

Thèse de Doctorat

Romain GUYARD

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : *Sciences pour l'ingénieur, Géosciences, Architecture*

Discipline : *Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces*

Unité de recherche : *Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique de l'Université de Nantes (UMR 6183)*

Soutenue le 11 décembre 2015

Capteur à fibre optique pour la mesure de déformation au sein des matériaux

JURY

Rapporteurs :	Patrice FERON , Professeur des universités, Ecole Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et Technologie Yves JAOUEN , Professeur des universités, Télécom ParisTech
Examineurs :	Marc DOUAY , Professeur des universités, Université Lille 1 Sciences et Technologies Georges BOUDEBS , Professeur des universités, Université d'Angers Dominique LEDUC , Maître de conférences HDR, Université de Nantes Yann LECIEUX , Maître de conférences, Université de Nantes Cyril LUPI , Maître de conférences, Université de Nantes
Directeur de Thèse :	Dominique LEDUC , Maître de conférences HDR, Université de Nantes
Co-encadrants de Thèse :	Yann Lecieux , Maître de conférences, Université de Nantes Cyril Lupi , Maître de conférences, Université de Nantes

Remerciements

Je profite de ces quelques lignes pour adresser mes remerciements aux différentes personnes qui ont permis de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail de thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon jury de thèse qui ont pris le temps d'analyser et d'évaluer mes travaux de recherche. Merci donc à Marc Douay du laboratoire PHLAM de l'Université de Lille 1 d'avoir accepté d'être mon président de jury. Merci également à Patrice Féron du laboratoire Foton de l'ENSSAT et à Yves Jaouen du Groupe de Télécommunication Optique de Télécom ParisTech de m'avoir fait l'honneur de rapporter mes travaux de thèse. Je n'oublie pas Georges Boudebs du laboratoire LPHIA de l'Université d'Angers à qui je remercie d'avoir accepté d'intégrer mon jury de thèse en tant qu'examinateur.

Concernant mon travail de thèse au quotidien, je tiens à adresser un GRAND remerciement à mon encadrement de thèse. Il est vrai qu'en arrivant sur Nantes pour mon doctorat j'étais un peu dans l'inconnu, mais je dois dire que je n'ai pas été déçu du voyage. J'ai eu le privilège d'avoir un encadrement compétent scientifiquement, ce qui, me direz-vous est tout à fait normal, mais aussi riche humainement. Mes encadrants m'ont toujours considéré d'égal à égal et ils ont toujours fait attention pour que je puisse travailler dans les meilleures conditions possibles. Ces douces attentions sont une contribution non négligeable à la réussite de cette thèse. Je remercie donc mon directeur de thèse Dominique Leduc et mes deux co-encadrants de thèse Cyril Lupi et Yann Lecieux.

Je remercie également Franck Schoefs directeur de l'équipe « TRUST » de l'institut de Génie civil et Mécanique d'avoir soutenu ces travaux de recherche via la cellule de compétence IXEAD dont il est aussi le responsable. Cette cellule de compétence en Génie civil est une sous-unité de l'entreprise CAPACITÉS filiale de valorisation de la recherche de l'Université de Nantes. J'en profite aussi pour remercier, pour leur sympathie, tous les salariés de CAPACITÉS que j'ai pu rencontrer tout au long de mon doctorat. Je remercie également les autres enseignants chercheurs de l'équipe « TRUST » basée à l'Université de Nantes qui ont permis que la thèse puisse se dérouler dans un environnement serein.

Je n'oublie pas de remercier tous les doctorants et post-doctorants que j'ai pu côtoyer lors de ces 3 années de thèse. En effet, la bonne ambiance entre nous et leur gentillesse ont permis de rendre les journées au sein et hors du laboratoire beaucoup plus agréables, notamment dans les périodes difficiles où les résultats se faisaient attendre. Pour en finir avec le laboratoire, je voudrais décerner une mention spéciale à Michel Roche technicien de l'équipe. Je n'ai pas eu l'occasion de travailler directement avec lui, mais je le remercie pour son optimisme et sa bonne humeur.

Concernant mes proches, je souhaite adresser mes remerciements à mes amis et à ma famille : mes parents, mon frère, mes tantes et mes oncles pour leur soutien tout au long de cette période enrichissante ponctuée de hauts et de bas. J'ai une pensée toute particulière pour mes grands parents à qui je n'ai pas pu annoncer l'obtention de mon doctorat.

Table des matières

Introduction	13
1 Mesure de déformations au cœur des matériaux	15
1.1 Mesure de déformations en surface	17
1.2 Mesure de déformations au sein des matériaux	18
1.2.1 Étude d'un cylindre en traction simple	19
1.2.2 Étude d'un cylindre soumis à un chargement thermique	23
1.2.3 Vers un capteur multiaxes pour la mesure de déformations au cœur des structures	25
1.3 Solutions proposées pour la mesure simultanée de ϵ_r et ϵ_z	26
1.3.1 Capteur à réseaux de Bragg superposés	27
1.3.2 Capteur à réseau de Bragg inscrit dans une fibre à maintien de polarisation	27
1.3.3 Capteur à réseau de Bragg et réseau longue période superposés	27
1.4 Conclusion du chapitre	28
2 Modes guidés	29
2.1 État de l'art	31
2.1.1 Équations des modes guidés dans une fibre optique à saut d'indice	31
2.1.2 Mode de cœur	33
2.1.3 Classification des modes de cœur :	36
2.1.4 Les modes de gaine	39
2.1.5 Classification des modes de gaine	44
2.2 Études des propriétés optiques des couples de modes de gaine $\text{Hyb}_{\ell m}$	45
2.2.1 Rayon de gaine critique	46
2.2.2 Détermination numérique du rayon critique	48
2.2.3 Influence des paramètres opto-géométriques sur le rayon de gaine critique	53
2.3 Conclusion du chapitre	59
3 Propriétés des réseaux longue période relatives aux déformations axiales et radiales	61
3.1 Fonctionnement des réseaux fibrés	63
3.1.1 Théorie des modes couplés	65
3.1.2 Réseau de Bragg	67
3.1.3 Réseau longue période	68
3.2 Méthodologie de l'étude des sensibilités	71
3.2.1 Espace des paramètres	71
3.2.2 Calcul de la sensibilité aux déformations.	72
3.2.3 Description de la série	74
3.3 Sensibilités croisées	75
3.3.1 Sensibilités croisées pour $\mathbf{n}_{\text{eff}}^m$	76

3.3.2	Sensibilités croisées pour λ_{LPG}^m	77
3.3.3	Corrélation entre les sensibilités aux déformations axiales et radiales	79
3.4	Influence des différents paramètres	80
3.4.1	Influence de la différence d'indice entre le milieu extérieur et la gaine	80
3.4.2	Influence du pas du réseau	80
3.4.3	Influence du rayon de la gaine optique	81
3.4.4	Configurations hors-normes	83
3.5	Coefficient de couplage	85
3.5.1	Sensibilité à la déformation	85
3.5.2	Coefficient de couplage optimal	85
3.6	Conclusion	89
4	Dimensionnement numérique du capteur pour les mesures discriminées de ϵ_r et ϵ_z	91
4.1	Dimensionnement du capteur en considérant le LPG et le FBG comme deux structures indépendantes	93
4.1.1	Description du capteur	93
4.1.2	Principe de mesures	94
4.1.3	Méthode pour déterminer l'architecture optimale	94
4.1.4	Architecture optimisée	96
4.2	Effet de la superposition du LPG et du FBG sur les performances du capteur	102
4.2.1	Calcul du spectre : réseaux fibrés en général	102
4.2.2	Calcul du spectre d'un réseau de Bragg	103
4.2.3	Calcul du spectre d'un réseau longue période	104
4.2.4	Calcul du spectre d'une structure FBG+LPG	106
4.2.5	Cas de la structure optimisée	108
4.3	Conclusion du chapitre	109
5	Réponse des réseaux fibrés à la courbure	111
5.1	Généralités sur les courbures	113
5.2	État de l'art sur la modélisation des effets de courbure sur les modes guidés	116
5.2.1	Méthode perturbative	118
5.2.2	« Conformal Mapping »	126
5.2.3	Transformation tensorielle	129
5.2.4	Modélisation de la fibre courbée dans un repère axisymétrique	132
5.2.5	Comparaison des méthodes de modélisation	133
5.3	Modélisation d'une fibre courbée	135
5.3.1	Géométrie du modèle numérique	135
5.3.2	Maillage du modèle numérique	137
5.4	Effets des courbures sur les réseaux fibrés	139
5.4.1	Effets des courbures sur les modes de gaine	139
5.4.2	Modélisation des réseaux courbés	143
5.4.3	Courbure des réseaux de Bragg	145
5.4.4	Courbure des LPG	149
5.5	Sensibilité aux courbures des capteurs dimensionnés dans le Chapitre 4	153
5.6	Conclusion du chapitre	160
	Conclusion	161

Table des figures

1.1	<i>Principe de fonctionnement d'un FBG.</i>	17
1.2	<i>Schématisation d'un capteur de déformations disposé en surface de la structure à analyser. Ici les déformations axiales et radiales valent respectivement $\epsilon_z = \Delta L/L$ et $\epsilon_r = \Delta R/R$.</i>	18
1.3	<i>Schématisation d'un capteur de déformations enfoui.</i>	19
1.4	<i>Éprouvette instrumentée d'un FBG : géométrie.</i>	20
1.5	<i>Écart entre le modèle réel (équations 1.5 et 1.16) et le modèle usuel (équation 1.6) selon les propriétés mécaniques du matériau hôte.</i>	22
1.6	<i>Conditions aux limites considérées pour l'étude d'un cylindre soumis à un chargement thermique.</i>	24
1.7	<i>Déformation anisotrope de la section de la fibre et conséquence sur le spectre en réflexion du FBG.</i>	26
2.1	<i>Section et profil d'indice de la fibre considérée.</i>	31
2.2	<i>Composante électrique E_{0z} des 9 premiers modes de cœur hybrides HE.</i>	38
2.3	<i>Équation de dispersion des modes de cœur d'ordre azimutal $\ell = 1$.</i>	38
2.4	<i>Composantes électriques et intensité du mode de cœur fondamental HE_{11}.</i>	39
2.5	<i>Équation de dispersion des modes de gaine hybrides tracée pour $\ell = 1$.</i>	45
2.6	<i>Illustration de quelques couples modaux.</i>	46
2.7	<i>Mise en évidence des couples modaux.</i>	47
2.8	<i>Écart quadratique moyen entre les intensités des modes du couple 2.</i>	48
2.9	<i>Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2 = a_2^{\text{critique}}$.</i>	49
2.10	<i>Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2 = 8 \mu\text{m} < a_2^{\text{critique}}$.</i>	49
2.11	<i>Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2^{\text{critique}} < a_2 = 60 \mu\text{m}$.</i>	50
2.12	<i>Évolution de $1 - \mathcal{C}$ en fonction de a_2.</i>	52
2.13	<i>Évolution de la composante électrique E_{0x} des modes 7 et 8 en fonction du rayon de gaine interne a_2 (points a à c).</i>	52
2.14	<i>Évolution de la composante électrique E_{0x} des modes 7 et 8 en fonction du rayon de gaine interne a_2 (points d à f).</i>	53
2.15	<i>Influence des sauts d'indice sur la valeur du rayon de gaine critique.</i>	54
2.16	<i>Influence de la longueur d'onde sur le rayon de gaine critique.</i>	54
2.17	<i>Influence du rayon du cœur sur le rayon de gaine critique.</i>	55
2.18	<i>Rayon de gaine critique en fonction de a_1. L'échelle de couleur est fonction de V.</i>	56
2.19	<i>Rayon de gaine critique en fonction de a_1 et V.</i>	57
2.20	<i>Évolution du rapport C_3/C_2 en fonction du numéro du mode.</i>	58

3.1	<i>Illustration d'un réseau fibré quelconque.</i>	63
3.2	<i>Schématisation des différents types de couplage modal possible à travers un réseau fibré.</i>	64
3.3	<i>Principe de fonctionnement d'un FBG.</i>	65
3.4	<i>Principe de fonctionnement d'un LPG.</i>	66
3.5	<i>Influence de la longueur du FBG sur la largeur de la résonance de Bragg (a) et échanges d'amplitudes des modes couplés à travers le FBG (b).</i>	68
3.6	<i>Spectre en transmission de deux LPG de pas Λ_{LPG} et de produit κL identiques.</i>	70
3.7	<i>Variation des amplitudes des modes couplés à travers un LPG (a) et influence de la longueur du LPG sur son spectre en transmission (b).</i>	70
3.8	<i>Évolution de λ_{LPG}^m en fonction des déformations axiales et radiales pour un LPG dont les caractéristiques sont les suivantes : $m = 8$, $a_2 = 63 \mu m$ et $\Lambda_{LPG} = 456 \mu m$.</i>	73
3.9	<i>Distribution des tirages en fonction des différents paramètres libres.</i>	74
3.10	<i>Évolution des caractéristiques de la série en fonction du nombre de tirages.</i>	76
3.11	<i>Distribution des coefficients de dispersion δ_r^g et δ_z^g.</i>	76
3.12	<i>Évolution des dispersions δ^g en fonction des sensibilités α_{mean}^g.</i>	77
3.13	<i>Distribution des coefficients de dispersion δ_r^λ et δ_z^λ.</i>	78
3.14	<i>Évolution des dispersions δ^λ en fonction des sensibilités α_{mean}^λ.</i>	78
3.15	<i>Évolution de $\alpha_{z,mean}^\lambda$ en fonction de $\alpha_{r,mean}^\lambda$.</i>	79
3.16	<i>Distribution des sensibilités de λ_{LPG}^m aux déformations.</i>	80
3.17	<i>Influence de la différence d'indice entre la gaine et le milieu extérieur sur les sensibilités de la longueur d'onde résonante.</i>	81
3.18	<i>Influence du pas du réseau sur les sensibilités de la longueur d'onde aux déformations.</i>	82
3.19	<i>Influence du rayon de la gaine optique sur $\alpha_{z,mean}^\lambda$, l'ordre des modes est indiqué par une échelle colorimétrique.</i>	82
3.20	<i>Influence du rayon de la gaine optique sur $\alpha_{z,mean}^\lambda$.</i>	83
3.21	<i>Influence du rayon de la gaine sur la sensibilité à la déformation radiale. L'insert montre l'ajustement à l'équation (3.35) pour $m=3$ et $\Lambda_{LPG} \in [400 \mu m ; 450 \mu m]$.</i>	84
3.22	<i>Distribution des configurations extraordinaires.</i>	84
3.23	<i>Influence des paramètres sur le coefficient de couplage.</i>	86
3.24	<i>Variations relatives du coefficient de couplage en fonction des déformations axiales et radiales.</i>	87
3.25	<i>Variation de λ_{LPG}^m en fonction de Λ_{LPG} calculée pour plusieurs valeurs discrètes de a_2.</i>	88
3.26	<i>Évolution du coefficient de couplage des modes $m=5$ (Hyb₁₅) et $m=6$ (Hyb₁₆) en fonction du rayon a_2.</i>	88
4.1	<i>Capteur de déformations.</i>	93
4.2	<i>Méthodologie employée pour l'optimisation des paramètres du capteur.</i>	95
4.3	<i>Déterminant D et coefficient de couplage des modes 1, 3 et 5.</i>	97
4.4	<i>Déterminant D et coefficient de couplage des modes 7 et 9.</i>	98
4.5	<i>Détermination de la configuration optimale pour les différents modes.</i>	99
4.6	<i>Réseaux optimaux.</i>	100
4.7	<i>Spectre en transmission du capteur constitué de la structure FBG+LPG1.</i>	101
4.8	<i>Caractéristiques des réponses du capteur aux déformations ϵ_r et ϵ_z.</i>	102
4.9	<i>Spectre en transmission d'un FBG calculé pour les paramètres (4.16). La résonance associée au mode de cœur est centrée à $\lambda = 1,549 \mu m$. Aux plus courtes longueurs d'onde, les résonances associées aux modes de gaine sont observées.</i>	105
4.10	<i>Spectre en transmission d'un LPG calculé pour les paramètres (4.16). Quatre résonances sont présentes dans le spectre, elles sont associées aux modes de gaine impairs $m=1, 3, 5$ et 7.</i>	105

4.11	<i>Spectre en transmission d'une structure FBG+LPG calculé pour les paramètres (4.16). Le spectre comporte les résonances des deux réseaux.</i>	107
4.12	<i>Décalage des longueurs d'onde de résonance du FBG et du LPG en fonction des déformations radiales ϵ_r et axiales ϵ_z.</i>	109
5.1	<i>Modification de la géométrie de la fibre lorsqu'elle est courbée.</i>	113
5.2	<i>Conséquences des courbures sur les modes guidés.</i>	114
5.3	<i>Effet d'une courbure modérée sur la distribution spatiale du mode de cœur fondamental.</i>	115
5.4	<i>Effet d'une courbure sévère sur la distribution spatiale du mode de cœur fondamental.</i>	116
5.5	<i>Évolution de la polarisation du mode de cœur TE_{01} avec la courbure de la fibre, le centre de courbure est localisée à gauche des figures.</i>	117
5.6	<i>Schématisation de la courbure de la fibre.</i>	119
5.7	<i>Changements du champ électrique et de l'indice effectif du mode LP_{01} induits par la courbure de la fibre. Ces résultats ont été obtenus par méthode perturbative.</i>	126
5.8	<i>Principe du conformal mapping.</i>	126
5.9	<i>Exemple de profil d'indice obtenu par « conformal mapping ».</i>	129
5.10	<i>Les deux différentes approches pour la modélisation des fibres courbées : 1) on réalise un changement de coordonnées en conservant les caractéristiques matériaux ; 2) on conserve le système de coordonnées de départ et on modifie les caractéristiques matériaux. Dans les deux approches les distances optiques δ_0 et δ_1 sont équivalentes.</i>	131
5.11	<i>Assimilation de la fibre courbée à un tore.</i>	132
5.12	<i>Écart des indices effectifs calculés par 3 méthodes différentes.</i>	134
5.13	<i>Géométrie et profil d'indice de la fibre considérée.</i>	135
5.14	<i>Géométrie du modèle.</i>	136
5.15	<i>Schématisation d'une PML discrétisée.</i>	137
5.16	<i>Influence de l'épaisseur des couches absorbantes sur la valeur des indices effectifs des modes de cœur.</i>	138
5.17	<i>Maillage global du modèle.</i>	138
5.18	<i>Influence de a_2 et de λ sur la sensibilité des indices effectifs des modes de gaine aux courbures.</i>	140
5.19	<i>Influence de a_2 sur la stabilité des modes de gaine aux courbures.</i>	141
5.20	<i>Déformation du mode Hyb_{13} induite par la courbure de la fibre.</i>	142
5.21	<i>Influence de la longueur d'onde λ sur la stabilité des modes de gaine vis-à-vis de la courbure.</i>	143
5.22	<i>Schématisation d'un réseau fibré courbé.</i>	144
5.23	<i>Comparaison des décalages de la longueur de Bragg obtenus de manière exacte (di-chotomie) et approchée (λ constant).</i>	146
5.24	<i>Évolution de $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ en fonction de R_0.</i>	148
5.25	<i>Spectres en transmission de 3 FBG soumis à des courbures de rayons variés.</i>	150
5.26	<i>Choix du mode de gaine utilisé pour le dimensionnement du LPG insensible à la courbure.</i>	152
5.27	<i>Détermination de l'indice effectif moyen du réseau $\delta \overline{n_1}$ permettant d'obtenir un LPG insensible à la courbure.</i>	153
5.28	<i>Spectre du LPG peu sensible vis-à-vis de la courbure.</i>	154
5.29	<i>Spectre du réseau LPG2.</i>	155
5.30	<i>Spectre du LPG1.</i>	155
5.31	<i>Spectre du FBG issu du capteur LPG1.</i>	156
5.32	<i>Détermination graphique de l'indice effectif moyen $\delta \overline{n_1}$ optimal.</i>	157
5.33	<i>Spectre du LPG1 modifié pour minimiser sa sensibilité à la courbure de la fibre.</i>	158
5.34	<i>Résonance du FBG observée dans le spectre en transmission du capteur redimensionné.</i>	158

5.35 *Caractéristiques des réponses aux déformations ϵ_r et ϵ_z du capteur insensible à la courbure.* 159

Liste des tableaux

1.1	<i>Géométrie et caractéristiques mécaniques d'un barreau de résine instrumenté avec un FBG.</i>	23
2.1	<i>Champs électromagnétiques des modes TE.</i>	36
2.2	<i>Champs électromagnétiques des modes TM.</i>	37
2.3	<i>Rayons de gaine critiques relevés pour les cinq premiers couples modaux.</i>	47
2.4	<i>Paramètres de fibres utilisées pour les modélisations.</i>	52
2.5	<i>Ajustement du type $a_2^{\text{critique}} = C_1 a_1 + (C_2 V - C_3)^2 + C_4 a_1 V$.</i>	58
3.1	<i>λ_{LPG}^m : description de la série.</i>	77
4.1	<i>Caractéristiques des réseaux longue période.</i>	100
5.1	<i>Synthèse des expressions relatives au champ électrique des modes $LP_{\ell m}$ calculées dans la fibre courbée par la méthode perturbative.</i>	125
5.2	<i>Synthèse des expressions relatives à la constante de propagation β^2 des modes $LP_{\ell m}$ calculées dans la fibre courbée par la méthode perturbative.</i>	125
5.3	<i>Configuration des PML.</i>	137
5.4	<i>Valeurs de λ et de a_2 utilisées dans les simulations.</i>	139
5.5	<i>Réseaux modélisés.</i>	148
5.6	<i>Paramètres du LPG peu sensible aux courbures.</i>	153
5.7	<i>Récapitulatif des dimensionnements obtenus dans le chapitre 4.</i>	154
5.8	<i>Dimensionnement du capteur permettant au capteur d'être peu sensible à la courbure.</i>	159

Introduction

La fibre optique est un outil qui s'est très largement vulgarisé, en effet l'essor des télécommunications à haut débit par fibres optiques à la fin du siècle dernier et le déploiement de la fibre optique chez l'abonné aujourd'hui ont favorisé le développement de l'ensemble de la filière des composants à fibres optiques. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que parallèlement à ce marché économique majeur des télécommunications, des marchés de niche ont vu le jour et c'est notamment le cas du marché des capteurs à fibres optiques. Ce dernier domaine étant moins normatif que celui lié au domaine des télécommunications, bien souvent à une application donnée correspond un cahier des charges donné pour lequel un composant sur étagère ne peut répondre à toutes les exigences. Aujourd'hui bon nombre de grandeurs physiques (températures, déformations, pression, concentration de composés chimiques, ...) sont accessibles avec l'emploi d'outils à base de fibres optiques. Bien souvent c'est le caractère peu intrusif et la faible dépendance aux perturbations électromagnétiques qui font du capteur à fibre optique un excellent candidat pour réaliser une mesure dans un environnement complexe.

La mesure de déformations a été très rapidement mise en oeuvre à l'aide de fibre optique, et ce parce que dans les domaines liés à la mécanique (aéronautique, génie civil,...) c'est un des paramètres pertinents pour réaliser un contrôle santé d'une pièce ou d'une structure en service. Le mécanicien dispose déjà d'outils qu'il maîtrise et qu'il a souvent déjà éprouvés par le passé. Aussi, il est plus familier à l'emploi de jauges de déformations résistives et de cordes vibrantes. Il a trouvé un intérêt à l'emploi de la fibre optique lorsque ses outils de références étaient proscrits ou devenaient prohibitifs : environnement électromagnétique sévère, forte exposition aux radiations, mesures déportées à longue distance ou encore très grand nombre de points de mesures. Pour pouvoir répondre à ces attentes, il existe deux grandes familles de techniques de mesure de déformations par fibres optiques : les mesures réparties reposent sur la mesure de la rétrodiffusion Rayleigh ou Brillouin le long de la fibre optique pour accéder à son état de déformation. Les mesures distribuées, sont quant à elles, des mesures ponctuelles réalisées en des endroits localisés de la fibre optique. Parmi ces senseurs, on peut trouver des cavités Fabry-Pérot mais le plus répandu d'entre eux est le réseau de Bragg fibré plus communément appelé FBG.

Quelle que soit la technologie à fibre optique employée, la mesure de déformation repose sur le fait que la fibre subit une déformation "pilotée" par celle de la structure qu'elle est censée mesurer. Dans le cas d'un allongement longitudinal, c'est à dire le long de l'axe de symétrie de la fibre optique, cette dernière subit à la fois une déformation radiale et une déformation axiale. Très généralement, le système d'interrogation ne renvoie qu'une mesure alors qu'en pratique cette mesure dépend des deux grandeurs précitées. Ce qui est fait communément pour s'affranchir de ce problème, c'est de lier la déformation radiale à la déformation axiale via le coefficient de Poisson de la silice en considérant pour la fibre, un modèle mécanique d'une poutre à section circulaire libre de se déformer radialement. On se ramène ainsi à une équation à une seule inconnue. Cette hypothèse est bien sûr valable si le capteur est dans l'air. Si l'on connaît bien les caractéristiques mécaniques du matériau dans lequel le capteur est noyé, on peut également espérer corriger cet effet. À l'inverse, lorsque les caractéristiques mécaniques ne sont pas connues, ce qui est souvent le cas en pratique, notamment lorsque l'on cherche

à les mesurer, il est alors nécessaire de lever cette indéterminée. C'est pourquoi nous avons l'ambition dans ces travaux de thèse de développer un capteur à même de mesurer simultanément déformation radiale et déformation longitudinale. Le capteur sur lequel nous avons focalisé nos efforts est le capteur à réseau de Bragg fibré et sur les structures que nous pouvions lui adjoindre pour pouvoir répondre à notre problématique.

Le premier chapitre contient un descriptif détaillé du contexte et de la problématique de la thèse. On se posera ces quelques questions : Comment fonctionne un capteur de déformations à réseau de Bragg ? Quelles erreurs commet-on sur la mesure enfouie de la déformation axiale lorsque l'on utilise un capteur de type FBG ? À la fin de ce chapitre, une revue de la littérature sera réalisée afin d'identifier une architecture de capteur permettant de mesurer simultanément la déformation axiale et la déformation radiale au cœur des matériaux.

Le second chapitre est consacré aux modes guidés dans les fibres optiques. En effet, il est primordial de connaître et de comprendre les caractéristiques optiques de ces modes car ils participent au fonctionnement des réseaux fibrés. Dans un premier temps, la méthode permettant le calcul des modes de cœur et des modes de gaine dans une fibre à saut d'indice est présentée. Puis, nous focaliserons notre attention sur les modes de gaine car beaucoup moins étudiés dans la littérature que les modes de cœur. Nous présenterons des résultats nouveaux sur les caractéristiques optiques des modes de gaine, notamment l'existence de rayons de gaine particuliers pour lesquels deux modes de gaine partagent la même structure électromagnétique.

Le troisième chapitre est consacré aux réseaux fibrés et à une étude de la sensibilité des réseaux longue période (LPG) à la déformation axiale et à la déformation radiale.

Le chapitre 4 présente une méthode numérique de dimensionnement de l'architecture du capteur sélectionnée. Le dimensionnement est réalisé en se basant sur deux contraintes principales : une réponse linéaire du capteur à la déformation et une résolution de $1\ \mu\epsilon$ sur la mesure de la déformation axiale.

Le dernier chapitre est dédié à l'étude des modes guidés dans les fibres courbées. Une revue de la littérature est d'abord réalisée afin de répertorier les principales méthodes numériques utilisées pour l'étude des fibres courbées. Un comparatif entre ces méthodes est ensuite effectué afin de sélectionner la méthode numérique la plus précise et la plus complète pour l'étude des modes guidés dans une fibre courbée. Puis nous étudions le comportement des modes de gaine vis-à-vis de la courbure de la fibre en cherchant à identifier les paramètres opto-géométriques de la fibre qui influent le plus sur ce comportement. Nous proposons également une nouvelle approche dans la modélisation des FBG et des LPG courbés qui nous permet finalement d'étudier la sensibilité de notre capteur à la courbure.

Chapitre 1

Mesure de déformations au cœur des matériaux

Sommaire

1.1	Mesure de déformations en surface	17
1.2	Mesure de déformations au sein des matériaux	18
1.2.1	Étude d'un cylindre en traction simple	19
1.2.2	Étude d'un cylindre soumis à un chargement thermique	23
1.2.3	Vers un capteur multiaxes pour la mesure de déformations au cœur des structures	25
1.3	Solutions proposées pour la mesure simultanée de ϵ_r et ϵ_z	26
1.3.1	Capteur à réseaux de Bragg superposés	27
1.3.2	Capteur à réseau de Bragg inscrit dans une fibre à maintien de polarisation	27
1.3.3	Capteur à réseau de Bragg et réseau longue période superposés	27
1.4	Conclusion du chapitre	28

1.1 Mesure de déformations en surface

Depuis la fin des années 90, l'utilisation des réseaux de Bragg (FBG) comme capteur de déformations a rencontré un vif succès [1, 2, 3, 4]. Cet engouement s'explique en partie par les nombreux avantages que procurent les FBG par rapport aux autres technologies habituellement employées pour ce type d'application. Nous pouvons citer, entre autres, leur faible dimension, leur insensibilité aux champs électromagnétiques ou encore la possibilité d'effectuer des mesures dans des milieux hostiles (radioactivité, milieu marin, milieu chimiquement instable ...).

Un FBG est une fibre optique dont on a modulé périodiquement l'indice de réfraction du cœur (voir la figure 1.1). Cette modulation d'indice se comporte comme un miroir qui réfléchit une fine bande

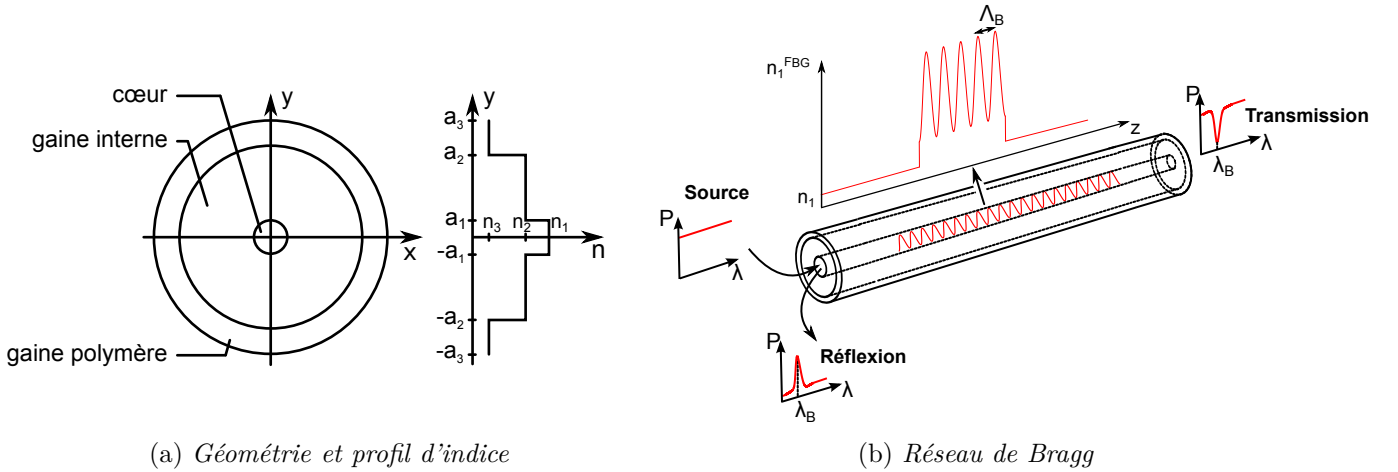


FIGURE 1.1: Principe de fonctionnement d'un FBG.

spectrale de la lumière incidente. Cette bande spectrale est centrée à la longueur d'onde de Bragg λ_B [5] :

$$\lambda_B = 2n_{\text{eff}}^{\text{co}} \Lambda_B \quad (1.1)$$

où $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ est l'indice effectif de la lumière guidée dans le cœur et Λ_B est la période de modulation.

Lorsque le FBG est soumis à des contraintes mécaniques, il se déforme. L'indice effectif et le pas du réseau changent en conséquence, ce qui produit un décalage de la longueur d'onde de Bragg :

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = \frac{\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}{n_{\text{eff}}^{\text{co}}} + \frac{\Delta \Lambda_B}{\Lambda_B} \quad (1.2)$$

La mesure de ce décalage permet, après étalonnage et à l'aide d'un modèle *ad hoc*, de remonter à la sollicitation exercée. L'intérêt de cette procédure réside dans le fait que l'information est codée en longueur d'onde, et donc insensible à toute fluctuation d'intensité, ce qui rend les mesures beaucoup plus robustes.

Classiquement, les mesures de déformations sont effectuées à la surface de la structure à analyser (voir figure 1.2), avec des rosettes notamment. Dans cette configuration, le FBG est ancré à la surface de la structure par deux points de colle disposés à ses extrémités. Lorsque la structure se déforme, les points d'ancrage suivent la déformation de la surface et imposent au réseau de se déformer axialement. Cette déformation axiale provoque une déformation radiale du capteur du fait de ses propriétés élastiques. Ces déformations induisent une variation des indices de réfraction de la fibre par effet photoélastique :

$$\Delta \left(\frac{1}{n_{ij}^2} \right) = p_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

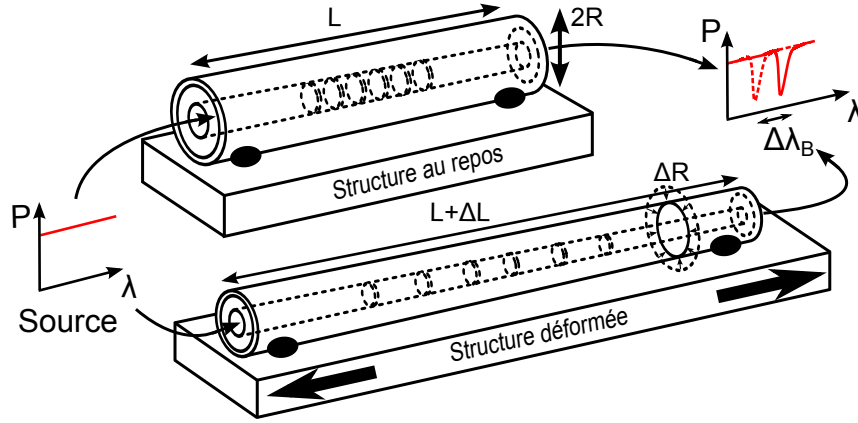


FIGURE 1.2: Schématisation d'un capteur de déformations disposé en surface de la structure à analyser. Ici les déformations axiales et radiales valent respectivement $\epsilon_z = \Delta L/L$ et $\epsilon_r = \Delta R/R$.

où p_{ijkl} sont les composantes du tenseur de photoélasticité et ϵ_{kl} les composantes du tenseur de déformation. Dans le cas présent, la déformation est isotrope dans le plan transverse. En supposant que la variation de l'indice effectif $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ avec la déformation est identique à celle des indices de réfraction de la fibre, nous pouvons écrire [6] :

$$\frac{\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}{n_{\text{eff}}^{\text{co}}} = -\frac{n_{\text{eff}}^{\text{co}2}}{2} [(p_{11} + p_{12})\epsilon_r + p_{12}\epsilon_z] \quad (1.4)$$

où $\epsilon_r = \epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ est la déformation radiale et $\epsilon_z = \epsilon_{33}$ la déformation axiale [6, 7]. Cette variation provoque un décalage de la longueur d'onde de Bragg qui, selon (1.2), vaut :

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = -\frac{n_{\text{eff}}^{\text{co}2}}{2} (p_{11} + p_{12})\epsilon_r + \left(1 - \frac{n_{\text{eff}}^{\text{co}2}}{2} p_{12}\right) \epsilon_z \quad (1.5)$$

On le voit, la variation de la longueur d'onde de Bragg dépend en fait de deux composantes du tenseur de déformation a priori inconnues. Étant donné que le capteur est en surface, il est libre de se déformer radialement, dans ces conditions sa déformation radiale est liée à sa déformation axiale par le coefficient de Poisson ν de la fibre : $\epsilon_r = -\nu\epsilon_z$. Dans ce cas, il ne subsiste plus qu'une inconnue qui peut être déterminée à l'aide d'une unique mesure de décalage de longueur d'onde de Bragg :

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = \left\{1 - \frac{n_{\text{eff}}^{\text{co}2}}{2} [p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})]\right\} \epsilon_z \quad (1.6)$$

La relation (1.6) est massivement utilisée dans la littérature, au point qu'elle tend à acquérir le statut de relation universelle. Or cette relation n'est valide qu'à deux conditions. La première c'est que l'indice effectif $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ varie comme les indices de réfraction de la fibre lorsque le capteur se déforme, ce qui est vrai à 1 % près [8]. La seconde c'est que la déformation radiale du capteur soit liée à sa déformation axiale par le coefficient de Poisson. Dans la suite, nous mettrons en lumière les limites de validité de la relation (1.6). Nous verrons que cette relation lorsqu'elle est utilisée à mauvais escient implique des erreurs sur la mesure de la déformation axiale ϵ_z .

1.2 Mesure de déformations au sein des matériaux

Le problème de la mesure de déformations en surface est qu'elle ne permet pas toujours d'appréhender le comportement global de la structure ou de détecter des anomalies (fissures, délaminage

par exemple). C'est le cas par exemple des structures épaisses, où seules les déformations localisées à proximité de la surface sont décelables. Pour avoir le maximum d'informations sur l'état mécanique d'un objet, il est recommandé de mesurer ses déformations en son cœur. Pour ce faire, le capteur doit être enfoui dans la structure à analyser comme montré sur la figure 1.3. À en juger le nombre

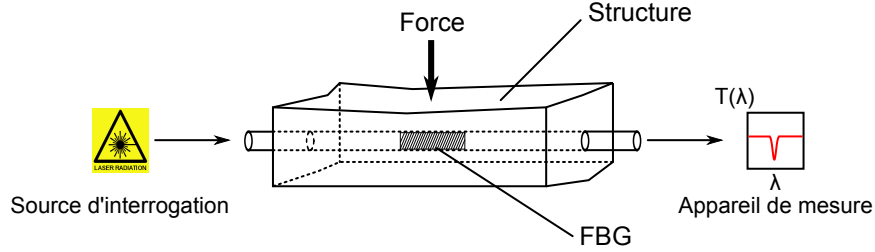


FIGURE 1.3: Schématisation d'un capteur de déformations enfoui.

de publications croissant, la mesure de déformations au cœur des matériaux semble répondre à un réel besoin. Rien que ces six dernières années, on constate un véritable engouement pour la mesure de déformations au sein de matériaux composites [9, 10, 11, 12]. Dans la plupart des cas, le capteur utilisé pour réaliser ces mesures est un FBG.

Cependant des précautions doivent être prises lors de l'utilisation d'un FBG comme capteur enfoui. En effet, des couplages mécaniques ont lieu entre le capteur et son environnement. La fibre n'étant plus libre de se déformer radialement, la déformation axiale n'est plus reliée à la déformation radiale par le coefficient de Poisson. Le décalage de la longueur d'onde de Bragg contient alors les informations relatives à ces deux déformations qu'il est impossible de décorréler.

Dans les sections suivantes, nous chercherons à évaluer l'importance de la corrélation entre la déformation axiale ϵ_z et la déformation radiale ϵ_r du capteur lorsque celui-ci est enfoui dans un matériau isotrope transverse. À l'aide de ce résultat et au travers de quelques cas d'étude, nous quantifierons les erreurs pouvant être commises sur la mesure de ϵ_z lorsque le couplage mécanique entre le capteur et son environnement n'est pas pris en compte.

Précisons que, par la suite, la température est supposée être connue lors de la mesure des déformations, par exemple par le biais d'un réseau de Bragg libre. De ce fait, les effets thermo-optiques ne sont pas considérés car une correction sur la réponse du capteur peut être appliquée pour compenser ces effets.

1.2.1 Étude d'un cylindre en traction simple

Considérons un FBG placé au centre d'une éprouvette cylindrique de rayon R_e constituée d'un matériau composite de propriétés mécaniques isotropes transverses. Ce matériau composite est renforcé par des fibres de renfort parallèles les unes aux autres. Précisons que le FBG est disposé dans l'éprouvette avec la même orientation que ces fibres comme illustré dans la figure 1.4. L'éprouvette est soumise à une traction uniforme $\epsilon_z \approx \sigma_z^h / E_1^h$ et reste libre de se déformer radialement. On assimile la fibre optique à un cylindre de rayon R_i homogène et isotrope fait de silice dont les constantes d'élasticité sont E^f et ν^f . Le matériau hôte, quant à lui, possède les constantes d'élasticité suivantes : E^h et ν^h .

L'étude d'un cylindre en traction simple est un problème académique classique (voir [13]). La symétrie axiale, du chargement et de la géométrie, permet d'obtenir le champ de déplacement $\vec{u}$ sous une forme simplifiée :

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_r^{f,h} \vec{e}_r \\ u_z^{f,h} \vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C^{f,h} r + \frac{D^{f,h}}{r} \vec{e}_r \\ K^{f,h} z \vec{e}_z \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

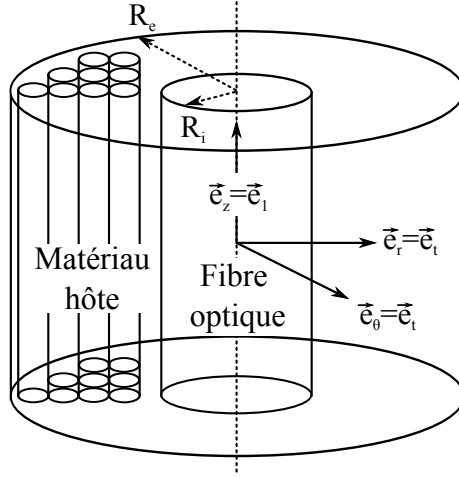


FIGURE 1.4: Éprouvette instrumentée d'un FBG : géométrie.

où $C^{f,h}$, $D^{f,h}$ et $K^{f,h}$ sont des constantes déterminées à l'aide des conditions aux limites du problème et r désigne la coordonnée radiale courante dans le cylindre. Cette expression est valable à la fois pour décrire le champ de déplacement dans la fibre optique (cylindre plein) et dans le matériau hôte (cylindre évidé). À partir de ces champs de déplacement, on obtient le tenseur de déformation $\bar{\epsilon}$ tel que : $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$, soit :

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & & \\ & \frac{u_r}{r} & \\ & & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{f,h} - \frac{D^{f,h}}{r^2} & & \\ & C^{f,h} + \frac{D^{f,h}}{r^2} & \\ & & K^{f,h} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

puis en utilisant la loi de Hooke, on obtient le tenseur des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}\epsilon_{r\theta} \\ \sqrt{2}\epsilon_{z\theta} \\ \sqrt{2}\epsilon_{zr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_l} & \frac{-\nu_{lt}}{E_l} & \frac{-\nu_{lt}}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{lt}}{E_l} & \frac{1}{E_t} & \frac{-\nu_{tt}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{lt}}{E_l} & \frac{-\nu_{tt}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu_{tt})}{E_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{lt}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{lt}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sqrt{2}\sigma_{r\theta} \\ \sqrt{2}\sigma_{z\theta} \\ \sqrt{2}\sigma_{zr} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

où $G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{1t})}$ est le module de cisaillement, l indique la direction longitudinale $\vec{e}_z$ et t représentent les directions transverses, c'est à dire toutes les directions contenues dans la section de la fibre optique.

Dans la suite de ce document, les quantités indicées d'un f se rapportent au FBG, tandis que celles indicées d'un h sont liées au matériau hôte. On note ainsi respectivement $\vec{u}^f$, $\bar{\sigma}^f$ et $\bar{\epsilon}^f$ le champ de déplacement, le tenseur de contraintes et de déformations dans la fibre alors que l'on utilisera les notations $\vec{u}^h$, $\bar{\sigma}^h$ et $\bar{\epsilon}^h$ pour l'éprouvette. Ces tenseurs sont différents dans la fibre et dans l'éprouvette. Il y a alors six composantes à calculer *i.e.* C^f , D^f , K^f , C^h , D^h , K^h pour résoudre ce problème. On les obtient grâce aux conditions aux limites suivantes :

- déplacement radial nul au centre de l'éprouvette (symétrie axiale)

$$u_r^f(0) = 0 \Rightarrow D^f = 0 \quad (1.10)$$

- équivalence des déplacements axiaux (absence de glissement à l'interface entre le matériau hôte et le FBG)

$$u_z^f = u_z^h \Rightarrow K^f = K^h = K = \epsilon_z \approx \frac{\sigma_z^h}{E_1^h} \quad (1.11)$$

- continuité des déplacements radiaux à l'interface entre le FBG et le milieu (cohésion entre le matériau hôte et le FBG)

$$u_r^h(R_i) = u_r^f(R_i) \Rightarrow C^h R_i + \frac{D^h}{R_i} = C^f R_i \quad (1.12)$$

- équilibre des contraintes radiales à l'interface entre le FBG et le milieu (principe de l'action réaction)

$$\sigma_{rr}^f(R_i) = \sigma_{rr}^h(R_i) \Rightarrow \lambda^f(2C^f + K) + 2\mu^f C^f = \alpha_1 \left(C^h - \frac{D^h}{R_i} \right) + \alpha_2 \left(C^h + \frac{D^h}{R_i} \right) + \alpha_3 K \quad (1.13)$$

où $\mu^f = \frac{E^f}{2(1+\nu^f)}$ et $\lambda^f = \frac{\nu E^f}{(1-2\nu)(1+\nu^f)}$ sont les coefficients de Lamé de la fibre. Les termes α_i sont, quant à eux, définis par :

$$\alpha_1 = \frac{E_l^h E_t^h - \nu_{lt}^h E_t^{h2}}{(1 + \nu_{tt}^h)(1 - \nu_{tt}^h - 2\nu_{lt}^{h2})} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\nu_{tt}^h E_l^h E_t^h + \nu_{lt}^{h2} E_t^{h2}}{(1 + \nu_{tt}^h)(1 - \nu_{tt}^h - 2\nu_{lt}^{h2})} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{\nu_{lt}^h E_l^h E_t^h}{(1 - \nu_{tt}^h - 2\nu_{lt}^{h2})}$$

- contrainte radiale nulle sur le bord extérieur

$$\sigma_{rr}^h(R_e) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \left(C^h - \frac{D^h}{R_i} \right) + \alpha_2 \left(C^h + \frac{D^h}{R_i} \right) + \alpha_3 K = 0 \quad (1.14)$$

Il est possible de simplifier les expressions obtenues pour C^f , C^h et D^h en faisant l'hypothèse d'un milieu hôte infini par rapport à la fibre optique *i.e.* en posant $\frac{R_i^2}{R_e^2} \simeq 0$. Pour calculer la contrainte dans l'éprouvette on se place loin du FBG ce qui revient à négliger $\frac{R_i^2}{r^2}$ puisque $r \rightarrow R_e$. On obtient ainsi un résultat généralisable à n'importe quelle section d'éprouvette isotrope transverse soumise à de la traction pure :

$$\begin{aligned} D^f &= 0 & D^h &\approx 0 \\ \epsilon_r^h &= C^h \approx -\nu_{lt}^h \epsilon_z \\ \epsilon_r^f &= C^f \approx -\kappa \epsilon_z \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec :

$$\kappa = \frac{-\nu^f E^f - \nu^f E^f \nu_{tt}^h - \nu_{lt}^h E_l^h + \nu_{lt}^h E_l^h \nu^f + 2\nu_{lt}^h E_l^h (\nu^f)^2}{-E^f - E^f \nu_{tt}^h - E_t^h + E_t^h \nu^f + 2E_t^h (\nu^f)^2} \quad (1.16)$$

On le voit dans l'expression précédente, la déformation radiale $\epsilon_r^f = C^f \approx -\kappa \epsilon_z$ est effectivement constante dans le FBG, mais celle-ci n'est pas égale à $-\nu^f \epsilon_z$. Il y a un couplage entre la déformation dans le milieu hôte et dans la fibre optique, de telle sorte que cette dernière est influencée par les propriétés du matériau dans lequel elle est insérée. Ainsi utiliser la relation (1.6) en considérant $\epsilon_r^f = -\nu \epsilon_z$ revient à commettre une erreur sur ϵ_z dépendante du couple de matériaux constitutifs du

FBG et de la structure hôte. La figure 1.5 permet de la quantifier. Elle montre l'écart en pourcentage sur ϵ_z obtenue pour un $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ fixé (calculé avec $p_{11} = 0.113$, $p_{12} = 0.252$, $n_{\text{eff}} = 1.447467$ [14]) lorsque l'on remplace ϵ_r^f par $-\nu^f \epsilon_z$ en lieu et place de $-\kappa \epsilon_z$ dans (1.6). Pour tracer cette figure, nous avons imposé les coefficients d'élasticité de la fibre optique : $\nu^f = 0.17$ et $E^f = 70000$ MPa. Ces valeurs sont celles proposées par Bertholds et Dandliker [15].

Lorsque le coefficient de Poisson ν^f de la fibre optique est égal à celui du matériau hôte ν^h , l'écart entre le modèle classique et le modèle prenant en compte la déformation transverse est nul. Comme le montre la formule (1.16), si $\nu^f = \nu_{lt} = \nu_{tt}$ alors $\kappa = \nu^f$. L'équivalence des coefficients ν^f , ν_{lt} et ν_{tt} est matérialisée par la ligne de tirets. La figure 1.5 montre également que pour un coefficient de Poisson donné, plus le module d'élasticité du matériau hôte est élevé et plus la prise en compte de la déformation transverse est importante. En effet, plus la structure hôte est rigide et plus elle va influencer sur la déformation radiale du capteur optique. Ainsi, l'effet des déformations transverses sur la mesure de la déformation axiale d'un FBG soumis à une sollicitation de traction, sera quasiment négligeable si ce dernier est noyé dans une résine polyester non chargée. À l'inverse, on peut s'attendre à une évaluation approximative de la déformation axiale si le FBG est noyé dans le sens des fibres d'un composite isotrope transverse. Par exemple une erreur supérieure à 1% est commise lorsque ν^f est utilisé à la place de κ dans l'équation (1.6), dans le cas d'un matériau composite isotrope transverse composé de résine époxy ($E=3.1$ GPa, $\nu = 0.4$) et renforcé par des fibres de Kevlar ($E=130$ GPa, $\nu = 0.4$ [16]) dont le volume représente 75 % du volume totale de la pièce composite.

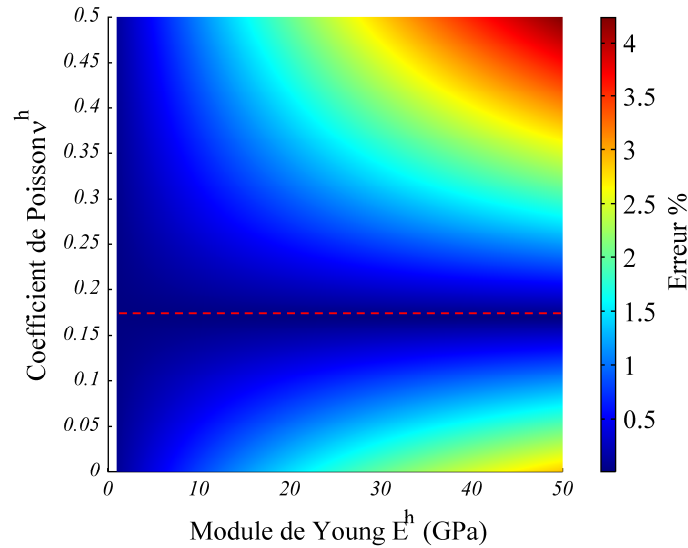


FIGURE 1.5: Écart entre le modèle réel (équations 1.5 et 1.16) et le modèle usuel (équation 1.6) selon les propriétés mécaniques du matériau hôte.

Dans ce cas simple, la connaissance de $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ ne suffit donc pas à déterminer exactement la déformation axiale du FBG et de la structure hôte. Pour mesurer cette quantité plusieurs pistes sont possibles :

- disposer de ϵ_r et utiliser la formule (1.5) ;
- procéder à un étalonnage expérimental du capteur dans son environnement [17] ;
- utiliser le modèle analytique précédent ce qui implique de connaître précisément E_l , E_t , ν_{lt} et ν_{tt} .

1.2.2 Étude d'un cylindre soumis à un chargement thermique

Supposons maintenant qu'une fibre soit incluse dans une résine thermodurcissable du type de celles qui sont employées dans les matériaux composites. La résine initialement liquide est chauffée et devient solide. Son coefficient de dilatation thermique ainsi que ses modules mécaniques se stabilisent pendant la phase de cuisson puis la température est progressivement baissée. En se refroidissant, elle exerce une contrainte mécanique sur la fibre aussi bien radialement qu'axialement. Cette configuration, dont nous proposons ici une modélisation simplifiée, peut se retrouver lors du suivi de fabrication d'un matériau plastique. On imagine alors que des FBG ont été positionnés dans le moule avant l'injection de la résine. À travers deux cas d'école, nous allons vérifier la validité de l'analyse des mesures par la relation (1.6).

Nous allons étudier le comportement d'un cylindre en résine époxy à la fin de la phase de post-cuisson, comprenant en son centre un FBG soumis à une baisse de température ΔT de -100 K. Les propriétés du milieu hôte et du capteur sont données dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1: Géométrie et caractéristiques mécaniques d'un barreau de résine instrumenté avec un FBG.

	FBG	Résine
E (MPa)	70000	3100
ν	0.17	0,4
$\alpha(K^{-1})$	5.10^{-7}	114.10^{-6}
ϕ	125 μm	20 mm

À l'instar de ce qui a été présenté dans l'étude précédente, le champ de déplacement et le champ de déformation obéissent respectivement aux relations (1.8) et (1.9). En revanche la loi de Hooke comporte pour cet exemple une partie relative au changement de température *i.e.*

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\epsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T \bar{I} \quad (1.17)$$

où α désigne le coefficient de dilatation thermique. Deux types de conditions aux limites sont envisagées (cf. figure 1.6). Dans le premier cas, le cylindre est libre de se déformer à la fois radialement et axialement. Dans le second cas, la surface radiale est libre tandis que les deux extrémités sont bloquées¹.

1.2.2.1 Cas 1 : Le cylindre est libre de se déformer axialement et radialement.

Dans ce premier exemple de chargement thermique, la baisse de température entraîne une rétraction du cylindre hôte tant radiale que axiale. Pour une structure en résine telle que $R_e \gg R_i$ on a $\epsilon_r^h \approx \epsilon_z^h \approx -\alpha^h \Delta T$. Pour calculer les champs de déformation dans le FBG avec ce type de conditions aux limites, on peut utiliser les équations (1.10) et (1.12) relatives aux déplacements radiaux. L'équilibre des contraintes radiales à l'interface entre le FBG et le milieu $\sigma_{rr}^f(R_i) = \sigma_{rr}^h(R_i)$, ainsi que la condition de contrainte radiale nulle sur le bord extérieur $\sigma_{rr}^h(R_e) = 0$, où le tenseur $\bar{\sigma}$ est obtenu avec la loi de comportement (1.17), fournissent deux équations supplémentaires. L'équivalence des déplacements axiaux $u_z^f = u_z^h$ permet d'écrire $K^f = K^h = K$, où K est une inconnue. Il nous manque une équation pour résoudre notre problème. Elle est fournie par l'équilibre des efforts sur la paroi transversale du cylindre :

$$\int_0^{R_i} r \sigma_z^f dr + \int_{R_i}^{R_e} r \sigma_z^h dr = 0 \quad (1.18)$$

1. On imagine ici une configuration particulière du moule ou de la géométrie de la pièce amenant ces conditions aux limites.

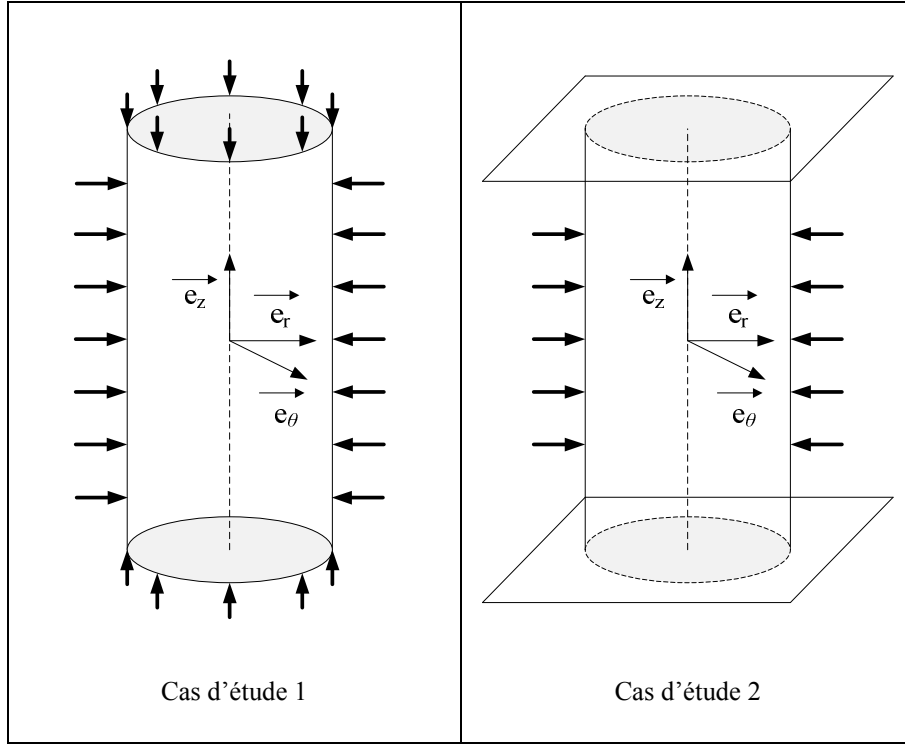


FIGURE 1.6: Conditions aux limites considérées pour l'étude d'un cylindre soumis à un chargement thermique.

En utilisant les caractéristiques mécaniques et géométriques exposées dans le tableau 1.1, nous obtenons $C^f = \epsilon_r^f = 1562 \mu\epsilon$, $D^h \approx 0$. Ainsi $C^h = -11400 \mu\epsilon \approx \epsilon_r^h$ et $K = \epsilon_z = -11400 \mu\epsilon$.

La rétractation du cylindre en résine due à la dilatation thermique a pour principal effet de mettre le FBG en compression axiale. Cela entraîne par effet Poisson une augmentation du rayon du FBG alors même que la structure hôte se contracte radialement.

D'après la formule (1.5) augmentée d'un terme $a\Delta T$, avec $a \approx 7,810^{-6} K^{-1}$ [15] prenant en compte les fluctuations de température :

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = -\frac{n_{\text{eff}}^2}{2}(p_{11} + p_{12})\epsilon_r + \left(1 - \frac{n_{\text{eff}}^2}{2}p_{12}\right)\epsilon_z + a\Delta T \quad (1.19)$$

la baisse de température de 100 K, dans un réseau de longueur d'onde de Bragg initiale de 1550 nm, se traduira par un décalage de longueur d'onde de Bragg $\Delta\lambda_B = -15.14$ nm.

L'interprétation du décalage de longueur d'onde de Bragg à l'aide de la relation (1.6), augmenté du terme $a\Delta T$, donne une déformation longitudinale ϵ_z de $-11220 \mu\epsilon$ soit un écart de 1,6% avec la réalité.

1.2.2.2 Cas 2 : Le cylindre est libre de se déformer radialement mais est bloqué axialement.

Dans ce second exemple la déformation axiale est bloquée *i.e.* $\epsilon_z = 0$. Ainsi, le cylindre en époxy se rétractera seulement radialement. Ce problème obéit aux mêmes équations que le premier exemple. Toutefois, dans ce cas, nous n'utilisons pas la relation (1.17) puisque nous avons directement $\epsilon_z^f = \epsilon_z^h = 0$.

La baisse de température de 100 K provoque une déformation radiale dont la valeur est : $\epsilon_r^h = -15960 \mu\epsilon$ dans la résine et de $\epsilon_r^f = -438 \mu\epsilon$ dans le réseau. Cela se traduit par un décalage

de longueur d'onde de Bragg de $-0,95$ nm. Le dépouillement de ce décalage avec la formule (1.6) conduirait à penser que le FBG a subi un allongement de $209 \mu\epsilon$ alors qu'en réalité il a subi une déformation purement radiale. Dans ce cas, l'analyse classique mène à une conclusion parfaitement erronée.

Bien sûr, les deux exemples que nous venons de traiter sont purement académiques. Le vrai problème de l'interprétation des signaux optiques lors du suivi d'un procédé de fabrication réside dans le fait que les conditions aux limites sont rarement bien connues. Dans une expérience réelle, les conditions aux limites seront comprises entre ces deux cas limites, ce qui implique que l'interprétation du décalage de λ_B donnera une erreur indéterminée a priori, mais qui peut ne pas être négligeable.

Ces quelques exemples montrent qu'il est nécessaire d'établir un modèle du couplage entre un matériau hôte et le capteur à fibre optique plus élaboré que le modèle classique si l'on veut mesurer la déformation axiale d'un capteur enfoui sans que sa valeur ne soit altérée par l'effet de la déformation radiale.

On est alors confronté d'après (1.5), au fait que, même pour un matériau isotrope, le problème est à deux inconnues. Il est donc indispensable de réaliser deux mesures au sein du même capteur, ce qui n'est pas possible avec les capteurs à réseaux de Bragg classiques et leur système d'interrogation associé.

1.2.3 Vers un capteur multiaxes pour la mesure de déformations au cœur des structures

Dans les problèmes précédents, nous avons considéré des matériaux isotropes ou isotropes transverses et ce notamment pour visualiser le couplage capteur-structure hôte grâce à la surface de réponse proposée sur la figure 1.5.

Cette figure montre pourtant que c'est pour les matériaux les plus rigides que l'erreur sur la mesure sera la plus importante. En termes d'applications, on pense bien sûr à des composites constitués de résine et de tissus de renforts (fibre de carbone, verre, Kevlar par exemple). De par la nature des arrangements de plis, ces structures complexes sont soumises à des champs de déformations anisotropes avec deux conséquences. D'une part le comportement des structures et leur mécanisme de dégradation sont difficiles à anticiper amenant à un besoin accru d'information. La déformation suivant plusieurs axes en est un exemple.

D'autre part l'anisotropie est susceptible de conduire à une ovalisation de la section de la fibre. La longueur d'onde de Bragg relevée à l'aide d'un analyseur de spectre optique laisse apparaître deux pics (voir figure 1.7). Le décalage de longueur d'onde de Bragg de ces deux pics est lié à la fois à la déformation longitudinale (ϵ_{zz}) du capteur mais aussi à sa déformation transversale suivant le grand axe (ϵ_{t1}) et le petit axe (ϵ_{t2}) de la section elliptique du capteur à l'état déformé.

L'utilisation d'un capteur classique fournit deux mesures alors qu'il est nécessaire de décollérer trois déformations a priori inconnues. Seul l'ajout d'un second dispositif de mesure dans la même zone que le Bragg permettrait d'obtenir une information suffisante. C'est pourquoi, il devient nécessaire de développer un nouveau capteur permettant de mesurer simultanément la déformation axiale et la déformation radiale.

Outre la discrimination des déformations ϵ_r et ϵ_z , le capteur ne doit pas être plus encombrant qu'une fibre optique et les mesures des déformations doivent être basées sur l'évaluation de décalages de longueur d'onde. En d'autres termes, nous voulons que les déformations mesurées par le capteur soient obtenues par les mêmes méthodes d'interrogation que les capteurs FBG standards. L'intérêt est de s'assurer de la fiabilité des mesures en réutilisant des méthodes d'interrogation éprouvées depuis fort longtemps sur le terrain. Exit donc les structures composées de plusieurs éléments distincts comme les capteurs à réseaux distribués [18, 19], ou les capteurs composés de fibres multiples [20]. Enfin, notre capteur devra aussi pouvoir détecter de très petites déformations de l'ordre de $1 \mu\epsilon$ comme sont capables de le faire les FBG classiques.

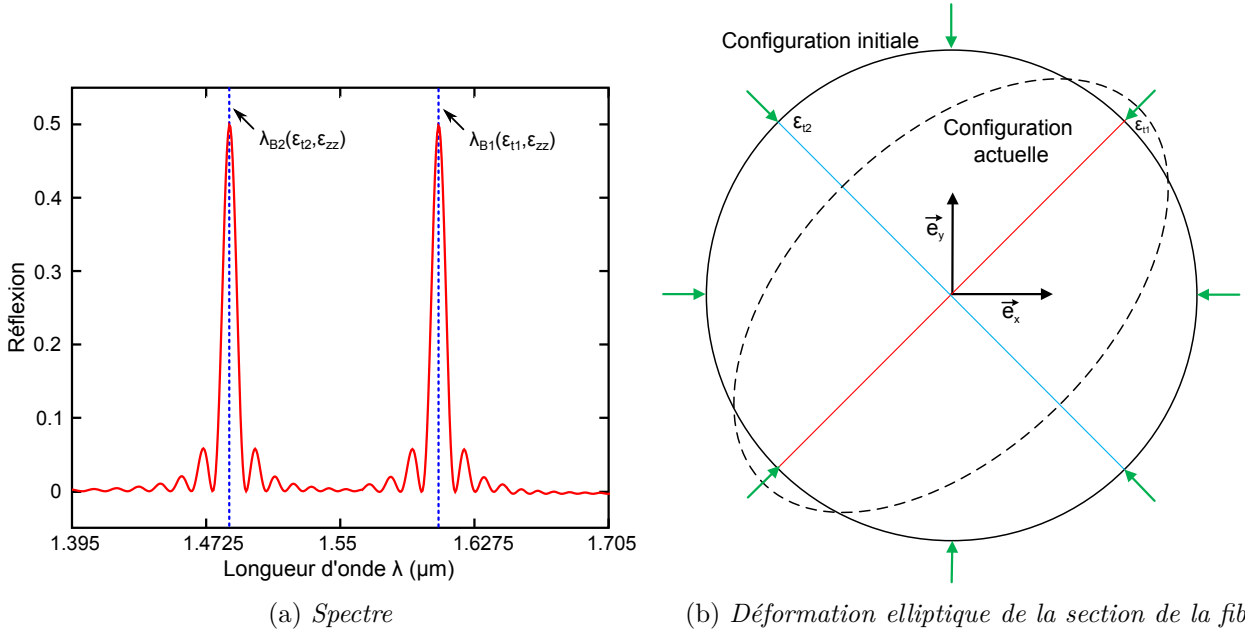


FIGURE 1.7: Déformation anisotrope de la section de la fibre et conséquence sur le spectre en réflexion du FBG.

1.3 Solutions proposées pour la mesure simultanée de ϵ_r et ϵ_z

La mesure de deux déformations inconnues implique l'exploitation de deux décalages de longueur d'onde linéairement indépendants liés aux déformations ϵ_r et ϵ_z par un système d'équations du type :

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1 = a_{1r}\epsilon_r + a_{1z}\epsilon_z \\ \Delta\lambda_2 = a_{2r}\epsilon_r + a_{2z}\epsilon_z \end{cases} \quad (1.20)$$

où les couples (a_{1r}, a_{2r}) et (a_{1z}, a_{2z}) sont respectivement les sensibilités du capteur aux déformations radiales et axiales. Ces sensibilités sont connues, elles sont déterminées lors de l'étalonnage du capteur. Les déformations ϵ_r et ϵ_z peuvent être déduites des décalages de longueur d'onde par inversion du système d'équations (1.20) :

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{a_{2z}\Delta\lambda_1 - a_{1z}\Delta\lambda_2}{D} \\ \epsilon_z = \frac{a_{1r}\Delta\lambda_2 - a_{2r}\Delta\lambda_1}{D} \end{cases} \quad (1.21)$$

où D est le déterminant du système d'équations (1.20). Il s'exprime de la manière suivante $D = a_{1r}a_{2z} - a_{2r}a_{1z}$. La mesure de ϵ_r et ϵ_z n'est possible qu'à condition que le déterminant D soit non nul. À partir d'un calcul d'incertitude des équations (1.21), il est possible d'estimer théoriquement les plus petites déformations $\Delta\epsilon_r$ et $\Delta\epsilon_z$ détectables par le capteur :

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_r = \frac{|a_{2z}| + |a_{1z}|}{D} \delta\lambda_{\min} \\ \Delta\epsilon_z = \frac{|a_{1r}| + |a_{2r}|}{D} \delta\lambda_{\min} \end{cases} \quad (1.22)$$

où $\delta\lambda_{\min}$ est le plus petit décalage de longueur d'onde détectable par les appareils de mesure, il est de l'ordre de 1 pm. Dans le vocabulaire de la métrologie $\Delta\epsilon_r$ et $\Delta\epsilon_z$ sont les résolutions du capteur.

Pour mesurer plusieurs paramètres simultanément de nombreuses architectures ont été proposées, la grande majorité d'entre elles ont été élaborées pour la mesure simultanée de déformation axiale et de température. Parmi ces structures, les plus attractives sont basées sur : la superposition de deux réseaux de Bragg à pas différents [21], l'inscription d'un FBG dans une fibre à maintien de polarisation [22, 23] ou encore la superposition d'un réseau FBG et LPG [24, 25, 26].

1.3.1 Capteur à réseaux de Bragg superposés

Cette structure consiste en deux réseaux de Bragg superposés de pas différents. En accord avec l'équation de résonance du FBG (1.1), le spectre en réflexion du capteur comporte deux pics centrés aux longueurs d'onde de Bragg. La mesure de ϵ_r et de ϵ_z est ainsi réalisée à partir des estimations des décalages des deux pics. Il a été montré que ce genre de dispositif pouvait décorrélérer la mesure de ϵ_r et de ϵ_z [8]. Cependant, les résolutions d'un tel capteur sont plus que limitées. En effet, dans cette configuration, les résolutions croissent avec l'écart entre les 2 longueurs d'onde de Bragg [8]. Des problèmes d'ordre technique et financier sont alors posés car une source très large bande doit être utilisée pour interroger le capteur. Et même en choisissant une source adaptée à nos besoins, la résolution restera limitée. Par exemple, pour 2 réseaux de Bragg inscrits dans une SMF28 avec des longueurs d'onde de Bragg égales à 1300 nm et 1550 nm, les plus petites déformations détectables sont de l'ordre de 1000 $\mu\epsilon$ pour ϵ_z et de 1700 $\mu\epsilon$ pour ϵ_r [8]. Ces performances sont bien évidemment pas acceptables, une autre solution doit être recherchée.

1.3.2 Capteur à réseau de Bragg inscrit dans une fibre à maintien de polarisation

Les fibres à maintien de polarisation sont des fibres biréfringentes comportant deux axes principaux orientés suivant 2 directions $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. Dans ce type de fibre, les ondes polarisées suivant l'axe $\vec{e}_x$ voient un indice effectif différent de celui perçu par les ondes polarisées suivant l'autre direction $\vec{e}_y$. Quand on inscrit un réseau de Bragg dans ce type de fibre, le FBG se comporte comme deux réseaux différents dont la longueur d'onde de Bragg est donnée par (1.1). Si la lumière incidente n'est pas polarisée suivant l'un des deux axes principaux, alors le spectre en transmission du FBG comporte deux creux dont l'éloignement dépend de la biréfringence $B = |n_{\text{eff}}^x - n_{\text{eff}}^y|$ de la fibre. Plus la biréfringence est élevée, plus les creux sont espacés.

Sachant que la résolution du capteur dépend de la birefringence [8], il faudrait une fibre à birefringence élevée pour espérer avoir une résolution convenable, chose que les fibres à maintien de polarisation conventionnelles ne peuvent satisfaire. Pour espérer des résolutions acceptables, il est nécessaire de choisir des fibres avec une biréfringence beaucoup plus élevée. C'est le cas, par exemple, de certaines fibres microstructurées dont la birefringence peut atteindre des valeurs de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-2}$ [27, 28]. Cependant, même pour cette configuration extrême, la résolution pour la déformation axiale vaut 40 $\mu\epsilon$ et la résolution pour la déformation radiale vaut 60 $\mu\epsilon$ [8]. On est encore loin des 1 $\mu\epsilon$ de résolution des capteurs FBG classiques.

1.3.3 Capteur à réseau de Bragg et réseau longue période superposés

Un capteur basé sur la superposition d'un FBG et d'un LPG a déjà été employé avec succès pour la mesure discriminée de température et de déformation axiale [26]. Dans ses travaux, Triollet a montré qu'il était possible de superposer un FBG et LPG sans altération de leur réponse spectrale. Ces structures sont fabriquées de 2 façons différentes soit par la photoinscription d'un réseau de Bragg modulé dans sa longueur par une fonction créneau [24, 25] ou bien par l'inscription d'un FBG sur un LPG [26]. Les deux réseaux sont de tailles identiques afin qu'ils subissent, en tout point, les mêmes sollicitations extérieures.

Le spectre en transmission de cette superstructure comporte deux creux de résonance associés au réseau LPG et au réseau de Bragg. L'un est centré à la longueur d'onde de Bragg λ_B et l'autre à la longueur d'onde de résonance du LPG λ_{LPG}^m .

Lorsque la fibre se déforme, les pas et les indices effectifs des réseaux changent provoquant un décalage des longueurs d'onde λ_B et λ_{LPG}^m . Les informations relatives aux déformations ϵ_r et ϵ_z sont ainsi stockées dans les décalages de ces deux longueurs d'onde.

L'intérêt d'utiliser une telle structure réside dans la nature différente des modes couplés au sein des deux réseaux. En effet, la sensibilité du FBG aux déformations est principalement dépendante de la susceptibilité des modes de cœur à ces sollicitations, alors que la sensibilité du LPG est fortement tributaire des comportements des modes de gaine et du mode de cœur aux déformations. Les sensibilités du FBG et du LPG aux déformations ϵ_r et ϵ_z sont par conséquent très dissemblables. De ce fait, ce type de structure présente une grande valeur de D et donc une résolution de mesure de bonne qualité. D'ailleurs une résolution d'environ $2 \mu\epsilon$ a été estimée pour la mesure des déformations axiales et radiales [8]. Cette architecture semble être une bonne solution pour mesurer de façon discriminée les déformations radiales et axiales au sein des matériaux tout en ayant des caractéristiques comparables à ceux des FBG classiques.

1.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons démontré que l'utilisation d'un simple FBG pour la mesure discriminée de déformations axiales et radiales au sein des matériaux n'est pas toujours fiable. Pour arriver à ce constat, nous avons étudié trois cas de figure. Dans le premier cas, le FBG est enfoui dans un matériau composite avec des fibres de renfort parallèles aux FBG. Nous avons démontré de façon analytique, qu'il existait des couplages mécaniques entre le FBG et le matériau hôte. Dans ces conditions, la déformation radiale n'est plus reliée à la déformation axiale par le coefficient de Poisson de la fibre optique. Le modèle habituel reliant le décalage de la longueur d'onde de Bragg à la déformation axiale n'est donc plus valable dans ces conditions. Lorsque ce modèle est appliqué pour une mesure enfouie, des erreurs sur la mesure de ϵ_z apparaissent. La grandeur de cette erreur est corrélée à la rigidité du matériau hôte, plus ce dernier est rigide mécaniquement, plus l'erreur est élevée. Nous avons vu que, selon les cas, une erreur de 1% pouvait être constatée.

Les études restantes concernaient des situations pouvant être rencontrées lors du moulage de pièces composites. Un FBG est inséré dans une éprouvette de résine thermodurcissable. Cette dernière est chauffée puis refroidie. En se refroidissant, la résine se contracte et déforme le FBG. Nous avons montré que selon les conditions aux limites appliquées à l'éprouvette, une erreur de plus de 100 % pouvait être commise sur la mesure de ϵ_z .

Pour la mesure de déformations à l'intérieur des matériaux de façon fiable, nous proposons, après étude de la littérature, d'utiliser une structure de capteur basée sur la superposition d'un FBG et d'un LPG. Cette architecture de capteur doit répondre à nos objectifs, à savoir : 1) une mesure discriminée de ϵ_r et de ϵ_z ; 2) une résolution comparable à celle d'un FBG classique i.e $\Delta\epsilon \simeq 1 \mu\epsilon$; 3) un encombrement équivalent à une fibre optique ; 4) une mesure des déformations par décalage de longueur d'onde.

Chapitre 2

Modes guidés

Sommaire

2.1	État de l'art	31
2.1.1	Équations des modes guidés dans une fibre optique à saut d'indice	31
2.1.2	Mode de cœur	33
2.1.3	Classification des modes de cœur :	36
2.1.4	Les modes de gaine	39
2.1.5	Classification des modes de gaine	44
2.2	Études des propriétés optiques des couples de modes de gaine $\text{Hyb}_{\ell m}$. . .	45
2.2.1	Rayon de gaine critique	46
2.2.2	Détermination numérique du rayon critique	48
2.2.3	Influence des paramètres opto-géométriques sur le rayon de gaine critique . . .	53
2.3	Conclusion du chapitre	59

Pour comprendre et maîtriser le fonctionnement des réseaux fibrés, il est primordial de connaître en détail les propriétés optiques des modes de cœur et des modes de gaine. La première partie de ce chapitre sera l'occasion de rappeler un certain nombre de résultats établis dans la littérature. Les calculs correspondant sont souvent assez fastidieux. Nous prendrons néanmoins soin de détailler les différentes étapes et les différentes expressions car elles nous semblent essentielles à la bonne compréhension des propriétés sur lesquelles nous allons nous appuyer dans la suite de ce mémoire. Nous nous concentrerons dans une seconde partie sur les modes de gaine afin d'apporter un éclairage neuf sur quelques propriétés optiques des modes de gaine moins connues et peu explorées.

2.1 État de l'art

2.1.1 Équations des modes guidés dans une fibre optique à saut d'indice

On considère une fibre à saut d'indice dont la géométrie et le profil d'indice sont exposés dans la figure 2.1. La fibre se compose d'un cœur de rayon a_1 et d'indice n_1 entouré d'une gaine de rayon a_2

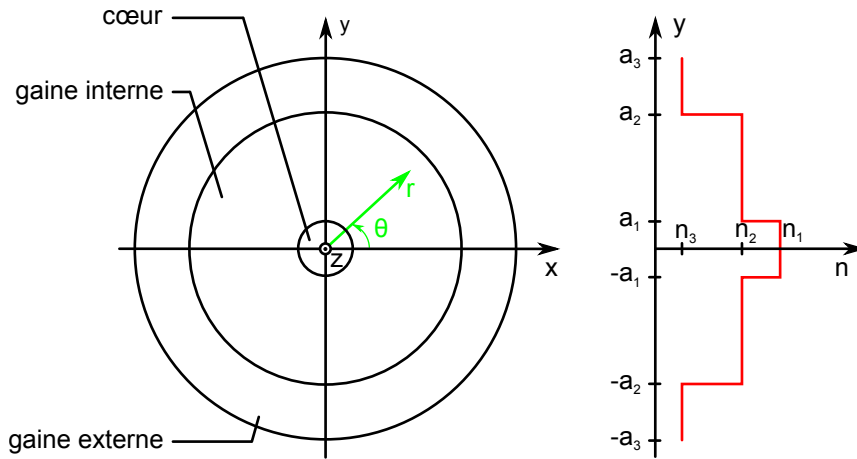


FIGURE 2.1: Section et profil d'indice de la fibre considérée.

et d'indice n_2 , elle même plongée dans un milieu d'indice n_3 supposé d'extension semi-infinie.

Le guidage de la lumière est rendu possible grâce à la variation particulière de l'indice de réfraction dans la section de la fibre. Cette distribution d'indice empêche la lumière de s'échapper du cœur, la lumière n'a donc pas d'autre choix que de se propager suivant la longueur de la fibre. Dans le cadre de l'électromagnétisme classique, les champs électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{H}$ sont gouvernés par les équations de Maxwell dont les expressions sont rappelées ci-dessous :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\varepsilon\vec{E}] = 0 \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.1d)$$

où ω est la pulsation, μ_0 la perméabilité du vide et ε la permittivité du matériau. Cette dernière est un tenseur de rang 2 défini à partir du champ de déplacement électrique $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

En outre, les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ doivent satisfaire les relations de continuité aux différentes interfaces. Les ondes guidées peuvent être vues comme des ondes planes se propageant globalement suivant l'axe

de la fibre de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, limitées transversalement par des enveloppes $\vec{E}_0(r, \theta)$ et $\vec{H}_0(r, \theta)$:

$$\vec{E} = \text{Re} \left[\vec{E}_0(r, \theta) e^{i(\beta \cdot z - \omega t)} \right] \quad (2.2a)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \left[\vec{H}_0(r, \theta) e^{i(\beta \cdot z - \omega t)} \right] \quad (2.2b)$$

où β est la constante de propagation du mode, elle est calculée à partir de la longueur d'onde λ et de l'indice effectif : $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{eff}}$. L'intensité I_z du mode est, quant à elle, calculée à partir du vecteur de Poynting :

$$I_z = \frac{1}{2} \text{Re} \left[(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{e}_z \right] \quad (2.3)$$

Pour évaluer les quantités $\vec{E}_0(r, \theta)$, $\vec{H}_0(r, \theta)$ et n_{eff} relatives à chaque mode, nous établissons les équations de propagation à l'aide des équations de Maxwell (2.1a)-(2.1d). Dans la fibre optique considérée, ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

-Dans le cœur :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (2.4)$$

-Dans la gaine :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (2.5)$$

-Dans le milieu extérieur :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_3 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (2.6)$$

avec $\vec{\mathcal{E}} = [\vec{E} \text{ ou } \vec{H}]$. Les quantités ε_1 , ε_2 et ε_3 sont respectivement les permittivités des matériaux composant le cœur, la gaine interne et le milieu externe.

Les équations de propagation (2.4)-(2.6) sont des équations vectorielles : elles font intervenir les composantes E_r , E_θ , E_z , H_r , H_θ et H_z des champs électromagnétiques. Le Laplacien, exprimé dans le repère cylindrique, implique des couplages entre les composantes transverses E_r , E_θ et H_r , H_θ . En revanche, les équations pour les composantes longitudinales E_z et de H_z sont indépendantes. Elles peuvent donc être résolues simplement. Les composantes transverses peuvent ensuite être déduites des composantes longitudinales à l'aide des équations de Maxwell (2.1a) et (2.1b) :

$$E_r = \frac{i}{u_j^2} \left[\frac{\omega \mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (2.7a)$$

$$E_\theta = \frac{i}{u_j^2} \left[\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \quad (2.7b)$$

$$H_r = \frac{i}{u_j^2} \left[\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega \varepsilon_0 n_j^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right] \quad (2.7c)$$

$$H_\theta = \frac{i}{u_j^2} \left[\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \omega \varepsilon_0 n_j^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (2.7d)$$

où la quantité u_j est définie par

$$u_j^2 = k_0^2 n_j^2 - \beta^2 \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.8)$$

La détermination des champs électromagnétiques des modes guidés se résume donc à la résolution des équations scalaires suivantes :

$$\Delta \mathcal{E}_z + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_j \mathcal{E}_z = 0 \quad (2.9)$$

où $j=1, 2$ ou 3 et $\mathcal{E}_z = [E_z \text{ ou } H_z]$. Les composantes transverses des champs électromagnétiques sont quant à elles déduites des solutions $\mathcal{E}_z$ et des relations (2.7a)-(2.7d).

En insérant les composantes longitudinales des champs (2.2a) et (2.2b) dans les équations (2.9), nous obtenons de nouvelles expressions telles que :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{0z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_{0z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{0z}}{\partial \theta^2} + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_j - \beta^2) \mathcal{E}_{0z} = 0 \quad (2.10)$$

avec $\mathcal{E}_{0z} = [E_{0z} \text{ ou } H_{0z}]$ et $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} e^{i(\beta z - \omega t)}$. Les équations (2.10) ne dépendent plus que des coordonnées transverses r et θ . Dans le cas présent, la fibre est considérée comme parfaitement cylindrique, c'est à dire que les rayons du cœur et de la gaine sont invariants suivant l'angle θ . Les solutions E_{0z} et H_{0z} peuvent alors se décomposer en un produit de 2 fonctions dont l'une dépend de r et l'autre de θ :

$$E_{0z}(r, \theta) = \Psi(r) \Theta(\theta) \quad (2.11a)$$

$$H_{0z}(r, \theta) = \Phi(r) \Omega(\theta) \quad (2.11b)$$

En insérant les expressions (2.11a) et (2.11b) dans les équations (2.10) et en effectuant une séparation des variables, deux nouvelles équations différentielles sont obtenues telles que :

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial \mathcal{R}(r)}{\partial r} + (u_j^2 - \ell^2) \mathcal{R}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\theta)}{\partial \theta^2} + \ell^2 \mathcal{A}(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où $\mathcal{R}(r) = [\Psi(r) \text{ ou } \Phi(r)]$ et $\mathcal{A}(\theta) = [\Theta(\theta) \text{ ou } \Omega(\theta)]$.

Les équations sur $\mathcal{R}(r)$ admettent pour solution des fonctions de Bessel [29]. La forme de la solution est conditionnée par le signe de u_j :

- Si $u_j > 0$ alors les solutions sont du type $\mathcal{R}(r) = AJ_\ell(u_j r) + BN_\ell(u_j r)$.
- Si $u_j < 0$ alors les solutions sont de la forme $\mathcal{R}(r) = CI_\ell(u_j r) + DN_\ell(u_j r)$.

Les termes A, B, C et D sont des constantes à déterminer. Leurs valeurs doivent garantir la continuité de E_{0z} et de H_{0z} à travers la section de la fibre. Nous verrons par la suite que l'hypothèse faite sur le signe de u_j dépend du type de mode étudié, elle n'est pas la même selon si on cherche à caractériser des modes de cœur ou des modes de gaine.

Les équations sur $\mathcal{A}(\theta)$ possèdent des solutions du type $\mathcal{A}(\theta) = X e^{i\ell\theta} + Y e^{-i\ell\theta}$, où X et Y sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites. La quantité ℓ est appelé l'ordre azimutal du mode, elle est nécessairement un entier afin de satisfaire l'invariance des valeurs de E_{0z} et de H_{0z} par rotation d'angle 2π .

2.1.2 Mode de cœur

Pour l'étude des modes de cœur, la gaine interne de la fibre est supposée d'épaisseur infinie. Cette hypothèse permet d'alléger considérablement les calculs car elle permet de négliger les conditions aux limites sur la bordure extérieure de la gaine. Bien évidemment, cette hypothèse n'est valide qu'à condition que l'intensité I_z des modes soit nulle à la limite de la gaine interne. Dans les faits, cette hypothèse est presque systématiquement vérifiée dans les fibres optiques conventionnelles, c'est pourquoi elle est applicable pour l'étude des modes de cœur.

Les modes de cœur sont guidés par le cœur de la fibre optique à condition que leur constante de propagation β vérifie l'inégalité suivante $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$. Dans ces circonstances la constante u_j est positive dans la région du cœur et négative dans la région de la gaine. Les équations de propagation (2.12) admettent alors des solutions de différentes formes selon la région de la fibre considérée, on a

ainsi :

Dans le cœur ($r \leq a_1$) :

$$E_{0z}^{\text{co}}(r, \theta) = A J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \quad (2.13a)$$

$$H_{0z}^{\text{co}}(r, \theta) = B J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \quad (2.13b)$$

Dans la gaine ($a_1 < r$) :

$$E_{0z}^{\text{cl}}(r, \theta) = C K_\ell(u_2 r) e^{i\ell\theta} \quad (2.14a)$$

$$H_{0z}^{\text{cl}}(r, \theta) = D K_\ell(u_2 r) e^{i\ell\theta} \quad (2.14b)$$

Afin d'alléger les calculs, seules les solutions contenant les termes en $e^{i\ell\theta}$ sont considérés dans cette section. Pour ce qui est des solutions en $e^{-i\ell\theta}$, elles peuvent être déduites des solutions (2.13a)-(2.14b) par rotation de la fibre. Précisons également que les expressions (2.13a)-(2.14b) contiennent uniquement les solutions ayant un sens physique, les autres sont écartées.

Les constantes A , B , C et D sont évaluées à partir des conditions de continuité appliquées aux composantes tangentielles des champs électromagnétiques :

$$\begin{cases} E_{0\theta}^{\text{co}}(a_1, \theta) = E_{0\theta}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ E_{0z}^{\text{co}}(a_1, \theta) = E_{0z}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ H_{0\theta}^{\text{co}}(a_1, \theta) = H_{0\theta}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ H_{0z}^{\text{co}}(a_1, \theta) = H_{0z}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \end{cases} \quad (2.15)$$

En insérant les composantes longitudinales (2.13a)-(2.14b) dans les expressions (2.7b) et (2.7d), nous obtenons la totalité des composantes tangentielles des champs électromagnétiques à savoir $E_{0\theta}$, E_{0z} , $H_{0\theta}$ et H_{0z} :

$$\begin{aligned} E_{0\theta}^{\text{co}}(r, \theta) &= \left[\frac{\beta\ell}{u_1^2 r} A J_\ell(u_1 r) + i \frac{\omega\mu_0}{u_1} B J'_\ell(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{co}}(r, \theta) &= \left[\frac{\beta\ell}{u_1^2 r} B J_\ell(u_1 r) - i \frac{\omega\varepsilon_1}{u_1} A J'_\ell(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{cl}}(r, \theta) &= - \left[\frac{\beta\ell}{u_2^2 r} C K_\ell(u_2 r) + i \frac{\omega\mu_0}{u_2} D K'_\ell(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{cl}}(r, \theta) &= \left[- \frac{\beta\ell}{u_2^2} D K_\ell(u_2 r) + i \frac{\omega\varepsilon_2}{u_2} C K'_\ell(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ces composantes sont ensuite insérées dans les conditions de continuités (2.15) afin de construire un système d'équations à quatre inconnues A , B , C et D :

$$M.v = 0 \quad (2.17)$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} J_\ell(u_1 a_1) & 0 & -K_\ell(u_2 a_1) & 0 \\ 0 & J_\ell(u_1 a_1) & 0 & -K_\ell(u_2 a_1) \\ \frac{\beta\ell}{u_1^2 a_1} J_\ell(u_1 a_1) & \frac{\omega\mu_0}{u_1} J'_\ell(u_1 a_1) & \frac{\beta\ell}{a_1 u_2} K_\ell(u_2 a_1) & \frac{\omega\mu_0}{u_2} K'_\ell(u_2 a_1) \\ -i \frac{\omega\varepsilon_1}{u_1} J'_\ell(u_1 a_1) & \frac{\beta\ell}{u_1^2 a_1} J_\ell(u_1 a_1) & -i \frac{\omega\varepsilon_2}{u_2} K'_\ell(u_2 a_1) & \frac{\beta\ell}{u_2^2 a_1} K_\ell(u_2 a_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Ce système possède des solutions non triviales si le déterminant de la matrice est nul. En posant $\det M = 0$ et en effectuant quelques développements mathématiques, nous obtenons finalement l'équation de dispersion des modes de cœur :

$$\ell^2 \left[\frac{1}{(u_1 a_1)^2} + \frac{1}{(u_2 a_1)^2} \right] \left[\frac{1}{(u_1 a_1)^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{(u_2 a_1)^2} \right] = \underbrace{\left[\frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 a_1 J_\ell(u_1 a_1)} + \frac{K'_\ell(u_2 a_1)}{u_2 a_1 K_\ell(u_2 a_1)} \right]}_{\text{Équation TE}} \underbrace{\left[\frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 a_1 J_\ell(u_1 a_1)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K'_\ell(u_2 a_1)}{u_2 a_1 K_\ell(u_2 a_1)} \right]}_{\text{Équation TM}} \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) permet de déterminer l'indice effectif des modes à partir de la longueur d'onde et des paramètres optiques et géométriques de la fibre. Elle est résolue pour un ordre azimutal ℓ fixé. Pour chaque ordre ℓ , un nombre fini de solutions existent et chacune de ces solutions est associée à un mode de cœur. Le nombre de modes guidés dépend de la longueur d'onde et des caractéristiques optiques et géométriques de la fibre.

Une fois l'indice effectif calculé, le système matriciel (2.17) peut être résolu. Les constantes B , C et D sont exprimées en fonction de A telles que :

$$\begin{cases} B = i \frac{\beta \chi_0}{\omega \mu_0} A \\ C = \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} A \\ D = i \frac{\beta \chi_0}{\omega \mu_0} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} A \end{cases} \quad (2.20)$$

avec :

$$\chi_0 = \frac{\ell \left[\frac{1}{(u_1 a_1)^2} + \frac{1}{(u_2 a_1)^2} \right]}{\left[\frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 a_1 J_\ell(u_1 a_1)} + \frac{K'_\ell(u_2 a_1)}{u_2 a_1 K_\ell(u_2 a_1)} \right]} \quad (2.21)$$

La valeur de A dépend directement de la puissance P véhiculée par le mode :

$$P = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r dr \left(\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (2.22)$$

Les expressions des champs sont alors obtenues à l'aide des équations (2.13a)-(2.14b) et (2.16) :

$$r \leq a_1 \begin{cases} E_{0r}^{\text{co}} = i \frac{\beta A}{u_1} \left[\frac{1 + \chi_0}{2} J_{\ell+1}(u_1 r) - \frac{1 - \chi_0}{2} J_{\ell-1}(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{co}} = \frac{\beta A}{u_1} \left[\frac{1 + \chi_0}{2} J_{\ell+1}(u_1 r) + \frac{1 - \chi_0}{2} J_{\ell-1}(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0z}^{\text{co}} = A J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \\ H_{0r}^{\text{co}} = \frac{\omega \varepsilon_1 A}{u_1} \left[\frac{1 + (n_{\text{eff}}^2/n_1^2) \chi_0}{2} J_{\ell+1}(u_1 r) + \frac{1 - (n_{\text{eff}}^2/n_1^2) \chi_0}{2} J_{\ell-1}(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{co}} = i \frac{\omega \varepsilon_1 A}{u_1} \left[\frac{1 + (n_{\text{eff}}^2/n_1^2) \chi_0}{2} J_{\ell+1}(u_1 r) - \frac{1 - (n_{\text{eff}}^2/n_1^2) \chi_0}{2} J_{\ell-1}(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{co}} = i \frac{\beta \chi_0}{\omega \mu_0} A J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$r > a_1 \left\{ \begin{array}{l} E_{0r}^{\text{cl}} = -i \frac{\beta A}{u_2} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} \left[\frac{1 + \chi_0}{2} K_{\ell+1}(u_2 r) + \frac{1 - \chi_0}{2} K_{\ell-1}(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{cl}} = -\frac{\beta A}{u_1} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} \left[\frac{1 + \chi_0}{2} K_{\ell+1}(u_2 r) - \frac{1 - \chi_0}{2} K_{\ell-1}(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0z}^{\text{cl}} = A \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} K_\ell(u_2 a_1) e^{i\ell\theta} \\ H_{0r}^{\text{cl}} = \frac{\omega \varepsilon_2 A}{u_2} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} \left[\frac{1 + (n_{\text{eff}}^2/n_2^2) \chi_0}{2} K_{\ell+1}(u_2 r) - \frac{1 - (n_{\text{eff}}^2/n_2^2) \chi_0}{2} K_{\ell-1}(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{cl}} = -i \frac{\omega \varepsilon_2 A}{u_2} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} \left[\frac{1 + (n_{\text{eff}}^2/n_2^2) \chi_0}{2} K_{\ell+1}(u_2 r) + \frac{1 - (n_{\text{eff}}^2/n_2^2) \chi_0}{2} K_{\ell-1}(u_2 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{cl}} = i \frac{\beta \chi_0}{\omega \mu_0} \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{K_\ell(u_2 a_1)} A K_\ell(u_2 r) e^{i\ell\theta} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

2.1.3 Classification des modes de cœur :

Les modes de cœur sont répertoriés selon la structure de leurs champs électromagnétiques. On dénombre 3 grandes familles de modes :

- les modes électriques transverses TE ;
- les modes magnétiques transverses TM ;
- les modes hybrides EH et HE.

Les modes TE sont des modes dont le champ électrique est contenu uniquement dans le plan transverse de la fibre. Pour déterminer la forme des champs TE, il suffit donc de résoudre (2.10) pour H_z et d'injecter la solution dans (2.7a)-(2.7d). Les conditions de continuité aux interfaces conduisent alors à l'équation de dispersion des modes TE :

$$\left[\frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 a_1 J_\ell(u_1 a_1)} + \frac{K'_\ell(u_2 a_1)}{u_2 a_1 K_\ell(u_2 a_1)} \right] = 0 \quad (2.25)$$

En comparant (2.19) et (2.25), on voit que les modes TE ont nécessairement un ordre azimutal nul ($\ell = 0$). La forme des champs TE est donnée dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1: Champs électromagnétiques des modes TE.

Dans le cœur ($r \leq a_1$) :	Dans la gaine ($a_1 < r$) :
$E_{0r}^{\text{co}} = 0$ $E_{0\theta}^{\text{co}} = -i \frac{\omega \mu_0}{u_1} B J_1(u_1 r)$ $E_{0z}^{\text{co}} = 0$ $H_{0r}^{\text{co}} = i \frac{\beta}{u_1} B J_1(u_1 r)$ $H_{0\theta}^{\text{co}} = 0$ $H_{0z}^{\text{co}} = B J_0(u_1 r)$	$E_{0r}^{\text{cl}} = 0$ $E_{0\theta}^{\text{cl}} = i \frac{\omega \mu_0}{u_2} \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} B K_1(u_2 r)$ $E_{0z}^{\text{cl}} = 0$ $H_{0r}^{\text{cl}} = -i \frac{\beta}{u_2} \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} B K_1(u_2 r)$ $H_{0\theta}^{\text{cl}} = 0$ $H_{0z}^{\text{cl}} = \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} B K_0(u_2 r)$

Les modes TM sont, quant à eux, caractérisés par un champ magnétique purement transverse : $H_z = 0$. Une procédure identique à celle utilisée pour les modes TE permet de déterminer l'équation de dispersion de modes TM :

$$\left[\frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 a_1 J_\ell(u_1 a_1)} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K'_\ell(u_2 a_1)}{u_2 a_1 K_\ell(u_2 a_1)} \right] = 0 \quad (2.26)$$

Ces modes ont aussi un ordre azimutal nul. Leur forme est donnée dans le tableau 2.2.

TABLE 2.2: *Champs électromagnétiques des modes TM.*

Dans le cœur ($r \leq a_1$) :	Dans la gaine ($a_1 < r$) :
$E_{0r}^{\text{co}} = i \frac{\beta}{u_1} A J_1(u_1 r)$ $E_{0\theta}^{\text{co}} = 0$ $E_{0z}^{\text{co}} = A J_0(u_1 r)$ $H_{0r}^{\text{co}} = 0$ $H_{0\theta}^{\text{co}} = i \frac{\omega \varepsilon_1}{u_1} A J_1(u_1 r)$ $H_{0z}^{\text{co}} = 0$	$E_{0r}^{\text{cl}} = -i \frac{\beta}{u_2} \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} A K_1(u_2 r)$ $E_{0\theta}^{\text{cl}} = 0$ $E_{0z}^{\text{cl}} = \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} K_0(u_2 r)$ $H_{0r}^{\text{cl}} = 0$ $H_{0\theta}^{\text{cl}} = -i \frac{\omega \varepsilon_2}{u_2} \frac{J_0(u_1 a_1)}{K_0(u_2 a_1)} K_1(u_2 r)$ $H_{0z}^{\text{cl}} = 0$

Le dernier type de mode dont l'indice effectif est solution de l'équation (2.19) sont les modes hybrides. Ils sont obtenus pour $\ell \geq 1$. Contrairement aux modes TE et TM, les composantes des modes hybrides sont toutes non nulles. Ces modes sont notés HE et EH, selon que leurs champs électromagnétiques se rapprochent plus de ceux des modes TE ou TM [30].

Dans les faits, la classification des modes hybrides en modes HE et EH s'avère relativement complexe. D'ailleurs elle a été le sujet de nombreux papiers, plusieurs critères ont été développés pour les classer. Ils sont basés sur la structure des champs électromagnétiques des modes [31], sur le rapport d'amplitude entre les composantes longitudinales E_z et H_z [32] ou encore sur la scission de l'équation de dispersion en 2 équations dont l'une est associée aux modes HE et l'autre aux modes EH [33].

Pour les modes de cœur, le critère le plus populaire et le plus fiable est celui proposé par Snitzer en 1961 [32]. Avec la notation employée dans ce manuscrit, ce critère est équivalent à étudier le signe de χ_0 . Si χ_0 est positif alors le mode est de type EH, dans le cas contraire le mode est de type HE. Il est toutefois important de préciser que ce critère est valide à condition que la fibre soit à saut d'indice avec une gaine d'extension semi-infinie.

Au sein d'une même famille, les modes se différencient par leur ordre azimutal ℓ et leur ordre radial m . Les modes TE et TM sont ainsi notés TE_{0m} et TM_{0m} , tandis que pour les modes hybrides, la notation $\text{HE}_{\ell m}$ et $\text{EH}_{\ell m}$ est utilisée.

À titre d'illustration, les composantes E_{0z} de quelques modes hybrides HE sont affichées dans la figure 2.2. L'ordre azimutal et l'ordre radial sont tous deux compris entre 1 et 3. L'ordre ℓ est analogue au nombre de périodes d'oscillation de E_{0z} suivant l'angle θ . Ainsi, la composante électrique longitudinale s'annule $\ell + 1$ fois suivant une révolution de l'angle θ . L'ordre radial correspond au nombre de fois où la composante E_{0z} s'annule sur l'intervalle $]0, \infty[$.

Pour un ordre azimutal ℓ fixé, un nombre important de modes d'une même famille co-existent. Pour les départager, l'ordre radial m est utilisé. Pour illustrer nos propos, nous traçons dans la figure 2.3 l'équation de dispersion des modes de cœur d'ordre $\ell = 1$. Chaque point vert représente un mode

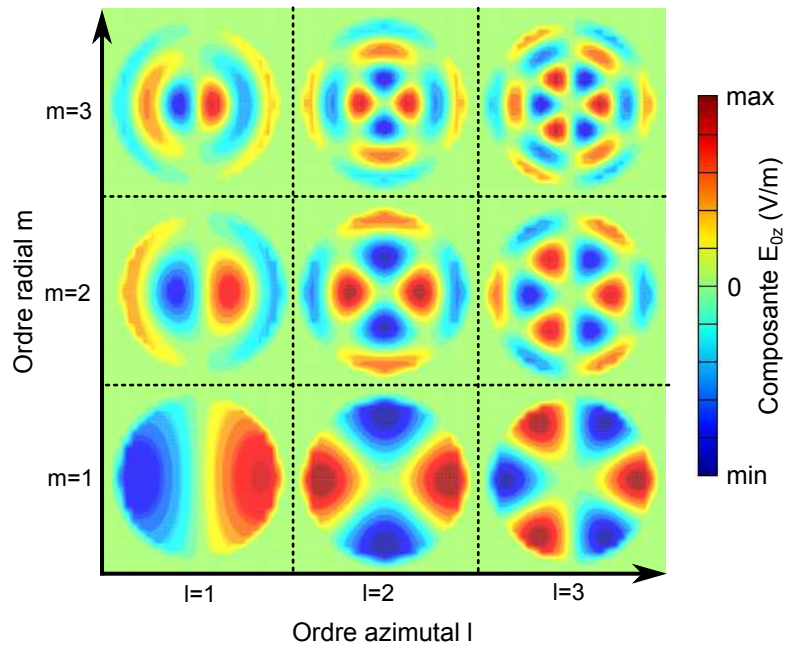


FIGURE 2.2: Composante électrique E_{0z} des 9 premiers modes de cœur hybrides HE .

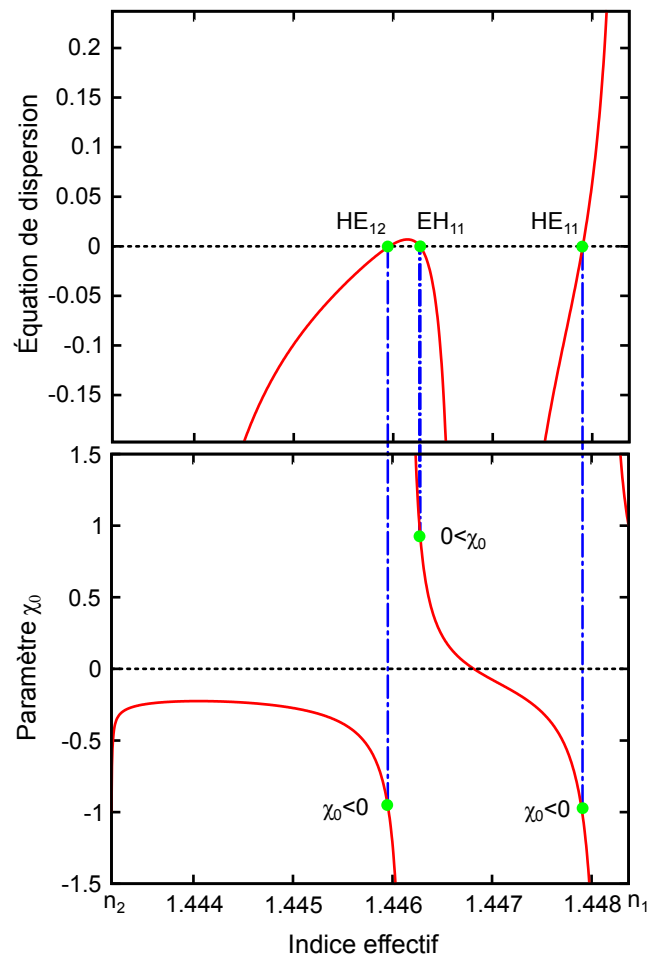


FIGURE 2.3: Équation de dispersion des modes de cœur d'ordre azimutal $\ell = 1$.

hybride dont la nature HE et EH est déterminée par le signe de χ_0 . Les modes d'une même famille sont classés par indice effectif décroissant. L'ordre radial correspond à la position du mode au sein de sa famille. Ainsi, le mode avec l'indice effectif le plus élevé a un ordre radial $m = 1$, le mode suivant a un ordre $m = 2$ et ainsi de suite.

Dans une fibre monomode, le mode fondamental HE_{11} est l'unique mode guidé par le cœur de la fibre. Nous traçons dans la figure 2.4 les composantes du champ électrique et la distribution d'intensité relatives à ce mode.

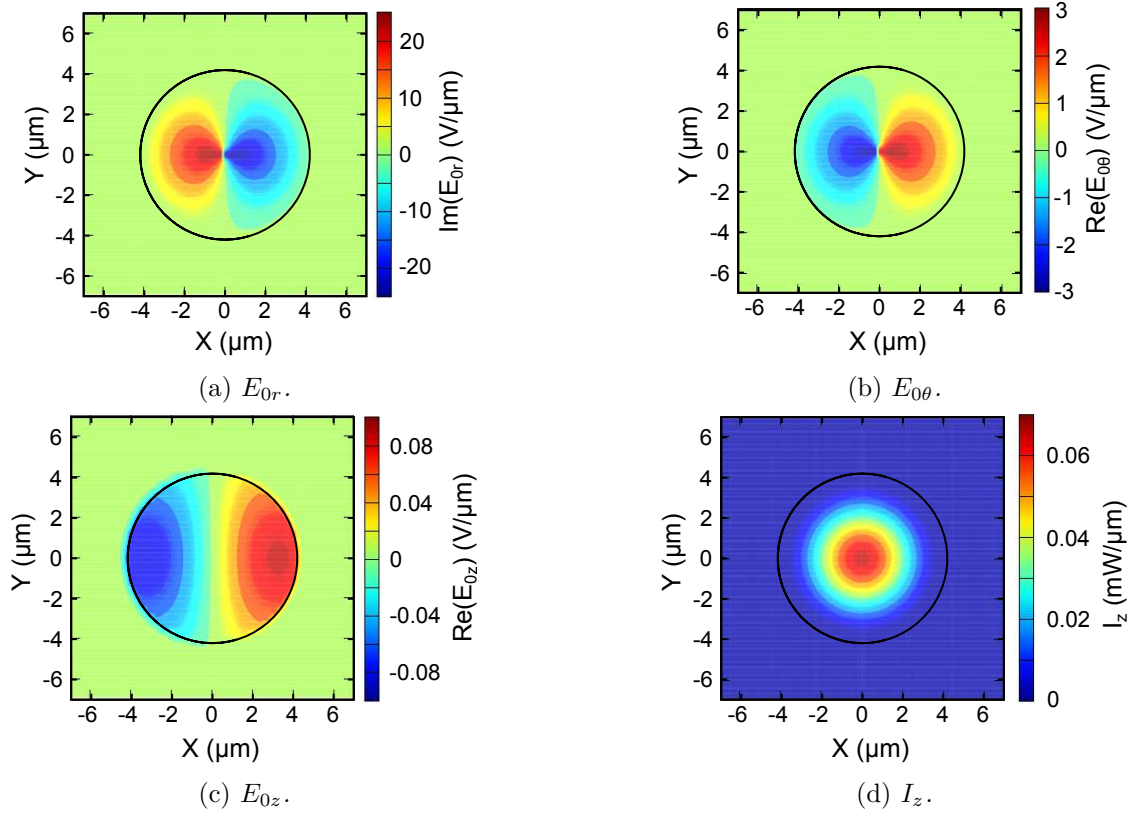


FIGURE 2.4: Composantes électriques et intensité du mode de cœur fondamental HE_{11} .

2.1.4 Les modes de gaine

Les modes de gaine sont souvent calculés en considérant la fibre comme faiblement guidante [34, 35]. Cette approche est valide la plupart du temps mais peut se révéler fautive lorsque la différence entre les indices des couches constituant la fibre devient non négligeable. Les déterminations des champs électromagnétiques et des indices effectifs des modes de gaine doivent alors être réalisées sans aucune approximation. Les premiers à relever ce challenge ont été Tsao et al. en 1989 [36]. Quelques années plus tard Erdogan compléta le travail de Tsao et il l'appliqua à l'étude des réseaux fibrés [5]. Erdogan ne s'intéressa qu'aux modes de gaine possédant un ordre azimutal ℓ égal à 1, car dans la majorité des réseaux fibrés ils sont les seuls à interagir avec le réseau. Cependant, lorsqu'un réseau fibré se déforme de façon non-uniforme, il perd sa symétrie. Des modes de gaine d'ordre azimutal différent de 1 peuvent alors se coupler à travers le réseau [5]. Dans ce cas il devient nécessaire de les déterminer.

Malgré la présence de formulations analytiques des modes de gaine dans la littérature [37, 38], leur calcul détaillé n'est que rarement présenté. Le calcul des modes de gaine n'est pas difficile à comprendre en soit, mais il est assez long. La prise en compte de deux conditions aux limites mène

à des opérations assez laborieuses. C'est la raison pour laquelle, il semble utile de les détailler. Par soucis de clarté, seule la détermination des modes de gaine hybrides est présentée.

Les modes de gaine sont des solutions des équations (2.12) dans les trois régions de la fibre, à savoir le cœur, la gaine et le milieu extérieur. Les modes sont guidés par la gaine, si leur indice effectif vérifie l'inégalité $n_1 > n_2 > n_{\text{eff}} > n_3$. Par conséquent, la constante u_j est positive dans le cœur et dans la gaine et elle est négative dans le milieu externe. Les composantes longitudinales E_{0z} et H_{0z} , solutions des équations de propagation, (2.12) sont donc égales à :

Dans le cœur $r \leq a_1$:

$$\begin{cases} E_{0z}^{\text{co}} = A_1 J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{co}} = B_1 J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans la gaine $a_1 < r \leq a_2$:

$$\begin{cases} E_{0z}^{\text{cl}} = [A_2 J_\ell(u_2 r) + B_2 N_\ell(u_2 r)] e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{cl}} = [C_2 J_\ell(u_2 r) + D_2 N_\ell(u_2 r)] e^{i\ell\theta} \end{cases} \quad (2.28)$$

Dans le milieu extérieur $r \geq a_2$:

$$\begin{cases} E_{0z}^{\text{sr}} = A_3 K_\ell(u_3 r) e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{sr}} = B_3 K_\ell(u_3 r) e^{i\ell\theta} \end{cases} \quad (2.29)$$

Dans les expressions ci-dessus seules les solutions ayant une validité physique sont prises en compte, ainsi les termes contenant les fonctions de Bessel $N_\ell(u_1 r)$ dans le cœur et $I_\ell(u_3 r)$ dans la gaine externe sont écartés. En insérant les composantes longitudinales (2.27)-(2.29) dans les expressions (2.7b) et (2.7d), nous obtenons les composantes tangentielles des champs électromagnétiques :

$$\begin{aligned} E_{0\theta}^{\text{co}}(r, \theta) &= \frac{i}{u_1^2} \left[i \frac{\beta\ell}{r} A_1 J_\ell(u_1 r) - \omega\mu_0 u_1 B_1 J_\ell'(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{co}}(r, \theta) &= \frac{i}{u_1^2} \left[\omega\varepsilon_0 n_1^2 u_1 A_1 J_\ell'(u_1 r) + i \frac{\beta\ell}{r} B_1 J_\ell(u_1 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{cl}}(r, \theta) &= \frac{i}{u_2^2} \left[i \frac{\beta\ell}{r} (A_2 J_\ell(u_2 r) + B_2 N_\ell(u_2 r)) - \omega\mu_0 u_2 (C_2 J_\ell'(u_2 r) + D_2 N_\ell'(u_2 r)) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{cl}}(r, \theta) &= \frac{i}{u_2^2} \left[\omega\varepsilon_0 n_2^2 u_2 (A_2 J_\ell'(u_2 r) + B_2 N_\ell'(u_2 r)) + i \frac{\beta\ell}{r} (C_2 J_\ell(u_2 r) + D_2 N_\ell(u_2 r)) \right] e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{sr}}(r, \theta) &= -\frac{i}{u_3^2} \left[i \frac{\beta\ell}{r} A_3 K_\ell(u_3 r) - \omega\mu_0 u_3 B_3 K_\ell'(u_3 r) \right] e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{sr}}(r, \theta) &= -\frac{i}{u_3^2} \left[\omega\varepsilon_0 n_3^2 u_3 A_3 K_\ell'(u_3 r) + i \frac{\beta\ell}{r} B_3 K_\ell(u_3 r) \right] e^{i\ell\theta} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les quantités $A_1, B_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3$ et B_3 sont des constantes à déterminer. Leurs valeurs doivent satisfaire les relations de continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ à travers les interfaces présentes en $r = a_1$ et $r = a_2$:

En $r = a_1$:

$$\begin{cases} E_{0\theta}^{\text{co}}(a_1, \theta) = E_{0\theta}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ E_{0z}^{\text{co}}(a_1, \theta) = E_{0z}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ H_{0\theta}^{\text{co}}(a_1, \theta) = H_{0\theta}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \\ H_{0z}^{\text{co}}(a_1, \theta) = H_{0z}^{\text{cl}}(a_1, \theta) \end{cases} \quad (2.31)$$

En $r = a_2$:

$$\begin{cases} E_{0\theta}^{\text{cl}}(a_2, \theta) = E_{0\theta}^{\text{sr}}(a_2, \theta) \\ E_{0z}^{\text{cl}}(a_2, \theta) = E_{0z}^{\text{sr}}(a_2, \theta) \\ H_{0\theta}^{\text{cl}}(a_2, \theta) = H_{0\theta}^{\text{sr}}(a_2, \theta) \\ H_{0z}^{\text{cl}}(a_2, \theta) = H_{0z}^{\text{sr}}(a_2, \theta) \end{cases} \quad (2.32)$$

En insérant les solutions (2.27)-(2.29) et (2.30) dans les relations de continuité (2.31)-(2.32) on obtient deux systèmes d'équations à 6 inconnues A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , A_3 et B_3 :

$$\begin{aligned} M_{\text{co}} v_{\text{co}} &= M_{\text{cl}_1} v_{\text{cl}} \\ M_{\text{sr}} v_{\text{sr}} &= M_{\text{cl}_2} v_{\text{cl}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec :

$$v_{\text{co}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}; \quad v_{\text{cl}} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix}; \quad v_{\text{sr}} = \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

et :

$$M_{\text{co}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{u_1^2 a_1} J_\ell(u_1 a_1) & -\frac{1}{u_1} J'_\ell(u_1 a_1) \\ J_\ell(u_1 a_1) & 0 \\ \frac{n_1^2}{u_1} J'_\ell(u_1 a_1) & \frac{\sigma_2}{u_1^2 a_1} J_\ell(u_1 a_1) \\ 0 & J_\ell(u_1 a_1) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

et :

$$M_{\text{cl}_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{u_2^2 a_1} J_\ell(u_2 a_1) & \frac{\sigma_1}{u_2^2 a_1} N_\ell(u_2 a_1) & -\frac{1}{u_2} J'_\ell(u_2 a_1) & -\frac{1}{u_2} N'_\ell(u_2 a_1) \\ J_\ell(u_2 a_1) & N_\ell(u_2 a_1) & 0 & 0 \\ \frac{n_2^2}{u_2} J'_\ell(u_2 a_1) & \frac{n_2^2}{u_2} N'_\ell(u_2 a_1) & \frac{\sigma_2}{a_1 u_2^2} J_\ell(u_2 a_1) & \frac{\sigma_2}{a_1 u_2^2} N_\ell(u_2 a_1) \\ 0 & 0 & J_\ell(u_2 a_1) & N_\ell(u_2 a_1) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

et :

$$M_{\text{sr}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_1}{u_3^2 a_2} K_\ell(u_3 a_2) & \frac{1}{u_3} K'_\ell(u_3 a_2) \\ K_\ell(u_3 a_2) & 0 \\ -\frac{n_3^2}{u_3} K'_\ell(u_3 a_2) & -\frac{\sigma_2}{u_3^2 a_2} K_\ell(u_3 a_2) \\ 0 & K_\ell(u_3 a_2) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

et :

$$M_{\text{cl}_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{u_2^2 a_2} J_\ell(u_2 a_2) & \frac{\sigma_1}{u_2^2 a_2} N_\ell(u_2 a_2) & -\frac{1}{u_2} J'_\ell(u_2 a_2) & -\frac{1}{u_2} N'_\ell(u_2 a_2) \\ J_\ell(u_2 a_2) & N_\ell(u_2 a_2) & 0 & 0 \\ \frac{n_2^2}{u_2} J'_\ell(u_2 a_2) & \frac{n_2^2}{u_2} N'_\ell(u_2 a_2) & \frac{\sigma_2}{a_2 u_2^2} J_\ell(u_2 a_2) & \frac{\sigma_2}{a_2 u_2^2} N_\ell(u_2 a_2) \\ 0 & 0 & J_\ell(u_2 a_2) & N_\ell(u_2 a_2) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Les deux égalités matricielles (2.33) sont fusionnées en une seule telle que :

$$M_{\text{cl}_2} M_{\text{cl}_1}^{-1} M_{\text{co}} v_{\text{co}} = M_{\text{sr}} v_{\text{sr}} \quad (2.39)$$

où :

$$M_{\text{cl}_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q_\ell(a_1)} N'_\ell(u_2 a_1) & -\frac{u_2}{n_2^2 q_\ell(a_1)} N_\ell(u_2 a_1) & \frac{\sigma_2}{a_1 u_2 n_2^2 q_\ell(a_1)} N_\ell(u_2 a_1) \\ 0 & -\frac{1}{q_\ell(a_1)} J'_\ell(u_2 a_1) & \frac{u_2}{n_2^2 q_\ell(a_1)} J_\ell(u_2 a_1) & -\frac{\sigma_2}{a_1 u_2 n_2^2 q_\ell(a_1)} J_\ell(u_2 a_1) \\ \frac{u_2}{q_\ell(a_1)} N_\ell(u_2 a_1) & -\frac{\sigma_1}{a_1 u_2 q_\ell(a_1)} N_\ell(u_2 a_1) & 0 & \frac{1}{q_\ell(a_1)} N'_\ell(u_2 a_1) \\ -\frac{u_2}{q_\ell(a_1)} J_\ell(u_2 a_1) & \frac{\sigma_1}{a_1 u_2 q_\ell(a_1)} J_\ell(u_2 a_1) & 0 & -\frac{1}{q_\ell(a_1)} J'_\ell(u_2 a_1) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

À partir de (2.39) et (2.40), la constante B_1 peut être exprimée en fonction de A_1 de deux manières différentes ce qui conduit à l'équation de dispersion des modes de gaine :

$$\zeta_0 - \zeta'_0 = 0 \quad (2.41)$$

où

$$\zeta_0 = \frac{1}{\sigma_2} \frac{u_2 \left(JK + \frac{\sigma_1 \sigma_2 u_{21} u_{32}}{n_2^2 a_1 a_2} \right) p_\ell(a_2) - K q_\ell(a_2) + J r_\ell(a_2) - \frac{1}{u_2} s_\ell(a_2)}{-u_2 \left(\frac{u_{32}}{n_2^2 a_2} J - \frac{u_{21}}{n_1^2 a_1} K \right) p_\ell(a_2) + \frac{u_{32}}{n_1^2 a_2} q_\ell(a_2) + \frac{u_{21}}{n_2^2 a_1} r_\ell(a_2)} \quad (2.42)$$

et

$$\zeta'_0 = \sigma_1 \frac{u_2 \left(\frac{u_{32}}{a_2} J - \frac{n_3^2 u_{21}}{n_2^2 a_1} K \right) p_\ell(a_2) - \frac{u_{32}}{a_2} q_\ell(a_2) - \frac{u_{21}}{a_1} r_\ell(a_2)}{u_2 \left(\frac{n_3^2}{n_2^2} JK + \frac{\sigma_1 \sigma_2 u_{21} u_{32}}{n_1^2 a_1 a_2} \right) p_\ell(a_2) - \frac{n_3^2}{n_1^2} K q_\ell(a_2) + J r_\ell(a_2) - \frac{n_2^2}{n_1^2 u_2} s_\ell(a_2)} \quad (2.43)$$

Les termes utilisés dans les équations (2.33) à (2.43) sont définis ci-dessous :

$$\sigma_1 \equiv \frac{i \ell n_{\text{eff}}}{Z_0} \quad (2.44)$$

$$\sigma_2 \equiv i \ell n_{\text{eff}} Z_0 \quad (2.45)$$

$$u_{21} \equiv \frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2} \quad (2.46)$$

$$u_{32} \equiv \frac{1}{u_3^2} + \frac{1}{u_2^2} \quad (2.47)$$

où :

$$u_j^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (n_j^2 - n_{\text{eff}}^2) \quad j = 1, 2 \quad (2.48)$$

$$u_3^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (n_{\text{eff}}^2 - n_3^2) \quad (2.49)$$

$$J \equiv \frac{J'_\ell(u_1 a_1)}{u_1 J_\ell(u_1 a_1)} \quad (2.50)$$

$$K \equiv \frac{K'_\ell(u_3 a_2)}{u_3 K_\ell(u_3 a_2)} \quad (2.51)$$

$$p_\ell(r) \equiv J_\ell(u_2 r) N_\ell(u_2 a_1) - J_\ell(u_2 a_1) N_\ell(u_2 r) \quad (2.52)$$

$$q_\ell(r) \equiv J_\ell(u_2 r) N'_\ell(u_2 a_1) - J'_\ell(u_2 a_1) N_\ell(u_2 r) \quad (2.53)$$

$$r_\ell(r) \equiv J'_\ell(u_2 r) N_\ell(u_2 a_1) - J_\ell(u_2 a_1) N'_\ell(u_2 r) \quad (2.54)$$

$$s_\ell(r) \equiv J'_\ell(u_2 r) N'_\ell(u_2 a_1) - J'_\ell(u_2 a_1) N'_\ell(u_2 r) \quad (2.55)$$

La quantité Z_0 est l'impédance du vide, elle est environ égale à $377 \, \Omega$.

L'équation de dispersion (2.41) permet de déterminer l'indice effectif n_{eff} des modes de gaine hybrides à partir de la longueur d'onde et des paramètres optiques et géométriques de la fibre. Elle est résolue pour un ordre azimutal ℓ fixé, supérieur ou égal à 1.

L'indice effectif du mode déterminé, les constantes présentes dans les expressions des champs peuvent être exprimées en fonction de A_1 . La relation entre B_1 et A_1 est obtenue à partir de (2.42) :

$$B_1 = -\frac{\sigma_1 n_1^2}{\sigma_2 \zeta_0} A_1 \quad (2.56)$$

De façon similaire, les constantes A_2 , B_2 , C_2 et D_2 sont déterminées en utilisant le système d'équations (2.33) :

$$A_2 = \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{q_\ell(a_1)} \left\{ -\frac{u_2 n_1^2}{\zeta_0 n_2^2} G_2 N_\ell(u_2 a_1) + N'_\ell(u_2 a_1) \right\} A_1 \quad (2.57a)$$

$$B_2 = \frac{J_\ell(u_1 a_1)}{N_\ell(u_2 a_1)} \left\{ 1 - \frac{J_\ell(u_2 a_1)}{q_\ell(a_1)} \left[N'_\ell(u_2 a_1) - \frac{u_2 n_1^2}{\zeta_0 n_2^2} G_2 N_\ell(u_2 a_1) \right] \right\} A_1 \quad (2.57b)$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_1 n_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{\sigma_2 \zeta_0 q_\ell(a_1)} \left\{ -u_2 F_2 N_\ell(u_2 a_1) + N'_\ell(u_2 a_1) \right\} A_1 \quad (2.57c)$$

$$D_2 = \frac{\sigma_1 n_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{\sigma_2 \zeta_0 N_\ell(u_2 a_1)} \left\{ \frac{J_\ell(u_2 a_1)}{q_\ell(a_1)} \left[N'_\ell(u_2 a_1) - u_2 F_2 N_\ell(u_2 a_1) \right] - 1 \right\} A_1 \quad (2.57d)$$

où

$$F_2 \equiv J - \frac{u_{21} \sigma_2 \zeta_0}{n_1^2 a_1} \quad (2.58)$$

$$G_2 \equiv \zeta_0 J + \frac{u_{21} \sigma_1}{a_1} \quad (2.59)$$

Les constantes A_3 et B_3 sont quant à elles calculées en utilisant le système matriciel (2.39) :

$$A_3 = \frac{J_\ell(u_1 a_1) n_1^2 u_2 G_3}{q_\ell(a_1) K_\ell(u_3 a_2) n_3^2 \zeta_0} A_1 \quad (2.60a)$$

$$B_3 = -\frac{J_\ell(u_1 a_1) \sigma_1 n_1^2 u_2 F_3}{q_\ell(a_1) \sigma_2 \zeta_0 K_\ell(u_3 a_2)} A_1 \quad (2.60b)$$

où

$$F_3 \equiv -F_2 p_\ell(a_2) + \frac{1}{u_2} q_\ell(a_2) \quad (2.61)$$

$$G_3 \equiv -\frac{n_3^2}{n_2^2} \left[G_2 p_\ell(a_2) - \frac{n_2^2 \zeta_0}{n_1^2 u_2} q_\ell(a_2) \right] \quad (2.62)$$

Toutes les constantes sont dépendantes de la valeur de A_1 . Cette dernière est conditionnée par la puissance transportée par le mode, comme dans le cas des modes de cœur.

Finalement, les champs électromagnétiques des modes de gaine hybrides qui satisfont les relations de continuité peuvent être obtenus. Leurs expressions sont déduites des équations (2.7a)-(2.7b), (2.27)-(2.29) et de l'évaluation des constantes (2.56)-(2.62). On a ainsi dans les 3 régions de la fibre :

Dans le cœur $r \leq a_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0r}^{\text{co}} = i \frac{u_1}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ \ell [J_{\ell+1}(u_1 r) + J_{\ell-1}(u_1 r)] - \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} [J_{\ell+1}(u_1 r) - J_{\ell-1}(u_1 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{\text{co}} = \frac{u_1}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ \ell [J_{\ell+1}(u_1 r) - J_{\ell-1}(u_1 r)] - \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} [J_{\ell+1}(u_1 r) + J_{\ell-1}(u_1 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0z}^{\text{co}} = \frac{u_1^2 \sigma_2 \zeta_0}{\beta n_1^2} \mathcal{A}_0 J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \\ H_{0r}^{\text{co}} = \frac{u_1}{2} \mathcal{A}_0 \{ i\ell \zeta_0 [J_{\ell+1}(u_1 r) + J_{\ell-1}(u_1 r)] + i\sigma_1 [J_{\ell+1}(u_1 r) - J_{\ell-1}(u_1 r)] \} e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{\text{co}} = -i \frac{u_1}{2} \mathcal{A}_0 \{ i\ell \zeta_0 [J_{\ell+1}(u_1 r) - J_{\ell-1}(u_1 r)] + i\sigma_1 [J_{\ell+1}(u_1 r) + J_{\ell-1}(u_1 r)] \} e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{\text{co}} = -\frac{u_1^2 \sigma_1}{\beta} \mathcal{A}_0 J_\ell(u_1 r) e^{i\ell\theta} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Dans la gaine $a_1 < r \leq a_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0r}^{cl} = i \frac{\pi a_1 u_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ -\frac{F_2 \ell^2}{r} p_\ell(r) + \frac{\ell^2}{u_2 r} q_\ell(r) - \frac{\sigma_2}{n_2^2} \left[u_2 G_2 r_\ell(r) - \frac{n_2^2 \zeta_0}{n_1^2} s_\ell(r) \right] \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{cl} = \frac{\pi a_1 u_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ \frac{\sigma_2 \ell}{n_2^2} \left[\frac{G_2}{r} p_\ell(r) - \frac{n_2^2 \zeta_0}{n_1^2 u_2 r} q_\ell(r) \right] + u_2 F_2 \ell r_\ell(r) - \ell s_\ell(r) \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0z}^{cl} = -\frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 \sigma_2 J_\ell(u_1 a_1)}{2\beta n_2^2} \mathcal{A}_0 \left\{ G_2 p_\ell(r) - \frac{n_2^2 \zeta_0}{n_1^2 u_2} q_\ell(r) \right\} e^{i\ell\theta} \\ H_{0r}^{cl} = \frac{\pi a_1 u_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ -i \frac{G_2 \ell^2}{r} p_\ell(r) + i \frac{n_2^2 \zeta_0 \ell^2}{n_1^2 u_2 r} q_\ell(r) + i \sigma_1 [u_2 F_2 r_\ell(r) - s_\ell(r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{cl} = i \frac{\pi a_1 u_1^2 J_\ell(u_1 a_1)}{2} \mathcal{A}_0 \left\{ i \sigma_1 \ell \left[\frac{F_2}{r} p_\ell(r) - \frac{1}{u_2 r} q_\ell(r) \right] - i u_2 G_2 \ell r_\ell(r) + i \frac{n_2^2 \zeta_0 \ell^2}{n_1^2} s_\ell(r) \right\} e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{cl} = \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 \sigma_1 J_\ell(u_1 a_1)}{2\beta} \mathcal{A}_0 \left\{ F_2 p_\ell(r) - \frac{1}{u_2} q_\ell(r) \right\} e^{i\ell\theta} \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Dans le milieu extérieur $r \geq a_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0r}^{sr} = i \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 J_\ell(u_1 a_1)}{4u_3 K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 \left\{ -F_3 \ell [K_{\ell+1}(u_3 r) - K_{\ell-1}(u_3 r)] + \frac{\sigma_2 G_3}{n_3^2} [K_{\ell+1}(u_3 r) + K_{\ell-1}(u_3 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0\theta}^{sr} = \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 J_\ell(u_1 a_1)}{4u_3 K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 \left\{ -F_3 \ell [K_{\ell+1}(u_3 r) + K_{\ell-1}(u_3 r)] + \frac{\sigma_2 G_3}{n_3^2} [K_{\ell+1}(u_3 r) - K_{\ell-1}(u_3 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ E_{0z}^{sr} = \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 \sigma_2 J_\ell(u_1 a_1) G_3}{2\beta n_3^2 K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 K_\ell(u_3 r) e^{i\ell\theta} \\ H_{0r}^{sr} = \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 J_\ell(u_1 a_1)}{4u_3 K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 \left\{ -i \sigma_1 F_3 [K_{\ell+1}(u_3 r) + K_{\ell-1}(u_3 r)] - i G_3 \ell [K_{\ell+1}(u_3 r) - K_{\ell-1}(u_3 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ H_{0\theta}^{sr} = i \frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 J_\ell(u_1 a_1)}{4u_3 K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 \left\{ i \sigma_1 F_3 [K_{\ell+1}(u_3 r) - K_{\ell-1}(u_3 r)] + i G_3 \ell [K_{\ell+1}(u_3 r) + K_{\ell-1}(u_3 r)] \right\} e^{i\ell\theta} \\ H_{0z}^{sr} = -\frac{\pi a_1 u_1^2 u_2^2 \sigma_1 J_\ell(u_1 a_1) F_3}{2\beta K_\ell(u_3 a_2)} \mathcal{A}_0 K_\ell(u_3 r) e^{i\ell\theta} \end{array} \right. \quad (2.65)$$

où $\mathcal{A}_0$ est une constante qui s'exprime en Volt :

$$\mathcal{A}_0 = \frac{n_1^2 \beta}{u_1^2 \sigma_2 \zeta_0} A_1 \quad (2.66)$$

Sa valeur est déterminée à partir de la puissance moyenne P du mode dont la définition est exposée en (2.22).

2.1.5 Classification des modes de gaine

Comme les modes de cœur, les modes de gaine sont repertoriés en trois familles à savoir les modes TE, les modes TM et les modes hybrides. Les modes de gaine de type TM et TE sont facilement discernables car ils possèdent leur propre équation de dispersion. L'équation de dispersion des modes TM est déduite de l'expression (2.56) en remplaçant ζ_0 par ζ'_0 et en fixant $B_1 = 0$ et $\sigma_j = 0$:

$$-u_2 \frac{n_2^2}{n_2^2} J K p_0(a_2) + \frac{n_2^2}{n_1^2} K q_0(a_2) - J r_0(a_2) + \frac{n_2^2}{u_2 n_1^2} s_0(a_2) = 0 \quad (2.67)$$

L'équation de dispersion des modes TE est déduite directement de (2.56) en considérant $A_1 = 0$ et $\sigma_j = 0$:

$$u_2 J K p_0(a_2) - K q_0(a_2) + J r_0(a_2) - \frac{1}{u_2} s_0(a_2) = 0 \quad (2.68)$$

Les modes hybrides, quant à eux, sont solutions de l'équation de dispersion (2.41) pour $\ell \geq 1$. Contrairement aux modes de cœur, leur classification en mode HE et EH n'est pas réalisable. En effet, Safaai-Jazi et Yip ont démontré que le critère utilisé par Snitzer basé sur l'étude du signe du rapport entre les composantes E_{0z} et H_{0z} n'était plus valable pour les modes de gaine [33]. Ce résultat a été confirmé quelques années plus tard par Morishita [39].

Dans la suite, les modes de gaine hybrides sont dénommés $\text{Hyb}_{\ell m}$, où ℓ indique l'ordre azimutal du mode et m la position de son indice effectif parmi les solutions de l'équation de dispersion (2.41). La figure (2.5) illustre la classification des modes $\text{Hyb}_{\ell m}$ pour un ℓ fixé.

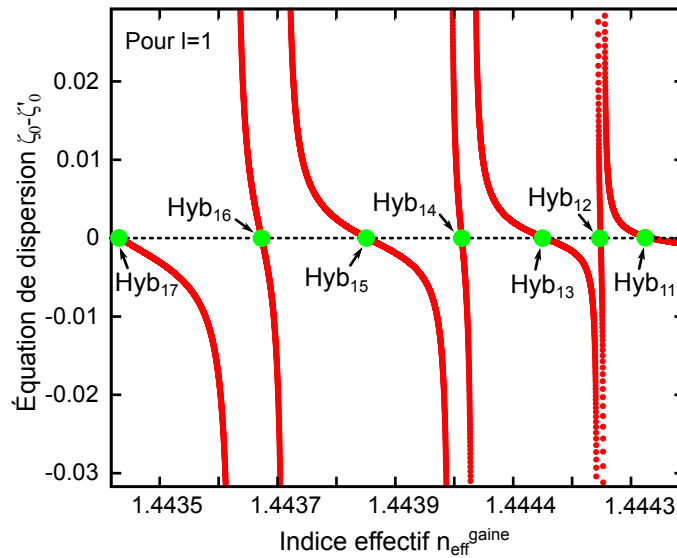


FIGURE 2.5: Équation de dispersion des modes de gaine hybrides tracée pour $\ell = 1$.

2.2 Études des propriétés optiques des couples de modes de gaine $\text{Hyb}_{\ell m}$

Dans sa tentative de classification des modes de gaine hybrides, Morishita [39] a constaté que la structure électromagnétique des modes n'était pas stable vis à vis des variations des paramètres opto-géométriques de la fibre. Il a en particulier montré que les modes $\text{Hyb}_{\ell 2m-1}$ et $\text{Hyb}_{\ell 2m}$ possédant des composantes électriques E_{0z} similaires, c'est à dire s'annulant un même nombre de fois suivant l'angle θ et suivant la direction radiale, voyaient leurs champs électromagnétiques converger vers une structure commune pour certaines valeurs de rayons de cœur et de gaine, et certaines valeurs d'indices. Il observa en outre, que de part et d'autre de ces valeurs, les modes s'échangeaient leur structure électromagnétique. En d'autres termes, le mode $\text{Hyb}_{\ell 2m-1}$ se comportait comme un mode HE pour certains paramètres opto-géométriques et comme un mode EH pour d'autres paramètres. Le mode $\text{Hyb}_{\ell 2m}$ suivait une évolution inverse. Ce constat l'a amené à conclure sur l'impossibilité d'une classification des modes de gaine. Morishita n'a pas creusé plus cette question, et personne ne l'a fait depuis à notre connaissance.

Cependant, au cours de la thèse, il est apparu que c'est en fait un point crucial pour qui cherche à optimiser une architecture de fibre avec modes de gaine. En effet, dans un processus d'optimisation,

on fait varier un paramètre et on regarde les effets de cette variation sur le mode considéré. Mais pour que cette procédure soit valide, il faut être sûr à chaque étape que c'est bien le même mode qui est considéré. Or, un mode est caractérisé par son indice effectif et la forme de ses champs. S'il y a une ambiguïté sur l'un ou l'autre, voire un échange entre modes, c'est tout le processus qui peut être faussé. Il convient donc de bien étudier cette instabilité pour pouvoir la maîtriser.

2.2.1 Rayon de gaine critique

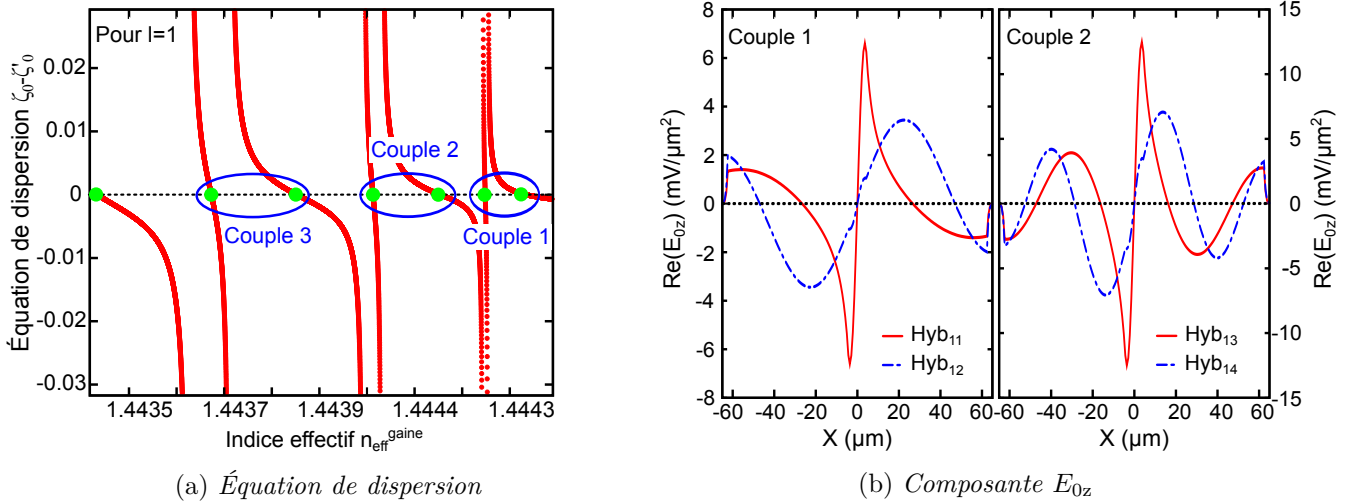


FIGURE 2.6: Illustration de quelques couples modaux.

Comme Morishita l'a remarqué les modes de gaine peuvent être groupés par couples. Les modes d'un même couple correspondent à deux solutions consécutives de l'équation de dispersion et leurs composantes E_{0z} présentent la particularité de s'annuler un même nombre de fois dans la section de la fibre. Cette situation est illustrée¹ sur les graphiques de la figure 2.6b.

Les indices effectifs des différents modes étant sensiblement différents, on considère la constante de propagation normalisée b définie par :

$$b = \frac{n_{\text{eff}} - n_3}{n_2 - n_3} \quad (2.69)$$

Quel que soit le mode considéré, la constante de propagation normalisée est comprise entre 0 et 1. Elle vaut 0 si $n_{\text{eff}} = n_3$ et 1 si $n_{\text{eff}} = n_2$. Ce paramètre permet de comparer aisément les différents modes. Sur la figure 2.7a, la constante de propagation normalisée des dix premiers modes de gaine est tracée en fonction du rayon de la gaine. Cette figure montre clairement que les modes de gaine vont par paire. Chaque courbe du graphique est en fait composée de deux courbes correspondant aux modes $2m - 1$ et $2m$. En outre l'insert de la figure 2.7a, montre que pour une certaine valeur de a_2 les constantes normalisées, et par conséquent les indices effectifs, des modes d'un même couple deviennent très proches. Nous notons ce rayon de gaine particulier a_2^{critique} . Pour les 5 premiers couples de modes, les valeurs de a_2^{critique} sont déterminées graphiquement et reportées dans le tableau 2.3, à l'exception du premier couple de modes dont le rayon a_2^{critique} est inférieur à $10 \mu\text{m}$.

Même si les valeurs de b ont tendance à se rapprocher, les indices effectifs des modes de gaine restent bien distincts. Un exemple est présenté dans la figure 2.7b. La différence des indices effectifs du couple

1. Toutes les courbes présentées ont été calculées avec les paramètres suivants : $a_1 = 4,2 \mu\text{m}$, $\Delta n_{12} = n_1/n_2 = 1,0036$, $\Delta n_{23} = n_3/n_2 = 0,95$ et $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$.

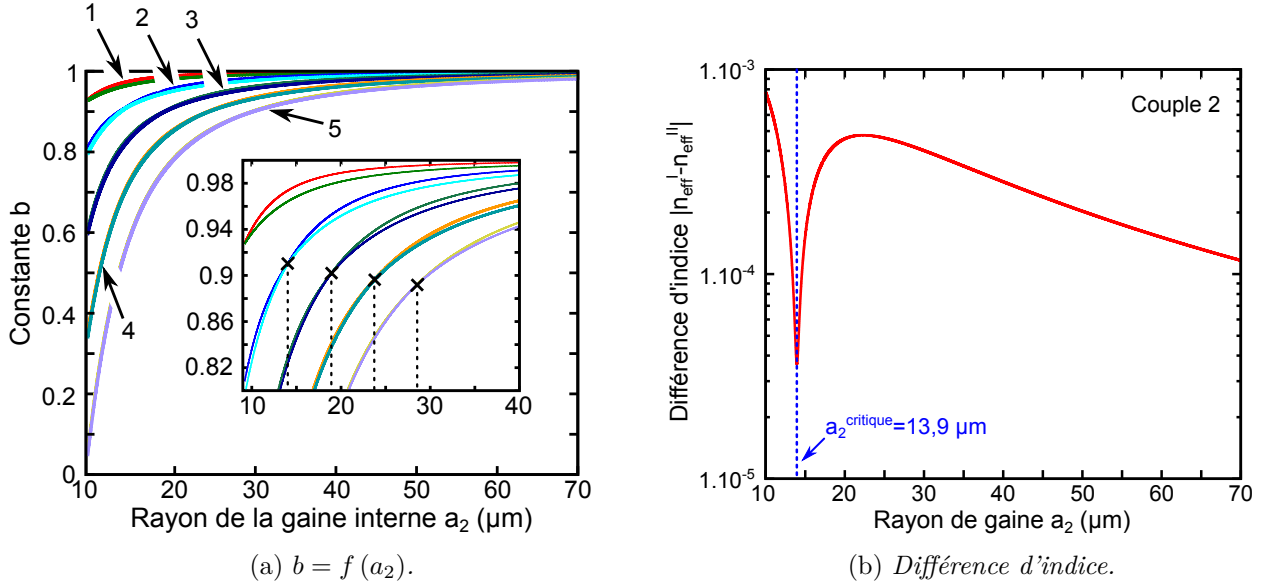


FIGURE 2.7: Mise en évidence des couples modaux.

TABLE 2.3: Rayons de gaine critiques relevés pour les cinq premiers couples modaux.

Couple ν	$a_2^{\text{critique}} (\mu\text{m})$
2	13,9
3	18,68
4	23,3
5	27,9

2 est tracée en fonction de a_2 . Comme attendu un minimum est observé pour $a_2 = a_2^{\text{critique}} = 13,9 \mu\text{m}$. Pour ce rayon de gaine, l'écart entre les deux indices effectifs est évalué à environ $3,5 \cdot 10^{-5}$.

Ce rapprochement des indices effectifs reflète une convergence des champs électromagnétiques vers une structure identique. Pour illustrer ceci, l'écart quadratique moyen entre les intensités des deux modes est calculé :

$$\Delta I_z = \frac{\iint_{\text{section}} \left[I_z^I(r_i, \theta_i) - I_z^{II}(r_i, \theta_i) \right]^2 dS}{\iint_{\text{section}} dS} \quad (2.70)$$

Ces intensités sont notées I_z^I et I_z^{II} , elles sont associées respectivement au mode I ($\text{Hyb}_{\ell_{2m}-1}$) et au mode II ($\text{Hyb}_{\ell_{2m}}$) constituant le couple.

Pour le deuxième couple de modes, cet écart quadratique moyen s'annule pratiquement pour $a_2 = a_2^{\text{critique}} = 13,9 \mu\text{m}$ (voir figure 2.8), les intensités des 2 modes sont donc quasiment équivalentes en ce point. Pour illustrer cette observation, une superposition des profils d'intensité est réalisée dans les

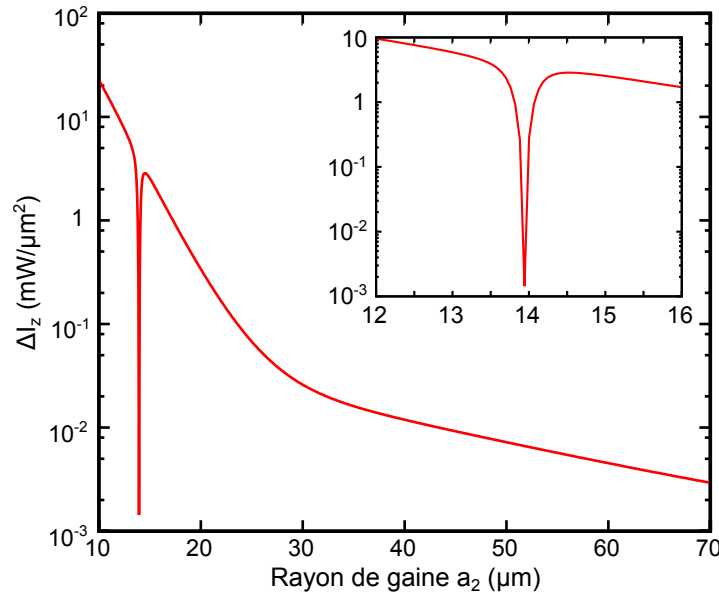


FIGURE 2.8: Écart quadratique moyen entre les intensités des modes du couple 2.

figures 2.9b. Les composantes transverses E_{0x} et E_{0y} des modes I et II sont affichées en complément. Comme attendu, les composantes des 2 modes sont équivalentes, une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est toutefois observée.

Pour des rayons autres que a_2^{critique} , les champs électromagnétiques des modes I et II ont des structures distinctes. À titre d'illustration, deux exemples sont présentés dans les figures 2.10 et 2.11. Les composantes électriques transverses et les intensités des modes du couple 2 ont été calculées pour $a_2 = 8 \mu\text{m} < a_2^{\text{critique}}$ dans la figure 2.10 et pour $a_2^{\text{critique}} < a_2 = 60 \mu\text{m}$ dans la figure 2.11. Une autre propriété marquante apparaît sur ces figures : les modes échangent leur structure électromagnétique entre les configurations où $a_2 < a_2^{\text{critique}}$ et $a_2^{\text{critique}} < a_2$. Ces résultats sont conformes aux observations de Morishita. Nous allons maintenant aller plus loin et étudier de façon systématique les paramètres critiques.

2.2.2 Détermination numérique du rayon critique

Au rayon de gaine critique, les champs électriques des modes d'un même couple s'égalisent et leurs indices effectifs tendent vers une même valeur sans pour autant s'égaliser. Partant de ces faits,

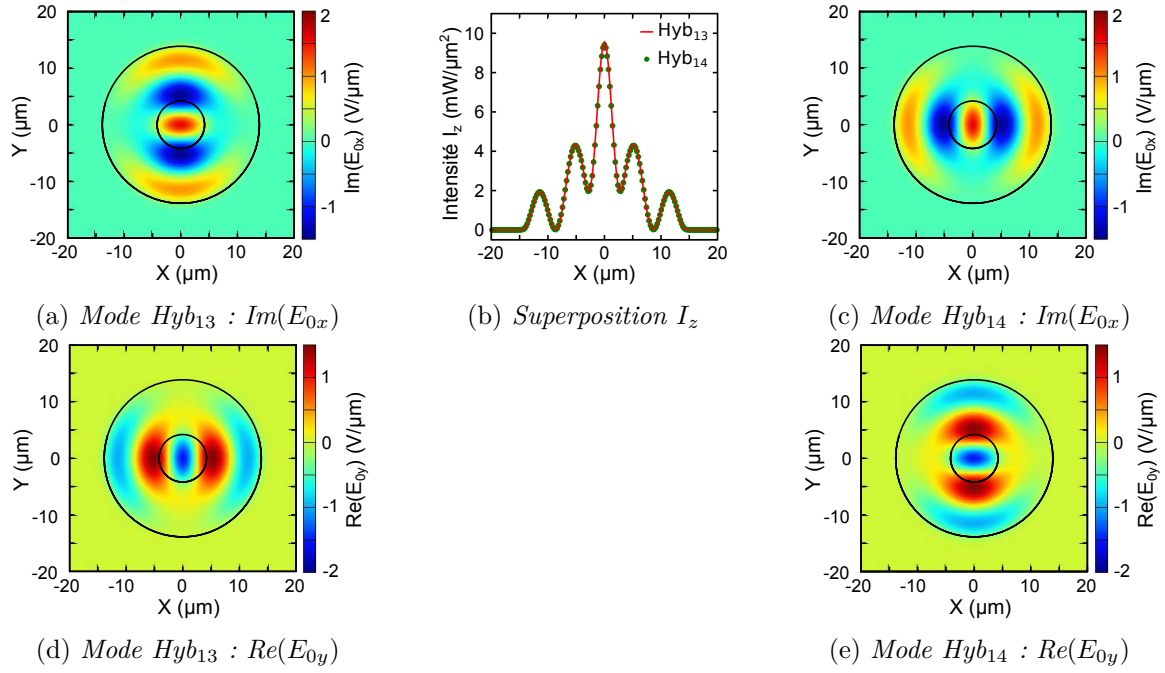


FIGURE 2.9: Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2 = a_2^{\text{critique}}$.

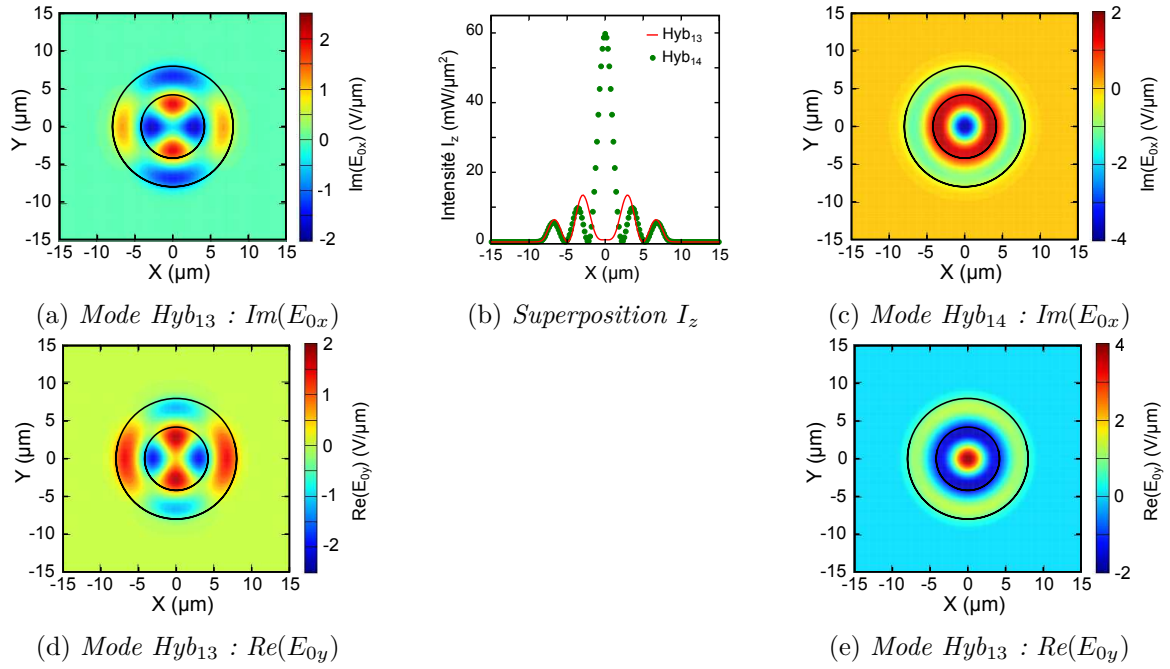


FIGURE 2.10: Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2 = 8 \mu\text{m} < a_2^{\text{critique}}$.

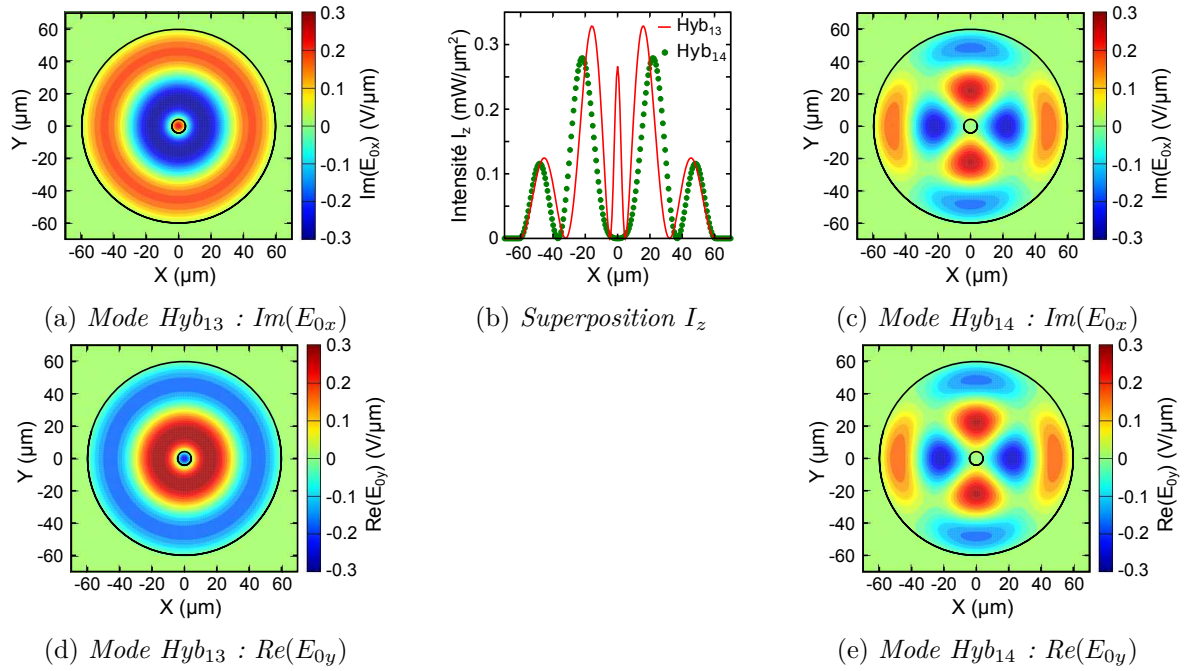


FIGURE 2.11: Champs électriques transverses et distributions d'intensité des modes du couple 2 pour $a_2^{\text{critique}} < a_2 = 60 \mu\text{m}$.

deux approches sont possibles pour la détermination du rayon de gaine critique. La première approche consiste à construire une fonction numérique égale à la différence des indices effectifs et à en chercher le minimum. En pratique, cette approche ne s'est pas avérée très efficace, le minimum n'étant pas toujours très marqué et présentant une variabilité très forte. La seconde approche se base sur l'égalité des champs électriques des deux modes pour $a_2 = a_2^{\text{critique}}$ et c'est celle que nous avons adoptée.

D'après la figure 2.9, les composantes électriques transverses du mode I et du mode II vérifient l'égalité suivante lorsque $a_2 = a_2^{\text{critique}}$:

$$\begin{cases} E_{0x}^I(\theta) = E_{0x}^{II}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ E_{0y}^I(\theta) = E_{0y}^{II}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (2.71)$$

Les égalités (2.71) sont réunies dans la définition d'un coefficient de corrélation normalisé :

$$\mathcal{C} = \frac{\left[\int dS \vec{E}_t^I(\theta) \cdot \vec{E}_t^{II*}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right]^2}{\left[\int dS \vec{E}_t^I(\theta) \cdot \vec{E}_t^{I*}(\theta) \right] \left[\int dS \vec{E}_t^{II}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{E}_t^{II*}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right]} \quad (2.72)$$

où l'intégration est faite sur la section de la fibre optique. Les vecteurs $\vec{E}_t^I$ et $\vec{E}_t^{II}$ sont les champs électriques transverses des modes I et II. Dans la suite nous ne nous intéressons qu'aux modes d'ordre azimutal $\ell = 1$, car ils sont les seuls à être couplés dans les réseaux fibrés uniformes.

Pour $a_2 = a_2^{\text{critique}}$, les champs électriques des modes I et II vérifient l'égalité (2.71), le coefficient $\mathcal{C}$ défini en (2.72) est égal à 1. Lorsque la valeur de a_2 s'éloigne de celle du rayon de gaine critique, le coefficient $\mathcal{C}$ tend vers 0. En effet, comme observé dans la figure 2.10 et 2.11, un couple modal se compose d'un mode dont les composantes électriques sont invariantes suivant l'angle θ et d'un mode dont

les composantes électriques sont périodiques avec θ . Le produit scalaire des champs électriques transverses des deux modes est donc lui aussi périodique. Son intégration entre 0 et 2π est par conséquent nulle conduisant inévitablement à une annulation de $\mathcal{C}$.

Afin d'obtenir une équation de la forme la plus simple possible, seul le champ électrique contenu dans le cœur de la fibre est pris en compte. Les quantités E_{0x} et E_{0y} sont les composantes cartésiennes du champ électrique. Leur expression sont déduites des composantes cylindriques (2.63) par $E_{0x} = E_{0r} \cos \theta - E_{0\theta} \sin \theta$ et $E_{0y} = E_{0r} \sin \theta + E_{0\theta} \cos \theta$, telles que :

$$\begin{aligned} E_{0x} &= iE_0 \frac{u_1}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} \right) J_0(u_1 r) + \left(1 - \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} \right) J_2(u_1 r) e^{i2\theta} \right] \\ E_{0y} &= -E_0 \frac{u_1}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} \right) J_0(u_1 r) - \left(1 - \frac{\sigma_2 \zeta_0}{n_1^2} \right) J_2(u_1 r) e^{i2\theta} \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

En insérant les composantes (2.73) dans la formulation de $\mathcal{C}$ (2.72), nous obtenons l'expression analytique de ce dernier :

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{C}_x^2}{\mathcal{C}_I \mathcal{C}_{II}} \quad (2.74)$$

où :

$$\mathcal{C}_x = \frac{u_1^I u_1^{II} E_0^I E_0^{II}}{2} \left[\underbrace{C_+^I C_+^{II} \int_0^{a_1} r dr J_0^I(u_1^I r) J_0^{II}(u_1^{II} r)}_{I_1} - \underbrace{C_-^I C_-^{II} \int_0^{a_1} r dr J_2^I(u_1^I r) J_2^{II}(u_1^{II} r)}_{I_2} \right] \quad (2.75)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a_1}{u_1^{I2} - u_1^{II2}} \left[u_1^I J_1(u_1^I a_1) J_0(u_1^{II} a_1) - u_1^{II} J_0(u_1^I a_1) J_1(u_1^{II} a_1) \right] \\ I_2 &= \frac{a_1}{u_1^{I2} - u_1^{II2}} \left[u_1^I J_3(u_1^I a_1) J_2(u_1^{II} a_1) - u_1^{II} J_2(u_1^I a_1) J_3(u_1^{II} a_1) \right] \end{aligned} \quad (2.76)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{(X)} &= \frac{u_1^{X2} E_0^{X2} a_1^2}{4} \left\{ C_+^{X2} \left[J_0^2(u_1^X a_1) - J_{-1}(u_1^X a_1) J_1(u_1^X a_1) \right] \right. \\ &\quad \left. + C_-^{X2} \left[J_2^2(u_1^X a_1) - J_1(u_1^X a_1) J_3(u_1^X a_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

où X=I ou II en fonction du mode considéré. Les quantités C_-^X et C_+^X sont définies par :

$$\begin{aligned} C_+^X &= \left(1 + \frac{\sigma_2^X \zeta_0^X}{n_1^2} \right) \\ C_-^X &= \left(1 - \frac{\sigma_2^X \zeta_0^X}{n_1^2} \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

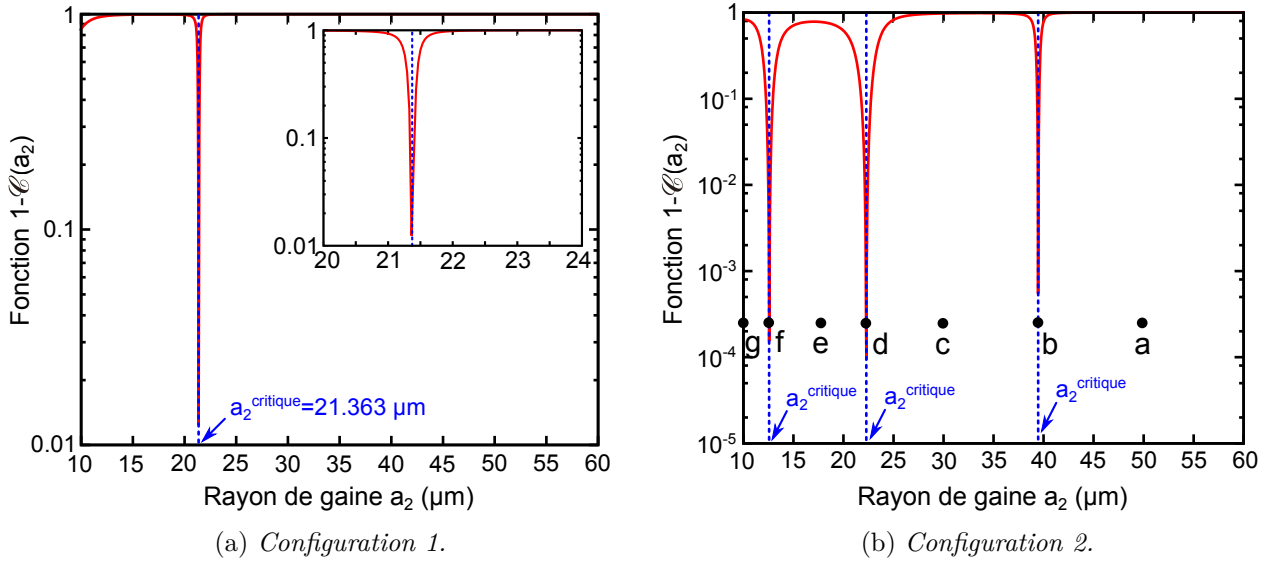
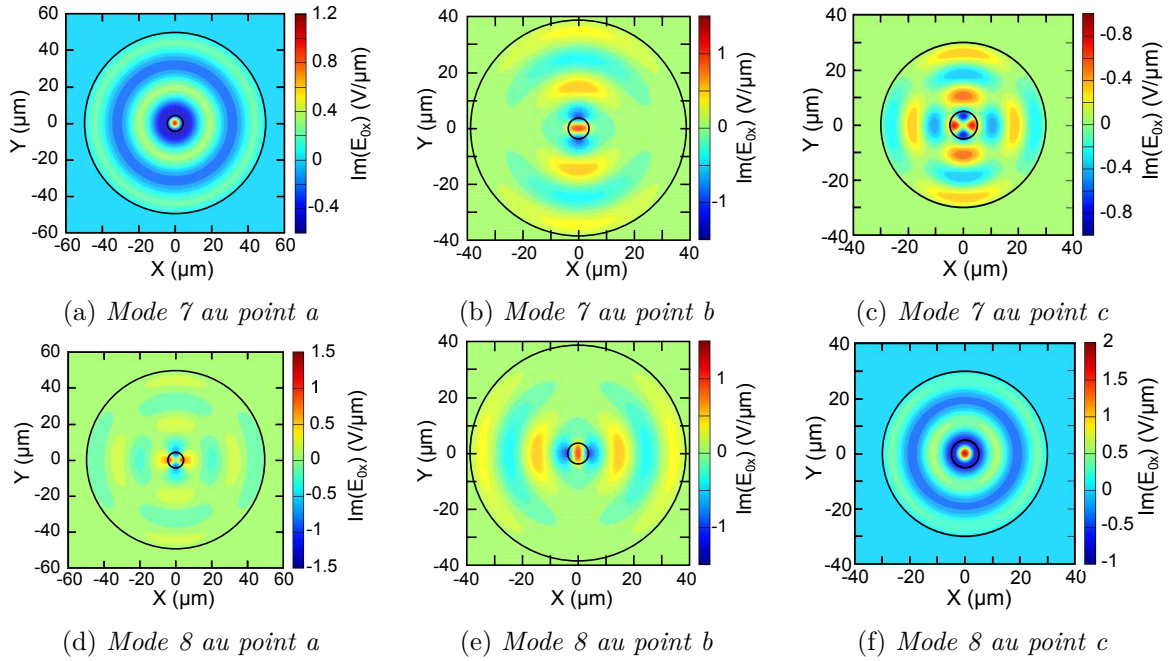
Les constantes u_1 , σ_2 et ζ_0 sont définies en (2.42), (2.45) et (2.48). La variable a_2 intervient dans l'équation (2.74) à travers les termes C_- , C_+ , u_1 et E_0 .

La fonction $y = 1 - \mathcal{C}(a_2)$ est tracée pour deux configurations dont les paramètres sont listés dans le tableau 2.4. Les courbes obtenues sont présentées en figure 2.12. À chaque fois que $\mathcal{C}$ est égal à 1, un creux apparaît dans les figures 2.12a et 2.12b.

Comme montré dans la figure 2.12b, plusieurs rayons de gaine critiques peuvent exister. À chaque fois que le rayon de gaine franchit une valeur critique, les modes d'un même couple échangent leur structure électromagnétique. Cela est illustré par les figures 2.13 et 2.14 où sont représentées les composantes E_{0x} des champs électriques des modes 7 et 8, pour plusieurs rayons de gaine signalés sur la figure 2.12b par les points noirs a à g .

TABLE 2.4: Paramètres de fibres utilisées pour les modélisations.

	Modes	a_1 (μm)	Δn_{12}	Δn_{23}	λ (μm)
Configuration 1	Hyb ₁₃ et Hyb ₁₄	4,3	1,0045	0,9046	1,08478
Configuration 2	Hyb ₁₇ et Hyb ₁₈	4,3	1,0045	0,9046	1,08478


 FIGURE 2.12: Évolution de $1 - \mathcal{C}$ en fonction de a_2 .

 FIGURE 2.13: Évolution de la composante électrique E_{0x} des modes 7 et 8 en fonction du rayon de gaine interne a_2 (points a à c).

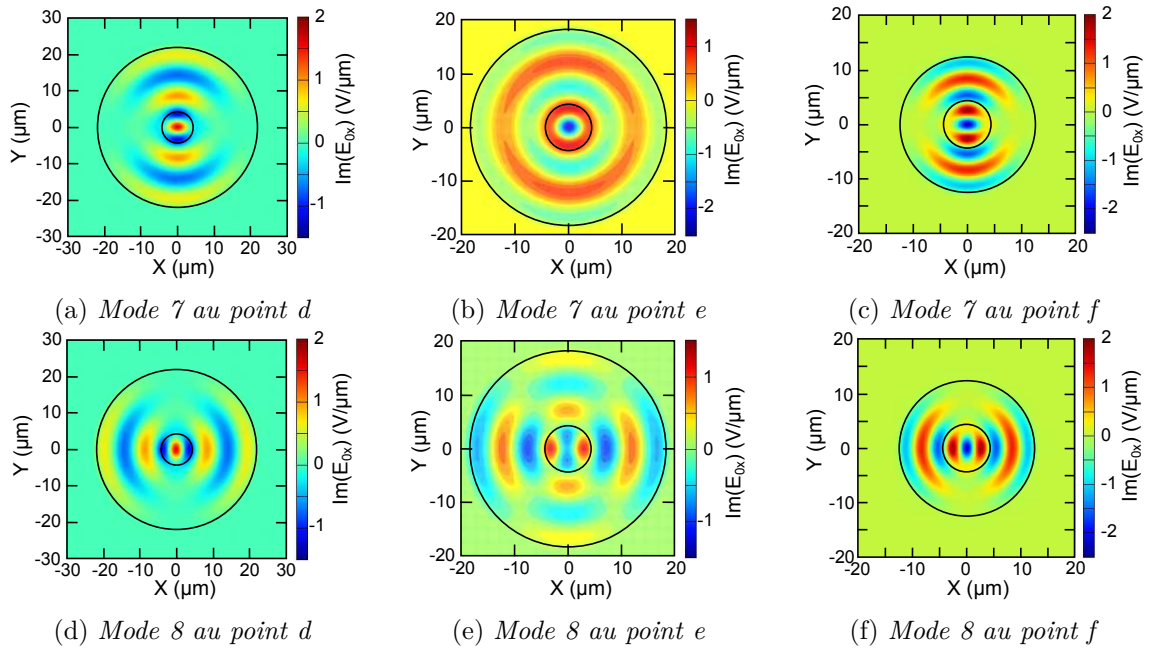


FIGURE 2.14: Évolution de la composante électrique E_{0x} des modes 7 et 8 en fonction du rayon de gaine interne a_2 (points d à f).

En résumé, la procédure pour évaluer le rayon de gaine critique est la suivante :

- La longueur d'onde λ et les paramètres optiques et géométriques de la fibre, à l'exception du rayon de gaine a_2 sont fixés.
- Le rayon a_2 est incrémenté dans l'intervalle $[a_2^{\min}; a_2^{\max}]$.
- À chaque valeur de a_2 , les indices effectifs des modes I et II appartenant au couple de mode ν sont déterminés à l'aide de l'équation (2.41).
- La fonction $1 - \mathcal{C}(a_2)$ est évaluée à partir des indices effectifs et de la relation (2.77).
- Sur l'intervalle $[a_2^{\min}; a_2^{\max}]$, les minimums locaux de la fonction $1 - \mathcal{C}(a_2)$ sont recherchés et les rayons de gaine critiques en sont déduits.

2.2.3 Influence des paramètres opto-géométriques sur le rayon de gaine critique

Pour mettre en évidence l'influence de tous les paramètres sur la valeur du rayon de gaine critique, un grand nombre de configurations $\{a_1, \Delta n_{12} = n_1/n_2, \Delta n_{23} = n_3/n_2, \lambda, m\}$ doivent être prises en compte. L'approche la plus adaptée est une étude statistique. Un grand nombre de tirages sont opérés sur les paramètres d'entrée $\{a_1, \Delta n_{12}, \Delta n_{23}, \lambda, m\}$. Pour un jeu de paramètres aléatoires, le plus grand rayon de gaine critique est calculé dans l'intervalle de résolution $a_2^{\text{critique}} \in [8 \mu\text{m}; 60 \mu\text{m}]$. Les paramètres tirés aléatoirement en entrée sont contenus dans les intervalles suivants :

- $\lambda \in [1; 2] \mu\text{m}$: Cette gamme spectrale contient les longueurs d'onde habituellement utilisées.
- $m \in [1; 15]$: l'étude concerne les 15 premiers modes de gaine. Les modes d'ordre supérieur, quant à eux, ne sont pas étudiés car ils interagissent peu dans les réseaux fibrés.
- $n_1 \in]1,001n_2; 1,005n_2]$: ce sont les indices du cœur de la plupart des fibres optiques faites de silice.

- $n_3 \in [1; n_2]$: l'indice du milieu extérieur doit être strictement inférieur à l'indice de la gaine pour que les modes de gaine soient guidés.
- $a_1 \in [3; 5] \mu m$: le rayon du cœur est de taille limitée, car nous focalisons notre étude uniquement sur les fibres monomodes (*i.e* $V < 2,405$, où $V = \frac{2\pi}{\lambda} a_1 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$).

Il est important de préciser que pour chaque paramètre aléatoire, la densité de probabilité est uniforme sur leur intervalle respectif.

Influence des sauts d'indice : Dans la figure 2.15, le rayon de gaine critique est tracé en fonction des sauts d'indice présents dans la section de la fibre. Que ce soit pour le saut d'indice entre le cœur et la gaine (figure 2.15a) ou pour le saut d'indice entre la gaine et le milieu extérieur (figure 2.15b), le constat reste le même, leur amplitude ne conditionne pas de façon notable la valeur du rayon de gaine critique.

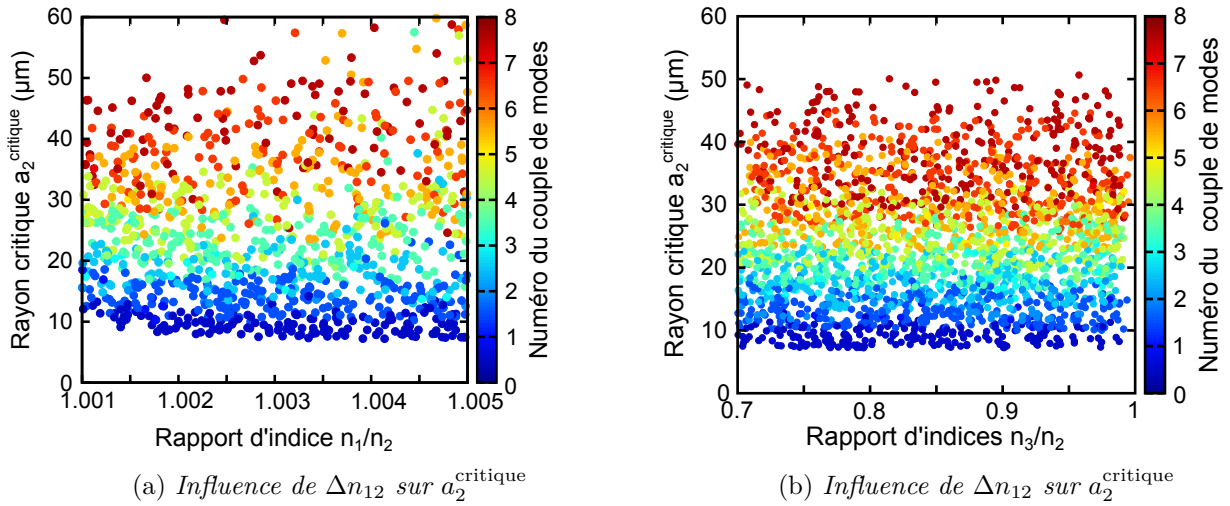


FIGURE 2.15: Influence des sauts d'indice sur la valeur du rayon de gaine critique.

Influence de la longueur d'onde : Comme nous pouvons le constater dans la figure 2.16, la longueur d'onde n'influe pas sur la valeur du rayon de gaine critique. En effet, pour un numéro de mode fixé, la valeur du rayon de gaine critique reste stable sur l'intervalle spectral $\lambda \in [1; 2] \mu m$.

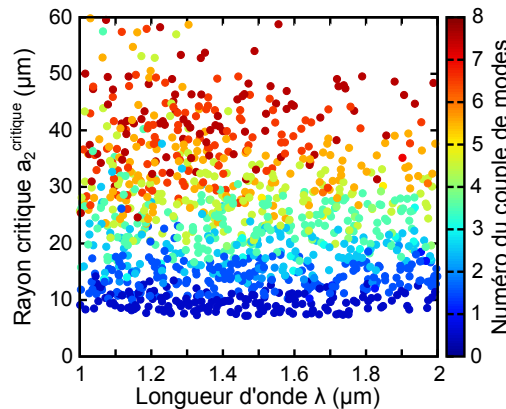


FIGURE 2.16: Influence de la longueur d'onde sur le rayon de gaine critique.

Influence du rayon du cœur : Dans la figure 2.17, le rayon de gaine critique est figuré en fonction du rayon de cœur a_1 . Les points associés aux tirages sont colorés selon la numérotation du couple de modes. Une tendance assez nette est relevée, des strates de points sont observées pour chaque doublet de modes. Le rayon de gaine critique augmente linéairement avec le rayon du cœur et la pente croît avec le numéro du couple. Il est également remarqué que le rayon de gaine critique est d'autant plus grand que le numéro du couple est élevé. Ce dernier point n'est guère surprenant, en effet l'existence des modes de gaine dépend fortement du rayon de gaine a_2 . Les modes d'ordre élevé exigent un rayon a_2 plus important pour pouvoir exister dans la gaine. De ce fait, leur rayon de gaine critique sont plus grands que ceux des modes de bas ordre.

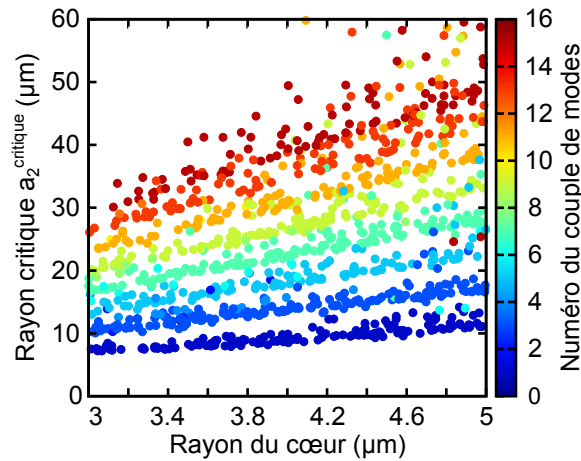
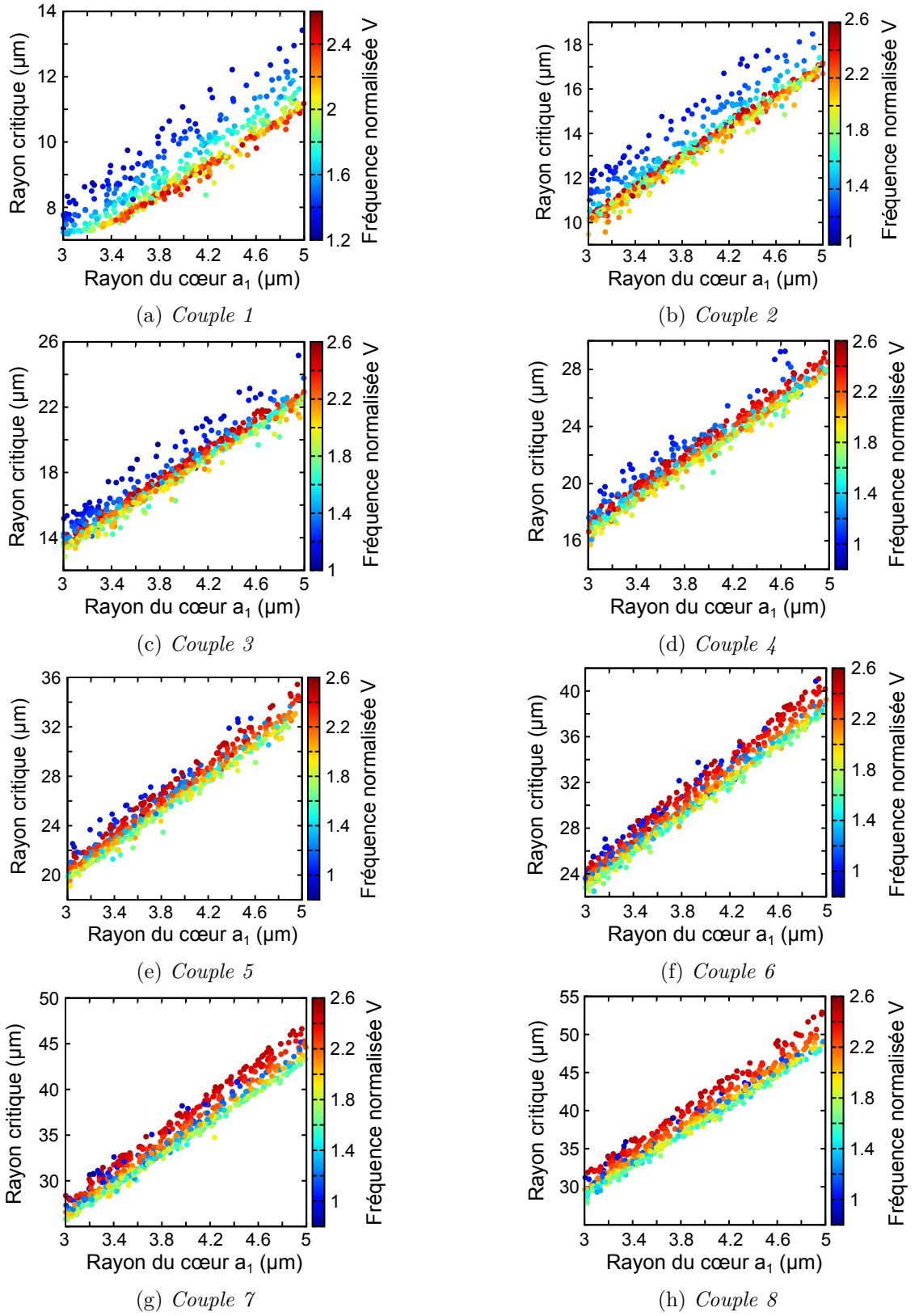


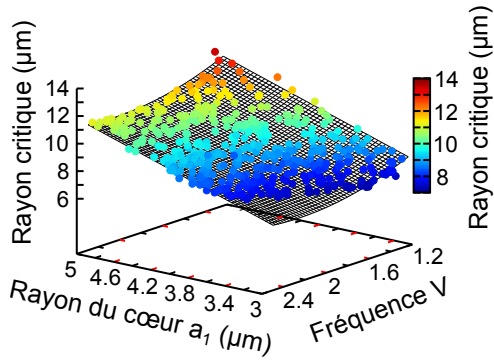
FIGURE 2.17: Influence du rayon du cœur sur le rayon de gaine critique.

Les rayons de gaine critiques des 8 premiers couples de modes sont affichés dans la figure 2.18 en fonction du rayon du cœur a_1 . La couleur de chaque point est fonction de la valeur de la fréquence normalisée. Pour tous les couples de modes, les points composent une fine bande de largeur régulière. Cette observation confirme l'existence d'une dépendance linéaire entre le rayon de gaine critique et le rayon du cœur. Il est également intéressant de constater que la répartition des points au sein de chaque bande dépend de la valeur de la fréquence normalisée. Cette distribution varie selon le numéro du couple. Pour le couple 1, les fréquences normalisées élevées sont localisées dans la partie inférieure de la bande, tandis que pour le couple 8, les fréquences normalisées les plus grandes sont concentrées sur la limite supérieure de la bande.

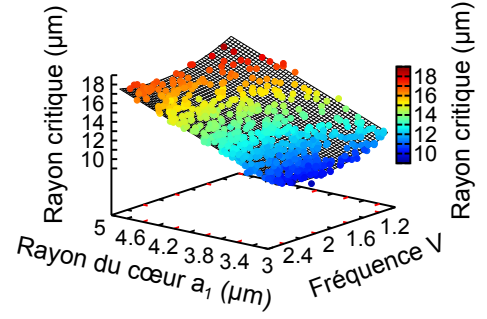
Pour mettre en évidence l'influence de la fréquence normalisée sur la valeur du rayon de gaine critique, on trace le rayon de gaine critique en fonction du rayon de cœur a_1 et de la fréquence normalisée V . Les courbes obtenues sont présentées dans la figure 2.19 pour les 8 premiers couples de modes. Pour tous les couples, la distribution des points est parfaitement ordonnée. Leur agencement reproduit une surface inclinée et légèrement incurvée. Ces surfaces sont schématisées dans les figures 2.19 par un quadrillage en traits continus noirs. Elles sont obtenues par une regression polynomiale du type : $a_2^{\text{critique}} = C_1 a_1 + (C_2 V - C_3)^2 + C_4 a_1 V$. Les valeurs des constantes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 évaluées pour chaque couple de modes sont synthétisées dans le tableau 2.5.

En regardant les coefficients contenus dans le tableau, on remarque qu'ils croissent tous avec le numéro du couple. Si on réécrit l'équation sous la forme $a_2^{\text{critique}} = (C_1 + C_4 V) a_1 + (C_2 V - C_3)^2$, on prend conscience que l'évolution du rayon de gaine critique en fonction de a_1 dépend de 2 paramètres qui sont le numéro du couple et la fréquence normalisée V . Pour une fréquence normalisée constante, l'augmentation du numéro du couple conduit à l'acroissement de la pente de la droite qui lie le rayon de gaine critique au rayon du cœur. Cette première remarque est réconfortante dans le sens où elle

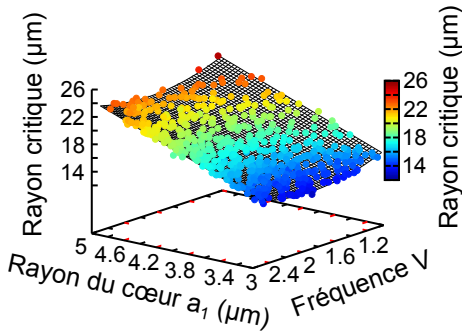

 FIGURE 2.18: Rayon de gaine critique en fonction de a_1 . L'échelle de couleur est fonction de V .



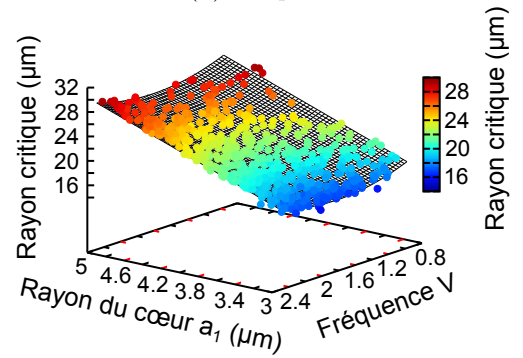
(a) Couple 1



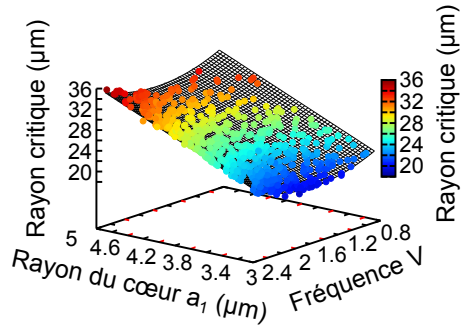
(b) Couple 2



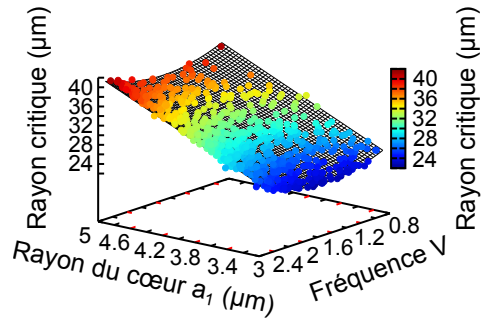
(c) Couple 3



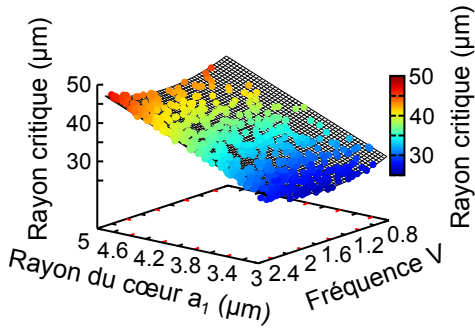
(d) Couple 4



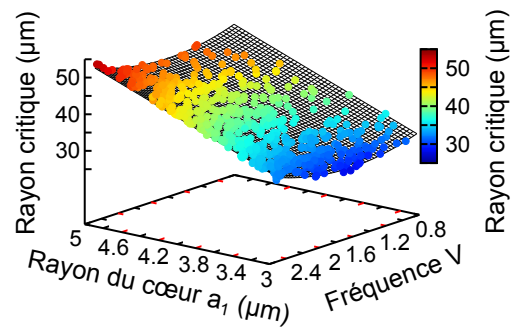
(e) Couple 5



(f) Couple 6



(g) Couple 7



(h) Couple 8

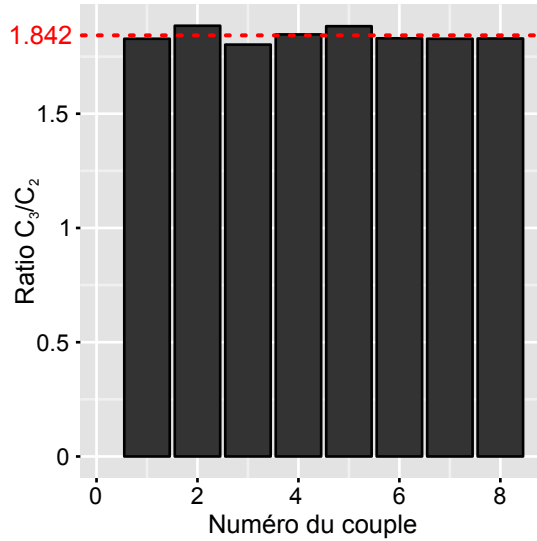
 FIGURE 2.19: Rayon de gaine critique en fonction de a_1 et V .

TABLE 2.5: Ajustement du type $a_2^{\text{critique}} = C_1 a_1 + (C_2 V - C_3)^2 + C_4 a_1 V$.

Numéro du couple	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
1	3,035	1,371	2,500	-0,400
2	3,755	1,572	2,964	-0,208
3	4,782	1,721	3,102	-0,178
4	5,475	1,847	3,413	0,026
5	6,329	1,965	3,603	0,136
6	7,129	2,037	3,728	0,275
7	7,918	2,175	3,975	0,407
8	8,705	2,250	4,116	0,541

confirme les observations faites dans la figure 2.17. En ce qui concerne l'ordonnée à l'origine de la droite $a_2^{\text{critique}} = f(a_1, V \text{ constant})$, sa valeur s'élève aussi avec l'ordre du mode.

Il est intéressant de remarquer que pour la valeur particulière $V = \frac{C_3}{C_2}$, l'ordonnée à l'origine de la droite s'annule. Toutefois ce résultat est à prendre avec précaution, car il impliquerait que la courbe soit définie en $a_1 = 0$. Ce n'est bien évidemment pas le cas, car pour cette valeur particulière de V , un rayon de cœur nul supposerait que le rayon de la gaine soit également nul. Or dans ces conditions, les modes de gaine ne peuvent exister. Nous pouvons donc supposer que la droite est définie uniquement à partir d'un rayon seuil tel que $a_2^{\text{seuil}} \leq a_2^{\text{critique}}$. Ce rayon seuil n'est autre que le rayon de gaine minimal permettant l'existence du mode dans la gaine.


 FIGURE 2.20: Évolution du rapport C_3/C_2 en fonction du numéro du mode.

Un autre point à noter est la constance du ratio $\frac{C_3}{C_2}$. Comme illustré dans la figure 2.20, les différentes valeurs de $\frac{C_3}{C_2}$ oscillent autour d'une valeur moyenne de 1,842. En posant $C_3 = 1,842C_2$, il est possible d'alléger l'expression de la fonction reliant le rayon de gaine critique aux quantités a_1 et V :

$$a_2^{\text{critique}} = (C_1 + C_4 V) a_1 + C_2^2 (V - 1,842)^2 \quad (2.79)$$

L'équation (2.79) est valide si et seulement si la fibre est une fibre à saut d'indice, monomode et faite de silice.

En résumé le rayon de gaine critique évolue linéairement avec le rayon du cœur à condition que la

fréquence normalisée V soit constante. L'ordonnée à l'origine et la pente de la droite dépend à la fois de la fréquence normalisée V et du numéro du couple.

L'équation (2.79) peut également être utilisée pour déterminer n'importe quel paramètre critique. Par exemple, on peut avoir une fibre avec des rayons et des indices de réfraction imposés, seule la longueur d'onde est ajustable. Dans cette configuration, la longueur d'onde critique pour laquelle les modes d'un même couple deviennent presque équivalents est obtenue par la résolution de l'équation (2.79) avec λ pour paramètre.

2.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons commencé par rappeler la méthodologie employée pour la détermination des champs électromagnétiques et de la constante de propagation des modes guidés dans des fibres à saut d'indice. Puis en nous basant sur la littérature, nous avons mis en évidence l'existence de plusieurs rayons de gaine critiques. Ces rayons critiques sont des rayons de gaine particuliers pour lesquels les champs électromagnétiques des modes de gaine $Hyb_{\ell m}$ et $Hyb_{\ell m+1}$ convergent vers une structure similaire.

Nous avons ensuite établi une fonction semi-analytique permettant par minimisation de déterminer la valeur de ces rayons de gaine critiques. À l'aide de cette fonction, nous avons réalisé une étude statistique afin d'étudier de manière globale les propriétés optiques des modes de gaine pour ces rayons particuliers. Environ 10000 tirages ont été effectués sur le numéro du couple de mode, le rayon du cœur, la longueur d'onde et les indices de réfraction. Pour chaque tirage, le plus grand rayon de gaine critique dans l'intervalle $[10 \mu m; 60 \mu m]$ a été calculé. Nous avons démontré une corrélation forte entre la valeur du rayon de gaine critique et les valeurs du rayon du cœur et de la fréquence normalisée. Une expression analytique a pu être obtenue par ajustement polynomial pour les huit premiers couples de modes. Cette relation, permet en connaissant a_1 et V d'estimer la valeur de a_2^{critique} pour un couple de modes imposés. Elle peut être, également, généralisée à tout autre paramètre critique. En connaissant la longueur d'onde et tous les paramètres opto-géométriques de la fibre à l'exception d'un, il est possible d'évaluer la valeur critique du paramètre inconnu pour lequel les champs électriques des modes d'un même couple tendent vers une structure commune.

La connaissance et la compréhension de ces rayons critiques nous semblent essentielles dans la conception de réseaux fibrés. Il faut s'assurer que le choix de notre géométrie du réseau ne nuit pas à son bon fonctionnement. En effet, un réseau dont le rayon de gaine est proche de a_2^{critique} risque d'avoir son fonctionnement fortement perturbé lorsqu'une légère modification de ses rayons se produit. Cette situation peut, par exemple, se rencontrer lors de la déformation radiale du réseau. Nous verrons dans le chapitre 3 que le rayon de gaine critique peut être un critère pour le dimensionnement des réseaux longue période.

Chapitre 3

Propriétés des réseaux longue période relatives aux déformations axiales et radiales

Sommaire

3.1	Fonctionnement des réseaux fibrés	63
3.1.1	Théorie des modes couplés	65
3.1.2	Réseau de Bragg	67
3.1.3	Réseau longue période	68
3.2	Méthodologie de l'étude des sensibilités	71
3.2.1	Espace des paramètres	71
3.2.2	Calcul de la sensibilité aux déformations.	72
3.2.3	Description de la série	74
3.3	Sensibilités croisées	75
3.3.1	Sensibilités croisées pour n_{eff}^m	76
3.3.2	Sensibilités croisées pour λ_{LPG}^m	77
3.3.3	Corrélation entre les sensibilités aux déformations axiales et radiales	79
3.4	Influence des différents paramètres	80
3.4.1	Influence de la différence d'indice entre le milieu extérieur et la gaine	80
3.4.2	Influence du pas du réseau	80
3.4.3	Influence du rayon de la gaine optique	81
3.4.4	Configurations hors-normes	83
3.5	Coefficient de couplage	85
3.5.1	Sensibilité à la déformation	85
3.5.2	Coefficient de couplage optimal	85
3.6	Conclusion	89

Comme cela a été évoqué dans le premier chapitre, les réseaux longue période peuvent être employés comme capteurs : toute contrainte externe qui modifie le pas du réseau ou son indice de réfraction induit un décalage des longueurs d'onde résonantes. La mesure de ces décalages peut permettre de remonter à l'amplitude de la sollicitation. L'influence de la température, de la déformation ou de l'indice du milieu extérieur a été largement étudiée (voir par exemple [40, 41, 42]). Cependant, la question de la sensibilité des LPG à la déformation reste ouverte pour deux raisons. Premièrement, les LPG sont des systèmes complexes, qui comportent plusieurs paramètres libres. Les études de la littérature considèrent généralement une configuration de base autour de laquelle elles font varier les paramètres un à un. Les résultats obtenus sont donc valides autour de la configuration de base mais manquent de généralité. En deuxième lieu, toutes les études font l'hypothèse d'un réseau libre de se déformer radialement, ce qui peut s'avérer complètement faux dans le cas d'un capteur enfoui, comme cela a été montré dans le premier chapitre.

Il apparaît donc nécessaire d'étudier plus précisément la sensibilité des LPG à la déformation, en tenant compte simultanément des déformations axiales et radiales, et en essayant de dégager quelques résultats de portée générale. C'est l'objet du présent chapitre. On commencera par rappeler le fonctionnement des réseaux à l'aide de la théorie des modes couplés, puis on présentera une étude statistique sur la sensibilité des réseaux longue période à la déformation.

3.1 Fonctionnement des réseaux fibrés

Un réseau fibré est une fibre optique dans laquelle on a modifié l'indice de réfraction du cœur. La plupart du temps, cet indice varie périodiquement le long de la fibre, suivant l'axe z , comme :

$$n_1^{\text{réseau}}(z) = n_1 + \Delta n_1^{\text{dc}} \left[1 + m \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda_B} z + \phi(z) \right) \right] \quad (3.1)$$

où n_1 est l'indice du cœur en absence de réseau, m est la visibilité des franges du réseau et le produit Δn_1^{dc} est l'indice effectif moyen, c'est à dire, l'augmentation moyenne de l'indice du cœur induit par la présence du réseau. On note Λ_B le pas du réseau de Bragg et $\phi(z)$ un terme de phase. Ce dernier est nul dans le cas des réseaux uniformes. Cette variation d'indice est illustrée dans la figure 3.1.

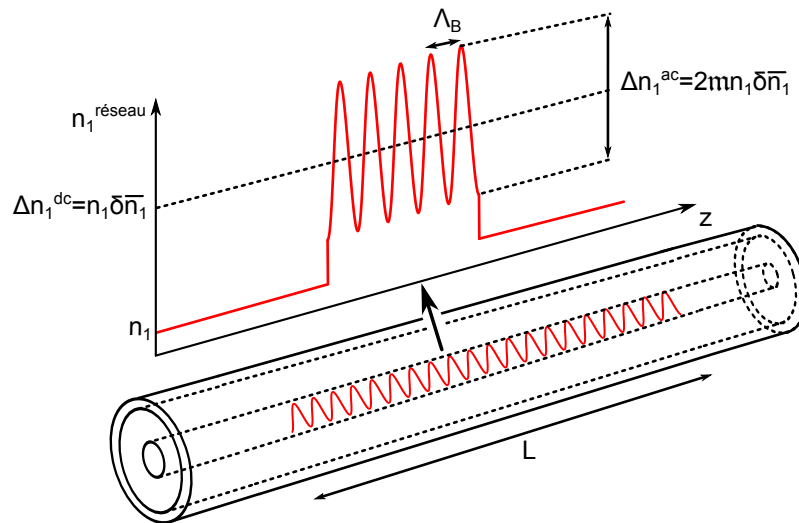


FIGURE 3.1: Illustration d'un réseau fibré quelconque.

En absence de défaut, les modes d'une fibre optique se propagent sans interagir. En présence d'un réseau, les modes s'échangent une partie plus ou moins importante de leur intensité lumineuse : ils deviennent couplés. La force du couplage entre deux modes dépend d'une condition de résonance qu'on peut voir, qualitativement, comme une condition de conservation de l'impulsion [43] :

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_B \quad (3.2)$$

où $\beta_B = 2\pi/\Lambda_B$ et $\beta_i = n_{\text{eff}}^i$, n_{eff}^i étant l'indice effectif du mode i . On peut alors expliquer de manière simple la nature du couplage en disposant les modes de la fibre sur l'axe des impulsions (voir figure 3.2). Les valeurs négatives correspondent aux modes se propageant dans la direction $-z$ et les valeurs

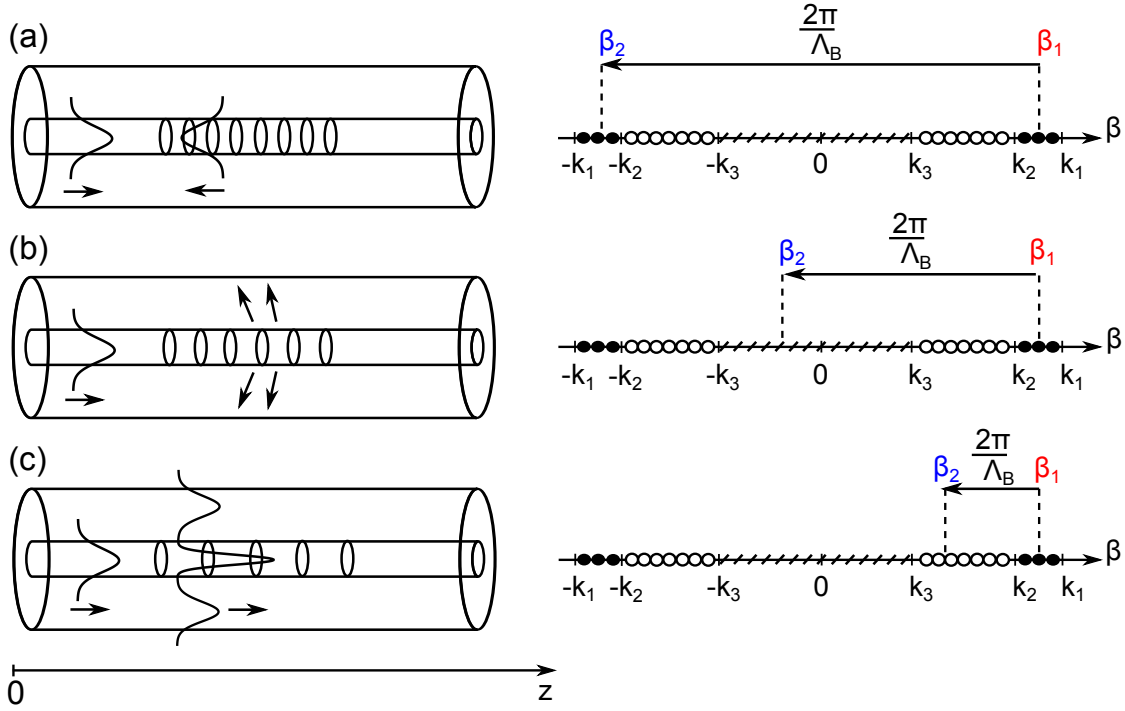


FIGURE 3.2: Schématisation des différents types de couplage modal possible à travers un réseau fibré.

positives aux modes qui se déplacent dans la direction $+z$. Les disques noirs sont les modes de cœur, ils ont une constante de propagation β_{co} telle que :

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 < \beta_{\text{co}} < k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1$$

où n_1 et n_2 sont respectivement les indices du cœur et de la gaine. Les modes de gaine sont représentés par des disques blancs, leur constante de propagation β_{cl} vérifie :

$$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda} n_3 < \beta_{\text{cl}} < k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2$$

où n_3 est l'indice de réfraction du milieu extérieur, il est strictement inférieur à n_2 . La région hachurée sur l'axe, telle que :

$$-k_3 < \beta < +k_3$$

rassemble les modes radiatifs qui ne sont pas guidés par la fibre optique. Contrairement aux modes guidés, les modes radiatifs ne peuvent être dénombrés : il existe un ensemble continu de modes radiatifs dont la constante de propagation β_{rad} est inférieure à k_3 .

La condition de résonance (3.2) conduit à trois régimes de couplage selon le pas du réseau :

Réseaux à pas court, $\beta_B > \beta_1 + k_3$: dans ce cas, le mode de cœur incident est couplé à un mode contra-propagatif. Le couplage se fait avec un mode de gaine si $\beta_1 + k_3 < \beta_B < \beta_1 + k_2$ et avec un mode de cœur si $\beta_1 + k_2 < \beta_B$.

Si la fibre est monomode¹, alors $\beta_2 = -\beta_1$ et la condition (3.2) devient :

$$\lambda_1 = \lambda_B = 2n_{\text{eff}}^{\text{co}}\Lambda_B \quad (3.3)$$

où $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ est l'indice effectif du mode de cœur, ce qui fixe Λ_B à une valeur de quelques centaines de nanomètres. Ce cas correspond aux réseaux de Bragg. Ainsi, un réseau de Bragg se comporte comme un miroir qui réfléchit le mode de cœur incident. Il agit comme un filtre coupe bande en transmission et comme un filtre passe bande en réflexion. Ce fonctionnement est illustré sur la figure 3.3a.

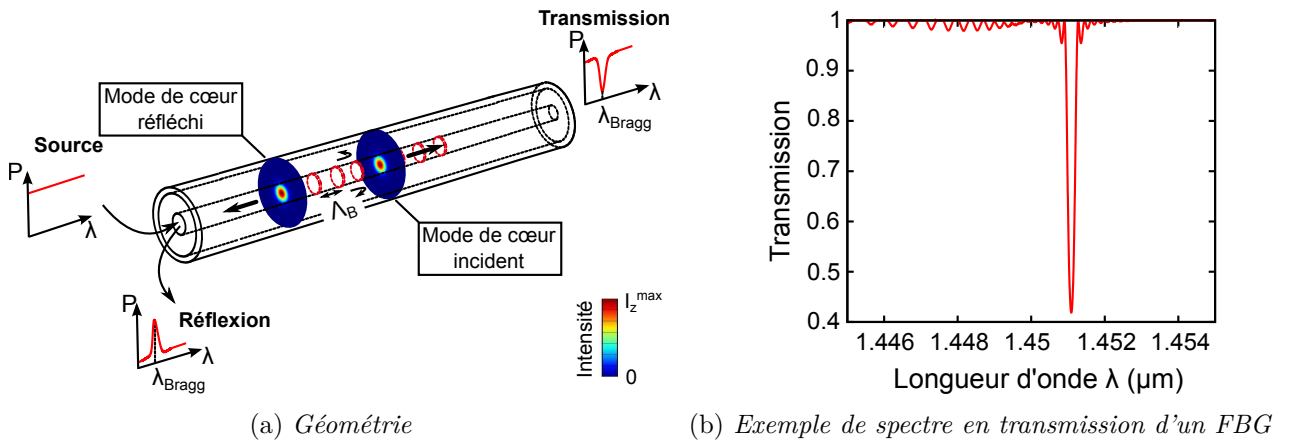


FIGURE 3.3: Principe de fonctionnement d'un FBG.

Réseau à pas intermédiaire, $\beta_1 - k_3 < \beta_B < \beta_1 + k_3$: i.e $\beta_1 \simeq \frac{2\pi}{\Lambda_B}$: le mode de cœur est couplé à des modes radiatifs. L'amplitude cédée par le mode de cœur est perdue, le réseau occasionne des pertes sur la lumière transmise.

Réseau à pas long, $\beta_1 - k_2 < \beta_B < \beta_1 - k_3$: le mode de cœur est lié à un mode de gaine de direction de propagation identique. Ces modes sont ensuite atténués à cause de leur sensibilité aux imperfections présentes dans la fibre. Ainsi, le spectre transmis comporte une succession de creux centrés sur les longueurs d'onde résonantes, λ_{LPG}^m , données par l'équation (3.2) :

$$\lambda_{LPG}^m = \left(n_{\text{eff}}^{\text{co}} - n_{\text{eff}}^{\text{cl},m} \right) \Lambda_{LPG} \quad (3.4)$$

où $n_{\text{eff}}^{\text{cl}}$ est l'indice effectif du mode de gaine et m est le numéro du mode de gaine couplé. Le principe de fonctionnement du réseau longue période (LPG) est illustré en figure 3.4.

3.1.1 Théorie des modes couplés

La théorie des modes couplés est un formalisme permettant de modéliser les interactions modales dans des systèmes optiques divers. L'adaptation de la théorie des modes couplés aux guides d'onde émerge dans les années 70. Selon les applications visées, de nombreuses variantes ont été élaborées. On peut citer par exemple les formalismes proposés par Snyder [44], Marcuse [45, 46], Yariv [47] ou encore Kolgenik [48]. La théorie des modes couplés a prouvé son efficacité dans de nombreuses applications

1. Vis à vis des modes de cœur. Par la suite, le terme de monomode s'appliquera toujours aux modes de cœur

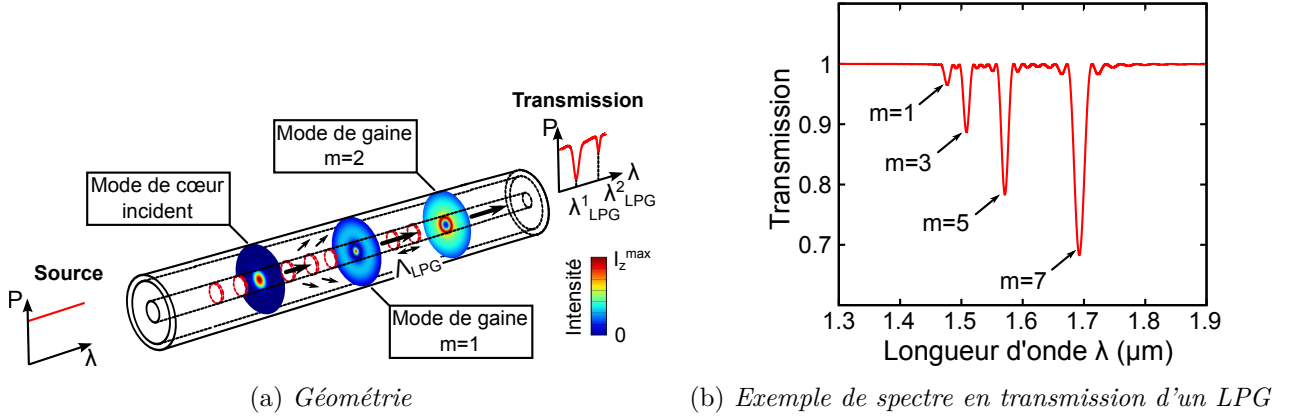


FIGURE 3.4: Principe de fonctionnement d'un LPG.

telles que les coupleurs directionnels [49, 50], les résonateurs optiques en anneau [51, 52] et les réseaux fibrés [5, 53, 54].

Pour modéliser les réponses spectrales de réseaux, notre choix se porte sur le formalisme de Kolgenik [48]. C'est d'ailleurs celui employé par Erdogan dans ses nombreuses publications [5, 43, 55].

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, dans une fibre perturbée, les modes cèdent ou emmagasinent de l'énergie. Leur amplitude devient par conséquent dépendante de la distance parcourue dans la fibre. Théoriquement, il est possible de déterminer ces variations d'amplitude par la résolution des équations couplées [5, 48] :

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial z} = i \sum_\nu A_\nu \left(K_{\nu\mu}^t + K_{\nu\mu}^z \right) e^{i(\beta_\nu - \beta_\mu)z} + i \sum_\nu B_\nu \left(K_{\nu\mu}^t - K_{\nu\mu}^z \right) e^{-i(\beta_\nu + \beta_\mu)z} \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial z} = -i \sum_\nu A_\nu \left(K_{\nu\mu}^t - K_{\nu\mu}^z \right) e^{i(\beta_\nu + \beta_\mu)z} - i \sum_\nu B_\nu \left(K_{\nu\mu}^t + K_{\nu\mu}^z \right) e^{-i(\beta_\nu - \beta_\mu)z} \quad (3.5b)$$

où :

$$K_{\nu\mu}^t = \frac{\omega}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r dr \Delta\epsilon E_{t\nu} \cdot E_{t\mu}^* \quad (3.6a)$$

$$K_{\nu\mu}^z = \frac{\omega}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r dr \frac{\Delta\epsilon \cdot \epsilon}{\epsilon + \Delta\epsilon} E_{z\nu} \cdot E_{z\mu}^* \quad (3.6b)$$

où $\Delta\epsilon$ représente la modification du tenseur de permittivité diélectrique de la fibre. Les paramètres $A(z)$ et $B(z)$ sont respectivement les amplitudes des modes se propageant dans les directions $+z$ et $-z$. Les termes $K_{\nu\mu}^t$ et $K_{\nu\mu}^z$ sont les coefficients de couplage transverse et longitudinale entre un mode μ et un mode ν . Dans les fibres optiques conventionnelles, le terme $K_{\nu\mu}^t$ est prépondérant sur $K_{\nu\mu}^z$. Ce dernier est par conséquent négligé dans les équations (3.5a) et (3.5b). Un coefficient de couplage élevé est le signe que les échanges d'énergie entre ces deux modes sont importants.

Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que le couplage entre deux modes est d'autant plus grand que le recouvrement de leur champ électrique dans la perturbation $\Delta\epsilon$ est important.

La nature des modes couplés et les conditions aux limites diffèrent grandement d'un réseau de Bragg à un réseau longue période. C'est pourquoi les études de ces deux cas vont être faites séparément. On considérera en revanche des réseaux uniformes dans les deux cas. En conséquence, la variation de permittivité pourra être approximée par :

$$\Delta\epsilon \simeq 2\epsilon_0 n_1 \Delta n_1 \quad \text{avec} \quad \Delta n_1 = n_1 \delta \overline{n_1} \left[1 + m \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right] \quad (3.7)$$

3.1.2 Réseau de Bragg

Le réseau de Bragg couplant le mode de cœur incident au mode de cœur contra-propagatif de même indice effectif, les équations de couplage (3.5a) et (3.5b) se réduisent à :

$$\frac{\partial A^{\text{co}}}{\partial z} = iK_{\text{co-co}}^t A^{\text{co}} + iK_{\text{co-co}}^t B_{\nu} e^{-2i\beta_{\mu}z} \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial B^{\text{co}}}{\partial z} = -iK_{\text{co-co}}^t A^{\text{co}} e^{2i\beta_{\mu}z} - iK_{\text{co-co}}^t B_{\nu} \quad (3.8b)$$

où β^{co} est la constante de propagation du mode de cœur. Les termes hors résonance oscillant très rapidement, leur contribution en moyenne est négligeable si bien que les équations de couplage peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial A^{\text{co}}}{\partial z} = iA^{\text{co}}\kappa^{\text{co}} + i\frac{\mathbf{m}}{2}B^{\text{co}}\kappa^{\text{co}}e^{-2i\delta^{\text{co}}z} \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial B^{\text{co}}}{\partial z} = -iB^{\text{co}}\kappa^{\text{co}} - i\frac{\mathbf{m}}{2}A^{\text{co}}\kappa^{\text{co}}e^{2i\delta^{\text{co}}z} \quad (3.9b)$$

où δ^{co} est l'écart à la résonance de Bragg :

$$\delta^{\text{co}} = \frac{1}{2} \left(2\beta^{\text{co}} - \frac{2\pi}{\Lambda_{\text{B}}} \right) \quad (3.10)$$

et κ^{co} , la constante de couplage des modes de cœur calculée pour une puissance moyenne de 1 W :

$$\kappa^{\text{co}} = \frac{\omega\varepsilon_0 n_1^2 \delta \bar{n}_1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a_1} r dr |\vec{E}_t^{\text{co}}|^2 \quad (3.11)$$

Les solutions de (3.9a) et (3.9b) ont été calculées par Kogelnik pour les conditions initiales : $A^{\text{co}}(0) = 1$ et $B^{\text{co}}(L) = 0$ [48] :

$$|A^{\text{co}}(z)|^2 = \frac{(\kappa^2 - \hat{\sigma}^2) \cosh^2 \left[\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} (z - L) \right] - \hat{\sigma}^2 \sinh^2 \left[\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} (z - L) \right]}{\hat{\sigma}^2 \sinh^2 \left[\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right] + (\kappa^2 - \hat{\sigma}^2) \cosh^2 \left(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right)} \quad (3.12a)$$

$$|B^{\text{co}}(z)|^2 = \frac{\kappa}{\hat{\sigma}^2 \sinh^2 \left[\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right] + (\kappa^2 - \hat{\sigma}^2) \cosh^2 \left(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right)} \sinh^2 \left[\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} (z - L) \right] \quad (3.12b)$$

avec :

$$\kappa = \frac{\mathbf{m}}{2} \kappa^{\text{co}} \quad (3.13a)$$

$$\hat{\sigma} = \delta^{\text{co}} + \kappa^{\text{co}} \quad (3.13b)$$

La réflectivité du réseau est notée r , elle est déterminée par $r = |B^{\text{co}}(0)|^2 / |A^{\text{co}}(0)|^2$ [43] :

$$r = \frac{\sinh^2 \left(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right)}{\cosh^2 \left(\sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2} L \right) - \frac{\hat{\sigma}^2}{\kappa^2}} \quad (3.14)$$

Elle est maximale pour $\hat{\sigma} = 0$ [43] : $r_{\text{max}} = \tanh^2(\kappa L)$. Cela correspond à une longueur d'onde :

$$\lambda_{\text{max}} = 2 \left(n_{\text{eff}}^{\text{co}} + \frac{\lambda_{\text{max}}}{2\pi} \kappa^{\text{co}} \right) \Lambda_{\text{B}} \quad (3.15)$$

légèrement décalée par rapport à la longueur d'onde de Bragg attendue donnée par l'équation (3.10). L'écart s'explique par l'augmentation de l'indice effectif moyen Δn_1 induit par le réseau. En pratique, le décalage est typiquement de 10^{-4} à 10^{-3} en valeur relative, soit quelques centaines de picomètres à quelques nanomètres.

La largeur de la résonance de Bragg est conditionnée par le nombre de périodes du réseau. Ainsi pour deux réseaux de produit κL et de pas Λ_B identiques, le réseau le plus long produira la résonance de Bragg la plus fine. À titre illustratif, les spectres de deux réseaux de Bragg sont présentés dans la figure 3.5a. Ils possèdent le même pas de réseau et un produit κL équivalent à savoir : $\Lambda_B = 535,7 \text{ nm}$ et $\kappa L = 2,13$. Ils sont tous deux inscrits dans une fibre identique, c'est à dire : $a_1 = 4,2 \mu\text{m}$ et $\Delta n_{12} = 1,0036$. Le FBG le plus court se caractérise par : $L = 2 \text{ mm}$ et $\delta\bar{n}_1 = 5.10^{-4}$, tandis que le second réseau se distingue par : $L = 10 \text{ mm}$ et $\delta\bar{n}_1 = 1.10^{-4}$.

La façon dont s'opèrent les échanges d'énergie entre les modes couplés par un FBG est illustrée dans la figure 3.5b. Le mode de cœur incident cède son énergie au fur et à mesure qu'il avance dans le réseau. Son amplitude est par conséquent minimale à la sortie du réseau. L'énergie cédée est transférée au mode de cœur contra-propagatif.

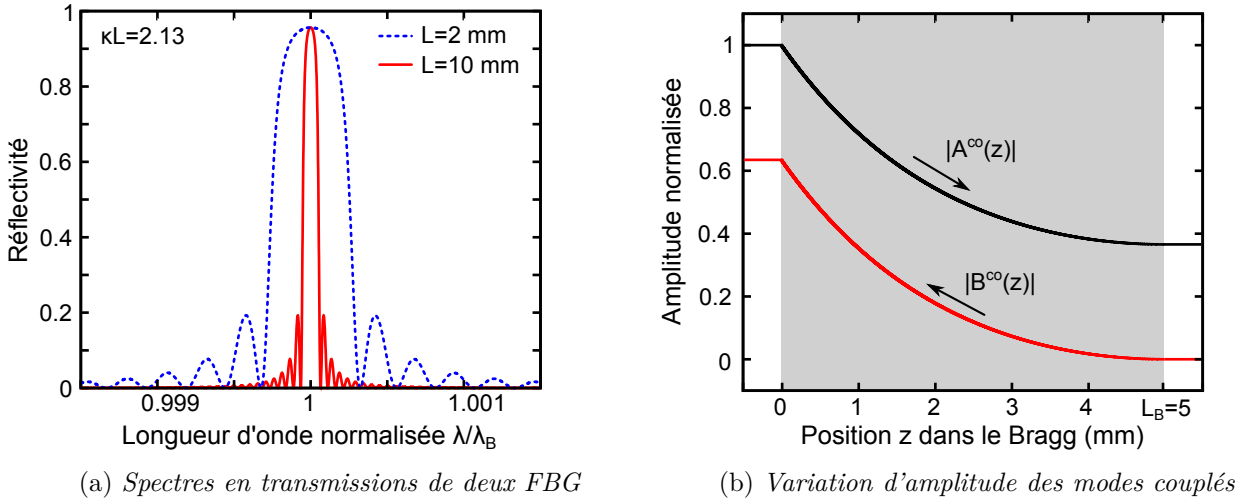


FIGURE 3.5: Influence de la longueur du FBG sur la largeur de la résonance de Bragg (a) et échanges d'amplitudes des modes couplés à travers le FBG (b).

3.1.3 Réseau longue période

Dans un réseau longue période, le mode de cœur incident se couple à des modes de gaine co-propagatifs. Les équations couplées du réseau LPG sont déduites de (3.5a) et (3.5b) en utilisant les mêmes hypothèses sur les termes hors-résonance que précédemment :

$$\frac{\partial A^{\text{co}}}{\partial z} = iA^{\text{co}}\kappa^{\text{co}} + i\frac{\mathbf{m}}{2}\sum_{\nu}\kappa_{\text{cl},\nu}^{\text{co}}A_{\nu}^{\text{cl}}e^{-2i\delta_{\nu}^{\text{cl}}z} \quad (3.16a)$$

$$\sum_{\nu}\frac{\partial A_{\nu}^{\text{cl}}}{\partial z} = i\frac{\mathbf{m}}{2}\sum_{\nu}\kappa_{\text{cl},\nu}^{\text{co}}A^{\text{co}}e^{2i\delta_{\nu}^{\text{cl}}z} \quad (3.16b)$$

où δ^{cl} est la condition de résonance du LPG :

$$\delta_{\nu}^{\text{cl}} = \frac{1}{2}\left(\beta_{01}^{\text{co}} - \beta_{1\nu}^{\text{cl}} - \frac{2\pi}{\Lambda_{\text{LPG}}}\right) \quad (3.17)$$

et $\kappa_{cl,\nu}^{co}$ la constante de couplage entre le mode de cœur et le mode de gaine ν :

$$\kappa_{cl,\nu}^{co} = \frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2 \delta \bar{n}_1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a_1} \left(E_r^{cl} E_r^{co*} + E_\theta^{cl} E_\theta^{co*} \right) r dr \quad (3.18)$$

Précisons que cette constante est évaluée en considérant les puissances du mode de cœur et des modes de gaine égales à 1W. Notons également que les couplages entre modes de gaine sont négligés dans les équations (3.16a)-(3.16b) car $\kappa^{co}, \kappa_{cl,\nu}^{co} \gg \kappa_\nu^{cl}$ [5].

Pour étudier le réseau LPG de façon analytique, on commence par considérer un couplage à deux modes². À l'entrée du réseau, le mode de cœur n'est pas encore couplé au mode de gaine, son amplitude normalisée est intacte, on a ainsi : $A^{co}(0) = 1$ et $A^{cl}(0) = 0$ pour les modes de gaine. Avec ces conditions initiales, les solutions du système d'équations (3.16a) et (3.16b) sont [48] :

$$|A^{co}(z)|^2 = \cos^2 \left(\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} z \right) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} \sin^2 \left(\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} z \right) \quad (3.19a)$$

$$|A_\nu^{cl}(z)|^2 = \frac{\kappa^2}{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} \sin^2 \left(\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} z \right) \quad (3.19b)$$

La transmission du réseau est notée T , elle est définie par $T = \frac{|A^{co}(L)|^2}{|A^{co}(0)|^2}$ [43] :

$$T = \cos^2 \left(\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} L \right) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} \sin^2 \left(\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \kappa^2} L \right) \quad (3.20)$$

avec :

$$\kappa = \frac{m}{2} \kappa_{cl,\nu}^{co} \quad (3.21a)$$

$$\hat{\sigma} = \delta_\nu^{cl} + \frac{\kappa^{co}}{2} \quad (3.21b)$$

D'après l'équation (3.20) le minimum de transmission est observé pour $\hat{\sigma} = 0$. Le minimum de transmission ne correspond donc pas à l'annulation de la condition de phase (3.17) du LPG. La présence d'un terme $\frac{\kappa^{co}}{2}$ est responsable du décalage. En pratique, la longueur d'onde de résonance doit satisfaire la condition [5] :

$$\delta_\nu^{cl} + \frac{\kappa^{co}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{LPG} = \left(n_{eff}^{co} - n_{eff}^{cl} + \frac{\lambda_{LPG}}{2\pi} \kappa^{co} \right) \Lambda_{LPG} \quad (3.22)$$

Comme pour le réseau de Bragg, la largeur de la résonance du LPG dépend du nombre de périodes que comporte le réseau. Pour deux LPG de pas Λ_{LPG} et de produit κL identiques, le réseau de plus grande longueur produit la résonance la plus étroite (voir figure 3.6).

Les modes couplés à travers le LPG s'échangent leur énergie périodiquement avec la distance z parcourue dans le réseau. La variation des amplitudes des modes couplés avec la distance normalisée κz est présentée dans la figure 3.7a. Pour $\kappa z \leq \frac{\pi}{2}$, le mode de cœur incident voit son amplitude décroître au profit du mode de gaine couplé. L'énergie du mode de cœur est totalement cédée à la distance $z_{opt} = \frac{\pi}{2\kappa}$. À cette distance particulière, l'amplitude de la résonance du LPG dans le spectre en transmission est maximale, c'est à dire égale à un. Si la distance augmente encore à partir de z_{opt} , les échanges d'énergie s'inversent. Le mode de gaine restitue l'énergie emmagasinée au mode de cœur.

L'influence de la longueur du réseau sur le spectre en transmission du LPG est illustrée dans la figure 3.7b. Dans cette figure, le spectre en transmission d'un LPG est tracé pour deux longueurs différentes à savoir : $L = 25 \text{ mm} < z_{opt}$ et $L = 50, 45 \text{ mm} = z_{opt}$.

2. Cette restriction est vraie la plupart du temps, elle concerne les cas où il n'y a pas de superposition des résonances du LPG.

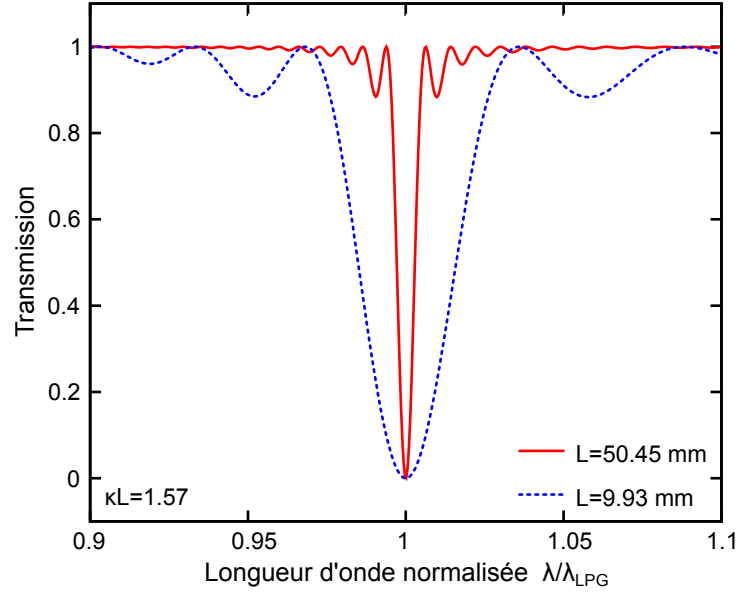


FIGURE 3.6: Spectre en transmission de deux LPG de pas Λ_{LPG} et de produit κL identiques.

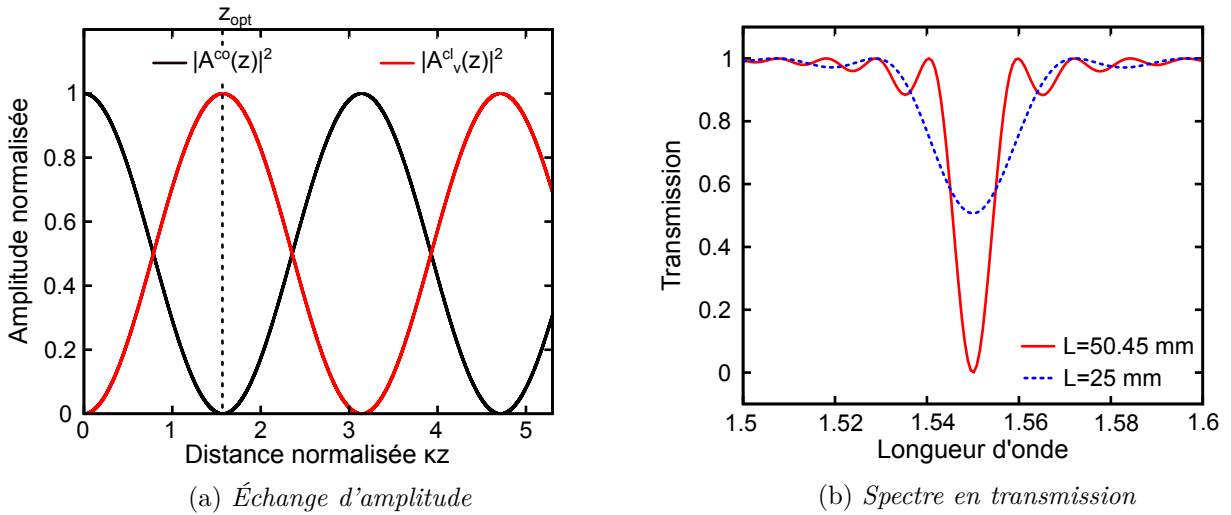


FIGURE 3.7: Variation des amplitudes des modes couplés à travers un LPG (a) et influence de la longueur du LPG sur son spectre en transmission (b).

3.2 Méthodologie de l'étude des sensibilités

Pour dégager des conclusions de portée générale nous avons utilisé une approche statistique. Nous avons effectué une exploration aléatoire de l'espace des paramètres en tirant au hasard dix mille configurations de réseaux longue période. Nous allons décrire dans un premier temps la méthode employée pour mener les simulations.

3.2.1 Espace des paramètres

Tout d'abord, on rappelle brièvement les paramètres opto-géométriques caractérisant le LPG. La fibre possède un cœur cylindrique de rayon a_1 et d'indice n_1 entouré d'une gaine concentrique d'indice n_2 et de rayon a_2 . La gaine est elle-même entourée d'un milieu d'indice n_3 que l'on considère d'extension infinie car son épaisseur est très grande devant la longueur d'onde. Le LPG est inscrit dans le cœur de la fibre, il possède une longueur L , une modulation d'indice d'amplitude Δn_1^{ac} , un indice effectif moyen Δn_1^{dc} et un pas Λ_{LPG} (voir figure 3.1). Enfin, un mode de gaine résonnant est caractérisé par son ordre m . Le système présente donc 10 paramètres libres.

Le problème traité peut être simplifié en réduisant le nombre de paramètres libres. Le premier paramètre qui peut être délaissé est la longueur du réseau L , car elle n'a aucune influence sur les constantes de couplage $\kappa_{cl,m}^{co}$ des modes de gaine et sur la longueur d'onde de résonance du réseau. Elle affecte seulement la profondeur et la largeur du creux de la résonance.

Les deuxième et le troisième paramètres négligeables sont l'amplitude de modulation Δn_1^{ac} et l'indice effectif moyen Δn_1^{dc} du réseau. Ces paramètres interviennent directement dans l'expression du coefficient de couplage, mais dans le cadre de notre étude nous utiliserons un coefficient de couplage normalisé. Ce dernier est donc indépendant de Δn_1^{ac} et Δn_1^{dc} . De plus, Δn_1^{ac} ne conditionne pas la longueur d'onde de résonance du LPG, il n'est donc pas nécessaire de l'inclure dans les paramètres d'étude. Pour Δn_1^{dc} , nous supposons que les résultats de Bhatia ([40] p179) peuvent être généralisés. Ainsi nous considérons que ce paramètre cause seulement un décalage constant de la longueur d'onde de résonance des LPG, il n'a donc pas besoin d'être inclu dans les paramètres de l'étude.

Par ailleurs, la grande majorité des fibres monomodes utilisées actuellement sont les fibres standards des télécommunications. Il y a donc peu de perte de généralité à se focaliser sur ces fibres, et c'est ce que nous ferons dans la suite de cette section. On suppose donc que la fibre optique est de type SMF28 : le rayon du cœur vaut $a_1 = 4,2 \mu m$ et la différence entre l'indice du cœur et de la gaine est telle que $n_1 = 1,0036n_2$, où n_2 est calculé à partir de la relation de Sellmeier :

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{i=0}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (3.23)$$

où $A_1 = 0,696750$, $A_2 = 0,4082188$, $A_3 = 0,890815$, $\lambda_1 = 0,069066 \mu m$, $\lambda_2 = 0,115662 \mu m$ et $\lambda_3 = 9,900559 \mu m$ [40].

Ces considérations permettent de réduire à 4 le nombre de paramètres libres du système à savoir : a_2 , n_3 , Λ_{LPG} et m . Pour explorer cet espace des paramètres, nous avons utilisé une approche statistique. On commence par définir une configuration $\{a_2, n_3, \Lambda_{LPG}, m\}$ en effectuant un tirage aléatoire des paramètres dans les intervalles suivants :

- $a_2 \in [15 \mu m; 70 \mu m]$: la borne inférieure est fixée à cette valeur pour s'assurer que le mode de cœur ne voit pas le milieu extérieur, la borne supérieure est comparable au rayon de gaine d'une SMF28 ;
- $n_3 \in [1; n_2[$: l'indice du milieu extérieur doit être impérativement inférieur à n_2 pour que les modes de gaine puissent être guidés dans la gaine.

- $\Lambda_{LPG} \in [200 \mu m; 600 \mu m]$: ce sont habituellement les valeurs du pas rencontrées dans la littérature ;
- $m \in [1; 20]$: On se cantonne à des modes d'ordre relativement faible. En effet, pour des ordres supérieurs à 20, la constante de couplage des modes est jugée trop faible ;

Pour chaque paramètre, la densité de probabilité est uniforme dans l'intervalle. Les configurations ne sont pas pour autant toutes équiprobables car on impose que la longueur d'onde de résonance tombe dans l'intervalle $[1350 \text{ nm}; 1600 \text{ nm}]$. Cet intervalle de longueurs d'onde couvre largement les gammes spectrales couramment utilisées pour l'interrogation des capteurs à fibre optique.

3.2.2 Calcul de la sensibilité aux déformations.

Lorsque la configuration $\{a_2, n_3, \Lambda_{LPG}, m\}$ est tirée, on commence par calculer la longueur d'onde λ_{LPG}^m . Cette longueur d'onde est donnée par la condition de résonance des réseaux longue période (3.17) :

$$\lambda_{LPG}^m = \left[n_{\text{eff}}^{\text{cœur}}(a_i, n_i, \lambda_{LPG}^m) - n_{\text{eff},m}^{\text{gaine}}(a_i, n_i, \lambda_{LPG}^m) \right] \Lambda_{LPG} \quad (3.24)$$

où l'indice effectif $n_{\text{eff},m}^{\text{gaine}}$ du $m^{\text{ième}}$ mode de gaine est calculé en résolvant l'équation de dispersion des modes de gaine (2.41) et $n_{\text{eff}}^{\text{cœur}}$ est l'indice effectif du mode de cœur solution de l'équation de dispersion du mode de cœur (2.19).

La condition de résonance semble à première vue linéaire mais ne l'est pas du tout en réalité car les équations (2.19), (2.41) et (3.24) sont couplées. On les résout numériquement par dichotomie. Ce calcul fait, si λ_{LPG}^m n'est pas dans l'intervalle $[1350 \text{ nm}; 1600 \text{ nm}]$ on écarte cette configuration et on procède à un nouveau tirage des paramètres.

Lorsque la longueur d'onde de résonance tombe dans le bon intervalle, on applique des déformations $\{\epsilon_r, \epsilon_z\}$ à la fibre, où ϵ_r représente la déformation radiale et ϵ_z la déformation axiale. Les 2 déformations varient indépendamment entre $-1000 \mu\epsilon$ et $1000 \mu\epsilon$ par pas de $100 \mu\epsilon$. Pour chaque couple $\{\epsilon_r, \epsilon_z\}$ on calcule les caractéristiques opto-géométriques du réseau déformé en fonction de ses caractéristiques au repos :

$$\begin{cases} a_j^{\text{deform}} = a_j(1 + \epsilon_r) & \text{pour } j = 1, 2 \\ \Lambda_{LPG}^{\text{deform}} = \Lambda_{LPG}(1 + \epsilon_z) \\ n_j^{\text{deform}} = n_j - \frac{n_j^3}{2} [(p_{11} + p_{12}) \epsilon_r + p_{11} \epsilon_z] & \text{pour } j = 1, 2 \end{cases} \quad (3.25)$$

où $p_{11} = 0,113$ et $p_{12} = 0,252$ sont les composantes du tenseur de photoélasticité de la silice.

À partir de ces nouvelles valeurs on calcule la nouvelle longueur d'onde de résonance à l'aide des équations (2.19), (2.41) et (3.24) comme précédemment. On se retrouve donc à la fin de ce calcul avec les décalages en longueurs d'onde calculés aux nœuds d'une grille de 20×20 points régulièrement espacés de $100 \mu\epsilon$.

Les caractéristiques métrologiques du capteur qui nous intéressent sont les sensibilités à la déformation axiale et à la déformation radiale. Dans la gamme de déformations choisie $[-1000 \mu\epsilon; 1000 \mu\epsilon]$, le décalage de longueur d'onde est la plupart du temps linéaire (voir la figure 3.8a). Ainsi, pour chaque déformation axiale ϵ_z , on calcule la sensibilité à la déformation radiale $\alpha_r^\lambda(\epsilon_z)$:

$$\lambda_{LPG}^m(\epsilon_r) |_{\epsilon_z=\text{cst}} = \alpha_r^\lambda(\epsilon_z) \epsilon_r + \beta_r^\lambda \quad (3.26)$$

à partir d'une régression linéaire sur les 20 valeurs de décalages obtenues pour ϵ_r variant entre $-1000 \mu\epsilon$ et $1000 \mu\epsilon$, ϵ_z étant constant (figure 3.8b). Le même type de calcul est réalisé pour déterminer $\alpha_z^\lambda(\epsilon_r)$:

$$\lambda_{LPG}^m(\epsilon_z) |_{\epsilon_r=\text{cst}} = \alpha_z^\lambda(\epsilon_r) \epsilon_z + \beta_z^\lambda \quad (3.27)$$

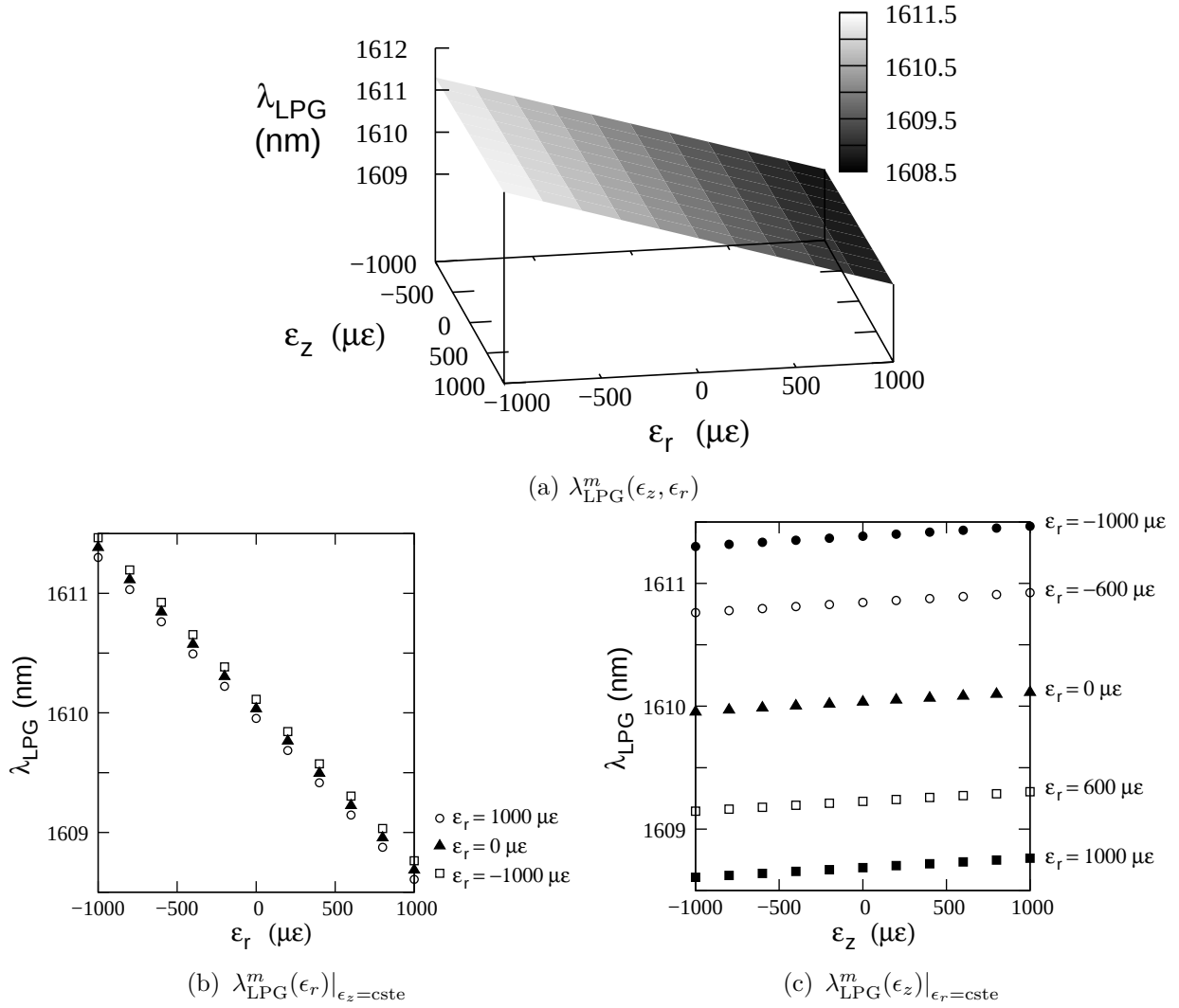


FIGURE 3.8: Évolution de λ_{LPG}^m en fonction des déformations axiales et radiales pour un LPG dont les caractéristiques sont les suivantes : $m = 8$, $a_2 = 63 \mu\text{m}$ et $\Lambda_{\text{LPG}} = 456 \mu\text{m}$.

la sensibilité à la déformation axiale, la déformation radiale étant constante (figure 3.8c).

De la même façon, on calcule les sensibilités de l'indice effectif du mode de gaine aux déformations axiales et radiales :

$$\begin{cases} n_{\text{eff}}^m(\epsilon_r)|_{\epsilon_z=\text{cst}} = \alpha_r^g(\epsilon_z) \epsilon_r + \beta_r^g \\ n_{\text{eff}}^m(\epsilon_r)|_{\epsilon_r=\text{cst}} = \alpha_z^g(\epsilon_r) \epsilon_z + \beta_z^g \end{cases} \quad (3.28)$$

Enfin, pour parachever l'étude, on calcule pour les différentes déformations le coefficient de couplage du mode étudié avec le mode de cœur selon la relation [5] :

$$\kappa^m = \frac{\omega \epsilon_0 n_1^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a_1} E_t^m \cdot E_{0t}^* r dr \quad (3.29)$$

où E_t^m et E_{0t}^* sont les champs électriques du mode de gaine et du mode de cœur respectivement [5].

3.2.3 Description de la série

Un grand nombre de configurations $\{a_2, n_3, \Lambda_{LPG}, m\}$ ont été tirées aléatoirement de façon à obtenir 10000 configurations dont la longueur d'onde λ_{LPG}^m appartient à l'intervalle spectral $[1350 \text{ nm}; 1600 \text{ nm}]$. Les distributions des tirages en fonction des 4 paramètres sont présentées sur la figure 3.9.

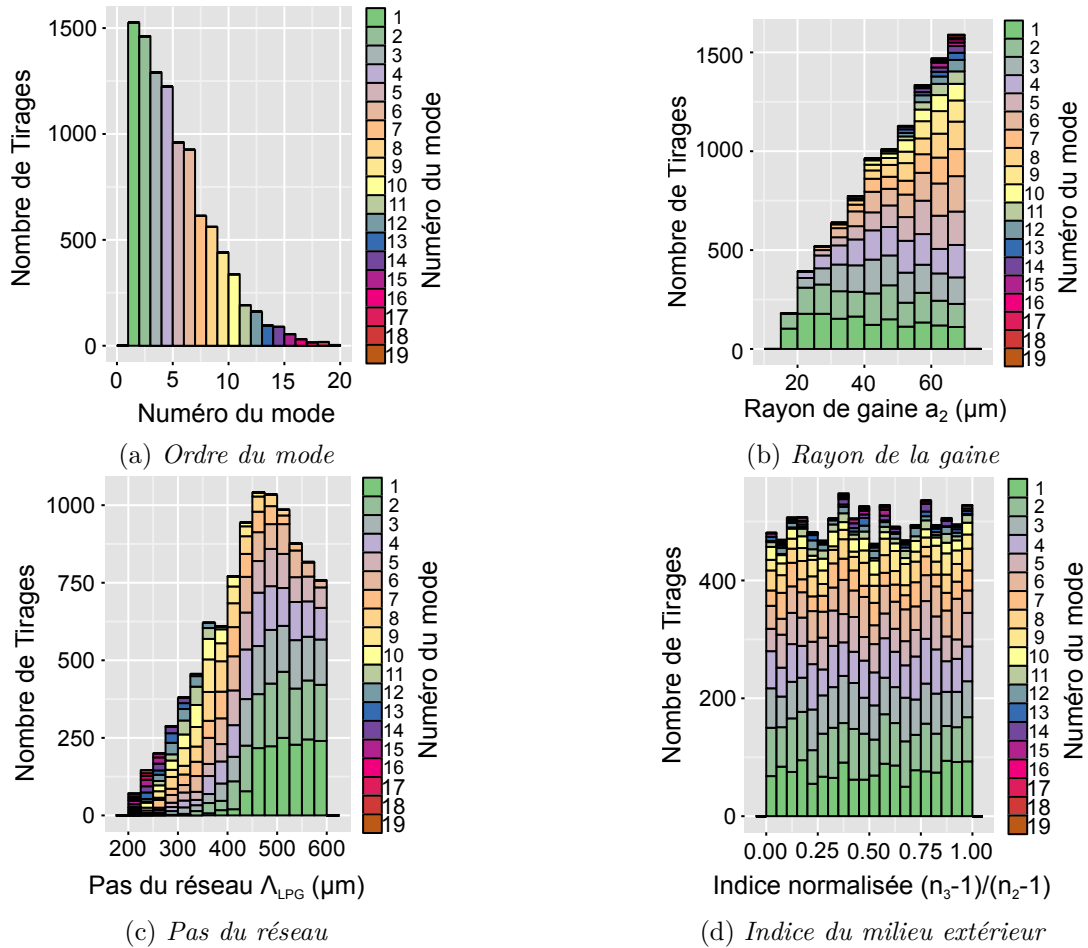


FIGURE 3.9: Distribution des tirages en fonction des différents paramètres libres.

Tout d'abord, on observe que les tirages sont distribués de façon uniforme selon l'indice du milieu extérieur. On verra par la suite que cette observation est liée au fait que ce paramètre a une influence

limitée sur le comportement du réseau. En revanche on observe des inhomogénéités très marquées dans les distributions des ordres des modes et des rayons de gaine : le nombre de configurations résonantes décroît avec l'ordre du mode et augmente avec le rayon de la gaine. Cela s'explique par le fait que pour une longueur d'onde donnée, le nombre de modes guidés dans la gaine croît avec le rayon de la gaine. Par conséquent, un mode a une plus forte probabilité d'être guidé si son ordre m est faible et si le rayon de la gaine est grand. En pratique, le grand nombre de configurations simulées répond au soucis d'obtenir suffisamment de configurations contenant des modes d'ordre élevé ou des rayons de gaine petits.

La distribution des tirages par rapport au pas du réseau présente un pic asymétrique et centré dans l'intervalle $[400 \mu m; 550 \mu m]$. Cette répartition des tirages est liée aux ordres des modes couplés à travers les LPG. Les pas inférieurs à $400 \mu m$ favorisent les couplages des modes de gaine élevés d'où un déficit de configurations observé. À l'opposé, l'intervalle $[400 \mu m; 550 \mu m]$ avantage le couplage des modes de faible ordre ($m \leq 7$).

3.3 Sensibilités croisées

Avant d'étudier l'influence des différents paramètres sur la réponse du réseau, il est nécessaire d'étudier les sensibilités croisées aux déformations axiales et radiales. Le but est de savoir si la sensibilité à la déformation radiale du réseau dépend de la déformation axiale et réciproquement. Démontrer l'existence ou non d'une sensibilité croisée est essentielle. En effet, si une décorrélation est avérée entre les effets liés aux déformations axiales et radiales, alors l'étude de la sensibilité à la déformation radiale du LPG peut se faire indépendamment de la déformation axiale du réseau et vice versa.

Comme cela a été expliqué précédemment, pour chaque configuration, la sensibilité linéaire à la déformation radiale, $\alpha_r^\lambda(\epsilon_z)$, a été calculée pour différentes déformations axiales. On peut alors définir la sensibilité minimale :

$$\alpha_{r,\min}^\lambda = \min_{\epsilon_z} [\alpha_r^\lambda(\epsilon_z)] \quad (3.30)$$

la sensibilité maximale :

$$\alpha_{r,\max}^\lambda = \max_{\epsilon_z} [\alpha_r^\lambda(\epsilon_z)] \quad (3.31)$$

la sensibilité moyenne :

$$\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda = \langle \alpha_r^\lambda(\epsilon_z) \rangle_{\epsilon_z} \quad (3.32)$$

et la dispersion relative :

$$\delta_r^\lambda = \frac{\alpha_{r,\max}^\lambda - \alpha_{r,\min}^\lambda}{\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda} \times 100 \quad (3.33)$$

On définit des quantités équivalentes pour la sensibilité à la déformation axiale et pour les sensibilités de l'indice effectif du mode gaine.

Avant d'étudier les dispersions relatives de ces quantités, on commence par vérifier que le nombre de tirages réalisés est suffisant pour que la série soit bien stabilisée. Pour ce faire on examine la répartition des sensibilités moyennes. La figure 3.10 montre comment évoluent la valeur minimale sur les 10000 tirages de $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$ et de $\delta_{z,\text{mean}}^\lambda$, leur valeur médiane, leur valeur du 3ème quartile et leur valeur maximale, en fonction du nombre de tirages. On voit que très rapidement, après 200 tirages environ, les valeurs médianes et les valeurs du 3^e quartile atteignent leur valeur finale. Toutes les autres quantités caractérisant la série convergent de la même manière. On peut donc en conclure que le nombre de tirages utilisés est très largement suffisant.

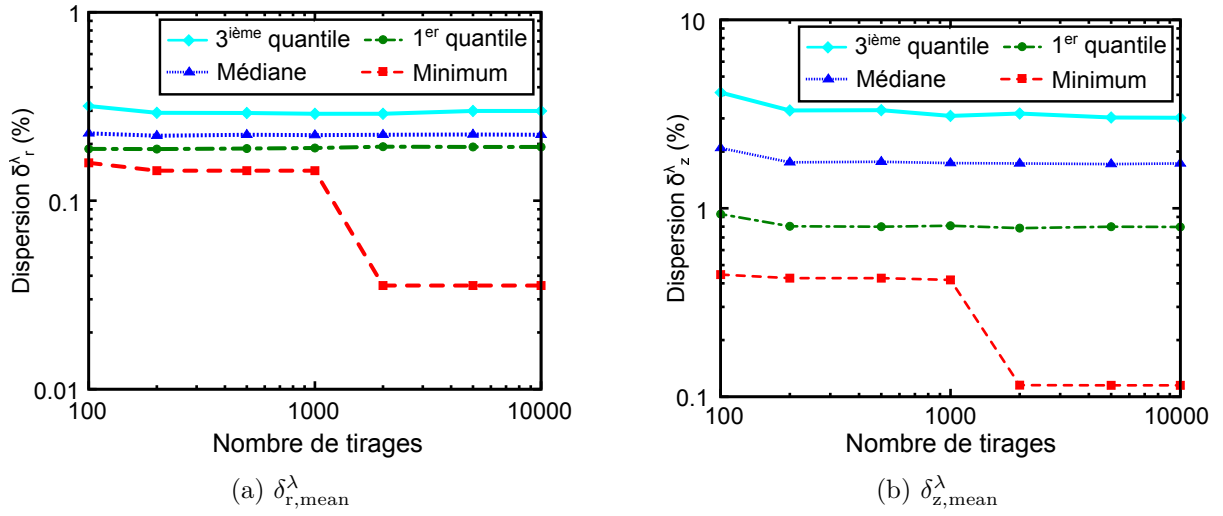
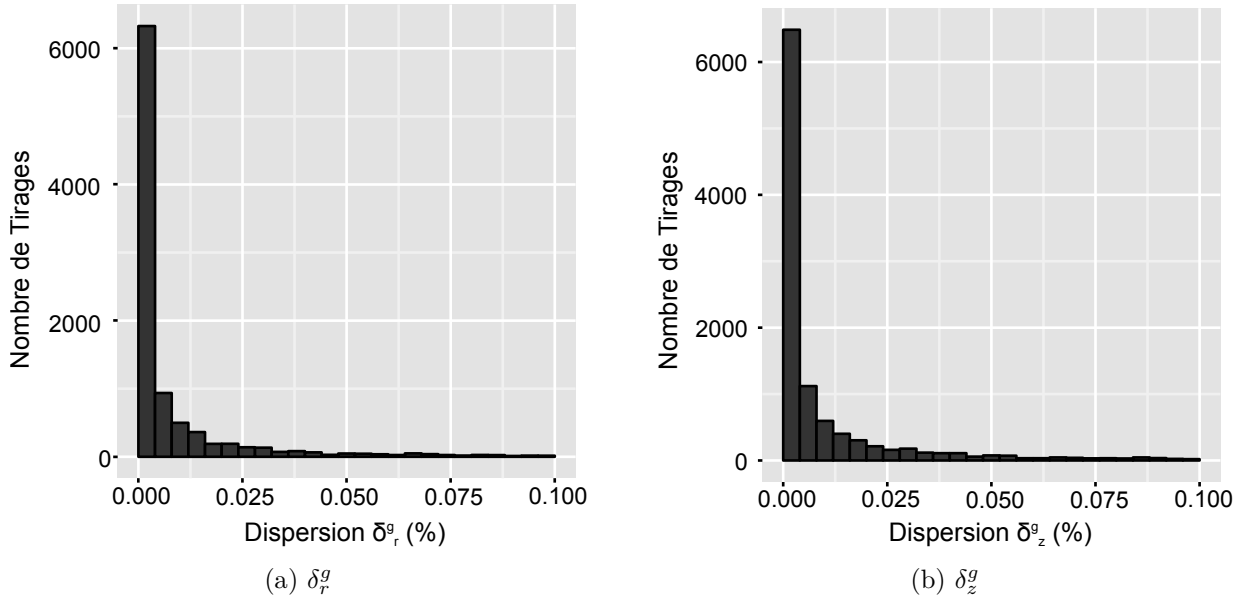


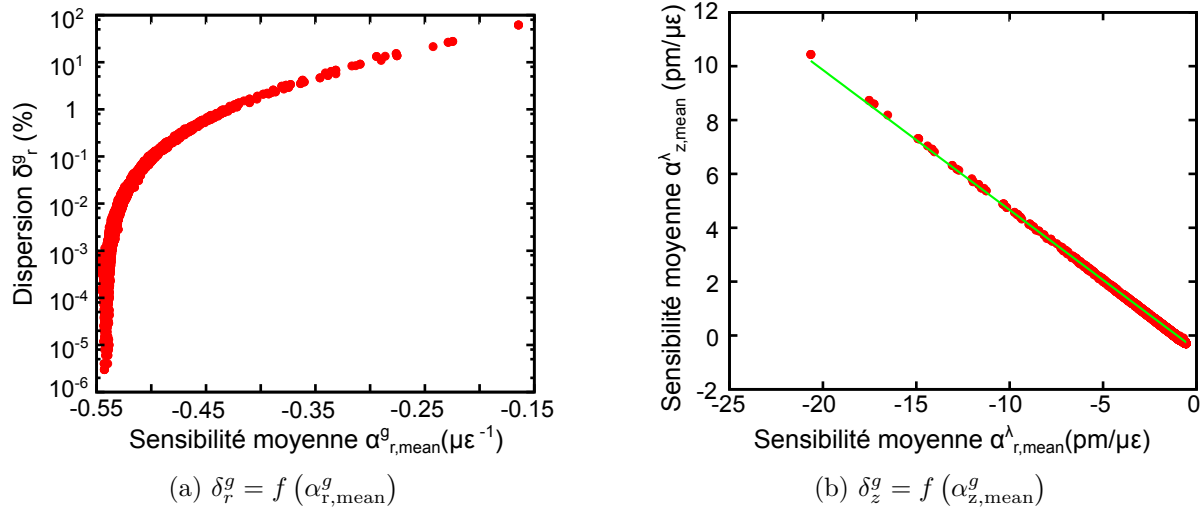
FIGURE 3.10: Évolution des caractéristiques de la série en fonction du nombre de tirages.

3.3.1 Sensibilités croisées pour n_{eff}^m

Les distributions des dispersions δ_r^g et δ_z^g des sensibilités de l'indice effectif du mode de gaine à la déformation axiale et radiale sont présentées en figure 3.11. Ces distributions sont très piquées, l'immense majorité des dispersions sont inférieures à 0,02%. On dénombre seulement une cinquantaine de configurations qui ont une dispersion supérieure à 1%. Concrètement cela veut dire que pour une configuration choisie au hasard, la probabilité pour que la sensibilité de son indice effectif à la déformation radiale évaluée à $\epsilon_z = -1000 \mu\epsilon$ diffère de plus de 1% de celle calculée pour $\epsilon_z = 1000 \mu\epsilon$ est de l'ordre de 1/200. La même remarque est valable pour la sensibilité de l'indice effectif à la déformation axiale.

FIGURE 3.11: Distribution des coefficients de dispersion δ_r^g et δ_z^g .

Les graphiques de la figure 3.12 montrent l'évolution de δ_r^g et δ_z^g en fonction de $\alpha_{r,\text{mean}}^g$ et $\alpha_{z,\text{mean}}^g$. Les dispersions et les valeurs moyennes sont fortement corrélées, les différents points s'organisant

FIGURE 3.12: Évolution des dispersions δ^g en fonction des sensibilités α_{mean}^g .

autour d'une courbe régulière. Il apparaît que la dispersion augmente lorsque la sensibilité radiale diminue en valeur absolue. Elle dépasse 1% quand $|\alpha_{r,\text{mean}}^g| < 0,4 \mu\epsilon^{-1}$ et $|\alpha_{z,\text{mean}}^g| > 0,43 \mu\epsilon^{-1}$ et elle dépasse 10% quand $|\alpha_{r,\text{mean}}^g| < 0,3 \mu\epsilon^{-1}$ et $|\alpha_{z,\text{mean}}^g| > 0,53 \mu\epsilon^{-1}$. Mais, on le voit bien sur les graphiques, ces cas de figure sont extrêmement marginaux.

Ces observations montrent que pour l'indice effectif, les sensibilités croisées sont négligeables. Il est donc légitime de les étudier séparément.

3.3.2 Sensibilités croisées pour λ_{LPG}^m

Les distributions sont beaucoup plus larges en ce qui concerne les sensibilités de la longueur d'onde aux déformations (voir figure 3.13). La distribution de δ_r^λ présente un pic centré à 0,25%. Les trois quarts des valeurs sont inférieures à 0,3% (voir le tableau 3.1) et moins d'une cinquantaine dépasse 5%. Comme pour l'indice effectif, on peut en conclure que la sensibilité de λ_{LPG}^m à la déformation radiale est indépendante de la déformation axiale. La conclusion est plus équivoque en ce qui concerne la déformation axiale. La forme de la distribution de δ_z^λ est moins régulière : elle présente 2 pics, l'un autour de 0,6% l'autre autour de 2%. Elle est donc d'emblée plus large que les autres distributions. Elle est en outre déséquilibrée par la présence de valeurs très élevées, en petit nombre certes mais

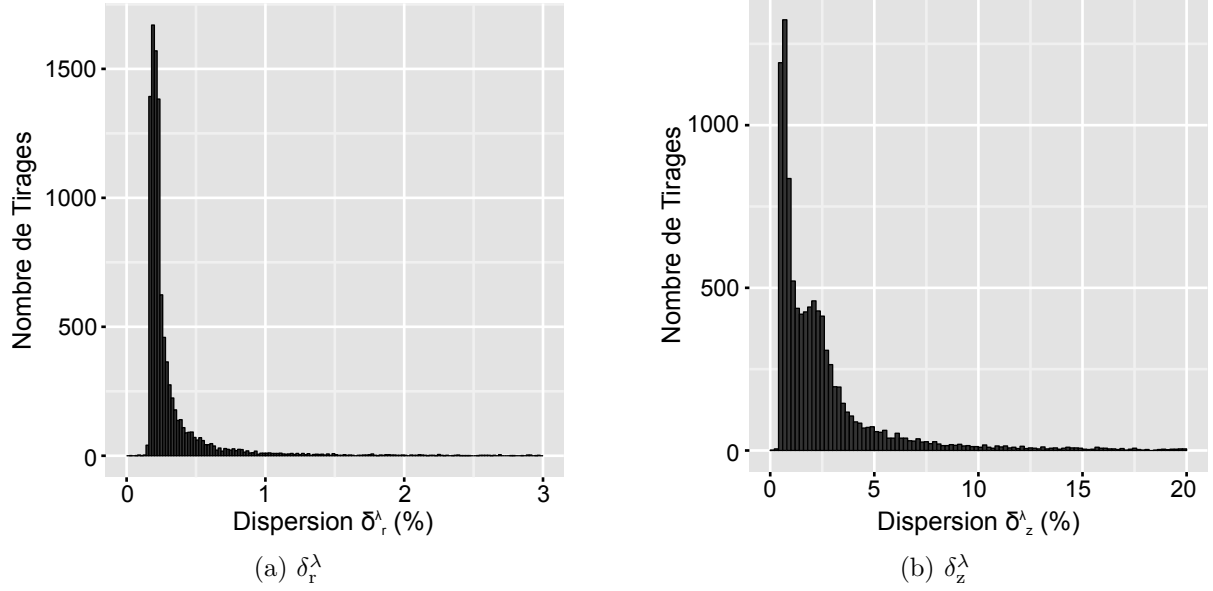
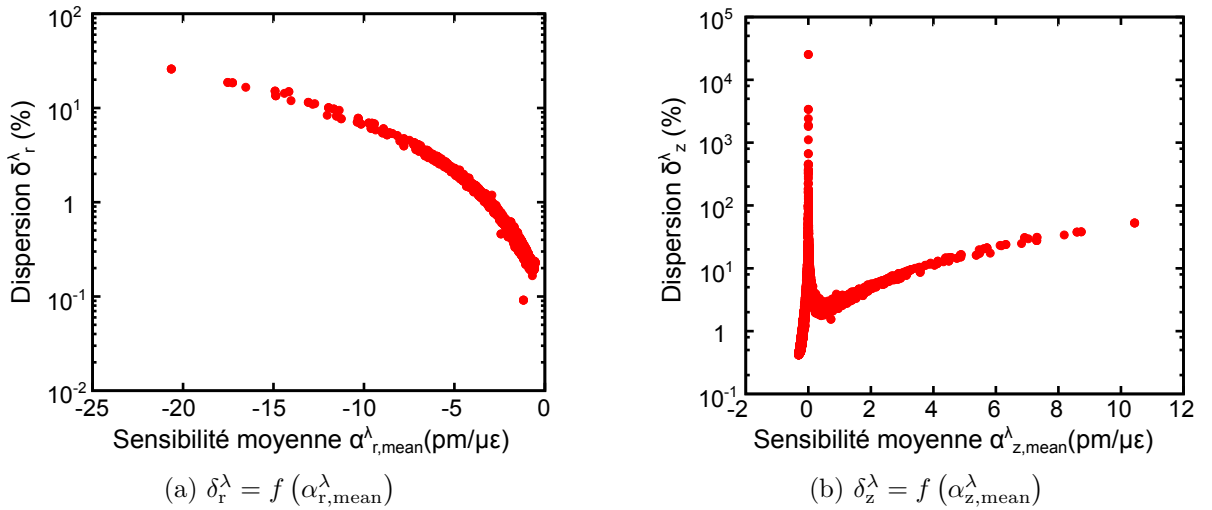
TABLE 3.1: λ_{LPG}^m : description de la série.

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	écart type
δ_r^λ (%)	0,036	0,19	0,22	0,36	0,30	25,93	0,71
δ_z^λ (%)	0,115	0,80	1,73	8,75	3,02	25320	260

tellement grandes qu'elles faussent les valeurs moyennes et les écarts types. En pratique, il est plus raisonnable de considérer la répartition des quartiles. On voit alors que les trois quarts des valeurs de δ_z^λ sont inférieures à 3%.

Si l'on veut aller plus loin, on peut considérer les graphiques de la figure 3.14 qui montrent les évolutions des dispersions δ^λ en fonction des sensibilités moyennes $\alpha_{\text{mean}}^\lambda$. On peut tout d'abord noter que les très hautes valeurs de δ_z^λ sont obtenues pour des valeurs de $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$ très proches de zéro. Cela est prévisible étant donné la nature relative de δ_z^λ .

Par ailleurs, les dispersions δ_z^λ et δ_r^λ croissent avec l'augmentation de $|\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda|$ et de $|\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda|$.

FIGURE 3.13: Distribution des coefficients de dispersion δ_r^λ et δ_z^λ .FIGURE 3.14: Évolution des dispersions δ^λ en fonction des sensibilités $\alpha_{\text{mean}}^\lambda$.

Par conséquent, les sensibilités croisées sont importantes lorsque $|\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda|$ et $|\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda|$ sont élevées. En pratique, ces configurations représentent une fraction très minoritaire des configurations possibles. Il est donc légitime de négliger la sensibilité croisée dans l'étude générale de l'influence de la déformation sur les modes d'un réseau longue période et c'est ce que nous ferons par la suite. Cependant il est important de garder à l'esprit que cette approximation n'est pas tout le temps justifiée. C'est le cas par exemple si l'on cherche à mettre au point un capteur insensible à la déformation axiale ($\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda \simeq 0$), ou au contraire si on cherche une sensibilité maximale ($\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda \simeq -15 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda \simeq -10 \text{ pm}/\mu\epsilon$). Dans les deux cas, l'existence d'une déformation suivant une direction peut faire varier la sensibilité du capteur suivant l'autre direction du simple au double voire plus encore. Il est alors indispensable de tenir compte explicitement de cet effet dans la conception du capteur.

Quoiqu'il en soit, dans tout ce qui suit, on négligera les sensibilités croisées et on assimilera donc la sensibilité de λ_{LPG}^m à la déformation radiale à $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$ et sa sensibilité à la déformation axiale à $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$. On fera de même pour l'indice effectif des modes de gaine.

3.3.3 Corrélation entre les sensibilités aux déformations axiales et radiales

Comme le montre la figure 3.15, il existe une très forte corrélation entre les sensibilités $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$ et $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$. Quand on trace une sensibilité en fonction de l'autre, tous les points s'organisent en forme de comète autour d'une droite d'équation :

$$\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda = -0,52\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda - 0,54 \quad (3.34)$$

La zone dense en points correspond aux modes d'ordre les plus bas. Les points correspondant aux modes d'ordre élevé sont bien alignés sur la droite, comme le montre la figure 3.15b. Une corrélation similaire est constatée entre $\alpha_{r,\text{mean}}^g$ et $\alpha_{z,\text{mean}}^g$. Cette propriété remarquable n'avait pas été décrite jusqu'à présent. Elle pourrait être utilement mise à profit à l'avenir, par exemple pour déduire la sensibilité à la déformation radiale d'un LPG à partir de la mesure de la sensibilité de ce dernier à la déformation axiale.

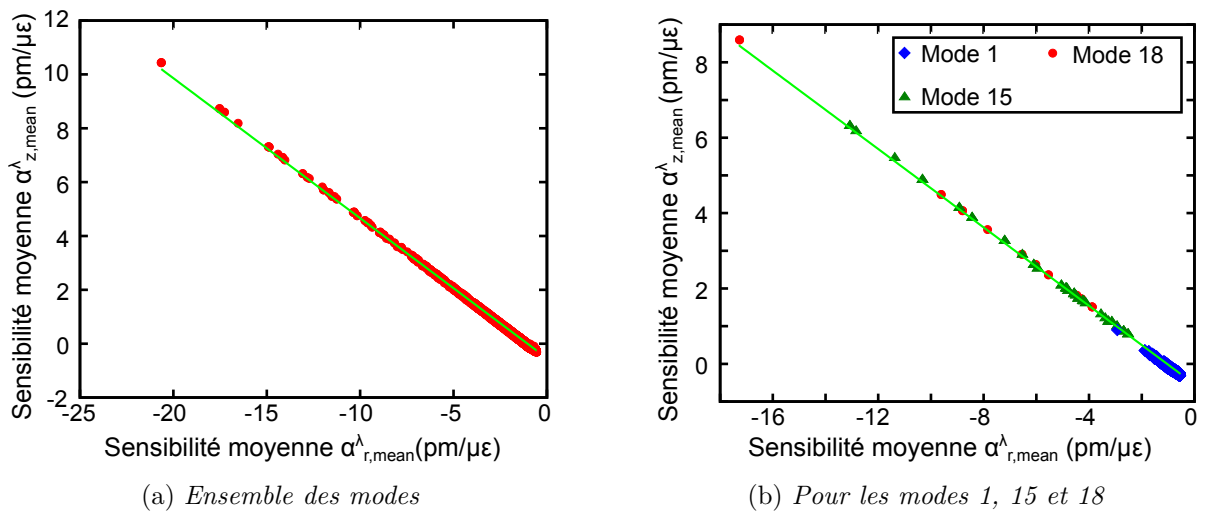


FIGURE 3.15: Évolution de $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$ en fonction de $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$.

3.4 Influence des différents paramètres

Globalement dans la gamme de paramètres utilisée, la sensibilité de la longueur d'onde résonnante à la déformation radiale α_r^λ est comprise dans l'intervalle $[-20, 6 \text{ pm}/\mu\epsilon; -0, 55 \text{ pm}/\mu\epsilon]$ et sa sensibilité à la déformation axiale dans l'intervalle $[-0, 3 \text{ pm}/\mu\epsilon; 10, 4 \text{ pm}/\mu\epsilon]$. L'essentiel des valeurs de α_r^λ sont comprises entre $-0, 55 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et $-2 \text{ pm}/\mu\epsilon$ (voir figure 3.16). L'écart type de la série est de $1 \text{ pm}/\mu\epsilon$. Les valeurs de α_z^λ sont quant-à-elles massées entre $-0, 3 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et $0, 5 \text{ pm}/\mu\epsilon$, l'écart type est évalué dans ce cas à $0, 55 \text{ pm}/\mu\epsilon$. Au final les réseaux longue période ont une réponse similaire aux déformations

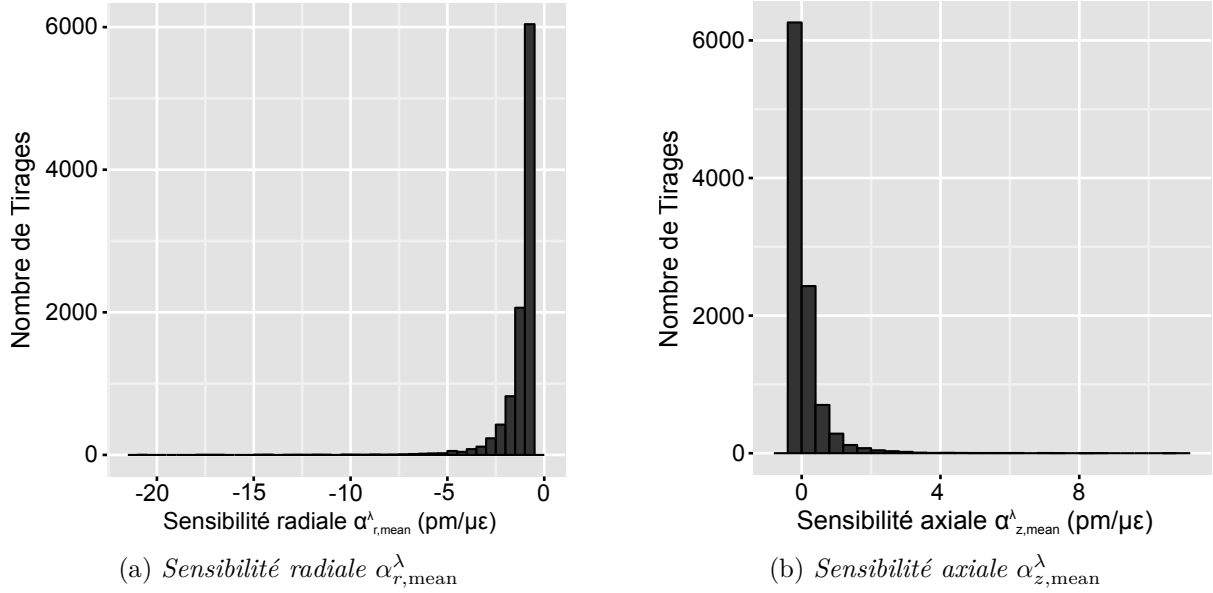


FIGURE 3.16: Distribution des sensibilités de λ_{LPG}^m aux déformations.

radiales et axiales malgré leur architecture variée. La plupart d'entre eux présentent des sensibilités qui se tiennent dans un mouchoir de poche, seuls quelques-uns se comportent de façon exotique. Le but de cette section est de déterminer quels sont les paramètres qui permettent d'obtenir ces comportements singuliers.

3.4.1 Influence de la différence d'indice entre le milieu extérieur et la gaine

L'indice du milieu extérieur n_3 doit être strictement inférieur à n_2 pour que les modes de gaine soient guidés et il est naturellement plus grand que 1. Comme l'indice de la gaine varie avec la longueur d'onde, la borne supérieure de l'intervalle auquel appartient n_3 varie aussi d'un réseau à l'autre. Pour pouvoir comparer les différentes configurations, on préfère repérer n_3 à l'aide du rapport $\Delta_{2-3} = \frac{n_3-1}{n_2-1}$.

Sur les graphiques de la figure 3.17 sont tracées les sensibilités aux déformations de λ_{LPG}^m en fonction du rapport Δ_{2-3} . Aucune évolution particulière ne se dessine. L'indice du milieu extérieur n'a pas d'influence sur la sensibilité du réseau aux déformations. Il s'agit donc d'un paramètre complètement libre dans la conception d'un capteur à réseau longue période.

3.4.2 Influence du pas du réseau

L'influence du pas du réseau sur la sensibilité n'est pas non plus très nette. Si on regarde globalement (figures 3.18a et 3.18b) on observe une croissance de $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$ et une décroissance de $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$ vers une valeur asymptotique quand Λ_{LPG} augmente.

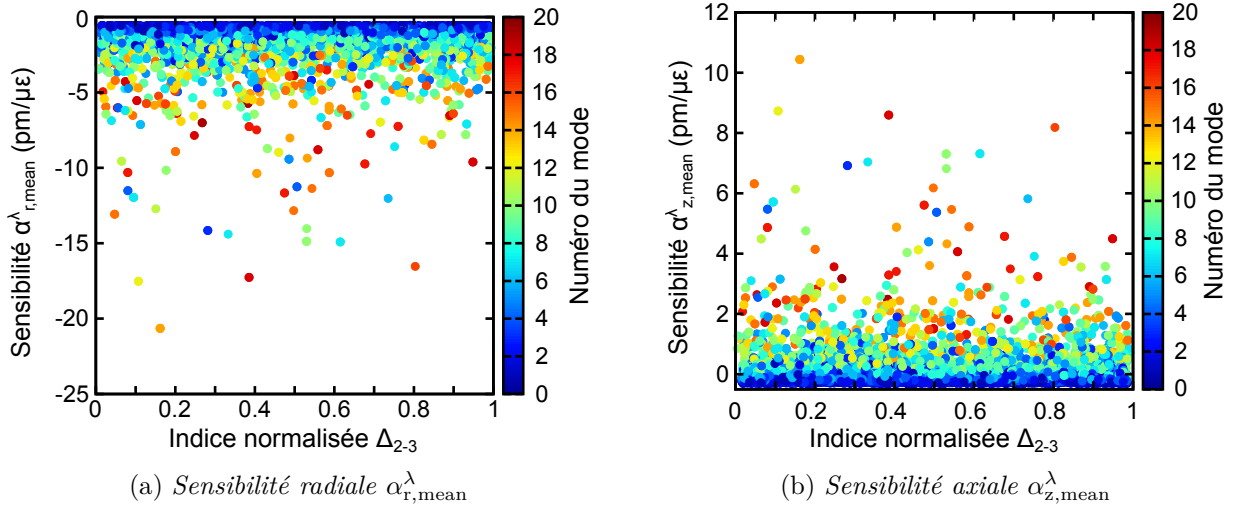


FIGURE 3.17: Influence de la différence d'indice entre la gaine et le milieu extérieur sur les sensibilités de la longueur d'onde résonante.

Quand on détaille mode par mode, on se rend compte que les valeurs de $\alpha_{r,\text{mean}}^\lambda$ ont tendance à s'agglutiner autour de droites de pentes très faibles (de l'ordre de 10^{-4} (pm/μϵ)/μm). La même remarque peut être faite pour $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$.

En conclusion, les plus fortes sensibilités sont obtenues avec les réseaux de plus faible pas. Au delà d'un pas de 400 μm, les réseaux ont tendance à adopter une espèce de comportement standard avec des sensibilités de l'ordre de ± 1 pm/μϵ.

3.4.3 Influence du rayon de la gaine optique

La figure 3.19a montre l'évolution de α_z^λ en fonction de a_2 pour tous les modes. À cette échelle le comportement ne se dessine pas encore clairement mais on peut déjà observer que α_z^λ décroît avec a_2 et tend vers la valeur asymptotique de -0,55 pm/μϵ. Si on se concentre sur quelques modes, comme le fait la figure 3.19b, on voit que les points s'ordonnent selon des courbes qui ont des formes similaires et qui se translatent vers les grandes valeurs de a_2 lorsque l'ordre du mode augmente. Cela n'est pas surprenant. On sait en effet qu'un mode d'un ordre donné ne peut exister qu'à partir d'une valeur seuil de a_2 : si on augmente a_2 le mode $m = 1$ apparaît le premier et c'est le seul à exister, puis le mode $m = 2$ apparaît et ainsi de suite. Ce que montrent ces courbes, c'est que lorsque le mode $m = 3$ apparaît, il se comporte comme le faisait le mode $m = 1$ à son apparition. Et il en va de même pour tous les modes. Cependant, la valeur asymptotique diminue avec l'ordre du mode.

Quand on regarde plus attentivement la forme du nuage de points pour un mode donné, on observe un aspect feuilleté (voir insert figure 3.19b). Le nuage de points semble être formé d'un ensemble de courbes décalées. Sachant que l'indice du milieu extérieur n'a pas d'influence, on trace l'évolution de $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$ en fonction de a_2 pour un mode donné et en fractionnant les tirages en fonction des pas des réseaux. On obtient le graphique de la figure 3.20, pour le mode $m = 3$. Les points s'organisent autour de courbes régulières. Ces observations confirment que les nuages de points sont en fait constitués d'une famille de courbes. Des résultats identiques sont obtenus avec les autres modes.

Les différentes courbes présentent des courbures similaires comme le montre la figure 3.20a où toutes les courbes tracées sont translatées suivant les deux axes afin de les superposer. De façon quantitative, nous avons procédé à un ajustement de toutes les courbes pour tous les modes et pour

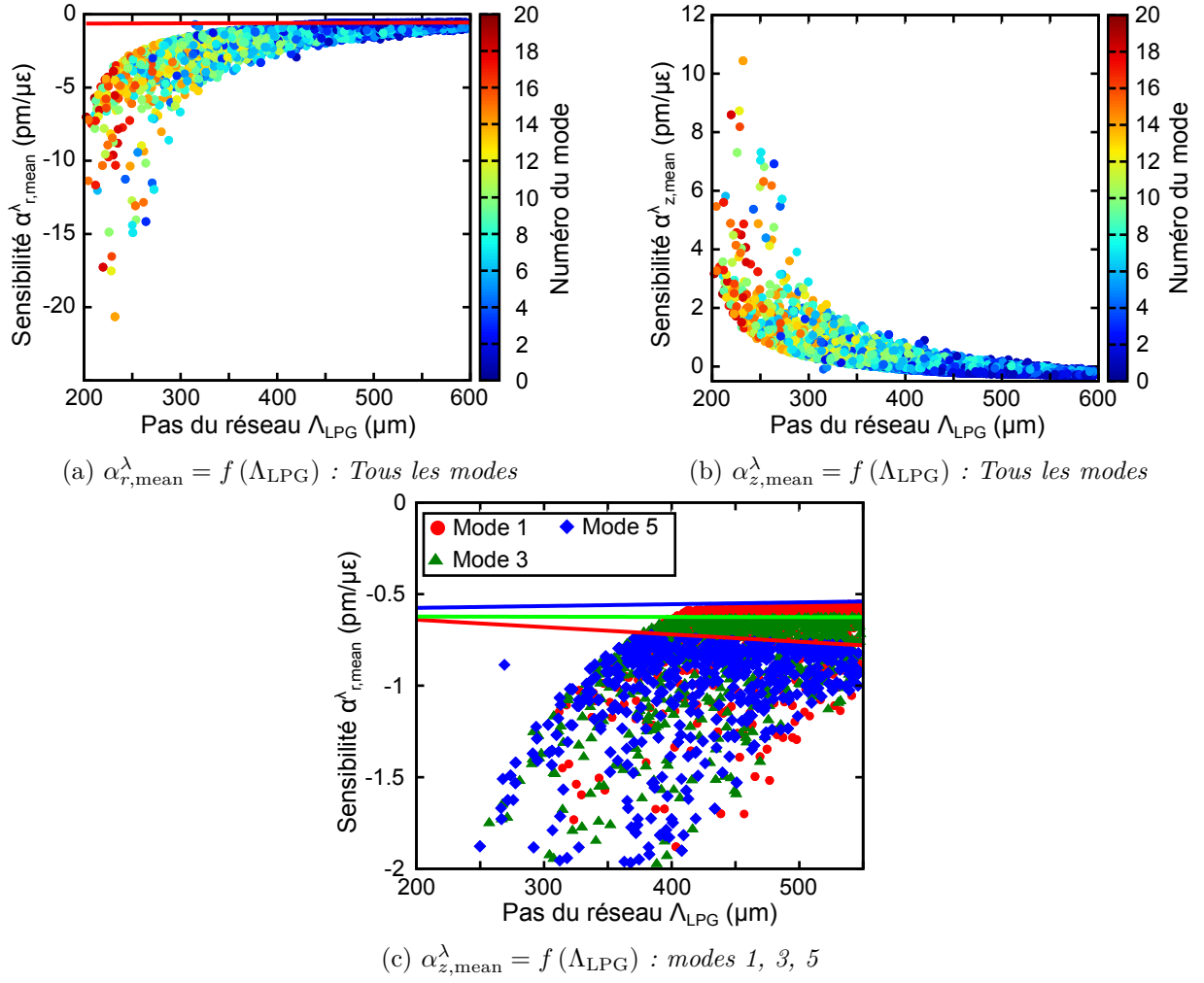
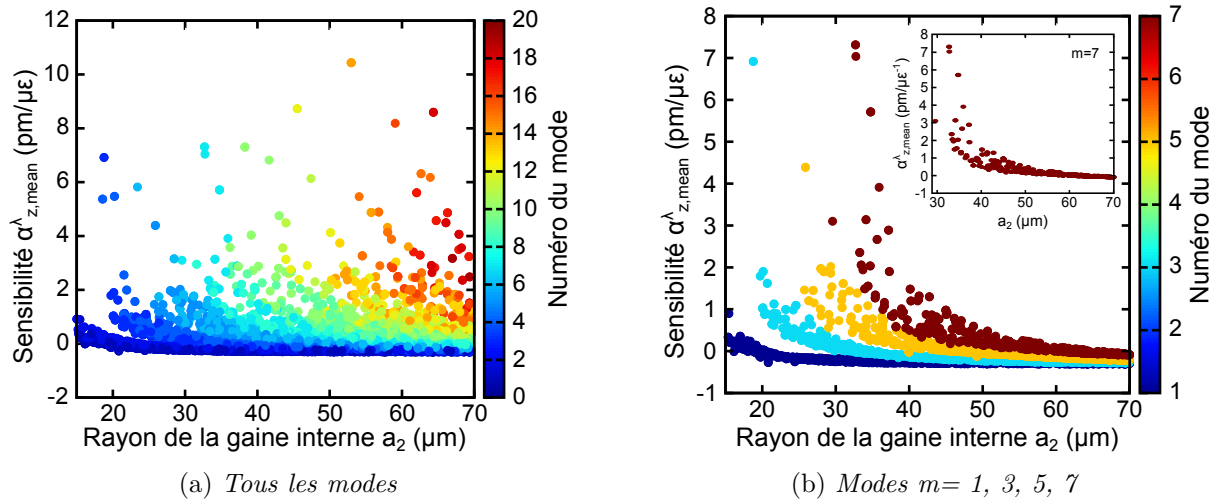
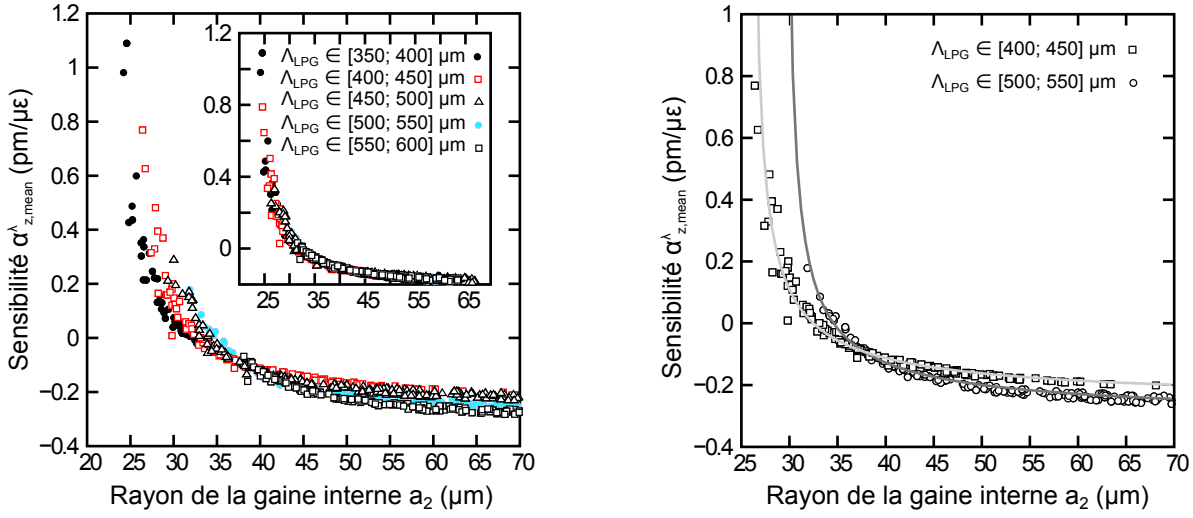


FIGURE 3.18: Influence du pas du réseau sur les sensibilités de la longueur d'onde aux déformations.


 FIGURE 3.19: Influence du rayon de la gaine optique sur $\alpha_{z,\text{mean}}^\lambda$, l'ordre des modes est indiqué par une échelle colorimétrique.



(a) Évolution de $\alpha_{z,mean}^\lambda$ en fonction de a_2 pour $m=3$ et (b) Exemples d'ajustement à la fonction définie dans (3.35). Dans l'insert, les courbes ont été décalées horizontalement et verticalement pour montrer la superposition.

FIGURE 3.20: Influence du rayon de la gaine optique sur $\alpha_{z,mean}^\lambda$.

tous les intervalles de pas des réseaux par une fonction du type :

$$\alpha_{z,mean}^\lambda(a_2) = C_1^{te} + \frac{C_2^{te}}{(a_2 - a_c)^\gamma} \quad (3.35)$$

où C_1^{te} est la valeur asymptotique de α_z^λ , a_c est le rayon seuil du mode et C_2^{te} est une constante de valeur strictement positive. Quelques exemples d'ajustement sont tracés dans la figure 3.20b.

La constante C_1^{te} varie de $0,3 \text{ pm}/\mu\epsilon$ à $-0,4 \text{ pm}/\mu\epsilon$, alors que C_2^{te} reste proche de 1. La courbure est donnée par le paramètre γ qui décroît avec l'ordre du mode, on a : $\gamma = 1$ pour $m=1$, $\gamma = 0,7$ pour $m = 3$, $\gamma = 0,5$ pour $m \in [5; 9]$ et $\gamma = 0,3$ pour $m = 11$. Pour les modes d'ordre supérieur à 11, aucun ajustement n'a été réalisé pour cause d'un nombre de points insuffisant.

Ces conclusions sont également valides pour α_r^λ (voir figure 3.21) : quand a_2 augmente, la sensibilité α_r^λ tend vers une valeur asymptotique proche de $-1 \text{ pm}/\mu\epsilon$; pour un mode donné, la répartition des points associée à chaque configuration dessine une structure feuilletée. Ce feuilleté se compose de plusieurs courbes qui peuvent être ajustées à la fonction de l'équation (3.35). On a dans ce cas $C_2^{te} < 0$ et $\gamma \in [0, 3; 1]$.

Finalement, le paramètre le plus influent sur les sensibilités est le rayon de la gaine a_2 . Tous les résultats présentés pour α_r^λ et α_z^λ sont également constatés pour α_r^g et α_z^g .

3.4.4 Configurations hors-normes

Comme expliqué précédemment, les sensibilités de la plupart des configurations sont comprises dans un intervalle restreint. Cependant, il existe quelques configurations dont les sensibilités sont nettement plus élevées. Ces configurations particulières sont potentiellement intéressantes en vue d'une application de type capteur de déformations, et méritent donc une attention particulière.

Les paramètres qui mènent à des hautes sensibilités peuvent être déterminés de la façon suivante. Tout d'abord, à partir des distributions des sensibilités présentées dans la figure 3.16, nous définissons comme configuration hors-norme toute configuration ayant une sensibilité à la déformation axiale

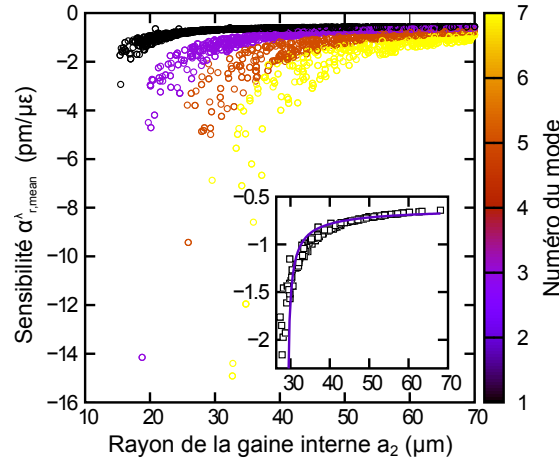


FIGURE 3.21: Influence du rayon de la gaine sur la sensibilité à la déformation radiale. L'insert montre l'ajustement à l'équation (3.35) pour $m=3$ et $\Lambda_{\text{LPG}} \in [400 \mu\text{m} ; 450 \mu\text{m}]$.

supérieure à $1,3 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et une sensibilité à la déformation radiale inférieure à $-3 \text{ pm}/\mu\epsilon$. Puis, nous divisons l'intervalle de définition d'un paramètre en plusieurs sous intervalles et nous comptons le nombre de configurations qui tombent dans chaque sous-intervalle et le nombre de configurations hors-norme contenues dans ces mêmes sous-intervalles. Le ratio entre les deux donne une estimation de la probabilité pour qu'une configuration dans un sous intervalle soit hors-norme. Les graphiques de

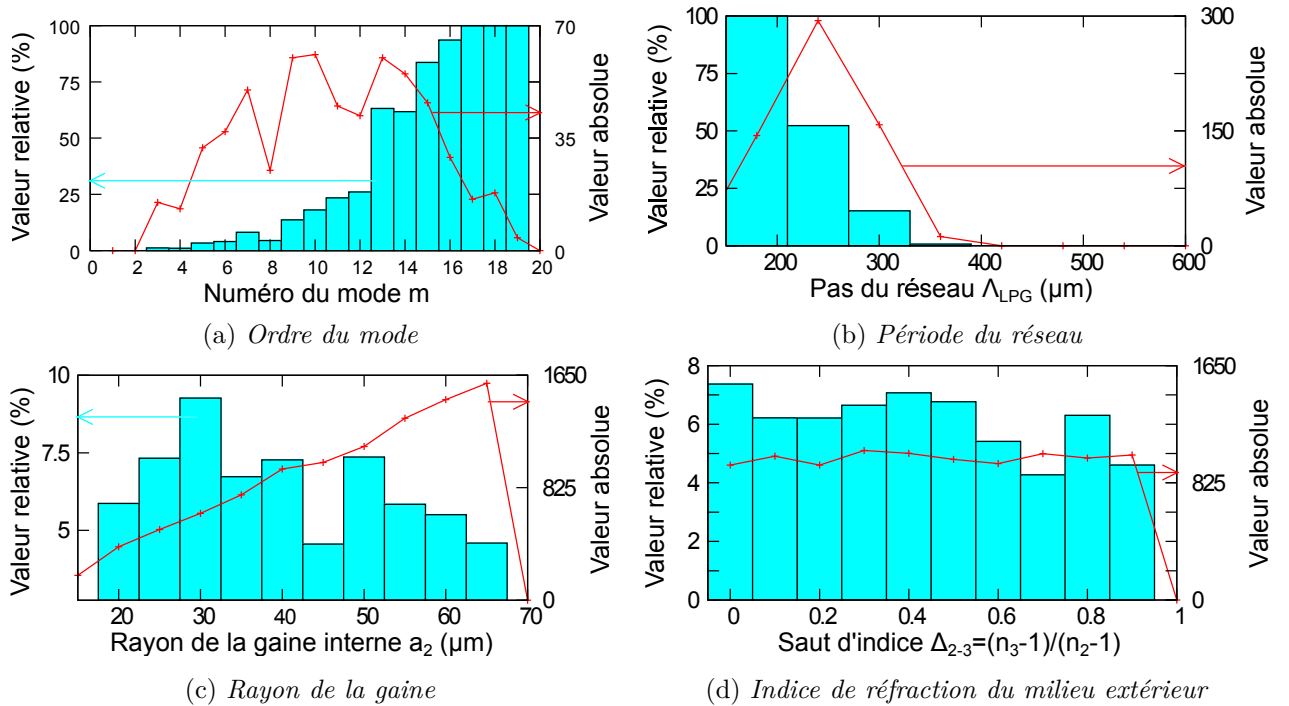


FIGURE 3.22: Distribution des configurations extraordinaires.

la figure 3.22 montrent ce ratio pour différents paramètres et le nombre de configurations hors-norme existant dans chaque sous intervalle. Ces graphiques montrent clairement que la probabilité d'obtenir une configuration hors-norme augmente avec l'ordre du mode et décroît avec la période du réseau.

3.5 Coefficient de couplage

3.5.1 Sensibilité à la déformation

Le coefficient de couplage, κ , est un paramètre essentiel. Pour une longueur de LPG donnée, la profondeur de la résonance dans le spectre dépend directement du coefficient de couplage. Or, cette profondeur peut avoir un impact non négligeable sur la précision de la mesure. Pour garder la même précision durant tout le processus de mesure, l'amplitude de la résonance doit rester la même, ce qui implique un coefficient de couplage stable. Il est donc nécessaire de connaître avec précision l'influence des déformations sur le coefficient de couplage.

Commençons rapidement par examiner l'influence des divers paramètres sur le coefficient de couplage lorsque le réseau est au repos. La figure 3.23a présente l'évolution de κ en fonction de l'indice du milieu extérieur et montre qu'une nouvelle fois ce paramètre n'a pas d'influence.

En ce qui concerne l'ordre des modes (figure 3.23b), on retrouve le résultat bien connu selon lequel les modes d'ordre pair ont un coefficient de couplage quasiment nul car l'amplitude de leur champ électrique est faible dans le cœur de la fibre. Ils sont donc peu intéressants en terme de capteur. Pour les modes impairs, le coefficient de couplage pour un a_2 fixé a tendance d'abord à augmenter, passer par un maximum puis décroître lorsque l'ordre du mode augmente.

La répartition des points suivant le rayon de la gaine (voir figure 3.23c) présente un aspect feuilleté. Les points s'organisent autour d'une courbe décroissante dont l'allure dépend de l'ordre du mode. Quel que soit l'ordre du mode, la constante de couplage décroît avec le rayon a_2 .

L'évolution globale avec le pas du réseau est moins claire (figure 3.23d), elle se précise si on change de mode représentation (figures 3.23e et 3.23f). Sur ces graphiques, la valeur du coefficient de couplage est figurée par un code de couleurs dans l'espace des paramètres $\{a_2, \Lambda_{\text{LPG}}\}$.

La surface colorée correspond aux configurations $\{a_2, \Lambda_{\text{LPG}}\}$ qui possèdent une longueur d'onde λ_{LPG}^m incluse dans l'intervalle $[1,35 \mu\text{m}; 1,6 \mu\text{m}]$ quelle que soit la déformation considérée. Cette surface colorée a une forme d'apostrophe dont la pointe concentre les valeurs les plus élevées de κ . En d'autres termes, le couplage du mode à travers le réseau est plus fort lorsque le rayon de gaine et le pas des réseaux sont les plus faibles.

Quand le réseau se déforme le coefficient de couplage évolue. Les graphiques de la figure 3.24 présentent la variation relative maximale de ce coefficient pour $\epsilon_z \in [-1000 \mu\epsilon; +1000 \mu\epsilon]$ avec $\epsilon_r = 0 \mu\epsilon$ d'une part (δ_z^κ) et $\epsilon_r \in [-1000 \mu\epsilon; +1000 \mu\epsilon]$ avec $\epsilon_z = 0 \mu\epsilon$ d'autre part (δ_r^κ) :

$$\delta_{r,z}^\kappa = \frac{\kappa(\epsilon_{r,z} = 1000\mu\epsilon) - \kappa(\epsilon_{r,z} = -1000\mu\epsilon)}{\kappa(\epsilon_{r,z} = 0\mu\epsilon)} \times 100$$

Pour les modes pairs, les variations sont inférieures à 5%. Elles sont de l'ordre de 0,5% pour la déformation axiale et de l'ordre de 1% pour la déformation radiale. Pour les modes impairs, les variations sont vraiment infimes, de l'ordre de 0,25% pour la déformation radiale et de 0,15% pour la déformation axiale. Il n'y a donc pas lieu de craindre que la mesure soit affectée par un affaiblissement du couplage induit par la déformation.

3.5.2 Coefficient de couplage optimal

Les graphiques de la figure 3.25 présentent la variation de λ_{LPG} en fonction du pas du réseau, pour quelques valeurs discrètes de a_2 et pour les modes $m=5$ et $m=6$. Ces graphiques ont été obtenus pour des réseaux au repos (ϵ_r et ϵ_z nulles), et avec un saut d'indice Δn_{23} fixé à 0,95. Les points sont colorés suivant l'importance du coefficient de couplage. Une configuration de LPG avec un couplage élevé aura une coloration qui tirera vers le rouge, tandis qu'une configuration à faible couplage sera bleue.

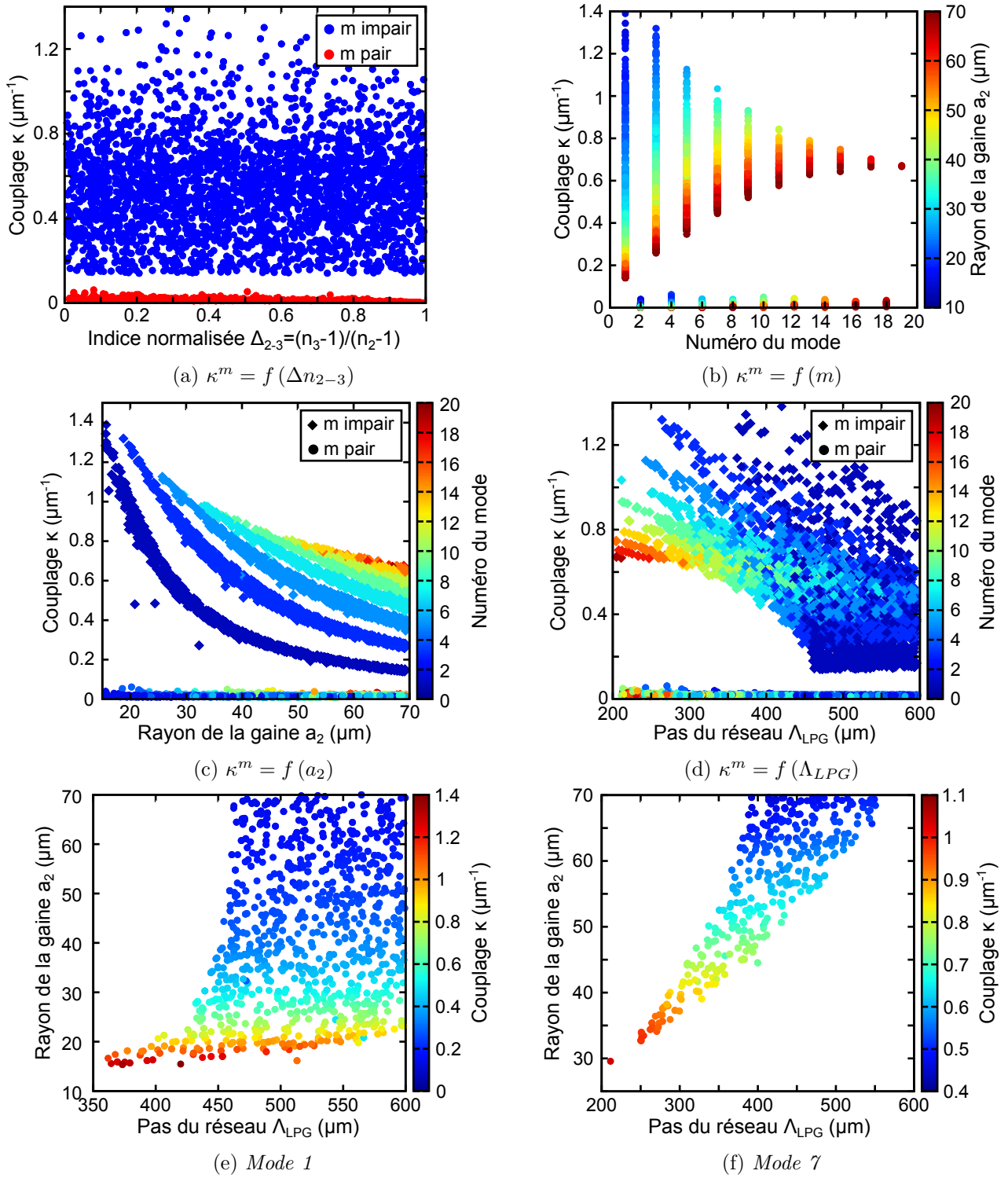


FIGURE 3.23: Influence des paramètres sur le coefficient de couplage.

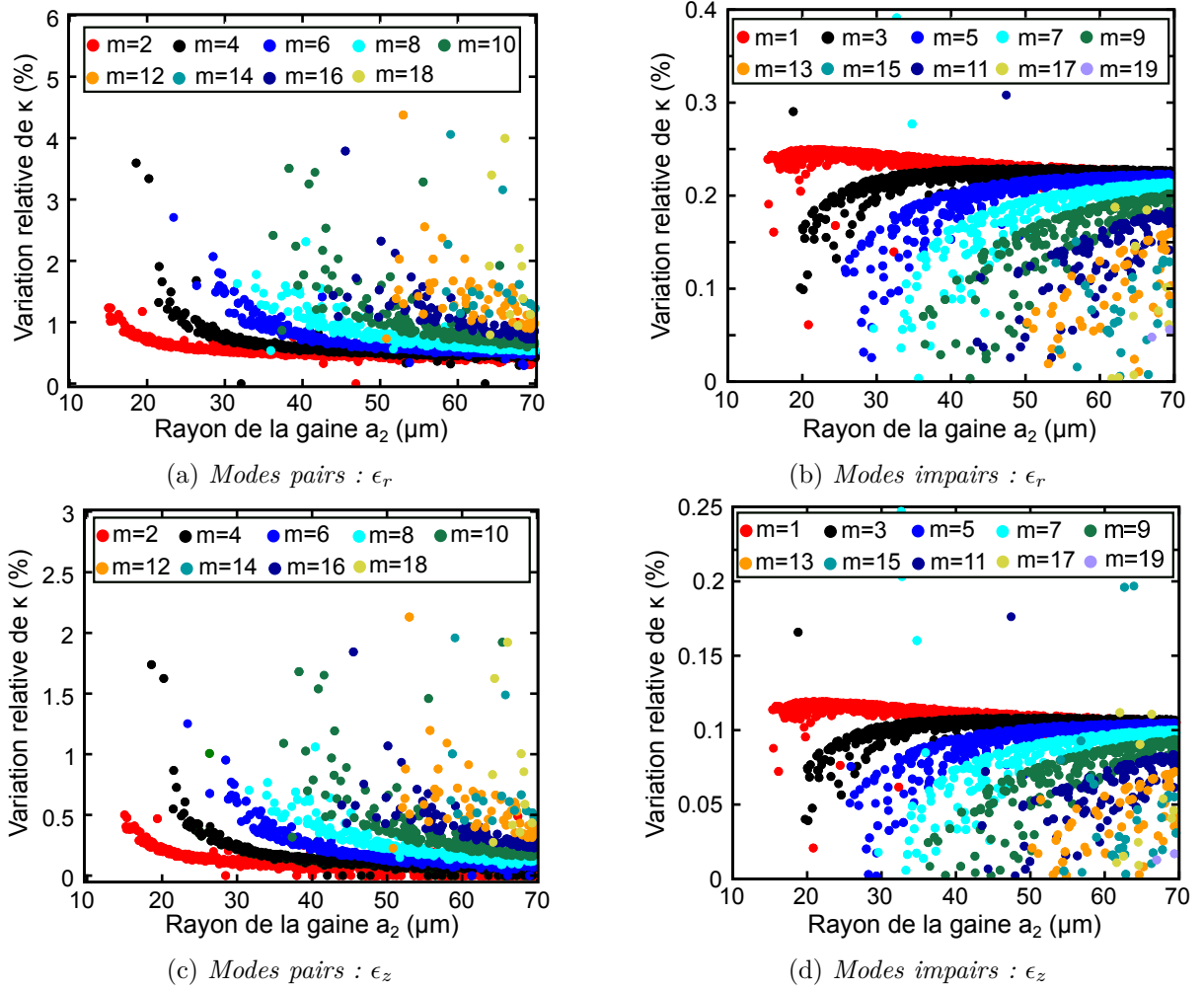


FIGURE 3.24: Variations relatives du coefficient de couplage en fonction des déformations axiales et radiales.

Pour un rayon a_2 fixé, l'évolution de λ_{LPG}^m en fonction du pas dessine une courbe parabolique. Si on s'attarde sur le coefficient de couplage, nous observons des variations brutales de sa valeur. Par exemple, pour le mode $m=5$ d'un réseau de pas $\Lambda_{LPG} = 169 \mu\text{m}$, une augmentation du rayon a_2 de $18,6 \mu\text{m}$ à $19 \mu\text{m}$ induit un saut brutal du coefficient de couplage de 0 à une valeur proche de $1 \mu\text{m}^{-1}$, comme le montre la ligne pointillée de la figure 3.25a. Parallèlement, pour la même valeur de Λ_{LPG} et la même variation de a_2 , le coefficient de couplage du mode $m=6$ subit une variation tout aussi brutale, mais en sens inverse, c'est à dire que sa valeur décroît au lieu d'augmenter.

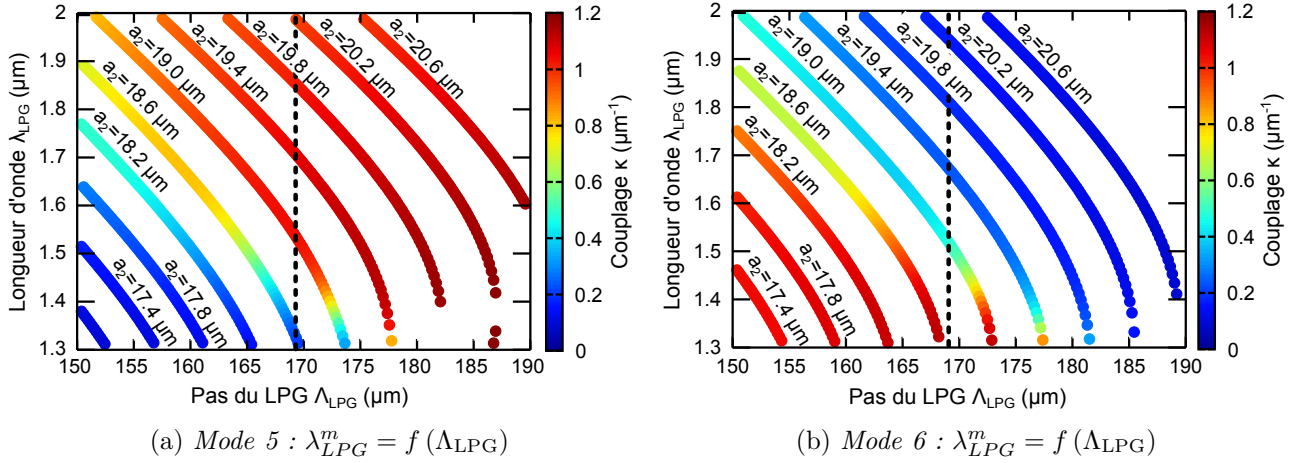


FIGURE 3.25: Variation de λ_{LPG}^m en fonction de Λ_{LPG} calculée pour plusieurs valeurs discrètes de a_2 .

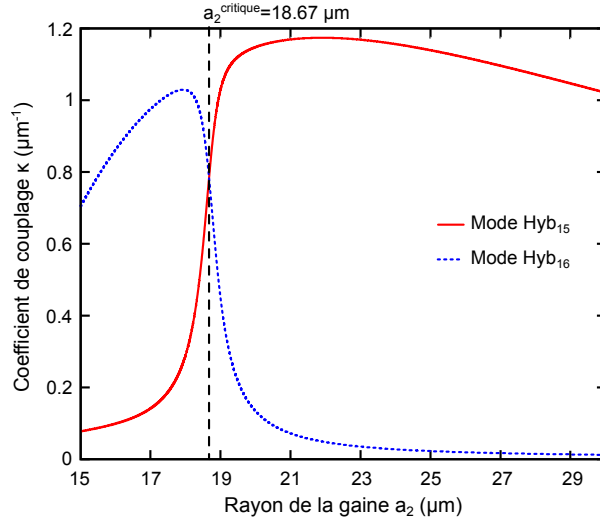


FIGURE 3.26: Évolution du coefficient de couplage des modes $m=5$ (Hyb₁₅) et $m=6$ (Hyb₁₆) en fonction du rayon a_2 .

Une variation aussi abrupte du coefficient de couplage est le signe d'un changement important dans la structure électromagnétique des modes couplés à travers le LPG. De plus le fait qu'il existe une certaine complémentarité entre les figures 3.25a et 3.25b suggère une sorte de synchronisation entre le mode Hyb₁₅ et le mode Hyb₁₆. Ces fortes variations du coefficient de couplage s'expliquent par l'existence du rayon de gaine critique propre à chaque couple de modes, a_2^{critique} , défini et étudié dans le chapitre 2. Pour rappel, a_2^{critique} est le rayon de gaine pour lequel les modes d'un même couple tendent vers une structure électromagnétique commune. Lorsque $a_2 \neq a_2^{\text{critique}}$, les structures de ces

modes sont distinctes. La structure électromagnétique du mode I pour $a_2 < a_2^{\text{critique}}$ devient la structure du mode II pour $a_2 > a_2^{\text{critique}}$ et réciproquement.

À titre d'illustration, on fixe la longueur d'onde λ_{LPG}^m à $1,55 \mu m$ et on trace sur la figure 3.26 la variation des coefficients de couplage des modes 5 et 6 en fonction de a_2 . Les coefficients de couplage des deux modes sont égaux pour $a_2 = a_2^{\text{critique}}$. Quand a_2 augmente le mode 5 voit son coefficient de couplage augmenter brutalement d'une valeur presque nulle à une valeur maximale proche de $1,2 \mu m^{-1}$. Le coefficient de couplage du mode 6 évolue dans le sens inverse : il décroît brutalement quand a_2 approche a_2^{critique} .

L'équation analytique (2.79) obtenue dans le chapitre 2 reliant, pour chaque couple de modes, le rayon a_2^{critique} aux quantités V et a_1 peut être utilisée pour dimensionner des LPG favorisant de forts couplages modaux. La procédure est la suivante. On impose tout d'abord une longueur d'onde de résonance λ_{LPG}^m et on choisit un mode d'ordre impair couplé par le réseau. On évalue ensuite le rayon de gaine critique à l'aide de la formulation (2.79) pour un rayon de cœur, un indice de cœur, un indice de gaine et indice du milieu extérieur imposés. Puis, nous déterminons le rayon de gaine a_2 qui favorise le plus fort couplage modal. D'après la figure 3.26, la valeur optimale de a_2 vaut approximativement $a_2 = a_2^{\text{critique}} + 3 \mu m$. Finalement, le pas du réseau LPG est déduit à partir de l'expression (3.22) en choisissant une valeur de m et de $\delta \bar{n}_1$ tel que :

$$\Lambda_{LPG} = \frac{\lambda_{LPG}^m}{n_{\text{eff}}^{\text{co}} - n_{\text{eff}}^{\text{cl}} + \frac{\kappa^{\text{co}}}{2\pi} \lambda_{LPG}} \quad (3.36)$$

Cette optimisation à l'avantage d'être simple et rapide.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'influence des déformations radiales et axiales sur la réponse spectrale des réseaux fibrés.

Un grand nombre de tirages aléatoires ont été réalisés dans l'espace des paramètres constitué de l'ordre du mode de gaine, du rayon de la gaine optique, du pas du réseau et de l'indice du milieu extérieur. Les quantités observées étaient les indices effectifs des modes de gaine, les longueurs d'onde résonnantes et les coefficients de couplage des modes de gaine. Elles étaient calculées en résolvant exactement les équations de dispersion des modes de cœur et des modes de gaine, et en tenant compte des effets des déformations sur la géométrie de la fibre et sur les indices de refractions via le tenseur de photoélasticité.

Cette étude montre tout d'abord que la sensibilité croisée aux déformations axiales et radiales est généralement très faible et peut être négligée, sauf dans certaines configurations très particulières.

Un autre résultat remarquable est qu'il existe une relation de proportionnalité entre les sensibilités aux déformations axiales et radiales, d'autant mieux vérifiée que l'ordre du mode est élevé. Cette relation pourrait être utilisée pour déduire une sensibilité en fonction d'une autre sachant que la sensibilité à la déformation axiale est plus aisée à mesurer.

L'indice du milieu extérieur n'a pas d'influence sur les sensibilités aux déformations. Les paramètres les plus influents sont le pas du réseau et surtout le rayon de la gaine optique. On observe une remarquable régularité dans le comportement des différentes configurations. Quels que soient le mode et le pas du réseau, les sensibilités tendent vers une valeur asymptotique quand le rayon de la gaine optique augmente et évoluent en $a_2^{-\gamma}$ avec $0.3 < \gamma < 1$, selon le pas du réseau.

Si on cherche à concevoir un capteur avec une forte sensibilité, on aura intérêt de choisir un LPG avec un pas et un rayon de gaine petits. Par contre, si on souhaite avoir un capteur avec un comportement plus standard, on privilégiera une géométrie avec des pas longs et des petits rayons de gaine.

En ce qui concerne le couplage du réseau, il est stable dans la gamme de déformations $[-1000 \mu\epsilon; 1000 \mu\epsilon]$. La mesure ne risque pas d'être affectée par une disparition du couplage liée à la déformation.

Cependant, nous avons mis en évidence de fortes variabilités de la constante de couplage pour des rayons de gaine particuliers. Ces fortes variations sont dues à des échanges de structures modales entre deux modes de gaine d'un même couple (voir chapitre 2). Ces fortes variations se produisent ainsi pour des rayons de gaine proches du rayon de gaine critique du mode couplé à travers le LPG. Pour $a_2 \simeq a_2^{\text{critique}} + 3 \mu m$, nous avons constaté que le couplage à travers le réseau était maximal. De ce constat et à partir de l'équation (2.79) permettant de déterminer le rayon de gaine critique, nous avons proposé une méthode pour dimensionner des LPG à coefficient de couplage maximal.

Chapitre 4

Dimensionnement numérique du capteur pour les mesures discriminées de ϵ_r et ϵ_z

Sommaire

4.1	Dimensionnement du capteur en considérant le LPG et le FBG comme deux structures indépendantes	93
4.1.1	Description du capteur	93
4.1.2	Principe de mesures	94
4.1.3	Méthode pour déterminer l'architecture optimale	94
4.1.4	Architecture optimisée	96
4.2	Effet de la superposition du LPG et du FBG sur les performances du capteur	102
4.2.1	Calcul du spectre : réseaux fibrés en général	102
4.2.2	Calcul du spectre d'un réseau de Bragg	103
4.2.3	Calcul du spectre d'un réseau longue période	104
4.2.4	Calcul du spectre d'une structure FBG+LPG	106
4.2.5	Cas de la structure optimisée	108
4.3	Conclusion du chapitre	109

Pour mesurer simultanément la déformation radiale et la déformation axiale au sein des matériaux, nous avons choisi dans le Chapitre 1 d'utiliser une architecture de capteur basée sur la superposition d'un FBG et d'un LPG. Dans cette partie, nous étudions numériquement l'efficacité d'une telle architecture de capteur pour la mesure discriminée des déformations radiales ϵ_r et axiales ϵ_z et nous cherchons à dimensionner ce capteur afin qu'il réponde au cahier des charges suivant :

- Le capteur doit mesurer simultanément les déformations radiales et axiales avec la même précision sur la mesure de la déformation axiale que les FBG collés en surface.
- Le spectre en transmission du capteur doit comporter seulement deux résonances dans la gamme d'interrogation $[1400 \text{ nm}; 1600 \text{ nm}]$, une associée au FBG et l'autre au LPG. Pour éviter tout recouvrement des deux résonances, nous imposons un écart conséquent entre elles. Ainsi, la longueur d'onde de Bragg doit être égale à environ $1,45 \mu\text{m}$ et la longueur d'onde de résonance du LPG doit valoir environ $1,55 \mu\text{m}$.
- La réponse du capteur doit être linéaire dans la gamme de déformations $\epsilon_{r,z} \in [-5000 \mu\epsilon; 5000 \mu\epsilon]$.

Le dimensionnement du capteur sera exécuté en deux parties. Dans un premier temps nous négligerons l'effet de la superposition des deux réseaux sur le fonctionnement du capteur. Puis nous étudierons l'impact de la superposition des deux réseaux sur les performances du capteur optimisé.

Dans tout le chapitre, nous considérerons les déformations du capteur comme homogènes et isotropes dans le plan transverse.

4.1 Dimensionnement du capteur en considérant le LPG et le FBG comme deux structures indépendantes

4.1.1 Description du capteur

Le capteur est une fibre optique monomode à saut d'indice. Son architecture est illustrée sur la figure 4.1. On juxtapose à l'intérieur du cœur de la fibre un FBG et un LPG de longueurs identiques. Le cœur est enveloppé par deux gaines concentriques : une gaine interne de rayon a_2 et d'indice n_2 et une gaine externe de rayon a_3 et d'indice n_3 . Le rôle de cette dernière est d'isoler les modes de gaine couplés par le réseau LPG afin qu'ils ne voient pas le matériau instrumenté. En effet, il est connu que les résonances des LPG se décalent lorsque l'indice du milieu extérieur change [41, 56]. L'ajout de la gaine extérieure évite, donc, que toute inhomogénéité de la structure instrumentée ne vienne fausser les mesures de ϵ_r et ϵ_z .

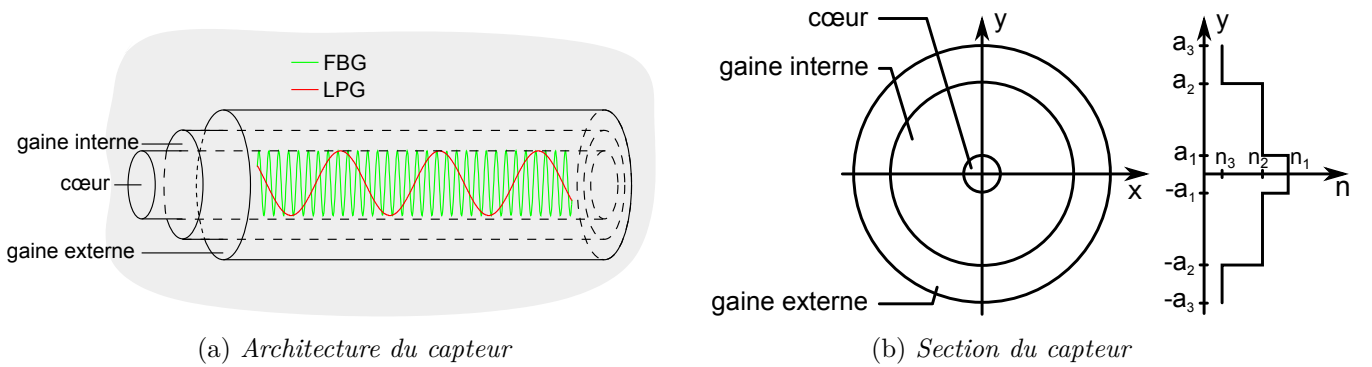


FIGURE 4.1: Capteur de déformations.

4.1.2 Principe de mesures

Quand la fibre se déforme, la période des réseaux, les rayons et les indices de réfraction du capteur changent. Les nouveaux paramètres optiques et géométriques de la fibre peuvent être évalués à partir des équations (3.25) présentées dans le chapitre 3.

Tous ces changements entraînent un décalage des longueurs d'onde de résonance λ_B et λ_{LPG} . Ces décalages peuvent s'exprimer dans le régime linéaire en fonction des déformations radiales ϵ_r et axiales ϵ_z du capteur :

$$\begin{cases} \Delta\lambda_B = a_{1r}\epsilon_r - a_{1z}\epsilon_z \\ \Delta\lambda_{LPG} = a_{2r}\epsilon_r - a_{2z}\epsilon_z \end{cases} \quad (4.1)$$

L'inversion de ce système permet de remonter aux déformations, telle que :

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{a_{2z}\Delta\lambda_B - a_{1z}\Delta\lambda_{LPG}}{D} \\ \epsilon_z = \frac{a_{1r}\Delta\lambda_{LPG} - a_{2r}\Delta\lambda_B}{D} \end{cases} \quad (4.2)$$

où $D = a_{1r}a_{2z} - a_{2r}a_{1z}$.

À partir des équations (4.2), il est possible d'estimer par un calcul d'incertitude, les plus petites déformations axiales $\Delta\epsilon_z$ et radiales $\Delta\epsilon_r$, mesurables par le capteur :

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_r = \frac{|a_{2z}| + |a_{1z}|}{|D|} \delta\lambda_{\min} \\ \Delta\epsilon_z = \frac{|a_{1r}| + |a_{2r}|}{|D|} \delta\lambda_{\min} \end{cases} \quad (4.3)$$

Comme nous pouvons le constater dans les équations (4.3), plus la valeur de D est élevée, meilleures sont les résolutions du capteur sur les mesures de ϵ_r et ϵ_z . C'est pourquoi dans la suite, nous chercherons des dimensionnements du capteur qui donnent une forte valeur de D .

4.1.3 Méthode pour déterminer l'architecture optimale

L'objectif de cette étude est de trouver un dimensionnement du capteur qui réponde au cahier des charges imposé. Les paramètres du capteur sont les suivants : $a_1, a_2, a_3, n_1, n_2, n_3, \Lambda_B, \Lambda_{LPG}, m_B, m_L, \delta\overline{n}_1^B$ et $\delta\overline{n}_1^L$. Comme précédemment, le nombre de paramètres peut être réduit par quelques considérations physiques et choix a priori. Les caractéristiques du cœur et l'indice de réfraction de la gaine interne sont choisis pour être équivalents à ceux d'une SMF28. La gaine externe, dont la fonction est d'isoler les modes de gaine du milieu extérieur, doit posséder un rayon suffisamment important pour que l'amplitude de ces modes soit nulle à la bordure extérieure du capteur. En pratique, un rayon $a_3 = a_2 + 15\mu m$ est suffisant pour accomplir cette tâche. Concernant l'indice de la gaine externe, il a été montré précédemment qu'il influençait peu les propriétés spectrales du LPG. C'est pourquoi il peut être choisi arbitrairement dans l'intervalle $[1; n_2[$. Nous fixons l'indice du milieu extérieur à $n_3 = 0,95n_2$. Cette valeur permet de maximiser le saut d'indice entre les 2 gaines tout en étant compatible avec un capteur composé entièrement de silice. Le pas du réseau de Bragg est fixé à 501 nm afin d'obtenir une longueur d'onde de Bragg égale à 1,45 μm . Les indices effectifs moyens du FBG et du LPG sont choisis du même ordre de grandeur, soient $\delta\overline{n}_1^B = \delta\overline{n}_1^L = 1.10^{-4}$. Nous imposons également aux deux réseaux une visibilité de franges identique, c'est à dire : $m_B = m_L = 1$. Ainsi, les seuls paramètres libres de l'étude sont a_2 et Λ_{LPG} .

Pour déterminer le meilleur couple de paramètres $\{a_2, \Lambda_{LPG}\}$, nous procédons à une exploration systématique de l'espace des paramètres, avec Λ_{LPG} variant de 100 μm à 500 μm par pas de 5 μm et

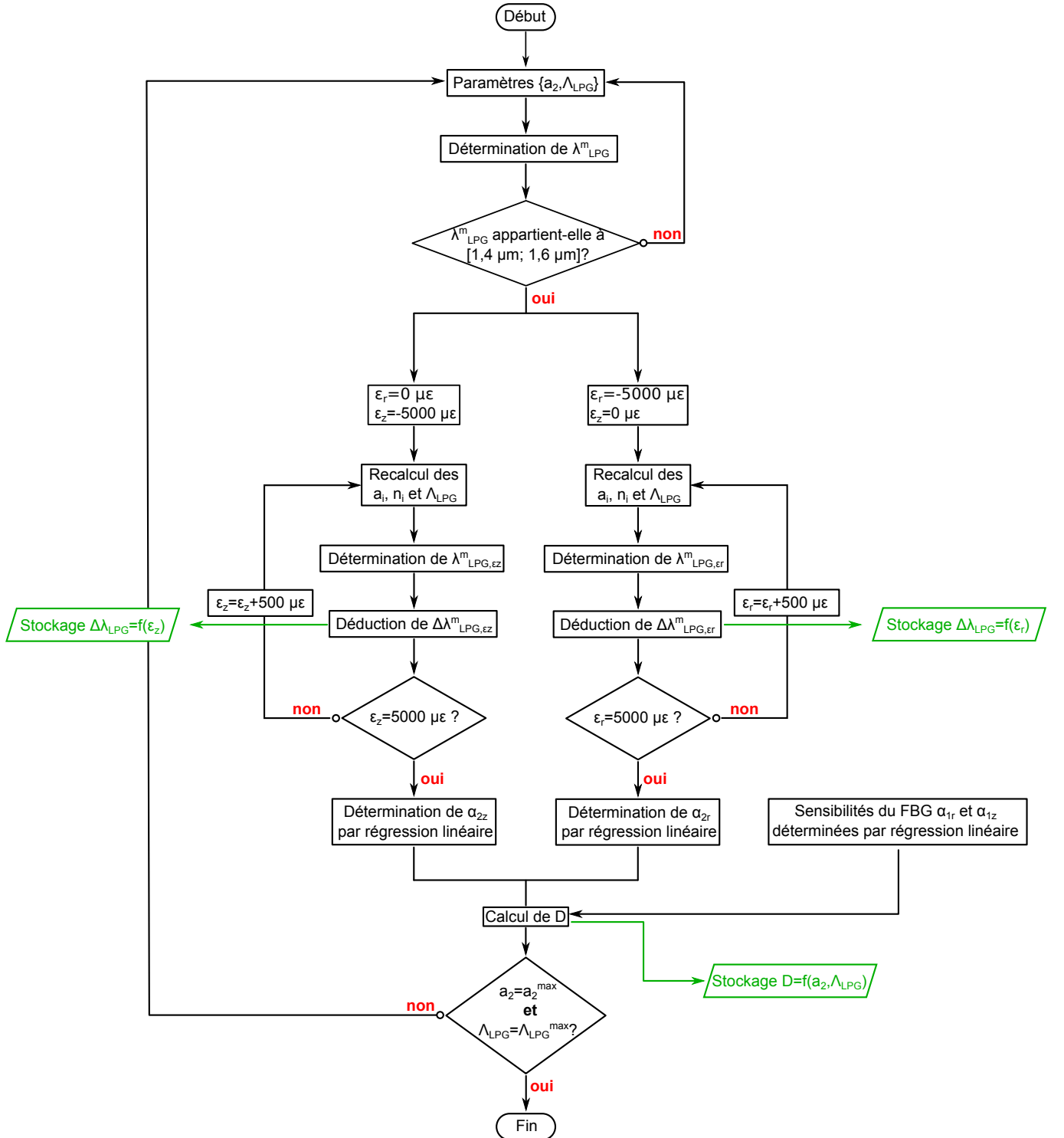


FIGURE 4.2: Méthodologie employée pour l'optimisation des paramètres du capteur.

a_2 variant de $15 \mu m$ à $70 \mu m$ par pas de $0,5 \mu m$. Les valeurs de a_2 inférieures à $15 \mu m$ ne sont pas prises en compte, car dans ces conditions la gaine interne n'est pas suffisamment épaisse pour isoler le mode de cœur de la gaine externe.

La démarche employée est schématisée sur l'algorithme de la figure 4.2. Pour chaque paire $\{a_2, \Lambda_{LPG}\}$, la longueur d'onde de résonance λ_{LPG}^m en absence de déformations est déterminée. La détermination de λ_{LPG}^m est réalisée à partir de la résolution de l'équation de dispersion des modes de cœur (2.19) et des modes de gaine (2.41) et de l'équation de résonance du LPG (3.22). Puis nous appliquons une déformation radiale comprise dans un intervalle $[-5000; 5000] \mu\epsilon$, la déformation axiale est quant à elle fixée à une valeur nulle. Pour chaque déformation appliquée, les nouveaux rayons et les nouveaux indices sont calculés à l'aide des équations (3.25). Ces changements conduisent à une nouvelle valeur de λ_B et λ_{LPG} à partir desquelles nous déduisons les décalages de longueur d'onde $\Delta\lambda_B$ et $\Delta\lambda_{LPG}$. Une régression linéaire est ensuite exécutée afin de déterminer les sensibilités du FBG et du LPG à la déformation radiale. La même procédure est utilisée pour l'évaluation de la sensibilité du FBG et du LPG à la déformation axiale, avec $\epsilon_r = 0$ et ϵ_z incrémentée entre -5000 et 5000 $\mu\epsilon$. Le coefficient de couplage $\kappa_{cl,m}^{co}$ est également calculé suivant les mêmes procédures. Sa valeur nous servira d'indicateur sur la finesse et l'amplitude de la résonance du LPG.

4.1.4 Architecture optimisée

Les figures 4.3 et 4.4 montrent des cartographies du coefficient de couplage normalisé $\widetilde{\kappa_{cl,m}^{co}} = \kappa_{cl,m}^{co}/\overline{\delta n_1}$ et du paramètre D pour les 5 premiers modes de gaine hybrides impairs en fonction de a_2 et de Λ_{LPG} . Les modes pairs ne sont pas considérés car leur coefficient de couplage est approximativement nul [43]. Les surfaces colorées correspondent aux configurations qui possèdent une longueur d'onde de résonance λ_{LPG}^m dans $[1400 nm; 1600 nm]$. Quel que soit le mode observé, ces surfaces colorées ont une forme de virgule avec une pointe orientée vers les plus petites valeurs de a_2 et de Λ_{LPG} . Lorsque le numéro du mode est supérieur à 5, la pointe se scinde, laissant apparaître une zone critique où la résonance n'est plus possible dans la gamme spectrale désirée. À travers cette zone, le signe de D s'inverse et le coefficient de couplage $\widetilde{\kappa_{cl,m}^{co}}$ voit sa valeur chuter.

Nous constatons également que, pour tous les modes, les valeurs de D les plus importantes sont localisées à la pointe de la virgule, en d'autres termes les configurations ayant les plus petites valeurs de a_2 et de Λ_{LPG} fournissent les meilleurs résolutions. De même, les configurations localisées dans la pointe de la virgule favorisent les plus hauts couplages. Par conséquent, un couple $\{a_2, \Lambda_{LPG}\}$ peut fournir à la fois une bonne résolution et un fort couplage.

Toutefois, il n'est pas possible de choisir une configuration avec la valeur de D la plus grande, car d'autres spécifications doivent être vérifiées. En particulier, le décalage de la longueur d'onde de résonance du LPG doit évoluer linéairement dans l'intervalle de déformations $[-5000 \mu\epsilon; 5000 \mu\epsilon]$. Pour quantifier la linéarité de la réponse du réseau longue période aux déformations, nous définissons la quantité :

$$C_{moy} = \frac{(|C_{\epsilon_r}| + |C_{\epsilon_z}|)}{2} \quad (4.4)$$

avec C_{ϵ_r} et C_{ϵ_z} donnés par :

$$C_\epsilon = \frac{\sum_{i=0}^N (\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i) (\Delta\lambda_{LPG}^m - \overline{\Delta\lambda_{LPG}^m})}{\sqrt{\sum_{i=0}^N (\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i)^2 (\Delta\lambda_{LPG}^m - \overline{\Delta\lambda_{LPG}^m})^2}} \quad (4.5)$$

où N est le nombre de déformations ϵ_i utilisées pour l'évaluation de $\Delta\lambda_{LPG}^m$ et $\bar{x}$ la valeur moyenne de la grandeur x .

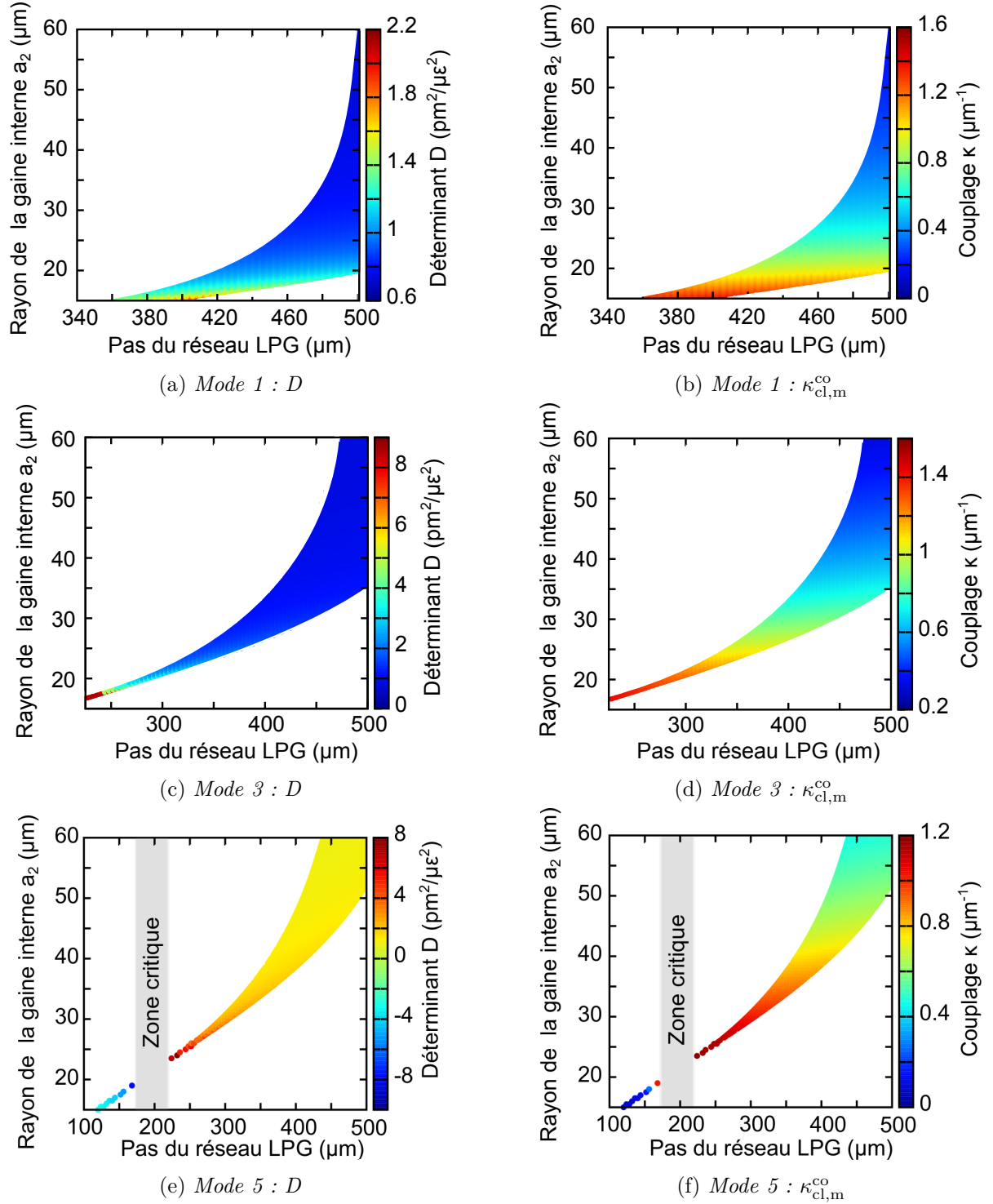
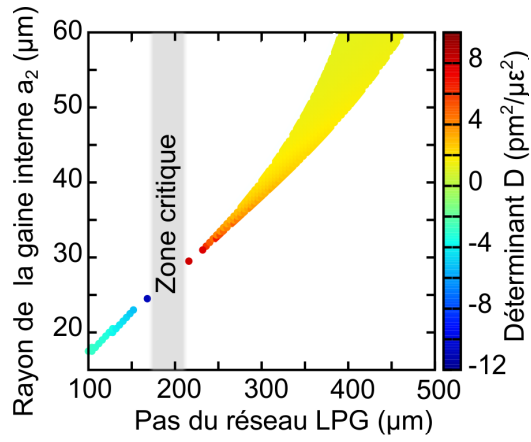
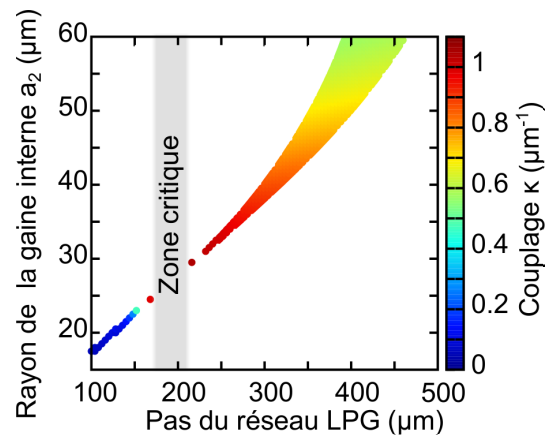


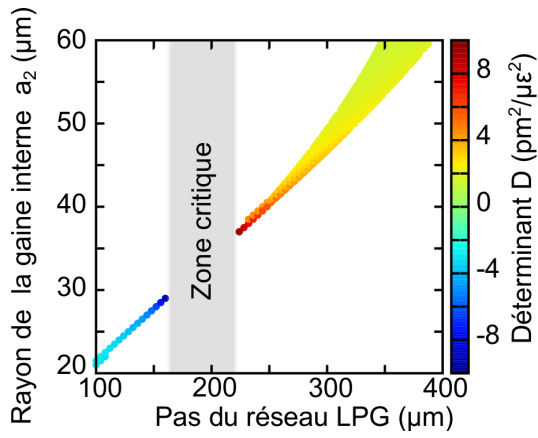
FIGURE 4.3: Déterminant D et coefficient de couplage des modes 1, 3 et 5.



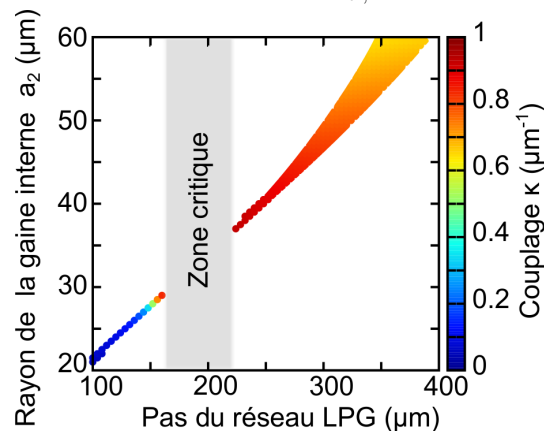
(a) Mode 7 : D



(b) Mode 7 : $\kappa_{cl,m}^{co}$



(c) Mode 9 : D



(d) Mode 9 : $\kappa_{cl,m}^{co}$

FIGURE 4.4: Déterminant D et coefficient de couplage des modes 7 et 9.

La figure 4.5a montre l'évolution de C_{moy} en fonction de D pour les modes 1 à 9. De façon assez inattendue, on s'aperçoit que les courbes se superposent parfaitement pour tous les modes. Elles présentent un maximum pour $D = 1,75 \text{ pm}^2/\mu\epsilon^2$, ainsi pour cette valeur de D la linéarité de la réponse du LPG vis à vis de la déformation est maximale. Nous choisissons par conséquent cette valeur de D pour le dimensionnement du capteur. Malgré tout, cette première condition n'est pas suffisante pour évaluer le couple optimal $\{a_2, \Lambda_{\text{LPG}}\}$ qui réponde complètement au cahier des charges, nous imposons une condition supplémentaire qui est $\lambda_{\text{LPG}}^m = 1,55 \mu\text{m}$.

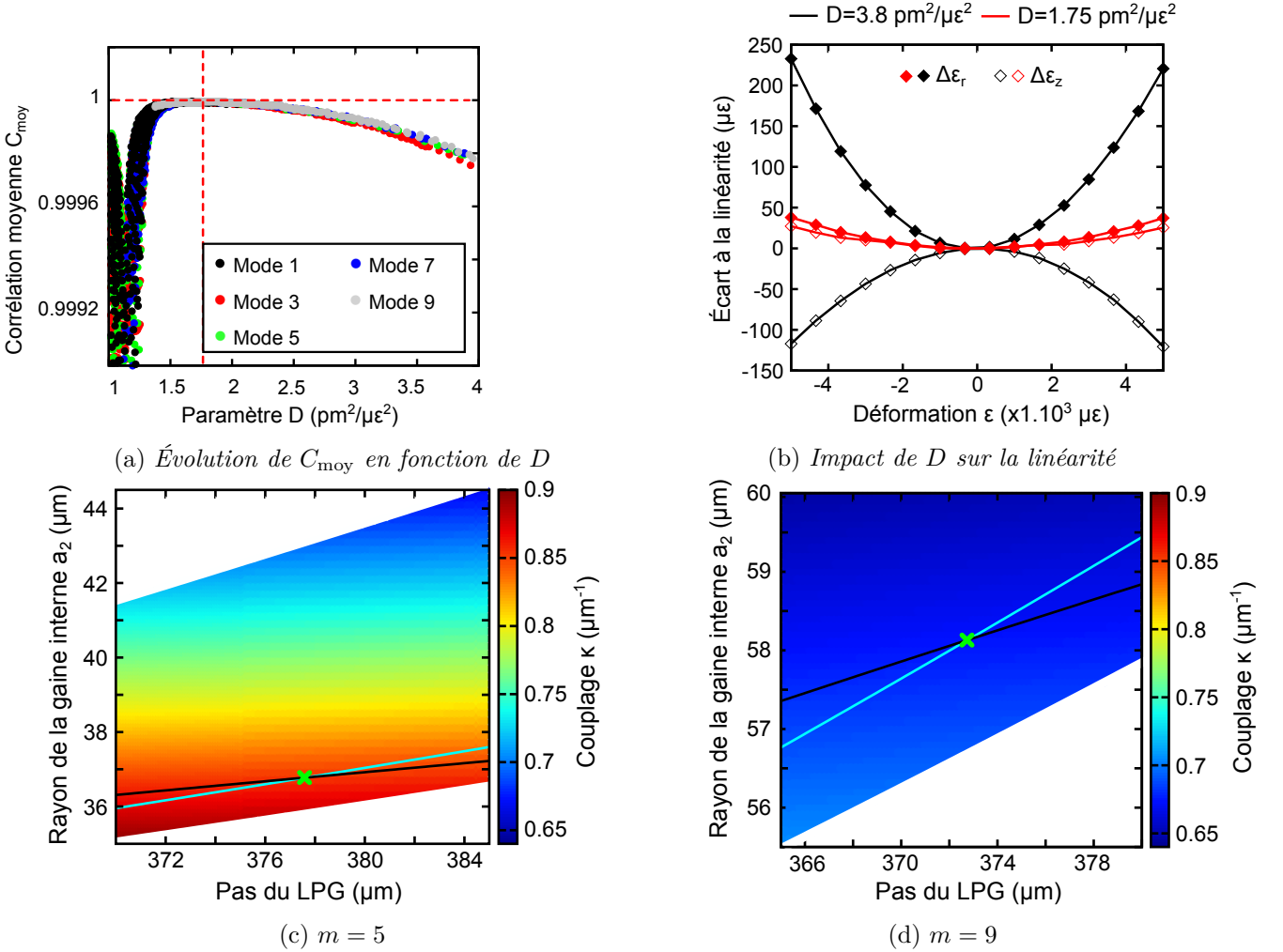


FIGURE 4.5: Détermination de la configuration optimale pour les différents modes.

La courbe noire sur les graphiques 4.5c et 4.5d correspond aux configurations où $D = 1,75 \text{ pm}^2/\mu\epsilon^2$ et la courbe bleue claire correspond aux configurations qui vérifient $\lambda_{\text{LPG}}^m = 1,55 \mu\text{m}$. L'intersection de ces courbes donne le couple optimal $\{a_2, \Lambda_{\text{LPG}}\}$ qui satisfait toutes les exigences du cahier des charges.

Nous résumons dans la table 4.1, les caractéristiques optimales des LPG impliquant le couplage des 5 premiers modes de gaine. Tous ces réseaux présentent des sensibilités α_{2r} et α_{2z} comparables et des pas de réseau Λ_{LPG} similaires. Par contre, ils présentent des coefficients de couplage assez différents. Le coefficient de couplage décroît avec le numéro du mode, le réseau impliquant le mode 1 possède un coefficient de couplage 2 fois plus élevé que celui impliquant le mode 9.

TABLE 4.1: *Caractéristiques des réseaux longue période.*

m	a_2 (μm)	Λ_{LPG} (μm)	$\widetilde{\kappa}_{cl,m}^{co}$ (μm^{-1})	α_{2r} ($pm/\mu\epsilon$)	α_{2z} ($pm/\mu\epsilon$)
1	15.45	399.25	1.33	-1.89	0.43
3	26.14	383.93	1.02	-1.86	0.42
5	36.78	377.65	0.85	-1.85	0.41
7	47.45	374.55	0.75	-1.85	0.41
9	58.13	372.77	0.68	-1.75	0.41

À ce stade, nous retenons 2 configurations :

- LPG1 : $\{a_2 = 15,45 \mu m, \Lambda_{LPG} = 399,25 \mu m\}$ avec le mode $m = 1$;
- LPG2 : $\{a_2 = 26,14 \mu m, \Lambda_{LPG} = 383,93 \mu m\}$ avec le mode $m = 3$.

La dernière exigence que doivent vérifier ces configurations est de ne présenter qu'une unique résonance dans la gamme de longueurs d'onde $[1400 nm; 1600 nm]$, et ce, quelle que soit la déformation considérée. La figure 4.6 montre le spectre en transmission du LPG1 et du LPG2 ainsi que la variation

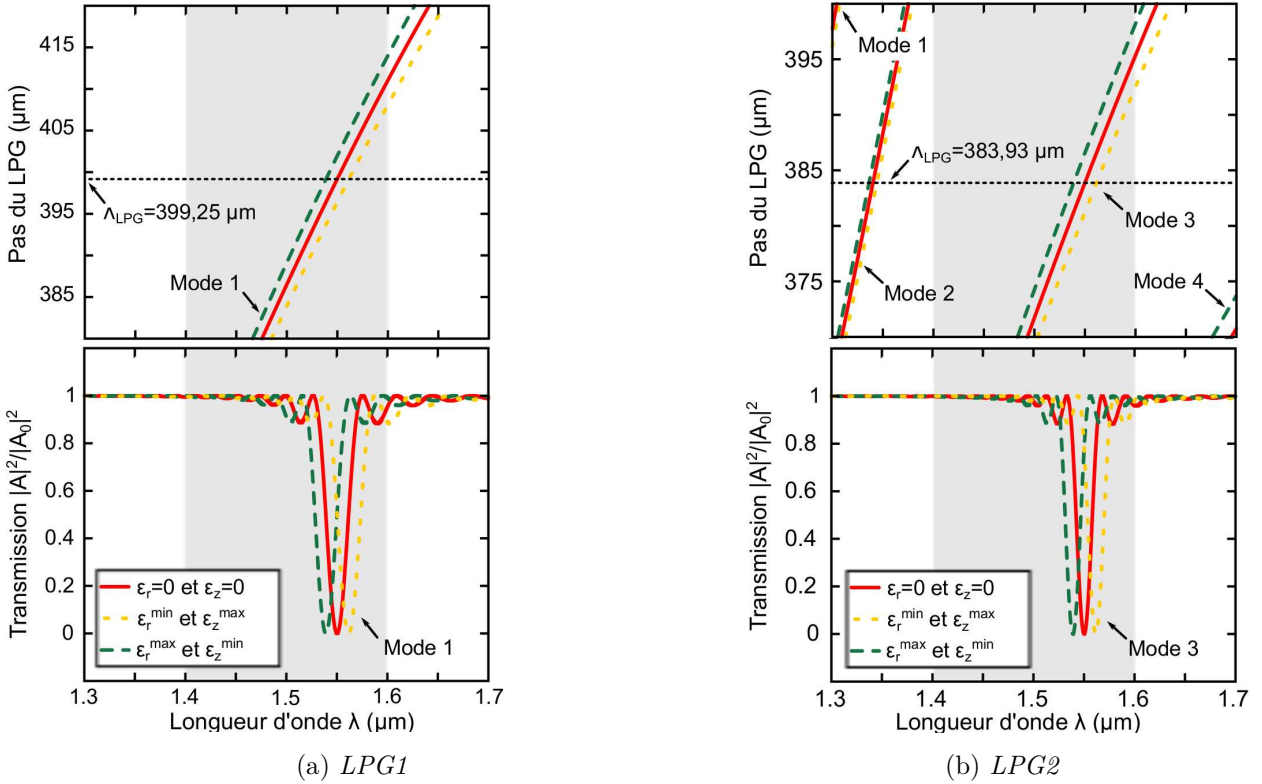


FIGURE 4.6: *Réseaux optimaux.*

de la longueur d'onde de résonance avec le pas du réseau. Ils ont été calculés pour trois situations :

- quand le réseau est au repos (en trait continu) ;
- pour la déformation du réseau qui induit un décalage maximal de λ_{LPG}^m vers les plus grandes longueurs d'onde (en traits discontinus) ;
- pour la déformation du réseau qui induit un décalage maximal de λ_{LPG}^m vers les plus courtes longueurs d'onde (en traits discontinus).

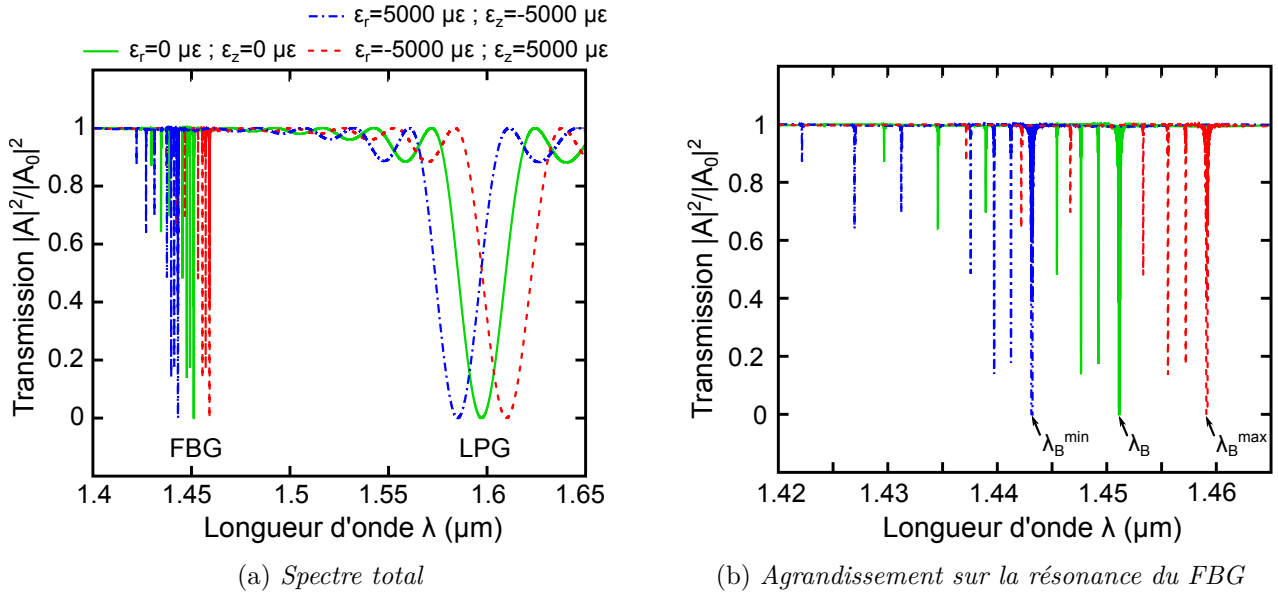


FIGURE 4.7: Spectre en transmission du capteur constitué de la structure FBG+LPG1.

La longueur L des réseaux est choisie pour maximiser l'amplitude de la résonance du LPG, c'est à dire $L = \frac{\pi}{m_L \kappa_{cl,m}^{co}}$ [5]. Pour le LPG1, le mode 1 est le seul résonant dans la gamme de longueurs d'onde désirée. Pour le LPG2, nous pouvons constater l'existence des résonances du mode 2 et du mode 4 aux bordures de l'intervalle $[1300 \text{ nm}; 1700 \text{ nm}]$. Cependant, ces résonances supplémentaires n'ont pas de conséquences visibles dans le spectre en transmission du LPG car, du fait de leur parité, ces modes ont un coefficient de couplage pratiquement nul. Ces deux configurations peuvent par conséquent être utilisées pour la mesure discriminée de déformations.

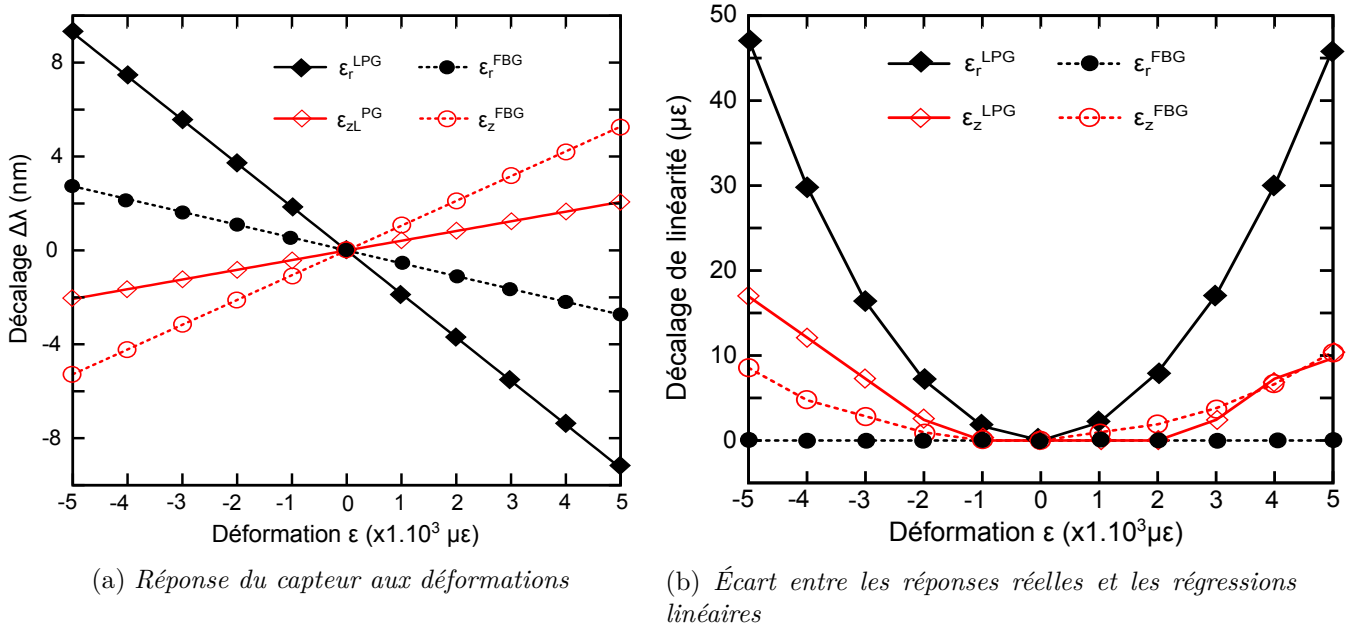
Nous présentons dans la figure 4.7 la totalité du spectre du capteur avec LPG1. La courbe verte en trait continu correspond au spectre du capteur quand il est au repos, la courbe bleue en traits discontinus correspond à la déformation donnant un décalage maximal des résonances vers les plus courtes longueurs d'onde et la courbe rouge en traits discontinus à la déformation donnant un décalage maximal des résonances vers les plus grandes longueurs d'onde.

Nous pouvons noter un décalage de λ_{LPG}^m en absence de déformation. Ce décalage est dû à la superposition du FBG sur le LPG. Nous notons également l'apparition de plusieurs creux à proximité de la résonance du FBG. Ils sont localisés à des longueurs plus petites que λ_B . Ces creux résultent du couplage du mode de cœur avec des modes de gaine causé par le FBG. Toutefois ces creux n'induisent pas de confusion dans l'identification des résonances puisque leur longueur d'onde est toujours plus petite que λ_B [5].

La figure 4.8a montre la variation du décalage de la longueur d'onde de résonance du FBG et du LPG en fonction de ϵ_r et ϵ_z . Comme attendu, la réponse du capteur est assez linéaire. L'écart à la linéarité n'excède pas $50 \mu\epsilon$ pour une déformation de $5000 \mu\epsilon$, soit un écart relatif maximal de 1% (cf. figure 4.8b). La sensibilité du FBG à la déformation axiale est $\alpha_{1z} = 1,068 \text{ pm}/\mu\epsilon$, celle du LPG est $\alpha_{2z} = 0,434 \text{ pm}/\mu\epsilon$. Pour ce qui est des sensibilités radiales, celle du FBG est $\alpha_{1r} = -0,555 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et celle du LPG est $\alpha_{2r} = -1,895 \text{ pm}/\mu\epsilon$.

De ces valeurs et en considérant que le plus petit décalage de longueur d'onde $\delta\lambda_{\min}$ mesurable est de l'ordre de 1 pm, nous déduisons de (4.3) que la plus petite déformation radiale mesurable est $\Delta\epsilon_z = 1,4 \mu\epsilon$ et la plus petite déformation axiale mesurable est $\Delta\epsilon_r = 0,85 \mu\epsilon$.

Ces valeurs sont tout à fait comparables à celles d'un FBG collé en surface. Le capteur répond donc bien aux objectifs en terme de résolution et de sensibilité.


 FIGURE 4.8: Caractéristiques des réponses du capteur aux déformations ϵ_r et ϵ_z .

4.2 Effet de la superposition du LPG et du FBG sur les performances du capteur

4.2.1 Calcul du spectre : réseaux fibrés en général

Dans le chapitre 2, nous avons introduit la théorie des modes couplés et nous l'avons appliquée aux réseaux de Bragg et aux réseaux LPG. Pour résoudre analytiquement les équations couplées, nous avons supposé que deux modes étaient couplés à travers le réseau. Malheureusement pour un nombre de modes couplés supérieur, le nombre d'équations devient bien trop important pour une résolution analytique, une approche numérique s'impose.

Plusieurs solutions existent, les plus courantes sont celles basées sur la détermination de la matrice de transfert du réseau [57, 58] et sur la résolution des équations des modes couplés par la méthode de Runge-Kutta [59, 60]. C'est cette dernière approche que nous avons utilisée.

Quels que soient le nombre et la nature des modes couplés à travers le réseau, les équations couplées peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{d\vec{Y}}{dz} = U(z) \vec{Y} \quad (4.6)$$

où :

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A} = \begin{pmatrix} A^{co} \\ A_1^{cl} \\ \vdots \\ A_\nu^{cl} \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B^{co} \\ B_1^{cl} \\ \vdots \\ B_\mu^{cl} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La matrice $U(z)$ contient les coefficients de couplage des modes couplés à travers le réseau. Ses composantes dépendent ainsi des caractéristiques géométriques et optiques du réseau et de la nature des modes couplés. Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ contiennent respectivement les amplitudes des modes co-propagatifs et des modes contre-propagatifs. Les amplitudes du mode de cœur et des modes de gaine

sont différenciées les unes des autres par les exposants ^{co} et ^{cl}. Pour déterminer ces amplitudes, la méthode de Runge Kutta (RKM) [59, 60] est employée. Elle consiste à subdiviser le réseau en N sections uniformes et à évaluer numériquement la matrice de transfert de chacune d'entre elles. Les amplitudes des modes à la sortie de la section sont reliées aux amplitudes des modes à l'entrée par la matrice de transfert. Pour une section i quelconque, la relation entre amplitudes en entrée et amplitudes en sortie est donnée par :

$$\vec{Y}_{i+1} = R_i \vec{Y}_i \quad (4.8)$$

où R_i est la matrice de transfert de la section i et $\vec{Y}_i$ est le vecteur contenant les amplitudes des modes à l'entrée de la section. La matrice de transfert R_i est déterminée par la méthode RKM :

$$K_{1i} = U(z_i) \quad (4.9a)$$

$$K_{2i} = U\left(z_i + \frac{h}{2}\right) \left[Id + \frac{K_{1i}}{2} \right] \quad (4.9b)$$

$$K_{3i} = U\left(z_i + \frac{h}{2}\right) \left[Id + \frac{K_{2i}}{2} \right] \quad (4.9c)$$

$$K_{4i} = U(z_i + h) [Id + K_{3i}] \quad (4.9d)$$

$$R_i = Id + \frac{h}{6} (K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i}) \quad (4.9e)$$

où Id est la matrice identité.

De ces matrices R_i , est déduite la matrice de transfert globale G du réseau telle que :

$$G = \prod_{i=N}^0 R_i \quad (4.10)$$

Cette matrice relie les amplitudes $[\vec{A}(L), \vec{B}(L)]^T$ des modes à la sortie du réseau aux amplitudes à l'entrée :

$$\begin{pmatrix} \vec{A}(L) \\ \vec{B}(L) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} \vec{A}(0) \\ \vec{B}(0) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

La transmission du réseau T est déduite du calcul de la matrice G et des conditions initiales propres au réseau. Elle est définie par : $T = \frac{|A^{co}(L)|^2}{|A^{co}(0)|^2}$. Le spectre en transmission du réseau est quant à lui obtenu par le calcul répété de $T(\lambda)$ pour différentes longueurs d'onde λ .

4.2.2 Calcul du spectre d'un réseau de Bragg

Dans le chapitre 3, les équations couplées (3.9a) et (3.9b) prenaient uniquement en compte le couplage entre les modes de cœur co- et contra-propagatif. En réalité, dans un FBG, le mode de cœur incident est couplé également à des modes de gaine contra-propagatifs. De ce fait, les équations couplées du FBG sont équivalentes à :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A^{co} \\ B^{co} \\ B_1^{cl} \\ \vdots \\ B_m^{cl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\kappa^{co} & i\eta^{co}e^{-2i\delta^{co}z} & i\eta_1^{cl}e^{-2i\delta_1^{cl}z} & \dots & i\eta_\mu^{cl}e^{-2i\delta_\mu^{cl}z} \\ -i\eta^{co}e^{2i\delta^{co}z} & -i\kappa^{co} & 0 & \dots & 0 \\ -i\eta_1^{cl}e^{2i\delta_1^{cl}z} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ i\eta_\mu^{cl}e^{2i\delta_\mu^{cl}z} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{co} \\ B^{co} \\ B_1^{cl} \\ \vdots \\ B_m^{cl} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

où :

$$\eta^{co} = \frac{m}{2} \kappa^{co} \quad (4.14a)$$

$$\eta_{\mu}^{cl} = \frac{m}{2} \kappa_{cl,\mu}^{co} \quad (4.14b)$$

$$\delta_{\mu}^{co} = \frac{1}{2} \left(2\beta_{01}^{co} - \frac{2\pi}{\Lambda_B} \right) \quad (4.14c)$$

$$\delta_{\mu}^{cl} = \frac{1}{2} \left(\beta_{01}^{co} + \beta_{1\mu}^{cl} - \frac{2\pi}{\Lambda_B} \right) \quad (4.14d)$$

Dans les équations (4.13), les couplages entre modes de gaine sont négligés car ils sont faibles par rapport aux autres couplages modaux existants. Pour ce type de réseau, les conditions initiales sur les amplitudes des modes sont $\vec{A}(0) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ et $\vec{B}(L) = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$. La matrice de transfert du FBG est calculée en insérant la matrice (4.13) dans les équations (4.9a)-(4.9e). Les amplitudes des modes transmis et de modes réfléchis sont ensuite évaluées par :

$$\vec{A}(L) = [G_{11} - G_{12}G_{22}^{-1}G_{21}] \vec{A}(0) \quad (4.15a)$$

$$\vec{B}(0) = G_{22}^{-1} [\vec{B}(L) - G_{21}\vec{A}(0)] \quad (4.15b)$$

Le spectre en transmission du FBG est finalement calculé à l'aide des équations (4.15).

Un exemple de spectre de FBG est présenté dans la figure (4.9). Le réseau considéré est un réseau uniforme de longueur $L = 4 \text{ mm}$ et de pas $\Lambda_B = 535 \text{ nm}$, l'indice effectif moyen du réseau est fixé à $\delta\bar{n}_1 = 7,2 \cdot 10^{-4}$. Les autres paramètres utilisés pour le calcul du spectre sont listés ci dessous :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2,625 \mu m & n_1 &= 1,0055 n_2 \\ a_2 &= 62,5 \mu m & n_3 &= 0,8 n_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'indice de la gaine interne n_2 est calculé à l'aide de la relation de Sellmeier appliquée à la silice. Dans la figure 4.9, plusieurs résonances sont observables. La résonance centrée à $\lambda = 1,549 \mu m$ est induite par le couplage entre les deux modes de cœur, c'est la résonance de Bragg. Les résonances localisées aux longueurs d'onde plus petites sont, quant à elles, le fruit de couplages entre le mode de cœur incident et de multiples modes de gaine contra-propagatifs.

4.2.3 Calcul du spectre d'un réseau longue période

Pour le réseau LPG, les équations couplées sont données par :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A^{co} \\ A_1^{cl} \\ \vdots \\ A_m^{cl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\kappa^{co} & i\eta_1^{cl} e^{-2i\delta_1^{cl}z} & \dots & i\eta_m^{cl} e^{-2i\delta_m^{cl}z} \\ i\eta_1^{cl} e^{2i\delta_1^{cl}z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\eta_m^{cl} e^{2i\delta_m^{cl}z} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{co} \\ A_1^{cl} \\ \vdots \\ A_m^{cl} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

où :

$$\delta_m^{cl} = \frac{1}{2} \left(\beta_{01}^{co} - \beta_{1m}^{cl} - \frac{2\pi}{\Lambda_{LPG}} \right) \quad (4.18a)$$

Pour ce type de réseau, les conditions initiales sont $\vec{A}(0) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ et $\vec{B}(0) = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$. La matrice de transfert du LPG est obtenue par l'insertion de la matrice (4.17) dans les expressions (4.9a)-(4.9e). Les amplitudes des modes à la sortie du LPG sont ensuite déduites par le produit matriciel (4.11).

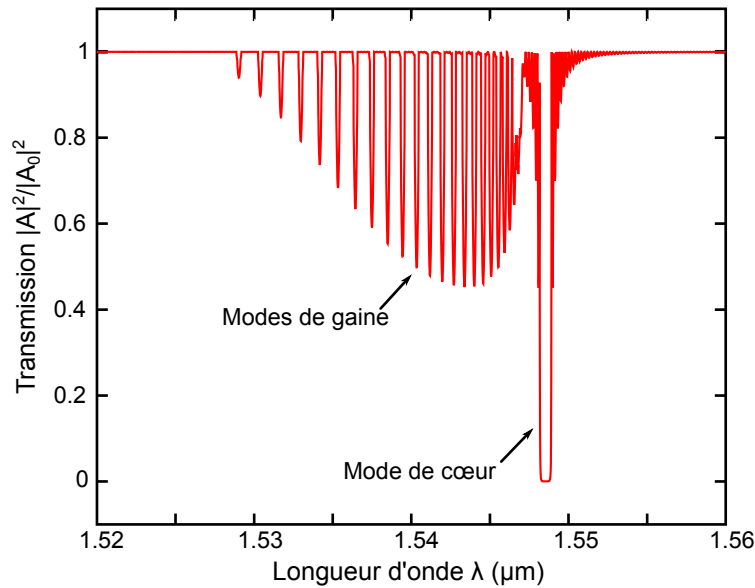


FIGURE 4.9: Spectre en transmission d'un FBG calculé pour les paramètres (4.16). La résonance associée au mode de cœur est centrée à $\lambda = 1,549 \mu\text{m}$. Aux plus courtes longueurs d'onde, les résonances associées aux modes de gaine sont observées.

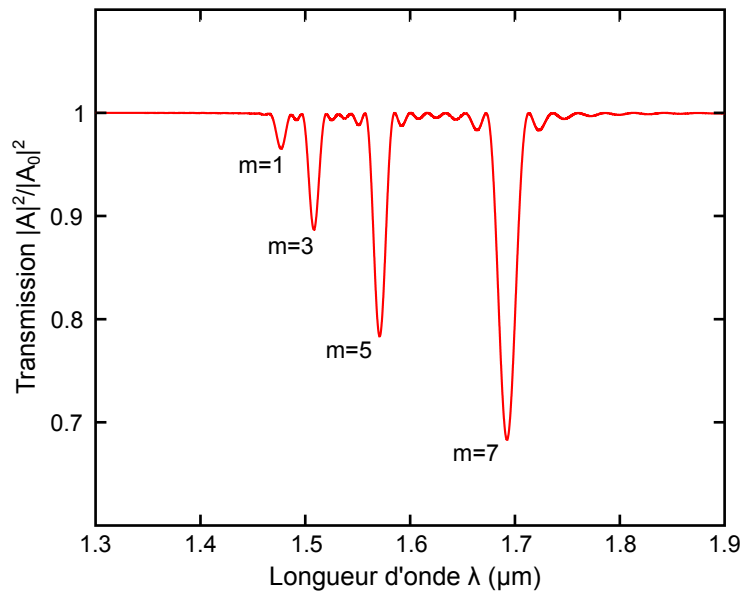


FIGURE 4.10: Spectre en transmission d'un LPG calculé pour les paramètres (4.16). Quatre résonances sont présentes dans le spectre, elles sont associées aux modes de gaine impairs $m=1, 3, 5$ et 7 .

Un exemple de spectre en transmission d'un LPG est tracé dans la figure 4.10. Il a été calculé pour les paramètres exposés en (4.16). La longueur du réseau est choisie à 2,5 cm, le pas du réseau Λ_{LPG} est égal à 570 μm et l'indice effectif moyen $\delta\bar{n}_1$ est pris à 1.10^{-4} . Le spectre comporte quatre résonances. De la gauche vers la droite, ces résonances sont associées aux couplages entre le mode de cœur incident et les modes de gaine d'ordre $m=1, 3, 5$ et 7. Les modes d'ordre pair n'apparaissent pas dans le spectre car leur couplage à travers le réseau est quasi-inexistant.

4.2.4 Calcul du spectre d'une structure FBG+LPG

La variation d'indice de la structure FBG+LPG est équivalente à la superposition des variations d'indice des 2 réseaux, on a donc [61] :

$$n_1^{\text{capteur}}(z) = n_1 + \Delta n_L(z) + \Delta n_B(z) \quad (4.19)$$

où n_1 est l'indice du cœur en absence de perturbations, Δn_L et Δn_B sont respectivement les variations d'indice introduites par le LPG et le FBG :

$$\begin{cases} \Delta n_L = n_1 + \delta\bar{n}_1^L \left[1 + m_L \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_L} z\right) \right] \\ \Delta n_B = n_1 + \delta\bar{n}_1^B \left[1 + m_B \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda_B} z\right) \right] \end{cases} \quad (4.20)$$

Cette structure se comporte à la fois comme un FBG et un LPG. Le mode de cœur incident est couplé à la fois au mode de cœur contra-propagatif et à des modes de gaine co- et contra-propagatifs. De plus, les modes générés par le couplage à travers le FBG peuvent également interagir avec le LPG et vice versa. Ce dernier point se produit lorsque les conditions de résonance des 2 réseaux (3.15) et (3.22) sont satisfaites simultanément.

En négligeant les couplages entre les modes de gaine et en ne gardant uniquement les termes exponentiels de phase approximativement nul, les équations couplées de la structure FBG+LPG s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial A^{co}}{\partial z} = iA^{co}(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) + i\frac{m_L}{2} \sum_{\nu} \kappa_{L,\nu}^{cl} A_{\nu}^{cl} e^{-2i\delta_{L,\nu}^{cl} z} + i\kappa_B^{co} B^{co} \frac{m_B}{2} e^{-2i\delta_B^{co} z} + i\frac{m_B}{2} \sum_{\mu} \kappa_{B,\mu}^{cl} B_{\mu}^{cl} e^{-2i\delta_{B,\mu}^{cl} z} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial B^{co}}{\partial z} = -i(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) B^{co} - i\frac{m_B}{2} \kappa_B^{co} A^{co} e^{2i\delta_B^{co} z} - i\frac{m_B}{2} \sum_{\nu} \kappa_{B,\nu}^{cl} A_{\nu}^{cl} e^{2i\delta_{B,\nu}^{cl} z} - i\frac{m_L}{2} \sum_{\mu} \kappa_{L,\mu}^{cl} B_{\mu}^{cl} e^{2i\delta_{L,\mu}^{cl} z} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial B_{\mu}^{cl}}{\partial z} = -iA^{co} \frac{m_B}{2} \kappa_B^{cl} e^{2i\delta_B^{cl} z} - i\frac{m_L}{2} B^{co} \kappa_{L,\mu}^{cl} e^{-2i\delta_L^{cl} z} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial A_{\nu}^{cl}}{\partial z} = iA^{co} \frac{m_L}{2} \kappa_L^{cl} e^{2i\delta_L^{cl} z} + i\frac{m_B}{2} \kappa_{B,\nu}^{cl} B^{co} e^{-2i\delta_B^{cl} z} \quad (4.24)$$

Les équations (4.21)-(4.24) peuvent être réécrites sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où les sous matrices U_{11} , U_{12} , U_{21} et U_{22} sont définies par :

$$U_{11} = \begin{pmatrix} i(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) & i\eta_{L,1}^{cl} e^{-2i\delta_{L,1}^{cl} z} & \dots & i\eta_{L,\nu}^{cl} e^{-2i\delta_{L,\nu}^{cl} z} \\ i\eta_{L,1}^{cl} e^{2i\delta_{L,1}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\eta_{L,\nu}^{cl} e^{2i\delta_{L,\nu}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$U_{12} = \begin{pmatrix} i\eta_B^{co} e^{-2i\delta_B^{co} z} & i\eta_{B,1}^{cl} e^{-2i\delta_{B,\mu}^{cl} z} & \dots & i\eta_{B,\mu}^{cl} e^{-2i\delta_{B,\mu}^{cl} z} \\ i\eta_{B,1}^{cl} e^{2i\delta_{B,1}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i\eta_{B,\nu}^{cl} e^{2i\delta_{B,\nu}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$U_{21} = \begin{pmatrix} -i\eta_B^{co} e^{2i\delta_B^{co} z} & -i\eta_{B,1}^{cl} e^{2i\delta_{B,1}^{cl} z} & \dots & -i\eta_{B,\nu}^{cl} e^{2i\delta_{B,\nu}^{cl} z} \\ -i\eta_{B,1}^{cl} e^{2i\delta_{B,1}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -i\eta_{B,\mu}^{cl} e^{2i\delta_{B,\mu}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$U_{22} = \begin{pmatrix} -i(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) & -i\eta_{L,1}^{cl} e^{2i\delta_{L,1}^{cl} z} & \dots & -i\eta_{L,\mu}^{cl} e^{2i\delta_{L,\mu}^{cl} z} \\ -i\eta_{L,1}^{cl} e^{-2i\delta_{L,1}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -i\eta_{L,\mu}^{cl} e^{-2i\delta_{L,\mu}^{cl} z} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Les conditions initiales du système sont : $\vec{A}(0) = (1 \ 0 \dots 0)^T$ et $\vec{B}(L) = (0 \ 0 \dots 0)^T$. Pour calculer le spectre en transmission de la structure FBG+LPG, nous employons la même méthode que celle utilisée pour le calcul du spectre du FBG.

Dans la figure 4.11, un exemple de spectre en transmission d'une structure FBG+LPG est tracé. Les paramètres choisis sont ceux exposés en (4.16). Les longueurs des deux réseaux sont choisies à 2,5 cm, les indices effectifs moyens des réseaux $\delta\bar{n}_1^B$ et $\delta\bar{n}_1^L$ sont égaux à 1.10^{-4} . Les pas des réseaux sont fixés à $570 \mu m$ pour le LPG et à $535 nm$ pour le FBG.

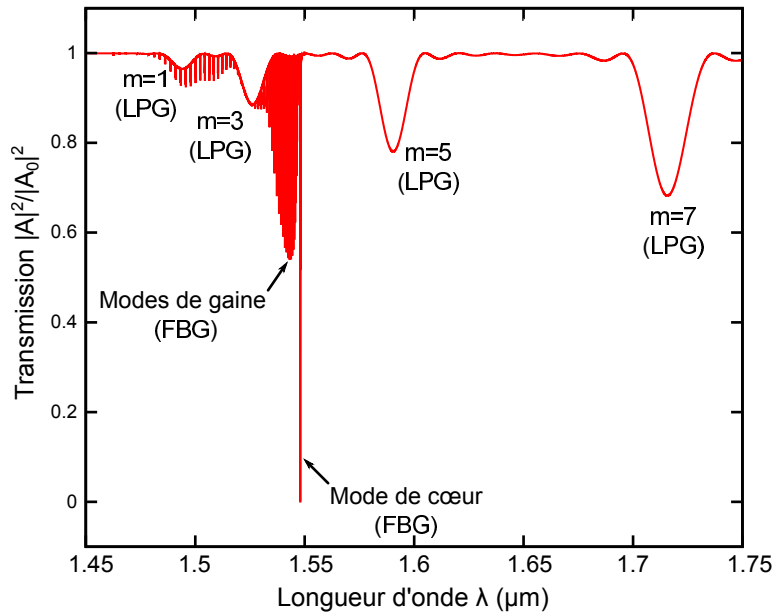


FIGURE 4.11: Spectre en transmission d'une structure FBG+LPG calculé pour les paramètres (4.16). Le spectre comporte les résonances des deux réseaux.

4.2.5 Cas de la structure optimisée

Précédemment, nous avons déterminé les paramètres optimaux du capteur afin qu'il réponde au cahier des charges. Cette optimisation a été réalisée pour les longueurs d'onde de résonance suivantes : $\lambda_B = 1,45 \mu m$ et $\lambda_{LPG}^m = 1,55 \mu m$. Or nous avons constaté que la superposition du FBG et du LPG décalait ces longueurs d'onde. Par conséquent, le fait de superposer un FBG sur un LPG peut avoir des répercussions néfastes sur les performances métrologiques de notre capteur. Dans cette section nous cherchons à évaluer les effets de la superposition des deux réseaux sur les facultés du capteur à mesurer les déformations ϵ_r et ϵ_z . Pour ce faire, nous analyserons l'évolution de trois caractéristiques du capteur qui sont : les sensibilités des réseaux aux déformations, la linéarité des réponses aux déformations et les résolutions sur les mesures de ϵ_r et ϵ_z .

Pour comprendre pourquoi les longueurs d'onde λ_B et λ_{LPG}^m se décalent, il est nécessaire de revenir aux équations couplées relatives à cette structure (équations (4.21)-(4.24)). À proximité de la longueur d'onde λ_{LPG}^m , seule la résonance du LPG est présente dans le spectre en transmission du capteur qui se comporte alors comme un LPG qui couple le mode de cœur incident à un mode de gaine hybride co-propagatif. Dans ces conditions les amplitudes B^{co} et B^{cl} sont nulles et les conditions de résonance des réseaux vérifient : $\delta_B^{cl}, \delta_B^{co} \gg \delta_L^{cl} \simeq 0$. Les équations couplées (4.21)-(4.24) du capteur peuvent ainsi se simplifier par :

$$\frac{\partial A^{co}}{\partial z} = iA^{co}(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) + i\frac{m_L}{2}\kappa_{L,1\nu}^{cl}A_\nu^{cl}e^{-2i\delta_{L,\nu}^{cl}z} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial A_\nu^{cl}}{\partial z} = iA^{co}\frac{m_L}{2}\kappa_L^{cl}e^{2i\delta_L^{cl}z} \quad (4.31)$$

On retrouve les équations couplées des LPG standards à l'exception de l'ajout du terme $i\kappa_B^{co}A^{co}$ dans l'équation (4.30). C'est ce terme supplémentaire qui est responsable du décalage de la résonance du LPG vers les plus grandes longueurs d'onde. Précisons toutefois que ce terme n'a aucun effet sur l'enveloppe de la résonance du LPG. La détermination de λ_{LPG}^m dans la structure FBG+LPG est donc équivalente à résoudre l'équation de résonance d'un LPG seul dont l'indice effectif moyen du réseau vérifie : $\delta\overline{n_1} = \delta\overline{n_1}^B + \delta\overline{n_1}^L = 2.10^{-4}$.

La résonance du FBG est elle aussi décalée à cause de la superposition des deux réseaux. Notons toutefois que le décalage de λ_B est faible comparé à celui de λ_{LPG}^m . Il vaut environ 2 nm pour le FBG et 50 nm pour le LPG. À proximité de λ_B , le capteur se comporte comme un FBG qui couple le mode de cœur incident à son homologue contra-propagatif. Ainsi, les amplitudes des modes de gaine A_ν^{cl} et B_μ^{cl} sont nulles et les conditions de résonance des réseaux vérifient : $\delta_B^{cl}, \delta_L^{cl} \gg \delta_B^{co} \simeq 0$. Les équations du capteur peuvent être allégées de la façon suivante :

$$\frac{\partial A^{co}}{\partial z} = iA^{co}(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co}) + i\kappa_B^{co}B^{co}\frac{m_B}{2}e^{-2i\delta_B^{co}z} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial B^{co}}{\partial z} = -i(\kappa_L^{co} + \kappa_B^{co})B^{co} - i\frac{m_B}{2}\kappa_B^{co}A^{co}e^{2i\delta_B^{co}z} \quad (4.33)$$

Les équations (4.32) et (4.33) sont similaires aux équations couplées des FBG classiques, à l'exception des termes supplémentaires $i\kappa_L^{co}A^{co}$ dans l'équation (4.32) et $-i\kappa_L^{co}B^{co}$ dans l'équation (4.33). Ces termes sont responsables du décalage de λ_B , toutefois ils ne modifient ni l'amplitude et ni la largeur de la résonance de Bragg. La détermination de λ_B dans la structure LPG+FBG est donc équivalente à résoudre l'équation de résonance d'un FBG seul dont l'indice effectif moyen vaut : $\delta\overline{n_1} = \delta\overline{n_1}^B + \delta\overline{n_1}^L = 2.10^{-4}$.

Ainsi, étudier le comportement de la structure juxtaposant un FBG et un LPG est équivalent à étudier indépendamment les comportements d'un FBG et d'un LPG dont les indices effectifs moyens sont les doubles de ceux des réseaux présents dans la structure. À l'aide de notre méthode, nous

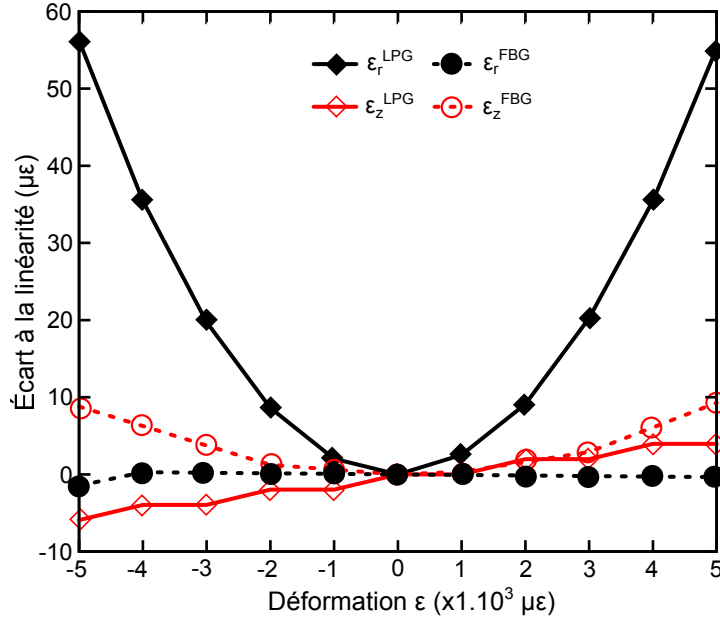


FIGURE 4.12: Décalage des longueurs d'onde de résonance du FBG et du LPG en fonction des déformations radiales ϵ_r et axiales ϵ_z .

déterminons à nouveau les sensibilités des réseaux aux déformations en considérant $\delta\overline{n_1} = 2.10^{-4}$ pour le FBG et le LPG. Dans ces conditions, les sensibilités du FBG aux déformations ϵ_r et ϵ_z valent respectivement $\alpha_{1r} = 0,555 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et $\alpha_{1z} = 1,068 \text{ pm}/\mu\epsilon$. Pour le LPG1, la sensibilité à la déformation radiale s'établit à $\alpha_{2r} = -1,974 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et la sensibilité à la déformation axiale est égale à $\alpha_{2z} = 0,506 \text{ pm}/\mu\epsilon$. La valeur de D est légèrement modifiée, elle est évaluée à $1,827 \text{ pm}^2/\mu\epsilon^2$ soit une variation relative de 4,4% par rapport à la valeur optimale de $1,75 \text{ pm}^2/\mu\epsilon^2$. Les résolutions du capteur sont peu affectées, elles s'établissent aux valeurs suivantes : $\Delta\epsilon_r = 0,86 \mu\epsilon$ et $\Delta\epsilon_z = 1,38 \mu\epsilon$. Enfin, les linéarités des réponses du capteur, sont légèrement détériorées mais elles restent toutefois acceptables. Un écart relatif maximal de 1,2 % est relevé entre la réponse réelle du capteur aux déformations et sa régression linéaire (voir figure 4.12).

En résumé, la superposition du réseau FBG sur le LPG induit un décalage des longueurs d'onde de résonance λ_B et λ_{LPG}^m . Ces décalages modifient légèrement les sensibilités, la résolution des mesures et la linéarité des réponses du capteur sans remettre en cause la capacité du capteur à mesurer les déformations. En effet, les caractéristiques métrologiques du capteur varient peu lorsque la superposition des deux réseaux est prise en compte.

4.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons dimensionné numériquement un capteur de déformations à fibre optique dans le but de réaliser des mesures discriminées de la déformation radiale et de la déformation axiale au sein d'un matériau hôte. Le capteur se compose de la juxtaposition d'un FBG et d'un LPG inscrits à l'intérieur du cœur d'une fibre optique double gaines. Le cahier des charges imposait une réponse linéaire du capteur aux déformations et une résolution sur la mesure de la déformation axiale similaire à celle des jauges de déformations classiques, à savoir : $\Delta\epsilon_z = 1 \mu\epsilon$. Nous avons, dans un premier temps, sélectionné parmi tous les paramètres, ceux qui avaient le plus d'influence sur les propriétés spectrales du capteur. Les paramètres retenus sont le rayon de la gaine interne a_2 et le pas du LPG Λ_{LPG} . On a ensuite fait varier ces paramètres afin de trouver les configurations $\{a_2, \Lambda_{\text{LPG}}\}$

qui permettent de répondre au mieux au cahier des charges imposé. Plusieurs configurations ont été retenues. Les configurations les plus prometteuses sont celles associées aux modes de gaine 1 et 3. Elles ont l'avantage de présenter les plus petits rayons a_2 et les coefficients de couplage les plus élevés.

Les dimensionnements obtenus permettent de mesurer la déformation radiale avec une résolution de $0,85 \mu\epsilon$ et la déformation axiale avec une résolution de $1,4 \mu\epsilon$. La résolution du capteur sur la mesure de ϵ_z est comparable à la résolution de $1 \mu\epsilon$ des capteurs FBG conventionnels. Ce résultat est une véritable avancée, puisque les capteurs de déformations basés sur l'utilisation de FBG sont incapables de discriminer les déformations axiales et radiales. La réponse des capteurs est linéaire dans la gamme de déformations $[-5000 \mu\epsilon; 5000 \mu\epsilon]$. Un écart de linéarité de moins de 1 % est relevé dans cette gamme de déformations. Toutes ces caractéristiques font de ces capteurs des dispositifs très efficaces pour la mesure de déformations à l'intérieur des structures. Il nous reste maintenant à vérifier si les configurations obtenues sont sensibles ou non aux courbures. Ce dernier point sera l'objet du Chapitre 5.

Chapitre 5

Réponse des réseaux fibrés à la courbure

Sommaire

5.1	Généralités sur les courbures	113
5.2	État de l'art sur la modélisation des effets de courbure sur les modes guidés	116
5.2.1	Méthode perturbative	118
5.2.2	« Conformal Mapping »	126
5.2.3	Transformation tensorielle	129
5.2.4	Modélisation de la fibre courbée dans un repère axisymétrique	132
5.2.5	Comparaison des méthodes de modélisation	133
5.3	Modélisation d'une fibre courbée	135
5.3.1	Géométrie du modèle numérique	135
5.3.2	Maillage du modèle numérique	137
5.4	Effets des courbures sur les réseaux fibrés	139
5.4.1	Effets des courbures sur les modes de gaine	139
5.4.2	Modélisation des réseaux courbés	143
5.4.3	Courbure des réseaux de Bragg	145
5.4.4	Courbure des LPG	149
5.5	Sensibilité aux courbures des capteurs dimensionnés dans le Chapitre 4	153
5.6	Conclusion du chapitre	160

5.1 Généralités sur les courbures

Lorsqu'une fibre optique se courbe, elle perd sa symétrie cylindrique. La demi-portion de fibre située à l'extérieur de la courbure s'allonge tandis que l'autre moitié se raccourcit. Entre les deux parties, le long de l'axe neutre de la fibre, les caractéristiques optiques et géométriques de la fibre restent inchangées quelle que soit la courbure imposée. Ces changements géométriques conduisent à

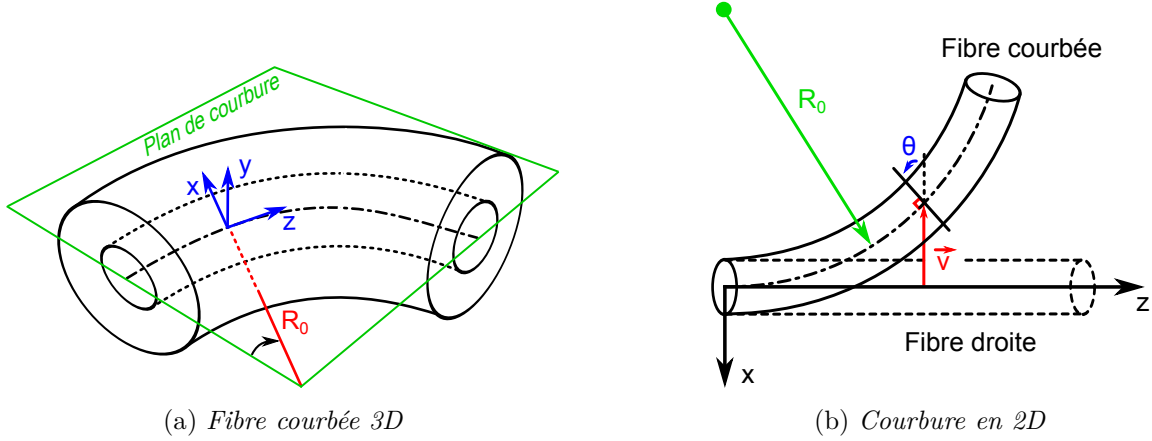


FIGURE 5.1: Modification de la géométrie de la fibre lorsqu'elle est courbée.

l'apparition de contraintes mécaniques. La matière localisée à l'intérieur de la courbure se comprime tandis qu'à l'extérieur elle s'étire.

Dans le cas où la fibre subit une courbure pure dans le plan (x, z) (c.f figures 5.1), le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ de la fibre courbée s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{R_0} E \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où R_0 est le rayon de courbure de la fibre, E le module de Young de la fibre et x la variable spatiale transverse dans le plan de courbure. Pour obtenir cette expression, on considère l'angle θ de rotation de section petit. Il en est de même pour les composantes du tenseur de déformation. L'hypothèse d'un angle θ petit nous permet de négliger les termes σ_{xz} , σ_{zx} et σ_{xx} . On a alors $\frac{d\theta}{dz} \simeq \frac{1}{R_0}$. Le domaine de validité de cette hypothèse correspond à un rayon de courbure supérieur à dix fois le diamètre de la fibre.

La présence de ces contraintes mécaniques provoque une modification des indices de réfraction de la fibre par effet photoélastique [6] :

$$\tilde{n}_i = \begin{pmatrix} n_i & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 \\ 0 & 0 & n_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_i^x & 0 & 0 \\ 0 & \Delta n_i^y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta n_i^z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta n_i^x = \Delta n_i^y = -\frac{n_i^3 x}{2 R_0} [p_{12} - \nu (p_{11} + p_{12})] \\ \Delta n_i^z = -\frac{n_i^3 x}{2 R_0} [p_{11} - 2\nu p_{12}] \end{cases} \quad (5.3)$$

où n_1 est l'indice de réfraction du cœur et n_2 celui de la gaine en absence de contrainte. La quantité ν est le coefficient de Poisson de la fibre.

Le changement des indices de réfraction de la fibre induit des effets non négligeables sur les modes guidés. Dans une fibre courbée, les modes guidés suivent la trajectoire curviligne imposée par le guide d'onde. Les champs électromagnétiques des modes guidés se déforment du fait de la dissymétrie de la fibre [62, 63]. Pour les modes de cœur, ces déformations se traduisent par un décalage transverse accompagné d'une élévation de l'indice effectif si le mode se décale vers l'extérieur de la courbure et à une diminution dans le cas contraire.

Pour comprendre les effets provoqués par la courbure de la fibre sur les modes guidés, il est possible de simplifier la géométrie de la fibre courbée par l'application d'un « conformal mapping » [64]. Cette méthode consiste à appliquer une transformation sur les coordonnées de la fibre courbée afin d'obtenir une fibre droite de propriétés optiques équivalentes. Les informations relatives à la courbure sont stockées dans le profil d'indice de la fibre droite de façon à prendre en compte la variation des chemins optiques à travers la section de la fibre courbée :

$$n_i^{R_0} = n_{0i} \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \quad (5.4)$$

Ainsi, après transformation, le profil d'indice est incliné et cette inclinaison est d'autant plus grande que la courbure de la fibre est importante. La zone de plus faible indice équivaut à la partie de la fibre située à l'intérieur de la courbure, tandis que la région de plus haut indice correspond à la partie de la fibre localisée à l'extérieur de la courbure. Cette méthode sera décrite en détail dans la suite de ce chapitre. À ce stade, on se contente uniquement d'en donner les grandes lignes car elle permet de simplifier la compréhension des effets de la courbure de la fibre sur les modes guidés.

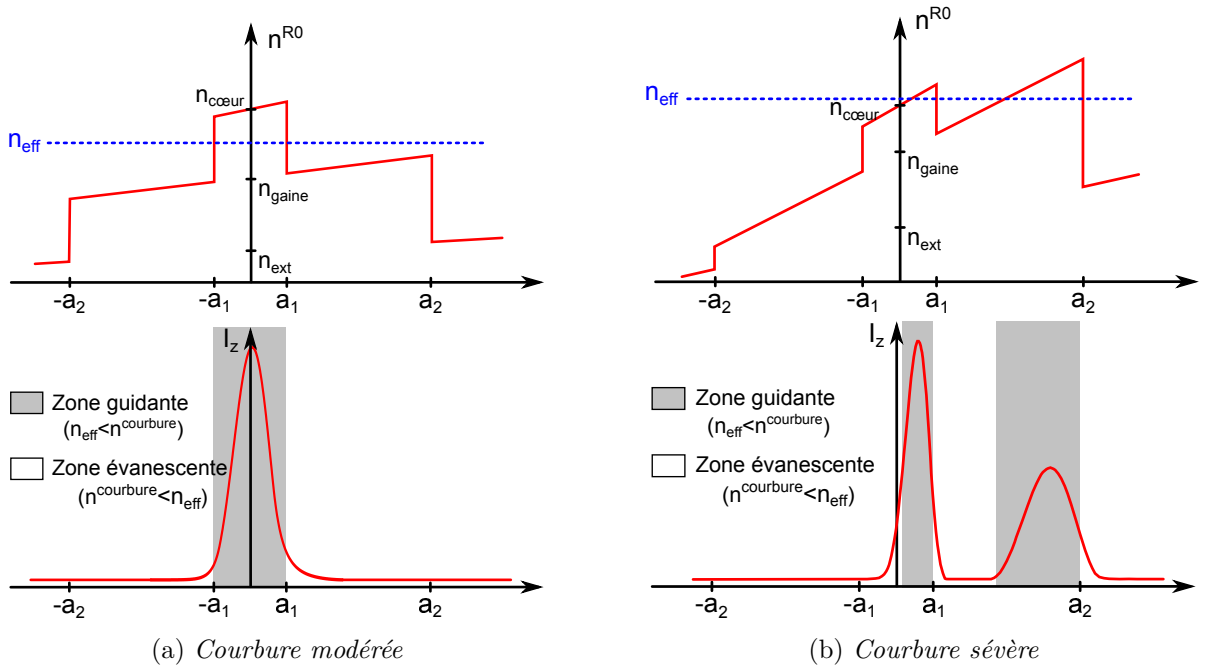


FIGURE 5.2: Conséquences des courbures sur les modes guidés.

Nous schématisons dans la figure 5.2, les profils d'indice associés à deux courbures différentes. Dans le cas de la figure 5.2a, la courbure de la fibre est modérée. Dans cette configuration le mode satisfait les conditions de guidage en tout point du cœur (i.e $n_{\text{gain}} < n_{\text{eff}} < n_{\text{cœur}}$). Il est par conséquent peu affecté par la courbure de la fibre, un léger décalage de la structure modale vers l'extérieur de la courbure est constaté (voir figure 5.3).

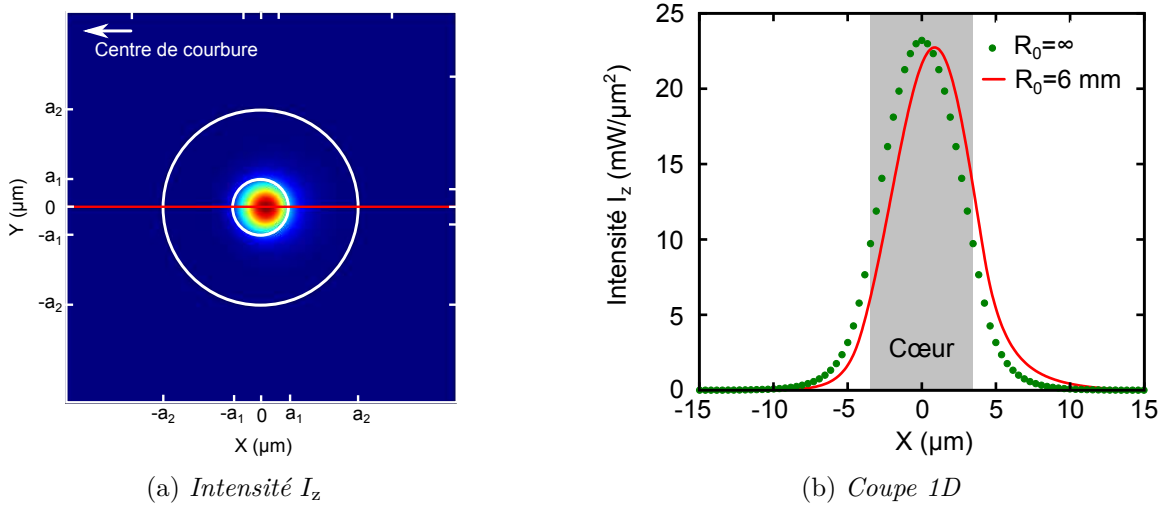


FIGURE 5.3: *Effet d'une courbure modérée sur la distribution spatiale du mode de cœur fondamental.*

Dans le cas de la figure 5.2b, la courbure de la fibre est plus prononcée. Les conditions de guidage à l'intérieur du cœur ne sont que partiellement satisfaites. De ce fait, le mode est guidé par une portion réduite du cœur. La réduction de l'aire de guidage conduit à une réorganisation des champs électromagnétiques du mode à un tel point qu'il devient difficile de l'identifier visuellement. Ce type de modes est appelé « whispering gallery mode » en référence aux modes de cavité confinés à proximité des parois des résonateurs en anneau [65]. Il est possible d'estimer approximativement le rayon de courbure auquel le mode guidé devient un « whispering gallery mode ». Ce rayon de courbure particulier est noté R_c , il est calculé à partir de (5.4) et en posant $n_{\text{eff}} = n_{\text{cœur}}^{R_0}(-a_1)$ [65] :

$$n_{\text{eff}} = n_{\text{cœur}} \left(1 - \frac{a_1}{R_0} \right) \quad (5.5)$$

$$\Leftrightarrow R_c = \frac{a_1}{n_{\text{cœur}} - n_{\text{eff}}}$$

Outre la modification des conditions de guidage à l'intérieur du cœur, le mode est également guidé localement par la gaine. Ainsi, le mode de cœur est couplé à des modes de gaine occasionnant des pertes sur la puissance lumineuse transmise [66, 67, 68]. Le rayon de courbure à partir duquel ces pertes commencent à apparaître est évalué qualitativement à partir de (5.4) et en posant $n_{\text{eff}} = n_{\text{gaine}}^{R_0}(a_1)$:

$$n_{\text{eff}} = n_{\text{gaine}} \left(1 + \frac{a_2}{R_0} \right) \quad (5.6)$$

$$\Leftrightarrow R_0^{\text{perte}} = \frac{a_2}{n_{\text{eff}} - n_{\text{gaine}}}$$

Un exemple de mode soumis à de telles conditions est tracé dans la figure 5.4.

Les relations (5.5) et (5.6) présentent l'avantage de donner une estimation de façon simple et rapide des rayons de courbure auxquels les modes de cœur subissent des pertes ou se transforment en « whispering gallery modes ». De plus, elles permettent d'expliquer en partie l'origine de la sensibilité des modes de cœur aux courbures. Ainsi, un mode avec un indice effectif proche de n_1 sera plus susceptible de se transformer en « whispering gallery mode » en cas de faible courbure de la fibre. À l'inverse, un mode avec un indice effectif proche de n_2 aura tendance à subir des pertes pour une légère incurvation du guide d'onde.

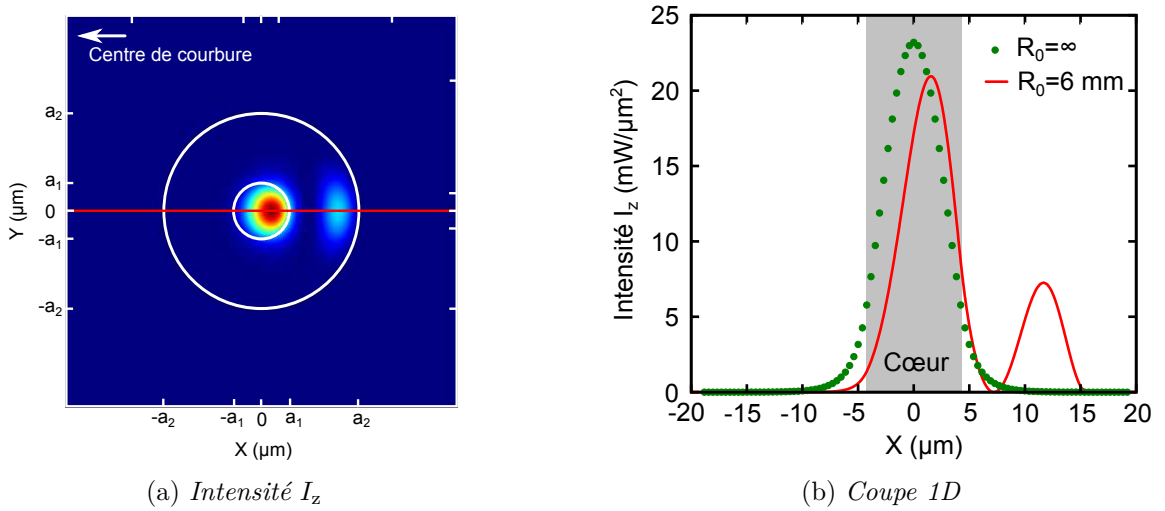


FIGURE 5.4: Effet d'une courbure sévère sur la distribution spatiale du mode de cœur fondamental.

Toutefois, la sensibilité des modes de cœur aux courbures n'est pas liée uniquement à la valeur de leur indice effectif mais elle dépend également de leur état de polarisation et de leur orientation [65, 69]. En effet, quand la fibre est courbée, elle devient anisotrope. La polarisation des modes évoluent et elle tend à se linéariser avec la diminution de R_0 [65, 69]. Les contraintes mécaniques induites par la courbure conduit à l'apparition d'une biréfringence à l'intérieur de la fibre. Les modes habituellement dégénérés ne le sont plus quand la fibre est courbée. Ils se polarisent linéairement suivant deux directions orthogonales, l'une contenue dans le plan de courbure, l'autre normale à ce plan. Pour illustrer nos propos, nous montrons sur la figure 5.5, l'évolution de l'état de polarisation du mode de cœur TE_{01} en fonction du rayon de courbure R_0 . Sur ces figures la direction de polarisation est indiquée par des flèches blanches.

5.2 État de l'art sur la modélisation des effets de courbure sur les modes guidés

Dès l'apparition des premières fibres optiques dans les années 70, on s'intéressa à l'impact des courbures sur la qualité des signaux qu'elles transmettaient. Cet intérêt s'explique en partie par le développement de dispositifs fibrés de plus en plus compacts. La diminution de l'encombrement des dispositifs au fil des années impliqua des courbures de fibre de plus en plus sévères, occasionnant des pertes qu'il a fallu évaluer théoriquement.

Pour modéliser la courbure d'une fibre optique on assimile la fibre à deux cylindres concentriques courbés (voir figure 5.6a). L'approche la plus intuitive pour modéliser numériquement cette courbure consiste à considérer la géométrie de la fibre en trois dimensions. Les équations de propagation des modes sont ensuite établies dans chaque région de la fibre et elles sont résolues numériquement à l'aide d'une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies. Ces méthodes numériques consistent à discrétiser la géométrie du problème en sous-éléments simples. Les équations de propagation sont résolues sur chacun des sous-éléments en prenant en compte les conditions aux limites du problème. La précision du calcul dépend directement de la taille de ces sous-éléments, plus ces derniers sont petits meilleure est la précision du calcul. Dans les problèmes d'optique, la taille des éléments ne doit pas excéder un cinquième de la longueur d'onde pour que la précision du calcul soit acceptable. Avec cet impératif, l'étude des modes guidés dans une fibre courbée

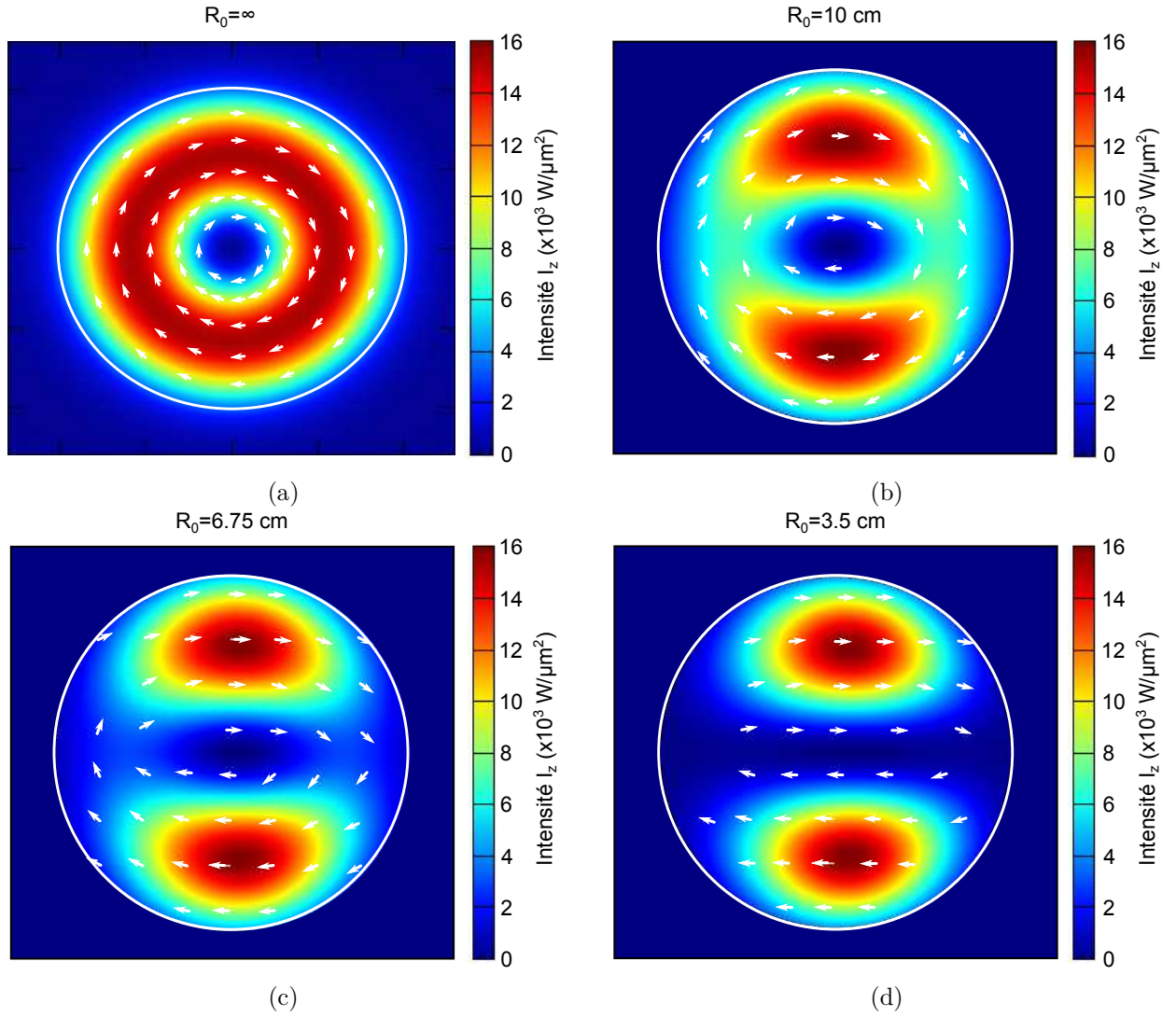


FIGURE 5.5: Évolution de la polarisation du mode de cœur TE_{01} avec la courbure de la fibre, le centre de courbure est localisée à gauche des figures.

de diamètre $D_0 = 30 \mu m$ et pour une longueur d'onde $\lambda = 1,55 \mu m$ requiert environ $100 \times 100 = 10000$ éléments dans la section de la fibre.

Pour modéliser la propagation des modes dans la fibre courbée, il est nécessaire de mailler la géométrie suivant la direction normale à la section de la fibre. Pour une fibre de longueur égale à $100 \mu m$, on a ainsi au total $100 \times 100 \times 320 = 3,2 \cdot 10^6$ éléments dans le modèle. Dans cette configuration, le nombre d'éléments est conséquent. À titre comparatif, un modèle numérique avec $2 \cdot 10^5$ à $3 \cdot 10^5$ éléments sollicite pratiquement toutes les ressources de notre station de calculs. Pourtant les spécificités de cette machine sont loin d'être insignifiantes soient : 8 CPUs et 32 Go de RAM. À moins d'avoir des ressources de calculs considérables, il semble impossible d'étudier les modes guidés dans une fibre courbée avec un modèle en trois dimensions.

Pour réduire le nombre d'éléments, il peut être envisagé d'utiliser les symétries du problème. En regardant la figure 5.6a, on s'aperçoit que la fibre courbée possède un plan de symétrie qui coïncide avec le plan de courbure. La modélisation de la fibre courbée peut alors être réalisée sur une demi-section de la fibre. Malheureusement, cette approche ne permet pas de réduire suffisamment le nombre d'éléments dans le modèle qui s'établit toujours à une valeur critique de $1,6 \cdot 10^6$ éléments.

Après une brève revue de la littérature, deux types de solution semblent avoir été développés pour diminuer les efforts de calculs pour ce type de problème :

- La première solution consiste à abaisser les dimensions du problème de trois à deux. Dans cette configuration, l'étude des modes guidés dans la fibre courbée s'effectue dans la section de la fibre. Le nombre d'éléments nécessaire à la résolution du problème n'est alors que de 10000.
- La seconde solution consiste à s'affranchir des méthodes de résolutions numériques coûteuses en temps de calculs et en mémoire vive. Pour ce faire, l'étude des modes dans une fibre courbée s'exécute de façon semi-analytique. Cette approche est alors similaire à la méthode employée pour l'étude des modes guidés dans une fibre droite.

Dans la suite de cette section, nous proposons une revue approfondie des méthodes développées dans la littérature pour l'étude des fibres courbées. Le but est de mettre en évidence les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes. À la fin de cette section, un comparatif entre ces différentes méthodes est réalisé.

5.2.1 Méthode perturbative

L'une des premières méthodes à avoir vu le jour pour l'étude des courbures est la méthode perturbative. Cette méthode a l'avantage de permettre d'étudier les effets des courbures sur les modes guidés de façon semi-analytique. Ainsi, sa mise en application ne nécessite pas de machines de calculs performantes, un ordinateur grand public est suffisant pour étudier les phénomènes de courbure dans les guides d'onde.

La fibre considérée est une fibre à saut d'indice. Afin de simplifier notre étude, cette fibre est considérée comme faiblement guidante, c'est à dire que l'indice du cœur et l'indice de la gaine sont supposés être égaux [34]. Dans ces conditions, la variation du profil d'indice $n(x, y)$ n'est pas prise en compte dans la détermination des modes guidés. L'équation de propagation des modes vectorielle est donc équivalente à une équation scalaire :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} + k_0^2 n^2(x, y) \vec{E} &= -\vec{\nabla} \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} \varepsilon(x, y)}{\varepsilon(x, y)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \Delta E_i + k_0^2 n^2(x, y) E_i &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

où $i = x, y, z$ et $\varepsilon(x, y)$ est la permittivité diélectrique à travers la section de la fibre, elle est reliée à l'indice par $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 n^2(x, y)$. Sous l'hypothèse de faible guidage, les modes guidés solution de

l'équation scalaire (5.7) sont des modes du type TEM, c'est à dire que $E_z = H_z = 0$. Ils sont polarisés linéairement et ils sont notés $LP_{\ell m}$ en référence à leur état de polarisation (Linearly Polarized mode). Dans les faits ces modes n'ont pas de sens physique car un guide d'onde d'indices $n_1 = n_2$ est incapable de guider la lumière. Cependant, il a été démontré qu'ils pouvaient être employés pour la détermination des modes exacts dans une fibre optique, à condition que $n_1 \simeq n_2$ [34].

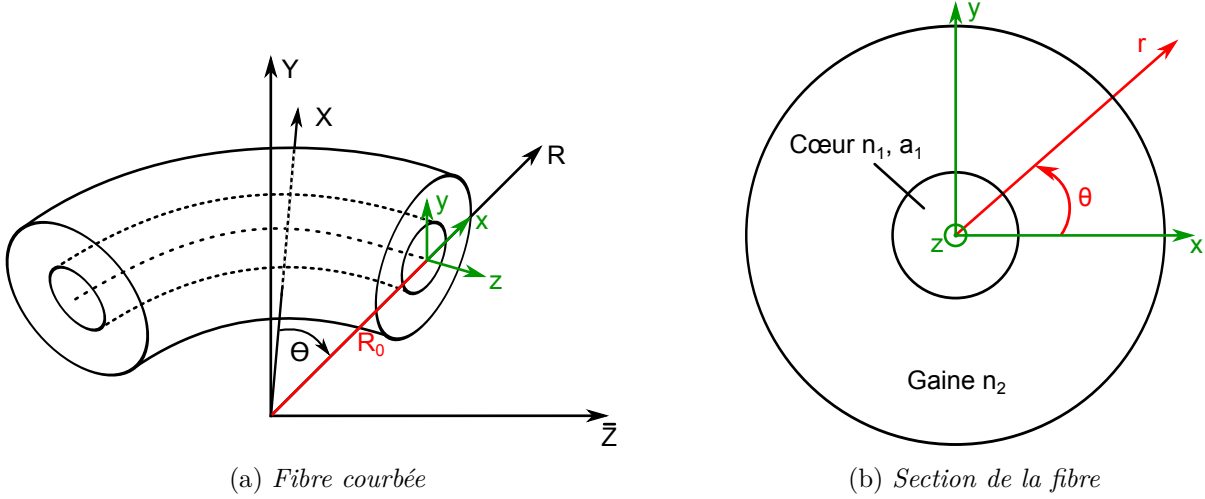


FIGURE 5.6: Schématisation de la courbure de la fibre.

Dans ce qui suit, la méthode perturbative sera développée uniquement pour les modes polarisés suivant la direction $\vec{e}_y$. Cette direction est normale au plan de courbure comme montrée dans la figure 5.6. Pour les modes polarisés suivant l'autre direction $\vec{e}_x$, nous invitons le lecteur à se reporter à la référence [70]. Ainsi, le champ électrique des modes est du type : $\vec{E} = E_Y \vec{e}_y$.

Pour établir l'équation de propagation dans la fibre courbée nous démarrons de l'équation de propagation scalaire (5.7) définie dans le système de coordonnées cartésiennes global (X, Y, Z) :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + k_0^2 n^2 \right\} E_Y = 0 \quad (5.8)$$

Nous réalisons ensuite un changement de coordonnées pour passer du système de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) au système de coordonnées cylindriques (R, Θ, Y) . Ces deux systèmes de coordonnées sont reliés l'un à l'autre par :

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Z^2} \\ \Theta = \text{atan} \left(\frac{Z}{X} \right) \\ Y = Y \end{cases} \quad (5.9)$$

Après changement de repère, l'équation de propagation (5.8) devient :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + k^2 n^2 \right\} E_Y = 0 \quad (5.10)$$

Dans le cas de la fibre courbée schématisée sur la figure 5.6a, les modes guidés sont supposés se propager suivant la direction $\vec{e}_\Theta$. Le champ électrique des modes est par conséquent de la forme $E_Y = E_{0Y}(R, Y) e^{i\beta\Theta}$. La détermination du champ électrique nécessite d'établir des relations de continuité entre le cœur et la gaine de la fibre. C'est pourquoi il est nécessaire d'établir l'équation de

propagation (5.10) dans le repère local (r, θ, z) de la section de la fibre. Le passage du système de coordonnées (R, Θ, Y) au système de coordonnées (r, θ, z) s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{cases} r = \sqrt{(R - R_0)^2 + Y^2} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{Y}{R - R_0}\right) \\ z = R_0\Theta \end{cases} \quad (5.11)$$

À l'aide des relations (5.11), l'équation de propagation (5.10) est exprimée dans le repère local (r, θ, z) :

$$\underbrace{\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 n^2 - \beta^2 \right\}}_{\textcircled{1}} \tilde{E}_Y + \underbrace{\frac{a_1}{R_0} \left\{ \frac{1}{4a_1 R_0} - \frac{2}{a_1} r \cos \theta \left[\frac{1}{4R_0^2} - \beta^2 \right] - \frac{3}{a_1^2} r^2 \cos^2 \theta \left[\frac{1}{4R_0^2} - \beta^2 \right] \right\}}_{\textcircled{2}} \tilde{E}_Y = 0 \quad (5.12)$$

Dans l'équation (5.12), les modes sont supposés se propager suivant la direction z , leur champ électrique s'écrit donc sous la forme suivante : $E_Y = E_{0Y}(r, \theta) e^{i\beta z}$. Le terme $\tilde{E}_Y$ est une légère modification de E_Y , tel que $\tilde{E}_Y = \frac{E_{0Y}}{\sqrt{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}} e^{i\beta z}$.

L'équation de propagation du mode guidé à l'intérieur de la fibre courbée est donnée par (5.12). Elle ne peut être résolue analytiquement en l'état. Cette équation se compose de 2 termes, le terme $\textcircled{1}$ est l'équation des modes guidés quand la fibre est en configuration droite (*c.f* Eq (5.7)). La solution analytique de cette équation est connue. Le terme $\textcircled{2}$, quant à lui, est responsable de la modification de la composante $\tilde{E}_Y$ induite par la courbure de la fibre.

Pour résoudre l'équation (5.12), la méthode perturbative est employée. Cette méthode consiste à considérer que les solutions β et $\tilde{E}_Y$ dans la fibre courbée sont des légères modifications de la constante β_0 et du champ E_0 évalués dans la fibre droite. Ainsi, ces solutions peuvent se décomposer en une série de puissances :

$$\begin{cases} \tilde{E}_Y = E_0 + \gamma E_1 + \gamma^2 E_2 + \dots \\ \beta^2 = \beta_0^2 + \gamma \beta_1^2 + \gamma^2 \beta_2^2 + \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

où $\gamma = \frac{a_1}{R_0}$. Remarquons, à ce stade, que les relations (5.13) sont valides physiquement à condition qu'elles convergent vers une limite finie. La quantité γ doit donc vérifier $\gamma \ll 1$ pour que la méthode perturbative soit applicable. La composante E_0 est de forme connue, elle s'exprime de la manière qui suit [34] :

$$E_0 = F_\ell(R) \begin{cases} \cos(\ell\theta) & \text{solution paire} \\ \sin(\ell\theta) & \text{solution impaire} \end{cases} \quad (5.14)$$

où :

$$F_\ell(R) \begin{cases} J_\ell(UR) / J_\ell(U) & \text{dans le cœur} \\ K_\ell(WR) / K_\ell(W) & \text{dans la gaine} \end{cases} \quad (5.15)$$

et :

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{a_1} \\ U &= \frac{2\pi}{\lambda} a_1 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{eff}}^2} \\ W &= \frac{2\pi}{\lambda} a_1 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

La constante de propagation β_0 des modes $LP_{\ell m}$ est obtenue à partir de la résolution de l'équation de dispersion :

$$\frac{J_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} = \frac{K_{\ell+1}(W)}{K_{\ell}(W)} \quad (5.17)$$

En insérant les solutions (5.13) dans l'équation (5.12), nous obtenons autant d'équations différentielles que l'ordre de γ considéré, nous avons ainsi jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} DE_0 = 0 \\ DE_1 = \beta_1^2 E_0 - \frac{2r}{R_0} \beta_0^2 \cos \theta E_0 \\ DE_2 = \beta_2^2 E_0 + \beta_1^2 E_1 - \frac{2r}{a_1} \beta_1^2 \cos \theta E_0 - \frac{2r}{a_1} \beta_0^2 \cos \theta E_1 - \frac{E_0}{4a_1^2} + \frac{3r^2}{a_1^2} \beta_0^2 \cos^2 \theta E_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

où $D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 n^2 - \beta^2$. Les équations (5.18) sont résolues une à une afin de déterminer les termes correctifs E_1 , E_2 , β_1 et β_2 . Ces termes sont ensuite insérés dans (5.13) pour en déduire le champ électrique et la constante de propagation du mode lorsque la fibre est courbée.

Le terme correctif β_1^2 est déduit de (5.18) par :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_1 DE_0 - E_0 DE_1 r dr = -\beta_1^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_0^2 r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{2r}{a_1} \cos \theta \beta_0 E_0 r dr = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta_1^2 = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{2a_1}{R_0} \cos \theta \beta_0^2 E_0^2 r dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_0^2 r dr} = 0} \quad (5.19)$$

Démonstration :

La première étape consiste à démontrer l'égalité suivante : $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_1 DE_0 - E_0 DE_1 r dr = 0$. Pour ce faire nous commençons par exprimer l'expression $E_1 DE_0 - E_0 DE_1$ dans le repère cartésien local (x, y, z) :

$$\begin{aligned} E_1 DE_0 - E_0 DE_1 &= E_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_1 \right) - E_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_0 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial x} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial x} E_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial y} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial y} E_0 \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

La formulation (5.20) est ensuite intégrée dans un plan infini normal à l'axe neutre de la fibre :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial x} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial x} E_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial y} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial y} E_0 \right) dx dy \quad (5.21)$$

Sachant que les termes E_0 et E_1 décroissent rapidement à zéro dans la gaine, il est correct de remplacer les bornes d'intégration infinies par des constantes a et b telles que $|a| \gg |a_1|$ et $|b| \gg |a_1|$. Nous pouvons ainsi réécrire (5.21) sous la forme suivante :

$$I = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial x} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial x} E_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial y} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial y} E_0 \right) dx dy \quad (5.22)$$

En appliquant le théorème de Green-Riemann : $\oint (Pdx + Qdy) = \iint_{S_\infty} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$, l'intégration (5.22) est finalement équivalente à :

$$I = \int_{-a}^{+a} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial x} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial x} E_0 \right) dx + \int_{+a}^{-a} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial x} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial x} E_0 \right) dx \\ + \int_{-b}^{+b} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial y} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial y} E_0 \right) dy + \int_{+b}^{-b} \left(E_0 \frac{\partial}{\partial y} E_1 - E_1 \frac{\partial}{\partial y} E_0 \right) dy = 0 \quad (5.23)$$

Étant donné (5.14), l'intégrale du numérateur de β_1^2 (5.19) est du type $\int_0^{2\pi} \cos\theta \cos(\ell\theta) d\theta$ ou $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin(\ell\theta) d\theta$, elle s'annule donc systématiquement. Le terme correctif β_1 est par conséquent nul quel que soit le champ E_0 considéré.

De façon similaire, le terme correctif β_2 est déduit de (5.18) par :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_2 DE_0 - E_0 DE_2 r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \left\{ -\beta_2^2 E_0^2 + \frac{2r}{a_1} \beta_0 \cos\theta E_0 E_1 + \frac{E_0^2}{4a_1^2} - \frac{3r^2}{a_2^2} \beta_0^2 \cos^2\theta E_0^2 \right\} r dr = 0 \quad (5.24)$$

on obtient ainsi :

$$\beta_2^2 = \left[2\beta_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r}{a_1} \cos\theta E_0 E_1 r dr - 3\beta_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \left(\frac{r}{a_1} \right)^2 \cos^2\theta E_0^2 r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{E_0^2}{4a_1^2} r dr \right] \\ \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_0^2 r dr \right]^{-1} \quad (5.25)$$

Le terme correctif E_1 est évalué en résolvant l'équation $DE_1 = \beta_1^2 E_0 - \frac{2r}{R_0} \beta_0^2 \cos\theta E_0$ (c.f Eq(5.18)). Cette équation a une solution du type :

$$E_1 = f_\ell(R) \begin{cases} \cos((\ell+1)\theta) \\ \sin((\ell+1)\theta) \end{cases} + g_\ell(R) \begin{cases} \cos((\ell-1)\theta) \\ \sin((\ell-1)\theta) \end{cases} \quad (5.26)$$

En insérant les expressions (5.26) dans l'équation DE_1 , nous obtenons deux nouvelles équations différentielles :

$$\begin{cases} f_\ell'' + \frac{f_\ell'}{R} - \frac{(\ell+1)^2}{R^2} f_\ell + U^2 f_\ell = -\beta_0^2 a_1^2 R F_\ell(R) \\ g_\ell'' + \frac{g_\ell'}{R} - \frac{(\ell-1)^2}{R^2} g_\ell - W^2 g_\ell = -\beta_0^2 a_1^2 R F_\ell(R) \end{cases} \quad (5.27)$$

Les équations (5.27) sont des équations de Bessel, elles admettent pour solution homogène des fonctions de Bessel :

$$f_\ell^h = \begin{cases} A_1 J_{\ell+1}(UR) & \text{dans le cœur} \\ B_1 K_{\ell+1}(WR) & \text{dans la gaine} \end{cases} \quad (5.28)$$

et :

$$g_\ell^h = \begin{cases} C_1 J_{\ell-1}(UR) & \text{dans le cœur} \\ D_1 K_{\ell-1}(WR) & \text{dans la gaine} \end{cases} \quad (5.29)$$

Les solutions particulières sont obtenues en posant $f_\ell^p = p_f f_\ell^h$ et $g_\ell^p = p_g g_\ell^h$. En injectant ces expressions dans les équations (5.27), nous obtenons deux nouvelles équations différentielles :

$$p_h'' + p_h' \left(\frac{2h_\ell^h}{h_\ell^h} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{\beta_0^2 a_1^2 R F_\ell(R)}{h_\ell^h} \quad (5.30)$$

En posant $y_h = p'_h$, les équations (5.30) se réécrivent sous la forme suivante :

$$y'_h + y_h P_h(R) = Q_h(R) \quad (5.31)$$

où $P_h = \left(\frac{2h'_\ell}{h_\ell} + \frac{1}{R} \right)$ et $Q_h = -\frac{\beta_0^2 a_1^2 R F_\ell(R)}{h_\ell^h}$. Cette équation différentielle est résolue en utilisant la méthode du facteur d'intégration, la solution de l'équation est du type :

$$y_h = \frac{1}{\text{IF}} \int \text{IF} Q_h(R) dR \quad (5.32)$$

où IF est le facteur d'intégration, il est défini par : $\text{IF} = e^{\int P_h(R) dR}$. Finalement, les solutions des équations (5.27) et (5.30) sont :

dans le cœur ($R \leq 1$) :

$$\begin{cases} p_f = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4A_1 U J_\ell(U)} R^2 \frac{J_{\ell-1}(UR)}{J_{\ell+1}(UR)} \\ f_{co} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4U J_\ell(U)} \left\{ \mathcal{A}_1 + R^2 \frac{J_{\ell-1}(UR)}{J_{\ell+1}(UR)} \right\} J_{\ell+1}(UR) \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} p_g = -\frac{\beta_0^2 a_1^2}{4C_1 U J_\ell(U)} R^2 \frac{J_{\ell+1}(UR)}{J_{\ell-1}(UR)} \\ g_{co} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4U J_\ell(U)} \left\{ \mathcal{C}_1 - R^2 \frac{J_{\ell+1}(UR)}{J_{\ell-1}(UR)} \right\} J_{\ell-1}(UR) \end{cases} \quad (5.34)$$

dans la gaine ($R > 1$) :

$$\begin{cases} p_f = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4B_1 W K_\ell(W)} R^2 \frac{K_{\ell-1}(WR)}{K_{\ell+1}(WR)} \\ f_{cl} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4W K_\ell(W)} \left\{ \mathcal{B}_1 + R^2 \frac{K_{\ell-1}(WR)}{K_{\ell+1}(WR)} \right\} K_{\ell+1}(WR) \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} p_g = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4D_1 W K_\ell(W)} R^2 \frac{K_{\ell+1}(WR)}{K_{\ell-1}(WR)} \\ g_{cl} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4W K_\ell(W)} \left\{ \mathcal{D}_1 + R^2 \frac{K_{\ell+1}(WR)}{K_{\ell-1}(WR)} \right\} K_{\ell-1}(WR) \end{cases} \quad (5.36)$$

où $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{D}_1$ sont des constantes à déterminer. Elles doivent garantir la continuité des fonctions f et g ainsi que de leur dérivée $\frac{\partial f}{\partial R}$ et $\frac{\partial g}{\partial R}$ à travers l'interface cœur/gaine. Les relations de continuité de f et de sa dérivée sont rassemblées dans le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f_{co}(R=1) = f_{cl}(R=1) \\ \frac{\partial f_{co}}{\partial R}(R=1) = \frac{\partial f_{cl}}{\partial R}(R=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W^2 \mathcal{A}_1 - U^2 \mathcal{B}_1 = U W^2 \frac{J_\ell(U)}{J_{\ell+1}(U)} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{W K_\ell(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{U J_\ell(U)} \right\} \\ \frac{J'_{\ell+1}(U)}{J_\ell(U)} \mathcal{A}_1 - \frac{K'_{\ell+1}(W)}{K_\ell(W)} \mathcal{B}_1 = (\ell+1) \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{W K_\ell(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{U J_\ell(U)} \right\} \end{cases} \quad (5.37)$$

La constante $\mathcal{A}_1$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{U^2 + W^2} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{W K_\ell(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{U J_\ell(U)} \right\} \left\{ -U W^2 \frac{J_\ell(U)}{J_{\ell+1}(U)} \frac{K'_{\ell+1}(W)}{K_\ell(W)} + (\ell+1) U^2 \right\} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 = \frac{1}{W^2} \left\{ W \frac{K_{\ell+1}(W)}{K_\ell(W)} - 2\ell \right\} \left\{ W \frac{K_\ell(W)}{K_{\ell+1}(W)} + 2(\ell+1) \right\}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

et la constante $\mathcal{B}_1$ s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{U^2 + W^2} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \right\} \left\{ W^2(\ell+1) - UW^2 \frac{J_{\ell}(U)}{J_{\ell+1}(U)} \frac{J'_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} \right\} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 &= \frac{1}{U^2} \left\{ U \frac{J_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} - 2\ell \right\} \left\{ 2(\ell+1) - U \frac{J_{\ell}(U)}{J_{\ell+1}(U)} \right\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Les relations de continuité de la fonction g et de sa dérivée sont équivalentes à :

$$\begin{cases} g_{co}(R=1) = g_{cl}(R=1) \\ \frac{\partial g_{co}}{\partial R}(R=1) = \frac{\partial g_{cl}}{\partial R}(R=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \mathcal{C}_1 - \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} \mathcal{D}_1 = \frac{WK_{\ell+1}(W)}{K_{\ell}(W)} \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \\ \frac{J'_{\ell-1}(U)}{J_{\ell}(U)} \mathcal{C}_1 - \frac{K'_{\ell-1}(W)}{K_{\ell}(W)} \mathcal{D}_1 = (1-\ell) \frac{UJ_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \end{cases} \quad (5.40)$$

La constante $\mathcal{C}_1$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \left\{ (1-\ell) \frac{UJ_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} \frac{K_{\ell}(W)}{WK_{\ell-1}(W)} + \frac{WK_{\ell+1}(W)}{K_{\ell}(W)} \frac{K'_{\ell-1}(W)}{K_{\ell}(W)} \right\} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \right\}^{-1} \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 &= - \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \left\{ \frac{UJ_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} \frac{K_{\ell-2}(W)}{K_{\ell}(W)} \right\} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (5.41)$$

et la constante $\mathcal{D}_1$ est déterminée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \left\{ \frac{J'_{\ell-1}(U)}{J_{\ell}(U)} \frac{WK_{\ell-1}(W)}{K_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} (1-\ell) \frac{UJ_{\ell+1}(U)}{J_{\ell}(U)} \right\} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \right\}^{-1} \\ \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 &= \left\{ \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right\} \left\{ \frac{WK_{\ell+1}(W)}{K_{\ell}(W)} \frac{J_{\ell-2}(U)}{J_{\ell}(U)} \right\} \left\{ \frac{K_{\ell-1}(W)}{WK_{\ell}(W)} - \frac{J_{\ell-1}(U)}{UJ_{\ell}(U)} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Pour des raisons de lisibilité, nous synthétisons dans le tableau 5.1 les expressions relatives au champ électrique des modes $LP_{\ell m}$ calculées dans la fibre courbée. Les résultats associés à la variation de la constante de propagation β avec la courbure de la fibre sont quant à eux résumés dans le tableau 5.2.

À titre illustratif, nous exposons dans la figure 5.7a, la norme du champ électrique du mode fondamental LP_{01} calculé pour plusieurs rayons de courbure R_0 . Ce mode n'est autre que le mode HE_{11} défini dans l'hypothèse de faible guidage [34]. En complément, nous présentons dans la figure 5.7b, la variation de l'indice effectif de ce même mode avec la courbure de la fibre. Ces résultats ont été obtenus par méthode perturbative.

Cette première méthode a été employée avec succès pour l'étude de la biréfringence dans les fibres monomodes courbées ou encore dans l'analyse des déformations subies par les modes lors de leur propagation dans une fibre courbée [62, 70]. Bien que cette méthode soit attrayante, son domaine de validité est restreint. En effet, elle est valide à condition que la fibre soit faiblement guidante et que le diamètre de la fibre soit petit par rapport au rayon de courbure de la fibre. De plus, le mode ne doit pas être un « whispering gallery mode » [65]. La structure électromagnétique des modes ne doit pas être trop affectée par la courbure de la fibre pour que cette méthode puisse être mise en œuvre. Sachant que les modes avec une large distribution d'intensité ont tendance à se déformer plus que les modes localisés à proximité de l'axe neutre de la fibre, cette méthode ne permet pas d'étudier les modes guidés dans une fibre multimode ou encore la réponse des modes de gaine à la courbure [71].

TABLE 5.1: Synthèse des expressions relatives au champ électrique des modes $LP_{\ell m}$ calculées dans la fibre courbée par la méthode perturbative.

	Dans le cœur	Dans la gaine
E_0	$E_0 = \frac{J_\ell(UR)}{J_\ell(U)} \begin{cases} \cos(\ell\theta) & \text{paire} \\ \sin(\ell\theta) & \text{impaire} \end{cases}$	$E_0 = \frac{K_\ell(WR)}{K_\ell(W)} \begin{cases} \cos(\ell\theta) & \text{paire} \\ \sin(\ell\theta) & \text{impaire} \end{cases}$
E_1	$E_1 = f_\ell(R) \begin{cases} \cos[(\ell+1)\theta] \\ \sin[(\ell+1)\theta] \end{cases} + g_\ell(R) \begin{cases} \cos[(\ell-1)\theta] & \text{paire} \\ \sin[(\ell-1)\theta] & \text{impaire} \end{cases}$ où : $f_{co} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4U J_\ell(U)} \left\{ \mathcal{A}_1 + R^2 \frac{J_{\ell-1}(UR)}{J_{\ell+1}(UR)} \right\} J_{\ell+1}(UR)$ $g_{co} = \frac{\beta_0^2 a_1^2}{4U J_\ell(U)} \left\{ \mathcal{C}_1 - R^2 \frac{J_{\ell+1}(UR)}{J_{\ell-1}(UR)} \right\} J_{\ell-1}(UR)$	
E_Y	$E_Y = \left(1 + \frac{a_1}{R_0} \cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \left(E_0 + \frac{a_1}{R_0} E_1\right)$	

 TABLE 5.2: Synthèse des expressions relatives à la constante de propagation β^2 des modes $LP_{\ell m}$ calculées dans la fibre courbée par la méthode perturbative.

β_0^2	La constante β_0^2 est obtenue à partir de la résolution de l'équation de dispersion des modes $LP_{\ell m}$: $\frac{J_{\ell+1}(U)}{J_\ell(U)} = \frac{K_{\ell+1}(W)}{K_\ell(W)}$ où $U^2 = (k_1^2 - \beta_0^2) a_1^2$ et $W^2 = (\beta_0^2 - k_2^2) a_1^2$
β_1^2	$\beta_1^2 = 0$
β_2^2	$\beta_2^2 = \left[2\beta_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r}{a_1} \cos\theta E_0 E_1 r dr - 3\beta_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \left(\frac{r}{a_1}\right)^2 \cos^2\theta E_0^2 r dr \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{E_0^2}{4a_1} r dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} E_0^2 r dr \right]^{-1}$
β^2	$\beta^2 = \beta_0^2 + \left(\frac{a_1}{R_0}\right)^2 \beta_2^2$

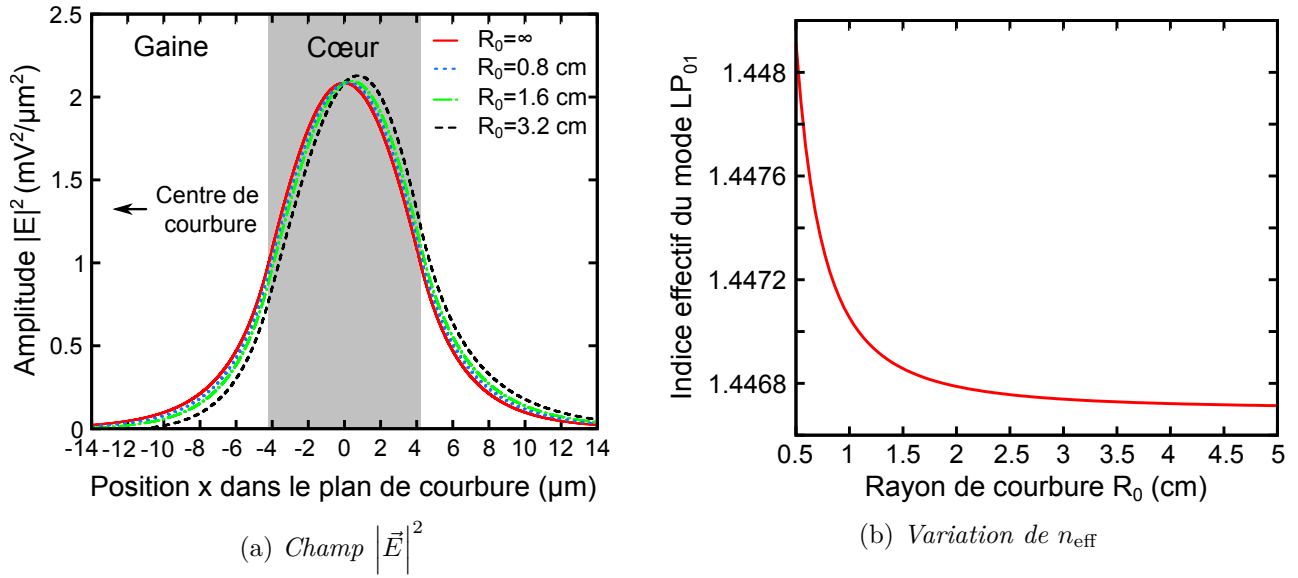


FIGURE 5.7: Changements du champ électrique et de l'indice effectif du mode LP_{01} induits par la courbure de la fibre. Ces résultats ont été obtenus par méthode perturbative.

5.2.2 « Conformal Mapping »

Le « conformal mapping » consiste à réaliser une transformation de coordonnées afin de changer une fibre courbée en une fibre droite de propriétés optiques équivalentes [64, 72]. Le principe du « conformal mapping » est illustré dans la figure 5.8. Initialement, la fibre courbée est repérée dans un

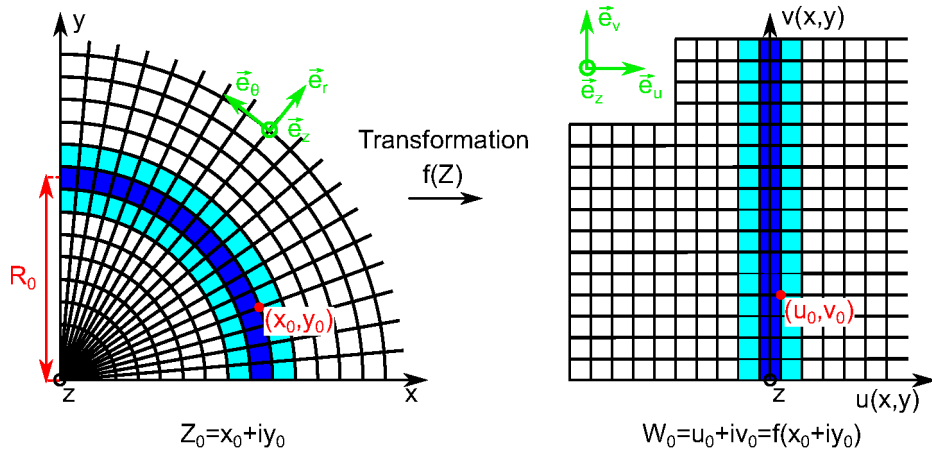


FIGURE 5.8: Principe du conformal mapping.

espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Une transformation conforme est appliquée à cet espace afin de le transformer en un nouvel espace de coordonnées (u, v, z) . Cette transformation entraîne un changement de la géométrie de la fibre. En choisissant soigneusement la transformation $f(Z)$ entre les deux espaces il est possible d'obtenir une fibre droite équivalente dont les propriétés optiques sont équivalentes aux propriétés de la fibre courbée initiale. Dans le cas présent la transformation adéquate est la suivante :

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (5.43)$$

où

$$\begin{aligned}
 f(x + iy) &= R_0 \ln \left(\frac{Z}{R_0} \right) \\
 &= R_0 \ln \left(\frac{x + iy}{R_0} \right) \\
 &= R_0 \ln \left(\frac{r e^{i\theta}}{R_0} \right) \\
 &= \underbrace{R_0 \ln \left(\frac{r}{R_0} \right)}_{u(x, y)} + i \underbrace{R_0 \theta}_{v(x, y)}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

$f(Z)$ est une fonction holomorphe dérivable, au sens complexe, en tout point $Z = x + iy$. Cette fonction satisfait de ce fait les conditions de Cauchy–Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{5.45}$$

Après transformation (5.44), le nouveau système de coordonnées (u, v, z) est relié à l'ancien système de coordonnées (x, y, z) par :

$$\begin{cases} u(x, y) = R_0 \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R_0} \right) \\ v(x, y) = R_0 \operatorname{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \\ z = z \end{cases} \tag{5.46}$$

Le « conformal mapping » est appliqué aux guides d'onde courbés dont l'indice de réfraction varie peu dans la section du guide. Comme pour la méthode perturbative, les modes sont faiblement guidés, ils sont par conséquent de polarisation linéaire et ils obéissent à l'équation d'onde scalaire :

$$\Delta E_i + k_0^2 n^2 E_i = 0 \tag{5.47}$$

Dans le développement suivant nous considérons les modes comme polarisés suivant la direction $\vec{e}_z$, on a ainsi $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$. La courbure du guide d'onde est supposée comme uniforme avec un rayon R_0 constant. En appliquant la transformation (5.44), nous exprimons l'opérateur Laplacien ∇^2 dans le nouveau système de coordonnées (u, v, z) :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

En invoquant les conditions (5.45), il est possible de simplifier l'expression (5.48) :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left| \frac{\partial f(Z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(Z)}{\partial y} \right|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \left| \frac{dW}{dZ} \right|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

En injectant l'expression (5.49) dans la relation (5.47), nous obtenons la nouvelle équation de propagation des modes dans le repère de coordonnées (u, v, z)

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left| \frac{dZ}{dW} \right|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(u, z) \right] \right\} E_z = 0 \tag{5.50}$$

où d'après (5.44) :

$$\left| \frac{dZ}{dW} \right|^2 = e^{\frac{2u}{R_0}} \tag{5.51}$$

Dans le système de coordonnées (x, y, z) , les modes se propagent dans la fibre courbée suivant la direction $\vec{e}_\theta$ (voir figure 5.8). Après transformation, les modes guidés dans le nouveau guide d'onde se propagent suivant la direction $\vec{e}_v$. L'équation d'onde scalaire (5.50) s'écrit alors :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + e^{\frac{2u}{R_0}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(u, z) e^{\frac{2u}{R_0}} - \beta^2 \right\} E_z = 0 \tag{5.52}$$

Dans le cas où le guide d'onde est invariant suivant la direction $\vec{e}_z$, l'équation (5.52) est équivalente à :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + k^2 n^2(u) e^{\frac{2u}{R_0}} - \beta^2 \right\} E_z = 0 \tag{5.53}$$

La relation (5.53) est l'équation de propagation des modes guidés par un guide d'onde planaire courbé. Cette équation est la même que celle établie dans un guide d'onde planaire droit à l'exception près que le profil d'indice est multiplié par un terme exponentiel. Ainsi, l'étude d'un guide d'onde planaire courbé est équivalent à étudier un guide d'onde planaire droit avec un profil d'indice équivalent prenant en compte la courbure de ce guide. Le profil d'indice équivalent est défini par $n_{\text{eq}} = n(u) e^{\frac{u}{R_0}}$, un exemple est tracé en figure 5.9. Notons que ce profil d'indice est incliné dans la section du guide de telle manière que les plus faibles indices sont localisés à l'intérieur de la courbure et les plus hauts indices à l'extérieur de la courbure. L'inclinaison du profil d'indice permet de prendre en compte la variation des chemins optiques due à la courbure du guide d'onde. Cette inclinaison est d'autant plus grande que le rayon de courbure du guide diminue. Au centre du guide d'onde, l'indice de réfraction reste inchangé par rapport au cas où le guide d'onde est droit.

Dans le cas de l'étude d'une fibre optique courbée, le facteur exponentiel devant la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ dans l'équation (5.52) empêche de réaliser la même procédure que dans le cas du guide d'onde planaire. Toutefois, en supposant que $a_1 \ll R_0$, il est possible de réécrire l'équation (5.52) sous une

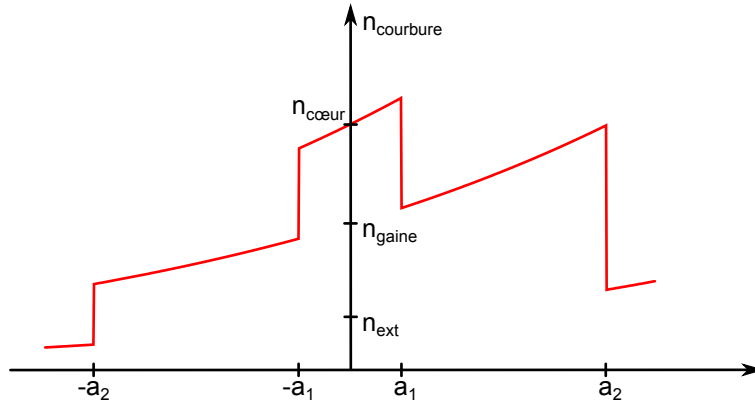


FIGURE 5.9: Exemple de profil d'indice obtenu par « conformal mapping ».

forme proche de l'équation de propagation scalaire établie dans une fibre optique droite. On a ainsi dans ces conditions :

$$e^{\frac{2u}{R_0}} \simeq 1 + \frac{2u}{R_0} \quad (5.54)$$

L'équation (5.52) est donc légèrement modifiée :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left(1 + \frac{2u}{R_0}\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2 \left(1 + \frac{2u}{R_0}\right) - \beta^2 \right\} E_z = 0 \quad (5.55)$$

En supposant maintenant que le champ électrique varie peu spatialement pour une distance de propagation équivalente à une longueur d'onde (*i.e* $\left|\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 E_z}{\partial v^2}\right| \simeq |k^2 n^2 E_z|$), nous pouvons négliger $\frac{2u}{R_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$ devant $\frac{2u}{R_0} k^2 n^2 E_z$, l'équation (5.56) devient finalement :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2 \left(1 + \frac{2u}{R_0}\right) - \beta^2 \right\} E_z = 0 \quad (5.56)$$

L'équation (5.56) est équivalente à l'équation de propagation des modes dans une fibre droite de profil d'indice $n_{eq} = n \left(1 + \frac{u}{R_0}\right)$, comme cela a été annoncée dans l'introduction de ce chapitre. Comme pour le guide d'onde plan, l'étude d'une fibre courbée est équivalente à étudier une fibre droite dont le profil d'indice est modifié afin de prendre en compte la courbure de la fibre. À titre d'illustration, nous présentons dans la figure 5.2 deux profils d'indice prenant en compte la courbure de la fibre.

L'emploi du « conformal mapping » est très largement répandu dans la littérature. Il présente en effet l'avantage de permettre la modélisation des fibres courbées en deux dimensions dans un simple repère cartésien. Les caractéristiques des modes sont ainsi obtenues numériquement par l'association du « conformal mapping » avec des méthodes numériques telles que la « beam propagation method » (BPM) [65, 73] ou l'analyse modale [74, 75]. Bien que cette méthode soit populaire, elle souffre des mêmes inconvénients que la méthode perturbative. La fibre doit vérifier la condition de guidage faible (5.47) et le rayon de courbure de la fibre doit être très grand devant le diamètre de la fibre.

5.2.3 Transformation tensorielle

Pour surmonter les limitations du « conformal mapping », Shyroki proposa une alternative basée sur les propriétés covariantes des équations de Maxwell [76, 77]. Sur le principe, sa méthode est analogue au « conformal mapping », elle consiste à transformer une fibre courbée en une fibre droite de propriétés optiques équivalentes. Les informations relatives à la courbure de la fibre sont ainsi stockées dans les

tenseurs de permittivité et de perméabilité de la fibre droite équivalente. Contrairement au « conformal mapping », cette méthode à l'avantage de n'émettre aucune hypothèse sur la fibre courbée excepté le fait que la fibre doit être uniformément courbée et qu'elle doit être composée d'un matériau isotrope.

La méthode des tenseurs repose sur l'écriture des équations de Maxwell sous forme covariante [78, 79]. Sous cette forme particulière, les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz. Dans ces conditions, il a été montré qu'un changement de système de coordonnées était équivalent à appliquer les transformations (5.57a) et (5.57b) sur les tenseurs de permittivité $\bar{\varepsilon}$ et de perméabilité $\bar{\mu}$ [76, 79].

$$\varepsilon^{i'j'} = |\det(J)|^{-1} J_i^{i'} J_j^{j'} \varepsilon^{ij} \quad (5.57a)$$

$$\mu^{i'j'} = |\det(J)|^{-1} J_i^{i'} J_j^{j'} \mu^{ij} \quad (5.57b)$$

où $J_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ est la matrice de transformation Jacobienne de l'ancien système de coordonnées x^i au nouveau système de coordonnées $x^{i'}$. Les expressions (5.57a)-(5.57b) peuvent être réécrites sous une forme matricielle :

$$\varepsilon' = |\det(J)|^{-1} J \varepsilon J^T \quad (5.58a)$$

$$\mu' = |\det(J)|^{-1} J \mu J^T \quad (5.58b)$$

Pour l'étude des fibres courbées, un changement de coordonnées doit être réalisé entre le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées cylindriques [76]. Ces deux systèmes sont liés entre eux par :

$$\begin{cases} u = z \\ v = \sqrt{x^2 + y^2} \\ w = R_0 \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (5.59)$$

Notons que cette transformation ne modifie ni la section de la fibre, ni la longueur de la fibre mesurée au centre de la section.

Contrairement à la méthode perturbative, l'approche des tenseurs ne modifie pas la forme de l'équation de propagation des modes. Après changement de coordonnées, les informations relatives à la courbure sont contenues uniquement dans les tenseurs de permittivité et de perméabilité de la fibre. La géométrie de la fibre reste, quant à elle, inchangée (voir figure 5.10).

Pour obtenir les tenseurs de permittivité et de perméabilité de la fibre optique droite équivalente, nous procédons de la manière qui suit. Nous considérons dans un premier temps une fibre en configuration droite. Sa géométrie est repérée par un système de coordonnées cartésiennes. Le matériau constituant la fibre est isotrope et homogène, de ce fait les tenseurs de permittivité et de perméabilité de la fibre s'écrivent sous la forme suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_C & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_C & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_C \end{pmatrix} \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_C & 0 & 0 \\ 0 & \mu_C & 0 \\ 0 & 0 & \mu_C \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

où ε_C et μ_C sont des constantes.

Nous appliquons ensuite à ces tenseurs les transformations (5.57a) et (5.57b). La matrice Jacobienne entre les deux systèmes de coordonnées est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\left(\frac{w}{R_0}\right) & \sin\left(\frac{w}{R_0}\right) & 0 \\ -\frac{R_0}{v} \sin\left(\frac{w}{R_0}\right) & \frac{R_0}{v} \cos\left(\frac{w}{R_0}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

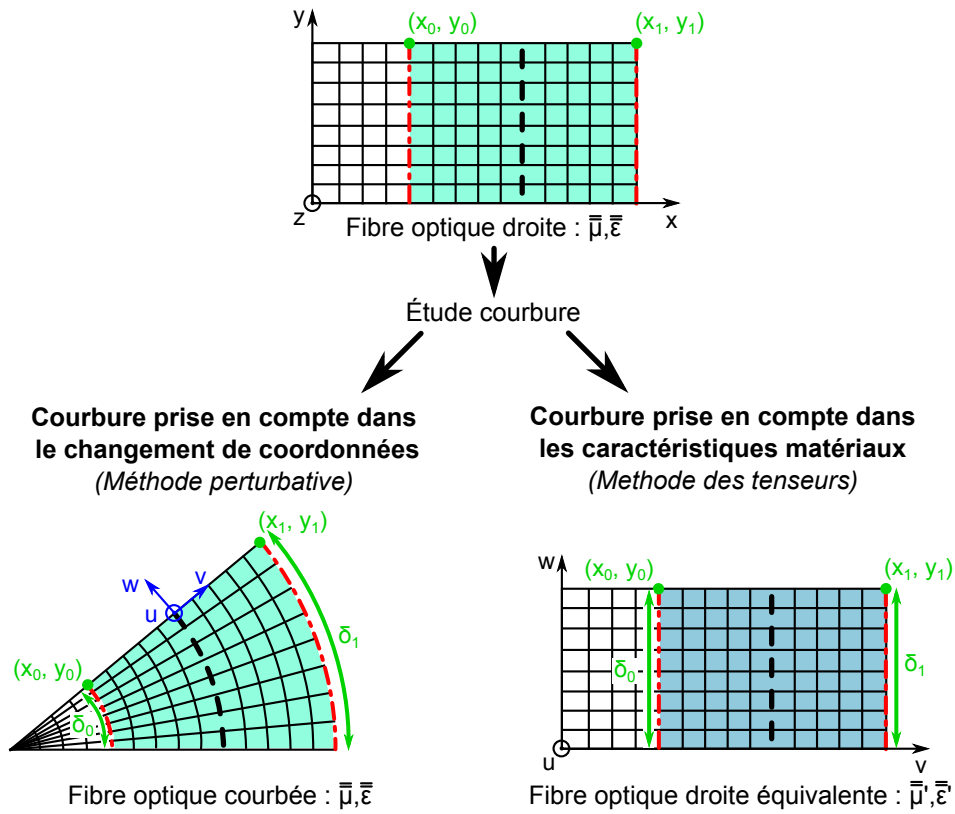


FIGURE 5.10: Les deux différentes approches pour la modélisation des fibres courbées : 1) on réalise un changement de coordonnées en conservant les caractéristiques matériaux ; 2) on conserve le système de coordonnées de départ et on modifie les caractéristiques matériaux. Dans les deux approches les distances optiques δ_0 et δ_1 sont équivalentes.

Nous obtenons ainsi les nouveaux tenseurs de permittivité et de perméabilité de la fibre droite équivalente. Leur expression prend en compte la courbure de la fibre :

$$\overline{\overline{\varepsilon'}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_C \frac{v}{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_C \frac{v}{R_0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_C \frac{R_0}{v} \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{\mu'}} = \begin{pmatrix} \mu_C \frac{v}{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_C \frac{v}{R_0} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_C \frac{R_0}{v} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

Nous posons ensuite $v' = v - R_0$ afin de faire correspondre l'origine du repère avec le centre de la section de la fibre, nous avons finalement :

$$\overline{\overline{\varepsilon'}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_C \left(1 + \frac{v'}{R_0}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_C \left(1 + \frac{v'}{R_0}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_C}{\left(1 + \frac{v'}{R_0}\right)} \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{\mu'}} = \begin{pmatrix} \mu_C \left(1 + \frac{v'}{R_0}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_C \left(1 + \frac{v'}{R_0}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_C}{\left(1 + \frac{v'}{R_0}\right)} \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

Les équations de Maxwell sous forme covariante sont de même forme que les équations de Maxwell écrites dans le système de coordonnées cartésiennes. Par conséquent, l'étude des fibres courbées avec cette approche ne nécessite pas de modifier la forme des équations de Maxwell préprogrammées dans les logiciels numériques commerciaux. Ainsi, l'étude d'une fibre courbée s'effectue en suivant la procédure suivante : 1) on construit la géométrie de la section de la fibre dans un espace de coordonnées cartésiennes ; 2) on définit pour chaque région de la fibre les tenseurs équivalents $\overline{\overline{\varepsilon'}}$ et $\overline{\overline{\mu'}}$; 3) puis on résout les équations de Maxwell établies dans le repère cartésien.

5.2.4 Modélisation de la fibre courbée dans un repère axisymétrique

Une dernière approche pour la modélisation des courbures consiste à considérer la fibre courbée comme un tore (voir figure 5.11).

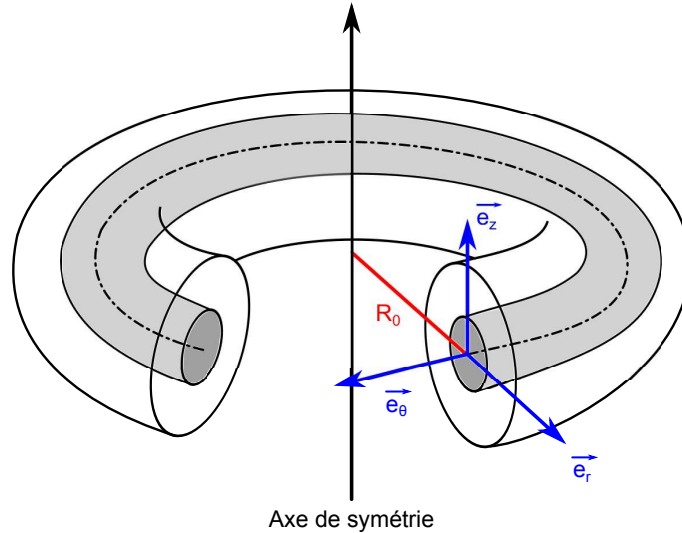


FIGURE 5.11: Assimilation de la fibre courbée à un tore.

La courbure de la fibre étant supposée régulière, l'étude des effets de courbure sur les modes peut être réalisée dans une section quelconque de ce tore. Les équations de propagation sont ainsi définies dans un repère axisymétrique et elles sont résolues par une analyse modale [80, 81, 82]. Les

informations relatives à la courbure sont directement stockées dans le système de coordonnées utilisé. Cette méthode à l'avantage de n'émettre aucune hypothèse sur la fibre courbée hormis le fait que sa courbure doit être régulière. De plus, contrairement aux autres méthodes, elle est la seule à pouvoir prendre en compte les contraintes mécaniques induites par la courbure de la fibre. Elle paraît être par conséquent la méthode la plus complète pour la modélisation des effets des courbures sur les modes guidés.

5.2.5 Comparaison des méthodes de modélisation

Nous écartons dès à présent la méthode perturbative et ce pour deux raisons. La première concerne la lourdeur des expressions du champ électrique des modes obtenues par cette approche. La seconde porte sur les limitations de la méthode perturbative appliquée à l'étude des effets de la courbure du guide d'onde sur les modes de gaine [71].

Pour comparer les trois méthodes restantes nous procédons de la manière qui suit. Nous considérons une fibre optique à saut d'indice et à double gaines. Le cœur de la fibre est monomode et la gaine extérieure est supposée d'extension infinie. Nous décidons de fixer la longueur d'onde à $1,55 \mu m$. Le rayon du cœur a_1 et le rayon de la gaine interne a_2 sont respectivement établis à $4,2 \mu m$ et $15 \mu m$. Les indices de réfraction du cœur, de la gaine interne et de la gaine extérieure sont notés respectivement n_1 , n_2 et n_3 . L'indice n_2 est calculé à l'aide de la relation de Sellmeier appliquée à la silice. Les indices restants sont quant à eux déduits de n_2 par les relations : $n_1 = 1.0036n_2$ et $n_3 = 0.95n_2$. Cette fibre est courbée avec un rayon de courbure noté R_0 .

La modélisation de cette courbure diffère selon la méthode employée. Pour le « conformal mapping » la géométrie de la section de la fibre est construite dans un repère cartésien en deux dimensions. La courbure de la fibre est prise en compte par le profil d'indice de la fibre, on obtient ainsi dans chaque région de la fibre :

$$n_i^{R_0} \simeq n_{0i} \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \quad (5.64)$$

où $i = 1, 2$ et 3 . Pour la méthode des tenseurs, la section de la fibre est également construite dans un repère cartésien en deux dimensions. Ce sont les tenseurs de permittivité relative $\bar{\epsilon}_r$ et de perméabilité $\bar{\mu}$ qui contiennent les informations relatives à la courbure. Ces tenseurs sont rappelés ci-dessous, ils sont définis dans chaque région i de la fibre :

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_i \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_i \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_i}{1 + \frac{x}{R_0}} \end{pmatrix} \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0}{1 + \frac{x}{R_0}} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

où ϵ_i et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du cœur et de la gaine lorsque la fibre est droite. Dans la dernière méthode qui consiste à assimiler la fibre optique à un tore, la courbure de la fibre est prise en compte par la résolution des équations de propagation des modes dans un système de coordonnées axisymétriques. La valeur des indices de réfraction définis dans la fibre courbée est identique à celle de la fibre droite.

Pour les trois méthodes, nous faisons varier le rayon de courbure de la fibre dans un intervalle compris entre 10 cm et 1 m par pas de 5 cm. À chaque itération nous procédons à une analyse modale dans la section de la fibre à l'aide du logiciel d'éléments finis COMSOL. L'indice effectif et les champs électromagnétiques des modes de cœur et des cents premiers modes de gaine sont déterminés. Pour éviter toute erreur numérique nous construisons un maillage identique pour les trois méthodes implémentées. Il se compose d'éléments de type triangulaire quadratique dont la taille n'excède pas $\frac{\lambda}{7}$ dans la région du cœur et $\frac{\lambda}{5}$ dans la région de la gaine.

Nous exposons dans la figure 5.12 les indices effectifs du mode de cœur et de deux modes de gaine calculés à l'aide des trois méthodes. Les indices calculés par la méthode des tenseurs sont notés $n_{\text{eff}}^{\text{Tens}}$, ceux déterminés par la méthode du « conformal mapping » sont mentionnés par $n_{\text{eff}}^{\text{Map}}$ et les indices obtenus par la méthode du repère axisymétrique sont identifiés par $n_{\text{eff}}^{\text{Axi}}$. Pour mettre en évidence les écarts existants entre les trois modèles nous décidons de soustraire les indices effectifs $n_{\text{eff}}^{\text{Tens}}$ et $n_{\text{eff}}^{\text{Map}}$ par l'indice effectif $n_{\text{eff}}^{\text{Axi}}$.

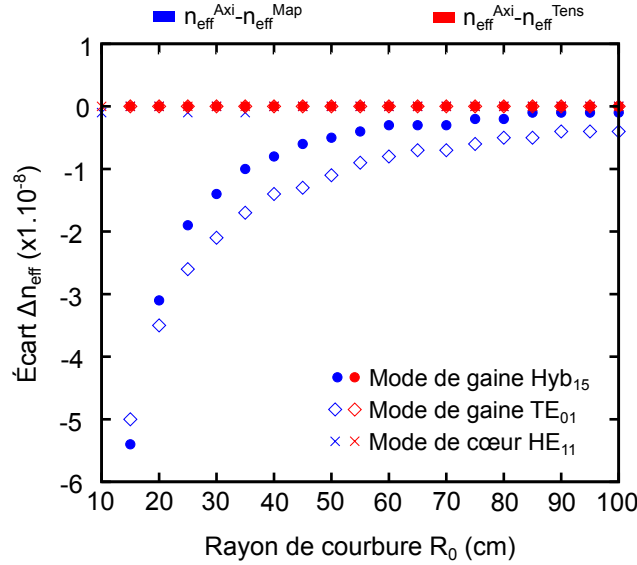


FIGURE 5.12: Écarts des indices effectifs calculés par 3 méthodes différentes.

Comme nous pouvons le voir dans la figure 5.12, la méthode des tenseurs est strictement équivalente à la méthode du repère axisymétrique. En effet, la différence d'indice $n_{\text{eff}}^{\text{Axi}} - n_{\text{eff}}^{\text{Tens}}$ est nulle quelle que soit la nature du mode et le rayon de courbure considéré. Ce n'est pas le cas pour la méthode basée sur le « conformal mapping ». Nous constatons effectivement un écart croissant entre ces deux méthodes lorsque R_0 diminue.

À ce stade, les méthodes basées sur la transformation tensorielle et sur la définition d'un repère axisymétrique semble les plus adaptées pour l'étude des courbures. En effet, la concordance des résultats entre ces 2 méthodes valide ces approches pour la modélisation des courbures. Cependant un dernier impératif doit être satisfait afin que le modèle soit le plus complet possible. La méthode utilisée pour la modélisation des courbures doit prendre directement en compte les contraintes mécaniques induites par la courbure de la fibre. Or ce dernier point ne peut être satisfait par la méthode des tenseurs à cause de l'anisotropie induite par la courbure (voir équations (5.2)) [76]. Pour ce qui est de l'autre méthode, la prise en compte des contraintes mécaniques induites par la courbure ne pose aucun problème. Il suffit simplement de définir directement les expressions des indices (5.3) dans les propriétés matériaux de la fibre à modéliser.

En résumé, il s'avère que la méthode consistant à approximer la fibre optique à un tore est la plus complète, et ce pour 2 raisons : 1) elle donne le résultat le plus précis sur la valeur des indices effectifs ; 2) elle est la seule méthode à prendre en compte précisément les contraintes mécaniques induite par la courbure de la fibre. Nous avons donc décidé d'employer cette méthode pour les modélisations de fibres courbées qu seront exécutées par la suite.

5.3 Modélisation d'une fibre courbée

Dans notre modélisation, les indices effectifs et les champs électromagnétiques des modes sont obtenus à partir de la résolution par la méthode des éléments finis des équations des modes guidés :

$$\nabla \times \bar{\bar{\mu}}_r^{-1} (\nabla \times E) - k_0^2 \bar{\bar{\epsilon}}_r E = 0 \quad (5.66)$$

où $\bar{\bar{\mu}}_r$ est le tenseur de perméabilité relative, il est relié à $\bar{\mu}$ par : $\bar{\bar{\mu}}_r = \bar{\mu}/\mu_0$. La résolution par la méthode des éléments finis est effectuée par le logiciel COMSOL[®]. Ce dernier est piloté par un programme Java que nous avons écrit afin d'automatiser les tâches et d'effectuer les calculs post-traitements.

5.3.1 Géométrie du modèle numérique

Nous considérons tout d'abord une fibre monomode et à saut d'indice dont la structure est schématisée en figure 5.13. Elle se compose d'un cœur de rayon a_1 et d'indice n_1 enveloppé dans une gaine d'indice n_2 et d'extension infinie. Pour faire le calcul par la méthode des éléments finis, le milieu extérieur est de section carrée dont le côté L est suffisamment grand pour qu'il puisse être considéré comme infini.

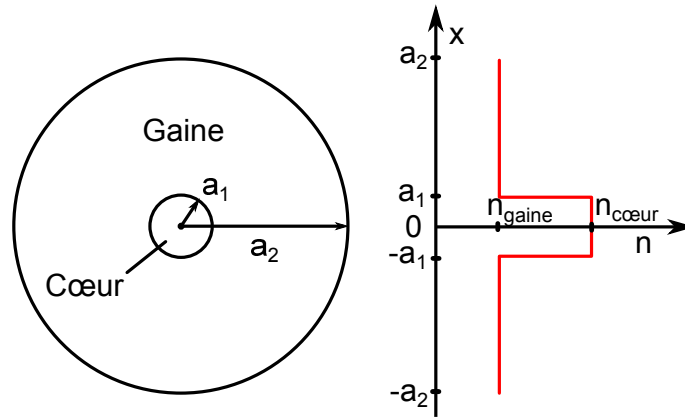


FIGURE 5.13: Géométrie et profil d'indice de la fibre considérée.

Cette fibre optique est courbée et nous supposons que sa courbure est uniforme. Dans ces conditions, cette fibre est assimilable à un tore dont le rayon R_0 est équivalent au rayon de courbure de la fibre (voir figure 5.14a). Le milieu extérieur est lui aussi torique mais de section carrée. L'invariance de la géométrie suivant la direction de propagation $\vec{e}_\phi$ permet de réaliser l'étude dans une section quelconque du tore.

Dans notre modèle, les effets mécaniques induits par la courbure sont pris en compte : les indices n_1 et n_2 , modifiés par la courbure, sont calculés à partir des relations (5.3).

Pour simuler l'extension infinie de la gaine, nous disposons autour de l'espace de simulation trois couches absorbantes à impédance adaptée (PML) et une condition aux limite de diffusion (SBC) sur le bord intérieur de la courbure (voir figure 5.14), car l'utilisation de PML sur ce bord est fortement compromise par la concavité de la surface [83]. L'ajout de ces éléments permet aux bordures de l'espace de calcul d'être transparentes aux modes radiatifs sortant du domaine d'étude.

La limite SBC consiste à imposer une condition sur la valeur des champs électromagnétiques et de leurs dérivées sur la bordure [84]. Ces conditions sont directement implémentées dans COMSOL. Les PML, quant à elles, ont la particularité d'absorber toute radiation issue du domaine d'étude sans causer de réflexion. Pour construire ces couches absorbantes, nous introduisons des variables complexes

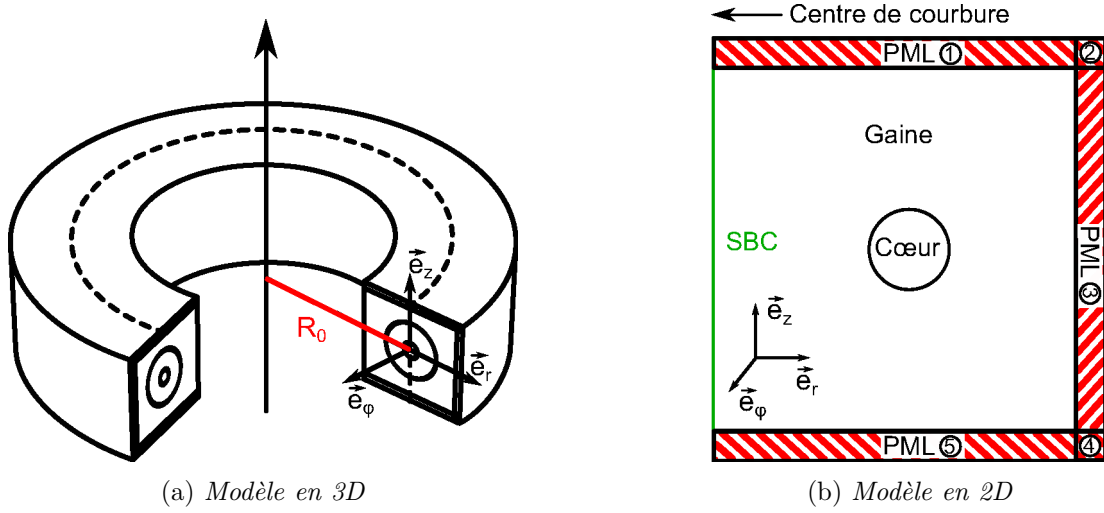


FIGURE 5.14: Géométrie du modèle.

dans les tenseurs de permittivité et de perméabilité des matériaux les constituant [85]. Dans le cas d'un repère axisymétrique, ces tenseurs sont définis par [86] :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{PML} = \bar{\bar{\epsilon}}_{mat} \bar{\bar{\Lambda}} \quad (5.67)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{PML} = \bar{\bar{\mu}}_{mat} \bar{\bar{\Lambda}} \quad (5.68)$$

où $\bar{\bar{\epsilon}}_{mat}$ et $\bar{\bar{\mu}}_{mat}$ sont les tenseurs de permittivité et de perméabilité de la gaine. La grandeur $\bar{\bar{\Lambda}}$ est un tenseur diagonal de rang 2 qui contient les propriétés absorbantes des PML, il est défini par :

$$\bar{\bar{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \frac{s_z \tilde{r}}{s_r r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z r}{s_r \tilde{r}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_r \tilde{r}}{s_z r} \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

où $\tilde{r}$ est la coordonnée radiale complexe, elle est définie par :

$$\tilde{r} = \int_0^r s_{r'}(r') dr' \quad (5.70)$$

avec :

$$s_r(r) = \begin{cases} 1 - j \cdot \sigma(r) & \text{atténuation suivant } \vec{e}_r \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (5.71)$$

De même s_z est définie de façon similaire à s_r par :

$$s_z(r) = \begin{cases} 1 - j \cdot \sigma(z) & \text{atténuation suivant } \vec{e}_z \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad (5.72)$$

Le terme $\sigma(x)$ est la conductivité du PML, il est responsable de l'atténuation de l'onde. Pour éviter que l'onde ne soit réfléchiée lors de son entrée dans la PML, une continuité dans la valeur de $\sigma(x)$ est exigée à travers la limite gaine/couche absorbante. Par conséquent, $\sigma(x)$ est nulle à l'entrée de la PML et sa valeur augmente au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans la couche absorbante. La distribution de $\sigma(x)$ dans la PML est donnée par une fonction quadratique du type [87] :

$$\sigma(x) = \sigma_{max} \left(\frac{x - x_0}{e} \right)^2 \quad (5.73)$$

où x_0 est l'origine de la PML, e est l'épaisseur de la couche absorbante et $\sigma_{\max}$ est la conductivité maximale de la PML. Nous synthétisons dans le tableau 5.3, les configurations des 5 couches PML utilisées dans notre modèle (*c.f* figure 5.14b).

TABLE 5.3: Configuration des PML.

Numéro du PML	s_r	s_z
1	1	$1 - j.\sigma(z)$
2	$1 - j.\sigma(r)$	$1 - j.\sigma(z)$
3	$1 - j.\sigma(r)$	1
4	$1 - j.\sigma(r)$	$1 - j.\sigma(z)$
5	1	$1 - j.\sigma(z)$

5.3.2 Maillage du modèle numérique

Le maillage dans le cœur et la gaine est composé d'éléments triangulaires quadratiques. Il doit être suffisamment fin pour limiter l'incertitude sur la valeur des indices effectifs calculées. Ainsi, nous plafonnons la taille des éléments à $\frac{\lambda}{7}$ pour le cœur et à $\frac{\lambda}{5}$ pour la gaine. Un tel raffinement nous permet d'avoir une précision de l'ordre de 1.10^{-9} sur les valeurs des indices effectifs n_{eff} calculées.

Le maillage à l'intérieur des PML doit être soigneusement construit. En effet, un maillage trop grossier ou trop destructuré peut remettre en cause la capacité de la PML à absorber correctement les ondes sortantes du domaine de calcul. Pour un fonctionnement optimal, la PML doit être segmentée en fines bandes. Au sein de chaque bande, la conductivité de la PML est constante, sa valeur est déterminée par l'équation (5.73) où x est la position au centre de la bande. À titre illustratif, on présente dans la figure 5.15 une vue schématique d'une PML.

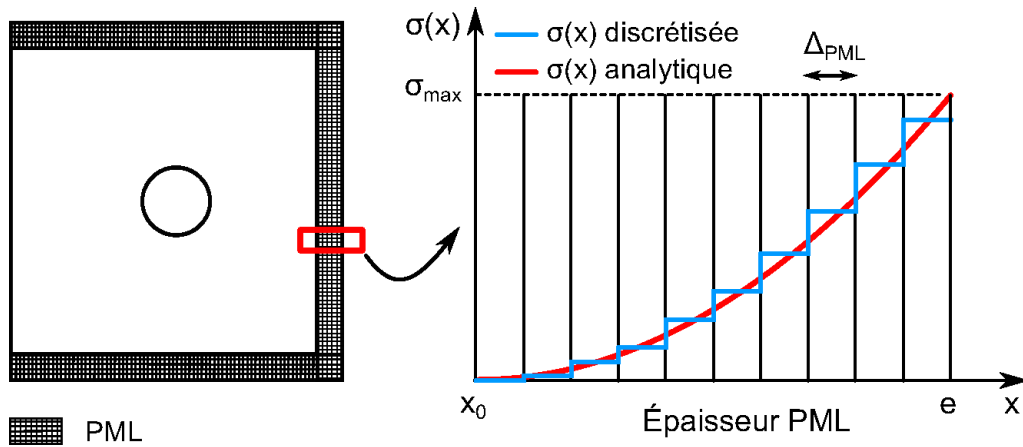


FIGURE 5.15: Schématisation d'une PML discrétisée.

Pour que les PLM fonctionnent correctement deux précautions doivent être prises. La première est de s'assurer que le maillage est suffisamment fin pour éviter une augmentation trop brutale de la conductivité du PML d'une bande à une autre. La seconde précaution concerne l'épaisseur de la PML. Elle doit être suffisamment importante pour que toute onde sortante du domaine d'étude soit totalement absorbée. Si un de ces deux impératifs n'est pas satisfait, alors des réflexions subsistent, pouvant causer des erreurs notoires dans l'évaluation des indices effectifs.

Il est donc essentiel de bien configurer les PML avant d'entamer les études sur les fibres courbées. Pour déterminer les caractéristiques optimales des PML nous procédons de la manière qui suit. Nous

fixons l'épaisseur des bandes d'éléments du maillage à $\Delta_{\text{PML}} = \frac{\lambda}{10}$. Nous faisons ensuite varier l'épaisseur des PML dans un intervalle compris entre $5\Delta_{\text{PML}}$ et $20\Delta_{\text{PML}}$, en gardant une densité de maillage constante.

Nous résolvons alors les équations de propagation des modes guidés afin d'évaluer la partie réelle et la partie imaginaire des indices effectifs des deux modes de cœur fondamentaux. Cette procédure est effectuée pour trois valeurs de σ_{max} : 50, 100 et 150. Les courbes obtenues pour $\sigma_{\text{max}} = 100$ et 150 sont tracées sur la figure 5.16. Les courbes obtenues pour $\sigma_{\text{max}} = 50$ ne sont pas affichées car

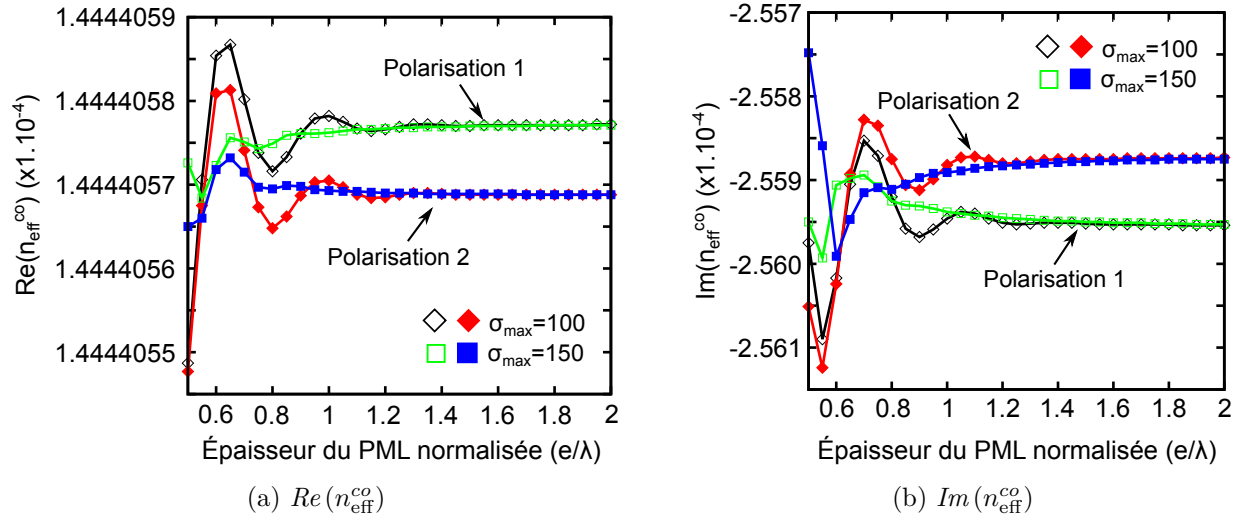


FIGURE 5.16: Influence de l'épaisseur des couches absorbantes sur la valeur des indices effectifs des modes de cœur.

elles présentent des oscillations trop importantes. Les PML sont bien configurées si la partie réelle et la partie imaginaire des indices effectifs sont indépendantes de l'épaisseur des couches absorbantes. À partir de ces figures, nous pouvons estimer que les PML sont correctement paramétrées pour : $\Delta_{\text{PML}} = \frac{\lambda}{10}$, $\sigma_{\text{max}} = 100$ et $e = 1, 4\lambda$. Ces valeurs seront utilisées dans toutes les simulations effectuées dans la suite de ce manuscrit.

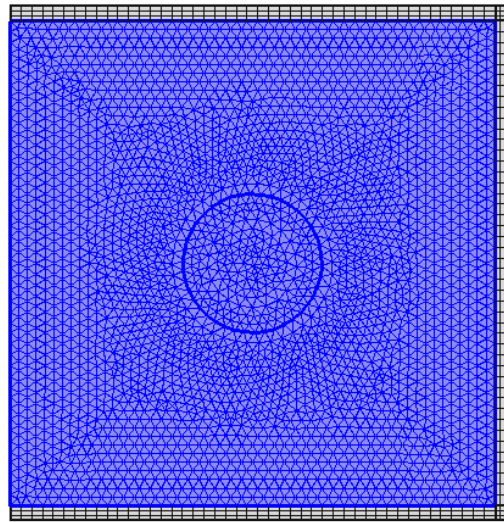


FIGURE 5.17: Maillage global du modèle.

Finalement, la forme du maillage global du modèle est présentée sur la figure 5.17. Par soucis de lisibilité la taille des éléments a été volontairement agrandie.

5.4 Effets des courbures sur les réseaux fibrés

5.4.1 Effets des courbures sur les modes de gaine

À l'instar des modes de cœur, les modes de gaine se déforment lorsqu'ils se propagent dans une fibre courbée. La distribution spatiale transverse des modes de gaine étant plus étendue que celle des modes de cœur, ils sont plus affectés par la courbure de la fibre. Dans une SMF28, un rayon de courbure d'une cinquantaine de centimètres est suffisant pour transformer les modes de gaine en « whispering gallery modes » [88]. À titre comparatif, la transition entre mode guidé et « whispering gallery mode » pour le mode de cœur s'effectue pour un rayon de courbure de l'ordre du centimètre.

C'est la forte sensibilité des modes de gaine aux courbures qui est responsable de la grande sensibilité des LPG aux courbures [88]. Si nous voulons concevoir un LPG qui soit insensible aux courbures, il est nécessaire de trouver les paramètres opto-géométriques de la fibre qui favorisent la stabilité des modes de gaine à la courbure. Ce point est l'objectif de la présente section.

La fibre optique considérée dans cette section est une généralisation à deux gaines de celle présentée dans la section (5.3). La gaine interne entoure le cœur de la fibre, elle possède un rayon a_2 et un indice n_2 . La gaine externe, quant à elle, est supposée d'extension infinie et son indice n_3 vérifie l'inégalité suivante : $n_3 < n_2 < n_1$. Le modèle numérique décrit dans la section précédente (5.3) est ainsi légèrement modifié afin de prendre en compte cette nouvelle géométrie. En revanche, les paramétrages des PML et le maillage de la géométrie sont inchangés.

Pour simplifier les études, nous décidons de fixer les paramètres qui ont une influence limitée sur le guidage des modes de gaine dans la fibre optique :

- $a_1 = 4,2 \mu m$ et $n_1 = 1,0036 n_2$
- $n_2 = 1,4443882$ pour $\lambda = 1,55 \mu m$
- $n_3 = 0,95n_2$

Les paramètres restant sont par conséquent le rayon de la gaine interne a_2 et la longueur d'onde λ . Nous cherchons à mettre en évidence le rôle de a_2 et de λ dans la robustesse des modes de gaine aux courbures. Pour ce faire nous exécutons trois simulations avec des valeurs de a_2 et λ différentes. Les valeurs des paramètres utilisées dans chacune des simulations sont référencées dans le tableau (5.4). Les simulations sont effectuées en utilisant un programme Java maison qui gère les incréments des différents paramètres et le post-traitement des données. Ce programme Java permet également de piloter le logiciel COMSOL réalisant les analyses modales.

TABLE 5.4: Valeurs de λ et de a_2 utilisées dans les simulations.

	$a_2 (\mu m)$	$\lambda (\mu m)$
Simulation 1	15	1,4528
Simulation 2	15	1,65
Simulation 3	30	1,65

Pour chaque simulation la procédure reste la même. Le rayon de courbure R_0 varie de 1 cm à 1 m par pas de 0,18 cm pour $R_0 \in [1 \text{ cm} ; 10 \text{ cm}]$ et par pas de 3 cm pour $R_0 \in [10 \text{ cm} ; 1 \text{ m}]$. À chaque incrément, une analyse modale est exécutée dans la section de la fibre donnant les indices effectifs et les champs électromagnétiques des 100 premiers modes de gaine. De ces quantités nous déduisons

l'aire effective A_{eff} de chaque mode de gaine :

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(r, z)|^2 dr dz \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(r, z)|^4 dr dz} \quad (5.74)$$

L'aire effective est la surface d'un mode gaussien pour laquelle l'intensité du mode dépasse la valeur de $1/e^2$. Bien que cette définition ne soit pas correcte pour les modes présentant un grand nombre d'oscillations suivant les directions radiale et azimutale, il a été démontré par Shermer [65] qu'elle est un bon indicateur sur la dégradation des modes de cœur avec la courbure de la fibre. En effet, la disparition progressive d'un mode à cause de la courbure s'accompagne d'une chute de son aire effective.

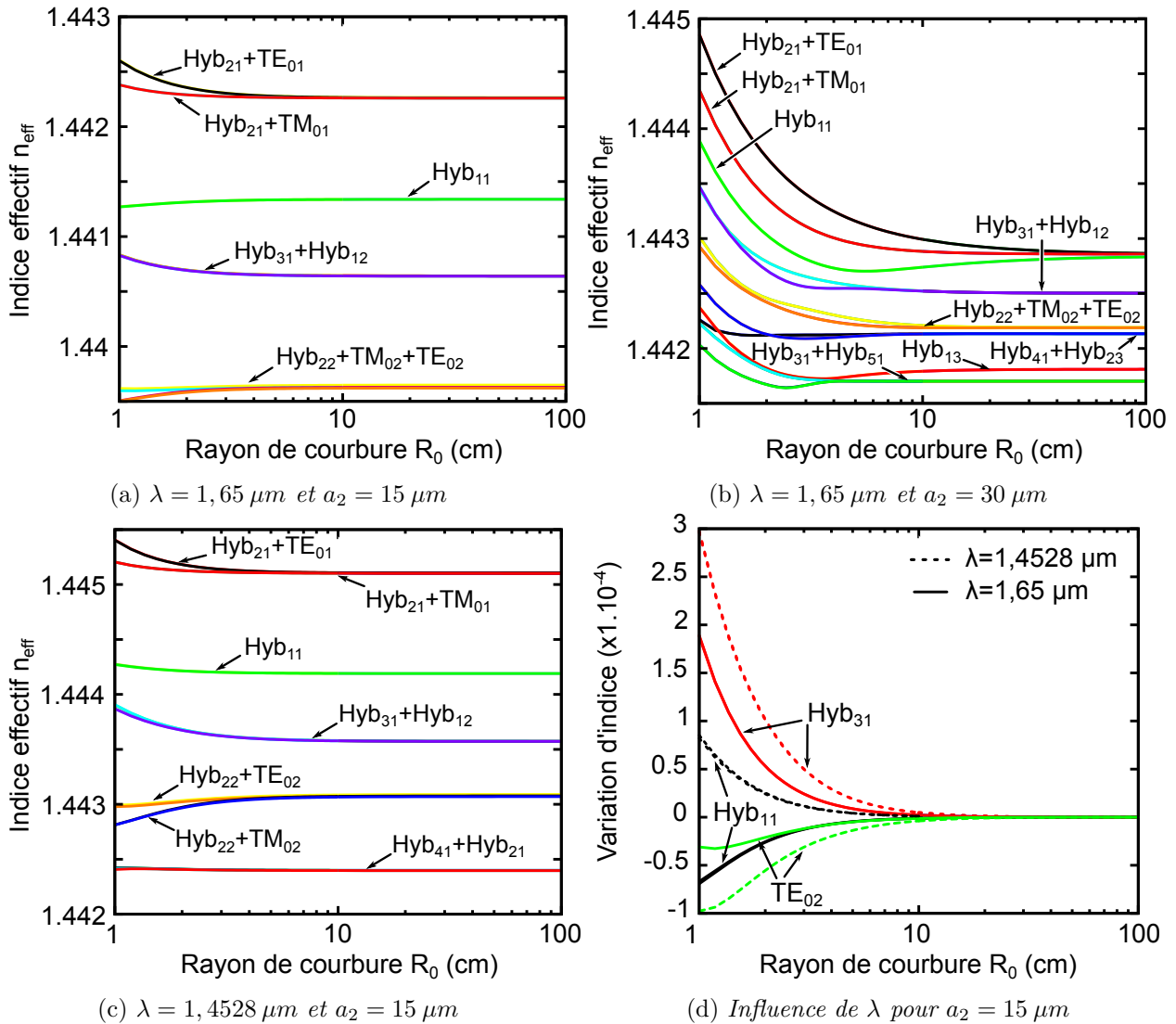


FIGURE 5.18: Influence de a_2 et de λ sur la sensibilité des indices effectifs des modes de gaine aux courbures.

Nous affichons dans les figures 5.18 l'évolution des indices effectifs des premiers modes de gaine en fonction du rayon de courbure R_0 . Les figures 5.18a et 5.18b montrent que le rayon de gaine interne a

une forte influence sur la sensibilité des indices effectifs à la courbure. L'indice effectif est plus stable vis-à-vis de la courbure de la fibre lorsque le rayon de gaine est plus faible. De plus, une gaine de diamètre plus petit implique des espacements plus importants entre les valeurs des indices effectifs des modes. Ainsi, même pour des rayons de courbure de l'ordre du centimètre, l'ordre radial m des modes concorde toujours avec la position de ces modes au sein de leur famille.

De son côté, la longueur d'onde a un impact plus limité sur la stabilité des indices effectifs à la courbure. Comme le montrent les figures 5.18a, 5.18c et 5.18d, les variations d'indice effectif avec le rayon de courbure R_0 sont plus faibles quand λ augmente. Toutefois, l'influence de λ dans la gamme de longueurs d'onde considérée est négligeable face à l'impact du rayon a_2 .

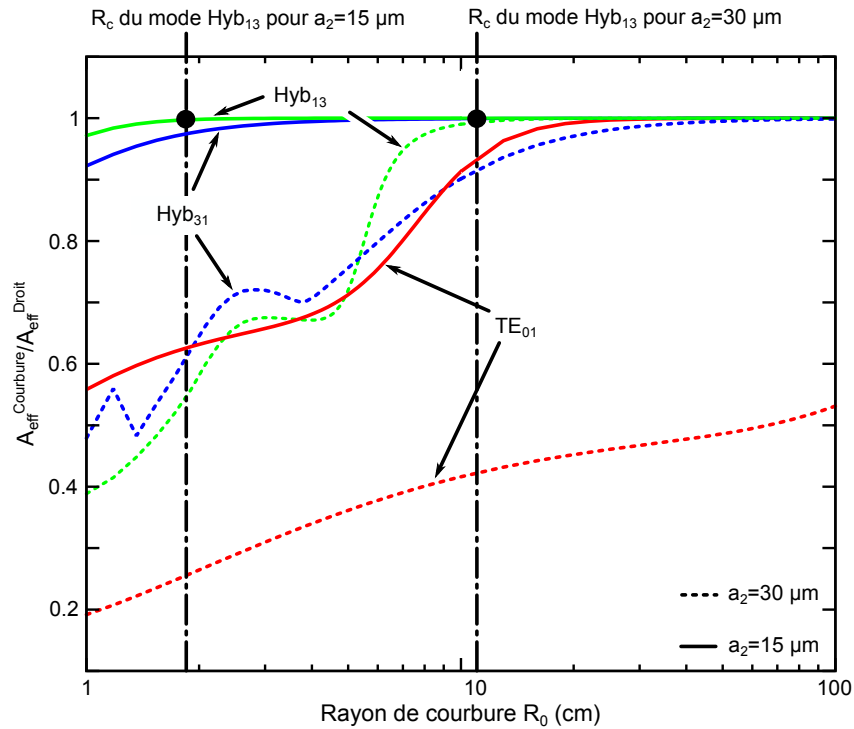
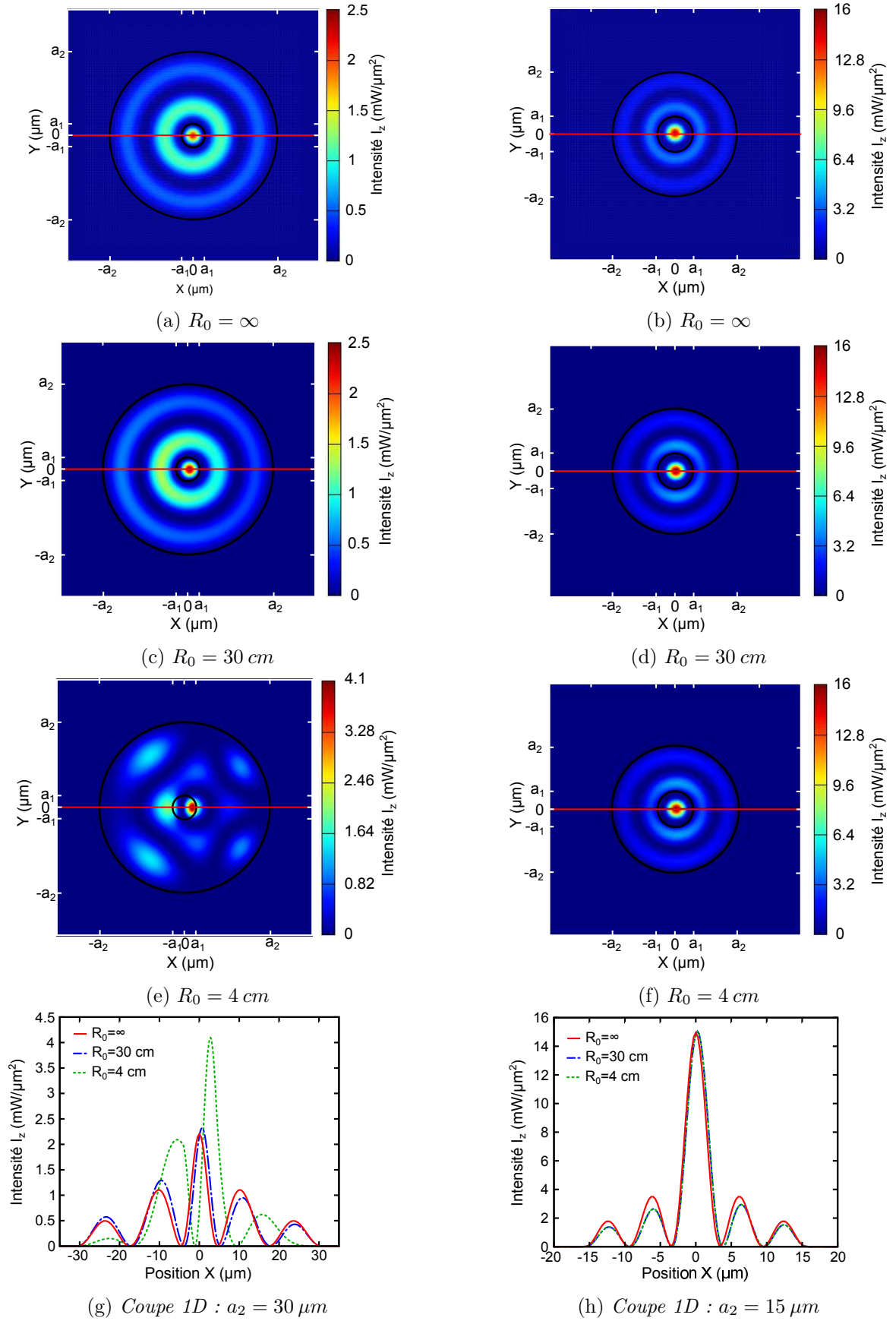


FIGURE 5.19: Influence de a_2 sur la stabilité des modes de gaine aux courbures.

Les variations de l'indice effectif reflètent une modification des champs électromagnétiques des modes avec la courbure. C'est pourquoi, nous traçons sur la figure 5.19 les aires effectives normalisées de trois modes de gaine en fonction de R_0 . L'évolution de l'aire effective en fonction du rayon de courbure peut se séparer en deux phases. On observe une première phase de plateau où l'aire effective est stable avec R_0 . Dans cette gamme de rayons de courbure, la courbure n'est pas suffisante pour porter atteinte à la structure électromagnétique du mode. Dans ces conditions, les champs électromagnétiques du mode ne subissent que de légères déformations comme cela est montré dans les figures 5.20c, 5.20d et 5.20f pour le mode Hyb_{13} . La seconde phase apparaît quand le rayon de courbure est inférieur à un rayon critique R_c . Elle est caractérisée par une forte variation de l'aire effective. Dans cette phase, la courbure de la fibre induit une réorganisation spatiale des champs électromagnétiques des modes. Le changement des champs est tel qu'il devient impossible de distinguer les modes à partir de leur distribution spatiale.

Comme nous pouvons le voir dans la figure 5.19, le rayon critique R_c diminue avec a_2 . En d'autres termes, plus une fibre optique possède un rayon de gaine a_2 petit, plus les modes sont stables vis à vis de la courbure. Par exemple, pour le mode Hyb_{13} , le rayon critique R_c décroît de 11,6 cm à 1,9 cm quand a_2 diminue de 30 μm à 15 μm . Les graphiques de la figure 5.20 présentent la distribution


 FIGURE 5.20: Déformation du mode Hyb_{13} induite par la courbure de la fibre.

d'intensité du mode Hyb_{13} calculée pour $a_2 = 15 \mu\text{m}$ et $30 \mu\text{m}$ dans une fibre droite et pour deux rayons de courbure différents : $R_0 = 4 \text{ cm}$, 30 cm . Le mode est peu affecté par la courbure de la fibre lorsque $a_2 = 15 \mu\text{m}$. En effet dans cette configuration, le rayon de courbure de transition R_c est inférieur aux rayons de courbure considérés pour le calcul des intensités. Pour $a_2 = 30 \mu\text{m}$, nous remarquons que le mode est stable vis-à-vis de la courbure, soit un rayon de courbure supérieur à R_c . Pour $R_0 = 4 \text{ cm} < R_c$, le mode est fortement détérioré par la courbure de la fibre.

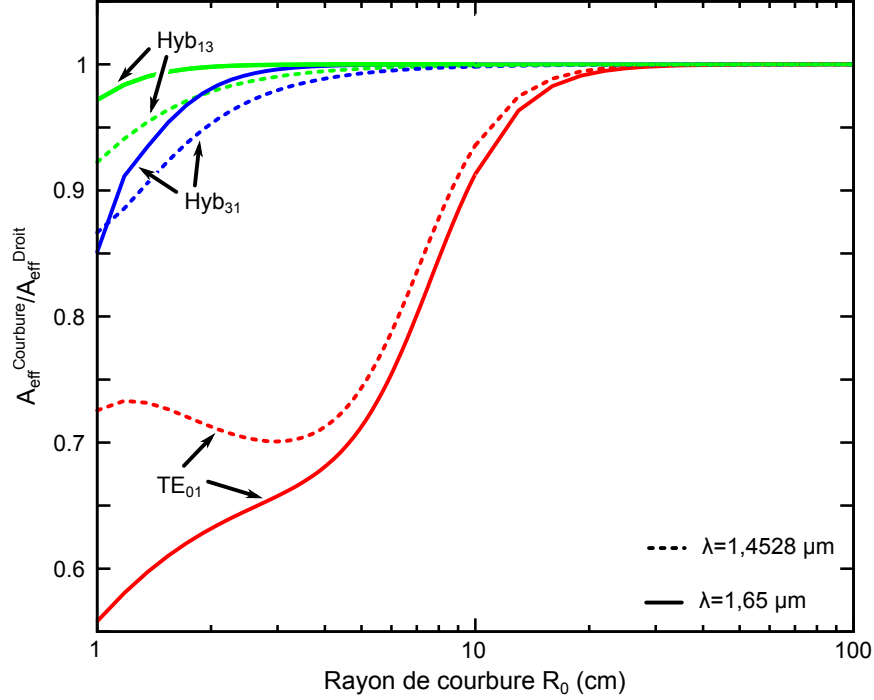


FIGURE 5.21: Influence de la longueur d'onde λ sur la stabilité des modes de gaine vis-à-vis de la courbure.

La figure 5.21 confirme le constat selon lequel la longueur d'onde a une influence moins marquée. Pour tous les modes analysés excepté le mode TE_{01} , une augmentation de la longueur d'onde de $1,4528 \mu\text{m}$ à $1,65 \mu\text{m}$ conduit à un abaissement limité de R_c de l'ordre de 1 à 2 cm.

En conclusion, le rayon de gaine joue un rôle clé dans la stabilité des modes de gaine aux courbures. Par conséquent, si nous voulons réaliser un réseau longue période stable aux courbures nous avons tout intérêt à inscrire ce réseau dans une fibre possédant une gaine de faible diamètre.

5.4.2 Modélisation des réseaux courbés

Lorsqu'un réseau d'indice est soumis à une courbure, il subit les mêmes modifications que les indices de réfraction de la fibre. Le réseau courbé est équivalent à un réseau droit dont la modulation d'indice est modifiée pour prendre en compte la courbure de la fibre. En procédant à un « conformal mapping », on trouve que la modulation d'indice du réseau droit est équivalente à [89] :

$$n_{\text{réseau}}^{\text{eq}} = n_{\text{réseau}} \left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_{\text{eff}}} \right) \quad (5.75)$$

$$\Leftrightarrow n_{\text{réseau}}^{\text{eq}} = \left\{ n_1 + n_1 \delta \bar{n}_1 \left[1 + m \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right] \right\} \left(1 + \frac{r \cos \theta}{1,24 R_0} \right)$$

où r et θ sont des coordonnées cylindriques définies dans la section de la fibre comme indiquées sur la figure 5.22. La quantité R_{eff} est le rayon de courbure effectif de la fibre qui prend en compte les

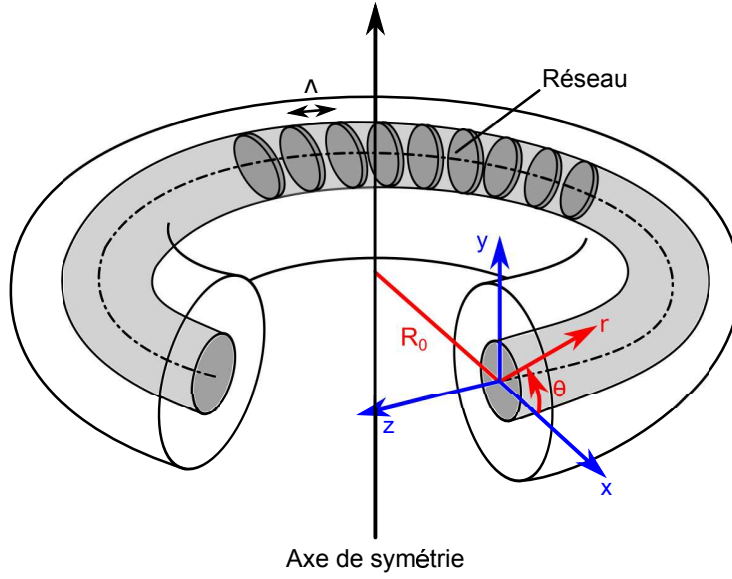


FIGURE 5.22: Schématisation d'un réseau fibré courbé.

contraintes mécaniques induites par la courbure. L'expression de R_{eff} est obtenue à partir des équations (5.3) et (5.64) et en ne considérant que les variations des indices dans le plan transverse :

$$n_{\text{eq}} = n_{0i} \left[1 - \frac{n^2 x}{2R_0} [p_{12} - \nu (p_{11} + p_{12})] \right] \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \quad (5.76)$$

où x est la variable transverse dans la direction de la courbure. En posant $\mathcal{P} = p_{12} - \nu (p_{11} + p_{12})$ l'équation (5.76) devient :

$$n_{\text{eq}} = n_{0i} \left[1 + \frac{x}{R_0} \left(1 - \frac{n_{0i}^2}{2} \mathcal{P} + \frac{x n_{0i}^2}{2R_0} \mathcal{P} \right) \right] \quad (5.77)$$

en négligeant alors les termes quadratiques, on obtient :

$$n_{\text{eq}} = n_{0i} \left(1 + \frac{x}{R_{\text{eff}}} \right) \quad (5.78)$$

où :

$$R_{\text{eff}} = \frac{R_0}{1 - \frac{n^2}{2} \mathcal{P}} \quad (5.79)$$

Pour $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, $p_{11} = 0,113$, $p_{12} = 0,152$ et $\nu = 0,17$, nous obtenons un rayon effectif $R_{\text{eff}} = 1,24R_0$.

Comme on peut le voir dans la formulation (5.75), le réseau équivalent garde un pas constant et ses franges sont parallèles à l'axe optique de la fibre. Pour ces raisons, le fonctionnement du réseau courbé est modélisable par la théorie des modes couplés standard détaillée dans le Chapitre 3.

Toutefois, certaines précautions doivent être prises lors de l'implémentation de la théorie des modes couplés pour la modélisation des réseaux courbés. En effet, la courbure du réseau conduit à l'apparition d'une biréfringence linéaire. La polarisation des modes devient linéaire. La polarisation de la moitié des modes s'orientent suivant une direction contenue dans le plan de courbure et la polarisation de l'autre moitié suivant une direction orthogonale au plan de courbure. Dans ces conditions, seuls les modes dont les directions de polarisation sont identiques sont capables de se coupler à travers le réseau. La

théorie des modes couplés doit par conséquent être appliquée séparément pour ces deux directions de polarisation.

Ainsi, la modélisation des propriétés spectrales d'un réseau uniforme courbé s'exécute en trois étapes :

Étape 1 : On détermine les indices effectifs et les constantes de couplage des modes couplés à travers le réseau avec le modèle décrit dans la section 5.3.

Étape 2 : Pour les 2 directions de polarisation, on résout les équations des modes couplés avec les paramètres évalués dans l'étape 1.

Étape 3 : On en déduit la transmission totale du réseau par : $T(\lambda) = \frac{|A_1^{\text{co}}(L)|^2 + |A_2^{\text{co}}(L)|^2}{|A_1^{\text{co}}(0)|^2 + |A_2^{\text{co}}(0)|^2}$, où A_1^{co} et A_2^{co} sont les amplitudes des modes de cœur polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan de courbure.

Ces étapes sont réalisées pour une longueur d'onde fixée. Si nous voulons obtenir le spectre en transmission du réseau il suffit de les réitérer pour une multitude de longueurs d'onde.

5.4.3 Courbure des réseaux de Bragg

Bien que l'impact des courbures sur la transmission des fibres optiques ait été très largement étudié dans la littérature [63, 69, 90, 91], peu d'attention a été portée quant à leur influence sur les propriétés spectrales des FBG. Les quelques travaux publiés ont montré que la sensibilité du FBG aux courbures est dépendante du type de fibre dans laquelle il est inscrit [92]. Pour les fibres de type SMF28, le décalage de la longueur d'onde de Bragg semble assez variable d'une expérience à une autre. Des décalages vers les grandes longueurs d'onde ont été constatés dans une étude [93], tandis que des décalages vers de plus petites longueurs d'onde ont été relevés dans d'autres [92, 94, 95].

À partir de ces observations, des modèles numériques ont été élaborés dans le but de prédire le décalage de la longueur d'onde de Bragg induit par la courbure du réseau [89, 93, 96]. Parmi eux, on peut citer le modèle développé par K.S Lim et al. [93], qui montre une bonne concordance entre expérience et simulation. Dans leur théorie, les auteurs prennent en compte les effets de la courbure du FBG sur sa réponse spectrale par la définition d'un coefficient de pondération dont l'origine physique n'est pas justifiée. De ce fait, leur théorie bien que concordante avec les expériences est incomplète.

Une seconde théorie plus récente et plus complète est également à mentionner [89]. Elle repose sur le fait que le fonctionnement du FBG lorsqu'il est courbé est régi par les mêmes équations physiques que quand il est droit. Les auteurs justifient le décalage de la longueur d'onde de Bragg par la déformation du mode de cœur induite par la courbure du réseau. Cependant, cette théorie ne prend pas en compte la variation de l'indice effectif du mode avec la courbure. Cette approximation peut selon nous mettre en péril la validité de leur modèle. En effet, la longueur d'onde de Bragg λ_B est directement reliée à l'indice effectif $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ par la relation $\lambda_B = 2n_{\text{eff}}^{\text{co}}\Lambda_B$. La non prise en compte de cette variation d'indice effectif implique automatiquement une erreur sur la longueur d'onde de Bragg estimée.

Pour comprendre comment se comporte un FBG lorsqu'il est soumis à une courbure, il est nécessaire de revenir sur son équation de résonance (3.15) :

$$\lambda_B = 2(n_{\text{eff}}^{\text{co}} + \delta n_{\text{eff}}^{\text{co}})\Lambda_B \quad (5.80)$$

où $\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}} = \lambda_B \delta \widetilde{\kappa}_1^{\text{co}} / (2\pi)$, $\widetilde{\kappa}^{\text{co}}$ étant la constante de couplage des modes de cœur tenant en compte la courbure de la fibre :

$$\widetilde{\kappa}^{\text{co}} = \frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a_1} \left(1 + \frac{r \cos\theta}{1, 24R_0}\right)^2 |\vec{E}_t^{\text{co}}(r, \theta)|^2 r dr \quad (5.81)$$

où $\vec{E}_t^{\text{co}}$ contient les composantes transverses du champ électrique du mode de cœur.

Lorsque le réseau se courbe, le mode de cœur se déforme, son indice effectif et son couplage évoluent. Il en découle par un décalage de longueur d'onde de Bragg d'amplitude $\Delta\lambda_B$, qu'il est possible d'exprimer par la relation suivante :

$$\Delta\lambda_B = 2 \left\{ n_{\text{eff}}^{\text{co}}(R_0) - n_{\text{eff}}^{\text{co}}(\infty) + \frac{\delta\bar{n}_1}{2\pi} \left[(\lambda_B \widetilde{\kappa^{\text{co}}})(R_0) - (\lambda_B \widetilde{\kappa^{\text{co}}})(\infty) \right] \right\} \Lambda_B \quad (5.82)$$

Pour connaître le décalage de la longueur d'onde de Bragg avec la courbure du réseau il est nécessaire de résoudre l'équation (5.80) en λ_B pour le réseau droit et courbé et d'en déduire le décalage à l'aide de (5.82). De façon rigoureuse, cette résolution doit prendre en compte la variation de $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\widetilde{\kappa^{\text{co}}}$ avec λ_B . En pratique, dans le cas des FBG inscrits dans une fibre SMF28, ce décalage de la longueur d'onde de Bragg n'excède pas une amplitude de 200 pm [92]. Cet écart de longueur d'onde est par conséquent minime. Nous pouvons ainsi admettre que la variation de l'indice effectif et le coefficient de couplage des modes sont dues majoritairement au changement de la forme du mode avec la courbure de la fibre et non à la variation de λ_B .

Dans ces conditions, nous considérons que λ_B est constant dans le membre de droite de l'équation (5.82). Le décalage $\Delta\lambda_B$ peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\lambda_B = 2 (\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}} + \Delta\delta\bar{n}_1^{\text{co}}) \Lambda_B \quad (5.83)$$

où :

$$\begin{cases} \Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}} = n_{\text{eff}}^{\text{co}}(R_0) - n_{\text{eff}}^{\text{co}}(\infty) \\ \Delta\delta\bar{n}_1^{\text{co}} = \delta\bar{n}_1^{\text{co}}(R_0) - \delta\bar{n}_1^{\text{co}}(\infty) = \frac{\lambda_B(\infty)}{2\pi} \delta\bar{n}_1 \left[\widetilde{\kappa^{\text{co}}}(R_0) - \widetilde{\kappa^{\text{co}}}(\infty) \right] \end{cases} \quad (5.84)$$

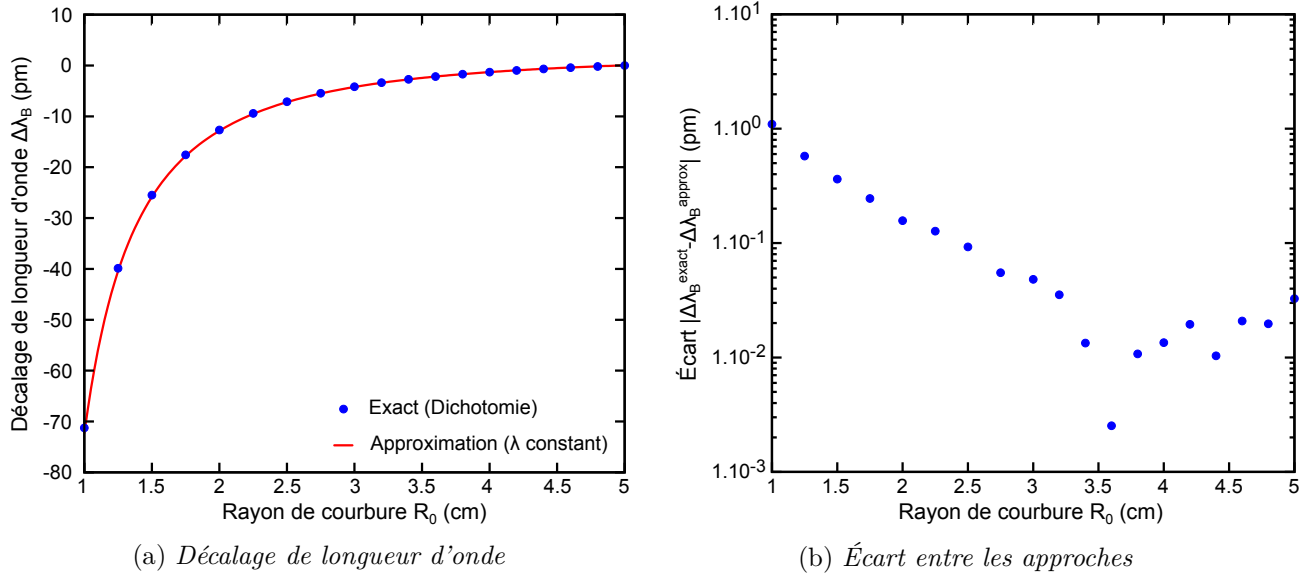


FIGURE 5.23: Comparaison des décalages de la longueur de Bragg obtenus de manière exacte (dichotomie) et approchée (λ constant).

Pour s'assurer du bien fonder de cette approximation, nous traçons sur les figures 5.23, les décalages de la longueur d'onde de Bragg avec la courbure de la fibre obtenus à partir des équations (5.82) et (5.83). Dans la première approche, la longueur d'onde de Bragg est calculée de façon rigoureuse en exécutant une résolution par dichotomie de l'équation (5.82). La seconde approche consiste à déterminer λ_B en supposant que la longueur d'onde est constante dans le membre de droite de l'équation

(5.83). Cette longueur d'onde est choisie à $1,55394 \mu m$, elle correspond à la longueur d'onde de Bragg du réseau droit obtenue avec la première approche¹. Les écarts absolus entre les décalages de longueur d'onde obtenus par les deux approches (voir figure 5.23a) sont présentés sur le graphique de la figure 5.23b. Cette courbe a été obtenue dans le cas le plus défavorable, c'est à dire pour une configuration de FBG courbé impliquant un décalage de λ_B maximal. Nous constatons que ces écarts absolus n'excèdent pas les $1 pm$ et ce, quel que soit le rayon de courbure considéré supérieur à $1 cm$. Étant donné que dans la réalité, les appareils de mesure standards ont difficilement la capacité de détecter un décalage de λ_B inférieur au picomètre, on peut donc affirmer que cette approximation est valide pour les FBG inscrits dans une SMF28.

L'équation (5.83) à l'avantage de mettre en évidence les mécanismes à l'origine du décalage de λ_B . Ainsi, la sensibilité du FBG à la courbure dépend de :

- la variation de l'indice effectif $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$,
- la variation de l'indice effectif moyen $\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ qui dépend lui même de $\overline{\delta n_1}$.

Or quand la fibre se courbe, le mode se décale vers l'extérieur ce qui se traduit par une augmentation de $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$. Dans le même temps, le mode se déforme ce qui dégrade le couplage et donc diminue $\widetilde{\kappa^{\text{co}}}$. La diminution de $\widetilde{\kappa^{\text{co}}}$ entraîne celle de $\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$. On s'attend donc à ce que $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et $\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ aient des évolutions opposées quand la fibre est courbée. Le comportement global de la longueur d'onde de Bragg, va donc dépendre des valeurs relatives de ces quantités. De façon plus quantitative, nous avons simulé la réponse à la courbure de plusieurs réseaux de Bragg inscrits dans des fibres dont le diamètre de cœur est de $a_1 = 4,2 \mu m$ et dont les indices sont tels que $n_1/n_2 = 1,0036$. Trois réseaux ont été simulés qui diffèrent par leur indice effectif moyen : $\overline{\delta n_1} = 5.10^{-4}$, $\overline{\delta n_1} = 1,62.10^{-3}$, et $\overline{\delta n_1} = 5.10^{-3}$. La méthode utilisée est celle exposée dans la section 5.3.

Nous traçons dans les figures 5.24, les variations de $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ en fonction de R_0 pour les trois réseaux simulés. Comme nous pouvons le voir, les évolutions de $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ en fonction de R_0 sont d'allure opposée. Les figures illustrent aussi l'importance du facteur $\overline{\delta n_1}$:

- si $\overline{\delta n_1} < 1,62.10^{-3}$, $|\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}| < |\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}|$ (figure 5.24a). Le décalage de la longueur d'onde de Bragg est alors dicté majoritairement par la variation de $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$. Dans ces conditions la longueur d'onde de Bragg se décale vers les plus grandes longueurs d'onde lorsque R_0 diminue, comme le montre la courbe en rouge sur la figure 5.24d.
- si $\overline{\delta n_1} > 1,62.10^{-3}$, $|\Delta \overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}| > |\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}|$ (figure 5.24c). Le décalage de la longueur d'onde de Bragg suit alors majoritairement l'évolution de $\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$. Dans ce cas, la longueur d'onde de Bragg se déplace vers les longueurs d'onde les plus courtes quand R_0 diminue, comme le montre la courbe en bleu sur la figure 5.24d. La grande majorité des FBG possède un indice effectif moyen de cet ordre de grandeur, c'est pourquoi ce cas de figure est le plus fréquemment rencontré dans la littérature.
- si $\overline{\delta n_1} \simeq 1,62.10^{-3}$, les évolutions de $n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}}$ (figure 5.24b) se compensent. Le réseau est alors faiblement sensible aux courbures, comme le montre la courbe en vert sur la figure 5.24d.

Pour confirmer nos propos nous décidons de calculer le spectre en transmission de trois FBG possédant différent indice effectif moyen, en utilisant la méthode décrite dans la section 5.4.2. Ces réseaux sont inscrits dans le cœur d'une SMF28 et leur période de modulation sont identiques : $\Lambda_B = 535,18 nm$. Les longueurs et la visibilité des franges du réseau sont sensiblement modifiées d'un réseau à un autre afin d'obtenir des résonances de Bragg assez fines pour pouvoir distinguer graphiquement le décalage de λ_B . Précisons que ces 2 paramètres n'influencent pas la sensibilité du FBG aux courbures. Pour des raisons de lisibilité, nous synthétisons dans le tableau 5.5 les caractéristiques de ces 3 réseaux.

1. Les autres paramètres utilisés sont : $a_1 = 4,2 \mu m$, $\Delta n_{12} = 1,0036$, $\Lambda_B = 535,18 nm$ et $\overline{\delta n_1} = 5.10^{-3}$.

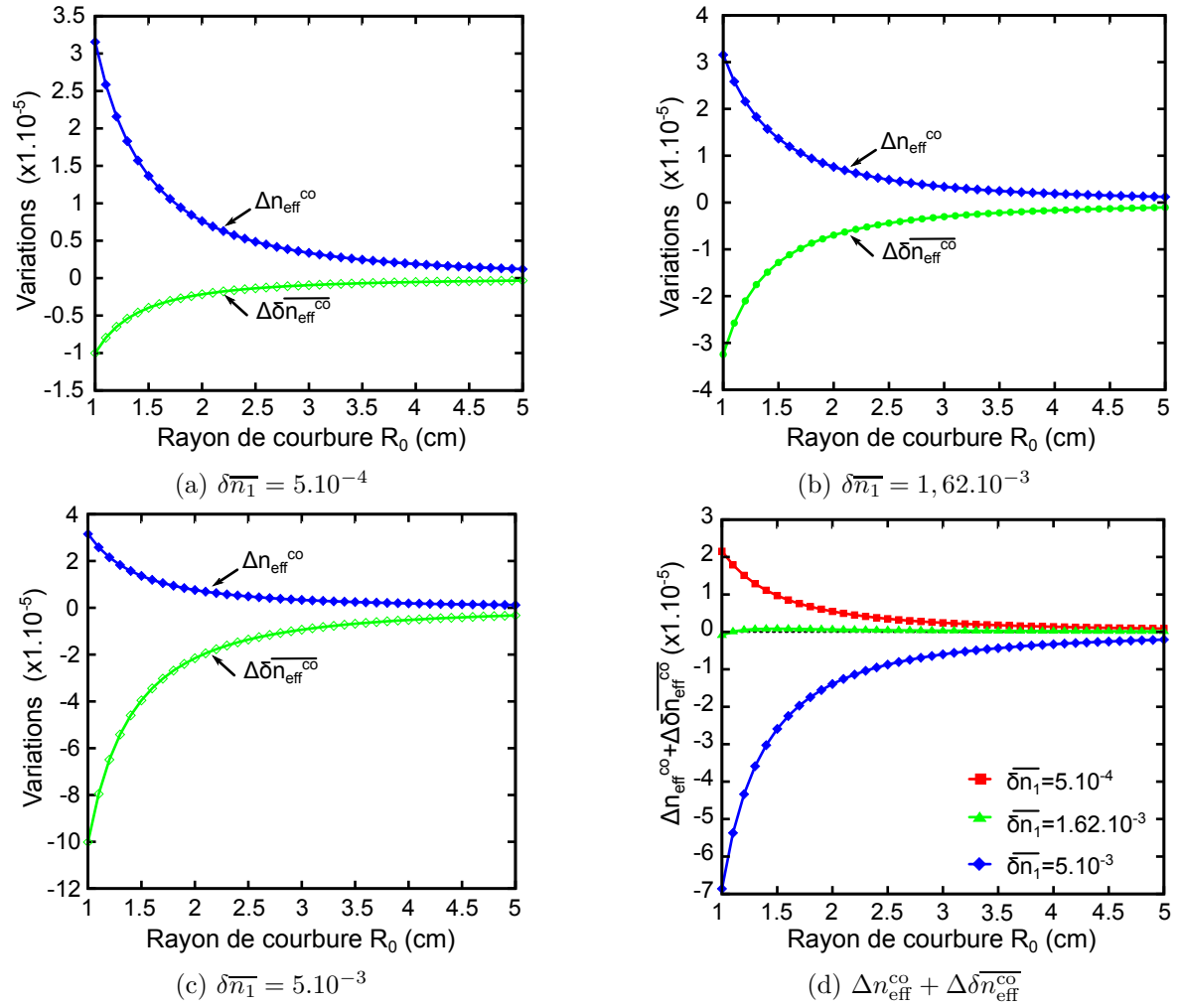
FIGURE 5.24: Évolution de $\Delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ et de $\Delta \delta n_{\text{eff}}^{\text{co}}$ en fonction de R_0 .

TABLE 5.5: Réseaux modélisés.

	L (μm)	λ_B (μm)	m	$\delta \bar{n}_1$
FBG1	2500	1,54869	0,25	5.10^{-4}
FBG2	2500	1,55000	0,25	$1,62.10^{-3}$
FBG3	1400	1,55394	0,1	5.10^{-3}

Les spectres ont été calculés pour trois rayons de courbure à savoir $R_0 = 2$ cm ; $R_0 = 30$ cm et $R_0 = \infty$. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 5.25. Nous notons tout d'abord qu'un rayon de courbure de 30 cm n'est pas suffisant pour entraîner un décalage détectable de la longueur d'onde de Bragg des 3 réseaux. Pour un rayon de courbure plus petit i.e pour $R_0 = 2$ cm, un décalage de λ_B est constaté dont l'amplitude et la direction dépendent de la valeur de $\delta\bar{n}_1$. Ce décalage relevé dans les spectres coïncide avec celui constaté sur les figures 5.24. Il est positif pour $\delta\bar{n}_1 = 5.10^{-4}$, négatif pour $\delta\bar{n}_1 = 5.10^{-3}$ et nul pour $\delta\bar{n}_1 = 1,62.10^{-3}$.

Nos résultats numériques montrent que c'est la valeur de $\delta\bar{n}_1$ qui conditionne la sensibilité du FBG à la courbure. Ainsi selon la valeur de $\delta\bar{n}_1$, la longueur d'onde de Bragg λ_B se décale vers les plus courtes ou les plus grandes longueurs d'onde avec une magnitude qui dépend de la valeur de $\delta\bar{n}_1$. Ce dernier point explique l'hétérogénéité des mesures du décalage de λ_B relevé dans la littérature. Ainsi, l'expérience [93] qui met en évidence un décalage positif de λ_B avec la courbure du réseau a été réalisé sur des FBG dont le comportement est similaire à celui du FBG1. Tandis que les références [92, 94, 95], qui observent un décalage négatif de la longueur d'onde de Bragg, ont utilisé des FBG dont la réponse à la courbure est comparable à celle du FBG3.

Ce résultat est à notre connaissance complètement inédit. Cette nouvelle contribution dans la compréhension des propriétés des FBG soumis à des courbures ouvre de nouvelles perspectives. Il est dorénavant possible de dimensionner des FBG qui soient insensibles aux courbures. Cette application est par exemple très utile pour la réalisation de capteur enfoui. On pense notamment aux applications à la mesure au cœur des composites où le phénomène de micro-flambement peut s'avérer très préjudiciable au bon fonctionnement d'un FBG ou d'un LPG.

5.4.4 Courbure des LPG

Les LPG ont la réputation d'être très sensibles aux courbures [97], c'est pourquoi ils ont été abondamment utilisés comme capteurs de courbure. Deux méthodes de mesure ont été développées, la première consiste à évaluer la courbure à partir de la mesure du décalage de la longueur d'onde de résonance [56]. La seconde repose sur l'estimation de l'écart entre deux résonances associées à un même mode couplé. Ces résonances proviennent soit de la biréfringence induite par la courbure [98, 99], soit de l'existence pour certaine valeur du pas du réseau de 2 longueurs d'onde de résonance [100].

Malgré le nombre de publications consacrées aux effets des courbures sur les LPG, peu de travaux expliquent concrètement leur fonctionnement lorsqu'on les courbe. À notre connaissance seul l'article de Block et al. [88] étudie de façon détaillée les conséquences des courbures sur la réponse spectrale des réseaux. Il montre que le décalage de la longueur d'onde de résonance du réseau est lié à la déformation des modes de gaine induite par la courbure de la fibre. Cependant, nous allons montrer que cette déformation modale n'est pas responsable à elle seule de la sensibilité des LPG à la courbure, mais que l'indice effectif moyen du réseau joue aussi un rôle.

Quand le LPG est courbé, les modes guidés suivent la trajectoire curviligne imposée par la courbure de la fibre. Ainsi, comme c'est le cas dans le LPG droit, les modes arrivent en incidence normale sur les franges du réseau. Dans ces conditions, l'équation de résonance du réseau courbé est similaire à l'équation de résonance du réseau droit (3.22) :

$$\lambda_{\text{LPG}} = \left[n_{\text{eff}}^{\text{co}} - n_{\text{eff}}^{\text{cl}} + \frac{\lambda_{\text{LPG}}}{2\pi} \delta\bar{n}_1 \left(\widetilde{\kappa^{\text{co}}} - \widetilde{\kappa^{\text{cl}}} \right) \right] \Lambda_{\text{LPG}} \quad (5.85)$$

aux différences près que les coefficients de couplage dépendent de la courbure et que le coefficient de couplage entre modes de gaine est pris en compte. Ce coefficient de couplage est défini comme :

$$\widetilde{\kappa^{\text{cl}}} = \frac{\omega \varepsilon_0 n_1^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a_1} \left(1 + \frac{r \cos\theta}{1,24R_0} \right)^2 \left| \vec{E}_t^{\text{cl}}(r, \theta) \right|^2 r dr \quad (5.86)$$

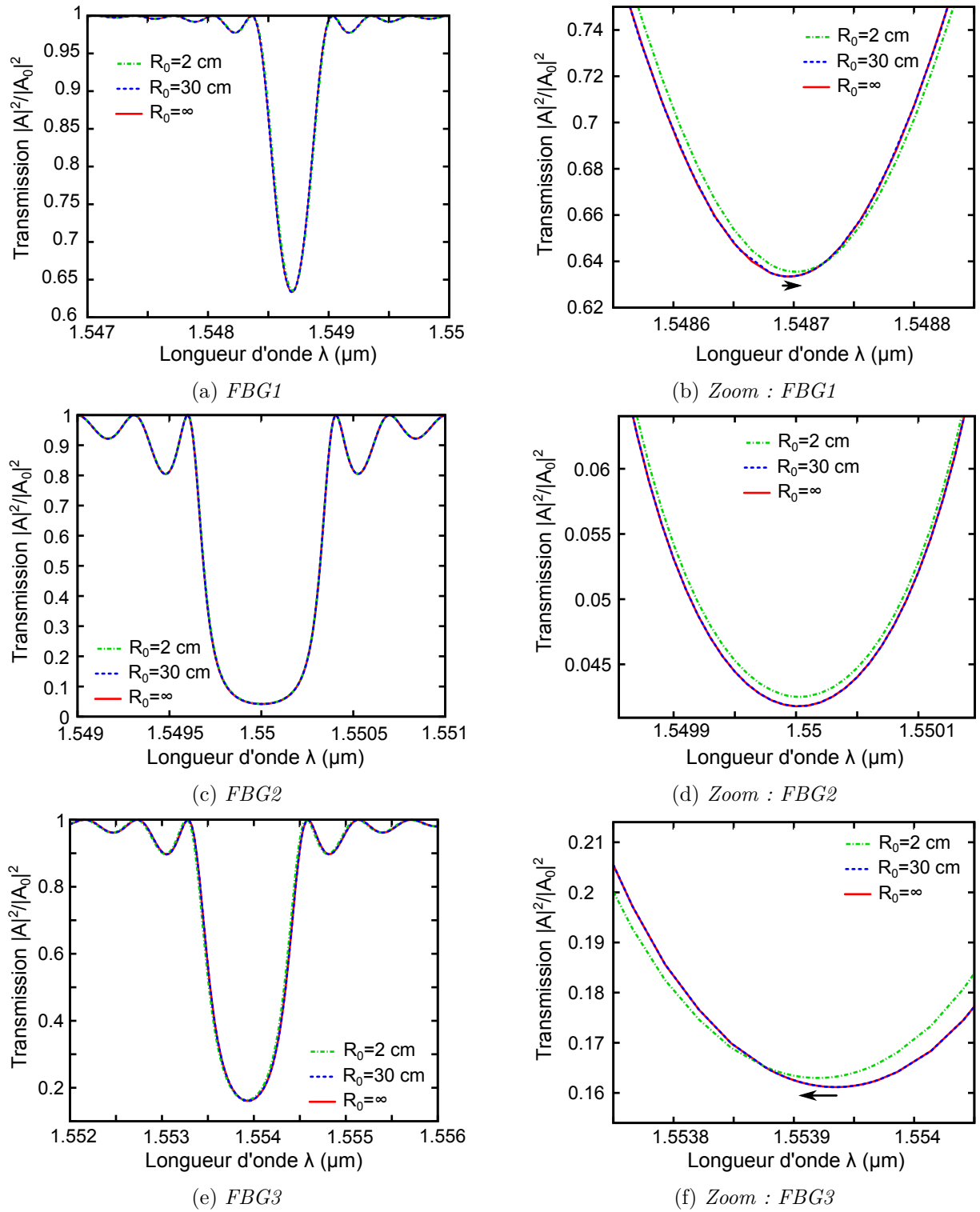


FIGURE 5.25: Spectres en transmission de 3 FBG soumis à des courbures de rayons variés.

Bien que nous ayons $\widetilde{\kappa^{co}} \gg \widetilde{\kappa^{cl}}$, la constante $\widetilde{\kappa^{cl}}$ ne peut être négligée lors de l'étude de la sensibilité des LPG à la courbure de la fibre. En effet, pour un même rayon de courbure, la déformation des modes de gaine est beaucoup plus conséquente que la déformation du mode de cœur, ainsi la variation de n_{eff}^{cl} et de $\widetilde{\kappa^{cl}}$ avec R_0 est plus importante que celle de n_{eff}^{co} et de $\widetilde{\kappa^{co}}$. Ces variations conduisent, d'après la condition (5.85), à un décalage de la longueur d'onde de résonance du LPG d'une quantité $\Delta\lambda_{\text{LPG}}$ avec la courbure du réseau. Ce décalage dépend majoritairement de la variation de n_{eff}^{cl} et de $\widetilde{\kappa^{cl}}$ avec la courbure de la fibre, il est défini de la manière suivante :

$$\Delta\lambda_{\text{LPG}} = \left\{ n_{\text{eff}}^{\Sigma}(R_0) - n_{\text{eff}}^{\Sigma}(\infty) + \frac{\delta\overline{n_1}}{2\pi} \left[(\lambda_{\text{LPG}}\kappa^{\Sigma})(R_0) - (\lambda_{\text{LPG}}\kappa^{\Sigma})(\infty) \right] \right\} \Lambda_{\text{LPG}} \quad (5.87)$$

où $n_{\text{eff}}^{\Sigma} = n_{\text{eff}}^{co} - n_{\text{eff}}^{cl}$ et $\kappa^{\Sigma} = \widetilde{\kappa^{co}} - \widetilde{\kappa^{cl}}$.

Comme pour le réseau de Bragg, nous considérons ici que la variation de l'indice effectif et du coefficient de couplage des modes couplés à travers le LPG courbé sont essentiellement dues à la courbure de la fibre et non à la variation de λ_{LPG} . Dans ces conditions, le décalage de la longueur d'onde de résonance λ_{LPG} de l'équation (5.87) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\Delta\lambda_{\text{LPG}} = \left(\Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} + \Delta\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}} \right) \Lambda_{\text{LPG}} \quad (5.88)$$

où :

$$\begin{cases} \Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} = n_{\text{eff}}^{\Sigma}(R_0) - n_{\text{eff}}^{\Sigma}(\infty) \\ \Delta\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}} = \frac{\lambda_{\text{LPG}}(\infty)}{2\pi} \delta\overline{n_1} \left[\kappa^{\Sigma}(R_0) - \kappa^{\Sigma}(\infty) \right] \end{cases} \quad (5.89)$$

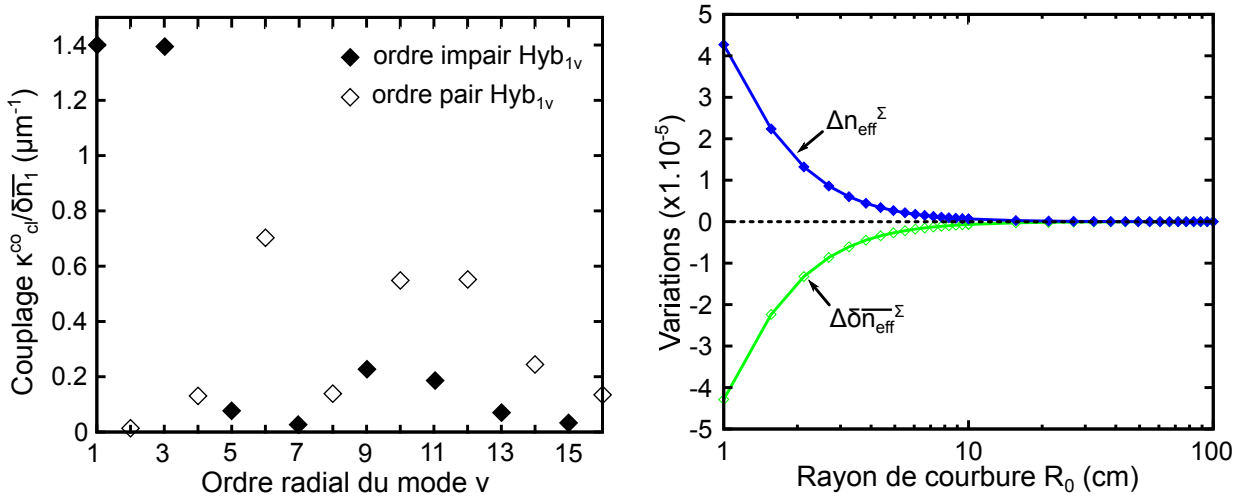
Comme on peut le voir dans les équations (5.88) et (5.89), le décalage de λ_{LPG} est conditionné par 5 paramètres :

- la variation de l'indice effectif du mode de cœur $n_{\text{eff}}^{co}(R_0)$;
- le changement de la constante de couplage $\widetilde{\kappa^{co}}(R_0)$;
- l'évolution de l'indice effectif du mode de gaine $n_{\text{eff}}^{cl}(R_0)$;
- la modification de la constante de couplage $\widetilde{\kappa^{cl}}(R_0)$;
- l'indice effectif moyen du réseau $\delta\overline{n_1}$.

Contrairement aux FBG qui favorisent un couplage à deux modes, les LPG engendrent des couplages entre le mode de cœur et de multiples modes de gaine. Ces derniers ayant leur propre susceptibilité aux courbures, il est impossible de décrire un comportement global des LPG vis à vis des courbures. Cependant à l'instar des FBG, il est possible de dimensionner des LPG pour les rendre quasiment insensibles aux courbures. Pour ce faire, quelques critères doivent être vérifiés. Le LPG doit être inscrit dans une fibre avec un faible rayon de gaine a_2 pour éviter des déformations trop importantes des modes de gaine lorsque la fibre se courbe et pour garantir un espacement suffisant entre les résonances (*c.f* section 5.4.1). De plus il est préférable de choisir un pas du réseau qui garantisse la présence d'une unique résonance dans la gamme de longueurs d'onde considérée. Ce dernier critère permet d'éviter toute apparition de résonance parasite lors de la courbure du réseau. De surcroît, la résonance choisie doit être associée à un mode de faible ordre pour favoriser un fort couplage modal et donc une résonance de forte amplitude dans le spectre transmis. Enfin, il est impératif de choisir un mode de gaine dont la variation de $\Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}$ avec R_0 compense celle de $\Delta\overline{\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}}$ (voir figure 5.26b).

À partir de ces critères, nous proposons, à présent, de dimensionner un LPG pour le rendre insensible à toute courbure de rayon supérieur à 2 cm. Le choix de cette valeur est motivé par des considérations pratiques. Lors de nos expérimentations, c'est le seuil de courbure que nous admettons acceptable avant rupture des fibres dénudées. Pour réaliser cela, nous procédons en trois étapes. La

première étape consiste à choisir les paramètres optiques et géométriques de la fibre. Nous minimisons le rayon de gaine a_2 en le fixant à $15 \mu m$, le saut d'indice Δn_{23} est choisi à 0,95 et la longueur d'onde est imposée à $1,55 \mu m$. Les paramètres opto-géométriques restant sont ceux relatifs à la SMF28. Une fois les dimensions de la fibre choisies, nous sélectionnons le mode de gaine qui sera couplé à travers le LPG. Nous voulons que ce mode soit celui qui possède le plus fort couplage κ_{cl}^{co} à travers le réseau. D'après la figure 5.26, un mode qui satisfait au mieux ce critère est le mode de gaine hybride Hyb₁₁.



(a) Couplage des modes de gaine à travers le LPG (b) Évolution de Δn_{eff}^{Σ} et de $\Delta \delta n_{eff}^{\Sigma}$ en fonction de R_0 pour le mode de gaine Hyb₁₁

FIGURE 5.26: Choix du mode de gaine utilisé pour le dimensionnement du LPG insensible à la courbure.

La seconde étape consiste à déterminer l'indice effectif moyen du réseau qui annule le terme $\Delta \lambda_{LPG}$ de l'équation (5.88). Pour exécuter cette tâche, nous évaluons $\delta \bar{n}_1$ par tâtonnement. Les quantités Δn_{eff}^{Σ} et $\Delta \delta n_{eff}^{\Sigma} / \delta \bar{n}_1$ sont calculées en fonction de R_0 à l'aide du modèle décrit dans la section 5.3. Une fois ces quantités obtenues, nous traçons pour plusieurs valeurs de $\delta \bar{n}_1$ la variation de $\Delta n_{eff}^{\Sigma} + \Delta \delta n_{eff}^{\Sigma}$ en fonction de R_0 . La valeur optimale de $\delta \bar{n}_1$ est identifiée lorsque pour tout $R_0 \geq 2$ cm, l'égalité $\Delta n_{eff}^{\Sigma} + \Delta \delta n_{eff}^{\Sigma} \simeq 0$ est satisfaite.

Nous traçons dans la figure 5.27 la quantité $\Delta n_{eff}^{\Sigma} + \Delta \delta n_{eff}^{\Sigma}$ calculée pour différentes valeurs de $\delta \bar{n}_1$. L'insensibilité du réseau est constatée pour une valeur optimale $\delta \bar{n}_1 = 2,65 \cdot 10^{-4}$. Pour des valeurs de $\delta \bar{n}_1$ supérieures, la variation des constantes de couplage $\Delta \delta n_{eff}^{\Sigma}$ l'emporte sur la variation des indices effectifs Δn_{eff}^{Σ} . Dans ces conditions, la longueur d'onde de résonance λ_{LPG} se décale vers les plus courtes longueurs d'onde quand le LPG est courbé. Dans le cas contraire où l'indice effectif moyen du réseau est inférieur à la valeur optimale, la variation des indices effectifs est prépondérante sur la variation des constantes de couplage. La longueur d'onde de résonance λ_{LPG} se décale par conséquent vers des longueurs d'onde plus grandes.

Une fois la valeur optimale de $\delta \bar{n}_1$ identifiée nous procédons à la troisième et dernière étape. Elle consiste à déduire de $\delta \bar{n}_1$ le pas du réseau Λ_{LPG} . Ce dernier est obtenu à partir de la relation (5.85) réécrite sous la forme suivante :

$$\Lambda_{LPG} = \frac{\lambda_{LPG}}{n_{eff}^{co} - n_{eff}^{cl} + \delta \bar{n}_1 \frac{\kappa_{cl}^{co} - \kappa_{cl}^{cl}}{2\pi} \lambda_{LPG}} \quad (5.90)$$

On obtient $\Lambda_{LPG} = 374,62 \mu m$.

La longueur du réseau est alors choisie afin de maximiser l'amplitude de la résonance dans le

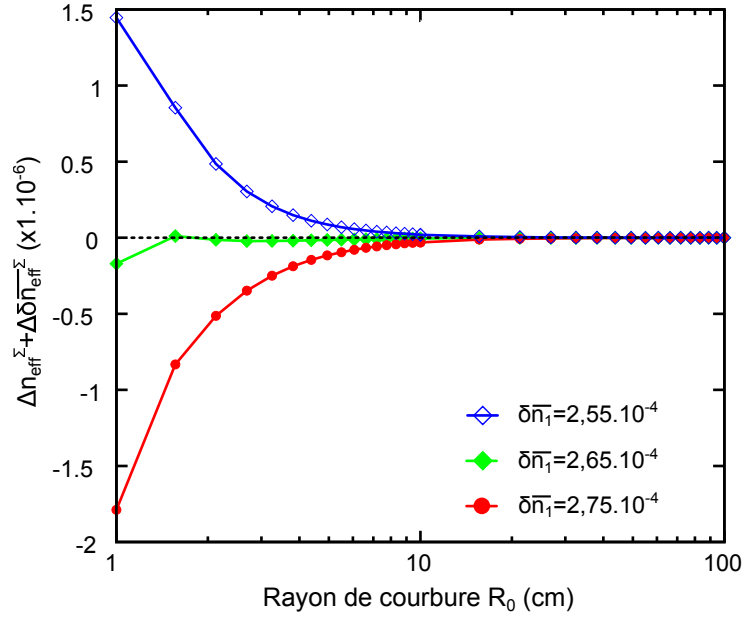


FIGURE 5.27: Détermination de l'indice effectif moyen du réseau $\delta\bar{n}_1$ permettant d'obtenir un LPG insensible à la courbure.

spectre : $L = \frac{\pi}{m\kappa_{cl}^{co}} \simeq 13400 \mu m$. Les paramètres du LPG insensible aux courbures sont synthétisés dans le tableau 5.6.

Nous superposons dans la figure 5.28, les spectres en transmission du LPG calculés pour une fibre droite et pour une fibre courbée avec un rayon de courbure $R_0 = 2 cm$. En comparant le spectre du LPG courbé à celui du LPG droit, on remarque que le décalage $\Delta\lambda_{LPG}$ est effectivement faible d'une configuration à une autre. Le décalage de longueur d'onde est de 482 pm. On note également une légère variation des amplitudes des résonances entre les deux spectres. Ces changements sont dus à un changement de la constante de couplage κ_{cl}^{co} avec la courbure du réseau.

TABLE 5.6: Paramètres du LPG peu sensible aux courbures.

$a_2 (\mu m)$	$\Lambda_{LPG} (\mu m)$	$\delta\bar{n}_1$	$L (\mu m)$	$\lambda_{LPG} (\mu m)$	$\kappa_{cl}^{co} (\mu m^{-1})$
15	374.62	$2,65.10^{-4}$	$8468 \mu m$	1,55	1,40

5.5 Sensibilité aux courbures des capteurs dimensionnés dans le Chapitre 4

Les capteurs que nous avons dimensionnés dans le chapitre 4 doivent être capables de mesurer des déformations au sein des matériaux. Malheureusement, lors de l'enfouissement de la fibre des courbures peuvent apparaître le long du capteur. Ces courbures sont d'origines diverses, elles peuvent être induites par des inhomogénéités présentes dans la structure à instrumenter ou lors de la mise en place du capteur. À cause de ces courbures, les longueurs d'onde de résonance λ_B et λ_{LPG} du capteur se décalent. L'inconvénient, c'est que ces décalages sont indissociables des décalages provoqués par la déformation réelle de la structure instrumentée. Ainsi, un capteur trop sensible aux courbures introduira des erreurs de mesure et donnera des informations erronées sur l'état mécanique réel de la structure.

Il est donc impératif d'étudier les sensibilités aux courbures des capteurs dimensionnés dans le

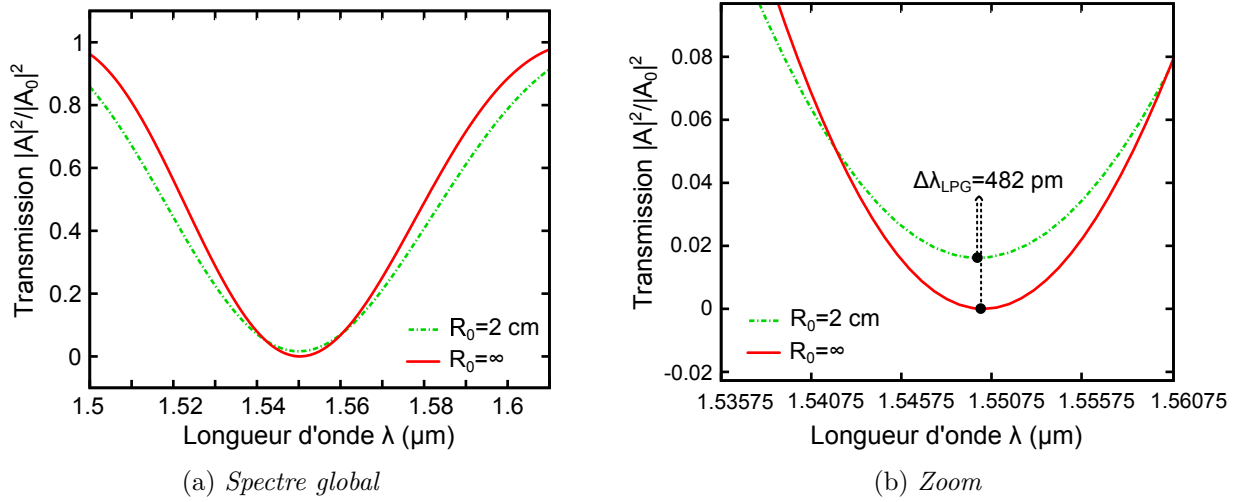


FIGURE 5.28: Spectre du LPG peu sensible vis-à-vis de la courbure.

Chapitre 4. L'objectif est d'évaluer les décalages des résonances provoqués par une courbure de 2 cm.

Nous rappelons dans le tableau 5.7, les deux dimensionnements du capteur retenus à l'issu du Chapitre 4. Nous en profitons également pour rappeler les paramètres de la fibre utilisée pour notre capteur : $a_1 = 4,2 \mu m$, $\Delta n_{12} = 1,0036$ et $\Delta n_{23} = 0,95$.

TABLE 5.7: Récapitulatif des dimensionnements obtenus dans le chapitre 4.

	Capteur LPG1	Capteur LPG2
$a_2 (\mu m)$	15,45	26,14
$\Lambda_{LPG} (\mu m)$	399,25	383,93
$\kappa_{cl}^{co} (\mu m^{-1})$	1,33	1,02
$L (\mu m)$	23620	30800
$\delta \bar{n}_1$	1.10^{-4}	1.10^{-4}
m	1	1
$\Lambda_B (nm)$	501	501

Dans un premier temps, nous ne considérons pas la superposition des deux réseaux. Les influences de la courbure sur la réponse spectrale du FBG et sur celle du LPG sont ainsi analysées séparément. Nous présentons sur les figures 5.29 et 5.30, les spectres du LPG1 et du LPG2 impliquant les résonances des modes Hyb₁₁ et Hyb₁₃. Ils ont été calculés pour un rayon de courbure $R_0 = 2 cm$ et une fibre droite. Comme nous pouvons le voir dans la figure 5.29, la résonance du LPG2 est fortement affectée par la courbure du réseau. Il est d'ailleurs impossible de l'identifier dans le spectre quand $R_0 = 2 cm$. La disparition de la résonance s'explique par la détérioration du couplage entre le mode de cœur et le mode de gaine Hyb₁₃ avec la courbure de la fibre. La mesure enfouie de déformations dans ces conditions est par conséquent irréalisable. Le même constat est réalisé pour les dimensionnements du capteur impliquant le couplage à travers le LPG de mode de gaine d'ordre m supérieur à 3. En effet, ces configurations possèdent un rayon de gaine a_2 supérieur à celui du LPG2, ce qui les rend eux aussi inaptes à la mesure enfouie de déformations.

Concernant le capteur basé sur le LPG1, le diamètre de la fibre est de l'ordre de $15 \mu m$. Ce rayon est suffisamment faible pour permettre au mode de gaine Hyb₁₁ d'être robuste à une courbure de rayon supérieur ou égal à 2 cm. Comme nous pouvons le voir sur les figures 5.30 et 5.31, l'enveloppe des résonances du FBG et du LPG1 sont peu modifiées par la courbure du capteur. Elles subissent un

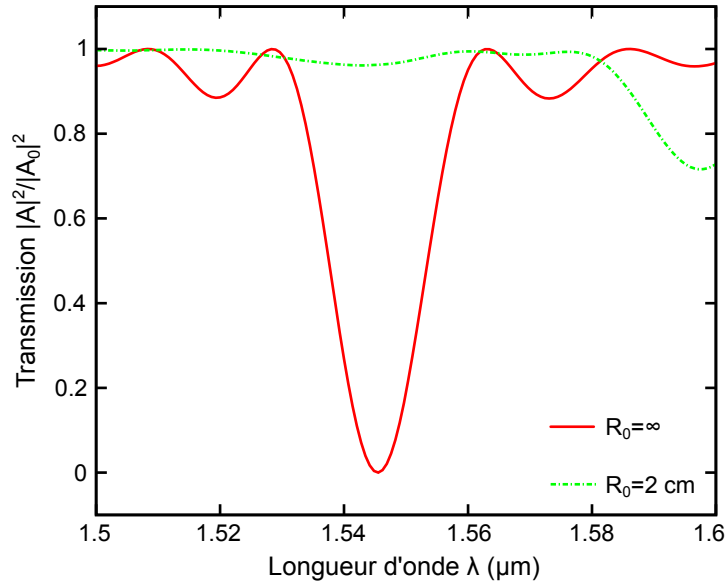


FIGURE 5.29: Spectre du réseau LPG2.

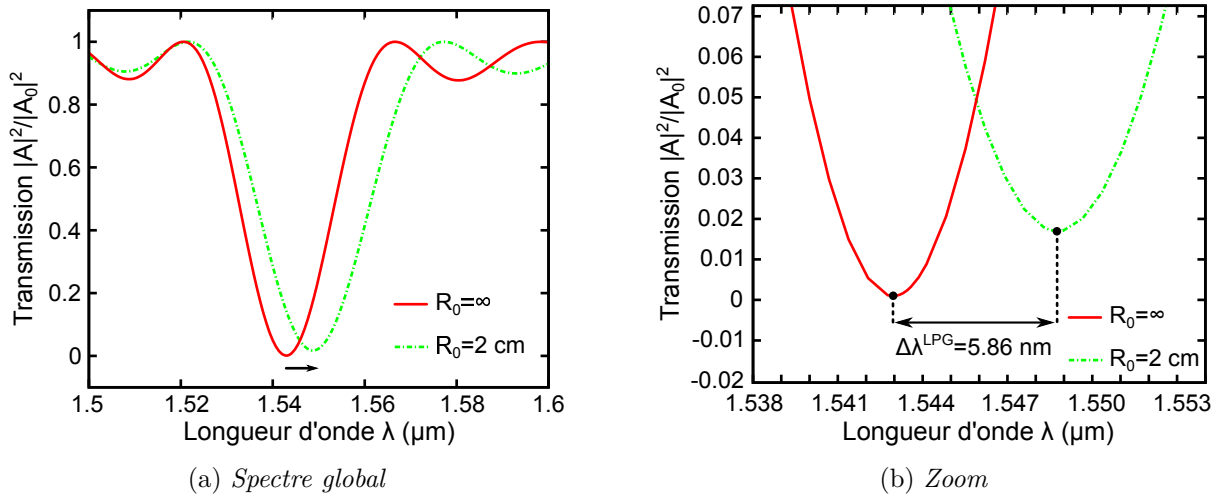


FIGURE 5.30: Spectre du LPG1.

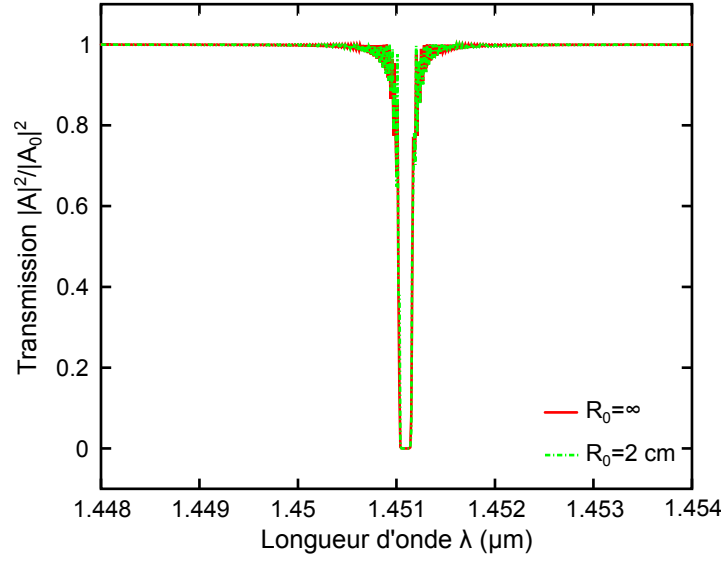


FIGURE 5.31: Spectre du FBG issu du capteur LPG1.

léger élargissement et connaissent une petite diminution de leur amplitude. Ces changements sont dus à la variation de $\widetilde{\kappa}^{co}$ et κ_{cl}^{co} avec le rayon de courbure R_0 . Ils ne sont toutefois pas assez significatifs pour empêcher l'identification des longueurs d'onde de résonance λ_B et λ_{LPG} . Par contre, un décalage de ces longueurs d'onde de résonance est constaté, il est évalué à 6 pm pour le FBG et à 5,86 nm pour le LPG1. En insérant ces décalages dans le système d'équations (4.2), nous obtenons les déformations théoriques mesurées par le capteur. Dans le cas présent, ces déformations s'établissent à $\epsilon_r = -3575 \mu\epsilon$ et $\epsilon_z = -1852 \mu\epsilon$, alors qu'en réalité la déformation du capteur est nulle. Ces déformations sont par conséquent équivalentes aux incertitudes de mesure du capteur. En d'autres termes, selon la courbure du capteur, des erreurs de mesure de $3575 \mu\epsilon$ et $1852 \mu\epsilon$ peuvent être commises sur l'évaluation des déformations radiales et axiales. Ces erreurs ne sont bien évidemment pas acceptables, il est donc nécessaire de modifier les caractéristiques du capteur afin de diminuer sa sensibilité.

Pour rendre le capteur LPG1 insensible à la courbure, nous recherchons les valeurs optimales de δn_1^B et δn_1^L qui minimisent la sensibilité du FBG et du LPG vis à vis de la courbure. À l'exception des pas des réseaux, les autres paramètres optiques et géométriques du capteur sont gardés constants. Une fois les valeurs optimales de δn_1^B et de δn_1^L déterminées, les pas des réseaux seront ajustés afin d'avoir des longueurs d'onde λ_B et λ_{LPG} inchangées par rapport à la version du capteur présentée dans le tableau 5.7, c'est à dire : $\lambda_B \simeq 1,451 \mu m$ et $\lambda_{LPG} \simeq 1,597 \mu m$. Dans la suite nous imposerons $\delta n_1^B = \delta n_1^L = \delta \bar{n}_1$. Ainsi nous focalisons nos efforts uniquement sur le réseau longue période, car comme constatée sur les figures 5.30 et 5.31, ce réseau est plus sensible à la courbure de la fibre que le FBG. La valeur de $\delta \bar{n}_1^L$ minimisant la sensibilité du LPG à la courbure est obtenue par la méthode décrite dans la Section (5.4.4). Cependant, cette méthode est légèrement modifiée afin de prendre en compte la superposition des deux réseaux.

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 4, la superposition du FBG sur le LPG implique un décalage de la longueur d'onde de résonance λ_{LPG} . Dans ce type de structure, λ_{LPG} dépend à la fois de l'indice effectif moyen du FBG et du LPG, la longueur d'onde λ_{LPG} est ainsi évaluée par :

$$\lambda_{LPG} = \left[n_{eff}^{co} - n_{eff}^{cl} + \frac{\lambda_{LPG}}{2\pi} \left(\delta \bar{n}_1^B + \delta \bar{n}_1^L \right) \left(\widetilde{\kappa}^{co} - \widetilde{\kappa}^{cl} \right) \right] \Lambda_{LPG} \quad (5.91)$$

La courbure du capteur entraîne un décalage de la longueur d'onde de résonance λ_{LPG} . À partir de

l'équation (5.91), ce décalage de longueur d'onde équivaut à :

$$\Delta\lambda_{\text{LPG}}(\delta\bar{n}_1) = \left\{ \Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} + \underbrace{\frac{\lambda_{\text{LPG}}}{\pi} \delta\bar{n}_1 [\kappa^{\Sigma}(R_0) - \kappa^{\Sigma}(\infty)]}_{\Delta\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}} \right\} \Lambda_{\text{LPG}} \quad (5.92)$$

où $\kappa^{\Sigma} = \widetilde{\kappa^{\text{co}}} - \widetilde{\kappa^{\text{cl}}}$.

La valeur optimale de $\delta\bar{n}_1$ est obtenue graphiquement pour une longueur d'onde $\lambda_{\text{LPG}} = 1,597 \mu\text{m}$. Pour ce faire, nous traçons l'expression $\Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} + \Delta\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}$ de l'équation (5.92) en fonction de R_0 et pour plusieurs valeurs de $\delta\bar{n}_1$. La valeur optimale de $\delta\bar{n}_1$ est celle qui minimise la variation de $\Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} + \Delta\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}$. Nous présentons sur la figure 5.32, quelques exemples de courbes. La variation minimale de $\Delta n_{\text{eff}}^{\Sigma} + \Delta\delta n_{\text{eff}}^{\Sigma}$ est constatée pour $\delta\bar{n}_1 \simeq 3,1.10^{-4}$. Ainsi, d'après la relation (5.92), la sensibilité du LPG à la

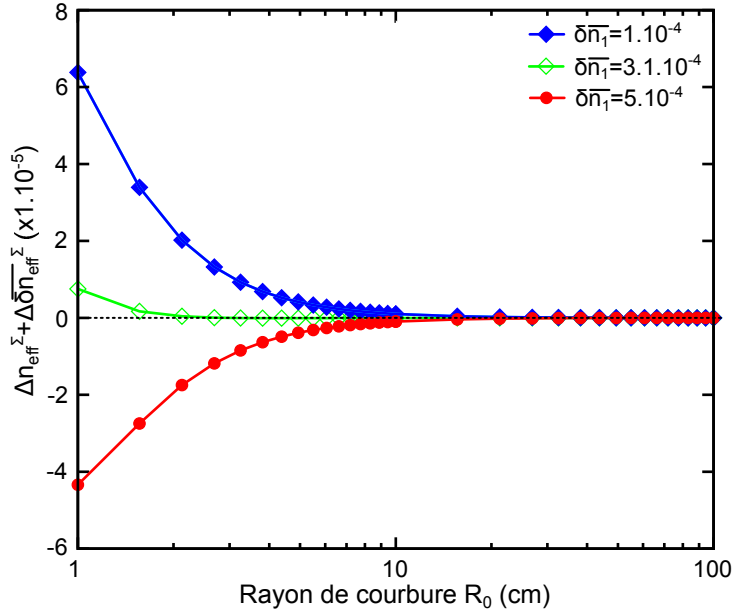


FIGURE 5.32: Détermination graphique de l'indice effectif moyen $\delta\bar{n}_1$ optimal.

courbure est minimale pour $\delta\bar{n}_1 = 3,1.10^{-4}$, c'est donc cette valeur de $\delta\bar{n}_1$ que nous utiliserons pour l'élaboration de notre capteur.

L'augmentation de $\delta\bar{n}_1$ de 1.10^{-4} à $3,1.10^{-4}$ provoque un décalage de λ_{LPG} vers les plus grandes longueurs d'onde. Pour garder λ_{LPG} à une valeur constante de $1,597 \mu\text{m}$, nous modifions le pas du réseau Λ_{LPG} à l'aide de la relation suivante déduite de la formulation (5.91) :

$$\Lambda_{\text{LPG}} = \frac{\lambda_{\text{LPG}}}{n_{\text{eff}}^{\text{co}} - n_{\text{eff}}^{\text{cl}} + \delta\bar{n}_1 \frac{\widetilde{\kappa^{\text{co}}} - \widetilde{\kappa^{\text{cl}}}}{\pi} \lambda_{\text{LPG}}} \quad (5.93)$$

Le nouveau pas Λ_{LPG} calculé est évalué à $365,69 \mu\text{m}$. La longueur L du réseau doit être également modifiée pour garantir une amplitude maximale de la résonance du LPG. Avec les nouvelles caractéristiques des réseaux, la longueur optimale des réseaux est donnée par : $L = \frac{\pi}{m\kappa_{\text{cl}}^{\text{co}}} \simeq 7400 \mu\text{m}$.

Nous présentons sur la figure 5.33, le spectre du LPG1 dimensionné pour être insensible à la courbure de la fibre. Notons que le spectre a été calculé en prenant en compte la superposition du FBG sur le LPG. Avec les nouvelles caractéristiques, nous constatons qu'une courbure de la fibre de rayon

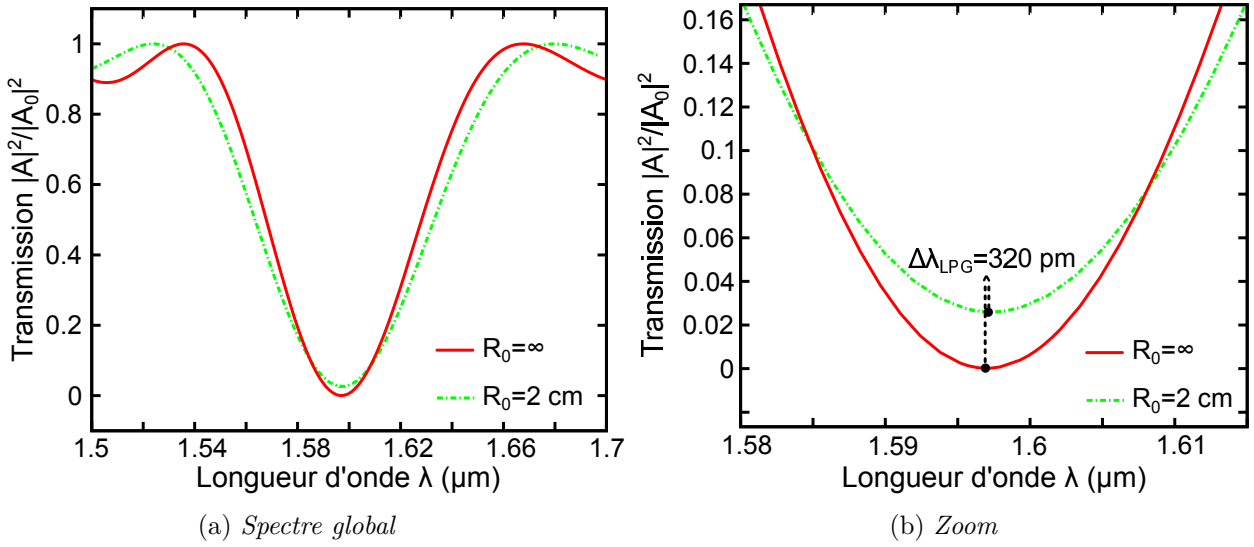


FIGURE 5.33: Spectre du LPG1 modifié pour minimiser sa sensibilité à la courbure de la fibre.

$R_0 = 2 \text{ cm}$ entraîne un décalage de λ_{LPG} d'environ 320 pm, soit un décalage 18 fois inférieur à celui constaté sur la figure 5.30. La sensibilité du LPG1 à la courbure de la fibre a ainsi été drastiquement abaissée.

Concernant la résonance du FBG, l'augmentation de l'indice effectif moyen des deux réseaux conduit également à une augmentation de la longueur d'onde de Bragg. Pour compenser cette augmentation nous recalculons le pas du FBG Λ_B pour que λ_B soit égale à $1,45 \mu\text{m}$:

$$\Lambda_B = \frac{\lambda_B}{2n_{\text{eff}}^{\text{co}} + \delta\bar{n}_1 \frac{2\kappa^{\text{co}}}{\pi} \lambda_B} \simeq 500,42 \text{ nm} \quad (5.94)$$

Le spectre en transmission du FBG calculé avec les nouveaux paramètres : $L = 7400 \mu\text{m}$, $\delta\bar{n}_1 = 3,1 \cdot 10^{-4}$ et $\Lambda_B = 500,42 \text{ nm}$ est présenté sur la figure 5.34.

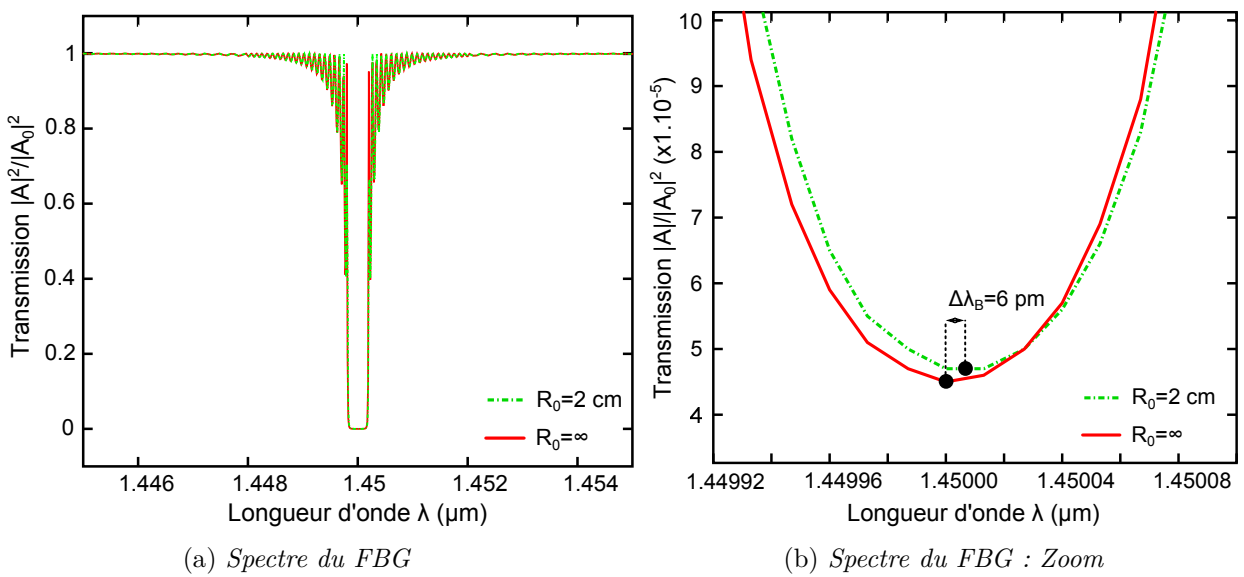


FIGURE 5.34: Résonance du FBG observée dans le spectre en transmission du capteur redimensionné.

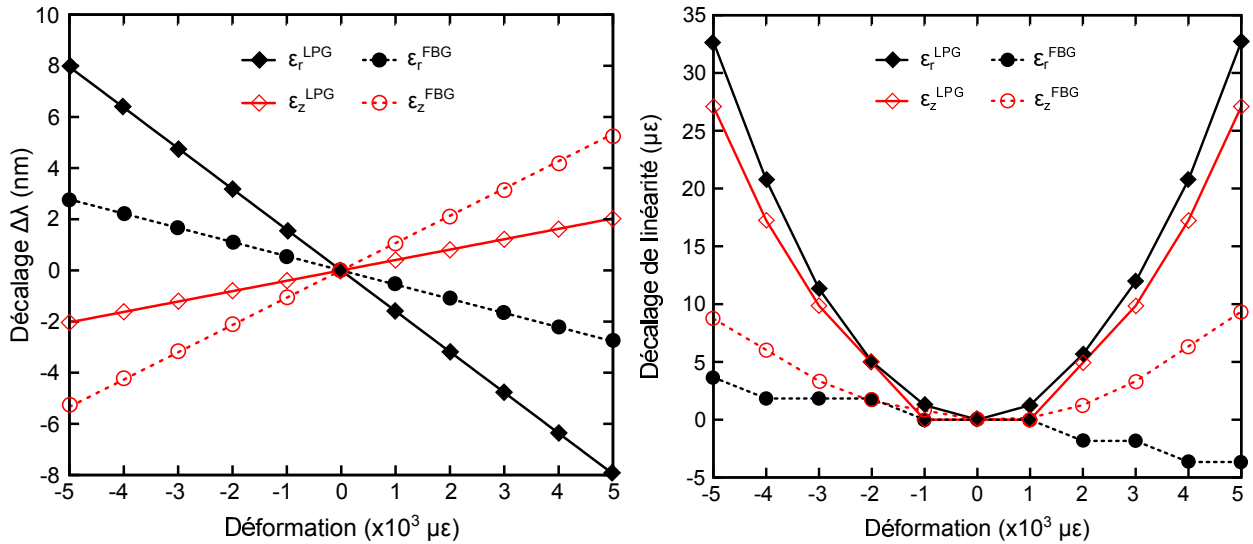
Nous notons que la résonance du FBG s'est élargie avec les nouvelles caractéristiques du réseau. La largeur à mi-hauteur de la résonance passe de 145 pm à 428 pm entre l'ancienne et la nouvelle version du capteur. Cette élargissement s'explique par l'augmentation du couplage $\kappa^{co} = \delta\bar{n}_1 \kappa^{co}$ du FBG.

La longueur d'onde λ_B de la nouvelle version du capteur est peu modifiée par la courbure de la fibre. Elle augmente légèrement avec la courbure de la fibre. Elle passe de 1,45 μm pour le réseau en configuration droite à 1,450006 μm pour $R_0 = 2 cm$, soit une augmentation de 6 pm. Nous synthétisons dans le tableau 5.8, les paramètres du capteur redimensionné.

TABLE 5.8: Dimensionnement du capteur permettant au capteur d'être peu sensible à la courbure.

Paramètres	Capteur LPG1
a_2 (μm)	15,45
Λ_{LPG} (μm)	365,69
κ_{cl}^{co} (μm^{-1})	1,37
L (μm)	7400
$\delta\bar{n}_1$	$3,1 \cdot 10^{-4}$
m	1
Λ_B (nm)	500,42

Avec les nouvelles caractéristiques du capteur, il est possible d'estimer les erreurs sur les mesures de ϵ_r et ϵ_z induite par une courbure du capteur de rayon $R_0 = 2 cm$. Pour ce rayon de courbure, on a vu que les longueurs d'onde de résonance λ_B et λ_{LPG} se décalaient respectivement de 6 pm et 320 pm. De ces valeurs et des relations (4.2), nous en déduisons qu'une courbure de 2 cm peut être assimilée à des déformations de l'ordre de $\epsilon_r = -230,285 \mu\epsilon$ et de $\epsilon_z = -114,159 \mu\epsilon$.



(a) Réponses du capteur aux déformations

(b) Écart entre les réponses réelles et les régressions linéaires

FIGURE 5.35: Caractéristiques des réponses aux déformations ϵ_r et ϵ_z du capteur insensible à la courbure.

En utilisant la méthode décrite dans le Chapitre 4, nous pouvons déterminer les sensibilités et les résolutions de ce nouveau capteur. Les sensibilités du FBG aux déformations radiales et axiales valent respectivement $\alpha_{1r} = -0,546 pm/\mu\epsilon$ et $\alpha_{1z} = 1,050 pm/\mu\epsilon$ et celles du LPG sont évaluées respec-

tivement à $\alpha_{2r} = -1,591 \text{ pm}/\mu\epsilon$ et à $\alpha_{2z} = 0,406 \text{ pm}/\mu\epsilon$. De ces valeurs et en considérant que le plus petit décalage de longueur d'onde mesurable $\delta\lambda_{\min}$ est de l'ordre de 1 pm , nous déduisons de (4.3) que la plus petite déformation radiale mesurable est $\Delta\epsilon_r = 1 \mu\epsilon$ et la plus petite déformation axiale mesurable est $\Delta\epsilon_z = 1,475 \mu\epsilon$. Les réponses du capteur aux déformations ϵ_r et ϵ_z sont présentées sur les figures 5.35. Nous constatons que la linéarité du capteur n'a pas été affectée négativement par le redimensionnement du capteur. L'écart à la linéarité n'excède pas $35 \mu\epsilon$ pour une déformation de $5000 \mu\epsilon$, soit un écart relatif maximal de $0,7 \%$ (voir figure 5.35b). De manière générale, les performances métrologiques du capteur n'ont pas été dégradées après le redimensionnement. Que se soient les sensibilités, les résolutions ou la linéarité du nouveau capteur, elles restent du même ordre de grandeur que les caractéristiques métrologiques de l'ancien capteur dont le dimensionnement est présenté dans le tableau 5.7.

5.6 Conclusion du chapitre

L'objectif de ce chapitre a été de comprendre et d'étudier le comportement des FBG et des LPG lorsqu'ils étaient soumis à une courbure. Nous avons commencé par une étude de la littérature afin de trouver une méthode permettant la modélisation des fibres courbées. Quatre méthodes numériques ont été identifiées : la méthode perturbative, le conformal mapping, la méthode basée sur la transformation des tenseurs de perméabilité et de permittivité et la méthode consistant à approximer la fibre courbée à un tore. Nous avons ensuite effectué un comparatif entre ces quatre méthodes. Il s'est avéré que la méthode consistant à approximer la fibre courbée à un tore était la plus complète et la plus précise, car elle est la seule à prendre en considération la nature vectorielle des modes guidés et les contraintes mécaniques réelles présentes dans la fibre courbée.

Nous avons ensuite étudié le comportement des modes de gaine lorsqu'ils étaient guidés par une fibre courbée et nous avons montré que les petits rayons de gaine rendaient les modes de gaine plus stables vis-à-vis des courbures.

Nous nous sommes ensuite intéressé au comportement des FBG et des LPG vis-à-vis de la courbure de la fibre. Nous avons constaté, en étudiant la littérature, que peu de travaux avaient été effectués sur cette thématique et que ces travaux présentaient une grande hétérogénéité dans la réponse des réseaux à la courbure. Nous avons identifié à l'aide de notre modèle numérique un nouveau facteur clé de la sensibilité des réseaux fibrés à la courbure : l'indice effectif moyen du réseau. Pour une architecture de fibre fixée, l'indice effectif moyen conditionne l'amplitude et le sens du décalage de la longueur d'onde de résonance.

À partir de ces nouvelles connaissances, nous avons développé une méthode numérique permettant de dimensionner des FBG et des LPG quasi-insensibles à la courbure de la fibre. Cette méthode a été appliquée au capteur de déformations sujet de ce manuscrit car il s'est avéré qu'une courbure de ce capteur pouvait engendrer des erreurs de mesures de l'ordre de $3000 \mu\epsilon$. Après redimensionnement, nous avons abaissé d'un facteur 18 la sensibilité du capteur à la courbure de la fibre. Dans cette nouvelle configuration une courbure de rayon $R_0 = 2 \text{ cm}$ occasionne une erreur de mesure de l'ordre de $-230,285 \mu\epsilon$ pour la déformation radiale et de $-114,159 \mu\epsilon$ pour la déformation axiale. Les sensibilités, les résolutions et la linéarité du capteur n'ont pratiquement pas été affectées par ce redimensionnement.

Conclusion

Dans le chapitre introductif nous avons étudié l'impact du couplage, entre les déformations subies par un capteur à réseau de Bragg et celles du milieu dans lequel il est enfoui, sur la mesure de la déformation axiale. À travers quelques exemples on a montré qu'il est nécessaire de quantifier à la fois la déformation axiale et radiale du capteur pour obtenir une mesure fiable de la déformation au cœur d'une structure.

Les modèles de dépouillement usuels des longueurs d'onde de Bragg négligent l'effet de ce couplage entre le milieu et le capteur sur sa déformation radiale. Cette simplification n'est que peu préjudiciable à la justesse de la mesure pour de nombreux cas d'applications excepté pour les structures les plus rigides dont le coefficient de Poisson diffère le plus de celui du verre. Or, avec l'essor de l'utilisation des capteurs à réseaux de Bragg au cœur des matériaux composites qui entre précisément dans ce cadre, nous estimons qu'il devient nécessaire de disposer d'architectures de capteur plus performantes que l'existant pour déterminer déformations axiales et radiales.

Notre motivation est double : d'une part disposer d'une architecture permettant d'améliorer la justesse de la mesure, et d'autre part avoir accès à une information plus riche avec en ligne de mire des applications aux matériaux composites dont le comportement et les mécanismes de dégradations sont difficiles à anticiper.

Ces deux objectifs se rejoignent en un seul : étudier une architecture de capteur permettant de mesurer simultanément la déformation axiale et les déformations radiales au cœur d'une fibre optique et donc, de positionner plusieurs réseaux en un même emplacement. Notre choix s'est porté sur la juxtaposition d'un réseau de Bragg et d'un réseau longue période.

Le cahier des charges que nous nous sommes fixés pour notre nouveau capteur est le suivant :

- Conserver l'encombrement d'une fibre optique standard ;
- Utiliser un réseau compatible avec les méthodes d'interrogations employées sur les FBG standards ;
- Être en mesure de détecter de très petites déformations de l'ordre de $1\text{ }\mu\text{m}$ comme sont capables de le faire les FBG classiques.

La recherche d'une architecture optimale de capteur comportant un réseau longue période nous a demandé tout un travail sur les modes de gaine, les couplages de modes via les réseaux et les effets des courbures. Le cheminement emprunté pour effectuer ce travail a mené à des résultats originaux ou des éclairages nouveaux sur des résultats déjà établis. Voici les plus marquants.

Une première originalité du travail a été l'étude globale sur la sensibilité des réseaux longue période à la déformation. Ce sujet avait déjà été partiellement étudié, mais jamais de façon générale. Pour essayer de définir des lois de comportement, nous avons adopté une approche statistique. Un grand nombre de réseaux longue période ont été simulés, leurs caractéristiques étant tirées aléatoirement. Cette approche a mis en évidence un certain nombre de propriétés remarquables :

- En général, il n'y a pas de sensibilité croisée aux déformations axiales et radiales, c'est à dire que la sensibilité d'un réseau longue période à la déformation radiale est indépendante de la déformation axiale et réciproquement.

- Il existe un lien de proportionnalité entre la sensibilité à la déformation axiale et la sensibilité à la déformation radiale. Ce lien pourrait être exploité pour estimer la sensibilité à la déformation radiale, difficile à mesurer, connaissant la sensibilité à la déformation axiale.
- Il existe une grande régularité dans le comportement des réseaux longue période. Ils présentent quasiment tous des sensibilités aux déformations proches de $0,5 \text{ pm}/\mu\epsilon$ en valeur absolue. Quelques modes cependant présentent des sensibilités nettement plus élevées que la moyenne. On les trouve plutôt parmi les modes d'ordre élevé et les réseaux de pas faibles.
- Les paramètres qui influent le plus sur les sensibilités aux déformations sont le pas du réseau et le rayon de la gaine. Les sensibilités les plus fortes sont obtenues avec les réseaux de plus petits pas et de plus petits rayons de gaine. Ces réseaux présentent aussi les plus forts coefficients de couplage.
- Les coefficients de couplage sont très peu affectés par les déformations.

En second lieu, la démarche d'optimisation de l'architecture du capteur nous a amené à retrouver un résultat établi par Morishita [39] sur l'existence de couples de modes de gaine et leur instabilité vis à vis du rayon de gaine. Plus précisément, les modes de gaine hybrides peuvent être groupés par paire $\{\text{Hyb}_{\ell 2m-1}, \text{Hyb}_{\ell 2m}\}$. Pour un certain rayon de gaine critique, les deux modes ont quasiment le même indice effectif et la même répartition transverse d'intensité. De part et d'autre du rayon critique, les modes s'échangent leur structure électromagnétique. C'est à dire que la répartition transverse d'intensité du mode $\text{Hyb}_{\ell 2m}$ pour un rayon de gaine plus grand que le rayon critique est la même que celle du mode $\text{Hyb}_{\ell 2m-1}$ pour un rayon de gaine plus petit que le rayon critique et réciproquement. Nous avons étudié de façon systématique ce rayon critique et identifié les paramètres qui avaient une influence sur sa valeur. Nous avons montré qu'il pouvait être obtenu à l'aide d'une relation simple en fonction du rayon du cœur et de la fréquence normalisée :

$$a_2^{\text{critique}} = (C_1 + C_4 V) a_1 + C_2^2 (V - 1,842)^2$$

où les coefficients C ont été tabulés pour les huit premiers modes. Cette relation trouve son utilité dans le fait que le rayon de gaine critique est un paramètre crucial dans la conception d'une structure à fibre optique. Il définit un zone qui peut être très intéressante car le coefficient de couplage et la sensibilité aux déformations y sont maximaux. Mais c'est une zone qui peut être aussi dangereuse car très instable en tant que zone de transition. Par exemple, c'est aussi au niveau du rayon de gaine critique que le coefficient de couplage chute brutalement. Il importe donc de savoir où se trouve exactement le rayon de gaine critique.

Le dernier point, et sans doute le plus important, concerne les effets des courbures sur les modes guidés et les réseaux. Il faut souligner que le simple fait de courber la fibre optique augmente singulièrement la complexité du système. Le premier problème qui se pose est celui de la modélisation de la fibre et de la propagation de la lumière. Traiter le système complet en 3 dimensions est hors de portée des ordinateurs standards. Pour réduire le système à 2 dimensions, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature : la méthode perturbative, le « conformal mapping », la méthode tensorielle et la méthode axi-symétrique. Nous avons implémenté les quatre méthodes pour les comparer. En pratique, les deux premières méthodes sont limitées aux fibres faiblement guidantes. La méthode tensorielle ne souffre pas de cette limitation mais ne permet pas d'anisotropie. Elle ne permet donc pas de prendre en compte les variations d'indice induites par effet photoélastique par la déformation de la fibre. Finalement, seule la méthode axi-symétrique permet une description rigoureuse de tous les effets induits par la courbure, tant que le rayon de courbure est grand devant le diamètre de la fibre. C'est donc cette méthode que nous avons utilisée. Elle consiste à assimiler la fibre courbée à un tore, et à faire une analyse modale dans la section de la fibre, en utilisant un repère axi-symétrique dont le centre est confondu avec le centre de courbure de la fibre. Les simulations effectuées montrent qu'un

mode de gaine est d'autant moins sensible à la courbure que son ordre est faible et que le rayon de gaine est petit.

Le second problème est la modélisation des réseaux courbés. Les quelques travaux publiés sur ce sujet restent souvent flous sur la méthode employée, ou proposent des solutions peu convaincantes comme d'assimiler le réseau courbé à un réseau blasé. Notre approche a consisté à assimiler le réseau courbé à un réseau droit dont l'indice varie transversalement pour tenir compte de la différence de chemin optique entre le bord extérieur et le bord intérieur de la courbure. Nous avons ensuite déterminé les champs des modes guidés par une analyse modale dans la section de la fibre en utilisant un repère axi-symétrique. Cela a permis de calculer les coefficients de couplage entre les différents modes. Ces coefficients de couplage étaient alors injectés dans les équations des modes couplés dont l'intégration donnait le spectre en transmission du réseau.

Ces deux problèmes résolus, il a été possible d'étudier l'influence de la courbure sur les réseaux. Des études avaient déjà été menées sur les réseaux de Bragg mais les résultats publiés étaient à première vue incohérents. Certaines références trouvaient que la longueur de Bragg diminuait avec le rayon de courbure quand d'autres montraient qu'elle augmentait. Aucune explication théorique satisfaisante n'était apportée. En étudiant rigoureusement le problème, nous avons montré que la variation de la longueur d'onde de Bragg avec la courbure dépend de deux termes qui ont des évolutions opposées. Le sens de variation de la longueur d'onde de Bragg dépend donc des valeurs relatives de ces deux termes. Un de ces termes est quasiment constant d'un réseau à l'autre car il dépend uniquement des caractéristiques opto-géométriques de la fibre. En revanche le second terme est proportionnel à l'indice effectif moyen du réseau, il est donc très variable en fonction du réseau. Finalement, l'indice effectif moyen est le facteur clé dans la réponse du réseau à la courbure, c'est lui qui gouverne le sens et l'amplitude du décalage de la longueur d'onde de Bragg. Ce résultat permet d'expliquer toutes les expériences publiées à ce jour.

Le même type d'étude a été menée pour les réseaux longue période, mettant de nouveau en évidence l'importance de l'indice effectif moyen.

Finalement, en combinant tous ces résultats, nous avons montré qu'il existait une architecture composée de la juxtaposition d'un réseau de Bragg et d'un réseau longue période, inscrits dans une fibre double gaines permettant de mesurer simultanément les déformations axiales et radiales, avec des résolutions comparables aux capteurs à réseaux de Bragg classiques et très peu sensible à la courbure. Cette possibilité étant théoriquement démontrée, il serait intéressant à l'avenir de la tester expérimentalement. Il y aurait en outre tout un travail expérimental à mener sur le comportement des réseaux vis à vis de la courbure exploitant le rôle de l'indice moyen découvert dans ce travail.

Bibliographie

- [1] M Suleiman, HC Seat, and T Bosch. Remote fiber bragg grating strain sensing by self-mixing interferometry. In *Information and Communication Technologies : From Theory to Applications, 2008. ICTTA 2008. 3rd International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2008.
- [2] Chuan Li, Yong-Gui Zhao, Hao Liu, Zhou Wan, Chen Zhang, and Ning Rong. Monitoring second lining of tunnel with mounted fiber bragg grating strain sensors. *Automation in Construction*, 17(5) :641 – 644, 2008.
- [3] T Fresvig, P Ludvigsen, H Steen, and O Reikerås. Fibre optic bragg grating sensors : an alternative method to strain gauges for measuring deformation in bone. *Medical engineering & physics*, 30(1) :104–108, 2008.
- [4] Marten de Vries, Vikram Bhatia, Tiffanie D’Alberto, Vivek Arya, and Richard O. Claus. Photoinduced grating-based optical fiber sensors for structural analysis and control. *Engineering Structures*, 20(3) :205 – 210, 1998. Structural Control.
- [5] T. Erdogan. Cladding-mode resonances in short- and long-period fiber grating filters. *Journal of the Optical Society of America A*, 14 :1760–1773, August 1997.
- [6] Rachid Gafsi and Mahmoud A El-Sherif. Analysis of induced-birefringence effects on fiber bragg gratings. *Optical Fiber Technology*, 6(3) :299–323, 2000.
- [7] Mathias S Müller and Christoph DA Schnarr. Analytical coherency matrix treatment of shear strained fiber bragg gratings. *Optics express*, 17(25) :22624–22631, 2009.
- [8] Dominique Leduc, Yann Lecieux, Pierre-Antoine Morvan, and Cyril Lupi. Architecture de capteurs à fibre optique pour la mesure simultanée des déformations axiales et radiales. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, 13(1 2) :9–30, 2013.
- [9] Rodrigo A. Silva-Muñoz and Roberto A. Lopez-Anido. Structural health monitoring of marine composite structural joints using embedded fiber bragg grating strain sensors. *Composite Structures*, 89(2) :224 – 234, 2009.
- [10] Y.C. Chen, C.C. Hsieh, and C.C. Lin. Strain measurement for composite tubes using embedded, fiber bragg grating sensor. *Sensors and Actuators A : Physical*, 167(1) :63 – 69, 2011.
- [11] R. Di Sante and L. Donati. Strain monitoring with embedded fiber bragg gratings in advanced composite structures for nautical applications. *Measurement*, 46(7) :2118 – 2126, 2013.
- [12] Luis P. Canal, Roohollah Sarfaraz, Georgios Violakis, John Botsis, Véronique Michaud, and Hans G. Limberger. Monitoring strain gradients in adhesive composite joints by embedded fiber bragg grating sensors. *Composite Structures*, 112(0) :241 – 247, 2014.
- [13] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, and H. N. Abramson. Theory of Elasticity (3rd ed.). *Journal of Applied Mechanics*, 37 :888, 1970.
- [14] A. Bertholds and R. Dandliker. Determination of the individual strain-optic coefficients in single-mode optical fibres. *Lightwave Technology, Journal of*, 6(1) :17–20, Jan 1988.

- [15] Pierre Ferdinand. Capteurs à fibres optiques à réseaux de bragg. *Techniques de l'ingénieur*, 6735 :1–24, 1999.
- [16] Izabella Krucinska and Tomasz Stypka. Direct measurement of the axial poisson's ratio of single carbon fibres. *Composites Science and Technology*, 41(1) :1 – 12, 1991.
- [17] Loleï Khoun, Rui de Oliveira, Véronique Michaud, and Pascal Hubert. Investigation of process-induced strains development by fibre bragg grating sensors in resin transfer moulded composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(3) :274–282, 2011.
- [18] SW James, ML Dockney, and RP Tatam. Simultaneous independent temperature and strain measurement using in-fibre bragg grating sensors. *Electronics Letters*, 32(12) :1133–1134, 1996.
- [19] H.J. Patrick, G.M. Williams, A.D. Kersey, J.R. Pedrazzani, and A.M. Vengsarkar. Hybrid fiber bragg grating/long period fiber grating sensor for strain/temperature discrimination. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 8(9) :1223–1225, Sept 1996.
- [20] Fang Xie, Shulian Zhang, Yan Li, and Sang Bae Lee. Temperature-compensating multiple fiber bragg grating strain sensors with a metrological grating. *Optics and Lasers in Engineering*, 41(1) :205 – 216, 2004.
- [21] MG Xu, J-L Archambault, L Reekie, and JP Dakin. Discrimination between strain and temperature effects using dual-wavelength fibre grating sensors. *Electronics letters*, 30(13) :1085–1087, 1994.
- [22] Eric Udd. Review of multi-parameter fiber grating sensors. In *Optics East 2007*, pages 677002–677002. International Society for Optics and Photonics, 2007.
- [23] Tadamichi Mawatari and Drew Nelson. A multi-parameter bragg grating fiber optic sensor and triaxial strain measurement. *Smart Materials and Structures*, 17(3) :035033, 2008.
- [24] Bai-Ou Guan, Hwa-Yaw Tam, Xiao-Ming Tao, and Xiao-Yi Dong. Simultaneous strain and temperature measurement using a superstructure fiber bragg grating. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 12(6) :675–677, 2000.
- [25] Hao Chi, Xiao-Ming Tao, Dong-Xiao Yang, and Kang-Sheng Chen. Simultaneous measurement of axial strain, temperature, and transverse load by a superstructure fiber grating. *Opt. Lett.*, 26(24) :1949–1951, Dec 2001.
- [26] Sébastien Triollet. *Développement d'un capteur à fibre optique à base de réseaux de Bragg superposés de courtes et de longues périodes : application à la mesure discriminée de température et de déformation*. PhD thesis, Saint Etienne, 2010.
- [27] So Eun Kim, Bok Hyeon Kim, Chung Ghiu Lee, Sejin Lee, Kyunghwan Oh, and Chul-Sik Kee. Elliptical defected core photonic crystal fiber with high birefringence and negative flattened dispersion. *Opt. Express*, 20(2) :1385–1391, Jan 2012.
- [28] Xuyou Li, Pan Liu, Zhenlong Xu, and Zhiyong Zhang. Design of a pentagonal photonic crystal fiber with high birefringence and large flattened negative dispersion. *Appl. Opt.*, 54(24) :7350–7357, Aug 2015.
- [29] Milton Abramowitz, Irene A Stegun, et al. Handbook of mathematical functions. *Applied Mathematics Series*, 55 :62, 1966.
- [30] A. Kapoor and G.S. Singh. Mode classification in cylindrical dielectric waveguides. *Lightwave Technology, Journal of*, 18(6) :849–852, June 2000.
- [31] M.M.Z. Kharadly. Properties of dielectric-tube waveguides. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 116 :214–224(10), February 1969.
- [32] E. Snitzer. Cylindrical Dielectric Waveguide Modes. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 51 :491, May 1961.

- [33] A. Safaai-Jazi and G. L. Yip. Classification of hybrid modes in cylindrical dielectric optical waveguides. *Radio Science*, 12(4) :603–609, 1977.
- [34] A. W. Snyder and W. R. Young. Modes of optical waveguides. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 68 :297–309, March 1978.
- [35] Xuefei Tan, Xianglian Liu, Wei Zhao, Cheng Li, Yishan Wang, and Jianfeng Li. Modal characteristics analysis of a doubly clad optical fiber with semi-weakly guiding approximation. *Optics Communications*, 294(0) :148 – 155, 2013.
- [36] C. Y. H. Tsao, D. N. Payne, and W. A. Gambling. Modal characteristics of three-layered optical fiber waveguides : a modified approach. *Journal of the Optical Society of America A*, 6 :555–563, April 1989.
- [37] M. Zahirul Alam and Jacques Albert. Selective excitation of radially and azimuthally polarized optical fiber cladding modes. *J. Lightwave Technol.*, 31(19) :3167–3175, Oct 2013.
- [38] Jens Thomas, Nemanja Jovanovic, Ria G. Becker, Graham D. Marshall, Michael J. Withford, Andreas Tünnermann, Stefan Nolte, and M. J. Steel. Cladding mode coupling in highly localized fiber bragg gratings : modal properties and transmission spectra. *Opt. Express*, 19(1) :325–341, Jan 2011.
- [39] K. Morishita. Hybrid modes in circular cylindrical optical fibers. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 31(4) :344–350, Apr 1983.
- [40] Vikram Bhatia. Properties and sensing applications of long-period gratings. 1996.
- [41] Vikram Bhatia. Applications of long-period gratings to single and multi-parameter sensing. *Optics Express*, 4(11) :457–466, 1999.
- [42] Sébastien Triollet, Laurent Robert, Emmanuel Marin, and Youcef Ouerdane. Discriminated measures of strain and temperature in metallic specimen with embedded superimposed long and short fibre bragg gratings. *Measurement Science and Technology*, 22(1) :015202, 2011.
- [43] T. Erdogan. Fiber grating spectra. *Journal of Lightwave Technology*, 15 :1277–1294, August 1997.
- [44] ALLAN W. SNYDER. Coupled-mode theory for optical fibers. *J. Opt. Soc. Am.*, 62(11) :1267–1277, Nov 1972.
- [45] D. Marcuse. Coupled-mode theory for anisotropic optical waveguides. *Bell System Technical Journal*, 54(6) :985–995, 1975.
- [46] DIETRICH Marcuse. Coupled mode theory of optical resonant cavities. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 21(11) :1819–1826, 1985.
- [47] A. Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 9 :919–933, September 1973.
- [48] Herwig Kogelnik. 2. theory of dielectric waveguides. In *Integrated Optics*, pages 13–81. Springer, 1975.
- [49] Amos Hardy and William Streifer. Coupled mode theory of parallel waveguides. *Lightwave Technology, Journal of*, 3(5) :1135–1146, Oct 1985.
- [50] Xiangru Wang, Caidong Xiong, and Juanyan Luo. Coupling coefficients evaluation of a directional coupler using gain guided and index antiguided fibers. *Optics Communications*, 282(3) :382 – 386, 2009.
- [51] Remco Stoffer, Kirankumar R. Hiremath, Manfred Hammer, Ladislav Prkna, and Jiří Čtyroký. Cylindrical integrated optical microresonators : Modeling by 3-d vectorial coupled mode theory. *Optics Communications*, 256(1–3) :46 – 67, 2005.

- [52] Thomas Kamalakis, Dimitris Alexandropoulos, and Nikos Vainos. Efficient design of polymer micro-ring resonator filters based on coupled mode theory and finite difference mode solver. *Optics Communications*, 339(0) :123 – 128, 2015.
- [53] Somnath Sengupta and S.K. Ghorai. An efficient method for determining transmission characteristics of superstructure fiber bragg grating and its use for multiparameter sensing. *Optical Fiber Technology*, 21(0) :146 – 153, 2015.
- [54] Faramarz E. Seraji, S. Farsinezhad, and Leila Chehreghani Anzabi. Optimization of long-period grating inscribed in large mode area photonic crystal fiber for design of bandstop filter. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 122(1) :58 – 62, 2011.
- [55] Scott M Norton, Turan Erdogan, and G Michael Morris. Coupled-mode theory of resonant-grating filters. *JOSA A*, 14(3) :629–639, 1997.
- [56] H.J. Patrick, A. Kersey, and F. Bucholtz. Analysis of the response of long period fiber gratings to external index of refraction. *Lightwave Technology, Journal of*, 16(9) :1606–1612, Sep 1998.
- [57] Makoto Yamada and Kyohei Sakuda. Analysis of almost-periodic distributed feedback slab waveguides via a fundamental matrix approach. *Appl. Opt.*, 26(16) :3474–3478, Aug 1987.
- [58] Mohanraj Prabhugoud and Kara Peters. Modified transfer matrix formulation for bragg grating strain sensors. *Lightwave Technology, Journal of*, 22(10) :2302–2309, 2004.
- [59] Jiun-Jie Liao, Nai-Hsiang Sun, Shih-Chiang Lin, Ru-Yen Ro, Jung-Sheng Chiang, Chung-Long Pan, and Hung-Wen Chang. A new look at numerical analysis of uniform fiber bragg gratings using coupled mode theory. *Progress In Electromagnetics Research*, 93 :385–401, 2009.
- [60] Nai-Hsiang Sun, Jiun-Jie Liao, Yean-Woei Kiang, Shih-Chiang Lin, Ru-Yen Ro, Jung-Sheng Chiang, and Hung-Wen Chang. Numerical analysis of apodized fiber bragg gratings using coupled mode theory. *Progress In Electromagnetics Research*, 99 :289–306, 2009.
- [61] Jilong Bao, Xianmin Zhang, Kangsheng Chen, and Wen Zhou. Spectra of dual overwritten fiber bragg grating. *Optics communications*, 188(1) :31–39, 2001.
- [62] S.J. Garth. Modes on a bent optical waveguide. *Optoelectronics, IEE Proceedings J*, 134(4) :221–229, August 1987.
- [63] D. Marcuse. Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, 66 :311, April 1976.
- [64] M. Heiblum and J. H. Harris. Analysis of curved optical waveguides by conformal transformation. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 11 :75–83, February 1975.
- [65] Ross T. Schermer. Mode scalability in bent optical fibers. *Opt. Express*, 15(24) :15674–15701, Nov 2007.
- [66] Alun J Harris and Peter F Castle. Bend loss measurements on high numerical aperture single-mode fibers as a function of wavelength and bend radius. *Lightwave Technology, Journal of*, 4(1) :34–40, 1986.
- [67] Hagen Renner. Bending losses of coated single-mode fibers : a simple approach. *Lightwave Technology, Journal of*, 10(5) :544–551, 1992.
- [68] John D Love and Céline Durniak. Bend loss, tapering, and cladding-mode coupling in single-mode fibers. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 19(16) :1257–1259, 2007.
- [69] Mitsunobu Miyagi and GarLam Yip. Field deformation and polarization change in a step-index optical fibre due to bending. *Optical and Quantum Electronics*, 8(4) :335–341, 1976.
- [70] S.J. Garth. Birefringence in bent single-mode fibers. *Lightwave Technology, Journal of*, 6(3) :445–449, Mar 1988.

- [71] SJ Garth, WM Henry, and JD Love. Limitations in the perturbation analysis of bent finite-clad fibres and waveguides. *Optical and quantum electronics*, 27(1) :15–33, 1995.
- [72] Frank Wassmann. Modal field analysis of circularly bent single-mode fibers. *J. Lightwave Technol.*, 17(5) :957, May 1999.
- [73] A Iadicicco, D Paladino, M Moccia, G Quero, S Campopiano, WJ Bock, and A Cusano. Mode coupling and field distribution in sub-mm permanently bent single mode optical fibers. *Optics & Laser Technology*, 47 :292–304, 2013.
- [74] Ning-Ning Feng, Gui-Rong Zhou, Chenglin Xu, and Wei-Ping Huang. Computation of full-vector modes for bending waveguide using cylindrical perfectlymatched layers. *J. Lightwave Technol.*, 20(11) :1976, Nov 2002.
- [75] Christian Schulze, Adrian Lorenz, Daniel Flamm, Alexander Hartung, Siegmund Schröter, Hartmut Bartelt, and Michael Duparré. Mode resolved bend loss in few-mode optical fibers. *Optics express*, 21(3) :3170–3181, 2013.
- [76] Dzmitry M Shyroki. Exact equivalent-profile formulation for bent optical waveguides. *arXiv preprint physics/0605002*, 2006.
- [77] Dzmitry Shyroki. Exact equivalent straight waveguide model for bent and twisted waveguides. *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, 56(2) :414–419, 2008.
- [78] Jan Arnoldus Schouten. *Tensor analysis for physicists*. Courier Corporation, 1954.
- [79] Evert Jan Post. *Formal structure of electromagnetics : general covariance and electromagnetics*. Courier Corporation, 1997.
- [80] Kuniaki Kakihara, Naoya Kono, Kunimasa Saitoh, and Masanori Koshiba. Full-vectorial finite element method in a cylindrical coordinate system for loss analysis of photonic wire bends. *Opt. Express*, 14(23) :11128–11141, Nov 2006.
- [81] Rym Jedidi and Roger Pierre. High-order finite-element methods for the computation of bending loss in optical waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 25(9) :2618–2630, 2007.
- [82] Jinbiao Xiao, Haibo Ma, Ningfeng Bai, Xu Liu, and Xiaohan Sun. Full-vectorial analysis of bending waveguides using finite difference method based on h-fields in cylindrical coordinate systems. *Optics Communications*, 282(13) :2511–2515, 2009.
- [83] FL Teixeira and WC Chew. On causality and dynamic stability of perfectly matched layers for fdtd simulations. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 47(6) :775–785, 1999.
- [84] COMSOL Multiphysics. Rf module user’s guide, 2012.
- [85] Z.S. Sacks, D.M. Kingsland, R. Lee, and Jin-Fa Lee. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 43(12) :1460–1463, Dec 1995.
- [86] F.L. Teixeira and W.C. Chew. Systematic derivation of anisotropic pml absorbing media in cylindrical and spherical coordinates. *Microwave and Guided Wave Letters, IEEE*, 7(11) :371–373, Nov 1997.
- [87] Jean-Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185 – 200, 1994.
- [88] Ueyn L Block, Vinayak Dangu, Michel JF Dignonnet, and Martin M Fejer. Origin of apparent resonance mode splitting in bent long-period fiber gratings. *Lightwave Technology, Journal of*, 24(2) :1027–1034, 2006.

- [89] Wei Zhang, Xiaohua Lei, Weimin Chen, Hengyi Xu, and Anbo Wang. Modeling of spectral changes in bent fiber bragg gratings. *Opt. Lett.*, 40(14) :3260–3263, Jul 2015.
- [90] E. A. J. Marcatili. Bends in optical dielectric guides. *Bell System Technical Journal*, 48(7) :2103–2132, 1969.
- [91] A.W. Snyder, I. White, and D.J. Mitchell. Radiation from bent optical waveguides. *Electronics Letters*, 11(15) :332–333, July 1975.
- [92] SA Wade, DF Robertson, Alexander C Thompson, and Paul R Stoddart. Changes in spectral properties of fibre bragg gratings owing to bending. *Electronics Letters*, 47(9) :558–559, 2011.
- [93] Kok-Sing Lim, Hang-Zhou Yang, Ahmed Becir, Man-Hong Lai, Muhammad M. Ali, Xueguang Qiao, and Harith Ahmad. Spectral analysis of bent fiber bragg gratings : theory and experiment. *Opt. Lett.*, 38(21) :4409–4412, Nov 2013.
- [94] A.C. Thompson, W.G.A. Brown, P.R. Stoddart, and S.A. Wade. Bend effects on fibre bragg gratings in standard and low bend loss optical fibres. In *Optical Fibre Technology (ACOFT), 2010 35th Australian Conference on*, pages 1–4, Dec 2010.
- [95] A.C. Thompson, P.J. Cadusch, D.F. Robertson, P.R. Stoddart, and S.A. Wade. Origins of spectral changes in fiber bragg gratings due to macrobending. *Lightwave Technology, Journal of*, 30(22) :3500–3511, Nov 2012.
- [96] Peter J Cadusch, Alexander C Thompson, Paul R Stoddart, and Scott A Wade. Modeling of bend effects on fiber bragg gratings. In *Asia Pacific Optical Sensors Conference*, pages 835114–835114. International Society for Optics and Photonics, 2012.
- [97] A.M. Vengsarkar, P.J. Lemaire, J.B. Judkins, V. Bhatia, T. Erdogan, and J.E. Sipe. Long-period fiber gratings as band-rejection filters. *Lightwave Technology, Journal of*, 14(1) :58–65, Jan 1996.
- [98] Yanbing Liu, JAR Williams, and I Bennion. Optical bend sensor based on measurement of resonance mode splitting of long-period fiber grating. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 12(5) :531–533, 2000.
- [99] Y. Liu, L. Zhang, J.A.R. Williams, and I. Bennion. Bend sensing by measuring the resonance splitting of long-period fiber gratings. *Optics Communications*, 193(1–6) :69 – 72, 2001.
- [100] Xuewen Shu, Xuemei Zhu, Qinglin Wang, Shan Jiang, Wei Shi, Zhijian Huang, and Dexiu Huang. Dual resonant peaks of lp 015 cladding mode in long-period gratings. *Electronics Letters*, 35(8) :649–651, 1999.

Thèse de Doctorat

Romain Guyard

Capteur à fibre optique pour la mesure de déformation au sein des matériaux

Fiber optic sensor for strain measurement inside materials

Résumé

L'objectif de cette thèse est la conception d'un nouveau capteur à fibre optique pour la mesure enfouie de déformation. Les capteurs de déformation à réseaux de Bragg fibrés sont généralement collés à la surface de la structure sondée. Leur utilisation comme capteur enfoui peut s'avérer inappropriée. En effet, dans ces conditions, un couplage mécanique entre le capteur et son environnement modifie la déformation transverse de la fibre qui devient alors une inconnue. Dès lors, la seule mesure du décalage de la longueur d'onde de Bragg ne suffit pas pour remonter aux déformations axiales et transverses.

Pour décorréler ces déformations nous proposons une architecture de capteur basée sur la superposition dans une fibre optique d'un réseau de Bragg (FBG) et d'un réseau longue période (LPG). Le travail de thèse a été de trouver l'architecture optimale, possédant une réponse aux déformations linéaire et une résolution de mesure équivalente à celle des capteurs FBG standards. Lors de la conception du capteur, des résultats classiques sur les LPG ont été revisités. Des propriétés optiques inédites des modes de gaine ont été mises en évidence. Nous avons montré que la forme de ces modes évolue fortement avec le rayon de gaine et qu'il existe des rayons de gaine critiques pour lesquels des modes de gaine possèdent le même profil d'intensité.

Nous avons également réalisé une étude statistique sur les sensibilités des LPG aux déformations afin de dégager des règles générales sur l'utilisation des LPG comme capteur. Nous notons que les sensibilités croisées sont négligeables et que les sensibilités dépendent principalement du pas du réseau et du rayon de gaine.

L'enfouissement du capteur pouvant induire des courbures, l'influence de la courbure sur la réponse des réseaux a été étudiée en couplant des simulations par éléments finis et des méthodes semi-analytiques. Il a été démontré que la sensibilité des FBG à la courbure est due aux variations opposées de l'indice effectif et du coefficient de couplage des modes couplés et que l'indice effectif moyen du réseau jouait un rôle clé dans l'amplitude et le signe de cette sensibilité. Un mécanisme similaire a été mis en évidence pour les LPG.

Mots clés

Capteur à fibre optique ; Réseau de Bragg ; Réseau longue période ; Mesure de déformation ; Capteur enfoui ; Courbure.

Abstract

The aim of this thesis is the design of a new fiber optic sensor for the strain measurement inside materials. Fiber Bragg grating strain sensors are usually glued on the surface of the monitored structure. Their use like embedded strain sensor may be unadapted. Indeed, in these circumstances, a mechanical coupling between the sensor and the host material changes the transverse strain of the fiber. The transverse strain becomes unknown.

Consequently, the only measurement of the Bragg wavelength shift is not enough to estimate both axial and transverse strains.

In order to decorrelate these strains, we propose a sensor architecture based on the juxtaposition of a Bragg grating (FBG) and of a long period grating (LPG). The thesis work consist in finding the optimal architecture so that the sensor response to strain is linear and the measurement resolution is identical to the resolution of usual fiber optic sensors. During the sensor design, some usual results on LPG have been studied again. Some original optical properties of cladding modes have been revealed. It has been shown that the shape of these modes changes significantly with the cladding radius of the fiber and that there are critical cladding radii for which some modes have the same transverse intensity distribution.

A statistical study has been carried out on the strain sensitivities of LPG. General behaviors of LPG strain sensors have been highlighted. Especially, the cross-sensitivities can be neglected and the sensitivities are mainly influenced by the period of grating and the cladding radius of the fiber.

When the sensor is embedded inside the material, it may be bent. The bending effects on the gratings responses have been studied using the finite element as well as the semi analytical methods. It has been shown that the bending sensitivity of FBG depends on a balance mechanism between the effective refractive index change and the coupling coefficient change of the coupled modes and that the average index variation of the grating plays a key role in the amplitude and the sign of this sensitivity. A similar mechanism has been highlighted for LPG.

Key Words

Optical fiber sensor ; Fiber Bragg grating ; Longue period grating ; Strain measurement ; Embedded sensor ; Bending.