UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2007 N° B.U. :

# SUR L'EFFONDREMENT À L'INFINI DES VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT PLATES.

## Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : Mathématiques et Applications

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Vincent MINERBE**

*le 7 décembre 2007 à l'Université de Nantes.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Président du jury* | : | Gilles Courtois | D. R. au C.N.R.S. (Ecole Polytechnique) |
| *Rapporteurs* | : | Jacques Lafontaine | Professeur (Université de Montpellier II) |
| | | John Lott | Professeur (University of Michigan) |
| *Examinateurs* | : | Olivier Biquard | Professeur (Université de Paris VI) |
| | | Gilles Carron | Professeur (Université de Nantes) |
| | | Thierry Coulhon | Professeur (Université de Cergy-Pontoise) |
| | | Zindine Djadli | Professeur (Université de Grenoble I) |
| | | Jacques Lafontaine | Professeur (Université de Montpellier II) |
| | | François Laudenbach | Professeur émérite (Université de Nantes) |

*Directeur de thèse* : Gilles Carron
*Laboratoire* : Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

N° E.D. : 0366-xxx

# Remerciements.

S'il est une personne que je dois remercier en premier, c'est bien Gilles Carron. Au-delà de sa maestria mathématique, Gilles a su, par des questions, des réponses, des remarques, du doute, de la confiance, m'aiguiller durant ces dernières années. Son enthousiasme, son énergie et sa lucidité m'ont été extrêmement précieux et je tiens à le remercier chaleureusement du temps qu'il m'a consacré.

Les travaux de Jacques Lafontaine et John Lott ont bercé mes années de thèse. En acceptant d'être mes rapporteurs, ces deux grands mathématiciens m'ont fait un grand honneur et un immense plaisir.

La présence d'Olivier Biquard, Thierry Coulhon, Gilles Courtois, François Laudenbach et Zindine Djadli dans mon jury est une joie pour moi. En particulier, l'intérêt de Thierry et Zindine pour mes premiers travaux m'a donné beaucoup de confiance et je garde un très bon souvenir de ce sympathique matin brumeux où pour la première fois je les ai évoqués avec eux. François Laudenbach était dans le bureau voisin du mien durant toute ma thèse : que de mathématiques derrière cette cloison ! Je profite de ces quelques lignes pour le remercier de sa disponibilité auprès des apprentis mathématiciens.

Durant mes années de formation, j'ai bénéficié de nombreuses influences, remarques, encouragements... En particulier, le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray m'a offert un cadre stimulant et sympathique pour effectuer mes travaux. Les jeunes chercheurs nantais ont joué un rôle important, au quotidien : que soient ici remerciés le chaleureux Roch, le sémillant Skander, le joyeux Alexandre, l'homme-calembour Etienne, le sage Aymeric, l'oublieux Antoine, le convivial Alaing, la prudente Fanny, le divin Rodolphe, le gentil Arnaud, l'attachant Charles, le mystérieux Sébastien, le bourbakiste Nicolas, le malin Simon, le courageux Arvid, le galactique Steve, le gros Manu. Mes condisciples lyonnais ont inévitablement influé sur ma trajectoire : merci à Patrick de m'avoir accompagné dans mon apprentissage de quelques notions de physique, merci à Benoît, Corentin et Patrick de m'avoir accompagné dans mon apprentissage de quelques notions de géométrie, merci à Miguel de m'avoir accompagné dans mon apprentissage de quelques notions d'analyse. En me faisant découvrir le théorème de Hodge, les connexions et l'analyse sur les variétés, Andrei Teleman m'a aiguillé vers cette thèse : je lui en suis reconnaissant. Je souhaite également remercier Marc Herzlich, Colin Guillarmou, Nader Yeganefar et Yann Rollin pour leur soutien, leur intérêt et plusieurs discussions inspirantes.

L'Institut Saint-Lô, qui m'a accueilli lors de mes années de collège et lycée, a toujours gardé une place à part dans mon esprit. Cette thèse n'aurait jamais commencé sans les qualités pédagogiques et humaines des enseignants que j'y ai rencontrés.

J'ai souvent eu des idées lors de mes voyages en train : merci à la Société nationale des chemins de fer français pour ces moments priviligiés.

Je conclurai par un grand merci à mes parents et à ma petite Marielle, pour leurs encouragements, entre autres !

# Introduction.

Un problème central en géométrie riemannienne consiste à comprendre le tenseur de courbure : quelles informations, topologiques ou géométriques, contient-il ? Par exemple, le théorème classique de Bonnet-Myers dit qu'une variété complète à courbure de Ricci minorée par une constante strictement positive est nécessairement compacte, avec un groupe fondamental fini.

Si on aime les variétés riemanniennes complètes et non compactes, il est naturel de chercher des conditions de courbures assurant que la topologie de la variété est assez simple. Par exemple, on veut garantir que les problèmes topologiques n'interviennent que dans un compact et donc n'interfèrent pas avec les questions concernant la géométrie à l'infini : typiquement, les surfaces de genre infini sont effrayantes.

DÉFINITION 0.0.1 — *On dira qu'une variété est de type topologique fini si elle est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord.*

Le théorème de Cheeger-Gromoll [CG2] assure qu'une variété riemannienne complète et plate est de type topologique fini. Et en fait, [GW] montre qu'il suffit de supposer que la courbure est nulle au-dehors d'un compact. On a envie d'aller plus loin : suffit-il de supposer que la courbure tend vers zéro à l'infini ? A vrai dire, c'est complètement faux : toute variété différentielle possède une métrique complète dont la courbure tend vers zéro à l'infini. Plus précisément, on peut toujours construire une métrique $g$ dont le tenseur de courbure $\mathrm{Rm}_g$ vérifie

$$|\mathrm{Rm}_g| = \mathcal{O}(r^{-2})$$

où $r$ est la fonction distance à un point quelconque ([G2],[LS]). En ce sens, une décroissance quadratique de la courbure n'a aucune incidence topologique.

Par contre, U. Abresch ([A1],[A2]) a montré qu'une variété riemannienne complète dont la courbure décroît plus vite que quadratiquement est de type topologique fini : l'existence d'une métrique complète $g$ telle que

$$|\mathrm{Rm}_g| = \mathcal{O}(r^{-2-\delta})$$

avec $\delta > 0$ impose une topologie finie.

Il y a donc un ordre de décroissance critique, $\mathcal{O}(r^{-2})$, autour duquel la situation change du tout au tout. On peut noter qu'il s'agit de l'ordre de décroissance qui est invariant sous les changements d'échelle.

Il est intéressant de comprendre ce qui se passe précisément au seuil. Par exemple, on peut se demander si une hypothèse supplémentaire sur la courbure de Ricci permet d'obtenir une contrainte topologique. J. Sha et Z. Shen [SS] ont montré qu'une variété riemannienne complète $M^n$ à décroissance quadratique de la courbure est de type topologique fini si de plus elle est à courbure de Ricci positive et si la croissance du volume des boules est « maximale ». Que signifie-ce ? Par le théorème de Bishop, quand la courbure de Ricci est positive, la croissance du volume des boules est au plus euclidienne : le volume d'une boule de rayon $t$ est majoré par le volume d'une boule euclidienne de même rayon :

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega_n t^n$$

où $\omega_n$ est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. On dit que la croissance du volume est maximale si on a de plus

$$\operatorname{vol} B(x,t) \geq A t^n$$

avec $A > 0$. Au passage, précisons un point de vocabulaire : on dira toujours « positif »pour dire « supérieur ou égal à zéro »et « strictement positif »pour dire « strictement supérieur à zéro ».

D'autre part, quand on suppose une croissance euclidienne du volume des boules, demander une décroissance quadratique de la courbure revient presque à lui demander d'appartenir à l'espace de Lebesgue $L^{\frac{n}{2}}$. De nombreux travaux ont étudié ce type d'hypothèse intégrale sur la courbure. En particulier, S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima [BKN] ont prouvé que les variétés Ricci plates de dimension $n$ à croissance maximale du volume et à courbure dans $L^{\frac{n}{2}}$ ont en fait une courbure qui décroît plus vite que quadratiquement ; ces variétés sont donc de type topologique fini. Une autre conséquence des techniques développées dans cet article est l'existence d'un effet de seuil sur la valeur de l'intégrale en question : il existe un nombre $\epsilon(n,A) > 0$ pour lequel une variété Ricci plate à volume maximal et telle que $\int |\mathrm{Rm}|^{n/2} < \epsilon(n,A)$ est nécessairement plate.

Notre premier objectif est de généraliser ce type de théorèmes dans un cadre où la croissance du volume n'est pas maximale.

Un théorème dans cette direction a été prouvé par J. Cheeger et G. Tian [CT] : une variété riemannienne complète Ricci-plate, de dimension quatre et à courbure dans $L^2$ présente une courbure à décroissance quadratique. L'absence d'hypothèse volumique est remarquable ! Leur preuve est basée sur une utilisation fine de la formule de Chern-Gauss-Bonnet et sur la théorie de Cheeger-Fukaya-Gromov.

Notre approche sera différente : dans ce travail, nous ferons des hypothèses volumiques. Elles seront plus faibles que « volume maximal » et nous permettront de comprendre la situation dans des cadres où le volume ne croît pas euclidiennement ; nous serons ainsi en mesure de généraliser des théorèmes bien connus dans le cas « volume maximal ».

L'outil clé dans [BKN] et dans beaucoup d'autres travaux est l'inégalité de Sobolev

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, dvol\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq S \int_M |df|^2\, dvol.$$

Malheureusement, il est bien connu qu'une telle inégalité ne peut être vraie si la croissance du volume est plus lente que dans $\mathbb{R}^n$ (nous reverrons ceci à la proposition 2.2.17). Pour surmonter cette difficulté, nous serons amenés à considérer une inégalité de Sobolev à poids : le poids permettra de compenser la faiblesse du volume à l'infini et de prolonger l'inégalité de Sobolev locale en une inégalité globale.

Etant donné un point $o$, nous considérerons des poids faisant intervenir la fonction distance géodésique $r_o = d(o, .)$ au point $o$, ainsi que la fonction

$$\rho_o : t \mapsto \frac{t^n}{\operatorname{vol} B(o,t)}.$$

On peut remarquer que cette fonction $\rho_o$ apparaît dans le théorème de Bishop-Gromov (cf. théorème 2.2.1) : elle est croissante quand la courbure de Ricci est positive. Le résultat suivant est un point clé de cette thèse.

THÉORÈME 0.0.2 — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe et à coubure de Ricci positive. On suppose qu'il existe un point $o$ dans $M$ ainsi que des nombres $\nu > 2$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0, \ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*Alors $M$ vérifie l'inégalité de Sobolev à poids*

$$\forall f \in C_c^\infty(M), \ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}} dvol\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq S \int_M |df|^2 \, dvol \tag{1}$$

*et l'inégalité de Hardy*

$$\forall f \in C_c^\infty(M), \ \int_M |f|^2 \, r_o^{-2} dvol \leq H \int_M |df|^2 \, dvol. \tag{2}$$

*De plus, on peut trouver des constantes $S$ et $H$ qui ne dépendent que de $n$, $C_o$ et $\nu$.*

En d'autres termes, on montre que la complétion $H_0^1(M)$ de l'espace $C_c^\infty(M)$ pour la norme $\|d.\|_{L^2(M,dvol)}$ peut être plongée continûment dans $L^{\frac{2n}{n-2}}\left(M, \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}} dvol\right)$ et $L^2\left(M, r_o^{-2} dvol\right)$. De plus, en supposant seulement $\nu > 1$, nous pourrons prouver une inégalité de Hardy $L^1$.

L'hypothèse

$$\forall t \geq s > 0, \ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu} \tag{3}$$

implique la minoration

$$\forall t \geq 1, \ \operatorname{vol} B(o,t) \geq C_o \operatorname{vol} B(o,1) t^{\nu} \tag{4}$$

et découle de l'encadrement

$$\exists A_o, B_o > 0, \forall t \geq 1, \ A_o t^{\nu} \leq \operatorname{vol} B(o,t) \leq B_o t^{\nu}. \tag{5}$$

Bien sûr, le théorème de Bishop-Gromov impose $\nu \leq n$. Dans le cas $\nu = n$, le poids dans (1) est compris entre deux constantes strictement positives de sorte que (1) équivaut à l'inégalité de Sobolev usuelle.

Notre méthode fera apparaître que la positivité de la courbure de Ricci pourra être remplacée par deux de ses conséquences : la condition de doublement du volume et l'inégalité de Poincaré à l'échelle. Dans [Gril], G. Grillo prouve des inégalités à poids dans le contexte des espaces homogènes et à vrai dire, dans le cas $\nu = n$, l'inégalité de Hardy découle de ses travaux. Notre approche est complètement différente. En particulier, en plus de la condition de doublement du volume et de l'inégalité de Poincaré à l'échelle, qui sont des hypothèses classiques pour ce genre de problème, on aura uniquement besoin de l'inégalité (3) qui est une sorte d'inégalité de doublement *inverse* du volume, et seulement *autour d'un point*. On n'utilisera pas d'estimée uniforme en $x$ sur $\operatorname{vol} B(x,t)$.

Une fois qu'on dispose de ces inégalités, on peut prouver des théorèmes de rigidité pour les variétés Ricci plates. L'idée est que le tenseur de courbure d'une telle variété vérifie une équation elliptique. En utilisant nos inégalités, on arrive à des estimations elliptiques qui entraînent le

THÉORÈME 0.0.3 (RIGIDITÉ) — *Soit $M^n$, $n \geq 4$, une variété riemanienne complète connexe et Ricci plate. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$, ainsi que des nombres $\nu > 1$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall\, t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*On peut alors trouver des constantes strictement positives $\epsilon_1 = \epsilon_1(n, C_o, \nu)$ et $\epsilon_2 = \epsilon_2(n, C_o, \nu)$ telles que $M$ est plate dès que*

$$\sup_M (|\mathrm{Rm}|\, r_o^2) < \epsilon_1.$$

*ou*

$$\nu > 2 \quad \text{et} \quad \int_M |\mathrm{Rm}|^{\frac{n}{2}}\, \rho_o(r_o) dvol < \epsilon_2.$$

*Par conséquent, dans les deux cas, $M$ est le fibré normal d'une variété compacte totalement géodésique, qui est un revêtement fini de tore plat.*

La première partie du théorème fournit un phénomène de rigidité dans le cadre de [SS], mais avec Ric = 0 : si $\sup_M(|\mathrm{Rm}|\, r_o^2)$ est finie, $M$ est de type topologique fini ([SS]) ; si la même quantité est assez petite, nous prouvons que $M$ est plate.

On peut remarquer que la décroissance quadratique est critique pour l'intégrale $\int_M |\mathrm{Rm}|^{\frac{n}{2}}\, \rho_o(r_o) dvol$ : elle est finie si la décroissance de Rm est surquadratique, mais peut être infinie si Rm a seulement une décroissance quadratique.

En usant de (1), on peut aussi généraliser [BKN].

THÉORÈME 0.0.4 (DÉCROISSANCE DE LA COURBURE) — *Soit $M^n$, $n \geq 4$, une variété riemannienne complète connexe et Ricci plate. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$, ainsi que des nombres $\nu > 4\frac{n-2}{n-1}$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall\, t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*et*

$$\int_M |\mathrm{Rm}|^{\frac{n}{2}}\, \rho_o(r_o) dvol < +\infty.$$

*Alors la courbure de $M$ possède une décroissance surquadratique. En particulier, $M$ est de type topologique fini.*

De plus, on obtient un taux de décroissance explicite. Par exemple, si le volume des grandes boules $B(o,t)$ croît comme $t^{n-1}$, la courbure décroît en $r_o^{-(n-1)}$. Et nous verrons des exemples où cette estimée est optimale.

***

On a vu que certaines hypothèses de décroissance de la coubure à l'infini, jointes éventuellement à des hypothèses volumiques, imposent une topologie de type fini. Cela signifie que la topologie est « concentrée » dans un ouvert relativement compact $\Omega$, de sorte que la topologie de la variété privée de cette partie $\Omega$ est celle de $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$. Il est tentant d'essayer de comprendre maintenant la géométrie de cette partie asymptotique : à quoi peut ressembler la métrique hors d'un compact ?

Le résultat fondamental dans cette optique est l'autre théorème de [BKN]. Une variété riemannienne complète dont la courbure présente une décroissance surquadratique et dont la croissance du volume est maximale est « asymptotiquement localement euclidienne » (« ALE »).

DÉFINITION 0.0.5 — *Une variété riemannienne complète $(M^n, g)$ possédant un seul bout est dite asymptotiquement localement euclidienne ou ALE s'il existe un compact $K$ de $M$, une boule $B$ de $\mathbb{R}^n$, un sous-groupe fini $G$ de $O(n)$ et un difféomorphisme*

$$\phi\ :\ (\mathbb{R}^n \backslash B)\,/G \longrightarrow M \backslash K$$

*tels que $\phi^* g$ tende vers la métrique euclidienne $g_{\mathbb{R}^n}$ à l'infini. On dira que $(M,g)$ est ALE d'ordre $\tau$ si*

$$\phi^* g - g_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{O}(r^{-\tau})$$

*où $r$ est la coordonnée radiale de $\mathbb{R}^n$.*

*Remarque* 0.0.1. Une variété présentant plusieurs bouts sera ALE si chacun de ses bouts vérifie la propriété ci-dessus. Les variétés considérées dans cette thèse auront généralement un seul bout.

L'énoncé précis du théorème de [BKN] est le suivant.

THÉORÈME 0.0.6 — *Soit $(M^n, g)$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe. Soit $o$ un point de $M$. On suppose*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r_o^{-2-\epsilon})$$

*et*

$$\forall\, t > 0,\ \mathrm{vol}\, B(o,t) \geq At^n$$

*avec $\epsilon > 0$ et $A > 0$. Alors $(M, g)$ est ALE d'ordre $\tau(\epsilon)$ (cf. figure 1).*

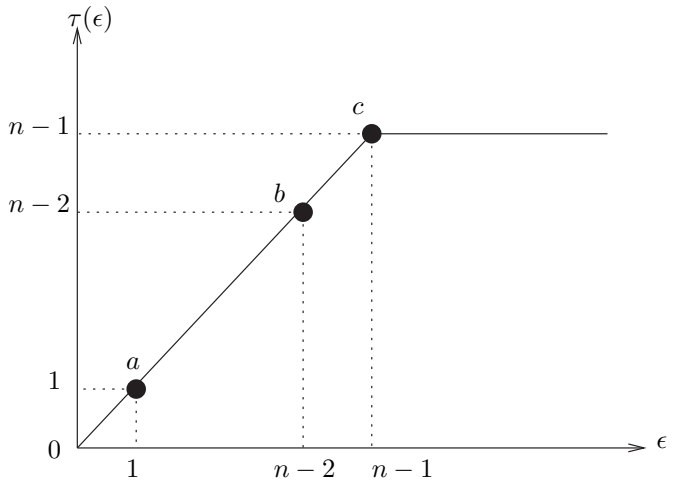



FIG. 1 – La fonction $\tau$.

*Remarque* 0.0.2. Sur la figure 1, les trois points marqués indiquent des cas particuliers. Les points $b$ et $c$ correspondent à des valeurs de $\epsilon$ pour lesquelles le théorème assure seulement que $(M, g)$ est ALE d'ordre $\tau'$ pour tout $\tau' < \tau(\epsilon)$. La même chose vaut pour le point $a$, mais seulement en dimension $n = 3$.

On peut remarquer que l'hypothèse de décroissance surquadratique de la courbure implique, grâce au théorème de Bishop-Gromov (voir l'argument de 3.1.8) :

$$\forall\, t > 0,\ \mathrm{vol}\, B(o,t) \leq Bt^n,$$

de sorte que l'hypothèse volumique du théorème de [BKN] est encore une hypothèse de volume maximal.

Dans le même ordre d'idée, toujours par le théorème de Bishop-Gromov, on peut voir que l'hypothèse

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, t > 0,\ \mathrm{vol}\, B(o,t) \geq At^n$$

est équivalente à sa version uniforme

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, x \in M,\ \forall\, t > 0,\ \mathrm{vol}\, B(x,t) \geq At^n.$$

Ces remarques illustrent la rigidité conférée par l'hypothèse de volume maximal ; elles permettent de mieux comprendre comment le théorème de [BKN] peut être vrai.

Au passage, en combinant les deux résultats de [BKN] que nous avons cités, on obtient que les variétés Ricci plates à courbure dans $L^{\frac{n}{2}}(dvol)$ et à volume maximal sont ALE.

Dans [BKN], S. Bando, A. Kasue et H. Nakajima posent la question naturelle suivante : que peut-on faire quand la croissance du volume n'est pas euclidienne ? Peut-on espérer une classification aussi simple de la géométrie asymptotique ?

Une source de motivation provient de la physique théorique. En effet, un certain nombre de théories physiques (gravité quantique, théorie des cordes) font intervenir ce qu'on appelle des « instantons gravitationnels ». D'un point de vue mathématique, un instanton gravitationnel est une 4-variété hyperkählerienne complète non compacte, dont la courbure tend vers zéro à l'infini, en un sens à préciser (cf. [Haw] ; on peut noter qu'à l'origine, un instanton gravitationnel était seulement supposé Ricci plat, au lieu d'hyperkählerien, incluant par exemple l'espace de Schwarzschild). L'hypothèse de décroissance de la courbure est du type "action finie" : on demande généralement à la courbure d'être de carré intégrable. Ce type d'espaces a motivé de nombreux travaux, de physiciens et de mathématiciens. En particulier, on cherche à comprendre la structure de leur géométrie, ou au moins de son asymptotique à l'infini. Les travaux de [BKN] et [K1], [K2] permettent de classifier les instantons gravitationnels à volume maximal : ce sont des variétés ALE obtenues comme résolutions de quotients de $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe fini de $SU(2)$. Dans le cas où la croissance du volume n'est pas maximale, S. Cherkis et A. Kapustin conjecturent une classification, inspirée d'arguments de théorie des cordes (voir [EJ] par exemple). Essentiellement, les instantons gravitationnels devraient être asymptotiquement des fibrés en cercles (c'est le cas « ALF » pour « Asymptotically Locally Flat »), en tores $\mathbb{T}^2$ (« ALG » parce qu'après E et F, on trouve G) ou en 3-variétés compactes orientables plates (il y a alors 6 possibilités, c'est le cas « ALH »), avec une base dans laquelle le volume des boules croît de façon euclidienne.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux instantons gravitationnels dont la géométrie à l'infini est tridimensionnelle, dans le sens où le volume des boules croît comme dans $\mathbb{R}^3$, et nous montrerons que leur géométrie asymptotique est celle d'un fibré en cercles.

THÉORÈME 0.0.7 — *Soit $(M^4, g)$ une variété hyperkählerienne complète connexe, à courbure dans $L^2(r_o dvol)$ et dont le volume des boules vérifie*

$$\forall\, x \in M,\, \forall\, t \geq 1,\, At^3 \leq \operatorname{vol} B(x,t) \leq Bt^3.$$

*avec $0 < A \leq B$. Alors il existe un compact $K$ de $M$, une boule $B$ de $\mathbb{R}^3$, un sous-groupe fini $G$ de $O(3)$ et une fibration en cercles $\pi : M\backslash K \longrightarrow (\mathbb{R}^3\backslash B)/G$. De plus, la métrique $g$ s'écrit*

$$g = \pi^*\tilde{g} + \eta^2 + \mathcal{O}(r_o^{-2}),$$

*où $\eta^2$ mesure la projection le long des fibres et $\tilde{g}$ est une métrique ALE sur $\mathbb{R}^3$, d'ordre $\tau$ pour tout $\tau < 1$.*

A revêtement fini près, la topologie à l'infini est donc soit celle de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$, soit celle de $\mathbb{R}^4$

Des exemples seront donnés plus bas. On peut noter que l'hypothèse intégrale sur la courbure est par exemple vérifiée en cas de décroissance surquadratique. D'autre part, on verra comment étendre ce résultat en dimension supérieure, sans supposer de structure hyperkählerienne (mais en faisant d'autres hypothèses, assez restrictives).

Nous verrons que notre hypothèse volumique est naturelle. Les variétés asymptotiquement plates à volume maximal étant bien comprises, on s'intéresse au cas où la géométrie à l'infini s'effondre au sens où le volume des grandes boules croît moins vite que dans l'espace euclidien de même dimension. Considérons un effondrement uniforme : $\forall\, x \in M$, $\forall\, t \geq 1$, $\operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega(t) t^n$ pour une certaine fonction $\omega$ tendant vers zéro à l'infini. On verra qu'une variété asymptotiquement plate qui satisfait à cette hypothèse vérifie automatiquement $\operatorname{vol} B(x,t) \leq B t^{n-1}$. Notre théorème concerne donc le cas où cette estimée est optimale. L'étude d'un exemple plat illustrera l'importance de l'uniformité que nous supposons dans l'effondrement (contrairement au cas d'une croissance du volume maximale, l'estimée uniforme n'équivaut pas à l'estimée centrée).

On peut de plus le rapprocher du théorème suivant, de A. Petrunin et W. Tuschmann [PT].

THÉORÈME 0.0.8 — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète à décroissance surquadratique de la courbure et possédant un bout simplement connexe $N$. Alors $N$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. De plus, la famille $(N, \epsilon g)$ tend, quand $\epsilon$ tend vers zéro, vers un espace métrique $C$, en topologie Gromov-Hausdorff. On appelle $C$ le cône tangent à l'infini.*

- *Si $n$ est différent de 4, $C$ est isométrique à $\mathbb{R}^n$ (muni de la distance euclidienne).*
- *Si $n$ égale 4, $C$ est isométrique à $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.*

Ce résultat dit qu'en dimension autre que quatre, et en dimension 4 si $C = \mathbb{R}^4$, la géométrie des bouts simplement connexes est asymptotiquement euclidienne [BKN]. Il est également conjecturé que le cône tangent à l'infini ne peut pas être $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Reste le cas où la géométrie à l'infini ressemble à celle de $\mathbb{R}^3$ : c'est essentiellement notre cadre.

A la différence de [PT], notre théorème autorise des bouts non simplement connexes ; et nous obtenons une description plus précise de la géométrie asymptotique.

Pour prouver notre théorème, il faut faire apparaître un fibré en cercles qui aurait des fibres à diamètre borné. L'idée générale est que ces cercles doivent provenir de lacets géodésiques courts. On va donc étudier dans un premier temps le rayon d'injectivité de ces variétés. Nous en tirerons ensuite les conséquences en termes de topologie Gromov-Hausdorff, en analysant l'effondrement à l'infini de la géométrie. La fibration en cercles sera ensuite obtenue en utilisant et en raffinant des techniques de Cheeger-Fukaya-Gromov [CFG]. Nous étudierons ensuite sa géométrie plus en détails. Des estimées sur les dérivées covariantes de la courbure apparaîtront nécessaires ; un peu d'analyse les fournit aisément sur une variété Ricci-plate.

# Table des matières

**1 Des exemples. 15**
1.0.1 Des fibrés plats. . . . 15
1.0.2 Les métriques de Schwarzschild . . . . 19
1.0.3 La métrique Taub-NUT. . . . 24

**2 Inégalités à poids et conséquences. 29**
2.1 Discrétisation et inégalités de Sobolev. . . . 31
2.1.1 Comment recoller des inégalités de Sobolev. . . . 31
2.1.2 Inégalités de Sobolev sur les graphes. . . . 36
2.2 Inégalités sur des variétés à courbure de Ricci positive. . . . 38
2.2.1 Préliminaires géométriques. . . . 39
2.2.2 Inégalités sur les composantes connexes d'anneaux. . . . 45
2.2.3 L'inégalité de Sobolev à poids. . . . 49
2.2.4 L'inégalité de Hardy. . . . 56
2.3 Inégalités de Sobolev à poids et opérateurs de Schrödinger. . . . 57
2.3.1 Un théorème d'annulation. . . . 58
2.3.2 Décroissance à l'infini. . . . 60
2.3.3 L'inversion des opérateurs de Schrödinger. . . . 66
2.3.4 Le noyau de l'opérateur de Schrödinger. . . . 70
2.4 Premières applications. . . . 74
2.4.1 Cohomologie $L^2$. . . . 74
2.4.2 Uniformisation de la courbure scalaire. . . . 75
2.5 Les variétés Ricci plates. . . . 76
2.5.1 Critères de platitude. . . . 76
2.5.2 Décroissance de la courbure. . . . 80
2.5.3 Décroissance des dérivées de la courbure. . . . 85

**3 Géométrie d'un effondrement à l'infini. 89**
3.1 Rayon d'injectivité et effondrement volumique. . . . 89
3.1.1 Le rayon d'injectivité à l'infini. . . . 89
3.1.2 Généralités sur le pseudo groupe fondamental. . . . 90
3.1.3 Pseudo-groupe fondamental et volume. . . . 98
3.2 Effondrements de codimension un. . . . 101

3.2.1 Structure locale à l'infini. . . . . 101
3.2.2 Le cas des instantons gravitationnels. . . . . 105
3.2.3 Holonomie à l'infini. . . . . 107
3.2.4 Des approximations Gromov-Hausdorff locales. . . . . 113
3.2.5 Distance et courbure. . . . . 117
3.2.6 Construction de fibrations en cercles locales. . . . . 120
3.2.7 Recollement des fibrations locales. . . . . 129
3.2.8 Géométrie de la fibration en cercles. . . . . 133
3.2.9 Bilan . . . . . 139

# Chapitre 1

# Des exemples.

### 1.0.1 Des fibrés plats.

Pour avoir une image en tête, il est intéressant de considérer les variétés plates obtenues en quotientant l'espace euclidien de dimension trois par un vissage $\rho$ de pas 1 et d'angle $\theta$. La variété différentielle obtenue est toujours $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, mais la structure riemannienne diffère : on obtient des fibrés plats en 2-plans au-dessus d'un cercle, dont l'holonomie est la rotation d'angle $\theta$. On va voir que ces exemples très simples recèlent déjà des subtilités. Ils nous permettront également de bien comprendre nos hypothèses volumiques.

Quand le fibré est trivial, i.e. $\theta = 0$, la variété riemannienne n'est autre que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Le volume des boules croît uniformément comme dans $\mathbb{R}^2$. Le rayon d'injectivité en chaque point est $1/2$, en raison des relevés du cercle de base (image de l'axe du vissage) qui fournissent même dans ce cas des géodésiques fermées ; les itérés de ces lacets fournissent des géodésiques fermées dont les longueurs sont tous les entiers naturels, et ce en chaque point.

Considérons un angle $\theta$ s'écrivant comme produit de $2\pi$ et d'un rationnel $p/q$, avec $p$ premier à $q$. En passant à un revêtement fini, d'ordre $q$, on peut se ramener au cas précédent. Le volume des boules croît donc uniformément comme dans $\mathbb{R}^2$. Quid du rayon d'injectivité ? Par symétrie cylindrique, il ne dépend que de la distance à l'axe : on note $\mathrm{inj}(t)$ le rayon d'injectivité à distance $t$ de l'axe. Cette fonction est continue, majorée et minorée uniformément, mais pas constante (sauf dans le cas trivial). L'image de l'axe est toujours une géodésique fermée, de sorte qu'on a $\mathrm{inj}(0) = 1/2$. Dès qu'on s'éloigne de l'axe, il faut comparer les longueurs $l_k(t)$ de lacets géodésiques obtenus au quotient à partir des segments reliant un point à distance $t$ de l'axe à son image par $\rho^k$. On peut donner une formule :

$$l_k(t) = \sqrt{k^2 + 4t^2 \sin^2(k\theta/2)}. \tag{1.1}$$

Par définition, on a $2\,\mathrm{inj}(t) = \inf_k l_k(t)$. En fait, au voisinage de 0, $2\,\mathrm{inj}$ coïncide avec $l_1$ ; puis $2\,\mathrm{inj}$ coïncide éventuellement avec $l_k$ pour d'autres valeurs de $k$. A $k < q$ fixé, comme $\sin \frac{k\theta}{2}$ est non nul, la fonction $t \mapsto l_k(t)$ croît vers $+\infty$, (linéairement). La fonction $l_q$

est, elle, constante à $q$, et elle minore les fonctions $l_k$, pour $k$ plus grand que $q$. Donc hors d'un compact, le rayon d'injectivité est constant à $q/2$, et il correspond à la moitié de la longueur d'un unique lacet géodésique, qui est en fait une géodésique fermée. En outre, en dehors des multiples de ce lacet, les autres lacets sont beaucoup plus longs (de l'ordre de $t$ à distance $t$).

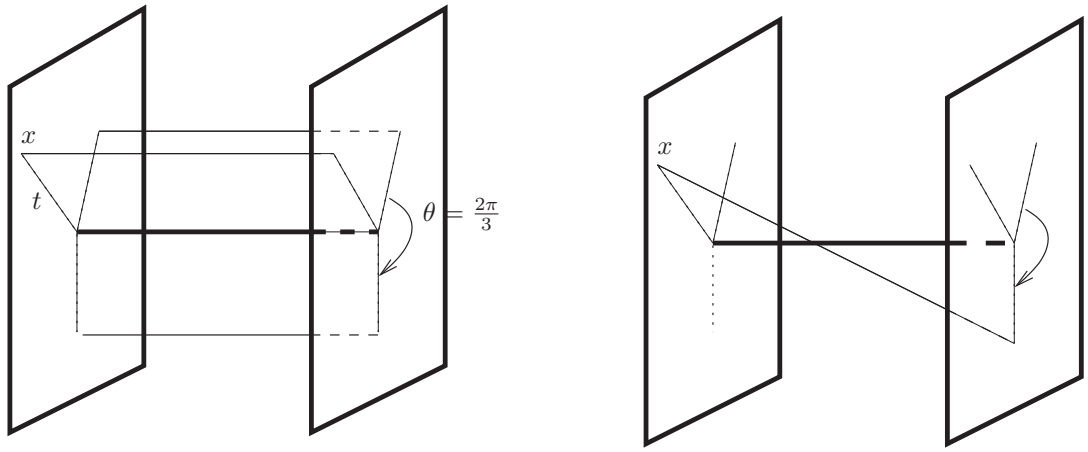



FIG. 1.1 – L'angle de l'holonomie est $\theta = \frac{2\pi}{3}$. A gauche, un lacet géodésique en $x$ de longueur $l_3(t) = 3$. A droite, un lacet géodésique en $x$ de longueur $l_1(t) = \sqrt{1+9t^2}$.

Quand $\theta/2\pi$ est irrationnel, la situation est bien différente. En particulier, le rayon d'injectivité n'est jamais borné.

PROPOSITION 1.0.9 — *La rayon d'injectivité est borné si et seulement si $\theta/2\pi$ est rationnel.*

**Preuve.**
Le cas rationnel a déjà été étudié. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto \mathrm{inj}(t)$ est bornée, par un nombre $C$. Pour chaque $t$, on peut trouver un entier $k(t)$ tel que $2\,\mathrm{inj}(t) = l_{k(t)}$. Par (1.1), on voit que la fonction $t \mapsto k(t)$ est bornée par $C$. Comme cette fonction prend des valeurs entières, on peut trouver une suite $(t_n)$ tendant vers l'infini et un entier $k$ tels que la suite $(k(t_n))$ est constante à $k$. Alors (1.1) donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad l_k(t_n)^2 = k^2 + 4t_n^2 \sin^2(k\theta/2) \leq C^2.$$

Comme $(t_n)$ tend vers l'infini, ceci n'est possible que si $\sin^2 \frac{k\theta}{2}$ est nul : il existe un entier $m$ tel que $k\theta/2 = m\pi$, i.e. $\theta/2\pi = m/k$. ■

Si l'on regarde les boules centrées en un point donné, on voit que leur volume est majoré par leur rayon au carré, à une constante près :

$$\forall\, x, \exists\, B, \forall\, t \geq 1, \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^2.$$

Dans le cas « rationnel », on dispose même d'une estimée uniforme en le centre de la boule :

$$\exists\, B, \forall\, x, \forall\, t \geq 1, \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^2. \tag{1.2}$$

Dans le cas « irrationnel », on peut voir que la majoration strictement sous-euclidienne du volume des boules n'est jamais uniforme. Pourquoi ? La proposition ci-dessus fournit une suite de points $x_n$ (tendant vers l'infini) tels que $r_n := \mathrm{inj}(x_n)$ tend vers l'infini. Donnons nous des relevés $\hat{x}_n$ des $x_n$ dans $\mathbb{R}^3$. La boule $B(\hat{x}_n, r_n)$ recouvre $B(x_n, r_n)$ et son volume est $\frac{4}{3}\pi r_n^3$. Si l'on suppose que deux points $v$ et $w$ de $B(\hat{x}_n, r_n)$ recouvrent un même point $y$ de $B(x_n, r_n)$, il y a par définition un entier $k$ tel que $\rho^k(v) = w$ ; mais comme $\rho$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, on obtient

$$\left|\rho^k(\hat{x}_n) - \hat{x}_n\right| \leq \left|\rho^k(\hat{x}_n) - \rho^k(v)\right| + \left|\rho^k(v) - \hat{x}_n\right| = |\hat{x}_n - v| + |w - \hat{x}_n| < 2r_n = 2\,\mathrm{inj}(x_n),$$

ce qui contredit la définition de $\mathrm{inj}(x_n)$ (le segment reliant $\rho^k(\hat{x}_n)$ à $\hat{x}_n$ descendrait en un lacet géodésique en $x_n$ de longueur trop courte). Par suite, $B(\hat{x}_n, r_n)$ et $B(x_n, r_n)$ sont isométriques, d'où $\mathrm{vol}\, B(x_n, r_n) = \frac{4}{3}\pi r_n^3$, ce qui empêche une estimée du type (1.2).

L'estimation du rayon d'injectivité est en fait un problème d'approximation diophantienne.

PROPOSITION 1.0.10 — *On suppose $\theta/2\pi$ algébrique et irrationnel. Etant donné un nombre $\alpha$ dans $]0, 1/2[$, on peut trouver des nombres strictement positifs $T$, $C$ et $A$ ne dépendant que de $\theta$ et $\alpha$ et tels que pour tout $t > T$, si $x$ est à distance $t$ de l'axe, alors*

$$\mathrm{inj}(t) \geq Ct^\alpha \quad \textit{et} \quad \mathrm{vol}\, B(x, Ct^\alpha) = At^{3\alpha}.$$

**Preuve.**
Le théorème de Roth fournit une constante strictement positive $C$, dépendant de $\theta$ et $\alpha$, telle que pour tout couple d'entiers naturels $(k, m)$, avec $k$ non nul, on a :

$$\left|\frac{\theta}{2\pi} - \frac{m}{k}\right| \geq \frac{C}{k^{1/\alpha}}.$$

On peut de plus supposer $C \leq 1/2$, quitte à le réduire. On en déduit que pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on a

$$Ck^{1-1/\alpha} \leq \frac{1}{2\pi}\,|k\theta - 2\pi m| \leq \frac{1}{4}\left|e^{ik\theta} - 1\right|,$$

donc si $t$ est un réel strictement positif et si $k$ est un entier de $[1, t^\alpha]$, on récupère :

$$\left|te^{ik\theta} - t\right| \geq 4Ct^\alpha. \tag{1.3}$$

On considère la boule $B := B(x, Ct^\alpha)$ centrée en un point $x$ à distance $t$ de l'image de l'axe. Soit $\hat{x}$ un relevé de $x$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\hat{B}$ la boule de $\mathbb{R}^3$ centrée en $\hat{x}$ et de rayon $Ct^\alpha$. Il suffit de voir qu'elle recouvre une seule fois $B$ pour montrer les deux estimées. Il est clair que chaque point est recouvert ; c'est l'injectivité qui doit être montrée. Supposons donc que $v$ et $w$ sont deux éléments distincts de $\hat{B}$ relevant un même élément $y$ de $B$ : $w = \rho^k v$ pour un certain entier $k$, qu'on peut supposer strictement positif. Notons $s$ la distance à l'axe commune de $v$ et $w$. On dispose de la formule :

$|w-v|^2 = k^2 + \left|e^{ik\theta}-1\right|^2 s^2$. Puisque $w$ et $v$ appartiennent à la boule $\hat{B}$, on a $k \leq |w-v| \leq 2Ct^\alpha \leq t^\alpha$. Appliquons (1.3) pour obtenir :

$$|w-v| \geq \left|e^{ik\theta}-1\right| s \geq 4Ct^{\alpha-1}s.$$

Et comme on a $|w-v| \leq 2Ct^\alpha$, il vient :

$$s \leq \frac{t}{2}. \tag{1.4}$$

D'autre part, comme $v$ appartient à $\hat{B}$, on dispose de l'inégalité $|v-\hat{x}| \leq Ct^\alpha$, qui implique par l'inégalité triangulaire :

$$s \geq t - Ct^\alpha. \tag{1.5}$$

En combinant (1.4) et (1.5), on trouve

$$t \leq (2C)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Si l'on suppose $t \geq T := 2(2C)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, on a bien montré que $\hat{B}$ recouvre une seule fois $B$, d'où le résultat. ■

L'estimée sur le rayon d'injectivité est (quasi) optimale :

PROPOSITION 1.0.11 — *Quel que soit le réel $\theta$, le rayon d'injectivité est majoré par*

$$\forall\, t \geq 1,\ \mathrm{inj}(t) \leq \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2}\sqrt{t}.$$

**Preuve.**
Soit $t \geq 1$. Le principe des tiroirs donne un entier $k$ de $[1, \sqrt{t}]$ tel que

$$2\left|\sin k\theta/2\right| = \left|e^{ik\theta}-1\right| \leq \frac{2\pi}{\sqrt{t}}.$$

On en déduit

$$2\,\mathrm{inj}(t) \leq l_k(t) = \sqrt{k^2 + 4t^2 \sin^2 \frac{k\theta}{2}} \leq \sqrt{1+4\pi^2}\sqrt{t}.$$

■

Quand $\theta/2\pi$ s'approche bien par des rationnels, on peut retrouver un comportement plus proche du cas « rationnel », avec un rayon d'injectivité qui n'explose pas trop vite. Donnons un exemple.

PROPOSITION 1.0.12 — *Si $\theta/2\pi$ est le nombre de Liouville $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, on a*

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} t^{-a}\,\mathrm{inj}(t) = 0$$

*pour tout réel $a > 0$.*

**Preuve.**

Fixons nous un entier naturel $d \geq 1$. On peut écrire les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}$ sous la forme $m_N/k_N$, avec $k_N = 10^{N!}$ et $m_N$ entier. Alors

$$k_N^d \left| \frac{\theta}{2\pi} - \frac{m_N}{k_N} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{N!d-n!}.$$

En notant que pour $n \geq N+1$,

$$N!d - n! = N!d - n!/2 - n!/2 \leq N!(d - (N+1)/2) - n!/2$$

et en supposant $N \geq 2d-1$, on trouve

$$k_N^d \left| \frac{\theta}{2\pi} - \frac{m_N}{k_N} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{10}^{-n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{10}^{-n!}.$$

Ceci conduit à une estimée du type

$$\left| e^{ik_N\theta} - 1 \right| \leq |k_N\theta - 2\pi m_N| \leq \frac{C}{k_N^{d-1}},$$

et ce dès que $N$ est plus grand que $2d-1$. En posant $t_N = k_N^d = 10^{dN!}$, on voit que

$$l_{k_N}(t_N)^2 \leq k_N^2 + C\frac{t_N^2}{k_N^{2d-2}} \leq Ck_N^2,$$

d'où

$$\mathrm{inj}(t_N) \leq Ck_N = Ct_N^{1/d}.$$

Donc si on se donne $a > 1/d$, on obtient

$$t_N^{-a}\,\mathrm{inj}(t_N) \leq Ct_N^{-a}t_N^{1/d},$$

d'où

$$\forall\, a > 1/d,\ \liminf_{t\longrightarrow\infty} t^{-a}\,\mathrm{inj}(t) = 0.$$

Et ceci est vrai pour $d \geq 1$. ■

### 1.0.2 Les métriques de Schwarzschild

$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, muni d'une métrique plate, fournit un exemple trivial de fibré trivial en cercles qui vérifiera nos hypothèses. On peut également produire un exemple Ricci-plat mais non plat qui a ce type de géométrie à l'infini. On l'obtient sous la forme d'un analogue riemannien de la métrique de Schwarzschild, sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$, avec $n \geq 4$. Cet exemple est important : il est explicite mais non trivial, on peut tout calculer et la

géométrie est intéressante. C'est pourquoi nous détaillons la construction ci-dessous, même si elle n'est qu'un cas particulier des métriques bâties dans [Ber].

On va travailler à partir d'un produit doublement tordu ([Pet], [Bes]), en prenant des coordonnées polaires autour d'un point dans le facteur $\mathbb{R}^2$ : sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$, on considère la métrique

$$g = dr^2 + F(r)^2 dt^2 + G(r)^2 d\sigma^2,$$

où $r$ et $t$ sont des coordonnées le long des facteurs $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{S}^1$, et où $d\sigma^2$ est la métrique standard sur $\mathbb{S}^{n-2}$. $F$ et $G$ sont des fonctions positives qu'on va choisir pour assurer la nullité de la courbure de Ricci. Pour calculer la courbure de Ricci de ce type de métrique, on a recours à des arguments géométriques de [Bes] (chapitre 3, partie F).

Comme $\mathbb{R}_+^* \times \{t_0\} \times \mathbb{S}^{n-2}$ est une composante connexe du lieu des points fixes d'une isométrie (obtenue à partir d'une réflexion sur le facteur $\mathbb{S}^1$), c'est une hypersurface totalement géodésique, donc de seconde forme fondamentale nulle. On en déduit qu'un champ de vecteur $V$ unitaire et normal à cette hypersurface vérifie $\nabla_X V = 0$ pour tout $X$ tangent à l'hypersurface. En particulier, on a $\mathrm{Rm}(X,Y)V = 0$ pour tous vecteurs $X$ et $Y$ tangents à l'hypersurface, i.e. orthogonaux à $\partial_t$. En prenant une base orthonormée locale $(e_i)_i$ respectant la structure produit, on peut écrire

$$(\mathrm{Ric}(\partial_t), .) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Rm}(e_i, \partial_t)e_i, .) = -\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Rm}(e_i, .)\partial_t, e_i).$$

Cette forme linéaire s'annule sur l'orthogonal de $\partial_t$ : $\partial_t$ est un vecteur propre de Ric.

Si on voit $\mathbb{S}^{n-2}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et si on considère une sphère $\mathbb{S}^{n-3}$ obtenue comme trace d'un hyperplan passant par 0 sur $\mathbb{S}^{n-2}$, on s'aperçoit que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-3}$ est aussi une hypersurface totalement géodésique, en tant que lieu des points fixes d'une isométrie (provenant de la réflexion par rapport à l'hyperplan choisi). On en déduit comme ci-dessus que pour tout vecteur $V$ tangent à $\mathbb{S}^{n-2}$ et pour tous vecteurs $X$ et $Y$ orthogonaux à $V$, on a $\mathrm{Rm}(X,Y)V = 0$ ; donc de nouveau, un tel vecteur $V$ est vecteur propre de Ric.

Comme l'orthogonal de $\partial_t$ et du tangent à $\mathbb{S}^{n-2}$ est de dimension 1, on a montré que Ric était un opérateur diagonal dans toute base adaptée à la structure produit. Il faut maintenant calculer les courbures sectionnelles.

D'abord, on peut remarquer que les courbes $r \mapsto (r, t, \omega)$ sont des géodésiques unitaires. En considérant la variation selon $t$, on obtient une équation de Jacobi, qui se traduit par

$$\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_r} \partial_t + \mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_t)\partial_r = 0,$$

d'où

$$\mathrm{Sect}(\partial_r \wedge \partial_t) = -\frac{(\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_r} \partial_t, \partial_t)}{|\partial_r \wedge \partial_t|^2} = \frac{-\partial_r(\nabla_{\partial_r} \partial_t, \partial_t) + |\nabla_{\partial_r} \partial_t|^2}{|\partial_t|^2}.$$

La formule de Koszul permet d'en tirer

$$\mathrm{Sect}(\partial_r \wedge \partial_t) = \frac{-(FF')' + F'^2}{F^2} = -\frac{F''}{F}.$$

En considérant la variation selon $\omega$, c'est-à dire selon un vecteur $\partial_\omega$ tangent au facteur $\mathbb{S}^{n-2}$, on obtient de même

$$\mathrm{Sect}(\partial_r \wedge \partial_\omega) = -\frac{G''}{G}.$$

On peut ensuite considérer les hypersurfaces $\{r\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ munies de leur métrique induite

$$g_r = F(r)^2 dt^2 + G(r)^2 d\sigma^2.$$

On peut calculer leur seconde forme fondamentale :

$$II_r = \frac{1}{2}\partial_r g_r = FF' dt^2 + GG' d\sigma^2.$$

La formule de Gauss fournit alors

$$\mathrm{Sect}(\partial_t \wedge \partial_\omega) = 0 - \frac{II_r(\partial_t, \partial_t) II_r(\partial_\omega, \partial_\omega)}{|\partial_t|^2 |\partial_\omega|^2} = -\frac{F'}{F}\frac{G'}{G}$$

et

$$\mathrm{Sect}(\partial_{\omega_1} \wedge \partial_{\omega_2}) = \frac{1}{G^2} - \frac{II_r(\partial_{\omega_1}, \partial_{\omega_1}) II_r(\partial_{\omega_2}, \partial_{\omega_2})}{|\partial_{\omega_1}|^2 |\partial_{\omega_2}|^2} = \frac{1}{G^2} - \left(\frac{G'}{G}\right)^2.$$

On en déduit les valeurs propres du tenseur de Ricci :

$$\mathrm{Ric}(\partial_r) = \left(-\frac{F''}{F} - (n-2)\frac{G''}{G}\right)\partial_r \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Ric}(\partial_t) = \left(-\frac{F''}{F} - (n-2)\frac{F'}{F}\frac{G'}{G}\right)\partial_t \tag{1.7}$$

$$\mathrm{Ric}(\partial_\omega) = \left(-\frac{G''}{G} + (n-3)\frac{1-G'^2}{G^2} - \frac{F'}{F}\frac{G'}{G}\right)\partial_\omega. \tag{1.8}$$

On veut une métrique telle que $\mathrm{Ric} = 0$. En annulant et en soustrayant (1.6) et (1.7), on trouve

$$\frac{G''}{G} - \frac{F'}{F}\frac{G'}{G},$$

soit

$$FG'' - F'G' = 0.$$

On en déduit que $G'/F$ est constant, disons, à $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$G' = \alpha F. \tag{1.9}$$

En annulant (1.7), on obtient aussi

$$GF'' + (n-2)F'G' = 0,$$

de sorte que $F'G^{n-2}$ est constant, à $\beta \in \mathbb{R}$ :

$$F' = \beta G^{2-n}. \tag{1.10}$$

Avec (1.9) et (1.10), on obtient

$$G'' = \alpha\beta G^{2-n}. \tag{1.11}$$

Pour résoudre ces équations, il nous faut des données initiales. Comme on veut une métrique sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$, on est amené à poser

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F'(0) = 1$$

afin que la métrique sur le premier facteur soit asymptotiquement euclidienne en 0. Ces choix entraînent $\beta \geq 0$, ainsi que

$$G(0) = \gamma \quad \text{et} \quad G'(0) = 0,$$

avec $\gamma := \beta^{\frac{1}{n-2}}$.

En remarquant que l'équation (1.11) se réécrit

$$(G'^2)' = \frac{2\alpha\beta}{3-n}\left(G^{3-n}\right)',$$

on peut l'intégrer en

$$G'^2 = \frac{2\alpha\gamma}{n-3}\left(1 - \left(\frac{\gamma}{G}\right)^{n-3}\right).$$

En notant que (1.9) implique

$$\frac{F'}{F} = \frac{G''}{G'},$$

on voit que l'annulation de (1.8) signifie :

$$-2\frac{G''}{G} + (n-3)\frac{1-G'^2}{G^2} = 0.$$

Et en utilisant l'équation différentielle trouvée pour $G$, on peut voir que cette relation se réduit à

$$\alpha = \frac{n-3}{2\gamma}.$$

Au bilan, on trouve que les équations

$$\begin{cases} G' = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{G}\right)^{n-3}} \\ G(0) = \gamma \end{cases}$$

et

$$F = \frac{2\gamma}{n-3}\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{G}\right)^{n-3}}$$

admettent une solution sur $\mathbb{R}_+$, de sorte qu'elles fournissent une métrique complète et Ricci plate sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}$. Le paramètre $\gamma$ est libre et vit dans $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $G$ croît de $\gamma$ à $\infty$ en restant convexe ; de plus, à l'infini, on a $G(r) = r + \mathcal{O}(\ln r)$ en dimension 4 et $G(r) = r + \mathcal{O}(1)$ en dimension $n \geq 5$. La fonction $F$ croît, elle, de 0 à $\frac{2\gamma}{n-3}$, avec à l'infini, $F(r) = \frac{2\gamma}{n-3} + \mathcal{O}(G(r)^{3-n})$.

Pour comprendre la géométrie à l'infini, on pose $\rho = G$ et on écrit $g$ sous la forme

$$g = \frac{d\rho^2}{G'(G^{-1})^2} + F(G^{-1})^2 dt^2 + \rho^2 d\sigma^2$$

soit

$$g = \frac{d\rho^2}{1 - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{n-3}} + \left(\frac{2\gamma}{n-3}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{n-3}\right) dt^2 + \rho^2 d\sigma^2,$$

d'où

$$g = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2 + d\theta^2 + \mathcal{O}(\rho^{3-n})$$

où $\theta$ est $t$ multiplié par la constante $2\gamma/(n-3)$. Comme $\rho$ se comporte à l'infini comme $r$, cette formule montre que la métrique est asymptotiquement la métrique standard sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, avec des cercles de rayon $2\gamma/(n-3)$. En particulier, la croissance du volume est comparable à celle de $\mathbb{R}^{n-1}$.

On remarquera aussi que la topologie du bout est celle d'un fibré trivial en cercles ; le groupe fondamental à l'infini est $\mathbb{Z}$.

Les formules trouvées pour les courbures sectionnelles permettent d'estimer la courbure à l'infini. En effet, (1.11) donne

$$\frac{(\mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_\omega)\partial_r, \partial_\omega)}{|\partial_r|^2 |\partial_\omega|^2} = \mathrm{Sect}(\partial_r \wedge \partial_\omega) = -\frac{G''}{G} = -\frac{n-3}{2}\gamma^{n-3}\rho^{1-n};$$

à l'aide de (1.9), on trouve

$$\frac{(\mathrm{Rm}(\partial_t, \partial_\omega)\partial_t, \partial_\omega)}{|\partial_t|^2 |\partial_\omega|^2} = \mathrm{Sect}(\partial_t \wedge \partial_\omega) = -\frac{F'G'}{FG} = -\frac{G''G'}{G'G} = -\frac{n-3}{2}\gamma^{n-3}\rho^{1-n},$$

Avec (1.10), il vient

$$\begin{aligned} \frac{(\mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_t)\partial_r, \partial_t)}{|\partial_r|^2 |\partial_t|^2} &= \mathrm{Sect}(\partial_r \wedge \partial_t) = -\frac{F''}{F} \\ &= \gamma^{n-2}(n-2)\frac{G'}{G^{n-1}F} \sim \frac{\gamma^{n-3}(n-2)(n-3)}{2}\rho^{1-n}. \end{aligned}$$

Et l'équation différentielle vérifiée par $G$ donne

$$\frac{(\mathrm{Rm}(\partial_{\omega_1}, \partial_{\omega_2})\partial_{\omega_1}, \partial_{\omega_2})}{|\partial_{\omega_1}|^2 |\partial_{\omega_2}|^2} = \mathrm{Sect}(\partial_{\omega_1} \wedge \partial_{\omega_2}) = \frac{1}{G^2}\left(1 - G'^2\right) = \gamma^{n-3}\rho^{1-n}.$$

Enfin, on a également vu (grâce aux symétries de la métrique) que l'on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_\omega)\partial_t = \mathrm{Rm}(\partial_{\omega_1}, \partial_{\omega_2})\partial_t = \mathrm{Rm}(\partial_t, \partial_r)\partial_\omega = \mathrm{Rm}(\partial_t, \partial_{\omega_1})\partial_{\omega_2} \\ &= \mathrm{Rm}(\partial_r, \partial_{\omega_1})\partial_{\omega_2} = \mathrm{Rm}(\partial_{\omega_1}, \partial_{\omega_2})\partial_{\omega_3} = 0. \end{aligned}$$

Vu les symétries du tenseur de courbure, toutes ses composantes sont contrôlées. On retiendra l'estimée

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(\rho^{1-n}).$$

### 1.0.3 La métrique Taub-NUT.

Un autre exemple non trivial de variété asymptotiquement plate mais non asymptotiquement euclidienne est fourni par la métrique Taub-NUT. C'est une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^4$, introduite par le physicien Stephen Hawking dans [Haw]. Pour la décrire, nous suivrons largement [Leb].

La fibration de Hopf (nombre de Chern : $-1$) permet de voir $\mathbb{R}^4\setminus\{0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^3$ comme l'espace total d'un fibré principal en cercles $\pi$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Notons $g_{\mathbb{R}^3}$ la métrique standard sur $\mathbb{R}^3$ et $r$ la fonction distance à 0 dans $\mathbb{R}^3$. On introduit également la fonction harmonique $V$ définie sur $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ par :

$$V = 1 + \frac{1}{2r}.$$

La forme volume usuelle de $\mathbb{R}^3$ s'écrit en polaires $r^2 dr \wedge \Omega$ ($\Omega$ est la forme volume des sphères), de sorte que la définition

$$dV \wedge *dV = |dV|^2 \, r^2 dr \wedge \Omega$$

donne $*dV = -\frac{1}{2}\Omega$. D'autre part, la classe de Chern $c_1$ du fibré $\pi$ est (par définition) la classe de cohomologie de $-\frac{\Omega}{4\pi}$. L'approche de Chern-Weil dit qu'une 2-forme $\alpha$ à valeurs dans $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ est la courbure d'une connexion sur $\pi$ si et seulement si $\frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr}\alpha$ représente la classe de cohomologie $c_1$. La relation

$$\frac{i}{2\pi}\operatorname{Tr}(*dV \otimes i\,\mathrm{id}) = -\frac{\Omega}{4\pi}$$

permet donc de bâtir une connexion de courbure $*dV \otimes i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ sur le fibré principal $\pi$. Soit $\omega \otimes i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ la 1-forme de cette connexion.

On notera avec un chapeau les relevés par $\pi$ d'objets définis sur la base : par exemple, $\hat{V} = V \circ \pi$.

Sur $\mathbb{R}^4\setminus\{0\}$, la métrique Taub-NUT est décrite par la formule

$$g = \hat{V}\hat{g}_{\mathbb{R}^3} + \hat{V}^{-1}\omega^2.$$

En posant $\rho = \sqrt{2r}$, on voit que le comportement de la métrique près de 0 est

$$g \cong d\rho^2 + \rho^2\frac{\hat{g}_{\mathbb{S}^2}}{4} + \rho^2\omega^2 = d\rho^2 + \rho^2\hat{g}_{\mathbb{S}^3}.$$

On peut donc la compléter par un point, envoyé sur l'origine de $\mathbb{R}^3$ par $\pi$, de façon à obtenir une métrique sur $\mathbb{R}^4$ tout entier. Le point supplémentaire peut être vu comme l'unique point fixe de l'action de $\mathbb{S}^1$.

Par construction, la métrique est $\mathbb{S}^1$-invariante, la longueur des fibres tend vers une constante à l'infini tandis que la métrique induite sur la base tend vers la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Il existe donc des constantes $B \geq A > 0$ telles que

$$\forall\, R \geq 1,\ AR^3 \leq \operatorname{vol} B(x,R) \leq BR^3.$$

En outre, la métrique Taub-NUT est hyperkählerienne, donc Ricci plate. Les structures kähleriennes peuvent être décrites de la façon suivante. Notons $(x, y, z)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^3$ et prenons une jauge locale : $\omega = dt + \theta$ pour une coordonnée verticale $t$ et une forme $\theta$ telle que $d\theta = *dV$. On définit une structure presque complexe $J_x$ en imposant sur le cotangent :

$$J_x\left(\sqrt{\hat{V}}d\hat{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\hat{V}}}\omega \quad \text{et} \quad J_x\left(\sqrt{\hat{V}}d\hat{y}\right) = \sqrt{V}d\hat{z}.$$

Un petit calcul montre alors que l'idéal engendré par $\hat{V}d\hat{x} + i(dt + \theta)$ et $d\hat{y} + id\hat{z}$ est préservé par la différentielle de De Rham : $J_x$ est intégrable. On peut vérifier de même que la forme de Kähler

$$d\hat{x} \wedge (dt + \theta) + \hat{V}d\hat{y} \wedge d\hat{z}$$

est fermée, de sorte que $(g, J_x)$ est une structure kählerienne (on n'a défini le champ d'endomorphismes $J_x$ qu'en dehors de 0, mais comme il est parallèle hors de 0 pour la métrique $g$ qui elle se prolonge de façon lisse, on peut le prolonger en 0, de façon unique). En permutant circulairement les rôles de $x$, $y$ et $z$, on obtient en fait trois structures kähleriennes $(g, J_x)$, $(g, J_y)$, $(g, J_z)$ qui vérifient $J_xJ_y = J_z$. [Leb] montre même que ces structures complexes sont biholomorphes à celle de $\mathbb{C}^2$. La métrique Taub-NUT peut également s'obtenir par un procédé de quotient hyperkählerien ([Bes]).

Dans une trivialisation $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ orthonormée et invariante à gauche de $T^*\mathbb{S}^3$ (pour la métrique standard), on peut écrire la métrique sous la forme

$$g = V(r)dr^2 + 4r^2V(r)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{1}{V(r)}\sigma_3^2$$

(on oublie les chapeaux). Si on note $H$ la solution nulle en 0 de

$$H' = \frac{1}{\sqrt{V(H)}}$$

et si on pose $r = H(t)$, l'équation ci-dessus se reformule en

$$g = dt^2 + \left(\frac{2H}{H'}\right)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + H'^2\sigma_3^2.$$

En utilisant les formules de [Unn], on peut calculer la courbure d'une telle métrique. Posons $f = H'$ et $h = (2H)/H'$, appelons $v_i$ le vecteur dual de $\sigma_i$. Les composantes non

nulles du tenseur de courbure, à symétrie près, sont les suivantes.

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_2)v_1,v_2)}{|v_1|^2\,|v_2|^2} &= \frac{4-h'^2}{h^2}-3\frac{f^2}{h^4},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_3)v_1,v_3)}{|v_1|^2\,|v_3|^2} &= \frac{(\mathrm{Rm}(v_2,v_3)v_2,v_3)}{|v_2|^2\,|v_3|^2}=\frac{f^2}{h^4}-\frac{f'}{f}\frac{h'}{h},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,\partial_t)v_1,\partial_t)}{|v_1|^2\,|\partial_t|^2} &= \frac{(\mathrm{Rm}(v_2,\partial_t)v_2,\partial_t)}{|v_2|^2\,|\partial_t|^2}=-\frac{h''}{h},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_3,\partial_t)v_3,\partial_t)}{|v_3|^2\,|\partial_t|^2} &= -\frac{f''}{f},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_2)v_3,\partial_t)}{|v_1|\,|v_2|\,|v_3|\,|\partial_t|} &= 2\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_3)v_2,\partial_t)}{|v_1|\,|v_3|\,|v_2|\,|\partial_t|}=2\frac{(\mathrm{Rm}(v_3,v_2)v_1,\partial_t)}{|v_3|\,|v_2|\,|v_1|\,|\partial_t|}=2\frac{fh'}{h^3}-2\frac{f'}{h^2}.
\end{aligned}$$

Un calcul direct basé sur l'équation $H'^2=1/V(H)$ fournit

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_2)v_1,v_2)}{|v_1|^2\,|v_2|^2} &= -\frac{V'(H)}{HV(H)^2}-\frac{V'(H)^2}{4V(H)^3}-\frac{3}{16V(H)^3H^4},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_3)v_1,v_3)}{|v_1|^2\,|v_3|^2} &= \frac{(\mathrm{Rm}(v_2,v_3)v_2,v_3)}{|v_2|^2\,|v_3|^2}=\frac{1}{16V(H)^3H^4}+\frac{V'(H)}{2HV(H)^2}+\frac{V'(H)^2}{4V(H)^3},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,\partial_t)v_1,\partial_t)}{|v_1|^2\,|\partial_t|^2} &= \frac{(\mathrm{Rm}(v_2,\partial_t)v_2,\partial_t)}{|v_2|^2\,|\partial_t|^2}=-\frac{V''(H)}{2V(H)^2}-\frac{V'(H)}{2HV(H)^2}+\frac{V'(H)^2}{2V(H)^3},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_3,\partial_t)v_3,\partial_t)}{|v_3|^2\,|\partial_t|^2} &= \frac{V''(H)}{2V(H)^2}-\frac{V'(H)^2}{V(H)^3},\\
\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_2)v_3,\partial_t)}{|v_1|\,|v_2|\,|v_3|\,|\partial_t|} &= 2\frac{(\mathrm{Rm}(v_1,v_3)v_2,\partial_t)}{|v_1|\,|v_3|\,|v_2|\,|\partial_t|}=2\frac{(\mathrm{Rm}(v_3,v_2)v_1,\partial_t)}{|v_3|\,|v_2|\,|v_1|\,|\partial_t|}=\frac{1+V'(H)H}{2V(H)^2H^3}.
\end{aligned}$$

L'équation différentielle vérifiée par $H$ assure qu'à l'infini, on a $H'\sim 1$ et $H\sim t$. Avec la définition de $V$, les formules ci-dessus disent que la courbure décroît à l'infini en $r^{-3}$.

Notons que contrairement aux exemples précédents, cette variété est simplement connexe à l'infini.

La même technique permet de produire des exemples, dits « multi-Taub-NUT » ou « instantons ALF de type $A_{N-1}$ », qui ont des propriétés analogues, mais avec un groupe fondamental à l'infini non trivial. Ces exemples se présentent sous la forme de l'espace total d'un fibré en cercles $\pi$ au-dessus de la variété $\mathbb{R}^3\backslash\{p_1,\cdots,p_N\}$, muni de la métrique

$$\hat{V}\,\hat{g}_{\mathbb{R}^3}+\hat{V}^{-1}\omega^2,$$

où $V$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^3\backslash\{p_1,\cdots,p_N\}$ par

$$V(x)=1+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\,|x-p_i|}$$

et où $\omega$ est la forme d'une connexion de courbure $*dV\otimes i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. On peut ensuite compléter la variété par $N$ points, s'envoyant sur $p_1,\cdots,p_N$ et vus comme points fixes de l'action

de $\mathbb{S}^1$. Le fibré en cercles se restreint sur les grandes sphères de $\mathbb{R}^3$ en un fibré en cercles de nombre de Chern $-N$. Comme ci-dessus, la métrique est hyperkählerienne et à courbure décroissant en $r^{-3}$. La variété complexe obtenue est en fait une résolution de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$. La géométrie à l'infini ne diffère de la précédente que par une action de $\mathbb{Z}_N$, qui est alors le groupe fondamental du bout.

Il existe aussi des instantons gravitationnels ALF de type $D_k$ ([ChH]) dont la géométrie à l'infini est celle d'une métrique multi-Taub-NUT quotientée par une réflexion de la base.

# Chapitre 2

# Inégalités à poids et conséquences.

Ce chapitre a pour but d'établir les inégalités fonctionnelles annoncées et d'en tirer des conséquences analytiques et géométriques. Il est organisé comme suit.

Dans la première section, nous développons une technique de discrétisation destinée à recoller des inégalités de Sobolev locales. Elle est basée sur des idées et méthodes de A. Grigor'yan et L. Saloff-Coste [GSC]. Etant donné un recouvrement adéquat de la variété, en supposant une inégalité discrète sur un graphe naturellement associé au recouvrement, on sera capable de déduire une inégalité de Sobolev globale d'une inégalité locale (théorème 2.1.5).

Dans la deuxième section, nous expliquons comment appliquer cette technique abstraite dans le cadre des variétés à courbure de Ricci positive et vérifiant l'inégalité de doublement inverse du volume (3) ; nous obtiendrons ainsi une inégalité de Sobolev à poids et une inégalité de Hardy. L'hypothèse (3) sert à prouver l'inégalité discrète, mais aussi à établir une propriété de connexité contrôlée à l'infini : la propriété « RCA »(Relatively Connected Annuli ; voir [GSC] et plus bas). La proposition suivante est un point clé de notre preuve et elle est intéressante en elle-même. On peut la comparer avec la proposition 4.5 de [HK] (qui, dans notre contexte, nécessiterait une minoration euclidienne du volume, ce qui est trop cher pour nous). La notation $f_B$ désignera la moyenne d'une fonction $f$ sur un domaine $B$, pour la mesure riemannienne.

Proposition 2.0.13 (RCA) — *Soit $M$ une variété riemannienne complète connexe, vérifiant la propriété de doublement du volume*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t > 0,\ \mathrm{vol}\, B(x, 2t) \leq C_D\, \mathrm{vol}\, B(x, t),$$

*l'inégalité de Poincaré $L^p$ à l'échelle centrée au point $o$*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \forall\, t > 0,\ \int_{B(o,t)} \left|f - f_{B(o,t)}\right|^p dvol \leq C_P t^p \int_{B(o,t)} |df|^p\, dvol$$

*et l'inégalité de doublement inverse du volume centrée en $o$*

$$\forall\, t \geq s > 0,\ \frac{\mathrm{vol}\, B(o,t)}{\mathrm{vol}\, B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^\nu$$

*avec $1 \leq p < \nu$ et $C_o > 0$. Alors il existe $\kappa_0 > 1$ tel que pour $t > 0$, si $x, y$ sont deux points de $S(o,t)$, il y a un chemin reliant $x$ à $y$ et restant dans $B(o,t)\backslash B(o, \kappa_0^{-1} t)$. De plus, on peut trouver une constante $\kappa_0$ explicite en termes de $p, C_D, C_P, C_o, \nu$.*

Ajoutons quelques mots sur cette proposition. Le théorème de Cheeger-Gromoll dit que dans notre cadre, $M$ a un seul bout. Un résultat de [LT] (avec [And]) assure que pour $t$ grand, l'intersection de l'unique composante connexe non bornée de $M\backslash B(o,t)$ avec l'anneau $A(t, t+s)$, $s > 0$, est connexe. Mais il ne dit rien du comportement des composantes bornées de $M\backslash B(o,t)$. Ce qu'on prouve est que ces composantes bornées ont une croissance au plus linéaire. En outre, on obtient une estimée explicite, ce qui est important pour nous.

Dans la troisième section, nous étudions les opérateurs de Schrödinger $\overline{\Delta} + V$ à l'aide de notre inégalité de Sobolev à poids. Ici, $\overline{\Delta}$ est le laplacien de Bochner sur un fibré vectoriel euclidien et $V$ est un champ d'endomorphismes symétriques. En particulier, nous prouvons que des hypothèses intégrales sur le potentiel assure la trivialité du noyau de l'opérateur (théorème 2.3.1). Nous obtenons diverses estimées utiles pour la suite, et nous expliquons comment obtenir des solutions bornées $\sigma$ à des équations du type $(\overline{\Delta} + V)\sigma = \psi$ (2.3.9). Cette section peut être vue comme une boîte à outils.

Dans la quatrième section, nous donnons deux premières applications géométriques. D'abord, nous généralisons le travail de G. Carron [Car] sur la cohomologie $L^2$.

THÉORÈME 2.0.14 (COHOMOLOGIE $L^2$) — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe à courbure dans $L^{\frac{n}{2}}(M, \rho_o(r_o) dvol)$ et satisfaisant l'inégalité de Sobolev à poids*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left( \int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}}\, dvol \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq S \int_M |df|^2\, dvol$$

*où $r_o$ est la distance à un point donné $o$ et $\rho_o(t) = \frac{t^n}{\operatorname{vol} B(o,t)}$. Alors la cohomologie $L^2$ de $M$ est de dimension finie. De plus, pour tout entier naturel $k$, il y a une constante positive $\epsilon(n,k)$ telle que si*

$$S \left( \int_M |\mathrm{Rm}|^{\frac{n}{2}}\, \rho_o(r_o) dvol \right)^{\frac{2}{n}} < \epsilon(n,k),$$

*alors $\mathcal{H}^k_{L^2}(M) = \{0\}$.*

Nous fournissons également des bornes explicites sur la dimension des espaces de cohomologie $L^2$. Par rapport à [Car] (qui traitait le cas sans poids), l'amélioration réside de nouveau dans le fait que nous autorisons des variétés à courbure de Ricci positive mais à croissance du volume non maximale. Nous proposons une autre application : l'uniformisation de la courbure scalaire. Nos techniques permettent de construire des métriques à courbure scalaire nulle dans certains cadres.

Enfin, nous étudions les variétés Ricci plates et nous prouvons les résultats annoncés dans l'introduction (0.0.3, 0.0.4).

## 2.1 Discrétisation et inégalités de Sobolev.

### 2.1.1 Comment recoller des inégalités de Sobolev.

L'objectif de ce paragraphe est de comprendre comment on peut recoller des inégalités de Sobolev locales en une seule inégalité de Sobolev globale. Dans [GSC], A. Grigor'yan et L. Saloff-Coste ont introduit une procédure permettant de recoller des inégalités de Poincaré. Nous allons généraliser leur méthode dans deux directions : d'une part, nous manipulerons des inégalités où les membres de gauche et de droite seront des intégrales faisant intervenir des mesures différentes ; d'autre part, nous considérerons des inégalités plus générales, de type Sobolev. Le fait de pouvoir travailler avec deux mesures à la fois s'avérera crucial quand nous voudrons prouver des inégalités à poids.

Ici, $M$ est une variété riemannienne lisse. Une telle régularité est loin d'être nécessaire : il est clair que ce qui sera dit s'appliquera dans le cadre beaucoup plus général des espaces métriques mesurés. Nous travaillerons avec deux mesures boréliennes sur $M$, $\lambda$ et $\mu$. Introduisons le vocabulaire nécessaire.

DÉFINITION 2.1.1 — *Soient $A \subset A^\sharp$ deux parties de $M$. Soit $\mathcal{U} = (U_i, U_i^*, U_i^\sharp)_{i\in I}$ une famille de triplets de boréliens de $M$ de mesure finie pour $\lambda$ et $\mu$. On dira que $\mathcal{U}$ est un bon recouvrement de $A$ dans $A^\sharp$ si les propriétés suivantes sont vérifiées.*

*(i) Il existe un borélien $E$ de $A$ qui est de mesure nulle pour $\lambda$ et $\mu$ et tel que $A\backslash E \subset \bigcup_i U_i \subset \bigcup_i U_i^\sharp \subset A^\sharp$ ;*

*(ii) $\forall\, i \in I$, $U_i \subset U_i^* \subset U_i^\sharp$ ;*

*(iii) $\exists\, Q_1$, $\forall\, i_0 \in I$, $\mathrm{Card}\left\{i \in I / U_{i_0}^\sharp \cap U_i^\sharp \neq \emptyset\right\} \leq Q_1$ ;*

*(iv) Pour tout couple $(i,j) \in I^2$ satisfaisant $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} \neq \emptyset$, on peut trouver $k(i,j)$ tel que $U_i \cup U_j$ est inclus dans $U_{k(i,j)}^*$ ;*

*(v) Il y a une constante $Q_2$ telle que pour tout $(i,j) \in I^2$, si $\overline{U_i} \cap \overline{U_j}$ n'est pas vide, alors*

$$\lambda(U_{k(i,j)}^*) \leq Q_2 \min\left(\lambda(U_i), \lambda(U_j)\right) \;\; et \;\; \mu(U_{k(i,j)}^*) \leq Q_2 \min\left(\mu(U_i), \mu(U_j)\right).$$

Etant donné un borélien $U$ de $\lambda$-mesure finie non nulle et une fonction $\lambda$-integrable $f$, nous noterons $f_{U,\lambda}$ la moyenne de $f$ sur $U$ par rapport à la mesure $\lambda$ :

$$f_{U,\lambda} = \frac{1}{\lambda(U)} \int_U f d\lambda.$$

On peut associer à tout bon recouvrement $\mathcal{U}$ un graphe pondéré $(\mathcal{G}, m_\lambda)$ : l'ensemble de ses sommets est

$$\mathcal{V} = I$$

et l'ensemble de ses arêtes est

$$\mathcal{E} = \left\{\{i,j\} \subset \mathcal{V} \,/\, i \neq j,\, \overline{U_i} \cap \overline{U_j} \neq \emptyset\right\};$$

$\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}$ sont munis de mesures notées (toutes les deux) $m_\lambda$ et définies par

$$\forall\, i \in \mathcal{V},\; m_\lambda(i) = \lambda(U_i) \;\text{ and }\; \forall\, \{i,j\} \in \mathcal{E},\; m_\lambda(i,j) = \max(m_\lambda(i), m_\lambda(j)).$$

*Remarque* 2.1.1. Dans ce que nous appelons un graphe, il y a au plus une arête entre deux sommets donnés. C'est pourquoi nous noterons $\{i,j\}$ une arête entre deux sommets $i$ et $j$. Pour nous, un graphe pondéré sera la donnée d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}$, d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{E}$ (inclus dans l'ensemble des parties à deux éléments de $\mathcal{V}$ et d'une mesure $\sigma$-finie $m$ sur l'ensemble des sommets $\mathcal{V}$. $\mathcal{E}$ sera muni lui aussi d'une mesure $\sigma$-finie $m$, définie par la relation $m(i,j) = \max(m(i), m(j))$, dès que $\{i,j\}$ appartient à $\mathcal{E}$.

Nous allons travailler avec trois types d'inégalités : les estimées discrètes (deuxième et troisième types) nous permettront de recoller les estimées continues (premier type).

DÉFINITION 2.1.2 — *Etant donnés $k$ dans $]1,\infty]$ et $p$ dans $[1,k[$, nous dirons qu'un bon recouvrement $\mathcal{U}$ satisfait une inégalité de Sobolev continue $L^p$ de dimension $k$ par rapport à la paire de mesures $(\lambda,\mu)$ s'il existe une constante $S_c$ telle que pour tout $i$ dans $I$, on a*

$$\forall\, f \in C^\infty(U_i^*),\ \left(\int_{U_i} |f - f_{U_i,\lambda}|^{\frac{pk}{k-p}}\, d\lambda\right)^{\frac{k-p}{k}} \leq S_c \int_{U_i^*} |df|^p\, d\mu$$

*et*

$$\forall\, f \in C^\infty(U_i^\sharp),\ \left(\int_{U_i^*} \left|f - f_{U_i^*,\lambda}\right|^{\frac{pk}{k-p}}\, d\lambda\right)^{\frac{k-p}{k}} \leq S_c \int_{U_i^\sharp} |df|^p\, d\mu.$$

DÉFINITION 2.1.3 — *Etant donnés $k$ dans $]1,\infty]$ et $p$ dans $[1,k[$, nous dirons que le graphe pondéré $(\mathcal{G},m)$ satisfait une inégalité de Sobolev-Dirichlet discrète $L^p$ de dimension $k$ s'il existe une constante $S_d$ telle que pour toute élément $f$ de $L^p(\mathcal{V},m)$, on a*

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)|^{\frac{pk}{k-p}}\, m(i)\right)^{\frac{k-p}{k}} \leq S_d \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i) - f(j)|^p\, m(i,j).$$

DÉFINITION 2.1.4 — *Etant donnés $k$ dans $]1,\infty]$ et $p$ dans $[1,k[$, nous dirons qu'un graphe pondéré fini $(\mathcal{G},m)$ satisfait une inégalité de Sobolev-Neumann $L^p$ de dimension $k$ s'il existe une constante $S_d$ telle que pour tout élément $f$ de $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$, on a*

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - m(f)|^{\frac{pk}{k-p}}\, m(i)\right)^{\frac{k-p}{k}} \leq S_d \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i) - f(j)|^p\, m(i,j),$$

*où $m(f)$ désigne la moyenne de $f$.*

*Remarque* 2.1.2. Dans cette terminologie, une inégalité de Poincaré $L^p$ n'est rien d'autre qu'une inégalité de Sobolev $L^p$ de dimension infinie.

*Remarque* 2.1.3. On dira parfois qu'un bon recouvrement satisfait une inégalité de Sobolev discrète quand son graphe pondéré associé la satisfait.

Le théorème suivant est un outil crucial pour nous.

THÉORÈME 2.1.5 — *Fixons $k$ dans $]1,\infty]$ et $p$ dans $[1,k[$. Si un bon recouvrement $\mathcal{U}$ de $A$ dans $A^\sharp$ satisfait l'inégalité de Sobolev continue $L^p$ de dimension $k$ (2.1.2) et l'inégalité de Sobolev-Dirichlet $L^p$ de dimension $\infty$ (2.1.3), alors on a l'inégalité de Sobolev-Dirichlet suivante :*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(A),\ \int_A \left(|f|^{\frac{pk}{k-p}}\, d\lambda\right)^{\frac{k-p}{k}} \leq S \int_{A^\sharp} |df|^p\, d\mu.$$

*De plus, on peut choisir* $S = S_c\, Q_1 2^{p-1+\frac{p}{k}} (1 + S_d Q_2 (2^p Q_1^2)^{\frac{k}{k-p}})^{\frac{k-p}{k}}$.

*Remarque* 2.1.4. Le cas où $\lambda = \mu$, $k = \infty$ et $p = 2$ est prouvé par A. Grigor'yan et L. Saloff-Coste dans [GSC].

**Preuve.**
Posons $q := \frac{pk}{k-p}$ et considérons $f \in C_c^\infty(A)$. Un soupçon de convexité permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_A |f|^q\, d\lambda &\leq \sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i} |f|^q\, d\lambda \\
&\leq 2^{q-1} \sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i} |f - f_{U_i,\lambda}|^q\, d\lambda + 2^{q-1} \sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i} |f_{U_i,\lambda}|^q\, d\lambda \\
&= 2^{q-1} \sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i} |f - f_{U_i,\lambda}|^q\, d\lambda + 2^{q-1} \sum_{i\in\mathcal{V}} |f_{U_i,\lambda}|^q\, \lambda(U_i).
\end{aligned}$$

Le premier terme est borné par l'inégalité de Sobolev continue : en remarquant que $q \geq p$ et en utilisant la définition d'un bon recouvrement, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i} |f - f_{U_i,\lambda}|^q\, d\lambda &\leq S_c^{q/p} \sum_{i\in\mathcal{V}} \left(\int_{U_i^*} |df|^p\, d\mu\right)^{q/p} \\
&\leq S_c^{q/p} \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} \int_{U_i^*} |df|^p\, d\mu\right)^{q/p} \\
&\leq S_c^{q/p} Q_1^{q/p} \left(\int_{A^\sharp} |df|^p\, d\mu\right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Pour estimer le second terme, on a recours à l'inégalité de Sobolev discrète :

$$\sum_{i\in\mathcal{V}} |f_{U_i,\lambda}|^q\, \lambda(U_i) \leq S_d \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} \left|f_{U_i,\lambda} - f_{U_j,\lambda}\right|^q \max(\lambda(U_i), \lambda(U_j)).$$

Si $\{i,j\}$ est une arête, l'inégalité de Hölder et les propriétés du bon recouvrement

conduisent à :

$$\begin{aligned}
& |f_{U_i,\lambda} - f_{U_i,\lambda}|^q \max(\lambda(U_i), \lambda(U_j)) \\
= \; & \frac{\max(\lambda(U_i), \lambda(U_j))}{\lambda(U_j)^q \lambda(U_i)^q} \left| \int_{U_i} \int_{U_j} (f(x) - f(y)) d\lambda(x) d\lambda(y) \right|^q \\
\leq \; & \frac{\max(\lambda(U_i), \lambda(U_j))}{\lambda(U_i)\lambda(U_j)} \int_{U_i} \int_{U_j} |f(x) - f(y)|^q \, d\lambda(x) d\lambda(y) \\
\leq \; & Q_2 \frac{1}{\lambda(U^*_{k(i,j)})} \int_{U^*_{k(i,j)}} \int_{U^*_{k(i,j)}} |f(x) - f(y)|^q \, d\lambda(x) d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $X$ est un borélien de $\lambda$-mesure finie non nulle et si $g$ est une fonction de $L^q(X, \lambda)$, on a

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\lambda(X)} \quad & \int_X \int_X |g(x) - g(y)|^q \, d\lambda(x) d\lambda(y) \\
\leq \quad & \frac{1}{\lambda(X)} \int_X \int_X 2^{q-1} (|g(x)|^q + |g(y)|^q) d\lambda(x) d\lambda(y) \\
\leq \quad & 2^q \int_X |g(x)|^q \, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Appliquons ceci à $f - f_{U^*_{k(i,j)},\lambda}$, sur $U^*_{k(i,j)}$ :

$$\left|f_{U_i,\lambda} - f_{U_j,\lambda}\right|^q \max(\lambda(U_i), \lambda(U_j)) \leq Q_2 2^q \int_{U^*_{k(i,j)}} \left| f - f_{U^*_{k(i,j)},\lambda} \right|^q d\lambda.$$

L'inégalité de Sobolev continue fournit

$$\left|f_{U_i,\lambda} - f_{U_j,\lambda}\right|^q \max(\lambda(U_i), \lambda(U_j)) \leq Q_2 2^q S_c^{q/p} \left( \int_{U^\sharp_{k(i,j)}} |df|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}}.$$

On obtient donc :

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} |f_{U_i,\lambda}|^q \, \lambda(U_i) \leq S_d \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} Q_2 2^q S_c^{q/p} \left( \int_{U^\sharp_{k(i,j)}} |df|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Et comme $q \geq p$, il vient :

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} |f_{U_i,\lambda}|^q \, \lambda(U_i) \leq S_d Q_2 2^q S_c^{q/p} \left( \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \int_{U^\sharp_{k(i,j)}} |df|^p \, d\mu \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Les propriétés d'un bon recouvrement assure que :

$$\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \int_{U^\sharp_{k(i,j)}} |df|^p \, d\mu \leq Q_1^2 \sum_{i \in \mathcal{V}} \int_{U^\sharp_i} |df|^p \, d\mu \leq Q_1^3 \int_{A^\sharp} |df|^p \, d\mu.$$

D'où :

$$\sum_{i\in\mathcal{V}} |f_{U_i,\lambda}|^q\,\lambda(U_i) \le S_d Q_2 2^q S_c^{q/p} Q_1^{3q/p} \left(\int_{A^\sharp} |df|^p\,d\mu\right)^{\frac{q}{p}}.$$

On arrive finalement à :

$$\int_A |f|^q\,d\lambda \le 2^{q-1}(S_c^{q/p}Q_1^{q/p} + S_d Q_2 2^q S_c^{q/p} Q_1^{3q/p}) \left(\int_{A^\sharp} |df|^p\,d\mu\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Et c'est ce qu'on voulait. ■

Il y a aussi une version « Neumann » de ce résultat.

THÉORÈME 2.1.6 — *Fixons $k$ dans $]1,\infty]$ et $p$ dans $[1,k[$. Si un bon recouvrement fini $\mathcal{U}$ de $A$ dans $A^\sharp$ satisfait une inégalité de Sobolev continue $L^p$ de dimension $k$ (2.1.2) et une inégalité de Sobolev-Neumann discrète $L^p$ de dimension $\infty$ (2.1.4), alors on a une inégalité de Sobolev-Neumann :*

$$\forall\, f\in C^\infty(A),\ \int_A \left(|f-f_{A,\lambda}|^{\frac{pk}{k-p}}\,d\lambda\right)^{\frac{k-p}{k}} \le S\int_{A^\sharp}|df|^p\,d\mu.$$

*Et on peut choisir $S = S_c\,Q_1 2^{2p-1+\frac{p}{k}}(1+S_d Q_2(2^p Q_1^2)^{\frac{k}{k-p}})^{\frac{k-p}{k}}$.*

**Preuve.**
A nouveau, posons $q := \frac{pk}{k-p}$ et choisissons $f\in C_c^\infty(A)$. On peut d'abord noter l'inégalité

$$\|f-f_{A,\lambda}\|_{L^q(A,\lambda)} \le 2\inf_{c\in\mathbb{R}} \|f-c\|_{L^q(A,\lambda)}.$$

Prouvons la rapidement : pour tout réel $c$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|f-f_{A,\lambda}\|_{L^q(A,\lambda)} &\le \|f-c\|_{L^q(A,\lambda)} + \|c-f_{A,\lambda}\|_{L^q(A,\lambda)}\\ &= \|f-c\|_{L^q(A,\lambda)} + |f_{A,\lambda}-c|\,\lambda(A)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|f-c\|_{L^q(A,\lambda)} + \left|\int_A (f-c)d\lambda\right|\lambda(A)^{\frac{1}{q}-1}\end{aligned}$$

donc, via l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\|f-f_{A,\lambda}\|_{L^q(A,\lambda)} &\le \|f-c\|_{L^q(A,\lambda)} + \left(\int_A |f-c|^q\,d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\lambda(A)^{1-\frac{1}{q}}\lambda(A)^{\frac{1}{q}-1}\\ &= 2\,\|f-c\|_{L^q(A,\lambda)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

En particulier, si on choisit

$$c := m_\lambda(f_{U_\cdot,\lambda}) = \frac{\sum_{i\in\mathcal{V}} f_{U_i,\lambda}\lambda(U_i)}{\sum_{i\in\mathcal{V}}\lambda(U_i)},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_A |f-f_{A,\lambda}|^q\,d\lambda &\leq 2^q\int_A |f-c|^q\,d\lambda\\ &\leq \sum_{i\in\mathcal{V}}\int_{U_i}|f-c|^q\,d\lambda\\ &\leq 2^{2q-1}\sum_{i\in\mathcal{V}}\int_{U_i}|f-f_{U_i,\lambda}|^q\,d\lambda+2^{2q-1}\sum_{i\in\mathcal{V}}\int_{U_i}|f_{U_i,\lambda}-c|^q\,d\lambda\\ &= 2^{2q-1}\sum_{i\in\mathcal{V}}\int_{U_i}|f-f_{U_i,\lambda}|^q\,d\lambda+2^{2q-1}\sum_{i\in\mathcal{V}}|f_{U_i,\lambda}-c|^q\,\lambda(U_i).\end{aligned}$$

On peut alors estimer les deux termes comme dans la preuve du théorème 2.1.5 : c'est pour borner le second que notre choix de $c$ est déterminant. ■

*Remarque* 2.1.5. En fait, ces arguments conduisent à des théorèmes plus généraux. On peut par exemple énoncer une version « Dirichlet ». Prenons $1\leq p\leq r\leq q\leq\infty$ et posons $k=\frac{qp}{q-p}$. Si un bon recouvrement $\mathcal{U}$ de $A$ dans $A^\sharp$ satisfait une inégalité de Sobolev continue $L^p$ de dimension $k$ (avec constante $S_c$), une inégalité de Sobolev-Dirichlet discrète $L^r$ de dimension $\frac{rq}{q-r}$ (avec constante $S_d$) et une inégalité de Sobolev continue $L^p$ de dimension $\frac{pr}{r-p}$ (avec constante $S'_c$), alors on dispose d'une inégalité de Sobolev-Dirichlet $L^p$ de dimension $k$ :

$$\forall\, f\in C_c^\infty(A),\ \left(\int_A|f|^q\,d\lambda\right)^{p/q}\leq S\int_{A^\sharp}|df|^p\,d\mu,$$

avec $S=2^{p-p/q}\left((Q_1S_c)^{q/p}+\left(S_dQ_2 2^r(S'_c)^{r/p}\right)^{q/r}Q_1^{3q/p}\right)^{p/q}$. Ce genre de résultat pourrait être utilisé pour recoller des inégalités de Sobolev et de Poincaré ensemble.

### 2.1.2 Inégalités de Sobolev sur les graphes.

Maintenant, nous savons que des inégalités discrètes sur certains graphes permettront de recoller des inégalités de Sobolev locales. Le problème est : comment prouver de telles inégalités discrètes ? Dans ce paragraphe, nous allons d'abord clarifier le lien entre les différentes inégalités de Sobolev discrètes de même dimension : nous allons voir que, comme dans le cas continu, l'inégalité $L^1$ de dimension $k$ ($1<k\leq\infty$) est plus forte que les inégalités $L^p$ de même dimension, pour $1\leq p<k$.

Proposition 2.1.7 — *Considérons un graphe pondéré infini $(\mathcal{V},\mathcal{E},m)$ (voir la remarque 2.1.1). Nous supposons que le degré de chaque sommet est borné par un entier $d$ et que l'on peut trouver un nombre $C\geq 1$ tel que pour toute arête $\{i,j\}$, $C^{-1}m(i)\leq m(j)\leq Cm(i)$. Alors étant donné $k$ dans $]1,\infty]$, l'inégalité de Sobolev $L^1$ de dimension $k$*

$$\forall\, f\in L^1(\mathcal{V},m),\ \left(\sum_{i\in\mathcal{V}}|f(i)|^{\frac{k}{k-1}}\,m(i)\right)^{\frac{k-1}{k}}\leq S\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}}|f(i)-f(j)|\,m(i,j)\qquad(2.1)$$

*implique l'inégalité de Sobolev $L^p$ de dimension $k$*

$$\forall\, f \in L^p(\mathcal{V}, m),\ \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)|^{\frac{pk}{k-p}}\, m(i)\right)^{\frac{k-p}{pk}} \leq S' \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|^p\, m(i,j)\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

*dès que $p$ appartient à $[1,k[$. De plus, on peut choisir $S' = 2p\frac{k-1}{k-p}S(dC)^{1-\frac{1}{p}}$.*

**Preuve.**
Soit $f$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ à support fini. On se donne un paramètre $\gamma \geq 1$, à fixer plus tard. En appliquant (2.1) à $|f|^\gamma$, on trouve :

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)|^{\frac{\gamma k}{k-1}}\, m(i)\right)^{\frac{k-1}{k}} \leq S \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} \left||f(i)|^\gamma - |f(j)|^\gamma\right| m(i,j).$$

Or si $a$ et $b$ sont deux nombres réels, on dispose de l'inégalité :

$$\left||a|^\gamma - |b|^\gamma\right| \leq \gamma \max(|a|,|b|)^{\gamma-1}\, ||a|-|b|| \leq \gamma\, |a-b|\, (|a|^{\gamma-1} + |b|^{\gamma-1}).$$

Par conséquent, on a

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)|^{\frac{\gamma k}{k-1}}\, m(i)\right)^{\frac{k-1}{k}} \leq \gamma S \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|\, (|f(i)|^{\gamma-1} + |f(j)|^{\gamma-1}) m(i,j).$$

L'inégalité de Hölder borne le membre de droite par

$$2\gamma S \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|^p\, m(i,j)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, m(i,j)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

et nos hypothèses sur le graphe majore ceci par

$$2\gamma S(dC)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|^p\, m(i,j)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, m(i)\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Il suffit alors de choisir $\gamma := p\frac{k-1}{k-p} \geq 1$ pour conclure la preuve. ■

Maintenant, on va expliquer pourquoi des inégalités du type (2.1) découlent d'inégalités isopérimétriques sur le graphe.

Définition 2.1.8 — *Soit $(\mathcal{V},\mathcal{E})$ un graphe. On définit le bord $\partial\Omega$ d'une partie $\Omega$ de $\mathcal{V}$ par*

$$\partial\Omega := \{\{i,j\} \in \mathcal{E},\ \{i,j\}\cap\Omega \neq \emptyset \text{ et } \{i,j\}\cap(\mathcal{V}\backslash\Omega) \neq \emptyset\}.$$

PROPOSITION 2.1.9 — *Soit $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, m)$ un graphe pondéré infini. Fixons $k$ dans $]1, \infty]$. Alors l'inégalité isopérimétrique de dimension $k$*

$$\forall \Omega \subset \mathcal{V} \text{ avec } m(\Omega) < \infty, \ \frac{m(\Omega)^{\frac{k-1}{k}}}{m(\partial\Omega)} \leq I \tag{2.3}$$

*est équivalente à l'inégalité de Sobolev $L^1$ de dimension $k$*

$$\forall\, f \in L^1(\mathcal{V}, m), \ \left( \sum_{i \in \mathcal{V}} |f(i)|^{\frac{k}{k-1}}\, m(i) \right)^{\frac{k-1}{k}} \leq I \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} |f(i) - f(j)|\, m(i,j).$$

**Preuve.**
Pour montrer que l'inégalité de Sobolev implique l'inégalité isopérimétrique, on utilise simplement les fonctions caractéristiques des parties de $\mathcal{V}$ de mesure finie comme fonctions test. Pour montrer l'implication inverse, on pose $q = \frac{k}{k-1}$ et on considère une fonction $f$ à support fini dans $\mathcal{V}$. Pour tout $i$ de $\mathcal{V}$, on a

$$f(i) = \int_0^{f(i)} dt = \int_0^\infty 1_{t<f(i)} dt,$$

donc

$$\|f\|_{L^q(\mathcal{V},m)} \leq \int_0^\infty \left\| 1_{t<f(.)} \right\|_{L^q(\mathcal{V},m)} dt = \int_0^\infty \left( \sum_{\{i \in \mathcal{V},\ f(i)>t\}} m(i) \right)^{\frac{1}{q}} dt.$$

L'inégalité isopérimétrique permet d'en déduire :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(\mathcal{V},m)} &\leq I \int_0^\infty m(\partial \{i \in \mathcal{V},\ f(i) > t\}) dt \\ &= I \int_0^\infty \sum_{\{\{i,j\} \in \mathcal{E},\ f(j) \leq t < f(i)\}} m(i,j) dt \\ &= I \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} |f(i) - f(j)|\, m(i,j), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ce paragraphe montre que si le graphe obtenu à partir d'un bon recouvrement vérifie une inégalité isopérimétrique, alors il vérifiera des inégalités de Sobolev et nous pourrons appliquer notre théorème de recollement. Il est temps de nous placer dans un cadre plus géométrique, afin d'obtenir des inégalités concrètes.

## 2.2 Inégalités sur des variétés à courbure de Ricci positive.

Les inégalités de Sobolev sont un outil puissant en analyse globale. Malheureusement, leur existence n'est pas garantie. On sait qu'elles sont vérifiées sur les variétés à courbure de Ricci positive et à volume maximal ([Cro]). Mais dès que le croissance du volume n'est maximale, elles cessent d'être valides. Nous voulons ici trouver une hypothèse volumique plus faible que « volume maximal », mais garantissant une inégalité de Sobolev à poids.

### 2.2.1 Préliminaires géométriques.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés classiques des variétés à courbure de Ricci positive. Nous allons voir qu'elles constituent un cadre adapté à notre technique de discrétisation.

Fixons quelques notations. $B(x,t)$ sera la boule géodésique de centre $x$ et de rayon $t$. On notera $S(x,t) := \partial B(x,t)$ la sphère géodésique correspondante. $V(x,t)$ désignera le volume de $B(x,t)$. Nous distinguerons toujours un point $o$ dans la variété : quand nous considérerons des boules de centre $o$, il nous arrivera de l'omettre, écrivant par exemple $B(t)$ ou $V(t)$. Enfin, nous travaillerons beaucoup avec les anneaux $A(s,t) := B(t)\backslash B(s)$ centrés en $o$.

Le théorème de comparaison de Bishop-Gromov dit que dans les variétés à courbure de Ricci positive, la croissance du volume des boules est sous-euclidienne en un sens très fort. L'énoncé précis est le suivant.

THÉORÈME 2.2.1 (BISHOP-GROMOV) — *Soit $M$ une variété complète à courbure de Ricci positive. Alors pour tout point $x$ de $M$, la fonction $\rho_x$ définie pour $t \geq 0$ par*

$$\rho_x(t) = \frac{t^n}{\operatorname{vol} B(x,t)}$$

*est croissante. Autrement dit, pour $0 < s < t$, on a*

$$\forall\, x \in M,\ \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{\operatorname{vol} B(x,s)} \leq \left(\frac{t}{s}\right)^n. \tag{2.4}$$

*Un corollaire utile est que si $x$ et $y$ sont deux points de $M$ et si $0 < s < t + d(x,y)$, alors*

$$\frac{\operatorname{vol} B(y,t)}{\operatorname{vol} B(x,s)} \leq \frac{\operatorname{vol} B(x,t+d(x,y))}{\operatorname{vol} B(x,s)} \leq \left(\frac{t+d(x,y)}{s}\right)^n. \tag{2.5}$$

On trouvera une preuve par exemple dans [Cha]. Nous utiliserons constamment le corollaire suivant, ainsi que sa preuve.

COROLLAIRE 2.2.2 — *Soit $M^n$ une variété riemannienne complète, connexe, non compacte et à courbure de Ricci positive. Alors pour tout $\kappa > 1$, il y a une constante $C(n,\kappa) \geq 1$ telle que pour tout point $x$ de $M$ et tout réel $t > 0$,*

$$C(n,\kappa)^{-1} \leq \frac{\operatorname{vol}\left(B(x,\kappa t)\backslash B(x,t)\right)}{\operatorname{vol}\left(B(x,t)\backslash B(x,\kappa^{-1}t)\right)} \leq C(n,\kappa).$$

**Preuve.**
Pour prouver la minoration, on choisit un point $y$ sur la sphère géodésique $S(x,(\kappa+1)t/2)$ (un tel point existe parce qu'on a supposé $M$ non-compacte, complète et connexe). Alors la boule $B := B(y,(\kappa-1)t/2)$ est contenue dans $B(x,\kappa t)\backslash B(x,t)$. D'où :

$$\frac{\operatorname{vol}(B(x,t)\backslash B(x,\kappa^{-1}t))}{\operatorname{vol}(B(x,\kappa t)\backslash B(x,t))} \leq \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{\operatorname{vol} B(y,(\kappa-1)t/2)}.$$

Et (2.5) conduit à

$$\frac{\mathrm{vol}(B(x,t)\backslash B(x,\kappa^{-1}t))}{\mathrm{vol}(B(x,\kappa t)\backslash B(x,t))} \leq \left(\frac{t+\frac{(\kappa+1)t}{2}}{\frac{(\kappa-1)t}{2}}\right)^n = \left(\frac{\kappa+3}{\kappa-1}\right)^n.$$

La majoration se prouve de la même façon. ■

Partant du théorème de comparaison, P. Buser [Bus] a prouvé le

THÉORÈME 2.2.3 (BUSER) — *Sur une variété riemannienne complète non-compacte à courbure de Ricci positive, pour tout p dans* $[1,\infty[$ *et pour toute boule* $B(x,t)$*, on dispose de l'inégalité de Poincaré* $L^p$

$$\forall\, f \in C^\infty(B(x,t)),\ \int_{B(x,t)} \left|f - f_{B(x,t)}\right|^p dvol \leq C(n,p)\, t^p \int_{B(x,t)} |df|^p\, dvol, \qquad (2.6)$$

*où* $f_{B(x,t)}$ *désigne la moyenne de* $f$ *sur la boule* $B(x,t)$*, pour la mesure riemannienne dvol.*

Ce résultat fournira les inégalités élémentaires à partir desquelles on pourra travailler. En outre, il se révèlera utile dans l'étude de la géométrie à l'infini des variétés à courbure de Ricci positive (voir 2.2.8).

Nous souhaitons également mentionner le théorème de Cheeger-Gromoll ([CG1], [Bes]), qui clarifie la structure des variétés à courbure de Ricci positive. Rappelons qu'une droite est une géodésique minimisante définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

THÉORÈME 2.2.4 (CHEEGER-GROMOLL) — *Une variété riemannienne complète connexe à courbure de Ricci positive est toujours le produit riemannien d'un espace euclidien* $\mathbb{R}^d$ *et d'une variété riemannienne complète connexe à courbure de Ricci positive et sans droite.*

COROLLAIRE 2.2.5 — *Une variété riemannienne complète connexe à courbure de Ricci positive possède exactement un bout, sauf si elle s'écrit comme produit riemannien de* $\mathbb{R}$ *et d'une variété compacte.*

*Remarque* 2.2.1. Les variétés que nous considérerons auront toujours un bout : la croissance du volume des boules exclura le cas exceptionnel.

Comme nous serons amenés à travailler sur des anneaux, nous sommes intéressés par leur géométrie/topologie et en particulier par leur connexité : un ensemble non connexe ne peut pas porter d'inégalité de Sobolev-Neumann ! Dans [And], M. Anderson a prouvé que le premier nombre de Betti d'une variété riemannienne complète connexe à coubure de Ricci positive est majoré par sa dimension. Or [LT] donne une conséquence de la finitude du premier nombre de Betti :

PROPOSITION 2.2.6 — *Soit* $M$ *une variété riemannienne complète connexe, de premier nombre de Betti fini et possédant* $k$ *bouts. Fixons un point* $o$ *dans* $M$ *et considérons les boules et anneaux centrés en ce point. Alors pour* $R$ *grand et pour tout* $r > 0$*, si*

*on note $M_R$ l'union des composantes connexes non bornées de $M\backslash B(R)$, il s'avère que $A(R,R+r)\cap M_R$ a exactement $k$ composantes connexes. En particulier, si $M$ n'a qu'un bout, pour $R$ grand et pour tout $r>0$, l'anneau $A(R,R+r)$ possède une et une seule composante connexe pouvant être reliée à l'infini par un chemin restant dans $M\backslash B(R)$.*

La preuve est courte et jolie : rappelons-là.

**Preuve.**
Choisissons une base $([\gamma_1],\dots,[\gamma_b])$ de $H_1(M,\mathbb{R})$ et un nombre $R_0>0$ tel que $B(R_0)$ contient des représentants $\gamma_1,\dots\gamma_b$ de ces générateurs de l'homologie. Quitte à prendre $R_0$ plus grand, on peut supposer que $M_{R_0}$ possède $k$ composantes connexes. Prenons maintenant un nombre $R>R_0$. Soit $U$ l'union de $B(R+r)$ et des composantes connexes bornées de $M\backslash\overline{B(R)}$ : $U$ est connexe. La suite de Mayer-Vietoris correspondant au recouvrement $(U,M_R)$ de $M$ fournit la suite exacte :

$$\begin{aligned} H_1(U)\oplus H_1(M_R)\longrightarrow\quad & H_1(M) && \longrightarrow H_0(U\cap M_R)\longrightarrow\dots\\ & \dots && \longrightarrow H_0(U)\oplus H_0(M_R)\longrightarrow H_0(M)\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

La première flèche est surjective puisque $U$ contient des générateurs de $H_1(M)$ ; donc la deuxième flèche est triviale et la troisième injective. Ainsi, on a

$$0\longrightarrow H_0(U\cap M_R)\longrightarrow\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow 0,$$

de sorte que : $H_0(A(R,R+r)\cap M_R)=H_0(U\cap M_R)=\mathbb{R}^k$. ■

Donnons une interprétation en termes de discrétisation. Notre intérêt se porte sur une variété riemannienne complète connexe $M$ à courbure de Ricci positive et possédant un unique bout. Fixons un point $o$ dans $M$, choisissons des nombres $R>0$ et $\kappa>1$. On associe à ces données un graphe de la façon suivante. Un sommet est associé à $B(R)$ et à chaque composante connexe d'anneau du type $A(\kappa^iR,\kappa^{i+1}R)$, $i\in\mathbb{N}$. Deux sommets seront reliés par une arête si et seulement si l'adhérence des parties correspondantes de $M$ s'intersectent. On pourra trouver un exemple en figure 2.1. Dans ce cadre, la proposition ci-dessus nous apprend que si $R$ est choisi assez grand, ce graphe est un arbre dont la racine est le sommet correspondant à $B(R)$. Ou d'un autre point de vue, même si $R$ est petit, au dehors d'une partie finie, le graphe sera un arbre.

A priori, cet arbre possède des branches, et pour des raisons techniques (voir la preuve du lemme 2.2.13), nous aimerions nous assurer que ces branches ne sont pas trop longues. Nous avons donc besoin de contrôler la taille des composantes connexes bornées des complémentaires de boules dans la variété. C'est l'objet de la proposition suivante, que nous souhaitons énoncer dans un cadre assez général.

Proposition 2.2.7 (RCA) — *Soit $M$ une variété riemannienne complète connexe, vérifiant la condition de doublement du volume*

$$\forall\, x\in M,\ \forall\, t>0,\ \mathrm{vol}\, B(x,2t)\le C_D\,\mathrm{vol}\, B(x,t),$$

*l'inégalité de Poincaré $L^p$ à l'échelle et centrée en un point $o$ de $M$*

$$\forall\, f\in C_c^\infty(M),\ \forall\, t>0,\ \int_{B(o,t)}\left|f-f_{B(o,t)}\right|^p dvol\le C_P\, t^p\int_{B(o,t)}|df|^p\, dvol,$$

*ainsi que l'inégalité de doublement inverse du volume centrée en o*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*avec* $1 \leq p < \nu$ *et* $C_o > 0$. *Alors on peut trouver un nombre* $\kappa_0 \geq 1$ *tel que pour tout* $R > 0$, *deux points quelconques de la sphère géodésique* $S(o,R)$ *sont reliés par un chemin restant dans* $B(o,R)\backslash B(o,\kappa_0^{-1}R)$. *En outre, on peut trouver une constante* $\kappa_0$ *ne dépendant que de* $p$, $C_D$, $C_P$, $C_o$ *et* $\nu$.

Si l'on repense à la discrétisation que nous avons introduite, cela signifie que si $\kappa$ est choisi assez grand, étant donnés deux sommets situés au même niveau sur l'arbre (i.e. correspondant au même anneau), on peut toujours trouver un sommet du niveau précédent qui est relié à chacun d'eux.

**Preuve.**

On considère le graphe obtenu en travaillant comme ci-dessus avec les anneaux $A_i := A(2^{i-1}R, 2^iR)$, $i \in \mathbb{N}^*$, $R > 0$, plus $B(R) =: A_0$. Posons $B_i = B(2^iR)$ et baptisons $\mathcal{C}$ la bijection qui à chaque sommet du graphe associe la partie correspondante de la variété. Nous écrirons $\mathcal{A}_i$ pour $\mathcal{C}^{-1}(A_i)$ et $\mathcal{B}_i$ pour $\mathcal{C}^{-1}(B_i)$. Fixons $l \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble non vide

$$I_l = \{i \in [0,l],\ \mathcal{A}_l \text{ est inclus dans une composante connexe de } \mathcal{B}_l\backslash\mathcal{B}_{i-1}\}$$

et posons $i_l = \max I_l$.

Appelons $\mathcal{M}_l$ la composante de $\mathcal{B}_l\backslash\mathcal{B}_{i_l-1}$ qui contient $\mathcal{A}_l$. Nous supposons que $l - i_l$ est grand, disons, supérieur à 3. Par définition, $\mathcal{M}_l\backslash\mathcal{A}_{i_l}$ n'est pas connexe. Nous choisissons l'une de ses composantes connexes $\mathcal{X}'_l$ et nous nommons $\mathcal{Y}'_l$ l'union des autres composantes connexes. Enfin, nous posons $X'_l := \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{X}'_l)$, $Y'_l := \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{Y}'_l)$, $X_l := X'_l\backslash A_{i_l+1}$, $Y_l := Y'_l\backslash A_{i_l+1}$, $Z_l^X := X'_l \cap A_{i_l+1}$, $Z_l^Y := Y'_l \cap A_{i_l+1}$ et $Z_l := Z_l^X \cup Z_l^Y$. Un dessin est proposé en figure 2.1) : sur la droite, les sommets colorés sont ceux de $\mathcal{M}_l$ ; les éléments de $\mathcal{M}_l\backslash\mathcal{A}_{i_l}$ sont représentés en noirs, tandis que les éléments de $\mathcal{M}_l \cap \mathcal{A}_{i_l}$ sont grisés.

Etant donnés des nombres réels $a$ et $b$, on peut définir une fonction Lipschitz $f_l$ sur $B_l$ de la façon suivante :

$$f_l = \begin{cases} a & \text{sur } X_l, \\ b & \text{sur } Y_l, \\ a\frac{r_o - 2^{i_l}R}{2^{i_l}R} & \text{sur } Z_l^X, \\ b\frac{r_o - 2^{i_l}R}{2^{i_l}R} & \text{sur } Z_l^Y, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

L'inégalité de Poincaré donne

$$\int_{B_l} |f_l - (f_l)_{B_l}|^p \, dvol \leq C_P 2^{lp} R^p \int_{B_l} |df_l|^p \, dvol. \tag{2.7}$$

Choisissons $a$ et $b$ pour la valeur moyenne de $f_l$ sur $X_l \cup Y_l$ soit 0 : $a \operatorname{vol} X_l + b \operatorname{vol} Y_l = 0$. Avec $a := 1$, cela signifie $b = -\frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}$.

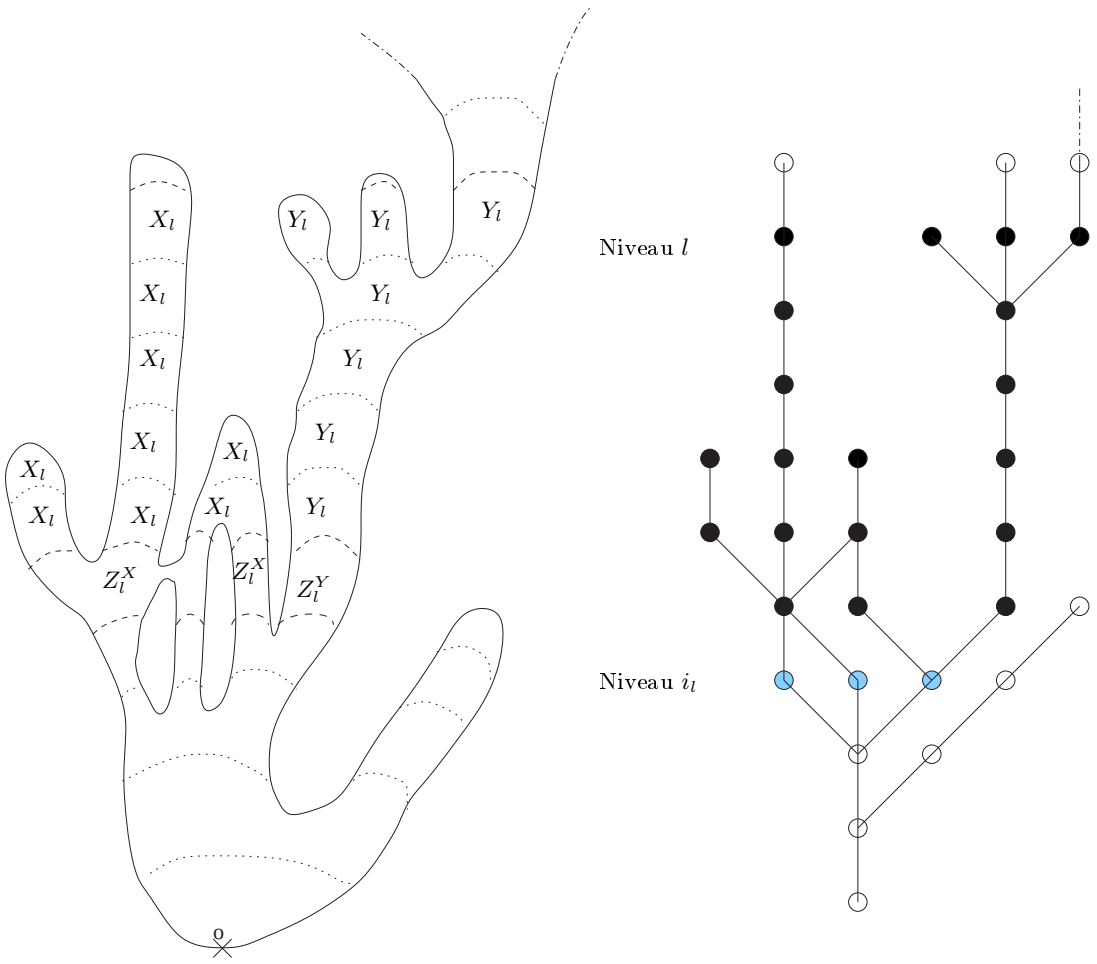



FIG. 2.1 – Une variété et sa discrétisation.

D'une part,

$$\begin{aligned}\int_{B_l} |f_l - (f_l)_{B_l}|^p \, dvol &\geq 2^{-p} \frac{\int_{B_l}\int_{B_l} |f_l(x) - f_l(y)|^p \, dxdy}{\operatorname{vol} B_l} \\ &\geq 2^{-p} \frac{\operatorname{vol} X_l \operatorname{vol} Y_l \, |b-a|^p}{\operatorname{vol} B_l} \\ &= 2^{-p} \frac{\operatorname{vol} X_l \operatorname{vol} Y_l \left(1 + \frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}\right)^p}{\operatorname{vol} B_l}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{B_l} |df_l|^p \, dvol &\leq \left(\operatorname{vol} Z_l^X \left(\frac{a}{2^{i_l} R}\right)^p + \operatorname{vol} Z_l^Y \left(\frac{b}{2^{i_l} R}\right)^p\right) \\ &= \frac{\operatorname{vol} Z_l^X + \operatorname{vol} Z_l^Y \left(\frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}\right)^p}{2^{i_l p} R^p}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}2^{-p} \frac{\operatorname{vol} X_l \operatorname{vol} Y_l \left(1 + \frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}\right)^p}{\operatorname{vol} B_l} &\leq C_P 2^{p(l-i_l)} \left(\operatorname{vol} Z_l^X + \operatorname{vol} Z_l^Y \left(\frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}\right)^p\right) \\ &\leq C_P 2^{p(l-i_l)} \operatorname{vol} Z_l \left(1 + \left(\frac{\operatorname{vol} X_l}{\operatorname{vol} Y_l}\right)^p\right),\end{aligned}$$

d'où

$$1 \leq 2^p C_P 2^{p(l-i_l)} \frac{\operatorname{vol} Z_l \operatorname{vol} B_l}{\operatorname{vol} X_l \operatorname{vol} Y_l}. \tag{2.8}$$

Par définition, le volume de $Z_l$ est majoré par $V(o, 2^{i_l+1}R)$. Une minoration de $\operatorname{vol} X_l$ peut être obtenue comme dans la preuve de (2.2.2). On choisit un point $x_l$ dans $S(o, (2^{l-2}+2^{l-1})R/2) \cap X_l$ et on note que $B(x_l, 2^{l-3}R)$ est inclus dans $X_l$ : cette boule est clairement contenue dans $A(2^{l-2}R, 2^{l-1}R)$ et elle est connexe, donc elle est incluse dans la composante connexe de son centre $x_l$ dans $A(2^{l-2}R, 2^{l-1}R)$, donc dans $X_l$. La condition de doublement du volume donne :

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq s > 0,\ V(x,t) \leq C_D (t/s)^{\log_2 C_D} V(x,s),$$

de sorte que

$$\frac{V(o, 2^l R)}{V(x_l, 2^{l-3}R)} \leq C_D \left(\frac{2^l + (2^{l-2}+2^{l-1})/2}{2^{l-3}}\right)^{\log_2 C_D} = C_D 11^{\log_2 C_D}$$

et

$$\operatorname{vol} X_l \geq V(x_l, 2^{l-3}R) \geq C_D^{-1} 11^{-\log_2 C_D} V(o, 2^l R).$$

Comme on dispose de la même minoration pour $\operatorname{vol} Y_l$, (2.8) fournit :

$$1 \leq 2^p C_P C_D^2 121^{\log_2 C_D} 2^{p(l-i_l)} \frac{V(o, 2^{i_l+1}R)}{V(o, 2^l R)}.$$

L'inégalité de doublement inverse du volume permet d'écrire :

$$1 \leq 2^p C_P C_D^2 121^{\log_2 C_D} 2^\nu C_o^{-1} 2^{(l-i_l)(p-\nu)}.$$

Comme $\nu > p$, cette inégalité dit que $l - i_l$ est majoré par une constante indépendante de $l$ : les branches de l'arbre ont une longueur bornée. (2.2.8) en découle. ■

COROLLAIRE 2.2.8 — *Soit $M$ une variété riemannienne complète connexe à courbure de Ricci positive. Supposons qu'il y a un point $o$ de $M$ ainsi que de réels $C_o > 0$ et $\nu > 1$ tels que*

$$\forall t > s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^\nu.$$

*Alors on peut trouver un nombre $\kappa_0 = \kappa_0(n, \nu, C_o) \geq 1$ tel que pour tout $R > 0$, deux points quelconques de la sphère géodésique $S(o,R)$ sont reliés par un chemin restant dans $B(o,R)\backslash B(o, \kappa_0^{-1} R)$.*

### 2.2.2 Inégalités sur les composantes connexes d'anneaux.

Nous prouvons ici que des inégalités de Poincaré ou Sobolev sur des boules impliquent des inégalités analogues sur des morceaux connexes d'anneaux.

LEMME 2.2.9 — *Soit $M^n$ une variété riemannienne complète noncompacte, connexe et à courbure de Ricci positive. Fixons $p \geq 1$, $R > 0$, $\kappa > 1$ et considérons un borélien connexe $A$ inclus dans l'anneau $B(o, \kappa R)\backslash B(o,R)$, $o \in M$. Alors pour $0 < \delta < 1$, le $\delta R$-voisinage $A_\delta$ de $A$ vérifie l'inégalité de Poincaré suivante :*

$$\forall\, f \in C^\infty(A_\delta),\ \int_A |f - f_A|^p \, dvol \leq C(n, \kappa, \delta, p) R^p \int_{A_\delta} |df|^p \, dvol.$$

**Preuve.**
Posons $s = \delta R/3$ et considérons un $s$-réseau maximal $(x_i)_{i \in I}$ de $A$, i.e. un sous-ensemble maximal de $A$ dont tous les points sont à distance mutuelle supérieur ou égale à $s$. Nous posons $V_i = B(x_i, s)$, $V_i^* = V_i^\sharp = B(x_i, 3s)$. Alors $(V_i, V_i^*, V_i^\sharp)_{i \in I}$ est un bon recouvrement de $A$ dans $A_\delta$ (cf. (2.1.1)), par rapport à la mesure riemannienne. Pour (iii), on peut noter que les $V_i^*$ considérés sont contenus dans $B(x_{i_0}, 9s)$ et utiliser (2.5) pour obtenir $\operatorname{vol}(B(x_{i_0}, 9s)) \leq 30^n \operatorname{vol}(B(x_i, \frac{s}{2}))$ ; puisque les boules $B(x_i, \frac{s}{2})$ sont disjointes, on voit que $Q_1 = 30^n$ convient. Pour (iv), on peut choisir $k(i,j) = i$. Concernant (v), (2.4) fournit $\operatorname{vol}(V_i^*) \leq 3^n \operatorname{vol}(V_i)$ et (2.5) donne $\operatorname{vol}(V_i^*) \leq 5^n \operatorname{vol}(V_j)$, donc on peut prendre $Q_2 = 5^n$.

Notre intention est d'appliquer le théorème 2.1.6 avec $k = \infty$. Le théorème de Buser (2.6) fournit l'inégalité continue, avec constante $C(n,p)s^2$. Quid de l'inégalité discrète ?

En remarquant que les boules $B(x_i, \frac{s}{2})$ sont disjointes et contenues dans $B(o, \kappa R + \frac{s}{2})$, on trouve

$$\operatorname{Card}(I) \min_{i \in I} \operatorname{vol}(B(x_i, s/2)) \leq \operatorname{vol}(B(o, \kappa R + s/2)),$$

et avec (2.5), ceci implique une majoration du nombre de boules dans le recouvrement :

$$\mathrm{Card}(I) \leq \left(\frac{\kappa R + s/2 + \kappa R}{s/2}\right)^n = (1 + 12\kappa/\delta)^n =: N = N(n, \kappa, \delta).$$

Et cette borne est indépendante de $R$.

Or tout graphe fini connexe pondéré par la mesure de dénombrement vérifie une inégalité de Poincaré : cela découle de l'équivalence des normes sur un espace normé de dimension finie (la connexité assure qu'on compare bien deux normes). Comme il n'y a qu'un nombre fini de graphes possédant au plus $N$ sommets, on en conclut que tous les graphes pondérés de ce type vérifient une inégalité de Poincaré avec la même constante $P = P(N, p)$ (on verra plus loin qu'on peut même donner une constante explicite). Comme (2.5) donne

$$\forall\, i, j \in \mathcal{V},\ \frac{\mathrm{vol}(V_i)}{\mathrm{vol}(V_j)} \leq (1 + 6\kappa/\delta)^n,$$

il y a un nombre $K = K(n, \kappa, \delta) \geq 1$ tel que $K^{-1} m_0 \leq m(i) \leq K m_0$, où $m_0$ est une mesure proportionnelle à la mesure de dénombrement sur le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Alors pour tout $f$ de $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - m(f)|^p\, m(i)\right)^{1/p} &\leq 2 \inf_{c\in\mathbb{R}} \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - c|^p\, m(i)\right)^{1/p} \\
&\leq 2 \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - m_0(f)|^p\, m(i)\right)^{1/p} \\
&\leq 2K \left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - m_0(f)|^p\, m_0(i)\right)^{1/p} \\
&\leq 2PK^{1/p} \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i) - f(j)|^p\, m_0(i,j)\right)^{1/p} \\
&\leq 2PK^{2/p} \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i) - f(j)|^p\, m(i,j)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Ceci fournit une inégalité de Poincaré discrète $L^p$ de dimension infinie, avec une constante ne dépendant que de $n$, $\kappa$, $\delta$ et $p$. (2.1.6) termine la preuve. ■

Le même procédé conduit à une inégalité de Sobolev. Rappelons d'abord un théorème de P. Maheux et L. Saloff-Coste ([MSC]) : sur une variété riemannienne complète connexe et à courbure de Ricci positive, toute fonction lisse $f$ sur une boule $B(x,t)$ vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\left(\int_{B(x,t)} \left|f - f_{B(x,t)}\right|^{\frac{2n}{n-2}} dvol\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n) \frac{t^2}{\mathrm{vol}\, B(x,t)^{\frac{2}{n}}} \int_{B(x,t)} |df|^2\, dvol, \qquad (2.9)$$

Cette inégalité de Sobolev sur les boules est en fait une conséquence automatique de la propriété de doublement du volume (impliquée par (2.4)) et de l'inégalité de Poincaré sur les boules (fournie par (2.6)). On en déduit le

LEMME 2.2.10 — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète non-compacte, connexe et à courbure de Ricci positive. Fixons $p \geq 1$, $R > 0$, $\kappa > 1$ et considérons un borélien connexe $A$ inclus dans l'anneau $B(o, \kappa R) \backslash B(o, R)$, $o \in M$. Alors pour $0 < \delta < 1$, le $\delta R$-voisinage $A_\delta$ de $A$ vérifie l'inégalité de Sobolev suivante :*

$$\forall\, f \in C^\infty(A_\delta),\ \left( \int_A |f - f_A|^{\frac{2n}{n-2}}\, dvol \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n, \kappa, \delta) \frac{R^2}{\operatorname{vol} B(o, R)^{\frac{2}{n}}} \int_{A_\delta} |df|^2\, dvol.$$

**Preuve.**
Nous expliquons seulement comment adapter la preuve précédente, en gardant ses notations. On veut appliquer (2.1.6) avec $p = 2$ et $k = n$, pour le même bon recouvrement. Posons $q = \frac{2n}{n-2}$. L'inégalité de Poincaré discrète $L^q$ dont nous avons besoin est donnée par la preuve précédente. Ensuite, (2.5) dit pour tout $i$ de $I$, on a :

$$\frac{V(o, R)}{V(x_i, \delta R/3)} \leq \left( \frac{1 + \kappa}{\delta/3} \right)^n,$$

d'où $V(x_i, 3s) \geq V(x_i, s) \geq C(n, \kappa, \delta) V(o, R)$, de sorte que le théorème de Maheux-Saloff-Coste (2.9) fournit une inégalité de Sobolev-Neumann continue pour la paire de mesures (vol, vol) :

$$\forall\, f \in C^\infty(V_i^*),\ \left( \int_{V_i} |f - f_{V_i}|^q\, dvol \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(n, \kappa, \delta) R^2 V(o, R)^{-2/n} \int_{V_i^*} |df|^2\, dvol, \quad (2.10)$$

et

$$\forall\, f \in C^\infty(V_i^\sharp),\ \left( \int_{V_i^*} \left| f - f_{V_i^*} \right|^q\, dvol \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(n, \kappa, \delta) R^2 V(o, R)^{-2/n} \int_{V_i^\sharp} |df|^2\, dvol. \quad (2.11)$$

(2.1.6) permet de conclure. ■

Nous souhaitons faire une petite remarque. Dans les preuves ci-dessus, nous avons obtenu les inégalités discrètes par un argument de finitude. En fait, on peut trouver des constantes explicites, en utilisant la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.11 — *Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe fini connexe, possédant $N_v$ sommets et muni de la mesure de dénombrement. Fixons $p \geq 1$. Alors pour toute fonction réelle $f$ sur $\mathcal{V}$, on a*

$$\sup_{i \in \mathcal{V}} |f(i) - m(f)| \leq (N_v - 1)^{1 - 1/p} \left( \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} |f(i) - f(j)|^p \right)^{1/p}$$

*et en particulier*

$$\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i) - m(f)|^p \leq N_v(N_v-1)^{p-1} \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|^p \,.$$

**Preuve.**
D'abord, on peut se ramener au cas où le graphe est un arbre : couper des arêtes ne change pas le membre de gauche et réduit le membre de droite. Maintenant, dans le cas d'un arbre, on a exactement $N_v - 1$ arêtes. A chaque arête $e$, on associe une copie $I_e$ du segment $[0,1]$ ; on peut voir les extrémités de $I_e$ (0 et 1) comme deux sommets dans le graphe $\mathcal{G}$. On peut construire un espace $X$ en collant les segments $I_e$ de la façon naturelle, c'est-à-dire en identifiant les extrémités correspondant au même sommet du graphe. $X$ vient muni d'une topologie et d'une mesure borélienne naturelles, provenant de celles de $[0,1]$. De plus, le complémentaire $\tilde{X}$ de l'ensemble des points de collage possède une structure différentielle et même riemannienne.

Etant donnée une fonction $g$ qui est continue sur $X$, $C^1$ sur $\tilde{X}$ et s'annule quelque part, on a l'inégalité suivante :

$$\|g\|_{L^\infty(X)} \leq (N_v-1)^{1-1/p} \left\|g'\right\|_{L^p(X)} . \tag{2.12}$$

Pour prouver ceci, on choisit un point $x_0$ tel que $g(x_0) = 0$. Alors pour tout point $x$ de l'espace connexe par arcs $X$, on peut trouver un chemin unitaire $\gamma$ reliant $x_0$ à $x$ et passant par chaque segment une seule fois. On peut écrire $g(x) = \int_\gamma g'$ et utiliser l'inégalité de Hölder :

$$|g(x)| \leq \mathrm{long}(\gamma)^{1-1/p} \left(\int_\gamma |g'|^p\right)^{1/p} \leq (N_v-1)^{1-1/p} \left\|g'\right\|_{L^p(X)} .$$

Si on se donne $f$ dans $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$, on peut définir une fonction continue $g$ sur $X$ de la façon suivante : $g$ est affine sur chaque segment $I_e$ et ses valeurs aux extrémités de $I_e$ sont celles de $f$. Si $e$ est une arête de $\mathcal{G}$ reliant des sommets $i$ et $j$, identifiés respectivement à 0 et 1 dans $I_e \cong [0,1]$, alors la restriction de $g$ à $I_e$ s'identifie à la fonction $g_e$ définie sur $[0,1]$ par la formule

$$g_e(t) = f(i) + t(f(j) - f(i)).$$

Une telle fonction $g$ adment une dérivée $g'$ qui est définie hors des points de collage et constante sur (l'image dans $X$ de) l'interieur de de chaque segment $I_e$ : $g'_e = f(j) - f(i)$. Si $f$ est de moyenne nulle, on peut appliquer (2.12) à la fonction $g$ correspondante, puisque $g$ prend toutes les valeurs de l'enveloppe convexe de l'image de $f$ et donc s'annule quelque part. Avec

$$\|g\|_{L^\infty(X)} = \|f\|_{L^\infty(\mathcal{V})}$$

et

$$\left\|g'\right\|_{L^p(X)} = \left(\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}} |f(i)-f(j)|^p\right)^{1/p} ,$$

(2.12) fournit le résultat annoncé. ■

*Remarque* 2.2.2. On peut aussi donner une preuve discrète. Par exemple, on peut remarquer que pour tout réel $c$,

$$\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)-m(f)|^p\right)^{1/p} \leq 2\left(\sum_{i\in\mathcal{V}} |f(i)-c|^p\right)^{1/p};$$

En choisissant $c$ pour que $f-c$ s'annule en un sommet, on peut adapter l'argument ci-dessus en restant dans le monde discret. Mais alors la constante qu'on trouve est doublée.

### 2.2.3 L'inégalité de Sobolev à poids.

Dans ce paragraphe, $M$ est une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 3$, à courbure de Ricci positive et vérifiant l'inégalité de doublement inverse du volume

$$\forall t > s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}. \tag{2.13}$$

où $o$ est un point distingué dans $M$, $C_o$ est un réel strictement positif et $\nu$ est un réel strictement supérieur à 2 (le passage de $\nu > 1$ à $\nu > 2$ sera justifié à la fin de ce paragraphe). Notre objectif est de prouver une inégalité de Sobolev à poids sur $M$ en recourant au théorème (2.1.5), avec les paramètres $p = 2$ et $k = n$ et un bon recouvrement que nous bâtissons maintenant.

#### Un bon recouvrement.

Pour commencer, nous choisissons un nombre $\kappa$ suffisamment grand pour assurer que pour tout choix d'échelle $R > 0$, deux composantes connexes de l'anneau $A(R, \kappa R)$ sont toujours contenues dans une même composante de $A(\kappa^{-1}R, \kappa R)$ : ceci est possible par (2.2.8). Rappelons que $\kappa$ peut être choisi explicitement en fonction de $n$, $C_o$ et $\nu$. Nous choisissons aussi un rayon $\gamma$ émanant de $o$ (un rayon est une géodésique minimisante définie sur $\mathbb{R}_+$ ; l'existence d'un rayon partant de $o$ est équivalente à la non-compacité de $M$, par complétude). Et nous introduisons la notation $R_i := \kappa^i$ ($i \in \mathbb{Z}$).

Pour tout entier $i$, nous appelons $U'_{i,a}$, $0 \leq a \leq h'_i$, les composantes connexes de $A(R_{i-1}, R_i)$, $U'_{i,0}$ étant celle qui intersecte $\gamma$. Comme dans les preuves de 2.2.9 et 2.2.10, (2.5) fournit une borne $h(n,\kappa) < \infty$ sur les $h'_i$, $i$ variant dans $\mathbb{Z}$.

A priori, ces boréliens ne permettent pas de construire immédiatement un bon recouvrement parce que certains des $U'_{i,a}$ pourraient fort bien être petits par rapport à leurs voisins, contredisant (v) dans 2.1.1. C'est pourquoi on doit les modifier légèrement, en collant les composantes connexes du niveau $i$ de petit volume à des composantes connexes du niveau $i-1$ de grand volume. Expliquons ceci plus précisément.

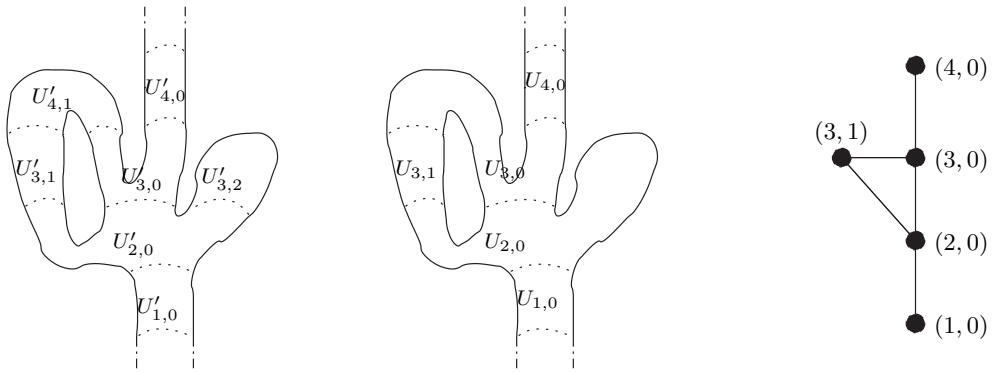
On procède en deux temps.

- D'abord, on pose $U_{i,a} = U'_{i,a}$ pour tout entier $i$ et pour tout $a$ de $[1, h'_i]$ tels que $\overline{U'_{i,a}}$ intersecte $A(R_i, R_{i+1})$ ; ces $U_{i,a}$ contiennent un point $x$ de la sphère $S((R_{i-1}+R_i)/2)$ et donc une boule de centre $x$ et de rayon $R_{i-2}$, dont le volume est comparable à $V(R_i)$ (par (2.5)).

– Ensuite, on considère les $U'_{i,a}$ tels que $\overline{U'_{i,a}} \cap A(R_i, R_{i+1})$ est vide. Par choix de $\kappa$, il y a un entier $b$ de $[0, h'_{i-1}]$ tel que $U'_{i,a} \cup U'_{i-1,b}$ est connexe : on agrandit $U_{i-1,b}$ en lui ajoutant $U'_{i,a}$.

Après oubli des indices désormais inutiles, on récupère un recouvrement $(U_{i,a})$ de $M\setminus\{o\}$, indexé par $i \in \mathbb{Z}$ et $a \in [0, h_i]$, avec $h_i \leq h'_i \leq h(n,\kappa)$, $U_{i,a} \subset A(R_{i-1}, R_{i+1})$ et $\operatorname{vol} U_{i,a} \approx V(R_i)$.

La figure 2.2.3 donne un exemple : sur la gauche sont représentées différentes composantes connexes d'anneaux $A(R_{i-1}, R_i)$ ; au centre, on voit le recouvrement modifié ; sur la droite se trouve le graphe (« d'intersection ») qu'on lui associera.




Pour $i$ dans $\mathbb{Z}$ et $0 \leq a \leq h_i$, nous désignerons par $U^*_{i,a}$ l'union des $U_{j,b}$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq b \leq h_j$, dont l'adhérence intersecte $\overline{U_{i,a}}$. Et de même, $U^\sharp_{i,a}$ sera l'union des $U^*_{j,b}$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq b \leq h_j$, dont l'adhérence intersecte $\overline{U^*_{i,a}}$.

Introduisons la mesure $d\mu_\rho = \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} dvol$, où $r = r_o = d(o,.)$ et $\rho(t) = \rho_o(t)$ est définie pour $t \geq 0$ par $\rho(t) = \frac{t^n}{V(t)}$. Le théorème de Bishop-Gromov dit que $\rho$ est une fonction croissante et, en fait, pour $0 < s \leq t$, on dispose de l'inégalité

$$1 \leq \frac{\rho(t)}{\rho(s)} \leq \left(\frac{t}{s}\right)^n. \tag{2.14}$$

En outre, $\rho(0) = \omega_n^{-1}$, où $\omega_n$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Par construction, $\mathcal{U} = (U_i, U_i^*, U_i^\sharp)$ constitue un bon recouvrement de $M$ dans $M$, par rapport à la paire de mesures $(\mu_\rho, \mathrm{vol})$ : (v) est de nouveau un conséquence de (2.5).

Il s'agit maintenant de prouver les inégalités de Sobolev continue et discrète de nos rêves.

**L'inégalité de Sobolev continue.**

LEMME 2.2.12 — *Pour tout entier $i$ et pour $0 \leq a \leq h_i$, toute fonction $f$ lisse sur $U^\sharp_{i,a}$ vérifie*

$$\left(\int_{U_{i,a}} |f - f_{U_{i,a}}|^{\frac{2n}{n-2}} \, d\mu_\rho\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S_c \int_{U^*_{i,a}} |df|^2 \, dvol$$

*ainsi que*

$$\left(\int_{U^*_{i,a}} \left|f - f_{U^*_{i,a}}\right|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_\rho\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S_c \int_{U^\sharp_{i,a}} |df|^2 \, dvol,$$

*avec* $S_c = S_c(n,\kappa)$.

**Preuve.**
Posons $q = \frac{2n}{n-2}$. Pour tout $f$ appartenant à $C^\infty(U^\sharp_{i,a})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{U_{i,a}} \left|f - f_{U_{i,a},\mu_\rho}\right|^q d\mu_\rho &\leq 2^q \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{U_{i,a}} |f-c|^q \, d\mu_\rho \\ &\leq 2^q \int_{U_{i,a}} \left|f - f_{U_{i,a},\mathrm{vol}}\right|^q d\mu_\rho,\end{aligned}$$

de sorte que (2.2.10) (avec un petit $\delta : 0 < \delta < 1 - \kappa^{-1}$) et (2.14) impliquent

$$\begin{aligned}\left(\int_{U_{i,a}} |f - f_{U_{i,a}}|^q \, d\mu_\rho\right)^{2/q} &\leq \rho(R_{i-1})^{-2/n} C(n,\kappa) \rho(R_{i+1})^{2/n} \int_{U^*_{i,a}} |df|^2 \, dvol \\ &\leq C(n,\kappa)\kappa^{2n} \int_{U^*_{i,a}} |df|^2 \, dvol \\ &\leq C(n,\kappa) \int_{U^*_{i,a}} |df|^2 \, dvol.\end{aligned}$$

Et on a des estimées similaires sur les paires $(U^*_{i,a}, U^\sharp_{i,a})$, pour la même raison. ■

**L'inégalité de Sobolev discrète.**

Considérons le graphe pondéré $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, m_\rho)$ associé au bon recouvrement $\mathcal{U}$ de $M$ dans $M$, par rapport à $(\mu_\rho, vol)$ (pour simplifier les notations, nous écrirons $m_\rho$ au lieu de $m_{\mu_\rho}$). Le degré des sommets du graphe est majoré (grossièrement, par $3h(n,\kappa)$). La mesure $m_\rho$ est définie de la façon suivante : pour $i$ dans $\mathbb{Z}$ et $a$ dans $[0, h_i]$, on a

$$m_\rho(i,a) = \int_{U_{i,a}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} dvol,$$

d'où l'estimation :

$$\mathrm{vol}(U_{i,a})\rho(R_{i+1})^{-\frac{2}{n-2}} \leq m_\rho(i,a) \leq \mathrm{vol}(U_{i,a})\rho(R_{i-1})^{-\frac{2}{n-2}};$$

en utilisant (2.5) et (2.14), ceci conduit à

$$C(n,\kappa)^{-1} V(R_i)\rho(R_i)^{-\frac{2}{n-2}} \leq m_\rho(i,a) \leq C(n,\kappa) V(R_i)\rho(R_i)^{-\frac{2}{n-2}}. \tag{2.15}$$

Grâce à (2.5) et (2.14), ceci permet d'appliquer 2.1.7 : reste à prouver une inégalité isopérimétrique (2.3). Etant donnée une partie finie $\Omega$ de $\mathcal{V}$, on définit

$$l := \max\left\{i \in \mathbb{Z},\, \exists\, a \in [0, h_i],\ (i,a) \in \Omega\right\}.$$

Afin d'estimer le quotient isopérimétrique associé à $\Omega$, on choisit une arête $e$ dans $\partial\Omega$.

– Si $(l,0)$ est dans $\Omega$, l'arête $e := ((l,0),(l+1,0))$ est dans $\partial\Omega$.
– Sinon, on peut quand même trouver un $(l,b)$ dans $\Omega$. Notre choix de $\kappa$ assure qu'il y a une suite d'arêtes, restant entre les niveaux $l$ et $l-1$ et reliant $(l,b)$ à $(l,0)$. Parmi ces arêtes, il y en a nécessairement une qui relie un élément de $\Omega$ à un élément du complémentaire de $\Omega$ et nous l'appelons $e$ : $e$ est dans $\partial\Omega$.

Alors on peut écrire

$$\frac{m_\rho(\Omega)}{m_\rho(\partial\Omega)} \leq \frac{\sum_{i=-\infty}^{l}\sum_{a=0}^{h_i} m_\rho(i,a)}{m_\rho(e)} \leq C(n,\kappa)\sum_{i=-\infty}^{l}\frac{\sum_{a=0}^{h_i} m_\rho(i,a)}{m_\rho(l,0)}.$$

Avec (2.14), il vient

$$\begin{aligned}\frac{m_\rho(\Omega)}{m_\rho(\partial\Omega)} &\leq C(n,\kappa)\sum_{i=-\infty}^{l}\frac{V(R_i)\rho(R_i)^{-\frac{2}{n-2}}}{V(R_l)\rho(R_l)^{-\frac{2}{n-2}}}\\ &= C(n,\kappa)\sum_{i=-\infty}^{l}\left[\frac{V(R_i)}{V(R_l)}\left(\frac{R_i}{R_l}\right)^{-2}\right]^{\frac{n}{n-2}}\end{aligned}$$

de sorte que (2.13) donne

$$\begin{aligned}\frac{m_\rho(\Omega)}{m_\rho(\partial\Omega)} &\leq C(n,\kappa)C_o^{-\frac{n}{n-2}}\sum_{i=-\infty}^{l}\left(\frac{R_i}{R_l}\right)^{\frac{n(\nu-2)}{n-2}}\\ &= C(n,\kappa)C_o^{-\frac{n}{n-2}}\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{-j\frac{n(\nu-2)}{n-2}}\\ &= \frac{C(n,\kappa)C_o^{-\frac{n}{n-2}}}{1-\kappa^{-\frac{n(\nu-2)}{n-2}}},\end{aligned}$$

si on choisit $\nu > 2$. En vertu de (2.1.7) et (2.1.9), avec $k = \infty$, on a prouvé le

LEMME 2.2.13 — *Pour tout $p$ appartenant à $[1,\infty[$, il y a un nombre $S_d$, dépendant de $p$, $\kappa$, $n$, $C_o$ et $\nu$, tel que pour toute fonction réelle $f$ à support fini dans $\mathcal{V}$ :*

$$\left(\sum_{v\in\mathcal{V}}|f(v)|^p\, m_\rho(v)\right)^{\frac{1}{p}} \leq S_d\left(\sum_{(v,w)\in\mathcal{E}}|f(v)-f(w)|^p\, m_\rho(v,w)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Conclusion.**

THÉORÈME 2.2.14 (INÉGALITÉ DE SOBOLEV À POIDS) — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe et à courbure de Ricci positive. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$ et des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*Alors $M$ vérifie l'inégalité de Sobolev à poids*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}} dvol\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq S \int_M |df|^2\, dvol.$$

*On peut de plus trouver une constante $S$ ne dépendant que de $n$, $C_o$ et $\nu$.*

**Preuve.**
On applique 2.1.5, 2.2.12 et 2.2.13. ■

*Remarque* 2.2.3. Le doublement inverse du volume (2.13) entraîne une minoration du volume des grandes boules :

$$\forall\, t \geq 1,\ \mathrm{vol}\, B(o,t) \geq A_o t^\nu,$$

avec $A_o = C_o \,\mathrm{vol}\, B(o,1)$. Grâce à cela, 2.2.14 implique

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \underline{r_o}^{-\frac{2(n-\nu)}{n-2}} dvol\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \tilde{S} \int_M |df|^2\, dvol,$$

où $\tilde{S}$ dépend de $n$, $C_o$, $\nu$ and $\mathrm{vol}\, B(o,1)$ et où $\underline{r_o}$ est la fonction constante à 1 sur $B(o,1)$ et égale à $r_o$ ailleurs. Si $\nu$ est différent de $n$, on ne peut pas écrire $r_o$ à la place de $\underline{r_o}$. En effet, la géométrie locale est presque euclidienne et l'inégalité avec $r_o$ est fausse dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple, utiliser la famille de fonctions $\max(1 - r_o/\epsilon, 0)$, $\epsilon > 0$).

La meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev à poids mérite peut-être un nom.

Définition 2.2.15 — *Soit $M^n$ une variété riemannienne complète connexe, avec $n \geq 3$. Pour tout point $o$ de $M$, on définit l'invariant riemannien*

$$S_o(M) := \sup_{f \in C_c^\infty(M)\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}} dvol\right)^{1-\frac{2}{n}}}{\int_M |df|^2\, dvol}.$$

La même méthode donne

Théorème 2.2.16 — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe et à courbure de Ricci positive. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$ et des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\mathrm{vol}\, B(o,t)}{\mathrm{vol}\, B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^\nu.$$

*Alors pour tout $\beta > -\frac{\nu-2}{n-\nu}$, $M$ vérifie l'inégalité*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \rho_o(r_o)^{\frac{n\beta-2}{n-2}} dvol\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S_\beta \int_M |df|^2\, \rho_o(r_o)^\beta dvol,$$

*avec $S_\beta = S_\beta(n, C_o, \nu, \beta)$.*

**Preuve.**
Nous souhaitons appliquer (2.1.5) aux mesures $\rho_o(r_o)^{\frac{n\beta-2}{n-2}}dvol$ et $\rho_o(r_o)^\beta dvol$, avec le même bon recouvrement. Notre choix de poids assure l'inégalité de Sobolev continue, comme dans (2.2.12) : pour $i$ dans $\mathbb{Z}$, $a$ dans $[0,h_i]$ et $f$ dans $C^\infty(U_i^*)$, (2.2.10) fournit

$$\left(\int_{U_{i,a}} \left|f-f_{U_{i,a}}\right|^{\frac{2n}{n-2}} \rho_o(r_o)^{\frac{n\beta-2}{n-2}}\,dvol\right)^{1-2/n} \leq C(n,\kappa)\rho_o(R_i)^{\frac{n\beta-2}{n}}\rho_o(R_i)^{\frac{2}{n}}\int_{U_{i,a}^*}|df|^2\,dvol$$

et le membre de droite peut être majoré par

$$\begin{aligned} & C(n,\kappa) \quad \rho_o(R_i)^{\frac{n\beta-2}{n}}\rho_o(R_i)^{\frac{2}{n}}\rho_o(R_i)^{-\beta}\int_{U_{i,a}^*}|df|^2\,\rho_o(r_o)^\beta dvol \\ = \; & C(n,\kappa) \quad \int_{U_{i,a}^*}|df|^2\,\rho_o(r_o)^\beta dvol. \end{aligned}$$

Concernant l'inégalité discrète, on procède comme dans la preuve de 2.2.13. Essentiellement, avec les mêmes notations que dans cette preuve, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{m(\Omega)}{m(\partial\Omega)} \leq \; & C(n,\kappa) \quad \sum_{i=-\infty}^{l}\frac{V(R_i)\rho(R_i)^{\frac{n\beta-2}{n-2}}}{V(R_l)\rho(R_l)^{\frac{n\beta-2}{n-2}}} \\ = \; & C(n,\kappa) \quad \sum_{i=-\infty}^{l}\left[\left(\frac{V(R_i)}{V(R_l)}\right)^{1-\beta}\left(\frac{R_i}{R_l}\right)^{n\beta-2}\right]^{\frac{n}{n-2}} \end{aligned}$$

de sorte que (2.13) fournit

$$\frac{m(\Omega)}{m(\partial\Omega)} \leq C(n,\kappa)C_o^{-\frac{n(1-\beta)}{n-2}}\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{-j\frac{n(\nu-2+\beta(n-\nu))}{n-2}},$$

cette quantité étant finie grâce à notre hypothèse sur $\beta$. ■

*Remarque* 2.2.4. Si $\beta=1$, l'inégalité s'écrit

$$\forall\, f\in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\,\frac{r_o^n}{\operatorname{vol}B(o,r)}dvol\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S\int_M |df|^2\,\frac{r_o^n}{\operatorname{vol}B(o,r)}dvol$$

Dans cette inégalité, on voit bien ce qui se passe : la croissance du volume des boules n'est pas euclidienne (maximale) en général, ce qui brise tout espoir d'inégalité de Sobolev avec l'exposant usuel et sans poids (cf. prochain paragraphe) ; néanmoins, en modifiant radialement la mesure riemannienne pour qu'elle ait une croissance euclidienne, on arrive à récupérer une inégalité de Sobolev standard.

**Inégalité de Sobolev et croissance du volume.**

L'objet de ce court paragraphe est d'expliquer ce que l'inégalité de Sobolev à poids, sous la forme donnée par la remarque 2.2.3, implique sur la croissance du volume des boules. La proposition suivante généralise un fait bien connu dans le cas des inégalités de Sobolev sans poids.

PROPOSITION 2.2.17 — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe non-compacte et à courbure de Ricci positive. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$ et des nombres $\alpha \geq 0$, $S > 0$ tels que*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \underline{r_o}^{-\alpha} dvol\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq S \int_M |df|^2\, dvol.$$

*Notons $\nu$ le nombre réel défini par $\alpha = 2\frac{n-\nu}{n-2}$. Alors il existe $A_o > 0$ tel que pour tout $t \geq 1$, $\operatorname{vol} B(o,t) \geq A_o t^\nu$.*

*Remarque* 2.2.5. Dans le cas sans poids ($\alpha = 0$), on retrouve le fait que l'inégalité de Sobolev usuelle requiert une croissance du volume au moins euclidienne.

**Preuve.**
Comme d'habitude, posons $q = 2n/(n-2) > 2$. Fixons $R \geq 2$ et $0 < t \leq R/2$, et considérons la fonction Lipschitz $f := \max(t - d(.,S(o,R)),0)$ : $f = t$ sur la sphère $S(o,R)$, $f = 0$ hors d'un $t$-voisinage de cette sphère et sur ce $t$-voisinage, $f$ décroît radialement à vitesse 1. Ainsi,

$$\int_M |f|^q\, r^{-\alpha} dvol \geq (t/2)^q (R+t)^{-\alpha} \operatorname{vol}(A(R-t/2, R+t/2)$$

et

$$\int_M |df|^2\, dvol \leq \operatorname{vol}(A(R-t, R+t).$$

L'inégalité de Sobolev donne :

$$(t/2)^2 (R+t)^{-2\alpha/q} \operatorname{vol}(A(R-t/2, R+t/2)^{2/q} \leq S \operatorname{vol}(A(R-t, R+t).$$

Etant donné $i \in \mathbb{N}^*$, on applique ceci à $t = 2^{-i}R$. Avec $V_i := \operatorname{vol}(A(R(1-2^{-i}), R(1+2^{-i}))$, on a

$$R^2 4^{-i-1} ((1+2^{-i})R)^{-2\alpha/q} V_{i+1}^{2/q} \leq S V_i.$$

Par récurrence, on obtient une constante $C$ indépendante de $R$ et telle que pour tout $i \geq 1$,

$$\operatorname{vol}(B(2R)) \geq V_1 \geq \left(CR^{2-2\alpha/q}\right)^{\sum_{j=0}^{i-1}(2/q)^j} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (4^{-j})^{(2/q)^j}\right) V_i^{(2/q)^i}.$$

Or une variété riemannienne est localement quasi-euclidienne, donc on a

$$\liminf_{i\longrightarrow\infty} V_i^{(2/q)^i} \geq \liminf_{i\longrightarrow\infty} \left(\omega_n (2^{-i}R)^n\right)^{(2/q)^i} = 1.$$

En fin de compte, on trouve

$$\mathrm{vol}(B(2R)) \geq C^{\frac{1}{1-2/q}} R^{\frac{2-2\alpha/q}{1-2/q}} \prod_{j=0}^{\infty} (4^{-j})^{(2/q)^j}.$$

Et $\alpha = 2\frac{n-\nu}{n-2}$ équivaut à $\nu = \frac{2-2\alpha/q}{1-2/q}$. ■

### 2.2.4 L'inégalité de Hardy.

Avec 2.1.5, on peut aussi recoller des inégalités de Poincaré. En travaillant dans le même cadre que précédemment, l'inégalité globale qu'on trouve est une inégalité de Hardy.

THÉORÈME 2.2.18 (INÉGALITÉ DE HARDY) — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe et à courbure de Ricci positive. Fixons $p \geq 1$. Supposons qu'il existe un point $o$ dans $M$ et des réels $\nu > p$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0, \ \frac{\mathrm{vol}\, B(o,t)}{\mathrm{vol}\, B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*Alors $M$ vérifie l'inégalité de Hardy*

$$\forall\, f \in C_c^{\infty}(M), \ \int_M |f|^p \, r_o^{-p} dvol \leq H \int_M |df|^p \, dvol,$$

*avec une constante $H$ dépendant seulement de $n$, $C_o$, $\nu$ et $p$.*

**Preuve.**
La preuve consiste à appliquer 2.1.5 avec $k = \infty$. Nous utilisons le même bon recouvrement $\mathcal{U}$ que dans le paragraphe précédent, en remarquant qu'il est encore bon pour la paire de mesures $(r^{-p}dvol, dvol)$. Nous avons besoin d'une inégalité de Poincaré continue. Comme pour 2.2.12, si on prend $i$ dans $\mathbb{Z}$ et $a$ dans $[0, h_i]$, toute fonction lisse $f$ sur $U_{i,a}^{\sharp}$ vérifie

$$\begin{aligned} \int_{U_{i,a}} \left|f - f_{U_{i,a},\mu_\alpha}\right|^p r^{-p} dvol &\leq 2^p \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{U_{i,a}} |f-c|^p \, r^{-p} dvol \\ &\leq 2^p \int_{U_{i,a}} \left|f - f_{U_{i,a}}\right|^p r^{-p} dvol \end{aligned}$$

de sorte qu'avec 2.2.9,

$$\begin{aligned} \int_{U_{i,a}} \left|f - f_{U_{i,a},\mu_\alpha}\right|^p r^{-p} dvol &\leq 2^p C(n,\kappa) R_{i-1}^{-p} R_{i+1}^{p} \int_{U_{i,a}^*} |df|^p \, dvol \\ &\leq C(n,\kappa,p) \int_{U_{i,a}^*} |df|^p \, dvol. \end{aligned}$$

Et le même argument vaut pour les paires $(U_{i,a}^*, U_{i,a}^{\sharp})$.

L'inégalité discrète requise dans 2.1.5 s'obtient par l'argument de 2.2.13 ; ici, on estime le quotient isopérimétrique discret par

$$C(n,\kappa)\sum_{i=-\infty}^{l}\frac{V(R_i)}{V(R_l)}\left(\frac{R_i}{R_l}\right)^{-p},$$

quantité bornée par

$$C(n,\kappa)C_o\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{-j(\nu-p)}<\infty$$

grâce à notre hypothèse de doublement inverse du volume. ■

Baptisons la meilleure constante dans l'inégalité de Hardy $L^1$.

DÉFINITION 2.2.19 — *Soit $M$ une variété riemannienne complète connexe. Etant donné $o$ dans $M$, on définit l'invariant riemannien*

$$H_o(M):=\sup_{f\in C_c^\infty(M)\setminus\{0\}}\frac{\int_M|f|\,r_o^{-1}dvol}{\int_M|df|\,dvol}.$$

## 2.3 Inégalités de Sobolev à poids et opérateurs de Schrödinger.

L'inégalité de Sobolev à poids a de nombreuses conséquences analytiques. Nous allons développer quelques propriétés des opérateurs de Schrödinger en présence de cette inégalité. Elles trouveront des applications géométriques dans la suite. Nous considérons ici une variété riemannienne complète connexe $M^n$, $n\geq 3$, à courbure de Ricci positive et telle que pour un certain point $o$ dans $M$ et pour un nombre $S>0$, l'inégalité de Sobolev à poids suivante est vérifiée :

$$\forall\, f\in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M|f|^{\frac{2n}{n-2}}\,\rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}}dvol\right)^{1-\frac{2}{n}}\leq S\int_M|df|^2\,dvol.$$

Comme plus haut, nous écrirons souvent $\rho(r)$ pour $\rho_o(r_o)=\frac{r_o^n}{V(r_o)}$, mais aussi $d\mu_\rho=\rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}dvol$ et $q=\frac{2n}{n-2}$. En fait, nous utiliserons l'hypothèse $\mathrm{Ric}\geq 0$ uniquement dans 2.3.3 et 2.3.4 (pour assurer la propriété de doublement du volume).

Nous considérons un fibré vectoriel euclidien lisse $E\longrightarrow M$, muni d'une connexion compatible $\nabla$. Nous noterons toujours $(.,.)$ le produit scalaire ponctuel sur le fibré vectoriel euclidien, par $|.|$ la norme ponctuelle, par $\overline{\Delta}=\nabla^*\nabla$ le laplacien de Bochner (ou laplacien brut). Nous nous intéressons aux opérateurs de Schrödinger $\overline{\Delta}+V$, où $V$ est un champ continu d'endomorphismes symétriques de $E$. Nous décomposons $V$ en $V=V_+-V_-$, où $V_+$ et $V_-$ sont des champs d'endomorphismes symétriques positifs de $E$.

### 2.3.1 Un théorème d'annulation.

Le théorème suivant est un résultat du type « Liouville », généralisant [Car] (voir [PRS] pour des résultats en lien). Il dit qu'il n'y a pas de section non triviale qui est petite à l'infini et sous-harmonique pour un opérateur de Schrödinger à potentiel presque positif.

THÉORÈME 2.3.1 (THÉORÈME D'ANNULATION) — *Fixons $m > 1$ et supposons que le potentiel $V$ satisfait*

$$S\left(\int_M |V_-|^{\frac{n}{2}} \rho(r) dvol\right)^{\frac{2}{n}} < \frac{2}{m}\left(2 - \frac{2}{m}\right).$$

*Alors toute section localement Lipschitz $\sigma$ de $E$ telle que $(\overline{\Delta}\sigma + V\sigma, \sigma) \leq 0$ et*

$$\int_{A(R/2,R)} |\sigma|^m \, dvol = o(R^2)$$

*est nulle.*

*Remarque* 2.3.1. Dans cet énoncé, la distribution $(\overline{\Delta}\sigma, \sigma)$ est définie par :
$\forall\, \phi \in C_c^\infty(M), < (\overline{\Delta}\sigma, \sigma), \phi >= \int_M (\nabla\sigma, \nabla(\phi\sigma)) dvol.$

**Preuve.**
Soient un nombre $R > 0$ et une fonction lisse $\chi$ qui est égale à 1 sur $B(R)$, à 0 sur $M \backslash B(2R)$, prend ses valeurs dans $[0,1]$ et vérifie $|d\chi| \leq 2/R$. On applique l'inégalité de Sobolev à poids à la fonction localement Lipschitz $\chi u_\epsilon^{m/2}$, où $u_\epsilon = \sqrt{|\sigma|^2 + \epsilon}$, $\epsilon > 0$ (nous omettrons la mesure riemannienne dans les prochaines formules afin de faciliter leur lecture) :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{S} & \left(\int_M \chi^q u_\epsilon^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \\
\leq & \int_M \left|d(\chi u_\epsilon^{m/2})\right|^2 \\
= & \int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m + \int_M \chi^2 \left|d(u_\epsilon^{m/2})\right|^2 + 2\int_M (u_\epsilon^{m/2} d\chi, \chi d(u_\epsilon^{m/2})) \\
\leq & (1 + 1/b)\int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m + (1+b)\int_M \chi^2 \left|d(u_\epsilon^{m/2})\right|^2
\end{aligned}$$

pour tout $b > 0$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_M \chi^2 \left|d(u_\epsilon^{m/2})\right|^2 &= \int_M (\chi^2 d(u_\epsilon^{m/2}), d(u_\epsilon^{m/2})) \\
&= \int_M 2\chi(u_\epsilon^{m/2} d\chi, d(u_\epsilon^{m/2})) + \int_M \chi^2 u_\epsilon^{m/2} \Delta(u_\epsilon^{m/2}) \\
&= 2\int_M (u_\epsilon^{m/2} d\chi, \chi d(u_\epsilon^{m/2})) + \frac{m}{2}\int_M \chi^2 u_\epsilon^{m-1} \Delta u_\epsilon \\
&+ \left(\frac{2}{m} - 1\right)\int_M \chi^2 \left|d(u_\epsilon^{m/2})\right|^2.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $a > 0$, on a

$$\int_M \chi^2 \left| d(u_\epsilon^{m/2}) \right|^2 \leq (\frac{2}{m} - 1 + a) \int_M \chi^2 \left| d(u_\epsilon^{m/2}) \right|^2 + \frac{m}{2} \int_M \chi^2 u_\epsilon^{m-1} \Delta u_\epsilon + \frac{1}{a} \int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m.$$

Si de plus $a < 2 - 2/m$, il vient

$$\int_M \chi^2 \left| d(u_\epsilon^{m/2}) \right|^2 \leq (2 - \frac{2}{m} - a)^{-1} \left( \frac{m}{2} \int_M \chi^2 u_\epsilon^{m-1} \Delta u_\epsilon + \frac{1}{a} \int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m \right).$$

D'où :

$$\frac{1}{S} \left( \int_M \chi^q u_\epsilon^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(m,a,b) \int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m + D(m,a,b) \int_M \chi^2 u_\epsilon^{m-1} \Delta u_\epsilon$$

où

$$C(m,a,b) = 1 + 1/b + \frac{1+b}{a(2-2/m-a)}$$

et

$$D(m,a,b) = \frac{(1+b)m}{2(2-2/m-a)}.$$

Le petit calcul

$$u_\epsilon \Delta u_\epsilon = (\sigma, \overline{\Delta}\sigma) - \frac{\epsilon |\nabla\sigma|^2}{u_\epsilon^2} - \frac{|\sigma|^2 |\nabla\sigma|^2 - (\sigma, \nabla\sigma)^2}{u_\epsilon^2},$$

assure

$$u_\epsilon \Delta u_\epsilon \leq (\sigma, \overline{\Delta}\sigma) \leq (V_-\sigma, \sigma) \leq |V_-| u_\epsilon^2.$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{S} \left( \int_M \chi^q u_\epsilon^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(m,a,b) \int_M |d\chi|^2 u_\epsilon^m + D(m,a,b) \int_M \chi^2 |V_-| u_\epsilon^m$$

qui, quand $\epsilon$ tend vers zéro, fournit

$$\frac{1}{S} \left( \int_M \chi^q |\sigma|^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(m,a,b) \int_M |d\chi|^2 |\sigma|^m + D(m,a,b) \int_M \chi^2 |V_-| |\sigma|^m.$$

L'inégalité de Hölder implique alors

$$\begin{aligned} \int_M \chi^2 |V_-| |\sigma|^m &\leq \int_M \chi^2 |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n}} |V_-| \rho(r)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \left( \int_M \chi^q |\sigma|^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \underbrace{\left( \int_M |V_-|^{\frac{n}{2}} \rho(r) \right)^{\frac{2}{n}}}_{N_V}. \end{aligned}$$

Au final, il vient

$$(1 - SN_V D(m,a,b)) \left( \int_M \chi^q \left|\sigma\right|^{\frac{mq}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{4SC(m,a,b)}{R^2} \int_{A(R,2R)} |\sigma|^2$$

et notre hypothèse sur le potentiel garantit

$$\left( \int_{B(R)} |\sigma|^{mq/2} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{1}{1 - SN_V D(m,a,b)} \frac{4SC(m,a,b)}{R^2} \int_{A(R,2R)} |\sigma|^m ,$$

à condition que

$$N_V < \frac{1}{SD(m,a,b)} = \frac{2}{mS} \frac{1}{1+b} (2 - 2/m - a).$$

Mais en choisissant $a$ and $b$ suffisamment petits, cette condition peut toujours être vérifiée. On fait maintenant tendre $R$ vers l'infini : il reste $\sigma = 0$. ■

### 2.3.2 Décroissance à l'infini.

Que peut-on dire quand on a seulement $\int_M |V_-|^{\frac{n}{2}} \rho(r) dvol < \infty$ ? En adaptant une technique développée dans [BKN], on peut prouver des estimées de décroissance à l'infini pour des sections $\sigma$ vérifiant $\overline{\Delta}\sigma + V\sigma \leq 0$. Nous allons prouver trois lemmes généraux et nous verrons plus loin (cf. 2.5) comment les utiliser dans un contexte géométrique (où le potentiel et la section sont reliés). L'idée est de pratiquer une itération de Moser : c'est le troisième lemme, classique. Mais ce lemme ne fonctionne que sous une hypothèse technique sur le potentiel ; dans la pratique, cette hypothèse pourra être validée en appliquant le premier lemme. Le deuxième lemme est la clé d'un phénomène d'auto-amélioration des estimées dont nous tirerons parti.

Nous conclurons cette partie par une estimée de type Moser, mais en présence d'un terme source. Cette estimation est bon marché et elle s'avérera utile plus loin.

LEMME 2.3.2 (AMORCE) — *On suppose $V_-$ appartient à $L^{n/2}(\rho(r)dvol)$ et on considère une section localement Lipschitz $\sigma$ de $E$ telle que $(\sigma, \overline{\Delta}\sigma + V\sigma) \leq 0$ et pour un certain $m > 1$ :*

$$\int_{A(R,2R)} |\sigma|^m \, dvol = o(R^2).$$

*Alors pour $R$ grand :*

$$\left( \int_{M \setminus B(2R)} |\sigma|^{\frac{mq}{2}} \, d\mu_\rho \right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{C}{R^2} \int_{A(R,2R)} |\sigma|^m \, dvol.$$

**Preuve.**
En procédant comme dans la preuve du théprème d'annulation, on trouve pour $u := |\sigma|^{m/2}$ et $\chi$ dans $C_c^\infty(M)$ :

$$\left( \int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left( \int_M \chi^2 u^2 \left|V_-\right| + \int_M |d\chi|^2 u^2 \right).$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left(\int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left(\int_{\mathrm{supp}\,\chi} |V_-|^{\frac{n}{2}}\,\rho(r)\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} + C \int_M |d\chi|^2\, u^2.$$

Maintenant, on prend $R >> 1$, $R' > 2R$ et on suppose $\chi$ à valeurs dans $[0,1]$, à support dans $A(R,2R')$, constante à 1 sur $[2R,R']$, vérifiant $|d\chi| \leq \frac{2}{R}$ sur $A(R,2R)$ et $|d\chi| \leq \frac{2}{R'}$ sur $A(R',2R')$. Dans ce cadre, il vient :

$$\left(\int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left(\int_{A(R,2R')} |V_-|^{\frac{n}{2}}\,\rho(r)\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} + \frac{C}{R^2}\int_{A(R,2R)} u^2 + \frac{C}{R'^2}\int_{A(R',2R')} u^2.$$

Par hypothèse, l'intégrale $\int_M |V_-|^{n/2}\,\rho(r)$ est finie : on peut rendre $\int_{B(R)^c} |V_-|^{n/2}\,\rho(r)$ aussi petit qu'on veut, en choisissant $R$ assez grand, de sorte que l'estimée devient :

$$\left(\int_{A(2R,R')} u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{C}{R^2}\int_{A(R,2R)} u^2 + \frac{C}{R'^2}\int_{A(R',2R')} u^2.$$

On fait tendre $R'$ vers l'infini :

$$\left(\int_{M\setminus B(2R)} u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{C}{R^2}\int_{A(R,2R)} u^2.$$

■

Lemme 2.3.3 (Clé de l'auto-amélioration) — *Supposons que $V_-$ appartienne à l'espace $L^{n/2}(\rho(r)dvol)$ et considérons une section localement Lipschitz $\sigma$ de $E$, appartenant à $L^m(E,d\mu_\rho)$ pour un réel $m > q/2$ et vérifiant $(\sigma, \overline{\Delta}\sigma + V\sigma) \leq 0$. Alors pour $R$ grand, on a :*

$$\int_{M\setminus B(2R)} |\sigma|^m\, d\mu_\rho \leq C \int_{A(R,2R)} |\sigma|^m\, d\mu_\rho.$$

*Il en résulte l'existence d'un réel $a > 0$ tel que*

$$\int_{M\setminus B(R)} |\sigma|^m\, d\mu_\rho = \mathcal{O}(R^{-a}).$$

*Remarque* 2.3.2. La preuve montrera qu'on peut choisir un exposant $a$ dépendant continûment de $m$.

**Preuve.**
Posons $m' = 2m/q$. La preuve précédente dit que pour $R$ grand, avec la même fonction de troncature $\chi$ et $u := |\sigma|^{m'/2}$, on a :

$$\left(\int_M \chi^q u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \int_M |d\chi|^2 u^2.$$

Invoquons l'inégalité de Hölder :

$$\left(\int_{A(2R,R')} u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left(\int_M |d\chi|^n \rho(r)\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\operatorname{supp} d\chi} u^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}}.$$

En se rappelant la définition de $\rho$ et la propriété de doublement du volume, on voit les estimées :

$$\int_{A(R,2R)} |d\chi|^n \rho(r) \leq CR^{-n}\rho(2R) \operatorname{vol} A(R,2R) \leq C$$

et

$$\int_{A(R',2R')} |d\chi|^n \rho(r) \leq C,$$

ce qui conduit à

$$\left(\int_{A(2R,R')} |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left(\int_{A(R,2R)\cup A(R',2R')} |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}}.$$

En faisant tendre $R'$ vers l'infini, on justifie la première partie de l'énoncé :

$$\int_{M\setminus B(2R)} |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \leq C \int_{A(R,2R)} |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}.$$

Si l'on introduit la fonction $I : R \mapsto \int_{M\setminus B(R)} |\sigma|^m \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}$, on voit qu'elle vérifie $I(2R) \leq C(I(R) - I(2R))$, i.e.

$$I(2R) \leq \frac{C}{C+1} I(R). \tag{2.16}$$

Choisissons $R_1$ grand et notons $k_R$ l'entier vérifiant $\log_2 R/R_1 \leq k_R < \log_2 2R/R_1$. Une itération de l'inégalité (2.16) livre l'estimée

$$I(R) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{k_R} I(R/2^{k_R}) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right)^{k_R} \|\sigma\|^m_{L^m(E,\mu_\rho)}$$

qui entraîne

$$I(R) \leq C \left(\frac{C}{C+1}\right)^{\log_2 R} = CR^{\log_2(\frac{C}{C+1})}.$$

Puisqu'on a $\frac{C}{C+1} < 1$, la seconde assertion est prouvée. ■

Nous allons maintenant prouver des estimations importantes pour la suite, mais très classiques. Pour les obtenir, on pourrait se débrouiller sans poids, avec juste une inégalité de Sobolev locale sur les boules (comme dans [SC]). Ce n'était pas le cas pour les inégalités précédentes, elles nécessitaient réellement une inégalité globale et pas seulement à une échelle « $R$ » : dans les preuves, on travaillait sur un anneau du type $A(R, R')$ puis on faisait tendre $R'$ vers l'infini.

LEMME 2.3.4 (ITÉRATION DE MOSER) — *Supposons que, pour un certain nombre $x > n/2$, le potentiel $V$ satisfasse l'estimée :*

$$\left(\int_{A(R,2R)} |V_-|^x \, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol\right)^{\frac{1}{x-n/2}} = O\left(\rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2}\right).$$

*Considèrons une section localement Lipschitz $\sigma$ appartenant à $L^m(E, \mu_\rho)$ pour un certain réel $m > 1$ et vérifiant $(\sigma, \overline{\Delta}\sigma + V\sigma) \leq 0$. Alors pour $R$ grand, on dispose de l'estimée :*

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| \leq C\left(\rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2}\right)^{\frac{n}{2m}} \left(\int_{A(R/2,5R/2)} |\sigma|^m \, d\mu_\rho\right)^{1/m},$$

*i.e.*

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| \leq \frac{C}{\operatorname{vol} A(R/2, 5R/2)} \left(\int_{A(R/2,5R/2)} |\sigma|^m \, dvol\right)^{1/m}.$$

**Preuve.**
Fixons $\beta \geq m$. Dans cette preuve, $C$ désignera toujours une constante indépendante de $\beta$. Toujours par la même technique, si $\chi$ est lisse à support compact dans $M$, on obtient l'estimée :

$$\left(\int_M \chi^q \, |\sigma|^{\frac{q\beta}{2}} \, \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{2}{q}} \leq C\beta \int_M \chi^2 \, |\sigma|^\beta \, |V_-| + C \int_M |d\chi|^2 \, |\sigma|^\beta . \tag{2.17}$$

On peut définir des nombres $t$ et $s$ par les relations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{q}{2s} + \frac{1}{t} = 1, \tag{2.18}$$

Notons, pour plus tard, la formule $t = \frac{x}{x-n/2}$. L'inégalité de Hölder fournit :

$$\begin{aligned} & \beta \int_M \chi^2 \, |\sigma|^\beta \, |V_-| \\ \leq \; & \beta \left(\int_{\operatorname{supp}\chi} |V_-|^x \, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}\right)^{\frac{1}{x}} \left(\int_M \chi^q \, |\sigma|^{\frac{q\beta}{2}} \, \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_M \chi^2 \, |\sigma|^\beta \, \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}}\right)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

Etant donné $\epsilon > 0$, l'inégalité de Young et (2.18) donnent une constante $C_\epsilon$ telle que

$$\begin{aligned}\beta \int_M \chi^2 |\sigma|^\beta |V_-| &\leq \epsilon \left( \int_M \chi^q |\sigma|^{\frac{q\beta}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \\ &+ C_\epsilon \beta^t \left( \int_{\operatorname{supp}\chi} |V_-|^x \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} \right)^{\frac{t}{x}} \left( \int_M \chi^2 |\sigma|^\beta \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right).\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\epsilon$ choisi petit (indépendamment de la valeur de $\beta$), on obtient dans (2.17) :

$$\begin{aligned}\left( \int_M \chi^q |\sigma|^{\frac{q\beta}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} &\leq C\beta^t \left( \int_{\operatorname{supp}\chi} |V_-|^x \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} \right)^{\frac{t}{x}} \left( \int_M \chi^2 |\sigma|^\beta \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right) \\ &+ C \int_M |d\chi|^2 |\sigma|^\beta .\end{aligned}$$

Etant donnés $R_1 < R_2 < 5R_1$ et $0 < \delta \leq R_1/2$, on considère une fonction de troncature $\chi$ avec les propriétés suivantes : elle prend ses valeurs dans $[0,1]$, elle vaut 1 sur $A(R_1, R_2)$, elle vaut 0 hors de $A(R_1-\delta, R_2+\delta)$ et sa différentielle est bornée par $2/\delta$. Notre hypothèse sur le potentiel, grâce à (2.14), implique

$$\left( \int_{A(R_1-\delta,R_2+\delta)} |V_-|^x \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} \right)^{\frac{t}{x}} \leq C\rho(R_1-\delta)^{\frac{2}{n-2}} (R_1-\delta)^{-2}$$

Avec ceci, notre estimée donne

$$\begin{aligned}&\left( \int_{A(R_1,R_2)} |\sigma|^{\frac{q\beta}{2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{\frac{2}{q}} \\ \leq\ & C\beta^t \rho(R_1-\delta)^{\frac{2}{n-2}} (R_1-\delta)^{-2} \int_{A(R_1-\delta,R_2+\delta)} |\sigma|^\beta \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \\ +\ & C\rho(R_2+\delta)^{\frac{2}{n-2}} \delta^{-2} \int_{A(R_1-\delta,R_2+\delta)} |\sigma|^\beta \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \\ \leq\ & C\beta^t \rho(R_2)^{\frac{2}{n-2}} \delta^{-2} \int_{A(R_1-\delta,R_2+\delta)} |\sigma|^\beta \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}},\end{aligned}$$

de sorte que pour la mesure $\mu_\rho$, on a

$$\|\sigma\|_{L^{\beta q/2}(A(R_1,R_2))} \leq \left( C\beta^t \rho(R_2)^{\frac{2}{n-2}} \delta^{-2} \right)^{1/\beta} \|\sigma\|_{L^\beta(A(R_1-\delta,R_2+\delta))}. \tag{2.19}$$

Etant donné $R$ grand, on pose, pour tout entier naturel $k$ :

$$\beta_k := m\left(\frac{q}{2}\right)^k, \quad \delta_k := 2^{-k-1}R, \quad R_{1,k} := R - \sum_{i=1}^k \delta_i, \quad R_{2,k} := 2R + \sum_{i=1}^k \delta_i.$$

En itérant (2.19), on attrape $\|\sigma\|_{L^{\beta_k}(A(R,2R))} \leq C_k \|\sigma\|_{L^{\beta_0}(A(R_{1,k},R_{2,k}))}$ où la constante $C_k$ s'estime par

$$C_k \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left( C\beta_i^t \rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} 4^i \right)^{1/\beta_i} \leq \left( C\rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \right)^{\sum_{i=0}^{k-1} 1/\beta_i} \left( 4(q/2)^t \right)^{\sum_{i=0}^{k-1} i/\beta_i}.$$

Comme $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} = \frac{n}{2m}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\beta_i} < \infty$, ceci entraîne

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} C_k \leq C \left( \rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \right)^{\frac{n}{2m}},$$

et donc

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \|\sigma\|_{L^{\beta_k}(A(R,2R))} \leq C \left( \rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \right)^{\frac{n}{2m}} \|\sigma\|_{L^m(A(R/2,5R/2))}.$$

■

Le lemme suivant généralise l'estimée $L^\infty$ (2.3.4) en présence d'un terme source, à la manière de [TV].

Lemme 2.3.5 (Itération de Moser avec terme source) — *Supposons que, pour un certain nombre $x > n/2$, le potentiel $V$ satisfasse l'estimée :*

$$\left( \int_{A(R,2R)} |V_-|^x \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol \right)^{\frac{1}{x-n/2}} = O\left( \rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \right).$$

*On se donne une section localement bornée $\phi$, ainsi qu'une section localement Lipschitz $\sigma$ appartenant à $L^m(E, \mu_\rho)$ pour un certain réel $m > 1$ et vérifiant $(\sigma, \overline{\Delta}\sigma + V\sigma) \leq (\sigma, \phi)$. Alors pour $R$ grand, on dispose de l'estimée :*

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| \leq \frac{C}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{m}}} \|\sigma\|_{L^m(A(R/2,5R/2))} + C \frac{R^2}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{x}}} \|\phi\|_{L^x(A(R,2R))}.$$

*Remarque* 2.3.3. Pour $x = n$ et $m = 2$, on obtient que si $|V_-| \leq Cr^{-2}$, alors

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| \leq \frac{C}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{2}}} \|\sigma\|_{L^2(A(R/2,5R/2))} + CR^2 \|\phi\|_{L^\infty(A(R,2R))}.$$

Cette formulation est pratique.

**Preuve.**
On pose $u := |\sigma| + F$, avec

$$F := \left( \rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \right)^{\frac{n}{2x}-1} \left( \int_{A(R,2R)} |\phi|^x \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Le cas où $\phi$ est nulle est traité par (2.3.4 ) donc on peut supposer $F \neq 0$.

Afin d'éviter des problèmes quand $\sigma$ s'annule, introduisons les régularisations $v_\epsilon := \sqrt{|\sigma|^2 + \epsilon}$ et $u_\epsilon := v_\epsilon + F$. En notant que

$$v_\epsilon \Delta v_\epsilon \leq (\sigma, \overline{\Delta}\sigma) \leq |\sigma| \left( |V_-| \, |\sigma| + |\phi| \, |\sigma| \right)$$

et donc

$$\Delta v_\epsilon \leq |V_-| \, v_\epsilon + |\phi| \, ,$$

on trouve

$$\Delta u_\epsilon \leq |V_-| \, u_\epsilon + |\phi| \leq \left( |V_-| + \frac{|\phi|}{F} \right) u_\epsilon .$$

Par choix de $F$, on peut appliquer l'estimée sans terme source (2.3.4 ) :

$$\sup_{A(R,2R)} u_\epsilon \leq \frac{C}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{m}}} \left\| u_\epsilon \right\|_{L^m(A(R/2,5R/2))}$$

En faisant tendre $\epsilon$ vers zéro, on peut effacer les epsilon de la formule. On en déduit :

$$\sup_{A(R,2R)} |\sigma| \leq \sup_{A(R,2R)} u \leq \frac{C}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{m}}} \left\| \sigma \right\|_{L^m(A(R/2,5R/2))} + CF$$

et la formule annoncée s'obtient en observant que $F$ est majoré par

$$\rho(R)^{\frac{1}{x}} R^{2-\frac{n}{x}} \left\| \phi \right\|_{L^x(A(R,2R))} = \operatorname{vol} B(o,R)^{-\frac{1}{x}} R^2 \left\| \phi \right\|_{L^x(A(R,2R))} .$$

■

Nous continuons notre étude des opérateurs de Schrödinger par la preuve d'une inégalité de type Gagliardo-Nirenberg.

### 2.3.3 L'inversion des opérateurs de Schrödinger.

Nous cherchons à résoudre $(\overline{\Delta} + V)\sigma = \tau$, $\tau$ étant donné dans un espace approprié. Notre objectif est d'obtenir des solutions $\sigma$ bornées. Pour ce faire, on a besoin d'estimations. La première découle très vite de l'inégalité de Sobolev à poids.

LEMME 2.3.6 — *Etant donné $\frac{2n}{n+2} \leq s < \frac{n}{2}$, on peut trouver une constante $C(n,s)$ telle que pour toute section lisse à support compact $\sigma$, on a*

$$\left\| \sigma \right\|_{L^{\frac{ns}{n-2s}}(E,\mu_\rho)} \leq C(n,s) \, S \, \left\| \overline{\Delta}\sigma \right\|_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol)} .$$

**Preuve.**
Posons $k = \frac{s}{n-2s} \frac{n-2}{2} \geq 1$ et prenons $\sigma$ dans $C_c^\infty(E)$. On applique l'inégalité de Sobolev à poids à la fonction localement Lipschitz $|\sigma|^k$ :

$$\frac{1}{S} \left\| \sigma \right\|^{2k}_{L^{\frac{ns}{n-2s}}(E,\mu_\rho)} \leq \int_M \left| d(|\sigma|^k) \right|^2 = \int_M |\sigma|^k \, \Delta(|\sigma|^k) \leq k \int_M |\sigma|^{2k-1} \, \Delta \, |\sigma| \, .$$

L'inégalité de Kato implique alors

$$\frac{1}{S}\left\|\sigma\right\|^{2k}_{L^{\frac{ns}{n-2s}}(E,\mu_\rho)} \leq k\int_M |\sigma|^{2k-1}\left|\overline{\Delta}\sigma\right| = k\int_M |\sigma|^{\frac{n(s-1)}{n-2s}}\left|\overline{\Delta}\sigma\right|.$$

En faisant appel à l'inégalité de Hölder, on parvient à

$$\frac{1}{S}\left\|\sigma\right\|^{2k}_{L^{\frac{ns}{n-2s}}(E,\mu_\rho)} \leq k\left(\int_M \left|\overline{\Delta}\sigma\right|^s \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol\right)^{1/s}\left(\int_M |\sigma|^{\frac{ns}{n-2s}}\,d\mu_\rho\right)^{1-1/s},$$

d'où

$$\frac{1}{S}\left\|\sigma\right\|_{L^{\frac{ns}{n-2s}}(E,\mu_\rho)} \leq k\left(\int_M \left|\overline{\Delta}\sigma\right|^s \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol\right)^{1/s}.$$

■

Une itération de Moser va nous fournir un estimée $L^\infty$.

LEMME 2.3.7 — *Etant donnés $t > n/2$ et $x \geq 1$, il y a une constante $C(n,x,t)$ telle que pour toute section lisse à support compact $\sigma$,*

$$\left\|\sigma\right\|_{L^\infty(E)} \leq C(n,x,t)\left(S^{\frac{tn}{2t-n}}\left\|\overline{\Delta}\sigma\right\|^{\frac{tn}{2t-n}}_{L^t(E,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)}\left\|\sigma\right\|^x_{L^x(E,\mu_\rho)}\right)^{\frac{1}{\frac{tn}{2t-n}+x}}.$$

**Preuve.**
Comme plus haut, on voit que pour toute section $\sigma$ de $C^\infty_c(E)$ et tout nombre $k \geq 1$, on a :

$$\left(\int_M |\sigma|^{kq}\,d\mu_\rho\right)^{2/q} \leq kS\int_M |\sigma|^{2k-1}\left|\overline{\Delta}\sigma\right|dvol.$$

Par l'inégalité de Hölder, on en déduit :

$$\left(\int_M |\sigma|^{kq}\,d\mu_\rho\right)^{2/q} \leq kS\left(\int_M \left|\overline{\Delta}\sigma\right|^t \rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol\right)^{1/t}\left(\int_M |\sigma|^{\frac{(2k-1)t}{t-1}}\,d\mu_\rho\right)^{1-1/t}.$$

Définissons la suite $(\beta_i)$ par $\beta_0 = x$ et $\beta_{i+1} = \frac{q}{2}\left(\frac{t-1}{t}\beta_i + 1\right)$. Pour tout entier naturel $i$, on a alors :

$$\left\|\sigma\right\|^{\beta_{i+1}}_{L^{\beta_{i+1}}(E,\mu_\rho)} \leq \left(q^{-1}\beta_{i+1}N_t\right)^{\frac{q}{2}}\left(\left\|\sigma\right\|^{\beta_i}_{L^{\beta_i}(E,\mu_\rho)}\right)^\zeta,$$

où

$$N_t = S\left(\int_M \left|\overline{\Delta}\sigma\right|^t \rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol\right)^{1/t} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{q(t-1)}{2t} > 1.$$

En itérant ceci, on obtient pour tout entier naturel $i$ :

$$\left\|\sigma\right\|^{\beta_i}_{L^{\beta_i}(E,\mu_\rho)} \leq \left(q^{-1}N_t\right)^{\frac{q}{2}\sum_{j=0}^{i-1}\zeta^j}\left(\prod_{j=1}^{i}\beta_j^{\zeta^{i-j}}\right)^{q/2}\left(\left\|\sigma\right\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(E,\mu_\rho)}\right)^{\zeta^i}.$$

Ainsi :

$$\|\sigma\|_{L^{\beta_i}(E,\mu_\rho)} \leq \left(q^{-1}N_t\right)^{\frac{q}{2\beta_i}\frac{\zeta^i-1}{\zeta-1}} \left(\prod_{j=1}^{i}\beta_j^{\zeta^{-j}}\right)^{\frac{q\zeta^i}{2\beta_i}} \left(\|\sigma\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(E,\mu_\rho)}\right)^{\frac{\zeta^i}{\beta_i}}.$$

Avec $\beta_i = \zeta^i\left(\beta_0 + \frac{q}{2(\zeta-1)}\right) - \frac{q}{2(\zeta-1)}$, on voit que $\frac{\zeta^i}{\beta_i}$ tend vers $\frac{1}{\beta_0+\frac{q}{2(\zeta-1)}}$ quand $i$ tend vers l'infini. En écrivant

$$\log\left(\prod_{j=1}^{i}\beta_j^{\zeta^{-j}}\right) = \sum_{j=1}^{i} j\zeta^{-j}\log\zeta + \sum_{j=1}^{i}\zeta^{-j}\log\frac{\beta_j}{\zeta^j},$$

on voit que cette expression a une limite quand $i$ tend vers l'infini. En fin de compte, on trouve

$$\|\sigma\|_{L^\infty(E,\mu_\rho)} \leq \left(q^{-1}N_t\right)^{\frac{\frac{q}{2(\zeta-1)}}{\beta_0+\frac{q}{2(\zeta-1)}}} \left(\prod_{j=1}^{\infty}\beta_j^{\zeta^{-j}}\right)^{\frac{\frac{q}{2}}{\beta_0+\frac{q}{2(\zeta-1)}}} \|\sigma\|^{\frac{\beta_0}{\beta_0+\frac{q}{2(\zeta-1)}}}_{L^{\beta_0}(E,\mu_\rho)}.$$

Puisque $\frac{q}{2(\zeta-1)} = \frac{tn}{2t-n}$ et $\beta_0 = x$, c'est ce qu'on voulait. ■

Ces faits mènent au

THÉORÈME 2.3.8 (INVERSION DU LAPLACIEN DE BOCHNER) — *Fixons nous un ouvert à bord lisse $\Omega$, ainsi que deux nombres réels, $s \in [\frac{2n}{n+2}, \frac{n}{2}[$ et $t \in ]\frac{n}{2}, +\infty[$. Alors on peut définir un opérateur continu*

$$\overline{\Delta}^{-1} : L^s\left(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol\right) \cap L^t\left(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol\right) \longrightarrow L^\infty(E_\Omega)$$

*qui inverse le laplacien de Bochner sur $\Omega$, avec condition de Dirichlet. De plus, il existe une constante $C = C(n,s,t)$ telle que toute section lisse à support compact $\sigma$ vérifie l'estimée*

$$\|\sigma\|_{L^\infty(E_\Omega)} \leq C\,S\left(\left\|\overline{\Delta}\sigma\right\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)} \left\|\overline{\Delta}\sigma\right\|^{\frac{t}{2t-n}}_{L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)}\right)^{\frac{1}{\frac{s}{n-2s}+\frac{t}{2t-n}}}.$$

**Preuve.**
L'estimée s'obtient en combinant (2.3.6) et (2.3.7). Etant donné $\psi$ dans $C_c^\infty(E_\Omega)$, la théorie $L^2$ fournit une solution lisse $\sigma_R$ à l'équation $\overline{\Delta}\sigma_R = \psi$ sur $\Omega \cap B(R)$, avec condition de Dirichlet. On l'étend en une fonction $H_0^1$ sur $\Omega$ en la choisissant nulle hors de $B(R)$. L'estimée $L^\infty$ (en regardant les preuves précédentes, on voit que cette estimée est vérifiée par $\sigma_R$) donne

$$\|\sigma_R\|_{L^\infty(E_\Omega)} \leq C(n,s,t)\,S\left(\|\psi\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)} \|\psi\|^{\frac{t}{2t-n}}_{L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)}\right)^{\frac{1}{\frac{s}{n-2s}+\frac{t}{2t-n}}}.$$

Pour tout compact $K$, il y a un nombre $R_K$ qui fait que la famille $(\sigma_R|_K,\, R \geq R_K)$ est uniformément bornée dans $C^\infty(E_K)$ (par régularité elliptique), de sorte que le théorème d'Ascoli fournit une suite convergeant dans $C^\infty(E_K)$. Par extraction diagonale, on obtient une suite $(\sigma_{R_i})$ qui converge vers $\sigma$ dans $C^0_c(E_\Omega)$. $\sigma$ est alors une solution faible de $\overline{\Delta}\sigma = \psi$, donc est lisse, donc est une solution forte. Pour tout compact $K$, on peut écrire $\|\sigma\|_{L^\infty(E_K)} = \lim_{i\longrightarrow\infty} \|\sigma_{R_i}\|_{L^\infty(E_K)}$, d'où

$$\|\sigma\|_{L^\infty(E_K)} \leq C(n,s,t)\, S \left( \|\psi\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)} \|\psi\|^{\frac{t}{2t-n}}_{L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)} \right)^{\frac{1}{\frac{s}{n-2s}+\frac{t}{2t-n}}}.$$

En prenant le supremum sur les compacts $K$, on obtient une estimée $L^\infty$ sur $\Omega$ tout entier. On peut donc définir un opérateur $\overline{\Delta}^{-1}$ sur $C^\infty_c(E_\Omega)$, continu pour les normes annoncées. On l'étend alors par continuité. ■

Par une technique de perturbation, on en déduit un résultat analogue pour des opérateurs de Schrödinger.

THÉORÈME 2.3.9 (INVERSION DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER) — *Soit $s$ un réel de $[\frac{2n}{n+2}, \frac{n}{2}[$ et $t$ un réel de $]\frac{n}{2}, +\infty[$. On peut trouver un nombre $\eta(n,s,t,S) > 0$ tel que, si on se donne un ouvert à bord lisse $\Omega$ et un potentiel $V$ vérifiant*

$$\max\left( \|V_-\|_{L^s(\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)}, \|V_-\|_{L^t(\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)} \right) < \frac{\eta(n,s,t)}{S},$$

*alors il existe un opérateur continu*

$$(\overline{\Delta}+V)^{-1} \,:\, L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol) \cap L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol) \longrightarrow L^\infty(E_\Omega)$$

*inversant l'opérateur de Schrödinger correspondant.*

**Preuve.**
D'abord, il convient de remarquer que l'analyse menant au théorème précédent s'applique parfaitement à l'opérateur $H := \overline{\Delta} + V_+$. Définissons alors $\eta(n,s,t)$ comme étant $S$ divisé par la norme de

$$H^{-1} \,:\, L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol) \cap L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol) \longrightarrow L^\infty(E_\Omega).$$

Notre hypothèse sur le potentiel $V$ garantit que

$$V_- \,:\, L^\infty(E_\Omega) \longrightarrow L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol) \cap L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol),$$

est un opérateur continu de norme strictement inférieure à $\eta(n,s,t)/S$. Donc $H^{-1}V_-$ est un endomorphisme continu de l'espace de Banach $L^\infty(E_\Omega)$, de norme strictement inférieure à 1 : l'opérateur $\mathrm{Id}+H^{-1}V_-$ est un automorphisme de $L^\infty(E_\Omega)$. On peut alors définir l'opérateur $(\mathrm{Id}+H^{-1}V_-)^{-1}H^{-1} = (\overline{\Delta}+V)^{-1}$, de $L^s(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol) \cap L^t(E_\Omega,\rho(r)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)$ vers $L^\infty(E_\Omega)$. ■

### 2.3.4 Le noyau de l'opérateur de Schrödinger.

Grâce au théorème 2.3.1, on sait que si la norme du potentiel dans $L^{n/2}(\rho dvol)$ est petite par rapport à la constante de Sobolev, l'opérateur de Schrödinger correspondant, vu comme opérateur non borné sur les sections $L^2$, est de noyau trivial. On va voir que si la norme du potentiel est seulement finie, alors le noyau reste de dimension finie ; on peut même estimer sa taille. Un tel résultat a été prouvé par G. Carron [Car] en présence d'une inégalité de Sobolev sans poids ; nous allons généraliser ses travaux, en adaptant ses preuves.

THÉORÈME 2.3.10 (THÉORÈME DE FINITUDE (1)) — *Si le potentiel $V$ vérifie*

$$\int_M |V_-|^{n/2} \rho(r) dvol < \infty,$$

*alors le noyau $L^2$ de l'opérateur $\overline{\Delta} + V$ est de dimension finie.*

**Preuve.**
Posons $H = \overline{\Delta} + V_+$. Prouvons d'abord que $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ est compact. L'inégalité de Sobolev à poids dit que pour toute section lisse à support compact $\sigma$, on a

$$\frac{1}{S} \left( \int_M |\sigma|^{\frac{2n}{n-2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{1-2/n} \leq \int_M |d|\sigma||^2$$

A l'aide de l'inégalité de Kato, on arrive à

$$\frac{1}{S} \left( \int_M |\sigma|^{\frac{2n}{n-2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{1-2/n} \leq \int_M (\sigma, \overline{\Delta}\sigma) \leq \int_M (\sigma, H\sigma) = \int_M \left| H^{1/2}\sigma \right|^2,$$

ce qui prouve la continuité de l'opérateur

$$H^{-1/2} \, : \, L^2(E, dvol) \longrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(E, d\mu_\rho).$$

L'inégalité de Hölder donne aussi

$$\int_M \left| V_-^{1/2}\sigma \right|^2 \leq \left( \int_M |V_-|^{n/2} \rho(r) \right)^{2/n} \left( \int_M |\sigma|^{\frac{2n}{n-2}} \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} \right)^{1-2/n},$$

ce qui, grâce à notre hypothèse, assure la continuité de l'opérateur

$$V_-^{1/2} \, : \, L^{\frac{2n}{n-2}}(E, d\mu_\rho) \longrightarrow L^2(E, dvol).$$

Donc $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ est un opérateur borné sur $L^2(E, dvol)$. Etant donné $R > 0$, soit $\chi_R$ une fonction lisse valant 1 sur $B(R)$, s'annulant hors de $B(2R)$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1]$. L'opérateur $\chi_R H^{-1/2}$ envoie $L^2(E)$ dans $H_0^1(E_{B(2R)})$ donc, par le théorème de Rellich, il est compact en tant qu'endomorphisme de $L^2(E_{B(2R)})$. Comme $|V_-|$ est une fonction bornée sur les compacts (puisque continue), on en déduit que $\chi_R V_-^{1/2} H^{-1/2}$

est un opérateur compact sur $L^2(E)$. Quand $R$ tend vers l'infini, $\chi_R V_-^{1/2} H^{-1/2}$ converge vers $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ en norme d'opérateur. Donc $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ est compact sur $L^2(E)$.

Il suit que

$$H^{-1/2} V_- H^{-1/2} = (V_-^{1/2} H^{-1/2})^* (V_-^{1/2} H^{-1/2})$$

est aussi compact. En particulier, l'espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2})$ est de dimension finie.

Considérons une section $\sigma$ dans $L^2(E)$ et telle que $(\overline{\Delta} + V)\sigma = 0$, i.e. $H\sigma = V_-\sigma$. On veut prouver que $H^{1/2}\sigma$ est un élément de l'espace propre ci-dessus. Comme on ne sait pas si $\sigma$ est dans le domaine de $H$, il convient d'être prudent. On va d'abord vérifier que $\sigma$ est dans le domaine de $H^{1/2}$, i.e. $H^{1/2}\sigma \in L^2(E)$. Soit $\chi$ un élément de $C_c^\infty(E)$. En intégrant comme plus haut, on trouve

$$\int_M \left| H^{1/2}(\chi\sigma) \right|^2 = \int_M |d\chi|^2 \, |\sigma|^2 + \int_M \left| V_-^{1/2} \chi\sigma \right|^2 .$$

Avec l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev à poids, on trouve

$$\int_M \left| H^{1/2}(\chi\sigma) \right|^2 \leq \int_M |d\chi|^2 \, |\sigma|^2 + \left( \int_{\mathrm{supp}\,\chi} |V_-|^{n/2} \, \rho(r) \right)^{2/n} S \int_M \left| H^{1/2}(\chi\sigma) \right|^2 .$$

Pour $R$ grand et $\chi$ comme dans la preuve de (2.3.2), ceci fournit

$$\int_{B(R)^c} \left| H^{1/2}(\sigma) \right|^2 \leq 8S \, \|\sigma\|_{L^2}^2 \, R^{-2},$$

donc $H^{1/2}\sigma$ est bien dans $L^2(E)$.

De $\sigma \in H^{-1/2} L^2(E)$, on déduit

$$V_-^{1/2}\sigma \in V_-^{1/2} H^{-1/2} L^2(E) \subset L^2(E).$$

Avec la continuité de $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ sur $L^2(E)$, on voit que $H^{-1/2} V_-^{1/2}$ est continu sur $L^2(E)$, donc en fin de compte :

$$H^{-1/2} V_-^{1/2} V_-^{1/2} \sigma = H^{-1/2} V_- \sigma \in L^2(E).$$

Ceci garantit que $(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}) H^{1/2}\sigma$ est dans $L^2(E)$. Pour $\phi$ dans $C_c^\infty(E)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} < H(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}) H^{1/2}\sigma, \phi > &= < H(H^{1/2}\sigma - H^{-1/2} H\sigma), \phi > \\ &= < \sigma, H(H^{1/2} - H^{-1/2} H)\phi > \\ &= 0 \end{aligned}$$

de sorte qu'au sens des distributions :

$$H(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}) H^{1/2}\sigma = 0.$$

Ainsi, $(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}) H^{1/2}\sigma$ est un élément de $\mathrm{Ker}_{L^2} H = \{0\}$ :

$$(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}) H^{1/2}\sigma = 0.$$

Il s'en suit que le noyau de $\overline{\Delta} + V = H - V_-$ est un sous-espace de

$$H^{-1/2}\,\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - H^{-1/2} V_- H^{-1/2}),$$

qui est de dimension finie. ■

Pour obtenir une majoration de la dimension du noyau, on va s'appuyer sur le résultat suivant, tiré de [GM] (voir aussi [Li]).

THÉORÈME 2.3.11 (GALLOT-MEYER) — *Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel euclidien de rang $k$. Munissons $M$ d'une mesure finie $\lambda$ et considérons un sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de $L^2(M,\lambda)$, de dimension finie $N \geq k$. Alors, pour $q > 2$,*

$$\frac{\iota_q(k)}{\iota_q(N)} \leq \lambda(M)^{1-2/q} \left( \frac{1}{\omega_N} \int_{\mathbb{S}_{\mathcal{L}}} \|s\|^q_{L^q(E,\lambda)}\, ds \right)^{2/q},$$

*où $\mathbb{S}_{\mathcal{L}}$ est la sphère unité de $\mathcal{L}$, $\omega_N$ est le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^N$ et $\iota_q$ est la fonction décroissante suivante, obtenue à partir de la fonction $\Gamma$ d'Euler :*

$$\iota_q \,:\, x \mapsto \frac{2}{x} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{x+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^{2/q}.$$

*De plus,*

$$\frac{N}{k} \leq \lambda(M) \left( \max_{s \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}}} \|s\|_{L^\infty(E,\lambda)} \right)^2.$$

Une conséquence est le

THÉORÈME 2.3.12 (THÉORÈME DE FINITUDE (2)) — *On suppose le potentiel $V$ vérifie*

$$\int_M |V_-|^{n/2}\, \rho(r) dvol < \infty.$$

*Soient $k$ le rang de $E$, $N$ la dimension du noyau $L^2$ de $\overline{\Delta} + V$ et $q = \frac{2n}{n-2}$. Pour $N \geq k$, on a*

$$\frac{\iota_q(k)}{\iota_q(N)} \leq S \left( \int_M |V_-|^{n/2}\, \rho(r) dvol \right)^{2/n};$$

*Autrement dit, pour tout entier $N_0$ supérieur ou égal à $k$, si*

$$S \left( \int_M |V_-|^{n/2}\, \rho(r) dvol \right)^{2/n} \leq \frac{\iota_q(k)}{\iota_q(N_0)},$$

*alors*

$$\dim \mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta} + V) \leq N_0.$$

**Preuve.**
On a vu dans la preuve précédente que $\mathcal{K} := \mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V)$ est un sous-espace du domaine de $(\overline{\Delta}+V_+)^{1/2}$, de sorte qu'avec l'inégalité de Sobolev, on voit que tout élément $\sigma$ de $\mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V)$ vérifie

$$\left(\int_M |\sigma|^q \rho(r)^{-\frac{2}{n-2}} dvol\right)^{2/q} \leq S \int_M (\sigma, V_-\sigma) dvol.$$

Définissons $d\lambda = |V_-|^{n/2} \rho(r) dvol$ et $F : \mathcal{K} \longrightarrow L^2(E,\lambda)$ par

$$F(\sigma) = 1_{|V_-|^{-1}(\mathbb{R}_+^*)} |V_-|^{\frac{-n}{4}} \rho(r)^{-1/2} V_-^{1/2} \sigma.$$

$F$ est injective (son noyau est inclus dans $\mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V_+) = \{0\}$) et pour tout $\sigma$ de $\mathcal{K}$, on a

$$\left(\int_M |F(\sigma)|^q \, d\lambda\right)^{2/q} \leq S \int_M |F(\sigma)|^2 \, d\lambda.$$

En appliquant 2.3.11 à $F(\mathcal{K})$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\iota_q(k)}{\iota_q(N)} &\leq \lambda(M)^{1-2/q} \left(\frac{1}{\omega_N} \int_{\mathbb{S}_{F(\mathcal{K})}} \|s\|^q_{L^q(E,\lambda)} \, ds\right)^{2/q} \\ &\leq \lambda(M)^{1-2/q} S \\ &= \left(\int_M |V_-|^{n/2} \rho(r) dvol\right)^{2/n} S. \end{aligned}$$

■

On peut aussi combiner 2.3.11 et l'estimée $L^\infty$ du paragraphe précédent.

Théorème 2.3.13 (Théorème de finitude (3)) — *Supposons que le potentiel $V$ vérifie*

$$V_- \in L^s(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol) \cap L^x(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol)$$

*avec $\frac{2n}{n+2} \leq s < \frac{n}{2} < x$. Alors il y a une constante $C = C(n,s,x)$ telle que la dimension de $\mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V)$ est majorée par*

$$\max\left(1, C \|SV_-\|^x_{L^x(E,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol)} \|SV_-\|^{\frac{s(x-n/2)}{n/2-s}}_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol)}\right) \cdot \mathrm{rg}\, E.$$

**Preuve.**
Soit $k := \mathrm{rg}\, E$. On suppose la dimension de $\mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V)$ supérieure à $k$. Comme dans 2.3.8, on voit que tout élément $\sigma$ de $\mathcal{K} := \mathrm{Ker}_{L^2}(\overline{\Delta}+V)$ vérifie

$$\|\sigma\|^{\frac{s}{n-2s}+\frac{x}{2x-n}}_{L^\infty(E)} \leq C(n,s,x) \|SV_-\sigma\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol)} \|SV_-\sigma\|^{\frac{x}{2x-n}}_{L^x(E,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol)},$$

de sorte que

$$\|\sigma\|_{L^\infty(E)}^{\frac{x}{2x-n}} \leq C(n,s,x)\,\|SV_-\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)}\,\|SV_-\sigma\|^{\frac{x}{2x-n}}_{L^x(E,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}dvol)}.$$

Définissons $d\lambda = |SV_-|^x\,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}dvol$ et observons l'inégalité

$$\|V_-\sigma\|^x_{L^x(E,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}dvol)} \leq \|\sigma\|^{x-2}_{L^\infty(E)}\int_M |\sigma|^2\,|V_-|^x\,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}dvol.$$

On en tire

$$\|\sigma\|_{L^\infty(E)}^{\frac{2}{2x-n}} \leq C(n,s,x)\,\|SV_-\|^{\frac{s}{n-2s}}_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)}\,\|\sigma\|^{\frac{2}{2x-n}}_{L^2(E,\lambda)},$$

si bien qu'en voyant $\mathcal{K}$ comme sous-espace de $L^2(E,\lambda)$, 2.3.11 fournit

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{K} &\leq k\,\lambda(M)\left(\max_{s\in\mathbb{S}_\mathcal{K}}\|s\|_{L^\infty(E,\lambda)}\right)^2\\ &\leq k\,\|SV_-\|^x_{L^x(E,\rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}}dvol)}\,C(n,s,x)^{2x-n}\,\|SV_-\|^{\frac{s(2x-n)}{n-2s}}_{L^s(E,\rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)}.\end{aligned}$$

■

## 2.4 Premières applications.

### 2.4.1 Cohomologie $L^2$.

Notre étude des opérateurs de Schrödinger va nous fournir des informations géométriques dès que le potentiel ne dépend que du tenseur de courbure. Par exemple, quand l'inégalité de Sobolev à poids est valide, le théorème d'annulation (2.3.1) dira que sous une hypothèse de courbure, le noyau d'un tel opérateur géométrique doit être trivial. Nous nous intéressons ici au cas du laplacien de Hodge $\Delta = dd^* + d^*d$. Cet opérateur agit sur les formes différentielles en préservant leur degré. En degré $k$, il est bien connu qu'on a une décomposition de Weitzenböck

$$\Delta^k = \overline{\Delta} + \mathcal{R}^k,$$

où le potentiel $\mathcal{R}^k$ est un champ d'endomorphismes symétriques du fibré vectoriel des formes extérieures de degré $k$ sur $M$ ; de plus, $\mathcal{R}^k$ s'obtient algébriquement à partir du tenseur de courbure. Par exemple, $\mathcal{R}^1$ s'identifie au tenseur de Ricci. Nos résultats s'appliquent dans ce cadre et donnent des informations sur la cohomologie $L^2$ (réduite) $\mathcal{H}_{L^2}(M)$. Nous nous référons à [Car] pour les définitions. Disons simplement que $\mathcal{H}^k_{L^2}(M)$ s'identifie au noyau de $\Delta^k$, vu comme opérateur non borné sur les formes différentielles $L^2$ de degré $k$.

Le théorème suivant est une application directe de 2.3.1, 2.3.10, 2.3.12 et 2.3.13. Rappelons qu'avec $q = 2n/(n-2)$, on a défini dans 2.3.11 :

$$\iota_q \,:\, x \mapsto \frac{2}{x}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{x+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{2/q}.$$

THÉORÈME 2.4.1 (COHOMOLOGIE $L^2$) — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe non-compacte et vérifiant pour un certain point $o$ :*

$$\forall\, f \in C_c^\infty(M),\ \left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}}\, \rho_o(r_o)^{-\frac{2}{n-2}}\, dvol\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq S_o(M) \int_M |df|^2\, dvol.$$

*Pour tout entier naturel $k$,*

- *si $\left\|\mathcal{R}_-^k\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)} < \infty$, alors $\dim \mathcal{H}^k_{L^2}(M) < \infty$ ;*
- *si $\left\|\mathcal{R}_-^k\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)} < S_o(M)^{-1}$, alors $\mathcal{H}^k_{L^2}(M) = \{0\}$ ;*
- *si $\left\|\mathcal{R}_-^k\right\|_{L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)} \leq S_o(M)^{-1}\frac{\iota_q(k)}{\iota_q(N_0)}$ pour un certain entier $N_0 \geq \binom{n}{k}$, alors $\dim \mathcal{H}^k_{L^2}(M) \leq N_0$ ;*
- *pour $\frac{2n}{n+2} \leq s < n/2 < t$, il y a une constante $C = C(n,s,t)$ telle que la dimension de $\mathcal{H}^k_{L^2}(M)$ est majorée par*

$$\binom{n}{k} \max\left(1, C\left\|S_o(M)\mathcal{R}_-^k\right\|^t_{L^t(\rho_o(r_o)^{\frac{t-1}{n/2-1}}dvol)} \left\|S_o(M)\mathcal{R}_-^k\right\|^{\frac{s(x-n/2)}{n/2-s}}_{L^s(\rho_o(r_o)^{\frac{s-1}{n/2-1}}dvol)}\right).$$

COROLLAIRE 2.4.2 — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe, à courbure de Ricci positive et vérifiant pour un point $o$ et pour des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ :*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o\left(\frac{t}{s}\right)^\nu.$$

*Si le tenseur de Riemann vérifie est dans $L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)$, alors les espaces de cohomologie $L^2$ sont de dimension finie (et on dispose des estimées du théorème).*

### 2.4.2 Uniformisation de la courbure scalaire.

Nous souhaitons expliquer comment nos techniques permettent de trouver des métriques à courbure scalaire nulle (au dehors d'un compact) dans certaines situations. Le théorème suivant généralise un résultat de [CH].

THÉORÈME 2.4.3 (UNIFORMISATION DE LA COURBURE SCALAIRE) — *Soit $M^n$, $n \geq 3$, une variété riemannienne complète connexe, à courbure de Ricci positive et vérifiant pour un point $o$ et pour des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ :*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o\left(\frac{t}{s}\right)^\nu.$$

*On suppose que la courbure scalaire* Scal *de* $(M, g)$ *vérifie*

$$\mathrm{Scal} \in L^s(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol) \cap L^x(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol)$$

*avec* $\frac{2n}{n+2} \leq s < \frac{n}{2} < x$. *Alors, hors d'un compact, on peut trouver une métrique conformément quasi-isométrique à* $g$ *dont la courbure scalaire s'annule.*

*Remarque* 2.4.1. Si la courbure scalaire est petite au sens de l'espace

$$L^s(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{s-1}{n/2-1}} dvol) \cap L^x(E_\Omega, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol)$$

on peut même rendre la courbure scalaire nulle partout.

**Preuve.**
Quand on fait un changement conforme de métrique pour obtenir une métrique $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$, avec $v$ une fonction lisse strictement positive, la courbure scalaire se transforme selon l'équation de Yamabe

$$c_n v^{\frac{n+2}{n-2}} \mathrm{Scal}_{\tilde{g}} = \Delta_g v + c_n \mathrm{Scal}_g v,$$

avec

$$c_n = \frac{n-2}{4(n-1)}.$$

En posant $v = 1 + u$, on est ramené à résoudre

$$\Delta_g u + c_n \mathrm{Scal}_g u = -c_n \mathrm{Scal}_g$$

au dehors d'un compact. Une application du théorème d'inversion 2.3.9, au-dehors d'un compact pour garantir la petitesse des normes en jeu, fournit une solution $u$ petite en norme $L^\infty$, d'où le résultat. ■

## 2.5 Les variétés Ricci plates.

### 2.5.1 Critères de platitude.

Nous allons voir que l'inégalité de Sobolev à poids et l'inégalité de Hardy donnent des informations dans le cadre des variétés Ricci plates, i.e. à courbure de Ricci nulle. Comme les variétés Ricci plates de dimension 3 sont plates, nous supposerons toujours la dimension plus grande que 4. Nous allons prouver des résultats de rigidité pour ces variétés, sous l'hypothèse de doublement inverse du volume. Dans ce paragraphe, nous montrons celles de nos variétés qui ont une courbure trop petite ne peuvent qu'être plates. Le « trop petite » sera précisé plus bas. L'outil clé est une propriété du tenseur de courbure des variétés Ricci-plates. Bien sûr, il se réduit au tenseur de Weyl $W$ , mais surtout il vérifie une équation elliptique non linéaire du type

$$\overline{\Delta} W = W * W,$$

où le membre de droite est une expression quadratique en $W$ [Bes]. En particulier, soit $W$ est identiquement nul, soit il s'annule seulement sur un ensemble de mesure nulle. Donc, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $|W|$ est lisse et vérifie une estimée du type

$$|\Delta |W|| \leq c(n) |W|^2 ,$$

où $c(n)$ est une constante universelle, i.e. ne dépendant que de la dimension $n$. Maintenant, pour tout $k \geq 1$, on peut écrire

$$\Delta |W|^k = k |W|^{k-1} \Delta |W| - k(k-1) |W|^{k-2} |d|W||^2 \leq kc(n) |W|^{k+1} .$$

Il s'avère que cette inégalité est encore vraie pour des valeurs de $k$ plus petites que 1. Ce fait est rendu possible par l'inégalité de Kato raffinée ([BKN], [CGH]), qui dit que le tenseur de Weyl $W$ d'une variété Ricci plate de dimension $n$ vérifie presque partout

$$|d|W||^2 \leq \frac{n-1}{n+1} |\nabla W|^2 .$$

Grâce à cela, on trouve presque partout

$$\Delta |W|^\gamma \leq c(n)\gamma |W|^{\gamma+1} ,$$

avec $\gamma := \frac{n-3}{n-1}$. En effet, en notant la relation $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{2-\gamma}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Delta |W|^\gamma &= \gamma |W|^{\gamma-1} \Delta |W| + \gamma(1-\gamma) |W|^{\gamma-2} |d|W||^2 \\
&= \gamma |W|^{\gamma-2} \left( \frac{1}{2} \Delta |W|^2 + |d|W||^2 \right) + \gamma(1-\gamma) |W|^{\gamma-2} |d|W||^2 \\
&= \gamma |W|^{\gamma-2} \left( (W, \overline{\Delta} W) - |\nabla W|^2 \right) + \gamma(2-\gamma) |W|^{\gamma-2} |d|W||^2 \\
&\leq c(n)\gamma |W|^{\gamma+1} - \gamma |W|^{\gamma-2} |\nabla W|^2 + \gamma |W|^{\gamma-2} |\nabla W|^2 \\
&= c(n)\gamma |W|^{\gamma+1} .
\end{aligned}$$

Maintenant, étant donné $k \geq \gamma$, on peut écrire $k = \gamma l$, $l \geq 1$, de sorte qu'on a

$$\begin{aligned}
\Delta |W|^k &= \Delta (|W|^\gamma)^l \\
&= l(|W|^\gamma)^{l-1} \Delta (|W|^\gamma) - l(l-1)(|W|^\gamma)^{l-2} |d(|W|^\gamma)|^2 \\
&\leq l(|W|^\gamma)^{l-1} c(n)\gamma |W|^{\gamma+1} \\
&= kc(n) |W|^{k+1} .
\end{aligned}$$

En fin de compte, pour tout $k \geq \gamma = \frac{n-3}{n-1}$, on a :

$$\Delta |W|^k \leq c(n)k |W|^{k+1} . \tag{2.20}$$

Cette inégalité étant établie, on peut prouver nos résultats. Afin de mieux exprimer nos théorèmes de seuil, nous souhaitons introduire deux invariants.

DÉFINITION 2.5.1 — *L'invariant « Sobolev-courbure » d'une variété riemannienne complète connexe $M^n$ est défini par*

$$\mathcal{SC}(M) := \inf_{o\in M}\left[S_o(M)\left(\int_M |\mathrm{Rm}|^{\frac{n}{2}}\,\rho_o(r_o)dvol\right)^{\frac{2}{n}}\right],$$

*où* Rm *est le tenseur de Riemann. L'invariant « Hardy-courbure »est quant à lui :*

$$\mathcal{HC}(M) := \inf_{o\in M}\left[H_o(M)^2 \sup_M(|\mathrm{Rm}|\, r_o^2)\right],$$

*Nous utilisons la convention* $0.\infty = \infty$.

Notre premier résultat de rigidité est le

THÉORÈME 2.5.2 (CRITÈRE DE PLATITUDE (1)) — *Pour tout $n \geq 4$, il existe $\epsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$ vérifiant $\mathcal{SC}(M) < \epsilon(n)$ est en fait plate.*

**Preuve.**
Posons $\epsilon(n) = \frac{4}{nc(n)}\left(2-\frac{4}{n}\right)$. le théorème est une conséquence immédiate du théorème d'annulation 2.3.1, appliqué à l'opérateur $\Delta - c(n)\,|W|$ et à la section $|W|$, grâce à l'inégalité de Sobolev à poids : si $M$ est comme dans l'énoncé, en prenant $m = \frac{n}{2}$ dans (2.3.1), on obtient $W = 0$ donc $M$ est plate. ■

COROLLAIRE 2.5.3 — *Pour tout entier $n \geq 4$ et tous réels $\nu > 2$ et $C > 0$, il existe $\epsilon(n, C, \nu) > 0$ tel que toute variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$ qui vérifie pour un certain point $o$*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\mathrm{vol}\, B(o,t)}{\mathrm{vol}\, B(o,s)} \geq C\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*ainsi que*

$$\int_M |W|^{\frac{n}{2}}\,\rho_o(r_o)dvol < \epsilon(n, C, \nu)$$

*est en fait plate.*

Il y a aussi un critère de platitude basé sur l'inégalité de Hardy (2.2.18). Une adaptation facile de la preuve précédente fonctionnerait avec l'inégalité de Hardy $L^2$. Mais nous allons plutôt utiliser l'inégalité de Hardy $L^1$ : ce faisant, nous agrandissons la gamme de volumes autorisée, (on passe de $\nu > 2$ à $\nu > 1$ dans le corollaire 2.5.5). Cela nécessitera juste un peu plus de travail.

THÉORÈME 2.5.4 (CRITÈRE DE PLATITUDE (2)) — *Pour tout $n \geq 4$, il existe $\epsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$ vérifiant $\mathcal{HC}(M) < \epsilon(n)$ est en fait plate.*

**Preuve.**
Posons $\epsilon(n) = c(n)^{-1}(n+2)^{-3}$ et choisissons un point $o$ tel que $H_o(M)^2 \sup_M(|W|\, r_o^2) < \epsilon(n)$. On notera $H = H_o(M)$, $K = \sup_M(|W|\, r_o^2)$ et $k = \frac{n+2}{4}$ (ce dernier choix s'éclairera à la fin de la preuve). Nous considérons, pour $R$ grand, une fonction lisse $\chi$ égale à 1 sur $B(R)$, nulle sur $M\backslash B(2R)$, prend ses valeurs dans $[0,1]$ et vérifie $|d\chi| \leq \frac{2}{R}$. L'inégalité de Hardy donne

$$\int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} \leq H \int_M \left| d(\chi^2\, |W|^{2k}) \right|.$$

On peut majorer le membre de droite à l'aide de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_M \left| d(\chi^2\, |W|^{2k}) \right| \leq \;& 2 \int_M \chi\, |d\chi|\, |W|^{2k} \\ & + 2 \left( \int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} \right)^{1/2} \left( \int_M \chi^2 \left| d(|W|^k) \right|^2 r \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Posons $k' := k - 1/4$. Pour préparer une intégration par parties, on tue au préalable le facteur $r$ dans la dernière intégrale :

$$\int_M \chi^2 \left| d(|W|^k) \right|^2 r = (k/k')^2 \int_M \chi^2 \left| d(|W|^{k'}) \right|^2 |W|^{1/2}\, r \leq k^2 K^{1/2} \int_M \chi^2 \left| d(|W|^{k'}) \right|^2.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_M \chi^2 \left| d(|W|^{k'}) \right|^2 &= \int_M \left| d(\chi\, |W|^{k'}) - |W|^{k'}\, d\chi \right|^2 \\ &\leq 2 \int_M \left| d(\chi\, |W|^{k'}) \right|^2 + 2 \int_M |W|^{2k'}\, |d\chi|^2. \end{aligned}$$

On intègre par parties et on utilise (2.20) :

$$\begin{aligned} \int_M \chi^2 \left| d(|W|^{k'}) \right|^2 &\leq 2 \int_M \chi^2\, |W|^{k'}\, \Delta\, |W|^{k'} + 4 \int_M |W|^{2k'}\, |d\chi|^2 \\ &\leq 2k' c(n) \int_M \chi^2\, |W|^{2k'+1} + 4 \int_M |W|^{2k'}\, |d\chi|^2 \\ &\leq 2kc(n)\sqrt{K} \int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} + 4 \int_M |W|^{2k-1/2}\, |d\chi|^2. \end{aligned}$$

On en tire l'estimée :

$$\begin{aligned} \int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} \leq \;& 2H \int_M \chi\, |d\chi|\, |W|^{2k} \\ & + \sqrt{8H^2 K c(n) k^3} \int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} \\ & + 4HK^{1/4} k \left( \int_M \chi^2\, |W|^{2k}\, r^{-1} \right)^{1/2} \left( \int_M |W|^{2k-1/2}\, |d\chi|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Notre choix de $\epsilon(n)$ et $k$ assure que $\sqrt{8H^2Kc(n)k^3}$ est strictement inférieur à 1, de sorte qu'on obtient

$$\begin{aligned}&\left(1-\sqrt{8H^2Kc(n)k^3}\right)\int_{B(R)}|W|^{2k}\,r^{-1}\\ \leq\ &\frac{4H}{R}\int_M|W|^{2k}+\frac{8HK^{1/4}k}{R}\left(\int_M|W|^{2k}\,r^{-1}\right)^{1/2}\left(\int_M|W|^{2k-1/2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Rappelons que $W$ décroît en $r^{-2}$ et que la croissance du volume est au plus euclidienne : notre choix de $k$ assure que les intégrales du membre de droite sont finies. En faisant tendre $R$ vers l'infini, on arrive à $W=0$. ■

COROLLAIRE 2.5.5 — *Pour tout entier $n\geq 4$ et tous réels $\nu>1$ et $C>0$, il existe $\epsilon(n,C,\nu)>0$ tel que toute variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$ qui vérifie pour un certain point $o$*

$$\forall t\geq s>0,\ \frac{\operatorname{vol}B(o,t)}{\operatorname{vol}B(o,s)}\geq C\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*ainsi que*

$$\sup_M(|W|\,r_o^2)<\epsilon(n,C,\nu).$$

*est en fait plate.*

### 2.5.2 Décroissance de la courbure.

Dans le paragraphe précédent, on a vu que quand $\mathcal{SC}(M)$ est petit, la courbure doit être nulle. En utilisant les lemmes de 2.3.2, on peut montrer que si $\mathcal{SC}(M)$ est seulement fini, alors la courbure décroît à l'infini. Nous allons d'abord prouver une décroissance quadratique, et ensuite nous l'améliorerons pour obtenir une décroissance plus forte, qui permettra d'obtenir des conséquences topologiques. La clé de l'histoire est l'inégalité de Kato raffinée.

LEMME 2.5.6 — *Considérons une variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$, avec $n\geq 4$. Supposons qu'il existe un point $o$ de $M$ et des réels $\nu>2$ et $C_o>0$ tels que*

$$\forall t\geq s>0,\ \frac{\operatorname{vol}B(o,t)}{\operatorname{vol}B(o,s)}\geq C_o\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*et supposons que le tenseur de courbure appartienne à $L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)$. Alors on a l'estimée $|W|=o(r_o^{-2})$.*

*Remarque* 2.5.1. Si on suppose que $W$ est comparable à une puissance de la fonction distance $r_o^{-\sigma}$, l'hypothèse $\int_M|W|^{\frac{n}{2}}\,\rho_o(r_o)dvol<+\infty$ est équivalente à $\sigma>2$ : le lemme transforme donc l'estimée intégrale en l'estimée ponctuelle qu'on peut a priori espérer. Le prochain théorème va établir une amélioration automatique de cette estimée : c'est une nouvelle manifestation de rigidité.

**Preuve.**
Puisque $(\Delta - c(n)\,|W|)\,|W| \leq 0$, on veut appliquer le lemme 2.3.4 à l'opérateur $\Delta - c(n)\,|W|$. Mais ceci nécessite une estimée sur le potentiel. On pose $x = \frac{n^2}{2(n-2)}$, de sorte qu'en particulier $x - n/2 = \frac{n}{n-2}$. Pour $R$ grand, le lemme 2.3.2 (avec $m = n/2$) implique :

$$\left(\int_{M\setminus B(R)} |W|^x \, d\mu_\rho\right)^{\frac{1}{x-n/2}} \leq \frac{C}{R^2} \int_{A(R/2,R)} |W|^{\frac{n}{2}} \, dvol.$$

Comme $\rho(R)\int_{A(R/2,R)} |W|^{\frac{n}{2}}\, dvol$ est uniformément majoré, il vient l'estimée suivante :

$$\begin{aligned}\left(\int_{A(R,2R)} |W|^x \, \rho(r)^{\frac{x-1}{n/2-1}} dvol\right)^{\frac{1}{x-n/2}} &\leq CR^{-2}\rho(R)^{-1+\frac{\frac{x-1}{n/2-1}+\frac{2}{n-2}}{x-n/2}} \\ &= CR^{-2}\rho(R)^{\frac{2}{n-2}}.\end{aligned}$$

Ceci autorise l'usage du lemme 2.3.4 avec $m = n/2$ :

$$\begin{aligned}\sup_{S(R)} |W| &\leq C\rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2} \left(\int_{A(R/2,5R/2)} |W|^{n/2} \, d\mu_\rho\right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq CR^{-2} \left(\int_{A(R/2,5R/2)} |W|^{n/2} \, \rho(r) dvol\right)^{\frac{2}{n}}.\end{aligned}$$

Et comme la dernière intégrale tend vers zéro quand $R$ tend vers l'infini, le résultat suit. ■

Théorème 2.5.7 (Décroissance de la courbure (1)) — *Considérons une variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$, avec $n \geq 4$. Supposons qu'il existe un point $o$ de $M$ et des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0, \ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^\nu$$

*et supposons que le tenseur de courbure appartienne à $L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)$. Alors on a l'estimée*

$$|W| = \mathcal{O}(r_o^{-b}) \quad \textit{pour } b = 2 \textit{ et pour tout } b < \frac{\nu-2}{\gamma} = \frac{(\nu-2)(n-1)}{n-3}.$$

**Preuve.**
Posons $w = |W|^\gamma$ et $b_0 = \sup\left\{b > 0 \,/\, w = O\left(\left[r^2/V(r)\right]^b\right)\right\}$. On sait par 2.5.6 que $w = \mathcal{O}(r^{-2\gamma})$ ; comme $V(r) \leq \omega_n r^n$ (Bishop), cela implique $w = \mathcal{O}(V(r)^{-2\gamma/n}) = \mathcal{O}([r^2/V(r)]^{2\gamma/n})$, de sorte que $b_0$ est strictement positif. Supposons $b_0 < 1$. Alors on peut choisir $b_1 > 0$ et $m > 0$ pour que

$$m > \frac{n}{b_1(n-2)} > \frac{n}{b_0(n-2)} > \frac{n}{n-2}.$$

Puisque $b_1 < b_0$, $w = O\left(\left[r^2/V(r)\right]^{b_1}\right)$, donc pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{A(R,2R)} |w|^m \, d\mu_\rho &\leq C\left[R^2/V(R)\right]^{mb_1} \rho(R)^{-\frac{2}{n-2}} V(R) \\ &= C\left[R^2/V(R)\right]^{mb_1 - \frac{n}{n-2}} \\ &\leq CR^{-(\nu-2)\left(mb_1 - \frac{n}{n-2}\right)}.\end{aligned}$$

Ceci implique $\int_M |w|^m \, d\mu_\rho < +\infty$. Comme on a presque partout $(\Delta - \gamma c(n)\,|W|)w \leq 0$, on aimerait appliquer le lemme 2.3.3 à la fonction $w$, qui n'est malheureusement pas localement Lipschitz. Pour contourner cette difficulté, on considère $u_\epsilon := \sqrt{|W|^2 + \epsilon}$, $\epsilon > 0$. Un calcul direct donne presque partout :

$$\begin{aligned}u_\epsilon^\gamma \Delta u_\epsilon^\gamma &= \gamma u_\epsilon^{2\gamma-2}\left(|W|\,\Delta\,|W| - \epsilon u_\epsilon^{-2}\,|d\,|W||^2\right) + \gamma(1-\gamma)u_\epsilon^{2\gamma-4}\,|W|^2\,|d\,|W||^2 \\ &\leq \gamma u_\epsilon^{2\gamma-2}\left(|W|\,\Delta\,|W| + (1-\gamma)\,|d\,|W||^2\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Kato raffinée comme dans la preuve de (2.20), on obtient (partout) :

$$u_\epsilon^\gamma \Delta u_\epsilon^\gamma \leq \gamma u_\epsilon^{2\gamma}(W, \overline{\Delta} W).$$

Comme dans la preuve de (2.3.1), en faisant tendre $\epsilon$ vers zéro, on parvient à établir la première inégalité dans la preuve du lemme 2.3.3 ($m > \frac{n}{n-2}$). En fin de compte, on arrive à :

$$\int_{M\setminus B(R)} |w|^m \, d\mu_\rho = \mathcal{O}(R^{-a}),$$

pour un nombre $a > 0$ qui est indépendant du choix de $m$ dans un voisinage de $\frac{n}{b_0(n-2)}$. Si maintenant on applique le lemme 2.3.4 pour ce $m$ (de nouveau, il faut adapter la preuve pour contourner le fait que $w$ n'est pas localement Lipschitz), on trouve pour $R$ grand :

$$\begin{aligned}\sup_{S(R)} w &\leq C\left(\rho(R)^{\frac{2}{n-2}} R^{-2}\right)^{\frac{n}{2m}} R^{-a/m} \\ &= C\left[R^2/V(R)\right]^{\frac{n}{m(n-2)}} R^{-a/m} \\ &\leq C\left[R^2/V(R)\right]^{\frac{n}{m(n-2)} + \frac{a}{nm}},\end{aligned}$$

où on a utilisé la croissance sous-euclidienne du volume. Quand $m$ tend vers $\frac{n}{b_0(n-2)}$, l'exposant tend vers $b_o + \frac{b_o(n-2)a}{n^2}$ : si on choisit $m$ assez près de $\frac{n}{b_0(n-2)}$, on obtient une contradiction à la définition de $b_o$. Donc $b_o$ vaut au moins 1 et, avec la minoration du volume, on a prouvé le résultat. ■

COROLLAIRE 2.5.8 (TOPOLOGIE FINIE) — *Soit $M^n$, $n \geq 4$, une variété riemannienne complète connexe Ricci plate, vérifiant pour un point $o$ et des réels $\nu > 4\frac{n-2}{n-1}$, $C_o > 0$ :*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}.$$

*Si de plus le tenseur de courbure appartient à $L^{\frac{n}{2}}(M, \rho_o(r_o)dvol)$, alors $M$ est de type topologique fini, i.e. homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord.*

**Preuve.**
Le théorème 2.5.7 donne une décroissance surquadratique de la courbure de sorte que [A1], [A2] s'appliquent. ■

On peut se demander si le taux de décroissance limite dans 2.5.7 est en fait atteint. En fait, c'est vrai.

THÉORÈME 2.5.9 (DÉCROISSANCE DE LA COURBURE (2)) — *Considérons une variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$, avec $n \geq 4$. Supposons qu'il existe un point $o$ de $M$ et des réels $\nu > 4\frac{n-2}{n-1}$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*et supposons que le tenseur de courbure appartienne à $L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)$. Alors on a l'estimée*

$$|W| = \mathcal{O}(r_o^{-\frac{(\nu-2)(n-1)}{n-3}}).$$

**Preuve.**
Dans [Gur], M. Gursky étudie l'opérateur géométrique suivant :

$$L_g := \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}_g - \gamma c(n) |W|_g .$$

Cet opérateur est conformément covariant : si $\phi$ est une fonction lisse et positive, on a

$$L_{\phi^{\frac{4}{n-2}} g} = \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(\phi .). \tag{2.21}$$

Nous voulons utiliser cette propriété pour trouver dans la classe conforme de notre métrique Ricci plate $g$ une nouvelle métrique $\tilde{g}$ pour laquelle on aurait au dehors d'un compact :

$$L_{\tilde{g}} = \Delta_{\tilde{g}},$$

i.e.

$$\frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}_{\tilde{g}} - \gamma c(n) |W|_{\tilde{g}} = 0.$$

Cherchons $\tilde{g}$ sous la forme $\tilde{g} = (1+u)^{\frac{4}{n-2}} g$, où $u$ est une fonction lisse à déterminer. En appliquant (2.21) à la fonction constante à 1, on trouve

$$L_{\tilde{g}}(1) = L_{(1+u)^{\frac{4}{n-2}} g}(1) = (1+u)^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(1+u),$$

de sorte qu'avec $\mathrm{Scal}_g = 0$, il vient

$$\frac{n-2}{4(n-1)}\,\mathrm{Scal}_{\tilde{g}} - \gamma c(n)\,|W|_{\tilde{g}} = (1+u)^{-\frac{n+2}{n-2}}(\Delta_g u - \gamma c(n)\,|W|_g)(1+u).$$

Nous devons donc résoudre

$$\Delta_g u - \gamma c(n)\,|W|_g\, u = \gamma c(n)\,|W|_g\,. \tag{2.22}$$

En fait, on va résoudre cette équation sur $M\backslash B_g(o,R)$, pour un $R$ assez grand. Nous voulons appliquer le théorème d'inversion 2.3.9 à $\Delta_g - \gamma c(n)\,|W|_g$. L'hypothèse $\nu > 4\frac{n-2}{n-1}$ assure $\frac{\nu-2}{\gamma} > 2$ : le théorème 2.5.7 donne $|W| = \mathcal{O}(r^{-b})$ pour un $b > 2$. En particulier, avec la borne euclidienne sur le volume (Bishop), on obtient pour $\delta > 0$ petit :

$$\int_M |W|^{n/2\pm\delta}\,\rho(r)^{\frac{n/2\pm\delta-1}{n/2-1}}\,dvol < \infty.$$

En choisissant $R$ assez grand, on peut garantir

$$S_o(M)\left(\int_{M\backslash B_g(o,R)} |W|^{n/2\pm\delta}\,\rho(r)^{\frac{n/2\pm\delta-1}{n/2-1}}\,dvol\right)^{\frac{1}{n/2\pm\delta}} < \eta(n/2, n/2-\delta, n/2+\delta).$$

Ainsi, 2.3.9 fournit une solution bornée $u$ de (2.22) sur $M\backslash B_g(o,R)$ ; et en prenant $R$ encore plus grand si nécessaire, on peut même supposer $\|u\|_{L^\infty} < 1$. Quitte à étendre $u$ à $M$ de façon convenable, on obtient une métrique $\tilde{g}$ qui est conformément quasi-isométrique à $g$ et dont l'opérateur de Gurski se réduit au laplacien de Beltrami hors d'un compact. Par régularité elliptique, $u$ est $C^2$ (les coefficients de l'équation sont Lipschitz) et cela nous suffira.

Ensuite, on observe que là où $|W_g|_g$ est strictement positif, $|W_g|_g^\gamma$ est lisse et

$$L_g\,|W_g|_g^\gamma = \Delta_g\,|W_g|_g^\gamma - \gamma c(n)\,|W|_g\,|W_g|_g^\gamma \le 0,$$

si bien qu'avec (2.21), on a

$$L_{\tilde{g}}((1+u)^{-1}\,|W_g|_g^\gamma) \le 0,$$

ce qui signifie

$$\Delta_{\tilde{g}}((1+u)^{-1}\,|W_g|_g^\gamma) \le 0$$

au dehors d'un compact.

Or, puisque $(M,\tilde{g})$ est quasi-isométrique à $(M,g)$, $(M,\tilde{g})$ vérifie la condition de doublement du volume ainsi que l'inégalité de Poincaré à l'échelle. Or ces propriétés (ensemble) sont équivalentes à l'estimée suivante sur le noyau de la chaleur $p_.(.,.)$ : pour $x$, $y$ dans $M$, et pour $t > 0$,

$$\frac{c}{V(x,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{Cd(x,y)^2}{t}\right) \le p_t(x,y) \le \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}\exp\left(-\frac{cd(x,y)^2}{t}\right)$$

(cf. [SC], [Grig]). Comme il y a une constante $\tilde{A}_o$ telle que pour tout $t \geq 1$, $V_{\tilde{g}}(o,t) \geq \tilde{A}_o t^\nu$, avec $\nu > 2$, ceci entraîne l'existence d'une fonction de Green strictement positive $G(.,.)$ : c'est simplement $\int_0^\infty p_t(.,.)dt$ ([LY]). A l'aide de cette formule et de la majoration du noyau de la chaleur, on obtient $G(o,x) = \mathcal{O}(r_o(x)^{2-\nu})$ quand $r_o(x)$ tend vers l'infini. Le principe du maximum assure que pour tout point $x$ de $M \backslash B_g(o,R)$, avec $R$ grand :

$$(1+u)^{-1} |W_g|_g^\gamma (x) \leq \frac{\max_{S(o,R)} (1+u)^{-1} |W_g|_g^\gamma}{\min_{S(o,R)} G(o,.)} G(o,x).$$

On en tire $\sup_{S(o,R)} |W| = \mathcal{O}(R^{\frac{2-\nu}{\gamma}})$. ■

*Remarque* 2.5.2. Quand $\nu = n = 4$, on obtient la même décroissance que dans [BKN]. Et la métrique d'Eguchi-Hanson montre qu'elle est optimale.

*Remarque* 2.5.3. Notre estimée est optimale pour la métrique Taub-NUT et les métriques de Schwarzschild (voir le chapitre d'exemples, au début de ce mémoire).

### 2.5.3 Décroissance des dérivées de la courbure.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir de bonnes estimées sur les dérivées covariantes de la courbure d'une variété Ricci-plate dont la courbure décroît à l'infini. Ces estimées nous seront nécessaires plus loin.

PROPOSITION 2.5.10 — *Soit $M^n$, $n \geq 4$, une variété riemannienne complète Ricci plate satisfaisant pour un point $o$ l'inégalité de doublement inverse*

$$\forall t \geq s > 0, \ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^\nu$$

*avec $\nu > 2$ et $C_o > 0$. Alors l'estimation de la coubure*

$$|W| = \mathcal{O}(r_o^{-a}),$$

*avec $a \geq 2$, entraîne, pour tout entier naturel $i$, une estimée sur la dérivée covariante d'ordre $i$ :*

$$\left|\nabla^i W\right| \leq C_i r_o^{-a-i}.$$

**Preuve.**
Il est important de noter que la formule

$$\overline{\Delta} W = W * W,$$

entraîne pour entier naturel $k$ [TV] :

$$\overline{\Delta} \nabla^k W = \sum_{i=0}^{k} \nabla^i W * \nabla^{k-i} W. \tag{2.23}$$

En nous appuyant sur cette équation, montrons par récurrence sur $i$ les estimations

$$\left|\nabla^i W\right| \leq C_i r_o^{-a-i}.$$

Le cas $i = 0$ est contenu dans l'hypothèse. Supposons donc l'estimée établie pour $i \leq k$, avec $k \geq 0$. Par la formule 2.23, on a

$$(\overline{\Delta} - W*)\nabla^{k+1} W = \sum_{i=1}^{k} \nabla^i W * \nabla^{k+1-i} W.$$

Par hypothèse de récurrence, le membre de droite est majoré par $C_{k+1} r_o^{-2a-k-1}$. L'estimée (2.3.3) fournit donc :

$$\sup_{A(R,2R)} \left|\nabla^{k+1} W\right| \leq \frac{C_{k+1}}{\operatorname{vol} B(o,R)^{\frac{1}{2}}} \left\|\nabla^{k+1} W\right\|_{L^2(A(R/2,5R/2))} + C_{k+1} R^{1-2a-k}. \qquad (2.24)$$

Soit $\chi$ une fonction lisse positive valant 1 sur $A(R/2, 5R/2)$, 0 sur $A(R/3, 3R)^c$ et à gradient borné par $10/R$. On a

$$\int_{A(R/2,5R/2)} \left|\nabla^{k+1} W\right|^2 \leq \int_{A(R/3,3R)} \left|\nabla \left(\chi \nabla^k W\right)\right|^2$$

d'où après intégration par parties :

$$\int_{A(R/2,5R/2)} \left|\nabla^{k+1} W\right|^2 \leq \int_{A(R/3,3R)} |d\chi|^2 \left|\nabla^k W\right|^2 + \int_{A(R/3,3R)} \chi^2 (\nabla^k W, \overline{\Delta} \nabla^k W).$$

En utilisant (2.23), on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \int_{A(R/2,5R/2)} \left|\nabla^{k+1} W\right|^2 &\leq \frac{100}{R^2} \int_{A(R/3,3R)} \left|\nabla^k W\right|^2 \\ &+ C_{k+1} \sum_{i=0}^{k} \int_{A(R/3,3R)} \left|\nabla^k W\right| \left|\nabla^i W\right| \left|\nabla^{k-i} W\right|. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence, grâce à $a \geq 2$, conduit à

$$\begin{aligned} \int_{A(R/2,5R/2)} \left|\nabla^{k+1} W\right|^2 &\leq C_{k+1} \operatorname{vol} B(o,R) \left(R^{-2-2a-2k} + R^{-3a-2k}\right) \\ &\leq C_{k+1} \operatorname{vol} B(o,R) R^{-2-2a-2k}. \end{aligned}$$

Dans (2.24), on trouve ainsi

$$\sup_{A(R/2,5R/2)} \left|\nabla^{k+1} W\right| \leq C_{k+1} \left(R^{-1-a-k} + R^{1-2a-k}\right) \leq C_{k+1} R^{-1-a-k},$$

d'où

$$\left|\nabla^{k+1} W\right| \leq C_{k+1} r_o^{-a-(k+1)}.$$

■

Corollaire 2.5.11 (Décroissance de la courbure (3)) — *Considérons une variété riemannienne complète connexe Ricci plate $M^n$, avec $n \geq 4$. Supposons qu'il existe un point $o$ de $M$ et des réels $\nu > 2$ et $C_o > 0$ tels que*

$$\forall t \geq s > 0,\ \frac{\operatorname{vol} B(o,t)}{\operatorname{vol} B(o,s)} \geq C_o \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu}$$

*et supposons que le tenseur de courbure appartienne à $L^{\frac{n}{2}}(\rho_o(r_o)dvol)$. Alors on a l'estimée*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \left|\nabla^k W\right| = \mathcal{O}\left(r_o^{-2-k}\right).$$

*Si de plus on a $\nu > 4\frac{n-2}{n-1}$, alors*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \left|\nabla^k W\right| = \mathcal{O}\left(r_o^{-\frac{(\nu-2)(n-1)}{n-3}-k}\right).$$

# Chapitre 3

# Géométrie d'un effondrement à l'infini.

Notre objectif, ici, est d'arriver à comprendre la géométrie à l'infini de certains instantons gravitationnels à volume non maximal.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux lacets géodésiques les plus courts. Peut-estimer leur longueur ? Combien y en a-t-il en chaque point ? Quelle est leur holonomie ? Ceci nous permettra de comprendre la géométrie locale près de l'infini, dans le cas où la croissance du volume des boules de rayon $t$ est en $t^3$ dans une variété de dimension 4. Dans un second temps, nous utiliserons cette étude pour construire une fibration en cercles dans ce cas-ci. Nous classifierons ensuite la géométrie asymptotique, à l'action d'un groupe fini près. Beaucoup de résultats seront exprimés en dimension quelconque (modulo certaines hypothèses).

## 3.1 Rayon d'injectivité et effondrement volumique.

### 3.1.1 Le rayon d'injectivité à l'infini.

Commençons par un résultat très simple, ne nécessitant aucune hypothèse de courbure.

Proposition 3.1.1 (Majoration du rayon d'injectivité) — *Il existe une constante universelle $C(n)$ telle que si on se place sur une variété riemannienne complète $(M^n, g)$ vérifiant*

$$\inf_{t>0} \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{t^n} < C(n), \tag{3.1}$$

*alors le rayon d'injectivité est borné hors d'un compact de $M$.*

L'hypothèse (3.1) signifie qu'il existe un nombre $T > 0$ et un compact $K$ de $M$ tels que :

$$\forall\, x \in M \backslash K,\ \operatorname{vol} B(x,T) < C(n) T^n. \tag{3.2}$$

On pense à une variété vérifiant, pour tout $x$, $\mathrm{vol}\, B(x,t) \leq \omega(t)t^n$, avec une fonction $\omega$ tendant vers zéro à l'infini. On a vu que même dans le cas plat, la majoration uniforme du volume des boules n'est pas anodine : elle modère la géométrie à l'infini bien plus qu'une majoration du volume des boules centrées en un point. Au final, cette uniformité s'avèrera cruciale pour obtenir un modèle à l'infini.

**Preuve.**

La constante $C(n)$ est donnée par l'inégalité suivante, due à C. Croke [Cro] :

$$\forall\, t \leq \mathrm{inj}(x),\ \forall\, x \in M,\ \mathrm{vol}\, B(x,t) \geq C(n)t^n. \tag{3.3}$$

Soit $x$ un point situé hors du compact $K$ donné par (3.2). Si $\mathrm{inj}(x)$ est supérieur au $T$ de (3.2), on trouve avec (3.3) :

$$C(n)T^n \leq \mathrm{vol}\, B(x,T) < C(n)T^n,$$

ce qui est absurde. Le rayon d'injectivité en $x$ est donc majoré par $T$. ■

La théorie de Cheeger-Fukaya-Gromov s'applique naturellement dans ce cadre : elle décrit la géométrie des variétés à courbure petite et à rayon d'injectivité borné [CG]. Citons tout de suite le

COROLLAIRE 3.1.2 — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète dont la courbure tend vers zéro à l'infini et vérifiant (3.1). Alors, au dehors d'un compact, $M$ porte une $F$-structure de rang strictement positif et dont les orbites sont à diamètre borné.*

Autrement dit, on sait déjà que la géométrie à l'infini de ces variétés possède une structure. On veut la préciser, la rendre la plus concrète possible.

### 3.1.2 Généralités sur le pseudo groupe fondamental.

La notion de « pseudo-groupe fondamental », introduite par M. Gromov dans [GLP], est un outil essentiel pour comprendre la géométrie en courbure petite. Présentons-la.

Soit $M$ une variété riemannienne complète et soit $x$ un point de $M$. On suppose que la courbure sectionnelle sur la boule géodésique de rayon $2\rho$ autour de $x$ est bornée, en valeur absolue, par $\Lambda^2$ ($\Lambda \geq 0$), avec $\Lambda\rho < \pi/4$. Ainsi, en particulier, l'exponentielle en $x$ est un difféomorphisme local sur la boule $\hat{B}(0,2\rho)$ de rayon $2\rho$ et de centre 0 dans $T_xM$. La métrique $g$ sur $B(x,2\rho)$ se relève donc en une métrique $\hat{g} := \exp_x^* g$ sur $\hat{B}(0,2\rho)$. On notera Exp l'exponentielle associée à cette métrique.

Un fait important est prouvé dans [GLP] : deux points quelconques de $\hat{B}(0,2\rho)$ sont reliés par une unique géodésique, qui est donc minimisante ; de plus, les boules y sont strictement convexes. On pourra donc pratiquer sans risque de la géométrie élémentaire en s'appuyant par exemple sur le théorème de Toponogov.

Quand le rayon d'injectivité en $x$ est plus grand que $2\rho$, les variétés riemanniennes $(B(x,\rho), g)$ et $(\hat{B}(0,\rho), \hat{g})$ sont isométriques. Mais si le rayon d'injectivité est petit, on a des lacets géodésiques courts en $x$ et $x$ possède plusieurs relevés dans $\hat{B}(0,\rho)$. Le pseudo-groupe fondamental $\Gamma(x,\rho)$ en $x$ et à l'échelle $\rho$ mesure le défaut d'injectivité de

l'exponentielle sur $\hat{B}(0,\rho)$ [GLP] : $\Gamma(x,\rho)$ est le pseudo-groupe des applications continues $\tau$ de $\hat{B}(0,\rho)$ dans $T_xM$ qui vérifient

$$\exp_x \circ \tau = \exp_x$$

et envoient 0 dans $\hat{B}(0,\rho)$. Ce sont donc des sections continues de l'exponentielle $\exp_x$. Comme $\exp_x$ est une isométrie locale, ces applications envoient géodésiques sur géodésiques et donc préservent les distances : ce sont des isométries sur leur image. Elles sont donc automatiquement lisses.

Etant donné un relevé $v$ de $x$ dans $\hat{B}(0,\rho)$ (i.e. $\exp_x(v) = p$), considérons l'application

$$\tau_v := \mathrm{Exp}_v \circ (T_v \exp_x)^{-1}.$$

$(T_v \exp_x)^{-1}$ envoie un point $w$ de $\hat{B}(0,\rho)$ sur le vecteur initial de la géodésique partant de $v$ et relevant la géodésique $t \mapsto \exp_x tw$. Donc $\tau_v(w)$ n'est autre que l'extrémité de cette géodésique. En particulier, $\tau_v(w)$ est un relevé de $\exp_x w$, i.e.

$$\exp_x(\tau_v(w)) = \exp_x w,$$

et $\tau_v(0)$ appartient à $\hat{B}(0,\rho)$. Donc $\tau_v$ est un élément de $\Gamma(x,\rho)$ (cf. figure 3.1).

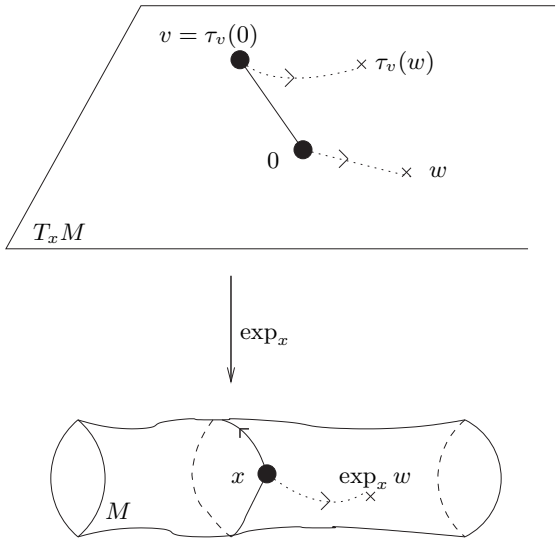



FIG. 3.1 – $\tau_v(w)$ s'obtient de la façon suivante. On descend le segment $[0,w]$ sur $M$ par $\exp_x$ et on relève la géodésique obtenue à partir de $v$ : cette nouvelle géodésique dans $T_xM$ a pour extrémité $\tau_v(w)$.

Réciproquement, si $\tau$ est un élément de $\Gamma(x,\rho)$ envoyant 0 sur $v \in \hat{B}(0,\rho)$, on peut voir que $\tau = \tau_v$. En effet, pour $w$ dans $\hat{B}(0,\rho)$, $t \mapsto \tau(tw)$ est la géodésique relevant $t \mapsto \exp_x tw$ à partir de $v$, donc d'après l'argument précédent, $\tau(w) = \tau_v(w)$.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les éléments de $\Gamma(x,\rho)$ et les lacets géodésiques orientés basés en $x$ et de longueur au plus $\rho$. Comme $\exp_x$ est un difféomorphisme local, $\Gamma(x,\rho)$ est en particulier de cardinal fini. Ainsi, à $x$ fixé, la famille $(\Gamma(x,\rho))_{0<\rho<\pi/(4\Lambda)}$ est une famille croissante de pseudo-groupes finis.

*Exemple* 1. Considérons un fibré plat en 2-plans sur $\mathbb{S}^1$ à holonomie rationnelle : l'angle $\theta$ du vissage s'écrit comme produit de $2\pi$ par le rationnel $p/q$, avec $p,q$ premiers entre eux. Pour $\rho$ grand et $x$ à distance supérieure à $\rho/\sin(\pi/q)$ de l'image de l'axe (quand $q=1$, l'holonomie est triviale, donc il n'y a pas de condition), le pseudo-groupe fondamental $\Gamma(x,\rho)$ est engendré par l'unique lacet géodésique de longueur $q$. Il est donc constitué de translations. Il ne contient le vissage de base que si l'holonomie est triviale. Beaucoup de lacets sont généralement oubliés, parce qu'ils sont trop longs.

Chaque élément non trivial de $\Gamma(x,\rho)$ agit sans point fixe. Montrons-le. On suppose qu'un point $w$ est fixé par un élément $\tau_v$ de $\Gamma(x,\rho)$. D'une part, $w$ est l'extrémité de la géodésique $\gamma_1 : t \mapsto tw$, définie sur $[0,1]$, qui relève $t \mapsto \exp_x tw$ depuis 0. D'autre part, $w = \tau_v(w)$ est aussi l'extrémité de la géodésique $\gamma_2 : t \mapsto \tau_v(tw)$ qui relève la même géodésique $t \mapsto \exp_x tw$, mais depuis $v$. En dérivant en $t=1$ l'égalité

$$\exp_x \circ\gamma_1(t) = \exp_x \circ\gamma_2(t),$$

on obtient $T_w \exp_x(\gamma_1'(1)) = T_w \exp_x(\gamma_2'(1))$ et donc $\gamma_1'(1) = \gamma_2'(1)$. Les géodésiques $\gamma_1$ et $\gamma_2$ doivent donc coïncider, ce qui implique : $0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = v$, d'où $\tau_v = \mathrm{id}$.

Dans le pseudo-groupe $\Gamma(x,\rho)$, chaque élément a un inverse bien défini. Pour voir ceci, étant donné un élément $\tau = \tau_v$ de $\Gamma(x,\rho)$, on considère le lacet géodésique paramétré par $\sigma : t \mapsto \exp_x tv$ et on définit le vecteur $\tilde{v}$ comme opposé du vecteur final de ce lacet : $\tilde{v} = -\sigma'(1)$. L'application $\tau_{\tilde{v}}$, comme $\tau_v$, est bien définie sur la boule $\hat{B}(0,2\rho)$. Donc on peut définir la composée $\tau_{\tilde{v}} \circ \tau_v$ sur $\hat{B}(0,\rho)$. Cette application est une section de $\exp_x$ qui fixe 0 : $\tau_{\tilde{v}} \circ \tau_v(0) = \tau_{\tilde{v}}(v)$ est l'extrémité de la géodésique partant de $\tilde{v}$ et relevant $\sigma$, i.e. le point initial de la géodésique relevant $\sigma$ parcouru en sens inverse et finissant en $\tilde{v}$ ; par construction, c'est 0. Donc $\tau_{\tilde{v}} \circ \tau_v$ est l'identité. Et de même $\tau_v \circ \tau_{\tilde{v}}$ est l'identité. En ce sens, $\tau_{\tilde{v}}$ est l'inverse de $\tau_v$.

Etant donné un lacet géodésique $\sigma$ de longueur inférieure à $\rho$, nous appellerons « sous-pseudo-groupe engendré par $\sigma$ dans $\Gamma(x,\rho)$ » le pseudo-groupe $\Gamma_\sigma(x,\rho)$ obtenu de la façon suivante. Il contient un élément $\tau_v$ de $\Gamma(x,\rho)$ si et seulement si $v$ est l'extrémité d'un géodésique brisée restant dans $\hat{B}(0,\rho)$ et obtenue en relevant un certain nombre de fois le lacet $\sigma$ à partir de 0. Si $\tau$ est un élément de $\Gamma(x,\rho)$ correspondant à un lacet $\sigma$, nous parlerons aussi du sous-pseudo-groupe $\Gamma_\tau(x,\rho)$, engendré par $\tau$ dans $\Gamma(x,\rho)$. Si $k$ est le plus grand entier tel que $\tau^i(0)$ appartienne à la boule $\hat{B}(0,\rho)$ pour tous les entiers naturels $i \leq k$, alors :

$$\Gamma_\tau(x,\rho) = \Gamma_\sigma(x,\rho) = \left\{\tau^i / -k \leq i \leq k\right\}.$$

Si $2\rho \leq \rho' < \frac{\pi}{4\Lambda}$, alors l'espace des orbites des points de la boule $\hat{B}(0,\rho)$ sous l'action de $\Gamma(x,\rho')$, $\hat{B}(0,\rho)/\Gamma(x,\rho')$, est isométrique à $B(x,\rho)$, par la factorisation de $\exp_x$. La

seule chose à vérifier est l'injectivité. Il s'agit de voir que deux relevés, $w_1$ et $w_2$, d'un même point $y$ de $B(x,\rho)$ dans la boule $\hat{B}(0,\rho)$ sont dans la même orbite pour $\Gamma(x,\rho')$. Considérons l'unique géodésique $\gamma_1$ reliant $w_1$ à 0, descendons la par $\exp_x$ et relevons la géodésique obtenue à partir de $w_2$ pour bâtir une géodésique $\gamma_2$, qui relie $w_2$ à un certain point $v$ (cf. figure 3.2). Alors $v$ est un relevé de $x$ dans $\hat{B}(0,\rho')$ (par l'inégalité triangulaire) et $\tau_v$ envoie bien $w_1$ sur $w_2$, d'où le résultat.

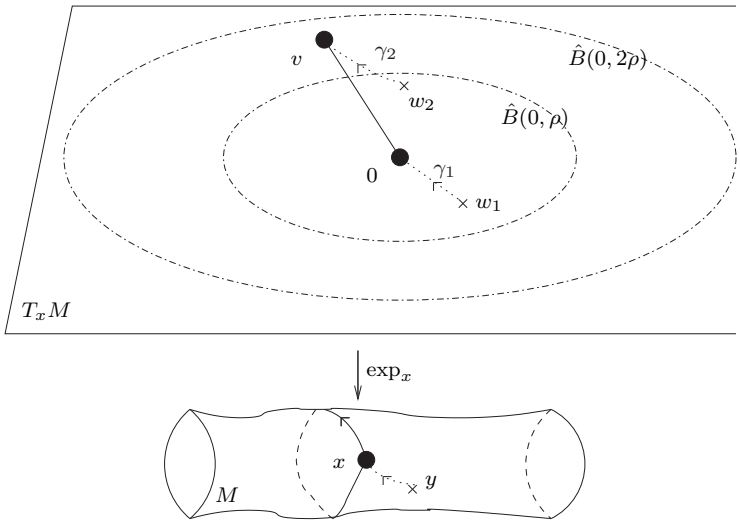



FIG. 3.2 – $\tau_v(w_1) = w_2$.

Combien un point donné $y$ a-t-il de relevés dans une boule $\hat{B}(0,\rho)$ de $T_xM$ ? Notons $N_x(y,\rho)$ ce nombre. En relevant un lacet géodésique de longueur minimale à partir de $0 =: v_0$, on aboutit à un point $v_1$. En relevant le même lacet à partir de $v_1$, on aboutit à un nouveau relevé $v_2$, etc. On obtient ainsi une suite de relevés $v_k$ de $x$ qui sort de $\hat{B}(0,\rho)$ : sinon, comme il ne peut y avoir de point d'accumulation, on aurait une suite périodique ; $\tau_{v_1}$ fixerait alors le centre de l'unique boule de rayon minimal contenant tous les points $v_k$, ce qui n'est pas possible, puisque $\tau_{v_1}$ n'est pas l'identité donc agit librement (l'unicité de la boule découle de la stricte convexité des boules, cf. [G1]). Bien sûr, on peut procéder de même en inversant l'orientation du lacet pour obtenir de nouveaux relevés. Comme les points $v_k$ sont à distance $2\,\mathrm{inj}(x)$ les uns des autres, on voit ainsi que $x$ a au moins $\rho/\,\mathrm{inj}(x)$ relevés dans $\hat{B}(0,\rho)$ :

$$|\Gamma(x,\rho)| = N_x(x,\rho) \geq \rho/\,\mathrm{inj}(x).$$

En relevant une géodésique de longueur minimale entre $x$ et un point $y$ à partir des relevés de $x$ et en estimant la distance de l'extrémité à 0 par l'inégalité triangulaire (cf. figure 3.4), on obtient aussi

$$N_x(y,\rho) \geq N_x(x,\rho - d(x,y)) = |\Gamma(x,\rho - d(x,y))| \geq \frac{\rho - d(x,y)}{\mathrm{inj}(x)}. \qquad (3.4)$$

En utilisant ceci pour $d(x,y) \leq \rho/2$, on obtient en particulier l'estimée volumique :

$$\frac{\rho}{2\,\mathrm{inj}(x)}\,\mathrm{vol}\,B(x,\rho/2) \leq |\Gamma(x,\rho/2)|\,\mathrm{vol}\,B(x,\rho/2) \leq \mathrm{vol}\,\hat{B}(0,\rho). \tag{3.5}$$

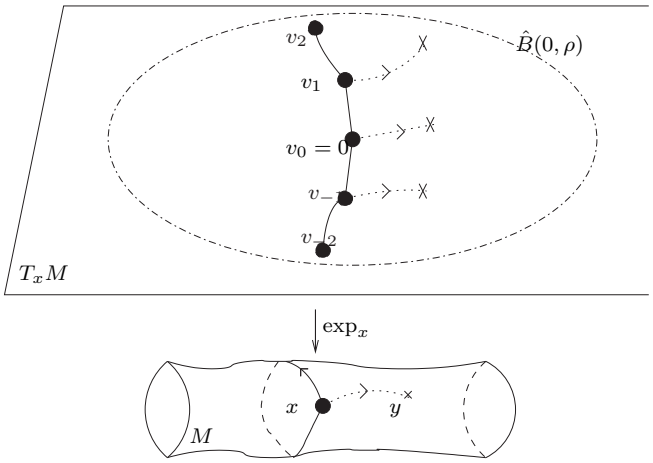



FIG. 3.3 – On obtient des préimages de $y$ dans $T_xM$ en relevant une géodésique reliant $x$ à $y$ à partir des préimages de $x$.

Pour $\rho \leq \rho' < \frac{\pi}{4\Lambda}$, l'ensemble

$$\mathcal{F}(x,\rho,\rho') := \Big\{ w \in \hat{B}(0,\rho) \Big/ \forall\, \gamma \in \Gamma(x,\rho'),\ d(0,\gamma(w)) \geq d(0,w) \Big\}$$

est un domaine fondamental pour l'« action » de $\Gamma(x,\rho')$ sur la boule $\hat{B}(0,\rho)$. Par finitude, chaque orbite intersecte clairement $\mathcal{F}(x,\rho,\rho')$. De plus, si $\tau$ appartient à $\Gamma(x,\rho')$, l'ensemble $\mathcal{F}(x,\rho,\rho') \cap \tau(\mathcal{F}(x,\rho,\rho'))$ est inclus dans l'ensemble des points équidistants de 0 et de $\tau(0)$, qui est de mesure nulle : par finitude, à un ensemble de mesure nulle près, $\mathcal{F}(x,\rho,\rho')$ contient un unique représentant de chaque orbite. De la même façon, si $\tau$ est un élément de $\Gamma(x,\rho')$, l'ensemble

$$\mathcal{F}_\tau(x,\rho,\rho') := \Big\{ w \in \hat{B}(0,\rho) \Big/ \forall\, \gamma \in \Gamma_\tau(x,\rho'),\ d(0,\gamma(w)) \geq d(0,w) \Big\}$$

est un domaine fondamental pour l'action du sous-pseudo-groupe $\Gamma_\tau(x,\rho')$ engendré par $\tau$ dans $\Gamma(x,\rho')$, sur la boule $\hat{B}(0,\rho)$.

Le fait suivant découle de notre discussion et sera crucial plus loin : si $2\rho \leq \rho' < \frac{\pi}{4\Lambda}$, alors

$$\mathrm{vol}\,\mathcal{F}(x,\rho,\rho') = \mathrm{vol}\,B(x,\rho).$$

Le lemme suivant nous sera utile plus loin. Il permet de contrôler la taille des domaines fondamentaux qu'on a introduits.

LEMME 3.1.3 — *Soit $\rho \leq \rho' < \frac{\pi}{4\Lambda}$. On considère un élément non trivial $\tau$ de $\Gamma(x, \rho')$ et on note $\mathcal{I}_\tau(x, \rho)$ l'ensemble des points $w$ de $\hat{B}(0, \rho)$ tels que*

$$g_x\left(w, \tau(0)\right) \leq \frac{|\tau(0)|^2}{2} + \frac{\Lambda^2 \rho^2 |\tau(0)|^2}{2}$$

*et*

$$g_x\left(w, \tau^{-1}(0)\right) \leq \frac{|\tau(0)|^2}{2} + \frac{\Lambda^2 \rho^2 |\tau(0)|^2}{2}.$$

*Alors $\mathcal{F}_\tau(x, \rho, \rho')$ est inclus dans $\mathcal{I}_\tau(x, \rho)$.*

Un dessin en coupe (selon le plan contenant 0, $\tau(0)$ et $\tau^{-1}(0)$) de $\mathcal{I}_\tau(x, \rho)$ est fourni par la figure 3.4.

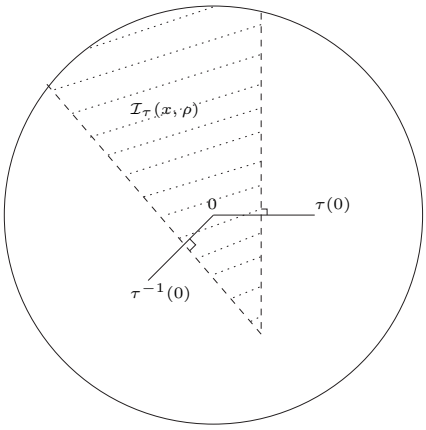



FIG. 3.4 – Le domaine $\mathcal{I}_\tau(x, \rho)$.

**Preuve.**
Prenons un point $w$ de $\mathcal{F}_\tau(x, \rho, \rho')$, notons $v = \tau(0)$ et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre $v$ et $w$. On suppose d'abord $g_x(w, v) > 0$, c'est-à-dire $\theta < \pi/2$. Comme deux points quelconques de $\hat{B}(0, \rho)$ sont reliés par une unique géodésique, qui est donc minimisante, on peut appliquer le théorème de Toponogov à tous les triangles. En particulier, dans le triangle $0vw$, on a

$$\cosh(\Lambda d(v, w)) \leq \cosh(\Lambda |w|) \cosh(\Lambda |v|) - \sinh(\Lambda |w|) \sinh(\Lambda |v|) \cos\theta.$$

En remarquant que $|w| = d(0, w) \leq d(0, \tau^{-1}(w)) = d(v, w)$ (la figure 3.5 montre ce qu'on attend), on obtient

$$\cosh(\Lambda |w|) \leq \cosh(\Lambda d(v, w)) \leq \cosh(\Lambda |w|) \cosh(\Lambda |v|) - \sinh(\Lambda |w|) \sinh(\Lambda |v|) \cos\theta,$$

d'où

$$\tanh(\Lambda |w|) \cos\theta \leq \frac{\cosh(\Lambda |v|) - 1}{\sinh(\Lambda |v|)}.$$

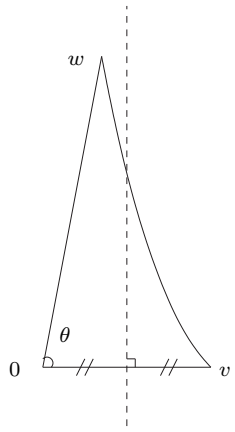



FIG. 3.5 – $d(0,w) \leq d(v,w)$ impose $w$ à gauche des pointillés, à un terme d'erreur près.

Avec $g_x(v,w) = |v|\,|w| \cos\theta$, on trouve donc

$$\frac{g_x(v,w)}{|v|^2} \leq \frac{\Lambda\,|w|}{\tanh \Lambda\,|w|} \frac{\cosh(\Lambda\,|v|) - 1}{\Lambda\,|v| \sinh(\Lambda\,|v|)}. \tag{3.6}$$

A partir de la formule de Taylor

$$\sinh t = t \cosh t - \frac{t^2}{2} \sinh t + \int_0^t \frac{s^2}{2} \cosh s ds,$$

on obtient

$$\frac{t}{\tanh t} \leq 1 + \frac{1}{\sinh t} \int_0^t s \sinh s ds \leq 1 + \frac{t^2}{2} \tag{3.7}$$

et donc

$$\frac{\Lambda\,|w|}{\tanh \Lambda\,|w|} \leq 1 + \frac{\Lambda^2 \rho^2}{2}. \tag{3.8}$$

La formule de Taylor

$$\cosh t - 1 = t \sinh t - \frac{t^2}{2} \cosh t + \int_0^t \frac{s^2}{2} \sinh s ds$$

implique, avec (3.7),

$$\frac{\cosh t - 1}{t \sinh t} = 1 - \frac{t}{2 \tanh t} + \frac{1}{t \sinh t} \int_0^t \frac{s^2}{2} \sinh s ds \leq \frac{1}{2} + \frac{t^2}{6},$$

ce qui assure :

$$\frac{\cosh \Lambda\,|v| - 1}{\Lambda\,|v| \sinh \Lambda\,|v|} \leq \frac{1}{2} + \frac{\Lambda^2 \rho^2}{6}. \tag{3.9}$$

En combinant (3.6), (3.8) et (3.9), on trouve

$$\frac{g_x(v,w)}{|v|^2} \leq \left(1+\frac{\Lambda^2\rho^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\Lambda^2\rho^2}{6}\right)$$

et en se rappelant qu'on a pris $\Lambda\rho \leq \frac{\pi}{4} < 1$, on arrive à

$$\frac{g_x(v,w)}{|v|^2} \leq \frac{1}{2}+\frac{\Lambda^2\rho^2}{2}.$$

On suppose ensuite $g_x(w,\tau^{-1}(0)) > 0$ et on travaille de même (avec $v = \tau^{-1}(0)$) pour compléter la preuve. ■

Pour comprendre les éléments du pseudo-groupe fondamental, le lemme suivant est important : il les approche par des transformations affines, plus faciles à manipuler.

LEMME 3.1.4 — *Plaçons nous sur une variété riemannienne complète $(M,g)$ et considérons un point $x$ tel que la courbure soit bornée par $\Lambda^2$, $\Lambda \geq 0$, sur la boule $B(x,\rho)$, $\rho > 0$, avec $\Lambda\rho < \pi/4$. Soit $v$ un relevé de $x$ dans $\hat{B}(0,\rho) \subset T_xM$. On introduit*

- *la translation $t_v$ de vecteur $v$ dans l'espace affine $T_xM$,*
- *le transport parallèle $p_v$ le long de $t \mapsto \exp_x tv$, de $t=0$ à $t=1$.*
- *l'application $\tau_v = \mathrm{Exp}_v \circ (T_v \exp_x)^{-1}$,*

*où l'on rappelle que* Exp *désigne l'exponentielle de $(T_xM, \exp_x^* g)$. On a alors pour tout élément $w$ de $\hat{B}(0,\rho-|v|)$ :*

$$d(\tau_v(w), t_v \circ p_v^{-1}(w)) \leq \Lambda^2 |v|\,|w|\,(|v|+|w|).$$

**Preuve.**
La proposition 6.6 de [BK] donne le résultat de comparaison suivant : si $V$ est défini par $\mathrm{Exp}_0 V = v$ et si $W$ appartient à $T_0T_xM$, alors

$$d(\mathrm{Exp}_v \circ \hat{p}_v(W), \mathrm{Exp}_0(V+W)) \leq \frac{1}{3}\Lambda\,|V|\,|W|\sinh(\Lambda(|V|+|W|))\sin\angle(V,W), \quad (3.10)$$

où $\hat{p}_v$ est le transport parallèle le long de $t \mapsto \mathrm{Exp}_0 tV$, de $t=0$ à $t=1$. On pose $w = \mathrm{Exp}_0 W$. Il faut remarquer que $Exp_0 = T_0 \exp_x$ n'est autre que l'identification canonique de l'espace tangent $T_0T_xM$ à l'espace vectoriel $T_xM$. En particulier, $\mathrm{Exp}_0(V+W) = v+w = t_v(w)$. Comme $\exp_x$ est une isométrie locale, on a par ailleurs

$$\hat{p}_v = (T_v \exp_x)^{-1} \circ p_v \circ T_0 \exp_x,$$

de sorte que $\mathrm{Exp}_v \circ \hat{p}_v(W) = \tau_v \circ p_v(w)$. Vu que

$$\sinh(\Lambda(|V|+|W|)) \leq \Lambda(|V|+|W|)\cosh(1) \leq 3\Lambda(|V|+|W|),$$

il résulte de (3.10) que :

$$d(\tau_v \circ p_v(w), t_v(w)) \leq \Lambda^2\,|v|\,|w|\,(|v|+|w|).$$

En changeant $w$ en $p_v^{-1}(w)$, on trouve le résultat. ■

### 3.1.3 Pseudo-groupe fondamental et volume.

**Retour sur le rayon d'injectivité.**

Notre discussion du pseudo-groupe fondamental permet de retrouver un résultat de [CGT].

PROPOSITION 3.1.5 (MINORATION DU RAYON D'INJECTIVITÉ) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète à courbure bornée et telle que le volume des boules de rayon 1 soit uniformément minoré par un nombre $V > 0$. Alors il y a un nombre strictement positif $I$ tel que tout point $x$ de $M$ vérifie*

$$\mathrm{inj}(x) \geq I.$$

Au lieu de supposer une minoration uniforme du volume des boules de rayon 1, on peut demander :

$$\sup_{t>0} \liminf_{x \longrightarrow \infty} \frac{\mathrm{vol}\, B(x,t)}{t^n} > 0.$$

Cela revient au même.

**Preuve.**

Soit $\Lambda$ la racine carrée d'une borne sur la courbure. Posons $\rho = \min(1, \frac{\pi}{8\Lambda})$ et supposons qu'en un point $x$ de $M$, on ait un lacet géodésique de longueur inférieure à $\rho$. En appliquant (3.5), on trouve

$$\frac{\rho}{2\,\mathrm{inj}(x)}\,\mathrm{vol}\, B(x, \rho/2) \leq \mathrm{vol}\, \hat{B}(0,\rho).$$

Le théorème de comparaison des volumes de Bishop estime le membre de droite par $\omega_n \cosh(\Lambda\rho)^{n-1}\rho^n$, où $\omega_n$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On obtient donc $\mathrm{inj}(x) \geq C(n,\Lambda)\,\mathrm{vol}\, B(x,\rho/2)$ pour une constante $C(n,\Lambda) > 0$. Comme d'autre part, le théorème de Bishop-Gromov donne une constante $C'(n,\Lambda) > 0$ telle que

$$\mathrm{vol}\, B(x,1) \leq C'(n,\Lambda)^{-1}\,\mathrm{vol}\, B(x,\rho/2),$$

on trouve $\mathrm{inj}(x) \geq C(n,\Lambda)C'(n,\Lambda)\,\mathrm{vol}\, B(x,1) \geq C(n,\Lambda)C'(n,\Lambda)V$. ■

En combinant les propositions 3.1.1 et 3.1.5, on obtient le

COROLLAIRE 3.1.6 (PINCEMENT DU RAYON D'INJECTIVITÉ) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète de courbure bornée. On suppose :*

$$\sup_{t>0} \liminf_{x \longrightarrow \infty} \frac{\mathrm{vol}\, B(x,t)}{t^n} > 0$$

*et*

$$\inf_{t>0} \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\mathrm{vol}\, B(x,t)}{t^n} < C(n),$$

*où $C(n)$ est la constante de 3.1.1. Alors il y a un compact $K$ et des nombres strictement positifs $I_1$, $I_2$ tels qu'en tout point $x$ de $M\backslash K$ :*

$$I_1 \leq \mathrm{inj}(x) \leq I_2.$$

Dans la suite, nous utiliserons plutôt la version suivante, où la majoration uniforme (et non asymptotique) du volume permet de se débarrasser du compact $K$ (cf. la preuve de la proposition 3.1.5).

COROLLAIRE 3.1.7 — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète de courbure bornée. On suppose :*

$$\forall\, x \in M,\ V \leq \operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega(t)t^n$$

*pour une fonction $\omega$ tendant vers zéro à l'infini et un nombre $V > 0$. Alors il y a des nombres strictement positifs $I_1$, $I_2$ tels qu'en tout point $x$ de $M$ :*

$$I_1 \leq \operatorname{inj}(x) \leq I_2.$$

**Autoamélioration d'estimées volumiques.**

On peut voir qu'une majoration « uniformément strictement sous-euclidienne » du volume s'autoaméliore quand la courbure tend vers zéro assez vite à l'infini. Dans la suite, on distinguera toujours un point $o$ dans les variétés riemanniennes que nous considérerons et on notera à nouveau $r_o$ ou $r$ la fonction distance à $o$. Le point $o$ sera généralement omis.

PROPOSITION 3.1.8 (MAJORATION DU VOLUME) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète vérifiant pour un certain $\epsilon > 0$ :*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-2-\epsilon}).$$

*Si l'on suppose*

$$\inf_{t>0} \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{t^n} < C(n),$$

*où $C(n)$ désigne la constante de 3.1.1, on a automatiquement :*

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{t^{n-1}} < \infty.$$

Ainsi, quand la courbure décroît plus vite que quadratiquement et quand il existe une fonction $\omega$ tendant vers zéro à l'infini telle que pour tous les points $x$ de $M$,

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega(t)t^n,$$

on peut en fait trouver un nombre $B$ tel que pour $t$ grand, pour tout $x$ dans $M$,

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq Bt^{n-1}.$$

**Preuve.**
La proposition 3.1.1 dit que le rayon d'injectivité en tout point du complémentaire d'un compact est borné par $I_2$. Grâce à notre hypothèse sur la courbure, si on prend un point $x$ dans $M \backslash B(o, R_0)$, avec $R_0$ assez grand, on peut appliquer (3.5) avec $2I_2 \leq \rho = 2t \leq r(x)/2$ :

$$\frac{t}{\operatorname{inj}(x)} \operatorname{vol} B(x,t) \leq \operatorname{vol} \hat{B}(0,2t).$$

Vu la décroissance de la courbure, quitte à choisir $R_0$ assez grand, le théorème de comparaison des volumes de Bishop estime le membre de droite par $\omega_n \cosh(1)^{n-1}(2t)^n$ ; avec la proposition 3.1.1, on obtient donc pour $I_2 \leq t \leq r(x)/2$ :

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega_n \cosh(1)^{n-1} 2^n I_2 t^{n-1}.$$

On a trouvé un $B_1$ tel que pour tout $x$ hors d'une boule $B(o,R_0)$ et pour tout $t$ de $[I_2, r(x)/2]$,

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq B_1 t^{n-1}. \tag{3.11}$$

D'après le lemme 3.6 de [LT], qui se réfère à la construction du quatrième paragraphe de [A2], on peut trouver un nombre $N$ tel que pour tout entier naturel $k$, l'anneau $A_k := B(o,2R_k)\backslash B(o,R_k)$, avec $R_k = R_0 2^k$, est recouvert par une famille de boules $(B(x_{k,i}, R_k/2))_{1\leq i\leq N}$ centrées dans $A_k$. Comme les boules $B(x_{k,i}, R_k/2)$ ont un volume majoré par $B_1(R_k/2)^{n-1}$, on en déduit l'existence d'une constante $B_2$ tel que pour $t \geq I_2$,

$$\operatorname{vol} B(o,t) \leq B_2 \sum_{k=0}^{\lceil \log_2(t/R_0)\rceil} (2^k)^{n-1},$$

et donc, pour une nouvelle constante $B_3$, on a

$$\forall\, t \geq I_2,\ \operatorname{vol} B(o,t) \leq B_3\, t^{n-1}. \tag{3.12}$$

Maintenant, pour tout point $x$ de $M\backslash B(o,R_0)$ et pour $t \geq r(x)/4$, on a

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq \operatorname{vol} B(o, t+r(x)) \operatorname{vol} B(o,5t) \leq 5^{n-1} B_3 t^{n-1}.$$

Reste le cas où $x$ est dans $B(o,R_0)$ : pour $t \geq I_2$, on a

$$\operatorname{vol} B(x,t) \leq \operatorname{vol} B(o, t+R_0) \leq \operatorname{vol} B(o,(1+R_0/2)t) \leq B_3(1+R_0/2)^{n-1} t^{n-1}.$$

Donc on peut trouver une constante $B$ telle que pour tout $x$ de $M$ et tout $t \geq I_2$, le volume de la boule $B(x,t)$ est majoré par $Bt^{n-1}$. ■

Quand la courbure de Ricci est positive, on peut affaiblir l'hypothèse « décroissance surquadratique de la courbure » en « décroissance quadratique de la courbure ».

PROPOSITION 3.1.9 — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive et vérifiant*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-2}).$$

*Si l'on suppose*

$$\inf_{t>0} \limsup_{x\longrightarrow\infty} \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{t^n} < C(n),$$

*où $C(n)$ désigne la constante de 3.1.1, on a automatiquement :*

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \sup_{x\in M} \frac{\operatorname{vol} B(x,t)}{t^{n-1}} < \infty.$$

**Preuve.**
On adapte simplement la preuve précédente. (3.11) s'obtient de même en se restreignant à $I_2 \leq t \leq \delta r(x)$, pour un petit $\delta > 0$ ($t^2 K_o(t)$ est fini mais pas petit, ici). La positivité de la courbure de Ricci permet, via le théorème de Bishop-Gromov, de construire un recouvrement conduisant à (3.12) (on choisit pour $x_{k,i}$ les points d'un $R_k/2$-réseau maximal, cf. plus haut). Le reste est automatique. ■

Vu cet effet de seuil, le premier cas d'effondrement à étudier est celui d'un effondrement *minimal*, i.e. de codimension 1 au sens où le volume des boules de rayon $t$ serait (uniformément) comparable à $t^{n-1}$.

## 3.2 Effondrements de codimension un.

### 3.2.1 Structure locale à l'infini.

Afin de décrire complètement un effondrement de codimension un, on va faire une hypothèse forte sur l'holonomie des lacets géodésiques (pas trop longs). Elle sera vérifiée dans le cadre des instantons gravitationnels. Comme le reste de la preuve reste valide dans un cadre assez général, nous ne nous restreignons pas aux instantons gravitationnels, mais énonçons le résultat général.

Proposition 3.2.1 (Structure du pseudo-groupe fondamental) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète telle que*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ At^{n-1} \leq \operatorname{vol} B(x,t) \leq Bt^{n-1}$$

*avec $0 < A \leq B$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que*

$$|\mathrm{Rm}| \leq c^2 r^{-2}$$

*et telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en un point $x$ et de longueur $L \leq c^{-1} r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet $\gamma$ vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Il existe alors un compact $K$ tel qu'en tout point $x$ de $M \backslash K$, il y a un unique lacet géodésique $\sigma_x$ de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x)$. On peut de plus trouver des constantes géométriques $L$ et $\kappa > 0$ telles que le pseudo-groupe fondamental $\Gamma(x, \kappa r(x))$ est de cardinal majoré par $Lr(x)$ et telles que ses éléments s'obtiennent tous en relevant (plusieurs fois) le lacet $\sigma$.*

Définition 3.2.2 — *On appellera $\sigma_x$ le lacet fondamental en $x$.*

**Preuve.**
Travaillons autour d'un point $x$ loin de $o$, disons avec $r(x) > 100 I_2 c$. Rappelons que

par (3.1.7), on a des constantes $I_1$, $I_2$ telles que $0 < I_1 \leq \mathrm{inj} \leq I_2$. Le pseudo-groupe fondamental $\Gamma := \Gamma(x, \frac{r(x)}{4c})$ contient le sous-pseudo-groupe $\Gamma_\sigma := \Gamma_\sigma(x, \frac{r(x)}{4c})$ associé au lacet $\sigma$ de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x)$. Appelons $\tau = \tau_v$ l'un des deux éléments de $\Gamma$ correspondant à $\sigma$ : $|v| = 2\,\mathrm{inj}(x)$. (3.5) donne pour $\rho = \frac{r(x)}{2c}$ :

$$|\Gamma| \operatorname{vol} B\left(x, \frac{r(x)}{4c}\right) \leq \operatorname{vol} \hat{B}\left(0, \frac{r(x)}{2c}\right).$$

Par comparaison (théorème de Bishop), le volume riemannien de $\hat{B}(0, \frac{r(x)}{2c})$ est majoré par son volume euclidien multiplié par un facteur

$$\left(\frac{\sinh c}{c}\right)^n \leq (\cosh c)^n.$$

En utilisant également la minoration du volume, on obtient :

$$|\Gamma|\, A \left(\frac{r(x)}{4c}\right)^{n-1} \leq (\cosh c)^n\, \omega_n \left(\frac{r(x)}{2c}\right)^n,$$

où $\omega_n$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On en déduit l'estimée

$$|\Gamma| \leq L r(x)$$

avec

$$L := \frac{2^{n-2}\omega_n\,(\cosh c)^n}{Ac}.$$

Considérons maintenant un lacet géodésique orienté $\gamma$, basé en $x$ et de longueur inférieure à $\frac{r(x)}{4c}$. Appelons $\tau_z$ l'élément de $\Gamma := \Gamma(x, \frac{r(x)}{4c})$ correspondant à $\gamma$. $H_z$ désignera l'holonomie correspondant à l'orientation opposée du lacet $\gamma$. On a

$$|H_z - \mathrm{id}| \leq \frac{c\,|z|}{r(x)}.$$

Le vecteur $z = \tau_z(0)$ est la vitesse initiale de la géodésique $\gamma$ parcouru en temps 1, pour l'orientation choisie. De même, le vecteur $\tau_z^{-1}(0)$ est la vitesse initiale de la géodésique $\gamma$ parcouru en temps 1, pour l'orientation opposée. On en déduit que $-z$ s'obtient par transport parallèle de $\tau_z^{-1}(0)$ : $H_z(\tau_z^{-1}(0)) = -z$. On déduit de l'estimation ci-dessus :

$$\left|\tau_z^{-1}(0) + z\right| \leq \frac{c\,|z|^2}{r(x)}. \tag{3.13}$$

Donnons nous un nombre $\lambda$ assez petit, disons $\lambda = \frac{1}{100c}$, et considérons un point $w$ du domaine $\mathcal{I}_{\tau_z}(x, \lambda r(x))$ (voir la définition au lemme 3.1.3). Il vérifie

$$g_x(w, \tau_z^{-1}(0)) \leq \frac{|z|^2}{2} + 2c^2\lambda^2\,|z|^2.$$

Avec

$$g_x(w,z) = -g_x(w,\tau_z^{-1}(0)) + g_x(w,\tau_z^{-1}(0)+z) \geq -g_x(w,\tau_z^{-1}(0)) - |w|\left|\tau_z^{-1}(0)+z\right|,$$

on trouve

$$g_x(w,z) \geq -\frac{|z|^2}{2} - 2c^2\lambda^2|z|^2 - \lambda c|z|^2,$$

soit

$$g_x(w,z) \geq -\frac{|z|^2}{2}\left(1+4c^2\lambda^2+2\lambda c\right).$$

Avec le lemme 3.1.3, ceci montre qu'on a :

$$\mathcal{F}_{\tau_z}(x,\lambda r(x),r(x)/4) \subset \left\{ w \in \hat{B}(0,\lambda r(x)) \Big/ |g_x(w,z)| \leq \frac{|z|^2}{2}\left(1+4c^2\lambda^2+2\lambda c\right)\right\}.$$

Et avec $\lambda = \frac{1}{100c}$, ceci permet d'avoir

$$\mathcal{F}_{\tau_z}(x,\lambda r(x),r(x)/4) \subset \left\{ w \in \hat{B}(0,\lambda r(x)) \Big/ |g_x(w,z)| \leq \frac{3|z|^2}{4}\right\}. \tag{3.14}$$

Soit un élément $\tau'$ de $\Gamma\backslash\Gamma_\sigma$ tel que $v' := \tau'(0)$ soit de norme minimale. On suppose $|v'| < \lambda r(x)$. Ainsi, par minimalité de $|v'|$, (3.14) donne

$$\left|g_x\left(v',v\right)\right| \leq \frac{3|v|^2}{4}.$$

En particulier, si on note $\theta \in [0,\pi]$ l'angle entre $v$ et $v'$, on dispose de l'inégalité :

$$\left|v'\right||\cos\theta| \leq \frac{3|v|}{4}.$$

Comme $|v|$ minore $|v'|$, on a même $|\cos\theta| \leq \frac{3}{4}$, d'où

$$\sin\theta \geq \frac{\sqrt{7}}{4} \geq \frac{1}{2}.$$

En appliquant (3.14) à $\tau$ et $\tau'$, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\lambda r(x),r(x)/(4c)) &\subset \mathcal{F}_{\tau_v}(x,\lambda r(x),r(x)/(4c)) \cap \mathcal{F}_{\tau_{v'}}(x,\lambda r(x),r(x)/(4c)) \\ &\subset \left\{ w \in \hat{B}(0,\lambda r(x)) \Big/ |g_x(w,v)| \leq |v|^2, \left|g_x\left(w,v'\right)\right| \leq \left|v'\right|^2\right\}.\end{aligned}$$

Le volume riemannien de $\mathcal{F}(x,\lambda r(x),r(x)/(4c))$ est égal à celui de $B(x,\lambda r(x))$, donc il est minoré par

$$A\lambda^{n-1}r(x)^{n-1}.$$

Le volume euclidien de

$$\left\{ w \in \hat{B}(0,\lambda r(x)) \Big/ |g_x(w,v)| \leq |v|^2 \text{ et } \left|g_x\left(w,v'\right)\right| \leq \left|v'\right|^2\right\}$$

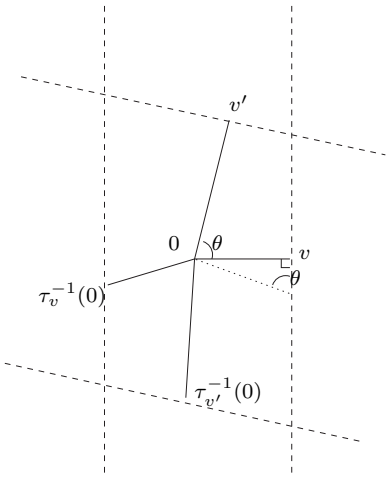



FIG. 3.6 – Le domaine fondamental, en coupe, est à l'intérieur des pointillés.

est majoré par $4\,|v|\,|v'|\,(2\lambda r(x))^{n-2}/\sin\theta \leq 2^{n+2}\lambda^{n-2}I_2\,|v'|\,r(x)^{n-2}$. Par comparaison, on obtient donc l'inégalité

$$A\lambda^{n-1}r(x)^{n-1} \leq 2^{n+2}\,(\cosh c)^n\,\lambda^{n-2}I_2\,\left|v'\right|r(x)^{n-2},$$

soit

$$\left|v'\right| \geq \frac{\lambda A}{2^{n+2}I_2\,(\cosh c)^n}r(x).$$

Si on se donne un réel strictement positif $\kappa$ qui est inférieur à $\lambda$ et à $\frac{\lambda A}{2^{n+2}I_2(\cosh c)^n}$, alors pour $x$ au-dehors d'un compact, le pseudo-groupe $\Gamma(x,\kappa r(x))$ se réduit à des éléments du pseudo-groupe engendré par $\tau$ dans $\Gamma(x,\frac{r(x)}{4c})$.

Si on a deux lacets géodésiques de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x)$ en $x$, correspondant à des points distincts $v$ et $v'$ de $T_xM$, on obtient en particulier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\lambda r(x),r(x)/4) &\subset \mathcal{F}_{\tau_v}(x,\lambda r(x),r(x)/4)\cap\mathcal{F}_{\tau_{v'}}(x,\lambda r(x),r(x)/4)\\ &\subset \left\{w\in\hat{B}(0,\lambda r(x))\,\middle/\,|g_x\,(w,v)|\leq|v|^2\ \text{ et }\ \left|g_x\left(w,v'\right)\right|\leq|v|^2\right\}.\end{aligned}$$

On arrive comme ci-dessus à l'inégalité

$$A\lambda^{n-1}r(x)^{n-1} \leq 2^n\,(\cosh c)^n\,\lambda^{n-2}\,|v|\,\left|v'\right|r(x)^{n-2}/\sin\theta,$$

où $\theta\in[0,\pi]$ est l'angle entre les vecteurs $v$ et $v'$. comme ici, $|v|=|v'|\leq 2I_2$, on arrive à

$$A\lambda r(x)\sin\theta \leq 2^{n+2}I_2^2\,(\cosh c)^n\,.$$

La minimalité de $|v|$ et le théorème de comparaison des distances donnent

$$|v| \leq d(v,v') \leq \cosh(0.02)\left|v-v'\right|$$

d'où $\cos\theta \leq 0.51$. De même, on a

$$|v| \leq d(\tau_v^{-1}(0), v') \leq \cosh(0.02)\left|\tau_v^{-1}(0) - v'\right|.$$

Avec (3.13), qui fournit

$$\left|\tau_v^{-1}(0) + v\right| \leq 0.01\,|v|\,,$$

on en tire

$$\left|v + v'\right| \geq \left|\tau_v^{-1}(0) - v'\right| - \left|\tau_v^{-1}(0) + v\right| \geq 0.98\,|v|$$

On en déduit $\cos\theta \geq -0.52$, puis $|\cos\theta| \leq 0.52$, puis $\sin\theta \geq 0.8$. Finalement, il vient

$$0.8A\lambda r(x) \leq 2^{n+2} I_2^2\,(\cosh c)^n\,,$$

ce qui est absurde pour $x$ assez loin de $o$. Donc il y a unicité du lacet le plus court. ■

L'unicité du lacet fondamental assure qu'il dépend de façon lisse de son point base.

LEMME 3.2.3 (RÉGULARITÉ DU LACET FONDAMENTAL) — *Dans le cadre de la proposition 3.2.1, il existe des paramétrages locaux lisses de la famille de lacets $(\sigma_x)_x$. Plus précisément, si on fait un choix d'orientation du lacet $\sigma_x$, on peut le relever dans $T_xM$ par $\exp_x$ ; si on note $v$ l'extrémité du segment obtenu, et si $w$ est dans un voisinage de 0 dans $T_xM$, alors le lacet fondamental en $\exp_x w$ est l'image par $\exp_x$ de l'unique géodésique reliant $w$ à $\tau_v(w)$.*

**Preuve.**
Montrons d'abord la continuité. Soit $y$ un point de $M$ (situé hors du compact $K$) et soit $(y_n)$ une suite de points tendant vers $y$. On note $V_n$ une suite de vecteurs vitesses initiaux unitaires de $\sigma_{y_n}$ (il y a deux choix en chaque point). Par compacité, $V_n$ admet des valeurs d'adhérences. Soit $V$ l'une d'elle. Soit $\alpha$ la géodésique partant de $y$ avec la vitesse initiale $V$. Pour chaque entier $n$, on a $\exp_{y_n}(\mathrm{inj}(y_n)V_n) = \sigma_{y_n}(\mathrm{inj}(y_n)) = y_n$. Par continuité du rayon d'injectivité ([GLP]), on trouve en passant à la limite : $\alpha(\mathrm{inj}(y)) = \exp_y \mathrm{inj}(y)V = y$. Par unicité, $\alpha$ est un paramétrage de $\sigma_y$. Ceci montre qu'on peut paramétrer la famille $(\sigma_x)_x$ de façon continue. Maintenant, étant donné $w$ dans un voisinage de 0 dans $T_xM$, on appelle $e(w)$ l'extrémité du relevé par $\exp_x$ de $\sigma_{\exp_x w}$. L'application $e$ est une section continue de $\exp_x$ vérifiant $e(0) = \tau_v(0)$ : $e$ est l'élément $\tau_v$ du pseudo-groupe fondamental. Le résultat suit. ■

On va maintenant s'intéresser aux instantons gravitationnels : ils nous donneront suffisamment de contrôle sur l'holonomie de leurs lacets courts.

### 3.2.2 Le cas des instantons gravitationnels.

LEMME 3.2.4 — *Soit $(M^4, g)$ une variété hyperkählerienne complète à rayon d'injectivité minoré :*

$$I_1 := \inf_{x\in M} \mathrm{inj}(x) > 0.$$

*On suppose que*

$$\delta(t) := \sup_{r(x)\geq t} \left(r(x)^2 \left|\mathrm{Rm}_x\right|\right)$$

*tend vers zéro quand $t$ tend vers l'infini. Alors pour $r(x)$ assez grand, les lacets géodésiques basés en $x$ et de longueur*

$$L < \min\left(\frac{r(x)}{4}, \frac{4I_1}{\delta(r(x)/2)}\right)$$

*ont une holonomie $H$ vérifiant*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{4L}{r(x)}.$$

**Preuve.**
On se donne un point $x$ tel que $\sqrt{\delta(r(x)/2)}$ soit inférieur à $\pi/4$ (cela permet de travailler tranquillement avec le pseudo-groupe fondamental), ainsi qu'un lacet géodésique orienté basé en $x$ et de longueur $L \leq r(x)/4$. Il lui correspond un élément $\tau_v$ de $\Gamma(x, r(x)/4)$. Par (3.1.4), on dispose de l'approximation suivante : pour tout point $w$ de $T_xM$ de norme inférieure à $r(x)/4$, on a

$$d(\tau_v(w), t_v \circ p_v^{-1}(w)) \leq 4r(x)^{-2}\delta(r(x)/2)\,|v|\,|w|\,(|v| + |w|)$$

et donc

$$d(\tau_v(w), t_v \circ p_v^{-1}(w)) \leq \frac{\delta(r(x)/2)L}{2}.$$

Posons $H = p_v^{-1}$ : c'est l'holonomie du lacet géodésique d'orientation opposée. On a donc :

$$d(\tau_v(w), Hw + v) \leq \frac{\delta(r(x)/2)L}{2}.$$

Comme on travaille sur une variété hyperkählerienne de dimension réelle 4, l'holonomie se réduit à $SU(2)$ (cf. [Bes]), de sorte que dans une certaine base orthonormée de $T_xM$, vu comme espace vectoriel complexe de dimension 2, $H$ s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

avec un angle $\theta$ dans $]-\pi, \pi]$. Supposons $\theta$ non nul (sinon, l'estimée est trivialement vérifiée). L'équation $Hw + v = w$ a alors une solution qui s'écrit dans la base choisie :

$$w = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{1-e^{i\theta}} \\ \frac{v_2}{1-e^{-i\theta}} \end{pmatrix}$$

où $v_1$ et $v_2$ désignent les coordonnées de $v$. Ce point $w$, s'il est de norme inférieure à $r(x)/4$, vérifie donc

$$d(\tau_v(w), w) \leq \frac{\delta(r(x)/2)L}{2}.$$

D'autre part, la minoration du rayon d'injectivité donne

$$d(\tau_v(w), w) \geq 2I_1.$$

En combinant ces inégalités, on trouve

$$L \geq \frac{4I_1}{\delta(r(x)/2)}.$$

Donc si le lacet est de longueur $L < \frac{4I}{\delta(r(x)/2)}$, on est sûr que le point $w$ est au dehors de la boule de centre 0 et de rayon $r(x)/4$, ce qui s'écrit :

$$|w| = \frac{L}{|1 - e^{i\theta}|} \geq \frac{r(x)}{4},$$

soit

$$|H - \mathrm{id}| = \left|1 - e^{i\theta}\right| \leq \frac{4L}{r(x)}.$$

■

PROPOSITION 3.2.5 — *Soit $(M^4, g)$ une variété hyperkählerienne complète telle que*

$$\int_M |\mathrm{Rm}|^2 \, r dvol < \infty$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\, \forall\, t \geq 1,\, At^3 \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^3$$

*avec $0 < A \leq B$. Il existe alors un compact $K$ tel qu'en tout point $x$ de $M \backslash K$, il y a un unique lacet géodésique $\sigma_x$ de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x)$. On peut de plus trouver des constantes géométriques $L$ et $\kappa > 0$ telles que le pseudo-groupe fondamental $\Gamma(x, \kappa r(x))$ est de cardinal majoré par $Lr(x)$ et telles que ses éléments s'obtiennent tous en relevant (plusieurs fois) le lacet $\sigma$.*

**Preuve.**
Comme $M$ est hyperkählerienne, $M$ est Ricci-plate (cf. [Bes]). Et l'hypothèse volumique garantit l'inégalité de doublement inverse du volume : le théorème 2.5.9 fournit

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3}).$$

On applique la proposition 3.2.1 grâce au lemme 3.2.4 (avec $\delta(t) \leq Ct$). ■

### 3.2.3 Holonomie à l'infini.

On va maintenant établir une meilleure estimée sur l'holonomie des lacets fondamentaux. Pour ce faire, on veut pouvoir comparer l'holonomie de différents lacets. Le tenseur de courbure Rm intervient naturellement, comme le montre le lemme suivant (adapté de [BK]).

LEMME 3.2.6 (COMPARAISON DES HOLONOMIES) — *Soit $\gamma : [0, L] \longrightarrow N$ une courbe tracée dans une variété riemannienne $N$ et soit $t \mapsto \alpha_t$ une famille de lacets paramétrés par $0 \leq s \leq l$ avec $\alpha_t(0) = \alpha_t(l) = \gamma(t)$. Notons $p_\gamma(t)$ le transport parallèle le long de $\gamma$, de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$. On se donne un champ de vecteur $(s,t) \mapsto X(s,t)$ le long de la famille $\alpha$ et on suppose qu'il est parallèle le long de chaque lacet $\alpha_t$ ($\nabla_s X(s,t) = 0$) ainsi que le long de $\gamma$ ($\nabla_t X(0,t) = 0$). Alors on dispose de l'inégalité*

$$\left|p_\gamma(L)^{-1} X(l,L) - X(l,0)\right| \leq \int_0^L \int_0^l \left|\mathrm{Rm}(\partial_s \sigma_t, \partial_t \sigma_t) X(s,t)\right| ds dt.$$

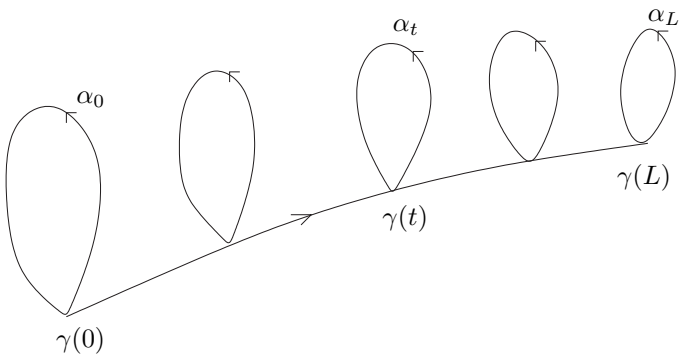



FIG. 3.7 – Une famille à un paramètre de lacets.

**Preuve.**
Vu que $X(0,L) = p_\gamma(L) X(0,0)$ et $\nabla_t = p_\gamma(t) \dfrac{d}{dt} p_\gamma(t)^{-1}$, on peut écrire

$$p_\gamma(L)^{-1} \left(X(l,L) - X(0,L)\right) - \left(X(l,0) - X(0,0)\right) = \int_0^L \frac{d}{dt} p_\gamma(t)^{-1} \left(X(l,t) - X(0,t)\right) dt$$

sous la forme

$$p_\gamma(L)^{-1} X(l,L) - X(l,0) = \int_0^L p_\gamma(t)^{-1} \nabla_t X(l,t) dt$$

A $t$ fixé, si $p_{\sigma_t}(s)$ désigne le transport parallèle le long de $\alpha_t$, de $\alpha_t(0)$ à $\alpha_t(s)$, on peut écrire

$$p_{\alpha_t}(l)^{-1} \nabla_t X(1,t) = \int_0^l \frac{d}{ds} p_{\alpha_t}(s)^{-1} \nabla_t X(s,t) ds = \int_0^l p_{\alpha_t}(s)^{-1} \nabla_s \nabla_t X(s,t) ds$$

et comme $\nabla_s X = 0$, on obtient

$$p_{\alpha_t}(l)^{-1} \nabla_t X(l,t) = \int_0^l p_{\alpha_t}(s)^{-1} \mathrm{Rm}(\partial_s \alpha_t, \partial_t \alpha_t) X(s,t) ds.$$

Le transport parallèle étant isométrique, il vient

$$|\nabla_t X(l,t)| \leq \int_0^l \left|\mathrm{Rm}(\partial_s \alpha_t, \partial_t \alpha_t) X(s,t)\right| ds,$$

puis

$$\left|p_\gamma(L)^{-1}X(l,L) - X(l,0)\right| \leq \int_0^L \int_0^l |\mathrm{Rm}(\partial_s\alpha_t, \partial_t\alpha_t)X(s,t)|\, dsdt.$$

■

Plaçons nous sur une variété riemannienne complète $(M^n, g)$ vérifiant

$$|Rm| = \mathcal{O}(r^{-2-\epsilon})$$

pour un certain $\epsilon > 0$. On va supposer qu'en chaque point $x$ du complémentaire d'un compact dans $M$, il y a un unique lacet géodésique $\sigma_x$ de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x) \leq 2I_2$. On supposera aussi que $M$ a un seul bout ; sinon, on applique ce qui suit à chacun des bouts.

Considérons un rayon unitaire $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ partant de $o$ et notons $p_\gamma(t)$ le transport parallèle le long de $\gamma$, de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$. Pour $t$ assez grand, on peut définir l'endomorphisme d'holonomie $H_{\gamma(t)}$ du lacet $\sigma_{\gamma(t)}$ en $\gamma(t)$ : on fait ici un choix implicite d'orientation des lacets $\sigma_{\gamma(t)}$ et on peut supposer ce choix continu. On obtient un élément de $O(T_{\gamma(t)}M)$. Le lemme de comparaison des holonomies (3.2.6) permet de voir que pour des nombres $t_1 \leq t_2$ grands, on a :

$$\begin{aligned} &\left|p_\gamma(t_2)^{-1}H_{\gamma(t_2)}p_\gamma(t_2) - p_\gamma(t_1)^{-1}H_{\gamma(t_1)}p_\gamma(t_1)\right| \\ \leq\ &\int_{t_1}^{\infty}\int_0^1 |\mathrm{Rm}|\,(c(t,s))\,|\partial_s c(t,s) \wedge \partial_t c(t,s))|\, dsdt, \end{aligned}$$

où, à $t$ fixé, $c(t,.)$ est un paramétrage du lacet $\sigma_{\gamma(t)}$ par $[0,1]$, à vitesse $2\,\mathrm{inj}(\gamma(t))$.

LEMME 3.2.7 — $|\partial_s c \wedge \partial_t c)|$ *est une quantité uniformément bornée.*

**Preuve.**
La majoration du rayon d'injectivité borne $|\partial_s c|$. Reste à borner la partie de $\partial_t c$ qui est orthogonale à $\partial_s c$. On se place au voisinage d'un point $x$ le long de $\gamma$. On peut translater l'origine du paramètre $t$ de façon à avoir $x = \gamma(0)$. On peut aussi remonter le problème dans $T_xM =: E$, muni de la métrique relevée $\hat{g}$. Si $v = \gamma'(0)$, $\gamma$ se relève en la courbe $\hat{\gamma}$ paramétrée par $t \mapsto tv$. Le relevé $\hat{c}$ de $c$ est formé des géodésiques $\hat{c}(t,.)$ reliant $tv$ à $\tau(tv)$ ; $\tau$ est l'élément du pseudo-groupe fondamental correspondant à $\sigma_x$, pour l'orientation choisie. On dispose de la formule

$$\hat{c}(t,s) = \mathrm{Exp}_{tv}\, sX(t)$$

où $X(t)$ est l'élément de $T_{tv}E$ défini par la relation

$$\mathrm{Exp}_{tv}\, X(t) = \tau(tv).$$

Le champ de vecteur $J$ défini le long de $\hat{c}(0,.)$ par

$$J(s) = \partial_t\hat{c}(0,s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Exp}_{tv}\, sX(t).$$

est un champ de Jacobi de données initiales

$$J(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} tv = v$$

(on identifie $E$ à $T_0E$ par $\mathrm{Exp}_0$, de la façon naturelle) et

$$\begin{aligned} J'(0) &= (\nabla_s \partial_t \hat{c})\Big|_{(t,s)=(0,0)} \\ &= (\nabla_t \partial_s \hat{c})\Big|_{(t,s)=(0,0)} \\ &= (\nabla_t \partial_s \,\mathrm{Exp}_{tv}\, sX(t))\Big|_{(t,s)=(0,0)} \\ &= (\nabla_t X)(0). \end{aligned}$$

Supposons la courbure bornée par $\Lambda^2$, $\Lambda > 0$, dans la zone considérée et appliquons le lemme 6.3.7 de [BK] : la partie $\tilde{J}$ de $J$ qui est orthogonale à $\hat{c}(0,.)$ vérifie

$$\left|\tilde{J}(s) - p(sv)\tilde{J}(0) - sp(sv)\tilde{J}'(0)\right| \leq a(s)$$

où $p(.)$ désigne le transport parallèle radial et où $a$ résout l'équation différentielle

$$a'' - \Lambda^2 a = \Lambda^2 \left(\left|\tilde{J}(0)\right| + \left|\tilde{J}'(0)\right|\right)$$

avec $a(0) = a'(0) = 0$, soit

$$a(s) = \left(\left|\tilde{J}(0)\right| + \left|\tilde{J}'(0)\right|\right)(\cosh(\Lambda s) - 1).$$

Comme ici on aura $0 \leq s \leq 1$ et $\Lambda << 1$, il suffit donc de majorer $\left|\tilde{J}(0)\right|$ et $\left|\tilde{J}'(0)\right|$ pour borner $\tilde{J}$ et terminer la preuve du lemme. Comme $J(0) = v$ est unitaire, il ne reste qu'à estimer $\tilde{J}'(0)$.

On introduit la famille de vecteurs $Y$ de $T_0E \cong E$ définie par

$$X(t) = p(tv)Y(t).$$

Avec

$$\nabla_t X(t) = p(tv)\frac{d}{dt}p(tv)^{-1}X(t) = p(tv)Y'(t),$$

on voit que $J'(0)$ n'est autre que $Y'(0)$. Notant $f$ l'application de $E \times T_0E \cong E^2$ dans $E$ définie par

$$f(w, W) = \mathrm{Exp}_w\, p(w)W,$$

on dispose de la relation

$$f(tv, Y(t)) = \tau(tv).$$

En différentiant ceci, il vient

$$\partial_1 f_{(0,Y(0))}v + \partial_2 f_{(0,Y(0))}Y'(0) = (D\tau)_0 v. \tag{3.15}$$

Maintenant, le lemme 6.6 de [BK] dit que $\partial_2 f_{(0,Y(0))}$ est $\Lambda^2$-proche de l'identité. De plus, $\tau$ est une isométrie pour $\hat{g}$, donc $(D\tau)_0$ est bornée uniformément. Enfin, $\partial_1 f_{(0,Y(0))}v$ n'est autre que le valeur en 1 du champ de Jacobi $K$ le long de $s \mapsto sY(0)$ obtenu à partir de la variation géodésique

$$H(t,s) \mapsto \mathrm{Exp}_{tv}\, sp(tv)Y(0).$$

Comme les conditions initiales de $K(s) = \partial_t H(0,s)$ sont $K(0) = v$ et $K'(0) = 0$, on obtient classiquement (corollaire 6.3.8 de [BK]) une borne sur $K$ et donc sur $\partial_1 f_{(0,Y(0))}v$. Ceci conduit alors à une borne sur $Y'(0)$ (grâce à 3.15) et on a gagné. ■

Avec ce lemme, la borne sur la courbure permet d'en déduire :

$$\left|p_\gamma(t_2)^{-1}H_{\gamma(t_2)}p_\gamma(t_2) - p_\gamma(t_1)^{-1}H_{\gamma(t_1)}p_\gamma(t_1)\right| \leq C_0 \int_{t_1}^{\infty} t^{-2-\epsilon}dt \leq C\, t_1^{-1-\epsilon}.$$

Par le critère de Cauchy, la fonction $t \mapsto p_\gamma(t)^{-1}H_{\gamma(t)}p_\gamma(t)$ admet une limite $H_{\gamma(\infty)}$ dans $O(T_oM)$ quand $t$ tend vers l'infini. En outre, on dispose de l'estimation :

$$\left|p_\gamma(t)^{-1}H_{\gamma(t)}p_\gamma(t) - H_{\gamma(\infty)}\right| \leq C\, t^{-1-\epsilon}. \tag{3.16}$$

On a supposé que $M$ avait un seul bout et que sa courbure décroissait plus vite que quadratiquement : dans ce cadre, [Kas] prouve que les grandes sphères $S(o,t)$ sont connexes et de diamètre (intrinsèque) borné par $Cs$. Ainsi, tout point $x$ de $S(o,t)$ est relié à $\gamma(t)$ par un chemin $\beta$ de longueur au plus $Ct$ et restant dans le complémentaire de $B(o,t/2)$. On en déduit par le lemme de comparaison des holonomies (3.2.6) :

$$\left|p_\beta^{-1}H_x p_\beta - H_{\gamma(t)}\right| \leq Ct^{-1-\epsilon}, \tag{3.17}$$

où $p_\alpha$ désigne le transport parallèle le long de $\beta$ et où $H_x$ est l'endomorphisme d'holonomie associé à une orientation cohérente de $\sigma_x$. En tenant compte de ce problème d'orientation, (3.16) et (3.17) permettent d'affirmer que la paire des classes de conjugaison de $H_{\gamma(\infty)}$ et $H_{\gamma(\infty)}^{-1}$ dans $O(T_oM)$ ne dépend pas de $\gamma$. On appelle « holonomie à l'infini de $M$ » cette donnée et on la note $\mathcal{H}_\infty$. Ceci donne un sens à la définition suivante.

Définition 3.2.8 — *On dira que l'holonomie à l'infini de $M$ est triviale si $H_{\gamma(\infty)}$ est l'identité.*

Quand l'holonomie à l'infini est triviale, (3.16) et (3.17) permettent de voir qu'en tout point $x$ de $M\backslash K$, on a l'estimée

$$|H_x - id| \leq Cr(x)^{-1-\epsilon}. \tag{3.18}$$

L'intérêt de cette estimée est qu'elle dépend de la courbure : une décroissance rapide de la courbure améliore la décroissance trouvée pour l'holonomie, ce qui n'était pas le cas pour l'estimée qu'on avait prouvée sur les instantons gravitationnels. On a prouvé le

Lemme 3.2.9 — *Soit $(M^4, g)$ une variété hyperkählerienne complète telle que*

$$\int_M |\mathrm{Rm}|^2 \, r dvol < \infty$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\, \forall\, t \geq 1,\, At^3 \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^3$$

*avec $0 < A \leq B$. Alors les lacets fondamentaux $\sigma_x$ ont une holonomie $H_x$ vérifiant*

$$|H_x - \mathrm{id}| \leq Cr(x)^{-2}.$$

En fait, c'est plus général : la proposition suivante réduit l'holonomie à l'infini au silence dans le cadre où on l'a définie !

Proposition 3.2.10 (Trivialité de l'holonomie à l'infini.) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète vérifiant*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-2-\epsilon})$$

*avec $\epsilon > 0$. On suppose qu'en chaque point $x$ du complémentaire d'un compact dans $M$, il y a un unique lacet géodésique $\sigma_x$ de longueur minimale $2\,\mathrm{inj}(x) \leq 2I_2$. Alors l'holonomie à l'infini de $M$ est triviale.*

**Preuve.**
Supposons la non triviale. Alors, dans la construction décrite plus haut, l'élément $H_{\gamma(\infty)}$ de $O(T_oM)$ n'est pas l'identité. Pour alléger les écritures, on identifie les espaces tangents le long du rayon $\gamma$ par le transport parallèle. On a vu :

$$H_{\gamma(t)} = H_{\gamma(\infty)} + \mathcal{O}(t^{-1}). \tag{3.19}$$

Pour $t$ grand, on choisit continûment une orientation du lacet fondamental en $\gamma(t) =: x_t$ et on appelle $v_t$ l'extrémité du relevé de $\sigma_t$ dans $T_{x_t}M$ selon cette orientation ; $\tau_t = \tau_{v_t}$ désignera l'élément correspondant du pseudogroupe fondamental. Le lemme 3.1.4 dit que si $w$ est de norme inférieure à $t/4$, il vérifie

$$\left|\tau_t(w) - v_t - H_{\gamma(t)}(w)\right| \leq Ct^{-2}\,\mathrm{inj}(x_t)\,|w|\,(\mathrm{inj}(x_t) + |w|).$$

Avec (3.19) et la borne sur le rayon d'injectivité, il vient

$$\left|\tau_t(w) - v_t - H_{\gamma(\infty)}(w)\right| \leq Ct^{-1}\,|w|\,.$$

Avec

$$|\tau_t(w) - w| \geq \left|H_{\gamma(\infty)}(w) - w\right| - |v_t| - \left|\tau_t(w) - v_t - H_{\gamma(\infty)}(w)\right|,$$

on obtient

$$|\tau_t(w) - w| \geq \left|H_{\gamma(\infty)}(w) - w\right| - I_2 - Ct^{-1}\,|w|\,,$$

Comme $H_{\gamma(\infty)}$ est un endomorphisme orthogonal non trivial, on peut trouver un vecteur $w_\infty$ de norme 1 sur lequel $H_{\gamma(\infty)}$ agit comme une rotation d'angle $\theta$ non triviale. Posons $w_t = 0.1tw_\infty$. Alors pour $t$ grand, on a

$$|\tau_t(w_t) - w_t| \geq 0.2t\,|\sin\theta/2| - C.$$

Par le lemme 3.2.3, le membre de gauche est comparable à $\mathrm{inj}(\exp_{x_t} w_t) \leq I_2$. Or le membre de droite tend vers l'infini quand $t$ tend vers l'infini : c'est absurde, donc $H_{\gamma(\infty)}$ est l'identité. ■

### 3.2.4 Des approximations Gromov-Hausdorff locales.

Une première façon de décrire la géométrie locale consiste à dire qu'elle est proche, « vue de loin », d'une géométrie plus simple. On va montrer que la géométrie locale des effondrements de codimension 1 que nous étudions est proche, en distance Gromov-Hausdorff, de la géométrie euclidienne dans la dimension immédiatement inférieure.

On supposera une décroissance cubique de la courbure. La raison est la suivante. Oublions un instant les lacets géodésiques et regardons la métrique dans la carte exponentielle en un point $x$. Si la courbure est bornée par $\Lambda^2$ dans la zone considérée, le théorème de comparaison usuel dit que la métrique $\exp_x^* g$ est comparable à la métrique euclidienne $g_x$, avec l'estimée

$$\left(\frac{\sin\Lambda r}{\Lambda r}\right)^2 g_x \leq \exp_x^* g \leq \left(\frac{\sinh\Lambda r}{\Lambda r}\right)^2 g_x$$

sur une échelle $r << \Lambda^{-1}$. Donc les distances correspondant à ces deux métriques vérifient

$$\frac{\sin\Lambda r}{\Lambda r} d_{g_x} \leq d_{\exp_x^* g} \leq \frac{\sinh\Lambda r}{\Lambda r} d_{g_x},$$

d'où en substance :

$$\left|d_{\exp_x^* g} - d_{g_x}\right| \leq C\Lambda^2 r^2 d_{g_x}.$$

Si on veut que l'écart entre ces deux distances soit majoré par une constante sur une échelle $r$, il faut donc que $\Lambda^2 r^2 r$ soit borné : cela signifie que la courbure $\Lambda^2$ doit s'estimer par $r^{-3}$. Donc si on veut une telle estimation valable à l'échelle $r$ à distance de l'ordre de $r$, on est amené à supposer que la courbure décroît en $r^{-3}$.

Enonçons d'abord un lemme qui assure que les éléments des pseudo-groupes fondamentaux que nous considérerons sont presque des translations.

LEMME 3.2.11 — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète telle que*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3})$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ At^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^{n-1}$$

*avec $0 < A \leq B$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1} r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Il existe alors un compact $K$ de $M$ et des constantes géométriques $J$, $L$, $\kappa > 0$ telles que pour tout point $x$ de $M \backslash K$, tout élément $\tau$ du pseudo-groupe fondamental $\Gamma(x, \kappa r(x))$ vérifie*

$$\forall\, w \in \hat{B}(0, \kappa r(x)),\ |\tau(w) - t_{kv_x}(w)| \leq J$$

*où $v_x$ est un relevé de l'extrémité d'un relevé de $\sigma_x$ et où $k$ est un entier naturel majoré par $Lr(x)$.*

**Preuve.**
Par la proposition 3.2.1, on peut écrire $\tau = \tau_{v_x}^k$, où $v_x$ est l'extrémité d'un relevé de $\sigma_x$ et où $k$ est un entier naturel tel que $k \leq Lr(x)$. Par le lemme 3.1.4, on a pour tout $w$ de $\hat{B}(0, r(x)/4)$ :

$$\left|\tau_{v_x}(w) - v_x - p_{v_x}^{-1}(w)\right| \leq Cr(x)^{-3} \left|v_x\right| |w| \left(|v_x| + |w|\right)$$

La décroissance cubique de la courbure fournit grâce à (3.18) :

$$\left|p_{v_x}^{-1}(w) - w\right| \leq Cr(x)^{-2} \left|w\right|.$$

En combinant ces estimées, on obtient :

$$|\tau_{v_x}(w) - t_{v_x}(w)| = |\tau_{v_x}(w) - v_x - w| \leq Cr(x)^{-2} |w|$$

Pour tout entier naturel $i \leq k$, si on pose $e_i = \tau_{v_x}^i - t_{v_x}^i$, on a la formule

$$e_{i+1} - e_i = e_1 \circ \tau_{v_x}^i.$$

Avec la majoration

$$\left|\tau_{v_x}^i(w)\right| = d(\tau_{v_x}^i(w), 0) = d(\tau_{v_x}^{-i}(0), w) \leq \left|\tau_{v_x}^{-i}(0)\right| + |w|,$$

il vient pour tout $w$ de $\hat{B}(0, \kappa r(x))$ :

$$|e_{i+1}(w) - e_i(w)| \leq Cr(x)^{-2} \left|\tau_{v_x}^i(w)\right| \leq Cr(x)^{-1}.$$

On en déduit par récurrence $|e_k(w)| \leq Ckr(x)^{-1}$ et avec $k \leq Lr(x)$ :

$$|\tau(w) - t_{kv_x}(w)| = \left|\tau_{v_x}^k(w) - kv_x - w\right| = |e_k(w)| \leq C.$$

■

Proposition 3.2.12 (Approximation Gromov-Hausdorff) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète telle que*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3})$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\, \forall\, t \geq 1,\, At^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^{n-1}$$

*avec $0 < A \leq B$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1}r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Il existe alors un compact $K$ de $M$ et des constantes géométriques $I$, $\kappa > 0$ telles que tout point $x$ de $M\backslash K$ possède un voisinage ouvert $\Omega$ dont la distance Gromov-Hausdorff à une boule de $\mathbb{R}^{n-1}$ de rayon $\kappa r(x)$ est majorée par $I$.*

**Preuve.**
Choisissons un relevé de $\sigma_x$ dans $T_xM$ et notons $v_x$ son extrémité. On appelle $H$ l'hyperplan orthogonal à $v_x$ et on note $v \mapsto v_H$ la projection orthogonale euclidienne sur $H$ (pour $g_x$).

Si $y$ est un point de $B(x, \kappa r(x)/2)$, on peut alors définir $h(y)$ comme barycentre (affine) des points $v_H$ obtenus à partir des relevés $v$ de $y$ dans $\hat{B}(0, \kappa r(x)/2)$. Ceci définit une application $h$ de $B(x, \kappa r(x)/2)$ dans $H \cong \mathbb{R}^{n-1}$ (on munit $H$ de la structure euclidienne induite par $g_x = |.|^2$).

On appelle $B$ la boule de centre 0 et de rayon $0.1\kappa r(x)$ dans $H$ : $0.1\kappa$ sera le $\kappa$ de l'énoncé. On pose ensuite $\Omega := h^{-1}(B)$. On veut voir que $h : \Omega \longrightarrow B$ est l'approximation Gromov-Hausdorff annoncée. Autrement dit, il faut vérifier que cette application $h$ est d'image $I$-dense et que l'on a pour tous points $y$ et $z$ de $\Omega$ :

$$|d(y,z) - |h(y) - h(z)|| \leq I.$$

Déjà, si $v$ est un point de $B$, on sait par le lemme 3.2.11 que pour tout élément $\tau = \tau^k_{v_x}$ du pseudo-groupe $\Gamma(x, \kappa r(x))$, on a

$$|\tau(v) - v - kv_x| \leq J$$

et donc, par le théorème de Pythagore,

$$|\tau(v)_H - v| \leq J.$$

En passant au barycentre, on récupère

$$|h(\exp_x v) - v| \leq J.$$

Si $d(v, H\backslash B) > J$, ceci montre l'appartenance de $h(\exp_x v)$ à $B$, donc de $\exp_x v$ à $\Omega$ ; et par conséquent, $d(v, h(\Omega)) \leq J$. Et comme $\{v \in B \,/\, d(v, H\backslash B) > J\}$ est $J$-dense dans $B$, ceci montre que $h(\Omega)$ est $2J$-dense dans $B$.

Maintenant, considérons deux points $y$ et $z$ de $\Omega$. Prenons des relevés $v$ et $w$ de ces points dans $B(x, \kappa r(x)/2)$ tels que $d(v,w) = d(y,z)$. Comme ci-dessus, on obtient $|h(y) - v_H| \leq J$ et $|h(z) - w_H| \leq J$, d'où

$$||h(y) - h(z)| - |v_H - w_H|| \leq 2J.$$

En particulier, on en tire

$$|h(y) - h(z)| \leq |v_H - w_H| + 2J \leq |v - w| + 2J.$$

Par comparaison, on a

$$|v - w| \leq \frac{Cr(x)^{-\frac{3}{2}} r(x)}{\sin Cr(x)^{-\frac{3}{2}} r(x)} d(v,w) \leq \left(1 + Cr(x)^{-1}\right) d(v,w)$$

d'où

$$|v - w| \leq d(v,w) + Cr(x)^{-1} d(v,w) \leq d(v,w) + C.$$

On en déduit

$$|h(y) - h(z)| \leq d(v,w) + 2J + C = d(y,z) + 2J + C.$$

Si on prend maintenant des relevés $v'$ et $w'$ à distance minimale de $H$, on peut écrire grâce au lemme 3.1.3 : $|v' - v'_H| \leq C$ et $|w' - w'_H| \leq C$. On en déduit :

$$\left|v' - w'\right| \leq \left|v'_H - w'_H\right| + C$$

Par ailleurs, la distance entre $y$ et $z$ est l'infimum des distances entre leurs relevés, donc $d(y,z) \leq d(v',w')$. Par comparaison, on trouve comme plus haut :

$$d(v',w') \leq \left|v' - w'\right| + C.$$

Avec ces trois inégalités, il vient :

$$d(y,z) \leq \left|v'_H - w'_H\right| + C$$

Comme on a

$$\left||h(y) - h(z)| - \left|v'_H - w'_H\right|\right| \leq 2J,$$

on arrive à

$$d(y,z) \leq |h(y) - h(z)| + 2J + C.$$

On a montré

$$|d(y,z) - |h(y) - h(z)|| \leq I.$$

Ceci conclut la preuve. ■

L'étape suivante consiste à régulariser l'approximation Gromov-Hausdorff locale en une fibration locale qui décrira avec une bonne précision la géométrie locale à l'infini. Avant de procéder à cette construction, nous proposons un intermède autour des relations entre une hypothèse de courbure et les propriétés de la fonction distance à un point.

### 3.2.5 Distance et courbure.

Le lemme suivant résume un certain nombre d'estimations découlant d'hypothèses sur la courbure. Les estimées jusqu'à l'ordre deux sont classiques. A partir de l'ordre trois, nous n'avons pas trouvé de référence, donc nous proposons une preuve.

LEMME 3.2.13 — *Soient une variété riemannienne complète $(M, g)$, un point $x$ de $M$ et un nombre $a \geq 2$ tels que*

$$\mathrm{inj}(x) > \epsilon \geq 1$$

*et*

$$\forall\, i \in [0, k],\ \left|\nabla^i \mathrm{Rm}\right| \leq c\epsilon^{-a-i}$$

*sur la boule $B(x, \epsilon)$. Soit $r$ la fonction $d(x, .)$ et soit $\rho = r^2/2$. On a alors une constante $C$ telle que sur cette boule :*

- $|d\rho| = r \leq \epsilon$ ;
- $\left|\nabla^2 \rho - g\right| \leq Cr^2\epsilon^{-a} \leq C\epsilon^{2-a}$ ;
- *et pour* $3 \leq i \leq k$, $\left|\nabla^i \rho\right| \leq C\epsilon^{4-a-i}$.

**Preuve.**
La première estimation est claire et la deuxième est un résultat de comparaison classique [BK]. Pour les estimées d'ordre supérieur, on introduit le gradient $N$ de la fonction $r := d(x, .)$ et on utilise l'équation de Riccati pour la seconde forme fondamentale des sphères géodésiques $\nabla N$ :

$$\nabla_N S = -S^2 - \mathrm{Rm}(N, .)N.$$

Dans la preuve, nous assimilons les formes quadratiques à des endomorphismes symétriques. Si on considère le champ d'endomorphismes $E := \nabla^2\rho - \mathrm{Id}$, on voit qu'il se réécrit

$$E = dr \otimes N + rS - \mathrm{Id}\,.$$

Si on pose $V = \mathrm{grad}\,\rho = rN$, on obtient l'équation

$$\nabla_V E = -E - E^2 - \mathrm{Rm}(V, .)V.$$

En notant la relation $\nabla V = \mathrm{Id} + E$ et en écrivant

$$\nabla_V \nabla E = \nabla\nabla_V E - \nabla_{\nabla V} E + \mathrm{Rm}(V, .)E,$$

on obtient l'équation

$$\nabla_V \nabla E = -2\nabla E + E * \nabla E + \nabla\,\mathrm{Rm} * V * V + \mathrm{Rm} * \nabla V * V + \mathrm{Rm} * V.$$

En observant que pour $k \geq 2$, $\nabla^k V = \nabla^{k-1} E$, on obtient par récurrence :

$$\begin{aligned}\nabla_V \nabla^k E = \ &- \ (k+1)\nabla^k E + \sum_{i+j=k} \nabla^i E * \nabla^j E \\ &+ \sum_{i+j+l=k} \nabla^i\,\mathrm{Rm} * \nabla^j V * \nabla^l V + \sum_{i+j=k-1} \nabla^i\,\mathrm{Rm} * \nabla^j V,\end{aligned}$$

pour tout entier naturel $k$. Si l'on pose $F_k = r^{k+1}\nabla^k E$, $G = E/r$, on a ainsi

$$\nabla_N F_k = G * F_k + H_k$$

avec

$$H_k = r^{-2}\sum_{i=1}^{k-1} F_i * F_{k-i} + r^k \left( \sum_{i+j+l=k} \nabla^i \operatorname{Rm} * \nabla^{j+1}\rho * \nabla^{l+1}\rho + \sum_{i+j=k-1} \nabla^i \operatorname{Rm} * \nabla^{j+1}\rho \right)$$

Ainsi, le long d'une géodésique partant de $x$, on trouve

$$\partial_r |F_k| \leq C_k |F_k| |G| + |H_k|$$

et comme l'estimée à l'ordre 2 dit que $r|G|$ est petit, on en déduit une estimée du type $|F_k| \leq C_k r \sup |H_k|$. On va montrer par récurrence l'estimation

$$|F_k| \leq C_k r^{k+1}\epsilon^{2-a-k}$$

qui n'est rien d'autre que

$$\left|\nabla^k E\right| \leq C_k \epsilon^{2-a-k},$$

ou encore

$$\left|\nabla^{k+2}\rho\right| \leq C_k \epsilon^{4-a-(k+2)}.$$

On aura donc fini. L'initialisation ($k = 0$) découle de l'estimée à l'ordre 2 sur $\rho$. Supposons maintenant les estimées jusqu'à l'ordre $k-1$. A l'aide de l'hypothèse de récurrence et des bornes sur la courbure, on arrive à borner $H_k$, à une constante multiplicative près, par :

$$r^{-2} r^{k+2}\epsilon^{4-2a-k} + r^k \left( \epsilon^{-a-k+4-a-1+4-a-1} + \epsilon^{-a-k+1+4-a-1} \right)$$

d'où

$$|H_k| \leq C_k r^k \left( \epsilon^{4-2a-k} + \epsilon^{4-2a-k+2-a} + \epsilon^{4-2a-k} \right).$$

Avec $a \geq 2$, il vient donc $|H_k| \leq C_k r^k \epsilon^{4-2a-k} \leq C_k r^k \epsilon^{2-a-k}$. Il en résulte $|F_k| \leq C_k r^{k+1}\epsilon^{2-a-k}$, d'où le résultat. ■

D'autre part, H. Kaul [Kau] a montré qu'on peut contrôler les coefficients de Christoffel en carte exponentielle si on sait borner Rm et $\nabla \operatorname{Rm}$. On utilisera son résultat sous la forme suivante

PROPOSITION 3.2.14 — *Soient une variété riemannienne complète $(M, g)$, un point $x$ de $M$ et un nombre $a \geq 2$ tels que*

$$|\operatorname{Rm}| \leq c\epsilon^{-a} \quad \text{et} \quad |\nabla \operatorname{Rm}| \leq c\epsilon^{-a-1}$$

*sur la boule $B(x, \epsilon)$, avec $\epsilon \geq 1$. On a alors une constante $C$ telle que sur la boule $\hat{B}(0, \epsilon)$ de $T_x M$, la connexion $\nabla^{\hat{g}}$ de la métrique $\hat{g} = \exp_x^* g$ se compare à la connexion plate $\nabla^0$ par*

$$\left|\nabla^{\hat{g}} - \nabla^0\right| \leq C\epsilon^{1-a}.$$

On tire de ceci un meilleur contrôle sur la fonction distance à un point, dans le tangent.

LEMME 3.2.15 — *Soient une variété riemannienne complète $(M, g)$, un point $x$ de $M$ et un nombre $a \geq 2$ tels que*

$$|\mathrm{Rm}| \leq c\epsilon^{-a} \quad \text{et } |\nabla \mathrm{Rm}| \leq c\epsilon^{-a-1}$$

*sur la boule $B(x, \epsilon)$, avec $\epsilon \geq 1$. On a alors une constante $C$ telle que si $v$ et $w$ sont des éléments de $\hat{B}(0, C^{-1}\epsilon)$, muni de $\hat{g}$, alors*

$$|(d\rho_v)_w - g_x(w - v, .)| \leq C\epsilon^{3-a}.$$

**Preuve.**
En choisissant $C$ assez grand, on assure la convexité de la boule considérée. L'expression exacte de la différentielle considérée est

$$(d\rho_v)_w = -\hat{g}_w(\mathrm{Exp}_w^{-1} v, .),$$

où Exp désigne l'exponentielle pour $\hat{g}$. Par comparaison (et avec l'identification canonique des espaces tangents à un espace vectoriel avec lui-même), on a

$$|\hat{g}_w - g_x| \leq C\epsilon^{-a}\epsilon^2 = C\epsilon^{2-a}. \tag{3.20}$$

Notons $\gamma$ le paramétrage de la géodésique liant $w$ à $v$ en un temps 1. On dispose de l'équation géodésique $\nabla^{\hat{g}}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, qu'on peut réécrire

$$\ddot{\gamma} + \left(\nabla^{\hat{g}}_{\dot{\gamma}} - \nabla^0\right)\dot{\gamma} = 0.$$

Avec (3.2.14), il vient

$$|\ddot{\gamma}| \leq C\epsilon^{1-a}\epsilon^2 = C\epsilon^{3-a}.$$

La formule de Taylor

$$\gamma(1) - \gamma(0) - \dot{\gamma}(0) = \int_0^1 (1-t)\ddot{\gamma}(t)dt$$

fournit alors

$$\left|v - w - \mathrm{Exp}_w^{-1} v\right| \leq C\epsilon^{3-a}.$$

Pour conclure, on écrit

$$\begin{aligned} |(d\rho_v)_w - g_x(w - v, .)| &= \left|\hat{g}_w(\mathrm{Exp}_w^{-1} v, .) - g_x(v - w, .)\right| \\ &\leq \left|(\hat{g}_w - g_x)(\mathrm{Exp}_w^{-1} v, .)\right| + \left|g_x(\mathrm{Exp}_w^{-1} v, .) - g_x(v - w, .)\right| \\ &\leq C\epsilon^{2-a}\epsilon + C\epsilon^{3-a} \\ &\leq C\epsilon^{3-a}. \end{aligned}$$

■

### 3.2.6 Construction de fibrations en cercles locales.

L'approximation Gromov-Hausdorff locale que nous avons construite plus haut n'est pas lisse : le travail est trop grossier pour autoriser de la régularité. Nous allons maintenant lisser, régulariser cette application afin d'obtenir une fibration lisse. La technique employée est tout simplement une convolution, comme dans [Fuk] et surtout [CFG]. Essentiellement, nous avons besoin du théorème 2.6 de [CFG]. Mais pour notre propos, ce résultat général devra être affiné afin d'utiliser à plein la décroissance cubique de la courbure, ainsi que des propriétés de symétrie de l'approximation Gromov-Hausdorff que nous régularisons. Ces techniques nécessitent hélas un contrôle des dérivées covariantes de la courbure ; on utilisera à plein le paragraphe précédent. Il est encourageant de noter que les estimées sur les dérivées covariantes de la courbure sont automatiques pour les instantons gravitationnels.

Précisons un point de vocabulaire. On dira que $f$ est une submersion $C$-presque riemannienne si $f$ est une submersion telle que pour tout vecteur $v$ horizontal (i.e. orthogonal aux fibres), on a

$$e^{-C}\,|v| \leq |df_x(v)| \leq e^{C}\,|v|\,.$$

Proposition 3.2.16 (Fibration locale) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète telle que*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \textit{et} \quad |\nabla \mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-4})$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\, \forall\, t \geq 1,\, At^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq Bt^{n-1}$$

*avec $0 < A \leq B$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1}r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Il existe alors un compact $K$ de $M$ et un nombre $\kappa > 0$ tel que pour tout point $x$ de $M\backslash K$, on peut trouver une fibration en cercles $f_x : \Omega_x \longrightarrow B_x$ définie sur un voisinage ouvert $\Omega_x$ de $x$ et à valeurs dans la boule euclidienne $B_x$ de rayon $\kappa r(x)$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, avec les propriétés suivantes.*

- *$f_x$ est une submersion $Cr(x)^{-1}$-presque riemannienne.*
- *Ses fibres sont des sous-variétés difféomorphes à $\mathbb{S}^1$, de longueur minorée par $C^{-1}$ et majorée par $C$.*
- *$\left|\nabla^2 f_x\right| \leq Cr(x)^{-2}$.*

*Les constantes $\kappa$ et $C$ dépendent de $n$ et des bornes sur la courbure et le volume des boules à l'infini. Si de plus, on a*

$$\forall\, i \geq 2,\, \left|\nabla^i \mathrm{Rm}\right| = \mathcal{O}(r^{-2-i}),$$

*alors il existe des constantes $C_i$ telles que*

$$\forall i \geq 3, \left|\nabla^i f_x\right| \leq C_i r(x)^{1-i}.$$

*Remarque* 3.2.1. Il est bon de noter que les hypothèses de décroissance de la courbure sont vérifiées par les variétés Ricci plates à courbure dans $L^{\frac{n}{2}}(rdvol)$ (par exemple à décroissance surquadratique).

**Preuve.**
Dans la preuve de 3.2.12, on a introduit une fonction $h$ définie sur une boule $B(x, \kappa r(x))$ et à valeurs dans l'hyperplan $H$ orthogonal à l'extrémité $v_x$ d'un relevé de $\sigma_x$ dans $T_xM$ (cf. preuve de 3.2.12) ; cet hyperplan $H$ de $T_xM$ est identifié à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$, grâce à la métrique induite par $g_x$.

On se fixe une fonction décroissante lisse $\chi$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vaut 1 sur $[0, 1/3]$ et 0 au delà de $2/3$. On se fixe une échelle de longueur $\epsilon := 0.1\kappa r(x)$ et on pose $\chi_\epsilon(t) = \chi(t/\epsilon^2)$. On remarquera que les dérivées de cette fonction s'estiment par :

$$\left|\chi_\epsilon^{(k)}\right| \leq C_k \epsilon^{-2k}. \tag{3.21}$$

On considère alors la fonction définie sur $B(x, \kappa r(x))$ par :

$$f(y) := \frac{\int_{T_yM} h(\exp_y v)\chi_\epsilon(d(0,v)^2/2)dvol(v)}{\int_{T_yM} \chi_\epsilon(d(0,v)^2/2)dvol(v)}.$$

Ici, $dvol$ et $d$ sont la mesure et la distance associées à $\exp_y^* g$. Si $w$ est un relevé de $y$ dans $T_xM$, on peut effectuer un changement de variable à l'aide de l'isométrie

$$\tau_w := \mathrm{Exp}_w \circ (T_w \exp_x)^{-1}$$

entre $(T_yM, \exp_y^* g)$ et $(T_xM, \exp_x^* g)$. Introduisons, pour chaque point $v$ de $T_xM$, la fonction $\rho_v := \frac{d(v,.)^2}{2}$ et posons $\hat{f} := f \circ \exp_x$, $\hat{h} := h \circ \exp_x$. On obtient alors la formule :

$$f(y) = \hat{f}(w) = \frac{\int_{T_xM} \hat{h}(v)\chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v)}{\int_{T_xM} \chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v)}.$$

Ceci permet de travailler sur un espace euclidien fixé, $(T_xM, g_x)$. La mesure riemannienne $dvol$ peut être comparée à la mesure de Lebesgue $dv$ : sur une échelle de longueur $\epsilon$, si la courbure est bornée par $\Lambda^2$, on a

$$\left(\frac{\sin \Lambda\epsilon}{\Lambda\epsilon}\right)^n dv \leq dvol \leq \left(\frac{\sinh \Lambda\epsilon}{\Lambda\epsilon}\right)^n dv.$$

La décroissance cubique de la courbure donne un $\Lambda$ de l'ordre de $\epsilon^{-\frac{3}{2}}$, de sorte qu'on obtient

$$-C\epsilon^{-1}dv \leq dvol - dv \leq C\epsilon^{-1}dv. \tag{3.22}$$

De même, on peut comparer les distances euclidiennes et riemanniennes par

$$|d(v,w) - |v-w|| \leq C\Lambda^2\epsilon^2 d(v,w) \leq C,$$

d'où

$$\left|\rho_v(w) - |v-w|^2/2\right| \leq C\epsilon. \tag{3.23}$$

Enfin, la preuve de 3.2.12 montre que $\hat{h}$ est proche d'une projection euclidienne sur $H$ :

$$\left|\hat{h}(v) - v_H\right| \leq C. \tag{3.24}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\int \hat{h}(v)\chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v) &= \int \hat{h}(v)\chi_\epsilon(\rho_v(w))(dvol(v)-dv)\\ &+ \int \hat{h}(v)\left(\chi_\epsilon(\rho_v(w)) - \chi_\epsilon(|v-w|^2/2)\right)dv\\ &+ \int (\hat{h}(v)-v_H)\chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv\\ &+ \int v_H\chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv.\end{aligned}$$

Le support de $v \mapsto \chi_\epsilon(\rho_v(w))$ est inclus dans une boule de rayon comparable à $\epsilon$, $\hat{h}$ prendra donc ses valeurs dans une boule de taille comparable à $\epsilon$. Avec (3.22), on peut donc majorer le premier terme du membre de droite par $C\epsilon\cdot\epsilon^{-1}\cdot\epsilon^n = C\epsilon^n$. Avec (3.21) et (3.23), on borne le deuxième terme par $C\epsilon\cdot\epsilon^{-2}\cdot\epsilon\cdot\epsilon^n = C\epsilon^n$. Enfin, (3.24) contrôle le troisième terme par $C\epsilon^n$. On obtient :

$$\int \hat{h}(v)\chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v) = \int v_H\chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv + \mathcal{O}(\epsilon^n),$$

où $\mathcal{O}(\epsilon^n)$ désigne une erreur majorée par $C\epsilon^n$.

Grâce à (3.22), (3.21) et (3.23), on obtient de même

$$\int_{T_xM} \chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v) = \int \chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv + \mathcal{O}(\epsilon^{n-1}).$$

Enfin, en notant les ordres de grandeur

$$\int v_H\chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv = \mathcal{O}(\epsilon^{n+1})$$

et

$$C^{-1}\epsilon^n \leq \int \chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv \leq C\epsilon^n,$$

on en conclut que

$$\hat{f}(w) = \frac{\int v_H\chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv}{\int \chi_\epsilon(|v-w|^2/2)dv} + \mathcal{O}(1)$$

Par le changement de variable $z = v - w$, on en déduit :

$$\hat{f}(w) - w_H = \underbrace{\frac{\int z_H\chi_\epsilon(|z|^2/2)dz}{\int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz}}_{=0 \text{ par parité}} + \mathcal{O}(1),$$

d'où

$$\hat{f}(w) = w_H + \mathcal{O}(1). \tag{3.25}$$

La différentielle de $\hat{f}$ s'écrit

$$d\hat{f}_w = \frac{\int (\hat{h}(v) - \hat{f}(w))\chi'_\epsilon(\rho_v(w))(d\rho_v)_w dvol(v)}{\int \chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v)}.$$

En procédant au même type d'approximations, basées sur (3.5), (3.21), (3.23), (3.2.15), (3.24) et (3.25), on obtient

$$d\hat{f}_w = -\frac{\int z_H \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)dz}{\int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz} + \mathcal{O}(\epsilon^{-1}). \tag{3.26}$$

Donnons nous une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_xM$, avec $e_n \perp H$. Si $i \neq j$, on a par parité

$$\int z_i \chi'_\epsilon(|z|^2/2) z_j dz = 0.$$

Par contre, une intégration par partie donne pour tout $\alpha \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_i^2 \chi'_\epsilon(z_i^2/2 + \alpha) dz_i = -\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\epsilon(z_i^2/2 + \alpha) dz_i,$$

de sorte que

$$-\int z_i^2 \chi'_\epsilon(|z|^2/2)dz = \int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz.$$

Cela signifie qu'on a précisément :

$$-\frac{\int z_H \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)dz}{\int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz} = \sum_{i=1}^{n-1} e_i \otimes (e_i,.).$$

Autrement dit, ce n'est rien d'autre que la projection sur $H$. On en déduit

$$d\hat{f}_w = \sum_{i=1}^{n-1} e_i \otimes (e_i,.) + \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$$

Avec (3.20), ceci prouve que $\hat{f}$ et donc $f$ (puisque exp est une isométrie locale) sont des submersions $C\epsilon^{-1}$-presque riemanniennes.

La dérivée d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{f}_w &= \frac{\int (\hat{h}(v) - \hat{f}(w)) \left(\chi''_\epsilon(\rho_v(w))(d\rho_v)_w \otimes (d\rho_v)_w + \chi'_\epsilon(\rho_v(w))(\nabla^2 \rho_v)_w\right) dvol(v)}{\int \chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v)} \\ &- 2d\hat{f}_w \otimes \frac{\int \chi'_\epsilon(\rho_v(w))(d\rho_v)_w)dvol(v)}{\int \chi_\epsilon(\rho_v(w))dvol(v)}. \end{aligned}$$

A nouveau, avec (3.5), (3.21), (3.23), (3.2.15), (3.24) et (3.25), on arrive à

$$\begin{aligned}\nabla^2 \hat{f}_w &= \frac{\int z_H \left(\chi''_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)\otimes(z,.) + \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(.,.)\right) dz}{\int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz} \\ &- 2d\hat{f}_w \otimes \frac{\int \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)dz}{\int \chi_\epsilon(|z|^2/2)dz} + \mathcal{O}(\epsilon^{-2}).\end{aligned}$$

Pour commencer, on a par parité :

$$\int \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)dz = 0$$

et

$$\int z_H \chi'_\epsilon(|z|^2/2)(.,.)dz = 0.$$

La $i$-ème composante de l'intégrale

$$\int z_H \chi''_\epsilon(|z|^2/2)(z,.)\otimes(z,.)$$

s'écrit comme somme de termes du type

$$\left(\int z_i z_j z_k \chi''_\epsilon(|z|^2/2)dz_1\ldots dz_n\right)(e_j,.)\otimes(e_k,.),$$

qui sont nuls par parité. Donc :

$$\nabla^2 \hat{f}_w = \mathcal{O}(\epsilon^{-2}).$$

La preuve du théorème 2.6 de [CFG] fournit les propriétés restantes de l'application $f_x := f$. Essentiellement, $f$ est une fibration parce qu'elle est $C^1$-proche d'une fibration. La connexité des fibres découle de la borne sur la Hessienne de $f$. L'estimation de la longueur des fibres est liée aux bornes sur le volume et au fait que $f$ est une submersion presque riemannienne. ■

*Remarque* 3.2.2. Par rapport à ce qui est fait dans [CFG], on a utilisé à plein la structure particulière de la géométrie pour bâtir une approximation Gromov-Hausdorff proche d'une projection euclidienne, donc assez symétrique, ce qui lui permet de bien se régulariser par convolution, au moins jusqu'à l'ordre 2.

On aura besoin d'un lemme qui établit un lien entre les fibrations construites autour de deux points proches (c'est un analogue de la proposition 5.6 de [CFG]).

Lemme 3.2.17 (Proximité des fibrations locales I) — *On se replace dans le cadre de la proposition 3.2.16. Si on se donne deux points $x$ et $x'$ dans $M\backslash K$, à distance majorée par $\kappa r(x)$, si on note $\Omega_{x,x'}$ l'intersection des ouverts $\Omega_x$ et $\Omega_{x'}$ donnés par*

*(3.2.16), alors il y a une $Cr(x)^{-1}$-quasi-isométrie $\phi_{x,x'}$ entre les ouverts $f_{x'}(\Omega_{x,x'})$ et $f_x(\Omega_{x,x'})$ qui vérifie*

$$\left|f_x - \phi_{x,x'} \circ f_{x'}\right| \leq C,$$
$$\left|Df_x - D\phi_{x,x'} \circ Df_{x'}\right| \leq Cr(x)^{-1},$$

*et*

$$\left|D^2\phi_{x,x'}\right| \leq Cr(x)^{-2}.$$

*En présence du contrôle*

$$\forall\, i \geq 2,\ \left|\nabla^i \operatorname{Rm}\right| = \mathcal{O}(r^{-2-i}),$$

*on a aussi*

$$\forall\, i \geq 3, \left|D^i\phi_{x,x'}\right| \leq C_i r(x)^{1-i}.$$

**Preuve.**
On reprend les notations de la preuve précédente, en ajoutant en indice le point considéré, et on se place dans $T_xM$. Notons $u$ un relevé de $x'$ (à distance minimale de $H_x$) et $\tau_u := \operatorname{Exp}_u \circ (T_u \exp_x)^{-1}$ l'isométrie correspondante (entre des grandes boules de $T_{x'}M$ et $T_xM$). On considère l'application

$$\phi_{x,x'} := f_x \circ \exp_{x'} |_{f_{x'}(\Omega_{x,x'})}.$$

Afin de tout ramener dans $T_xM$, on écrit

$$\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x = f_x \circ \exp_{x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x$$

Et avec la relation $\exp_x \circ \tau_u = \exp_{x'}$, on peut reformuler cette identité sous la forme

$$\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x = f_x \circ \exp_x \circ \tau_u \circ f_{x'} \circ \exp_{x'} \circ \tau_u^{-1}$$

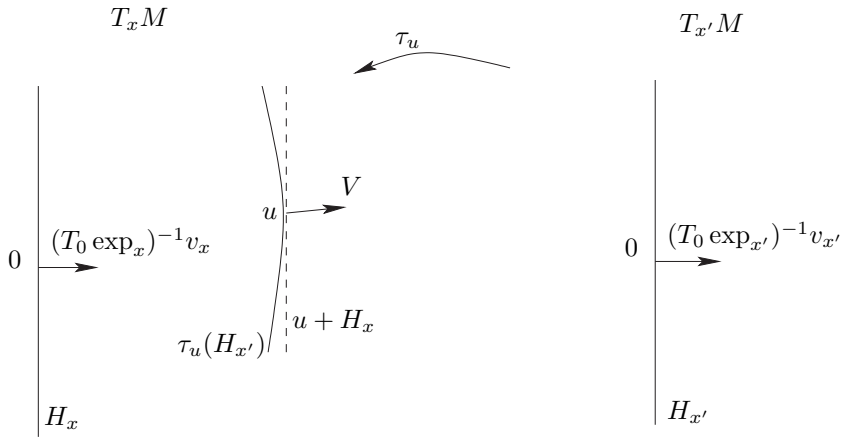
soit

$$\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x = \hat{f}_x \circ \tilde{f}_{x'} \tag{3.27}$$

avec $\hat{f}_x = f_x \circ \exp_x$ et $\tilde{f}_{x'} = \tau_u \circ f_{x'} \circ \exp_{x'} \circ \tau_u^{-1}$. Il faut comprendre cette dernière application.

Puisque $\tau_u$ est une isométrie entre les métriques $\exp_{x'}^* g$ et $\exp_x^* g$ et puisque $H_{x'}$ est l'union des géodésiques partant de 0 avec un vecteur vitesse initial perpendiculaire à $(T_0 \exp_{x'})^{-1}(v_{x'})$, $\tau_u(H_{x'})$ est l'hypersurface engendrée par les géodésiques partant de $u$ avec une vitesse orthogonale à $V := (d\tau_u)_0 \circ (T_0 \exp_{x'})^{-1}(v_{x'})$. $v_{x'}$ est par définition l'un des deux relevés de $x'$ par $\exp_{x'}$ qui sont différents de 0 mais à distance minimale de 0 (dans $T_{x'}M$). Donc $\tau_u(v'_x)$ est l'un des deux relevés de $x'$ par $\exp_x$ qui sont différents de $\tau_u(0) = u$ mais à distance minimale de $\tau_u(0) = u$ (dans $T_xM$). On a vu dans 3.2.3 qu'un tel point $\tau_u(v'_x)$ est $\tau_{v_x}(u)$ ou bien $\tau_{v_x}^{-1}(u)$. Pour se fixer les idées, supposons qu'on est dans le premier cas : $\tau_u(v'_x) = \tau_{v_x}(u)$.

L'exponentielle de $T_{x'}M$ (en 0) envoie $(T_0 \exp_{x'})^{-1}(v_{x'})$ sur $v_{x'}$, donc $V = (d\tau_u)_0 \circ (T_0 \exp_{x'})^{-1}(v_{x'})$ est le vecteur qui s'envoie par l'exponentielle de $T_xM$ (en $\tau_u(0) = u$)




sur $\tau_u(v'_x) = \tau_{v_x}(u)$ : $\operatorname{Exp}_u V = \tau_{v_x}(u)$. Regardons la géodésique paramétrée par $\gamma(t) := \operatorname{Exp}_u tV$. Avec la formule de Taylor

$$\gamma(1) - \gamma(0) - \dot{\gamma}(0) = \int_0^1 (1-t)\ddot{\gamma}(t)dt$$

et l'estimation $|\ddot{\gamma}| \leq Cr(x)^{-2} |V|^2 \leq Cr(x)^{-2}$, découlant de 3.2.14 et de la borne sur le rayon d'injectivité (3.1.1), on trouve

$$|\tau_{v_x}(u) - u - V| \leq Cr(x)^{-2}.$$

Avec l'estimation

$$|\tau_{v_x}(u) - u - v_x| \leq Cr(x)^{-1},$$

on en déduit

$$|V - v_x| \leq Cr(x)^{-1}. \tag{3.28}$$

L'angle entre les vecteurs $V$ et $v_x$ est donc borné par $Cr(x)^{-1}$, de sorte qu'avec $\hat{\mathcal{U}} := \hat{B}(0, \kappa r(x)) \cap \hat{B}(u, \kappa r(x'))$, les bouts d'hyperplans affines $(u + V^\perp) \cap \hat{\mathcal{U}}$ et $(u + v_x^\perp) \cap \hat{\mathcal{U}}$ restent à distance bornée.

En considérant la géodésique paramétrée par $\gamma(t) = \operatorname{Exp}_u tW$, avec $W \perp V$ et $|W| \leq Cr(x)$, on obtient de même grâce à 3.2.14 :

$$|\operatorname{Exp}_u W - u - W| \leq Cr(x)^{-2} r(x)^2 = C.$$

Ceci signifie que le bout d'hyperplan affine $(u + V^\perp) \cap \hat{\mathcal{U}}$ et le bout d'hypersurface $\tau_u(B_{x'}) \cap \hat{\mathcal{U}} = \operatorname{Exp}_u V^\perp \cap \hat{\mathcal{U}}$ restent à distance bornée.

Et on en conclut que $\tau_u(B_{x'}) \cap \hat{\mathcal{U}}$ et $(u + v_x^\perp) \cap \hat{\mathcal{U}}$ restent $C$-proches, dans le sens où l'application $\Psi$ définie de $\tau_u(B_{x'}) \cap \hat{\mathcal{U}}$ dans $(u + v_x^\perp) \cap \hat{\mathcal{U}}$ par

$$\psi : \operatorname{Exp}_u W \mapsto u + W.$$

bouge les points d'une distance majorée par $C$.

On a vu dans la preuve précédente que $f_{x'} \circ \exp_{x'}$ était $C$-proche de la projection orthogonale (pour $g_{x'}$) sur $H_{x'}$. Or, $\tau_u$ est une isométrie entre les métriques $\exp_{x'}^* g$ et $\exp_x^* g$, qui sont respectivement $Cr(x)^{-1}$-proches de $g_{x'}$ et de $g_x$. On en déduit que pour tout point $w$ de la zone considérée, $\left|\tilde{f}_{x'}(w) - w\right|$ est $C$-proche de la distance (pour $g_x$) entre $w$ et $\tau_u(H_{x'})$, de sorte que $\left|\psi \circ \tilde{f}_{x'}(w) - w\right|$ est $C$-proche de la distance (pour $g_x$) entre $w$ et $(u+v_x^\perp)$ : ainsi, $\psi \circ \tilde{f}_{x'}$ et donc $\tilde{f}_{x'}$ sont $C$-proches de la projection orthogonale sur $(u + v_x^\perp)$, qui n'est autre que la projection sur $H_x$, composée avec une translation de vecteur $u - u_{H_x}$ :

$$\left|\tilde{f}_{x'}(w) - w_{H_x} - (u - u_{H_x})\right| \leq C.$$

On en déduit

$$\left|\tilde{f}_{x'}(w) - \hat{f}_x(w) - (u - u_{H_x})\right| \leq C$$

et, en composant avec $\hat{f}_x$, ceci donne

$$\left|\hat{f}_x \circ \tilde{f}_{x'}(w) - \hat{f}_x(w)\right| \leq C.$$

Si on se rappelle la formule 3.27, on constate que ceci donne

$$\left|\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x - f_x \circ \exp_x\right| \leq C,$$

et, avec la surjectivité de $\exp_x$,

$$\left|\phi_{x,x'} \circ f_{x'} - f_x\right| \leq C.$$

Ensuite, de la relation 3.27, on déduit

$$D(\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \exp_x) = D\hat{f}_x \circ D\tilde{f}_{x'}. \tag{3.29}$$

Soit $z$ un point de $\hat{\mathcal{U}}$ et soit $z' = \tau_u^{-1}(z) \in T_{x'}M$. On a vu dans la preuve précédente que $D_z\hat{f}_x$ est $Cr(x)^{-1}$-proche de la projection orthogonale dans la direction de $H_x$. De même, $D_{z'}(f_{x'} \exp_{x'})$ est $Cr(x)^{-1}$-proche de la projection orthogonale sur la direction de $H_{x'}$, i.e. dans la direction orthogonale à $v_{x'}$. Après conjugaison par $D\tau_u$, on obtient que $D_z\tilde{f}_{x'}$ est $Cr(x)^{-1}$ proche de la projection dans la direction de l'orthogonal à $D_z\tau_u(v_{x'})$.

Notons $Z'$ la vitesse initiale de la géodésique reliant $z'$ à $\tau_{v_{x'}}(z')$ en temps 1. En raisonnant comme dans la preuve de l'estimation (3.28), on obtient

$$\left|Z' - v_{x'}\right| \leq Cr(x)^{-1}.$$

Si on pose $Z := D_z\tau_u Z'$, on a donc

$$|Z - D_z\tau_u(v_{x'})| \leq Cr(x)^{-1}.$$

Or $Z$ est la vitesse initiale de la géodésique reliant $z$ à $\tau_{v_x}(z)$ (ou $\tau_{v_x}^{-1}(z)$) en temps 1. Donc de nouveau ce vecteur vérifie

$$|Z - v_x| \leq Cr(x)^{-1},$$

si bien que

$$|v_x - D_z\tau_u(v_{x'})| \leq Cr(x)^{-1}.$$

Au final, on voit que $D_z\tilde{f}_{x'}$ est $Cr(x)^{-1}$-proche de la projection dans la direction de l'orthogonal $H_x$ à $v_x$ :

$$\left|D(\phi_{x,x'} \circ f_{x'} \circ \exp_x) - D\hat{f}_x\right| \leq Cr(x)^{-1},$$

d'où

$$\left|D\phi_{x,x'} \circ Df_{x'} - Df_x\right| \leq Cr(x)^{-1}. \tag{3.30}$$

Soit $W$ un vecteur tangent à $f_{x'}(\Omega_{x,x'})$ et $W'$ son relevé horizontal pour $f_{x'}$ : $Df_{x'}W' = W$. Comme $D\tilde{f}_{x'}$ et $D\hat{f}_x$ sont $Cr(x)^{-1}$-proches (de la projection dans la direction de $H_x$), un vecteur horizontal pour $f_{x'}$ est $Cr(x)^{-1}$-proche d'un vecteur horizontal pour $f_x$. Et comme $f_x$ et $f_{x'}$ sont des submersions $Cr(x)^{-1}$-quasi riemanniennes, on récupère

$$\left|\left|Df_x(W')\right| - \left|W'\right|\right| \leq Cr(x)^{-1}\left|W'\right|$$

et

$$\left||W| - \left|W'\right|\right| \leq Cr(x)^{-1}\left|W'\right|.$$

En écrivant

$$\begin{aligned} & \left|\left|D\phi_{x,x'}W\right| - |W|\right| \\ \leq\ & \left|\left|D\phi_{x,x'}(Df_{x'}W')\right| - \left|Df_xW'\right|\right| + \left|\left|Df_xW'\right| - \left|W'\right|\right| + \left|\left|W'\right| - |W|\right| \\ \leq\ & \left|D\phi_{x,x'}(Df_{x'}W') - Df_xW'\right| + \left|\left|Df_xW'\right| - \left|W'\right|\right| + \left|\left|W'\right| - |W|\right| \end{aligned}$$

et en utilisant (3.30), on obtient donc

$$\left|\left|D\phi_{x,x'}(W)\right| - |W|\right| \leq Cr(x)^{-1}|W|,$$

ce qui prouve que $\phi_{x,x'}$ est une $Cr(x)^{-1}$-quasi-isométrie.

Les estimées d'ordre supérieur découlent de celles sur $f_x$ et $f_{x'}$, grâce à la formule (3.27) : les bornes sur les dérivées covariantes de la courbure assurent que $\exp_x^* g$ (resp. $\exp_{x'}^* g$)) est proche de la métrique plate $g_x$ (resp. $g_{x'}$) en topologie $C^\infty$, de sorte que les estimées pour l'une et l'autre métrique sont équivalentes ; ainsi, on peut voir $\exp_x$, $\exp_{x'}$ et $\tau_u$ comme des isométries. ■

On aura également besoin de comparer entre elles ces applications, d'où l'utilité du lemme suivant, qui découle immédiatement du lemme précédent.

Lemme 3.2.18 (Proximité des fibrations locales II) — *On reprend les hypothèses et notations du lemme 3.2.17 et on se donne trois points $x$, $x'$ et $x''$ dans $M\backslash K$, à distance majorée par $\kappa r(x)$. Là où cela a un sens, on a*

$$\left|\phi_{x,x''} - \phi_{x,x'} \circ \phi_{x',x''}\right| \leq C.$$

*et*

$$\left|D\phi_{x,x''} - D\phi_{x,x'} \circ D\phi_{x',x''}\right| \leq Cr(x)^{-1}.$$

**Preuve.**
Sur l'intersection de $\Omega_x$, $\Omega_{x'}$ et $\Omega_{x''}$, on peut écrire

$$\left|f_x - \phi_{x,x'} \circ f_{x'}\right| \leq C \quad \text{et} \quad \left|f_{x'} - \phi_{x',x''} \circ f_{x''}\right| \leq C.$$

Comme $\phi_{x,x'}$ est une quasi-isométrie, il vient :

$$\left|f_x - \phi_{x,x'} \circ \phi_{x',x''} \circ f_{x''}\right| \leq \left|f_x - \phi_{x,x'} \circ f_{x'}\right| + \left|\phi_{x,x'} \circ (f_{x'} - \phi_{x',x''} \circ f_{x''})\right| \leq C.$$

D'autre part, on dispose de la majoration

$$\left|f_x - \phi_{x,x''} \circ f_{x''}\right| \leq C,$$

de sorte qu'on trouve par l'inégalité triangulaire

$$\left|(\phi_{x,x''} - \phi_{x,x'} \circ \phi_{x',x''}) \circ f_{x''}\right| \leq C,$$

Le premier résultat suit de la surjectivité de $f_{x''}$ sur la zone considérée. L'application $f_{x''}$ étant une submersion, le même raisonnement fonctionne avec les différentielles. ■

### 3.2.7 Recollement des fibrations locales.

Maintenant, on va modifier légèrement les fibrations locales de façon à les rendre compatibles. La procédure est celle de [CFG], adaptée et simplifiée dans notre cadre. Commençons par un lemme dont le principe sera utilisé abondamment dans la preuve suivante.

Lemme 3.2.19 (Ajustement des fibrations locales I) — *On se place toujours dans le cadre de la proposition 3.2.16 et on se donne deux points $x$ et $x'$ de $M\backslash K$ qui vérifient $\alpha r(x) \leq d(x,x') \leq \beta r(x)$ pour des réels $0 < \alpha < \beta < 1$. On suppose que sur $B(x, \gamma r(x))$ et $B(x', \gamma r(x'))$ des fibrations $f_x$ et $f_{x'}$ telles que celles de 3.2.16 sont définies ; on suppose aussi que $B(x, \delta r(x))$ et $B(x', \delta r(x'))$ s'intersectent, avec $0 < \delta < \gamma$, et qu'une application $\phi_{x',x}$ comme dans 3.2.17 y est définie. On peut alors construire une fibration $\tilde{f}_{x'}$ sur $B(x', \delta r(x'))$, qui vérifie les mêmes propriétés que $f_{x'}$, mais telle qu'en plus :*

$$\tilde{f}_{x'} = \phi_{x',x} \circ f_x$$

*sur $B(x, \delta r(x)) \cap B(x', \delta r(x'))$. De plus, cette nouvelle fibration coïncide avec l'ancienne en dehors de $B(x, \gamma r(x))$ et partout où on avait déjà $f_{x'} = \phi_{x',x} \circ f_x$ et on a*

$$\forall\, i \in [0,2],\ \left|\nabla^i(\tilde{f}_{x'} - f_{x'})\right| \leq C r(x)^{-i}.$$

**Preuve.**
On pose

$$\tilde{f}_{x'}(y) = \lambda(y)\phi_{x',x}(f_x(y)) + (1 - \lambda(y))f_{x'}(y)$$

avec

$$\lambda(y) = \theta\left(\frac{f_x(y)}{r(x)}\right)$$

où $\theta : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow [0,1]$ est une fonction de troncature qui vaut 1 sur la boule de centre 0 et de rayon $\delta$, qui vaut 0 hors de la boule de centre 0 et de rayon $\gamma$. On remarquera l'estimée

$$\left|\nabla^k \lambda\right| \leq C_k r(x)^{-k},$$

découlant des bornes sur les dérivées de $f_x$. Les estimées annoncées s'obtiennent immédiatement en dérivant la relation

$$\tilde{f}_{x'}(y) - f_{x'}(y) = \lambda(y)\left(\phi_{x',x} \circ f_x(y)) - f_{x'}(y)\right).$$

■

Lemme 3.2.20 (Ajustement des fibrations locales II) — *Les hypothèses sont les mêmes qu'au lemme précédent. On se donne trois points $x$, $x'$ et $x''$ de $M\backslash K$ qui vérifient $\alpha r(x) \leq d(x,x')$, $d(x',x'')$, $d(x,x'') \leq \beta r(x)$ pour des réels $0 < \alpha < \beta < 1$. On se donne des difféomorphismes $\phi_{x',x}$, $\phi_{x,x''}$ et $\phi_{x',x''}$ comme dans 3.2.18 ; on suppose aussi que $B(x, \delta r(x))$, $B(x', \delta r(x'))$ et $B(x'', \delta r(x''))$ s'intersectent, avec $0 < \delta < \gamma$. On peut alors construire un difféomorphisme $\tilde{\phi}_{x',x''}$, qui vérifie les mêmes propriétés que $\phi_{x',x''}$, mais tel qu'en plus :*

$$\tilde{\phi}_{x',x''} = \phi_{x',x} \circ \phi_{x,x''}$$

*sur $f_{x''}(B(x, \delta r(x)) \cap B(x', \delta r(x')) \cap B(x'', \delta r(x''))$. De plus, ce nouveau difféomorphisme coïncide avec l'ancien en dehors de $B(x'', \gamma r(x''))$ et partout où on avait déjà $\phi_{x',x''} = \phi_{x',x} \circ \phi_{x,x''}$ ; on a en outre*

$$\forall\, i \in [0,2],\ \left|\nabla^i(\tilde{\phi}_{x',x''} - \phi_{x',x''})\right| \leq C r(x)^{-i}.$$

**Preuve.**
On pose

$$\tilde{\phi}_{x',x''}(v) = \lambda(v)\phi_{x',x} \circ \phi_{x,x''}(v) + (1 - \lambda(v))\phi_{x',x''}(v)$$

avec

$$\lambda(v) = \theta\left(\frac{|v|^2}{r(x)^2}\right)$$

où $\theta : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow [0,1]$ est une fonction de troncature qui vaut 1 sur la boule de centre 0 et de rayon $\delta$, qui vaut 0 hors de la boule de centre 0 et de rayon $\gamma$. Les estimées s'effectuent comme à la preuve précédente. ■

Théorème 3.2.21 (Fibration globale) — *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète telle que*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \text{et} \quad |\nabla \mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-4})$$

*et*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ At^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq \omega(t)t^n$$

*avec $A > 0$ et $\lim_{t\longrightarrow\infty} \omega(t) = 0$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1}r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Alors il existe un compact $K$ de $M$ tel que $M\backslash K$ est muni d'une fibration lisse en cercles $\pi$ au dessus d'une variété ouverte lisse $X$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & M\backslash K \\ & & \Big\downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

*De plus, les fibres sont de longueur comprise entre $C^{-1}$ et $C$ et de seconde forme fondamentale bornée par $Cr^{-2}$. Les constantes $\kappa$ et $C$ dépendent de $n$ et des bornes sur la courbure et le volume des boules à l'infini.*

*Remarque* 3.2.3. La preuve montrera que pour tout point $x$ de $M\backslash K$, on a un difféomorphisme $\psi_x$ entre un voisinage de $\pi(x)$ dans $X$ et un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\psi_x \circ \pi$ est une fibration vérifiant les estimées de (3.2.16).

**Preuve.**
Donnons nous un ensemble maximal de points $x_i$, $i \in I$, tels que pour tous indices les $i \neq j$, $d(x_i, x_j) \geq \kappa r(x_i)/8$. Ceci fournit un recouvrement uniformément localement fini de $M$, par les boules $B(x_i, \kappa r(x_i)/2)$. Pour chaque $i$ de $I$, soit $f_i$ la fibration locale donnée par 3.2.16. On travaillera avec les saturés $\Omega_i(\alpha)$ de boules $B(x_i, \alpha r(x_i))$ pour $f_i$, avec $\alpha$ un paramètre inférieur à $\kappa$. Comme dans [CFG], on partitionne $I$ en paquets $S_1$, ..., $S_N$ tels que deux points dont les indices sont dans un même paquet sont loin : pour deux indices $i \neq j$ de $I$, on a

$$\exists\, a \in [1, N],\ \{i, j\} \subset S_a \Rightarrow d(x_i, x_j) \geq 100\kappa \min(r(x_i), r(x_j)).$$

En particulier, $\Omega_i(\alpha)$ et $\Omega_j(\alpha)$ ne peuvent s'intersecter que si $i$ et $j$ sont dans des paquets différents ; dans ce cas, si le numéro du paquet de $i$ est supérieur à celui de $j$, on note $\phi_{i,j}$ le difféomorphisme fourni par 3.2.17 et $\phi_{j,i}$ son inverse.

Maintenant, on veut améliorer les relations $f_i \approx \phi_{i,j} f_j$ en $f_i = \phi_{i,j} f_j$. On procède à une campagne d'ajustements des fibrations locales de la façon suivante. L'idée consiste à donner une priorité aux paquets de petit numéro en imposant les fibrations $f_i$ des points correspondants à celles des points voisins. Pour ce faire, on se placera sur des zones où plusieurs fibrations sont définies et on modifiera les fibrations pour qu'elles s'ajustent à celle qui a le plus petit numéro. L'ordre dans lequel on procède est important. On va distinguer des étapes, indexées par les parties $\mathcal{A} := \{a_1 < \cdots < a_k\}$ de $[1, N]$. On ordonne ces $2^N$ étapes par ordre croissant de $a_1$, puis par ordre décroissant de $k$, puis par ordre croissant de $a_2$, puis par ordre croissant de $a_3$, etc. Autrement dit, on a

$$\{a_1 < \cdots < a_k\} \prec \{b_1 < \cdots < b_l\}$$

si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

– $a_1 < b_1$ ;
– $a_1 = b_1$ et $k > l$ ;
– $a_i = b_i$ pour $i \leq i_0$ et $k = l$ et $a_{i_0} < b_{i_0}$.

Notons $m_{\mathcal{A}}$ le rang de $\mathcal{A}$ dans cet ordre et notons

$$\alpha_m = \kappa \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2^N}} .$$

Au fur et à mesure de la campagne, on va rétrécir les domaines des fibrations $\Omega_i(\alpha)$ : $\alpha_{m_{\mathcal{A}}}$ mesurera la taille des domaines à l'étape $\mathcal{A}$.

A chaque étape $\mathcal{A} := \{a_1 < \cdots < a_k\}$, on balaye l'ensemble des éléments $\mathcal{I} = (i_1, \cdots, i_k)$ de $S_{a_1} \times \cdots \times S_{a_k}$. A la sous-étape $\mathcal{I}$, on s'intéresse à $\Omega_{\mathcal{I}} := \Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \cdots \cap \Omega_{i_k}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1})$. Il faut remarquer que notre choix de paquets garantit que toutes les intersections $\Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}}) \cap \cdots \cap \Omega_{i_k}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}})$ traitées à une même étape sont disjointes deux à deux (de sorte que les modifications ci-après sont indépendantes, au sein d'une même étape). Essentiellement, on va imposer la fibration $f_{i_1}$ à ses voisines sur $\Omega_{\mathcal{I}}$. Etant donné $2 \leq p \leq k$, on construit $\tilde{f}_{i_p}$ sur $\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1})$ à partir de $f_{i_1}$ et $f_{i_p}$ comme dans 3.2.19, de façon à ce que

– $\tilde{f}_{i_p} = \phi_{i_p,i_1} f_{i_1}$ sur $\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1})$,
– $\tilde{f}_{i_p} = f_{i_p}$ sur $\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \backslash \Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}})$.

On bâtit également, pour $2 \leq p < q \leq k$, $\tilde{\phi}_{i_p,i_q}$ sur $\tilde{f}_{i_q}(\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \Omega_{i_q}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}))$ à partir de $\phi_{i_p,i_1}\phi_{i_1,i_q}$ et $\phi_{i_p,i_q}$, comme dans 3.2.20, de sorte que

– $\tilde{\phi}_{i_p,i_q} = \phi_{i_p,i_1}\phi_{i_1,i_q}$ sur $\tilde{f}_{i_q}(\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \Omega_{i_q}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}}))$,
– $\tilde{\phi}_{i_p,i_q} = \phi_{i_p,i_q}$ sur $\tilde{f}_{i_q}(\Omega_{i_p}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \cap \Omega_{i_q}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}+1}) \backslash \Omega_{i_1}(\alpha_{m_{\mathcal{A}}}))$.

Après ceci, on peut ajouter que là où cela a un sens, on a pour $\{p, q\} \subset [2, k]$

$$\tilde{\phi}_{i_q,i_p}\tilde{f}_{i_p} = \phi_{i_q,i_1}\phi_{i_1,i_p}\phi_{i_p,i_1} f_{i_1} = \phi_{i_q,i_1} f_{i_1} = \tilde{f}_{i_q}.$$

On oublie maintenant les tildes. On vient de garantir que sur $\Omega_{\mathcal{I}}$, pour tous les indices $i, j$ concernés, on a $f_i = \phi_{i,j} f_j$.

On effectue ces opérations pour tous les $\mathcal{I}$ possibles (ce qui est fait à chaque $\mathcal{I}$ est indépendant), puis on passe à l'étape suivante dans l'ordre décrit ci-dessus.

Au moment où on passe d'une étape du type $\{a_1 < \cdots\}$ à une étape du type $\{b_1 < \cdots\}$, avec $a_1 \neq b_1$, on peut remarquer que les fibrations $f_i$ et les difféomorphismes $\phi_{i,j}$ sont définitivement fixés sur les ouverts dont le numéro est dans le paquet $S_{a_1}$ : en effet, le procédé de barycentre des lemmes 3.2.19 et 3.2.20 ne change pas ce qui est déjà bien. Ainsi, sur ces zones, on s'est assuré définitivement des *égalités* $f_i = \phi_{i,j} f_j$.

De même au moment où on passe d'une étape du type $\{a_1 < \cdots < a_k\}$ à une étape du type $\{a_1 < \cdots < b_{k-1}\}$, les fibrations $f_i$ et les difféomorphismes $\phi_{i,j}$ sont définitivement fixés sur les parties du type $\Omega_{\mathcal{I}}$, où $\mathcal{I}$ est un $k$-uplet commençant par un élément du paquet $S_{a_1}$. Ainsi, sur ces intersections d'ordre $k$, on s'est assuré des *égalités* $f_i = \phi_{i,j} f_j$ et le travail sur les intersections d'ordre $k-1$ ne perturbera pas ce qui a déjà été fait.

Après cette campagne d'ajustements, on a des fibrations locales $f_i$ sur les ouverts $\Omega_i := \Omega_i(\kappa/2)$ ainsi que des difféomorphismes $\phi_{i,j}$ tels que $\phi_{i,j} \circ f_j = f_i$ sur $\Omega_i \cap \Omega_j$. On

dispose des mêmes estimées qu'initialement (on a effectué un nombre fini d'opérations préservant les estimées, à constante près).

Définissons une relation d'équivalence par : $x$ et $y$ sont en relation s'il existe $i$ tel que $x$ et $y$ appartiennent à $\Omega_i$ et $f_i(x) = f_i(y)$. On appelle $X$ l'espace topologique quotient et $\pi$ la projection associés. Les applications $f_i$ passent au quotient en des homéomorphismes (de leur domaine sur leur image) $\check{f}_i$ qui donnent à $X$ une structure de $(n-1)$-variété ouverte : pour chaque couple $i, j$ tel que cela a un sens, $\check{f}_i \check{f}_j{}^{-1} = \phi_{i,j}$ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$. Par construction, $\pi$ est alors une fibration lisse. ■

### 3.2.8 Géométrie de la fibration en cercles.

Dans ce paragraphe, on se place sur une variété riemannienne complète connexe $(M^n, g)$, $n \geq 4$, avec

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \text{et} \quad |\nabla \mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-4}),$$

$$\forall\, i \geq 2,\ \left|\nabla^i \mathrm{Rm}\right| = \mathcal{O}(r^{-2-i})$$

et

$$\forall\, t \geq 1,\ At^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq \omega(t) t^n$$

avec $A > 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \omega(t) = 0$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1} r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

Nous avons construit plus haut une fibration en cercles $\pi : M \backslash K \longrightarrow X$. On peut moyenner la métrique $g$ le long des fibres de cette fibration. En effet, étant donné un point $x$ de $M \backslash K$, on peut choisir un champ de vecteurs unitaires $V$, défini sur un voisinage saturé de $x$ et tangent aux fibres de $\pi$ (on a deux possibilités différant d'un signe). Un tel champ de vecteurs est dit vertical. Soit $\phi_t$ le flot de $V$. Notons $l_x$ la longueur de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$. On définit un produit scalaire sur $T_x M$ par

$$h_x := \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} \phi_t^* g dt.$$

Cette définition est indépendante du choix de $V$. On obtient ainsi une métrique riemannienne $h$ sur $M \backslash K$ et les flots $\phi_t$ (comme ci-dessus) sont des isométries pour $h$. On veut estimer la proximité de $h$ à $g$ et ceci passe par quelques estimations.

On va commencer par montrer qu'un champ vertical unitaire $V$ est presque parallèle et presque de Killing.

Lemme 3.2.22 — *La dérivée covariante de $V$ s'estime par*

$$|\nabla V| \leq C_1 r^{-2}.$$

*et pour tout $k \geq 2$, il existe une constante $C_k$ telle que :*

$$\left|\nabla^k V\right| \leq C_k r^{-k}.$$

**Preuve.**
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ l'une des fibrations locales définies au voisinage du point d'étude. Par construction, on a $df(V) = 0$, d'où en dérivant :

$$\nabla^2 f(V, .) = -df(\nabla V). \tag{3.31}$$

Comme $V$ est de norme constante, on a

$$(\nabla V, V) = 0 \tag{3.32}$$

d'où, à l'aide de (3.2.16) : $|\nabla V| \leq C\left|\nabla^2 f\right| \leq Cr^{-2}$. On procède ensuite par récurrence en supposant le résultat vrai jusqu'à l'ordre $k-1$. En dérivant $k-1$ fois (3.31), on trouve une formule du type

$$df(\nabla^k V) = \sum_{i=1}^{k-1} \nabla^{1+k-i} f * \nabla^i V + \sum_{i=0}^{k-1} \nabla^{1+k-i} f * \nabla^i V,$$

ce qui permet d'estimer la composante orthogonale aux fibres de $\nabla^k V$ par

$$\left|\nabla^k V^{\perp}\right| \leq C_k \sum_{i=1}^{k-1} \left|\nabla^{1+k-i} f\right| \left|\nabla^i V\right| + C_k \sum_{i=0}^{k-1} \left|\nabla^{1+k-i} f\right| \left|\nabla^i V\right|.$$

Par hypothèse de récurrence et (3.2.16), il vient : $\left|\nabla^k V^{\perp}\right| \leq C_k(r^{-k} + r^{-k}) \leq C_k r^{-k}$. D'autre part, en dérivant (3.32), on voit que

$$\left|(\nabla^k V, V)\right| \leq C_k \sum_{i=1}^{k-1} \left|\nabla^{k-i} V\right| \left|\nabla^i V\right|,$$

d'où par hypothèse de récurrence : $\left|(\nabla^k V, V)\right| \leq C_k r^{-k}$. Au final, on a bien $\left|\nabla^k V\right| \leq C_k r^{-k}$. ■

LEMME 3.2.23 — *On a $|L_V g| \leq C_0 r^{-2}$ et pour tout entier $k \geq 1$ :*

$$\left|\nabla^k L_V g\right| \leq C_k r^{-1-k}.$$

**Preuve.**
Pour tous champs de vecteurs $X$ et $Y$, on a $L_V g(X, Y) = (\nabla_X V, Y) + (\nabla_Y V, X)$, donc si $k$ est un entier naturel, $\left|\nabla^k L_V g\right|$ s'estime par $\left|\nabla^{k+1} V\right|$. ■

Si $\phi^t$ désigne le flot de $V$, on s'intéresse à la famille de métriques définie par $g_t := \phi^{t*} g$, de connexion de Levi-Civita $\nabla^t$ et de courbure $\mathrm{Rm}^t$. D'abord, une jolie formule.

LEMME 3.2.24 — *Si $X$ et $Y$ sont des champs de vecteurs, on a*

$$\frac{d}{dt}\nabla^t_X Y = \mathrm{Rm}^t(X,V)Y - \nabla^{t,2}_{X,Y}V.$$

**Preuve.**
La connexion $\nabla^t$ est obtenue en transportant la connexion $\nabla$ par l'isométrie $\phi^t$ :

$$\nabla^t_X Y = \phi^{t*}\nabla_{\phi^t_* X}\phi^t_* Y. \tag{3.33}$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt}\phi^t_*\nabla^t_X Y = \frac{d}{dt}\nabla_{\phi^t_* X}\phi^t_* Y,$$

d'où

$$\phi^t_*[V,\nabla^t_X Y] + \phi^t_*\frac{d}{dt}\nabla^t_X Y = \nabla_{[V,\phi^t_* X]}\phi^t_* Y + \nabla_{\phi^t_* X}[V,\phi^t_* Y],$$

ce qui, avec (3.33) et l'invariance de $V$ sous le flot, se simplifie en

$$\frac{d}{dt}\nabla^t_X Y = \nabla^t_{[V,X]}Y + \nabla^t_X[V,Y] - [V,\nabla^t_X Y].$$

On développe et on regarde :

$$\frac{d}{dt}\nabla^t_X Y = \nabla^t_{[V,X]}Y + \nabla^t_X\nabla^t_V Y - \nabla^t_X\nabla^t_Y V - \nabla^t_V\nabla^t_X Y + \nabla^t_{\nabla^t_X Y}V = \mathrm{Rm}^t(X,V)Y - \nabla^{t,2}_{X,Y}V.$$

■

Ceci donne un contrôle sur les dérivées covariantes des métriques $g_t$.

LEMME 3.2.25 — *Etant donné $t_0 > 0$, on a pour $t \le t_0$ :*

$$\begin{aligned} |g_t - g| &\le C_0 r^{-2}, \\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\nabla^k g_t\right| &\le C_k r^{-1-k}, \end{aligned}$$

*où les constantes $C_i$ dépendent de $t_0$, des bornes sur les dérivées de la courbure et des bornes sur la fibration (cf. 3.2.16).*

**Preuve.**
Si $X$ est un champ de vecteurs, on a par définition de la dérivée de Lie :

$$\frac{d}{dt}g_t(X,X) = (\phi^{t*}L_V g)(X,X)$$

donc en notant $\mathcal{L}$ le supremum de $|L_V g|$ sur la fibre considérée, on obtient

$$-\mathcal{L}g_t(X,X) \le \frac{d}{dt}g_t(X,X) \le \mathcal{L}g_t(X,X)$$

d'où en intégrant :

$$g(X,X)e^{-\mathcal{L}t} \le g_t(X,X) \le g(X,X)e^{\mathcal{L}t}.$$

Le lemme 3.2.23 borne $\mathcal{L}$ :

$$g(X,X)e^{-Cr^{-2}} \leq g_t(X,X) \leq g(X,X)e^{Cr^{-2}},$$

d'où la première estimation. Donnons nous maintenant trois champs de vecteurs $X$, $Y$, $Z$. On a

$$(\nabla^t_X g_t)(Y,Z) = 0 = X \cdot g_t(Y,Z) - g_t(\nabla^t_X Y, Z) - g_t(Y, \nabla^t_X Z),$$

et

$$(\nabla_X g_t)(Y,Z) = X \cdot g_t(Y,Z) - g_t(\nabla_X Y, Z) - g_t(Y, \nabla_X Z),$$

donc, si on note $A^t$ le tenseur $\nabla^t - \nabla$, il vient

$$(\nabla_X g_t)(Y,Z) = g_t(A^t(X,Y),Z) + g_t(Y, A^t(X,Z)).$$

On retiendra l'écriture suivante :

$$\nabla g_t = g_t * A^t. \tag{3.34}$$

La formule du lemme 3.2.24 nous apprend que

$$A^t = \int_0^t (\mathrm{Rm}^s(.,V) - \nabla^{s,2}V)ds.$$

Par invariance de la courbure sous isométries, on a

$$\mathrm{Rm}^t = \phi^{t*}\,\mathrm{Rm} \tag{3.35}$$

et grâce à (3.33) joint à l'invariance de $V$ sous le flot,

$$\nabla^{t,2}V = \phi^{t*}\nabla^2 V. \tag{3.36}$$

On dispose de bornes sur $g_t$, Rm et $\nabla^2 V$ : (3.33) conduit à $\left|\mathrm{Rm}^t\right| \leq Cr^{-2}$ (et même $r^{-3}$), $\left|\nabla^{t,2}V\right| \leq Cr^{-2}$ et $\left|A^t\right| \leq Cr^{-2}$.

Supposons maintenant qu'on ait montré que pour un certain $k \geq 1$, pour $0 \leq i \leq k-1$ et $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned} \left|\nabla^i(g_t - g)\right| &\leq Cr^{-1-i} \\ \left|\nabla^i \mathrm{Rm}^t\right| &\leq Cr^{-2-i} \\ \left|\nabla^i \nabla^{t,2}V\right| &\leq Cr^{-2-i} \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\forall\, t \leq t_0,\ \forall\, i \in [0, k-1],\ \left|\nabla^i A^t\right| \leq Cr^{-2-i}.$$

Soit $t \leq t_0$. En dérivant (3.34), on obtient la formule

$$\nabla^k g_t = \sum_{i=0}^{k-1} \nabla^{k-1-i} g_t * \nabla^i A^t.$$

Par hypothèse de récurrence, il vient $\left|\nabla^k g_t\right| \leq Cr^{-1-k}$. Pour continuer, on a besoin d'estimer $\left|\nabla^{t,i} A^t\right|$, $i \leq k-1$. Pour ce faire, on décompose la connexion $\nabla^t$ en $\nabla + A^t$. Ceci permet de borner $\left|\nabla^{t,i} A^t\right|$ par une somme d'un nombre borné de termes de la forme

$$\left(\prod_{\alpha=0}^{i-1} \left|\nabla^\alpha A^t\right|^{m_\alpha}\right) \left|\nabla^\beta A^t\right|$$

avec des entiers naturels $m_\alpha$, $\beta$ vérifiant

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1} (1+\alpha) m_\alpha + \beta = i.$$

Par hypothèse de récurrence, chacun de ces termes est borné par $Cr^{-(2+\alpha)m_\alpha - 2 - \beta} \leq Cr^{-2-i}$, donc

$$\left|\nabla^{t,i} A^t\right| \leq Cr^{-2-i}.$$

Maintenant, en écrivant $\nabla = \nabla^t - A^t$, on estime $\left|\nabla^k \operatorname{Rm}^t\right|$ par une somme d'un nombre borné de termes de la forme

$$\left(\prod_{\alpha=0}^{k-1} \left|\nabla^{t,\alpha} A^t\right|^{m_\alpha}\right) \left|\nabla^{t,\beta} \operatorname{Rm}^t\right|$$

avec des entiers naturels $m_\alpha$, $\beta$ vérifiant

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1} (1+\alpha) m_\alpha + \beta = k.$$

Par (3.35) et (3.33), on peut estimer $\left|\nabla^{t,\beta} \operatorname{Rm}^t\right|$ par $\left|\nabla^\beta \operatorname{Rm}\right|$ et donc par $r^{-2-\beta}$. Au final, on trouve $\left|\nabla^k \operatorname{Rm}^t\right| \leq Cr^{-2-k}$. En procédant de même, on obtient $\left|\nabla^k \nabla^{t,2} V\right| \leq Cr^{-2-k}$ et on conclut par le principe de récurrence. ■

On aura aussi besoin d'estimer la longueur des fibres, donnée par la fonction $l$.

LEMME 3.2.26 — *On a $|dl| \leq C_1 r^{-2}$ et pour tout $k \geq 2$ :*

$$\left|\nabla^k l\right| \leq C_k r^{-k}$$

**Preuve.**
Par construction, on dispose de l'identité

$$\phi^{l(x)}(x) = x, \tag{3.37}$$

valable en tout point $x$ de $M \backslash K$. En dérivant, on trouve $dl \otimes V + T\phi^l = id$ et si l'on considère le produit scalaire avec $V$, il vient $dl = (g - g_l)(V, .)$. En dérivant cette expression, on trouve

$$\nabla^k l = \sum_{i=0}^{k-1} \nabla^i (g - g_l) * \nabla^{k-1-i} V,$$

d'où, avec (3.2.25), (3.2.22) et la borne sur $l$ : $\left|\nabla^k l\right| \leq Cr^{-k}$. ■

Ces estimations nous permettent de contrôler $h$.

PROPOSITION 3.2.27 — *La métrique $h$ obtenue en moyennant $g$ le long de la fibration en cercles obéit aux estimées*

$$|h - g| \leq C_k r^{-2}$$

*et, pour $k \geq 1$,*

$$\left|\nabla^k h\right| \leq C_k r^{-1-k},$$

*où $C_k$ est une constante dépendant de l'entier naturel $k$, ainsi que des bornes sur la courbure et sur la fibration (cf. 3.2.16).*

**Preuve.**
Par définition de $h$, on a

$$h - g = \frac{1}{l}\int_0^l (g_t - g)dt$$

D'où la première estimée, avec (3.2.25). Dérivons :

$$\nabla h = \frac{dl}{l} \otimes (g_l - h) + \frac{1}{l}\int_0^l \nabla g_t dt.$$

En fait, pour tout entier $k \geq 1$, on obtient par récurrence :

$$\nabla^k h = \sum_{i=1}^{k} C_k^i \frac{\nabla^i l}{l} \otimes \nabla^{k-i}(g_l - h) + \frac{1}{l}\int_0^l \nabla^k g_t dt.$$

(3.2.25) et (3.2.26) donnent alors par récurrence : $\left|\nabla^k h\right| \leq Cr^{-1-k}$. ■

COROLLAIRE 3.2.28 — *La courbure de $h$ est à décroissance cubique.*

**Preuve.**
Posons $\nabla^h = \nabla^g + A$ et observons la formule

$$\mathrm{Rm}_h(X,Y) = \mathrm{Rm}_g(X,Y) + \nabla^g_Y A(X) - \nabla^g_X A(Y) + A(Y)A(X) - A(X)A(Y).$$

Or on a $|\mathrm{Rm}_g| \leq Cr^{-3}$ et la proposition 3.2.27 fournit $|A| \leq Cr^{-2}$ et $|\nabla^g A| \leq Cr^{-3}$. Donc $|\mathrm{Rm}_h| \leq Cr^{-3}$. ■

Maintenant, descendons $h$ en une métrique riemannienne $\check{h}$ sur $X$ : pour tout point $y$ de $X$, pour tout vecteur $w$ de $T_yX$, on choisit un relevé $x$ de $y$ ($\pi(x) = y$) et on pose $\check{h}_y(w,w) = h_x(v,v)$ où $v$ est l'unique relevé de $w$ dans le sous-espace de $T_xM$ qui est normal à $\pi^{-1}(y)$ pour $h$ ; cette définition a un sens parce que les flots $\phi_t$ sont des isométries.

PROPOSITION 3.2.29 — *$X$ est difféomorphe au complémentaire d'une boule dans $\mathbb{R}^{n-1}$, éventuellement quotienté par un sous-groupe fini de $O(n-1)$ et $\check{h}$ est une métrique ALE, d'ordre 1 si $n \geq 5$, d'ordre $\tau$ pour tout $\tau < 1$ si $n = 4$.*

**Preuve.**
Afin d'estimer la courbure de $(X, \check{h})$, on utilise la formule de O'Neill ([Bes]), qui dit que si $Y$ et $Z$ sont des champs de vecteurs unitaires orthogonaux et horizontaux sur $M\backslash K$, alors

$$\mathrm{Sect}_{\check{h}}(\pi_* Y \wedge \pi_* Z) = \mathrm{Sect}_h(Y \wedge Z) + \frac{3}{4} h([Y,Z],V)^2$$

Le premier terme décroît cubiquement par le corollaire 3.2.28. De plus,

$$h([Y,Z],V) = -(\nabla_Y h)(Z,V) - h(Z, \nabla_Y V) + (\nabla_Z h)(Y,V) + h(Y, \nabla_Z V).$$

Par le lemme 3.2.22 et le corollaire 3.2.27, on obtient

$$|h([Y,Z],V)| \leq C r^{-2}.$$

D'où :

$$\left|\mathrm{Sect}_{\check{h}}(\pi_* Y \wedge \pi_* Z)\right| \leq C r^{-3}.$$

Et comme la croissance du volume des boules dans $(X, \check{h})$ est maximale, cette décroissance cubique de la courbure permet d'appliquer le résultat de [BKN], rappelé dans l'introduction (théorème 0.0.6). ■

### 3.2.9 Bilan

On a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2.30 — *Soit $(M^n, g)$, $n \geq 4$, une variété riemannienne complète, connexe, dont la courbure vérifie*

$$|\mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-3}) \quad \text{et} \quad |\nabla \mathrm{Rm}| = \mathcal{O}(r^{-4}),$$

*ainsi que*

$$\forall\, i \geq 2,\ \left|\nabla^i \mathrm{Rm}\right| = \mathcal{O}(r^{-2-i})$$

*et dont le volume des boules vérifie*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ A t^{n-1} \leq \mathrm{vol}\, B(x,t) \leq \omega(t) t^n$$

*avec $A > 0$ et $\lim_{t \longrightarrow \infty} \omega(t) = 0$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1} r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Alors il existe un compact $K$ de $M$, une boule $B$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, un sous-groupe fini $G$ de $O(n-1)$ et une fibration en cercles $\pi : M\backslash K \longrightarrow (\mathbb{R}^{n-1}\backslash B)/G$. De plus, la métrique $g$ vérifie*

$$\left|g - \pi^* \tilde{g} - \eta^2\right| = \mathcal{O}(r^{-2})$$

*et*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\nabla^k(g - \pi^*\tilde{g} - \eta^2)\right| = \mathcal{O}(r^{-1-k})$$

*où $\eta^2$ mesure la projection le long des fibres et $\tilde{g}$ est une métrique ALE sur $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre 1 si $n \geq 5$, d'ordre $\tau$ pour tout $\tau < 1$ si $n = 4$.*

En se rappelant de la première partie de ce mémoire, on arrive au

THÉORÈME 3.2.31 — *Soit $(M^n, g)$, $n \geq 4$, une variété riemannienne complète, connexe, Ricci-plate, dont la courbure est dans $L^{\frac{n}{2}}(rdvol)$ et dont le volume des boules vérifie*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ At^{n-1} \leq \operatorname{vol} B(x,t) \leq \omega(t)t^n$$

*avec $A > 0$ et $\lim_{t\longrightarrow\infty} \omega(t) = 0$. On suppose aussi qu'il existe une constante $c > 1$ telle que si $\gamma$ est un lacet géodésique basé en $x$ et de longueur $L \leq c^{-1}r(x)$, alors l'holonomie $H$ du lacet vérifie*

$$|H - \mathrm{id}| \leq \frac{cL}{r(x)}.$$

*Alors il existe un compact $K$ de $M$, une boule $B$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, un sous-groupe fini $G$ de $O(n-1)$ et une fibration en cercles $\pi : M\backslash K \longrightarrow (\mathbb{R}^{n-1}\backslash B)/G$. De plus, la métrique $g$ vérifie*

$$\left|g - \pi^*\tilde{g} - \eta^2\right| = \mathcal{O}(r^{-2})$$

*et*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\nabla^k(g - \pi^*\tilde{g} - \eta^2)\right| = \mathcal{O}(r^{-1-k})$$

*où $\eta^2$ mesure la projection le long des fibres et $\tilde{g}$ est une métrique ALE sur $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre 1 si $n \geq 5$, d'ordre $\tau$ pour tout $\tau < 1$ si $n = 4$.*

*Remarque* 3.2.4. L'hypothèse intégrale sur la courbure est par exemple garantie par une décroissance surquadratique.

Dans le cadre des instantons gravitationnels, le résultat est le suivant.

THÉORÈME 3.2.32 — *Soit $(M^4, g)$ une variété hyperkählerienne complète, connexe, dont la courbure est dans $L^2(rdvol)$ et dont le volume des boules vérifie*

$$\forall\, x \in M,\ \forall\, t \geq 1,\ At^3 \leq \operatorname{vol} B(x,t) \leq Bt^3$$

*avec $B \geq A > 0$. Alors il existe un compact $K$ de $M$, une boule $B$ de $\mathbb{R}^3$, un sous-groupe fini $G$ de $O(3)$ et une fibration en cercles $\pi : M\backslash K \longrightarrow (\mathbb{R}^3\backslash B)/G$. De plus, la métrique $g$ vérifie*

$$\left|g - \pi^*\tilde{g} - \eta^2\right| = \mathcal{O}(r^{-2})$$

*et*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\nabla^k(g - \pi^*\tilde{g} - \eta^2)\right| = \mathcal{O}(r^{-1-k})$$

*où $\eta^2$ mesure la projection le long des fibres et $\tilde{g}$ est une métrique ALE sur $\mathbb{R}^3$, d'ordre $\tau$ pour tout $\tau < 1$.*

Terminons par quelques commentaires sur la topologie à l'infini. Quitte à considérer séparément les bouts, on peut supposer que $M^n$ n'a qu'un bout. On s'intéresse à la topologie de l'espace connexe $E = M\backslash K$ qui, d'après le théorème 3.2.30, fibre en cercles au-dessus de $X = \mathbb{R}^{n-1}\backslash B/G$. A l'aide de la projection $p : \bar{X} = \mathbb{R}^{n-1}\backslash B \longrightarrow X = \mathbb{R}^{n-1}\backslash B/G$, on peut tirer en arrière cette fibration $\pi$ en une fibration en cercles $\bar{\pi} : \bar{E} \longrightarrow \bar{X}$. L'espace $\bar{E}$ est le revêtement fini de $E$, d'ordre $|G|$, défini par

$$\bar{E} = \left\{(\bar{x}, e) \in \bar{X} \times E,\, p(\bar{x}) = \pi(e)\right\}$$

et $\bar{\pi}$ est donnée par la projection sur le premier facteur ($pr_1$). On peut résumer ceci par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} & \xrightarrow{(pr_2)} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \bar{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Bien sûr, $\bar{X} = \mathbb{R}^{n-1}\backslash B$ a même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-2}$. La suite exacte longue d'homotopie associée à la fibration $\bar{\pi}$

$$\cdots \to \pi_i(\mathbb{S}^1) \to \pi_i(\bar{E}) \to \pi_i(\bar{X}) \to \pi_{i-1}(\mathbb{S}^1) \to \cdots$$

fournit immédiatement

$$\forall\, i \geq 3,\, \pi_i(\bar{E}) = \pi_i(\mathbb{S}^{n-2})$$

et

$$0 \to \pi_2(\bar{E}) \to \pi_2(\mathbb{S}^{n-2}) \to \mathbb{Z} \to \pi_1(\bar{E}) \to \pi_1(\mathbb{S}^{n-2}) \to 0.$$

Quand la dimension $n$ vaut au moins 5, on obtient donc $\pi_2(E) = \pi_2(\bar{E}) = 0$ et $\pi_1(\bar{E}) = \mathbb{Z}$.

En dimension 4, la suite exacte est

$$0 \to \pi_2(\bar{E}) \to \mathbb{Z} \stackrel{\phi_m}{\to} \mathbb{Z} \to \pi_1(\bar{E}) \to 0,$$

où $\phi_m$ est la multiplication par un entier $m$. Il y a deux cas :

- si $m = 0$, $\pi_2(E) = \pi_2(\bar{E}) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1(\bar{E}) = \mathbb{Z}$ ;
- sinon, $\pi_2(E) = \pi_2(\bar{E}) = 0$ et $\pi_1(\bar{E}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

On peut être plus précis ! Les fibrations en cercles sur $\bar{X}$ sont les mêmes que les fibrations en cercles sur $\mathbb{S}^{n-2}$. Une décomposition en hémisphères de $\mathbb{S}^{n-2}$ permet de voir une fibration en cercles sur $\mathbb{S}^{n-2}$ comme recollement de deux fibrations triviales $\mathbb{B}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ ; l'application de recollement s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}^{n-3} \times \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^{n-3} \times \mathbb{S}^1 \\ (x, e^{i\theta}) & \mapsto & (x, \psi(x, e^{i\theta})) \end{array}$$

où $\psi(x, .)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1$ en tout point $x$. On peut se donner un point base $(x_0, 1)$ dans $\mathbb{S}^{n-3} \times \mathbb{S}^1$ et le supposer fixé, quitte à effectuer une rotation de $\mathbb{S}^1$ : $\psi(x_0, 1) = 1$. On peut également supposer que $\psi(x_0, .)$ est un homéomorphisme direct

de $\mathbb{S}^1$, quitte à renverser l'orientation de l'un des facteurs $\mathbb{S}^1$. Alors, par connexité de $\mathbb{S}^{n-3}$, $\psi(x,.)$ est un homéomorphisme direct pour tout $x$. On peut remarquer qu'en tout point $x$ de $\mathbb{S}^{n-3}$, $\tilde{\psi}(x,.) := \psi(x,.) \cdot \psi(x,1)^{-1}$ est un élément de $\mathrm{Homeo}_*^+(\mathbb{S}^1)$, i.e. un homéomorphisme direct de $\mathbb{S}^1$ qui fixe 1. Comme $\mathrm{Homeo}_*^+(\mathbb{S}^1)$ se rétracte sur l'identité de $\mathbb{S}^1$, on peut déformer $\psi$ de façon à se ramener au cas où $\tilde{\psi}(x,.)$ est l'identité de $\mathbb{S}^1$ en chaque point $x$. Dans ce cas, en tout point $x$, $\psi(x,.)$ est constant à $\psi(x,1)$, de sorte que $\psi$ peut maintenant se voir comme une application continue de $\mathbb{S}^{n-3}$ dans $\mathbb{S}^1$, envoyant un certain point base $x_0$ sur 1. A homotopie près, on récupère un élément de $\pi_{n-3}(\mathbb{S}^1)$.

En dimension $n \geq 5$, $\pi_{n-3}(\mathbb{S}^1)$ est trivial, donc il n'y a qu'une fibration en cercles possible sur $\bar{X} = \mathbb{R}^{n-1}\backslash B \simeq \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{R}_+$ : la fibration triviale d'espace total $\mathbb{R}^{n-1}\backslash B \times \mathbb{S}^1$.

En dimension $n = 4$, $\pi_{n-3}(\mathbb{S}^1)$ est le groupe fondamental du cercle, soit $\mathbb{Z}$, de sorte qu'on a plus de liberté. L'application de recollement $\psi$ se déforme en une application de la forme

$$\psi(x, e^{i\theta}) = e^{im\theta}$$

pour un certain entier naturel $m$. Le cas $m = 0$ correspond à la fibration triviale de $\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{B}^3$. Le cas $m = 1$ est la fibration de Hopf, envoyant $\mathbb{R}^4\backslash\mathbb{B}^4$ sur $\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{B}^3$. Les autres $m$ s'atteignent en quotientant la fibration de Hopf par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (l'action est l'action scalaire du groupe des racines $m$-ième de 1 sur $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$).

Pour résumer, on peut distinguer deux cas de figure.

- Si le groupe fondamental à l'infini (i.e. celui de $M\backslash K$) est fini, alors un revêtement fini de $M\backslash K$ est $\mathbb{R}^4\backslash\mathbb{B}^4$ et la fibration en cercles est obtenue à partir de la fibration de Hopf. Dans ce cas, le $\pi_2$ à l'infini est trivial. C'est typiquement la situation « Taub-NUT ».
- Si au contraire le groupe fondamental à l'infini est infini, un revêtement fini de $M\backslash K$ est $\mathbb{R}^3\backslash\mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^1$ et la fibration en cercles provient de la fibration triviale. Le $\pi_2$ à l'infini est alors $\mathbb{Z}$. C'est la situation dans le cas plat ou dans l'espace de Schwarzschild.

*Remarque* 3.2.5. Dans [PT], il est montré que le cône asymptotique d'une variété $(M^n, g)$ à courbure décroissant surquadratiquement et simplement connexe à l'infini est nécessairement $\mathbb{R}^n$, quand $n$ est différent de 4 ; en dimension 4 les possibilités pour le cône asymptotique sont $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (il est conjecturé que ce dernier cas n'arrive pas). Quand $M$ est simplement connexe à l'infini, notre étude autorise une seule possibilité pour les effondrements de codimension 1 : la dimension est 4 et la fibration est celle de Hopf. C'est cohérent.

# Bibliographie


[A1] U. Abresch, *Lower curvature bounds, Toponogov's theorem, and bounded topology I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 18 (1985), no. 4, 651–670.

[A2] U. Abresch, *Lower curvature bounds, Toponogov's theorem, and bounded topology II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 20 (1987), no. 3, 475–502.

[And] M. T. Anderson, *On the topology of complete manifolds of non-negative Ricci curvature*, Topology 29 (1990), no. 1, 41–55.

[BKN] S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, *On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*, Invent. Math. 97 (1989), no. 2, 313–349.

[Ber] L. Bérard-Bergery, *Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein*, Institut Élie Cartan, 6, 1–60, Inst. Élie Cartan, 6, Univ. Nancy, Nancy, 1982.

[Bes] A. Besse, *Einstein manifolds.* , Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bus] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 2, 213–230.

[BK] P. Buser, H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, 81. Société Mathématique de France, Paris, 1981. 148 pp.

[CGH] D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, M. Herzlich, *Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry*, J. Funct. Anal., vol. 173 (2000), 214-255.

[Car] G. Carron, *$L^2$-cohomologie et inégalités de Sobolev*, Math. Ann. 314 (1999), no. 4, 613–639.

[CH] G. Carron, M. Herzlich, *The Huber theorem for non-compact conformally flat manifolds*, Comment. Math. Helv. 77 (2002), no. 1, 192–220.

[Cha] I. Chavel, *Riemannian geometry - A modern introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[CFG] J. Cheeger, K. Fukaya, M. Gromov, *Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 327–372.

[CG1] J. Cheeger, D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Differential Geom. 6 (1971), 119–128.

[CG2] J. Cheeger, D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 413–443.

[CG] J. Cheeger, M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded. II*, J. Differential Geom. 32 (1990), no. 1, 269–298.

[CGT] J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds.*, J. Differential Geom. 17 (1982), no. 1, 15–53.

[CT] J. Cheeger, G. Tian, *Curvature and injectivity radius estimates for Einstein 4-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 487–525.

[ChH] S. Cherkis, N. Hitchin, *Gravitational instantons of type $D_k$*, Comm. Math. Phys. 260 (2005), no. 2, 299–317.

[Cro] C. Croke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e serie, t.13 (1980), 419-435.

[EJ] G. Etesi, M. Jardim, *Moduli spaces of self dual connections over asymptotically locally flat gravitational instantons.*, arXiv :math.DG/0608597.

[Fuk] K. Fukaya, *Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions*, J. Differential Geom. 25 (1987), no. 1, 139–156.

[GM] S. Gallot, D. Meyer, *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 21 (1988), no. 4, 561–591.

[GW] R. E. Greene, H. Wu, *Gap theorems for noncompact Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 49 (1982), no. 3, 731–756.

[Grig] A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds*, (Russian) Mat. Sb. 182 (1991), no. 1, 55–87; translation in Math. USSR-Sb. 72 (1992), no. 1, 47–77.

[GSC] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, *Stability results for Harnack inequalities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no. 3, 825–890.

[Gril] G. Grillo, *Hardy and Rellich-type inequalities for metrics defined by vector fields*, Potential Anal. 18 (2003), no. 3, 187–217.

[G1] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces* Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. xx+585 pp.

[G2] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Volume and bounded cohomology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 56 (1982), 5–99 (1983).

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu. Textes Mathématiques [Mathematical Texts], 1. CEDIC, Paris, 1981. iv+152 pp.

[Gur] M. Gursky, *Four-manifolds with $\delta W^+ = 0$ and Einstein constants of the sphere*, Math. Ann. 318 (2000), no. 3, 417–431.

[HK] P. Hajlasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Memoirs of the AMS, 688 (2000).

[Haw] S. W. Hawking, *Gravitational instantons*, Phys. Lett. 60A (1977), 81–83.

[Kas] A. Kasue, *A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 21 (1988), no. 4, 593–622.

[Kau] H. Kaul, *Schranken für die Christoffelsymbole*, Manuscripta Math. 19 (1976), no. 3, 261–273.

[K1] P. B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*, J. Differential Geom. 29 (1989), no. 3, 665–683.

[K2] P. B. Kronheimer, *A Torelli-type theorem for gravitational instantons*, J. Differential Geom. 29 (1989), no. 3, 685–697.

[Leb] C. LeBrun, *Complete Ricci-flat Kähler metrics on $\mathbb{C}^n$ need not be flat*, Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), 297–304, Proc. Sympos. Pure Math., 52, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[Li] P. Li, *On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 4, 451–468.

[LT] P. Li, L.F. Tam, *Green's function, harmonic functions and volume comparison*, J. Differential Geom. 41 (1995), 277–318.

[LY] P. Li, S.T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. 156 (1986), no. 3-4, 153–201.

[LS] J. Lott, Z. Shen, *Manifolds with quadratic curvature decay and slow volume growth*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 33 (2000), no. 2, 275–290.

[MSC] P. Maheux, L. Saloff-Coste, *Analyse sur les boules d'un opérateur sous-elliptique*, Math. Ann. 303 (1995), no. 4, 713–740.

[Pet] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer-Verlag, New York, 1998.

[PT] A. Petrunin, W. Tuschmann, *Asymptotical flatness and cone structure at infinity*, Math. Ann. 321 (2001), no. 4, 775–788.

[PRS] S. Pigola, M. Rigoli, A. Setti *Vanishing theorems on Riemannian manifolds, and geometric applications*, J. Funct. Anal. 229 (2005), no. 2, 424–461.

[SC] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices 1992, no. 2, 27–38.

[SS] J. Sha, Z. Shen *Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and quadratically nonnegatively curved infinity*, Amer. J. Math. 119 (1997), no. 6, 1399–1404.

[TV] G. Tian, J. Viaclovsky, *Moduli spaces of critical Riemannian metrics in dimension four*, Adv. Math. 196 (2005), no. 2, 346–372.

[Unn] S. Unnebrink, *Asymptotically flat 4-manifolds*, Differential Geom. Appl. 6 (1996), no. 3, 271–274.