orthogonale de } X \text{ sur } \ker T$$

et

$$\text{Id} - TH \text{ est la projection orthogonale de } X \text{ sur } Y_0.$$

Ainsi, $\text{Id} - HT$ et $\text{Id} - TH$ sont deux opérateurs à rang fini d'où compacts.

Pour la deuxième implication, nous allons vérifier les hypothèses du lemme précédent.

Posons $K = HT - \text{Id}$ qui est compact. De plus, nous avons

$$\|x\|_X \leq C (\|x - HTx\|_Y + \|H\| \|Tx\|_Y).$$

Ainsi, l'opérateur T est semi-Fredholm. Pour avoir T Fredholm, il faut prouver que $\text{Coker} T$ est de dimension finie.

Posons $K' = TH - \text{Id}$, alors, en utilisant le fait que $\text{Im } TH \subset \text{Im } T$ et l'opérateur $K' + \text{Id}$ est Fredholm (car K' compact), nous obtenons

$$\dim(\text{Coker} T) \leq \dim(\text{Coker } TH) = \dim(\text{Coker}(K' + \text{Id})) < \infty.$$

□

5.2 Problème de minimisation :

Les résultats de cette section sont inspirées de références suivantes [?] et [?].

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{H}$ et $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On s'intéresse à résoudre le problème suivant :

$$\mathcal{P} = \begin{cases} u^* \in \mathcal{F}, \\ J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{F}} J(u). \end{cases}$$

On dit que $\mathcal{P}$ est un problème d'optimisation ou problème de minimisation de la fonction J sous la contrainte $u \in \mathcal{F}$.

Définition 5.2.1. On appelle une suite minimisante de J dans $\mathcal{F}$ une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in \mathcal{F}} J(u).$$

Une telle suite existe toujours, par définition de $\inf$.

Définition 5.2.2. Soient $\mathcal{F}$ un ensemble fermé non-vidé de $\mathcal{H}$ et $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction J est dite coercive ou infini à l'infini si

$$\forall (u_n)_n \text{ une suite de } \mathcal{F}, \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \infty.$$

Théorème 10. Soient $\mathcal{F}$ un ensemble convexe fermé non-vidé de $\mathcal{H}$ et une fonction continue $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, convexe et coercive. Alors, il existe un minimum de J sur $\mathcal{F}$.

Définition 5.2.3. On dit qu'une fonction J définie sur un ensemble convexe $\mathcal{F}$ est fortement convexe si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{J(u) + J(v)}{2} - \frac{\alpha}{8} \|u - v\|^2.$$

Théorème 11. Soient $\mathcal{F}$ un ensemble convexe fermé non-vidé de $\mathcal{H}$ et une fonction continue $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ et fortement convexe. Alors, il existe un unique minimum u^* de J sur $\mathcal{F}$.

Application : Soient $\mathcal{H} = l^2(\mathcal{E})$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e = \{I \in C_a(\mathcal{E}); \delta I = \delta \chi_e\}$ et $J(I) = \mathbf{E}(I) = \|I\|_{\mathcal{E}}^2$.

- $\mathcal{F}_e$ est un ensemble convexe, en effet : soient I et I' deux éléments de $\mathcal{F}_e$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ alors, $\delta \lambda I + \delta(1 - \lambda)I' = \lambda \delta I + (1 - \lambda)\delta I' = \lambda \delta \chi_e + (1 - \lambda)\delta \chi_e = \delta \chi_e$ par suite $\delta \lambda I + \delta(1 - \lambda)I'$ est dans $\mathcal{F}_e$.
- $\mathcal{F}_e$ est un ensemble fermé de $\mathcal{H}$, en effet : il existe une suite I_n de $\mathcal{F}_e$ qui converge vers I dans $\mathcal{H}$. Montrons que ce I est un élément de $\mathcal{F}_e$.
Comme la convergence dans $\mathcal{H}$ donne la convergence ponctuelle donc ceci entraîne que $I_n(e)$ converge vers $I(e)$. De plus, notre graphe est localement fini, ainsi nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{e, e^- = x} I_n(e) = \sum_{e, e^- = x} I(e), \forall x \in \mathcal{V}.$$

Et par unicité de limite, nous pouvons conclure que $\delta I(x) = \delta \chi_e, \forall x \in \mathcal{V}$. D'où le résultat.

- $J(I) = \mathbf{E}(I)$ est une fonction fortement convexe, en effet :
nous avons

$$\frac{\mathbf{E}(I) + \mathbf{E}(I')}{2} = \mathbf{E}\left(\frac{I + I'}{2}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{I - I'}{2}\right) \geq \mathbf{E}\left(\frac{I + I'}{2}\right).$$

Par le théorème 11, il existe un unique I^* de $\mathcal{F}_e$ tel que

$$\mathbf{E}(I^*) = \inf_{I \in \mathcal{F}_e} \mathbf{E}(I).$$

5.3 Spectre du Laplacien

Dans cette section, nous donnons des résultats et des propriétés élémentaires du spectre de Laplacien. Ses résultats sont inspirés de [9] et [15].

5.3.1 Spectre du Laplacien sur $\mathbb{Z}$

Définissons l'opérateur Laplacien sur $l^2(\mathbb{Z})$ par

$$\Delta u(n) = \sum_{m, m \sim n} u(n) - u(m) = 2u(n) - (u(n-1) + u(n+1))$$

L'opérateur Δ est borné et est autoadjoint sur $l^2(\mathbb{Z})$. Déterminons leur spectre.

La transformée de Fourier, définie par :

$$F : \begin{cases} L^2(\mathbb{T}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

est une isométrie unitaire d'inverse

$$F^{-1} : \begin{cases} l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto f = \sum_n c_n e^{in}. \end{cases}$$

Le spectre étant invariant par conjugaison :

$$\sigma(F^{-1} \Delta F) = \sigma(\Delta), \text{ pour } F \text{ inversible.}$$

Il vient alors, pour $f \in L^2$

$$F^{-1} \Delta F f = \sum_n c_n e^{in},$$

où $c_n = \Delta F f(n) = \Delta \hat{f}(n) = 2\hat{f}(n) - \hat{f}(n-1) - \hat{f}(n+1)$.
Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
F^{-1}\Delta F f &= \sum_n (2\hat{f}(n) - \hat{f}(n-1) - \hat{f}(n+1))e^{in\cdot} \\
&= \sum_n \hat{f}(n)e^{in\cdot} - \hat{f}(n-1)e^{in\cdot} + \hat{f}(n)e^{in\cdot} - \hat{f}(n+1)e^{in\cdot} \\
&= \sum_n \hat{f}(n)(e^{in\cdot} - e^{i(n+1)\cdot}) + \hat{f}(n)(e^{in\cdot} - e^{i(n-1)\cdot}) \\
&= \sum_n \hat{f}(n)e^{in\cdot}(1 - e^{i\cdot}) + \hat{f}(n)e^{in\cdot}(1 - e^{-i\cdot}) \\
&= \sum_n \hat{f}(n)e^{in\cdot}(2 - e^{i\cdot} - e^{-i\cdot}) \\
&= 2\sum_n \hat{f}(n)e^{in\cdot} - \sum_n \hat{f}(n)e^{in\cdot}(e^{i\cdot} + e^{-i\cdot}) \\
&= 2f - 2f \cos(\cdot) \\
&= 2(1 - \cos(\cdot))f \\
&= \mathcal{M}_{\cos} f.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\sigma(F^{-1}\Delta F) = \sigma(\mathcal{M}_{\cos}) = \text{Im}(\mathcal{M}_{\cos}) = [0, 4].$$

D'où,

$$\sigma(\Delta) = [0, 4].$$

Remarque 5.3.1. On peut généraliser ce résultat pour l'opérateur Laplacien défini sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$ et nous obtenons $\sigma(\Delta) = [0, 4d]$.

5.3.2 Spectre du Laplacien sur un arbre régulier

Soit T l'arbre régulier de degré $q+1$. Considérons le spectre de l'opérateur Laplacien Δ_q ,

$$\Delta_q f(x) = (q+1)f(x) - \sum_{y, y \sim x} f(y).$$

Théorème 12. Le spectre de Δ_q est donné par :

$$\sigma(\Delta_q) = [(q+1) - 2\sqrt{q}, (q+1) + 2\sqrt{q}].$$

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \notin \sigma(\Delta_q)$, alors nous pouvons résoudre

$$(\lambda - \Delta_q)f = \chi_{x_0}, \tag{5.3.2}$$

où x_0 est l'origine de l'arbre et $f \in l^2(\mathcal{V})$. De plus, $f(x) = g(|x|)$ avec $|x| = d(x_0, x)$ tel que $d(x_0, x)$ est la distance combinatoire. Alors, (5.3.2) donne

$$(\lambda - \Delta_q)f(x_0) = \chi_{x_0}(x_0)$$

ainsi

$$(\lambda - (q + 1))f(x_0) - (q + 1)f(x_1) = 1$$

Posons $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f(x_1)$, donc on obtient

$$(\lambda - (q + 1))a_0 - (q + 1)a_1 = 1$$

D'autre part, l'équation 5.3.2 entraîne

$$(\lambda - \Delta_q)f(x_k) = \chi_{x_0}(x_k), \forall k > 0$$

ce qui implique

$$(\lambda - (q + 1))f(x_k) - f(x_{k-1}) - qf(x_{k+1}) = 0, \forall k > 0$$

Posons $a_{k-1} = f(x_{k-1})$, $a_k = f(x_k)$ et $a_{k+1} = f(x_{k+1})$. Ce qui entraîne

$$(\lambda - (q + 1))a_k - a_{k-1} - qa_{k+1} = 0, \forall k > 0$$

par suite

$$a_{k-1} - (\lambda - (q + 1))a_k + qa_{k+1} = 0, \forall k > 0$$

et donc on obtient une suite récurrente linéaire dont l'équation caractéristique est

$$1 - (\lambda - (q + 1))r + qr^2 = 0$$

qui admet comme solutions :

$$r = \frac{(\lambda - (q + 1)) \pm \sqrt{(\lambda - (q + 1))^2 - 4q}}{2q}$$

si et seulement si $(\lambda - (q + 1))^2 - 4q \geq 0$.

Ainsi, si $\lambda \in I := [q + 1 - 2\sqrt{q}, q + 1 + 2\sqrt{q}]$, alors $\lambda \in \sigma(\Delta_T)$. D'où $I \subset \sigma(\Delta_T)$. Et pour la deuxième inclusion, voir [9].

□

5.3.3 Spectre essentiel du Laplacien

Soit K un sous-graphe fini de G , alors le Laplacien sur $G \setminus K$ avec condition de Dirichlet $\Delta_{G \setminus K}$ est donné par :

$$\Delta_{G \setminus K}f(x) = \begin{cases} \Delta_G f(x) & \text{en } G \setminus K, \\ 0 & \text{sur } K, \end{cases}$$

pour f une fonction de $l^2(G \setminus K) := \{f \in l^2(G); f|_K = 0\}$.

Nous avons le résultat suivant inspiré de [15]

Proposition 5.3.1. *Pour G un graphe infini et K un sous-graphe fini, nous avons*

$$\sigma_{ess}(\Delta_G) = \sigma_{ess}(\Delta_{G \setminus K}).$$

Preuve

Commençons par montrer $\sigma_{ess}(\Delta_G) \subset \sigma_{ess}(\Delta_{G \setminus K})$. Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(\Delta_G)$ alors il existe une suite orthonormée $(f_n)_n$ de $l^2(G)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_G - \lambda)f_n\| = 0$. $(f_n)_n$ est une suite bornée, donc on peut extraire une sous-suite convergente $(f_{n_k})_{n_k}$. Posons $g_k := \frac{f_{2n_k+1} - f_{2n_k}}{\sqrt{2}}$. Ainsi, on obtient g_k est une suite normalisée convergente vers 0 et vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta - \lambda)g_k\| = 0$. Mais on veut que g_k soit dans $l^2(G \setminus K)$. Donc, posons $h_k = (1 - \chi_K)g_k$. Par suite $h_k|_K = 0$, il est dans $l^2(G \setminus K)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_{G \setminus K} - \lambda)h_k\| = 0$. D'où $\lambda \in \sigma_{ess}(\Delta_{G \setminus K})$.

Pour la deuxième inclusion, soit Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(\Delta_{G \setminus K})$ alors il existe une suite orthonormée $(f_n)_n$ de $l^2(G)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\Delta_{G \setminus K} - \lambda)f_n\| = 0$. On considère la suite $(\tilde{f}_n)_n$ qui est égale à f_n sur $G \setminus K$ et 0 ailleurs. Ainsi, $\lambda \in \sigma_{ess}(\Delta_G)$.

□

Bibliographie

- [1] Sofiane Akkouch. *Sur la théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger discrets*. PhD thesis, Institut des Mathématiques de Bordeaux, novembre 2010. [11](#), [26](#)
- [2] Alano Ancona. *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, volume 1427 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–112. École d' Été de Probabilités de Saint-Flour XVIII - 1988, 1990. [27](#), [38](#)
- [3] Nicolae Anghel. An abstract index theorem on noncompact riemannian manifolds. *Houston Journal of Mathematics*, 19 :223–237, 1993. [38](#), [48](#), [51](#), [52](#)
- [4] Colette Anné and Nabila Torki-Hamza. The gauss-bonnet operator of an infinite graph. *Analysis Mathematical Physics*, pages 137–159, 2015. [9](#), [17](#), [20](#), [28](#), [32](#), [37](#), [38](#), [51](#)
- [5] Hela Ayadi. Semi-fredholmness of the discrete gauss-bonnet operator. *Filomat*, 2015. [51](#)
- [6] Hela Ayadi. Spetrum of laplacian on infinite weighted graph. *Preprint*, 2015.
- [7] Norman Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press, 1974. [11](#)
- [8] Gilles Carron. Un théorème de l'indice relatif. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 15 :193–202, 1996-1997. [9](#), [10](#), [37](#), [43](#), [45](#), [51](#), [52](#)
- [9] Yves Colin de Verdière. *Spectres de Graphes Cours spécialisés*, volume 4. Société Mathématique de France, 1998. [11](#), [79](#), [81](#)
- [10] Yves Colin de Verdière, Nabila Torki-Hamza, and Françoise Truc. Essential self-adjointness for combinatorial schrödinger operators ii- metrically non complete graphs. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, pages 21–38, 2011. [52](#)
- [11] Jozef Dodziuk. Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284 :787–794, 1984. [26](#), [27](#), [65](#)
- [12] Jozef Dodziuk. Elliptic operators on infinite graphs. *geometry and topology of elliptic operators*, *World Sci. Publ., Hackensack NJ.*, pages 353–368, 2006. [9](#)

- [13] Dorin.E Dutkay and Palle. E.T. Jorgensen. Spectral theory for discrete laplacians. *Spectral theory for discrete Laplacians, Complex analysis and operator theory*, 4 :1–38, 2010. [9](#)
- [14] Harley Flanders. Infinite networks, i- resistive networks. *Circuit Theory, IEEE Transactions*, 18 :326–331, 1971. [28](#), [31](#), [37](#)
- [15] Koji Fujiwara. The laplacian on rapidly branching trees. *Duke mathematical journal*, 83 :191–202, 1996. [9](#), [70](#), [79](#), [81](#)
- [16] Alexander Grigor’yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on riemannian manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36 :135–249, 1999. [26](#)
- [17] Alexander Grigor’yan. *Analysis on graphs*. Lecture Notes, 2011/2012. [11](#)
- [18] Mikhail Gromov. *Asymptotic Invariants of Infinite Groups*. Geometric Group Theory, Vol. 2, ed. by Graham Niblo and Martin Roller, London Math. Soc. Lecture Notes 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. [66](#)
- [19] Sebastian Haeseler, Matthias Keller, Daniel Lenz, and Radoslaw K. Wojciechowski. Laplacians on infinite graphs : Dirichlet and neumann boundary conditions. *Journal of Spectral Theory*, 2 :397–432, 2012. [13](#)
- [20] Bernard Helffer. *Spectral Theory and Applications*. An elementary introductory course, 2010. [57](#)
- [21] Xueping Huang, Matthias Keller, Jun Masamune, and Radoslaw K. Wojciechowski. A note on self-adjoint extensions of the laplacian on weighted graphs. *Journal of Functional Analysis*, 265 :1556–1578, 2013. [13](#), [15](#)
- [22] Aref Jeribi. *Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices*. Springer International Publishing, 2015. [75](#)
- [23] Matthias Keller and Daniel Lenz. Unbounded laplacians on graphs : basic spectral properties and the heat equation. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 5 :198–224, 2010. [9](#), [13](#)
- [24] Matthias Keller and Daniel Lenz. Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2012 :189–223, 2012. [13](#)
- [25] Woo Young Lee. *Lecture Notes on Operator Theory*. Seoul National university, Seoul Korea, 2000. [75](#)
- [26] John Lott. The zero-in-the spectrum question. *Enseignement Mathematiques*, 42 :341–376, 1996. [9](#), [10](#), [57](#), [65](#), [66](#), [67](#)

- [27] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2014. [28](#), [33](#)
- [28] Terry Lyons. *A simple criterion for transience of a reversible markov chain*. The Annals of Probability, 1983. [24](#), [26](#)
- [29] Pierre Lévy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, Paris, 2003. [57](#)
- [30] Jun Masamune. A liouville property and its application to the laplacian of an infinite graph. *Contemporary Mathematics*, 484 :103–115, 2009. [18](#)
- [31] Bojan Mohar and Wolfgang Woess. A survey on spectra of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 21 :209–234, 1989. [9](#)
- [32] Michel Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I*. Academic Press, 1980. [20](#), [57](#), [58](#)
- [33] Tomoyuki Shirai. The spectrum of infinite regular line graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352 :115–132, 2000. [9](#), [10](#), [57](#), [61](#)
- [34] Paolo M. Soardi. Recurrence and transience of the edge graph of a tiling of the euclidean plane. *Mathematische Annalen*, 287 :613–626, 1990. [26](#)
- [35] Paolo M. Soardi. *Potential Theory on Infinite Networks*, volume 1590 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. [28](#), [35](#)
- [36] Paolo M. Soardi and Wolfgang Woess. Uniqueness of currents in infinite resistive networks. *Discrete Applied Mathematics*, 31 :37–49, 1991. [65](#)
- [37] Robert S. Strichartz. Transformation of spectra of graph laplacians. *Rocky Mountain Journal of Mathematic*, 40 :2037–2062, 2010. [9](#), [10](#), [57](#), [61](#)
- [38] Carsten Thomassen. Resistances and currents in infinite networks. *Journal of Combinatorial Theory*, 49 :87–102, 1990. [28](#)
- [39] Nabila Torki-Hamza. Laplaciens de graphes infinis i graphes métriquement complets. *Confluentes Mathematici*, 2 :333–350, 2010. [9](#)
- [40] Nabila Torki-Hamza. *Spectres et Graphes*. Cours mastère 2, 2012. [11](#)
- [41] Wolfgang Woess. Random walks on infinite graphs and groups-a survey on selected topics. *Bull. London Math. Soc*, 26 :1–60, 1994. [26](#)
- [42] Maretsugu Yamasaki. Extremum problems on an infinite network. *Hiroshima Mathematical Journal*, 5 :223–250, 1975. [20](#)
- [43] Maretsugu Yamasaki. Parabolic and hyperbolic infinite networks. *Hiroshima Mathematical Journal*, 7 :135–146, 1977. [17](#), [20](#)

- [44] Maretsugu Yamasaki. Discrete dirichlet potentials on an infinite networks. *RIMS Kokyuroku*, 610 :51–66, 1987. [20](#), [26](#)
- [45] Armen H. Zemanian. *Infinite Electrical Networks*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1991. [28](#), [32](#)

Thèse de Doctorat

Hèla AYADI

Opérateur de Gauss-Bonnet semi-Fredholm et propriétés spectrales sur les graphes infinis

Semi-Fredholmness of the Gauss-Bonnet operator and spectrum properties in infinite graphs

Résumé

Dans le contexte des graphes infinis, localement finis et pondérés, nous nous intéressons à l'étude des propriétés de l'opérateur discret de Gauss-Bonnet qui est un opérateur de type Dirac (son carré est l'opérateur Laplacien). Plus précisément, nous donnons une version discrète de la notion importante de *non-parabolicité à l'infini* introduite par Gilles Carron pour les variétés Riemanniennes non-compactes. De plus, grâce à cette condition notre opérateur est *Semi-Fredholm* ce qui est utile dans la décomposition de Hodge pour résoudre des problèmes tel que *le problème de Kirchhoff*. Une autre partie de cette thèse consiste à étudier les propriétés spectrales de l'opérateur Laplacien. En fait, nous distinguons deux types d'opérateurs Laplaciens le premier défini sur l'espace des fonctions sur les sommets et le deuxième défini sur l'espace des fonctions sur les arêtes. C'est une question naturelle de voir le lien entre leur spectres respectifs. En utilisant, le critère de Weyl, nous montrons que le spectre de ces deux Laplaciens coïncident en dehors de la valeur 0. De plus, nous étendons le résultat de John Lott qui affirme que la valeur spectrale 0 est dans le spectre de l'un de ces deux Laplaciens.

Mots clés

graphes infinis pondérés, opérateur discret de Gauss-Bonnet, non-parabolique à l'infini, semi-Fredholm, spectre de l'opérateur Laplacien.

Abstract

In the context of an infinite locally finite weighted graph, we are interested in the study of discrete Gauss-Bonnet operator which is a Dirac type operator (its square is the Laplacian operator). In particular, we are focused on the conditions to have *semi-Fredholmness* operator needed to approach the Hodge decomposition theorem, which is important for solving problems such that *Kirchhoff's problem*. In fact, we present a discrete version of the work of Gilles Carron which defines a new concept *non-parabolicity at infinity* to have the Gauss-Bonnet operator with closed range. Another part of this thesis consist to study the spectral properties of the Laplacian operator. We define two Laplacians one as an operator acting on functions on vertices and the other one acting on functions on edges. So, it is a natural question to characterize the relation between their spectrum in terms of a certain geometric property of the graph and properties of the operators. In fact, we show that the nonzero spectrum of the two laplacians are the same, by using Weyl criterion. In addition, we give an extension of the work of John Lott such that with suitable weight conditions, we prove that the spectral value 0 in the spectrum of one of these two Laplacians.

Key Words

infinite weighted graph, discrete Gauss-Bonnet operator, non-parabolicity at infinity, semi-Fredholm, spectrum of Laplacian operator.