

Thèse de Doctorat

Nazek EL KHOUJA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)

Discipline : Mathématiques et leurs interactions

Unité de recherche : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR)

Soutenue le 8 octobre 2013

Thèse n° : ED 503-199

Une première approche de la modélisation numérique des écoulements viscoplastiques frictionnels

JURY

Rapporteurs : **M. Patrick HILD**, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, France
M. Ioan IONESCU, Professeur, Université de Paris 13, France

Examineurs : **M. François CHEVOIR**, Ingénieur général des Ponts, des Eaux et Forêts, IFSTTAR, Champs sur Marne, France
M. Anthony WACHS, Expert de recherches, IFPEN, Lyon, France
M. Mustapha JAZZAR, Directeur de recherches, LAMA, Tripoli, Liban
M. Mousseau PIERRE, Professeur, Université de Nantes, France
M. Nicolas ROQUET, Chargé de recherches, IFSTTAR, Nantes, France

Directeur de thèse : **M. Bogdan CAZACLIU**, Directeur de recherches, IFSTTAR, Nantes, France

Thèse de Doctorat

Nazek EL KHOUJA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)

Discipline : Mathématiques et leurs interactions

Unité de recherche : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR)

Soutenue le 8 octobre 2013

Thèse n° : ED 503-199

Une première approche de la modélisation numérique des écoulements viscoplastiques frictionnels

JURY

Rapporteurs : **M. Patrick HILD**, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, France
M. Ioan IONESCU, Professeur, Université de Paris 13, France

Examineurs : **M. François CHEVOIR**, Ingénieur général des Ponts, des Eaux et Forêts, IFSTTAR, Champs sur Marne, France
M. Anthony WACHS, Expert de recherches, IFPEN, Lyon, France
M. Mustapha JAZZAR, Directeur de recherches, LAMA, Tripoli, Liban
M. Mousseau PIERRE, Professeur, Université de Nantes, France
M. Nicolas ROQUET, Chargé de recherches, IFSTTAR, Nantes, France

Directeur de thèse : **M. Bogdan CAZACLIU**, Directeur de recherches, IFSTTAR, Nantes, France

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR) et en particulier dans le groupe Granulats et Procédés d'Elaboration des Matériaux (GPEM).

Je remercie vivement Monsieur Bogdan Cazliu, Chef du groupe GPEM et directeur de ma thèse, pour m'avoir permis de travailler au sein de l'institut IFSTTAR et à qui je voue tant d'estime et de reconnaissance pour sa grande expérience.

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma gratitude et mon respect envers Monsieur Nicolas Roquet, chargé de recherche du groupe GPEM à IFSTTAR et encadrant de ma thèse, pour sa disponibilité et le temps qu'il a su me consacrer, pour tous ses conseils et toutes ses idées sans lesquels ce travail de thèse n'aurait pu aboutir, pour son suivi au quotidien de l'avancée de mon travail et surtout pour ses encouragements.

Mes sincères remerciements s'adressent à tous les membres du groupe GPEM pour leur accueil et leur sympathie.

Je remercie Monsieur Patrick Hild, Professeur à l'université Paul Sabatier, Toulouse 3 et Monsieur Ioan R. Ionescu, Professeur à l'université de Paris 13, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Egalement, je remercie Monsieur François Chevoir, Ingénieur général des Ponts, des Eaux et Forêt au laboratoire Navier Champs sur Marne, Monsieur Anthony Wachs, Expert de recherches au laboratoire IFPEN Lyon et Monsieur Pierre Mousseau, Professeur à l'université de Nantes pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie très vivement Monsieur Mustapha Jazzar, Directeur de recherches au laboratoire LAMA Tripoli-Liban, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'effectuer mes études supérieures en France et d'avoir accepté d'être membre du jury.

Je tiens à remercier affectueusement mon père et ma mère qui m'ont donné la vie et m'ont inspirée. Je remercie également mes sœurs, mes frères, mes beaux-frères, mes belles-sœurs, mes nièces, mes neveux et ma belle-famille dont je suis très fière, qui m'ont toujours gardé leur amour malgré les distances.

Un grand merci s'adresse spécialement à ma sœur Raghda, son mari Mounir et ses petits Mira et Abd-el-kader, pour le soutien et l'intérêt malgré les distances qu'ils ont portés à mon travail et son avancée.

Finalement, je réserve une place singulière à mon mari Ziad pour sa confiance, son soutien et son amour. Tous mes remerciements à lui "mon cœur" sans lequel cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Table des matières

1	Introduction générale	15
1.1	Contexte et problématique	15
1.2	Objectif du travail	17
1.3	Outils de résolution	18
1.4	Plan du mémoire	19
2	Modélisation continue des pâtes granulaires	21
2.1	Introduction	21
2.2	Principales lois d'écoulement	22
2.2.1	Lois mécaniques	22
2.2.2	Les lois de comportement viscoplastiques élémentaires d'une pâte homogène	22
2.2.3	Lois de comportement des assemblages granulaires denses	24
2.2.4	Problème de suspension diluée	27
2.3	Positionnement sur les lois d'écoulements	28
2.3.1	Définition d'un cadre formel	28
2.3.2	Difficultés des lois récentes	29
2.4	Prise en compte du caractère frictionnel dans le seuil viscoplastique	30
2.4.1	Description de la loi Viscoplastique Frictionnelle (LVF)	30
2.4.2	Adimensionnement	32
2.4.3	Modèle retenu	35
2.5	Conclusion	37
3	Techniques de résolution pour le modèle de Bingham	39
3.1	Introduction	39
3.2	Formulation variationnelle, existence et unicité	40
3.3	Algorithmes de résolution	43
3.4	Solutions analytiques	45
3.4.1	Problème de Poiseuille	45
3.4.2	Problème de Couette	45
3.5	Problème en dimension finie	47
3.6	Conclusion	49

4	Résolution théorique du modèle viscoplastique frictionnel	51
4.1	Introduction	51
4.2	Formulation variationnelle et propriétés formelles	52
4.2.1	Formulation variationnelle à trois champs	53
4.2.2	Quelques propriétés de la solution	54
4.3	Démarches formelles	57
4.4	Résolution du problème viscoplastique à seuil variable	57
4.4.1	Formulation variationnelle à trois champs - Existence de la solution	58
4.4.2	Propriétés de la solution en fonction du seuil	64
4.4.3	Choix d'algorithme de résolution	68
4.4.4	Convergence de l'algorithme	68
4.4.5	Approximation spatiale	70
4.4.6	Conclusion intermédiaire	73
4.5	Résolution d'un problème frictionnel régularisé	73
4.5.1	Existence, unicité	74
4.5.2	Algorithme de résolution	75
4.6	Approximation spatiale de LVF	76
4.6.1	Existence et unicité	77
4.6.2	Algorithme de résolution	78
4.7	Exemple concret : problème de Couette généralisé	79
4.8	Conclusion	82
5	Mise en œuvre numérique	85
5.1	Test numérique : application dans une géométrie de Couette	85
5.1.1	Introduction	85
5.1.2	Mise en œuvre de la méthode de la discrétisation	86
5.1.3	Test de convergence	90
5.1.4	Conclusion	94
5.2	Application académique : écoulement autour d'un cylindre	94
5.2.1	Introduction	94
5.2.2	Description du problème	95
5.2.3	Paramètres de simulation	96
5.2.4	Test numérique	96
5.2.5	Analyse des résultats	98
5.2.6	Comparaison avec un fluide viscoplastique	104
5.2.7	Coefficient de trainée	106
5.2.8	Conclusion	107
5.3	Application pratique : écoulement dans un malaxeur planétaire	107
5.3.1	Introduction	107
5.3.2	Description du problème	108
5.3.3	Fabrication de béton et les lois rhéologiques	109

5.3.4	Discrétisation spatiale	110
5.3.5	Les paramètres des simulations	113
5.3.6	Résultats obtenus	114
5.3.7	Conclusion	119
6	Conclusion générale et perspectives	121
A	Résolution du modèle de Signorini-Coulomb	125
B	Etat de l'art sur les méthodes numériques cartésiennes	127
B.1	Domaines fictifs	128
B.2	Méthode de la frontière élargie	129
B.3	Méthode d'interface immergée	130
B.4	Eléments finis immergés	131
B.5	Schéma aux différences finies corrigées	132
C	Méthode d'éléments finis mixtes Q_1/Q_0 pour le problème de Stokes	133
C.1	Préliminaire	133
C.2	Erreur abstraite	135
C.3	Méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire-constante	136

Liste des tableaux

5.1	Erreur $ e_h = u - u_h $ pour différentes tolérances ϵ pour $f_2 = 0$, LVF(20) et $N_\theta = 256$. . .	91
5.2	Erreur $\ p - p_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$ et $ e_h = u - u_h $ pour différentes tolérances ϵ pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$, LVF(p_0) et $N_\theta = 256$	93
5.3	Moyenne d'énergie dissipée \bar{E} où $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ et le temps de calcul T_{calcul} exprimé en secondes pour $p_0 = 0$ et $p_0 = 10$	97
5.4	Moyenne d'énergie dissipée \bar{E} où $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ et la norme $\ p\ _{\infty,\Omega_{f,h}}$ pour trois p_∞ différentes $p_\infty = 100$, $p_\infty = 500$ et $p_\infty = 1000$	102
5.5	Moyenne de la dissipation d'énergie $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ en fonction de la pression de référence p_0	106
5.6	Moyenne de la dissipation d'énergie $E = D(u)_{II}^2 + BiD(u)_{II}$ en fonction de nombre de Bingham.	106
5.7	Temps de calcul et la moyenne d'énergie dissipée $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ en fonction du maillage.	114

Table des figures

1.1	Modélisation élémentaire du malaxage de béton.	16
1.2	Exemples des milieux granulaires.	16
1.3	Comportements des milieux granulaires : solide ou liquide ou gaz.	17
2.1	Mélange granulaire sec.	24
2.2	Géométries d'écoulement : cisaillement plan entre deux parois, cisaillement annulaire et plan incliné.	25
2.3	Suspension granulaire dilué.	27
2.4	Écoulement des grains dans une colonne de hauteur H	30
3.1	Écoulement entre deux plaques parallèles "Poiseuille plan".	45
3.2	Écoulement d'un fluide de Bingham entre deux cylindres coaxiaux C_i et C_e de rayons respectivement R_i et R_e	46
4.1	Représentation schématique de l'écoulement de Couette.	80
5.1	Exemples de maillages structurés et non structurés.	86
5.2	Domaine de fluide Ω_f confiné entre deux cylindres coaxiaux C_i et C_e de rayon respectivement R_i et R_e	87
5.3	Discrétisation du domaine annulaire. Sur la figure ($N_r = 32, N_\theta = 64$), en pratique on choisit ($N_r = 124, N_\theta = 256$).	87
5.4	Erreur $ e_h = u - u_h $ entre la solution exacte et la solution numérique en fonction du maillage N_θ pour $f_2 = 0$ et LVF(20).	92
5.5	Erreur $\ p - p_h\ _{\infty, \Omega_{f,h}}$ entre la solution exacte p et la solution numérique p_h en fonction du maillage N_θ pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ et LVF(p_0).	93
5.6	Erreur $ e_h $ entre la solution exacte u et la solution numérique u_h pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ et LVF(p_0)	94
5.7	Cylindre de rayon R se déplaçant à vitesse constante U dans une colonne verticale de fluide viscoplastique frictionnel.	95
5.8	Représentation schématique du problème bidimensionnel.	95
5.9	Résidu du point fixe $\ p_h^{n+1} - p_h^n\ _{0, \Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations à $p_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.5$ fixés et pour six maillages différents.	97
5.10	Résidu du point fixe $\ p_h^{n+1} - p_h^n\ _{0, \Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations à $p_0 = 10$ et $\mu_0 = 0.5$ fixés et pour six maillages différents.	98
5.11	Résidu du point fixe $\ p_h^{n+1} - p_h^n\ _{0, \Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations pour différentes p_0	99

5.12	Nombre d'itérations de l'algorithme intérieur en fonction de nombre d'itérations de l'algorithme extérieur.	100
5.13	Représentation schématique des différentes zones de l'écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un cylindre : zones déformées en gris foncé et zones rigides en gris clair.	100
5.14	Cartes des vitesses d'un fluide de Bingham en fonction de nombre de Bingham Bi	101
5.15	Répartition de la pression autour d'un cylindre pour $LVF(p_0)$	101
5.16	Norme infinie $\ p\ _{\infty, \Omega_{f,h}}$ de la pression p en fonction du maillage N_θ	102
5.17	Cartes des vitesses pour $LVF(0)$ pour deux coefficients de friction μ_0	103
5.18	Cartes des vitesses pour $LVF(10)$ pour deux coefficients de friction μ_0	103
5.19	Cartes des vitesses de $LVF(p_0)$ en fonction de pression de référence p_0	104
5.20	Représentation schématique des différentes zones de l'écoulement de $LVF(p_0)$ autour d'un cylindre : zones déformées en gris foncé et zones rigides en gris clair.	105
5.21	Carte de la vitesse pour un fluide newtonien.	105
5.22	Carte de la vitesse pour $LVF(p_0)$ avec $p_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.5$	105
5.23	Carte de la vitesse pour un fluide de Bingham à seuil $Bi = 5$	106
5.24	Carte de la vitesse pour $LVF(p_0)$ avec $p_0 = 10$ et $\mu_0 = 0.5$	106
5.25	Malaxeur annulaire.	108
5.26	Malaxeur planétaire.	108
5.27	Malaxeur planétaire à une seule pale et à un seul train valseur.	108
5.28	Représentation schématique d'un malaxeur planétaire composé par deux racleurs avec deux vitesses angulaires w_1 et w_2 respectivement et $u = 0$ sur Γ_1	108
5.29	Fabrication de béton en trois étapes et les modèles d'écoulements correspondants	109
5.30	Exemples du maillage avec une approche de multiplicateur de frontière.	111
5.31	Carte de la pression p dans un malaxeur planétaire.	113
5.32	Intensité de la pression devant et derrière la pale d'un malaxeur planétaire.	113
5.33	Résidu du point fixe $p_f = \ p_h^{n+1} - p_h^n\ _{0,\Omega}$ pour différents maillages.	115
5.34	Nombre d'itérations de l'algorithme $ALVF(\mu_0(q))$ en fonction de nombre d'itérations de l'algorithme du point fixe pour différents maillages.	116
5.35	Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 0)$	116
5.36	Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 10)$	116
5.37	Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 0)$	117
5.38	Carte de taux de déformation d'un fluide newtonien.	117
5.39	Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 10)$	117
5.40	Carte de taux de déformation d'un fluide de Bingham à seuil égale 5.	117
5.41	Carte de contraintes du $LVF(p_0 = 0)$	117
5.42	Carte de contraintes d'un fluide newtonien.	117
5.43	Carte d'énergie dissipée pour $LVF(p_0 = 0)$	118
5.44	Carte d'énergie dissipée pour un fluide newtonien.	118
5.45	Carte de contraintes du $LVF(p_0 = 10)$	118
5.46	Carte de contraintes d'un fluide de Bingham à un seuil $\sigma_0 = 5$	118

5.47	Carte d'énergie dissipée du LVF($p_0 = 10$).	119
5.48	Carte d'énergie dissipée d'un fluide de Bingham à seuil $\sigma_0 = 5$	119
A.1	Corps élastique en contact de friction, figure extraite de [1].	125
C.1	ϕ_{ij} fonction base sur le macro-élément comprenant $K_{i,j}$, $K_{i,j+1}$, $K_{i+1,j}$ et $K_{i+1,j+1}$	136

Notations

Paramètres physiques

u	:	vitesse du fluide
σ	:	tenseur déviateur des contraintes
$D(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^T u)$:	taux de déformation
p	:	pression, partie sphérique des contraintes
p'	:	pression entre les grains
ρ	:	masse volumique du fluide
f	:	force de gravité
η	:	viscosité
σ_0	:	seuil de plasticité
$\zeta_{II} = \sqrt{\frac{\zeta:\zeta}{2}}$:	deuxième invariant de tenseur ζ
$I(u, p')$:	nombre d'inertie, nombre sans dimension
ρ_g	:	masse surfacique de gaz
ρ_p	:	masse surfacique des particules
δ	:	diamètre moyen des grains
$\mu(I)$:	coefficient de friction entre les particules
$V_i(u, p')$:	nombre visqueux, nombre sans dimension
μ_0	:	coefficient de friction minimal
ϕ	:	champ de compacité
ϕ_0	:	concentration maximale
p_0	:	pression de confinement
Bi	:	nombre de Bingham, nombre sans dimension
vi	:	nombre visqueux global, nombre sans dimension
$G(p)$:	fonction de seuil

Domaine

N	:	dimension de l'espace
Ω	:	ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N
$\Gamma = \partial\Omega$:	frontière de Ω
Ω_f	:	anneau inclus dans \mathbb{R}^2

Espaces fonctionnels

- $L^p(\Omega)$: ensemble des classes de fonctions Lebesgues mesurables et p intégrables sur Ω
 $L_0^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u \, dX = 0\}$
 $L^\infty(\Omega)$: l'espace des (classes de) fonctions v mesurables et essentiellement bornées sur Ω
 c'est-à-dire il existe une constante C telle que $|v(x)| \leq C$ p.p. sur Ω
 $W^{m,p} = \{v, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \forall \alpha \leq m\}$
 $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla(u) \in L^2(\Omega)\}$
 $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$
 $V = \{u \in H_0^1(\Omega)^N, \text{div}(u) = 0\}$
 $L^{n,m}(\Omega)$: espace de Morrey-Campanato défini par : $\forall 1 \leq n < \infty$ et $m \geq 0$
 $L^{n,m}(\Omega) = \left\{ g \in L^n(\Omega), \exists B < \infty / \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_r(x_0)} |g|^n \, dX \leq B^n r^m \forall x_0 \in \Omega, r > 0 \right\}$
 tel que $\Omega_r(x) = B_r(x) \cap \Omega$ et $B_r(x)$ est une boule de rayon r et de centre x
 $C(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R}
 $C^k(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall 1 < \alpha \leq k, \partial^\alpha v \in C(\Omega)\}$
 $\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega)^{N \times N} \text{ tel que } \mu_{II} \leq 1\}$
 $X_h(\Omega)$: espace de dimension finie inclus dans $H_0^1(\Omega)$
 $P_h(\Omega)$: espace de dimension finie inclus dans $L_0^2(\Omega)$
 $T_h(\Omega)$: espace de dimension finie inclus dans $L^2(\Omega)^{N \times N}$
 T : maillage de Ω
 K : élément de T
 Σ_K : ensemble des nœuds de l'élément K
 P_k : ensemble des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k
 par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que tout $P \in P_k$, P s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{i_1, \dots, i_N \geq 0, i_1 + \dots + i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$$

 $Y_h^{k,0}(\bar{\Omega}) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}); (v_h)|_K \in P_k, \forall K \in T\}$
 Q_k : ensemble des polynômes de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k
 par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que tout $P \in Q_k$, P s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{0 \leq i_1 < k, \dots, i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$$

 $X_h^{k,0}(\bar{\Omega}) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}); (v_h)|_K \in Q_k, \forall K \in T\}$
 $X_h^{k,-1}(\bar{\Omega}) = \{v_h; (v_h)|_K \in Q_k, \forall K \in T\}$

Produits scalaires, normes, produits de dualité

$$\forall v \in L^2(\Omega), \|v\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall v \in L^{\infty}(\Omega), \|v\|_{\infty,\Omega} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |v(x)| = \inf \{C; |v(x)| \leq C\}$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dX + \int_{\Omega} |\nabla(v)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall v = (v_1, \dots, v_N) \in H_0^1(\Omega)^N, \|v\|_{1,\Omega,N} = \sum_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_{1,\Omega}$$

En particulier, on note $\|v\|_{1,\Omega,N} = \| \|_{1,\Omega}$

$$\forall (w, v) \in H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N, ((w, v)) = \int_{\Omega} D(w) : D(v)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^N, j_{\epsilon}(v) = \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^2 + D(v)_{II}^2} dX$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^N, j(v) = \int_{\Omega} D(v)_{II} dX$$

$$\forall (v, r) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega), j(r, v) = \int_{\Omega} G(r) D(v)_{II} dX$$

$$\forall (v, r) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega), j_{\epsilon}(r, v) = \int_{\Omega} G(r) \sqrt{\epsilon^2 + D(v)_{II}^2} dX$$

$$\forall (v, \mu) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda, J(v, \mu) = \int_{\Omega} \mu : D(v) dX$$

$$\forall (r, v, \mu) \in L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda, J(r, v, \mu) = \int_{\Omega} G(r) \mu : D(v) dX$$

Paramètres des simulations

R_i	:	rayon d'un cylindre intérieur C_i
R_e	:	rayon d'un cylindre extérieur C_e
w_i	:	vitesse angulaire sur C_i
w_e	:	vitesse angulaire sur C_e
N_r, N_{θ}	:	nombres de mailles d'un maillage cartésien annulaire, respectivement dans les directions radiales et angulaires
M	:	nombres de mailles d'un maillage cartésien rectangulaire dans la direction x ou y
ϵ	:	tolérance de l'algorithme de point fixe
$ e_h = u - u_h $:	norme L^{∞} ou L^2 ou H^1 de l'erreur entre solution analytique u et la solution numérique u_h
$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$:	norme L^2 de l'erreur entre la solution analytique p et la solution numérique p_h
T_{calcul}	:	temps de calcul
$E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$:	énergie dissipée dans un écoulement
$\bar{E} = \int_{\Omega} E(u) dX$:	moyenne d'énergie dissipée

Introduction générale

1.1 Contexte et problématique

Cette thèse est une contribution à la modélisation numérique de l'écoulement des matériaux granulaires du génie civil. Parmi les applications potentielles dans le domaine du génie civil, on peut citer le malaxage et la mise en œuvre du béton frais, des enrobés, l'écoulement des sols humides dans la réalisation des terrassements ou encore les sols traités.

Le présent travail fait partie d'une thématique de recherche se proposant d'améliorer la compréhension des phénomènes lors du malaxage des bétons. La compréhension des mécanismes lors du malaxage des bétons a des applications industrielles. Cependant, il faut souligner l'impact environnemental de la fabrication de béton. En effet, le béton est responsable de 5% à 7% des émissions de gaz carbonique d'origine industrielle, lesquelles représentent un tiers des émissions d'origine humaine. Le principal responsable de ces émissions est la fabrication du ciment, dont la consommation doit être optimisée. En effet, un malaxage mal maîtrisé génère une surconsommation de 10% de ciment suite à une agitation insuffisamment efficace, et autant suite à des incertitudes sur la qualité des composants. L'amélioration des procédés de fabrication doit s'appuyer alors sur des innovations technologiques, à la fois pour l'optimisation de l'agitation mécanique mais également pour la réduction de la quantité de ciment et les coûts énergétiques. La mise en place de ces innovations nécessite des progrès en termes de modélisation (compréhension du processus de mélange, simulation du malaxage,...), conditionnés eux-mêmes par des recherches sur la rhéologie de ces mélanges. Qu'est ce que la rhéologie ?

C'est une notion proposée par Eugène Cook Bingham en 1929 qui désigne la science étudiant l'écoulement ou la déformation des corps sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées.

La démarche actuelle de modélisation de l'écoulement du béton frais considère celui-ci comme une suspension granulaire. Cette dernière se définit, d'après [2], comme une collection des particules solides macroscopiques (gravillons, sable, ciment,...) plongées dans un liquide (eau) dont les interactions hydrodynamiques sont importantes. A l'exception de quelques formules de béton très fluides, cette hypothèse est très forte car

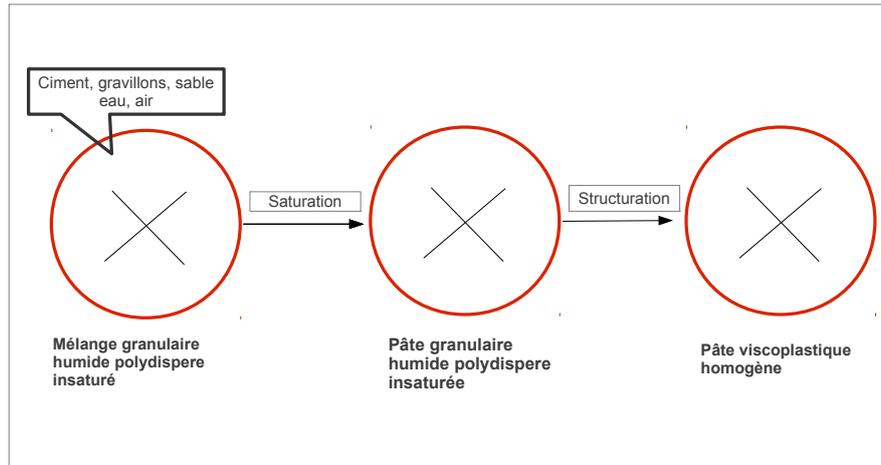


FIGURE 1.1 – Modélisation élémentaire du malaxage de béton.

le béton peut être considéré comme un milieu biphasé (solide / liquide) seulement après avoir été compacté ce qui n'est pas évident dans le cas de son écoulement. La notion de pâte granulaire est alors considérée dans ce travail dans une acception plus large que celle de suspension granulaire. Les pâtes granulaires (voir par exemple la figure 1.2) sont donc des assemblages humides de grains macroscopiques (gravillons, sable, ciment...) dont les propriétés sont intermédiaires entre celles des matériaux granulaires denses et celles des suspensions saturées (sans air).

L'IFSTTAR (Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Ré-

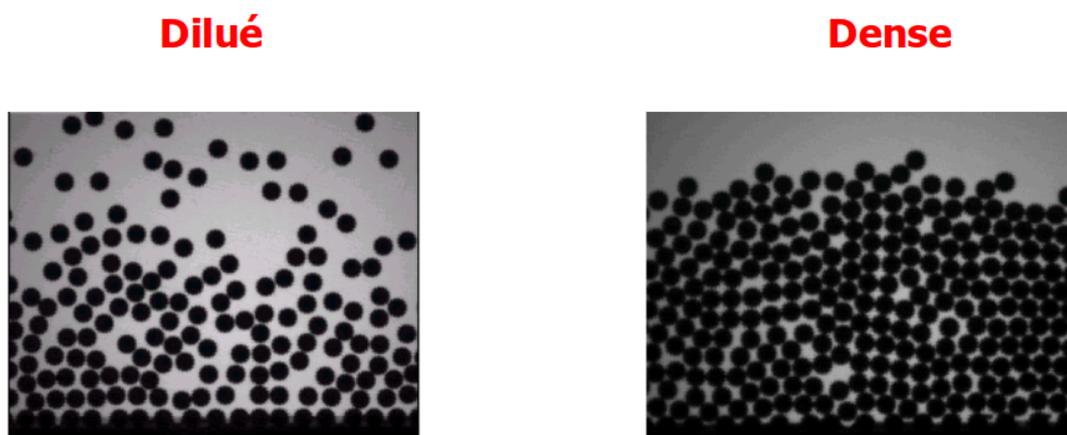


FIGURE 1.2 – Exemples des milieux granulaires.

seaux) s'est fortement investi dans la recherche sur l'élaboration des bétons, principalement dans le cadre du

laboratoire GPEM (Granulats et Procédés d'Elaboration des Matériaux). En particulier, la compréhension de l'écoulement des matériaux granulaires est une thématique de recherche au sein du laboratoire Navier (équipe Rhéophysique). Ces deux équipes travaillent de manière transversale dans le projet de recherche de l'IFSTTAR "Modélisation de la fabrication des matériaux granulaires du Génie Civil". Ce projet fait une place importante à la simulation numérique. En effet, les moyens matériels d'analyse du matériau réel sont encore limités et la conception d'un matériau modèle reste difficile.

Le projet est alors organisé dans les trois thèmes suivants :

1. Définir des lois de comportement évolutives pour le mélange granulaire.
2. Produire un modèle numérique dédié.
3. Trouver des compromis pour un meilleur mélange (diminuer le temps de mélange et de la consommation d'énergie, éliminer les agglomérats).

Ce travail de thèse s'inscrit dans le deuxième thème du projet.

1.2 Objectif du travail

Une pâte granulaire est idéalement modélisée par un fluide complexe dont la loi de comportement peut évoluer dans le temps sous agitation. Cependant, ce type de loi n'est pas encore connu. Nous nous limiterons donc ici à des comportements complexes mais indépendants du temps et de l'agitation.

D'autre part, le comportement de suspensions concentrées de particules dans un fluide newtonien (comme

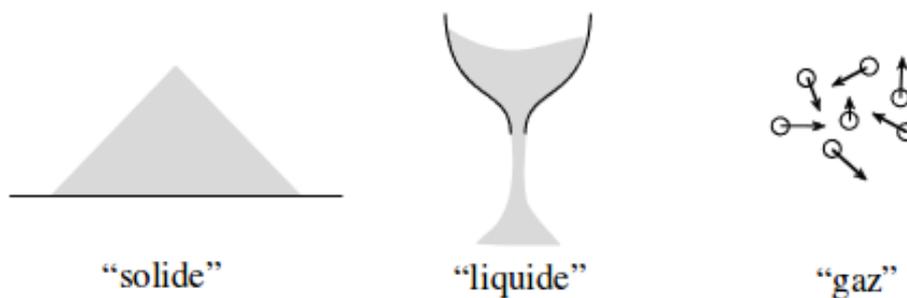


FIGURE 1.3 – Comportements des milieux granulaires : solide ou liquide ou gaz.

l'eau) apparaît comme celui d'un fluide à seuil [3]. Cependant, la phase gazeuse dans le mélange génère des effets frottants aux contacts directs entre les grains. Aussi, la densité de l'assemblage fait apparaître un phénomène de dilatance. Nous distinguons alors trois caractères influents sur le comportement des pâtes granulaires (solide ou liquide ou gaz, voir la figure 1.3), la viscoplasticité, la friction et la dilatance qui sont définies comme suit :

Définition 1.2.1 (Viscosité)

Résistance à l'écoulement d'un fluide exprimé en termes de contrainte de cisaillement qui accompagne l'existence d'un gradient de vitesse d'écoulement dans la matière.

Définition 1.2.2 (*Viscoplasticité*)

Comportement visqueux caractérisé par une déformation négligeable si les contraintes restent inférieures à un certain seuil de contrainte.

Définition 1.2.3 (*Friction*)

Force tangentielle qui oppose une résistance au mouvement lorsque deux surfaces sont au contact l'une de l'autre ; le coefficient de friction est le rapport entre la force tangentielle et la force normale au contact.

Définition 1.2.4 (*dilatance*)

Propriété des matériaux qui augmentent de volume sous l'action d'une sollicitation de cisaillement.

Les modèles considérés dans la littérature pour décrire un béton frais lors de simulations numériques de l'écoulement sont la loi de Bingham [4] et la loi d'Herschel-Bulkley [5]. Le présent travail propose de faire un premier pas dans l'approfondissement de cette modélisation. Il a pour objectif de formuler une loi de comportement particulière des matériaux viscoplastiques *frictionnels* et d'élaborer une méthode de résolution théorique et numérique de cette loi. Sur ce dernier point, les étapes essentielles parcourues sont :

- a) l'étude de quelques propriétés importantes du modèle (existence et unicité du champ d'écoulement compatible avec une sollicitation en contrainte, dépendance aux paramètres du modèle) ;
- b) l'analyse et le test d'un algorithme pour la résolution numérique ;
- c) la validation de l'algorithme de résolution dans une géométrie de Couette suivie par des simulations d'un écoulement autour d'un cylindre afin de valider le caractère opérationnel de la méthode ;
- d) une vérification de la faisabilité pour un écoulement plus complexe, dans un malaxeur planétaire.

1.3 Outils de résolution

Nous traitons dans ce rapport la mécanique des matériaux viscoplastiques frictionnels du point de vue mathématique et plus particulièrement du point de vue des équations aux dérivées partielles.

La littérature révèle que seul le caractère viscoplastique a été l'objet des recherches mathématiques. Concernant le modèle de Bingham, les références sont abondantes. On peut citer les premiers travaux de Glowinski, Lions et Duvaut [6] et [7] sur les inéquations variationnelles de deuxième espèce. Ces types de formulations présentent des problèmes elliptiques à un seul champ : la vitesse u . D'une autre façon, Glowinski [6] a ramené l'inéquation variationnelle à un seul champ en équation variationnelle. Ceci est fait en introduisant des multiplicateurs de Lagrange λ . Par ailleurs, Han et Reddy [8] ont réécrit le problème à un seul champ sous la forme d'un problème variationnel mixte à deux champs vitesse-pression (u, p) . Récemment, Apostolidis *et al.* [9] ont analysé la formulation variationnelle à trois champs (u, p, λ) . L'existence (u, p, λ) ainsi que l'unicité de la vitesse sont prouvées par [9]. Toutefois, l'unicité de p et λ est restée un problème ouvert dans la littérature. De plus, la régularité de u est analysée par [10]. Numériquement, les premiers travaux sont débutés par Fortin [11]. Des méthodes de résolution numérique pour les problèmes à seuil ont été proposées par [12] et [13]. Des résultats de convergence sont établis par Glowinski, Lions et Trémolière

[14]. Globalement, l'analyse théorique et numérique est complète pour le modèle de Bingham mais trouver une méthode numérique rapide reste une question ouverte dans la littérature.

Par ailleurs, des résultats analogues ont été obtenus pour le modèle d'Herschel-Bulkley (voir par exemple [15]). Toutefois, le problème de Bingham reste un prototype intéressant pour l'analyse mathématique car c'est le modèle le plus simple contenant la difficulté viscoplastique. Dans la suite, on se focalise sur les extensions du modèle de Bingham.

Dans ce mémoire de thèse, le caractère frictionnel est produit en introduisant une dépendance à la pression dans le seuil de plasticité du modèle de Bingham. Un nouveau couplage entre la vitesse et la pression est ainsi obtenu. Les méthodes existantes dans la littérature ne peuvent pas alors être adaptées de manière directe pour ce type de problème. Une méthodologie de résolution qui consiste en la construction d'un point fixe dans un problème intermédiaire est proposée où le problème intermédiaire est résolu en adaptant les techniques développées pour le problème Bingham.

1.4 Plan du mémoire

Le chapitre 2 s'intéresse à la modélisation continue des pâtes granulaires de type viscoplastique frictionnel. Un état de l'art est dressé sur les lois rhéologiques classiques à seuil constant puis sur les lois frictionnelles. Une loi particulière, notée LVF, des écoulements des matériaux de type viscoplastique frictionnel est proposée sous la forme d'un fluide de Bingham dont le seuil est frictionnel, c'est-à-dire d'une valeur critique locale qui dépend de la pression et d'un coefficient de friction.

Dans le chapitre 3, les techniques de résolution théoriques et numériques existantes dans la littérature pour le problème de Bingham sont présentées.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude théorique et numérique de la loi de comportement LVF. L'objectif de ce chapitre est de fournir un algorithme de résolution numérique pour cette loi. Trois types de problèmes sont alors analysés : problème à seuil variable, problème régularisé et problème en dimension finie. Un algorithme de résolution qui combine deux algorithmes, un algorithme extérieur (algorithme de point fixe) et un algorithme intérieur (algorithme d'Uzawa) est proposé et la convergence de cette méthode de résolution est mise en évidence. De plus, une localisation de la solution dans un ensemble localement compact est prouvée. Enfin, une unique solution explicite est calculée dans une géométrie de Couette.

Le chapitre 5 constitue une mise en œuvre numérique de la méthode de résolution numérique. L'objectif de ce chapitre est de tester la faisabilité, la robustesse et la convergence de cette méthode. Trois géométries sont alors analysées : géométrie de Couette, écoulement autour d'un cylindre et écoulement dans un malaxeur planétaire. Dans chacune d'elles, une méthode de discrétisation est proposée.

Une conclusion générale résume le travail effectué. Nous présentons en particulier quelques perspectives.

Modélisation continue des pâtes granulaires

2.1 Introduction

Le présent travail consiste à trouver un modèle d'écoulement des pâtes granulaires et à résoudre théoriquement et numériquement ce modèle.

Dans la littérature, de nombreux modèles sont dédiés à la modélisation continue des pâtes. On peut citer les modèles constitutifs viscoplastiques élémentaires comme la loi de Bingham [4] proposée en 1922 et la loi d'Herschel-Bulkley [5] en 1926. Ces modèles ne peuvent décrire la pâte que lorsqu'elle est homogène.

Depuis quelques décennies, l'étude des milieux granulaires est l'objet des nombreuses recherches dans la communauté scientifique et à l'IFSTTAR. Elles ont débuté dans le cadre du thème de recherche des matériaux granulaires : empilements et écoulements en 1997-1999 [16] et [17]. Par suite, des recherches sur la rhéologie des pâtes et des milieux granulaires sont effectuées en 2000-2004 [18]. En 2007, les lois d'écoulement des assemblages granulaires de type viscoplastique frictionnel dilatant [19] sont introduites. Ces lois concernent des assemblages granulaires denses (gravillons, sable, ciment...). Mais, une particularité majeure est détectée dans ce type de loi. Elle résulte de la présence de la pression dans la loi rhéologique, ce qui est une particularité des lois de frottement des matériaux granulaires. Par ailleurs, la densité des matériaux dépend de leur état de cisaillement et réciproquement.

D'un autre point de vue, une loi de suspension diluée est présentée dans [20]. Elle peut décrire une suspension diluée des grains dans un fluide à seuil. Mais dans ce type du problème, aucune loi d'évolution de la concentration granulaire n'est connue.

Dans ce chapitre, après avoir présenté l'état de l'art sur les principales lois d'écoulement granulaire, nous proposons une loi particulière qui prend en compte les caractères des comportements granulaires décrits dans la littérature : la viscoplasticité et la friction. Cependant, l'effet de la dilatance est négligé dans ce rapport en considérant des matériaux isodenses, c'est-à-dire que les particules suspendues ont la même masse volumique que le fluide suspendant. La loi résultante est modélisée sous la forme d'un fluide de Bingham à seuil frictionnel.

La conclusion résume et commente les lois rhéologiques décrites dans la littérature et le modèle des matériaux viscoplastiques frictionnels.

2.2 Principales lois d'écoulement

Dans cette partie, les lois viscoplastiques élémentaires, les lois des assemblages granulaires denses et une loi de suspension diluée sont exposées. Les matériaux sont considérés comme des milieux continus.

2.2.1 Lois mécaniques

D'après [21], on définit les lois de la mécanique des milieux continus sous la forme suivante :

Définition 2.2.1 (*Lois mécaniques*)

a- Loi de comportement

On appelle loi de comportement, une relation qui exprime le tenseur déviateur des contraintes actuel en une particule en fonction du mouvement passé et des changements d'état que la particule a subis. Les lois de comportement se traduisent par une expression mathématique du tenseur déviateur des contraintes en fonction des termes thermodynamiques et mécaniques. On considère :

$$\sigma \in F(p, D(u)) \quad ; \quad D(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^T u) \quad (2.1)$$

où F représente une application a priori multivoque dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ avec N la dimension de l'espace, u la vitesse du fluide, σ le tenseur déviateur des contraintes et $D(u)$ le taux de déformation.

b- Lois de conservation de la mécanique des milieux continus

Les équations de conservation sont :

Conservation de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (2.2)$$

Conservation de quantité de mouvement :

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u \right\} = \operatorname{div}(\sigma) - \nabla p + \rho g$$

où ρ est la masse volumique du fluide, p la pression générale du fluide et $f = \rho g$ la force de gravité.

Dans nos travaux, on ignore les aspects énergétiques.

Définition 2.2.2 (*Modèle d'écoulement*)

Un modèle d'écoulement est défini par une loi de comportement, les lois de conservation (2.2), des conditions aux limites et des conditions initiales.

2.2.2 Les lois de comportement viscoplastiques élémentaires d'une pâte homogène

Le modèle de Bingham permet d'analyser la viscoplasticité. Ceci peut être exprimé à l'aide de la loi de Bingham [4] :

Définition 2.2.3 (*Loi de Bingham, 1922*)

$$\sigma \in \begin{cases} \left\{ 2\eta D(u) + \sigma_0 \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u)_{II} > 0 \\ \left\{ \sigma_{II} < \sigma_0 \right\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\eta \in \mathbb{R}^+$ est la viscosité, $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$ le seuil de plasticité et $D(u)_{II} = \sqrt{\frac{1}{2}D(u) : D(u)}$ le deuxième invariant de $D(u)$.

Ce modèle porte le nom d'Eugène Bingham (1922) qui en a donné une première expression mathématique. Le fluide de Bingham est un fluide à seuil constant. C'est un modèle théorique d'un milieu viscoplastique qui correspond à un comportement de solide parfait sous faibles contraintes et à un comportement de fluide visqueux au-delà d'une contrainte-seuil. Ainsi, si σ_0 égale à zéro, nous parlons d'un fluide newtonien et de viscosité η absolue.

Prager (1954) et Reiner (1958) ont montré que le fluide d'Herschel-Bulkley [5] permet de prendre en compte plus finement le caractère viscoplastique.

Définition 2.2.4 (*Loi d'Herschel-Bulkley, 1926*)

La loi d'Herschel-Bulkley est caractérisée par trois paramètres : un seuil d'écoulement σ_0 , une consistance K et un exposant n qui relie le tenseur déviateur des contraintes σ et le taux de déformations $D(u)$ par la relation suivante :

$$\sigma \in \begin{cases} \left\{ K D(u)_{II}^{n-1} D(u) + \sigma_0 \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u)_{II} > 0 \\ \left\{ \sigma_{II} < \sigma_0 \right\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

où $n \in]-1, +\infty[$.

Les deux lois de comportement (2.3) et (2.4) utilisent un critère de Von Mises. Ce critère impose un seuil de plasticité σ_0 constant dans \mathbb{R}^+ et il peut être défini sous la forme :

Définition 2.2.5 (*Critère de Von Mises*)

a- si la contrainte appliquée σ_{II} au fluide est inférieure au seuil de contraintes σ_0 , aucune déformation ne se produit, le fluide ne coule pas.

b- sinon il faut une contrainte supérieure pour qu'il coule.

Il existe d'autres critères de plasticité comme le critère de Drucker-Prager qui généralise le critère de Von Mises et peut être défini sous la forme suivante :

Définition 2.2.6 (*Critère de Drucker-Prager*)

Le critère de Drucker-Prager est caractérisé par l'effet de la pression p sur l'écoulement : la plasticité dépend de la pression.

Par exemple, si $\sigma_{II} \leq C_0 + \mu p$, la pâte ne s'écoule et sinon, la pâte se comporte comme un liquide. où C_0 et μ sont des constantes positives.

En particulier, le critère de Von Mises est un cas particulier de Drucker-Prager en supposant que $\mu = 0$.

Depuis les travaux de [3], l'usage de la communauté du génie civil est de considérer le béton frais comme une pâte viscoplastique. Ceci peut s'exprimer à l'aide du modèle d'écoulement d'Herschel-Bulkley ou du modèle d'écoulement de Bingham (voir le chapitre 5 et en particulier la sous-section 5.3.3).

2.2.3 Lois de comportement des assemblages granulaires denses

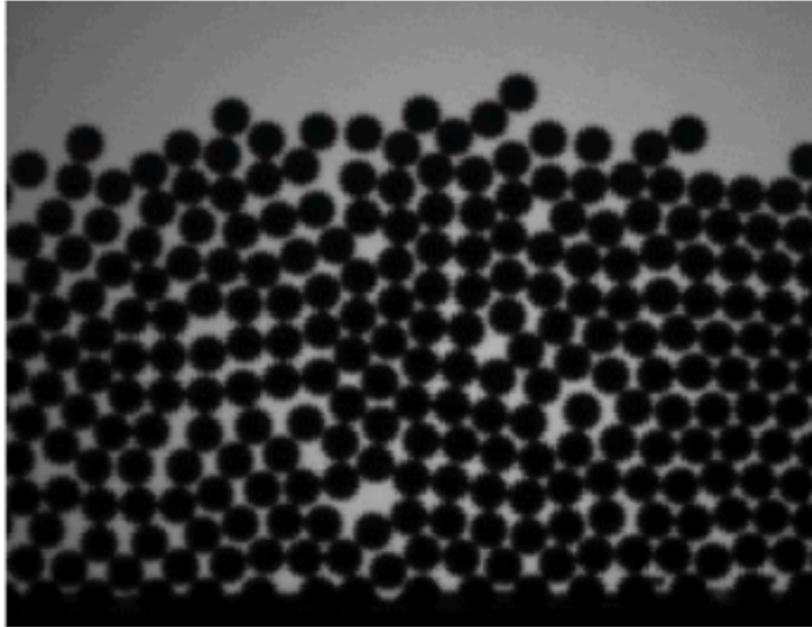


FIGURE 2.1 – Mélange granulaire sec.

Dans le cadre de l'étude des matériaux granulaires, la littérature révèle les caractéristiques de l'écoulement de ces matériaux en régime dense schématisés par la figure 2.1. La principale difficulté de modéliser le comportement de ce milieu provient du fait que le matériau est multi-échelle et contient de nombreux constituants en interaction. Les premiers travaux de Coussot et Ancey [22] portent sur la rhéologie des suspensions granulaires et des matériaux secs. Les auteurs ont montré que cette pâte est un fluide à seuil : selon des conditions, elle présente un comportement solide ou liquide. Les recherches plus récentes de Pouliquen *et al.* [2] décrivent les propriétés fondamentales des milieux granulaires denses qui peuvent être modélisés comme des assemblées de particules sphériques toutes de même taille à 10% près. Ces propriétés caractérisent l'effet de frottement entre les matériaux sur le comportement de la pâte et plus particulièrement sur le passage d'un comportement solide à un comportement liquide. Nous présentons ici les lois d'écoulements d'assemblages granulaires secs et saturés. Dans la littérature [19] et [23], ces lois sont construites à partir des simulations discrètes bidimensionnelles des matériaux secs et saturés dans des situations de cisaillement simple : cisaillement plan, annulaire et plan incliné (schématisées par la figure 2.2). Ces simulations ont mis en évidence les caractères : viscoplastique, frictionnel et dilatant.

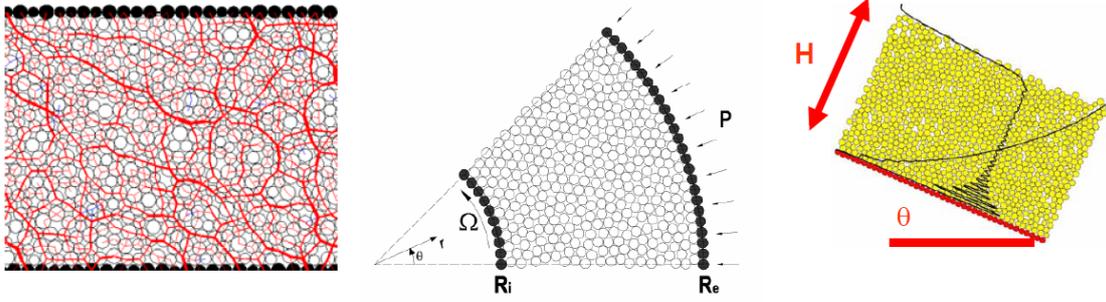


FIGURE 2.2 – Géométries d'écoulement : cisaillement plan entre deux parois, cisaillement annulaire et plan incliné.

Loi d'assemblage de sphères sèches

Les recherches de [19], [23] et [18] proposent d'écrire le comportement des matériaux secs en régime stationnaire en fonction d'un nombre adimensionnel I (nombre inertiel). Ce dernier est le rapport entre le temps inertiel et le temps de cisaillement. Le nombre d'inertie I peut être défini sous la forme suivante :

Définition 2.2.7 (Nombre d'inertie)

Soit I le nombre d'inertie du système défini par :

$$I(u, p') = D(u)_{II} \delta \sqrt{\frac{\rho_g}{p'}}$$

où p' est la pression entre les grains, $1/D(u)_{II}$ le temps de cisaillement, ρ_g la masse volumique des grains ($m = \rho_g \pi \frac{\delta^2}{4}$) et δ le diamètre moyen des grains. La pression p' peut être considérée positive.

Les auteurs dans [19] et [23] ont montré à partir des simulations discrètes que l'écoulement des assemblages granulaires secs dépend du nombre d'inertie $I(u, p)$. De plus, ils ont montré que ces matériaux admettent un caractère viscoplastique frictionnel dilatant. Ce type d'écoulement est modélisé sous la forme suivante :

Définition 2.2.8 (Loi rhéologique des assemblages secs, 2007)

La loi de comportement d'un milieu granulaire composé de sphères sèches identiques s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \mu(I) p' \frac{D(u)^d}{D(u)_{II}^d}, \quad \text{si } D(u) \neq 0 \\ \mu(I) = \mu_0 + b I(u, p')^\beta \\ \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_0} + c I(u, p')^\gamma \quad \text{ou} \quad \phi = \phi_0 - a I(u, p') \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où $\mu(I)$ est une loi de friction, μ_0 une valeur de friction minimale, ϕ le champ de concentration (compacité), ϕ_0 la concentration maximale, $D(u)^d$ déviateur du tenseur de taux de déformation et γ , β , a , b et c sont des coefficients supposés constants dans \mathbb{R}^+ .

Loi d'assemblage de sphères saturées

De manière similaire, les auteurs de [19] ont proposé d'écrire le comportement des matériaux saturés en fonction d'un nombre adimensionnel V_i (nombre visqueux).

Définition 2.2.9 (Nombre visqueux)

Soit V_i le nombre visqueux défini par :

$$V_i(u, p') = \delta \eta_0 \frac{D(u)_{II}^d}{p'}$$

où η_0 est la viscosité du fluide intersitial supposée dans \mathbb{R}^+ .

Les auteurs de [19] et [23] ont montré que l'écoulement dépend du nombre visqueux et admet un caractère viscoplastique frictionnel dilatant. Alors, ils ont formulé une loi de comportement pour le cas saturé à partir du nombre visqueux sous une forme analogue à la précédente :

Définition 2.2.10 (Loi rhéologique des assemblages saturés, 2007)

La loi de comportement d'un assemblage saturé des sphères identiques peut-être décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \mu(V_i) p' \frac{D(u)^d}{D(u)_{II}^d}, \quad \text{si } D(u) \neq 0 \\ \mu(V_i) = \mu_0 + b V_i^\beta \\ \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_0} + c V_i(u, p')^\gamma \quad \text{ou } \phi = \phi_0 - a V(u, p') \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Les deux modèles peuvent décrire le comportement de l'écoulement des assemblages granulaires secs et saturés que l'on rencontre à l'origine de l'élaboration de la pâte de béton (voir le chapitre 5 et en particulier la sous-section 5.3.3). Les auteurs de [19] ont montré que le comportement des assemblages granulaires secs ou saturés est viscoplastique. Aucun comportement n'est précisé pour $D(u) = 0$.

Remarque 2.2.1 Les simulations discrètes effectuées par [23] montrent que :

1. $\mu(I)$ et $\mu(V_i)$ varient entre 0.1 et 0.5 pour les deux géométries : cisaillement plan et annulaire ;
2. pour un écoulement sur plan incliné, μ_0 est égale à $\tan(\theta)$ où θ est l'angle d'inclinaison (voir la figure 2.2) ce qui fixe le coefficient de friction ($\mu(I)$ ou $\mu(V_i)$) ;
3. μ_0 et ϕ_0 varient entre 0.2 et 0.5 et 0.5 et 0.7 respectivement selon les caractéristiques des grains pour ces géométries.

Remarque 2.2.2 On se limite à considérer un ensemble de particules sphériques pour les lois (2.5) et (2.6). D'après [2], pour une particule de géométrie simple comme la sphère, la taille est parfaitement définie et peut être représentée par un seul paramètre : le diamètre δ de la sphère. Cependant, pour des particules de formes plus complexes, la notation de taille est en revanche plus floue. Il est possible d'introduire des paramètres supplémentaires comme la largeur, la longueur et le facteur de forme dans les lois rhéologiques. En pratique, d'après [2], le choix de ces paramètres rend difficile les méthodes de réception de ces lois.

2.2.4 Problème de suspension diluée

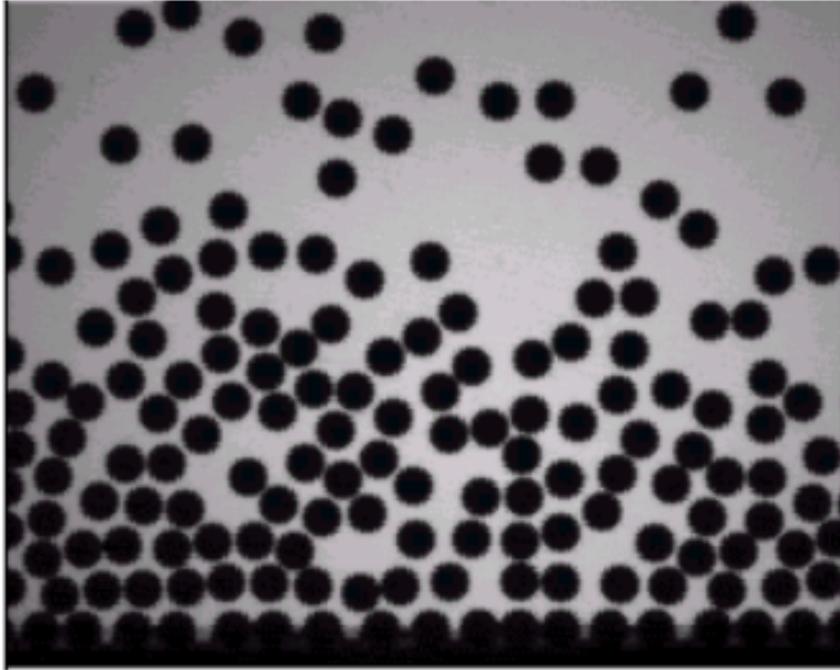


FIGURE 2.3 – Suspension granulaire diluée.

Une suspension diluée schématisée par la figure 2.3 est un ensemble des grains plongés dans un fluide de manière très diluée. La modélisation du comportement de ces suspensions a été l'objet de plusieurs travaux dans la littérature. En particulier, les recherches de [20] montrent que le comportement de suspensions diluées de particules indéformables dans un fluide newtonien (comme l'eau) apparaît comme un fluide à seuil.

Définition 2.2.11 (*Suspension des grains dilués, 2007*)

Soit une suspension de particules isotropes plongée dans un fluide d'Herschel-Bulkley à un seuil d'écoulement σ_0 , consistance K_0 et exposant $n \in]-1, +\infty[$ alors d'après [20], la loi de comportement s'écrit sous la forme d'une loi d'Herschel-Bulkley avec une consistance K_s et un seuil σ_0 qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} K_s = K_0 g(\phi) \left[\frac{g(\phi)}{1-\phi} \right]^{\frac{n-1}{2}} \\ \sigma_s = \sigma_0 \sqrt{(1-\phi)g(\phi)} \\ g(\phi) = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-\frac{5}{2}\phi_m} \end{cases} \quad (2.7)$$

où ϕ est la fraction volumique de la suspension solide et ϕ_m la fraction volumique maximale de la suspension solide.

Ce modèle d'écoulement peut décrire le comportement d'une pâte granulaire diluée qu'on rencontre dans le

malaxage de la pâte de béton où les grains sont fortement dispersés derrière les pales (voir le chapitre 5 et en particulier la sous-section 5.3.3). Mais dans ce type de modèle, aucune loi d'évolution de la concentration granulaire ϕ n'est connue.

2.3 Positionnement sur les lois d'écoulements

Nous nous intéressons dans cette sous-section à positionner les lois rhéologiques récentes de la littérature par rapport à celles des fluides à seuil constant.

2.3.1 Définition d'un cadre formel

Il est possible d'écrire l'ensemble des lois récentes des assemblages granulaires à l'aide de la loi d'Herschel-Bulkley (2.4). Soit F_{HB} la relation entre le déviateur des contraintes σ et le taux de déformation $D(u)$ définissant le modèle d'Herschel-Bulkley :

$$\sigma \in F_{HB}(D(u); K, \sigma_0, n)$$

$$\text{avec } F(D(u), K, \sigma_0, n) = \begin{cases} \left\{ KD(u)_{II}^{n-1} D(u) + \sigma_0 \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u) \neq 0 \\ \{\sigma, \sigma_{II} < \sigma_0\} & \text{si } D(u) = 0 \end{cases}$$

On remarque alors que si on impose un critère de Drucker-Prager, on obtient :

$$\sigma \in F(D(u)^d, \mu_0 b r^\beta p'^{1-k\beta/2}, \mu_0 p', \beta) \quad (2.8)$$

où les quantités r et k sont définies suivant la nature de l'assemblage par :

sec	saturé
$k = 1 ; r = \delta \sqrt{\rho_p}$	$k = 2 ; r = \eta_0 \delta^{3-N}$

où N est la dimension de la géométrie choisie.

En outre, la loi de dilatance s'écrit :

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_0} + cY(u, p')^\gamma \quad (2.9)$$

où le nombre $Y(u, p')$ peut désigner suivant les cas soit $I(u, p')$ soit $Vi(u, p')$.

Finalement, compte-tenu de (2.8) et de (2.9), nous pouvons dire qu'il s'agit d'un problème de type Herschel-Bulkley.

La densité ρ vérifie :

$$\rho = \rho(\phi) = \rho_p \phi + (1 - \phi) \rho_g \quad (2.10)$$

Nos travaux dans la suite considèrent des matériaux isodenses. Ceci signifie que $\rho_p = \rho_g = \rho$ où ρ_p et ρ_g sont les densités respectivement de particules et de fluide interstitiel et ρ une constante dans \mathbb{R}^+ . La loi de dilatance ϕ sera alors calculée *a posteriori* pour des pressions positives par la relation (2.9).

2.3.2 Difficultés des lois récentes

Nous énonçons dans cette sous-section les difficultés majeures des lois récentes des assemblages granulaires ainsi que celle du problème dilué :

1. Dans les modèles d'écoulements des assemblages granulaires denses, la difficulté majeure est la présence d'une pression p' dans les paramètres rhéologiques.
 - Dans le cas du modèle d'écoulement des assemblages secs :
 - (a) la présence de la pression p' dans la viscosité et dans le seuil ;
 - (b) p' représente la pression totale dans le matériau (p dans les lois de mécanique (2.2) est la même que p')
 - (c) la présence d'une puissance de p' dans la viscosité ;
 - (d) les choix des constantes a, b, c, β et γ .
 - Dans le cas du modèle d'écoulement des assemblages saturés :
 - (a) la présence de la pression p' dans le paramètre de seuil,
 - (b) l'existence d'un fluide interstitiel dans l'assemblage granulaire impose que la pression p' ne peut pas être considérée comme la pression globale p dans les lois de mécanique (2.2) ;
 - (c) la relation entre la pression p' et la pression globale p dans les lois de mécanique (2.2) n'est pas définie ;
 - (d) les choix des constantes a, b, c, β et γ .
2. La loi d'écoulement des suspensions diluées (2.7) est considérée comme une loi d'Herschel-Bulkley avec un comportement indéfini pour ϕ .

Remarque 2.3.1 *Les constantes a, b, c, β et γ du modèle d'écoulement des assemblages secs ou du modèle d'écoulement des assemblages saturés sont mesurées dans les simulations ou les expériences (voir par exemple [19] et [23]). Dans notre première approche, ces constantes sont considérées égales à 1 pour simplifier les modèles bien que les mesures donnent des valeurs différentes.*

La difficulté majeure dans ce type de modèle est l'existence de la pression dans les paramètres rhéologiques. Cette pression peut prendre des valeurs positives ou négatives. Alors lorsque la pression est négative, la pâte est considérée comme une pâte diluée. A cet effet, le comportement devrait être non frictionnel. Or, on s'attend à des pressions négatives par exemple dans le cas d'écoulement autour d'un cylindre (derrière le cylindre) et dans le cas d'écoulement dans un malaxeur (derrière les pales).

De plus, le frottement entre les grains ne peut pas prendre des valeurs infinies car sinon les grains se cassent. Pour ces raisons, une loi simplifiée qui peut être compatible avec des écoulements complexes (comme le malaxeur) est considérée. Elle prend la forme d'un fluide de Bingham avec un critère de Drucker-Prager. Elle sera définie dans la section suivante et étudiée théoriquement et numériquement dans les chapitres suivants.

2.4 Prise en compte du caractère frictionnel dans le seuil viscoplastique

Soient $0 < N < \infty$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On note Γ la frontière de Ω . Avant de définir la loi viscoplastique frictionnelle, les hypothèses suivantes sont considérées :

1. les matériaux sont isodenses c'est-à-dire ρ est une constante dans les lois de conservation ce qui implique : $div(u) = 0$;
2. Les écoulements sont stationnaires où l'inertie $u\nabla u$ est négligeable.

Ceci réduit la conservation de la quantité de mouvement et de la masse :

$$div(\sigma) - \nabla p + f = 0 \quad (2.11)$$

$$div(u) = 0 \quad (2.12)$$

La partie suivante se consacre à définir, à commenter et à reformuler sans dimension la loi particulière de comportement des matériaux viscoplastiques frictionnels dilatants.

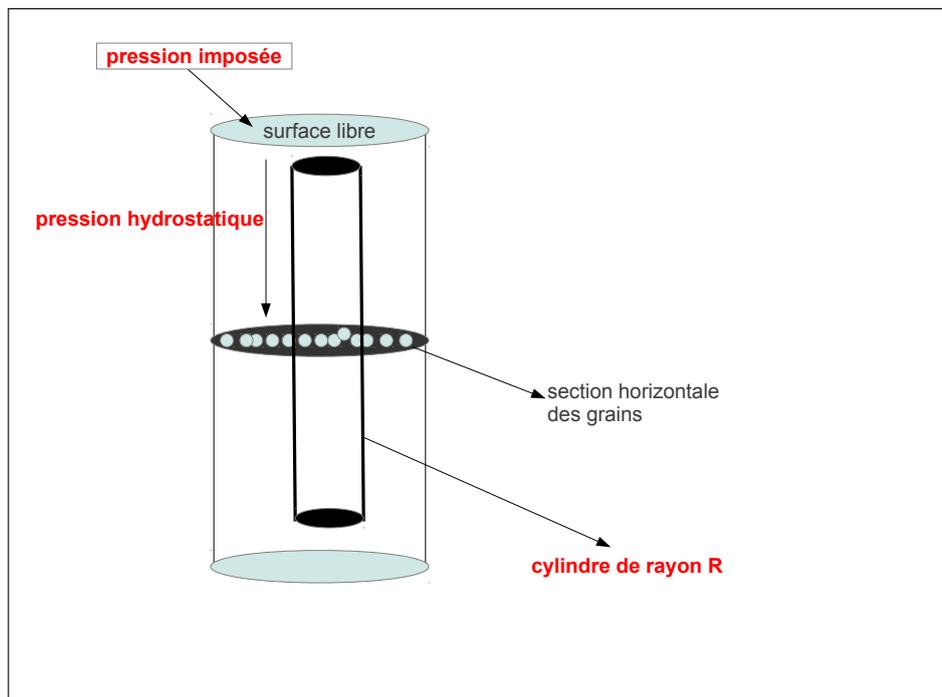


FIGURE 2.4 – Ecoulement des grains dans une colonne de hauteur H

2.4.1 Description de la loi Viscoplastique Frictionnelle (LVF)

Nous nous intéressons dans nos travaux de thèse aux comportements bidimensionnels d'écoulement des matériaux isodenses viscoplastiques frictionnels dilatants. Une section horizontale de suspension des grains

dans une colonne verticale de ces matériaux est décrite. Le comportement de ces matériaux peut être modélisé sous la forme d'un fluide de Bingham dont le seuil de plasticité dépend de la variable de pression et d'un coefficient de friction constant dans \mathbb{R}^+ .

Dans l'analyse mathématique, il est utile de chercher la pression p à moyenne nulle. Contrairement aux fluides viscoplastiques, la constante d'intégration ne peut pas être choisie arbitrairement. En effet, la pression est localisée dans le paramètre de seuil non seulement dans le terme de $\nabla(p)$ de l'équation (2.11). Alors afin de rendre la pression à moyenne nulle, on la considère comme la somme de p et p_0 (où p_0 est la pression de référence).

Dans la pratique, la géométrie bidimensionnelle (2.4) impose l'existence d'une pression hydrostatique p_0 . C'est la pression de confinement.

En outre, la pression p est présente dans le paramètre rhéologique (paramètre de seuil). Comme nous avons mentionné dans la sous-section 2.3.2, la pression peut prendre des valeurs positives ou négatives. Pour cela nous proposons une troncature de la pression p au voisinage de zéro. Par conséquent, une loi particulière de comportement des matériaux de type viscoplastique frictionnel notée LVF est développée. Elle est exprimée sous la forme suivante :

Définition 2.4.1 (*Loi de matériau viscoplastique frictionnel*)

Soient p_∞ et p_0 des constantes dans \mathbb{R}^+ et l'application $G : L_0^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), G(q) = \max(0, \min(q + p_0, p_\infty))$$

Nous définissons la loi comportement viscoplastique frictionnelle (LVF) par :

$$\sigma \in \begin{cases} \left\{ \eta D(u) + \mu_0 G(p) \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < \mu_0 G(p) \right\} & \text{si } D(u) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

où η est la viscosité et μ_0 le coefficient de friction. Ces paramètres sont supposés constants dans \mathbb{R}^+ .

Une loi de dilatance est déterminée pour des pressions strictement positives par la relation suivante :

$$\forall p > 0, \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_0} + \frac{D(u)_{II}}{p} \quad (2.14)$$

A partir de la fonction G , nous avons considéré le comportement d'un fluide newtonien pour des pressions négatives (par exemple dans le cas d'un malaxeur derrière les pales). En effet, dans les cas des pressions négatives le seuil $\mu_0(p + p_0)$ est remplacé par 0. La fonction constante égale à zéro est choisie pour sa simplicité et pour éviter le problème de discontinuité du seuil au voisinage de la ligne de niveau $p = -p_0$. De plus, nous avons tronqué le seuil $p + p_0$ au voisinage de l'infini par p_∞ . Ce dernier caractérise l'effet de coefficient de frottement qui ne peut pas atteindre des valeurs infinies. Ces troncatures au voisinage de zéro et de l'infini devront être améliorées dans un travail ultérieur.

2.4.2 Adimensionnement

En pratique, il est intéressant de travailler sans dimension afin de réduire le nombre de paramètres significatifs et d'écrire le problème indépendamment des échelles. De plus, il sera utile de comparer la loi de Bingham (2.3) et la loi LVF (2.13) sans dimension. Pour cela, nous présentons dans cette sous section l'écriture sans dimension de la loi de Bingham (2.3) et LVF (2.13).

Adimensionnement de la loi d'écoulement de Bingham

L'écriture sans dimension du modèle de Bingham s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ telle que} \\ \sigma \in \left\{ \begin{array}{l} \left\{ 2D(u) + Bi \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} \quad \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < Bi \right\} \quad \text{si } D(u) = 0 \end{array} \right. \\ \\ \text{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{conditions sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où Bi est le nombre de Bingham défini par $Bi = \frac{\sigma_0 H}{\eta U}$ avec H et U sont des grandeurs caractéristiques du problème.

preuve 1 Soit la variable x sous la forme :

$$x = H\tilde{x}$$

où \tilde{x} est la nouvelle variable sans dimension et H est une grandeur caractéristique du problème. On va également poser :

$$u = U\tilde{u}$$

$$p = P\tilde{p}$$

$$\sigma = \Sigma\tilde{\sigma}$$

où \tilde{u} , \tilde{p} et $\tilde{\sigma}$ sont des variables sans dimension, tandis que U , P et Σ sont de grandeurs caractéristiques du problème.

On impose la même grandeur caractéristique à la pression et au tenseur des contraintes et on peut écrire :

$$P = \Sigma$$

Il reste à définir une force extérieur sans dimension :

$$f = F\tilde{f}$$

Maintenant, on définit les opérateurs sans dimension \tilde{div} , $\tilde{\nabla}$ et \tilde{D} :

$$div = \frac{1}{H} \tilde{div}$$

$$\nabla = \frac{1}{H} \tilde{\nabla}$$

$$D = \frac{1}{H} \tilde{D}$$

L'équation de conservation (2.11) devient :

$$\frac{\Sigma}{H} \tilde{div} \tilde{\sigma} - \frac{\Sigma}{H} \tilde{\nabla} \tilde{p} = -F \tilde{f} \quad (2.16)$$

On aimerait obtenir :

$$\tilde{div} \tilde{\sigma} - \tilde{\nabla} \tilde{p} = \tilde{f}$$

Alors il suffit de prendre

$$\Sigma = HF \quad (2.17)$$

Et la loi de Bingham (2.3) donne pour $D_{II}(u) \neq 0$:

$$\Sigma \tilde{\sigma} = 2\eta \frac{\Sigma}{P} \tilde{D}(\tilde{u}) + \sigma_0 \frac{\tilde{D}(\tilde{u})}{\tilde{D}(\tilde{u})_{II}} \quad (2.18)$$

On prend

$$\Sigma = \frac{\eta U}{H}$$

On définit le nombre de Bingham sans dimension Bi

$$Bi = \frac{\sigma_0}{\Sigma} \quad (2.19)$$

La condition $\sigma_{II} > \sigma_0$ devient $\tilde{\sigma}_{II} > Bi$. Finalement, (2.15) s'obtient en combinant les relations (2.16)-(2.19), l'absence d'ambiguïté permettant d'omettre les tildes sur ces grandeurs.

Adimensionnement de la loi LVF

De manière similaire, on a écrit la loi LVF sans dimension sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \left\{ \begin{array}{l} \left\{ 2D(u) + \frac{\mu_0}{vi} G(p) \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} \quad \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < \frac{\mu_0}{vi} G(p) \right\} \quad \text{si } D(u) = 0 \end{array} \right. \\ vi \, div(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ div(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{conditions sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où vi est un nombre visqueux globale défini par $vi = \frac{\eta U}{HP}$ avec U , P et H sont des grandeurs caractéristiques du problème.

preuve 2 Nous écrivons les variables $x, u, p, p_\infty, p_0, \sigma$ et f sous la forme :

$$x = H\tilde{x}, u = U\tilde{u}, p = P\tilde{p}, p_\infty = P\tilde{p}_\infty, p_0 = P\tilde{p}_0, \sigma = \Sigma\tilde{\sigma}, f = F\tilde{f} \quad (2.21)$$

où $\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{p}_\infty, \tilde{f}$ et $\tilde{\sigma}$ sont des variables sans dimension, tandis que U, p, F et Σ sont des grandeurs caractéristiques du problème. Nous démontrons facilement que :

$$\tilde{G}(\tilde{p}) = \tilde{G}(P\tilde{p}) = P\tilde{G}(\tilde{p}) \quad (2.22)$$

avec $\tilde{G}(\tilde{p}) = \max(0, \min(\tilde{p} + \tilde{p}_0, \tilde{p}_\infty))$. Maintenant, on définit les opérateurs sans dimension $\tilde{div}, \tilde{\nabla}$ et \tilde{D} :

$$\tilde{div} = \frac{1}{H} \tilde{div}$$

$$\tilde{\nabla} = \frac{1}{H} \tilde{\nabla}$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{H} \tilde{D}$$

L'équation de conservation (2.11) devient :

$$\frac{\Sigma}{H} \tilde{div}(\tilde{\sigma}) - \frac{P}{H} \tilde{\nabla} \tilde{p} = -F \tilde{f}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\Sigma}{P} \tilde{div}(\tilde{\sigma}) - \tilde{\nabla} \tilde{p} = -\frac{F.H}{P} \tilde{f} \quad (2.23)$$

Nous supposons que : $-\frac{\Sigma}{H} = \eta \frac{U}{H} = F$ et pour la loi LVF (2.13) donne pour $\tilde{D}_{II}(\tilde{u}) \neq 0$:

$$\frac{\Sigma}{P} \tilde{\sigma} = 2 \frac{\Sigma}{P} \tilde{D}(\tilde{u}) + \mu_0 \tilde{G}(\tilde{p}) \frac{\tilde{D}(\tilde{u})}{\tilde{D}(\tilde{u})_{II}}$$

Nous définissons le nombre visqueux global vi :

$$vi = \frac{\Sigma}{P}$$

Et d'après l'équation précédente nous obtenons :

$$\tilde{\sigma} = 2\tilde{D}(\tilde{u}) + \frac{\mu_0}{vi} \tilde{G}(\tilde{p}) \frac{\tilde{D}(\tilde{u})}{\tilde{D}(\tilde{u})_{II}} \quad (2.24)$$

Et d'après les deux équations (2.23) et (2.24), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = 2\tilde{D}(\tilde{u}) + \frac{\mu_0}{vi} \tilde{G}(\tilde{p}) \frac{\tilde{D}(\tilde{u})}{\tilde{D}(\tilde{u})_{II}} \\ vi \tilde{div}(\tilde{\sigma}) - \tilde{\nabla} \tilde{p} = \tilde{f} \end{cases} \quad (2.25)$$

La condition $\sigma_{II} > \mu_0 G(p)$ devient $\tilde{\sigma}_{II} > \frac{\mu_0}{vi} G(p)$. Finalement, d'après la relation (2.25) et en absence d'ambiguïté, on déduit (2.20).

La différence entre l'adimensionnement de la loi de Bingham et celui de LVF est le choix de P . Dans le cas de la loi de Bingham P est égale Σ . Mais dans le cas de LVF, on peut envisager trois choix de P représentés ci-dessous.

1. $P = \Sigma$ ceci implique que $vi = 1$;
2. $P = p_0$ ceci implique $\tilde{G}(\tilde{p}) = p_0 \tilde{G}'(\tilde{p})$ avec $\tilde{G}'(\tilde{p}) = \max(0, \min(\tilde{p} + 1, \tilde{p}_\infty))$. Dans ce cas, une dépendance de vi dans \tilde{G} est détectée ;
3. $P = p_\infty$ alors $\tilde{G}(\tilde{p}) = p_\infty \tilde{G}'(\tilde{p})$ avec $\tilde{G}'(\tilde{p}) = \max(0, \min(\tilde{p} + \tilde{p}_0, 1))$. Dans ce cas, une dépendance de p_∞ dans \tilde{G} est détectée.

Ainsi, ces choix réduisent les paramètres qui influent sur le comportement d'écoulement de ces matériaux : $\tilde{p}_0, \tilde{p}_\infty$, un nombre visqueux global $vi \in \mathbb{R}^+$ et un coefficient de friction $0 < \mu_0 < 1$.

Dans nos travaux, nous nous limitons à étudier l'influence du paramètre de seuil sur le comportement de la pâte. A cet effet, nous considérons que P est égale à Σ : $vi = 1$ dans (2.20).

2.4.3 Modèle retenu

Nous considérons désormais les grandeurs écrites sans dimension. L'absence d'ambiguïté nous permet d'omettre les tildes sur ces grandeurs.

Définition 2.4.2 (*Problème LVF sans dimension*)

On résout le problème LVF sans dimension sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ telle que} \\ \sigma \in \begin{cases} \left\{ 2D(u) + \mu_0 G(p) \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < \mu_0 G(p) \right\} & \text{si } D(u) = 0 \end{cases} \\ \text{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{conditions sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Remarque 2.4.1 (*Comportement selon les paramètres*)

Nous remarquons l'existence d'un coefficient de friction $\mu_0 G(p)$ qui caractérise l'effet de frottement entre les grains. Nous constatons les deux comportements suivants :

1. Tant que σ_{II} reste inférieur à $\mu_0 G(p)$, c'est-à-dire tant que les contraintes qui s'exercent sur le fluide n'atteignent pas la force de friction local $\mu_0 G(p)$ entre les grains, la pâte granulaire ne se déforme pas : il se comporte comme un solide avec $D(u) = 0$.
2. Dès que σ_{II} devient supérieur à $\mu_0 G(p)$, c'est-à-dire dès que les contraintes dépassent la force de friction $\mu_0 G(p)$, le fluide se déforme et $D(u)$ n'est plus nul. Les taux de déformation varient avec les contraintes.

En outre, il est commode d'introduire dans la suite une contrainte plastique λ :

Définition 2.4.3 (*Problème viscoplastique frictionnel à trois champs*)

Le problème LVF est rédéfini en fonction de trois champs sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda, p) \text{ telle que} \\ \sigma = 2D(u) + \mu_0 G(p)\lambda \\ \lambda_{II} \leq 1 \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ \operatorname{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{conditions sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Proposition 2.4.1 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\lambda_{II} \leq 1$ et $\lambda : D(u) = D(u)_{II}$ presque partout sur Ω ;
- ii) $(r - \lambda) : D(u) \leq 0, \forall r \in \Phi$;
- iii) $\lambda = \Pi_{\Phi}(\lambda + \alpha D(u)), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.

où Π est la projection sur Φ avec Φ un ensemble des tenseurs symétriques tel que pour tout élément μ de Φ $\mu_{II} \leq 1$. Π est définie par :

$$\Pi(\zeta) = \frac{\zeta}{\sup(1, \zeta_{II})} \quad (2.28)$$

preuve 3 *Tout d'abord, on montre que : la proposition i) implique la proposition ii) :*

$$\begin{aligned} (r - \lambda) : D(u) &= r : D(u) - \lambda : D(u) \\ &= r : D(u) - D(u)_{II} \\ &\leq r_{II} D(u)_{II} - D(u)_{II} \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Et réciproquement, la proposition ii) est claire pour $D(u)_{II} = 0$, tant que $D(u)_{II} > 0$ il est possible de choisir λ telle que $\lambda = \frac{D(u)}{D(u)_{II}}$

$$\left(\frac{D(u)}{D(u)_{II}} - \lambda \right) : D(u) \leq 0 \Leftrightarrow D(u)_{II} \leq \lambda : D(u) \quad (2.30)$$

En outre, on a :

$$\lambda : D(u) \leq \lambda_{II} D(u)_{II} \leq D(u)_{II} \quad (2.31)$$

Donc la proposition i) est obtenue.

De plus, pour tout $\alpha > 0$, en multipliant la proposition ii) par α et en écrivant $\alpha D(u) = (\alpha D(u) + \lambda) - \lambda$, on est conduit à l'inéquation équivalente suivant :

$$(r - \lambda) : ((\alpha D(u) + \lambda) - \lambda) \leq 0 \quad (2.32)$$

Ceci est la caractéristique de λ projection sur Φ de $\lambda + \alpha D(u)$.

De manière analogue, on définit le modèle de Bingham (2.15) en fonction de la contrainte plastique :

Définition 2.4.4 (*Problème viscoplastique à trois champs*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda, p) \text{ telle que} \\ \sigma = 2D(u) + Bi \lambda \\ \lambda_{II} \leq 1 \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ \operatorname{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{conditions sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (2.33)$$

De plus, les équivalences énoncées par la proposition 2.4.1 sont toujours vraies. Dans le cas de la loi le paramètre α pourra être pondéré par $G(p)$.

Remarque 2.4.2 *La condition iii) dans la proposition 2.4.1 est un outil puissant pour produire un algorithme de point fixe. Ceci apparaît clairement dans les chapitres suivants.*

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les modèles continus des pâtes granulaires viscoplastiques frictionnelles. Des modèles élémentaires de type viscoplastique comme le modèle de Bingham ont été présentés. Des modèles récents, comme le modèle viscoplastique frictionnel dilatant, ont été exposés. Le comportement d'écoulement des assemblages granulaires mettent donc en évidence la viscoplasticité mais aussi la friction. Des faiblesses dans les modèles récents ont été détectées. Aucune relation n'est écrite pour les pressions négatives, pour $D(u)_{II} = 0$ et entre p' la pression interstitielle et p la pression globale. A cet effet, une loi viscoplastique frictionnelle a été développée dans ce chapitre. Le caractère viscoplastique frictionnel est modélisé sous la forme d'une dépendance de pression et d'un terme de friction dans le terme de seuil d'un fluide de Bingham.

Techniques de résolution pour le modèle de Bingham

3.1 Introduction

Comme il est mentionné dans le chapitre 2, la loi viscoplastique frictionnelle LVF (2.26) est modélisée sous la forme d'un fluide viscoplastique dont le seuil est frictionnel. L'originalité de cette loi est la présence de la pression dans le paramètre du seuil. Cependant, à ce jour, aucune étude théorique n'existe dans la littérature sur ce problème. Seul le caractère viscoplastique a été l'objet de recherches mathématiques. A cet effet, un état de l'art sur les principaux résultats théoriques et numériques du modèle viscoplastique à seuil constant comme le modèle de Bingham est présenté dans ce chapitre.

Les méthodes théoriques et numériques de résolution pour un fluide à seuil constant (2.15) se concentrent sur les conditions aux limites de type Dirichlet. Le problème de Bingham s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \text{ telle que} \\ \sigma \in \begin{cases} \left\{ 2D(u) + Bi \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < Bi \right\} & \text{si } D(u) = 0 \end{cases} \\ \text{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Les méthodes de résolution sont nombreuses dans la littérature. On peut citer les premiers travaux en 1972 et 1984 de Glowinski, Lions et Duvaut ([6] et [7]) sur les inéquations variationnelles de deuxième espèce et plus particulièrement sur l'existence et l'unicité de la solution u . En 1972, l'analyse numérique est démarrée par Fortin [11]. En 1982, des méthodes de lagrangien augmenté sont développées par Fortin et Glowinski [24]. Un résultat de convergence est présenté par Glowinski, Lions et Trémolière [14]. En 2000, des travaux

numériques proposés par [25] améliorent la précision de convergence avec des hypothèses fortes sur des applications restreintes. En outre, de nombreuses méthodes de résolution numérique pour ce type de problème ont été proposées (voir [12] et [13]). Les méthodes les plus répandues sont la résolution par introduction de multiplicateurs de Lagrange et la résolution par régularisation. Toutefois, les auteurs de [26], en 2007, ont montré que l'algorithme d'Uzawa est simple, efficace et robuste pour le problème à seuil constant.

Le plan de ce chapitre est le suivant. On présente tout d'abord les systèmes variationnels ainsi que l'existence de la solution (u, p, λ) . Seul, l'unicité de la vitesse est démontrée dans un cadre général. De plus, on décrit les algorithmes compatibles avec le problème à seuil. On présente les avantages et les inconvénients de chacun d'eux. Ensuite, on énonce les théorèmes de convergence en dimension finie. Ces derniers se limitent à la convergence de la vitesse.

3.2 Formulation variationnelle, existence et unicité

Duvaut-Lions ([6] et [7]) ont proposé d'écrire le problème (3.1) sous la forme d'inéquations variationnelles de seconde espèce :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \forall \phi \in V : \\ ((u, \phi - u)) + Bi(j(\phi) - j(u)) \geq (f, \phi - u) \end{cases} \quad (3.2)$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)^N$, V est défini par :

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N / \text{div}(v) = 0\}$$

et $\forall (v, w) \in (H_0^1(\Omega)^N)^2$:

$$((v, w)) = \int_{\Omega} D(v) : D(w) dX$$

$$j(v) = \int_{\Omega} D(v)_{II} dX$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v dX$$

Cette inéquation variationnelle représente un problème elliptique à un seul champs u avec $((,))$ une forme bilinéaire, coercive et continue et j lipschitzienne sur V . Donc, d'après le théorème de Lions-Stampacchia ([6] et [7]), l'existence de $u \in V$ est prouvée avec u unique.

Remarque 3.2.1 *Le second membre f est la force extérieur exercée sur le fluide. Dans la plupart des cas pour les écoulements des fluides complexes comme le fluide de Bingham, f est considérée comme une constante. Donc, on peut se limiter à supposer que f est dans $L^2(\Omega)^N$.*

Par ailleurs, Glowinski [6] a ramené l'inéquation variationnelle (3.2) en équation variationnelle. Ceci est fait en introduisant des multiplicateurs de Lagrange λ sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 *(Existence d'un multiplicateur de Lagrange λ)*

Soit $f \in L^2(\Omega)^N$ et $u \in V$ solution de (3.2) alors il existe $\lambda \in \Lambda$ qui vérifie le système variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ et } \lambda \in \Lambda \text{ telles que } \forall \phi \in V : \\ ((u, \phi)) + Bi J(\lambda, \phi) = (f, \phi) \\ D(u) : \lambda = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega)^{N \times N} / \mu_{II} \leq 1\}$ est un ensemble convexe, fermé et borné de $L^2(\Omega)^{N \times N}$ et pour tout $(r, v) \in \Lambda \times V$, $J(r, v) = \int_{\Omega} r : D(v) dX$.

Remarque 3.2.2 Les résultats de Glowinski [6] et Duvaut-Lions [7] sont établis pour un problème scalaire plus simples mais leur extension au cas énoncé ici est immédiate.

L'idée de la preuve consiste à construire les multiplicateurs en passant par une régularisation du terme lié au seuil, c'est-à-dire qu'on considère un problème régularisé défini par (3.2) en utilisant un j_{ϵ} au lieu de j : $\forall v \in V$

$$j_{\epsilon}(v) = \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^2 + D(v)_{II}^2} dX$$

Alors l'inéquation variationnelle du problème régularisé devient un problème elliptique à un seul champs $u_{\epsilon} \in V$. A partir du théorème de Lions-Stampacchia, l'existence d'une unique solution u_{ϵ} est prouvée. De plus, une convergence forte de u_{ϵ} vers u lorsque ϵ tend vers zéro est démontrée.

En outre, on montre facilement que j_{ϵ} est gâteaux différentiable et sa différentielle j'_{ϵ} est égale à :

$$\forall v \in V, \langle j'_{\epsilon}(u_{\epsilon}), v \rangle = \int_{\Omega} \frac{D(u_{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_{\epsilon})_{II}^2}} : D(v) dX$$

On pose $\lambda_{\epsilon} = \frac{D(u_{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_{\epsilon})_{II}^2}} \in \Lambda$ où Λ est un ensemble convexe et fermé dans $L^2(\Omega)^{N \times N}$. Ceci implique que λ_{ϵ} converge faiblement dans $L^2(\Omega)^{N \times N}$ vers λ et (u, λ) est une solution du problème (3.3) avec u unique. Autrement, les auteurs de [24] ont démontré que : $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ est un point selle de la fonctionnelle L

$$\forall (v, r) \in V \times \Lambda, L(v, r) = ((v, v)) + Bi J(r, v) - (f, v)$$

Par ailleurs, Han et Reddy [8] ont réécrit le problème (3.2) sous la forme d'un problème variationnel mixte à deux champs (u, p) présenté ci-dessous :

Proposition 3.2.2 (Formulation variationnelle à deux champs (u, p))

Soit $f \in L^2(\Omega)^N$, le système variationnel du problème (3.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega)^N \text{ et } p \in L_0^2(\Omega) \text{ telles que } \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^N \\ ((u, \phi - u)) + Bi(j(\phi) - j(u)) - (p, \text{div}(\phi - u)) \geq (f, \phi - u) \\ (q, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.4)$$

Han et Reddy [27] ont analysé un problème abstrait correspondant. Ils ont démontré l'existence de $u \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ avec u unique sous l'hypothèse de la condition Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall q \in L_0^2(\Omega), \sup_{w \in H_0^1(\Omega)^N} \frac{(q, \text{div}(w))}{\|w\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega} \quad (3.5)$$

De manière plus générale, Aposporidis *et al.* [9] ont développé la formulation variationnelle à trois champs en fonction d'un multiplicateur de Lagrange λ . Cette formulation est écrite comme suit :

Proposition 3.2.3 (*Formulation variationnelle à trois champs* (u, p, λ))

Soit $f \in L^2(\Omega)^N$, la formulation variationnelle à trois champs du problème (3.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega)^N \text{ et } \lambda \in \Lambda \text{ telles que } \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^N : \\ ((u, \phi)) + Bi J(\lambda, \phi) - (p, \text{div}(\phi)) = (f, \phi) \\ (q, \text{div}(u)) = 0 \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ D(u) : \lambda = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Les auteurs de [9] ont prouvé que le système variationnel (3.4) implique la formulation variationnelle (3.6). En outre, pour tout $v \in V$, l'existence de (u, λ) est prouvée par [26]. Egalement d'après [9], en utilisant la condition de LBB, l'existence $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution de (3.6) est démontrée avec u unique. Cette technique de résolution est utilisée et énoncée en détail dans le chapitre suivant pour le problème à seuil variable.

Ces types de formulations éliminent les champs $D(u) = d$ et σ dans les écritures. Roquet [28] a proposé d'écrire le problème (3.1) à quatre champs sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega)^N, p \in L_0^2(\Omega), \sigma \in L^2(\Omega)_s^{N \times N} \text{ et } d = D(u) \in L^2(\Omega)_s^{N \times N} \text{ tels que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega)^N, p' \in L_0^2(\Omega), \sigma' \in L^2(\Omega)_s^{N \times N} \text{ et } d' \in L^2(\Omega)_s^{N \times N} \\ 2(d, d' - d) - (\sigma, d' - d) + Bi(\tilde{j}(d) - \tilde{j}(d')) \geq 0 \\ (\sigma', d) = (\sigma', D(u)) \\ (\sigma, D(v)) - (p, \text{div}(v)) = (f, v) \\ (p', \text{div}(u)) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où $L^2(\Omega)_s^{N \times N} = \{\eta \in L^2(\Omega)^{N \times N} / \eta^t = \eta\}$ et $\tilde{j}(d') = \int_{\Omega} d'_{II} dX$.

La solution (u, p, d, σ) du problème (3.7) est prouvée par [28] avec u et d uniques. Mais, σ et p ne sont pas uniques. Ainsi, on remarque qu'en éliminant les champs σ et d , on obtient le problème mixte (3.4) à deux champs u et p .

En outre, Roquet [28] a démontré que : $\forall (v, d', \sigma') \in V \times L^2(\Omega)_s^{N \times N} \times L^2(\Omega)_s^{N \times N}$, $(u, d, \sigma) \in V \times L^2(\Omega)_s^{N \times N} \times L^2(\Omega)_s^{N \times N}$ est un point selle de la fonctionnelle L_1 . Cette dernière est nommée Lagrangien et définie par :

$$L_1(d', v, \sigma') = \|d'\|_{0,\Omega}^2 + Bi \tilde{j}(d') - (f, d') + (\sigma', D(v) - d') \quad (3.8)$$

Soit $(L_1)_a$ la fonctionnelle définie par : $(\bar{d}, \bar{\sigma}) \in (L^2(\Omega)_s^{N \times N})^2$ et $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^N$

$$(L_1)_a((\bar{d}, \bar{u}); \bar{\sigma}) = \|\bar{d}\|_{0,\Omega}^2 + Bi \tilde{j}(d') - (f, \bar{d}) + (\bar{\sigma}, D(\bar{u}) - \bar{d}) + \frac{a}{2} \|D(\bar{u}) - \bar{d}\|_{0,\Omega}^2 \quad (3.9)$$

où a est le paramètre d'augmentation.

Il est important de signaler que la recherche de point selle est souvent plus simple pour $(L_1)_a$ que pour L_1 en raison du terme quadratique $\frac{a}{2} \|D(\bar{u}) - \bar{d}\|_{0,\Omega}^2$, car on obtient une stabilité inconditionnelle des algorithmes itératifs. L'existence de ce point selle fait ressortir l'écriture de l'algorithme de Lagrangien augmenté énoncé

dans la section 3.3.

De plus, la régularité de la vitesse est analysée dans [10] :

Proposition 3.2.4 (*Régularité de u*)

1. Si $f \in L^2(\Omega)^N$ alors $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)^N$;
2. Si $f \in L^{2,N-2}(\Omega)^N$ alors $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)^N$ est une fonction continue holdérienne. Cela veut dire que :

$$\forall 0 < \alpha < 1, u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})^N$$

où $L^{n,m}(\Omega)$ est l'espace de Morrey-Campanato.

3.3 Algorithmes de résolution

L'existence de (u, p, λ) où (u, λ) est un point selle de L et le calcul de λ par la projection (2.28) mettent en évidence un algorithme naturel de résolution, l'algorithme d'Uzawa, qui peut être écrit de la manière suivante (voir par exemple [26]) :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p^0 \in L_0^2(\Omega)$, calculons $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$ comme suit :

$$\forall 0 \leq n \leq I$$

Etape 1 : $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ résout un sous-problème de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta(u^{n+1}) + \nabla(p^{n+1}) = Bi \operatorname{div}(\lambda^n) + f \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Etape 2 : Mise à jour de la contrainte plastique

$$\lambda^{n+1} = P_\Lambda(\lambda^n + \alpha D(u^{n+1})) \quad (3.11)$$

Etape 3 : Arrêt de l'algorithme

$$\|\lambda^{N'+1} - \lambda^{N'}\|_{0,\Omega} \leq \epsilon \quad (3.12)$$

où I est le nombre maximum des itérations et ϵ la précision de l'algorithme d'Uzawa.

De plus, pour tout p pression imposée, la convergence de l'algorithme est démontrée par [26] tant que $\alpha \leq \frac{2}{Bi}$ au sens où $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u$ dans $H_0^1(\Omega)^N$ et $\|\lambda^n - \lambda\|_{0,\Omega}$ dans \mathbb{R} .

Il existe d'autres méthodes numériques de résolution qui peuvent être adaptés à la non linéarité du seuil. On peut citer l'algorithme de lagrangien augmenté présenté de manière détaillée dans les livres de de Glowinski et LeTallec [12] et Fortin et Glowinski [24] et l'algorithme de Newton [13].

L'algorithme Newton [13] résout un problème régularisé différent du problème à seuil donné en remplaçant l'équation constitutive des fluides viscoplastiques par celle d'un fluide quasi-newtonien en fonction d'un paramètre de régularisation $\epsilon > 0$. La première difficulté vient de ce que ϵ doit être choisi petit pour que la solution de ce problème quasi-newtonien ressemble à celle du problème viscoplastique. Pour ϵ petit, le problème quasi-newtonien en dimension finie devient difficile à résoudre : les matrices dépendent de ϵ et

leur conditionnement est en $1/\epsilon$, ce qui détériore les propriétés de convergence des méthodes itératives. Autrement dit, pour ϵ grand, les estimations d'erreur entre la solution du problème régularisé et la solution du problème à seuil paraissent grandes. De plus, le temps de calcul peut exploser quand le paramètre de régularisation tend vers zéro. La seconde difficulté vient de ce que pour tout $\epsilon > 0$, il n'existe pas des zones rigides associées à $D(u) = 0$. Avec ces modèles régularisés, on n'est plus capable de déterminer les zones rigides. Ces deux inconvénients ont motivé la recherche d'autres algorithmes.

Le principe d'une méthode de Lagrangien augmenté consiste à appliquer un algorithme de point selle $((d, u); \sigma)$, pour la fonctionnelle $(L_1)_a$ définie par (3.9) où a correspond au paramètre d'augmentation du lagrangien.

Dans le cadre des méthodes de Lagrangien augmenté, le problème prend la forme concrète suivante :

Soient $u^0 \in H_0^1(\Omega)^N$, $p^0 \in L_0^2(\Omega)$, $\sigma^0 \in L^2(\Omega)_s^{N \times N}$ et $d^0 \in L^2(\Omega)_s^{N \times N}$

Etant donné $d^n \in L^2(\Omega)_s^{N \times N}$ et $\sigma^n \in L^2(\Omega)_s^{N \times N}$, on calcule $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N$, $p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$, d^{n+1} et σ^{n+1} comme suit :

Etape 1 : Trouver $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ qui résout le sous-problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}\Delta(u^{n+1}) + \nabla(p^{n+1}) = Bi \operatorname{div}(\sigma^n - a d^n) + f & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (3.13)$$

Etape 2 : Résolution explicite des non-linéarités

$$d^{n+1} := \frac{1}{a+2} F_\Omega(\sigma^n + a D(u^{n+1}))$$

$$\text{où } F_\Omega(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sigma_{II}}(\sigma_{II} - Bi) & \text{si } \sigma_{II} > Bi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etape 3 : Mise à jour des contraintes

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + a(D(u^{n+1}) - d^{n+1})$$

L'avantage de cette méthode est qu'en raison du terme $(\bar{\sigma}, D(\bar{u}) - \bar{d})$, la solution exacte du problème (3.8) peut être déterminée sans faire tendre a vers l'infini. En outre, le terme quadratique $\frac{a}{2} \|D(\bar{u}) - \bar{d}\|_{0,\Omega}^2$ permet d'améliorer la propriété de la convergence de l'algorithme. Cette convergence est assurée dans le livre de Glowinski et LeTallec ([12], pages 84 – 87) aussi dans le livre de Fortin et Glowinski [24] au sens où $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u^n, d^n\} = \{u, d\}$ dans $H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)_s^{N \times N}$.

Cependant, Dean *et al.* [26] ont montré que cet algorithme n'est pas performant. Son inconvénient est la nécessité d'une place supplémentaire en mémoire informatique pour les termes dérivés du terme quadratique $\frac{a}{2} \|D(\bar{u}) - \bar{d}\|_{0,\Omega}^2$. Ceci peut être crucial pour des problèmes tridimensionnels et des géométries complexes, faisant intervenir des maillages et des matrices de grand ordre.

3.4 Solutions analytiques

Le but de cette sous-section est d'introduire des cas simples où la solution est déterminée explicitement dans la littérature comme le problème de Poiseuille et Couette ([25] et [6]).

3.4.1 Problème de Poiseuille

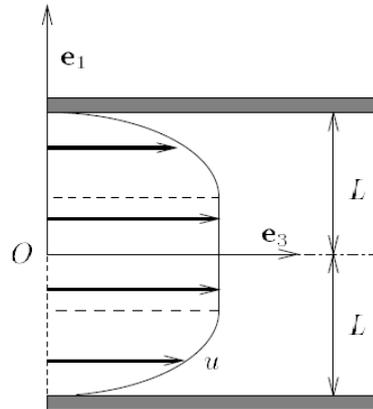


FIGURE 3.1 – Écoulement entre deux plaques parallèles "Poiseuille plan".

Soient deux plaques parallèles séparées par une distance $2L$ schématisées par la figure 3.1. Un fluide de Bingham, de seuil σ_0 , est mis en mouvement entre ces deux plaques soumises à une chute linéique de pression f . Le nombre sans dimension devient :

$$Bi = \frac{\sigma_0}{Lf}$$

Une solution de ce problème est calculée dans des nombreux ouvrages (voir par exemple [6]). Elle est exprimée par :

Pour $Bi < 1$, on a :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(Bi-1)^2}{2} - \frac{(Bi-x)^2}{2} & \text{si } x > Bi \\ \frac{(Bi-1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour $Bi \geq 1$, la vitesse u est identiquement nulle et l'écoulement est bloqué.

3.4.2 Problème de Couette

Soit deux cylindres coaxiaux dans le repère de la figure 3.2. Les cylindres intérieur et extérieur sont animés d'une vitesse de rotation uniforme w_i et w_e . La longueur des cylindres L est supposée grande par rapport à leurs rayons R_i et R_e . Soit un fluide de Bingham de seuil σ_0 s'écoulant entre ces deux cylindres. Le nombre

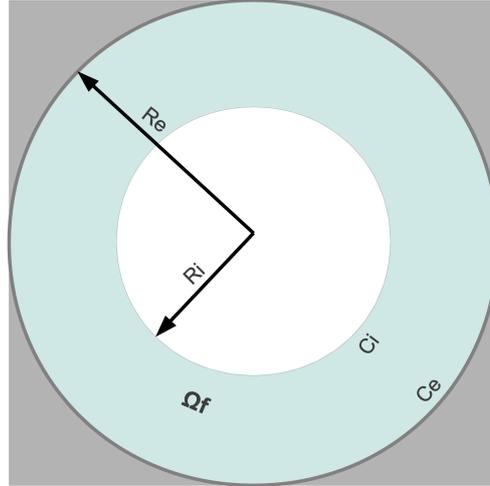


FIGURE 3.2 – Ecoulement d'un fluide de Bingham entre deux cylindres coaxiaux C_i et C_e de rayons respectivement R_i et R_e .

sans dimension de Bingham Bi devient :

$$Bi = \frac{\sigma_0 L}{\eta U} = \frac{\sigma_0}{\eta w_e}$$

où $U = R_e w_e$ est la vitesse caractéristique du cylindre extérieur.

Soit $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ où (r, θ) le couple des coordonnées polaires. La vitesse est indépendante de θ et se définit sous la forme $u(r) = w(r)r$ où $w(r)$ est la vitesse de rotation.

La vitesse de rotation d'un fluide de Bingham à seuil Bi est écrite par [29] sous la forme suivante :

$$w(r) = \begin{cases} w_0 - Bi \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{K}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) & \text{si } r < r_s \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $w_0 = \frac{w_i}{w_e}$, $r_0 = \frac{R_i}{R_e}$ et $r_s = \sqrt{\frac{K_0}{Bi}}$ où K_0 vérifie cette relation

$$1 = w_0 + \frac{K_0}{2r_0^2} - \frac{Bi}{2} \left(1 + \ln\left(\frac{K_0}{r_0^2 Bi}\right)\right) \quad (3.16)$$

et K vérifie

$$K = \begin{cases} K_0 & \text{si } r_s \leq 1 \\ \frac{-2(1-w_0-Bi \ln(r_0))}{1-\frac{1}{r_0^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

De plus, la vitesse de rotation pour un fluide newtonien ($Bi = 0$) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$w(r) = w_0 - \frac{K'}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) \quad (3.18)$$

$$\text{où } K' = -2 \frac{(1-w_0)}{\left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right)}.$$

3.5 Problème en dimension finie

Soient $X_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et $T_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)^{N \times N}$ et $P_h(\Omega) \subset L_0^2(\Omega)$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie au sens où :

1. h est paramètre dans \mathbb{R}^+ ;
2. $\forall h$, $X_h \subset H_0^1(\Omega)$ et $T_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)^{N \times N}$ et $P_h(\Omega) \subset L_0^2(\Omega)$. En pratique, h présente le pas de discrétisation par la méthode des éléments finis ;
3. il existe \tilde{X} , \tilde{P} et \tilde{T} des espaces denses dans $H_0^1(\Omega)$, $L_0^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^{N \times N}$ respectivement tels que : $\forall (v, q, r) \in \tilde{X} \times \tilde{P} \times \tilde{T}$, on peut construire $v_h \in X_h(\Omega)$, $q_h \in P_h(\Omega)$ et $r_h \in T_h(\Omega)$ avec $v_h \rightarrow v$, $q_h \rightarrow q$ et $r_h \rightarrow r$ lorsque $h \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^{N \times N}$ respectivement.

La formulation variationnelle discrète à deux champs peut être écrite sous la forme suivante :

Trouver $u_h \in X_h(\Omega)^N$ et $p_h \in P_h(\Omega)$ telles que $\forall (v, q) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ on a :

$$\begin{cases} ((u_h, v - u_h)) + Bi(j(v) - j(u_h)) - (p_h, \text{div}(v - u_h)) \geq (f_h, v - u_h) \\ (q, \text{div}(u_h)) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

L'approximation du problème à trois champs s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h, \lambda_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega) \times \Lambda \text{ telle que } \forall v \in X_h(\Omega)^N \\ ((u_h, v)) + Bi J(\lambda_h, v) - (p_h, \text{div}(v)) = (f_h, v) \\ (q, \text{div}(u_h)) = 0 \quad \forall q \in P_h(\Omega) \\ D(u_h) : \lambda_h = D(u)_{II} \end{cases} \quad (3.20)$$

Remarque 3.5.1 En pratique, on considère un opérateur $\pi_h : \Lambda \rightarrow T_h(\Omega)$ tel que $\pi_h(\lambda_h)$ est l'approximation de $\lambda_h \in \Lambda$.

De plus, nous supposons que la condition LBB (3.5) reste vraie dans le cas discret c'est-à-dire qu'il existe β_1 tel que :

$$\forall q \in P_h(\Omega), \quad \sup_{w \in X_h(\Omega)^N} \frac{(q, \text{div}(w))}{\|w\|_{1,\Omega}} \geq \beta_1 \|q\|_{0,\Omega} \quad (3.21)$$

où β_1 est indépendant de h . L'ouvrage de Brezzi et Fortin [30] et le livre Girault et Raviart [31] contiennent des nombreux exemples d'espaces $X_h(\Omega)^N$ et $P_h(\Omega)$ qui vérifient cette condition.

De manière similaire au cas continu, en utilisant un problème régularisé et la condition (3.21), on démontre l'existence de $(u_h, p_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ solution du problème (3.19) avec u_h unique (voir par exemple [14]).

Par ailleurs, un théorème de convergence forte est présenté par Glowinski, Lions et Trémolières [14] pour une pression p imposée. Ce résultat repose sur :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq |\Omega|^{1/2}(c + Bi)\|v_h - u\|_{1,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega}\|v_h - u\|_{0,\Omega} \quad (3.22)$$

où $c = c(\Omega)\|f\|_{0,\Omega}$, $c(\Omega)$ constante qui dépend de l'ouvert Ω et v_h vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{1,\Omega} = 0 \quad \forall v \in X_h(\Omega)^N \quad (3.23)$$

Remarque 3.5.2 Dans les travaux de Glowinski, Lions et Trémolières [14], ce résultat est établi pour un problème scalaire où $c(\Omega)$ est égale à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \frac{\|f\|_{0,\Omega}}{\sqrt{|\Omega|^{1/2}}}$ avec λ_0 la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Par exemple, si on choisit $X_h(\Omega) = Y_h^{1,0} \cap H_0^1(\Omega)$ où

$$Y_h^{k,0}(\bar{\Omega}) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}); (v_h)|_K \in P_k, \forall K \in T\}$$

avec P_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que tout $P \in P_k$, P s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$$

et on prend $v_h = r_h u$ où r_h est un opérateur de projection H^1 ou bien d'interpolation, alors l'estimation abstraite (3.22) permet de conclure :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O(h^{1/2}) \quad (3.24)$$

Egalement, dans les cas où la pression p est donnée, Glowinski [32] a écrit une estimation en fonction de λ et Bi sous la forme suivante : $\forall v \in X_h(\Omega)^N$ et $\forall \mu_h \in \Lambda \cap T_h(\Omega)$ telles que $\mu_h : D(v) = D(v)_{II}$

$$((u_h - u, u_h - u)) \leq ((u_h - u, v - u)) + Bi(\mu_h - \lambda, D(v - u)) \quad (3.25)$$

De plus, Glowinski [6] propose une estimation plus fine dans le cas particulier de Poiseuille circulaire¹. Il a établi une estimation d'erreur, $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O\left(h\sqrt{|\ln(h)|}\right)$ en prenant $X_h(\Omega) = Y_h^{1,0} \cap H_0^1(\Omega)$. L'auteur de [6] a défini un ouvert Ω_ϵ sous la forme suivante :

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega / D(u)_{II} > \epsilon\}$$

¹On considère l'écoulement laminaire permanent dans une conduite rectiligne de section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et d'axe e_3 sous l'action d'une variation constante de pression. On nomme cette situation problème de Poiseuille. En particulier, si Ω est un disque alors on parle du problème de Poiseuille circulaire.

où $\epsilon > 0$. L'estimation est alors obtenue en utilisant le fait suivant dans le cas Poiseuille circulaire :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{dX}{D(u)_{II}} = O(-\ln(\epsilon))$$

De plus, l'auteur de [25] montre en supposant $X_h(\Omega) = Y_h^{2,0} \cap H_0^1(\Omega)$ que l'ordre

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = O\left(h^2 \sqrt{|\ln(h)|}\right)$$

peut être obtenu dans le cas du problème Poiseuille circulaire, à condition d'adapter localement le maillage. Plus généralement, une convergence de u est prouvée par les travaux de Han et Reddy [27] dans le cas du problème mixte à deux champs (3.4). Ce résultat s'appuie sur : $\forall (v, q) \in Z_h(\Omega) \times P_h(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq c \left\{ \|u - v\|_{1,\Omega} + \|u - v\|_{1,\Omega}^{1/2} + \|p_h - q\|_{0,\Omega} \right\} \quad (3.26)$$

où $Z_h = \{v_h \in X_h(\Omega)^N / (q_h, \text{div}(v_h)) = 0 \forall q_h \in P_h\}$.

Ces estimations se limitent à l'erreur entre u et u_h . Ceci montre que la convergence de p ainsi que l'unicité de p restent une difficulté dans la littérature pour des problèmes mixtes en u et p .

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une présentation générale sur les méthodes de résolution théorique et numérique existants dans la littérature pour le modèle de Bingham a été exposée. Ces techniques de résolution ne peuvent pas être adaptées de manière immédiate dans le modèle LVF. Toutefois, elles peuvent être en partie adaptées comme le montre le chapitre suivant.

Résolution théorique du modèle viscoplastique frictionnel

4.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est d'aborder la résolution théorique et numérique du problème LVF (2.26). Cependant, la résolution numérique complète nécessite une méthode de discrétisation spatiale. Cette dernière sera décrite au chapitre 5 en fonction des géométries simulées.

On considère le problème LVF (2.26) avec des conditions aux limites de type de Dirichlet en particulier $u = 0$ sur Γ . Ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (u, p) \text{ telle que} & \\ \sigma \in \begin{cases} \left\{ 2D(u) + \mu_0 G(p) \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < \mu_0 G(p) \right\} & \text{sinon} \end{cases} & \\ \operatorname{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.1)$$

D'après le chapitre 2, ce problème peut être écrit en fonction de λ sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda, p) \text{ telle que} \\ \sigma = 2D(u) + \mu_0 G(p)\lambda \\ \lambda_{II} \leq 1 \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ \text{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Pour cela, nous allons analyser trois types de problèmes : problème à seuil variable $\text{LVF}(\mu_0(q))$ où $\mu_0(q)$ est égale à $\mu_0 G(q)$ avec q une fonction donnée, problème LVF à seuil régularisé et problème LVF en dimension finie.

Le plan est le suivant :

La première section se consacre à la présentation des démarches formelles de la résolution théorique du problème LVF. Une formulation variationnelle rigoureuse est alors proposée. La localisation de la solution (u, p) du problème LVF dans un ensemble relativement compact est montrée. On montre que la vitesse et la pression sont bornées.

La deuxième section constitue une méthodologie de résolution qui s'appuie sur une construction d'un point fixe dans un problème à seuil variable.

La troisième section s'occupe de l'exploration d'un problème à seuil variable (problème intermédiaire, $\text{LVF}(\mu_0(q))$ où $\mu_0(q) = \mu_0 G(q)$ avec q fonction donnée). Ce dernier sera résolu en adaptant les techniques développées pour le modèle de Bingham qui est à seuil constant ([25], [6], [10] et [33]). Notamment, l'existence d'une solution est démontrée, un algorithme de résolution est proposé et sa convergence est montrée. La quatrième section exploite une résolution théorique du problème LVF régularisé. En particulier, l'existence d'une unique solution qui s'appuie sur l'existence d'un point fixe dans le problème intermédiaire régularisé est démontrée.

Dans la cinquième section, un point fixe est construit pour le problème LVF discret. L'existence de ce point fixe est démontrée et un algorithme de résolution est proposé.

Dans la sixième section, nous présentons un cas particulier, problème de Couette, où la solution est calculée explicitement. L'existence d'une unique solution (u, p) est alors mise en évidence dans ce cas. Une généralisation de la solution est montrée pour toute pression radiale.

La dernière section ouvre une discussion sur la solution et l'algorithme du problème LVF en s'appuyant sur les résultats obtenus.

4.2 Formulation variationnelle et propriétés formelles

Dans cette section, nous commençons à présenter LVF (4.2) sous la forme de formulations variationnelles faibles. Ces formulations sont bien connues depuis Duvaut et Lions pour des fluides viscoplastiques à seuil constant. Ces formulations sont très utiles pour comprendre la façon générale de discrétiser le problème (4.2). Ainsi, certaines propriétés de la solution sont établies.

4.2.1 Formulation variationnelle à trois champs

On commence par définir les formes suivantes : $\forall (w, v) \in (H_0^1(\Omega)^N)^2$, $(r, \zeta) \in L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ et $f \in L^2(\Omega)^N$

$$((w, v)) = \int_{\Omega} D(w) : D(v) dX$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v dX$$

$$J(r, \zeta, v) = \int_{\Omega} G(r)\zeta : D(v) dX$$

$$j(r, v) = \int_{\Omega} G(r)D(v)_{II} dX$$

où $((,))$ et $(,)$ sont des produits scalaires respectivement sur $H_0^1(\Omega)^N$ et $L^2(\Omega)$. Ainsi, $\|D(w)\|_{0,\Omega} = ((w, w))^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)^N$ notée $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

De manière similaire à la formulation variationnelle du problème de Bingham (3.6) proposée par Duvaut et Lions [7], la formulation variationnelle rigoureuse à trois champs u, p et λ , pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)^N$, du problème LVF (4.2) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ ((u, v)) + \mu_0 J(p, \lambda, v) - (p, \text{div}(v)) = (f, v) \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ (r, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

En utilisant le fait que $\lambda : D(v) \leq \lambda_{II} D(v)_{II} \leq D(v)_{II}$, on prouve que la formulation variationnelle à trois champs (4.3) implique le système variationnel à deux champs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ ((v, v - u)) + \mu_0 (j(p, v) - j(p, u)) - (p, \text{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \\ (r, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Proposition 4.2.1 *Le problème variationnel (4.4) est équivalent au système variationnel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ ((v, v - u)) + \mu_0 (j(p, v) - j(p, u)) - (p, \text{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \\ (r, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

preuve 4 Soit $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ solution de (4.4) alors d'après la positivité de $((,))$, il en résulte : $\forall v \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\begin{aligned} ((v, v - u)) + \mu_0 (j(p, v) - j(p, u)) - (p, \text{div}(v - u)) &\geq ((u, v - u)) + \mu_0 (j(p, v) - j(p, u)) \\ &\quad - (p, \text{div}(v - u)) \\ &\geq (f, v - u) \end{aligned}$$

donc $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est une solution de (4.5).

Réciproquement, en prenant $v = (1 - r)u + rw$ dans (4.5) telle que $w \in H_0^1(\Omega)^N$ et $r \in]0, 1[$, on a :

$$r(((1 - r)u + rw, w - u)) + \mu_0(j(p, (1 - r)u + rw) - j(p, u)) - r(p, \operatorname{div}(w - u)) \geq r(f, w - u) \quad (4.6)$$

De plus, la fonctionnelle j est convexe sur $H_0^1(\Omega)^N$, alors on obtient : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$r(((1 - r)u + rw, w - u)) + \mu_0 r(j(p, w) - j(p, u)) - r(p, \operatorname{div}(w - u)) \geq r(f, w - u) \quad (4.7)$$

d'où, en divisant par r et en passant à la limite $r \rightarrow 0$, on obtient (u, p) une solution du problème (4.4).

Ces systèmes variationnels (4.3), (4.4) et (4.5) sont bien définis. Mais, la principale difficulté résulte d'un couplage fort entre la vitesse et la pression. Cette dernière est localisée dans le paramètre de seuil.

4.2.2 Quelques propriétés de la solution

L'existence d'une solution reste pour l'instant un problème ouvert. On s'intéresse dans cette sous-section à décrire les propriétés de la solution (u, p) ainsi que l'ensemble des solutions tout en supposant que (u, p) existe.

Proposition 4.2.2 (*u vitesse bornée*)

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution de (4.3), alors la vitesse u est bornée dans $H_0^1(\Omega)^N$ avec

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C_1 \quad (4.8)$$

où $C_1 = c^2 \|f\|_{0,\Omega}$ et c la constante de Korn qui dépend de l'ouvert Ω .

preuve 5 Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ une solution de (4.3) alors $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est une solution de (4.4).

Posons $v = -u$ dans (4.4), alors on obtient :

$$((u, u)) \leq (f, u) \quad (4.9)$$

D'une part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre que :

$$(f, u) \leq \|f\|_{0,\Omega} \|u\|_{0,\Omega}$$

Or, $\forall \alpha > 0$

$$(f, u) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{0,\Omega} \alpha \|u\|_{0,\Omega}$$

alors

$$(f, u) \leq \frac{1}{2\alpha^2} \|f\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|u\|_{0,\Omega}^2$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Korn [14], on prouve que :

$$\|D(u)\|_{0,\Omega}^2 \geq \frac{1}{c^2} \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad (4.10)$$

où c est la constante de Korn qui dépend de Ω .

Il en résulte : $\forall 0 < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{c}$

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha \sqrt{2(\frac{1}{c^2} - \frac{\alpha^2}{2})}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (4.11)$$

On pose $C_1 = \frac{1}{\alpha \sqrt{2(\frac{1}{c^2} - \frac{\alpha^2}{2})}} \|f\|_{0,\Omega}$. Donc, $\alpha = \frac{1}{c}$ minimise la valeur de cette constante.

D'où le résultat (4.8).

Proposition 4.2.3 (*p pression bornée*)

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution de (4.3), alors la pression p est bornée dans $L_0^2(\Omega)$ avec

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq C_2 \quad (4.12)$$

où $C_2 = \frac{1}{\beta}(C_1 + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} + \|f\|_{0,\Omega})$ et β est la constante de LBB (3.5).

preuve 6 Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $(u, \lambda, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda \times L_0^2(\Omega)$ solution de (4.3) ceci implique que $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est une solution de (4.4) alors on a : $\forall v \in H_0^1(\Omega)^N$

$$((u, v - u)) + \mu_0 (j(p, v) - j(p, u)) - (p, \operatorname{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \quad (4.13)$$

On pose $v = w + u$ où $w \in H_0^1(\Omega)^N$, ceci implique que

$$(p, \operatorname{div}(w)) \leq ((u, w)) - \mu_0 (j(p, u) - j(p, u + w)) - (f, w) \quad (4.14)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{cases} |((u, w))| & \leq \|D(u)\|_{0,\Omega} \|D(w)\|_{0,\Omega} \\ |(f, w)| & \leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \end{cases} \quad (4.15)$$

De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on montre :

$$|j(p, u) - j(p, u + w)| \leq \|G(p)\|_{\infty,\Omega} \int_{\Omega} D(w)_{II} dX \quad (4.16)$$

Ainsi, les relations suivantes sont vraies :

$$\int_{\Omega} D(w)_{II} dX \leq \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} \|D(w)\|_{0,\Omega} \quad (4.17)$$

$$\|G(p)\|_{\infty,\Omega} \leq p_\infty \quad (4.18)$$

En combinant les relations (4.14)- (4.18), on obtient :

$$(p, \operatorname{div}(w)) \leq \|u\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} \|w\|_{1,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad (4.19)$$

D'une part, d'après la condition de LBB (3.5), on a :

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} (\|u\|_{1,\Omega} + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} + \|f\|_{0,\Omega}) \quad (4.20)$$

D'autre part, u est bornée d'après la proposition 4.2.2, il en résulte :

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \left(C_1 + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} + \|f\|_{0,\Omega} \right) \quad (4.21)$$

D'où le résultat (4.12).

Soit χ l'ensemble des solutions du problème variationnel (4.4) défini par :

$$\chi = \left\{ \begin{array}{l} (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que } \forall (r, v) \in L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N, \\ ((v, v - u)) + \mu_0(j(p, v) - j(p, u)) - (p, \operatorname{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \text{ et } (r, \operatorname{div}(u)) = 0 \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

Proposition 4.2.4 *L'ensemble des solutions χ du problème variationnel (4.4) est convexe et fermé dans $H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$.*

preuve 7 *La fonctionnelle j est convexe, $((\cdot, \cdot))$ et (\cdot, \cdot) sont des produits scalaires sur $H_0^1(\Omega)^N$ et $L^2(\Omega)$ respectivement. Ceci nous donne que pour tout $(w_1, p_1), (w_2, p_2) \in \chi^2$, $((1-r)w_1 + rw_2, (1-r)p_1 + rp_2) \in \chi$ où $r \in]0, 1[$. Donc χ est convexe.*

Soit $(u_n, p_n)_n$ une suite dans χ telle que u_n converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)^N$ et p_n converge fortement vers p dans $L_0^2(\Omega)$. On a que (u_n, p_n) vérifie le système variationnel (4.5) : $\forall (v, r) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((v, v - u_n)) + \mu_0(j(p_n, v) - j(p_n, u_n)) - (p_n, \operatorname{div}(v - u_n)) \geq (f, v - u_n) \\ (r, \operatorname{div}(u_n)) = 0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Il faut alors démontrer que $(u, p) \in \chi$ c'est-à-dire il faut vérifier que : $\forall (v, r) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((v, v - u)) + \mu_0(j(p, v) - j(p, u)) - (p, \operatorname{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \\ (r, \operatorname{div}(u)) = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

D'une part, $(r, \operatorname{div}(u_n))$ converge vers $(r, \operatorname{div}(u))$ pour tout $r \in L_0^2(\Omega)$ car u_n converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)^N$. D'autre part, les termes $((\cdot, \cdot))$, $j(\cdot, \cdot)$ et (\cdot, \cdot) sont continus.

De plus, on prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j(p_n, u_n) = j(p, u)$$

En effet,

$$\begin{aligned} |j(p_n, u_n) - j(p, u)| &= |j(p_n, u_n) - j(p_n, u) + j(p_n, u) - j(p, u)| \\ &\leq |j(p_n, u_n) - j(p_n, u)| + |j(p_n, u) - j(p, u)| \\ &\leq p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} \|u_n - u\|_{1,\Omega} + \frac{C_1}{\sqrt{2}} \|p_n - p\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

avec $\|u_n - u\|_{1,\Omega}$ et $\|p_n - p\|_{0,\Omega}$ qui tendent vers zéro dans \mathbb{R} .

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} j(p_n, u_n) = j(p, u)$.

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
((v, v - u)) + \mu_0(j(p, v) - j(p, u)) - (p, \operatorname{div}(v - u)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{((v, v - u_n)) + \mu_0 \lim_{n \rightarrow \infty} j(p_n, v) \\
&- \mu_0 \lim_{n \rightarrow \infty} j(p_n, u_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n, \operatorname{div}(v - u_n))\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \{((v, v - u_n)) + \mu_0 j(p_n, v) \\
&- \mu_0 j(p_n, u_n) - (p_n, \operatorname{div}(v - u_n))\} \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (f, v - u_n) = (f, v - u)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Donc, $(u, p) \in \chi$.

4.3 Démarches formelles

L'objectif de cette sous-section est de fournir une méthodologie de résolution du modèle viscoplastique frictionnel (2.26). Ce dernier peut être considéré comme un modèle de Bingham à seuil $\mu_0 G(p)$. Pour cela, nous construisons un point fixe dans un problème intermédiaire (problème à seuil variable) afin d'utiliser les techniques classiques de la littérature pour le modèle de Bingham (problème à seuil constant) qui sont énoncées dans le chapitre 3. Notre méthodologie consiste alors à :

1. remplacer le paramètre du seuil $\mu_0 G(p)$ par $\mu_0 G(q)$ où q est une fonction donnée dans le même espace vectoriel $L_0^2(\Omega)$ que celui de p ;
2. définir une formulation variationnelle du modèle d'écoulement du problème intermédiaire $\operatorname{LVF}(\mu_0(q))$ en fonction de u, q et p où q est une fonction donnée ;
3. démontrer l'existence de $(u(q), p(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ solution du problème intermédiaire $\operatorname{LVF}(\mu_0(q))$;
4. démontrer l'existence de p solution du problème LVF (2.26), à partir de la technique du point fixe, c'est-à-dire on considère que l'application $p : L_0^2(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega), q \mapsto p(q)$ ¹ admet un point fixe en appliquant le théorème de Picard et ses généralisations [34] ;
5. utiliser un algorithme de résolution convenable.

Cette technique de résolution est utilisée dans la littérature pour un problème similaire : le problème de Signorini-Coulomb où la friction est une contrainte de frontière (voir l'annexe A).

4.4 Résolution du problème viscoplastique à seuil variable

Définition 4.4.1 (*Problème à seuil variable*)

¹On a prouvé dans la section 4.4 que pour toute $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe $p(q) \in L_0^2(\Omega)$. Cependant, $p(q)$ n'est pas unique dans $L_0^2(\Omega)$. Alors, p est une application multivoque.

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ des fonctions données. Le problème à seuil variable (problème intermédiaire) $LVF(\mu_0(q))$ est défini sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda, p) \text{ telle que} \\ \sigma = 2D(u) + \mu_0 G(q)\lambda \\ \lambda_{II} \leq 1 \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ \text{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.26)$$

4.4.1 Formulation variationnelle à trois champs - Existence de la solution

Proposition 4.4.1 (Formulation variationnelle à trois champs (u, p, λ))

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ fonctions données. La formulation variationnelle du problème à seuil donné $LVF(\mu_0(q))$ (4.26) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ ((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) - (p, \text{div}(v)) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ D(u) : \lambda = D(u)_{II} \text{ presque partout sur } \Omega \\ (r, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.27)$$

où $\Lambda = \{r \in L^2(\Omega)^{N \times N} / r_{II} \leq 1\}$.

preuve 8 Pour tout $(w, v) \in H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$, $q \in L_0^2(\Omega)$ et $r \in \Lambda$, $J(q, r, v)$, $((w, v))$ et $(r, \text{div}(v))$ sont bien définis.

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ fonctions données. On suppose que (u, λ, p) est une solution du problème (4.26). On note, pour tout : $1 \leq i, j \leq N$, σ_{ij} les composantes du tenseur de contraintes aux champs de vitesse u , $d_{ij}(u)$ les composantes de taux de déformations et λ_{ij} les composantes de la contrainte plastique λ .

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$, en multipliant par v et en intégrant sur Ω la quatrième relation de (4.26), on obtient :

$$- \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \cdot v \, dX + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v \, dX = \int_{\Omega} f \cdot v \, dX \quad (4.28)$$

D'après la formule de Green, il vient que :

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla(v) \, dX - \int_{\Omega} p \, \text{div}(v) \, dX = \int_{\Omega} f \cdot v \, dX \quad (4.29)$$

En utilisant la symétrie du tenseur des contraintes σ et son expression donnée par (4.26), on aura :

$\forall 1 \leq i, j \leq N$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dX = \int_{\Omega} d_{ij}(u) d_{ij}(v) \, dX + \int_{\Omega} \mu_0 G(q) \lambda_{ij} d_{ij}(v) \, dX \quad (4.30)$$

En combinant les relations (4.29) et (4.30), on obtient :

$$\int_{\Omega} D(u) : D(v) dX + \int_{\Omega} \mu_0 G(q) \lambda : D(v) dX - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v) dX = \int_{\Omega} f \cdot v dX \quad (4.31)$$

En outre, en multipliant la cinquième équation de (4.26) par $r \in L_0^2(\Omega)$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u) r dX = 0 \quad (4.32)$$

La formulation variationnelle (4.27) est donc obtenue.

La réciproque suit les même étapes.

Proposition 4.4.2 (Formulation variationnelle à deux champs (u, p))

Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ fonctions données. La formulation variationnelle à trois champs du problème à seuil donné LVF($\mu_0(q)$) (4.27) implique le système variationnel à deux champs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ ((u, v - u)) + \mu_0(j(q, v) - j(q, u)) - (p, \operatorname{div}(v - u)) \geq (f, v - u) \\ (r, \operatorname{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

preuve 9 Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ fonctions données.

On suppose que $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ est une solution de (4.27).

Tout d'abord, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$, $((u, v - u))$, $j(q, v)$, $j(q, u)$, $(p, \operatorname{div}(v - u))$ et (f, v) sont bien définis.

La propriété suivante est vraie presque partout sur Ω : $\forall v \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\lambda : D(v - u) = \lambda : D(v) - \lambda : D(u) \leq D(v)_{II} - D(u)_{II} \quad (4.34)$$

Donc, en combinant la relation (4.34) et le problème (4.27), on prouve que $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est une solution de (4.33).

Proposition 4.4.3 (Existence de la solution $u \in V$)

Soient $q \in L_0^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)^N$ fonctions données. On suppose que $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N$ est une solution de (4.33) alors u vérifie l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ ((u, v - u)) + \mu_0(j(q, v) - j(q, u)) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (4.35)$$

où $V = \{w \in H_0^1(\Omega)^N / \operatorname{div}(w) = 0\}$.

De plus, il existe $u \in V$ solution de l'inéquation variationnelle (4.35) avec u unique.

preuve 10 L'implication est facile à démontrer. Il suffit de prendre $v \in V$ dans le système variationnel (4.33).

On a que $((,))$ est forme bilinéaire sur $V \times V$, continue et coercive, j est lipschitzienne sur V et $(,)$ est forme bilinéaire continue sur V donc, d'après le théorème Lions-Stampacchia ([6] et [7]), il existe $u \in V$ solution unique du problème (4.35).

Proposition 4.4.4 Soient $f \in L^2(\Omega)^N$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ fonctions données. On considère $u \in V$ la solution de (4.35) alors il existe $\lambda \in \Lambda$ telle que $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ est une solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times \Lambda \text{ telle que } \forall v \in V \\ ((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) = (f, v) \\ \lambda : D(u) = D(u)_{II} \end{cases} \quad (4.36)$$

preuve 11 Soient $q \in L_0^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)^N$ des fonctions données. On considère $\epsilon > 0$ et $u \in V$ la solution du problème (4.35). On régularise le problème (4.35), en prenant j_ϵ au lieu de j où j_ϵ est définie par :

$$j_\epsilon(v, q) = \int_{\Omega} G(q) \sqrt{\epsilon^2 + D(v)_{II}^2} dX \quad (4.37)$$

On suppose le problème régularisé (P_ϵ) suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\epsilon \in V \text{ telle que } \forall v \in V \\ ((u_\epsilon, v - u_\epsilon)) + \mu_0(j_\epsilon(q, v) - j_\epsilon(q, u_\epsilon)) \geq (f, v - u_\epsilon) \end{cases} \quad (4.38)$$

On a que $((\cdot, \cdot))$, j_ϵ et (\cdot, \cdot) vérifient les mêmes conditions que précédemment (preuve 10). Alors, d'après le théorème de Lions-Stampacchia ([6] et [7]), on démontre qu'il existe une unique u_ϵ solution de (4.38).

On prouve maintenant que u_ϵ tend vers u fortement dans V .

En effet, u et u_ϵ vérifient respectivement (4.35) et (4.38), alors il en résulte :

$$\begin{cases} ((u, u_\epsilon - u)) + \mu_0(j(q, u_\epsilon) - j(q, u)) \geq (f, u_\epsilon - u) \\ ((u_\epsilon, u - u_\epsilon)) + \mu_0(j_\epsilon(q, u) - j_\epsilon(q, u_\epsilon)) \geq (f, u - u_\epsilon) \end{cases} \quad (4.39)$$

Tout en additionnant les deux inéquations précédentes, on déduit :

$$((u_\epsilon - u, u_\epsilon - u)) \leq \mu_0(j_\epsilon(q, u) - j(q, u)) + \mu_0(j_\epsilon(q, u_\epsilon) - j(q, u_\epsilon)) \quad (4.40)$$

Remarque 4.4.1 On démontre facilement la propriété suivante : $\forall t \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$0 \leq \sqrt{|t|^2 + \epsilon^2} - \sqrt{|t|^2} = \frac{\epsilon^2}{\sqrt{|t|^2 + \epsilon^2} + \sqrt{|t|^2}} \leq \epsilon$$

Compte tenu de la remarque 4.4.1, on peut conclure : $\forall v \in V$

$$|j_\epsilon(q, v) - j(q, v)| \leq 2\epsilon|\Omega| \|G(q)\|_{\infty, \Omega} \quad (4.41)$$

Donc, tout en combinant les relations (4.40) et (4.41), on montre :

$$\|u_\epsilon - u\|_{1, \Omega}^2 \leq 2\epsilon|\Omega| \mu_0 \|G(q)\|_{\infty, \Omega} \quad (4.42)$$

Finally, d'après (4.42), on prouve que u_ϵ tend vers u fortement dans V lorsque ϵ tend vers zéro. D'autre part, j_ϵ est gâteaux différentiable sur V , alors $u_\epsilon \in V$ vérifie l'équation suivante : $\forall v \in V$

$$((u_\epsilon, v)) + \mu_0 \langle j'_\epsilon(q, u_\epsilon), v \rangle = (f, v)$$

où j'_ϵ est la différentielle de j_ϵ définie par :

$$\langle j'_\epsilon(q, w), v \rangle = \int_{\Omega} G(q) \frac{D(w) : D(v)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(w)_{II}^2}} dX$$

En posant

$$\lambda_\epsilon = \frac{D(u_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}} \quad (4.43)$$

on constate que :

1. $\lambda_\epsilon \in \Lambda$ est déterminé de manière unique ;

2. λ_ϵ vérifie :

$$((u_\epsilon, v)) + \mu_0 J(q, \lambda_\epsilon, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (4.44)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} |\lambda_\epsilon : D(u_\epsilon) - D(u_\epsilon)_{II}| &\leq |\epsilon + D(u_\epsilon)_{II} - \sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned} \quad (4.45)$$

Il en résulte

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\lambda_\epsilon : D(u_\epsilon) - D(u_\epsilon)_{II}\|_{\infty, \Omega} = 0 \quad (4.46)$$

En outre, Λ est un ensemble borné de $L^2(\Omega)^{N \times N}$ alors on peut extraire une sous suite de la suite (λ_ϵ) notée (λ_ϵ) qui converge faiblement vers λ dans $L^2(\Omega)^{N \times N}$.

On fait tendre ϵ vers zéro dans l'équation (4.44). Ceci implique que (u, λ) vérifie l'équation suivante :

$$((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (4.47)$$

De plus, d'après l'inégalité (4.46), on a que :

$$\int_{\Omega} (\lambda : D(u) - D(u)_{II}) \cdot \phi dX = 0 \quad \forall \phi \in D(\Omega)$$

alors $\lambda : D(u) = D(u)_{II}$.

On conclut donc que $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ est une solution de (4.36).

Proposition 4.4.5 (Existence (u, p, λ))

Soient f et q des fonctions données dans $L^2(\Omega)^N$ et $L^2_0(\Omega)$ respectivement. On considère $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ une solution de (4.36) alors il existe $p \in L^2_0(\Omega)$ telle que $(u, \lambda, p) \in H^1_0(\Omega)^N \times \Lambda \times L^2_0(\Omega)$ est une solution de (4.27) avec u unique.

preuve 12 On cherche $p \in L_0^2(\Omega)$ telle que :

$$(p, \operatorname{div}(v)) = ((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) - (f, v) \quad (4.48)$$

En suivant Brenner et Scott [35], on pose $F(v) = ((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) - (f, v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$. On remarque que $F(v) = 0$ pour tout $v \in V$. On peut donc restreindre le problème (4.48) au problème suivant :

$$\text{Trouver } p \in L_0^2(\Omega) \text{ telle que, } (p, \operatorname{div}(v)) = F(v) \quad \forall v \in V^\perp \quad (4.49)$$

En effet, supposons que (4.49) est vraie. L'espace V est fermé dans $H_0^1(\Omega)^N$ et on a $H_0^1(\Omega)^N = V \oplus V^\perp$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)^N$, alors $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \in V$ et $v_2 \in V^\perp$. On a que $(p, \operatorname{div}(v)) = (p, \operatorname{div}(v_1)) + (p, \operatorname{div}(v_2)) = F(v_2) = F(v)$ car $F(v_1) = 0$. Donc, (4.48) est vérifiée.

On montre que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$, la forme linéaire $r \mapsto (r, \operatorname{div}(v))$ est continue sur V^\perp . Par le théorème de Riesz, il existe $Bp \in V^\perp$ telle que :

$$(p, \operatorname{div}(v)) = (Bp, v) \quad \forall v \in V^\perp \quad (4.50)$$

$$\|Bp\|_{1,\Omega} = \|(\cdot, p)\|_{V^\perp} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{(p, \operatorname{div}(v))}{\|v\|_{1,\Omega}} \quad (4.51)$$

Ceci définit, d'après la condition LBB (3.5), un opérateur $B : H_0^1(\Omega)^N \rightarrow L_0^2(\Omega)$ linéaire et continu sur $H_0^1(\Omega)^N$.

On va montrer que

$$L_0^2(\Omega) = \operatorname{Im}(B) = V^\perp$$

On pourra alors conclure de la façon suivante : Comme $F \in V^\perp$, donc d'après le théorème de Riesz, il existe $w \in V^\perp$ telle que $F(v) = ((w, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) - (f, v)$. Puisque $\operatorname{Im}(B) = V^\perp$, pour $w \in V^\perp$, il existe $p \in L_0^2(\Omega)$ telle que $Bp = w$ et on a

$$(p, \operatorname{div}(v)) = (Bp, v) = F(v) \quad \forall v \in V^\perp$$

Il reste donc à montrer que $L_0^2(\Omega) = \operatorname{Im}(B) = V^\perp$. On prouve tout d'abord que $\operatorname{Im}(B)$ est fermé dans V^\perp . Soit une suite $(p_n) \in L_0^2(\Omega)$ telle que $Bp_n \rightarrow w$ dans V^\perp . D'après la condition LBB (3.5), p_n est une suite de Cauchy dans V^\perp . Alors, p_n converge vers p dans $L_0^2(\Omega)$. D'après la continuité de l'opérateur B , on a que $Bp = w$. Donc $\operatorname{Im}(B)$ est fermé dans V^\perp . Ainsi, on a

$$V^\perp = \operatorname{Im}(B) \oplus \operatorname{Im}(B)^\perp$$

En particulier, $\operatorname{Im}(B) \cap \operatorname{Im}(B)^\perp = \{0\}$. On suppose que $\operatorname{Im}(B) \neq V^\perp$ donc $\operatorname{Im}(B)^\perp \neq \{0\}$. Soit $v \in \operatorname{Im}(B)^\perp$, pour tout $r \in L_0^2(\Omega)$, on a que $(r, \operatorname{div}(v)) = (Br, v) = 0$ donc $v \in V$. Ce qui contredit le fait que $v \in \operatorname{Im}(B)^\perp$ donc nécessairement :

$$\operatorname{Im}(B) = V^\perp$$

D'où le résultat.

D'après ces propositions, on peut conclure que la démonstration de l'existence de la solution (u, p, λ) est basée sur le passage par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 FV(u, p, \lambda), (4.27) & \Rightarrow & FV(u, p), (4.33) \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 FV(u, \lambda), (4.36) & \Leftarrow & FV(u), (4.35)
 \end{array} \tag{4.52}$$

où FV représente dans chaque cas le système variationnel correspondant.

Proposition 4.4.6 Soient f et q des fonctions données dans $L^2(\Omega)^N$ et $L_0^2(\Omega)$ respectivement, le couple (u, λ) est un point selle sur $V \times \Lambda$ de la fonctionnelle L définie par :

$$L(v, r) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D(v)_{II}^2 dX + \int_{\Omega} \mu_0 G(q) r : D(v) dX - \int_{\Omega} f \cdot v dX$$

c'est-à-dire $\forall (v, r) \in V \times \Lambda$ on a :

$$L(u, r) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda)$$

preuve 13 Soient f et q des fonctions données dans $L^2(\Omega)^N$ et $L_0^2(\Omega)$ respectivement. Il faut démontrer que : $\forall (v, r) \in V \times \Lambda$

$$a- L(v, \lambda) - L(u, \lambda) \geq 0$$

$$b- L(u, \lambda) - L(u, r) \geq 0$$

Avant de démontrer les deux points précédents, on énonce cette remarque :

Remarque 4.4.2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{array}{ccc}
 |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta & \geq & 0 \\
 |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \geq & 2\alpha\beta \\
 |\alpha|^2 - |\beta|^2 & \geq & 2(\alpha\beta - \|\beta\|^2) \\
 |\alpha|^2 - |\beta|^2 & \geq & 2\beta(\alpha - \beta)
 \end{array} \tag{4.53}$$

Compte tenu de la remarque 4.4.2 et de l'inéquation variationnelle (4.35), on peut vérifier que :

$$\begin{aligned}
 a- \quad L(v, \lambda) - L(u, \lambda) & \geq \int_{\Omega} D(u) : D(v - u) dX + \int_{\Omega} \mu_0 G(q) D(v)_{II} dX \\
 & \quad - \int_{\Omega} \mu_0 G(q) D(u)_{II} dX - \int_{\Omega} f \cdot (v - u) dX \\
 & \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

où $\lambda : D(u) = D(u)_{II}$.

b-

$$\begin{aligned} L(u, \lambda) - L(u, r) &= \int_{\Omega} \mu_0 G(q) \lambda : D(u) dX - \int_{\Omega} \mu_0 G(q) r : D(u) dX \\ &= \int_{\Omega} \mu_0 G(q) D(u)_{II} dX - \int_{\Omega} \mu_0 G(q) D(u) : r dX \end{aligned} \quad (4.55)$$

On a :

$$D(u) : r \leq D(u)_{II}$$

alors

$$L(u, \lambda) - L(u, r) \geq 0 \quad (4.56)$$

Donc $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ est un point selle de L .

4.4.2 Propriétés de la solution en fonction du seuil

Une variation de q dans les formulations variationnelles du problème $\text{LVF}(\mu_0(q))$ est demandée pour appliquer la démarche énoncée dans la section 4.3. D'après la proposition 4.4.5, pour toute q fonction dans $L_0^2(\Omega)$, on a démontré l'existence de $(u(q), p(q), \lambda(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution de (4.27) avec $u(q)$ unique. Alors, d'après la proposition 4.4.2, $(u(q), p(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est une solution du problème (4.33) avec $u(q)$ unique.

Ainsi, pour toute $q \in L_0^2(\Omega)$, les propriétés 4.2.2 et 4.2.3 sont toujours vraies

$$\begin{aligned} \|u(q)\|_{1,\Omega} &\leq C_1 \\ \|p(q)\|_{0,\Omega} &\leq C_2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

où $C_1 = c^2 \|f\|_{0,\Omega}$, $C_2 = \frac{1}{\beta} (C_1 + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} + \|f\|_{0,\Omega})$ et c la constante de Korn.

On peut montrer facilement que $|G(s) - G(t)| \leq |s - t|$ pour tout s et t dans \mathbb{R}^+ .

Proposition 4.4.7 (Propriété de $u(q)$)

Soit $(u(q), p(q), \lambda(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ une solution du problème (4.27).

L'application $u : q \mapsto u(q)$ est μ_0 -contractante de $L_0^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

preuve 14 Il faut démontrer que :

$$\forall (q_1, q_2) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega), \|u(q_1) - u(q_2)\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \quad (4.58)$$

avec $0 < \mu_0 < 1$.

On note pour toute $q_i \in L_0^2(\Omega)$

$$u_i = u(q_i)$$

$$p_i = p(q_i)$$

telles que (u_i, p_i) est une solution de (4.33) pour q_i .

Soient $(u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$, $(u_2, v_2) \in H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N$, $(p_1, p_2) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ et $(q_1, q_2) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, on peut alors écrire les relations suivantes :

$$((u_1, v_1 - u_1)) + \mu_0 (j(q_1, v_1) - j(q_1, u_1)) - (p_1, \text{div}(v_1 - u_1)) \geq (f, v_1 - u_1)$$

$$((u_2, v_2 - u_2)) + \mu_0 (j(q_2, v_2) - j(q_2, u_2)) - (p_2, \operatorname{div}(v_2 - u_2)) \geq (f, v_2 - u_2)$$

Si on prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$ et on additionne les deux inégalités précédentes, alors on obtient :

$$((u_1 - u_2, u_2 - u_1)) + \mu_0 \{j(q_1, u_2) - j(q_1, u_1) + j(q_2, u_1) - j(q_2, u_2)\} \geq 0 \quad (4.59)$$

ce qui donne immédiatement :

$$\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 - \mu_0 S \leq 0 \quad (4.60)$$

où $S = j(q_1, u_2) - j(q_1, u_1) + j(q_2, u_1) - j(q_2, u_2)$.

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega} G(q_1)(D(u_2)_{II} - D(u_1)_{II}) + G(q_2)(D(u_1)_{II} - D(u_2)_{II}) \, dX \\ S &= \int_{\Omega} (G(q_1) - G(q_2))(D(u_2)_{II} - D(u_1)_{II}) \, dX \\ |S| &\leq \int_{\Omega} |G(q_1) - G(q_2)| |D(u_1)_{II} - D(u_2)_{II}| \, dX \\ |S| &\leq \|G(q_1) - G(q_2)\|_{0,\Omega} \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (4.61)$$

De plus, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$|S| \leq \frac{1}{2\alpha^2} \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 \quad (4.62)$$

Finalement, tout en combinant les relations (4.60) et (4.62), on déduit : $\forall 0 < \mu_0 < 1$ et $\forall 0 < \alpha < \sqrt{\frac{2}{\mu_0}}$

$$\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0}{2(1 - \frac{\mu_0\alpha^2}{2})}} \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \quad (4.63)$$

Posons $M(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0}{2(1 - \frac{\mu_0\alpha^2}{2})}}$.

Ainsi, l'application $\alpha \mapsto M(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0}{2(1 - \frac{\mu_0\alpha^2}{2})}}$ admet un minimum pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$.

D'où le résultat (4.58).

Proposition 4.4.8 (Dépendance de p en fonction du seuil)

Soit $(u(q), p(q), \lambda(q))$ une solution de (4.27). La dépendance de $p(q)$ en fonction du seuil s'exprime sous la forme suivante : $\forall (q_1, q_2) \in L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$

$$\|p(q_1) - p(q_2)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \mu_0 \{2\|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} + \|G(q_2)\|_{\infty,\Omega} \|\lambda(q_1) - \lambda(q_2)\|_{0,\Omega}\} \quad (4.64)$$

preuve 15 On note pour toute $q_i \in L_0^2(\Omega)$

$$u_i = u(q_i)$$

$$p_i = p(q_i)$$

$$\lambda_i = \lambda(q_i)$$

telles que (u_i, p_i, λ_i) est une solution de (4.27) pour q_i .

Soient $(u_1, \lambda_1, p_1) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda \times L_0^2(\Omega)$ et $(u_2, \lambda_2, p_2) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda \times L_0^2(\Omega)$ solutions de (4.27) alors

$\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$, on a :

$$\begin{cases} ((u_1, w)) + \mu_0 J(q_1, \lambda_1, w) - (p_1, \operatorname{div}(w)) = (f, w) \\ ((u_2, w)) + \mu_0 J(q_2, \lambda_2, w) - (p_2, \operatorname{div}(w)) = (f, w) \end{cases} \quad (4.65)$$

En retranchant les deux équations précédentes, on obtient : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$(p_1 - p_2, \operatorname{div}(w)) = ((u_1 - u_2, w)) + \mu_0 \{J(q_1, \lambda_1, w) - J(q_2, \lambda_2, w)\} \quad (4.66)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$((u_1 - u_2, w)) \leq \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad (4.67)$$

Posons S sous la forme suivante : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$S = J(q_1, \lambda_1, w) - J(q_2, \lambda_2, w) = \left\{ \int_{\Omega} G(q_1) \lambda_1 : D(w) \, dX - \int_{\Omega} G(q_2) \lambda_2 : D(w) \, dX \right\} \quad (4.68)$$

Alors, S peut être écrit sous la forme suivante : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\begin{cases} S = \int_{\Omega} G(q_1) \lambda_1 : D(w) \, dX - \int_{\Omega} G(q_2) \lambda_1 : D(w) \, dX \\ \quad + \int_{\Omega} G(q_2) \lambda_1 : D(w) \, dX - \int_{\Omega} G(q_2) \lambda_2 : D(w) \, dX \\ S = \int_{\Omega} (G(q_1) - G(q_2)) \lambda_1 : D(w) \, dX + \int_{\Omega} G(q_2) (\lambda_1 - \lambda_2) : D(w) \, dX \end{cases} \quad (4.69)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$|S| \leq \|G(q_1) - G(q_2)\|_{0,\Omega} \|\lambda_1\|_{\infty,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + \|G(q_2)\|_{\infty,\Omega} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad (4.70)$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \|\lambda_1\|_{\infty,\Omega} \leq 1 \\ \|G(q_1) - G(q_2)\|_{0,\Omega} \leq \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \end{cases} \quad (4.71)$$

Ce qui nous donne : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$|S| \leq \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + \|G(q_2)\|_{\infty,\Omega} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad (4.72)$$

Tout en combinant (4.66), (4.67) et (4.72), on déduit : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\begin{cases} (p_1 - p_2, \operatorname{div}(w)) \leq \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\ \quad + \mu_0 \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\ \quad + \mu_0 \|G(q_2)\|_{\infty,\Omega} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \end{cases} \quad (4.73)$$

Compte tenu de l'inégalité (4.73) et la condition de LBB (3.5), on montre que :

$$\|p_1 - p_2\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \{ \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} + \mu_0 \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} + \mu_0 \|G(q_2)\|_{\infty,\Omega} \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{0,\Omega} \} \quad (4.74)$$

Comme l'application u est μ_0 -contractante de $L_0^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)^N$, le résultat (4.64) est établi.

D'après la proposition 4.4.8, l'estimation montre une dépendance de $p(q)$ en fonction $\lambda(q)$. Ceci rend difficile de démontrer que l'application p est une application multivoque contractante. Ainsi, l'existence du point fixe de l'application $p(q)$ devient un problème ouvert. Par contre, l'unicité de p peut être prouvée si λ est unique. Ceci conduit alors à un problème LVF dont le seuil est régularisé. Ce problème régularisé est analysé dans la section 4.5.

Proposition 4.4.9 Soient $\frac{C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|} p_0}{(\beta - \mu_0)} \leq R < p_\infty$ et $0 < \mu_0 < \beta$. On considère la boule fermée B telle que :

$$B = \{r \in L_0^2(\Omega) / \|r\|_{0,\Omega} \leq R\}$$

alors $p(B) \subset B$.

preuve 16 Soient $f \in L^2(\Omega)^N$, $r \in B$ et $w \in H_0^1(\Omega)^N$ tels que $(u(q), \lambda(q), p(q))$ est une solution du problème variationnel (4.27) alors on a :

$$(p(r), \operatorname{div}(w)) = ((u(r), w)) + \mu_0 J(r, \lambda(r), w) + (f, w) \quad (4.75)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre :

$$((u(r), w)) + \mu_0 J(r, \lambda(r), w) + (f, w) \leq \|u(r)\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + \mu_0 \|G(r)\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad (4.76)$$

Compte tenu de la condition de LBB (3.5) et de la définition de B , on déduit :

$$\|p(r)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \left\{ \|u\|_{1,\Omega} + \mu_0 (R + p_0 \sqrt{|\Omega|}) + \|f\|_{0,\Omega} \right\}$$

De plus, u est bornée par C_1 , cela nous donne :

$$\|p(r)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \left\{ C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 (R + p_0 \sqrt{|\Omega|}) \right\}$$

Il faut démontrer que $\|p(r)\|_{0,\Omega} \leq R$ alors il suffit que

$$C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|} p_0 \leq \beta R - \mu_0 R$$

Donc, il suffit de prendre R tel que :

$$R \geq \left\{ \frac{C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|} p_0}{(\beta - \mu_0)} \right\}$$

avec $0 < \mu_0 < \beta$.

4.4.3 Choix d'algorithme de résolution

L'existence de (u, λ, p) solution de (4.27) avec (u, λ) point selle de L met en évidence des méthodes itératives, en particulier un algorithme de résolution qui sera nommé $ALVF(\mu_0(q))$. Ce dernier est défini sous la forme de la proposition suivante :

Soient f et q des fonctions données dans $L^2(\Omega)^N$ et $L_0^2(\Omega)$ respectivement, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p^0 \in L_0^2(\Omega)$, calculons $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$ comme suit : $\forall 0 \leq n \leq I$

Etape 1 : $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ résout un sous-problème de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta(u^{n+1}) + \nabla(p^{n+1}) = \text{div}(\mu_0 G(q) \lambda^n) + f \\ \text{div}(u^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

Etape 2 : Mise à jour de la contrainte plastique

$$\begin{cases} \lambda^{n+1} = P_\Lambda(\lambda^n + \alpha \mu_0 G(q) D(u^{n+1})) \\ \text{avec } P_\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta}{\sup(1, \zeta_{II})} \end{cases} \quad (4.78)$$

Etape 3 : Arrêt de l'algorithme à N' tel que

$$\|\lambda^{N'+1} - \lambda^{N'}\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_0 \quad (4.79)$$

où I est le nombre maximum des itérations et ϵ_0 la précision de l'algorithme.

Remarque 4.4.3 L'algorithme d'Uzawa proposé dans la section 3.3 du chapitre 3 et l'algorithme d' $ALVF(\mu_0(q))$ sont des méthodes itératives semblables. Mais la mise à jour des contraintes λ^n est différente. Cela s'exprime par la dépendance de λ^n dans l'équation (4.78) en $\mu_0 G(q)$. Cette dépendance permet de prouver la convergence énoncée dans la proposition suivante.

4.4.4 Convergence de l'algorithme

Proposition 4.4.10 (Convergence de l'algorithme $ALVF(\mu_0(q))$)

Soient q et f des fonctions données dans $L_0^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^N$ respectivement. On considère $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ et $(u_n, p_n, \lambda_{n-1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ les solutions de (4.27) et (4.77)-(4.78) respectivement, alors $\forall \alpha \leq \frac{2}{\mu_0^2 p_\infty^2}$, les suites (u_n) et (λ_n) définies par (4.77) et (4.78) vérifient respectivement :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u^n &= u \text{ dans } H_0^1(\Omega)^N \\ \|\lambda^n - \lambda\|_{0,\Omega} &\text{ converge dans } \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.80)$$

preuve 17 Soient q et f fonctions données dans $L_0^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^N$ respectivement, $(u, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ et $(u_n, p_n, \lambda_{n-1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solutions de (4.27) et (4.77) respectivement. On pose

$$\begin{cases} \bar{\lambda}^n = \lambda^n - \lambda \\ \bar{u}^n = u^n - u \end{cases} \quad (4.81)$$

L'idée de démonstration de convergence se pose sur la preuve établie dans [26] en la généralisant au cas

$LVF(\mu_0(q)) :$

1. Démontrer que la suite $\|\bar{\lambda}^{n+1}\|_{0,\Omega}$ est une suite décroissante dans \mathbb{R} ;

2. Démontrer que la suite $\|\bar{\lambda}^{n+1}\|_{0,\Omega}$ est minorée par $\|\bar{u}^n\|_{1,\Omega}$.

Pour établir ces étapes, tout d'abord on a : pour tout $(\zeta, \tau) \in L^2(\Omega)^{N \times N}$

$$\|P_\Lambda(\zeta) - P_\Lambda(\tau)\|_{0,\Omega} \leq \|\zeta - \tau\|_{0,\Omega}$$

alors

$$\|\bar{\lambda}^{n+1}\|_{0,\Omega} \leq \|\bar{\lambda}^n + \alpha\mu_0 G(q)D(u^{n+1})\|_{0,\Omega} \quad (4.82)$$

Elevons au carré l'inégalité précédente, on trouve :

$$\|\bar{\lambda}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\bar{\lambda}^n\|_{0,\Omega}^2 + \alpha^2 \mu_0^2 p_\infty^2 \|D(\bar{u})^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 + \int_\Omega \alpha\mu_0 G(q) \bar{\lambda}^n D(\bar{u}^{n+1}) dX \quad (4.83)$$

D'autre part, (u, p, λ) et $(u^{n+1}, p^{n+1}, \lambda^n)$ sont des solutions de (4.27) et (4.77) respectivement, cela veut dire : $\forall v \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\begin{cases} ((u^{n+1}, v)) + \mu_0 J(q, \lambda^n, v) - (p^{n+1}, \operatorname{div}(v)) = (f, v) \\ ((u, v)) + \mu_0 J(q, \lambda, v) - (p, \operatorname{div}(v)) = (f, v) \end{cases} \quad (4.84)$$

Ces deux équations sont vraies $\forall v \in H_0^1(\Omega)^N$, en particulier on pose $v = \bar{u}^{n+1}$. En retranchant les deux équations précédentes, on aura :

$$((\bar{u}^{n+1}, \bar{u}^{n+1})) + \mu_0 J(q, \bar{\lambda}^n, \bar{u}^{n+1}) = 0 \quad (4.85)$$

Alors,

$$\mu_0 J(q, \bar{\lambda}^n, \bar{u}^{n+1}) = -\|D(\bar{u}^{n+1})\|_{0,\Omega}^2 \quad (4.86)$$

En combinant l'inégalité (4.83) et l'égalité (4.86), il en résulte

$$\|\bar{\lambda}^n\|_{0,\Omega}^2 - \|\bar{\lambda}^{n+1}\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha(-\alpha\mu_0^2 p_\infty^2 + 2)\|D(\bar{u}^{n+1})\|_{0,\Omega}^2 \quad (4.87)$$

Donc il suffit de prendre α tel que

$$0 < \alpha \leq \frac{2}{\mu_0^2 p_\infty^2}$$

pour montrer que la suite $(\|\bar{\lambda}^n\|_{0,\Omega})_n$ est décroissante dans \mathbb{R} et majorée par :

$$\alpha(-\alpha\mu_0^2 p_\infty^2 + 2)\|D(\bar{u}^{n+1})\|_{0,\Omega}^2 \geq 0$$

Alors, $(\|\bar{\lambda}^n\|_{0,\Omega})_n$ converge dans \mathbb{R} . Ceci implique que $\|D(\bar{u}^{n+1})\|_{0,\Omega}^2$ tend vers 0 dans \mathbb{R} . Par suite, $(u^n)_n$ tend vers u dans $H_0^1(\Omega)^N$.

D'où le résultat (4.80).

4.4.5 Approximation spatiale

Soient $X_h(\Omega)^N \subset H_0^1(\Omega)^N$, $P_h(\Omega) \subset L_0^2(\Omega)$ et $T_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)^{N \times N}$ des espaces vectoriels de dimension finie, pilotés par un paramètre $h > 0$ (voir la section 3.5).

Les systèmes variationnels discrets peuvent être définis sous les formes suivantes :

Pour $q \in L_0^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)^N$ des fonctions données, le système variationnel approché à deux champs peut être écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in X_h(\Omega)^N \text{ et } p_h \in P_h(\Omega) \text{ telles que } \forall (v, r) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega) \\ ((u_h, v - u_h)) + \mu_0(j(q_h, v) - j(q_h, u_h)) - (p_h, \text{div}(v - u_h)) \geq (f, v - u_h) \\ (r, \text{div}(u_h)) = 0 \end{array} \right. \quad (4.88)$$

où q_h est une approximation de q dans $P_h(\Omega)$. En pratique, q_h peut être l'interpolé de q par une méthode d'éléments finis.

De manière similaire au cas continu, il existe $\lambda_h \in \Lambda$ telle que (u_h, p_h, λ_h) est une solution du problème discret à trois champs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h, \lambda_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega) \times \Lambda \text{ telle que } \forall v \in X_h(\Omega)^N : \\ ((u_h, v)) + \mu_0 J(q_h, \lambda_h, v) - (p_h, \text{div}(v)) = (f, v) \\ (r, \text{div}(u_h)) = 0 \quad \forall r \in P_h(\Omega) \\ \lambda_h : D(u_h) = D(u_h)_{II} \end{array} \right. \quad (4.89)$$

Plus concrètement, on considère un opérateur $\pi_h : \Lambda \rightarrow T_h(\Omega)$ tel que $\pi_h(\lambda_h)$ est une approximation de λ_h dans $T_h(\Omega)$. Ceci nous donne une écriture variationnelle en fonction $\pi_h(\lambda_h)$ au lieu λ_h dans la première équation de (4.89). Dans la suite, on considère cette écriture variationnelle.

Soient $q \in L_0^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)^N$, l'existence de la solution $(u_h, p_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ de (4.88) ainsi que l'existence de $(u_h, p_h, \lambda_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega) \times \Lambda$ solution de (4.89) sont prouvées de manière analogue au cas continu. Il suffit que la condition LBB (3.21) reste vraie dans le cas discret.

Ceci nous ramène dans la pratique à écrire un algorithme d'ALVF($\mu_0(q)$) dans le cas discret sous la forme suivante :

Soient $\alpha > 0$ et $0 \leq n \leq I$. On suppose que $p_h^n \in P_h(\Omega)$ est données, trouver $u_h^{n+1} \in X_h(\Omega)^N$ et $p_h^{n+1} \in P_h(\Omega)$ telles que

1. $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ solution du sous-problème de Stokes : $\forall v_h \in X_h(\Omega)^N$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((u_h^{n+1}, v_h)) - (p_h^{n+1}, \text{div}(v_h)) = -\mu_0 J(q_h, \pi_h(\lambda_h)^n, v_h) + (f, v_h) \\ (\text{div}(u_h^{n+1}), v_h) = 0 \end{array} \right. \quad (4.90)$$

2. Mise à jour de la contrainte plastique

$$\begin{cases} \lambda_h^{n+1} = P_\Lambda(\pi_h(\lambda_h)^n + \alpha\mu_0 G(q_h)D(u_h^{n+1})) \\ P_\Lambda(\zeta_h) = \frac{\zeta_h}{\sup(1, (\zeta_h)_{II})} \end{cases} \quad (4.91)$$

3. Arrêt de K tel que $\|\pi_h(\lambda_h)^{K+1} - \pi_h(\lambda_h)^K\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_0$.

où I est le nombre maximum des itérations et ϵ_0 la précision de l'algorithme.

De manière similaire à la proposition 4.4.10, la convergence de cet algorithme est établie pour tout $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{\mu_0^2 p_\infty^2}$.

Proposition 4.4.11 Soient $u \in V$ solution de (4.33) et $u_h \in V_h$ solution de (4.88) alors $\forall v \in V_h$

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq (\sqrt{|\Omega|}\mu_0 p_\infty + C_1 + \|f\|_{0,\Omega})\|v - u\|_{1,\Omega} + C_1\mu_0\|q_h - q\|_{0,\Omega} \quad (4.92)$$

preuve 18 Cette preuve s'appuie sur les techniques utilisées par Glowinski [36].

Soient $u \in V$ solution de (4.33) et $u_h \in V_h$ solution de (4.88) alors on a : $\forall v \in V_h$

$$\begin{cases} ((u_h, v - u_h)) + \mu_0(j(q_h, v) - j(q_h, u_h)) \geq (f, v - u_h) \\ ((u, u_h - u)) + \mu_0(j(q, u_h) - j(q, u)) \geq (f, u_h - u) \end{cases} \quad (4.93)$$

d'où par addition : $\forall v \in V_h$

$$((u_h - u, u_h - u)) \leq \mu_0(j(q_h, v) - j(q, u) + j(q, u_h) - j(q_h, u_h)) + ((u_h, v - u)) - (f, v - u) \quad (4.94)$$

Posons $S = j(q_h, v) - j(q_h, u) + j(q, u_h) - j(q_h, u_h)$, d'après l'inégalité triangulaire et la définition de j , on obtient : $\forall v \in V_h$

$$\begin{cases} S = j(q_h, v) - j(q_h, u) + j(q_h, u_h) - j(q, u_h) \\ |S| \leq |j(q_h, v) - j(q_h, u)| + |j(q_h, u_h) - j(q, u_h)| \end{cases} \quad (4.95)$$

De plus, on montre les propriétés suivantes : $\forall v \in V_h$

1.

$$|j(q_h, u_h) - j(q, u_h)| \leq \|q_h - q\|_{0,\Omega}\|u_h\|_{1,\Omega}$$

2.

$$|j(q_h, v) - j(q_h, u)| \leq \|G(q_h)\|_{0,\Omega}\|v - u\|_{1,\Omega}$$

3.

$$\|G(q_h)\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{|\Omega|}p_\infty$$

4.

$$\|u_h\|_{1,\Omega} \leq C_1$$

Ceci implique : $\forall v \in V_h$

$$|S| \leq \mu_0 p_\infty \|v - u\|_{1,\Omega} + C_1 \mu_0 \|q_h - q\|_{0,\Omega} \quad (4.96)$$

En combinant les inégalités (4.94) et (4.96), on obtient (4.92).

Toutefois, il n'est pas pratique de trouver un espace V_h à divergence nulle. On peut alors généraliser cette estimation sur l'espace $X_h(\Omega)$ sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 4.4.12 Soient (u, p) solution du problème abstrait (4.33) et (u_h, p_h) la solution approchée du problème (4.88). Alors $\forall (v, r) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$, on a :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq C \|v - u\|_{1,\Omega} + \|p - r\|_{0,\Omega} + 2C_1 \mu_0 \|q - q_h\|_{0,\Omega} \quad (4.97)$$

où $C = 2(C_1 + C_2 + \sqrt{|\Omega|} \mu_0 p_\infty)$

preuve 19 A partir des techniques utilisées par Han et Reddy [27], ce résultat est établi.

En effet, (u, p) est solution du problème abstrait (4.33) et (u_h, p_h) est une solution approchée du problème (4.88), alors on a : $\forall v \in X_h(\Omega)^N$

$$\begin{cases} ((u_h, v - u_h)) + \mu_0(j(q_h, v) - j(q_h, u_h)) - (p_h, \operatorname{div}(v - u_h)) \geq (f, v - u_h) \\ ((u, u_h - u)) + \mu_0(j(q, u_h) - j(q, u)) - (p, \operatorname{div}(u_h - u)) \geq (f, u_h - u) \end{cases} \quad (4.98)$$

Tout en additionnant les deux inéquations précédentes et en utilisant la propriété suivante

$$\forall r \in P_h(\Omega), (r, \operatorname{div}(u_h - u)) = 0$$

alors on obtient :

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq ((u_h, v - u)) + \mu_0(j(q, u_h) - j(q_h, u_h) + j(q_h, v) - j(q, u)) - (p_h, \operatorname{div}(v - u)) \\ \quad + (p - r, \operatorname{div}(u - u_h)) - (f, v - u) \end{cases} \quad (4.99)$$

De plus, on a : $\forall v \in X_h(\Omega)^N$

$$\begin{aligned} j(q_h, v) - j(q, u) &= j(q_h, v) - j(q_h, u) + j(q_h, u) - j(q, u) \\ |j(q_h, v) - j(q, u)| &\leq p_\infty \sqrt{|\Omega|} \|v - u\|_{1,\Omega} + C_1 \|q_h - q\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

$$|(p - r, \operatorname{div}(u - u_h))| \leq \frac{1}{2} \|p - r\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2$$

$$|(f, v - u)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v - u\|_{1,\Omega}$$

Alors, il en résulte : $\forall v \in X_h(\Omega)^N$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq 2 \left\{ C_1 + C_2 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|} p_\infty \right\} \|v - u\|_{1,\Omega} \\ &\quad + 2C_1 \mu_0 \|q - q_h\|_{0,\Omega} + \|p - r\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (4.100)$$

D'où le résultat (4.97).

4.4.6 Conclusion intermédiaire

Dans cette section, la résolution théorique et numérique complète du problème $\text{LVF}(\mu_0(q))$ (4.26), où q fonction donnée dans $L_0^2(\Omega)$, est présentée. En effet, l'existence de la solution $(u(q), p(q))$ de $\text{LVF}(\mu_0(q))$ (4.33) est prouvée pour tout q fonction donnée dans $L_0^2(\Omega)$, l'algorithme de résolution qui s'appuie sur l'algorithme d'Uzawa est construit et la convergence de cet algorithme est vérifiée. De plus, une dépendance de $p(q)$ en fonction de $\lambda(q)$ est trouvée par la proposition 4.4.8. Ceci rend compliqué de prouver l'existence d'un point fixe dans le problème LVF continu. Il s'agit donc de questions ouvertes. Pour cela, le problème LVF à seuil régularisé et LVF en dimension finie sont considérés dans la suite.

4.5 Résolution d'un problème frictionnel régularisé

Soit $\epsilon > 0$. Le problème régularisé (P_ϵ) est défini par :

Définition 4.5.1 (*Problème régularisé*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\epsilon, p_\epsilon) \text{ telle que} \\ \sigma_\epsilon = 2D(u_\epsilon) + \mu_0 G(p_\epsilon) \frac{D(u_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}} \\ \text{div}(\sigma_\epsilon) - \nabla p_\epsilon + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u_\epsilon) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.101)$$

Si on pose la contrainte plastique $\lambda_\epsilon = \frac{D(u_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}}$, calculée explicitement dans toutes les régions d'une manière unique, le problème régularisé à trois champs s'écrit alors sous la forme suivante :

Proposition 4.5.1 (*Problème régularisé à trois champs*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\epsilon, \lambda_\epsilon, p_\epsilon) \text{ telle que} \\ \sigma_\epsilon = 2D(u_\epsilon) + \mu_0 G(p_\epsilon) \lambda_\epsilon \\ \lambda_\epsilon = \frac{D(u_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}} \\ \text{div}(\sigma_\epsilon) - \nabla p_\epsilon + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div}(u_\epsilon) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.102)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle à trois champs suivante :

Proposition 4.5.2 (*Formulation variationnelle à trois champs*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\epsilon, \lambda_\epsilon, p_\epsilon) \in H_0^1(\Omega)^N \times \Lambda \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ ((u_\epsilon, v)) + \mu_0 J(p_\epsilon, \lambda_\epsilon, v) - (p_\epsilon, \text{div}(v)) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ \lambda_\epsilon = \frac{D(u_\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon)_{II}^2}} \\ (r, \text{div}(u_\epsilon)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.103)$$

4.5.1 Existence, unicité

Dans la section 4.4, à chaque $q \in L_0^2(\Omega)$ donnée, l'existence d'une unique solution $(u_\epsilon(q), p_\epsilon(q), \lambda_\epsilon(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ est prouvée. Dans la suite, on montre que l'application $q \rightarrow p_\epsilon(q)$ admet un unique point fixe. Ceci prouve qu'il existe $(u_\epsilon, p_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ une solution unique de (4.103).

Proposition 4.5.3 (Propriété $p_\epsilon(q)$)

L'application $p_\epsilon : q \mapsto p_\epsilon(q)$ est Q -lipschitzienne de $L_0^2(\Omega)$ dans $L_0^2(\Omega)$ où $(u_\epsilon(q), p_\epsilon(q), \lambda_\epsilon(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution du problème régularisé (4.103) et $Q = \frac{\mu_0}{\beta} \left\{ \frac{\mu_0 p_\infty}{\epsilon} + 2 \right\}$.

preuve 20 De manière similaire à la preuve 15, on peut trouver l'inégalité suivante : $\forall w \in H_0^1(\Omega)^N$

$$\begin{cases} (p_\epsilon(q_1) - p_\epsilon(q_2), \operatorname{div}(w)) \leq \|u_\epsilon(q_1) - u_\epsilon(q_2)\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\ \quad + \mu_0 \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \\ \quad + \mu_0 p_\infty \|\lambda_\epsilon(q_1) - \lambda_\epsilon(q_2)\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \end{cases} \quad (4.104)$$

En outre, on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{N \times N}, \left| \frac{a}{\sqrt{\epsilon^2 + |a|^2}} + \frac{b}{\sqrt{\epsilon^2 + |b|^2}} \right| \leq \frac{|a - b|}{\epsilon}$$

Ceci implique :

$$\|\lambda_\epsilon(q_1) - \lambda_\epsilon(q_2)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\epsilon} \|u_\epsilon(q_1) - u_\epsilon(q_2)\|_{1,\Omega} \quad (4.105)$$

De plus, d'après la même technique utilisée dans la preuve 14, l'application $q \mapsto u_\epsilon(q)$ est une application μ_0 -contractante de $L_0^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)^N$. On peut alors déduire que :

$$\|\lambda_\epsilon(q_1) - \lambda_\epsilon(q_2)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\epsilon} \mu_0 \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \quad (4.106)$$

Donc, en combinant les relations (4.104), (4.106) et la condition de LBB (3.5), on prouve que :

$$\|p_\epsilon(q_1) - p_\epsilon(q_2)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} \left\{ \mu_0 \left(\frac{p_\infty \mu_0}{\epsilon} + 1 \right) + \mu_0 \right\} \|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} \quad (4.107)$$

Donc p_ϵ est une application lipschitzienne de rapport Q définie par la relation suivante :

$$Q = \frac{\mu_0}{\beta} \left\{ \frac{p_\infty \mu_0}{\epsilon} + 2 \right\}$$

Proposition 4.5.4 Pour μ_0 assez petit, il existe une unique $(u_\epsilon, p_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ solution du problème LVF régularisé (4.102).

preuve 21 Pour tout μ_0 assez petit, l'application p_ϵ est contractante de $L_0^2(\Omega)$ dans $L_0^2(\Omega)$. Ceci nous donne, d'après le théorème de Picard, que l'application p_ϵ admet un unique point fixe c'est-à-dire qu'il existe un unique $q \in L_0^2(\Omega)$ tel que $p_\epsilon(q) = q$. On peut déduire donc qu'il existe une unique $(u_\epsilon, p_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ solution du problème régularisé (4.102).

De manière similaire à la technique utilisée dans les deux preuves 5 et 6, on peut montrer que la vitesse u_ϵ et la pression p_ϵ sont bornées par C_1 et C_2 dans $H_0^1(\Omega)^N$ et $L_0^2(\Omega)$ respectivement.

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{1,\Omega} &\leq C_1 \\ \|p_\epsilon\|_{0,\Omega} &\leq C_2 \end{aligned} \quad (4.108)$$

où $C_1 = c^2 \|f\|_{0,\Omega}$, $C_2 = \frac{1}{\beta} (C_1 + \mu_0 p_\infty \sqrt{\frac{|\Omega|}{2}} + \|f\|_{0,\Omega})$ et c la constante de Korn.

Remarque 4.5.1 Dans cette proposition 4.5.3, on a pu prouver que l'application $q \mapsto \lambda_\epsilon(q)$ est une application $\frac{1}{\epsilon}$ lipschitzienne de $H_0^1(\Omega)^N$ dans Λ . Ce qui n'est pas le cas dans la proposition 4.4.8. En ce sens, la démonstration de la proposition où p admet un point fixe pour le problème continu est bloquée.

4.5.2 Algorithme de résolution

Nous proposons dans cette sous-section une méthode itérative de résolution basée sur une construction d'un point fixe dans le seuil. Cette méthode de résolution se base sur un algorithme de résolution qui combine deux algorithmes :

1. algorithme du point fixe ;
2. algorithme ALVF $_\epsilon(\mu_0(q))$ avec un calcul explicite de λ_ϵ .

Soient $0 \leq n \leq N_{PF}$ et $p_\epsilon^n \in L_0^2(\Omega)$ fonction donnée. L'algorithme proposé pour notre problème prend la forme concrète suivante :

Trouver $u_\epsilon^{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N$ et $p_\epsilon^{n+1} \in L_0^2(\Omega)$ par les itérations de Picard : $\forall 0 \leq k \leq I$

- 1- (a) $(u_\epsilon^{k+1}, p_\epsilon^{k+1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ solution du sous-problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta(u_\epsilon^{k+1}) + \nabla(p_\epsilon^{k+1}) = \text{div}(\mu_0 G(p_\epsilon^n) \lambda_\epsilon^k) + f \\ \text{div}(u_\epsilon^{k+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.109)$$

- (b) Mise à jour de la contrainte plastique

$$\lambda_\epsilon^{k+1} = \frac{D(u_\epsilon^{k+1})}{\sqrt{\epsilon^2 + D(u_\epsilon^{k+1})^2_{II}}} \quad (4.110)$$

- (c) Arrêt de K tel que $\|\lambda_\epsilon^{K+1} - \lambda_\epsilon^K\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_0$.

- 2- Mise à jour de la pression et de la vitesse : $p_\epsilon^{n+1} = p_\epsilon^K$ and $u_\epsilon^{n+1} = u_\epsilon^K$

- 3- Arrêt de N' tel que $\|p_\epsilon^{N'+1} - p_\epsilon^{N'}\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_1$.

où N_{PF} et I sont le nombre d'itérations maximum de l'algorithme du point fixe et de l'algorithme intérieur respectivement. ϵ_0 est la précision de l'algorithme intérieur et ϵ_1 est la précision de l'algorithme du point fixe.

Grâce à l'existence d'un unique point fixe montré dans la sous-section 4.5.1 par la contraction de l'application : $q \mapsto p_\epsilon(q)$, les itérations de Picard (algorithme de point fixe) convergent. De plus, d'après la convergence de l'algorithme régularisé établie par Aposporidis *et al.* [9], on peut estimer que l'algorithme intérieur converge. Alors, ces deux convergences mettent en évidence la convergence de l'algorithme complet.

On peut donc constater que seul le problème régularisé (4.101) est entièrement résolu. L'existence d'un unique point fixe impose une dépendance forte en $\frac{1}{\epsilon}$ pour prouver que p_ϵ est contractante (4.5.3). Ceci rend difficile la convergence de p_ϵ vers p . Le problème général (2.4.3) laisse de nombreuses questions ouvertes. L'approximation spatiale de (2.4.3) est nécessaire pour sa résolution numérique. On constatera que la réduction à la dimension finie permet, comme avec la régularisation, de répondre à de questions ouvertes dans le cas continu.

4.6 Approximation spatiale de LVF

Notre méthodologie consiste à chercher un point fixe dans le problème intermédiaire $\text{LVF}(\mu_0(q))$ (4.88) en dimension finie. L'opérateur de point fixe peut être adapté dans le cas de la dimension finie en considérant la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \psi : B \subset P_h(\Omega) &\rightarrow 2^{P_h(\Omega)} \\ q_h &\mapsto \psi(q_h) \end{aligned}$$

où

$$\psi(q_h) = \{p_h(q_h) \in P_h(\Omega) \text{ telle que } (u_h(q_h), p_h(q_h)) \text{ est solution de (4.88)}\}$$

et

$$B = \{r_h \in P_h(\Omega) / \|r_h\|_{0,\Omega} \leq R\}$$

avec $R > 0$ à déterminer.

Si on choisit les espaces $X_h(\Omega)$ et $P_h(\Omega)$ tels que la condition LBB discrète (3.5) est vérifiée alors pour tout $q \in B$, alors il existe au moins $(u_h(q), p_h(q))$ solution du problème (4.88) (voir la sous-section 4.4.5) avec $u_h(q)$ unique.

La correspondance ψ est considérée comme une application multivoque puisque $p_h(q_h)$ n'est *a priori* pas unique dans les régions rigides. Le théorème du point fixe de Kakutani est un théorème de point fixe qui généralise celui de Brouwer à des fonctions en dimension finie à valeurs ensemblistes. Il fournit une condition suffisante pour qu'une telle fonction, définie sur un compact convexe d'un espace à dimension finie, possède un point fixe, c'est-à-dire dans ce contexte : un point qui appartient à son image par cette fonction. Soit F une application multivoque de X dans 2^X . On définit le graphe de F sous la forme suivante :

$$\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in X^2, y \in F(x)\}$$

Théorème 4.6.1 (Théorème de Kakutani)

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ fermé, convexe et borné. Si pour tout $x \in X$, $F(x)$ est non-vide et convexe telle que le

graphe $\text{Graph}(F)$ est fermé dans $X \times X$ alors F admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

Autrement dit, ce théorème peut être écrit sous la forme suivante :

Corollaire 4.6.1 Soient B une boule fermée d'un espace métrique X de dimension finie et F une fonction multivoque de B dans 2^B . Si pour tout $x \in B$, $F(x)$ est non-vide et convexe telle que le graphe $\text{Graph}(F)$ est fermé dans $X \times X$ alors F admet un point fixe.

4.6.1 Existence et unicité

Théorème 4.6.2 (Point fixe)

Pour tout $R \geq \frac{C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|}}{(\beta - \mu_0)}$ et $0 < \mu_0 < \beta$, la correspondance ψ admet un point fixe c'est-à-dire il existe $q_h \in B$ telle que $p_h(q_h) = q_h \in \psi(q_h)$.

preuve 22 Cette preuve s'appuie sur le corollaire du théorème de Kakutani.

Il faut alors démontrer les trois points suivants :

- 1) si $q \in B$ alors l'ensemble $\psi(q) \subset B$;
- 2) pour tout $q \in B$, l'ensemble $\psi(q)$ est non vide et convexe ;
- 3) le graphe de la correspondance ψ est fermé dans B c'est-à-dire : pour toute suite $(q_n, p_n) \in \text{Graph}(\psi)$ ((u_n, p_n) solution du problème (4.88) pour $q = q_n$) qui converge vers (q, p) dans $P_h(\Omega) \times P_h(\Omega)$ alors $p \in \psi(q)$ c'est-à-dire $(u(q), p(q))$ est une solution du problème (4.88).

1) Soit $q \in B$, d'après la proposition 4.4.9, pour tout $R \geq \left\{ \frac{C_1 + \|f\|_{0,\Omega} + \mu_0 \sqrt{|\Omega|}}{(\beta - \mu_0)} \right\}$, $p_h(q) \in B$. Alors, l'ensemble $\psi(q)$ est inclus dans B .

2) Evidemment, l'ensemble $\psi(q)$ est non vide et convexe. En effet, si on suppose que la condition LBB discrète (3.5) est satisfaite, alors :

a)- Pour tout $q \in B$, il existe au moins $(u_h(q), p_h(q)) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ solution du problème (4.88),

b)- Soit $(q_1, q_2) \in P_h(\Omega) \times P_h(\Omega)$. On suppose que $(u_h(q_1), p_h(q_1))$ et $(u_h(q_2), p_h(q_2))$ sont deux solutions du problème (4.88) alors on obtient :

$$\forall r \in]0, 1[, ((1 - r)u_h(q_1) + ru_h(q_2), (1 - r)p_h(q_1) + rp_h(q_2)) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$$

une solution du problème (4.88).

3) Le graphe de la correspondance ψ est fermé dans $P_h(\Omega) \times P_h(\Omega)$.

Soit $(q_n, p_n = p_h(q_n))$ une suite dans $\text{Graph}(\psi)$ telle que $(q_n, p_n = p_h(q_n))$ converge vers (q, p) dans $P_h(\Omega) \times P_h(\Omega)$. Alors, il existe u_n une suite dans $X_h(\Omega)^N$ telle que $(u_n = u_h(q_n), p_n = p_h(q_n))$ est une solution de (4.88). Donc, il suffit de démontrer que $(q, p) \in \text{Graph}(\psi)$ c'est-à-dire $(u(q), p(q))$

solution (4.88) où $u(q)$ est la limite de la suite u_n .

En effet, $u_n(q_n)$ converge vers $u(q) \in X_h(\Omega)^N$ car l'application $q \mapsto u(q)$ est, d'après la proposition 4.4.7, μ_0 -contractante.

De plus, (u_n, p_n) est une solution de (4.88) et d'après les continuités des expressions les convergences suivantes sont établies : $\forall w \in X_h(\Omega)^N$

- a) $((u_n, w - u_n))$ converge vers $((u, w - u))$ dans \mathbb{R} ;
- b) $j(q_n, w) - j(q_n, u_n)$ converge vers $j(q, w) - j(q, u)$ dans \mathbb{R} ;
- c) $(p_n, \text{div}(w))$ converge vers $(p, \text{div}(w))$ dans \mathbb{R} .

Donc, (u, p) est une solution de (4.88).

Finalement, on déduit, d'après le corollaire du théorème de Kakutani, que ψ admet un point fixe.

Proposition 4.6.3 (Existence de (u_h, p_h))

Soit le problème LVF discret défini par :

Trouver $u_h \in X_h(\Omega)^N$ et $p_h \in P_h(\Omega)$ telles que : $\forall (v, r) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$

$$\begin{cases} ((u_h, v - u_h)) + \mu_0(j(p_h, v) - j(p_h, u_h)) - (p_h, \text{div}(v - u_h)) \geq (f, v - u_h) \\ (r, \text{div}(u_h)) = 0 \end{cases} \quad (4.111)$$

Alors, il existe $(u_h, p_h) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ une solution de ce problème avec u_h unique.

La preuve s'appuie sur l'existence d'un point fixe montrée dans la proposition précédente.

De plus, d'après le diagramme 4.52, on peut montrer qu'il existe $\lambda_h \in \Lambda$ telle que

$(u_h, \lambda_h, p_h) \in X_h(\Omega)^N \times \Lambda \times P_h(\Omega)$ solution du problème suivant : $\forall (v, r) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$

$$\begin{cases} ((u_h, v)) + \mu_0 J(p_h, \lambda_h, v) - (p_h, \text{div}(v)) = (f, v) \\ (r, \text{div}(u_h)) = 0 \\ \lambda_h : D(u_h) = D(u_h)_{II} \\ \lambda_h \leq 1 \end{cases} \quad (4.112)$$

4.6.2 Algorithme de résolution

Dans le cadre de nos travaux, nous souhaitons disposer d'une modélisation numérique qui permette de résoudre le problème à seuil frictionnel (2.26). Une méthode de discrétisation par la méthode d'éléments finis mixtes est présentée dans le chapitre suivant 5. Grâce à l'existence d'un point fixe montré dans la sous-section précédente et l'algorithme proposé pour le problème à seuil variable, nous proposons alors une méthode itérative de résolution dans le problème discret. Cette méthode s'appuie sur la construction d'un point fixe et elle est constituée d'un algorithme de point fixe sur la pression, contenant lui-même un algorithme de type ALVF($\mu_0(q)$) pour la non-linéarité de seuil.

En pratique, l'algorithme discret proposé prend la forme concrète suivante :

Soient $0 \leq n \leq N_{PF}$, $p_h^n \in P_h(\Omega)$ et $u_h^n \in X_h(\Omega)^N$, calculons $u_h^{n+1} \in X_h(\Omega)^N$ et $p_h^{n+1} \in P_h(\Omega)$ comme

suit :

Etape 1 : $\forall 0 \leq k \leq I$

1. $(u_h^{k+1}, p_h^{k+1}) \in X_h(\Omega)^N \times P_h(\Omega)$ résout un sous-problème de Stokes telle que :

$$\begin{cases} ((u_h^{k+1}, v_h)) - (p_h^{k+1}, \operatorname{div}(v_h)) = -\mu_0 J(p_h^n, \pi_h(\lambda_h^k), v_h) + (f_h, v_h) \quad \forall v_h \in X_h(\Omega)^N \\ (\operatorname{div}(u_h^{k+1}), r_h) = 0 \quad \forall r_h \in P_h(\Omega) \end{cases} \quad (4.113)$$

où $\pi_h(\lambda_h)$ est l'approximation de λ_h dans $T_h(\Omega)$.

2. Mise à jour de la contrainte plastique

$$\begin{cases} \lambda_h^{k+1} = P_\Lambda(\pi_h(\lambda_h^k) + \alpha\mu_0 G(p_h^n) D(u_h^{k+1})) \\ \text{avec } P_\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta}{\sup(1, \zeta_{IT})} \end{cases} \quad (4.114)$$

3. Arrêt de K tel que :

$$\|\pi_h(\lambda_h^{K+1}) - \pi_h(\lambda_h^K)\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_0 \quad (4.115)$$

Etape 2 : Mise à jour de la pression et de la vitesse : $p_h^{n+1} = p_h^K$ et $u_h^{n+1} = u_h^K$

Etape 3 : Arrêt M_{PF} tel que $\|p_h^{M_{PF}+1} - p_h^{M_{PF}}\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_1$.

où N_{PF} et I sont les nombres des itérations maximum de l'algorithme de point fixe et l'algorithme ALVF($\mu_0(q)$) respectivement, ϵ_0 la précision de l'algorithme ALVF($\mu_0(q)$) et ϵ_1 la précision de l'algorithme du point fixe. Dans la suite, pour éviter l'ambiguïté, on prend ϵ au lieu ϵ_1 .

4.7 Exemple concret : problème de Couette généralisé

Cette section se consacre au calcul d'une solution (u, p) de (2.26) dans une géométrie de Couette. Ainsi, la solution trouvée est unique.

Nous considérons l'écoulement laminaire d'une pâte viscoplastique frictionnelle entre deux cylindres verticaux coaxiaux tournants à base circulaire (voir la figure 4.1). Soient $u(r, \theta, z) = (u_r, u_\theta, u_z)$ et $p(r, \theta)$ la vitesse et la pression respectivement de cet écoulement avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nous supposons que :

1. la hauteur des cylindres est grande par rapport aux rayons autrement dit $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
2. l'écoulement est radial, c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$;
3. la vitesse ne possède qu'une seule composante non-nulle u_θ suivant l'axe e_θ et $u_\theta = rw$ où w est la vitesse angulaire supposée positive ;

4. la pression est une fonction radiale donc $\nabla(p) = \frac{p'}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

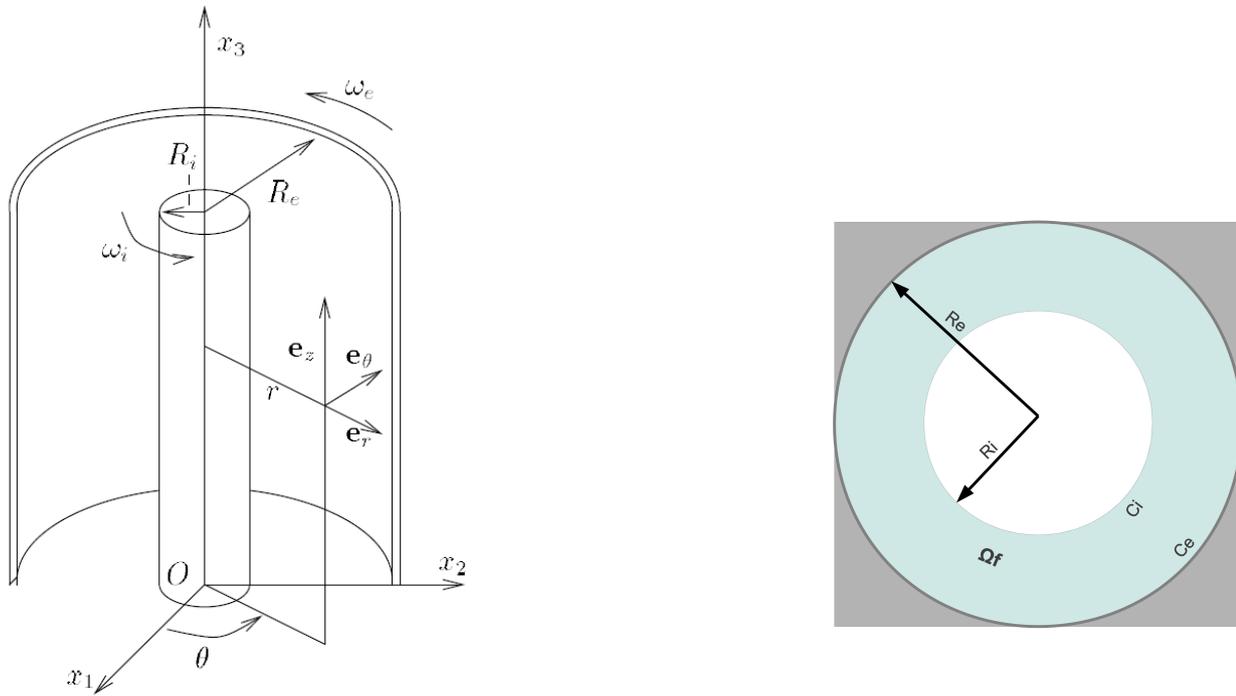


FIGURE 4.1 – Représentation schématique de l'écoulement de Couette.

5. la force de volume f est de la forme

$$f = f_1 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec f_1 et f_2 des fonctions radiales.

6. $w_0 = \frac{w_e}{w_i} \leq 1$.

De plus, on cherche u sous la forme :

$$u(r) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \begin{cases} w(r) & \text{si } r \leq r_c \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.116)$$

où r_c est un rayon critique².

On démontre tout d'abord que $div(u) = 0$. En effet

$$\begin{aligned} div(u(r)) &= -y \frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{1}{r} (-yx + xy) = 0 \end{aligned} \quad (4.117)$$

² r_c est le rayon critique qui sépare les zones rigides des zones déformées c'est-à-dire si $r \leq r_c$, alors on a des zones déformées sinon on a des zones rigides

De plus, $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla(u) + \nabla(u)^t)$ correspond à

$$D(u(r)) = \frac{w'}{r} \begin{pmatrix} -xy & \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ \frac{1}{2}(x^2 - y^2) & xy \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

avec $D(u)_{II} = |w'| \frac{1}{\sqrt{2}} r$.

En outre, on peut envisager que (u, p) est une solution du système (2.26). Ceci implique que :

$$\begin{cases} \sigma = \left(\frac{w'}{r} + \mu_0 G(p) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2} \right) \begin{pmatrix} -xy & \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ \frac{1}{2}(x^2 - y^2) & xy \end{pmatrix} \\ \operatorname{div}(\sigma) - \nabla p + f = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \nabla(p) = -f_2 \end{cases} \quad (4.119)$$

Posons $\phi = \frac{w'}{r} + \mu_0 G(p) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2}$, alors d'une part, $\operatorname{div}(\sigma)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) &= \frac{\phi'}{r} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{2}x(x^2 + y^2) \end{pmatrix} + 2\phi \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{r}{2}\phi' + 2\phi \right) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.120)$$

D'autre part, $\operatorname{div}(\sigma) - \nabla(p) = f$, il en résulte que

$$\begin{cases} \frac{r}{4}\phi' + \phi = f_1 \\ \frac{r}{2}\phi' = -f_2 \end{cases} \quad (4.121)$$

On peut en déduire que la pression p est déterminée de manière unique sous la forme suivante :

$$p = - \int_{R_i}^r s f_2(s) ds \quad (4.122)$$

De plus, $\phi = \frac{2}{r^4} \int_{R_i}^r \frac{f_1(s)}{s} ds$ et $w(r)$ sera :

$$w(r) = \int_{R_i}^r s \phi(s) ds - \frac{\mu_0}{\sqrt{2}} \int_{R_i}^r \frac{G(p(s))}{s} ds$$

On peut alors conclure, pour une géométrie de Couette, qu'il existe une unique solution (u, p) de (2.26). Cette solution présente un découplage entre la vitesse et la pression puisque chacune d'eux est déterminée de manière unique en fonction du deuxième membre f .

En particulier, on suppose que $f_1 = 0$. Ceci implique :

$$\frac{\phi'}{\phi} = -\frac{4}{r} \quad (4.123)$$

On déduit donc que :

$$\phi = k_0 r^{-4} \quad (4.124)$$

avec $\phi = \frac{w'}{r} + \mu_0 G(p) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2} = \frac{w'}{r} + \mu_0 p_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_0 \frac{p}{r^2}$.

En outre, on peut obtenir

$$w(r) = w_i + \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) - \mu_0 p_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_0 \int_{R_i}^r \frac{p(s)}{s} ds \quad (4.125)$$

avec k_0 égale à

$$k_0 = \frac{2R_e^2 R_i^2}{R_i^2 - R_e^2} \left(w_e - w_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_0 \int_{R_i}^{R_e} \frac{p(s)}{s} ds \right)$$

et r_c s'obtient d'après l'équation (4.118) en écrivant $w'(r = r_c) = 0$.

Plus concrètement, pour $f_2 = 0$, d'après l'équation (4.122), p est égale dans ce cas à zéro. Alors, LVF(p_0) se comporte comme un fluide de Bingham de seuil $p_0 \mu_0$ et $w(r)$ sera la même que celle trouvée dans la littérature pour un fluide de Bingham (voir la sous-section 3.4.2).

De plus, si on suppose que $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ alors d'après l'équation (4.122), $p = \sqrt{s} - \sqrt{R_i}$. Donc, $w(r)$ s'écrit sous la forme :

$$w(r) = w_i + \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) - \mu_0 p_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) + \mu_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R_i} \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \mu_0 \left(\sqrt{r} - \sqrt{R_i} \right) \quad (4.126)$$

Ces deux choix de f_2 sont mis œuvre dans le chapitre suivant.

Remarque 4.7.1 Pour un écoulement d'un fluide de Bingham dont le seuil ne dépend pas de la pression, on peut générer une famille des solutions analytiques avec les choix de f_1 et f_2 tels que les intégrales suivantes sont finies

$$\phi = \frac{2}{r^4} \int_{R_i}^r \frac{f_1(s)}{s} ds$$

$$p = - \int_{R_i}^r f_2(s) s ds$$

4.8 Conclusion

Au cours de chapitre, nous avons traité trois types de modèles : modèle intermédiaire, modèle régularisé et modèle LVF discret. L'existence de la solution est montrée et un algorithme de résolution est construit pour ces trois modèles. Seul l'incité de la vitesse u est mise en évidence pour le problème intermédiaire et le problème LVF en dimension finie. Toutefois, l'unicité de la vitesse et de la pression ainsi que la contrainte est prouvée pour le modèle régularisé. De plus, nous avons pu montrer la localisation de la solution (u, p) dans un ensemble localement compact. Cependant, La théorie d'existence d'une solution du modèle LVF continu n'est pas complètement achevée. Une dépendance forte entre la pression p et λ existe. Ceci rend difficile de prouver l'unicité de la solution. Mais, on peut envisager que dans les zones déformées, il existe une unique (u, p, λ) solution du modèle LVF continu pour tout $0 < \mu_0 \ll 1$. Finalement, nous avons exploré un cas plus concret, le cas d'une géométrie de Couette, dont la solution analytique est calculée

explicitement. La vitesse et la pression p sont des fonctions radiales. Elles dépendent du second membre. Cette solution généralise la solution trouvée dans la littérature pour le modèle de Bingham.

Mise en œuvre numérique

L'objectif de ce chapitre est de tester la convergence, la robustesse et la faisabilité de l'algorithme de résolution numérique décrit dans le chapitre 4. Ce chapitre constitue alors une première approche numérique de la loi $LVF(p_0)$ dans divers domaines d'applications. Il présente une progression vers l'application dans un malaxeur sous la forme de trois parties :

- La première partie est dédiée à la validation numérique dans une géométrie de Couette, écoulement dont la solution analytique est calculée explicitement dans le chapitre 4.
- La deuxième partie présente une étape vers la modélisation du malaxage en se consacrant à l'écoulement autour d'un cylindre en translation.
- Finalement, la troisième partie constitue une première approche applicative pour un écoulement dans un malaxeur planétaire.

5.1 Test numérique : application dans une géométrie de Couette

5.1.1 Introduction

L'objectif de cette section est de valider la méthode de résolution numérique proposée dans le chapitre 4. Nous testons notre approche numérique dans une géométrie de Couette où la solution est calculée explicitement dans la section 4.7, et comparée à la solution numérique.

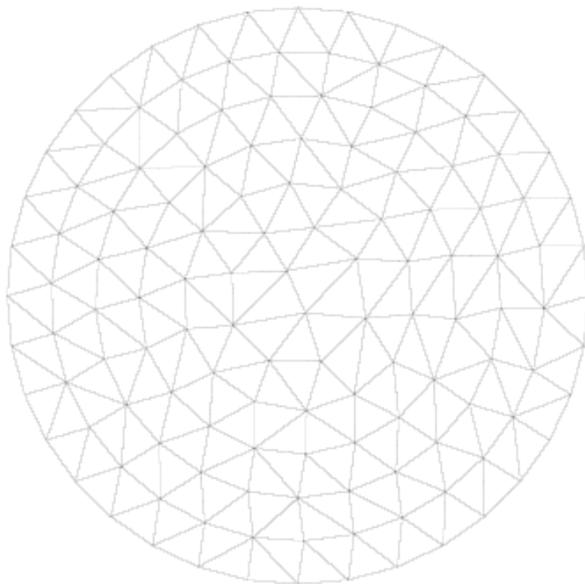
Le plan de cette section est le suivant : tout d'abord, la sous-section 5.1.2 est dédiée à la mise en œuvre de la méthode de discrétisation dans un anneau. Un code fortran est développé à cet effet et l'algorithme de résolution numérique présenté dans la sous-section 4.6.2 est implémenté dans ce code. Ensuite, la sous-section 5.1.3 s'occupe de la comparaison entre la solution analytique et la solution numérique. La solution

analytique (u, p) est complètement déterminée en fonction de choix de second membres f_1 et f_2 . On fixe alors $f_1 = 0$ et deux choix de f_2 sont analysés $f_2 = 0$ et $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$. Enfin, nous concluons les résultats obtenus qui soulignent la robustesse et la stabilité de la méthode de résolution numérique utilisée ainsi que la validation de solveur.

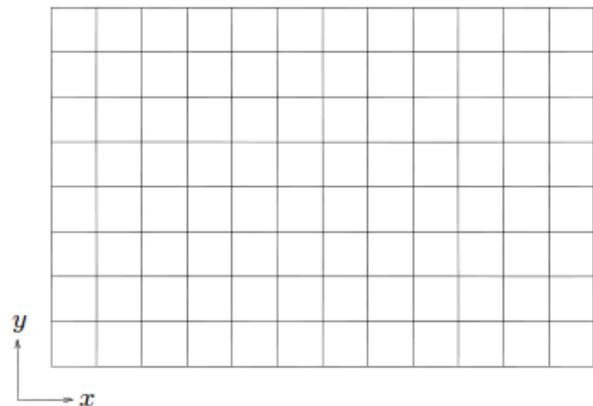
5.1.2 Mise en œuvre de la méthode de la discrétisation

La méthode de résolution numérique pour le modèle de LVF(p_0)¹ est une combinaison de deux techniques :

1. un algorithme ALVF présenté dans la sous-section 4.6.2 ;
2. une méthode d'éléments finis mixtes.



(a) Maillage non structuré.



(b) Maillage structuré cartésien.

FIGURE 5.1 – Exemples de maillages structurés et non structurés.

La construction de cette méthode d'éléments finis nécessite la donnée d'un maillage, de nœuds et d'un espace de polynômes, qui doivent être choisis de manière cohérente. Il existe deux types de maillages : structuré ou non structuré pour lesquels le domaine de calcul s'appuie sur le domaine physique d'étude (voir la figure 5.1). L'inconvénient principal du maillage non structuré est le coût de calcul (temps de calcul et stockage). Cependant, l'avantage du maillage structuré cartésien est qu'il ne nécessite pas la construction de maillage mais uniquement le repérage de cellules par des indices. Des solveurs rapides et des préconditionnement efficaces peuvent être utilisés. Par conséquent dans la suite, nos travaux consistent à choisir

¹Les simulations numériques effectuées dans ce rapport montrent que le modèle LVF dépend principalement du choix de la pression de référence p_0 . A cet effet, on note LVF(p_0) au lieu de LVF.

un maillage structuré et cartésien.

Soit $\Omega_f = \{(x, y) \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq R \text{ et } R_i \leq R \leq R_e\}$ un anneau dans \mathbb{R}^2 centré à l'origine, avec R_i le rayon d'intérieur et R_e le rayon d'extérieur (voir la figure 5.2). Une discrétisation spatiale est choisie de la forme suivante :

On considère $N_\theta \in \mathbb{N}$ tel que $N_\theta \geq 3$ et $N_\theta \Delta\theta = 2\pi$ et la subdivision $(r_j)_{1 \leq j \leq N_r+1}$ de $]R_i, R_e[$ définit la

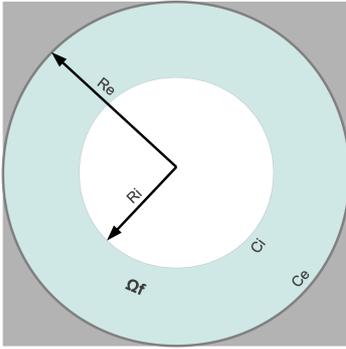


FIGURE 5.2 – Domaine de fluide Ω_f confiné entre deux cylindres coaxiaux C_i et C_e de rayon respectivement R_i et R_e .

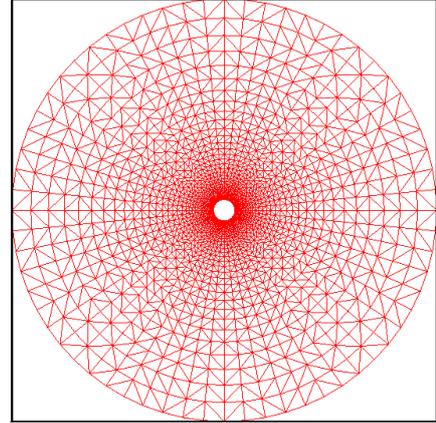


FIGURE 5.3 – Discrétisation du domaine annulaire. Sur la figure ($N_r = 32, N_\theta = 64$), en pratique on choisit ($N_r = 124, N_\theta = 256$).

suite $(\Delta r_j)_{1 \leq j \leq N_r}$, avec $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$.

On définit :

$$1 \leq i \leq N_\theta, 1 \leq j \leq N_r, K_{i,j} = (X_{i,j} X_{i,j+1} X_{i+1,j+1} X_{i+1,j})$$

$$1 \leq i \leq N_\theta, 1 \leq j \leq N_r + 1, X_{i,j} = (x_i, y_j) = r_j(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$$

$$\Omega_{f,h} = \bigcup_{1 \leq i \leq N_\theta, 1 \leq j \leq N_r} K_{i,j}$$

où pour tout $1 \leq i \leq N_\theta, 1 \leq j \leq N_r + 1, \theta_i = (i - 1)\Delta\theta$ et $r_j = R_i + (j - 1)\Delta r_j$.

Pour capter le motif d'écoulement dans $\Omega_{f,h}$, nous raffinons le maillage dans les zones où la solution possède de forts gradients de vitesse, c'est-à-dire près de la paroi. Ceci nous donne, à chaque N_θ , un calcul implicite Δr_j qui s'exprime sous la forme suivante :

On suppose une grille carrée c'est-à-dire : $1 \leq i \leq N_\theta, 1 \leq j \leq N_r$

$$|X_{i,j} X_{i+1,j}| = |X_{i,j} X_{i,j+1}|$$

Idéalement, on obtient : $\forall 1 \leq j \leq N_r$

$$\Delta r_j = 2r_{j-1} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

et

$$\forall 1 \leq j \leq N_r + 1, r_j = \left(1 + 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)^{j-1} r_1$$

où $r_1 = R_i$ et $r_{N_r+1} = R_e$.

Concrètement, on ne peut pas avoir $R_e = r_{N_r+1}$ puisque le domaine est annulaire avec R_e fixé. Ceci nous ramène à considérer la suite \tilde{r}_j telle que : $\forall 1 \leq j \leq J + 1$

$$\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1} = 2r_{j-1} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \alpha^{j-1} \tilde{r}_1$$

avec $\tilde{r}_1 = R_i$ et $\alpha = 1 + 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$.

On choisit alors J tel que $\tilde{r}_J \leq R_e \leq \tilde{r}_{J+1}$. Il en résulte

$$J = 1 + P\left(\frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{\ln(\alpha)}\right)$$

où $P(x)$ signifie la partie entière de x dans \mathbb{R} .

On pose $J = N_r$, $\tilde{R}_e = r_{J+1} = \alpha^{N_r} R_i$ et $\beta = \frac{R_e}{\tilde{R}_e}$.

De plus, on suppose que : $1 \leq j \leq N_r + 1$

$$r_j = \beta \tilde{r}_j = R_e \alpha^{j-1-N_r}$$

On déduit donc : $1 \leq j \leq N_r + 1, r_j = R_e \alpha^{j-1-N_r}$.

Après avoir défini le maillage, un passage en dimension finie est imposé. On considère $X_h^{k,l}(\Omega_{f,h})$ et $X_h^{k,-1}(\Omega_{f,h})$ tels que : $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{Z}, l \geq -1$

$$X_h^{k,l}(\bar{\Omega}_{f,h}) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_{f,h})^l; (v_h)|_{K_{ij}} \in Q_k, \forall K_{ij} \in T\}$$

$$X_h^{k,-1}(\bar{\Omega}_{f,h}) = \{v_h; (v_h)|_{K_{ij}} \in Q_k, \forall K_{ij} \in T\}$$

où h est le pas de discrétisation et Q_k l'ensemble des polynômes de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que tout $P \in Q_k$, P s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x) = \sum_{0 \leq i_1 < k, \dots, 0 \leq i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Dans nos cas, pour tout $1 \leq j \leq N_r$, on a $h = (h_{r_j}, h_\theta)$ tel que $h_{r_j} = \Delta r_j$ et $h_\theta = \Delta\theta$

Une méthode d'approximation très répandue dans la littérature est la méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire pour la vitesse et constante par morceaux pour la pression (voir par exemple [37]) c'est-à-dire on prend :

$$X_h(\Omega_{f,h})^N = X_h^{1,0}(\bar{\Omega}_{f,h})^N \cap H_0^1(\Omega_f)^N$$

$$P_h(\Omega_{f,h}) = X_h^{0,-1}(\bar{\Omega}_{f,h}) \cap L_0^2(\Omega_f)$$

En pratique, la méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire-constante ne satisfait pas la condition inf-sup *uniformément* par rapport à h . Mais, les travaux numériques de [38] montrent que le choix de ces éléments

est possible après filtrage des modes parasites de la pression. Toutefois, le filtrage n'est pas toujours facile à effectuer. Dans nos simulations, aucun mode parasite n'est apparu.

Cette méthode est stable et d'ordre optimal de convergence. Ces résultats sont prouvés dans la littérature pour le problème de Stokes (voir par exemple [37]) et énoncés dans l'annexe C. Ainsi, le choix de $X_h^{1,0}(\bar{\Omega}_{f,h})$ permet d'utiliser des solveurs rapides comme la transformée de Fourier rapide [39].

Un choix naturel de $T_h(\Omega_{f,h})$ est de le prendre sous la forme suivante :

$$T_h(\Omega_{f,h}) = X_h^{1,-1}(\bar{\Omega}_{f,h})^{N \times N}$$

Ceci nous ramène donc à considérer :

$$u_h^K(x, y) = \sum_{1 \leq l \leq 4} u_l N_l(x, y) \quad (5.1)$$

$$\pi_h(\lambda_h)^K(x, y) = \sum_{1 \leq l \leq 4} \pi_h(\lambda_h)_l N_l(x, y) \quad (5.2)$$

où u_l et $\pi_h(\lambda_h)_l$ désignent les valeurs des fonctions approchées u_h et $\pi_h(\lambda_h)$ respectivement au point de coordonnées (x_l, y_l) et N_l les fonctions de base de $X_h^{1,0}(\bar{\Omega}_{f,h})$ telles que

$$N_l(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (x_l, y_l) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Comme nous avons mentionné dans la sous-section 4.6 de chapitre 4, nous voyons apparaître dans l'algorithme ALVF en dimension finie trois types de sous-problèmes :

1. Un sous-problème consistant à résoudre un sous-problème de Stokes discret ;
2. Des calculs explicites correspondant à la mise à jour des multiplicateurs $\pi_h(\lambda_h)^k$;
3. Des mises à jour de la pression p_h^K et de la vitesse u_h^K .

Dans la pratique, on obtient la forme matricielle du sous-problème de Stokes :

$$\begin{cases} AU + B^T P = F \\ BU = 0 \end{cases}$$

où pour tout $1 \leq l \leq (N_r - 1)N_\theta$, $1 \leq m \leq N_r N_\theta$ avec l le numéro de sommet d'intérieur et m numéro d'élément, $A = (a_{l,m})$ est la matrice d'opérateur de Laplace telle que

$$a_{l,m} = \int_{\Omega_{f,h}} \nabla N_l \nabla N_m dX$$

$B = (B_1 \ B_2)$ la matrice d'opérateur de divergence telle que

$$(b_1)_{l,m} = \int_{K_l} \frac{\partial N_m}{\partial x} dX$$

et

$$(b_2)_{l,m} = \int_{K_l} \frac{\partial N_m}{\partial y} dX$$

et $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ le second membre tel que

$$(F_1)_l = -\mu_0 \int_{\Omega_{f,h}} G(p_h^n) \pi_h(\lambda_h^k) : D \begin{pmatrix} N_l \\ 0 \end{pmatrix} dX + \int_{\Omega_{f,h}} f_1 N_l dX$$

et

$$(F_2)_l = -\mu_0 \int_{\Omega_{f,h}} G(p_h^n) \pi_h(\lambda_h^k) : D \begin{pmatrix} 0 \\ N_l \end{pmatrix} dX + \int_{\Omega_{f,h}} f_2 N_l dX$$

En éliminant U , on obtient la formulation duale :

$$(BA^{-1}B^T)P = -BA^{-1}F$$

Comme la condition inf-sup est vérifiée, alors B est surjectif et donc $BA^{-1}B^T$ est symétrique définie positive. Ceci nous ramène à résoudre ce système matriciel par la méthode de gradient conjugué dual [40]. Cependant, p_h^n est calculée sur des mailles différentes que celles de λ_h^k et $D(u_h^{k+1})$ alors deux interpolations Q_1 -discontinue² de p_h^n sur les mailles de $\pi_h(\lambda_h^k)$ et $D(u_h^{k+1})$ sont effectuées dans la programmation pour calculer les termes :

$$G(p_h^n) \pi_h(\lambda_h^k)$$

$$G(p_h^n) D(u_h^{k+1})$$

5.1.3 Test de convergence

Les cylindres, intérieur et extérieur, sont animés d'un mouvement de rotation uniforme w_i et w_e . La longueur des cylindres L est supposée grande par rapport aux rayons R_i et R_e de ceux-ci. La configuration de l'écoulement dans la géométrie de Couette dont le rapport de rayons $r_0 = \frac{R_i}{R_e} = 0.5$ et le rapport de vitesses de rotation $w_0 = \frac{w_i}{w_e} = 0.5$ est présentée par la figure 5.2.

Pour chaque p fonction imposée qui vérifie $\nabla(p) = f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, une solution u explicite est calculée dans une géométrie de Couette (voir la section 4.7). Comme la pression est déterminée à partir de f_2 (voir l'équation (4.122)), deux choix de f_2 sont alors considérés dans nos travaux :

1. $f_2 = 0$;
2. $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$.

² Soient $(\tau_1, \tau_2) \in T_h(\Omega_{f,h})^2$ tels que : pour tout $1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq N_\theta$

$$\tau_1(x_i, y_j) = G(p_h^n(x_i, y_j)) \pi_h(\lambda_h^k)(x_i, y_j)$$

$$\tau_2(x_i, y_j) = G(p_h^n(x_i, y_j)) D(u_h^{k+1})(x_i, y_j)$$

Dans un premier temps, on suppose que $p = 0$, ceci nous donne que $\text{LVF}(p_0)$ se comporte comme un fluide de Bingham à seuil $\mu_0 p_0$. D'après [25], il existe un nombre de Bingham Bi_c à partir duquel il n'y a pas de zones rigides où Bi_c s'exprime par :

$$Bi_c = \frac{2\sqrt{2}}{r_0 - 2\ln(r_0) - 1} \approx 3$$

Dans le cas où $Bi < Bi_c$, le problème ne pose aucune difficulté numérique (du moins pas plus que la résolution du modèle de Stokes). Les calculs sont alors réalisés pour $p_0 = 20$ et $\mu_0 = 0.5$. Evidemment, nous avons obtenu $\|p_h\|_{0,\infty} = 0$. De plus, nous avons observé :

1. l'indépendance de l'erreur entre la solution analytique et la solution calculée numériquement vis-à-vis de la tolérance ϵ ($\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega_{f,h}} \leq \epsilon$) de l'algorithme de point fixe ;
2. la convergence entre la solution analytique et la solution calculée numériquement en fonction de pas du maillage.

Remarque 5.1.1 Une tolérance ϵ de l'algorithme de point fixe, algorithme extérieur, nous ramène à considérer une tolérance de l'algorithme de l'algorithme $\text{ALVF}(\mu_0(q))$, algorithme intérieur, égale à $\frac{\epsilon}{10}$. Dans la pratique, ceci signifie que le sous-problème de Stokes est résolu à l'ordre de $\frac{\epsilon}{100}$ pour éviter les problèmes d'instabilité numérique.

ϵ	$\ e_h\ _{\infty,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{1,\Omega_{f,h}}$
1.10^0	$1,708.10^{-1}$	$1,457.10^{-1}$	1,345
1.10^{-1}	$1,413.10^{-2}$	$1,141.10^{-2}$	$9,557.10^{-2}$
1.10^{-2}	$1,397.10^{-3}$	$1,140.10^{-3}$	$8,923.10^{-3}$
1.10^{-3}	$4,18.10^{-4}$	$1,738.10^{-4}$	$5,426.10^{-3}$
1.10^{-4}	$4,17.10^{-4}$	$1,71.10^{-4}$	$5,4.10^{-3}$
1.10^{-5}	$4,15.10^{-4}$	$1,68.10^{-4}$	$5,36.10^{-3}$
1.10^{-6}	$4,13.10^{-4}$	$1,65.10^{-4}$	$5,34.10^{-3}$
1.10^{-7}	$4,120.10^{-4}$	$1,61.10^{-4}$	$5,31.10^{-3}$

TABLE 5.1 – Erreur $|e_h| = |u - u_h|$ pour différentes tolérances ϵ pour $f_2 = 0$, $\text{LVF}(20)$ et $N_\theta = 256$

Le tableau 5.1 montre la sensibilité des normes L^2 , H^1 et L^∞ de l'erreur $|e_h| = |u - u_h|$ (où u_h désigne la solution approchée et u la solution exacte) par rapport au tolérance ϵ . On a remarqué que si ϵ est comprise entre 1 et 10^{-4} , l'erreur $|e_h|$ décroît rapidement. Cependant, entre 10^{-5} et 10^{-7} , l'erreur $|e_h|$ atteint une stabilité de l'ordre de $4,1.10^{-4}$ pour la norme L^∞ , $1,68.10^{-4}$ pour la norme L^2 et $5,3.10^{-3}$ pour la norme H^1 . On peut alors envisager, que l'erreur e_h est indépendante de la tolérance ϵ .

De plus, nous présentons dans la figure 5.4, en fonction du maillage (N_r, N_θ) , l'évolution des normes L^2 , H^1 et L^∞ de l'erreur $|e_h| = |u - u_h|$. La convergence de la méthode en fonction du maillage n'est pas très régulière car la solution n'est pas régulière au point $r = r_c$: la valeur de l'erreur peut être très faible si un

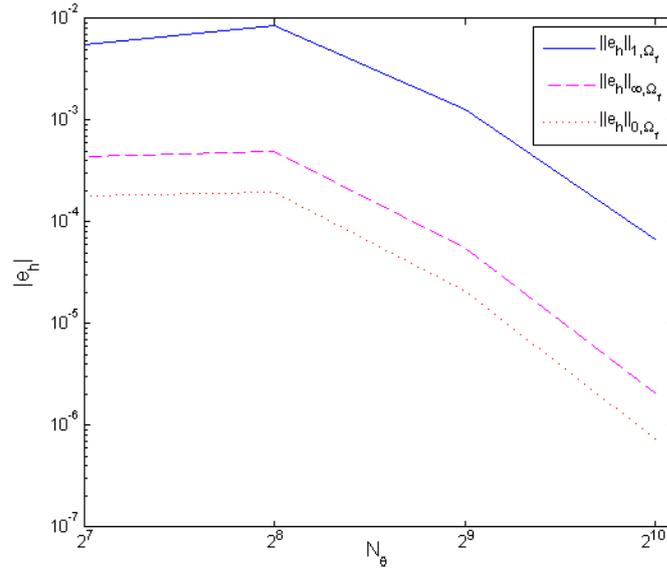


FIGURE 5.4 – Erreur $|e_h| = |u - u_h|$ entre la solution exacte et la solution numérique en fonction du maillage N_θ pour $f_2 = 0$ et LVF(20).

point de la subdivision est proche de $r = r_c$. D'après les pentes des courbes, on peut estimer que l'ordre de l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique est $O(h^2)$ pour la norme L^2 , $O(h^2)$ pour la norme H^1 et $O(h^3)$ pour la norme L^∞ .

De manière similaire, on prend $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ ainsi que deux choix de p_0 : $p_0 = 0$ et $p_0 = 20$. Nous pouvons remarquer qu'il y a :

1. indépendance des erreurs $\|p - p_h\|_{0, \Omega_{f,h}}$ et $|e_h|$ en fonction de la tolérance ϵ ;
2. convergence de l'erreur $\|p - p_h\|_{0, \Omega_{f,h}}$ en fonction du maillage où p est la solution analytique et p_h la solution numérique trouvée ;
3. convergence de l'erreur $|e_h|$ en fonction du maillage.

Le tableau 5.2 décrit la sensibilité de la norme L^∞ de l'erreur $\|p - p_h\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ où p_h est la solution approchée et p la solution exacte et des normes L^2 , H^1 et L^∞ de l'erreur $|e_h| = |u - u_h|$ par rapport la tolérance ϵ . On a remarqué que : les courbes des erreurs $|e_h|$ et $\|p - p_h\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ décroissent rapidement jusqu'elles atteignent une stabilité à $\epsilon = 10^{-3}$ et $\epsilon = 10^{-5}$ respectivement. Ainsi, nous présentons dans la figure 5.5 la décroissance de l'erreur $\|p - p_h\|_{0, \Omega_{f,h}}$ en fonction du maillage N_θ pour les deux choix de p_0 . Les deux courbes semblent irrégulières. Si $p_0 = 0$, d'après les pentes des courbes, on suppose que l'ordre de l'erreur est $O(h^2)$. De manière similaire, si $p_0 = 20$, l'ordre de l'erreur est supposé d'ordre $O(h^2)$.

ϵ	$\ p - p_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{\infty,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{1,\Omega_{f,h}}$
1.10^0	$1,665.10^{-1}$	$1,752.10^{-2}$	$1,951.10^{-2}$	$1,256.10^{-1}$
1.10^{-1}	$7,176.10^{-2}$	$6,703.10^{-3}$	$8,035.10^{-3}$	$7,176.10^{-2}$
1.10^{-2}	$9,876.10^{-3}$	$4,949.10^{-3}$	$5,288.10^{-3}$	$3,848.10^{-2}$
1.10^{-3}	$1,058.10^{-3}$	$4,988.10^{-3}$	$5,293.10^{-3}$	$3,844.10^{-2}$
1.10^{-4}	$9,803.10^{-5}$	$4,984.10^{-3}$	$5,293.10^{-3}$	$4,215.10^{-2}$
1.10^{-5}	$2,773.10^{-5}$	$4,984.10^{-3}$	$5,293.10^{-3}$	$3,842.10^{-2}$
1.10^{-6}	$2,608.10^{-5}$	$4,984.10^{-3}$	$5,293.10^{-3}$	$3,842.10^{-2}$
1.10^{-7}	$2,608.10^{-5}$	$4,984.10^{-3}$	$5,293.10^{-3}$	$3,842.10^{-2}$

a) $p_0 = 0$

ϵ	$\ p - p_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{\infty,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{0,\Omega_{f,h}}$	$\ e_h\ _{1,\Omega_{f,h}}$
1.10^0	1,55	$1,97.10^{-1}$	$2,48.10^{-1}$	1,064
1.10^{-1}	$8,43.10^{-1}$	$7,531.10^{-2}$	$1,53.10^{-2}$	$9,479.10^{-1}$
1.10^{-2}	$2,95.10^{-1}$	$6,2.10^{-3}$	$9,97.10^{-3}$	$5,479.10^{-1}$
1.10^{-3}	$9,01.10^{-2}$	$5,976.10^{-3}$	$8,94.10^{-3}$	$1,001.10^{-1}$
1.10^{-4}	$3,57.10^{-2}$	$5,992.10^{-3}$	$8,94.10^{-3}$	$8,493.10^{-2}$
1.10^{-5}	$1,1.10^{-3}$	$5,994.10^{-3}$	$8,94.10^{-3}$	$6,25.10^{-2}$
1.10^{-6}	$1,018.10^{-3}$	$5,994.10^{-3}$	$8,94.10^{-3}$	$6,23.10^{-2}$
1.10^{-7}	$1,016.10^{-3}$	$5,994.10^{-3}$	$8,94.10^{-3}$	$6,23.10^{-2}$

b) $p_0 = 20$

TABLE 5.2 – Erreur $\|p - p_h\|_{0,\Omega_{f,h}}$ et $|e_h| = |u - u_h|$ pour différentes tolérances ϵ pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$, $LVF(p_0)$ et $N_\theta = 256$

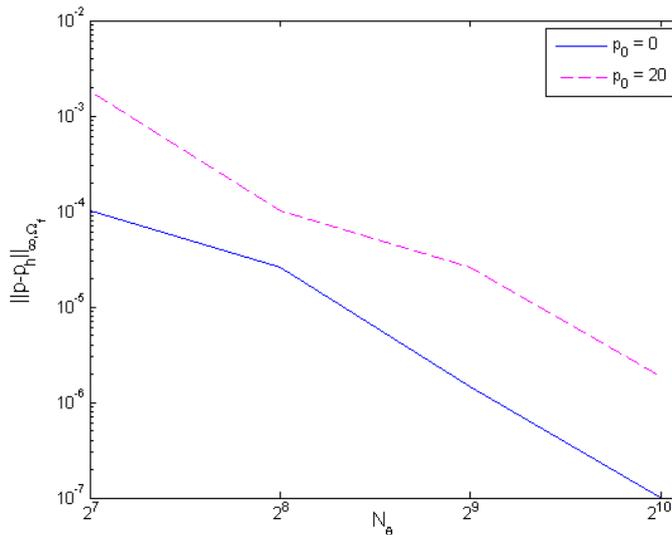


FIGURE 5.5 – Erreur $\|p - p_h\|_{\infty,\Omega_{f,h}}$ entre la solution exacte p et la solution numérique p_h en fonction du maillage N_θ pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ et $LVF(p_0)$.

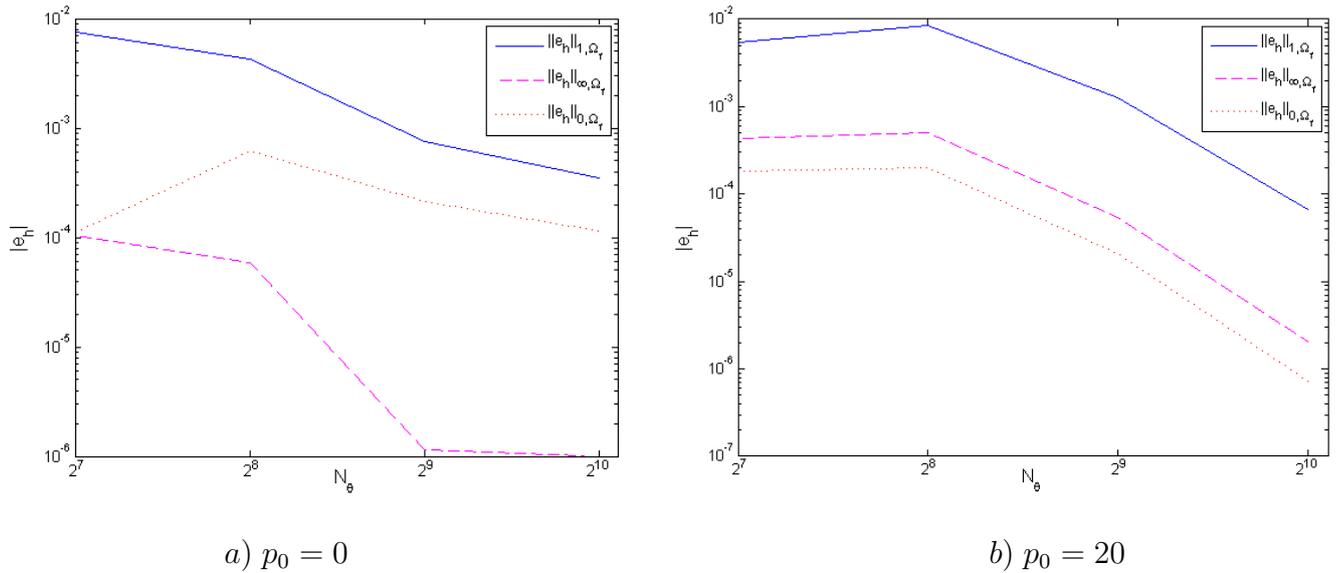


FIGURE 5.6 – Erreur $|e_h|$ entre la solution exacte u et la solution numérique u_h pour $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$ et $\text{LVF}(p_0)$

En outre, les normes L^2 , L^∞ , H^1 de l'erreur $|e_h|$ montrées par la figure 5.6 admettent des évolutions irrégulières. Ceci met évidence l'existence des zones rigides associées à la perte de la régularité de la solution. Cependant, les courbes observées sont décroissantes. D'après les pentes des courbes observées par la figure 5.6, on peut estimer que l'erreur $|e_h|$ est d'ordre $O(h^2)$ pour les normes H^1 , L^2 et L^∞ .

5.1.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons testé le solveur de résolution numérique dans une géométrie de Couette où la solution analytique est calculée explicitement en fonction de second membre. Une discrétisation spatiale par la méthode d'éléments finis mixtes dans des domaines en forme des couronnes est mise en œuvre. De plus, nous avons pu établir de manière précise pour $f_2 = 0$ et $f_2 = \frac{1}{2s\sqrt{s}}$:

1. une convergence indépendamment de la tolérance ϵ ;
2. une convergence de $\|p - p_h\|_{\infty,\Omega_{f,h}}$ et $|e_h| = |u - u_h|$.

Cependant, ce test constitue un test partiel de convergence de la méthode de résolution puisque un découplage fort entre la vitesse et la pression, qui sont déterminées en fonction de second membre, est mise en évidence. La recherche d'un cas non-dégénéré est alors l'objet d'un futur travail.

5.2 Application académique : écoulement autour d'un cylindre

5.2.1 Introduction

Le malaxage des pâtes granulaires viscoplastiques frictionnelles est caractérisé par l'agitation d'une suspension granulaire *via* un objet rigide (un agitateur). Cette section effectue une étape vers la modélisation du malaxage en se consacrant à l'écoulement stationnaire d'une telle pâte autour d'un barreau en translation.

Notre problème, ainsi qu'un problème analogue, l'écoulement autour d'une sphère, ont été étudiés pour des fluides visco-élastiques [41] et des fluides viscoplastiques.

Concernant les fluides à seuil constant, les références sont abondantes. On peut citer les premiers travaux expérimentaux de Yoshioka et Adachi [42] et ceux de Brooks et Whitmore [40] et [43] sur la mesure du coefficient de traînée. Beris *et al.* [44] ont étudié numériquement ce type de problème. La même étude est également faite par Mitsoulis et Beaulne [45] dans le cas du modèle d'Herschel-Bulkley. Récemment, les auteurs de [46] ont étudié l'écoulement des assemblages des grains secs autour d'un cylindre. Finalement, la littérature révèle qu'il n'existe aucun travail numérique sur le comportement de la pâte viscoplastique frictionnelle ($LVF(p_0)$) envisagée ici.

Donc, nous proposons dans cette section d'adapter la méthode de résolution décrite précédemment pour le cas du cylindre. Nous allons montrer la convergence de l'algorithme proposé et déterminer la cinématique d'écoulement et la dissipation d'énergie en fonction des paramètres rhéologiques.

5.2.2 Description du problème

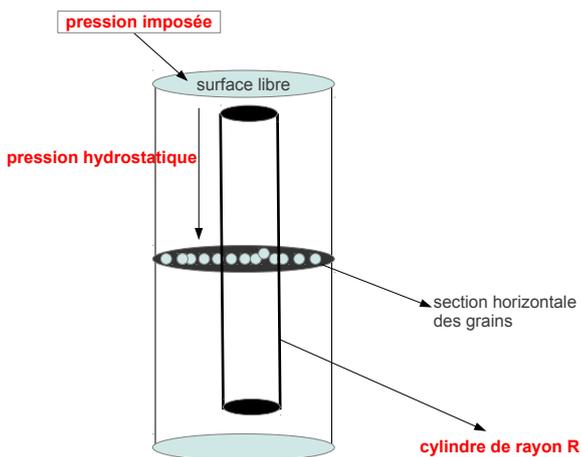


FIGURE 5.7 – Cylindre de rayon R se déplaçant à vitesse constante U dans une colonne verticale de fluide viscoplastique frictionnel.

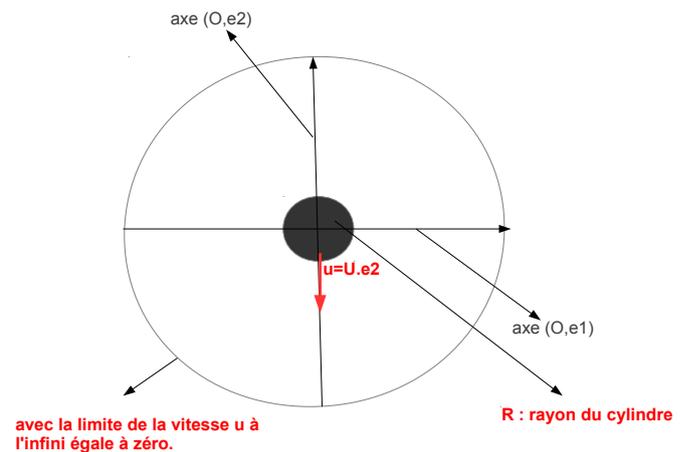


FIGURE 5.8 – Représentation schématique du problème bidimensionnel.

Un barreau cylindrique se translate à une vitesse constante U dans un fluide viscoplastique frictionnel qui est considéré comme un milieu infini au repos loin du cylindre (voir les figures 5.7 et 5.8). La longueur de référence est le rayon R du cylindre. La vitesse de référence est la vitesse U de translation du cylindre. Une discrétisation spatiale par la méthode d'éléments finis mixtes est mise en œuvre. Cette discrétisation prend la même forme que dans la section 5.1 et plus particulièrement dans la sous-section 5.1.2. Dans la pratique, cela signifie qu'on considère un domaine annulaire Ω_f de rayon extérieur R_e suffisamment grand afin de simuler un milieu infini, $U = R_i w_i$ et w_e égale à zéro (voir la figure 5.2). Les résultats de la suite sont obtenus à partir du même code fortran utilisé pour le problème de Couette de la section 5.1.

5.2.3 Paramètres de simulation

Le modèle LVF (2.26) possède deux types de paramètres : physique et numérique. Trois paramètres physique importants qui semblent agir sur le motif d'écoulement sont : la borne à l'infini p_∞ , la pression de référence p_0 et le coefficient de friction μ_0 . Les simulations effectuées dans cette section, montrent que le produit $\mu_0 p_0$ influe sur le motif d'écoulement. Deux comportements sont observés pour $\mu_0 p_0 = 0$ et $\mu_0 p_0 \neq 0$. On fixe alors $\mu_0 = 0.5$ et deux pressions de référence p_0 , une égale à zéro et une autre différente de zéro, par exemple $p_0 = 10$. Cependant, les simulations montrent que la borne à l'infini p_∞ n'agit pas sur ce motif. On peut donc envisager que la pression est bornée dans ce type d'écoulement. Ceci implique que dans la résolution numérique on peut prendre $\|p\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ au lieu de p_∞ . La condition nécessaire pour que l'algorithme de LVF discret proposé dans la sous-section 4.6.2 soit convergent sera alors :

$$0 < \alpha \leq \frac{2}{\mu_0^2 \|p^n\|_{\infty, \Omega_{f,h}}^2}$$

où p^n la n-ième itération de l'algorithme de point fixe.

Egalement, concernant les paramètres numériques, le milieu d'écoulement présenté par la figure 5.8 est considéré comme un milieu infini. Ceci impose un rayon extérieur R_e grand par rapport au rayon du cylindre R_i . Par exemple, $R_e = 20$ et $R_i = 1$ sont satisfaisants. En outre, les algorithmes de résolution (algorithme de point fixe et algorithme de ALVF($\mu_0(q)$)) sont résolus à une tolérance ϵ . Ces tolérances sont choisies pour la convergence des algorithmes itératifs de la manière suivante : 10^{-4} pour l'algorithme de point fixe (algorithme extérieur) et 10^{-5} pour l'algorithme de ALVF($\mu_0(q)$) (algorithme intérieur). Dans la pratique, cela signifie que le sous-problème de Stokes est résolu par la méthode du gradient conjugué [40] avec une précision de 10^{-6} pour éviter des problèmes de stabilité numérique.

5.2.4 Test numérique

L'objectif de cette sous-section est de tester la faisabilité et la robustesse de la méthode numérique décrite dans le chapitre 4 autour d'un cylindre, c'est-à-dire dans un cas plus complexe que l'écoulement de Couette (voir la section 5.1).

Le plan de la sous-section est le suivant :

1. chercher un maillage (N_r, N_θ) pour capturer convenablement le motif d'écoulement. Ceci est obtenu à partir du calcul de la moyenne d'énergie dissipée \bar{E} où $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ pour différents maillages N_θ . Cette grandeur semble pertinente puisqu'elle prédit l'évolution cinématique de l'écoulement.
2. montrer la convergence de l'algorithme de résolution à partir des courbes de résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0, \Omega_{f,h}}$.

Dans le tableau 5.3, la moyenne d'énergie \bar{E} et les temps de calcul sont reportés. On peut remarquer que l'erreur de la moyenne de l'énergie dissipée entre les deux maillages ($Err = |\bar{E}_{N_\theta} - \bar{E}_{\frac{N_\theta}{2}}|$) est de l'ordre de 10^{-2} pour $N_\theta = 512$ et de 10^{-3} pour $N_\theta = 512$. A titre de comparaison, on peut constater que la même information est donnée par $N_\theta = 256$ ou $N_\theta = 512$. Cependant, le temps de calcul pour un maillage

N_θ	$\bar{E}, p_0 = 10$	$T_{calcul}, p_0 = 10$	$\bar{E}, p_0 = 0$	$T_{calcul}, p_0 = 0$
16	2,802	38	$6,157 \cdot 10^{-1}$	1
32	1,016	182	$2,218 \cdot 10^{-1}$	7
64	$3,415 \cdot 10^{-1}$	705	$7,578 \cdot 10^{-2}$	91
128	$1,149 \cdot 10^{-1}$	2892	$2,59 \cdot 10^{-2}$	721
256	$4,078 \cdot 10^{-1}$	12140	$9.335 \cdot 10^{-3}$	2588
512	$1,473 \cdot 10^{-2}$	50400	$3,360 \cdot 10^{-3}$	9095

TABLE 5.3 – Moyenne d'énergie dissipée \bar{E} où $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ et le temps de calcul T_{calcul} exprimé en secondes pour $p_0 = 0$ et $p_0 = 10$.

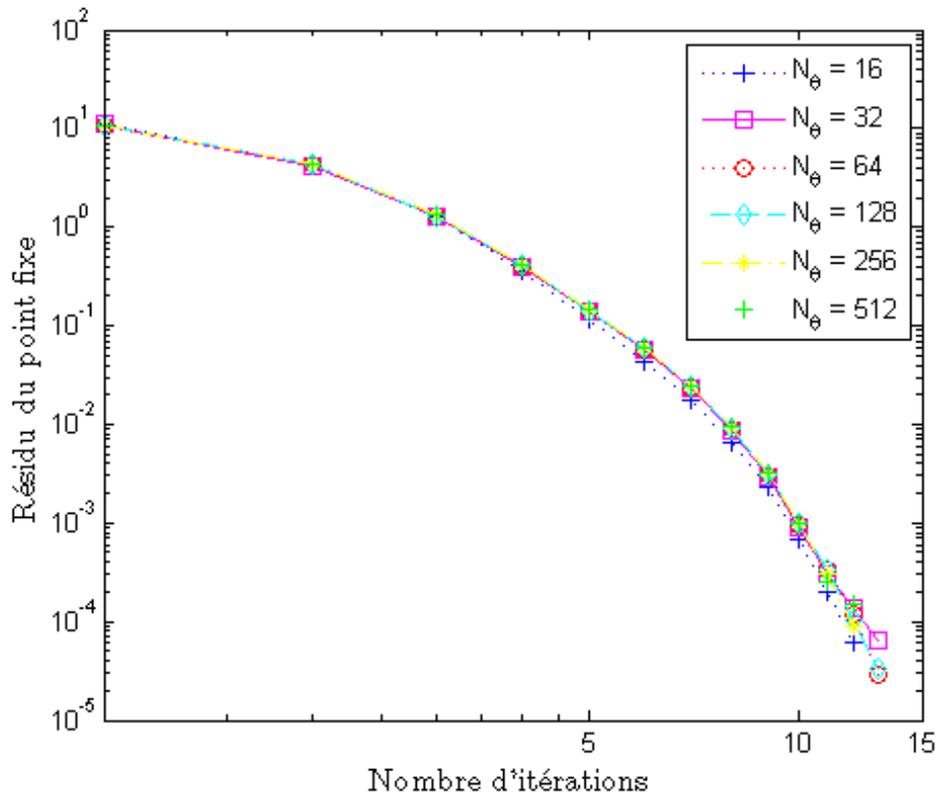


FIGURE 5.9 – Résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations à $p_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.5$ fixés et pour six maillages différents.

$N_\theta = 256$ n'est pas coûteux. Donc, on peut considérer que $N_\theta = 256$ est satisfaisant. Le maillage utilisé dans la suite sera $(N_r = 124, N_\theta = 256)$. Egalement, d'après les figures 5.9 et 5.10, les courbes du résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega_{f,h}}$ convergent en fonction de nombre d'itérations pour différents maillages. Ces courbes mettent en évidence la convergence de l'algorithme de point fixe pour différents maillages. De plus, la figure 5.11 décrit l'évolution des courbes du résidu du point fixe en fonction de nombre d'itérations pour les deux pressions de référence ($p_0 = 0$ et $p_0 = 10$). Ces courbes décroissent rapidement et tendent vers zéro. Egalement, elles soulignent que l'algorithme du point fixe prend quelques dizaines d'itérations pour converger. En outre, la figure 5.12 illustre le nombre d'itérations de l'algorithme intérieur en fonction de nombre d'itérations de l'algorithme d'extérieur. La courbe de $p_0 = 10$ semble irrégulière pour les premières

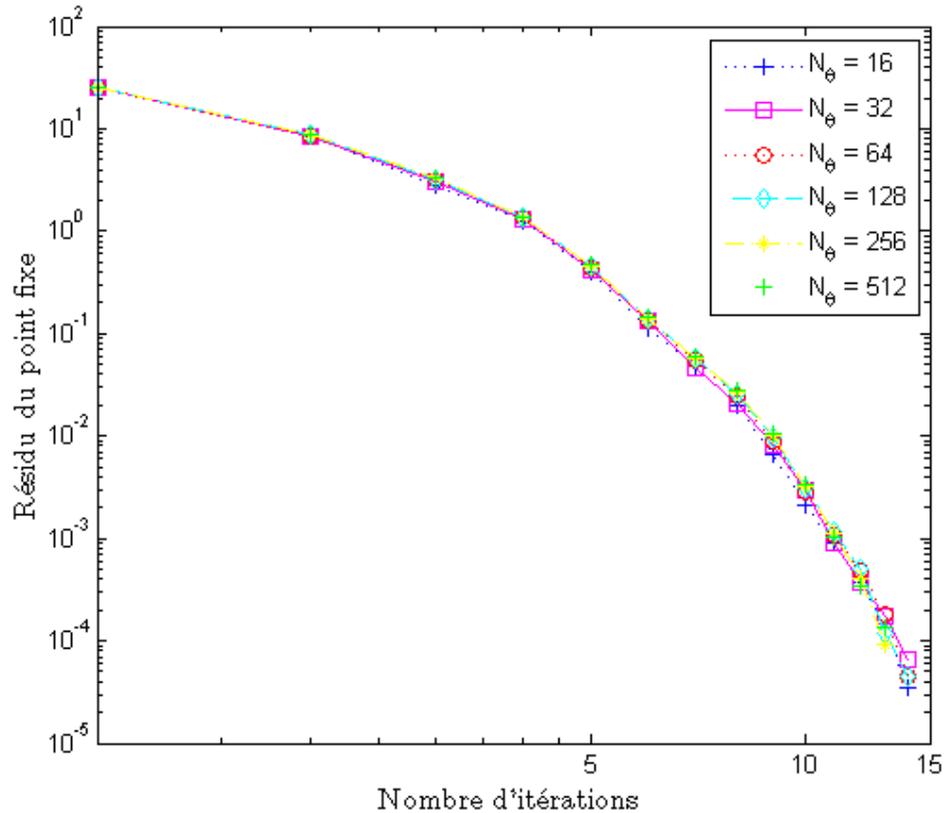


FIGURE 5.10 – Résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations à $p_0 = 10$ et $\mu_0 = 0.5$ fixés et pour six maillages différents.

itérations mais elle diminue rapidement en fonction des autres itérations. D'autre part, la courbe de $p_0 = 0$ décroît en fonction des itérations.

On peut alors constater que :

1. le résidu du point fixe tend vers zéro pour différents maillages et pour différentes pressions de référence ;
2. pour ϵ petit, le coût globale est de l'ordre d'un coût de Bingham.

5.2.5 Analyse des résultats

Cette sous-section s'organise en trois parties. Dans un premier temps, les résultats importants pour un fluide de Bingham autour d'un cylindre circulaire sont présentés. La seconde partie traite l'écoulement de LVF autour d'un cylindre en fonction des paramètres physiques. Enfin, la troisième partie aborde la comparaison entre LVF et le fluide de Bingham.

Quelques résultats de la littérature pour un fluide viscoplastique

Soit un fluide de Bingham à seuil σ_0 s'écoulant très lentement autour d'un cylindre de rayon R en translation verticale à vitesse U et situé dans un milieu infini. La longueur de référence est le rayon $R = 1$ du cylindre

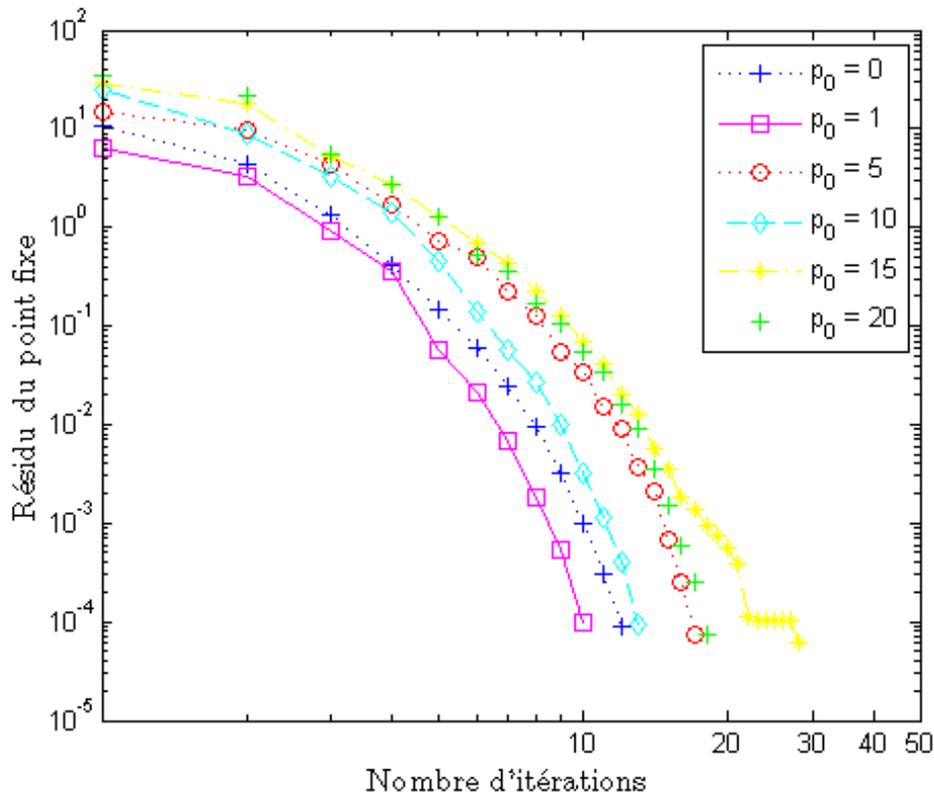


FIGURE 5.11 – Résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega_{f,h}}$ en fonction de nombre d'itérations pour différentes p_0 .

et la vitesse de référence est la vitesse U du cylindre. Le nombre de Bingham Bi devient :

$$Bi = \frac{\sigma_0 R}{\eta U}$$

Des travaux antérieurs ([41] et [47]) sur l'écoulement des fluides viscoplastiques autour d'un cylindre ont établi l'existence de quatre zones distinctes montrées dans la figure 5.13 :

1. une zone déformée entoure le cylindre. Celle ci est nommée l'enveloppe ;
2. deux zones rigides, en forme de pointe, sont situées sur l'axe de l'écoulement. Ces zones sont des zones mortes ;
3. deux zones rigides ovales situées dans la zone déformée de manière symétrique par rapport à l'axe de l'écoulement. Ce sont des zones noyaux.
4. une zone plastique contient la zone déformée.

L'allure de la zone déformée ainsi que l'existence de la pointe sont des éléments familiers d'un écoulement d'un fluide à seuil constant autour d'un objet en translation (voir la revue de Chabra et Uhlher [48]). Les auteurs de [48] ont étudié l'influence des paramètres, en particulier Bi , sur la forme de l'enveloppe et celle

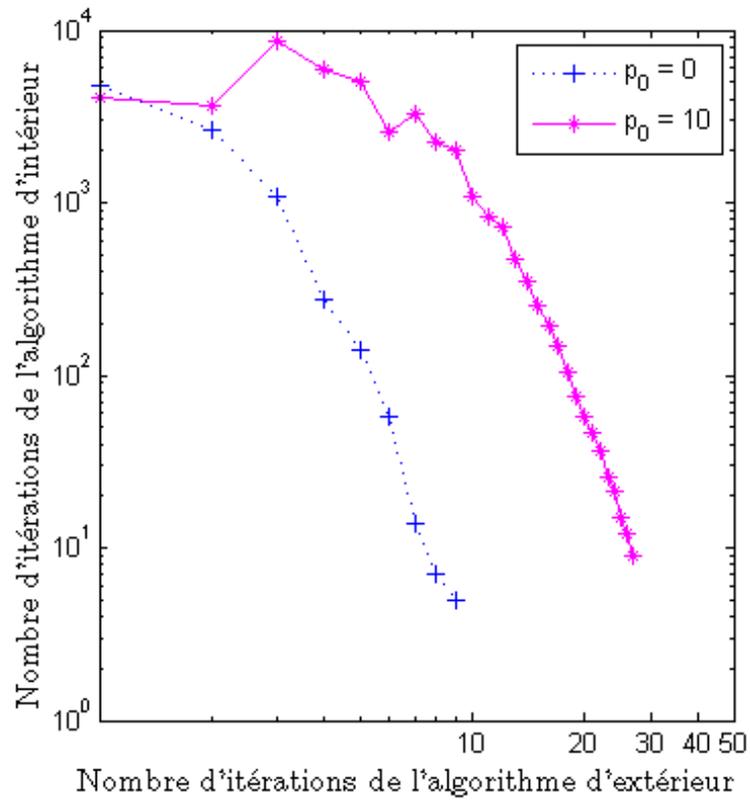


FIGURE 5.12 – Nombre d'itérations de l'algorithme intérieur en fonction de nombre d'itérations de l'algorithme extérieur.

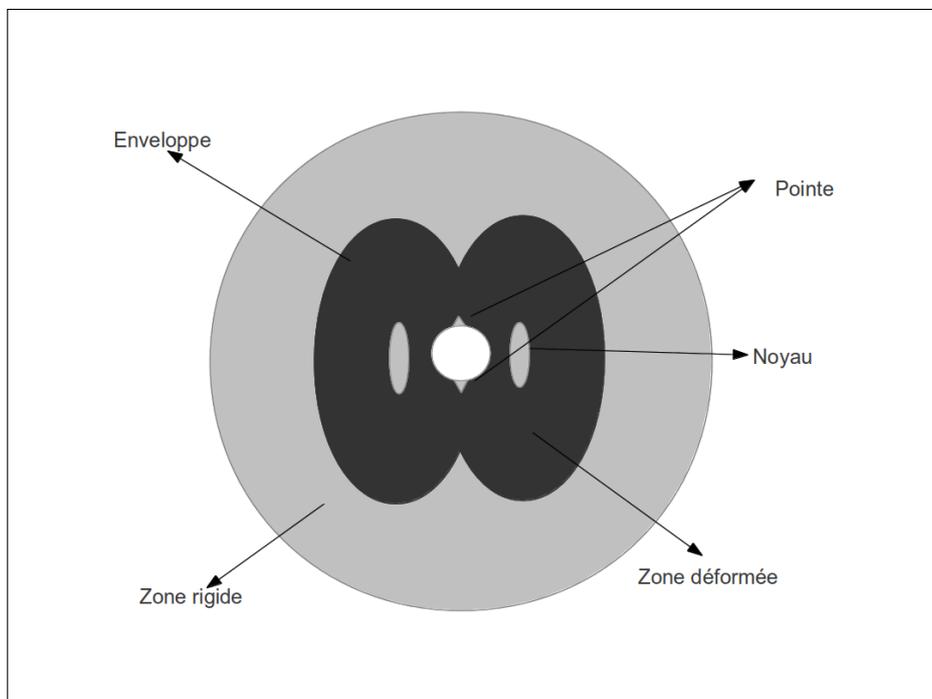


FIGURE 5.13 – Représentation schématique des différentes zones de l'écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un cylindre : zones déformées en gris foncé et zones rigides en gris clair.

de la pointe. Ainsi, l'existence des noyaux est mise en évidence pour le fluide de Bingham dans les travaux de [25]. En outre, le coefficient de traînée a été calculé pour un fluide de Bingham suivant la définition (Batchelor, [49]) sous la forme suivante :

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{1}{R_i} \int_{\Gamma_i} (\sigma_{tot}n)_x ds = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{1}{R_i} X \tag{5.3}$$

où $X = \int_{\Gamma_i} \sigma_{tot}n ds$ et $\sigma_{tot} = \sigma - pI$ avec I l'opérateur d'identité.

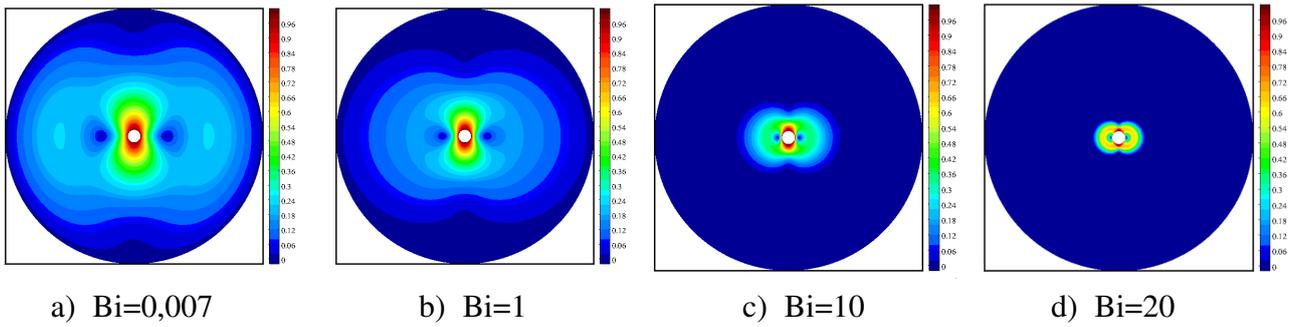


FIGURE 5.14 – Cartes des vitesses d'un fluide de Bingham en fonction de nombre de Bingham Bi .

Des simulations numériques sont effectuées par le code développé dans nos travaux de recherches en implémentant l'algorithme d'Uzawa proposé dans la sous-section *al_UZAW* *Aduchapitre3*. La figures 5.14 illustre les

Motif d'écoulement de LVF en fonction des paramètres rhéologiques

La pâte viscoplastique frictionnelle est modélisée comme un fluide à seuil dont le seuil est $\mu_0 G(p)$ où $G(p) = \max(0, \min(p + p_0, p_\infty))$.

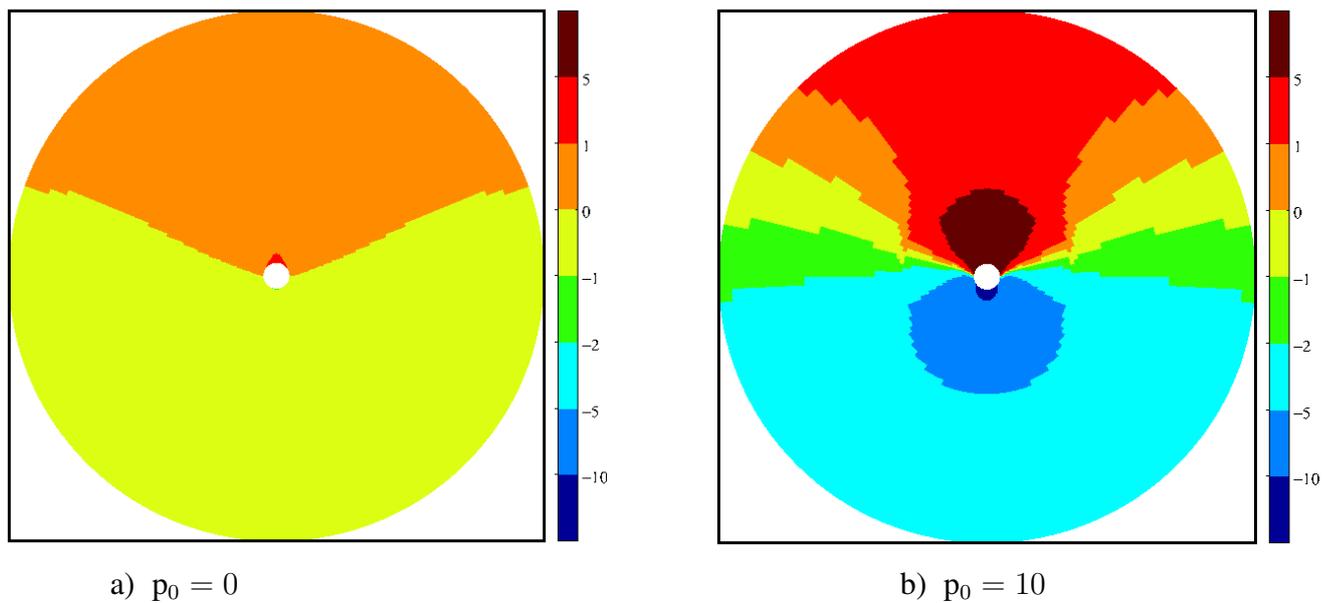


FIGURE 5.15 – Répartition de la pression autour d'un cylindre pour LVF(p_0).

Cette fonction $G(p)$ caractérise l'effet de plasticité. Alors, la pression p joue un rôle important sur le comportement d'écoulement de cette pâte : visqueux ou plastique. Ainsi, la figure 5.15 décrit la répartition

de la pression autour d'un cylindre. La pression est positive devant le cylindre, tandis qu'elle est négative derrière le cylindre. Trois motifs d'écoulement peuvent être constatés :

1. pour des pressions négatives, derrière le cylindre, un comportement newtonien ;
2. pour des pressions positives et négligeables, devant et loin du cylindre, un comportement de Bingham à seuil $\mu_0 p_0$;
3. pour des pressions positives et fortes, devant le cylindre, un comportement de Bingham à seuil $\mu_0 p_\infty$.

(p_0, μ_0)	$(0, 0.5)$	$(10, 0.5)$
E	$9,335.10^{-5}$	$4,078.10^{-4}$
$\ p\ _{\infty, \Omega_{f,h}}$	15,92	57,28

TABLE 5.4 – Moyenne d'énergie dissipée \bar{E} où $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ et la norme $\|p\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ pour trois p_∞ différentes $p_\infty = 100$, $p_\infty = 500$ et $p_\infty = 1000$.

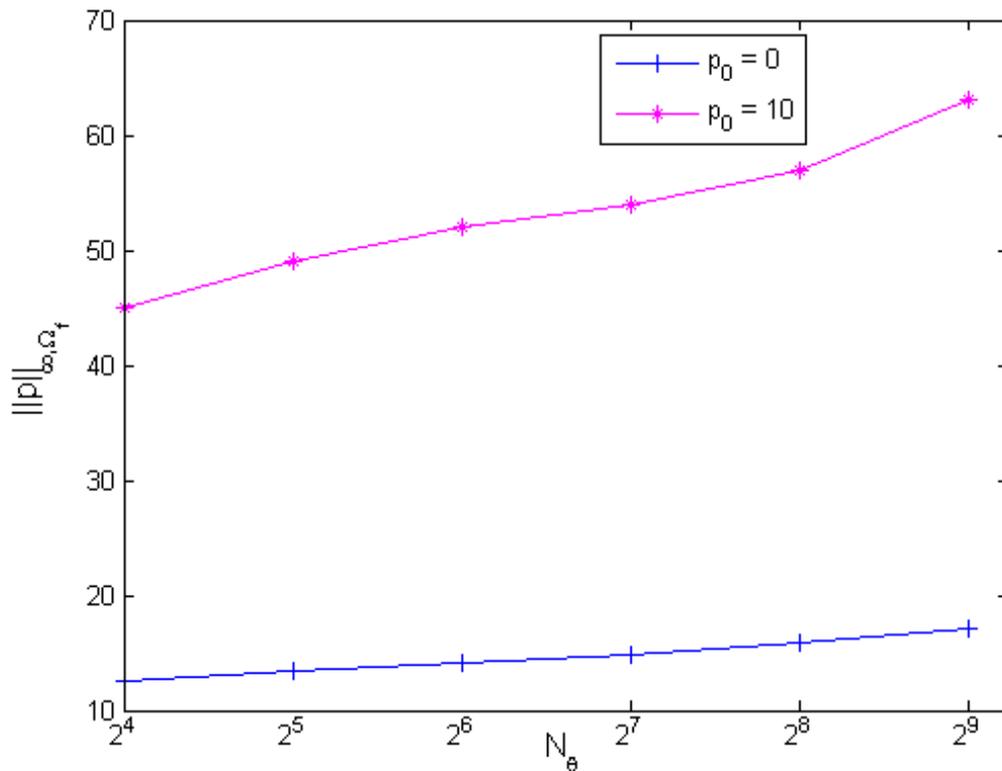


FIGURE 5.16 – Norme infinie $\|p\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ de la pression p en fonction du maillage N_θ .

Les simulations numériques et plus particulièrement le tableau 5.4 montrent, pour trois p_∞ différentes ($p_\infty = 100, 500, 1000$), que la moyenne d'énergie dissipée $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ et la norme de la pression restent invariantes en fixant le couple (p_0, μ_0) . Egalement, l'évolution de la norme infinie

$\|p\|_{\infty, \Omega_{f,h}}$ de la pression en fonction du maillage N_θ pour deux pressions de référence est présentée dans la figure 5.16. Cette figure montre des courbes avec faible croissance. Leurs pentes sont respectivement $3,6 \cdot 10^{-2}$ et $1 \cdot 10^{-2}$ pour $p_0 = 0$ et $p_0 = 10$. Ceci souligne que la pression p est bornée. Par conséquent, p_∞ n'agit pas sur ce type d'écoulement.

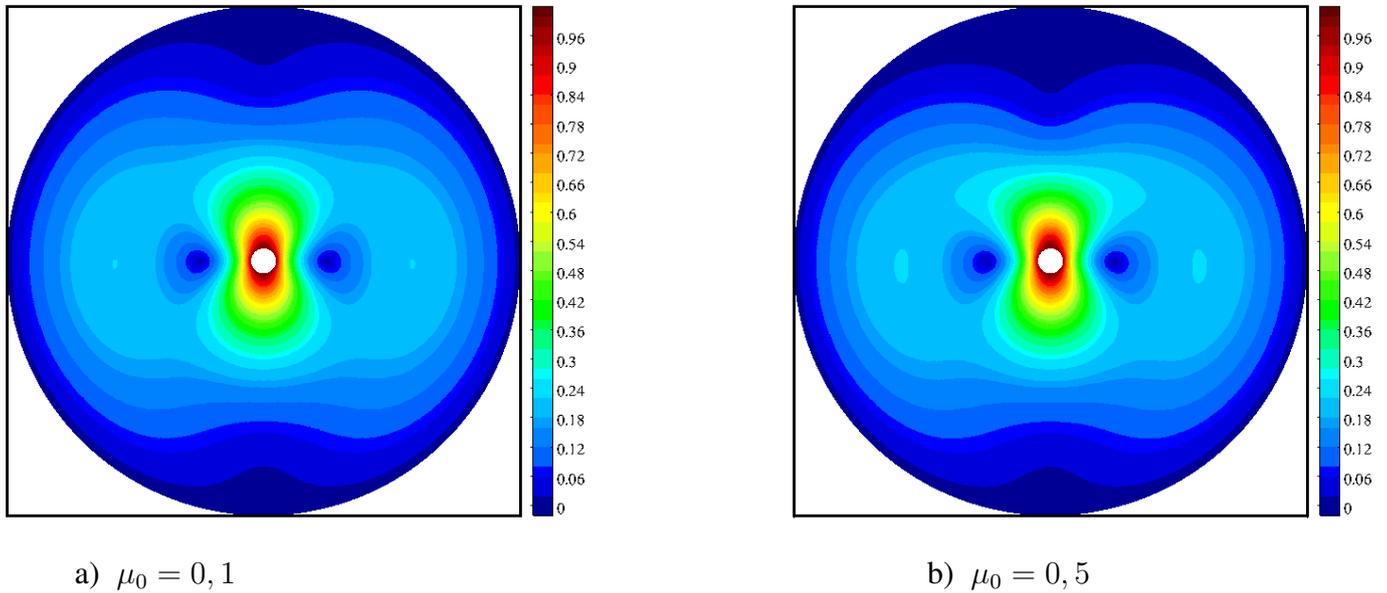


FIGURE 5.17 – Cartes des vitesses pour LVF(0) pour deux coefficients de friction μ_0 .

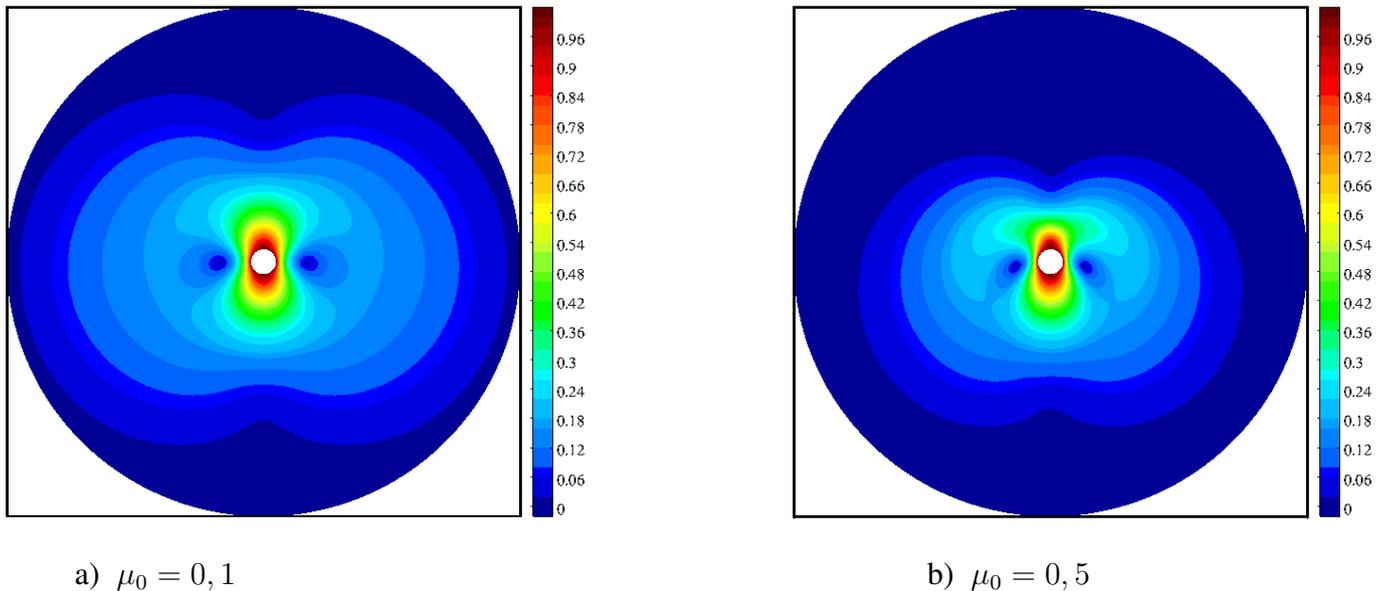


FIGURE 5.18 – Cartes des vitesses pour LVF(10) pour deux coefficients de friction μ_0 .

Le rôle du coefficient de friction μ_0 sur la cinématique d'écoulement est analysé. On fixe une pression de référence p_0 à zéro et deux nombres visqueux $\mu_0 = 0.1$ et $\mu_0 = 0.5$. D'après la figure 5.17, l'enveloppe est peu sensible à μ_0 . De plus, pour une pression de référence différente de zéro, en particulier $p_0 = 10$, la

figure 5.18 montre que l'enveloppe diminue lorsque μ_0 augmente. Ces éléments soulignent que le produit $p_0\mu_0$ agit sur le motif d'écoulement. Cependant, la figure 5.19 décrit l'évolution globale des différentes zones rigides en fonction de la pression de référence p_0 en fixant le coefficient de friction $\mu_0 = 0.5$. On remarque que la symétrie horizontale n'existe pas, cela est due à la discontinuité du comportement. En effet, d'après la figure 5.15, d'une part, la pression est négative derrière le cylindre, on est donc dans un régime de comportement newtonien. D'autre part, la pression est positive devant le cylindre, ceci implique

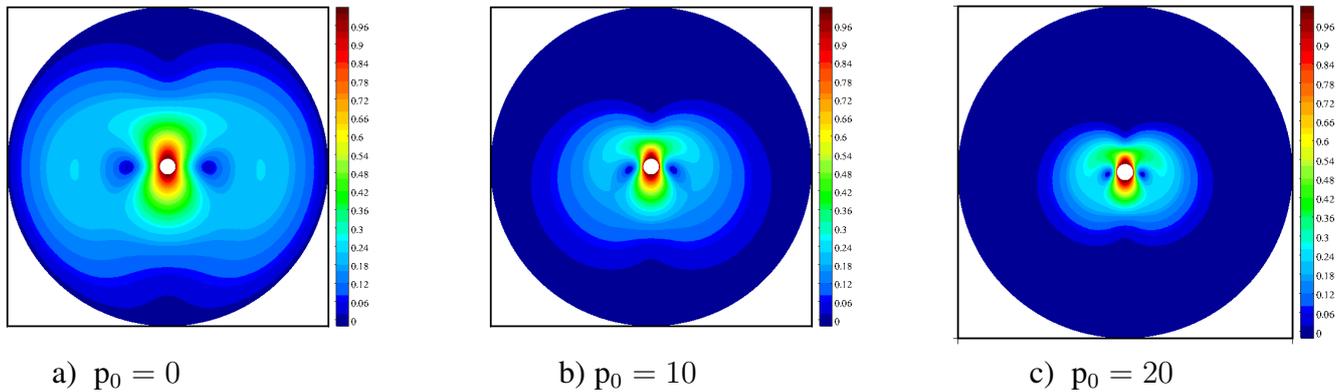


FIGURE 5.19 – Cartes des vitesses de $LVF(p_0)$ en fonction de pression de référence p_0 .

un comportement viscoplastique frictionnel. De plus, l'enveloppe augmente en taille lorsque p_0 diminue. En effet, d'après la figure 5.15, on constate que loin du cylindre la pression p devient négligeable devant $\mu_0 p_0$ donc le seuil devient $\mu_0 p_0$ et un comportement de type Bingham se manifeste.

Finalement, on conclut que :

1. seul le produit $p_0\mu_0$ agit sur le motif d'écoulement et dans la suite μ_0 est fixé à 0.5 ;
2. pour tout $p_0 \neq 0$, un comportement de type fluide à seuil $\mu_0(p_0 + p)$ se produit pour des pressions positives. Ceci permet de dire que le paradoxe de Stokes [50] n'existe pas pour ces matériaux.

5.2.6 Comparaison avec un fluide viscoplastique

Les résultats décrits précédemment mettent en évidence des écoulements de fluides à seuil. Nous constatons que la cinématique d'écoulement présente de zones distinctes dans la carte de la norme de vitesse, comme montrées dans la figure 5.20 :

1. une zone déformée entoure le cylindre.
2. une seule zone rigide, en forme de pointe, est située sur l'axe de l'écoulement et collée à la proue du cylindre.
3. deux zones rigides ovales sont situées à l'intérieur de la zone déformée,
4. une zone plastique qui contient la zone déformée.

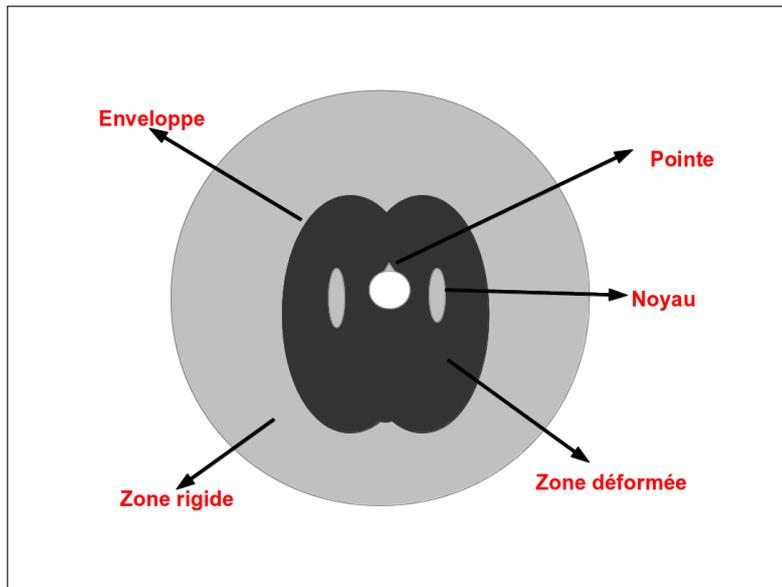


FIGURE 5.20 – Représentation schématique des différentes zones de l'écoulement de $LVF(p_0)$ autour d'un cylindre : zones déformées en gris foncé et zones rigides en gris clair.

Contrairement aux fluides de Bingham (voir la figure 5.13), l'existence de deux pointes et la symétrie horizontale n'existent pas dans ce type des matériaux (LVF). Cela est due donc à la dépression derrière le cylindre et à la discontinuité du comportement. Egalement, nous remarquons deux motifs d'écoulement au

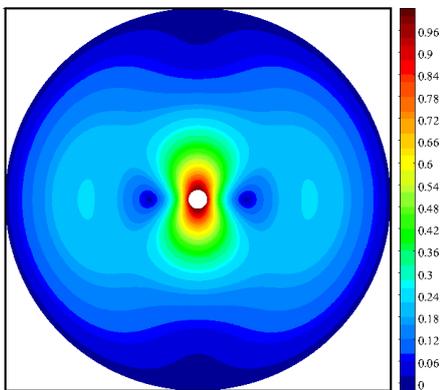


FIGURE 5.21 – Carte de la vitesse pour un fluide newtonien.

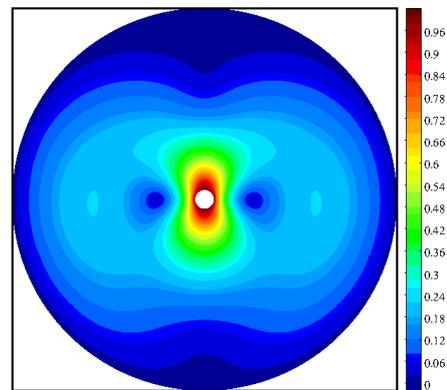
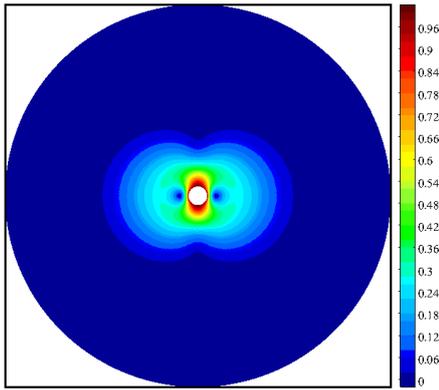
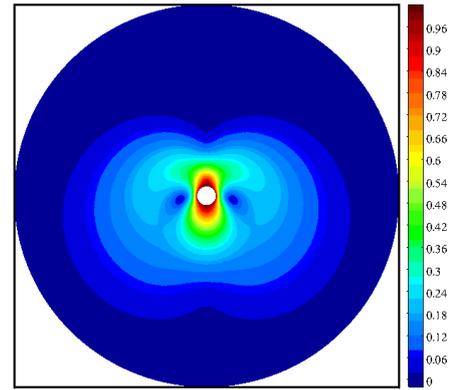


FIGURE 5.22 – Carte de la vitesse pour $LVF(p_0)$ avec $p_0 = 0$ et $\mu_0 = 0.5$.

$p_0 = 0$ et pour $p_0 \neq 0$. Pour $LVF(p_0 = 0)$, on observe une cinématique proche de celle d'un fluide newtonien d'après les figures 5.21 et 5.22. En outre, le tableau 5.5 fait apparaître que la dissipation moyenne d'énergie augmente en fonction de p_0 . De plus, la moyenne de la dissipation d'énergie pour un fluide newtonien égale à $4,709 \cdot 10^{-5}$, est plus faible que celle du matériau $LVF(0)$ ($E_{LVF(0)} = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ et sa moyenne égale à $9,335 \cdot 10^{-3}$). De manière plus générale, on constate que la cinématique d'écoulement de $LVF(p_0)$ (voir par exemple la figure 5.24) semble proche de celle d'un fluide de Bingham de seuil noté $Bi(p_0)$ où $Bi(p_0)$ est le nombre de Bingham tel que la différence entre la cinématique de $LVF(p_0)$ et la cinématique d'un fluide de Bingham de seuil $Bi(p_0)$ tend vers zéro. En particulier, si on néglige l'effet de la pression p dans le paramètre de seuil on constate alors que $Bi(p_0) = \mu_0 p_0$ (voir la figure 5.23). On peut

FIGURE 5.23 – Carte de la vitesse pour un fluide de Bingham à seuil $Bi = 5$.FIGURE 5.24 – Carte de la vitesse pour $LVF(p_0)$ avec $p_0 = 10$ et $\mu_0 = 0.5$.

p_0	0	1	5	10	15	20
\bar{E}	$9,335.10^{-3}$	$1,183.10^{-2}$	$2,398.10^{-2}$	$4,078.10^{-2}$	$5,705.10^{-2}$	$6,666.10^{-2}$

TABLE 5.5 – Moyenne de la dissipation d'énergie $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ en fonction de la pression de référence p_0 .

Bi	0	1	5	10	20	50	100
\bar{E}	$4,709.10^{-5}$	$2,141.10^{-3}$	$1,070.10^{-2}$	$3,21.10^{-2}$	$4,28.10^{-2}$	$1,070.10^{-1}$	$2,141.10^{-1}$

TABLE 5.6 – Moyenne de la dissipation d'énergie $E = D(u)_{II}^2 + BiD(u)_{II}$ en fonction de nombre de Bingham.

donc supposer que $Bi(p_0)$ existe pour tout $p_0 \geq 0$. La recherche de $Bi(p_0)$ est un objet d'un futur travail. Cependant, d'après les tableaux 5.5 et 5.6, pour Bi assez grand, la moyenne de la dissipation d'énergie devient plus importante pour $LVF(p_0)$ que pour son fluide de Bingham de seuil Bi . On peut donc supposer qu'il existe une valeur critique $p_{0,c}$ telle que le coût énergétique de $LVF(p_0)$ soit supérieur à celui du fluide de Bingham cinématiquement équivalent si $p_0 < p_{0,c}$, et inférieur sinon.

5.2.7 Coefficient de traînée

De manière similaire au fluide de Bingham, on peut calculer le coefficient traînée à partir de sa définition :

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{1}{R_i} \int_{\Gamma_i} (\sigma_{tot} n) e_y ds = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{1}{R_i} X \quad (5.4)$$

où $X = \int_{\Gamma_i} (\sigma_{tot} n) e_y ds$ et $\sigma_{tot} = \sigma - pI$ avec I l'opérateur d'identité.

On a que $u = 0$ sur C_e et $u = (0, 1)$ sur C_i , d'après la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} X &= \int_{\partial\Omega_f} (\sigma - pI) n u dX \\ &= \int_{\Omega_f} (div(\sigma) - \nabla p) u dX + \int_{\Omega_f} p div(u) dX + \int_{\Omega_f} \sigma : D(u) dX \end{aligned} \quad (5.5)$$

De plus, $\int_{\Omega_f} (\text{div}(\sigma) - \nabla p)u \, dX = 0$ et $\int_{\Omega_f} p \, \text{div}(u) = 0$, ceci souligne que

$$X = \int_{\Omega_f} \sigma : D(u) \, dX = |\Omega_f| \bar{E}(u)$$

où Ω_f est le domaine d'écoulement situé entre les deux cylindres (voir la figure 5.2).

5.2.8 Conclusion

La faisabilité et la robustesse de la méthode de résolution numérique sont mises en évidence dans cette section. Nous avons observé la convergence de l'algorithme de résolution numérique. De plus, cette méthode de résolution n'est pas coûteuse au niveau de temps de calcul. Ainsi, la cinématique d'écoulement est étudiée en fonction des paramètres physiques. L'existence d'enveloppe et des zones rigides sont observées. Cependant, nous avons remarqué que la discontinuité de comportement qui induit une perte de symétrie horizontale. Finalement, on peut envisager que pour tout $p_0 > 0$, il existe un fluide de Bingham à seuil $B_i(p_0)$ cinématiquement équivalent à LVF(p_0). De plus, on a déduit que tout $p_0 > 0$, il n'existe pas de paradoxe de Stokes.

5.3 Application pratique : écoulement dans un malaxeur planétaire

5.3.1 Introduction

Cette section effectue une mise en contexte applicatif de la problématique générale de ce projet de recherche en étudiant numériquement la dynamique de l'écoulement dans un malaxeur planétaire. Ainsi, ce type d'écoulement consiste à mettre l'algorithme à l'épreuve d'un problème complexe et de tester son caractère opérationnel sur un problème concret. Une méthode de domaine fictif avec multiplicateur de frontière est mise en œuvre. C'est un moyen simple pour une première approche dans un malaxeur. De plus, l'approximation mixte en vitesse-pression est *iso* Q_2/Q_1^3 est considérée. Des simulations numériques sont présentées. Ces simulations mettent en relief des cinématiques différentes en fonction de la pression de référence p_0 . Les coûts énergétiques sont calculés et comparés au coût énergétique d'un fluide à seuil constant.

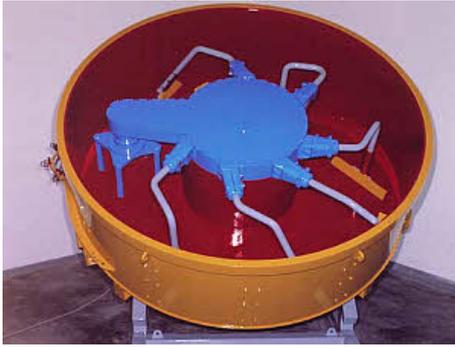


FIGURE 5.25 – Malaxeur annulaire.

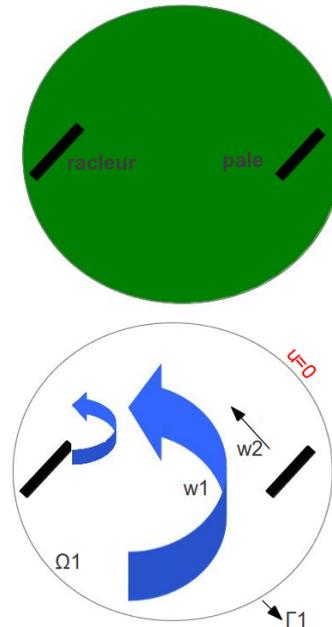


FIGURE 5.26 – Malaxeur planétaire.

5.3.2 Description du problème



FIGURE 5.27 – Malaxeur planétaire à une seule pale et à un seul train valseur.

FIGURE 5.28 – Représentation schématique d'un malaxeur planétaire composé par deux racleurs avec deux vitesses angulaires w_1 et w_2 respectivement et $u = 0$ sur Γ_1 .

Le malaxeur annulaire est le plus simple des malaxeurs à axe vertical (voir la figure 5.25). En centrale industrielle, Le malaxage permet l'élaboration du matériau béton. Il existe divers types de malaxeurs dans le domaine du génie civil. Deux géométries courantes pour la production industrielle de bétons sont : les malaxeurs annulaires et les malaxeurs planétaires (par exemple les figures 5.25 et 5.26). il est répandu pour

³Ici, *iso* Q_2 signifie une approximation Q_1 continue sur un sous-maillage raffiné une fois. Ce point est expliqué dans la sous-section 5.3.4.

des raisons économiques. Ses pales sont animées d'un simple mouvement de rotation autour du centre du malaxeur. Le malaxeur planétaire (voir la figure 5.26) est un autre exemple de malaxeur à axe vertical à action forcée. Il est constitué d'un racleur qui permet d'éviter l'accumulation de matériau sur la cuve et d'un système épicycloïdal que l'on nomme le train valseur ou l'étoile de malaxage. Ce dernier est animé d'un double mouvement de rotation. On peut trouver des malaxeurs planétaires dans le laboratoire qui contiennent une seule pale et un seul train valseur (voir la figure 5.27).

Dans nos travaux, nous nous intéressons à l'écoulement de la pâte viscoplastique frictionnelle en deux dimensions dans la géométrie plus complexe, malaxeur planétaire, mais à une seule pale (par souci de simplification). Le système modélisé est schématisé par la figure 5.28.

5.3.3 Fabrication de béton et les lois rhéologiques

Le travail de cette thèse s'intègre dans des travaux visant à mieux comprendre la fabrication de béton. Ceci nécessite le choix d'un modèle d'écoulement représentant le comportement du produit dans le malaxeur. Cette dernière peut être considérée comme une pâte fraîche, (béton frais), ou un milieu granulaire non-saturé, (étape intermédiaire dans la fabrication du béton frais à partir d'un matériaux granulaire humidifié). Depuis les travaux de [3], l'usage dans la communauté du génie civil est de considérer le béton frais (en fin de malaxage) comme une pâte viscoplastique homogène aux propriétés d'écoulement constantes. Ainsi, le fluide d'Herschel-Bulkley permet de prendre en compte plus finement le comportement du béton frais. Des modèles plus récents décrivent les pâtes granulaires à l'échelle des grains. Nous avons exposé dans le chapitre 2 des lois d'écoulement de la pâte granulaire.

Pour donner une idée plus large sur les propriétés d'écoulement pendant toute la durée du malaxage,

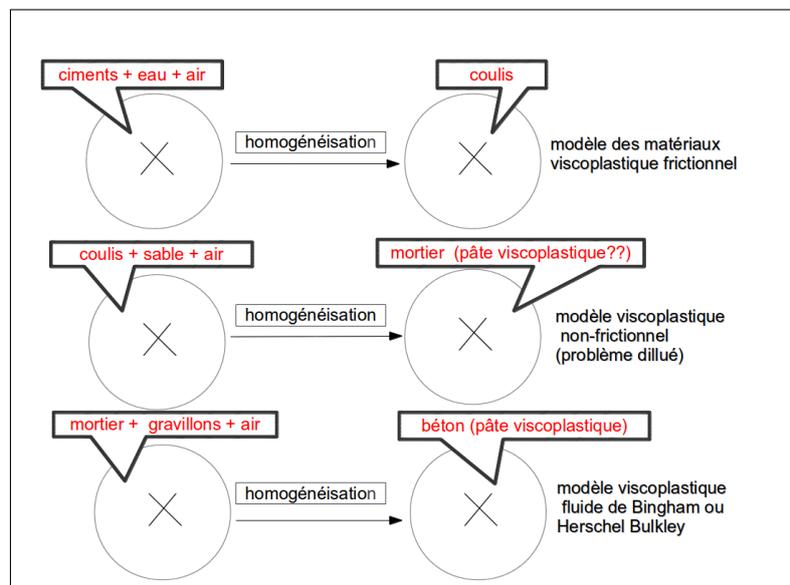


FIGURE 5.29 – Fabrication de béton en trois étapes et les modèles d'écoulements correspondants

la figure 5.29 présente une modélisation de la fabrication de béton dans un malaxeur. Cette fabrication se décompose en trois étapes, on représente pour chacune d'elles les modèles d'écoulement correspondants. La première étape se concentre sur l'homogénéisation de la pâte de ciment et d'eau qui nous permet d'obtenir la

pâte de coulis. Celle-ci peut être décrite comme un matériau viscoplastique frictionnel. Une loi est modélisée pour ce type de matériau dans la suite. La deuxième partie se consacre à l'homogénéisation de la pâte de coulis, de sable pour obtenir une pâte granulaire le mortier qui peut être considérée comme une pâte viscoplastique non frictionnelle. Elle peut être décrite comme des suspensions diluées (2.7). La troisième partie homogénéise la pâte de coulis et de mortier pour obtenir la pâte viscoplastique homogène (le béton) qui peut être modélisée comme un fluide de Bingham (2.3) ou fluide d'Herschel-Bulkley (2.4).

5.3.4 Discrétisation spatiale

La géométrie du malaxeur n'est pas discrétisée comme les autres géométries étudiées précédemment. L'existence des pales et leurs singularités sont les principales difficultés liées à la discrétisation spatiale. Alors, la méthode des éléments finis mixtes utilisée ultérieurement ne suffit pas. A cet effet, la méthode de domaine fictif avec multiplicateur de Lagrange de frontière et la méthode d'éléments finis mixtes *iso* Q_2 discontinue pour les contraintes λ^n , *iso* Q_2/Q_1 pour la vitesse u^n et la pression p^n sont mises en œuvre.

Soit $\Omega_1 \setminus P_1 \cup P_2$ le domaine de l'écoulement où P_1 et P_2 sont les deux pales du malaxeur, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ la cuve du malaxeur et Γ_1 la frontière de Ω_1 . Ce domaine est considéré comme un domaine perforé. On peut le plonger dans un autre domaine de forme plus simple dans lequel on considère un maillage structuré. Le domaine de calcul sera donc un nouveau domaine fictif noté Ω .

R. Glowinski *et al.* [51] sont les instigateurs des domaines fictifs. L'idée principale est de ramener la résolution d'un problème posé dans un domaine, plus grand, de forme plus simple Ω avec des conditions aux limites égales à zéro ($u = 0$ sur $\partial\Omega = \Gamma$) et permettant l'utilisation des maillages structurés. On peut réécrire l'algorithme proposé dans la sous-section 4.6.2 du chapitre 4 dans le cas continu dans le domaine Ω tout entier sous la forme suivante :

Trouver \bar{u} , \bar{p} et $\bar{\lambda}$ qui représentent les prolongements de u , p et λ sur Ω tels que :

$\forall 0 \leq n \leq N_{PF}$, $\bar{p}^n \in L^2(\Omega)$ données, trouver $\bar{u}^{n+1} \in H_0^1(\Omega)^N$ et $\bar{p}^{n+1} \in L^2(\Omega)$ tels que : $\forall 0 \leq k \leq I$

1- (a) $(\bar{u}^{k+1}, \bar{p}^{k+1}) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)$ solution du sous- problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta(\bar{u}^{k+1}) + \nabla(\bar{p}^{k+1}) = \text{div}(\mu_0 G(\bar{p}^n) \bar{\lambda}^k) + \bar{f} \text{ sur } \Omega \\ \text{div}(\bar{u}^{k+1}) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \bar{u}^{k+1} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \bar{u}^{k+1} = g \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

(b) Mise à jour du multiplicateur de la contrainte plastique

$$\begin{cases} \bar{\lambda}^{k+1} = P_\Lambda(\bar{\lambda}^k + \alpha \mu_0 G(\bar{p}^n) D(\bar{u}^{k+1})) \\ P_\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta}{\text{sup}(1, (\zeta)_{II})} \end{cases} \quad (5.7)$$

(c) Arrêt de K tel que $\|\bar{\lambda}^{K+1} - \bar{\lambda}^K\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_0$.

2- Mise à jour de la pression et de la vitesse : $\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^K$ and $\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^K$

3- Arrêt N_{PF} tel que $\|\bar{p}^{N_{PF}+1} - \bar{p}^{N_{PF}}\|_{0,\Omega} \leq \epsilon_1$.

où \bar{f} est le prolongement de f par zéro de f .

De plus, R. Glowinski *et al.* [52] ont développé une méthode de domaine fictif avec un multiplicateur de Lagrange de frontière. Cette méthode applique la condition limite sur Γ_1 en utilisant un multiplicateur de Lagrange λ^* , c'est-à-dire que si on suppose : $\bar{u}^{k+1} = g$ sur Γ_1 alors le problème Stokes (5.6) est équivalent au problème suivant :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^N, \text{ trouver } (\bar{u}^{k+1}, \bar{p}^{k+1}, \lambda^*) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N$$

$$\begin{cases} ((\bar{u}^{k+1}, v)) - (\bar{p}^{k+1}, \text{div}(v)) + \int_{\Gamma_1} \lambda^* \nu d\tilde{X} = (\mu_0 G(\bar{p}^n) \bar{\lambda}^k, D(v)) + (\bar{f}, v) \\ (\text{div}(\bar{u}^{k+1}), v) = 0 \\ \int_{\Gamma_1} \bar{u}^{k+1} \nu dS = \int_{\Gamma_1} g \nu dS \quad \forall \nu \in L^2(\Gamma_1)^N \end{cases} \quad (5.8)$$

λ^* est alors interprété comme :

$$\lambda^* = \left[\frac{\partial u}{\partial n} - pn \right]_{\Gamma_1}$$

où n est le vecteur normale sur Γ_1 .

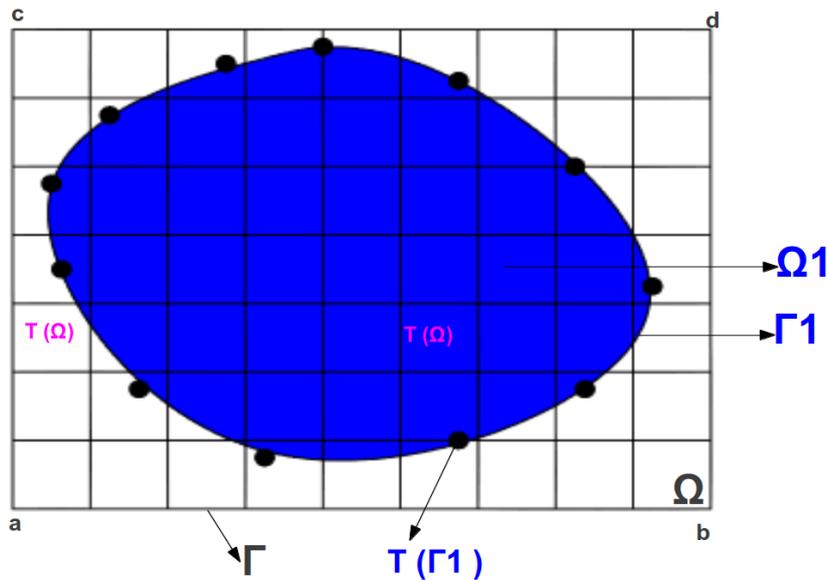


FIGURE 5.30 – Exemples du maillage avec une approche de multiplicateur de frontière.

On considère Ω un rectangle ($abcd$) schématisé sur la figure 5.30. Une discrétisation spatiale est choisie de la forme suivante :

Soient N_x et N_y tels que $1 \leq N_x < \infty$ et $1 \leq N_y < \infty$. On considère la subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq N_x+1}$ de $]x_a, x_b[$ et la subdivision $(y_j)_{1 \leq j \leq N_y+1}$ de $]y_a, y_c[$, avec $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $x_1 = x_a$, $x_{N_x+1} = x_b$, $\Delta y = y_{j+1} - y_j$, $y_1 = y_a$ et $y_{N_y+1} = y_c$. On suppose que $\Delta x = \Delta y = h$ c'est-à-dire $N_x = N_y = M$. On définit :

$$K_{ij} = ((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1}))$$

$$\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M} K_{ij}$$

Un maillage quasi uniforme est conçu pour le multiplicateur de Lagrange de la frontière Γ_1 . Les maillages $T(\Omega)$ et $T(\Gamma_1)$ sont représentés par la figure 5.30.

Après avoir défini le maillage, un passage en dimension finie est imposé. On considère un sous-maillage défini par : $\forall 1 \leq i, j \leq 2M$

$$K'_{i,j} = ((x'_i, y'_j), (x'_{i+1}, y'_j), (x'_i, y'_{j+1}), (x'_{i+1}, y'_{j+1}))$$

avec $x'_i = x_a + (i-1)\frac{\Delta x}{2}$ et $y'_j = y_a + (j-1)\frac{\Delta y}{2}$. On définit :

$$\Xi_h^{1,1}(\bar{\Omega}) = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}); (v_h)|_{K'_{i,j}} \in Q_1 \right\}$$

$$\Xi_h^{1,-1}(\bar{\Omega}) = \left\{ v_h; (v_h)|_{K'_{i,j}} \in Q_1 \right\}$$

Une méthode d'éléments finis mixtes est considérée : *iso* Q_2 pour la vitesse, Q_1 pour la pression et *iso* Q_2 discontinue pour les contraintes c'est-à-dire qu'on prend :

$$X_h(\Omega)^N = \Xi_h^{1,0}(\bar{\Omega})^N \cap H_0^1(\Omega)^N$$

$$P_h(\Omega) = X_h^{0,-1}(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega)$$

$$T_h(\Omega) = \Xi_h^{1,-1}(\Omega)^{N \times N}$$

D'après Brezzi et Fortin [30], cette approximation vérifie la condition inf-sup. De plus, d'après Putôt [53], lorsqu'on prend λ_h^* dans l'espace $X_h^{0,-1}(\Gamma_1)^N \cap L^2(\Gamma_1)^N$, la condition inf-sup est satisfaite pour le couplage vitesse-multiplicateur de frontière à condition que le maillage de frontière $T(\Gamma_1)$ ne soit pas trop raffiné par rapport à la grille de volume $T(\Omega)$. Le problème discret associé au problème (5.8) est donc bien posé.

Egalement, de manière similaire à la sous-section 5.1.2, cette discrétisation spatiale conduit à un système matriciel du sous-problème de Stokes (5.8) :

$$\begin{pmatrix} A & B^T & C^T \\ B & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h^k + 1 \\ p_h^k + 1 \\ \lambda^{h*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ \tilde{G} \end{pmatrix}$$

où C est la matrice de discrétisation de la trace sur Γ_1 et \tilde{G} un vecteur de discrétisation du terme $\int_{\Gamma_1} g \nu dS$ sur le maillage $T(\Gamma_1)$. Ce type de problème est résolu à l'aide de la méthode de gradient conjugué dual, comme dans la section 5.1.2 avec $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ au lieu de B .

L'intérêt de cette approche est de pouvoir conserver les propriétés d'un maillage cartésien du domaine fictif et d'un maillage auxiliaire qui permet d'imposer les conditions aux limites à la paroi de la cuve. Après la résolution de l'algorithme du point fixe en utilisant cette technique de discrétisation, le vecteur \bar{u} contient la solution approchée aux nœuds de discrétisation du maillage volumique cartésien du domaine fictif et le vecteur λ^* correspond aux valeurs du multiplicateur de Lagrange approché aux nœuds du maillage des

pales. Alors, on peut envisager que la solution approchée converge vers la solution continue du problème. Ainsi, les solutions u_h , p_h et $\pi_h(\lambda_h)$ sont récupérées à partir de la restrictions de \bar{u}_h , \bar{p}_h et $\pi_h(\bar{\lambda}_h)$ sur Ω_1 . Ces résultats doivent être pris avec précaution car la pression p est obtenue à faible précision. Cette méthode peut être alors moins précise. De plus, cette méthode impose une construction du maillage auxiliaire. Ceci la rend plus coûteuse. Il existe d'autres méthodes de discrétisation spatiale énoncées dans l'annexe B qui peuvent être plus précises et moins coûteuses dans ce type de géométrie. Une amélioration de la méthode de discrétisation est alors un objet d'un futur travail.

5.3.5 Les paramètres des simulations

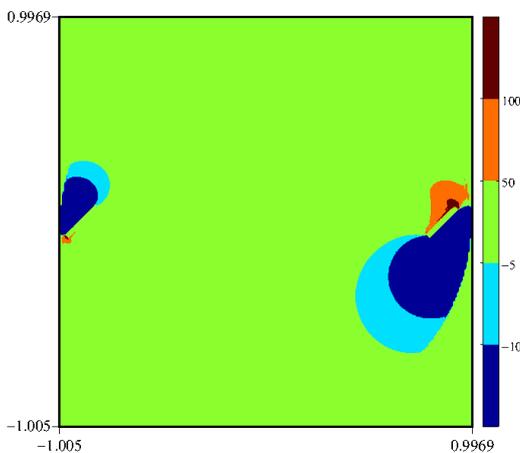


FIGURE 5.31 – Carte de la pression p dans un malaxeur planétaire.

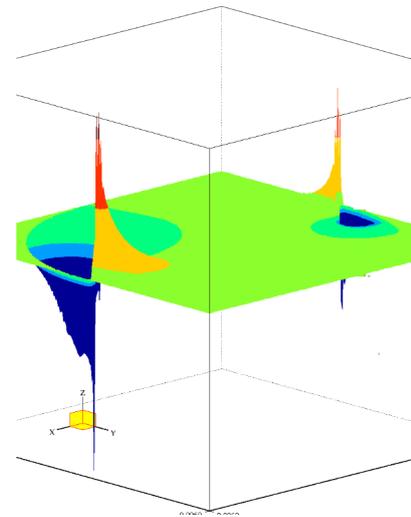


FIGURE 5.32 – Intensité de la pression devant et derrière la pale d'un malaxeur planétaire.

La pâte des matériaux viscoplastiques frictionnels est modélisée comme un fluide à seuil dont le seuil est $G(p)\mu_0$ où $G(p) = \max(0, \min(p + p_0, p_\infty))$. Deux types de comportements sont alors constatés : un comportement visqueux (un fluide newtonien) pour des pressions négatives et un comportement viscoplastique (un fluide Bingham) pour des pressions positives. La pression joue donc un rôle important sur le comportement de la pâte. Ainsi, elle caractérise le caractère viscoplastique de cette pâte. D'après, les figures 5.31 et 5.32, la pression dans un malaxeur est négative derrière la pale et positive devant la pale. A cet effet, les matériaux viscoplastiques frictionnels admettent : un comportement de type newtonien (seuil égal à zéro) derrière la pale et un comportement de type Bingham à seuil $\mu_0 \min(p + p_0, p_\infty)$ devant la pale. En outre, la pression est bornée dans les géométries étudiées précédemment (écoulement dans une géométrie de Couette et écoulement autour d'un cylindre) et la borne p_∞ n'est pas nécessaire. Mais, la figure 5.32 montre que la pression admet des singularités dues à l'effet des coins rentrants [54]. Ceci se localise devant les pales. Une troncature au voisinage de l'infini dans le paramètre de seuil est alors imposée.

De plus, d'après la figure 5.31, la pression p devient négligeable loin de la pale. On remarque encore que la pression est tronquée au voisinage de la pale. Alors, le seuil, dans ces cas, devient $\mu_0 p_0$ et $\mu_0 p_\infty$ respectivement et un comportement de type fluide à seuil constant se manifeste. Ces éléments soulignent donc que

les produits $\mu_0 p_0$ et $\mu_0 p_\infty$ agissent sur le motif d'écoulement ainsi que la troncature à zéro.

Ainsi, d'un côté, nous constatons que le produit $\mu_0 p_0$ pilote le motif global d'écoulement de la pâte. On fixe alors $\mu_0 = 0.5$ et deux pressions de références sont choisies $p_0 = 0$ et $p_0 = 10$ afin de comparer les motifs d'écoulement de ces matériaux $\text{LVF}(p_0)$ en fonction de p_0 . A cet effet, deux comportements sont obtenus loin de la pale : si $p_0 = 0$ ceci implique que le produit $\mu_0 p_0$ est nul et un comportement newtonien se manifeste et si $p_0 = 10$ ceci implique que le produit $\mu_0 p_0$ est égale à 5 et un comportement de Bingham à seuil 5 apparaît. Deux comparaisons sont présentées alors dans la troisième section : 1) $\text{LVF}(p_0 = 0)$ et un fluide newtonien et 2) $\text{LVF}(p_0 = 10)$ et un fluide de Bingham à seuil constant égal 5. D'un autre côté, d'une part, le produit $\mu_0 p_\infty$ survient localement au voisinage de la pale et n'influe pas sur le motif global d'écoulement de la pâte. D'autre part, le fluide de Bingham à seuil grand tend vers un motif limite. Pour cela, nous nous limitons dans la suite à prendre la borne à l'infini $p_\infty = 100$.

5.3.6 Résultats obtenus

Cette section consiste à examiner le comportement de la pâte granulaire viscoplastique frictionnelle et à tester la faisabilité et la robustesse de l'algorithme numérique proposé dans la section 5.3.4.

Test numérique

L'algorithme proposé dans la section 5.3.4 est une combinaison de deux algorithmes : algorithme $\text{ALVF}(\mu_0(q))$ (algorithme intérieur) et algorithme de point fixe (algorithme extérieur). Nous nous intéressons à résoudre l'algorithme d' $\text{ALV}(\mu_0(q))$ à une précision 10^{-4} . En pratique, ceci implique qu'il faut résoudre le sous-problème de Stokes avec une précision 10^{-7} pour éviter des problèmes de stabilité numérique.

Les courbes de résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega}$, les temps de calcul, les moyennes d'énergie dissipée et les indépendances de deux algorithmes sont présentés dans la suite en fonction de maillages $M \times M$ à une pression de référence fixée $p_0 = 0$.

La figure 5.33 montre l'évolution du résidu du point fixe $\|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega}$ en fonction de nombre d'itérations

M. cellules	(128, 128)	(256, 256)	(512, 512)
T_{calcul} temps de calcul	2.001×10^4	9.296×10^4	6.727×10^5
Moyenne d'énergie E	22.9	21.9	21.7

TABLE 5.7 – Temps de calcul et la moyenne d'énergie dissipée $E = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$ en fonction du maillage.

pour différents maillages M . Ces courbes décroissent rapidement dans les dix premières itérations jusqu'à atteindre 10^{-5} . On remarque qu'après la dixième itération, une variation locale se manifeste d'ordre 10^{-2} . Ceci peut être dû à l'instabilité numérique de l'arithmétique flottante. Cependant, on peut déduire que le résidu de l'algorithme de point fixe converge en quelques itérations. De plus, la figure 5.34 présente les courbes de nombre d'itérations de l'algorithme d'intérieur en fonction de nombre d'itérations de l'algorithme de point fixe. Ces courbes montrent que seules les cinq premières itérations du point fixe coûtent 1000 itérations de l'algorithme d'intérieur. Entre la cinquième et la dixième itération du point fixe, une

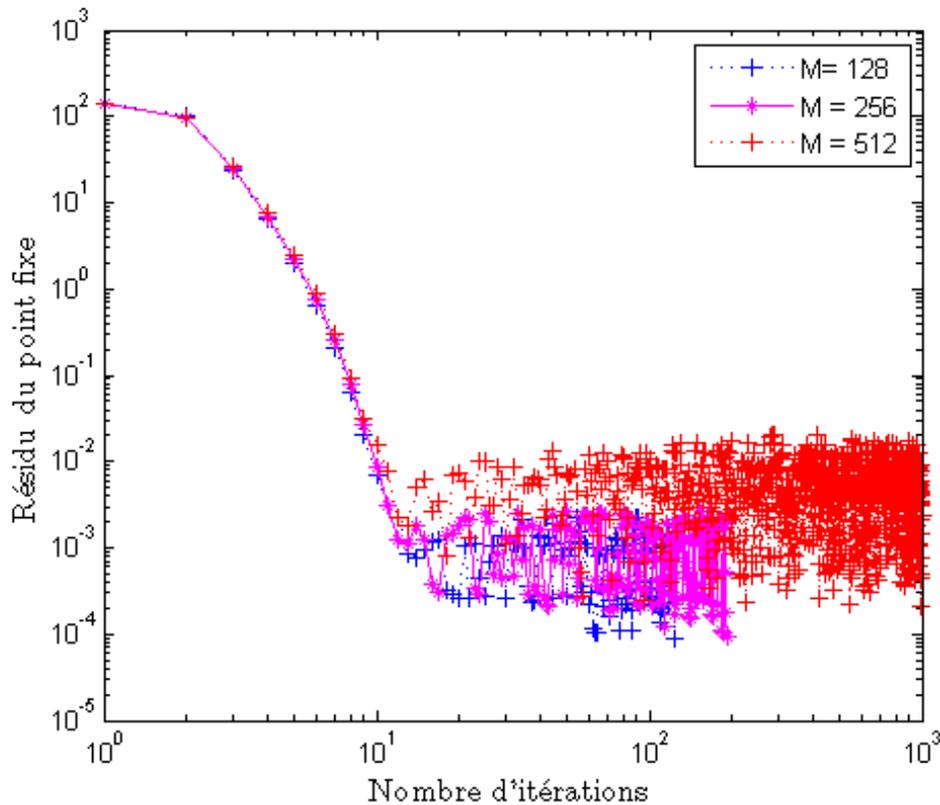


FIGURE 5.33 – Résidu du point fixe $p_f = \|p_h^{n+1} - p_h^n\|_{0,\Omega}$ pour différents maillages.

décroissance très rapide est remarquée. En outre, au-delà de la dixième itération du point fixe, l'algorithme d'intérieur effectue au plus deux itérations. Ceci met en évidence que seuls les premières itérations du point fixe sont coûteuses. On peut donc conclure de ces deux figures une convergence de notre algorithme indépendamment du maillage M . Par ailleurs, d'après le tableau 5.7, $M = 256$ est considéré satisfaisant pour les simulations de la suite, comme les variations de la moyenne de l'énergie sont assez petites pour M plus grand, c'est-à-dire les informations pour un maillage $M = 512$ ou un maillage $M = 256$ sont considérés similaires.

Comportement de LVF

Cette sous-section est dédiée à la description générale du comportement de la pâte viscoplastique frictionnelle dans un malaxeur planétaire. Comme on a mentionné dans la section 5.3.5, seul le produit $\mu_0 p_0$ agit sur le motif global d'écoulement. Deux choix sont proposés dans cette section : $p_0 = 0$ et $p_0 = 10$ à $\mu_0 = 0.5$. Alors, les cartes du taux de déformation $D(u)_{II}$, le déviateur des contraintes $\sigma = D(u) + \mu_0 G(p)\lambda$ et l'énergie dissipée $E = \sigma : D(u) = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$ sont présentés dans les simulations de la suite. Ces cartes montrent la cinématique de ces matériaux et la dissipation de l'énergie à un instant t dans un malaxeur planétaire pour deux pressions de référence. De plus, deux comparaisons sont établies :

- 1) la comparaison entre LVF($p_0 = 0$) et le fluide newtonien ;
- 2) la comparaison LVF($p_0 = 10$) et le fluide de Bingham à seuil $\mu_0 p_0 = 5$.

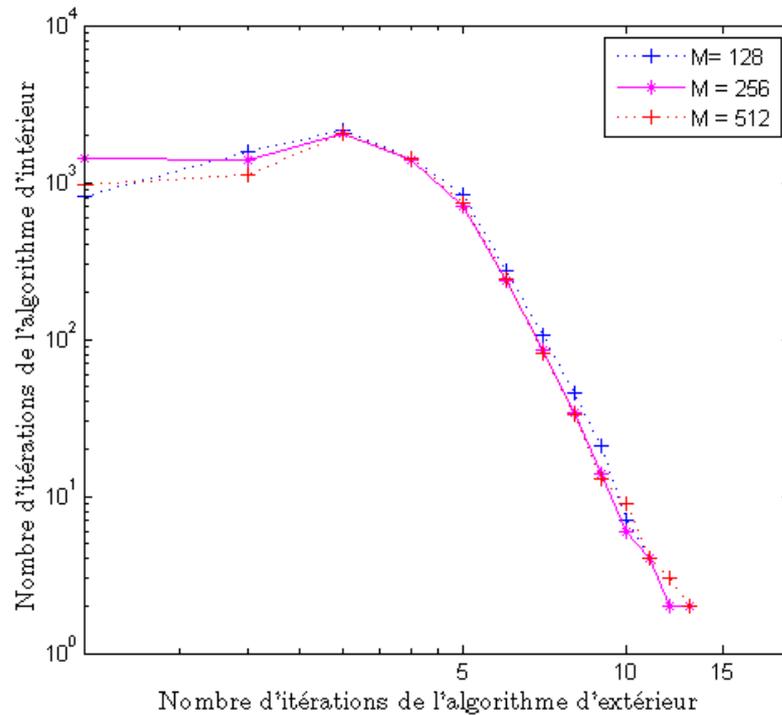


FIGURE 5.34 – Nombre d’itérations de l’algorithme $ALVF(\mu_0(q))$ en fonction de nombre d’itérations de l’algorithme du point fixe pour différents maillages.

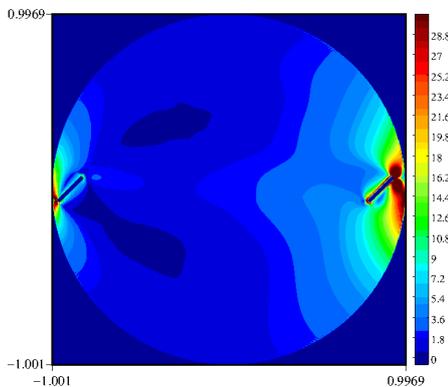


FIGURE 5.35 – Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 0)$.

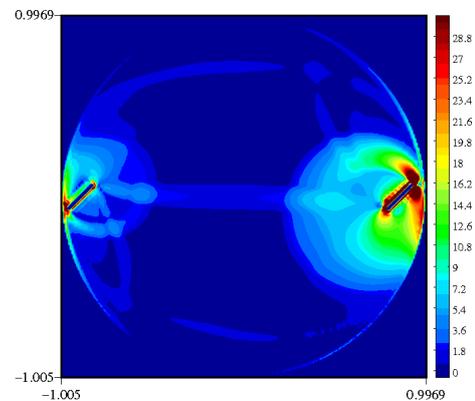


FIGURE 5.36 – Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 10)$.

Les figures 5.35 et 5.36 représentent deux motifs d’écoulement différents. On remarque que, d’une part, d’après la figure 5.35, si $p_0 = 0$, le motif d’écoulement de la pâte se propage devant et derrière les pales jusqu’à atteindre les zones rigides. D’autre part, d’après la figure 5.36, si $p_0 = 10$, le motif d’écoulement de la pâte se localise autour des pales sous forme de disques. De plus, une connectivité entre les deux pales est observée. Par ailleurs, des zones rigides apparaissent. Ceci montre d’un côté que $LVF(0)$ semble similaire à un fluide newtonien (voir les figures 5.37 et 5.38). D’un autre côté, $LVF(10)$ semble similaire à un fluide de Bingham à seuil σ_0 . Par exemple, si on prend $\sigma_0 = 5$, les figures 5.39 et 5.40 montrent deux motifs globaux proches. Donc, on peut envisager que pour $p_0 \neq 0$, le comportement global de $LVF(p_0)$ semble proche de

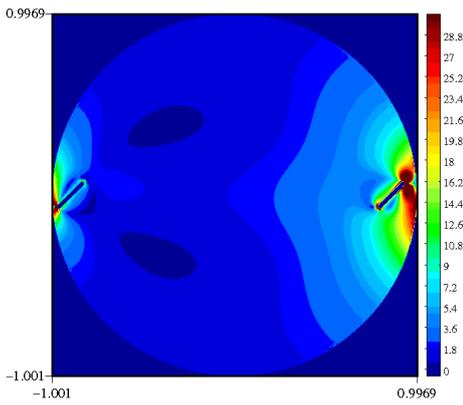


FIGURE 5.37 – Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 0)$.

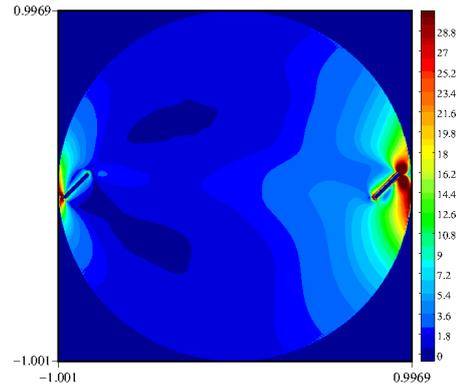


FIGURE 5.38 – Carte de taux de déformation d'un fluide newtonien.

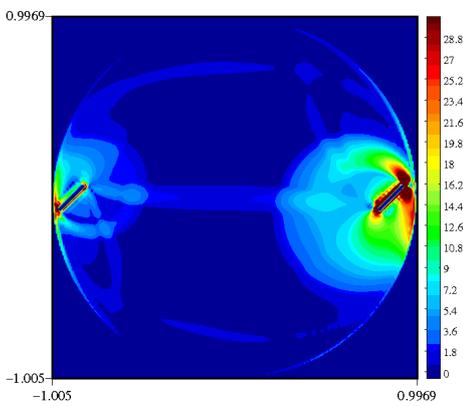


FIGURE 5.39 – Carte de taux de déformation pour $LVF(p_0 = 10)$.

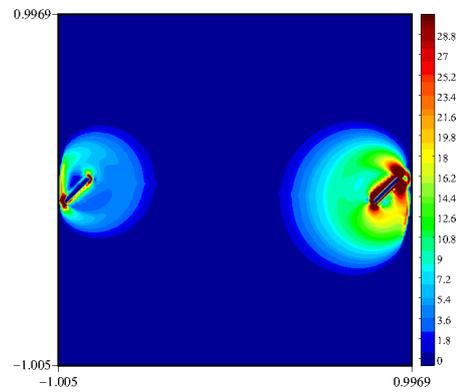


FIGURE 5.40 – Carte de taux de déformation d'un fluide de Bingham à seuil égale 5.

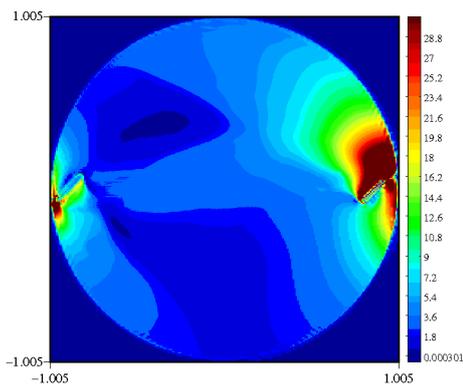


FIGURE 5.41 – Carte de contraintes du $LVF(p_0 = 0)$.

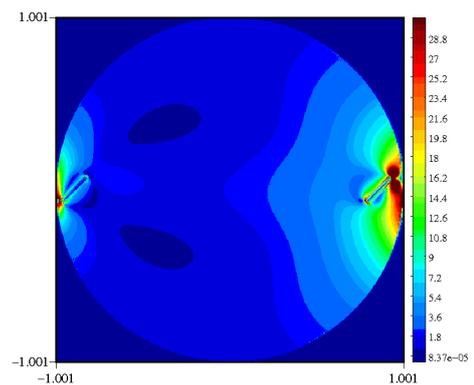


FIGURE 5.42 – Carte de contraintes d'un fluide newtonien.

celui d'un fluide à seuil.

Afin de étayer la comparaison pour $p_0 = 0$, les figures 5.41 et 5.42 décrivent les intensités de déviateur de contrainte du $LVF(p_0 = 0)$ et du fluide newtonien. Elles montrent des zones différentes devant la pale. En effet, d'une part le déviateur des contraintes pour $LVF(p_0 = 0)$ $\sigma = D(u) + G(p)\mu_0\lambda$ est composé par deux

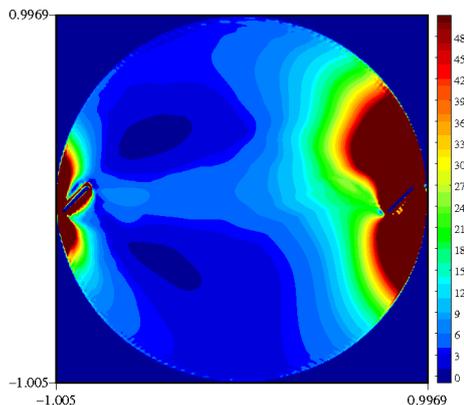


FIGURE 5.43 – Carte d’énergie dissipée pour LVF($p_0 = 0$).

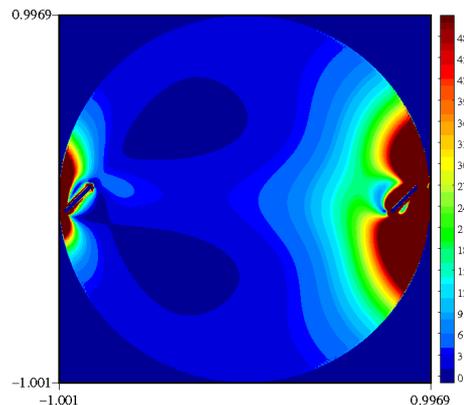


FIGURE 5.44 – Carte d’énergie dissipée pour un fluide newtonien.

parties : une partie $\sigma = D(u)$ derrière la pale et une autre $\sigma = D(u) + \min(p + p_0, p_\infty)\mu_0\lambda$. D’un autre part, le déviateur de contraintes pour un fluide newtonien est égale $\sigma = D(u)$. L’énergie dissipée pour un fluide newtonien, $E = \sigma : D(u) = D(u)_{II}^2$, montrée par la figure 5.44, a comme moyenne 13.666 tandis que l’énergie dissipée pour le modèle LVF($p_0 = 0$), $E = \sigma : D(u) = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) \cdot D(u)_{II}$, décrite par la figure 5.43, a comme moyenne 22.606.

Egalement, si $p_0 = 10$, dans les figures 5.45 et 5.46, les intensités de déviateur des contraintes pour LVF($p_0 = 10$). Pour LVF($p_0 = 10$), $G(p)$ est égale à zéro derrière les pales et le déviateur de contraintes de LVF($p_0 = 10$) est $\sigma = D(u)$, tandis que devant la pale, le déviateur de contraintes de LVF($p_0 = 10$) est $\sigma = D(u) + \mu_0 \min(p + p_0, p_\infty)$. Le déviateur de contraintes d’un fluide de Bingham est $\sigma = D(u) + \sigma_0\lambda$ où $\sigma_0 = 5$. De plus, l’énergie dissipée par le fluide de Bingham, $E = \sigma : D(u) = D(u)_{II}^2 + \sigma_0 D(u)_{II}$ où $\sigma_0 = 5$, d’après la figure (5.48), a comme moyenne 153.556 tandis que l’énergie dissipée pour LVF($p_0 = 10$), $E = \sigma : D(u) = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$, d’après la figure 5.47, a comme moyenne 129.235.

Ces résultats permettent d’envisager que d’une part, le temps de mélange de la pâte viscoplastique frictionnelle est le même qu’un fluide newtonien tandis qu’elle a besoin de plus d’énergie. D’autre part, si $p_0 \neq 0$, le temps de mélange de la pâte viscoplastique frictionnelle à une pression de référence p_0 est proche d’un fluide de Bingham mais le fluide de Bingham à seuil $\mu_0 p_0$ a besoin de plus d’énergie que LVF(p_0).

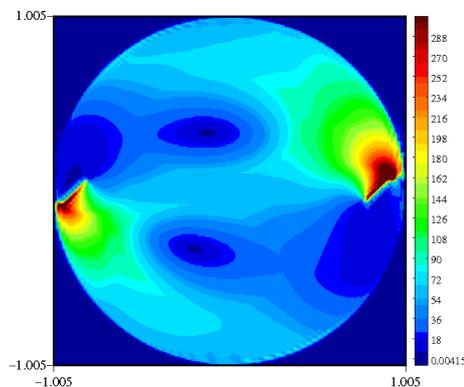


FIGURE 5.45 – Carte de contraintes du LVF($p_0 = 10$).

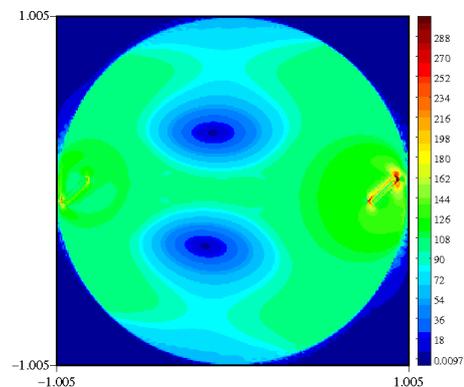


FIGURE 5.46 – Carte de contraintes d’un fluide de Bingham à un seuil $\sigma_0 = 5$.

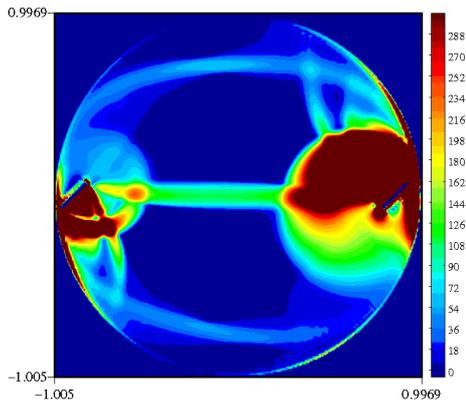


FIGURE 5.47 – Carte d'énergie dissipée du LVF($p_0 = 10$).

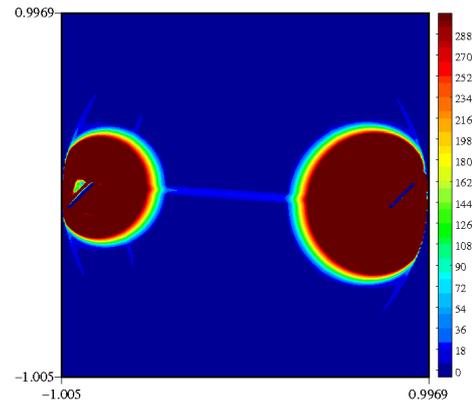


FIGURE 5.48 – Carte d'énergie dissipée d'un fluide de Bingham à seuil $\sigma_0 = 5$.

5.3.7 Conclusion

Cette section a permis une première approche expérimentale de la pâte viscoplastique frictionnelle dans une géométrie complexe, celle d'un malaxeur planétaire. Nous avons montré la convergence et la robustesse de l'algorithme numérique proposé. Ainsi, nous avons observé des cinématiques de comportement proche à des fluides de Bingham seuil constant. Cependant, des énergies plus efficaces pour un fluide de Bingham à seuil $\mu_0 p_0$ que LVF(p_0) sont remarquées.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail, à l'interface entre les mathématiques appliquées et la physique, s'articule autour d'une première approche théorique et numérique d'une loi viscoplastique frictionnelle.

Une loi particulière viscoplastique frictionnelle est développée, notée $LVF(p_0)$. Cette loi dépend de la pression locale décalée d'une pression de confinement p_0 donnée et tronquée pour rester à la fois positive et inférieure à une valeur maximale prescrite. Elle peut être considérée comme une troncature d'une loi de Bingham avec un critère de plasticité de Drucker-Prager. A titre d'exemple, $LVF(p_0)$ peut décrire une section horizontale d'une colonne verticale des matériaux viscoplastiques frictionnels. Dans ce cas, p_0 est considérée proportionnelle à la profondeur de la section choisie.

Nous avons proposé une méthodologie de résolution de $LVF(p_0)$ qui s'appuie sur la construction d'un point fixe dans un problème intermédiaire, problème à seuil variable, noté $LVF(\mu_0(q))$. L'existence de ce point fixe nous conduit à la construction d'un algorithme de résolution numérique qui combine deux algorithmes : algorithme du problème intermédiaire (algorithme intérieur) et algorithme de point fixe (algorithme extérieur).

On a prouvé que toute solution (u, p) du problème continu $LVF(p_0)$ est bornée. De plus, (u, p) décrit un ensemble convexe et localement compact. On a calculé explicitement une solution analytique qui est unique dans une géométrie de Couette.

Cependant, le cadre théorique de $LVF(p_0)$ n'étant pas totalement éclairci, certaines difficultés mathématiques sont ressorties.

La résolution théorique et numérique du problème à seuil variable $LVF(\mu_0(q))$ est exposée. Nous avons prouvé, pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$, l'existence de $(u(q), p(q), \lambda(q)) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \times \Lambda$ solution de ce

problème. Nous avons construit un algorithme de résolution de type Uzawa et nous avons démontré la convergence de cet algorithme. Cependant, une dépendance de l'application $p(q)$ et $\lambda(q)$ sous la forme suivante :

$$\|p(q_1) - p(q_2)\|_{0,\Omega} \leq M\|q_1 - q_2\|_{0,\Omega} + \mu_0\|G(q_2)\|_{0,\Omega}\|\lambda(q_1) - \lambda(q_2)\|_{0,\Omega} \quad (6.1)$$

est obtenue. Ceci montre qu'il est difficile d'appliquer un théorème de point fixe sur le problème intermédiaire pour prouver l'existence de la solution de $\text{LVF}(p_0)$.

Ensuite, un problème LVF à seuil régularisé est présenté. L'existence de (u, p) solution unique de ce problème est prouvée pour tout $0 < \mu_0 \ll 1$. Ainsi, une convergence forte de l'algorithme proposé pour la résolution numérique est démontrée. Mais, une difficulté dans le passage à la limite du problème $\text{LVF}(p_0)$ à seuil régularisé au problème continu $\text{LVF}(p_0)$ est détectée.

Donc, la résolution théorique du problème $\text{LVF}(p_0)$ continu reste un problème ouvert. En outre, un passage au problème LVF discret est indispensable en pratique. On a pu démontrer qu'il existe une solution du problème $\text{LVF}(p_0)$ à dimension finie. On a considéré l'algorithme de résolution numérique en combinant l'algorithme du problème intermédiaire et l'algorithme de point fixe. On a constaté que cet algorithme converge.

Numériquement, une approximation spatiale est considérée bilinéaire-constante pour la vitesse et la pression et bilinéaire discontinue pour les contraintes sur les domaines annulaires. Un code fortran est développé et validé par des comparaisons avec la solution analytique d'un problème de type Couette. L'ensemble de la méthode de résolution est en particulier validé pour le problème de Bingham.

En outre, la convergence et la robustesse sont mises en évidence pour l'écoulement autour d'un cylindre. Les résultats des simulations numériques effectuées mettent en relief la cinématique d'écoulement. L'existence d'une zone déformée, des zones rigides et d'une zone plastique est observée. Contrairement aux fluides de Bingham, la symétrie horizontale n'est pas observée. Ceci est dû à la dépression derrière le cylindre. De plus, ces simulations ont montré que seul le produit $\mu_0 p_0$ agit sur le motif d'écoulement. L'absence d'un paradoxe de Stokes est postulée pour tout p_0 différente de zéro.

Finalement, la faisabilité de l'algorithme de résolution numérique est abordée dans le cas d'un malaxeur planétaire. Pour $\text{LVF}(0)$, on a observé une cinématique proche de celle d'un fluide newtonien. De plus, on a remarqué que la dissipation moyenne d'énergie pour un fluide newtonien est plus faible que celle du matériau $\text{LVF}(0)$. De manière plus générale, on a constaté l'existence de valeurs p_0 non-nulles, telles que la cinématique d'écoulement de $\text{LVF}(p_0)$ semble proche de celle d'un fluide de Bingham de seuil noté $Bi(p_0)$.

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont donné lieu à des communications internationales [55] et [56]. Ainsi, ces travaux ouvrent des perspectives à différents niveaux :

L'étude théorique et numérique de la solution du problème $\text{LVF}(p_0)$ dans des régions déformées où la so-

lution est supposée unique. Les estimations d'erreur locales dans la méthode d'éléments finis mixtes ainsi que la régularité de la solution pourraient alors être investiguées.

Une autre piste de poursuite consisterait à améliorer le modèle $LVF(p_0)$ quand $p \leq 0$ en prenant en compte des modèles de suspension diluée comme le modèle 2.7. En outre, il est important le même travail d'analyse pour les matériaux granulaires secs. Une difficulté supplémentaire est alors que la viscosité dépend de la pression (et pas seulement le seuil). Une généralisation des résultats à un modèle frictionnel de type Herschel-Bulkley permettrait de prendre en compte des coefficients a , b , c , β et γ différents de 1 dans les modèles du chapitre 2.



Résolution du modèle de Signorini-Coulomb

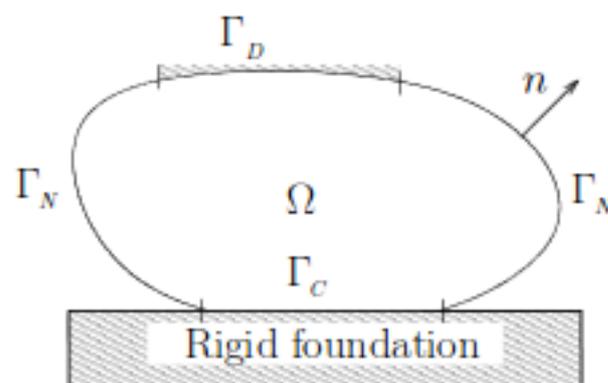


FIGURE A.1 – Corps élastique en contact de friction, figure extraite de [1].

Le modèle de Signorini-Coulomb [57] traite l'effet de frottement sur les parois. Ceci est exprimé par une loi de Coulomb sur les frontières de contact. C'est un problème d'élasticité avec friction (voir la figure (A.1)). On peut envisager que ce type de problème est similaire au nôtre. Cependant, le modèle LVF examine la friction qui envahit le domaine tout entier et non seulement la frontière.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N où $N = 2$ ou 3 avec une condition de Neumann sur Γ_N et une condition de Dirichlet sur Γ_D . Sur Γ_C la frontière de contact entre le corps rigide de frottement statique de Coulomb entre les deux surfaces est imposé.

Définition A.0.1 (*Modèle de Signorini-Coulomb*)

Le problème consiste à trouver u une vitesse de déplacement telle que :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u) = AD(u) & \text{dans } \Omega \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma_D \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec σ est le tenseur de déviateur de contrainte, $D(u)$ le taux de déformation, A le coefficient d'élasticité symétrie et élliptique, f et g des fonctions données.

Les hypothèses suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} u_N &= u \cdot n, \quad u_T = u - u_N n \\ \sigma_N(u) &= (\sigma(u)n) \cdot n, \quad \sigma_T = \sigma(u)n - \sigma_N(u)n \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La condition sur la frontière T_C est exprimée par : $u_N \leq 0$, $\sigma_N(u) \leq 0$ et $u_N \sigma_N(u) = 0$.

Soit F le coefficient de friction, la condition de Coulomb avec friction s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{si } u_T = 0 & \text{ alors } |\sigma_T(u)| \leq -F\sigma_N(u) \\ \text{si } u_T \neq 0 & \text{ alors } \sigma_T(u) = -F\sigma_N(u) \frac{u_T}{|u_T|} \end{aligned}$$

Soient les espaces des Hilbert suivants :

$$V_1 = \{v \in H^1(\Omega)^N, v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \text{ et } K = \{v \in V_1, v_N \leq 0\}$$

Les auteurs de [1] ont écrit une inéquation variationnelle de Lions sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a(u, v - u) + j_1(F\sigma_N(u), v_T) - j_1(F\sigma_N(u), u_T) \geq l(v - u) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

avec $a(u, v - u) = \int_{\Omega} AD(u) : D(v - u) dX$ est une forme bilinéaire bicontinue et symétrie sur $V_1 \times V_1$, $l(v - u) = \int_{\Omega} f(v - u) dX + \int_{\Gamma} g(v - u) d\Gamma$ est une forme linéaire continue sur V_1 et $j_1(F\sigma_N(u), v_T) = - \langle F\sigma_N(u), v_T \rangle$ avec F lipshtizienne continue sur Γ_C .

L'intérêt de ce type de formulation est la présence d'une contrainte de frontière dans la fonctionnelle j_1 . Ceci semble analogue au système variationnel LVF mentionné dans le chapitre suivant mais au lieu que la contrainte soit sur la frontière, elle est appliquée dans l'ouvert tout entier.

Les résultats d'existence de ce problème peuvent être trouvés dans Necas, Jarucek et Haslinger [58], en supposant que le coefficient de friction est suffisamment petit. Certaines multi-solutions pour un grand coefficient de friction sont représentées par Hild dans [59] et [60]. Une nouvelle technique est réalisée par Laborde et Renard [1]. Ceci est basé sur la construction d'un point fixe dans un problème intermédiaire où $\sigma_N(u)$ donnée. Les auteurs de [1] ont montré l'existence du point fixe pour le problème discret. Le problème de point fixe dans le cas continu reste un problème ouvert.

Etat de l'art sur les méthodes numériques cartésiennes

L'objectif de cet annexe est de présenter les principes généraux des méthodes numériques cartésiennes les plus utilisées pour résoudre des problèmes elliptiques dans des domaines perforés.

Pour simplifier la présentation des différentes méthodes adaptées à la résolution des problèmes dans les domaines perforés, on se place dans le cadre du problème modèle du Poisson, avec des conditions au bord du type Dirichlet homogène.

Etant donnée f dans $L^2(\Omega \setminus \bar{B})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on propose de résoudre les problèmes suivants :

$$I_D \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}) \text{ telle que} \\ \alpha u + \Delta(u) = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \bar{B} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

La formulation variationnelle du problème I_D s'écrit comme suit :

$$I_V \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \alpha uv dX + \int_{\Omega} \nabla(u) \nabla(v) dX = \int_{\Omega} f v dX \quad \forall v \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

L'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes précédents sont assurées grâce au théorème de Lax-Milgram [61]. Dans ce qui suit, nous présentons les méthodes numériques adaptées à la résolution de tels problèmes. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : celles utilisant des maillages non-structurés et celles s'appuyant sur une grille cartésienne. L'inconvénient majeur du maillage non-structuré est surtout la perte de la structure cartésienne, ce qui rend difficile la construction de préconditionneur classique et exclut l'utilisation de solveurs rapides. Par ailleurs la dégénérescence des éléments de la triangulation, qui se manifeste dans le cadre des problèmes instationnaires où les trous sont mobiles, impose un remaillage du domaine à chaque pas de temps. Ce qui est une tâche très coûteuse, surtout en 3D.

B.1 Domaines fictifs

On peut plonger le domaine perforé dans un autre domaine de forme plus simple dans lequel on considère un maillage structuré. Le domaine de calcul sera donc un domaine fictif. La différence entre elles est surtout la manière avec laquelle les trous sont pris en compte, la précision de calcul, la facilité d'implémentation.

R. Glowinski *et al.* [51] sont les instigateurs des domaines fictifs. L'idée principale est de ramener la résolution d'un problème elliptique posée dans un domaine, plus grand, de forme plus simple et permettant l'utilisation des maillages structurés. Pour présenter ces méthodes, on se place dans le cadre du problème modèle I_D et de sa formulation variationnelle. Au lieu de considérer le problème dans le domaine perforé, on le réécrit dans tout le domaine Ω , qui est supposé être un ouvert polygonal et simplement connexe. Notons \bar{f} dans $L^2(\Omega)$. On peut réécrire la formulation variationnelle sous cette forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^* \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \alpha u^* v + \int_{\Omega} \nabla(u^*) \nabla(v) = \int_{\Omega} \bar{f} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^* = 0 \quad \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Deux questions se posent :

1. Quel est le meilleur choix du prolongement de \bar{f} du second membre f ?
2. Comment imposer les conditions au bord des trous B ?

Pour répondre à la première question, le choix naturel de l'extension de \bar{f} du second membre est de prolonger f par 0 dans B . L'estimation d'erreur entre la solution du problème continu et celle du problème discret dépend de la régularité de \bar{u} dans le domaine fictif, donc elle dépend de la régularité de \bar{f} . En conclusion, le choix trivial de l'extension du second membre f ne semble pas le meilleur. La deuxième question évoque le point le plus délicat des méthodes de domaines fictifs. En effet, la géométrie du domaine n'est pas totalement prise en compte par le maillage qui ignore les trous. D'autre part, la qualité de la solution est liée à l'extension du second membre f et il ne suffit pas seulement que ce prolongement soit régulier. En effet, ceci peut être illustré par un exemple simple en $1D$: prenons $\Omega =]0; 1[$; $B =]a; b[$; $\partial B = a \cup b$ et $f = 1$, ainsi que l'extension $\bar{f} = 1$. On veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta(u) = -f \\ u(0) = u(1) = u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Il est clair que la solution u peut être représentée par deux paraboles. Quant à la solution u^* de la formulation domaines fictifs, elle est définie sur tout le segment $]0; 1[$ en prenant \bar{f} comme un second membre et elle est représentée par trois paraboles. Bien que l'extension de f est assez régulière sur tout le domaine. Cela n'empêche pas l'apparition d'un saut de la dérivée normale à travers a et b . Alors il faut utiliser une approche qui fait varier $\bar{f}|_B$ afin de minimiser le saut de la dérivée normale.

R. Glowinski *et al.* [52] ont développé une méthode de domaine fictif avec un multiplicateur de Lagrange de frontière. Cette méthode est développée dans le chapitre 5.3. Elle impose un maillage supplémentaire du bord de domaine perforé. Cependant, cette méthode semble coûteuse surtout en $3D$ ou dans les domaines dont les bords sont irréguliers.

B.2 Méthode de la frontière élargie

R.Celorrio *et al.* [62] ont introduit une méthode adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans un domaine perforé. La méthode de la frontière élargie a été introduite dans le but de résoudre le problème de POISSON dans le domaine perforé. L'idée de base est proche de celles de domaines fictifs. En effet on remplace le problème initial posé dans un domaine perforé dans un domaine de forme plus simple. Dans celui-ci on considère un maillage cartésien permettant d'utiliser des solveurs rapides.

L'idée principale est de remplacer le problème initial posé dans un domaine perforé en deux sous-domaines : un problème global et un autre local. Le problème global est posé dans un domaine, contenant le domaine perforé, de forme simple permettant la construction d'un maillage cartésien. Le problème local est défini dans un voisinage des trous dans lequel on peut considérer un maillage fin pour mieux approcher la solution. On se place dans le cadre du problème modèle I_D (B.1) avec Ω désigne le domaine de \mathbb{R}^N , sa frontière Γ . Les trous dans le domaine sont représentés par une collection de sous domaines réguliers, notés B . On se limite au cas d'un seul trou. On introduit une frontière artificielle γ^* autour du bord du trou B et on note w le sous domaine délimité par γ et γ^* . Le vecteur normal sortant au bord de $\Omega \setminus \bar{B}$ est noté n . Celui sortant $\gamma = \partial B$ est noté n^* . Notons que $n^* = n$. Le domaine w est un domaine borné et la frontière régulière ayant deux composantes connexes γ et γ^* .

On s'intéresse à la résolution du problème modèle I_D . Le principe est de remplacer le problème initial posé dans le domaine perforé par un couple de sous problèmes l'un posé sur tout Ω et l'autre sur le couronne w . Notons \bar{f} le prolongement de f par 0 sur B .

Le problème I_D est équivalent à ce couple de problèmes : trouver $(u^*; v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(w)$ telle que :

$$J_D \begin{cases} a \begin{cases} \alpha v - \Delta(v) = f & \text{dans } w \\ v|_\gamma = u|_{\gamma^*} \end{cases} \\ b \begin{cases} \alpha u^* - \Delta(u^*) = \bar{f} + \frac{\partial u}{\partial n} \delta_y & \text{dans } \Omega \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Les problèmes I_D et J_D sont équivalents dans le sens que si u est une solution de I_D alors le couple $(u^*; v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(w)$ est une solution de J_D et si $(u^*; v) \in H_0^1(\Omega) \times H_\gamma^1(w)$ est un solution de J_D alors u est un solution de I_D . En plus le problème J_D est équivalent à un problème fixe. Alors numériquement, on trouve l'algorithme suivant : Etape 1 :

Calcul de $u_{h|\gamma_{h^*}}^{*k-1}$ sur $\gamma_{h^*}^*$ et définie par :

$$K_{h^*}^k = \theta K_{h^*}^{k-1} + (1 - \theta) u_{h|\gamma_{h^*}}^{*k-1} \quad (\text{B.6})$$

où $\gamma_{h^*}^*$ est une approximation de la surface γ^* .

Etape 2 : Calcul de $v_{h^*}^k \in V_{h^*}$ la solution de :

$$\begin{cases} \alpha \int_w v_{h^*}^k w \, dX + \int_w \nabla(v_{h^*}^k) \nabla(w) \, dX = \int_w f w \, dX \quad \forall w \in V_{h^*} \\ w|_{\gamma_{h^*}^*} = 0 \\ v_{h|\gamma_{h^*}^*}^{*k-1} = K_{h^*}^{k-1} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Etape 3 : Calcul de :

$$\epsilon_{h^*}^k = \left(\frac{\partial v_{h^*}^{*k}}{\partial n} \right)_{|\gamma^*} \quad (\text{B.8})$$

Etape 4 : Résolution globale.

Calcul de $u^k \in U_h$, solution de

$$\alpha \int_w u_h^k w \, dX + \int_w \nabla(u_h^k) \nabla(w) \, dX = \int_w \bar{f} w \, dX + \int_w \epsilon_{h^*}^k w \, dX \quad \forall w \in V_{h^*} \quad (\text{B.9})$$

B.3 Méthode d'interface immergée

La méthode d'interface immergée (IIM) [63] a été développée pour améliorer la précision de la méthode de la frontière immergée (IBM). Cette méthode a été introduite pour la résolution de problèmes sur des domaines irréguliers. La méthode IIM est basée sur une discrétisation des équations sur une grille cartésienne à l'aide d'un schéma aux différences finies. Le principe général consiste à discrétiser le domaine fictif à l'aide d'une grille cartésienne et à répartir les noeuds de discrétisation en deux familles selon leur position par rapport à l'interface où se situent les sauts : noeuds réguliers et noeuds irréguliers.

Un schéma aux différences finies est appliqué aux noeuds réguliers de la grille. Aux noeuds irréguliers, un schéma aux différences finies localement modifié est déterminé. Ce schéma est basé sur le même principe que le schéma standard mais possède des coefficients appropriées et un terme source corrigé afin de tenir compte des conditions de sauts sur l'interface. Les coefficients ainsi que le terme correction sont obtenus à l'aide de développements en séries de Taylor autour de l'interface.

Cependant, cette approche nécessite la connaissance de la localisation de la frontière.

On s'intéresse à la résolution du problème modèle I_D :

$$I_D \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}) \text{ telle que} \\ \alpha u + \Delta(u) = f \quad \text{dans } \Omega \setminus \bar{B} \\ u_\gamma = 0 \\ (u_X)_\gamma = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

On suppose qu'on travaille dans la dimension 1, alors γ est un point, on le note α .

On immerge notre intervalle de départ dans un intervalle plus simple. On le divise en N sous intervalle $]x_{i-1}; x_i[$ tel que $x_i = x_{i-1} + h$ où h désigne le pas de discrétisation. On suppose que $x_{j-1} < \alpha < x_j$.

Le schéma numérique calculé pour un point régulier :

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad (\text{B.11})$$

la détermination du schéma aux différences finies au voisinage des points irrégulier x_j et x_{j+1} donne :

$$\begin{cases} \gamma_{j,1}u_{j-1} + \gamma_{j,2}u_{j-2} + \gamma_{j,3}u_{j+1} - k_j u_j = f_j + C_j \\ \gamma_{j+1,1}u_j + \gamma_{j+1,2}u_{j+1} + \gamma_{j+1,3}u_{j+2} - k_{j+1}u_{j+1} = f_{j+1} + C_{j+1} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_{j,1} = \frac{1 - \frac{x_j - \alpha}{h}}{D_j}, & \gamma_{j+1,1} = \frac{1}{D_{j+1}} \\ \gamma_{j,2} = \frac{-2 - \frac{x_j - 1 - \alpha}{h}}{D_j}, & \gamma_{j+1,2} = \frac{-2 - \frac{x_j - 2 - \alpha}{h}}{D_{j+1}} \\ \gamma_{j,3} = \frac{1}{D_{j+1}}, & \gamma_{j+1,3} = \frac{1 - \frac{x_{j+1} - \alpha}{h}}{D_{j+1}} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

où

$$\begin{cases} D_j = h^2 + \frac{(x_{j-1} - \alpha)(x_j - \alpha)}{2} \\ D_{j+1} = h^2 + \frac{(x_{j+2} - \alpha)(x_{j+1} - \alpha)}{2} \\ C_j = \gamma_{j,3}(x_{j+1} - \alpha)C \\ C_{j+1} = \gamma_{j+1,1}(\alpha - x_{j+1})C \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

B.4 Eléments finis immergés

Dans cette méthode une classe de nouvelles méthodes d'éléments finis, appelés éléments finis immergés (IFE), est développée pour résoudre les problèmes elliptiques d'interface avec des conditions de saut non homogènes. Cette méthode consiste à reformuler le problème pour obtenir un problème avec un saut homogène équivalent tout en utilisant des fonctions de base modifiées au voisinage de l'interface [64].

Une caractéristique importante de cette méthode d'éléments finis, c'est que leurs mailles peuvent être indépendantes de l'interface entre les différents matériaux. On considère la résolution numérique du problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \Delta(u) = f \text{ dans } \Omega \setminus \bar{B} \\ u_\Gamma = g, u_\gamma = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{|\Gamma} = Q \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Nous décrivons maintenant comment résoudre numériquement la méthode d'éléments finis immergés.

Tout d'abord on multiplie l'équation (B.15) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω^s ($s = +$ ou $-$). On obtient, en utilisant la formule du Green, la relation suivante : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega^s} \nabla(u) \nabla(v) dX - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v dX = \int_{\Omega^s} f \cdot v \quad (\text{B.16})$$

ceci nous donne : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega^s} \nabla(u) \nabla(v) dX = \int_{\Gamma} Q v dX + \int_{\Omega^s} f v \quad (\text{B.17})$$

avec $Q = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Omega^+ \cap \Gamma} - \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Omega^- \cap \Gamma}$. Pour décrire la solution par la méthode IFE pour le problème d'interface, nous commençons avec une maille T_h du domaine. Soit

$$N_h = \{X_i \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } ; X_i \text{ le noeud de } T_h\}$$

$$N_h^0 = N_h \cap \Omega, \quad N_h^b = N_h \cap \Gamma$$

$$T_h^i = \{T_h \in T_h \text{ tel que } T \text{ est un élément d'interface}\}$$

Ensuite nous définissons l'espace de dimension finie de la méthode IFE comme suit :

$$S_h(\Omega) = \text{span}\{\phi_i, i \in N_h\}$$

et on définit la solution approchée :

$$u_h(X) = \sum_{j \in N_h^0} u_j \phi_j(X) + \sum_{j \in N_h^b} g(X_j) \phi_j(X) + \sum_{T \in T_h^i} q_j \phi_{T,j}(X) \quad (\text{B.18})$$

Enfin en utilisant la forme faible (B.17), on obtient : $\forall i$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_h^0} \sum_{T \in T_h^i} \int_T \nabla(\phi_i) \nabla(\phi_j) dX &= \int_{\Gamma} Q \phi_i dX + \int_{\Omega} f \phi_i dX - \\ \sum_{j \in N_h^b} \sum_{T \in T_h^i} \int_T \nabla(\phi_i) \nabla(\phi_j) g(X_j) dX &- \sum_{T \in T_h^i} q_T \int_T \nabla(\phi_i) \nabla(\phi_{T,j}) dX \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.5 Schéma aux différences finies corrigées

Gibou *et al.* [65] ont introduit une méthode qui est basée sur le schéma de différences finis, modifié par un terme de correction qui agit sur les sommets proches du bord de la trou B . on considère le problème I_D (B.1), où B est un trou dans Ω de frontière γ . Alors on peut considérer que le frontiere divise l'ouvert Ω en deux ouverts Ω^+ et Ω^- . On discrétise notre équation par la méthode des différences finies tout en modifiant l'équation sur le noeud de la frontière. On suppose qu'on travaille dans le dimension 1 (en prenant l'intervalle $]0, 1[$ et a le trou et en le suppose $a = 1$). On effectue une subdivision de l'intervalle $]0, 1[$ en I intervalle (x_{i-1}, x_i) de longueur h mais la seule différence que au point $x_a = x_{i+1}^G = x_i + \theta.h$. Alors nous cherchons une suite de valeurs $(u_i)_{i=0, \dots, I}$ approchant les valeurs $(u(x_i))_{i=0, \dots, I}$ par le schéma aux différences finies :

$$\begin{cases} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f_i \quad \forall 0 < i < I \\ \frac{u_{I-1} - 2u_I + u_{I+1}^G}{h^2} = f_I \\ u_0 = \alpha \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Le schéma est modifié au voisinage de u_I par une fonction constante ou bien linéaire ou bien quadratique. Ce système est résolu dans tout le domaine en utilisant un solveur rapide et la prise en compte de l'obstacle est faite par une correction introduite comme terme source.

Formellement, on peut dire que le schéma est d'ordre 1 au voisinage du trou et d'ordre 2 ailleurs.



Méthode d'éléments finis mixtes Q_1/Q_0 pour le problème de Stokes

Nous résumons dans cette annexe les principaux résultats d'optimalité des erreurs d'estimations développés par les travaux de [37] d'une méthode d'éléments finis mixtes, bilinéaire pour la vitesse et constante par morceaux pour la pression, pour le problème de Stokes.

C.1 Préliminaire

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Le modèle de Stokes décrit le mouvement d'un fluide incompressible occupant Ω . On considère le problème stationnaire de Stokes sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ -\Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div}(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{dans } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

où u est la vitesse de fluide, p la pression et f une force extérieure.

On définit le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ sous la forme suivante :

$$(w, v) = \int_{\Omega} wv \, dX$$

Le problème (C.1) peut être écrit sous la forme d'un système variationnel mixte en vitesse-pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ (\nabla u, \nabla v) - (p, \text{div}(v)) = (f, v) \\ (r, \text{div}(u)) = 0 \quad \forall r \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Ainsi, le problème (C.2) est équivalent à un problème de minimisation :

$$\frac{1}{2}(\nabla v, \nabla v) - (f, \nabla v) \rightarrow \inf, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N, \operatorname{div}(v) = 0 \quad (\text{C.3})$$

On introduit les espaces d'éléments finis $M_h \subset H_0^1(\Omega)^N$ et $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$. On formule le système variationnel mixte (C.2) en dimension finie sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in M_h \times Q_h \text{ telle que } \forall v \in M_h \\ (\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \operatorname{div}(v)) = (f, v) \\ (r, \operatorname{div}(u_h)) = 0 \quad \forall r \in Q_h \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Une autre approche numérique est de considérer le schéma résultant du problème de minimisation (C.3) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h \text{ telle que } \forall v \in W_h(\Omega) \\ (\nabla u_h, \nabla v) = (f, v) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

où W_h est l'espace de dimension finie dans $H_0^1(\Omega)^N$ à divergence nul.

Ce schéma implique moins d'inconnues. Cependant, il n'est pas pratique de trouver un espace W_h à divergence nul. Pour cela, on utilise la méthode de pénalisation. Soit $\epsilon > 0$, le problème (C.5) est équivalent à : trouver $u_h^\epsilon \in M_h$ telle que :

$$(\nabla u_h^\epsilon, \nabla v) + \frac{1}{\epsilon}(\operatorname{div}(u_h^\epsilon), \operatorname{div}(v)) = (f, v) \quad \forall v \in M_h \quad (\text{C.6})$$

Théoriquement, cette approximation a besoin d'un paramètre ϵ à petite valeur. De plus, le problème de pénalisation (C.6) est équivalent au problème d'éléments finis mixtes en u_h et p_h :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h^\epsilon \in M_h \text{ et } p_h \in Q_h \text{ telles que} \\ (\nabla u_h^\epsilon, \nabla v) - (\operatorname{div}(v), p_h^\epsilon) = (f, v) \quad \forall v \in M_h \\ \epsilon(p_h^\epsilon, q) + (\operatorname{div}(u_h^\epsilon), q) = 0 \quad \forall q \in Q_h \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Théoriquement, les espaces M_h et Q_h ne peuvent pas être choisis arbitrairement. L'existence d'une unique u_h et p_h est prouvée si la condition LBB 3.5 est satisfaite. En pratique, la méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire-constante ne satisfait pas la condition LBB c'est-à-dire β dépend de pas de discrétisation h . Cependant, les travaux numériques de [38] montrent que le choix de ces éléments agissent avec la vitesse bilinéaire et la pression constante après filtrage dans les modes parasites de la pression.

Le plan de cette annexe est alors : tout d'abord, on prouve l'ordre optimal d'erreur d'estimation pour le problème abstrait de Stokes. Ensuite, on se consacre à la méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire-constante en vitesse-pression. Finalement, on vérifie que cette méthode conduit à une erreur optimale d'estimation.

C.2 Erreur abstraite

Soient M et Q deux espaces d'Hilbert. On considère $a : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, continue et α -elliptique sur M et $b : M \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire et continu. On introduit l'opérateur $B : M \rightarrow Q'$ et son adjoint $Q^t : Q \rightarrow V$ qui vérifient la relation suivante :

$$b(v, q) = \langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} = \langle v, B^t q \rangle_{M' \times M} \quad \forall v \in M, \forall q \in Q$$

où Q' et M' sont les espaces duaux de Q et M respectivement.

De manière générale, on considère $f \in M'$ et $g \in \text{Im } B \subset V$, le problème abstrait de Stokes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle_{M' \times M} \quad \forall v \in M \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Sous la condition d'inf-sup suivante :

$$\exists k_0 > 0 \text{ tel que } \forall q \in Q, \sup_{w \in M} \frac{b(w, q)}{\|w\|_V} \geq k_0 \|q\|_Q \quad (\text{C.9})$$

le problème (C.8) admet une unique solution (u, p) .

Soient M_h et Q_h deux sous-espaces de dimension finis inclus dans M et Q respectivement. On considère l'approximation suivante : trouver $u_h^\epsilon \in M_h$ et $p_h^\epsilon \in Q_h$ telles que :

$$\begin{aligned} a(u_h^\epsilon, v) + b(v, p_h^\epsilon) &= \langle f, v \rangle_{M' \times M} \quad \forall v \in M_h \\ b(u_h^\epsilon, q) - \epsilon \langle p_h^\epsilon, q \rangle &= \langle g, q \rangle_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q_h \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

où ϵ est un paramètre très petit.

D'après [30], le problème discret (C.10) admet une unique solution $(u_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in M_h \times Q_h$. De plus, l'auteur de [30] a considéré des sous-espaces $\hat{M}_h \subset M$ et $\hat{Q}_h \subset Q$ tels que :

$$\exists \beta_0 > 0 \text{ tel que } \forall \hat{q} \in \hat{Q}_h, \sup_{\hat{w} \in \hat{M}_h} \frac{b(\hat{w}, \hat{q})}{\|\hat{w}\|_M} \geq \beta_0 \|\hat{q}\|_Q$$

où β_0 est une constante indépendante de l'ouvert Ω .

Soit \tilde{Q}_h l'orthogonal de \hat{Q}_h dans Q_h , d'après [30], on a que : $\forall q_h \in \tilde{Q}_h, \forall \hat{v}_h \in \hat{M}_h, b(\hat{v}_h, q_h) = 0$

Théorème C.2.1 Soient $p_h^\epsilon = \hat{p}_h^\epsilon + \tilde{p}_h^\epsilon$ avec $\hat{p}_h^\epsilon \in \hat{Q}_h$ et $\tilde{p}_h^\epsilon \in \tilde{Q}_h$. On a alors les erreurs d'estimation suivantes :

$$\begin{aligned} \|u - u_h^\epsilon\|_M &\leq C \left\{ \inf_{v_h \in M_h} \{ \|u - v_h\|_V + |b(u - v_h, \tilde{p}_h^\epsilon)|^{1/2} \} + \inf_{\hat{q}_h \in \hat{Q}_h} \{ \|p - \hat{q}_h\|_Q + \epsilon \|\hat{q}_h\|_Q \} \right\} \\ \|p - \hat{p}_h^\epsilon\|_Q &\leq C \left\{ \|u - u_h^\epsilon\|_V + \inf_{\hat{q}_h \in \hat{Q}_h} \|p - \hat{q}_h\|_Q \right\} \end{aligned}$$

C.3 Méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire-constante

On considère Ω un ouvert rectangulaire sous la forme suivante :

$$\Omega = \{(x, y), \text{ tel que } 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$$

où x_0 et y_0 sont des constantes positives données.

Dans le but de définir la méthode d'éléments finis mixtes, on introduit une subdivision T de domaine Ω en sous-domaines K_{ij} qui sont carrés de côté h . T et K_{ij} sont définis par :

$$T = \{K_{ij}, 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2\}$$

$$K_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (i-1)h \leq x \leq ih, (j-1)h \leq y \leq jh\}$$

Une méthode d'approximation très répandue est la méthode d'éléments finis mixtes bilinéaire pour la vitesse et constant par morceaux pour la pression c'est-à-dire on prend :

$$M_h(\Omega) = \{v_h \in H_0^1(\Omega)^2, (v_h)|_K \in Q_1(K) \times Q_1(K) \forall K \in T\}$$

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega), (q_h)|_K \in Q_0(K) \forall K \in T\}$$

Ceci nous ramène à considérer : $\tilde{Q}_h = \text{Vec}\{\phi_{ij}^N, i, j \text{ pairs}\}$ où ϕ_{ij}^N sont des fonctions de base définies sur

-1	+1
+1	-1

FIGURE C.1 – ϕ_{ij} fonction base sur le macro-élément comprenant $K_{i,j}$, $K_{i,j+1}$, $K_{i+1,j}$ et $K_{i+1,j+1}$.

un macro-élément (voir la figure C.1). De plus, Q_h s'écrit sous la forme suivante :

$$Q_h = \tilde{Q}_h \oplus \hat{Q}_h$$

où \hat{Q}_h est l'orthogonal de \tilde{Q}_h .

Soient $(u, p) \in H^2(\Omega)^2 \cap H_0^1(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ solution du problème (C.2), $(u_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in M_h \times Q_h$ solution du problème discret (C.6), alors les auteurs de [37] ont établis les résultats suivantes :

Théorème C.3.1 Soient \hat{p}_h^ϵ la projection de p_h^ϵ sur \hat{Q}_h et $0 < \epsilon \leq \alpha h$, alors

$$\|u - u_h^\epsilon\|_{1,\Omega} + \|p - \hat{p}_h^\epsilon\|_{0,\Omega} \leq Ch(\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega})$$

où C est une constante indépendante de h .

Théorème C.3.2 *Si $0 < \epsilon \leq \alpha h^2$, alors*

$$\|u - u_h^\epsilon\|_{0,\Omega} \leq Ch^2(\|u\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega})$$

Ces théorèmes sont encore vrais pour ϵ égal à zéro.

Bibliographie

- [1] P. Laborde and Y. Renard. Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems. *Math Meth Appl Sci*, 31 :415–441, 2008.
- [2] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. Les milieux granulaires : Entre solide et liquide. *EDP science*, 2011.
- [3] G.H. Tattershall and P.F.G. Banfill. The rheology of fresh concrete. *Pitman Advanced Publishing Program New York*, 1983.
- [4] E.C. Bingham. Fluidity and plasticity. *New York McGraw-Hill*, 1922.
- [5] W.H. and R. Bulkley. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzol-Lösungen. *Kolloid Zeitschrift*, 39 :291–300, 1926.
- [6] R. Glowinski. Numerical methods for non-linear variational problems. *Springer-Verlag, New York*, 1984.
- [7] G. Duvaut and J.L. Lions. Les inéquations en mécanique et en physique. *Dunod, Paris*, 1972.
- [8] W. Han and B.D. Reddy. Plasticity : Mathematical theory and numerical analysis. *Springer-Verlag, New York*, 1999.
- [9] A. Aposporidis, E. Haber, M. Olshanskii, and A. Veneziani. A mixed formulation of the Bingham fluid flow problem : Analysis and numerical solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :2434–2446, 2011.
- [10] M. Fuchs and G. Seregin. Regularity results for the quasi-static Bingham variational inequality in dimensions two and three. *Springer-Verlag*, 227 :525–541, 1998.
- [11] M. Fortin. Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode d'élément finis. *thèse d'Etat, Paris 5*, 1972.
- [12] R. Glowinski and P. Le Tallec. Augmented Lagrangians and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. *SIAM, Philadelphia*, 9 :295, 1989.
- [13] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Trémolières. Numerical analysis of variational inequalities. *North-Holland, Publishing Company Amsterdam, New York, Oxford*, 8 :1–776, 1981.

- [14] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Trémoilières. Analyse numérique des inéquations variationnelles. *Dunod, Paris*, 1976.
- [15] J. Málek, M. Růžička, and V.V. Shelukhin. Herschkel-Bulkley : Existence and regularity of steady flows. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15, 1845 (2005).
- [16] E. Azanza. Ecoulements granulaires bidimensionnels sur plan incliné. *thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, SI5*, 1998.
- [17] M. Prochnow. Ecoulements denses de grains secs. *thèse d'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris*, 2002.
- [18] F. Da Cruz. Ecoulement de grains secs : Frottement et blocage. *thèse d'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris*, 2004.
- [19] F. Chevoir, J.N. Roux, F. Da Cruz, P. Rognon, and G. Koval. Loi de frottement dans les écoulements granulaires denses. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 2007.
- [20] F. Mahaut, F. Bertrand, Ph. Coussot, X. Chateau, and G. Ovarlez. Suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids : Experimental and micromechanical approaches. *AIP Conf. Proc.*, 1027 :671–673, 2008.
- [21] P. Germain. Mécanique des milieux continus. *Masson, Paris*, 1962.
- [22] Ph. Coussot and C. Ancey. Rhéophysique des pâtes et des suspensions. *EDP sciences*, 1999.
- [23] J.N. Roux and F. Chevoir. Simulations numériques discrètes et comportement mécanique des matériaux granulaire. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 254 :108–137, 2005.
- [24] M. Fortin and R. Glowinski. Méthodes de Lagrangien Augmenté : Application à la résolution numérique de problèmes aux limites. *J. Applied Mathematics and Mechanics, Dunod, Paris*, 63 :583–584, 1982.
- [25] N. Roquet. Résolution numérique d'écoulement à effet de seuil par éléments finis mixtes et adaptation de maillage. *thèse d'université Joseph Fourier, Grenoble*, 2000.
- [26] J.D. Edward, R. Glowinski, and G. Giovanna. On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142 :36–62, 2007.
- [27] W. Han and B.D. Reddy. On the finite element method for mixed variational inequality arising in elastoplasticity. *SIAM*, 32 :1778–1807, 1995.
- [28] N. Roquet. Simulation numérique d'écoulement de fluides viscoplastiques par l'algorithme de Lagrangien Augmenté et une méthode d'éléments finis incompressible. *Rapport de Stage DEA, Université d'Orsay, Paris-Sud*, pages 97–21, 1996.

- [29] A. Fortin, D. Côte, and P.A. Tanguy. On the imposition of friction boundary conditions for the numerical simulation of Bingham fluid flows. *J. Computer Methods in Applied Mechznics and Engineering*, 88 :97–109, 1991.
- [30] F. Brezzi and M. Fortin. Mixed and hybrid finite element methods. *Springer-Verlag, Berlin*, 1991.
- [31] V. Girault and P.A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations : Theory and algorithms. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 67 :1–579, 1986.
- [32] R. Glowinski. Lectures on numerical methods for non-linear variational problems. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 1980.
- [33] C.R. Beverly and R.I. Tanner. Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 42 :85–115, 1992.
- [34] S. Priesse-crampe and P. Ribenboim. Generalized ultrametric spaces ii. *Math. sem. Univ. Hamburg*, 67 :19–31, 1997.
- [35] S. C. Brenner and L. R. Scott. The mathematical theory of finite element methods. *Springer, New York*, 2008.
- [36] R. Glowinski. Sur l’approximation d’une inéquation variationnelle elliptique de type Bingham. *Revue Franaise d’automatique informatique recherche opérationnelle analyse numérique*, 10 :13–30, 1976.
- [37] X.L. Cheng, W. Han, and H.C. Huang. Analysis of some mixed elements for stokes problem. *J. Computational and applied mathematics*, 85 :19–35, 1997.
- [38] J.T. Oden, N. Kikuchi, and Y.J. Song. Penalty finite element methods for the analysis of Stokesian flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31 :297–329, 1982.
- [39] P.C Lo and Y.Y Lee. Real-time implementation of the moving fft algorithm. *Signal Processing*, 79 :251–259, 1999.
- [40] R. Glowinski and P. Le Tallec. Augmented lagrangians and operator-splitting methods in non linear mechanics. *SIAM*, 1989.
- [41] P.Y. Huang and J. Feng. Wall effects on the flow viscoelastic fluid around a circular cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 60 :179–198, 1995.
- [42] N. Yoshioka and K. Adachi. On creeping flow of a viscoplastic fluid past a cylinder. *Chemical Engineering Science*, 28 :215–226, 1973.
- [43] G.F. Brookes and R.L. Whitmore. Drag forces in Bingham plastics. *Rheologica. Acta*, 8 :472–480, 1969.
- [44] A.N. Beris, J.A. Tsamopoulos, R.C. Armstrong, and R.A. Brown. Creeping motion of a sphere throught a Bingham plastic. *J. Fluid Mechanics*, 158 :219–244, 1985.

- [45] M. Beaulne and E. Mitsoulis. Creeping motion of sphere in tubes filled with Herschel-Bulkley fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72 :55–71, 1997.
- [46] M. Médale and J. Chauchat. A 3d numerical model based on the $\mu(i)$ rheology for dense granular flows. *GPF Seminar*, 2013.
- [47] D.L. Tokpavi, A. Magnin, and P. Jay. Very slow flow of Bingham viscoplastic fluid around a circular cylinder. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 154 :65–76, 2008.
- [48] R.P. Chhabra and P.H.T. Uhlherr. Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids. *Encyclopedia of fluid Mechanics*, 7 :611–633, 1998.
- [49] G.K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University, New York*, 1981.
- [50] R.I. Tanner. Stokes paradox for power-law flow a around cylinder. *J. Non-Newtonian fluid Mechanics*, 50 :217–224, 1993.
- [51] C. Atamian and P. Joly. Une analyse de la méthode des domaines fictifs pour le problème de Helmholtz extérieur. *RAIRO- Modélisation mathématique et analyse numérique*, 27 :251–288, 1993.
- [52] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, and D.D. Joseph. A distributed lagrange multiplier / fictitious domain method for particulate flows. *J. Multiphase Flow*, 25 :755–794, 1998.
- [53] S. Putot. Calcul des capacités parasites dans les interconnexions des circuits intégrés par une méthode de domaines fictifs. *thèse d'univeristé Joseph Fourier, Grenoble*, 2001.
- [54] P. Grisvard. Edge behaviour of the solution of an elliptic problem. *Mathematische Nachrichten*, 132 :281–299, 1987.
- [55] N. El Khouja, N. Roquet, and B. Cazacliu. Numerical modelling of frictional rheology law : application to concrete mixing. *MAMERN13 : 5th International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural ressources*, april 2013.
- [56] N. El Khouja, N. Roquet, and B. Cazacliu. Frictional viscoplastic law : Modelling and application. *Viscoplastic Fluids : From Theory to Application*, novembre 2013.
- [57] Y. Renard. Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques. *thèse de LMC-IMAG, Grenoble*, 1998.
- [58] J. Necas, J. Jarusek, and J. Haslinger. On the solution of variational inequality to the Signorini problem with small friction. *Bolletino U.M.I.*, 17 :796–811, 1980.
- [59] P. Hild. An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with Coulomb friction. *Comptes rendus mathématique, Acad. Sci, Paris*, 337 :685–688, 2003.
- [60] P. Hild. Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity. *Mechanics. Applied. Mathematics.*, 57 :1–225, 2004.

- [61] R. Dautray and J.L. Lions. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. *Masson, Paris*, 2 :1–592, 1988.
- [62] V. Dominguez, R. Celorrio, and F.J. Sayas. An interior-exterior schwarz algorithm and its convergence. *To appear in C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, pages 1–6, 2001.
- [63] Z. Li. An overview of the immersed interface method and its application. *J. Mathematics*, 7 :1–49, 2003.
- [64] Y. Gong, B. Li, and Z. Li. Immersed-interface finite-element methods for elliptic interface problems with non-homogeneous jump conditions. *SIAM*, 46 :472–495, 2008.
- [65] F. Gibou and R. Fedkiw. A fourth order accurate discretization for the Laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the Stefan problem. *J. Computational Physics*, 202 :577–601, 2004.

Thèse de Doctorat

Nazek EL KHOUJA

Une première approche de la modélisation numérique des écoulements viscoplastiques frictionnels

A first approach of the numerical modelling of frictional viscoplastic flow

Résumé

De nombreux matériaux complexes sont obtenus par la transformation d'un assemblage granulaire humide en une pâte homogène viscoplastique. Cette transformation résulte d'une mise en écoulement de l'assemblage. C'est le cas notamment du malaxage de béton. Les travaux récents sur le comportement en écoulement des assemblages granulaires mettent en évidence la viscoplasticité mais aussi la friction. Toutefois, seul le caractère viscoplastique semble avoir fait l'objet de recherches mathématiques. Dans la littérature, le modèle de Bingham permet d'analyser la viscoplasticité. Dans cette thèse, le caractère frictionnel est produit en introduisant une dépendance à la pression dans le seuil de plasticité du modèle de Bingham. Le modèle résultant est nommé LVF. Les travaux portent alors sur l'étude théorique et numérique de LVF. Seul le problème LVF à seuil régularisé est entièrement résolu théoriquement et numériquement. A cet effet, trois problèmes sont analysés : un problème à seuil variable, LVF à seuil régularisé et LVF discret. Notamment, l'existence de la solution est montrée, un algorithme de résolution numérique basé sur l'existence d'un point fixe est construit pour la non-linéarité de seuil et une discrétisation spatiale par une méthode d'éléments finis mixtes approximation mixte bilinéaire-constante en vitesse-pression et bilinéaire discontinue pour les contraintes est mise en œuvre. De plus, la convergence et la robustesse sont mises en évidence sur différents problèmes comme la géométrie de Couette et l'écoulement autour d'un cylindre. Enfin, la faisabilité de l'algorithme de résolution numérique est abordée dans le cas d'un malaxeur planétaire.

Mots clés

pâtes granulaires, frictionnel, viscoplastique, modélisation, formulation variationnelle, inéquations variationnelles, algorithme de point fixe, méthode d'éléments finis mixtes, problème de Couette, écoulement autour d'un cylindre, malaxeur planétaire.

Abstract

Many complex materials are obtained by transformation a moist granular assembly in a homogeneous viscoplastic paste. This transformation results setting a flow assembly. This is particularly the case concrete mixing. Recent work on the behavior viscoplasticity but also friction. However, only the viscoplastic character seems to have been the subject of mathematical research. In the literature, the Bingham model is used to analyze the viscoplasticity. In this thesis, the frictional character is obtained introducing a dependency pressure in plasticity yield stress Bingham model, named FVL. The work then focuses on the theoretical and numerical study of VFL. For this purpose, three types of problems are analyzed: problem with variable yield stress, FVL with regularized yield stress and discrete FVL. In particular, the existence of a solution is shown, a numerical resolution algorithm based on the existence of a fixed point is designed for non-linearly yield stress and a spatial discretisation by a mixed finite element method bilinear-constant in pressure- velocity and bilinear discontinuous for stress is carried out. More, its convergence and robustness are evidenced on different geometry as Couette geometry and flow around a cylinder. Finally, the feasibility of the numerical resolution algorithm is proved in the case of a planetary mixer.

Key Words

granular paste, frictional, viscoplastic, modelling, variational formulation, variational inequality, fixed point algorithm, mixed finite element, Couette problem, flow around a cylinder, planetary mixer.