UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SOCIETES, CULTURES, ECHANGES

Année 2011

N° attribué par la bibliothèque

Charles-Ange Laisant.
Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Épistémologie et Histoire des sciences et des techniques

Présentée
et soutenue publiquement par

Jérôme Auvinet

Le 31 octobre 2011, devant le jury ci-dessous

Rapporteurs	Mme Fulvia FURINGHETTI, Professeur des Universités, DIMA Genova
	M. Philippe NABONNAND, Professeur des Universités, Nancy 2
Examinateurs	Mme Catherine GOLDSTEIN, Directrice de recherche CNRS, Paris
	Mme Sylviane SCHWER, Professeur des Universités, Paris Nord
	M. Norbert VERDIER, Maître de conférences, Paris-SUD 11, IUT Cachan

Directeur de thèse :

Mme Évelyne BARBIN, Professeur des Universités, Nantes

Je remercie très sincèrement ma directrice de thèse, Mme Évelyne Barbin, sans qui ce travail n'aurait jamais pu voir le jour. Merci donc pour son aide pendant toutes ces années, ses nombreuses relectures et son écoute bienveillante.

Merci également à Mme Fulvia Furinghetti et M. Philippe Nabonnand d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse, ainsi qu'à Mme Catherine Goldstein, Mme Sylviane Schwer et M. Norbert Verdier qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Merci à l'ensemble des membres du Centre François Viète, à son directeur M. Stéphane Tirard. À François Pineau, Pauline Romera-Lebret et Céline Briée ainsi qu'à toute l'équipe, j'exprime ma profonde sympathie.

Merci également à toutes les personnes rencontrées depuis le début de cette thèse et qui m'ont apporté leurs aides à un moment ou à un autre : M. Jean-Louis Liters, M. René Guitart, M. Martin Zerner, M. Frédéric Metin, M. Christian Boyer, M. Laurent Rollet, M. Jean-Pierre Sauvage, M. Olivier Azzola, M. Daniel Dayen, M. Eric Balbo, M. Serge Mehl, M. Pierre Crepel, et tous ceux qui ont croisé ma route et m'ont apporté leur soutien.

Charles-Ange Laisant (1841-1920)

Table des matières

Introduction

Une étude biographique sur la vie de C.A. Laisant pose des difficultés multiples, dont la première réside dans l'esprit encyclopédique qui fut le sien et qui fait qu'on ne peut aborder un pareil travail sans toucher de près ou de loin à tous les problèmes.
S'il fut l'un des premiers mathématiciens de son temps, ce serait restreindre et compartimenter sa personnalité que de réduire celle-ci à cette formule «le mathématicien (ou le grand mathématicien) C. A. Laisant».
Mais s'en tiendrait-on à ce seul domaine scientifique qu'il faudrait considérer le rôle social qu'il a su lui donner.

Laisant Maurice, "De la députation à l'anarchie", *La rue*, n°9, 1970.[1]

C'est avec cet extrait élogieux que débute la biographie de Charles-Ange Laisant dressée par son petit-fils Maurice en 1970. Ce passage montre cependant les difficultés inhérentes au projet biographique en général[2] et, comme nous avons pu le constater, à la biographie d'un personnage comme Laisant en particulier. La longévité et la multiplicité des facettes de son existence, la durée et la richesse de chacune d'entre-elles (en tant qu'homme politique, que scientifique, directeur de publications ou enseignant) sont les premiers éléments expliquant, dans le cas de Laisant, le problème. C'est pourtant ces mêmes obstacles qui rendent l'entreprise intéressante et cette « microhistoire »[3] pertinente pour l'observation des bouleversements opérés entre la fin du XIX^e^ et le début du XX^e^ siècle[4]. Avec la vie de cet homme, que nous avons choisi d'aborder de façon chronologique[5], il serait possible de multiplier les grilles de lectures de l'époque (scientifique, sociologique, culturelle, politique, épistémologique).

Charles-Ange Laisant est né près de Nantes en 1841, et sera député de la Loire-Inférieure puis de la Seine entre 1876 et 1893, mandats pendant lesquels il acquiert une grande notoriété au plan national. Ceci explique que les travaux biographiques sur le

---

[1] [Laisant M., 1970], p. 70.
[2] François Dosse explique que « Penser tout ramener à la lumière est donc à la fois l'ambition qui guide le biographe, et une aporie qui le guide à l'échec » [Dosse, 2004], p. 57. Sur l'histoire de la biographie, en particulier le renouveau d'intérêt qu'elle suscite depuis les travaux récents en sociologie, nous renvoyons à [Dosse, 2004].
[3] [Kaeser, 2003], p. 143. « le biographe n'éclaire qu'une parcelle réduite du passé historique. Mais en retour, et en fonction des sources utilisées, il obtient un traitement minutieux du détail. » (Ibid.)
[4] Bien que la thèse opposée fut longtemps admise : voir Pierre Bourdieu, "L'illusion biographique", in Bourdieu P., *Raisons pratiques, Sur la théorie de l'action*. Paris, Éd. du Seuil, 1994.
[5] Sur le canon de l'ordre chronologique dans l'œuvre biographique, voir [Dosse, 2004], p. 58.

personnage relèvent d'une part de l'histoire locale pour les plus récents, soucieux de faire sortir l'homme de l'oubli, et d'autre part de dictionnaires ou d'encyclopédies contemporaines à Laisant qui traitent principalement de l'histoire politique (parlementaire) voire syndicaliste du XIX^e^ siècle. Pour les premiers, nous renvoyons au *Dictionnaire biographique de la Loire-Inférieure* ([Jouve, 1895]), au *Répertoire de bio-bibliographies bretonnes* de René Kerviler ([Kerviler, Du Boisrouvray, Le Masne de Chermont, Rouzeau, 1985])[6], à l'ouvrage *Les députés bretons de 1789 à 1983*, ([Pascal, 1983]) et à l'article plus récent « Charles-Ange Laisant, député et mathématicien » de Jean-Pierre Sauvage ([Sauvage, 1994]). Pour les seconds, nous citons les *Dictionnaire*[s] *des parlementaires français* ([Robert, Cougny, 1889], [Joly, 1960]), le *Dictionnaire biographique international des écrivains, des artistes, des membres des sociétés savantes* ([Carnoy, 1903]), le *Dictionnaire biographique du mouvement ouvrier français* ([Maitron, 1964]) et l'article qui lui est consacré dans *La Grande Encyclopédie*[7]. Enfin, ses fonctions de directeur de publications amènent ses proches collaborateurs à évoquer Laisant dans leur nécrologie respective : dans les *Nouvelles annales de mathématiques* ([Bricard, 1920]), *L'Intermédiaire des mathématiciens* ([La direction, 1920]) ou *L'Enseignement mathématique* ([Buhl, 1921]).

Les travaux récents en histoire des mathématiques amènent leur auteur à approcher la figure de Laisant[8]. Pierre Lamandé consacre un article sur son implication dans le milieu éducatif (« Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle: Charles Ange Laisant (1841-1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science », [Lamandé, 2010]). Pourtant, aucun ouvrage n'est dédié intégralement à C.-A. Laisant. De part leur cadre, chacun des travaux précédents peut donc montrer ses limites dans la prise en compte de la globalité du personnage, en particulier dans sa dimension de mathématicien accompli et membre actif de la communauté mathématique. Le travail que nous présentons ici, s'il n'est pas exempt de ce trait, souhaite aborder la figure du mathématicien dans sa quasi-intégralité sans négliger les grands aspects du personnage dans son ensemble.

C'est ainsi que nous traiterons des multiples parcours empruntés par Laisant. L'enchaînement de ses travaux mathématiques en constitue un premier qui couvre principalement la période 1867-1903, de ses premiers écrits en arithmétique et géométrie

[6] Auquel nous ajoutons Le Gourierec Th., *Les candidats députés de la Loire-Inférieure : silhouettes et portraits*, Nantes, Imprimerie administrative de Paul Plédran, 1876.
[7] [Berthelot & al., 1885], t. 21, p. 786-787.
[8] Voir entre autre, [Décaillot-Laulagnet, 1999], [Décaillot, 2002b], [Gispert, 1991], [Furinghetti, 2003], [Ortiz, 2005], [Pineau, 2006], [Romera-Lebret, 2009].

infinitésimale à la diffusion de la méthode des équipollences et des quaternions puis sa réflexion sur la représentation des objets des mathématiques discrètes.

La carrière politique de ce franc-maçon débute avec son mandat de conseiller général à Nantes et se poursuit à l'Assemblée nationale, avant qu'il ne se rapproche du milieu anarcho-syndicaliste après l'épisode boulangiste.

Son implication dans de multiples réseaux scientifiques nationaux, puis internationaux est protéiforme : elle comprend son activisme au sein de sociétés professionnelles comme la Société mathématique de France, d'institution savante comme la Société philomathique de Paris ou d'association comme l'Association française pour l'avancement des sciences. Elle est visible également dans ses fonctions de directeur et de fondateur de revues destinées à des publics variés (*Nouvelles annales de mathématiques*, *L'Intermédiaire des mathématiciens*, *L'Enseignement mathématique*). Elle est également remarquable dans la promotion de lieux d'échanges entre mathématiciens du monde entier avec la création des premiers congrès internationaux de la discipline.

Ses fonctions d'enseignant à partir de 1895 ouvrent la voie vers l'écriture de manuels, la création de *L'Enseignement mathématique* et une réflexion sur l'enseignement en général qui participe au débat du début du XXe siècle autour de la réforme de 1902, et de l'initiation des jeunes enfants en particulier.

Autant de parcours, ou plutôt d'itinéraires que nous retracerons. Itinéraires car ces trajectoires témoignent de véritables changements, s'entremêlent, se chevauchent et s'enchaînent. Le mathématicien et diffuseur féru d'arithmétique porte le projet des rééditions des œuvres de Fermat à l'Assemblée. Le libre-penseur incite le pédagogue à réévaluer le rôle des premiers enseignements chez l'enfant, et à se rapprocher de personnalités comme Francisco Ferrer. L'examinateur à Polytechnique qui a beaucoup publié dans les *Nouvelles annales* s'attelle à la publication de manuels où il dégage des domaines à faire passer dans l'enseignement. Ces quelques exemples montrent les conséquences de tel ou tel itinéraire sur un autre et encore plus les liaisons entre leur déroulement. La segmentation thématique parfois adoptée au sein d'un chapitre pour mieux aborder tel ou tel aspect ne doit pas faire oublier la concomitance temporelle de ces parcours et la profonde unité de la personne.

Pourtant, il est surprenant de voir le républicain Laisant adopter des thèses anarchistes une vingtaine d'année plus tard. Pourquoi un militaire décoré pour sa bravoure en 1870 se trouve-t-il radié des cadres de l'armée en 1885 ? Comment celui qui manipule intensément le calcul analytique et infinitésimal dans ses premiers travaux en vient à des articles traitant de représentations, de visualisations de procédés en combinatoire ou en théorie des nombres ?

Quels sont les facteurs qui poussent cet examinateur de la prestigieuse École polytechnique à s'intéresser à l'éducation de la petite enfance ?

Chacun de ces itinéraires est en effet marqué par l'activisme de Laisant et la mise en avant de conceptions qu'il revendique explicitement. Ce sont donc autant d'engagements des plus divers que nous traiterons. Sa volonté de rendre à la méthode des équipollences son véritable statut de calcul géométrique, son ouverture vers les mathématiques pratiquées à l'étranger, ses collaborations privilégiées avec des mathématiciens parfois méconnus ou les lignes éditoriales des revues qu'il fonde sont autant d'exemples des batailles qu'il livre.

Nous tâcherons de donner les principales caractéristiques de ces engagements et les idées qui les unissent dans la pensée des sciences et de la société de Laisant. Nous nous attacherons à signaler comment ses luttes relèvent de préoccupations du XIX^e^ siècle ou préfigurent des grands thèmes du XX^e^ siècle qui s'ouvrent devant le mathématicien. Pourquoi est-il difficile de rattacher le mathématicien à un siècle plutôt qu'un autre ? Quel rôle, quelle place tient Laisant dans les grands changements qui s'opèrent à la charnière des deux siècles ? Quels sont d'ailleurs les transformations des sciences mathématiques et de sa communauté qui trouvent leurs pendants dans l'œuvre de Laisant ? Puisque le savant est auteur d'ouvrages qu'il qualifie lui-même de « philosophie », quelle réflexion porte-t-il sur ces changements, sur les dits progrès des sciences mathématiques de l'époque ?

Notre attention se porte pour l'essentiel sur la période qui s'étend de la fin des années 1850 au milieu des années 1910, des prémisses de la guerre de 1870 à la veille de la Grande guerre. La rivalité scientifique entre la France et l'Allemagne y est exacerbée, la thèse du déclin sur le plan scientifique de la première relativement à l'essor de la seconde prévaut après la défaite de Sedan. La Troisième République s'appuie alors sur une nouvelle partie de la société (notables, commerçants, industriels). L'essor des publications traitant de mathématiques et l'élaboration de structures pour la communauté mathématique internationale sont aussi des mutations inhérentes aux itinéraires de Laisant qui participent à l'émergence d'une culture mathématique.

De nouvelles disciplines, en gestation au cours du XIX^e^ siècle, émergent également durant cette période : elles seront fondamentales dans le siècle suivant. Quelle place tient Laisant dans le renouveau mathématique de la France et la sortie de l'ostracisme dont a fait preuve la communauté nationale ?

Enfin, de la période de la bifurcation à la réforme de 1902, l'enseignement, et l'enseignement scientifique en particulier, connaissent de multiples et profonds changements auxquels Laisant est attentif en intervenant de diverses façons dans le débat qui accompagne ces mutations.

Notre étude souhaite privilégier deux aspects des parcours de Laisant. Ses travaux mathématiques personnels tout d'abord en soulignant leur originalité et les collaborations qu'ils induisent ; la place que tient ensuite le mathématicien dans la communauté de ses confrères, « simples amateurs » ou savants reconnus.

Nous nous sommes attachés à l'étude de sa production mathématique en vue de tracer les contours des mathématiques pratiquées par Laisant et de ceux qui sont en relation avec lui. Les principales revues auxquelles il a participé ont été dépouillées, complétées par l'étude de ses ouvrages et ses manuels. Les archives de l'Académie des sciences, de l'École polytechnique, le fond Fehr conservé à Genève, ainsi que les archives de Guéret ont été consultés. La correspondance pose problème : son volume semble être exceptionnel… tout comme sa dispersion. À l'aide de sa propre notice sur ses titres et travaux, complétée par exemple par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, la mise en place d'une bibliographie la plus complète possible de l'œuvre de Laisant a été le point de départ d'une périodisation arbitraire mais nécessaire.

C'est donc la production mathématique de Laisant qui nous a guidés dans la délimitation des grandes périodes de son œuvre, chacune d'entre elles constituant un chapitre du présent travail. Ces bornes mobiles ont été précisées par les aspects d'autres itinéraires (professionnels principalement).

La première ère que nous abordons est celle courant de la naissance aux tous premiers travaux sur la méthode des équipollences qui correspondent au début de son premier mandat de député, soit les années 1841-1876. Cette période comprend bien sûr la scolarité de Laisant, son passage par l'École polytechnique et l'École d'application de Metz. Elle se rapporte surtout au début du mathématicien et de l'homme politique : nous y voyons les marques d'une initiation au travail de mathématicien et aux mandats électifs. Comme toute initiation, elle fait apparaître des figures tutélaires telles qu'Ange Guépin, Amédée Mannheim ou Jules Hoüel.

La deuxième période qui débute avec la traduction de la méthode des équipollences de Bellavitis (1874) et qui se termine avec la parution de la *Théorie et applications de la méthode des équipollences* (1887) est une période de diffusion de théories mathématiques. Nous avons choisi d'y souligner l'importance du calcul géométrique (équipollences, quaternions) et les réflexions connexes qui s'y rapportent : sur les quantités imaginaires et leurs représentations, l'émergence de la notion d'algèbre et la réflexion sur la notion d'aire. Nous y traiterons également de la carrière du député Laisant et ses prises de positions à l'Assemblée sur des sujets ayant trait aux sciences mathématiques, notamment à partir de la session 1882.

Le troisième chapitre traite des années 1881 à 1897 où paraissent nombre d'articles autour des mathématiques discrètes (théorie des nombres, combinatoire) avec comme approche commune la question de leurs modes de représentations. Que ce soit sous forme de mosaïques, de réseaux, de tableaux de nombres, Laisant s'interroge pendant cette période de figuration sur l'apport de la visualisation en mathématique, d'un point de vue heuristique et pédagogique.

Enfin, avec la dernière partie de ce travail, nous abordons une époque de réflexion qui s'écoule entre le début de sa carrière d'enseignant (qui correspond à sa fin de vie politique) en 1893 et l'année 1913, où il quitte ses fonctions d'examinateur à l'École polytechnique. Les différents itinéraires que nous avons soulignés touchent alors à leur fin, principalement à cause d'une santé déclinante. Cette période est néanmoins très riche : Laisant délaisse progressivement ses travaux mathématiques pour s'intéresser aux questions d'éducation et aux collaborations possibles au sein de la communauté mathématique. Il se présente ici comme un mathématicien accompli, reconnu et respecté. Les considérations générales qu'il livre sur sa discipline et son enseignement, son implication dans le mouvement internationaliste sont autant de signes distinctifs de cette dernière période.

I. Le temps des initiations (1841 – 1876)

C.-A. Laisant mentionne peu ses origines nantaises. Rapidement, sa formation se déroule à Paris dès 1858 (Institut Sainte-Barbe puis l'École polytechnique), puis à Metz de 1861 à 1864 (École d'application du Génie). Les aléas de ses nominations militaires l'emmènent aux quatre coins de la France de 1864 à 1874, puis en Algérie (1875) avant que la majeure partie de sa vie se déroule ensuite à Paris (jusqu'en 1909)[1] et dans sa banlieue, à Asnières-sur-Seine[2], sans que jamais il ne semble exprimer le vœu de revenir s'installer en province. Pourtant, son parcours prend bien sa source à Nantes, ou plus globalement dans l'Ouest et ce particulièrement grâce à l'appui d'Ange Guépin : Laisant devient franc-maçon dans une loge à Brest puis à Nantes où il fait ses premiers pas en politique (1871), noue des premiers contacts avec le milieu scientifique à Bordeaux (1874), fera sa première intervention pour l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS) à Nantes en 1875.

Nous proposons de préciser différents aspects des premières années de l'œuvre de Laisant, afin de mieux appréhender la suite de son parcours, plus significative de son œuvre globale. En effet, dans cette première période, aux bornes nécessairement arbitraires, on voit Laisant s'engager dans des mémoires conséquents tant en arithmétique qu'en géométrie analytique, alors qu'il s'éloignera de ces sujets par la suite. Ou plutôt qu'il les traitera de manière foncièrement différente : par l'emploi de représentations graphiques en ce qui concerne l'arithmétique, ou par l'utilisation des équipollences pour ce qui est des recherches de rayons et centres de courbure. Comme si l'élève se distançait de l'enseignement qu'il a reçu à l'École polytechnique pour trouver sa propre voie. On sent Laisant encore imprégné d'une certaine culture dans ses premiers écrits : en partie celle de l'analyse triomphante en géométrie, où les éléments différentiels d'une courbe sont étudiés analytiquement et méthodiquement. C'est aussi celle des ingénieurs militaires d'où peut-être son intérêt pour

[1] Tout d'abord à Versailles en 1876 puis 16, avenue de Villiers (Paris) de 1876 à 1879, puis 5, rue de l'Aqueduc (Paris) de 1880 à 1882, 84 bis avenue Victor Hugo de 1883 à 1886 puis 162, avenue Victor Hugo (Paris) de 1887 à 1909 d'après les comptes rendus des congrès de l'AFAS et le Bulletin de la SMF.

[2] 5, rue du conseil.

l'instrumentation mathématique (compas trisecteur, planimètre). Si cet intérêt demeure vif par la suite, il ne sera pas suivi de réalisation concrète si ce n'est une brève collaboration avec Genaille.

Les travaux arithmétiques, nombreux dans cette période, marquent la volonté de multiplier les propriétés autour d'objets centraux (fractions périodiques, théorème de Fermat). Le catalogue obtenu est conséquent et illustre le goût de leur auteur pour la compilation et la mise en ordre de résultats parfois déjà connus.

À côté de ces écrits, la géométrie analytique se présente comme une autre marque de l'esprit méthodique de Laisant. Autour du sujet central des centres et rayons de courbure, par l'usage de transformations géométriques, le mathématicien applique le même procédé, une même progression dans les techniques, d'abord aux courbes du plan, puis à celles de l'espace et enfin aux surfaces (de la même manière, les équipollences du plan l'amèneront aux quaternions par la suite). Si ces travaux sont marqués par l'enchaînement de calculs analytiques, dépouillés de toute figure, il n'en demeure pas moins que Laisant les rapporte à une intuition géométrique, une pensée du courbe et des transformations toute géométrique, mais parfois échappant à une figuration pertinente.

Cette période est aussi annonciatrice de futures implications fortes. Le nombre important d'articles dédiés aux *Nouvelles annales de mathématiques* place Laisant comme un grand contributeur de cette revue (avant qu'il n'asseye sa position d'homme "pilier" avec la prise de sa direction en 1896). Son entrée rapide à la Société mathématique de France est du même ordre. S'ajoutent à cela des rencontres prépondérantes : celle de Hoüel, sans qui le chapitre sur les équipollences ne se serait peut-être pas ouvert ; celle de Lemoine bien sûr, mais aussi celle de Brocard qui sera un collaborateur de choix pour l'*Intermath*.

Nous étudierons tout d'abord la formation de C.-A. Laisant marquée par son passage à l'École polytechnique, puis à l'École d'application de Metz. Nous suivrons ensuite sa carrière militaire chaotique, du fort d'Issy à son poste en Algérie, et son activisme républicain à Nantes. Enfin, nous dresserons un panorama de ses premiers écrits mathématiques, en arithmétique ou en géométrie analytique avant de nous intéresser à son entrée dans une première société savante : celle des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux où il rejoint Guépin et Hoüel.

I.1. La scolarité de Laisant : du lycée de Nantes à l'École polytechnique

I.1.1. « L'enfant terrible de Nantes »[3]

Charles-Ange Laisant est né le 1er novembre 1841 à Basse Indre[4], chef-lieu de la commune d'Indre en Loire-Inférieure, à quelques kilomètres de Nantes. Basse Indre est alors divisée en trois quartiers : l'ouest est le quartier des forges et du prolétariat ; le centre, celui des pêcheurs et des commerçants et enfin le quartier est, habité par les notables et les gens aisés de la commune[5].

C'est dans ce dernier quartier que Laisant voit le jour : son père Benjamin Laisant, alors âgé de 19 ans, est clerc de notaire à Basse Indre après des études de droit à l'école de Nantes. Sa mère, Alida Lucia Jeanne Thuez, alors âgée de 26 ans, est mariée à Laisant père depuis le 4 janvier de la même année. Charles-Ange sera le seul enfant d'une famille où le père est présenté comme un militant radical, dans cette commune où vibre la fibre ouvrière[6]. Le grand-père paternel est quant à lui installé à Alger pour y vivre de ses rentes après une carrière de filateur à Nantes. L'acte de naissance de C.-A. Laisant précise que le grand-père maternel Charles Thuez, résidant à Nantes, est conducteur des ponts et chaussés. La généalogie du jeune Laisant ne l'invite donc pas à s'investir particulièrement dans les mathématiques, mais grâce à la personnalité de son père, qui deviendra par la suite Maire de la commune du Bignon (Loire-Inférieure) de 1870 à 1871[7], le militantisme politique fait partie intégrante de la vie du futur député dès son plus jeune âge.

---

[3] Référence à un portrait de Laisant par l'artiste Ancenien Jacques Pohier (1871-1951), imprimerie Dugas, Nantes.
[4] *Etat civil de la commune d'Indre*, notice 108, année 1841.
[5] [Boucault, 1984] et [Girault de Saint-Fargeau, 1829], p. 75. Voir aussi Guépin Ange et Bonnamy Charles Eugène, *Nantes au XIXème siècle*, réédition par Le Pichon et Supiot, Centre de recherche politique de la Faculté de droit de Nantes, Nantes, 1981.
[6] Voir [Sauvage, 1994], p. 63 et le *Bulletin* de l'Association pour la recherche historique des îles d'Indres, n°8, janvier 1989 et n°15, janvier 1993.
[7] [Sauvage, 1994], p. 75.

Dans la biographie consacrée à Charles-Ange par son petit-fils Maurice, ce dernier relate une anecdote qui, avérée ou non, reflète la détermination et l'indépendance d'esprit de son grand-père ou du moins l'image d'homme libre qui entourera le personnage : « son esprit critique et la perpétuelle révolte consécutive à celle-ci furent permanents : à onze ans, il refuse de faire sa première communion ayant jaugé la stupidité des religions et il amène son père, républicain mais catholique, à rejeter sa croyance. »[8]

On peut penser que l'enfant Laisant entre à l'école communale d'Indre : l'instituteur communal, Aignan Brégent, est d'ailleurs présent lors de la signature de l'acte de naissance. Dérouler son cursus ultérieur est plus délicat, l'impossibilité d'exploiter des archives familiales en est une des raisons.

I.1.2. Étudier sous la réforme de la bifurcation

AU LYCEE DE NANTES

La nécrologie qui lui est consacrée dans les pages de *L'Intermédiaire des mathématiciens*[9] précise que c'est au lycée de Lorient que Laisant aurait poursuivi ses études, mais l'hypothèse d'études au sein du lycée de Nantes, évoquée par le *Répertoire de bio-bibliographies bretonne*[10] ou le *Dictionnaire biographique du mouvement ouvrier français*[11], semble plus probable, même si le nom de Laisant n'apparaît pas dans les archives du futur lycée Clémenceau. L'établissement est alors le plus grand du département, malgré une baisse des effectifs entre 1849 et 1854 (494 élèves à la rentrée de 1852)[12].

Il est difficile d'évaluer les rapports que le jeune Laisant a pu tisser avec certains de ses condisciples du lycée qu'il retrouvera bien plus tard au cours de sa carrière politique. On sait que Georges Boulanger, Rennais d'origine, futur « Général revanche » qui infléchira tant la carrière politique de Laisant, est élève au lycée de Nantes entre 1848 et 1853 avant d'entrer à Saint-Cyr en 1855. De même, Georges Clémenceau y suit les cours dès 1852 jusqu'au baccalauréat ès lettres qu'il obtient en 1858 avant d'entrer à l'école de médecine de Nantes.

[8] [Laisant M., 1970].
[9] [La Direction, 1920], p. 81.
[10] [[Kerviler, Du Boisrouvray, Le Masne de Chermont, Rouzeau, 1985], p. 31.
[11] [Maitron, 1964].
[12] [Barreau, Guiffan, Liters, 1992], p. 117-118 et Lycée *de Nantes, Livre d'or du centenaire (1808-1908)*, Nantes, imprimerie du Commerce, 1909. En 1852, le lycée emploie notamment 90 personnes dont 12 professeurs titulaires.

Mais la séparation relativement stricte entre les élèves des différentes divisions de l'établissement secondaire relativise la concomitance des études de chacun. Notons cependant les créations de deux associations d'anciens élèves du lycée de Nantes par Clémenceau : une à Nantes, puis une à Paris, en 1883, où ces personnalités ont pu de nouveau se rencontrer[13].

QUELQUES ELEMENTS SUR LA PERIODE DE LA BIFURCATION

Quoi qu'il en soit, Laisant entre au lycée en 1852 alors que celui-ci subit de grandes mutations sous l'impulsion du ministre de l'Instruction publique de l'époque, Fortoul. Examinons les caractéristiques de cette réforme dite de la bifurcation[14] pour mieux saisir la teneur de l'enseignement dispensé au jeune Laisant et pour mieux comprendre le jugement sévère que ce même Laisant pourra adresser, quarante ans plus tard, sur l'instruction de cette époque.

Au début des années 1850, Fortoul est tout d'abord confronté au développement de l'enseignement libre depuis la loi Falloux brisant le monopole de l'Université, mais il poursuit surtout la réflexion entamée par son prédécesseur Salvandy. Il s'agissait déjà de réformer l'enseignement classique de plus en plus contesté pour arriver à un enseignement alliant théorie et pratique (dans l'esprit de l'enseignement de Monge à l'École polytechnique[15]) et de proposer une formation qui permettrait un développement industriel comparable à celui constaté dans d'autres pays tels que l'Angleterre. La réforme est dès lors portée par plusieurs polytechniciens (Dupin, Arago puis Le Verrier) et par des chimistes, comme Dumas, conscients des besoins de l'industrie[16] ; les membres du conseil royal de l'Instruction publique, comme Poisson, restant étrangers à ce projet. À partir de décembre 1851, les ambitions du Second Empire en ce qui concerne la modernisation de l'économie française vont permettre d'adopter la réforme dès avril 1852.

La mesure principale est la possibilité, à partir de la classe de troisième, de choisir entre deux filières : lettre ou science, chacune amenant à l'obtention d'un baccalauréat

---

[13] [Barreau, Guiffan, Liters, 1992], p. 120 et biographies p. 328 et 329.
[14] La rapide présentation de cette période est largement basée sur les travaux de B. Belhoste. Voir [Belhoste, 1995], [Belhoste, 1989], [Hulin, 1982], [Hulin, 1989].
[15] Déjà, en 1850, l'enseignement à l'École polytechnique a été profondément modifié dans ce sens sous la proposition de Le Verrier qui espère voir ces transformations gagner le secondaire.
[16] Groupe dit des « industrialistes » d'après la dénomination de B. Belhoste voir [Belhoste, 1995], p. 41.

propre[17]. L'enseignement secondaire est en effet composé de trois divisions : élémentaire (8° et 7°), grammaire (de 6° à 4°) et supérieure (3°, 2°, rhétorique et logique). La nouvelle section des sciences, descendante de l'enseignement spécial créé en 1847 par Salvandy, est notamment privilégiée par les élèves se destinant aux écoles les plus prestigieuses. C'est aussi le choix d'une majorité des élèves du lycée de Nantes (99 sur 170 lors de la rentrée de 1854)[18].

La réforme de la bifurcation ne concerne cependant pas uniquement la division supérieure du secondaire, puisque c'est l'enseignement scientifique de tous les niveaux qui est repensé[19]. Pour les mathématiques, c'est Urbain Le Verrier (nommé inspecteur général de l'enseignement supérieur en 1852) qui joue un rôle majeur, notamment lors de la rédaction des instructions de 1854[20]. La réforme est marquée par le souci d'utilité et de simplicité : il s'agit d'exposer les notions à partir de bases concrètes, compréhensibles pour les élèves. Une large place est faite aux applications pratiques. Les procédés d'approximation en arithmétique ou les systèmes d'équations du premier degré à deux ou trois inconnus sont davantage étudiés. On introduit des notions sur la théorie des séries et des dérivées, mais les enseignements du calcul infinitésimal et ses applications semblent réservés aux études ultérieures. Les démonstrations en géométrie doivent être simples : on préfère insister sur les applications et l'initiation à la géométrie descriptive.

Sur quels manuels le jeune Nantais a-t-il étudié ? Le programme officiel recommande la lecture de Clairault et Lacroix en géométrie, de Bézout pour l'algèbre[21]. D'autres plus récents, comme ceux de Joseph Bertrand, Charles Briot ou Adrien Guilmin, ont pu être employés. Même si la réforme dissuade de les utiliser, *Les Éléments de géométrie* de Legendre ne sont pas à écarter : ils ont connu tout au long du XIX^e^ siècle un grand succès, ponctué de plusieurs rééditions jusqu'en 1884, mais le retour à la tradition euclidienne qui y est opéré sera critiqué dans le futur, notamment par Laisant.

---

[17] Voir *Nouveau plan d'étude des lycées*, 10 avril 1852, in [Belhoste, 1995], p. 248.

[18] En 1855, l'inspecteur d'académie note : « le baccalauréat ès-science ouvre à la jeunesse un plus grand nombre de carrière que le baccalauréat ès-lettres, et que les instincts de la population nantaise la poussent de préférences vers les écoles du gouvernement ou les carrières industrielles » cité dans [Barreau, Guiffan, Liters, 1992], p. 118.

[19] "Nouveau programme de l'enseignement scientifique, 30 août 1852", in [Belhoste, 1995], p. 273.

[20] "Instruction pour la mise à exécution du plan d'étude des lycées, 15 novembre 1854", in [Belhoste, 1995], p. 321.

[21] Clairault Alexis Claude, *Élémens de géométrie*, Lambert et Durand, Paris, 1741. À ce sujet voir [Barbin, 1991], Barbin Évelyne, "Les Éléments de Géométrie de Clairault : une Géométrie problématisée", *Repères IREM*, n° 4, juillet 1991, p. 119-133. Lacroix Sylvestre François, *Éléments d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations,* Duprat, Paris, 1797. Bézout Étienne, *Théorie générale des équations algébriques*, Ph.-D. Pierres, 1779.

Sans trace du parcours de Laisant, on peut supposer que ce dernier obtient le baccalauréat scientifique, baccalauréat que la réforme de la bifurcation a un temps rendu nécessaire pour l'admission à l'École polytechnique. Le concours d'admission que Laisant passe en 1859 est alors basé sur le programme de mathématiques spéciales, comme le prescrit la réforme de 1852. Pourtant à cette époque, des aménagements à la bifurcation ont déjà été opérés[22].

L'élève Laisant aura donc été le produit d'une réforme qui, malgré sa réussite dans les premières années, connaîtra une remise en cause rapide dès la mort de Fortoul en 1856. Le ministre de l'Instruction publique suivant, Gustave Rouland, réorganise en 1859 l'enseignement des sciences physiques et introduit la possibilité de passer le baccalauréat en deux temps[23]. Aux mêmes fonctions, Victor Duruy, détracteur de la bifurcation, portera en 1864 le coup de grâce à cette réforme qui n'aura pas su répondre à la diversité des aspirations des lycéens[24]. Principalement taxée d'un trop grand utilitarisme, la réforme de Fortoul n'a connu que la défiance des défenseurs de la culture classique.

Le bilan dressé par Chasles en 1870 dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie* est sans équivoque pour cette réforme de la bifurcation « qui substitue aux études intellectuelles et théoriques sérieuses des études tronquées, formées de lambeaux de théories ayant pour objet suprême et immédiat des applications pratiques »[25].

Paul Tannery souligne quant à lui que « l'erreur était d'aggraver la séparation intellectuel qui tendait à se faire, depuis le commencement du siècle, entre l'éducation purement littéraire et l'éducation purement scientifique, alors que le problème est toujours au degré secondaire, de donner une instruction intégrale, de faire des hommes complets. »[26]

Laisant prônera lui-même le recours constant aux applications, la recherche de clarté et de simplicité dans les démonstrations de géométrie et défendra l'utilité de l'enseignement scientifique pour tous. Si C.-A. Laisant s'est sans doute remémoré quelques-uns de ces aspects de la réforme, en déduire une adhésion aux principes de la bifurcation serait une erreur. La réforme de 1852 relève principalement du débat autour de l'opposition fréquente entre enseignement littéraire et enseignement scientifique. L'auteur de *La Barbarie moderne* regrettera de telles scissions : « En pratiquant une éducation littéraire opposée à l'éducation

[22] [Belhoste, 1995], p. 46.
[23] "Révision des programmes de la section des sciences, 5 octobre 1859", in [Belhoste, 1995], p. 379.
[24] "Abolition du régime de la bifurcation, 10 avril 1852", in [Belhoste, 1995], p. 388.
[25] [Chasles, 1870], p. 379.
[26] Tannery cité dans [Pineau, 2010], p. 22.

scientifique, [...] on instituera deux castes de demi-hommes mais l'on ne fera jamais, ni une humanité, ni une société, ni une patrie »[27].

I.1.3. Préparer le concours d'entrée à l'École polytechnique

Ce n'est pourtant pas dans un lycée de province que Laisant prépare le concours d'entrée à l'École polytechnique[28]. Pourtant, le lycée de Nantes compte encore une classe de mathématiques spéciales qui prépare au concours de ce que l'on appellera plus tard les grandes écoles et peut même afficher de bons résultats à ces mêmes concours[29]. Mais le jeune Nantais choisira l'internat à l'école Sainte-Barbe, place du Panthéon à Paris de 1858 à 1859[30].

Dans la première moitié du XIXe siècle, l'enseignement dispensé dans les lycées est magistral et certaines classes souffrent d'effectifs trop lourds pour bien préparer l'épreuve d'admission aux écoles spéciales, épreuve essentiellement orale. Ainsi, seul 1,3% des bacheliers accèdent directement à L'École polytechnique après la réussite à l'examen[31]. Peu de lycées de province réunissent les conditions nécessaires à une bonne préparation (hormis celui de Metz) et parmi la douzaine d'établissements renommés, ce sont surtout les lycées parisiens de Saint-Louis (20 % des futurs polytechniciens) et Louis le Grand ainsi que, plus tard, l'école Monge, qui préparent efficacement l'essentiel des candidats. C'est ainsi qu'à partir de 1847[32] sont créées des pensions privées et laïques dans lesquelles les élèves arrivant de province peuvent suivre les cours des deux prestigieux établissements, tout en profitant d'une préparation spécifique aux concours[33]. L'école préparatoire de Sainte-Barbe permet ainsi de suivre les cours dispensés à Louis le Grand (c'est le monopole de l'Université qui prévaut encore) tout en bénéficiant d'une série de répétitions et d'interrogations efficaces[34]. Cette école, sous les directions de Duhamel puis Pagès et Blanchet, rencontre un large succès :

---

[27] [Laisant, 1912a], *La Barbarie moderne*, Bataille syndicaliste, Paris, 1912 et [Laisant, 1904a], p. 71.
[28] Sur ce concours, voir [Belhoste, 2002].
[29] Un rapport d'inspection générale souligne cependant un niveau faible des études en sciences à partir de 1858. Cinq élèves sont reçus en bonne position à l'École polytechnique en 1860. [Barreau, Guiffan, Liters, 1992], p. 118 et 127.
[30] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 18.
[31] [Shinn, 1980], p. 79.
[32] Voir "Rapport sur l'état actuel de l'enseignement scientifique par la Faculté des sciences de Paris (extraits), 6 avril 1847", in [Belhoste, 1995], p.207.
[33] Ces pensions sont les descendantes des premières institutions privées pour l'enseignement préparatoire, créées dans la deuxième moitié du XVIIIe siècle, où l'on faisait répéter les manuels utilisés lors du concours d'admission aux examens des armes savantes (comme celui de Bézout pour l'artillerie).
[34] Voir à ce sujet l'avis de son fondateur Duhamel dans [Boyé, 2009], p. 4.

en 1853, elle forme le tiers des admis à l'École polytechnique[35]. Cette institution connaîtra pourtant une baisse progressive de ses effectifs dès la fin des années 1850, notamment à cause de la concurrence des établissements publics.

Le choix de la famille Laisant pour placer leur enfant unique a dû être motivé par la réputation d'un tel établissement. Le coût financier imputable à de telles études[36] n'étant pas un obstacle pour Benjamin Laisant, son fils unique ne recevra d'ailleurs pas de bourse lors de son passage à Polytechnique. Charles-Ange effectuera l'ensemble de sa préparation dans les locaux de Sainte-Barbe, ceux de l'ancien collège de Reims, puisque la réforme Falloux abolit en 1850 le monopole de l'Université et permet à l'institution privée de ne plus envoyer ses pensionnaires à Louis Le Grand.

La préparation au concours consiste alors en un approfondissement et une répétition des cours magistraux. Y sont enseignés l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie mais également des éléments en littérature étrangère, en prose et en poésie française. Des interrogations sont proposées régulièrement[37] : elles sont constituées de passages au tableau, souvent dans les conditions du concours et sous la responsabilité d'enseignants eux-mêmes répétiteurs à l'École polytechnique. Ce système des « colles », que l'on retrouve pour la préparation à l'examen de sortie de l'École, est assorti de compléments donnés collectivement. Il permet une préparation efficace, bien que jugée souvent artificielle, pour le concours d'entrée aux écoles spéciales.

L'entrée à l'École polytechnique est en effet assujettie à la réussite d'une épreuve double : orale et écrite. Les épreuves sur table qui sont adjointes en 1830 aux interrogations orales n'influent que peu sur le résultat final. À l'écrit, sont réservées, par exemple, les épreuves de français et de physique[38]. Accompagnées d'épreuves orales de premier degré (ou d'admissibilité), elles permettent d'effectuer une première sélection avant les épreuves orales du second degré, décisives, qui se déroulent quelques jours plus tard.

Le programme d'admission est basé sur le programme de mathématiques spéciales, et les manuels[39] de Bourdon et Lefébure sont aussi utilisés si on en croit les nombreuses

---

[35] [Belhoste, 2001], p. 116.

[36] B. Belhoste estime à plus de 1500 francs les frais de pensions pendant les deux ou trois ans de préparation, ce qui constitue une somme importante et un « investissement risqué », [Belhoste, 2001], p. 117.

[37] Une semaine de cours s'étale du lundi au samedi, de 8 heures à 10 heures, sauf le jeudi.

[38] À l'origine, ce sont principalement les connaissances en mathématiques qui sont testées : l'introduction d'interrogation en physique date de 1850.

[39] L'utilisation de manuel remonte à l'époque où les examinateurs peu nombreux alors (Reynaud, de Fourcy, Bourdon) interrogeaient les candidats sur les ouvrages qu'ils avaient publiés. Le concours consistait alors, on l'a

rééditions au cours du XIXe siècle. C'est le comité de concours de l'École polytechnique, composé de cinq professeurs de l'École, nommés par son conseil de perfectionnement qui élabore les sujets de concours. Il étudie la prestation de chaque candidat pour proposer au conseil de perfectionnement une liste d'environ 450 admissibles dont les 200 premiers environ seront retenus par le conseil de perfectionnement suivant les besoins transmis par le gouvernement. Notons que Laisant aura également eu à fournir un certificat établi par le maire de sa commune d'Indre répertoriant ses éventuelles activités politiques, ainsi que celles de sa famille, évaluant de même la réputation des proches du futur élève[40].

Dans la pratique, les examinateurs sont envoyés à travers la France entière, traditionnellement à la fin de l'été, et interrogent les candidats dans le lycée de province[41] le plus proche avant qu'un jury n'établisse, parmi le millier de candidats, la liste définitive des admis suivant le nombre de places disponibles. C'est donc à Rennes[42] que C.-A. Laisant est reçu 63ème à l'École impériale polytechnique en 1859.

I.1.4. Une première identité : Laisant polytechnicien

Le nom de Charles-Ange Laisant est indissociable du lieu de sa formation : l'École polytechnique. Établissement où se forment une grande partie des mathématiciens de renom tout au long du XIXe siècle, il en sera élève, y rencontrera des personnages marquants (Mannheim par exemple), y fréquentera de futurs collaborateurs (Lemoine en particulier). Il y sera bien plus tard répétiteur, puis examinateur d'admission et gardera constamment un regard critique sur la formation dispensée, en particulier sur les modalités d'admission, tant au point de vue des programmes que du déroulement des examens. Parce que l'établissement est la pierre angulaire de tout un système, tant au niveau de la préparation à son concours d'entrée en amont, qu'au niveau du type d'enseignement qui y est dispensé ou qu'à celui de ses écoles d'applications, il occupe une place fondamentale dans la vie de Laisant, élève, mathématicien, professeur, directeur de publication ou penseur de l'enseignement scientifique.

---

vu, à connaître dans les moindres détails ces manuels, ainsi que les habitudes des examinateurs, pratique qui s'estompera après 1848.

40 [Shinn, 1980], p. 49. C'est une de preuves du caractère élitiste et conservateur de l'École polytechnique. Le candidat doit également présenter une santé sans faille. Il est apprécié qu'il ait quelques connaissances en escrime ou équitation, traces des valeurs aristocratiques héritées d'un passé déjà lointain.

41 Pour Paris, l'examen a lieu dans les locaux même de l'École polytechnique.

42 Depuis 1854, les académies départementales n'existent plus et la Loire-Inférieure dépend comme par le passé du rectorat de Rennes.

LA MATRICE DE L'ELITE SCIENTIFIQUE

L'École polytechnique est créée en 1794 grâce aux efforts de Monge, Carnot et Lamblardi. Elle est à l'origine empreinte de l'idéologie révolutionnaire : il s'agit de rompre avec l'enseignement désuet et dévolu à l'aristocratie de l'Ancien régime. On met donc en place un recrutement basé sur le mérite. Les enseignements seront concrets et pragmatiques : ils reposeront sur les sciences et permettront de former des ingénieurs défendant la révolution et participant au développement du pays[43].

L'hégémonie de l'École est patente jusqu'au dernier quart du XIX^{e} siècle : sa sphère d'influence s'étant de la quarantaine de classes de mathématiques spéciales aux écoles d'applications (dont l'École d'application de l'artillerie et du génie). Les facultés de sciences créées en 1808 se cantonnent à un rôle de gestion des grades universitaires (à commencer par le baccalauréat) et investissent peu dans la recherche[44]. Les plus illustres mathématiciens de l'époque, de Chasles à Hermite en passant par Liouville ou Duhamel (et bien d'autres) y ont été élèves et beaucoup d'entre eux y sont ensuite enseignants (environ 70% des professeurs sont des anciens élèves de l'École). L'exemple de Darboux qui, reçu premier aux concours de l'École polytechnique et de l'École normale, choisit cette dernière ne fait que souligner le caractère particulier de son parcours.

L'École placée sous la tutelle du ministère des armées est située au collège de Navarre sur la montagne Sainte-Geneviève depuis 1804. Elle compte alors environ 500 élèves et une trentaine d'enseignants : une douzaine de professeurs secondés par une vingtaine d'examinateurs et répétiteurs, nommés par le conseil de perfectionnement, en poste en moyenne pendant neuf ans, les premiers étant généralement remplacés par les seconds lors de leur départ à la retraite[45]. Charles Eblé est Commandant de l'École avant que Grégoire Coffinière soit ensuite nommé Commandant à son tour en 1860 (il y crée une chaire d'histoire qui sera occupée par Duruy).

A 18 ans, C.-A. Laisant intègre donc la promotion 1859 de l'École polytechnique[46], en même temps que 127 de ses camarades, tous du même âge à un an près. Les origines sociales de Laisant sont à rapprocher de celles de 17,2% des élèves de l'École dont les parents

[43] Voir « La fondation de l'École polytechnique » dans [Shinn, 1980]. Sur l'École polytechnique, on pourra consulter [Belhoste, 2003], [Belhoste, Dahan-Dalmedico, Picon, 1994], [Fourcy, 1987].
[44] On pourra se reporter au premier chapitre de [Gispert H., 1991], p. 13-32.
[45] [Pinet, 1887], p. 488.
[46] Pour l'École polytechnique, les promotions correspondent à l'année d'entrée et non de sortie.

exercent dans les professions libérales pendant la période 1848-1879 (ce qui constitue une progression sensible de la représentation de cette catégorie[47]). Les frais d'enseignement s'élèvent à 1 000 francs auxquels s'ajoutent 600 francs dédiés aux dépenses de logement, de repas et d'uniforme.

LA FORMATION SUIVIE

Pour sa première année (1859-1860), les principaux cours que suit C.-A. Laisant sont l'analyse, la mécanique, la géométrie descriptive, la physique, la chimie et la géodésie[48].

Principaux cours de première année	*Professeurs*
Analyse	Duhamel
Mécanique	Delaunay
Géométrie descriptive	Maillard de la Gournerie
Physique	Sénarmont
Chimie	Frémy
Géodésie	Laussedat

Principaux enseignements suivis par C.-A. Laisant durant l'année 1859-1860

Le cours d'analyse est assuré par Jean Marie Constant Duhamel (X 1814 ; 1797-1872). Né à Saint-Malo, étudiant au lycée de Rennes, il entamera des études de droit après son passage à l'École polytechnique. À l'époque, Duhamel est un proche d'Auguste Comte. De la même promotion à l'École polytechnique (comme Gabriel Lamé), il sera, avec Onlinde Rodrigues, témoin de Comte à son mariage en 1825[49]. Il fonde une école préparatoire en 1829 qui deviendra le collège Sainte-Barbe où il sera nommé professeur puis directeur des études. Il obtient la chaire d'analyse à l'École polytechnique en 1851, poste qu'il occupera également à la Faculté des sciences de Paris. Duhamel est élu en décembre 1840 à l'Académie des sciences ; il en sera président en 1862.

Il publie son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* en deux volumes (1840-1841), puis les *Éléments de calcul infinitésimal* (1860), et enfin un *Cours de mécanique* en deux

[47] [Shinn T., 1980], p. 185. Une grande partie des élèves proviennent encore d'un milieu de rentiers (28,5%) ou du milieu des hauts fonctionnaires et officiers supérieurs. La période 1848-1879 est marquée par un plus large accès des enfants issus du milieu industriel et du négoce.
[48] Archives de l'École polytechnique, « registres contenant l'inscription par leçon des sommaires des cours », cote X2C 7.
[49] Henri Gouhier, *La vie d'Auguste Comte*, Vrin, 1997, p. 140.

volumes (1845 et 1846). Son enseignement repose sur l'analyse, les liens entre théorie et pratique, la résolution de problèmes de difficultés progressives, l'usage raisonné des notations[50]. Ces thèmes trouvent écho dans les réflexions de Laisant et seront développés dans *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (1866-1872), c'est un des ouvrages que signale Laisant dans sa courte bibliographie de philosophie des sciences en conclusion de *La Mathématique*, ([Laisant, 1898a]). Voici ce qu'écrit Paul Tannery dans *La Grande Encyclopédie* à propos les cours de Duhamel à l'École polytechnique :

> *Excellent professeur, Duhamel a exercé une grande influence par la clarté et la précision de son enseignement. Esprit plus exact que profond, s'attachant plutôt à perfectionner les méthodes qu'à faire progresser les mathématiques, il a en tout cas le mérite d'avoir le premier donné une démonstration rigoureuse des principes fondamentaux du calcul infinitésimal. Les élèves de l'École polytechnique ont, de son temps, donné son nom au verre d'eau sucrée qu'il avait, au début de chaque leçon, l'habitude de préparer tout en résumant, d'une voix d'abord à peine perceptible, mais qui s'élevait peu à peu, les théories exposées dans la précédente leçon.*[51]

René Kerviler, ancien élève de Duhamel à l'École polytechnique, raconte quant à lui que : « de temps à autres, il lançait cependant des pointes contre certains géomètres qui n'étaient pas suffisamment algébristes. Quand il commençait une phrase par : Il y a des gens qui se croient géomètres… tous les bancs de l'amphithéâtre dressaient leurs oreilles, et le pauvre Chasles qui n'était pourtant pas nommé, passait un mauvais quart d'heure »[52].

Le cours de mécanique est assuré par Charles Eugène Delaunay (X 1834 ; 1816-1872). Professeur chargé de la mécanique physique et de la géométrie descriptive à l'École des mines en 1844, il enseigne en mathématiques spéciales à l'Institut Sainte-Barbe entre 1845 et 1851, avant de devenir répétiteur à l'École polytechnique en 1849 en succession de Le Verrier, tout en étant responsable de la mécanique physique et expérimentale à la Faculté des sciences. Il accède à la chaire de mécanique et de machines en 1854. Un an plus tard, il entre à l'Académie des sciences.

Jules Antoine René Maillard de la Gournerie (X 1833 ; 1814-1883) est titulaire de la chaire de géométrie descriptive. Élève de l'École navale, ingénieur des ponts et chaussées (il en sera inspecteur général), il enseignera la géométrie entre 1850 et 1863 à l'École

---

[50] [Boyé, 2009].

[51] Tannery J., "Duhamel" in [Berthelot & al., 1885], tome 15, p. 25.

[52] Kerviler, René, *Répertoire général de bio-bibliographie bretonne*, 1886-1908, Livre premier, tome 12, p. 466.

polytechnique[53] avant que Mannheim ne prenne sa succession. Il sera également professeur au Conservatoire des arts et métiers en 1854. De cette expérience, il tire deux ouvrages de références : un *Traité de perspective* (1859) et un *Traité de géométrie descriptive* (1864). Il sera élu membre libre de l'Académie des sciences en 1873.

Le cours de physique est assuré par de Sénarmont, celui de chimie par Frémy, celui de géodésie par Aimé Laussedat (X 1838 ; 1819-1907). Ce dernier succède à Faye en 1856 pour son cours d'astronomie et de géodésie. Il démissionne en 1871 mais deviendra directeur des études à l'École polytechnique entre 1879 et 1881. Il aura également été professeur à l'École des arts et métiers (1873) puis directeur du Conservatoire des arts et métiers en 1881. Élu membre de l'Académie des sciences en 1894, Laisant postulera, sans succès, à sa succession en 1907.

À ces cours s'ajoutent ceux de littérature française, de langue allemande introduits par le second Empire mais qui apparaissent secondaires pour l'administration de l'École, vu les coefficients qui leurs sont attribués lors des examens. Le dessin et le latin complètent la formation. Nous joignons en annexe A l'ensemble des moyennes obtenues par Laisant à la fin de cette première année.

Les notes modestes de l'élève Laisant lui permettent de passer à la division supérieure[54], 113e sur 128 élèves. Les cours qui y sont dispensés sont sensiblement les mêmes : le cours de stéréotomie remplace celui de géométrie descriptive, mais c'est Maillard de la Gournerie qui en est encore chargé. C'est d'ailleurs Maillard de La Gournerie qui scinde l'enseignement de la stéréotomie de cellui de la géométrie descriptive dès 1852, en faisant passer la matière en seconde année. Ceci lui permet une approche plus pratique de l'enseignement de la discipline, en rattachement aux cours de construction. Les professeurs en analyse, mécanique, physique et chimie restent inchangés. Le cours de géodésie est remplacé par celui de topographie et d'art militaire. Des autres enseignements ne subsiste que l'allemand.

---

[53] Sur l'enseignement de la géométrie descriptive par La Gournerie, voir [Sakarovitch, 1998], p. 341-342.
[54] Source: archives de l'École polytechnique, dossier personnel de Laisant.

Principaux cours de deuxième année	*Professeurs*
Analyse	Duhamel
Mécanique	Delaunay
Stéréotomie[55]	Maillard de la Gournerie
Physique	Sénarmont
Chimie	Frémy

Principaux enseignements suivis par C.-A. Laisant durant l'année 1860-1861

Les volumes horaires ont peu varié depuis 1835 : trente cours de physique[56], trente de chimie et autant de géométrie, quinze de mécanique, sept d'histoire et de littérature. L'enseignement de la géométrie supérieure trouve une place centrale dans la mesure où elle permet l'utilisation de multiples techniques mathématiques, tout en étant reliée à divers processus plus concrets. « Selon le conseil de perfectionnement, elle [la géométrie] nécessite, plus que les autres formes mathématiques, une connaissance des chiffres, une aptitude à intégrer des concepts et une bonne maîtrise de la logique formelle »[57]. Parallèlement, on ne propose pas de spécialisation particulière à l'École polytechnique : il s'agit plutôt de donner rapidement aux élèves un enseignement très large afin que ces derniers puissent immédiatement faire preuve d'adaptation face à un problème inconnu et nouveau.

À côté des cours magistraux dispensés par les professeurs, les élèves sont également réunis en petits groupes sous la responsabilité d'un répétiteur chargé de corriger les exercices proposés par les professeurs et de s'assurer que l'essentiel du cours et des méthodes de travail sont acquises[58].

Entre 1830 et 1880, période où l'École est à son apogée, les enseignements dispensés ne subissent en fait que peu de changements (tout comme les structures administratives et pédagogiques bâties sur la charte de 1832). Cette stabilité est à mettre en lien avec la rigidité de la répartition des postes d'enseignants, et sur l'enseignement qu'eux-mêmes ont reçus.

---

55 [Sakarovitch, 1998], p. 338-340.
56 Selon T. Shinn, six cours sur la densité, l'élasticité des corps, un septième sur les instruments de laboratoire, puis cinq autres sur la thermodynamique. Suivent l'électromagnétisme et l'électricité (avec un unique cours sur ses applications).
57 [Shinn, 1980], p. 53.
58 [Shinn, 1980], p. 46.

LA FAMILLE POLYTECHNICIENNE

Nous ne développerons pas ici le sentiment d'appartenance à un groupe, à une élite que développent l'enfermement cinq jours et demi dans les locaux, la prééminence de la hiérarchie et de l'autorité, la surveillance constante du respect des multiples règles (emploi du temps, organisation des chambrés, tenues, etc.)[59]. Ce groupe modelé par l'ordre et la rigueur est conscient du rôle social qu'il a à jouer dans la société. De forts liens de camaraderie se créent ainsi entre polytechniciens depuis leur « absorption » dans la grande famille polytechnicienne jusqu'à leur sortie de l'École. Les nombreuses associations ou revues créées par d'anciens polytechniciens, l'entraide qu'ils s'apportent tout au long de leurs carrières respectives, la fidélité portée à l'image glorieuse de leur ancienne école, tout ceci contribue à former une communauté cohérente et ambitieuse.

À l'École polytechnique, Laisant a pu rencontrer Mathieu Paul Hermann Laurent (X 1860), avec qui il collaborera autour de *La Grande Encyclopédie* ou au sein de l'École agronomique de Paris. Émile Lemoine, l'ami et cofondateur de *L'Intermédiaire des mathématiciens*, fait également parti de la promotion X 1860. Citons encore Ernest Laquière, de la promotion 1858, qui échangera avec Laisant au sujet de la méthode des équipollences ou de la géométrie des quinconces ou Raoul Perrin (X 1859) qui s'intéressera aux problèmes d'aspects et de permutations. L'élève Charles-Ange côtoie notamment Amédée Mannheim en tant que répétiteur : « C'est à cette époque également que remontent mes premières relations, d'élève à répétiteur, avec celui qui pour moi devait devenir plus tard un ami respecté. J'ai toujours gardé le souvenir de la sympathie que nous inspirait, à mes camarades et à moi, ce jeune répétiteur, de quelques années plus âgés que nous, et en qui nous sentions déjà un maître »[60]. Nous présentons l'œuvre de Mannheim à partir de la nécrologie que lui consacre Laisant dans *L'Enseignement mathématique*[61]. Les aspects de la vie soulignés ici montrent quel « maître » il à été pour l'auteur, dans de nombreux domaines que nous aborderons dans les deux premiers chapitres de notre étude.

Né à Paris, Amédée Mannheim est élève de Catalan au lycée Charlemagne puis entre à l'École polytechnique en 1848. Nommé lieutenant d'artillerie, il intègre ensuite l'École

[59] Nous renvoyons de nouveau à [Shinn, 1980].
[60] [Laisant, 1907a], p. 171.
[61] [Laisant, 1907b]. Voir aussi la nécrologie que lui consacre Raoul Bricard dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques*. (Bricard R., "L'œuvre d'Amédée Mannheim", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 7, 1907, p. 97-111).

d'application du génie de Metz. Il deviendra officier dans l'artillerie (détaché à la Manufacture d'armes de Châtellerault puis membre du comité technique de l'artillerie). Il poursuivra sa carrière militaire jusqu'en 1890 et sera notamment en charge de la batterie de l'École polytechnique durant le siège de Paris en 1870. En 1860, il participe à une mission au sud de Constantine pour l'étude de l'éclipse solaire. Parallèlement à cela, il devient, grâce à l'appui de Lamé, répétiteur (1859) puis examinateur d'admission (1863) à l'École polytechnique avant d'occuper la chaire de géométrie descriptive dans cette même école à partir de 1864, en remplacement de Maillard de la Gournerie, jusqu'en 1901. Mannheim sera également l'un des fondateurs et membre actif de la *Société Amicale des anciens élèves de l'École polytechnique*.

Outre les améliorations que Mannheim apporte à la règle à calcul et au vernier, Laisant cite comme premiers travaux mathématiques une étude de la théorie des polaires réciproques (1851), puis de la *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproque* (1857). Laisant explique : « Alors que Poncelet n'avait abordé le problème qu'en rendant les relations métriques d'abord projectives, Mannheim le résout directement, en fait les applications les plus diverses et, allant plus avant encore, obtient la transformation, non seulement des théorèmes, mais de leur démonstration même. »[62]

Plusieurs articles relatifs aux centres de courbures et à la géométrie infinitésimal suivent, dont on peut deviner l'influence qu'ils ont eu sur les premiers travaux de Laisant sur les transformations de courbes. Laisant est admiratif devant « la vision de l'espace » de Mannheim : « une sorte de puissance imaginative fort rare, qui permet de former directement dans le cerveau les schémas nécessaires à la conception nette des figures, de leurs éléments infinitésimaux, de leurs rapports, et des propriétés qui s'en suivent. »[63]

Ce dernier souligne l'importance de son *Cours de géométrie descriptive de l'École polytechnique*, comprenant les éléments de la géométrie cinématique (1880, réédité en 1886). La géométrie cinématique occupe en effet une grande partie de l'œuvre de Mannheim, marquée par la publication des *Principes et développements de la Géométrie Cinématique* en 1894 : « un pareil livre peut être mis en parallèle avec la *Géométrie Supérieure* de CHASLES et les *Propriétés projectives* de PONCELET »[64]. Avec cette géométrie cinématique, Mannheim

[62] [Laisant, 1907b], p. 174.
[63] Ibid., p. 178.
[64] [Laisant, 1907b], p. 174.

« réussit ainsi à apporter, avantage très précieux, l'unité de méthode dans les démonstrations, et à obtenir une concision, une clarté, qui ne sont pas loin d'atteindre la perfection même. »[65]

Sont cités également ses travaux sur les transformations, les polygones inscrits et circonscrits, sur la géométrie infinitésimale ou l'étude du déplacement d'une figure de forme invariable, point de départ (en 1866) de cette « Géométrie cinématique » dont il est le créateur et qui restera comme la partie maîtresse de son œuvre. »[66] La théorie des surfaces (courbure et contact des surfaces), l'étude des pinceaux de droites constituent un deuxième chapitre de l'œuvre de Mannheim (voir son *Mémoire d'optique géométrique* de 1884). Ses travaux sur la surface de l'onde de Fresnel (comme application de la géométrie cinématique), un dernier. C'est au géomètre que Laisant rend hommage :

> *il pouvait légitimement espérer de voir continuer l'éclat dont avait brillé la Géométrie pure, en France surtout, dans la première partie du XIX^e^ siècle, grâce aux travaux de Ch. Dupin, de Chasles et de Poncelet. Cet éclat, Mannheim a contribué à en augmenter la splendeur ; et cependant le délaissement s'est produit de son vivant au profit exclusif de l'Analyse mathématique.*[67]

Et, marchant dans les pas de Mannheim, Laisant d'ajouter « la renaissance de la Géométrie est inévitable, sinon prochaine »[68].

APPLIQUER L'ENSEIGNEMENT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C'est le comité d'examens[69] qui choisit le sujet des épreuves de passage de la première à la deuxième année et celui de l'épreuve finale, qui évalue les candidats à ces deux occasions et qui procède enfin au classement final des élèves par promotion. Ce dernier résultat est déterminant pour le choix de l'école d'application que l'élève officier intègrera après son passage à l'École polytechnique. Un regard critique peut être porté sur les évaluations au sein du prestigieux établissement où sont surtout évaluées l'exhaustivité des connaissances du

[65] Ibid., p. 172.
[66] Ibid., p. 171. Laisant note les travaux de l'Allemand Arthur Schœnflies qui publie en 1893 sa « Géométrie du mouvement » : Chasles et Mannheim sont cités comme les fondateurs de la géométrie cinématique. L'ouvrage est rapidement traduit : Arthur Schoenflies, G. Fouret, *La géométrie du mouvement: exposé synthétique*, 1893.
[67] [Laisant, 1907b], p. 178.
[68] Ibid., p. 179.
[69] Ce comité est composé du Commandant, de son adjoint, de 5 professeurs, du directeur des études militaires et de quatre membres du conseil de perfectionnement.

candidat et la maîtrise des techniques acquises[70]. Le manque de moyens dédiés aux équipements de laboratoires et au matériel de recherche, l'influence des carrières administratives des élèves sortant de l'École polytechnique expliquent pour une part le haut niveau d'abstraction des cours et l'abandon des visées plus utilitaires des fondateurs de l'École. Si bien qu'il est demandé aux élèves une somme de connaissances très importante (théorèmes, nomenclatures abstraites…) qu'il convient de mémoriser notamment en répétant inlassablement les mêmes types d'exercices.

Les carrières militaires ne sont pas nécessairement celles plébiscitées par les élèves mais peuvent être choisies par défaut, les meilleurs diplômés s'orientant, par exemple, vers le génie civil. Pourtant, depuis 1848, les besoins de l'armée augmentent et l'École polytechnique joue un rôle prépondérant dans la formation des officiers, de plus en plus nombreux. Au sein des carrières militaires, et contrairement à l'artillerie, le génie attire les jeunes polytechniciens par le prestige des réalisations qu'il a en charge (construction de routes, ponts et autres voies de communications, fortifications), l'application des connaissances engrangées qu'il demande ou encore la sécurité et l'intérêt des carrières auxquelles il appelle.

Pour sa part, Laisant sort en 1861, 80ème sur 114 élèves[71] avant d'incorporer le corps du génie (21ème)[72]. Laisant intègre ensuite l'École impériale d'application de l'artillerie et du génie à Metz, comme environ 13 % des polytechniciens de l'époque 1848-1879[73]. Il en sortira deux ans plus tard cinquième sur 25[74].

L'ÉCOLE D'APPLICATION, LE GENIE MILITAIRE

L'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz est quantitativement parlant celle par laquelle passe le plus grand nombre de polytechniciens entre 1802 et 1870[75]. C'est un lieu important d'enseignement, mais également de recherche et d'expérimentation durant cette période. L'établissement trouve son origine d'abord dans le déménagement en 1795 de

---

[70] T. Shinn explique que « Finalement, le système d'examens de l'EP favorise exclusivement la compilation d'un savoir scientifique encyclopédique et une orientation épistémologique strictement déductive. Aucune place n'est laissée à la spontanéité de pensée ou à la recherche d'approches nouvelles des problèmes. » [Shinn, 1980], p. 45.
[71] Jacques Babinet et Auguste Cahours comptent alors parmi les examinateurs de sortie de l'École.
[72] *Source* : archives de l'École polytechnique, dossier personnel de Laisant.
[73] [Shinn, 1980], p. 185. Notons que plus de la moitié des polytechniciens de l'époque entame une carrière dans l'artillerie.
[74] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 49.
[75] [Belhoste, Picon, 1996], p. 10. Ce paragraphe s'inspire très largement de cet ouvrage ainsi que du « Rapport à l'empereur sur l'organisation de l'École impériale d'application de l'artillerie et du génie » (24 juin 1854) paru dans le *Journal militaire officiel* (n° 42, librairie militaire, Paris, 1854).

l'École de Mézières vers Metz, ville d'intérêt éducative puisque fortifiée par Vauban, puis par sa fusion avec l'École d'artillerie (1802). Sa structure et l'enseignement proposée y relève donc constamment d'un équilibre fragile entre les deux armes jusqu'au milieu du XIX^e siècle. Il s'agit d'ailleurs à l'origine de fournir un enseignement de qualité égale entre les deux armes savantes, mais l'enseignement à Metz, s'inspirera, surtout à ses débuts, des principes de l'ancienne École du génie et favorisera les carrières d'ingénieurs. Les polytechniciens choisissant le génie sont d'ailleurs souvent mieux classés que ceux embrassant l'artillerie, mais leur appartenance à un corps d'arme ou à un autre n'est effective qu'après l'examen de sortie de l'École d'application. À partir de 1854, quelques enseignements spécifiques sont réservés à chacune des armes : la formation d'un officier du génie repose notamment principalement, depuis le XVIII^e siècle sur ses compétences en topographie, dessin et art de la construction[76].

De ses origines de Mézières, l'École de Metz garde le souci de relier enseignement théorique et applications pratiques, en particulier pour l'enseignement dominant, celui de la fortification, le cours d'artillerie prenant progressivement une place comparable. Seuls les cours de mathématiques et physiques échappent à cette tradition. Si l'École d'application se défend de promouvoir un enseignement trop mathématisé comme à l'École polytechnique, dans la pratique, l'outil mathématique continue à garder une place importante à côté de l'entraînement au dessin. Victor Poncelet, professeur entre 1825 et 1835, est le premier promoteur de l'introduction de théories mathématiques de haut niveau (calcul infinitésimal en particulier) pour la science des machines[77]. Remarquons dans l'enseignement de Poncelet l'usage fréquent de méthodes approximatives (graphiques ou itératives) pour suppléer à des formules trop compliquées ou d'applications peu pertinentes[78]. Son enseignement influencera ses successeurs à l'École de Metz (Morin, Boileau) pendant des années[79]. Quant à l'usage du dessin, le programme de 1854 en donne une place prépondérante dans le processus d'acquisition des notions (sur les machines entre autre) : le conseil d'instruction soutient que « le dessin exact qu'ils ont à exécuter à l'aide de leur croquis, sert à leur faire voir, à leur faire toucher du doigt, pour ainsi dire, les défectuosités qui peuvent se rencontrer dans ces

[76] Hamelin Fabrice, "L'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz ou l'organisation d'un compromis" in [Belhoste, Picon, 1996], p. 11-17.
[77] La première des trois parties de son enseignement traite des fondements théoriques de la science des machines.
[78] [Belhoste, Picon, 1996], p. 37.
[79] Chatzis Konstantinos, "Jean-Victor Poncelet et la « science des machines » à l'École de Metz : 1825-1870", in [Belhoste, Picon, 1996], p. 32-42.

derniers »[80]. Nous notons quelques-uns de ces aspects de l'enseignement à Metz car ils relèvent également de réflexions chez C.-A. Laisant par la suite. Il semble intéressant de rapprocher les grands principes d'enseignement de l'École d'application et les principes pédagogiques qu'adoptera ce dernier.

Une autre caractéristique est l'immuabilité globale des contenus enseignés entre 1830 et 1870. C'est notamment le cas pour l'enseignement de fortification, trop attaché aux principes de Vauban, ou de Cormontaigne [81]. La triple segmentation "cours/études d'applications et exercices/manœuvres et travaux" perdure sur la période 1802-1870 avec une prééminence des études d'applications ou « séances des salles » qui consistent, après la leçon correspondante, en levers et nivellements suivis de tracés et calculs, en projets ou en une simulation de siège. L'enseignement se veut également exhaustif, systématique sur l'ensemble des matières. L'acquisition de tous ces procédés forme un programme trop lourd et induit un travail très conséquent, contrôlé constamment. Mêmes les brouillons, jugés importants car développant l'intuition des élèves, sont évalués. [82]

[80] Cité dans [Belhoste, Picon, 1996], p. 40.
[81] Le *Traité de l'attaque et de la défense des places fortes* de Vauban reste un manuel de référence pour cet enseignement.
[82] Belhoste B., Picon A., " les caractères généraux de l'enseignement à L'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz" in [Belhoste, Picon, 1996], p. 18-28.

Cours	*Professeur*
Architecture et construction militaire, puis Fortification permanente	Henri Maurice Gouget (X 1839 ; 1857-1863)
Fortification passagère[83], art militaire et géodésie (et administration militaire)	Bon Thomas Henri Meurdra (X 1839 ; 1854-1861) Théophile Adrien Ferron (X 1850 ; 1862-1865)
Levers et dessins, et reconnaissance militaire, puis topographie	Charles Moyse Goulier (X 1836 ; 1844-1870)
Construction	Joseph Albert Chassinat (X 1834 ; 1855-1870)
Sciences mathématiques et physiques appliquées, puis mécanique appliquée aux machines[84]	Jean Frédéric Levassor-Sazeray (X 1844; 1861-1867)
Chimie et sciences naturelles appliquées aux arts militaires	François Xavier Dominique Jeandel (1854-1870)
Artillerie	Jean Baptiste Welter (X 1842; 1861-1868)

Enseignement et professeur de l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz[85]

[83] Composée depuis 1810 de quatre parties : organisation des armées, fortification passagère, communication militaire et problèmes stratégie.

[84] Le cours de mathématiques appliquées, faisant aux origines la liaison avec l'enseignement de l'École polytechnique, est progressivement distribué aux autres cours et supprimé en 1838.

[85] Sous le commandement de Edme Napoléon Léger Dejean puis Puniet de Montfort. Sont indiqués les promotions de l'École polytechnique de chacun ainsi que les années de début et de fin de fonction. À ces enseignements s'ajoutent les cours d'allemands par Auguste Adolphe Mall et d'équitation par Duterme. Nous renvoyons à [Belhoste, Picon, 1996], p.71-75 pour la liste des adjoints correspondants. On remarquera une répartition équilibrée des corps d'origine des enseignants entre génie et artillerie.

I.2. D'une carrière militaire à une carrière politique (1864 - 1876)

I.2.1. Le temps des succès : l'épisode du fort d'Issy

C.-A. Laisant sort de l'École d'application du génie à Metz en tant que lieutenant en second le 1er octobre 1863. Durant la période 1830-1880, 63,5% des polytechniciens entreprennent une carrière militaire[86] et sa hiérarchie voit en lui un futur « bon officier »[87]. Après un congé de quelques mois, il est affecté au 3ème régiment du Génie à Metz le 1er février 1864, puis rallie Montpellier le 8 novembre 1864 où il sera promu lieutenant en 1er (26 décembre 1864)[88].

Le 14 février 1865, le lieutenant épouse la fille d'un capitaine à la retraite, Clara Cécile Guichard, à Paris[89]. Notons la présence parmi les témoins, outre celle d'Antoine Vigreux, capitaine de la Garde nationale, de Pierre-Paul Guieysse (X 1860 ; 1841-1914) et les liens qui le rattachent à Laisant. Cet ingénieur hydrographe sera activement impliqué dans le siège de Paris en 1870, il deviendra répétiteur de mécanique à L'École polytechnique (1874-1893), et sera l'auteur d'ouvrages sur l'astronomie et le calcul des probabilités. En 1890, après avoir été directeur-adjoint de l'École des hautes-études, il fondera l'Institut des actuaires français et deviendra député radical et républicain du Morbihan, puis, en 1895, ministre des colonies.

C.-A. Laisant accède au grade de capitaine en second et intègre l'état-major particulier du génie à Brest (16 février 1867) puis reviendra à Nantes (24 décembre 1869). La hiérarchie du capitaine Laisant porte sur lui un regard bienveillant lors des inspections générales de 1866, 1867 et 1869. On y souligne qu'« il a de l'instruction et de la valeur »[90], il passe pour « un officier intelligent, possédant une instruction variée, zélé et désireux de bien faire »[91]; sa

[86] [Shinn, 1980], p. 80.
[87] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 49.
[88] [Shinn, 1980] qui estime alors le salaire d'un lieutenant à 1450 francs (p. 186).
[89] Etat civil du 20e arrondissement de la ville de Paris, registre V4E 2422, acte 74.
[90] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 52.
[91] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 53.

conduite et sa moralité sont jugées « irréprochables »[92]. On voit en lui un « officier intelligent, instruit, ayant un goût particulier pour les études mathématiques »[93]. Cependant, sa santé fragile signalée dès 1867 et ses aptitudes médiocres dans l'art des manœuvres et de la cavalerie le destinent plutôt à une carrière administrative.

Les évènements vont néanmoins lui permettre de prouver sa valeur lorsque, le 19 juillet 1870, la France déclare la guerre à la Prusse[94]. Laisant est incorporé au troisième régiment du génie à Paris et participe aux travaux de défense du fort d'Issy, place forte au sud-ouest de la capitale. Jusqu'à l'armistice du 28 janvier 1871, Laisant fait face au siège imposé par les armées prussiennes qui s'empareront de toutes les positions françaises autour de Paris, sauf celle du fort d'Issy. Nous avons retrouvé les traces d'une lettre adressée à son père et datée du 2 novembre 1870, au lendemain de la défaite du Bourget (30 octobre 1870) et du soulèvement du 31 octobre. On retrouve dans cet envoi la détermination de Laisant mêlée de fatalisme, l'expression de ses convictions républicaines (et de celle de son père) et une position surprenante quant à la Commune, lui qui votera pourtant l'amnistie en 1880.

> *Mon cher père,*
> *Tu connais sans doute les évènements récents de Paris : les journaux ont du te les apprendre. La situation est horriblement triste : aucune solution ne m'est connue au moment ou je t'écris, mais il me semble qu'un armistice est dans l'air, et un armistice, selon moi, c'est la paix, et une paix honteuse; c'est une assemblée monarchique, réactionnaire et Prussienne qui va être nommée sous la pression des envahisseurs, et acceptera toutes les conditions de Bismarck. C'est la guerre civile après peut-être le démembrement de la France, peut-être une restauration monarchique, et en mettant tout au mieux, c'est la guerre à nouveau dans quelques années. Puis je me tromper ! Quand à ceux qui veulent faire la commune, je les tiens pour des fous ou des traitres; quels que puissent être les reproches qu'ils aient à formuler contre le gouvernement, on est sûr de tout compromettre en le changeant en ce moment ci .Qu'on l'excite, qu'on le pousse et qu'on l'aide ; il n'y a pas autre chose à faire. Toute division est une aide pour les Prussiens et une chance de moins de nous voir suivis par la Province, qui, entre parenthèses, ne semble guère nous suivre. Quant à moi, je crois qu'il n'y a qu'une chose à faire : résister, et toujours résister ; et brûler tout Paris si les Prussiens y rentrent. Le plus difficile, c'est de faire accepter cette idée aux Parisiens.*
> *J'ai sous les yeux en ce moment ta dernière lettre du 9 septembre ; tu avais mille fois raison en me disant : La République vient bien tard. Je suis persuadé que si, dès nos premiers désastres, la gauche avait montré plus d'énergie; que si le jour de la 1ère manifestation du corps législatif, l'opposition était descendue dans la rue, nous serions sauvés maintenant. […]*

[92] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 55.
[93] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 55.
[94] Sur le conflit de 1870, on pourra consulter [Roth, 2005].

Va à Nantes, voir Guépin et les autres notabilités de la démocratie, et si ils jugent que ma présence puisse être utile à Nantes, qu'ils me demandent et je m'y rendrai (il faudrait pour cela l'adressée au gouvernement). [...]
je pourrais peut-être y aller si j'étais réclamé, même en dehors d'un armistice (par ballon) ; mais je considère que ma vrai place est plutôt ici : toutefois, je suis aux ordres de la République et me rendrai toujours là où elle jugera que je puis lui rendre le plus de services.

Sa conduite[95] sera récompensée par sa nomination au grade de chevalier de la Légion d'honneur le 18 janvier 1871. Beaucoup plus tard, Hermann Laurent, examinateur et répétiteur à l'École polytechnique, condisciple de Laisant à l'X, lui remettra les insignes d'officier de la Légion d'honneur, le 4 août 1902, en mémoire de cette période glorieuse du fort d'Issy.

I.2.2. Le temps de la disgrâce : les difficultés de concilier deux carrières

Alors que chez le jeune officier Laisant s'affirme une pensée politique radicale en opposition avec sa hiérarchie, son entrée dans la vie politique s'impose naturellement, malgré les inconvénients que celle-ci peut engendrer pour l'ascension dans les strates militaires.

PREMIER RESEAU OU DOMINE UN SENTIMENT REPUBLICAIN AFFIRME, LA FRANC-MAÇONNERIE

Sous le Second empire, le mouvement maçonnique, fondé au XVIII^e^ siècle en Grande-Bretagne, voit ses réflexions philosophiques se transformer en une véritable action politique. Alors qu'à l'époque, il n'existe en France ni parti politique, ni association (il faudra attendre pour cela la loi de 1901), les loges maçonniques se fixent le but de préparer l'avènement de la III^ème^ République et de lutter contre le régime autoritaire et conservateur, soutenu par l'Église. Et si on compte plusieurs francs-maçons lors de l'insurrection de la Commune, c'est par les élections que les idéaux républicains vaincront, élections qu'il convient donc de préparer par le choix et le soutien de candidats. En 1870, on estime en France à 10 000 le nombre de francs-maçons et 400 celui de loges qui regroupent les notables locaux (maire, médecin, avocats, représentants de la police) et qui forment un véritable maillage du territoire national.

[95] Laisant « se comporta pendant tout le siège avec beaucoup de courage et de dévouement » selon le général Chabaud-Latour, chargé des travaux de défense de la capitale. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 1, pièce 11.

Le 1er octobre 1869, est créée à Nantes une nouvelle loge maçonnique : la loge de la « Libre conscience » qui vient s'ajouter notamment à celle de « Mars et les Arts » dans laquelle A. Guépin sera Vénérable de 1869 à 1871, avant de devenir membre du conseil de l'ordre du grand Orient. Les douze fondateurs [96] de la « Libre conscience » sont des républicains intransigeants et de fervents opposants au régime impérial : ils réagissent à l'ingérence de Napoléon III dans la vie du Grand Orient à travers la nomination du Grand Maître. Venant de diverses loges, leurs activités professionnelles tournent principalement autour du négoce et du commerce. On y retrouve cependant le capitaine du génie Laisant qui est alors affilié à la loge des « Amis de Sully » de Brest[97], loge militaire créée en 1782 pour les sous-officiers sous le nom des « Élus de Sully » qui accueille également des personnes d'horizons divers.

Le 1er octobre correspond en fait à l'installation définitive de la loge dans le temple du 8 de la rue Saint Nicolas. La loge adopte alors un règlement intérieur destiné à faciliter l'arrivée de nouveaux frères, ceux aux revenus modestes (on diminue la cotisation et les frais d'initiation pour les militaires, artisans et ouvriers). Elle accueille aussi ceux qui ne peuvent choisir entre les loges existantes. Durant cette réunion, outre les discours de Laisant et Guépin[98] qui seront tous deux membres actifs de cette loge, il est décidé qu'un « tronc de l'enseignement » circule à chaque séance afin de subvenir aux besoins liés à la création d'une école sous le patronage des loges nantaises. L'éducation reste un objectif de la loge : en décembre 1871, sera créée une bibliothèque populaire (avec 400 volumes) et un financement de livret de caisse d'épargne pour les élèves méritants. Le thème de l'éducation des masses est central dans le débat politique du moment : Laisant réclame dès 1873 l'Instruction publique primaire obligatoire, gratuite et laïque[99].

Laisant sera premier vénérable officiel de la loge de février 1870 à octobre 1871[100], période durant laquelle la loge passe de 12 à 31 membres. Dans son discours d'installation du 10 avril 1870, Laisant présente le rôle dévolu à la franc-maçonnerie, la nécessité de l'action au service du progrès de la société :

[96] Bayon P. -1er Vénérable-, Berruyer C., Beziaux A., Cassard A., Charpentier C., Chelet A., Douard A., Duval C., Etiembre C., Goron P., Mallet L.

[97] [Guengant, 2008]. Voir aussi Guengant Jean-Yves, "« Les élus de Sully et de Fourier » : une rencontre durable entre francs-maçons brestois et fouriéristes (1839) ", *Cahiers Charles Fourier*, n°18, 2007, p. 51-65.

[98] Guépin représentera Nantes auprès des autres loges de France en 1871 [Hesse, 1994].

[99] [Librec H., 1849]. Voir aussi [Pageot, 1911].

[100] On retrouve encore le nom de Laisant parmi les 48 noms des frères de la loge en 1880.

Nous allons avoir à combattre, à lutter, car la vie de l'homme de bien n'est que lutte ; car la Maçonnerie ne saurait atteindre son but par la contemplation des idées. Elle glorifie le travail, elle doit travailler, elle doit agir. Il y a en effet bien des obstacles à surmonter, bien des entraves à rompre, lorsqu'on veut marcher droit devant soi dans la ligne des Principes. Il y a tant de vices, tant d'erreurs, tant de préjugés dans le Monde ! […]
Sans doute les rives d'une nouvelle terre promise sont encore bien éloignées, ne pouvant être aperçues qu'avec le secours du progrès matériel et intellectuel, beaucoup désespèrent et la peur transfigure en lueur sinistre d'un immense incendie l'horizon de l'avenir majestueusement éclairé par la Liberté, l'Egalité couronnée de la Fraternité .
D'ici à cet heureux atterrissage, la traversée sera longue assurément. Le temps changera souvent et la barque qui nous y porte ne manquera pas d'être exposée à bien des récifs, à bien des tempêtes. La barre, dans le danger, sera-t-elle confiée à des mains sûres et habiles, intrépides à l'occasion, toujours prudentes ?
Cette image réelle de la navrante situation de la Société rend obligatoire le rôle dévolu à la franc-maçonnerie par son glorieux passé, celui de se placer constamment en vigie…[101]

Durant les séances qui suivent, les frères débattent des grands sujets de société et exaltent un sentiment républicain teinté d'idéal maçonnique. Laisant rejoint ensuite son poste à Issy et expose ses motivations de franc-maçon :

Montrons que nous sommes des hommes de paix et de libertés et que nous flétrissons les conquérants et despotes. Voilà notre devoir de maçons et, demain, redevenus citoyens, nous saurons montrer aussi, les armes à la main, que nous n'avons pas plus de crainte des tyrans sur leurs champs de bataille que sur ceux des idées.[102]

Malgré le conflit, Laisant reste actif dans la franc-maçonnerie nantaise au travers d'interventions sur des sujets plus scientifiques, comme les conférences sur l'air des dimanches 12 et 19 décembre 1870, reprises dans *L'école maçonnique*.

Son activisme républicain restera fort les années suivantes, y compris en dehors de la franc-maçonnerie, à travers le comité républicain de Nantes fondé en 1870. En 1876, le conseiller général Laisant sera soutenu par le comité et s'exprime dans divers journaux sous le pseudonyme Natalis (*L'écho Nantais*, *L'union démocratique*, *L'école maçonnique*, *Le phare*). Laisant est aussi un proche du républicain Jean Macé, fondateur en 1866 de la Ligue de l'enseignement.

[101] [Librec H., 1849].
[102] [Librec H., 1849].

Il nouera des liens étroits avec les loges maçonniques parisiennes durant ses mandats de député, particulièrement la loge « Les Disciples du Progrès »[103]. Le cas de Laisant n'est évidemment pas isolé : depuis Gambetta et Ferry, tous deux francs-maçons, de nombreux ministres et hommes politiques de la Troisième République appartiennent à l'ordre. Les victoires républicaines ont permis l'entrée au parlement de la franc-maçonnerie, si bien qu'on estime qu'après 1880, plus du tiers du parlement est constitué de francs-maçons. C'est ainsi que les débats au sein des loges sont relayés par les grandes lois de la Troisième République, à commencer par la loi de 1881 sur la liberté d'expression et de la presse[104]. Avec cette nouvelle liberté de parole, le débat enfle entre républicains et conservateurs. L'Église se montrant hostile face à cette République, l'idéologie maçonnique devient clairement laïque. L'ordre cristallise la bataille de l'anticléricalisme. Cette laïcisation se traduira par exemple par les lois Ferry sur l'éducation, mais également, par le texte relatif au droit au divorce défendu en 1886 par Alfred Naquet. Ce franc-maçon proche de Laisant (il signera la préface de *L'éducation fondée sur la science*) sera lui-même un des principaux boulangistes et adhèrera à la Ligue internationale pour l'éducation rationnelle de l'enfance.

Voici comment s'exprimera le député Laisant lors de son discours à la loge « La clémente amitié » de Paris sur l'influence de la franc-maçonnerie parisienne :

> *Je crois que la Maçonnerie a encore ici un grand rôle à remplir. Il n'y a pas à Paris un républicain qui n'ait au moins un correspondant dans les départements et il peut ainsi avoir une action pour la propagande de cette idée. Il faut que la propagande se fasse au grand jour…*[105]

Cette remarque illustre les liens Paris-Province que semble défendre Laisant à travers la franc-maçonnerie, comme il voudra les promouvoir pour les mathématiques à travers sa participation aux congrès de l'AFAS. Plus que le goût du secret, la maçonnerie inculque à Laisant une culture des réseaux de relations. Plusieurs de ses proches parmi ceux s'occupant de questions d'enseignement seront francs-maçons (Naquet, Ferrer par exemple).

[103] [Wright, Anceau, 2007], p. 243.

[104] À la suite de cette loi, le nombre de journaux se multiplie et on comptera en 1885 plus de 1540 titres de journaux pour la seule ville de Paris.

[105] [Librec H., 1949].

LES ELECTIONS DE 1871

L'année 1871 signe un tournant dans la carrière de l'officier Laisant. Alors qu'il est affecté à Nantes le 27 mars, Laisant bénéficie d'un congé jusqu'au 23 octobre, congé qui lui permet de participer aux élections locales et d'être élu conseiller général du 1er canton de Nantes le 20 octobre.

Cette intronisation de Laisant dans la vie politique est principalement l'œuvre de l'un des chefs du parti républicain de Loire-Inférieure : Ange Guépin. Outre leur appartenance à la franc-maçonnerie, les parcours des deux hommes présentent quelques similitudes à signaler. Ange Guépin est né en 1805 dans le Morbihan d'une famille de la petite bourgeoisie dont le père a été un révolutionnaire actif. Comme Laisant, il est reçu à l'École polytechnique mais n'intègrera pas la prestigieuse institution en raison du passé politique de sa famille. Guépin se dirige alors vers la Faculté de médecine et soutient sa thèse en 1828. En s'installant à Nantes, il s'inscrit dans la vie politique locale à travers plusieurs mandats dont les fonctions de préfet sous les IIème et IIIème Républiques. Ces mêmes convictions politiques le conduisent en prison sous le second Empire. Comme Laisant, sa carrière scientifique combine travaux originaux (notamment en ophtalmologie), enseignement (et réflexion sur la formation scientifique et le baccalauréat dans les années 1830), vulgarisation et participation à des sociétés savantes (Société académique de Nantes, Société industrielle de Nantes). Une même idée semble gouverner la pensée des deux hommes : « celle du progrès de l'humanité grâce à l'association et à la science »[106]. Laisant ne renierait pas cette foi teintée de saint-simonisme dans le progrès par la science, dans l'éducation des esprits et dans le développement des techniques pour le bien de toutes les classes sociales. Comme Laisant enfin, Guépin aborde dans la dernière partie de sa vie une réflexion plus large sur les relations entre Science et Société, notamment en ce qui concerne l'éducation. Chez lui et souvent chez Laisant, « Le politique tend à l'emporter sur le savant, mais un politique qui ne conçoit sa théorie qu'appuyée sur la Science »[107]. Et si les croyances de Guépin en un socialisme scientifique[108] ne sont pas si révolutionnaires que les dernières prises de position de l'anarchiste Laisant, on comprend mieux pourquoi Laisant clôt le discours qu'il prononce aux obsèques d'Ange Guépin le 21

---

[106] [Hesse, 1994], p. 371. Voir aussi [Wright, Anceau, 2007].
[107] Selon les termes de Philippe Hesse (ibid., p. 377).
[108] Selon les termes de Guépin, « Le véritable socialisme ne sera donc désormais que l'application de la science ». Ou encore « l'on entend pas socialisme, la science qui doit conduire à un état social amélioré » (Ibid. p 378).

mai 1873[109] par cette affirmation sans équivoque : « Dans cette mort, qui réclame pitié ? […] C'est vous tous qui êtes venus lui rendre les derniers honneurs, c'est moi qui lui doit tout »[110].

Laisant se présente donc tout d'abord aux élections législatives du 8 février 1871 qui suivent l'armistice de Versailles (28 janvier 1871). Membre de la liste républicaine de la Loire-Inférieure, Laisant subit un revers électoral comme tous les autres candidats de sa sensibilité : le pays est précipité dans une campagne où les thèmes de la paix et de l'ordre, incarnés par les monarchistes trouvent un meilleur écho que les items républicains (droit des citoyens et libertés politiques par exemple)[111].

Toujours appuyé par Guépin, il obtient pourtant son premier succès aux élections du 8 octobre 1871 où il devient le plus jeune conseiller général du premier canton de Nantes à l'âge de 30 ans, Guépin est quant à lui élu du troisième canton.

La defiance de sa hierarchie

Depuis plusieurs années, les convictions politiques de Laisant sont surveillées par les autorités. Ainsi, en 1870, après des agitations dans la ville de Saumur, base arrière pour l'armée où Laisant est envoyé pour intérim[112], le préfet adresse un télégraphe au ministre de l'intérieur dans laquelle il explique : « Le Capitaine du Génie Laisant est signalé comme peu sûr et en relation avec des socialistes »[113]. Laisant est déjà en effet un républicain convaincu : avec James Combier, chef de file local des républicains et adjoint au conseil municipal de Saumur, anticlérical et futur boulangiste, il partage la même désapprobation du conservatisme de Thiers[114] ou de la répression que ce dernier organisera contre la Commune de Paris.

Laisant entretient ainsi des rapports conflictuels avec sa hiérarchie au moment des élections législatives de février 1871 puisque le capitaine s'y présente sans en informer ses supérieurs[115]. L'ascension politique du jeune conseiller s'oppose à la poursuite de sa carrière

[109] Discours prononcé en tant que Conseiller général et au nom de la maçonnerie.
[110] [Sauvage, 1994] p. 65. Dans le même discours, « il [Guépin] montrait par ses actes et ses discours tout ce que peut la science au service de la justice » in *Le Phare de la Loire* daté du dimanche 25 mai 1873.
[111] L'assemblée nationale compte alors 400 monarchistes pour 200 républicains.
[112] [Sauvage, 1994], p. 64.
[113] Dépêche télégraphique datée du 9 août 1870 où il est question du socialiste Combier parmi les fréquentations de Laisant. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 26.
[114] Auteur à l'Assemblée nationale de la célèbre phrase : « La République sera conservatrice ou elle ne sera pas » (18 novembre 1872).
[115] Extrait de la lettre du général de la division, commandant en chef du génie d'armée de Paris, à monsieur le ministre de la guerre, datée du 12 février 1871 :

militaire, particulièrement pendant la période où le général Ernest Courtot de Cissey occupe les fonctions de ministre de la guerre, c'est-à-dire du 5 juin 1871 au 24 mai 1873. Ce dernier a notamment pris une part active dans la répression de la Commune de Paris dont s'est peut-être senti proche Laisant[116].

Laisant est dès lors affecté successivement à Bourges (mais il ne rejoint pas cette garnison), puis à Tours (le 29 octobre 1872) où il verra la naissance de son fils unique : Albert né le 1er juin 1873[117] et où il est nommé capitaine en 1er [118]. Remarquons que la plupart des polytechniciens ne restent qu'en moyenne quatre ans au grade de lieutenant : le passage par l'École, l'acquisition d'un savoir scientifique complet, les valeurs qui y sont développées, la réputation de l'établissement et les relations qui s'y tissent, facilitent l'avancement en grade notamment par rapport aux "non-polytechniciens", plus nombreux aux grades d'officiers moyens. Cette période aura a contrario duré neuf ans pour Laisant.

Le 21 mai 1873, les funérailles d'Ange Guépin marquent un nouvel épisode dans ces rapports conflictuels. Le « discours de libre-penseur »[119] qu'y prononce Laisant en tant que conseiller général est remarqué, si bien que la permission qui lui a été accordée pour l'évènement est abrégée : Laisant doit être de retour à Tours le lendemain[120]. Ses positions de républicain radical s'opposent au nouveau pouvoir en place et aux autorités militaires. Une lettre adressée au ministre de la guerre explique : « M. Laisant passe pour être à Tours le chef de l'Internationale […Il] finit par revenir sur ses errements; actuellement exploité par le parti radical qui le prend pour son porte drapeau et subissant l'influence du milieu dans lequel il se trouve »[121]. Le changement d'affectation est alors inévitable.

C.-A. Laisant est ensuite envoyé à Bastia, le 27 octobre 1873. Ces nombreuses affectations ne sont évidemment pas de nature à soutenir le nouveau conseiller général de la Loire-Inférieure qui ne fait aucun secret de ses opinions politiques. L'éloignement consécutif à son affectation en Corse est ainsi présenté par le ministère de Ernest Courtot de Cissey : « Je

---

> *Monsieur Laisant, Capitaine en 2ème à la 18ème compagnie de sapeurs du 9ème régiment du génie, a quitté Paris pour se rendre dans le département de la Loire-Inférieure afin de s'y porter candidat pour les élections à l'Assemblée nationale, et cela sans que le capitaine commandant la compagnie ni aucun des autres chefs de cet officier dans l'ordre hiérarchique n'ait été informé.*

SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 32.

[116] C.-A. Laisant votera pour l'amnistie des communards.

[117] Etat civil de la ville de Tour, acte de naissance n° 492, 1873.

[118] Il percevrait un salaire de 2 400 francs [Shinn, 1980], p. 186.

[119] Lettre du Général commandant le 4ème corps au ministre de la guerre datée du 26 septembre 1873. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 40.

[120] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 39.

[121] Ibid.

n'ai pas laissé ignorer à M. Laisant, quand il a demandé l'autorisation de se présenter comme candidat au conseil général dans le département de Loire-Inférieure que, s'il était élu, il ne pourrait être maintenu dans son emploi à Nantes »[122]. Et même si il reste bien noté par ses supérieurs[123] lors de l'inspection générale de 1873, il est précisé : « Le Capitaine Laisant s'occupe beaucoup de politique et s'en fait un mérite [...Il] a de la facilité et écrit bien; il est d'un caractère froid et réfléchi et passe pour avoir des convictions politiques arrêtées. »[124]. Le *Phare de la Loire* commente quant à lui l'évènement : « Les opinions républicaines de M. Laisant sont connues [...] Pour M. Laisant ce sera une sorte d'exil [...] on rendra ainsi difficile l'accomplissement de son mandat [...] Les officiers républicains ne sont pas en faveur et on les éloigne volontiers »[125].

Malgré les difficultés qui se dressent devant lui lors de ses diverses affectations militaires, Laisant assiste à toutes les réunions du conseil général. Il sera réélu conseiller général du 1er canton de Nantes en 1874.

I.2.3. De l'« exil » en Algérie à Laisant démissionnaire

C.-A. Laisant embarque finalement pour l'Algérie le 1er février 1875. Il sera en position à Tlemcen, au nord-ouest du pays, le 14 février, avant d'être muté de nouveau à Sidi-Bel-Abbès, le 24 novembre de la même année[126].

Cette nouvelle affectation complique la tâche du conseiller général, qui continue néanmoins d'assister aux séances du conseil, mais aussi celle du passionné de mathématiques éloigné des grands centres de recherches, comme il l'expliquait déjà quand il était en poste à Tours dans une lettre adressée au ministre de la guerre :

> *Je désirerais être employé à Paris. Le motif qui me fait surtout souhaiter ce changement consiste dans les ressources scientifiques qu'on trouve à Paris, et à Paris seulement. Depuis que j'ai quitté l'École Polytechnique, et surtout depuis quelques années, j'utilise les loisirs que me laisse mon service pour travailler les mathématiques pures ; mais dans une place telle que Tours, et en province d'une*

---

[122] Note de la Direction générale du personnel, réponse du Ministre à le lettre de M. le Général Commandant la 15e division militaire, SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 6, pièce 67.

[123] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 37.

[124] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 59.

[125] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 6, pièce 75.

[126] Apparemment sur sa propre demande au vu de la correspondance du 6 juillet 1874 où Laisant craint pour la santé de son enfant à l'approche des fortes chaleurs de l'été. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 5, pièce 65.

façon générale, je ne puis le faire que dans des conditions bien défavorables. Les bibliothèques, les cours, les sociétés savantes, et surtout les relations dans le monde scientifique, si précieuses en pareille matière, me font ici presque complètement défaut[127].

L'EPISODE DU SERVICE METEOROLOGIQUE

Le séjour à Tlemcen en 1875 sera l'occasion d'une rencontre avec le capitaine Henri Brocard chargé de la création du service météorologique en Algérie. Laisant reviendra sur cette période notamment lors de la séance du 28 février 1903 de la Société philomathique de Paris lorsqu'il présente en son nom et en celui du colonel Mannheim la candidature du commandant Brocard comme membre correspondant de la première section. Le travail avec Brocard, s'il se développe autour de questions météorologiques en 1875, amorce en effet une longue collaboration entre les deux hommes, notamment à travers les capacités de recherches bibliographiques de celui qui participera activement à *L'Intermédiaire des mathématiciens*.

Brocard, un collaborateur précieux

Né dans la Meuse, le 12 mai 1845, Henri Brocard prépare le concours d'entrée à l'École polytechnique au lycée de Strasbourg[128]. Il y est admis en 1865 (117e) et en sort 41e sur 133 pour intégrer le génie militaire. Après un bref passage dans l'enseignement à Montpellier, il sert l'armée sous Mac-Mahon et sera fait prisonnier à Sedan. Après sa libération, Brocard est basé en Algérie pendant six ans à partir de 1870 (le séjour en Algérie de Laisant dure moins d'un an). Après plusieurs affections (Sétif, Batna, Biskra, Constantine), il est nommé à Alger à partir du 23 janvier 1874 au service météorologique du Gouvernement général de l'Algérie, adjoint du général Farre. Il ne rentrera en métropole qu'en 1876 : c'est durant cette période que Laisant sert sous ses ordres. Après avoir été enseignant de physique et chimie à Grenoble (1877-1879)[129], il revient en Algérie pour deux ans, toujours au service météorologique. Outre son affectation au bureau d'Alger où sont centralisées les informations recueillies dans les différentes stations du continent[130], il met en place le réseau

[127] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 5, pièce 39. Lettre de Laisant au Ministre de la Guerre datée du 10 juillet 1873.
[128] Voir sa *Notice sur les titres et travaux scientifiques*, Bar-le-Duc reproduite dans [Romera, 2004] et l'annexe IX de [Romera-Lebret, 2009] dont s'inspirent largement les lignes qui suivent.
[129] Voir ses *Notions de Physique* et ses *Notions de Chimie*.
[130] [Romera-Lebret, 2009]. Brocard participe à plusieurs commissions météorologiques départementales en métropole ; il adhère également à la Société météorologique de France.

météorologique algérien (19 stations) et participera à la fondation l'Institut météorologique d'Alger. Le chef de Bataillon Brocard quitte l'armée en 1893.

Brocard rejoint, comme Laisant, la Société mathématique de France (SMF) dès 1874 et sera membre de l'AFAS à partir de 1875. Outre sa participation au *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* et sa collaboration exceptionnelle à *L'Intermédiaire des mathématiciens* (réponses à environ 1300 questions et rédaction des tables analytiques de 1894 à 1903) [131], il intervient à de multiples reprises dans plusieurs revues : les *Nouvelles annales de mathématiques* notamment (46 solutions, 21 questions entre 1868 et 1893).

Même si Brocard a eu divers centres d'intérêt (en arithmétique, on peut citer le problème de Brocard concernant l'équation $n\,! + 1 = m^2$), ses travaux portent principalement sur la géométrie du triangle (points et cercles de Brocard)[132] et débutent en 1881 avec une communication au congrès de l'AFAS d'Alger[133]. Il publiera *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (1897) et *Courbes géométriques remarquables* (1899), ses deux principaux ouvrages.

Passionné de renseignements bibliographiques, il sera membre de la commission permanente du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* dès les origines du projet en 1887. Lorsqu'en 1893 Laisant devient secrétaire de la commission permanente en charge du *Répertoire*, Brocard se voit confier par ce dernier l'analyse des mémoires mathématiques apparaissant dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*. Brocard s'acquitte de cette tâche laborieuse et gigantesque et produira 6814 fiches au total [134]. On peut noter également ses participations aux Congrès internationaux des mathématiciens. Il mourra dans la ville de Bar-Le-Duc en 1922, là où il s'était retiré dans les dernières années de sa vie.

Quant C.-A. Laisant offre à Brocard de collaborer à *L'Enseignement mathématique*, ce dernier semble décliner l'offre et s'explique dans une lettre datée du 10 Novembre 1898 (à Bar-Le-Duc). Le passage suivant nous éclaire non seulement sur l'activisme de Brocard au sein des revues de l'époque, mais également la confiance qui l'unit à Laisant, près de vingt-cinq ans après leur rencontre :

[131] Voir la nécrologie qui lui est consacrée dans les colonnes de *L'intermédiaire des mathématiciens*. Sur cette revue, on pourra consulter [Pineau, 2006].
[132] Sur la géométrie du triangle, on pourra consulter [Romera-Lebret, 2009].
[133] "Études d'un nouveau cercle du plan du triangle", *Compte rendu du Congrès d'Alger*, (t. X, 1881, p. 138-299), congrès pour lequel il est membre du comité local d'organisation.
[134] Cet important travail est analysé dans [Romera-Lebret, 2009], annexe IX, p. 71.

Je vous félicite de cette excellente initiative qui me paraît appelée à rendre les plus grands services à la Science ; toute ma sympathie vous est acquise d'avance pour le succès de votre nouvelle publication, mais, en vérité, je ne pourrais être qu'un très médiocre collaborateur. Le genre auquel je me suis voué est celui des journaux à questions plus ou moins inattendues, tels que les Intermédiaires des math. et de l'AFAS. Mon esprit s'y est habitué et je me suis attaché à me rendre utile à ces publications. Le genre du nouveau journal me paraît tout différent et je suis loin d'y être exercé. Et puis, je crois que vous vous faites illusion sur ma compétence en matière d'enseignement. Je ne connais pas le personnel enseignant, et je n'ai avec lui que des relations de banale politesse ; jamais je n'ai traité les questions d'enseignement et je n'ai pas eu l'occasion de recevoir communication des programmes. Il me serait bien impossible d'en parler ; et quand vous m'offrez l'hospitalité de 30 pages, même de 50, que vous allez jusqu'à me dire : « la maison est à vous », je suis loin d'y entrer ; je doute même d'en franchir timidement le seuil. Faut-il ajouter que je n'ai jamais enseigné ni fait de répétitions de mathématiques ? J'avais tenté d'en obtenir ici, mais en vain ; J'ai donc été et je continue à être tout à fait étranger à cet enseignement. Ce serait de ma part une témérité inexcusable que de vouloir me mettre à en parler.[135]

Laisant et le service météorologique

Laisant, visiblement intéressé par les travaux à Tlemcen, tentera de promouvoir les études météorologiques en métropole. En 1875, Il sera présent au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS) qui se tient à Nantes du 19 au 26 août. Outre les communications faites au sein des sections 1 & 2 liées aux mathématiques, le capitaine Laisant expose devant les membres des 5 & 7ème sections (météorologie et physique du globe) le fonctionnement du service météorologique en Algérie :

Absolument étranger aux études météorologiques jusqu'à ces derniers temps, je fus appelé en Algérie vers le commencement de l'année 1875, et je me trouvai conduit à coopérer dans une certaine mesure à l'établissement et à la direction de quelques stations météorologiques dans la chefferie de Tlemcen. Il était impossible de prendre une part, même faible, à cette organisation, sans être frappé de l'importance réelle qu'elle présente. Il est très remarquable qu'avec de si faibles moyens, dans des conditions souvent très-difficiles, on soit parvenu aux résultats obtenus aujourd'hui. Ces résultats sont dus au général Farre pour une bonne part, et aussi au capitaine du génie Brocard, chargé du bureau central météorologique d'Alger, et qui le dirige avec une intelligence et un dévouement bien dignes d'éloges.

Cependant, cette organisation, assez récente, n'est pas connue en France aussi complètement qu'elle mériterait de l'être. C'est ce qui me décida dernièrement à demander au général Farre s'il ne jugerait pas opportun de communiquer au

[135] Archive Genève. Fond Fehr. Brocard ne signera en effet aucun article pour *L'enseignement mathématique*.

> *Congrès de l'Association française une notice indiquant à grands traits l'organisation du service et les principaux résultats acquis*[136].

Laisant présente donc la « Notice sur le service météorologique du Gouvernement général d'Algérie »[137] rédigée par le général Farre, commandant supérieur du génie en Algérie. Ce dernier y rappelle les récents progrès de la science météorologique, les principales étapes de la mise en place des observatoires, la contribution de Sainte-Claire Deville, professeur de chimie à l'École Normale Supérieure depuis 1851, l'administration du service et la parution des premières observations. Les sections de physique et météorologie - physique terrestre adoptent alors ce 23 août 1875, à l'unanimité, le vœu suivant :

> *La section de physique émet le vœu à l'unanimité de voir le décret du 13 février 1873 rendu définitivement applicable à tout le territoire français, et spécialement au département de la Loire-Inférieure, auprès duquel M. Laisant se propose d'agir en qualité de membre du conseil général.*[138]

Comme l'a expliqué précédemment Farre dans son intervention, ce décret scinde les travaux météorologiques en deux. Une première branche concerne les études des grands mouvements dans l'atmosphère et les avertissements aux ports et à l'agriculture. Une deuxième est destinée à l'étude météorologique des divers bassins de France par des commissions régionales et locales. Leur création est alors explicite mais elle deviendra définitive suite à une circulaire du directeur de l'observatoire de Paris, Le Verrier, en date du 28 mai 1873.

L'idée de reproduire le modèle algérien à Nantes émane d'un professeur de l'École des sciences, Larocque, pour qui, « il n'existe rien pour ainsi dire, en fait de service météorologique »[139]. Le jugement est sévère puisque depuis l'observatoire de la rue des Flandres, Frédéric Huette, puis, à partir de 1871, Auguste Lefièvre relèvent inlassablement depuis dix ans les données météorologiques du département. Mais ces pratiques "artisanales" et isolées semblent en décalage avec la volonté de moderniser l'étude météorologique en France.

Rapidement, Laisant demandera un crédit de 500 francs lors de la séance du conseil général du 26 août 1875. Comme le prévoit le décret du 13 février, il s'agit enfin d'installer, comme ce fut rapidement le cas en Algérie, une commission météorologique dans le

---

[136] [Laisant, 1875d], Laisant C.-A., "Service météorologique en Algérie", *AFAS, Nantes*, 1875, p. 387.
[137] [Farre, 1875]. Voir aussi l'intervention de Sainte-Claire Deville à l'Académie des sciences lors de la séance du 27 juillet 1874. [Sainte-Claire Deville, 1874].
[138] *AFAS, Compte rendu du Congrès de Nantes*, 1875, p. 430.
[139] Article dans *Le Phare de la Loire* du 25 août 1875, cité dans [Sauzereau, 2000], p. 89.

département. Le débat tourne autour de la question du local à céder par la préfecture, puis du montant de l'enveloppe. Finalement, s'appuyant sur son expérience en Algérie, Laisant explique :

> *il n'est pas admissible que nous ne fassions pas ce qu'on a fait en Algérie. La nomination de la commission météorologique départementale est indispensable pour coordonner et contrôler les observations, pour servir d'intermédiaire entre les observateurs locaux et l'observatoire de Paris*[140].

Le préfet autorise le vote du crédit et ce vote amène à la création de la commission météorologique de la Loire-Inférieure, selon le souhait de Larocque, et grâce au soutien de Laisant.

COLLABORATION AUTOUR DU COMPAS TRISECTEUR

Nous présentons un autre exemple des premières collaborations avec Brocard. En 1875, Laisant s'intéresse à un mémoire de douze pages publié l'année précédente par ce dernier : « Sur divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle »[141]. Laisant suggère alors à Brocard la construction d'un compas articulé que celui-ci expose le 31 mars 1875 à la Société mathématique de France. Le « moyen très-ingénieux de diviser un angle en trois parties égales »[142] proposé par le capitaine du génie est basé sur deux losanges articulés OABC et BEDC où OBD est la tige rigide sur laquelle glisse D (soit sept tiges articulées et six articulations dont une à glissière). L'angle EOA est alors divisé en trois angles égaux : EOI, IOC, COA. Brocard souligne même les avantages que fournit cette solution pour la trisection de l'angle, comparée à d'autres compas articulés, comme ceux proposés par Charles Peaucellier à l'occasion d'une « Note sur une question de géométrie de compas » parue dans les *Nouvelles annales de mathématiques*[143] permettant le tracé du limaçon de Pascal et donc la trisection.

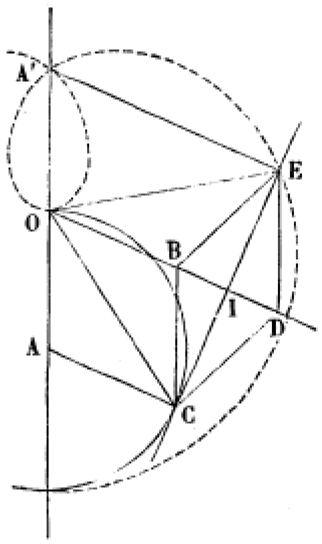
---

[140] A.M.N., 22Press43, *Le phare de la Loire* du 28 août 1875 cité dans [Sauzereau, 2000], p. 89.

[141] Brocard Henri, *Mémoire sur divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle*, J. Saint-Lager, 1874.

[142] [Brocard, 1875], p. 47.

[143] [Peaucellier, 1873]. Voir également la correspondance qu'adresse Peaucellier aux *NAM* [Peaucellier, 1864]. Le même thème avait été également abordé par Jouanne, "Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 9, 1870, p. 40.



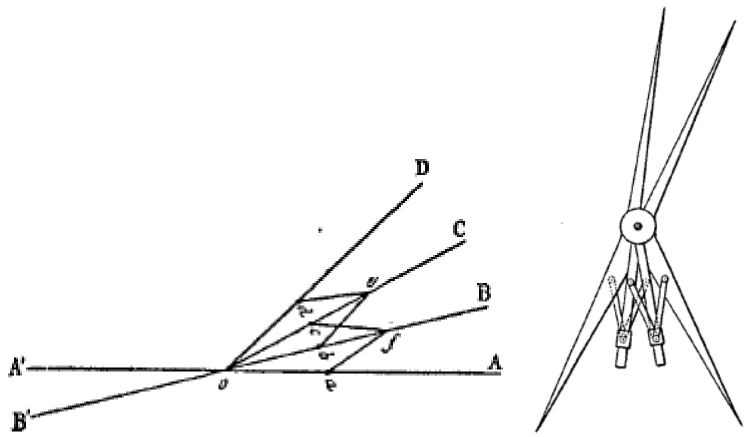
Principe du compas proposé par Laisant à Brocard[144]

La description du compas pensé par Laisant est brève et mériterait « une mention spéciale », précisions qui vont être apportées par Laisant lui-même lors du congrès de l'AFAS de la même année. Entre temps, le 21 juillet 1875, Raoul Perrin, ingénieur des mines, dans sa « Note sur la division mécanique de l'angle »[145] pour la Société mathématique de France, propose le principe d'un instrument permettant la division en un nombre quelconque d'angles. Ce compas comporterait alors dans le cas de la trisection trois tiges articulées avec trois articulations (dont une glissière).

La « Note sur un compas trisecteur » [Laisant, 1875b] dont Laisant fait lecture au congrès de l'AFAS à Nantes le 21 août 1875 présente un second dispositif d'un point de vue extrêmement pratique. Il s'agit de losanges OAFC et OBED, soit six articulations dont deux à glissières (en E et F), l'angle AOD est divisé en trois parties égales (AOB, BOC, COD). Le mécanisme est complété par deux tiges fixes permettant de diviser la corde sous-tendue par un arc de cercle en trois parties égales. La présentation s'accompagne d'un croquis d'exécution, c'est-à-dire d'une réalisation pratique, et d'une variante du mécanisme composée de trois losanges (deux pivots à charnières et deux glissières).

[144] [Brocard H., 1875], p.47

[145] [Perrin R., 1875]. Il ne faudrait pas confondre Raoul Perrin avec son homonyme Élie Perrin, futur collaborateur de Laisant sur des manuels d'enseignement.



Principe et réalisation du compas trisecteur de Laisant[146]

Ces remarques de Laisant sur les compas trisecteurs marquent non seulement un intérêt pour la réalisation concrète d'instruments simples, mais annoncent également les travaux sur d'autres mécanismes, tels que le planimètre polaire ou les machines à calculer. Elles soulignent aussi la participation de capitaine du génie à des travaux sur les systèmes articulés, débat qui engage des proches de Laisant : entre autre Brocard, Mannheim, Léauté, Lemoine et débat particulièrement relayé par les congrès de l'AFAS[147]. Laisant entre ainsi dans la famille des mathématicien ayant contribué à l'avancée des systèmes articulés comme Scheiner, Watt, Peaucellier, Kempe, Hart, Lipkine, Tchebicheff, Sylvester, Clifford, Roberts, Cayley, Saint-Loup, et Darboux, comme le souligne Koenig dans le onzième chapitre de ces *Leçons de cinématique*[148].

INTERET POUR L'INSTRUMENTATION

Dans le prolongement de ses échanges avec Brocard sur le compas trisecteur et des travaux de Peaucellier, Laisant s'intéresse à un autre mécanisme : le planimètre polaire d'Amsler. L'année qui suit sa « Note sur un compas trisecteur » ([Laisant, 1875b]), il publie, pour la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, une note sur le mécanisme permettant l'évaluation des aires de l'ingénieur suisse.

[146] [Laisant, 1875b], p. 162.
[147] Gohierre de Longchamps sera par exemple l'auteur d'une intervention sur un compas trisecteur en 1893 [Gohierre de Longchamps, 1893]. Sur la trisection mécanique de l'angle, on pourra consulter [Aymès, 1988], [Yates, 1941].
[148] [Kœnigs, 1897] cité dans "Koenigs'Lecture on Kinematics", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 6, n° 7, 1900, p. 303.

Histoire d'un planimètre

Le suisse Jakob Amsler (1823-1912) a beaucoup apporté au procédé du planimètre. Cet instrument destiné à mesurer graphiquement l'aire délimitée par une courbe fermée plane a été tout d'abord pensé par l'ingénieur Bavarois Hermann en 1814, puis a été perfectionné par le mathématicien Gonella (1824), perfectionnement accompagné de publications peu retentissantes, et l'ingénieur Welti (1849)[149].

En 1854, fils de fermier devenu professeur de mathématique à Schaffhouse après des études de mathématiques et de physique aux Universités d'Iéna et de Königsberg, Amsler simplifie le procédé de l'appareil et aboutit au planimètre polaire, appareil nettement plus simple, transportable et moins coûteux. Parallèlement à la publication en 1856 de sa théorie de l'intégration, Amsler lancera la production de son appareil en Suisse (imité plus tard par les ateliers Ott en 1873). Il sera admis à l'Académie des sciences de Paris en 1892.

Un planimètre (à cône) avait été construit à Paris (par le mécanicien suisse Ernst) et avait reçu deux prix de l'Académie des sciences (en 1837 et 1839). À cause de sa grande utilité dans de nombreux domaines (construction, travaux publics), les instruments du type planimètres polaires sont sujets à de nombreux articles dans la presse spécialisée (y compris en France comme dans les *Annales des ponts et chaussées*). Ils répondent à partir des années 1850 à de nouveaux besoins liés au processus d'industrialisation et sont vite adoptés par le milieu émergeant des ingénieurs civils ou militaires, particulièrement en France à la suite des travaux de Poncelet ou Morin[150], et ce même si la production reste localisée principalement en Suisse ou en Allemagne.

En 1874, le lieutenant-colonel Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913), ancien élève de l'École polytechnique (X 1850) et officier du génie, futur président du comité technique du génie, publie une « Note sur l'emploi du planimètre polaire dans le dessin de fortification et aussi sur les méthodes usitées en général pour la détermination des quadratures et des cubatures » dans *Le Mémorial de L'officier du génie*[151]. Cette revue, créée pendant la Restauration comme le *Mémorial de l'artillerie*, est destinée aux applications pratiques des découvertes scientifiques comme le suggère son titre complet : Recueil de mémoires,

[149] [Tournès, 2003], [Tournès, 2005].

[150] Arthur-Jules Morin est pare exemple l'auteur d'un *Aide-mémoire de mécanique pratique à l'usage des officiers d'artillerie et des ingénieurs civils et militaires* (Paris, 1849).

[151] Peaucellier, "Note sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler", *Mémorial de l'officier du génie ou Recueil de mémoires, expériences, observations, et procédés généraux propres à perfectionner les fortifications et les constructions civiles et militaires*, n° 22, 1874, p. 111-171.

expériences, observations, et procédés généraux propres à perfectionner les fortifications et les constructions civiles et militaires. Le planimètre permet par exemple, lors de la construction d'une voie de circulation, d'évaluer rapidement et simplement les déblais et remblais correspondant à une zone donnée sur un relevé topographique. Comme on l'a déjà remarqué à travers la correspondance publiée dans les *NAM* en 1864 ([Peaucellier, 1864][152]), Peaucellier s'intéresse de longue date aux systèmes articulés en général : il sera d'ailleurs connu pour son inverseur (1864) qui transforme un mouvement rectiligne en un mouvement circulaire. Dans sa note de 1874, complétée pour l'Académie des sciences la même année par des « Considérations sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler pour la mesure des surfaces » ([Peaucellier, 1874]), il expose le principe de fonctionnement du planimètre polaire et ses applications possibles dans le domaine militaire, en particulier la fortification.

La présentation de Laisant

Laisant, en tant que lieutenant du génie, ne peut qu'être attentif à ces questions, lui qui a été récompensé pour son travail sur les fortifications du fort d'Issy durant la précédente guerre. En 1876, il s'empare donc à son tour du sujet en s'inspirant du travail de Peaucellier et publie une « Note sur le planimètre polaire de M. Amsler » dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* ([Laisant, 1876a]). Laisant est membre de la Société depuis 1874, celle-ci lui permet de publier à part l'article précédent[153]. Ce même article est repris à l'identique en 1879 dans la *Nouvelle correspondance mathématique*[154] et publié une nouvelle fois à part grâce à Catalan sous le titre *Sur le planimètre polaire de M. Amsler*, la note parue en 1876 ayant été tirée à un nombre restreint d'exemplaires[155].

Remarquons cependant la présence en guise de conclusion à l'article de 1876 la référence à Marcel Deprez (1843-1918)[156] pour ses travaux sur la résolution de problèmes d'analyse à l'aide d'appareils mécaniques. Laisant a visiblement été sensible aux interventions de Deprez aux congrès de l'AFAS depuis 1873 et il soulignera l'activisme de ce

---

[152] [Barbin, 2002], "Nouveaux problèmes et nouvelles méthodes sur les courbes au 19ème siècle : géométrie projective et système articulé".

[153] Laisant C.-A., *Note sur le planimètre polaire de M. Amsler*, G. Gounouilhou, Bordeaux, 1876.

[154] [Laisant, 1879a]. Voir aussi Laisant C.-A., "Sur le planimètre polaire de M. Amsler", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, février, mars et avril 1879, p. 39-44, 71-76, 117-121.

[155] [Laisant, 1879a], p. 1.

[156] Deprez qui a été élève à l'École des mines de Paris, est principalement connu pour ses travaux sur le transport d'électricité à partir de 1881. Il sera titulaire d'une chaire d'électricité industrielle au Conservatoire des arts et métiers et membre de l'Académie des sciences (voir *Bulletin de l'Association des anciens élèves de l'École des mines de Paris,* Janvier-Février-Mars 1919).

dernier dans la première de ses notices historiques consacrées à l'Association ([Laisant, 1879b]). Parmi ses 37 interventions, il cite par exemple celles de 1874 sur les « Représentations mécaniques des fonctions - appareil pour la résolution mécanique des fonctions » et « Sur un instrument intégrateur ». Édouard Lucas dans son exposé au congrès de 1884 de la même association, « Le calcul et les machines à calculer » ([Lucas, 1884]) souligne également le travail de Deprez. L'AFAS, à l'image de son homologue anglaise la British Association for the Advancement of Science, soutient efficacement la recherche sur les instruments scientifiques : elle financera par exemple la machine à équation de Deprez en 1873[157].

Dans sa note sur le planimètre, Laisant reprend les idées exposées par Peaucellier « en lui donnant un caractère moins technique »[158], en résumant les applications et en supprimant celles relatives à l'ingénierie militaire. Laisant avait déjà montré, on l'a vu, de l'intérêt pour les compas au Congrès de l'AFAS de Nantes (1875) alors que Peaucellier travaillait également sur des instruments similaires. Les deux hommes ont visiblement échangé sur ce genre d'appareils, sur cet « *intégrateur* mécanique » [159] comme l'appelle Laisant, mais également sur d'autres inventions de Amsler comme sur ce qu'il nomme « *gravimètre* »[160] et que Peaucellier porte à la connaissance de son confrère curieux de savoir si il existe un moyen mécanique d'évaluer une intégrale de la forme $\int y^n dx$.

Cependant, Laisant offre ici une nouvelle présentation du fonctionnement du planimètre polaire : « j'ai cru donner un peu plus de généralité à l'étude du principe du planimètre, laquelle se prête à des considérations géométriques pleines d'intérêts, en dehors de tout emploi pratique » [161] . Il se place donc dans une dialectique particulière antre mathématiques pures et appliquées : le fonctionnement de l'appareil est connu empiriquement mais Laisant en reprend l'étude théorique, en faisant dans un premier temps abstraction des nombreuses applications possibles. Dans la première partie de cette note, l'outil n'est qu'un support pour une étude géométrique plus générale sur la question de la mesure d'une aire. On peut aussi y voir les germes d'une réflexion plus globale sur la notion d'aire que nous étudierons à la fin du chapitre suivant.

---

157 [Décaillot-Laulagnet, 1999], chap. 12. Voir aussi [Durand-Richard, 2005] et Durand-Richard, M.-J., *Les instruments du calcul savant, Planimètres et intégraphes en Angleterre*, REHSEIS, 2009.
158 [Laisant, 1879a], p. 2.
159 qui calcule une aire plane, ou encore une intégrale de la forme $\int y dx$ ([Laisant, 1879a], p. 14).
160 qui calcule une intégrale de la forme $\int y^2 dx$. Ibid.
161 [Laisant, 1879a], p. 3.

L'originalité de l'article est de présenter le principe de fonctionnement de l'appareil avant sa description matérielle. Comme annoncé, les considérations géométriques sous-jacentes sont révélées avant les applications pratiques[162]. Laisant évacue donc le support même du planimètre pour ne considérer qu'une tige AB de longueur l, faisant un angle u avec une direction donnée, les extrémités A et B décrivant des courbes fermées d'aires respectives α et β.

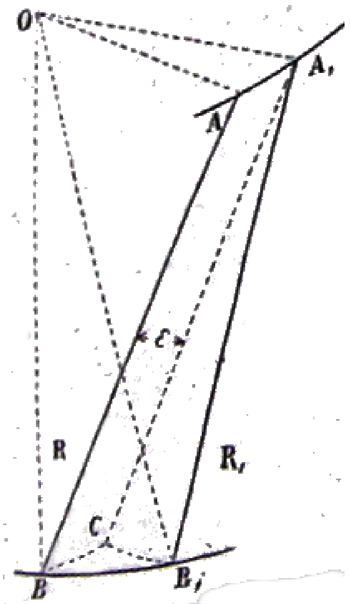


Figure d'étude du principe du planimètre[163]

À la suite d'un déplacement élémentaire, la tige se retrouve en la position A_1B_1. En fixant un point O du plan, il écrit (en aire)

$$OBB_1 + OA_1B_1 = OAA_1 + AA_1CB + A_1B_1C + OAB + BCB_1,$$

où C est le point tel que A_1C soit égale et parallèle à AB, AB et A_1C étant distants de ε, quantité que Laisant nomme « déplacement normal élémentaire » de l'extrémité A. Écrivant

$$OBB_1 - OAA_1 = AA_1CB + A_1B_1C - (OA_1B_1 - OAB) + BCB_1,$$

le dernier terme du deuxième membre étant un infiniment petit d'ordre au moins deux, Laisant décide de le négliger et il obtient

$$d\beta - d\alpha = l\varepsilon + \frac{1}{2}l^2 du - d\sigma^{164},$$

[162] Ce qui suit reprend l'exposé du 22 juin 2006 au centre François Viète dans le cadre de la journée « Géométrie du XIX^{e} siècle ».
[163] [Laisant, 1879a], p. 2.
[164] $l\varepsilon$ est l'aire du parallélogramme curviligne AA_1CB. Quant à l'aire de A_1B_1C, on peut justifier l'affirmation de Laisant en écrivant que cette aire est $\frac{1}{2}A_1C \times A_1B_1 = \frac{1}{2}l \times l \times \sin(du) = \frac{1}{2}l^2 du$

σ est ici l'aire du triangle OAB. L'aire du parallélogramme AA_1CB est bien $l\varepsilon$ et celle du triangle A_1B_1C est $l^2\sin(\mathrm{d}u)$ équivalente à $\frac{1}{2}l^2\mathrm{d}u$ pour de petites rotations).

C.-A. Laisant se place d'abord dans le cas où la tige fait un tour entier par rapport à ce que nous appellerons l'origine des inclinaisons avant de revenir à sa position initiale (il écarte dès le début le cas de plusieurs tours de la tige "sur elle-même", cas peu courant dans la pratique). En intégrant sur l'ensemble du déplacement,

$$\int \mathrm{d}u = 2\pi \text{ et } \int \mathrm{d}\sigma = 0,$$

si bien que la relation devient

$$\beta - \alpha = l.\int\varepsilon + \pi l^2.$$

Il reste donc à Laisant à calculer $\int\varepsilon$. Il est intéressant de remarquer qu'il présente ce calcul théorique en s'appuyant sur la structure du planimètre puisqu'il considère, fixée à une distance p de A, une roulette R qui ne tourne pas dans le cas où la tige glisse dans le sens de sa longueur. Dans le cas du déplacement infiniment petit précédent, l'auteur nomme dD le déplacement normal élémentaire du point quelconque R de la droite :

$$\mathrm{dD} = \varepsilon + p.\mathrm{d}u$$

car la tige peut se déplacer parallèlement à elle-même ou tourner autour de son extrémité A[165]. En intégrant sur le déplacement total, il écrit :

$$\mathrm{D} = l.\int\varepsilon + 2\pi p,$$

ce qui lui permet de conclure :

$$\beta - \alpha = l.\mathrm{D} + \pi(l^2 - 2lp)$$

et d'expliquer que la différence des aires des courbes (A) et (B) est égale, à une constante près au produit de la longueur de la droite par le développement de la roulette. Si on place la roulette au milieu de la tige ($l = 2p$), cette relation se simplifie en :

$$\beta - \alpha = l.\mathrm{D}.$$

Laisant reprend le même raisonnement dans le cas où la tige oscille entre deux directions au lieu de faire un tour complet et obtient le même résultat[166]. Il insiste : ce résultat général s'obtient quelque soit la configuration envisagée « pourvu qu'on ait égard aux conventions habituelles sur les signes des angles et des aires »[167]. Cette question du respect

---

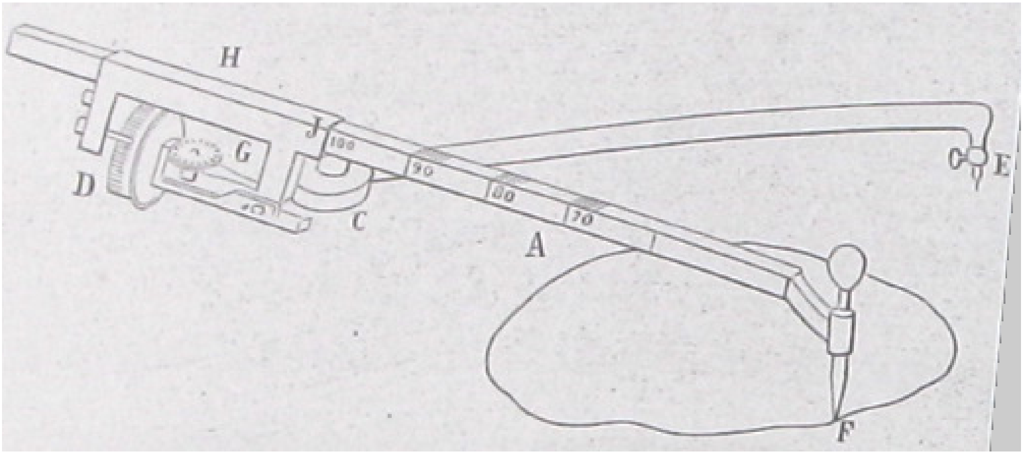
[165] Ces deux mouvements sont d'ailleurs à l'origine des incertitudes de mesures qui amèneront plusieurs améliorations au planimètre type Amsler.

[166] Dans ce cas, $\int \mathrm{d}u = 0$.

[167] [Laisant, 1879a], p. 4.

des signes des aires est récurrente chez Laisant (voir [Laisant, 1895b]), elle apparaît ici dans le cas de l'étude concrète d'un mécanisme de calcul d'aire.

Laisant en arrive naturellement à la description de l'appareil : le point fixe O correspond à la pointe que l'on fixe sur le plan de la courbe ; ce point est relié au point A par une branche ce qui oblige la courbe (A) à être un cercle de rayon donné ; la longueur *l* est ici variable grâce à une branche mobile dans une gaine et la lecture s'effectue par différence, la constante à ajouter si le pivot est à l'intérieur de la courbe à décrire (voir le premier cas de la démonstration) étant indiquée sur l'appareil.



Description du planimètre[168]

Pour éclairer la pratique de l'instrument, Laisant reprend pas à pas les résultats de Peaucellier et ses exemples. Une rapide comparaison des résultats obtenus pour un quart de cercle par les méthodes usuelles de quadrature et par l'usage du planimètre montre que l'exactitude de la mesure « est plus que suffisant pour les besoins ordinaires de la pratique. »[169]

L'auteur énumère enfin quelques applications du planimètre : l'addition et la soustraction d'aires planes en une seule mesure (en joignant les deux contours par un segment et en parcourant les deux courbes dans le même sens ou non), la cubature (à condition de connaître des sections du solide en questions et en utilisant une formule de Poncelet) ou le recherche du centre de gravité d'une ligne ou d'une aire plane. Nous présentons deux applications se rapportant implicitement au lien que l'auteur établit entre numérique et géométrique : la première est le calcul d'une somme algébrique de la forme

[168] [Laisant, 1879a], p. 6.
[169] Ibid. Les valeurs annoncées seront cependant corrigées par le général Parmentier dans une lettre publiée dans la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. V, 1879, p. 165-167).

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

en parcourant à l'aide du planimètre une figure composée par des points judicieusement placés sur les axes du repère en fonction des valeurs x_i et y_i. La deuxième est une conséquence de la première puisque Laisant évalue l'aire d'un polygone dont on connaît les coordonnées des sommets en appliquant la relation

$$x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + \dots + x_ny_1 - y_nx_1,$$

relation sur laquelle il reviendra ultérieurement dans l'article précédemment cité de la *Revue de mathématiques spéciales* ([Laisant, 1895b]).

C.-A. Laisant est visiblement convaincu de l'utilité pratique d'un tel instrument : « Ce qui précède suffit pour faire apprécier toute la valeur pratique du planimètre polaire de M. Amsler. C'est un appareil simple, d'un petit volume, et qui n'exige, on vient de le voir, aucun apprentissage […] On voit que ce dernier est le seul instrument dont l'emploi ait chance de se généraliser »[170]. Dans le dernier quart du XIXe siècle, l'intérêt économique de cet appareil se traduira en effet par une production de plus de 500 000 exemplaires (50 000 pour la seule fabrique que dirigera Amsler jusqu'à sa mort en 1912)[171].

Mais en cette année 1876 l'usage du planimètre, a priori fréquent en balistique et en architecture navale par exemple[172], est-il connu d'un public plus large ? On peut en douter selon le constat de la note précédente : « L'appareil en question est, en effet, assez peu connu généralement ; et cependant je ne crois pas qu'il en existe beaucoup qui soient plus ingénieux comme conception, et d'un emploi plus simple et plus pratique »[173]. L'appareil est pourtant étudié par les milieux savants : on trouve par exemple une autre démonstration de son principe dans les *CRAS* par Henri Résal en 1873 ([Résal, 1873]). Mais, là encore, on peut lire : « Le planimètre (polaire) du professeur Amsler de Schaffouse est, parmi les instruments de cette catégorie connus jusqu'à présent, de beaucoup le plus simple, le plus commode et le moins dispendieux ; il est cependant peu connu des ingénieurs français. »[174] Pourtant, les praticiens s'intéressent aussi à l'appareil, dès 1863, la Société industrielle de Mulhouse commande un rapport sur l'invention d'Amsler ([Cherest, 1863]). Si le principe est connu,

[170] [Laisant, 1879a], p. 9.
[171] [Tournès, 2003] et [Tournès, 2005], p. 13.
[172] [Tournès, 2000], p. 144.
[173] [Laisant, 1879a], p. 1.
[174] [Résal, 1873], p. 194. Résal explique que « Cette note a pour objet de montrer comment la théorie des rotations conduit simplement à l'équation du planimètre polaire, qui je crois, n'a pas été établie dans toute sa généralité. » (p. 510). Voir aussi [Résal, 1874] et Hirn, G.-A., *Théorie analytique élémentaire du planimètre Amsler*, Gauthier-Villars, Paris, 1875.

c'est la diffusion de l'appareil qui devra sans doute attendre la fondation de l'entreprise *Coradi* (1880), seule dépositaire de l'instrument en France et qui apportera de multiples perfectionnements au planimètre type Amsler (planimètre à compensation).

En 1876, l'objectif de Laisant semble en fait double : dans un premier temps, contribuer à la reconnaissance du planimètre qui peut rendre de grands services aux ingénieurs, mais également profiter de cette opportunité pour exposer une démonstration des principes de cet appareil, démonstration volontairement restreinte mais représentative de l'ingéniosité de son fonctionnement[175].

L'EPILOGUE D'UNE CARRIERE MILITAIRE MOUVEMENTEE

En 1876, Laisant est amené à choisir entre ses deux carrières d'officier et de politicien. On lui propose de nouveau une candidature dans la 1ère circonscription de Nantes pour les élections législatives de février 1876. Après 18 années effectives de services et deux campagnes, le Président de la République accepte l'offre de démission du capitaine Laisant le 11 janvier 1876[176].

Laisant intégrera l'état-major du corps territorial du génie le 1er août 1876, sera promu chef de bataillon, comme Brocard, le 1er janvier 1883[177]. C'est le plus haut grade que Laisant atteindra : ses origines qui échappent à la haute bourgeoisie ont-elles freiné son ascension ? Ou plus probablement, est-ce le fait de trop nombreux heurts avec sa hiérarchie ?

Les rapports conflictuels de Laisant avec les autorités militaires auraient pu être clos, mais c'était sans compter les convictions politiques, notamment boulangistes, de l'officier et ses discours au vitriol sur le pouvoir en place. Ainsi, six ans plus tard, en pleine campagne législative où Laisant se présente à la députation dans le 18e arrondissement de Paris, il reprend dans le journal *Le matin* du 30 septembre 1889 un de ses discours de campagne au sein de l'article « Patriotisme boulangiste » :

---

[175] On trouvera une démonstration similaire avec nos notations modernes dans [Savoysky, 2002]. Une autre démonstration utilise le théorème de Green ([Tournès, 2005]).

[176] Voir *Rapport fait au ministre sur la Proposition d'accepter la démission de son grade offerte par M. Laisant, capitaine de 1ère classe du Génie, daté de janvier 1876*. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 46.

[177] En se référant à [Shinn, 1980], on estime son salaire d'alors à 3 600 francs. À titre de comparaison, un colonel perçoit 4 300 francs et un général 13 000. Laisant fait alors parti des 16 % de polytechniciens issus du milieu des professions libérales accédant au grade de commandant ou chef de bataillon (35 % des polytechniciens de même grade viennent du milieu des rentiers et propriétaires) [Shinn, 1980], p. 186-187. Notons que 44% des polytechniciens finissent au grade de capitaine.

> *Tous les ministres qui ont succédé au Général Boulanger étaient et sont des agents de Bismarck ; ils n'ont agi et n'agissent que sous la pression de la politique allemande* [...] *si la guerre était déclarée par les parlementaires, je ne partirais à la frontière que lorsque je serais certain que les hommes actuellement au pouvoir n'y sont plus* [...] *Je tiens à ce que mes paroles arrivent aux oreilles de nos gouvernants.* [178]

Laisant récidivera le 2 octobre dans les colonnes de *La Presse* à travers les lignes de l'article « Histoire et patriotisme ». La sanction est immédiate. Le chef de bataillon Laisant comparait devant un conseil d'enquête le 17 octobre 1889 pour faute grave contre la discipline. La condamnation est adoptée à l'unanimité et Laisant est révoqué par le ministre Charles de Freycinet de son grade dans l'armée[179].

Ainsi se termine la carrière militaire d'un apprenant que l'on jugeait « un peu mou »[180] et dont les convictions politiques radicales et la fougue oratoire auront précipité la disgrâce au sein d'une hiérarchie militaire conservatrice.

I.3. Premiers écrits mathématiques

Le premier article mathématique référencé sous la plume de Charles-Ange Laisant date de 1867. Publié dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (*NAM*), il marque une période où deux thèmes principaux vont occuper le mathématicien : l'arithmétique et la géométrie infinitésimale. Sa participation aux *Nouvelles annales de mathématiques*, revue dont il prendra en 1896 la direction, y est prépondérante, à l'exception de quelques articles parus par exemple dans la *Nouvelle correspondance mathématique*. Les débuts du mathématicien sont également marqués par son entrée dans la communauté scientifique bordelaise.

---

[178] Procès verbal de la séance du conseil d'enquête de la région tenue le 17 octobre 1889. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 44. Le général Boulanger a été ministre de la Guerre de janvier 1886 à mai 1887.
[179] Note pour la direction du génie, Paris, le 19 octobre 1889 et PV de la séance du conseil d'enquête de la région, tenue le 1er octobre 1889. SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 44.
[180] Inspection générale de 1866, SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 4, pièce 49.

I.3.1. Les *Nouvelles annales de mathématiques*, revue privilégiée

Les *Nouvelles annales de mathématiques* (*NAM*) recueillent le premier article publié par Laisant : dans « Note sur la somme des n premiers produits de p nombres entiers consécutifs » ([Laisant, 1867]), l'auteur montre par récurrence :

$$1.2\ldots p + \ldots + (n-1)n\ldots(n+p-2) + \ldots + n(n+1)\ldots(n+p-1) = \frac{n(n+1)...(n+p)}{p+1}$$

et applique le même calcul pour déterminer la limite de la somme des inverses des n termes de l'expression précédente. Mais la participation de Laisant y est effective dès 1863 : le jeune promu de l'École d'application du génie de Metz propose deux solutions (qui ne sont que mentionnées) aux questions 634 et 644. Jusqu'en 1867, sont publiées les solutions complètes par Laisant des questions 680, 675 et 766 et la première question de sa main (n° 789) (sont également mentionnées ses réponses aux questions 702, 737-738, 775, 776 et 777).

LES *NAM*, REVUE PARTICULIERE

La revue est créée en 1842 alors que le *Journal de Liouville* est le principal organe de diffusion de la connaissance mathématique, avec les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et le *Journal de l'École polytechnique*. Ce sont les questions d'enseignement et de vulgarisation qui vont plus particulièrement être à l'honneur dans les *NAM*, les articles plus pointus étant le domaine réservé du *Journal de Liouville* où Laisant ne publiera au final qu'un seul article relatif à sa thèse sur les quaternions ([Laisant, 1877a]). Cette dichotomie, présentée ici grossièrement, est le résultat d'une implication des rédacteurs dans leurs revues respectives : Joseph Liouville (1809-1882) pour son *Journal* et pour les *NAM*, principalement Orly Terquem (1782-1862) comme le reconnaît Camille Gérono (1799-1891), co-fondateur de la publication[181]. Gérono est professeur à l'École polytechnique et a publié plusieurs ouvrages pédagogiques. Terquem est quant à lui ancien élève de l'École (X 1801), professeur à l'École d'artillerie de Mayence, répétiteur à l'X. Il a longtemps collaboré au *Journal de Liouville* où il

[181] Ainsi, dans une lettre datée du le 21 avril 1869, Gérono confit à Lebesgue que Terquem : « *écrivait avec une grande facilité ; peut-être aurait-il été mieux d'écrire un peu moins, et de réfléchir un peu plus. Enfin, il a tout seul, rédigé pendant 10 ans, les nouvelles Annales, je lui en suis reconnaissant* ». [Bertrand, Bibliothèque de l'Institut de France, N° 139, Lettre du 21 avril 1869] cité par N. Verdier, [Verdier, 2009].

s'est intéressé particulièrement à la géométrie et a déterminé par exemple trois nouveaux points sur le cercle d'Euler.

À la mort de Terquem, l'arrivée d'Eugène Prouhet (1817-1867), également répétiteur à l'École polytechnique, au sein de la rédaction des *NAM* est l'occasion pour les rédacteurs de préciser la ligne éditoriale de la revue :

> *Les* Nouvelles Annales de Mathématiques *s'adressent, comme l'indique leur titre, aux jeunes gens qui veulent entrer à l'École Polytechnique ou à l'École Normale ; elles s'adressent aussi aux Professeurs, puisque tous les travaux qui tendent à perfectionner l'enseignement des Mathématiques spéciales, simplification des théories, développements et applications des diverses méthodes, divulgation des découvertes récentes, sont de leur ressort.*[182]

Ceci complète un avertissement de l'éditeur paru huit ans auparavant :

> *les* Annales *ont traité toutes les belles et difficiles questions des anciens examens, et également les questions des nouveaux examens lorsqu'elles présentaient quelque intérêt. On a donné des exercices de calculs numériques, logarithmiques avec une étendue qu'on ne trouve nulle part ailleurs.*[183]

Le public visé explicitement par la revue (élèves et professeurs liés principalement à l'École polytechnique) entraîne en effet l'impression des sujets de concours et autres questions relatives aux notions abordées lors de la préparation à ces écoles. Mais le contenu de la publication correspond à un plus grand nombre de lecteurs : ni revue de vulgarisation, ni publication de recherches, les *NAM* s'adressent à tous ceux qui pratiquent les mathématiques. Une forte proportion d'articles traite de géométrie pure ou analytique (50% en 1870-1874 et en moyenne sur la période 1870-1914 et même 73% dans la période 1880-1884)[184]. À cela s'ajoute l'intérêt pour la théorie des nombres au détriment de l'analyse, qui regroupe en moyenne moins de 20% des articles. Ces particularités des *NAM*, rattachées à son appartenance aux revues de diffusion et d'enseignement, notamment pour le système préparatoire, se retrouvent également dans l'ensemble des articles parus sous la plume de Laisant. Les anciens élèves de l'École polytechnique, ainsi que les enseignants des classes préparatoires ou du secondaire, s'impliquent spécialement dans la rédaction d'articles souvent peu originaux traitant de géométrie et cantonnés généralement à la géométrie usuelle[185]. Bon

[182] [Gérono; Prouhet, 1863], p. 1.
[183] "Avis de l'éditeur", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 14, 1855, p. 5-6.
[184] Voir l'étude de H. Gispert [Gispert, 1993] où l'auteur en identifiant le milieu mathématique français à la SMF montre que les *Nouvelles annales* représentent, entre 1870-1914, 13% des articles rédigés par les membres de la Société et recensés par le *Jahrbuch über die Fortschritte des Mathematik*. Deuxième revue en importance, les *NAM* sont cependant nettement derrière les *CRAS* (35 % des articles).
[185] Voir l'étude de H. Gispert, [Gispert, 1993].

nombre d'articles de Laisant dans les *NAM* fournissent des exemples à ce constat, comme on le verra plus loin.

Nous proposons un panorama des contributions de C.-A. Laisant en tant que collaborateurs aux *Nouvelles annales de mathématiques* durant l'ensemble de sa carrière, dépassant le cadre temporel fixé dans ce chapitre. Le nombre d'articles publiés par Laisant et surtout le nombre de questions/réponses qu'il propose (voir annexe) le placent parmi les auteurs les plus prolifiques qu'ait connus la revue.

Les premiers articles de Laisant correspondent de plus à la prise de direction par Bourget en 1868 qui accentue la ligne éditoriale mise en place par Prouhet, c'est-à-dire un renforcement du lien entre les articles et les programmes d'admission aux Écoles polytechnique et normale et une place accrue donnée aux questions/réponses[186].

[186] Liliane Alfonsi, "Investigating 19th century mathematical journals : Importance and use of other periodicals in *Nouvelles Annales de Mathématiques* from 1842 to 1870", *4th International Conference of the European Society for the History of Science*, Barcelona, 2010.

Article	Année	Remarque, thème abordé
Note sur la somme des *n* premiers produits de *p* nombres entiers consécutifs	1867	arithmétique
Note sur le plan tangent en un point d'une surface	1868	géométrie analytique
De quelques propriétés des fractions périodiques		arithmétique
Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques	1870	arithmétique
Sur les rayons de courbure des courbes planes	1874	géométrie analytique
Note sur l'enveloppe d'un système de courbes planes		géométrie analytique
Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque		géométrie analytique
Sur le centre de gravité d'un polygone	1877	équipollences
Réflexion sur la cinématique du plan	1878	équipollences
Remarques sur certaines questions de réciprocité	1884	géométrie de situation
Remarque au sujet du théorème de Carnot	1890	équipollences
Construction et formules relatives au triangle	1892	géométrie du triangle
Analogie entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point mobile	1902	équipollences
Rayon de courbure d'une courbe plane	1903	géométrie analytique
Intégration des fonctions inverses	1905	
La somme des puissances semblables des racines; formules de Newton		
Note au sujet d'un article de M. S. Cervera	1909	
Sur le système d'équations indéterminées $x^2 + y = z^2$, $x + y^2 = t^2$.	1915	
Propriétés de deux suites sommables		arithmétique
Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci	1919	arithmétique

Principaux articles de Laisant dans les Nouvelles annales[187]

Les thèmes abordés sont peu originaux, si ce n'est un emploi fréquent de la méthode des équipollences. On peut cependant remarquer la longévité de la participation de Laisant

[187] Nous avons écarté les nécrologies et autres variétés (« la bibliothèque des travailleurs » par exemple) pour nous restreindre aux travaux proprement mathématiques (la traduction en 1873-1874 de l'ouvrage de Bellavitis a été écartée).

aux *NAM*, longévité due à sa position de rédacteur à partir de 1896. Remarquons enfin un glissement dans les intentions de l'auteur : parmi les derniers articles, on trouve de nombreuses remarques sur l'intérêt des procédés exposés pour l'enseignement.

LE CAS DE LA *NOUVELLE CORRESPONDANCE*

À titre de comparaison, notons cependant la participation de Laisant à la *Nouvelle correspondance mathématique* fondée en août 1874 par Eugène Catalan[188] et Paul Mansion. Le tome deux sera exclusivement rédigé par Catalan, Mansion étant placé parmi les collaborateurs dont fait partie immédiatement Laisant, en compagnie de proches comme Brocard ou Lucas. Dans l'avertissement placé en tête du premier numéro, la filiation avec *La correspondance mathématique et physique* fondée en 1825 par Adolphe Quételet (1796-1874) est clairement explicitée[189]. La fin de sa publication en 1839, alors que Quételet devient secrétaire perpétuel de l'Académie de Bruxelles, laisse la Belgique sans périodique traitant de mathématiques. La *Nouvelle correspondance mathématique* se fixe pour donc pour but de diffuser la science mathématique, du moins celle enseignée dans le secondaire. Laissant les travaux de recherche aux soins de l'Académie, il s'agira de « vulgariser les parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne » [190] . La *Nouvelle correspondance* permettra, via sa parution en Belgique, en outre d'établir un lien entre scientifiques français et allemands ; la communication directe étant compromise au lendemain de la guerre de 1870.

Laisant publie dans la *Nouvelle correspondance* treize articles de 1876 à 1880. Les domaines abordés sont variés : principalement théorie des nombres et arithmétique, mais également géométrie analytique et déjà une réflexion sur des notions mathématiques (calcul sur les imaginaires et calcul infinitésimal). À ces articles, on peut ajouter quatre extraits de

[188] Pour une biographie de Catalan, on pourra consulter [Jongmans, 1996]. Les sujets d'intérêts communs entre Laisant et Catalan nous amèneront à brosser un rapide portrait du mathématicien Belge ultérieurement.

[189] Adolphe Quételet (1796-1874), professeur de mathématiques, de physique et d'astronomie à l'Athénée de Bruxelles et Garnier, professeur de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Gand crée une revue « qui permette à ceux qui les cultivent, d'établir entre eux un commerce scientifique » mais où la portée pédagogique des articles tient une place importante dans la mesure où elles « ont objet la simplification de quelques points des éléments, et qui pourront tourner à l'amélioration des livres classiques publiés dans ce royaume ».(*Correspondance mathématique et physique*, Imprimerie Vandekerckhove Fils, Gand, t. 1, 1825). À ce sujet, on pourra consulter : Elkhadem, Hossam, "Histoire de la correspondance mathématique et physique d'après les lettres de Jean-Guillaume Garnier et Adolphe Quételet", *Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques*, 5ème série, tome LXIV, 10-11, 1978, p. 316-366.

[190] [Catalan, 1874], p. 6.

lettres prolongeant notamment la discussion sur certaines définitions (figures semblables, quantités négatives). Laisant fournit également les solutions à 18 questions.

Article	*Année*	*Remarque, thème abordé*
Sur un problème relatif aux courbes planes	1876	Enveloppe
Sur une question paradoxale	1876	Nombre imaginaire
Sur la question 63	1876	Géométrie analytique
Remarque sur un théorème d'arithmétique	1876	Généralisation d'un résultat de Stiefel : $1 + 2x + 4x = m.7$ si $x = m.3 \pm 1$
Sur les questions 217 et 218	1877	Généralisation de questions posées par Réalis sur les suites numériques
Un commentateur du marquis de l'Hôpital	1877	Bibliographie de l'*Analyse des infiniment petits*
Centre de gravité d'un arc de cercle	1877	Recours à la méthode des équipollences
Sur le planimètre polaire de M. Amsler	1879	Instrumentation, calcul mécanique de l'aire d'une surface
Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson	1879	Arithmétique
Sur la question 450	1879	Théorie des nombres
Solution d'un problème de cinématique plane proposé comme question par l'auteur	1879	
Généralisation d'une formule de M. Catalan	1879	

Tableau récapitulatif des écrits de Laisant dans la Nouvelle correspondance mathématique

Cette publication mensuelle s'arrêtera en 1880 mais on retrouve sensiblement la même ligne éditoriale dans la revue *Mathesis* fondée en 1881 par deux anciens collaborateurs de la *Nouvelle correspondance*, Mansion et Neuberg, dans laquelle Laisant aura également une participation active, ce dernier trimestriel étant publié jusqu'en 1965 (75 tomes).

On retrouve dans cette dernière revue certains auteurs et certaines caractéristiques des *Nouvelles annales de mathématiques* destinée aux écoles spéciales et aux établissements d'instruction moyenne. La vingtaine d'auteurs français y participant traite plus particulièrement de géométrie[191]. Plus globalement, on annonce dès la préface du premier volume qu'il s'agit de traiter de « Question capitale de la méthodologie mathématique » : géométrie supérieur et algèbre moderne, théorie des incommensurables, des quantités négatives ou imaginaires. Laisant participera très ponctuellement à cette revue de 1881 à 1914 pour y publier des articles de géométrie plane ou analytique. Notons que ce type de revue participe à la mise en place de réseaux entre mathématiciens français et européens (espagnols ou portugais par exemple) autour des thèmes de la diffusion et de l'enseignement des sciences. On retrouve à travers une publication telle que *Mathesis* le terrain favorable à la création

[191] Nous renvoyons à [Gispert 1993] où il est précisé que 7% seulement des articles des membres de la SMF parus à l'étranger sont publiés dans les pages *de Mathesis*.

d'une revue réellement internationale telle que *L'Enseignement mathématique* que Laisant fondera en 1899.

I.3.2. Arithmétique et fractions périodiques

L'arithmétique prend une place importante dans les premiers travaux du mathématicien, notamment à travers la collaboration avec Étienne Beaujeux, personnage dont nous n'avons trouvé que peu de trace[192]. Cette coopération est centrée sur un thème principal : les fractions périodiques et constitue un ensemble cohérent de quatre articles publiés de 1868 à 1879 ([Laisant, Beaujeux, 1868], [Laisant, 1869], [Laisant, Beaujeux, 1870] et [Laisant, 1878a] auxquels nous ajoutons un dernier en 1879), principalement dans les *Nouvelles annales de mathématiques* et la *Nouvelle correspondance mathématique*. On y trouve sensiblement la même démarche : il s'agit à partir d'une base arithmétique donnée (fractions périodiques, progression géométrique, théorème de Fermat et Wilson) de multiplier les propriétés et les observations dans un souci de quasi-exhaustivité. Les articles (souvent étendus) reprennent ainsi un grand nombre de résultats parus dans les revues mathématiques en les incluant dans un catalogue raisonné de propriétés.

ÉTUDE EXHAUSTIVE DES FRACTIONS PERIODIQUES

Dans l'article « De quelques propriétés des fractions périodiques »[193], C.-A. Laisant et É. Beaujeux reprennent le problème de l'écriture d'une fraction périodique dans un cadre plus général. Il s'agit de se placer dans une base de numération quelconque, thème qui, comme on le verra, sera récurrent et considéré comme fondamental pour Laisant tout au long de ses écrits. Eugène Catalan avait déjà énuméré et recensé un certain nombre de propriétés des fractions décimales périodiques dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1842

[192] Il est signalé comme professeur de mathématiques domicilié à Brest dans les comptes rendus des congrès de l'AFAS en 1875 et 1876 (AFAS, 1875, p. XXIII, merci à P. Nabonnand pour cet information) mais n'apparaît ni dans les registres de L'École polytechnique, ni dans ceux de l'École normale, ni dans le palmarès de l'agrégation etc.

[193] [Laisant, Beaujeux, 1868], Laisant C.-A., Beaujeux Étienne, "De quelques propriétés des fractions périodiques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 289-304. Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 75, 76, 78, 167.

([Catalan, 1842]). Laisant reprend donc un grand nombre de théorèmes déjà connus mais en traitant le cas des fractions dont le développement est relatif à une base quelconque[194].

Ainsi, les auteurs rappellent pour commencer que le problème « écrire un entier dans un système de numération donné »[195] admet une seule solution, facile à déterminer. Écrire une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ dans un système de numération de base B revient alors à trouver son expression sous la forme

$$\frac{\alpha_1}{\mathrm{B}} + \frac{\alpha_2}{\mathrm{B}^2} + \ldots,$$

où les entiers α_1, α_2, … sont plus petits que B. L'écriture contient un nombre fini de termes si q ne contient que des facteurs premiers appartenant également à B. Dans le cas contraire, l'écriture prend un caractère périodique (car les α_i sont plus petits que B). La fraction est alors « périodique simple » si la période apparaît dès α_1 (c'est le cas lorsque le dénominateur de la fraction n'a aucun facteur premier en commun avec la base) ; elle est « périodique mixte » sinon : la quasi-intégralité de l'article traite de ce dernier type de fraction. Les auteurs montrent ainsi que la période de la fraction dépend uniquement du dénominateur q. Par des considérations sur le nombre $\varphi(q)$ de fractions irréductibles ayant q pour dénominateur, ils établissent le théorème de Fermat généralisé :

B et q étant premier entre eux, $B^{\varphi(q)} - 1$ est un multiple de q.[196]

Les nombreuses propriétés qui suivent concernent la somme des chiffres de la période, ou encore la période d'une fraction dont le dénominateur est de la forme qq', ou q^{α}. De telles considérations permettent de résoudre notamment le problème suivant : écrire un nombre de n chiffres tel que les nombres formés par les permutations circulaires des chiffres soient des multiples du premier.

L'article trouve l'année suivante un prolongement naturel dans celui intitulé « Moyen de trouver la période d'une fraction périodique sans faire de division », paru dans *Les Mondes*,

[194] Elizabeth R. Bennett reprendra les principaux résultats des articles de Catalan et Laisant en 1909 dans *The American Mathematical Monthly* ([Bennett, 1909]).

[195] [Laisant, Beaujeux, 1868], p. 289. Il s'agit d'écrire l'entier en question sous la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1\mathrm{B} + \ldots + \alpha_n\mathrm{B}^n$$

où B est la base et les valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\alpha_n$ les chiffres de l'écriture obtenue.

[196] [Laisant, Beaujeux, 1868], p. 294. $\varphi(q)$ est le nombre d'entiers inférieur à q et premier avec q. Si q est premier,

$$\varphi(q) = q - 1$$

et on retrouve le théorème de Fermat.

Revue hebdomadaire des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie, créée par l'Abbé Moigno ([Laisant, 1869])[197]. La période d'une fraction dans son écriture décimale y est obtenue par des tableaux successifs de nombres, sans véritable calcul, si ce n'est celui des multiples du dénominateur. Le thème des fractions périodiques réapparaîtra en 1878 à travers des « Remarques sur les fractions périodiques » publiées dans les *Mémoires de la Société scientifique de Bordeaux*, et bénéficiant d'un tirage à part[198]. Laisant y reprend et complète les résultats précédents, généralise à une base quelconque le procédé exposé en 1869 à l'aide de nouveaux tableaux de nombres. Enfin, il proposera au congrès de l'AFAS de 1887, comme nous le verrons, une figuration des fractions périodiques à l'aide de la géométrie des quinconces, c'est-à-dire au sein d'un réseau de points ([Laisant, 1887d], p. 228).

Laisant et Beaujeux présentent également en 1870 un « Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques »[199]. Ils y considèrent une progression arithmétique

$$\mathrm{A}q,\ \mathrm{A}q^2,\ ..,\ \mathrm{A}q^n,\ \ldots$$

dont ils divisent chacun des termes par un même diviseur entier D. On obtient alors la suite des restes ou résidus

$$r_1,\ r_2,\ \ldots.,\ r_n,\ \ldots.$$

L'article énonce un nombre important de propriétés et en déduit d'ailleurs un critère de divisibilité. Remarquons d'ailleurs la formulation des énoncés proposés en début d'article : il s'agit souvent d'écrire les valeurs les unes en dessous les autres, dans un ordre donné ou dans leur ordre naturel, en alternant les signes + et −. Laisant donne ainsi une présentation particulière aux exemples qui accompagnent chacune des propriétés. Il envisage ensuite plus spécifiquement le caractère périodique que prend la suite des restes, soit immédiatement, soit à partir d'un certain rang ; le cas général étant celui d'une suite périodique mixte mais qui se ramène finalement à celui d'une période simple. Les auteurs signalent alors le parallèle avec les résultats démontrés dans le cadre des fractions périodiques et obtiennent certains énoncés similaires. Le présent article est d'ailleurs présenté par Laisant lui-même comme un « complément » à celui sur les fractions périodiques. Il montre par exemple que la somme des

---

197 [Laisant, 1869], "Moyen de trouver la période d'une fraction périodique sans faire de division", *Les Mondes*, XIX, 1869, p. 331-333. Ceci est l'unique apparition de Laisant dans cette revue à notre connaissance. Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 171.

198 [Laisant, 1878a], "Remarque sur les fractions périodiques", *Mémoires de la société scientifique de Bordeaux*, 2ème série, t. 3, 2ème cahier, 1878, p. 213-235. Voir aussi Laisant C.-A., *Remarque sur les fractions périodiques*, Bordeaux, G. Gounouilhou, 1879.

199 [Laisant, Beaujeux 1870], Laisant C.- A. et Beaujeux Etienne, " Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 9, 1870, p. 221-229, p. 271-281, 302-307, 354-360. Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 167.

résidus composant la période est égale à un multiple du diviseur D, alors qu'il avait prouvé, dans le cadre des fractions périodiques, que la somme des chiffres d'une période est un multiple de B – 1 (nous pourrions multiplier le nombre de comparaisons semblables, notamment lorsque la période est de longueur $2k$). Le point de vue des résidus, pour une suite arithmétique cette fois, sera retenu pour montrer le potentiel de visualisation que représente la géométrie des quinconces en 1887 ([Laisant, 1887d], « figuration des résidus par différence », p. 218).

AUTRES CENTRES D'INTERET ARITHMETIQUE

Dans « Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson »[200], Laisant et Beaujeux énoncent vingt-cinq propriétés issues des théorèmes de Fermat[201] et Wilson[202]. Les deux théorèmes précédents ne sont pas démontrés : les auteurs renvoient au *Traité d'arithmétique* de Joseph Alfred Serret[203]. Les 25 propriétés qui en découlent bénéficient de courtes preuves, certaines correspondent à des questions posées par Ernest Césaro dans la *Nouvelle correspondance*.

Remarquons pour finir qu'à cette collaboration s'ajoutent des articles sur des propriétés ponctuelles de théorie des nombres de Laisant seulement. L'année 1876 à elle seule rassemble la quasi-totalité de ce genre de production. On y trouve une « Remarque sur un théorème d'arithmétique »[204] parue dans la *Nouvelle correspondance mathématique* et qui consiste en une généralisation d'un résultat de Stiefel

$$1 + 2^x + 4^x = m.7 \text{ si } x = m.3 \pm 1$$

et trois articles parus dans les *Mémoires de la Sociétés des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*[205]. Nous donnons pour exemple le résultat constituant deux « Théorèmes sur les nombres premiers ». Si un nombre premier P s'écrit

[200] [Laisant, Beaujeux 1879], Laisant C.-A., Beaujeux Étienne, "Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 156-160, 177-182.
Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 277.

[201] Si p est premier et a entier non divisible par p alors a^{p-1} est divisible par p.

[202] Si p est premier, $1.2.3\ldots.(p-1)+1$ est divisible par p.

[203] Serret Joseph Alfred, *Traité d'arithmétique*, Bachelier, 1852.

[204] [Laisant, 1876b],"Remarque sur un théorème d'arithmétique", *Nouvelle correspondance Mathématique*, t. 2, 1876, p. 341-342.

[205] [Laisant, 1876c], "Théorèmes sur les nombres premiers ", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 399.

$$P = p + i$$

avec p pair et i impair alors

$$p^p i^i \equiv i \bmod P \text{ et } p^i i^p \equiv p \bmod P$$

ainsi que l'énoncé de l'article « Sur un problème d'arithmétique » provenant des *Annales de Gergonne* en 1812 : « Étant donné le produit de la multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par le nombre qu'on déduit de celui-là, en écrivant ses chiffres dans un ordre inverse, déterminer l'un ou l'autre des deux facteurs de ce produit »[206].

D'autres propriétés arithmétiques particulières seront démontrées ponctuellement tout au long de la carrière du mathématicien. Citons : « Remarque sur les puissances de 2 »[207] parue dans le *Journal de mathématiques élémentaires* en 1886 : Laisant en déduit une démonstration élémentaire de la formule du binôme. « Sur une curiosité arithmétique »[208], est un autre exemple de travaux de même type. Lorsqu'on intercale plusieurs fois les chiffres 48 au centre de l'écriture du nombre 49, on obtient successivement les nombres 49, 4489, 444889…qui sont tous des carrés parfaits. Une opération similaire à partir du nombre 16 (où l'on obtient la suite de nombres 1156, 111556…) donne le même résultat. Laisant étudie cette propriété dans diverses bases de numération, particulièrement celles de la forme $a^2 + 1$ et retrouve que les deux cas évoqués en exemples sont les seuls possibles en bases 10 (dans une base de la forme $a^2 + 1$, il y a $a - 1$ solutions).

[Laisant, 1876d], "Théorème sur les nombres", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 400-402.
[Laisant, 1876e], "Sur un problème d'arithmétique", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 403-411. Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 193.

[206] "Question proposée", *Annales de Gergonne*, 3, 1812-1813, p. 384. Une solution sera donnée dans le volume suivant par un abonné : Annales de Gergonne, 4, 1813-1814, p. 123-132. Voir aussi [Dickson, 1919], vol. I, p. 456 et 458 sur une réponse parue dans *L'intermédaire des mathématiciens*.

[207] [Laisant, 1886a], "Remarque sur les puissances de 2", *Journal de mathématiques élémentaires*, Sér. 2, t. 5, 1886, p. 238.

[208] [Laisant, 1892c], "Sur une curiosité arithmétique", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, t. 4, 1892, p. 77-78.

I.3.3. Les premiers écrits d'un géomètre.

Second thème abordé par Laisant pendant ses premières années de production : il s'agit de la géométrie infinitésimale, plus particulièrement l'étude des courbes. Si les articles de géométrie constituent la part majoritaire des publications du mathématicien, les méthodes utilisées varient d'une parution à l'autre. Deux approches se détachent pourtant. Dans un premier temps, l'utilisation du calcul différentiel pour les questions concernant centres de courbure ou enveloppes est quasi-systématique. Les formules classiques y sont utilisées au sein de calculs analytiques dépouillés de toute figure. Dans la période suivante, le même sujet pourra être repris avec cette fois l'usage de la méthode des équipollences, sujet de notre deuxième partie.

Examinons ici le premier type de travaux, marqué par la seconde thèse de Laisant en 1877. On peut y deviner l'influence de personnage comme Mannheim ; nous observerons également cette influence dans le deuxième chapitre où des notions de géométrie cinématique sont étudiées par Laisant à l'aide des équipollences. Nous choisissons pour l'heure de détailler cette production de géométrie infinitésimale car elle nous semble représentative d'une partie importante de la production de Laisant dans la première partie de sa carrière.

PREMIERE METHODE AU SUJET DES RAYONS DE COURBURE

L'étude des rayons de courbure pour les courbes planes est un sujet d'étude récurrent. Le principal point de départ de ces travaux est l'article paru dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1874 ([Laisant, 1874c]). Cette réflexion se poursuit avec la deuxième thèse de 1877 soutenue devant un jury présidé par Briot et réapparaît régulièrement dans les publications du mathématicien en 1887, 1895 ou 1903.

Remarquons que, déjà en 1868, C.-A. Laisant répond à une question de Haton de la Goupillière. Né en 1833 à Bourges, Haton de la Goupillière sort 2$^{\text{ème}}$ de l'École polytechnique en 1852 et étudie à l'École des mines de Paris. Il y enseignera par la suite diverses disciplines (chimie générale, mécanique et machines, topographie, exploitation des machines …) avant de devenir directeur de l'École, puis vice-président du conseil général des mines. Il sera également répétiteur puis examinateur d'admission à l'École polytechnique de 1861 à 1879. Il deviendra également membre libre de l'Académie des sciences à partir de 1884 et président de la Société mathématiques de France en 1890. Docteur ès sciences mathématiques en 1857 avec une thèse « Sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses », on lui doit des travaux en mécanique rationnelle et en géométrie, notamment sur les développées de courbes planes, et les transformations en géométrie. En réponse au problème posé dans les *NAM* [209], Laisant y étudie justement l'invariance des sous-tangentes et sous-normales à une courbe par les transformations usuelles du plan[210].

Si les éléments de géométrie infinitésimale sont nombreux dans les travaux que nous allons détailler, les transformations appliquées à une courbe du plan, puis de l'espace vont jouer un rôle fondamental dans la méthode proposée par Laisant. L'utilisation de transformation de figures connaît depuis les progrès de la géométrie projective un regain d'intérêt comme le souligne Chasles dans son *Aperçu historique* :

> *Outre ce premier résultat de la Géométrie descriptive, d'opérer la transmutation des propriétés des figures à trois dimensions, en propriétés des figures planes, nous devons faire remarquer un autre usage particulier de cette Géométrie, c'était de conduire à une infinité de moyens d'opérer sur le plan des transformations de figures en figures du même genre.* […] *N'était-il pas naturel de chercher à introduire pareillement* [à l'algèbre] *dans la Géométrie pure des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées, et sur leurs propriétés ?*[211]

Dans son ouvrage de réflexion sur *La Mathématique* ([Laisant, 1898a]), C.-A. Laisant revient sur l'intérêt des transformations en géométrie. Si d'une figure (F), on déduit une figure (F') par un procédé connu, il sera possible de parcourir le chemin inverse et de "revenir" de (F') en (F).

> *Or, si une propriété est connue, ou facile à découvrir, dans la figure (F'), il s'ensuit qu'on aura par cela même dans la figure primitive (F) une propriété qu'il eût peut-être été très difficile d'obtenir par des voies directes. De même pour la résolution d'un problème. On devine quelle puissance d'investigation une telle méthode générale fournit au géomètre, d'autant plus que les transformations sont en nombre illimité.*[212]

L'article de 1874 illustre cette remarque. S'intitulant « Sur les rayons de courbure des courbes planes »[213] ([Laisant, 1874c]), il pose la première pierre d'une méthode qui sera généralisée à l'espace par la suite (voir [Laisant, 1877b]). Laisant ne semble ici pas satisfait

---

[209] "Question 803", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 6, 1867, p. 141-142.
[210] [Laisant, 1868a], "Sur la question 803", *Nouvelles annales de mathématiques*, série 2, 7, 1868, p. 318-330.
[211] [Chasles, 1837], p. 195-196.
[212] [Laisant, 1898], p. 100.
[213] [Laisant, 1874c], "Sur les rayons de courbure des courbes planes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 13, 1874, p. 367-380.

de la construction du centre de courbure en un point par l'intersection de deux normales. Pour suppléer à ce « procédé vicieux au point de vue graphique »[214], il propose alors un procédé géométrique permettant d'obtenir le rayon de courbure d'une courbe plane définie par son équation ou par n'importe quel procédé mécanique permettant de connaître ses tangentes en chacun de ses points. Géométrique, la méthode l'est par son principe et sa progression : par la pensée, il est aisé de suivre l'auteur et de comprendre les raisons de ses choix, ainsi que l'enchaînement des transformations proposées. Cette méthode s'appuie en effet sur la construction d'une deuxième courbe à partir de laquelle il est facile de déterminer le rayon de courbure recherché, pratique qu'il rapproche du tracé de courbes d'erreurs. La notion de courbe d'erreur apparaît notamment dans le cours de géométrie de Mannheim à l'École polytechnique[215], Mannheim dont on a pu deviner l'influence à la lecture de la nécrologie que le rédacteur de *L'Enseignement mathématique* lui consacre[216].

Dans sa deuxième thèse de 1877, Laisant précisera :

> *La méthode employée dans tous les cas consiste essentiellement dans la construction d'un courbe auxiliaire C_1,* transformée *de la courbe donnée C, et telle que chaque point de la première dépend non-seulement de la position d'un certain point correspondant de la seconde, mais aussi de la direction de la tangente en ce point.*
>
> *Il arrive alors, en général, que les éléments du second ordre de la courbe donnée sont liés à ceux du premier ordre de la courbe transformée, en sorte que le rayon de courbure en un point donné de la courbe C peut se construire au moyen d'éléments connus, et de la tangente à la courbe C_1 au point correspondant.*[217]

Si $f(X, Y) = 0$ est l'équation de la courbe C donnée, on associe à chaque point $M(x\,;y)$ de C un point $M_1(x_1\,;y_1)$ dont les coordonnées dépendent de celles de M et de la tangente à C en M, c'est-à-dire de $p = \dfrac{dy}{dx}$. On obtient donc deux relations :

$$x_1 = F_1(x, y, p) \text{ et } y_1 = f_1(x, y, p).$$

La méthode employée s'appuie sur les propriétés de la tangente à la nouvelle courbe C_1 en M_1 : en notant $p_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}$, on obtient par différentiation une nouvelle relation de la forme :

[214] [Laisant, 1874c], p. 367.
[215] [Mannheim, 1880], 13ème leçon dans la deuxième partie : « Courbes et surfaces : compléments théoriques et applications ».
[216] [Laisant, 1907a].
[217] [Laisant, 1877b], p. 79.

$$p_1 = \varphi(x, y, p, \frac{dp}{dx}).$$

Mais le rayon de courbure ρ en M vérifie la relation

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

on obtient une expression de p_1 de la forme

$$p_1 = \Phi(x, y, p, \rho)$$

que l'on peut écrire en isolant ρ,

$$\rho = \Psi(x, y, p, p_1),$$

comme l'annonçait Laisant.

La méthode est générale et n'aboutit pas lorsqu'il est impossible d'isoler ρ lors de la dernière étape. Laisant en déduit alors des propriétés liant les courbes C et C_1. Il insiste également sur « la valeur pratique » de la méthode : son application dépend, nous allons le constater, de la forme de la relation $\rho = \Psi(x, y, p, p_1)$ et l'auteur propose donc seize transformations donnant lieu à des constructions simples.

Nous proposons de détailler quelques-unes de ces constructions pour illustrer la méthode de Laisant, montrer son caractère graphique (même si aucune figure n'accompagne le raisonnement) et généralisable. Nous souhaitons ainsi tracer les contours des mathématiques pratiquées par le jeune mathématicien.

Suivant les notations de l'article, nous appelons P la projection de M sur l'axe des abscisses, Q sur celui des ordonnées, T l'intersection de la tangente à C en M avec l'axe des abscisses et N l'intersection de la normale à C en M avec l'axe des abscisses. Enfin, on a :

$$\frac{dp}{dx} = \tan\alpha \text{ et } \frac{dp_1}{dx_1} = \tan\alpha_1.$$

La première transformation propose de construire M_1 comme la projection de T sur (MQ). On obtient alors :

$$x_1 = x - \frac{y}{p} = F_1(x, y, p) \text{ et } y_1 = y = f_1(x, y, p).$$

D'où

$$p_1 = \frac{p^3}{y\frac{dp}{dx}} = \varphi(x, y, p, \frac{dp}{dx})$$

ou encore

$$p_1 = \frac{\rho \sin^3 \alpha}{y} = \Phi(x, y, p, \rho)$$

soit

$$\rho = \frac{p_1 y_1}{\sin^3 \alpha}.$$

Et Laisant de conclure : « Le rayon de courbure cherché est donc égale à la sous-normale en M_1, divisée par le cube du sinus de l'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x »[218].

La quatrième construction permet d'obtenir le rayon de courbure à l'aide d'une quatrième proportionnelle. Ici, le point M_1 est la projection de N sur (MQ). On a donc :

$$x_1 = x + py \text{ et } y_1 = y$$

d'où :

$$p_1 = \frac{p}{1 + p^2 + y\dfrac{dp}{dx}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \dfrac{y}{\rho\cos\alpha}}.$$

On en déduit :

$$\rho = \frac{\dfrac{y}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tan\alpha} - 1} = \frac{MN.TN}{T_1T}.$$

Les cinquième, sixième et huitième transformations donnent des résultats analogues ; les constructions 7 et 9 aboutissent à des relations plus complexes, dont Laisant affirme cependant qu'elles correspondent à des constructions élémentaires.

La transformation 10 est le premier exemple où la méthode ne permet pas de conclure. Le point M_1 est ici obtenu en reportant sur la perpendiculaire à l'axe des abscisses à partir de N la distance NM ($NM_1 = NM$).

Les relations sont les suivantes :

$$x_1 = x + py \text{ et } y_1 = y\sqrt{1 + p^2},$$

et on en déduit :

$$p_1 = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

218 [Laisant, 1874c], p. 371.

La détermination du rayon de courbure est ici impossible, mais cette construction permet de montrer que les sous-normales aux courbes C et C_1 en M et M_1 sont égales (en effet on remarque que $y_1p_1 = yp$ soit $P_1N_1 = PN$).

La transformation 11 pose C_1 comme étant la podaire[219] de C, O étant le pôle. Le point M_1 est donc le projeté de O sur (MT) et on a :

$$x_1 = \frac{p(px-y)}{p^2+1} \text{ et } y_1 = \frac{y-px}{p^2+1}.$$

On en déduit :

$$p_1 = \frac{p^2x-2py-x}{2px+p^2y-y}.$$

Là encore, la détermination de ρ est impossible mais en réécrivant la relation précédente sous la forme

$$-\frac{1}{p_1} = \frac{y_1-\frac{y}{2}}{x_1-\frac{x}{2}},$$

Laisant retrouve le résultat suivant : « La normale à la podaire passe par le milieu du rayon vecteur OM »[220].

Dès la transformation 12, ce résultat est d'ailleurs utilisé. M_1 est ici le projeté de O sur (MN). La courbe C_1 est donc la podaire de la développée de C avec O pour pôle, si bien que la normale M_1N_1 à cette podaire passe par le milieu de Oω, ω étant le centre de courbure recherché. En construisant le triangle OM_1A isocèle en A, on obtient ω comme intersection de (OA) et (MN).

La quatorzième transformation sera notre dernier exemple[221] : on place M_1 sur la normale MN en reportant une distance constante a à partir de M (on a donc $MM_1 = a$).
On obtient :

$$x_1 = x - a\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ et } y_1 = y + a\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

D'où :

[219] La podaire d'une courbe C par rapport à un point P est le lieu géométrique des projections orthogonales de P sur les tangentes à la courbe C.
[220] [Laisant, 1874c], p. 378.
[221] On remarque que la 13ème transformation répond à une question 771 de Nicolaïdès parue dans les *Nouvelles annales* en 1866 (Sér. 2, 5, 1866, p. 383).

$$p = p_1.$$

Le calcul du rayon de courbure est ici impossible, les deux courbes étant parallèles, cas que Laisant avait souligné dès le début de l'article.

Les deux dernières transformations sont similaires mais la seizième aboutit à une construction simple du centre de courbure. Et Laisant de conclure sur la généralité de la méthode, sa fécondité quant aux propriétés qui découleraient d'autres transformations et l'intérêt de son aspect essentiellement graphique.

LA DEUXIEME THESE DE 1877

C.-A. Laisant généralisera le procédé exposé en 1874 lors de sa deuxième thèse de 1877 : « Sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces » ([Laisant, 1877b]). Le travail de 1877 est explicitement présenté comme « l'extension de la méthode en question aux courbes gauches et aux surfaces ; ou plutôt, la recherche de méthodes analogues pouvant permettre la détermination des éléments du second ordre en un point donné »[222]. Laisant insiste sur la généralité de son propos et le caractère novateur de son approche : « Bien que les procédés de transformations usités en Géométrie soient nombreux, je ne crois pas qu'on se soit occupé de ceux qui rentrent dans la forme générale que je viens d'indiquer »[223], i.e. la méthode de l'article de 1874.

La première section, intitulée « transformation des courbes », s'emploie donc à fournir une méthode pour déterminer le plan osculateur et le rayon de courbure en un point d'une courbe gauche, un peu à la manière de l'indicatrice sphérique de Paul Serret à laquelle Laisant fait référence dans son « préliminaire ». Nous traiterons de la deuxième section, « Transformation des surfaces », un peu plus loin.

Laisant considère ici un point M d'une courbe gauche donnée C ; M est repéré par ses coordonnées x, y, z dans un repère et son abscisse curviligne s est comptée à partir d'une origine quelconque. On suppose connu la tangente en M à C et on désignera donc par a, b, c les valeurs $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ qu'il présente comme les valeurs des cosinus des angles que forme cette tangente par rapport à chacun des axes du repère (si bien que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

[222] [Laisant, 1877b], p. 80.
[223] Ibid.

À partir de cette courbe C, il construit une deuxième courbe C_1 où chaque point M_1 est déduit d'un point M de C et de la direction de la tangente en M à C. On obtient donc pour coordonnées de M_1 les fonctions :

$$x_1 = \varphi(x, y, z, a, b, c)\ ;\ y_1 = \psi(x, y, z, a, b, c) \text{ et } z_1 = \chi(x, y, z, a, b, c).$$

En différenciant la relation précédente, il obtient trois relations de la forme :

$$dx_1 = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{da}da + \frac{d\varphi}{db}db + \frac{d\varphi}{dc}dc.$$

En utilisant pour la courbe C_1 des notations analogues à celles employées pour C, il écrit trois relations de la forme

$$a_1 ds_1 = [a\frac{d\varphi}{dx} + b\frac{d\varphi}{dy} + c\frac{d\varphi}{dz}]ds + \frac{d\varphi}{da}da + \frac{d\varphi}{db}db + \frac{d\varphi}{dc}dc$$

$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$ étant elles-mêmes des fonctions de x, y, z, a, b et c.

Ajoutant la relation provenant de la différentiation de

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

c'est-à-dire

$$a\mathrm{d}a + b\mathrm{d}b + c\mathrm{d}c = 0,$$

Laisant obtient un système de quatre équations aux quatre inconnues da, db, dc, ds, que Laisant résout, lorsque cela est possible, sous la forme :

$$da = \mathrm{d}s_1\mathfrak{A}(x, y, z, a, b, c, a_1, b_1, c_1)$$

$$db = \mathrm{d}s_1\mathfrak{B}(x, y, z, a, b, c, a_1, b_1, c_1)$$

$$dc = \mathrm{d}s_1\mathfrak{C}(x, y, z, a, b, c, a_1, b_1, c_1)$$

$$ds = \mathrm{d}s_1\mathfrak{S}(x, y, z, a, b, c, a_1, b_1, c_1).$$

Les fonctions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ fournissent la direction de la normale principale à la courbe C au point M (puis celle de l'axe du plan osculateur).

Enfin, le rayon de courbure de la courbe C au point M s'écrit alors

$$\rho = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}$$

et Laisant fournit les formules donnant les coordonnées du centre de courbure en fonction de x, y, z, ρ et de ces mêmes fonctions.

En résolvant le système :

$$x_1 = \varphi(x, y, z, a, b, c)$$
$$y_1 = \psi(x, y, z, a, b, c)$$
$$z_1 = \chi(x, y, z, a, b, c)$$

en x, y et z, et en reportant les valeurs trouvées au sein des fonctions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}$, les éléments de second ordre de la courbe C_1 seront déterminés à partir de la position du point M et des tangentes en M et M_1. De même, en isolant a, b, c dans le système précédent, l'auteur exprime le rayon de courbure en fonction des positions des points M et M_1 et de la seule tangente en M_1 à C_1. Par un procédé analogue, il est possible de déterminer la surface sur laquelle se situe le centre de courbure uniquement en fonction des positions des points M et M_1.

Poursuivant ces calculs et différentiant les coordonnées (f ; g ; h) du vecteur normal au plan osculateur en M, Laisant obtient $\frac{df}{ds}, \frac{dg}{ds}, \frac{dh}{ds}$ comme images par les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ des variables x, y, z, a, b, c, a_1, b_1, c_1, ξ_1, η_1, $\zeta_{,1}$, ρ_1 (ξ_1, η_1, $\zeta_{,1}$ étant les coordonnées du centre de courbure en M_1 pour C_1) et donc une expression du rayon de torsion en M :

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2}},$$

c'est-à-dire qu'il est montré ici que le rayon de torsion peut s'obtenir « au moyen des éléments du premier ordre de la courbe C, et de ceux du premier et du second ordre de la courbe C_1 »[224] ceci théoriquement. En effet, Laisant prévient : « Les calculs que nous indiquons ici d'une manière générale seront le plus souvent compliqués, dans les applications, et ne pourront guère fournir des constructions faciles pour le rayon de torsion. »[225]

Comme pour l'étude des courbes planes, c'est bien une méthode graphique systématique que Laisant propose ici. Aucune construction (délicate dans l'espace) n'est effectuée mais l'idée sous-jacente reste d'origine géométrique. La résolution du système à quatre équations peut s'avérer inopérante pour la détermination du rayon de courbure (mais non pour la détermination de la normale principale en M). La détermination de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ reste par exemple possible mais pas celle de $\mathfrak{S}$, si bien qu'on ne peut que formuler une propriété entre les directions des tangentes en M et M_1.

---

[224] [Laisant, 1877b], p.89.
[225] Ibid.

Laisant expose ensuite 17 transformations comme applications des principes exposés précédemment, transformations qui sont souvent le prolongement de celles étudiées pour l'étude des courbes planes. Nous proposons d'étudier les plus significatives d'entre elles afin d'éclairer la méthode exposée, de souligner ses limites et surtout d'illustrer la généralisation à l'espace effectuée par rapport à l'article de 1874.

P, Q et R désignent les projetés de M respectivement sur les plan (yOz), (zOx) et (xOy). Les constructions proposées utilisent régulièrement le point T, point d'intersection de la tangente en M avec le plan (yOz) et le point N est l'intersection de l'axe (Ox) avec le plan normal en M à C.

La première transformation consiste à construire M_1 comme l'intersection de la parallèle à l'axe (Ox) passant par T et du plan (MQR). On obtient alors :

$$x_1 = x = \varphi(x, y, z, a, b, c)$$

$$y_1 = y - \frac{b}{a}x = \psi(x, y, z, a, b, c)$$

$$z_1 = z - \frac{c}{a}x = \chi(x, y, z, a, b, c).$$

En différentiant :

$$dx_1 = dx \qquad \text{soit } a_1 ds_1 = a ds$$

$$dy_1 = b\frac{x}{a^2}da - \frac{x}{a^2}db \qquad \text{soit } b_1 ds_1 = \frac{x}{a^2}(bda - adb)$$

$$dz_1 = c\frac{x}{a^2}da - \frac{x}{a^2}dc \qquad \text{soit } c_1 ds_1 = \frac{x}{a^2}(cda - adc).$$

En résolvant le système précédent :

$$da = ds_1 \frac{a^2}{x^2}(bb_1 + cc_1) \qquad \text{soit } \mathfrak{A} = \frac{a^2}{x^2}(bb_1 + cc_1)$$

$$db = ds_1 \frac{a^2}{x^2}[b(bb_1 + cc_1) - b_1] \qquad \text{soit } \mathfrak{B} = \frac{a^2}{x^2}[b(bb_1 + cc_1) - b_1]$$

$$dc = ds_1 \frac{a}{x}[c(bb_1 + cc_1) - c] \qquad \text{soit } \mathfrak{C} = \frac{a}{x}[c(bb_1 + cc_1) - c]$$

$$(\text{et } ada + bdb + cdc = 0) \qquad \text{et } \mathfrak{S} = \frac{a_1}{a}.$$

Finalement, le rayon de courbure a pour expression

$$\rho = x\frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 + c_1^2 - (bb_1 + cc_1)}},$$

conclusion que Laisant affirme pouvoir transcrire géométriquement.

La deuxième transformation consiste à placer M_1 comme intersection de la parallèle à l'axe (Ox) passant par M avec le plan perpendiculaire à ce même axe (Ox) passant par N. Le plan normal à C en M a pour équation

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0.$$

Si bien que N a pour coordonnées $((ax + by + cz)/a\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et alors

$$x_1 = \frac{1}{a}(ax + by + cz).$$

De plus, comme (MM_1) est parallèle à (Ox), l'auteur affirme :

$$y_1 = y \text{ et } z_1 = z.$$

Différentiant les relations précédentes, il a :

$$a_1 ds_1 = \frac{1}{a^2}\ [ads - (by + cz)da + aydb + azdc]$$

$$b_1 ds_1 = bds$$

$$c_1 ds_1 = cds$$

$$(\text{et } ada + bdb + cdc = 0).$$

La résolution de ce système par rapport aux inconnues da, db, dc, ds ne permet pas de déterminer les valeurs de ces dernières. Laisant ne peut qu'employer les deux dernières équations pour écrire :

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1},$$

ce qui traduit que les tangentes aux projections des courbes C et C_1 sur le plan (yOz) sont confondues. En poursuivant l'exploitation du système précédent, il montre que le centre de courbure appartient à une sphère dont le centre est situé à une certaine distance du point M sur (NM). Les troisièmes et quatrièmes transformations (M_1 comme symétrique de N par rapport à M et M_1 image de O par la translation de vecteur NM) aboutissent à des conclusions semblables.

Avec la cinquième transformation, Laisant aborde des types de construction où le point M_1 est situé sur une parallèle à la tangente en M à C[226], et il propose de se placer dans le cas général de ce type de transformation. On a :

$$x_1 = at \text{ ; } y_1 = bt \text{ et } z_1 = ct$$

où t est une fonction de x, y, z, a, b, c.

En différentiant,

$$a_1 ds_1 = adt + tda$$

$$b_1 ds_1 = bdt + tdb$$

$$c_1 ds_1 = cdt + tdc.$$

De ce système il tire :

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1)ds_1 = (a^2 + b^2 + cc^2)dt + t(ada + bdb + cdc) = dt.$$

Soit $\cos\theta ds_1 = dt$ où θ est l'angle formé par les deux tangentes, le système devient alors :

$$da = \frac{1}{t}(a_1 - a\cos\theta)ds_1 = \mathfrak{A}ds_1$$

$$db = \frac{1}{t}(b_1 - b\cos\theta)ds_1 = \mathfrak{B}ds_1$$

$$dc = \frac{1}{t}(c_1 - c\cos\theta)ds_1 = \mathfrak{C}ds_1.$$

La fonction $\mathfrak{S}$ étant calculée suivant l'expression de t, Laisant obtient comme expression du rayon de courbure

$$\rho = \frac{\mathfrak{S}t}{\sin\theta},$$

ainsi que les coordonnées du centre de courbure correspondant.

Dans le cas de la cinquième transformation, application de ce qui précède, où M_1 est l'intersection de la parallèle passant par O à la tangente et du plan (MQR),

$$t = \frac{x}{a} \text{ et } x_1 = x,$$

donc

$$a_1 \mathrm{d}s_1 = a\mathrm{d}s$$

ou encore

$$\mathfrak{S} = \frac{a_1}{a}$$

[226] On choisit comme origine un point fixe de cette parallèle.

si bien que

$$\rho = \frac{a_1 x}{a^2 \sin\theta}.$$

Les transformations 6, 7 et 8 emploient un procédé similaire : la transformation 6 consiste par exemple à placer M_1 comme projeté de O sur le plan normal en M. t est alors la distance de O à ce plan normal[227]. Ce procédé est alors de nouveau généralisé dans le cas où OM_1 (avec M_1 sur une parallèle à la tangente en M) est une fonction quelconque de la distance l.

Avec la transformation 9, Laisant examine le cas général des transformations pour lesquelles le point M_1 se situe sur la tangente en M. Dans ce cas, il pose :

$$x_1 = x + at \,;\, y_1 = y + bt \text{ et } z_1 = z + ct$$

et retrouve alors une série de formules identiques aux transformations 5 à 8, où intervient l'angle θ formé par les droites (MM_1) et (M_1T_1), seule la détermination de la fonction $\mathfrak{S}$ diffère. Une des particularités de ce type de transformation est le fait que le plan osculateur en M se trouve déterminé facilement car confondu avec le plan (MM_1T_1), comme le remarque Laisant. La démarche est semblable lorsque M_1 est le symétrique de T par rapport à M, (neuvième transformation, où $t = x/a$).

Dans la dixième transformation, la courbe C_1 est la podaire de C (O étant le pôle). Le cas général précédemment étudié s'applique ici avec $t = -\,l$ où l est la distance de O au plan normal en M. Mais la formule $\cos\theta ds_1 = ds + dt$ ne permet pas de déterminer la fonction $\mathfrak{S}$: la transformation 10 est inopérante pour la détermination du centre de courbure, elle permet cependant de montrer que le plan normal à la podaire coupe [OM] en son milieu, ce que Laisant souligne être comme une généralisation de ce qui avait été montré pour les courbes planes.

Les transformations 11 et 12 placent de même le point M_1 sur la tangente avec diverses valeurs pour MM_1, d'où l'étude du cas général où MM_1 est une fonction L de l. D'autres transformations sont proposées, transformations qui ne permettent pas toujours de déterminer le rayon de courbure (transformations 14 ou 16 où on porte OM_1 = OM sur la perpendiculaire au plan (OMT) en O) ou bien constructions se détachant des méthodes employées précédemment : c'est le cas de la transformation 15. Ici, sont construits les points

---

[227] Soit

$$t = l = ax + by + cz.$$

Pour la transformation 8, on place M_1 sur la parallèle passant par O à la tangente en M tel que OM_1 = OM. Ici,

$$t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

N, N' (intersection du plan normal en M et de l'axe (Oy)) et N'' (intersection du plan normal en M et de l'axe (Oz)), puis les plans perpendiculaires à chacun des axes en ces points. M_1 est alors l'intersection de ces trois plans et

$$x_1 = \frac{l}{a}, y_1 = \frac{l}{b} \text{ et } z_1 = \frac{l}{c}$$

l étant la distance de O au plan normal en M. Laisant différentie les relations précédentes et résout le système en da, db, dc afin de déterminer la fonction $\mathfrak{S}$ et une nouvelle expression pour le rayon de courbure.

Pour finir, la dix-septième transformation a pour but d'obtenir une expression du rayon de torsion. Supposant le plan osculateur en M connu, on place M_1 sur la perpendiculaire à ce plan en M de façon à ce que la longueur MM_1 soit constante ($MM_1 = k$). Alors :

$$x_1 = x + kf\,;\, y_1 = y + kg\,;\, z_1 = z + kh$$

(f, g, h désignant les composante du vecteur normal au plan osculateur).
La différentiation donne des relations du type :

$$a_1 ds_1 = ads + kdf.$$

En notant θ l'angle formé par les tangentes à C et C_1, l'auteur écrit[228] :

$$\cos \theta \mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}s.$$

La résolution du système donne trois relations de la forme :

$$df = \frac{1}{k}(a_1 - a\cos \theta)\mathrm{d}s_1$$

d'où :

$$\sqrt{df^2 + dg^2 + dh^2} = \frac{1}{k}\sin \theta ds_1 = \frac{1}{k}\tan \theta\, ds.$$

Le rayon de torsion r en M est donc

$$r = \frac{k}{\tan\theta}$$

ce qui conclut l'étude. Laisant poursuit ensuite suivant le même principe : en construisant une courbe C_1 à partir de la courbe C, il étudie la développante d'une courbe gauche, l'enveloppe des axes des plans osculateurs et le lieu des centres de courbures. En employant la même idée de transformation d'une courbe, il propose ainsi une étude complète des courbes gauches

[228] En notant que $aa_1 + bb_1 + cc_1 = \cos \theta$.

s'appuyant, comme on l'a vu, sur le même principe, répété et adapté, mais permettant de parvenir à des résultats variés.

Pour conclure, nous proposons un extrait du rapport de Darboux sur cette thèse soutenue en novembre 1877 :

> *La seconde thèse traite des transformations des courbes et des surfaces. L'auteur étudie les transformations dans lesquelles à un point M de chaque courbe ou surface correspond un point M' qui dépend à la fois de la position de M et des éléments différentiels du premier ordre en M. Ce travail n'aurait pas une importance suffisante pour être accepté seul ; mais il me paraît pouvoir être admis comme seconde thèse.*[229]

Malgré l'étendue limitée des résultats proposés, notons que le but poursuivi par Laisant, est bien la généralisation et l'affirmation du caractère méthodique d'une démarche essentiellement graphique, afin de prouver que « l'analyse peut mettre à la disposition de la Géométrie descriptive des ressources nouvelles »[230].

GENERALISATION AUX SURFACES DE L'ESPACE

Avant de dérouler le fil des écrits concernant les questions de courbure, nous nous proposons d'étudier la seconde partie de la thèse de 1877. La principale raison de ce choix est que cette partie généralise la méthode déjà exposée pour les courbes planes et gauches. Cette étude marque donc l'aboutissement de toute une étude sur les transformations de courbes ou de surfaces. La démarche permet, dans une pensée géométrique et par des outils de calcul infinitésimal, de déterminer les éléments différentiels d'ordres supérieurs d'objets géométriques. La possibilité d'adopter avec pertinence ce point de vue aux surfaces souligne l'intérêt de la méthode. De plus, cette question clôt la deuxième thèse de 1877 et revêt donc une importance particulière. Enfin, même si le thème est relativement peu abordé, l'étude de propriétés des surfaces apparaît sporadiquement chez Laisant.

Remarquons que C.-A. Laisant s'est attaché à l'étude d'éléments différentiels du premier ordre d'une surface dès sa « Note sur le plan tangent en un point d'une surface »[231] parue dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1868. Il détermine l'équation du plan tangent à une surface donnée par un système de deux équations dépendantes d'un paramètre α,

---

[229] A.N. AJ^{16} 5533 cité dans [Gispert, 1991], p. 328.
[230] [Laisant, 1877b], p. 89.
[231] [Laisant, 1868b], "Note sur le plan tangent en un point d'une surface", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 116-120.

sans effectuer au préalable d'élimination[232]. Laisant souligne même que la démarche est intéressante dans la mesure où elle permet une nouvelle solution à un problème concernant un système d'ellipsoïdes homofocaux (question 700, initialement résolue par Picart et Durrande dans les *NAM*).

Revenons à présent sur la deuxième thèse de 1877. Suivant le mode de présentation des transformations des courbes gauches, Laisant propose d'associer à chaque point M d'une surface donnée un point M_1 dépendant de la position du point M et des éléments du premier ordre de la surface initiale afin d'en déterminer les éléments du second ordre de celle-ci en M. Mais l'auteur prévient : « il est seulement essentiel de faire remarquer que les applications graphiques perdent ici beaucoup de leur importance, parce que les éléments géométriques du second ordre dépendent en général des éléments analytiques d'une manière assez compliquée »[233].

Considérant un point M (x ; y ; z) d'une surface dont l'équation est donnée sous la forme $z = F(x, y)$, C.-A. Laisant construit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ avec

$$x_1 = \varphi(x, y, z, p, q),\ y_1 = \psi(x, y, z, p, q) \text{ et } z_1 = \chi(x, y, z, p, q)$$

où

$$p = \frac{dz}{dx} \text{ et } q = \frac{dz}{dy}.$$

La différentiation de ces expressions donne :

$$dx_1 = \mathfrak{A}dx + \mathfrak{B}dy$$

$$dy_1 = \mathfrak{A}'dx + \mathfrak{B}'dy$$

$$dz_1 = \mathfrak{A}''dx + \mathfrak{B}''dy,$$

où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, … sont des fonctions de x, y, z, p, q, r, s, t avec

$$r = \frac{dp}{dx},\ s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \text{ et } t = \frac{dq}{dy}.$$

En considérant une courbe tracée sur la surface initiale et parallèle au plan (xOz), on peut affirmer que $dy = 0$ et les équations précédentes permettent d'écrire les relations :

$$\frac{\mathfrak{A}}{a_1} = \frac{\mathfrak{A}'}{b_1} = \frac{\mathfrak{A}''}{c_1}$$

---

[232] Si la surface est déterminée par le système d'équation

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \text{ et } f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

l'équation du plan tangent au point de coordonnées (X, Y, Z) est :

$$(x - X)(F_x'f_\alpha' - F_\alpha'f_x') + (y - Y)(F_y'f_\alpha' - F_\alpha'f_y') + (z - Z)(F_z'f_\alpha' - F_\alpha'f_z') = 0.$$

[233] [Laisant, 1877b], p. 81.

où a_1, b_1, c_1 sont les coordonnées du vecteur tangent unitaire à la courbe transformée correspondant au déplacement choisi.

De même, en se déplaçant parallèlement au plan (yOz) (dx = 0), on obtient deux égalités :

$$\frac{\mathfrak{B}}{a_1} = \frac{\mathfrak{B}'}{b_1} = \frac{\mathfrak{B}''}{c_1}.$$

La résolution des quatre égalités obtenues par rapport à r, s et t donne les dérivées secondes en fonction de $x, y, z, p, q, a_1, b_1, c_1, a_1', b_1'$ et c_1'[234].

Laisant fournit un premier exemple de cette démarche. On appelle N le point d'intersection de la normale en M à la surface initiale et du plan (xOy). M_1 est alors construit comme l'intersection de la parallèle à l'axe (Oz) et du plan passant par M et parallèle au plan de base (xOy) :

$$x_1 = x_N = x + pz$$

$$y_1 = y_N = y + qz$$

$$z_1 = z.$$

En différentiant :

$$dx_1 = (1 + p^2 + zr)dx + (pq + zs)dy \qquad \text{soit } \mathfrak{A} = 1 + p^2 + zr \text{ et } \mathfrak{B} = pq + zs$$

$$dy_1 = (pq + zs)ds + (1 + q^2 + zt)dy \qquad \text{soit } \mathfrak{A}' = pq + zs \text{ et } \mathfrak{B}' = 1 + q^2 + zt$$

$$dz_1 = pdx + qdy \qquad \text{soit } \mathfrak{A}'' = p \text{ et } \mathfrak{B}'' = q.$$

À l'aide de courbes parallèles aux axes du repère (c'est-à-dire si dy = 0 ou si dx = 0), il obtient :

$$\frac{1 + p^2 + zr}{a_1} = \frac{pq + zs}{b_1} = \frac{p}{c_1},$$

$$\text{et } \frac{pq + zs}{a'_1} = \frac{1 + q^2 + zt}{b'_1} = \frac{q}{c_1}.$$

Il résout ce système en r, s et t :

$$r = \frac{1}{z}\left(\frac{a_1}{c_1}p - p^2 - 1\right)$$

[234] On peut également choisir d'utiliser les coordonnées α_1, β_1, γ_1 du vecteur normal unitaire à la surface des M_1 et le premier des deux systèmes précédents pour écrire r, s et t comme fonction de $x, y, z, p, q, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a_1, b_1$ et c_1.

$$s = \frac{p}{z}\left(\frac{b_1}{c_1} - q\right)$$

$$t = \frac{1}{z}\left(\frac{b'_1}{c'_1} q - q^2 - 1\right).$$

Ces relations permettent d'en déduire le rayon de courbure de courbes tracées sur la surface donnée.

Laisant envisage d'autres transformations. Ainsi, le point M_1 peut être placé sur une parallèle à la normale en M à la surface initiale de façon à ce que $OM_1 = L$. Un cas particulier[235] de ce type de transformation est de considérer la surface transformée comme la podaire de la première : O étant projeté sur le plan tangent en M, L est alors égal à la distance l de O à ce plan tangent. M_1 est tel que :

$$x_1 = \alpha l,\ y_1 = \beta l \text{ et } z_1 = \gamma l$$

et donc

$$dx_1 = \alpha dl + l\, d\alpha$$

$$dy_1 = \beta dl + l d\beta$$

$$dz_1 = \gamma dl + l d\gamma.$$

Sachant que :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \text{ et } l = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

il ajoute que

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0 \text{ et } dl = x d\alpha + y d\beta + z d\gamma = 0,$$

et obtient, par combinaisons des égalités précédentes,

$$\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 = dl \text{ et } x dx_1 + y dy_1 + z dz_1 = 2l dl$$

puis enfin

$$\left(\alpha l - \frac{x}{2}\right) dx_1 + \left(\beta l - \frac{y}{2}\right) dy_1 + \left(\gamma l - \frac{z}{2}\right) dz_1 = 0$$

ou encore

$$\left(x_1 - \frac{x}{2}\right) dx_1 + \left(y_1 - \frac{y}{2}\right) dy_1 + \left(z_1 - \frac{z}{2}\right) dz_1 = 0.$$

[235] Le cas général de ce genre de transformations est ensuite étudié, notamment le cas où la surface transformée est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de la surface initiale.

Le vecteur de coordonnées $\left(x_1 - \frac{x}{2}\right)$, $\left(y_1 - \frac{y}{2}\right)$, $\left(z_1 - \frac{z}{2}\right)$ est donc normal à la surface transformée : la normale à la surface podaire menée en M_1 coupe donc le vecteur OM en son milieu. C'est de nouveau une généralisation d'une propriété démontrée dans le cas des courbes planes, puis gauches, par l'application d'une méthode dont les généralisations successives trouvent leur aboutissement (et leurs limites) dans le cas des surfaces.

Laisant conclut son étude avec la transformation qui consiste à placer M_1 sur la normale en M à la surface initiale en respectant $MM_1 = u$ = constante.

On obtient :

$$x_1 = x + \alpha u \,;\; y_1 = y + \beta u \text{ et } z_1 = z + \gamma u,$$

puis :

$$dx_1 = dx + ud\alpha$$
$$dy_1 = dy + ud\beta$$
$$dz_1 = dz + ud\gamma.$$

Multipliant chaque expression respectivement par α, β, γ et sommant[236],

$$\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 = 0.$$

Ceci qui montre que les deux surfaces ont leur plan tangent parallèles[237].

L'étude des transformations de surfaces occupe une place plus restreinte dans la deuxième thèse de 1877. Mais plus que de produire une série de résultats obtenus à partir de la méthode présentée, les quelques applications présentées ont visiblement pour but de montrer le caractère généralisable des constructions déjà employées dans le cas des courbes planes puis gauches.

Nous remarquerons pour finir que la généralisation de propriétés de courbes à des propriétés similaires pour les surfaces intéresse visiblement Laisant. Ainsi, lors de la séance du 4 décembre 1889 de la Société mathématique de France, il reprend, dans sa communication une « Propriété des surfaces algébriques »[238], un résultat attribué à Humbert et généralise la propriété suivante : « Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une courbe algébrique soit constante est une

---

236 en se rappelant que $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$ et $\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$.

237 Résultat qui est ensuite complété par l'étude d'une courbe racée sur la surface initiale et de sa transformée.

238 [Laisant, 1890a], "Propriété des surfaces algébriques.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 18, 1890, p. 141-144.

conique. »[239] aux surfaces : « le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une surface algébrique soit constante est une surface du second ordre. »[240]

UN SUJET D'IMPORTANCE

En parcourant l'œuvre de C.-A. Laisant, les questions liées aux rayons de courbure apparaissent à de multiples reprises. En présentant quelques-uns de ces travaux, nous soulignons les approches possibles, l'étendue de cet intérêt dans le temps et la place prépondérante de cette notion dans la vision du courbe chez Laisant.

Dans l'article de 1887 « Des rayons de courbure dans les transformations isogonales »[241], il est de nouveau question de transformation et de calcul de rayon de courbure mais dans une optique bien différente. Laisant ne souhaite pas déterminer un rayon de courbure mais propose d'étudier les relations entre les rayons de courbure d'une courbe et de son image par une transformation isogonale, c'est-à-dire une transformation qui conserve les angles. Notons surtout l'application, sur un sujet similaire à celui de l'article de 1874, d'un outillage mathématique bien différent de la géométrie différentielle puisqu'ici c'est la méthode des équipollences qui est mise à contribution. L'article prolonge en effet les « Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes plane » d'Abel Transon ([Transon, 1869a]), ce dernier usant alors de l'algèbre directive. Nous étudierons cet article avec plus de précision dans la deuxième partie. Annonçons déjà que Laisant y montre que si les centres de courbure en un point X d'une famille de courbes se coupant en X sont situés sur une conique, alors les centres de courbures des courbes associées sécantes au point Y correspondant à X sont eux aussi situés sur une conique. Ceci est la généralisation annoncée des résultats de Transon.

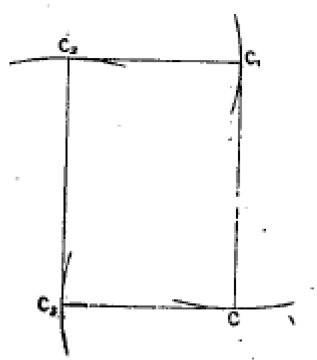
L'utilisation de la méthode des équipollences pour les questions de courbure n'est pas exceptionnelle. Nous citerons pour exemple la « Note sur un système de deux courbes

---

239 [Laisant, 1890a], p. 144. Cette propriété, également due à Humbert, a été démontrée dans une séance précédente de la SMF par Fouret.
240 Ibid. Démonstration sans « artifice » mais à l'aide d'outils analytiques simples, Laisant use comme en 1868 de propriété sur l'élimination dans un système d'équations.
241 [Laisant, 1887b], "Des rayons de courbure dans les transformations isogonales", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15, 1887, p. 39-41.

planes »[242]. Prenant sur deux courbes planes deux points X et Y repérés par une même abscisse curviligne, l'auteur s'intéresse à la courbe formée des points Z milieux du segment XY, et particulièrement à ses centres de courbures. Remarquons qu'ici l'article est accompagné de figures explicatives.

Quelles que soient les méthodes employées, les questions de courbure traversent véritablement l'ensemble de l'œuvre de Laisant, preuve d'un réel intérêt pour cette notion. En 1890, la communication pour l'AFAS « Sur deux genres remarquables de courbes planes »[243] traite des thèmes de développées et de centres de courbures. Le lieu des centres de courbures d'une courbe constituant sa développée, l'auteur recherche ici par des moyens de géométrie différentielle des courbes qui coïncident avec leur quatrième développée.



La courbe C et ses développées successives[244]

Le sujet réapparaît de façon aussi originale en 1895 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. Dans sa « Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure »[245], Laisant énonce la propriété suivante :

> *Soit une courbe plane Γ ayant une asymptote Δ. Si l'on transforme la figure par inversion par rapport à un point O du plan, la courbe Γ se transforme en une courbe Γ_1 passant par O, et la transformée de l'asymptote Δ n'est autre que le cercle de courbure Δ_1 de la courbe au point O.* [246]

En effet, le point d'intersection de Γ et Δ se trouvant renvoyé à l'infini, son image par l'inversion de centre O de puissance k^2 sera O et l'image de la droite Δ est bien un cercle Δ_1 tangent à Γ_1 en O. Reste à montrer que le rayon de ce cercle est bien le rayon de courbure de la courbe en O. En choisissant comme axe polaire la parallèle à l'asymptote Δ passant par O,

[242] [Laisant, 1888a], "Note sur un système de deux courbes planes", *BSMF*, t. 16, 1888, p. 172-175.
[243] [Laisant, 1890b], "De deux genres remarquables de courbes planes", AFAS, Limoges, 1890/2, p. 74-78.
[244] [Laisant, 1890b], p. 74.
[245] [Laisant, 1895a], "A propos des asymptotes et des cercles de courbure", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 23, 1895, p. 95-97.
[246] [Laisant, 1895a], p. 95.

O étant pris pour origine, et en désignant par $r = \rho_1(\omega)$ l'équation en coordonnées polaires de la courbe, la formule usuelle du rayon de courbure en O devient

$$\mathrm{R} = \frac{\rho'(0)}{2}\ ^{247}.$$

Or, si p désigne la distance du point O à la droite Δ, Δ étant asymptote à Γ :

$$p = \lim(\rho(\omega)\sin\omega),$$

lorsque ω tend vers 0.

Laisant affirme alors que

$$p = k^2 \lim\left(\frac{\sin\omega}{\rho_1(\omega)}\right)\ ^{248}.$$

Or pour ω tendant vers 0, l'auteur écrit[249] :

$$p = \frac{k^2}{\rho_1'(0)}$$

et donc

$$\mathrm{R} = \frac{k^2}{2p},$$

ce qui est précisément le rayon du cercle Δ_1 image par l'inversion de Δ, ce qui montre le résultat.

C.-A. Laisant signale le caractère géométriquement intuitif de cette proposition[250] : si aucune figure n'est proposée, un raisonnement géométrique confirme le résultat et en permet une présentation simple. L'auteur ajoute :

> *Cette proposition, nouvelle ou non, présente un sérieux intérêt, même au point de vue de l'enseignement, car elle tend à fusionner en une seule les deux théories des asymptotes et des rayons de courbure, qui semblent a priori bien distinctes l'une de l'autre.*
> *Toute détermination de rayon de courbure, par exemple, se déduira immédiatement de la détermination de l'asymptote à la courbe inverse, en prenant*

---

247 Laisant applique en fait $\rho_1(0) = 0$ à la formule $\mathrm{R} = \dfrac{(\rho(0)^2 + \rho_1'(0)^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1(0)^2 + 2\rho_1'(0)^2 - \rho_1(0)^2\rho_1''(0)^2}$.

248 Ce qui s'explique par

$$\mathrm{OM.OM_1} = \rho(\omega)\rho_1(\omega) = k^2.$$

249 Nous justifions cette affirmation en remarquant que :

$$\sin\omega/\rho_1(\omega) \sim \omega/\rho_1(\omega) \sim (\omega - 0)/(\rho_1(\omega) - \rho_1(0)) \sim 1/\rho_1'(0).$$

250 L'asymptote Δ à Γ étant vu comme une tangente au point M à Γ pour M rejeté à l'infini. L'image de cette tangente est bien en cercle tangent à Γ_1 en O, qui à la limite coupe la courbe Γ_1 en O et en deux points indéfiniment proche de O, ce qui nous assure de sa qualité de cercle osculateur.

le point considéré pour pôle d'inversion. Réciproquement, dans certain cas, il pourra être commode de déduire du cercle de courbure, supposé connu, l'asymptote de la courbe inverse.[251]

L'article a visiblement été l'occasion d'échanges entre son auteur et le colonel Mannheim. Ce denier lui indique tout d'abord une propriété à laquelle se rattache le sujet en question, propriété reliant cercle de courbure d'une podaire à une courbe et tangente à cette même courbe. Il suggère une application sur la strophoïde, qui, cette fois, est illustrée :

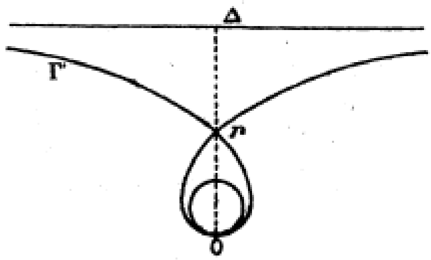


Figure accompagnant l'application suggérée par Mannheim[252].

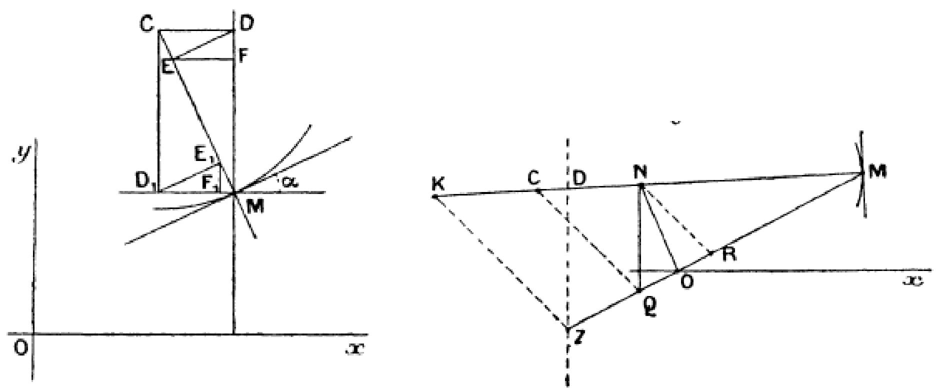
Laisant précise lors de la séance du 5 juin 1895 de la Société mathématique de France[253] qu'Émile Borel lui a signalé que le résultat précédent se déduit de considérations plus générales sur l'ordre de contact des courbes aux points fondamentaux des transformations birationnelles. Lors du concours général de 1889, Borel a lui-même utilisé de telles transformations dites de Cremona[254]. Aucune querelle de priorité ne s'installe, mais cet épisode renforce chez Laisant l'intérêt pour la question.

C.-A. Laisant sera de nouveau amené à présenter de telles remarques lors de l'inauguration d'un monument dédié à Lobatchevski (1793-1856) en septembre 1896[255]. Accompagné de Hermite, Lemoine, Neuberg et d'Ocagne, il présente devant la Société physico-mathématiques de Kazan un court exposé sur les rayons de courbure. Le fait que Laisant choisisse ce sujet alors que son œuvre mathématique est globalement achevée montre l'importance qu'il lui accorde. Le fait que cet exposé, même si il semble succinct, trouve sa place parmi les contributions d'Hermite (développement en série des fonctions hyperboliques), ou de Lemoine (le plus prolifique avec trois mémoires sur la décomposition en facteurs

[251] [Laisant, 1895a], p. 96.
[252] [Laisant, 1895a], p. 97.
[253] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 23, 1895, p. 190-191.
[254] Voir *Sur les transformations géométriques des figures planes* (1863).
[255] Laisant Charles-Ange, "Sur la courbure des courbes planes", in *In memoriam N. I. Lobatschevskii*. Collection de mémoires présentés à la Société physico-mathématique de Kasan pour la fête de l'inauguration du monument de Lobatchevski (1/13 septembre, 1896) par MM. Hermite, Halsted, Girardville, Laisant, Lemoine, Neuberg, Ocagne. Kazan, University Press (Paris, Hermann), 1897, p. 60-63.

premiers, la « géométrografie » et sur les transformations dans le triangle et le tétraèdre) montre aussi la place de choix que réserve son auteur aux questions de rayons de courbure.

Une dernière référence bien tardive à ce sujet est enfin révélatrice de sa place dans l'œuvre géométrique de Laisant qui, en 1903, arrive au terme de son œuvre de "mathématiques pures". C'est en outre un retour vers les *Nouvelles annales de mathématiques* que l'article « Rayon de courbure d'une courbe plane »[256] propose en 1903. Un des aspects remarquables de cette contribution, où sont reliés centres de courbures et dérivées secondes, est l'apport de la figure à la démonstration calculatoire proposée. Pour cette dernière contribution au sujet, Laisant propose donc d'illustrer son propos, ce qui peut suggérer un changement de conceptions sur le statut des figures en géométrie différentielle depuis les premiers articles de 1874.



Figures proposées par Laisant dans le cadre de coordonnées rectangulaires ou polaires.[257]

En coordonnées rectangulaires, l'auteur relie la dérivée seconde d'une fonction et le rayon de courbure de sa courbe représentative en un point M(x ; y). Projetant le centre de courbure C sur la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M, il obtient le point D qu'il projette sur la droite (CM) en E, point que projeté à nouveau en F sur la verticale passant par M. Ce procédé permet de montrer que :

$$R \cos^3 \alpha = \frac{1}{y''},$$

où α est l'angle vérifiant $\tan \alpha = y' = \dfrac{dy}{dx}$.

---

[256] [Laisant, 1903a], "Rayon de courbure d'une courbe plane", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 3, 1903, p. 8-13.
[257] [Laisant, 1903a], p. 10 et 11.

D'une manière similaire, Laisant obtient l'expression :

$$R\sin^3 \alpha = -\ \frac{1}{x''},$$

où x'' désigne $\frac{d^2x}{dy^2}$, puis une nouvelle expression du rayon de courbure :

$$R = \left[\left(\frac{1}{x''}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{y''}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

expression qui permet « connaissant le rayon de courbure et la normale, de construire les deux dérivées x'', y'' […] Connaissant les deux dérivées secondes, de calculer le rayon de courbure »[258]. En coordonnées polaires, L'auteur donne une construction qui « permet, soit d'obtenir le centre de courbure quand on a la dérivée seconde, soit de construire cette dérivée seconde ZO lorsqu'on connaît, au point correspondant M, le centre de courbure. »[259]

I.3.4. L'entrée au sein de sociétés savantes

La première société de mathématiques à laquelle adhère Laisant est la *Société mathématique de France*, tout juste créée en 1872. Alors qu'il est encore capitaine du génie à Tours, Laisant est présenté aux membres de la Société le 5 février 1873 et sera élu membre la séance suivante, le 19 février 1873[260]. Sous la présidence de Chasles, le jeune homme y retrouve de nombreuses personnes issues de la sphère polytechnicienne comme Lemoine, H. Laurent, Mannheim, Haton de la Goupillière, Cornu ; du monde des ingénieurs, de la sphère militaire comme G. Halphen ou plus généralement de l'espace mathématique ou scientifique comme Darboux, Le Verrier, Gauthier-Villars[261]. La même année, Brocard adhère également à la SMF[262]. L'implication rapide, pérenne et si importante de Laisant au sein de la SMF qui « a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées »[263] sera l'objet d'une partie ultérieure. Rapidement, le nantais se tourne également

[258] [Laisant, 1903a], p. 10.
[259] [Laisant, 1903], p. 12.
[260] "Extrait des procès verbaux", *Bulletin de la SMF*, t.1, 1872-1873, p. 76-77.
[261] "Etat de la Société au 31 janvier 1873", *Bulletin de la SMF*, t. I, 1872-1873.
[262] Brocard a été présenté aux membres de la SMF lors de la séance du 19 février.
[263] "Statuts de la société", *Bulletin de la SMF*, t. I, 1872-1873.

vers une société savante de province, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

UNE SOCIETE SAVANTE EN PROVINCE

Cette société savante, initialement Société d'histoire naturelle, a été créée en 1850[264] et ses mémoires sont publiés à partir de 1855. Le fondateur de cette Société est F.-A. Bazin (1796-1865), médecin, docteur en sciences naturelles, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux depuis 1839 et chef de l'asile de la ville, ancien président de sa Société de médecine[265]. En 1874, Laisant devient membre correspondant de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, ville où se développe nombre de sociétés savantes tout au long du XIX^e^ siècle[266]. Le docteur A. Guépin, membre de la Société depuis 1862[267] et dont nous avons souligné les relations avec Laisant, n'est certainement pas étranger à cette adhésion. Guépin s'est rapproché du milieu scientifique bordelais lors de sa nomination au poste de chef des travaux anatomiques à l'école préparatoire de Bordeaux en 1861 et est membre de la Société savante depuis 1862[268].

Les *Mémoires* de la Société ont recueilli une demi-douzaine d'articles de Laisant de 1875 à 1878. Le petit nombre d'articles que nous avons recensés ne doit pas cacher l'importance de cette Société pour les débuts du mathématicien. Tout d'abord, ces articles reprennent les thèmes importants du début de sa carrière (fractions périodiques, arithmétique, fonctions hyperboliques, planimétrie). Ensuite, il est raisonnable de penser que c'est au sein de cette Société que Laisant rencontre Jules Hoüel, membre du conseil d'administration et archiviste de la Société depuis mars 1867[269], membre depuis au moins 1864. Membre actif si on en croit ses nombreuses contributions aux *Mémoires* de la Société dont sa traduction de la

---

[264] Voir le volume consacré au *Cinquantenaire de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (15-16 Janvier 1906), publié en 1906. Les activités de la Société auraient perduré jusque dans les années 1970.

[265] Azam, "Eloge de F.-A. Bazin", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 4, 1er cahier Paris, JB Baillière, 1866.

[266] [Chaline, 1995], p. 63 et 51.

[267] [Hesse, 1994], "Variétés", *Journal de médecine et de chirurgie*, II, t. 32, Lahure et Cie, Paris, 1861 et "Liste des Membres de la société", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 2, Paris, JB Baillière, 1863.

[268] [Hesse, 1994], "Variétés", *Journal de médecine et de chirurgie*, II, t. 32, Lahure et Cie, Paris, 1861 et "Liste des Membres de la société", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 2, Paris, JB Baillière, 1863.

[269] "Liste des Membres de la société", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 6, Paris, JB Baillière, 1868.

« Théorie des parallèles » de Lobatschewsky[270], un « Recueil de tables et formules numériques »[271] et ou encore sa « Théorie élémentaire des quantités complexes »[272].
C'est Hoüel qui présente à la Société les notes de Laisant « Sur un problème d'arithmétique » (séance du 2 décembre 1875, [Laisant, 1876e]) et « Remarque sur les fractions périodiques » (séance du 12 décembre 1878, [Laisant, 1878a]).

Le personnage de J. G. Hoüel[273]

Jules Guillaume Hoüel est né en 1823 dans le Calvados. Il est élève au lycée de Caen puis entre à l'École normal supérieur en 1843. Il enseigne à Bourges, Bordeaux, Pau, Alençon et Caen, soutient une thèse en mécanique céleste en 1855. Il refuse alors l'offre de Le Verrier d'un poste à l'observatoire de Paris et se retire pour quatre ans dans le Calvados. Il accède à la chaire de mathématique pure à la Faculté des sciences de Bordeaux en 1859 et en sera titulaire jusqu'à sa mort.

G. Brunel recense 74 travaux personnels auxquels s'ajoutent 56 contributions au *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* de Darboux, pour lequel il est un précieux collaborateur ([Brunel, 1888]). Suite aux travaux de Bolyai et Lobatchevski, il s'intéresse à la géométrie non-euclidienne et traduit de nombreux travaux étrangers comme par exemple *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide* (1868) de Bolyai, dont il publiera la première biographie, mais aussi des travaux de Helmholtz, Riemann ou Beltrami. Hoüel s'intéresse donc aux mathématiques pratiquées en Europe de l'est, mais également en Italie, avec ceux de Bellavitis. Il est également l'auteur en 1863 d'un *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la géométrie* (réédité en 1867 et 1885), ou il défend le principe d'invariabilité des formes, l'apport de l'expérience et de l'idée de mouvement en géométrie[274].

Hoüel s'intéresse également à la construction de tables logarithmiques (tables de Hoüel) publiées notamment dans son « Recueil de formules et de tables numériques » (1866),

---

[270] *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. 4, 1er cahier, 1866, p. 83-129.
[271] *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t.4, 2ème cahier, 1866.
[272] *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. 5, 1867, p. 1-64 et t.6, 1868, p. 1-144. Citons également une traduction de Hemholtz, « Sur les faits qui servent de bases à la géométrie » (t. 5, 1867, p. 372-378) ou encore « Sur une formule de Leibniz » (t. 8, 1869, p. 379-388).
[273] Voir la « Notice sur l'influence scientifique de Guillaume Jules Hoüel » de G. Brunel ([Brunel, 1888]) ainsi que la biographie due à G. B. Halsted dans l'*American mathematical monthly* (t. 4, 1897, p. 99-101), [Gispert, 1983], [Gispert, 1990].
[274] Voir la communication d'É. Barbin, « Les principes de la géométrie élémentaire dans l'*Essai critique* de Jules Hoüel », Journée d'étude « Géométrie du XIXème siècle », Centre François Viète, Jeudi 22 juin 2006.

alors que, suite à son enseignement à Bordeaux, il rédigera de 1878 à 1881 son *Cours de Calcul infinitésimal*. Il apparaît comme un des principaux diffuseurs des théories des équipollences et des quaternions en France à travers plusieurs écrits : *Théorie élémentaire des quantités complexes* ([Hoüel, 1867]), *Sur le Calcul des équipollences : méthodes d'analyse géométrique de M. Bellavitis* ([Hoüel, 1869a]), *Éléments de la théorie des quaternions*[275]. Sa seconde thèse de 1855 est une application de la méthode d'Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter (sa première concerne l'intégration des équations différentielles en mécanique). Hoüel présente aussi à la séance du 24 janvier 1867 de la Société des sciences physiques de Bordeaux une « Notice historique sur la représentation géométrique des quantités imaginaires » et est à l'origine de la réédition en 1874 de « Sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques », d'Argand ([Hoüel, 1874]).

Ce personnage se présente d'emblée comme une "figure clé" pour la diffusion de la méthode des équipollences en France qui occupent Laisant par la suite. Mais Hoüel a également inspiré Laisant en ce qui concerne son tout premier ouvrage de diffusion sur les fonctions hyperboliques.

UN PREMIER EXEMPLE DE DIFFUSION : LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Les *Mémoires* de la Société de Bordeaux accueillent rapidement les travaux du nouveau sociétaire dès 1874[276]. Ces derniers concernent les fonctions hyperboliques et donnent lieu à un tirage à part la même année sous le titre : *Essai sur les fonctions hyperboliques* ([Laisant, 1874b]).

Laisant se réfère à Hoüel, auteur d'un travail similaire dans les *Nouvelles annales* ([Hoüel, 1864]) de nombre de tables numériques, y compris dans sa *Théorie élémentaire des quantités complexes* ([Hoüel, 1867]). Notons que, dans ce dernier ouvrage, l'étude des fonctions cosh et sinh est restreinte : principalement le deuxième paragraphe du chapitre 4 : « Des fonctions exponentielles et circulaires d'une variable complexe et de leur fonction

[275] Gauthier-Villars, 1878-1881. Notons également un article intitulé « Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes », *Jednota ceských mathematik*, 1875 ainsi que "L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie", *Nouvelles annales*, Sér. 2, 8, 1869, p. 278-281.
[276] *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2ème cahier, 1874, p. 233-315.

inverse » mais que la présentation à partir de la fonction exponentielle et des séries associées est proche de celle de Laisant.

Ce dernier cite ainsi l'ingénieur turinois Savin Realis, dont le rôle semble avoir été déterminant pour la rédaction de cet *Essai*. Laisant explique en effet : « Nous tenons à rendre ici hommage tout particulièrement à l'originalité, et à la clarté de ce géomètre ; nous lui devons en même temps nos remerciements les plus sincères, car c'est sur ses conseils que nous nous sommes décidés à entreprendre l'étude qui fait l'objet de ce petit travail. »[277]. Né à Turin, fils d'avocat, Savin Réalis (1818-1886)[278] est diplômé en ingénierie en 1839 avant de se perfectionner à Paris entre 1840 et 1844. Ingénieur civil dans les chemins de fer, il dirige de grands travaux dans la région du Piémont jusqu'en 1851, date à laquelle il se consacre exclusivement aux mathématiques. On peut noter sa participation aux *Nouvelles annales* et à la revue *Mathesis* à travers des articles portant sur la théorie des nombres (théorème de Fermat), les fonctions hyperboliques ou les intégrales elliptiques. Pour le présent essai, il est surtout l'auteur d'une « *Note sur le nombre* e » parue aussi dans les *NAM* ([Réalis, 1867]).

Laisant se réfère également un professeur du lycée de Pise, Angelo Forti, auteur de tables sur les fonctions circulaires et hyperboliques qui seront vivement critiquées par Hoüel dans son article de 1864[279]. Les travaux de Laisant et de Forti seront d'ailleurs repris par le mathématicien et géographe Siegmund Günther (1848-1923) dans *Die lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten hyperbelfunktionen : theilweise auf grund freier bearbeitung von Laisant's "Essai sur les fonctions hyperboliques" und Forti's "Tavole logaritmiche"* en 1881.

Sont également nommés les mathématiciens Moivre, Mayer, Ricatti, Lambert ou Christoph Gudermann (1798-1852). Né à Viennenburg (Allemagne), ce dernier étudie à l'Université de Göttingen puis devient enseignant en mathématiques à l'école de Kleve, puis à l'Académie théologique et philosophique de Münster où Weierstrass devient son élève. On lui doit des travaux sur les fonctions elliptiques et hyperboliques à travers son ouvrage *Theorie des potenzial-order cyclish-hyperbolischen Functionen*[280].

277 *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2ème cahier, 1874, p. 234.

278 Réalis était un proche de Catalan. Beaucoup d'information qui suive proviennent de la nécrologie que ce dernier adresse aux *NAM* ([Catalan, 1886]). On y devine que Laisant, « M. L., député » a été en contact avec Réalis jusque dans les derniers jours de sa vie ([Catalan, 1886], p. 202).

279 Voir *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 4, 1865, p. 95-96.

280 (Berlin, 1863). Voir [Hoüel, 1864], p. 419.

Pour son *Essai*, C.-A. Laisant propose une étude des fonctions hyperboliques. Il s'appuie sur le lien entre les coordonnées d'un point d'une ellipse et d'un autre de l'hyperbole équilatère de même axe : ceci est l'objet des deux premières parties « Trigonométrie de l'hyperbole équilatère » et « Extension de la trigonométrie du cercle et de l'hyperbole équilatère à l'ellipse et à l'hyperbole quelconque ». Notamment, Laisant introduit une nouvelle constante égale à

$$\log\left(1+\sqrt{2}\right),$$

unique solution de l'équation sinh x = 1, réel qui intervient particulièrement dans les nombreuses formules présentées dans les quatrième et cinquième parties : « Coordonnées polaires elliptiques et hyperboliques » et « Applications numériques des fonctions hyperboliques ». On retrouve cette constante dans l'ouvrage *A treatise on plane geometry* de l'irlandais John Casey (1820-1891)[281]. Les résultats de Laisant comme la notion de « rayon vecteur hyperbolique » seront repris par E. Iaggi ([Iaggi, 1901]).

L'ouvrage contient en outre de nombreuses applications, notamment en mécanique (mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu résistant), en astronomie avec « l'Anomalie vraie d'une comète », ou celle sur le « Mouvement hyperbolique d'un astre », résultats à mettre en parallèle avec l'intérêt pour la mécanique céleste de Hoüel ? Mais ce sont les études de plusieurs courbes qui ponctuent l'ouvrage : parabole, cycloïde et plus encore l'étude complète de la chaînette : rectification, aire, rayon de courbure, centre de gravité d'un segment compris entre une ordonnée et l'axe des y etc. Ce qui permettra à Raoul Bricard, dans sa nécrologie concernant Laisant ([Bricard, 1920]), de conclure sur l'ouvrage en affirmant : « Si tout le monde écrit aujourd'hui $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ l'équation de la chaînette ; si les élèves de spéciales appliquent couramment des changements de variables parallèles à l'évaluation des intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, c'est à Laisant qu'on le doit »[282].

Laisant délaissera cependant par la suite l'étude des fonctions hyperboliques et n'y reviendra que ponctuellement, à l'occasion de questions posées dans des revues mathématiques ou dans un court article paru dans le *Bulletin* de la SMF en 1891. Dans

[281] Casey John, *A treatise on plane trigonometry, containing an account of hyperbolic functions: with numerous examples*, Hodges, Figgis, 1888.

[282] L'ouvrage de Laisant est aussi mentionné dans l'« Étude élémentaire des fonctions hyperboliques » menée par A. Aubry dans les pages de *l'Enseignement Mathématique* (vol. 8, 1906, p. 344-361).

l'article « Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques » ([Laisant, 1891a]), de nouvelles formules sont présentées : elles sont issues de l'étude des variables x et y liées par la relation :

$$\sin x = \operatorname{th} y.$$

x est « l'*amplitude hyperbolique* de y » ($x = \operatorname{Amh} y$) et y est « la *longueur* de x » ($y = \mathfrak{L}\, x$). Le premier terme provient de l'article de Hoüel de 1864 ([Hoüel, 1864], p. 421), alors que le deuxième est rapporté par l'auteur à Gudermann[283], deux personnages déjà présents dans l'essai de 1874. Après avoir différentié les diverses égalités issues de la première, Laisant reprend la valeur de plusieurs intégrales sous des formes plus simples :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = y = \mathfrak{L}\, x \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\cosh y} = x = \operatorname{Amh} y$$

ou en exprime d'autres en fonction de $z = \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{Tanh} \frac{y}{2}$, comme par exemple :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\sinh y} = z$$

L'*Essai sur les fonctions hyperboliques* de Laisant, présenté par son auteur comme un travail de synthèse et une nouvelle présentation de la notion, constitue une première pierre dans l'œuvre de diffusion du mathématicien. Intéressé par les travaux des mathématiciens étrangers et particulièrement italiens, il marche encore dans les pas de Hoüel. L'ouvrage annonce surtout les nombreux manuels destinés principalement aux élèves du secondaire qu'il ne publiera qu'une vingtaine d'années plus tard.

Durant la période 1841-1876, le polytechnicien C.-A. Laisant semble appliquer la science mathématique et l'art de l'ingénieur que les enseignants de l'École polytechnique et de l'École d'application à Metz lui ont enseignés. Si avec Duhamel, dont l'enseignement est reconnu, l'idée de méthode a pu s'enraciner chez Laisant, l'influence de Mannheim, en tant que répétiteur puis à travers ses écrits, est explicitement formulée par son ancien élève. L'arithmétique que Laisant pratique est liée au théorème de Fermat ou aux considérations sur

[283] Cette relation se rapporte à la transformation de Gudermann reliant trigonométrie circulaire et hyperbolique ; Voir par exemple : Cazenave R., "Représentation géométrique de la transformation de Gudermann", *Annals of telecommunications*, vol. 9, n° 12, Springer, paris, 1954, p. 330.

les fractions périodiques. Ses premiers travaux portent aussi sur la géométrie infinitésimale et la notion de rayon de courbure, dans l'espace usuel. Ses écrits sont à rapprocher, et semblent assez représentatifs, d'une période d'affaiblissement de la production française ; ils sont en tous cas assez éloignés des orientations novatrices qui émergent à l'étranger[284]. À propos de ces thèmes originels, nous retenons cependant l'utilisation des transformations en géométrie, héritage des débuts du XIX^e^ siècle, comme première méthode générale, générale ici car susceptible de multiples applications et extensible à l'espace. Nous voyons aussi poindre la question des bases de numération qui ira de pair avec nombre de problèmes résolus par Laisant par la suite ainsi que la recherche d'algorithmes de calculs simples pour la résolution d'un problème donné (ici, calculer la période d'une fraction périodique).

La période que nous venons de considérer, tout en marquant son identité de polytechnicien, pose donc les jalons pour la suite des carrières de C.-A. Laisant. Le rapprochement avec l'activité scientifique en province (ici à Bordeaux) sera prolongé par une importante implication au sein des congrès de l'AFAS qui sillonnent la France. L'adhésion rapide à une société professionnelle de mathématiciens, la Société mathématique de France, illustre les souhaits de s'insérer dans la communauté mathématique nationale.

L'année 1874 est une première étape importante de sa carrière scientifique, principalement avec la traduction de *l'Exposition de la méthode des équipollences* de Bellavitis, mais aussi avec la parution de son *Essai sur les fonctions hyperboliques*. Le premier ouvrage symbolise l'initiation aux calculs géométriques et marque le début de leur diffusion (le second souligne entre autre les liens particuliers que Laisant tisse avec les mathématiciens italiens). L'année 1876 marque une seconde rupture sur le plan professionnel : démissionnaire, le conseiller général de Nantes est élu député et entame une longue et riche carrière à l'Assemblée. Si bien qu'à partir de 1877, Laisant aborde véritablement un parcours original et personnel où, par son activité de diffuseur, il développe ses grandes idées en mathématiques et où, en politique, il s'affirme comme un farouche républicain dès les débuts de ce nouveau mandat.

[284] [Gispert, 1991], p. 36 et 48-49.

.

II. La volonté de diffuser les sciences mathématiques (1874-1887)

L'étude de la méthode des équipollences marque une étape décisive dans le parcours mathématique de Charles-Ange Laisant. Avec sa traduction en 1874 de l'ouvrage *Exposition de la méthode des équipollences* de l'Italien Bellavitis, le polytechnicien s'ouvre à des mathématiques étrangères et peu connues en France. Il semble rapidement séduit par l'esprit et le potentiel de cette méthode, dont il fait usage à propos de multiples thèmes, principalement d'ailleurs à l'occasion des congrès de l'AFAS. À partir de sa thèse de 1877 sur l'application mécanique des quaternions, il déploie la même énergie à faire connaître la théorie de l'Irlandais Hamilton. Tant par la durée que par le nombre de publications, cet ensemble d'écrits de diffusion constitue une grande partie de son œuvre mathématique. Ces études sont aussi marquées par des ouvrages personnels sur les deux théories : les deux traités en question marquent, dans une certaine mesure, une maturité atteinte dans la présentation de celles-ci.

Deux personnages principaux sont à l'origine de ces travaux, Hoüel et Bellavitis. Nous nous appuyons sur une partie de l'intéressante correspondance entre l'Italien et son ami Laisant, correspondance éditée par C. Alasia.

Nous dresserons à grands traits l'itinéraire qui amène Laisant, à partir d'une entrée particulière dans ces théories (traduction d'un ouvrage de référence ou approfondissement de leurs applications en mécanique), à fournir sa propre présentation des systèmes qu'il défend. S'agit-il alors d'une appropriation totale menant à des conceptions revisitées ou le promoteur reste-t-il fidèle à l'esprit de ses « maîtres » ? Nous proposons une brève comparaison avec les ouvrages de Hoüel sur les mêmes sujets.

L'étude de cette période s'appuie sur un certain nombre d'applications opérées par Laisant, applications qui peuvent faire l'objet de mémoires conséquents et sont révélatrices de thèmes importants à ses yeux (figures semblables, cinématique, mouvement à force centrale par exemple). L'analyse de ce corpus révèle de plus des notions abordées transversalement et de façon continue durant cette période. Avec la diffusion des équipollences, Laisant s'engage dans de multiples débats autour de la justification des quantités imaginaires, de l'apparition de calculs géométriques, de la critique du calcul analytique pour n'en citer que quelques-uns. À travers ces théories, il est confronté à l'émergence de la notion d'algèbre à la fin du XIX^e^ siècle. Observateur attentif de ce mouvement, il en souligne quelques aspects avec enthousiasme.

Nous abordons donc dans un premier temps l'épisode de la traduction de la *Spozitionne* de Bellavitis, et essaierons de montrer en quoi Laisant veille scrupuleusement à conserver l'identité d'un véritable calcul géométrique. Il sera ensuite question des applications de la méthode de Bellavitis que produit Laisant lui-même. Nous repérons ainsi les grands chapitres qui y sont liés avant de nous intéresser brièvement à l'ouvrage de 1887 *Théorie et applications des équipollences* qui supplée à la traduction de 1874 et confirme l'évolution des idées du mathématicien par rapport aux équipollences.

Dans un second temps, nous traitons les travaux de diffusion de Laisant concernant les quaternions : sa thèse, tout d'abord, travail original sur une théorie encore méconnue en France ; son ouvrage de 1881, ensuite, où l'auteur s'applique à donner une présentation personnelle de la doctrine d'Hamilton. Nous étudions également la manière dont il a pratiqué la théorie des quaternions à travers quelques exemples, une fois de plus, d'applications. Enfin, nous dégageons quelques grands thèmes communs aux équipollences et aux quaternions, en particulier la notion d'aire avec laquelle Laisant s'est illustré par un résultat important, fruit d'une véritable réflexion sur l'ensemble de cette période.

La dernière partie de ce chapitre traite de la carrière nationale du politicien Laisant. Durant la période considérée dans ce chapitre, Charles-Ange Laisant se montre en effet un homme politique d'envergure nationale, fidèle à ses convictions, qui adopte des positions de plus en plus radicales. Nous choisissons de mettre en valeur l'activisme du député de Loire-Inférieure, puis de la Seine, concernant le perfectionnement de l'enseignement et de la diffusion des mathématiques. Il s'engage en effet pour la promotion de chapitres particuliers des mathématiques, et pour le développement de plusieurs structures d'enseignement. Y sont traités principalement les épisodes tumultueux des sessions de 1882 et 1887-1888, ainsi que son implication dans le mouvement boulangiste qui marquera durablement l'image de C.-A. Laisant.

II.1. De l'utilité de la géométrie des équipollences

II.1.1. Genèse et diffusion de la méthode des équipollences

SUR LES TRACES DE GIUSTO BELLAVITIS

Arrêtons nous tout d'abord sur la figure du mathématicien italien G. Bellavitis, figure marquante pour Laisant si on considère le nombre de références élogieuses que le Nantais adresse tout au long de sa carrière à son mentor transalpin. Laisant a-t-il été impressionné par le parcours du savant d'origine modeste malgré son titre de comte, par son engagement politique ou l'éclectisme de son œuvre ? C'est en tout cas le véritable fondateur de la méthode des équipollences qui éblouit tant Laisant, justement parce que cette théorie relève d'un procédé général, complet et efficient. Les informations dont nous disposons sur le parcours de Bellavitis proviennent de la nécrologie que lui consacre Laisant dans les pages du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* ([Laisant, 1880a]) et les articles qui lui sont consacrés dans *La Grande Encyclopédie*[293] et *L'Enseignement mathématique*[294].

Le géomètre de Padoue

Giusto Bellavitis est né en 1803 à Bassano, près de Padoue (Vénétie). À côté de son travail pour l'administration locale, son père Ernesto, d'origine noble mais peu fortuné, prend en charge l'éducation de son fils et l'initie aux mathématiques avant que ce dernier ne poursuive son apprentissage seul. À son tour, Giusto Bellavitis travaille pour les services de Bassano dès l'âge de 18 ans, comme copiste puis secrétaire, bien qu'aucune rétribution ne lui soit versée avant une dizaine d'années. Il est finalement nommé professeur de mathématiques et de mécanique au lycée de Vicence en 1842, puis professeur de géométrie descriptive à l'Université de Padoue en 1845, l'année de son doctorat. Entre-temps, en 1843 il se marie et son fils unique Ernesto voit le jour, ce dernier sera longtemps en correspondance avec Laisant

293 Sagnet Léon, "Bellavitis", [Berthelot & al., 1885], t.6, p. 48-49.
On pourra consulter également Canepa G, "Le carte di Bellavitis", in [Freguglia, 1992] ou Legnazzi E. N., *Aggiunte illustrative ala commemorazione des Professore Conte Giusto Bellavitis*, Prosperini, Padova, 1881.
Virgopia N., "Giusto Bellavitis", *Dizionario biografico degli italiani*, Roam, Istituto dell'Enciclopedia Italinaa, 1965.

294 [Alasia, 1906]. D. Turazza, "Commemorazione di G. B. ", in *Mem. del R. Ist. veneto di scienze*, *lettere ed arti*, s. 5, VIII, 1881, p. 295.

de deux ans son aîné. Bellavitis obtient la chaire d'algèbre complémentaire et de géométrie analytique en 1867 toujours à l'Université de Padoue (voir son *Riassunto delle lezioni di geometria analitica* en 1869, puis *Riassunto delle lezioni di algebra* en 1875). Il accède alors au poste de sénateur dès 1866 où il défendra des idées libérales. Membre de l'Institut Vénitien (1840), puis de la Société italienne de Quaranta (1850), il intègre l'Académie royale de Padoue : cet institut sera la première société savante étrangère dont Laisant sera membre correspondant, et ce à partir de 1879. Bellavitis rejoint enfin l'Academia dei Lincei en 1879.

Les thèmes de l'œuvre mathématique de Bellavitis, géomètre avant tout, sont pourtant nombreux. Parmi les deux cents écrits de l'Italien entre 1826 et 1875, distinguons des travaux de géométrie algébrique (classification des cubiques), de géométrie descriptive (*Lezioni di geometria descrittiva con note contenenti i principi della geometria superiore ossia di derivazione* -1851), ou de théorie des nombres (résolution d'équations algébriques), d'algèbre (*Determinazione numerica delle radici immaginarie delle equazioni algebriche*-1864) ainsi que des travaux sur les puissances de nombres et les nombres bernoulliens ou eulériens qui ont pu également inspirer Laisant.

Mais c'est pour la création d'un calcul géométrique qu'est principalement reconnu Bellavitis. Laisant et Hoüel sont les principaux diffuseurs de la méthode des équipollences en question hors de l'Italie. Dans leurs ouvrages respectifs sur le sujet, tous deux datent l'origine de cette méthode à la parution d'un théorème dans les *Annales de Fusinieri* en 1832 portant sur la classification des courbes de degré trois. Suivent de nombreux ouvrages[295] comme *Sposizione del metodo delle equipollenze* (1854, traduit par Laisant vingt ans plus tard), *Calcolo dei quaternioni dell'Hamilton e sue relazioni col melodo delle equipollenze* (1858), *Sull'origine del metodo delle equipollenze* (1876). Outre sa participation aux *Atti dell'Istituto Veneto*, où il répond à de nombreuses questions entre 1859 et 1880, le mathématicien italien est par ailleurs à la tête de la publication des *Rivista di Giornali*[296] entre 1859 et 1874, véritable organe de diffusion de sa méthode où domine la théorie des équipollences et où l'on voit apparaître les premiers articles de Laisant sur le sujet en 1873.

Outre l'intérêt de Bellavitis pour l'astronomie, la chimie, la minéralogie, la géodésie, les sciences sociales et la philosophie, le professeur de Padoue entame, un peu comme Laisant

[295] Scorza Dragoni, G. (1982). "La matematica nelle *Memorie dell'accademia dei XL*", *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Sci. Fis. Natur*. 5, 6, 1982,1-2, 67-90.

[296] Voir Giuseppe Canepa, Giuseppina Fenaroli, Ivana Gambaro, "The "Rivista di Giornali" (1859-1880) and the Circulation of the European Mathematical Culture in 19th Century Italy: a Case Study ", *4th International Conference of the European Society for the history of science, Barcelona, 18-20 novembre 2010*.
On pourra consulter par exemple la bibliographie consacrée à la revue, particulièrement les deux premiers fascicules du tome 13 dans la *Nouvelle correspondance mathématique et physique*, t.2, 1876, p. 251-253.

le fera à la fin de sa carrière, une réflexion plus large sur les sciences mathématiques. Il se pose le problème d'un langage scientifique universel[297] et publie dans les *Mémoires de la Société italienne des sciences*, entre 1867 et 1872, ses « Considérations sur la mathématique pure ».

Un maître et un ami

Les rapports entre C.-A. Laisant et G. Bellavitis sont éclairés par les recherches d'un autre admirateur de la méthode des équipollences, le mathématicien italien Cristoforo Alasia[298](1869-1918). Né aux alentours de 1869 en Sardaigne, Alasia est successivement élève de Peano (à Turin) puis de Cremona (à Rome). Auteur prolifique y compris en astronomie et en histoire des mathématiques, son nom reste attaché à un théorème sur la « nouvelle géométrie du triangle », pour laquelle il écrit une nomenclature complète. Il crée et dirige la revue *Le matematiche pure ed applicate* en 1901 et noue de nombreuses relations sur le plan international : il sera rapidement un des collaborateurs de *L'Enseignement mathématique* et un ami de Laisant[299].

Alasia décide de consacrer en 1906 un article sur la correspondance scientifique de Bellavitis dans les pages de *L'Enseignement mathématique*. Son intérêt pour cette correspondance date de 1901 et de sa question sur le sujet dans les pages de *L'Intermédiaire des mathématiciens* [300]. La réponse de Laisant, publiée dans l'article de 1906, est particulièrement instructive quant au rôle de Hoüel dans la mise en relation de Laisant avec Bellavitis :

> *Vers la fin de l'année 1869, sur la prière de Hoüel, avec qui j'étais en correspondance, G. Bellavitis m'envoya deux de ses Mémoires. Comme je ne lisais pas un mot d'italien à cette époque, je lui répondis en le remerciant et lui exprimant mon regret de ne pouvoir le comprendre. De là sa première lettre où il me prodiguait avec une rare bienveillance des conseils qui me permirent, au bout de quelques semaines, de comprendre couramment un Mémoire mathématique italien. Notre correspondance, interrompue par les événements des fatales années 1870-71, fut ensuite reprise d'une façon régulière et se prolongea jusqu'à sa mort.*[301]

[297] Carruccio, E. "Giusto Bellavitis", *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner, 1970.
[298] Voir la biographie que lui consacre George Bruce Halsted dans *The American Mathematical Monthly* (Vol. 9, No. 8/9, Aug. - Sep., 1902, p. 183-185).
[299] Alasia explique en 1906 qu'il est « depuis quelques temps en relations amicales » ([Alasia, 1906], p. 97) avec Laisant qui consacrera une bibliographie à son « I complementi di geometrica elementare » dans *L'enseignement mathématique* ("Bibliographie", *L'enseignement mathématique*, t. 5, 1903, p. 230).
[300] "Question n° 2137", *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 8, n° 4, avril 1901, p. 189.
[301] [Alasia, 1906], p. 97.

La correspondance entre Hoüel et Bellavitis semble en effet soutenue : lorsque Alasia dresse, avec l'aide du fils de Giusto Bellavitis, la liste des principaux correspondants du savant, Hoüel se trouve être le seul français avec Terquem cité parmi la vingtaine de noms donnés[302]. L'année 1869 correspond notamment à la parution de l'ouvrage *Sur le Calcul des équipollences : méthodes d'analyse géométrique de M. Bellavitis* ([Hoüel, 1869b]). Ce dernier aura donc permis à Laisant, qui pourtant a étudié l'allemand à l'École polytechnique, d'entrer en relation avec le savant de Padoue.

Laisant ne rencontrera le mathématicien italien qu'à une seule occasion : le voyage de deux jours à Padoue et Venise qu'effectue le député de Nantes à la fin de l'année 1878, un an avant qu'il ne devienne membre correspondant de l'Académie royale de Padoue[303]. La proximité des deux hommes est pourtant bien réelle car, sept ans après la mort de Bellavitis, Laisant peut écrire : « pour mon compte, j'éprouve quelque fierté à me dire que j'ai été le disciple et l'ami de cet homme de grand cœur et de grand esprit ; et la publication de ce modeste Volume [*Théorie et applications des équipollences*] est comme un pieux hommage rendu à la mémoire de Giusto Bellavitis »[304].

La dernière lettre de Bellavitis à Laisant est datée du 10 octobre 1880[305], alors que le géomètre italien s'éteint le 6 novembre 1880. Le Français restera un proche de la famille Bellavitis puisqu'il sera en correspondance avec le fils de Giusto Bellavitis, Ernesto, devenu professeur de géométrie descriptive à l'Université de Padoue.

LA METHODE DE G. BELLAVITIS ET SA DIFFUSION EN FRANCE

Une méthode générale

Le souci du plus grand caractère de généralité[306] dans les méthodes employées en géométrie est une constante chez les géomètres du XIX^{e} siècle. Jean-Victor Poncelet dans son

---

[302] Voir "Chronique", *L'enseignement mathématique*, vol. 3, 1901, p. 297-298. Cette chronique a pour but de rassembler les diverses lettres en vu de l'article d'Alasia cité plus haut. Laisant, qui applaudit évidemment à cette initiative, signale qu'il joindra sa correspondance personnelle avec Bellavitis. Le nom de Laisant n'apparaît pas cependant pas dans la liste des correspondants tels que Beltrami, Boncompagni, Brioschi, Casorati, Crelle, Genocchi, Hoüel, Terquem, Cremona, Fergola, Matteci, Rubini, Volpicelli, Chelini, Cantoni, Menadaglia, Palmieri, Tortolini, Battaglini, Favero.
Sur la correspondance de Bellavitis, [Canepa, 1991], p. 51-55.

[303] [Laisant, 1880a], p. 344. Ce voyage fait peut-être suite au voyage de Laisant en Corse la même année au sein d'une commission parlementaire venue enquêter sur la conduite des bonapartistes lors de la crise du 16 Mai 1877.

[304] [Laisant, 1887a], p. VII.

[305] [Laisant, 1880a], p. 345.

[306] Sur la notion de généralité nous renvoyons à [Nabonnand, 2010], [Chemla, 1998], [Belhoste, 1998] Nabonnand Philippe, "L'argument de la généralité chez Poncelet, Chasles et Von Staudt", *Colloque "Fondements et justification des pratiques en mathématiques"*, Paris, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, 2004.

Traité des propriétés projectives de la figure (1822) souhaite donner à la géométrie le caractère général de l'analyse en lui procurant une démarche « directe » et « uniforme » :

> *tandis que la Géométrie analytique offre, par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent, à la recherche des propriétés des figures; tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est pour ainsi dire sans borne, l'autre procède au hasard; sa marche dépend tout à fait de la sagacité de celui qui l'emploie, et ses résultats sont, presque toujours, bornés à l'état particulier de la figure que l'on considère.*[307]

Ainsi, selon Chasles, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, la nouvelle géométrie du XIX^e siècle « offre d'immenses avantages, par la généralité, l'uniformité et l'abstraction de ses conceptions et de ses méthodes, qui ont remplacé les propositions particulières, incomplètes et sans liaison qui formaient toute la science et l'unique ressource des Anciens »[308]. Les bénéfices d'une telle méthode sont donc multiples. Poncelet explique : « elle a d'ailleurs l'avantage d'agrandir les idées, de lier par une chaîne continue des vérités en apparence lointaines, et de permettre d'embrasser, dans un seul théorème, une foule de vérités particulières. »[309].

On retrouve là plusieurs caractéristiques de la méthode de Bellavitis qui sont soulignées par Laisant. Dès la traduction de 1874, les différents chemins que peut emprunter l'utilisateur de la méthode des équipollences sont explicitement présentés. Les corollaires d'une même équipollence fourmillent et les domaines d'applications sont visiblement nombreux, comme Laisant le montrera à travers ses écrits. Tout ceci semble conforme au vœu exprimé Bellavitis dans l'avant-propos de son ouvrage de 1854 :

> *L'étendue et les progrès de la Géométrie sont tels, que, plutôt que de se refuser à toute étude des nouvelles méthodes, il faudra peut-être avant peu tenir compte seulement des méthodes générales, afin d'avoir en sa possession un plus grand nombre de moyens pour arriver à la connaissance des vérités dont on a besoin ; il est effectivement impossible désormais d'avoir présentes à l'esprit toutes les vérités qui viennent à être découvertes.*[310]

Les débuts difficiles du calcul des équipollences

Comme l'explique Hoüel, « Carnot, dans sa *Géométrie de position*, parle des avantages que retirerait la Géométrie de l'introduction d'un algorithme représentant à la fois

[307] [Poncelet, 1822], p. XIX.
[308] [Chasles, 1837], p. 117. Le thème de la généralité est récurent dans son *Aperçu historique*.
[309] [Poncelet, 1822], p. XXVI. Voir [Chemla, 1998], p. 168.
[310] [Laisant, 1874a], p. 3.

la grandeur et la position des diverses parties d'une figure. »[311] Dans une lettre datée du 28 juin 1873, Bellavitis, lecteur de Carnot, date lui-même la genèse de la méthode des équipollences : « Les développements et les applications de la méthode des équipollences, je les ai écrits en 1832 chez celle qui depuis a été ma femme chérie »[312].

À partir de l'année 1833, Bellavitis publie divers essais sur cette méthode[313] et l'utilise dans sa *Théorie des figures inverses* parue en 1836 où il développe la transformation étudiée par Plücker deux ans auparavant.

En 1854, vingt ans plus tard, Bellavitis publie dans les *Mémoires de la Société italienne des sciences* son principal essai sur la méthode des équipollences : « Sposizione del metodo delle equipollenze »[314]. L'ouvrage sera traduit en 1874 simultanément mais de manière indépendante en France par Laisant et en Bohême (actuelle République tchèque et alors sous domination autrichienne) par K. Zahradnik (1848-1916), professeur à l'Université de Zagreb et spécialiste des courbes algébriques. Ce dernier a été encouragé par Émile Weyr (1848-1894) qui entretenait un contact particulier avec l'Italie de par ses études et sa correspondance avec L. Cremona[315]. Entre 1854 et 1874, Bellavitis poursuit ses travaux sur les équipollences avec son « Exposition des nouvelles méthodes de la géométrie analytique » (*Mémoires de l'Institut vénitien*, 1860) ou encore ses *Éléments de géométrie et de trigonométrie et de géométrie analytique, avec l'addition de l'exposition de la méthode équipollences*, (Padoue, 1862).

Malgré tous ces efforts pour faire connaître sa méthode, Bellavitis ne peut que regretter la faible diffusion de ses idées dans une lettre datée du 27 décembre 1872 adressée à Laisant alors que celui-ci entame la traduction de l'ouvrage de 1854 : « En Italie, personne ne fit attention à mes idées ; et si, après beaucoup d'années, on en a adopté quelques-unes, on préfère les attribuer aux Allemands »[316]. C'est en effet en 1827 que Möbius rédige son

---

311 [Hoüel, 1869b], p. 4.

312 [Alasia, 1906], p. 100. Sur le calcul de Bellavitis, on pourra consulter [Freguglia, 2004], Freguglia P., *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, Urbino: Quattroventi, 1992 et Caparrini, S. "Early theories of vectors" in Corradi, M., Becchi, A., Foce, F. & Pedemonte, O. (Eds.), *Essays on the History of Mechanics: in Memory of Clifford Ambrose Truesdell and Edoardo Benvenuto,* Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2003, p. 179–198.

313 "Sur certaines applications d'une nouvelle méthode de géométrie analytique", *Le Poligraphe*, Vérone, t. XIII, 1833, p. 53-61. "Essai d'une nouvelle méthode de géométrie analytique (Calcul des équipollences)", *Annales de Fusinieri*, t. V, 1835, p. 244-259. "Mémoire sur la méthode des équipollences", *Annales de Fusinieri*, t. VII, 1837. "Solutions graphiques de certaines questions de géométrie recherchées par la méthode des équipollences", *Mémoires de l'Institut Vénitien*, 1843, p. 225-267.

314 [Bellavitis, 1854].

315 [Novy, 1993], p. 226.

316 [Alasia, 1906], p. 102.

« Calcul barycentrique »[317] où apparaît la notion de segment orienté. Hoüel observe que « Le calcul des équipollences comprend le *Calcul barycentrique*, dont Moebius avait déjà montré les nombreuses applications. […] Mais la partie de la méthode qui se rapporte aux produits de droites […] appartient entièrement à M. Bellavitis. »[318]. Grassmann, quant à lui, publie les principes de son calcul vectoriel en 1844 : *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*[319] connaît pourtant un accueil assez défavorable[320]. Peano dans son ouvrage consacré à l'œuvre de Grassmann présentera ainsi les principes du calcul géométrique, principes qui correspondent également au but de la méthode des équipollences :

> *Le calcul géométrique manifeste des analogies avec la géométrie analytique ; mais il en diffère en ce que, là où, en géométrie analytique, les calculs sont effectués sur les nombres qui déterminent les entités géométriques, dans cette nouvelle science, les calculs sont effectués sur les objets géométriques eux-mêmes.*[321]

En 1860, Luigi Cremona (1830-1903) fait la promotion des idées de Grassmann, mais omet de faire référence au calcul de Bellavitis en signalant dans les *Nouvelles annales de mathématiques* : « une méthode très-expéditive et très-curieuse, dont la première idée paraît appartenir à Leibniz, mais qui a été vraiment établie par M. Grassmann dans un ouvrage intéressant (*die Wissenschaft der extensiven Grosse oder die Ausdehnungslehre*), […]. Excepté MM. Mobius […] et Bellavitis (*Atti dell' Istitulo Veneto*, décembre 1854), je ne sache pas que quelque géomètre ait donné aux recherches de M. Grassmann l'attention qu'elles méritent. »[322]

La position de Cremona est-elle exemplaire au sein de la communauté mathématique italienne de l'époque ? Elle semblerait montrer en tout cas que la théorie de Grassmann trouve en Italie un écho plus important que celle de Bellavitis.

En France, Laisant, dans sa préface de l'*Exposition de la méthode* retrace l'histoire des questions sur les lignes orientées, sur l'algèbre dirigée en citant les grands acteurs de ce débat, ainsi que les personnages directement liés à la diffusion des idées de Bellavitis comme Hoüel. Nous proposons de suivre avec Laisant les travaux de certains d'entre eux.

---

317 Möbius A.F., *Der barycentrische calcul,* 1827.
318 [Hoüel, 1869b], p. 14. Voir aussi [Sinègre, 1997].
319 Grassmann, Hermann Günther, *La science de la grandeur extensive. La "lineale Ausdehnungslehre"*, trad. et préf. de Dominique Flament et Bernd Bekemeier ; trad. rév. par Eberhard Knobloch, Paris, A. Blanchard, 1994.
320 Sur le sujet, on pourra consulter [Crowe, 1994] (p. 79), [Flament, 1992], [Dorier, 1997a et b], [Lewis, 1997], [Flament, 2008b], ainsi que Flament Dominique, "La "*Lineale Ausdehnungslehre*" (1844) de Hermann Günther Grassmann", *Lecture Notes in Physics*, vol. 402, Springer, 1992, p. 205-220.
321 Peano, G., *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Hermann Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Bocca, Turin, 1888 cité dans [Gandon, Perrin, 2009].
322 Cremona, "Solution des questions 494 et 499, méthode Grassmann et propriété de la cubique gauche", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 19, 1860, p. 357. Voir [Crowe, 1994], p. 88.

Mourey et sa vraie théorie des quantités prétendues imaginaires

Outre Truel, Buée, Argand, Français, Saint-Venant (dont la contribution est également signalée par Bellavitis) et Cauchy[323] ou parmi ses proches contemporains Charles Auguste Briot (1817-1882) et Jean-Claude Bouquet (1819-1855), il est un auteur sur lequel insiste Laisant dans sa préface à la traduction de l'*Exposition de la méthode* : il s'agit de C.-V. Mourey. Sa *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*[324] semble tenir « une place spéciale »[325]. En développant la notion de « chemin »[326], et toutes les opérations s'y rapportant, Mourey en arrive à redémontrer le théorème fondamental de l'Algèbre[327]. Il écrit ainsi :

> *Avec un nouveau système d'Algèbre, que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences ; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une Algèbre émanée de la Géométrie ; c'est une Géométrie généralisée et rendue algébrique.*[328]

Et plus loin :

> *L'Algèbre et la Géométrie se trouvent, comme on le voit, fondues dans une même science ; d'où il résulte que les principes de la Géométrie acquièrent un nouveau degré de généralité, et que l'évidence géométrique éclate sur tous les points de l'Algèbre.*[329]

C.-A. Laisant regrette cependant l'entremêlement des notions algébriques et géométriques, alors qu'il conviendrait d'« effectuer assez nettement la séparation si nécessaire entre le point de vue géométrique et le point de vue analytique »[330]. Mourey, à qui Transon attribuera la paternité du terme « directif »[331], ne semble pas s'être placé sur un plan géométrique et fournit peu d'applications sur le sujet, comme il le reconnaît lui-même. Laisant déplore ces deux

---

[323] Cauchy, "Mémoire sur les quantités géométriques", *Exercice d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IX, 1847, p. 157.

[324] [Mourey, 1861] La 1[ère] édition date de 1828 (chez Bachelier, Paris). Dans ses *Leçons de Géométrie* (1834), Lefébure De Fourcy expliquera que Mourey introduit des grandeurs correspondant aux coordonnées polaires qui « offrent la représentation fidèle des expressions imaginaires qu'on emploie dans l'Algèbre ordinaire ». Voir aussi Lefebure De Fourcy, *Leçons d'Algèbre*, Bachelier, Paris, 1845, p. 216-219.

[325] [Laisant, 1874a], p. VIII.

[326] Boyé Anne., « Des chemins ou lignes dirigées aux vecteurs », in Barbin É. (dir), *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*, Vuibert Paris, 2010, p. 83-96.
Sur les positions de Mourey, on pourra consulter [Flament, 2003].

[327] Voir à ce sujet [Gilain, 1997].

[328] [Mourey, 1861], p. VII.

[329] Ibid., p. IX.

[330] [Laisant, 1874a], p. VIII.

[331] [Transon, 1868c], p. 202.

derniers aspects des écrits de Mourey, en plus des notations maladroites utilisées, ce dernier point de vue étant notamment partagé par Liouville[332].

Transon et les premières références au travail de Bellavitis

Abel Transon (1805-1876) est né à Versailles en 1805. Après de brillantes études, il intègre l'École polytechnique en 1823, puis l'École des Mines de Paris. Ingénieur en chef, il est un fervent partisan du Saint-simonisme à partir de 1830, puis du Fouriérisme quelques années plus tard avant d'abandonner cette doctrine pour se réfugier dans le catholicisme. La nécrologie qui lui est consacrée dans les pages des *Annales des mines* souligne l'importance de sa réflexion sur les concepts et symboles aussi bien en algèbre qu'en géométrie : il combat dans de nombreux articles la vision expérimentale à l'origine des concepts mathématiques. Publiés principalement dans le *Journal de Liouville* et plus encore dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, plusieurs de ses articles ont des thèmes voisins des préoccupations de Laisant. Citons pour exemple « Recherches sur les courbures des lignes et des surfaces »[333] « Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes »[334], « Note sur les principes de la mécanique »[335], ou encore « De la transformation isologique et de la transformation isogonale des courbes planes » ([Transon, 1869b]). Transon est nommé répétiteur d'analyse à l'École polytechnique en 1841, puis examinateur d'admission en 1858, poste qu'il occupera jusqu'en 1873[336].

Dans une série d'articles intitulés « De l'algèbre directive et de ses applications à la géométrie » parus dans les *Nouvelles annales de mathématiques* entre 1868 et 1875[337], Transon utilise donc les quantités dirigées mais c'est dans une lettre adressée à Gérono la même année et parue dans le même volume[338] que l'ancien examinateur à l'École polytechnique fait référence à Bellavitis. Transon y explique que le savant de Padoue a entamé avec lui une correspondance à la suite des articles de 1868 du premier. Toujours dans la correspondance avec Gérono, Transon précise que Bellavitis, séduit par la représentation

[332] [Liouville, 1839], p. 501. Liouville J., "Sur le principe fondamental de la théorie des Équations algébriques", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 4, Gauthier-Villars, 1839, p. 501-509.
[333] *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Sér. 1 6, 1841, p. 191-208.
[334] [Transon, 1869a]. Laisant cite également cet « article fort remarquable sur l'algèbre directive » ([Laisant, 1887b], p. 41).
[335] *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Sér. 1, 10, 1845, p. 320-326.
[336] Voir Tournaire, "Notice nécrologique sur Abel Transon, ingénieur en chef des Mines", *Annales des Mines*, Sér. 7, 14, 1878. Voir également André-Jean Glière, « Abel Transon et ses réseaux : saint-simonisme et fouriérisme », *colloque réseaux scientifiques et circulations des savoirs au XIX^e siècle*, Centre François Viète, juin 2010.
[337] Notamment [Transon, 1868c].
[338] [Transon, 1868d], "Correspondance - Extrait d'une lettre de M. Abel Transon à M. Gérono", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 419-421.

éclairante des quantités imaginaires, est véritablement l'auteur du calcul des équipollences depuis ses écrits dans les *Annales de mathématiques de Fusinieri*. Transon résume, à tort comme nous le verrons, la pensée de l'Italien pour qui « l'algèbre des imaginaires pouvait constituer une méthode nouvelle pour la géométrie. »[339] Transon juge donc naturellement la méthode des équipollences « identique » au calcul directif tel qu'il l'a lui-même développé dans son article « Application de l'algèbre directive à la géométrie » ([Transon, 1868c]). Pour faire connaître l'œuvre de Bellavitis, l'auteur a ainsi redémontré certains des résultats de l'Italien. Transon et Bellavitis ont par exemple déjà repris le dernier problème posé par Carnot dans sa *Géométrie de position*[340]. La preuve donnée par Transon date de 1841. Celle de Bellavitis est parue en 1835 dans son mémoire « Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica ». Cette démonstration figure également dans le mémoire de 1854[341].

Laisant critiquera cette conception de voir en la théorie des équipollences une simple interprétation géométrique d'un calcul algébrique. Contrairement donc à Transon, il réaffirmera l'originalité de la démarche de Bellavitis. Il écrira par exemple dans l'article « Directive (Algèbre) » de *La Grande Encyclopédie* :

> *Il était réservé à un savant illustre, G. Bellavitis, de Padoue, de pousser plus loin encore la clarté, en construisant de toutes pièces un système de géométrie analytique plane, sous le nom de théorie des équipollences, dans lequel les règles de calcul, totalement conformes à l'algèbre directive, se déduisent nécessairement des vérités géométriques. Il ne s'agit donc pas ici seulement d'une interprétation artificielle plus ou moins ingénieuse, mais de la traduction analytique obligée de faits géométriques bien établis.*[342]

Laisant est également lui-même en correspondance avec Abel Transon, comme nous l'apprend une lettre de ce dernier, publiée par la volonté de Laisant dans les pages du *Bulletin* de la SMF en 1892. Laisant explique sa démarche ainsi :

> *En feuilletant de vieilles notes, ces jours derniers, je viens de retrouver une lettre d'Abel Transon, lettre que j'eus l'honneur de recevoir de lui à l'époque où il publiait, dans les* Nouvelles Annales*, ses articles si remarquables sur le* Calcul directif*, c'est-à-dire en 1868.*
> *Cette lettre est, en quelque sorte, un complément et un commentaire de la série des articles dont il s'agit ; à ce titre, elle peut présenter un réel intérêt, au point*

[339] [Transon, 1868d], p. 420.
[340] Il s'agit de déterminer la direction de la droite partant d'un point M d'une courbe et qui coupe en deux parties égales la corde infiniment petite parallèle à la tangente en M.
[341] [Laisant, 1874a], p. 156.
[342] [Berthelot & al., 1885], tome 14, p. 651. Dans une lettre adressée à d'Ocagne, datée du 9 mars 1993, Laisant écrit : « les grands mathématiciens de notre temps, qui méprise la géométrie et la clarté, n'ont jamais souhaité comprendre les équipollences, excepté comme une interprétation, ce qui est absurde » cité dans [Ortiz, 2005], p. 153.

> *de vue de l'histoire et de la doctrine des imaginaires. C'est ce qui m'a déterminé à la reproduire et à la communiquer à la Société Mathématique de France.*
> *On y retrouvera les qualités de clarté et de netteté philosophique qui caractérisaient ce grand esprit.* [343]

Dans cette correspondance datée du 29 juin 1868, Laisant, intéressé par les travaux de Cauchy et d'Argand, sollicite l'avis de Transon. Ce dernier lui répond : « Vous avez bien raison de voir une analogie étroite entre les *Clefs* de M. Cauchy et les Nombres directifs d'Argand – Français – Mourey »[344] et lui précise ses idées sur le calcul directif. Transon développe l'unicité de la ligne représentant un nombre directif, l'avantage de désigner par une seule lettre une ligne dirigée ou toute autre ligne brisée ayant même extrémité, chose que Briot et Bouquet semblent avoir plus remarquée que Cauchy : la preuve en est la démonstration du théorème de Moivre fournie dans cette lettre. Transon s'explique ensuite sur sa volonté dans sa série d'articles de 1868 de ne pas généraliser à l'espace les nombres directifs, pour conserver un exposé clair et se centrer sur les applications à l'algèbre, renvoyant l'étude des quaternions à la thèse d'Alexandre Allégret, thèse sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Le prédécesseur de Laisant : J. G. Hoüel

Les *Nouvelles annales de mathématiques* apparaissent d'autant plus comme un lieu de débat autour de ce nouveau calcul géométrique puisque toujours dans le volume de 1868 est publiée une lettre de Hoüel ([Hoüel, 1868]) qui, sous couvert d'anonymat, souhaite réagir également aux articles de Transon. Ayant été cité dans les précédents articles de ce dernier, le professeur de l'Université de Bordeaux, acteur majeur dans la diffusion de la théorie des équipollences, souhaite préciser l'œuvre de Bellavitis dans l'analyse géométrique et annonce un futur article sur le sujet.

C'est donc principalement grâce à cet article, « Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis » ([Hoüel, 1869a]), paru dans les *Nouvelles annales* un an plus tard, qu'il diffuse la méthode des équipollences proprement dite. L'article sera l'objet la même année d'un tirage à part *Sur le Calcul des équipollences : méthodes d'analyse géométrique de M. Bellavitis* ([Hoüel, 1869b]) qui s'inscrit dans la suite de la première partie de son imposante *Théorie élémentaire des quantités complexes* parue deux ans plus tôt ([Hoüel, 1867]).

[343] [Transon, 1892], p. 104.
[344] Ibid. p.104. Cauchy A., "Sur les clefs algébriques", *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, Paris, 1853, p. 36, 70-75, 129-136. Voir un exemple dans [Crowe, 1994], p. 83-84 et [Dahan Dalmédico, 1997], p. 39-41.

Constatant « l'indifférence avec laquelle a été accueillie jusqu'à ce jour la belle découverte de M. Giusto Bellavitis »[345], le savant bordelais se propose de présenter de manière concise les principales caractéristiques de cette théorie. Il semble pour cela suivre principalement la trame du traité de 1854 mais s'en éloigne sensiblement en n'énonçant comme telles que quatre des douze règles initiales. Remarquons également l'abandon des notations spécifiques aux équipollences, y compris pour le signe d'équipollence même :

> *Pour que l'on ne confonde pas une somme de cette nature avec une somme ordinaire, M. Bellavitis emploie au lieu du symbole =, un symbole particulier, celui par lequel les astronomes désignent le signe de la Balance, voulant peut-être faire allusion à l'analogie de la sommation géométrique avec la composition des forces en Mécanique. Dans le désir d'éviter autant que possible l'introduction de notations nouvelles, nous avons conservé le signe d'égalité ordinaire.*[346]

La notation de ce que Laisant nommera, à l'instar de Bellavitis, le *ramun* est aussi remplacée chez Hoüel par la lettre *i*, notation venue de l'analyse (Hoüel rappelle néanmoins le symbole employé par Français et Mourey, puis Cauchy). Pour le symbole ε enfin, Hoüel préfère « la notation habituelle [e^i] pour nous écarter le moins possible des usages reçus. »[347] Remarquons une légère différence dans la mise en place de la conjugaison : Hoüel interprète la définition de Bellavitis en appliquant à une droite « une demi-révolution autour d'une droite parallèle à celle que l'on a prise pour origine des inclinaisons »[348] (ce qui implique de sortir du plan de la figure) alors que le mémoire de 1854 insiste sur le simple changement de signe de l'inclinaison. On retrouve néanmoins de nombreuses applications déjà présentes dans la *Sposizione* (démonstration des théorèmes de Ptolémée, Pythagore par exemple), des demandes de constructions similaires, mais Hoüel s'attarde nettement sur l'application aux courbes de la théorie des équipollences (étude de la cycloïde en particulier) et conclut son exposé par deux problèmes de mécanique, suggérant par là l'étendue des applications possibles.

Ce que Bellavitis appelle principe fondamental (manipulation d'une équipollence "à la manière algébrique") et théorème général (passage d'une propriété valable pour des points en ligne droite à des points quelconques du plan) est énoncé par Hoüel mais uniquement à titre de remarque, d'observations liées à des applications simples. Il semblerait que Hoüel s'attache plus à l'élégance et la fécondité du calcul plutôt qu'à son aspect méthodique et aux

345 [Hoüel, 1869b], p. 3.
346 Ibid., p. 8.
347 Ibid., p. 34.
348 Ibid., p. 20.

idées fortes qui sous-tendent la pensée de Bellavitis. Ce qui constitue une véritable méthode pour Laisant semble se réduire à un calcul, certes efficient, pour Hoüel.

Pourtant ce dernier voit dans l'utilisation des équipollences de nombreux avantages : les multiples applications découlant du théorème général pourtant délaissé, l'élégance et l'efficacité de la méthode, notamment pour les questions sur les courbes qui occupent donc une bonne partie de l'ouvrage. Débarrassé d'un système de coordonnées ad hoc, le calcul s'effectue sur les points même et « fait apercevoir comment on doit choisir ce système pour arriver à la solution le plus simplement possible »[349]. Simple et général, ce calcul permet selon l'auteur des solutions élégantes à des problèmes posés antérieurement, preuve en est les démonstrations proposées par Bellavitis dans sa *Rivista*.

Autre remarque qui semble propre à Hoüel : le calcul des équipollences « fournit le type réel des quantités imaginaires, par lequel sont pleinement justifiés les calculs de l'Algèbre, de la manière que Cauchy regardait comme la seule satisfaisante. »[350]. Hoüel poursuit ainsi son exploration de la théorie des imaginaires entamée avec l'ouvrage de 1867 ([Hoüel, 1867]) et trouve dans la méthode de Bellavitis des arguments de choix pour leur justification. Dans l'avertissement à la réédition de *Sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* d'Argand[351] en 1874, Hoüel persistera :

> *On trouve dans l'Ouvrage d'Argand les premiers essais d'une méthode très-générale de Géométrie analytique pour les figures planes, que M. Bellavitis a développée plus tard avec un si grand succès, et qui permet de traiter par des procédés uniformes, les questions de Géométrie élémentaire et les parties les plus élevées de la théorie des courbes.*[352]

Nous verrons que Laisant, au contraire, est impressionné par la méthode géométrique, par ses principes et que sa réflexion sur le statut des imaginaires n'en est qu'une conséquence logique. En France, comme à l'étranger, c'est bien le mémoire de 1854 qui fait connaître la méthode des équipollences[353]. Hoüel et Laisant fournissent leur propre présentation de la théorie ([Hoüel, 1869b] et [Laisant, 1874a]), soulignent des aspects jugés secondaires par Bellavitis. Hoüel appuie son développement sur les propositions 1, 2, 3 et 5 du mémoire de 1854, tout en discutant la quatrième. Laisant se distingue quant à lui principalement par le

---

[349] Ibid., p. 46.
[350] Ibid., p. 6.
[351] Argand, "Sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques", *Annales de Gergonne*, t. 4, 1813-1814, p. 133-147. On pourra consulter [Gérini, 2011] ainsi que le chapitre V de [IREM, 1998].
[352] [Hoüel, 1874], p. XIV. L'ouvrage a été réédité en 1971 aux éditions A. Blanchard avec une introduction de J. Itard.
[353] Voir [Freguglia 1992], p. 63.

développement d'applications et, comme nous le verrons, utilise de nombreux exemples avec le souci d'une diffusion la plus large possible de la méthode.

Malgré les efforts de ces deux hommes pour propager des idées proches de la méthode des équipollences, Laisant regrette en 1874, que les idées de Bellavitis aient si peu pénétré en France en comparaison des progrès observés à l'étranger. Il expose une liste de travaux tirés de l'ouvrage de Hoüel où sont cités les Allemands Scheffler (*Der Situationskalkul*, 1851) et Siebeck (« Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funktionen »[354]), le Suédois Göran Dillner (*Geometrisk Kalkyl*, 1860)[355]. La traduction proposée par le mathématicien français est donc dès lors annoncée comme une contribution à la diffusion de cette méthode, dont les lointaines origines sont françaises, afin de combler le retard accumulé en France. La remarque de Laisant est aussi à replacer dans l'état d'esprit post-sedanais où les retards de la science française dans beaucoup de domaines et particulièrement son ostracisme en mathématiques sont pointés du doigt, que ce soit dans le *Bulletin* de Darboux ou dans la conclusion du *Rapport sur les progrès de la géométrie* de Chasles :

> *On voit par ce qui précède que les Mathématiques prennent, à l'étranger, des développements considérables. La variété et l'élévation des matières qui s'y traitent dans de nombreux recueils périodiques, depuis plusieurs années, le prouvent incontestablement. Mais un simple fait suffirait pour montrer aux yeux de tous combien nous devons craindre de nous laisser arriérer dans cette partie des sciences.*[356]

TRAVAIL DE TRADUCTION, TRAVAIL DE DIFFUSION

Faire face aux « imaginaristes »

La méthode des équipollences participe au débat sur l'acceptation définitive des nombres complexes via la question de leur représentation[357]. L'usage fréquent et l'emploi parfois controversé des quantités imaginaires au siècle précédent ont mis en lumière l'intérêt évident de ce calcul mais ont également soulevé des questions quant à leur existence.

---

[354] "Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funktionen", *Journal de Crelle*, t. 55, 1858, p. 251-254.

[355] [Laisant, 1874a], p. XI. Sur les conceptions de Dillner, le *Bulletin* de Darboux signale que « Le calcul géométrique a le même objet que le calcul des équipollences de M. Bellavitis. La forme seulement est plus analytique. » (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1, 1870, p. 179). Hoüel écrit pour ce même bulletin une analyse des *Grunddragen af den geometriska kalkylen* (1868-1870) de Dillner (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1, 1870, p. 249-254).

[356] [Chasles, 1870], p. 378 et [Gispert, 1985], p. 394-395.

[357] "Représentation" plus que "réalisation" géométrique : Voir [Flament, 2008b], p. 180 et Bachelard, Suzanne. *La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIX^e siècle,* Paris, Université de Paris, 1967.

Poncelet note que les grandeurs imaginaires échappent à un statut géométrique. Ainsi au sujet du calcul algébrique, il écrit :

> *le calcul algébrique n'est point à proprement parler une science, mais bien un art, un mécanisme assujetti à des règles* […] *Ce mécanisme servant à découvrir d'autres rapports qui découlent des premiers, soulage la mémoire, abrège le travail de l'esprit, mais jamais il ne le dirige ; car dans son mystérieux symbolisme, il cache trop souvent, non pas simplement des erreurs matérielles, mais des contrevérités ou d'insignifiantes vacuités*[358].

Quant aux symboles en question et particulièrement -1 et $\sqrt{-1}$, il précise qu'ils « ont une origine purement algébrique, conventionnelle et analogique ; ils ne sauraient dériver a priori d'aucune considération purement géométrique. »[359] La démarche d'Argand au début du siècle propose une justification des nombres complexes par la géométrie. On trouve alors un "détournement" de la méthode de Bellavitis dans la mesure où certains « imaginaristes », comme les nomme l'Italien, y voient principalement une nouvelle présentation des nombres imaginaires.

Pourtant, les objectifs de Bellavitis sont tout autres : il se place davantage dans la lignée de Wessel (1797), Mourey (1828) ou Faure (1845)[360] pour fonder un véritable calcul géométrique dont les bases ne sont nullement celles d'une algèbre des imaginaires. Dans les toutes premières occurrences à sa méthode parues dans les pages des *Nouvelles annales* ([Bellavitis, 1855]), Bellavitis nie également les liens qui peuvent exister entre l'approche de Saint-Venant des imaginaires et sa méthode, insistant sur le caractère géométrique des règles d'équipollences entre deux droites. Sa volonté de construire un nouvel outil d'analyse géométrique a été bien comprise par Laisant, plus que par Hoüel ou d'autres. Dans une lettre datée du 27 décembre 1872, Bellavitis adresse à Laisant un jugement sans appel sur les conceptions de Hoüel concernant sa pensée des équipollences :

> *il* [Hoüel] *y considère les quantités dites* COMPLEXES *comme des termes algébriques ; et ensuite il en fait application à la géométrie ; au contraire, le calcul de ces quantités et les quantités elles-mêmes sont essentiellement géométriques. Il faut rompre avec les anciennes idées des imaginaristes et rester dans le vrai champ géométrique.*[361]

Et lorsque Laisant communique à Bellavitis la préface à sa traduction de la *Sposizione*, celui-ci lui répond en juin 1873 :

---

[358] [Poncelet, 1864], p. 206. Poncelet Jean-Victor, *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, Mallet-Bachelier, 1864.
[359] Op. cit., p. 192.
[360] [Hamon, 2003], [Flament, 2003] et [Brun, 1959]. Sur l'œuvre de Wessel, on pourra consulter : Lützen Jesper, *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers: proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998*, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, 2001.
[361] [Alasia, 1906], p. 102.

> *Vous pouvez aussi remarquer ce qui suit ; bien qu'il soit probable que la première idée sur les équipollences soit née en moi en observant la manière par laquelle Buée et Argand* PRETENDAIENT REPRESENTER LES IMAGINAIRES*, toutefois, je nie absolument qu'il soit possible de représenter ce qui est impossible et absurde ; au contraire, par un simple signe ϑ on peut représenter le rapport très réel de deux droites perpendiculaires ; la méthode des équipollences est une théorie géométrique qui subsiste en elle-même et qui a, par dessus tout, une signification géométrique : en outre, elle est le seul fondement d'un calcul qui embrasse le calcul algébrique.*
> *Je voudrais vous tirer de votre point de vue que la théorie des imaginaires et sa représentation possèdent les deux avantages auxquels vous faites allusion, pour vous amener au mien; je voudrais aussi voir substituer l'ordre logique à l'ordre historique. Je vois que Mourey s'est également laissé guider par le dernier point de vue plutôt que par le premier ; par le mien plus que par celui où vous vous placez.*[362]

Bellavitis défend auprès de Laisant l'idée que les quantités imaginaires relève d'une absurdité [363] mais qu'au contraire le calcul des équipollences est un calcul d'origine géométrique permettant de représenter des relations entre objets géométriques du plan. Ce calcul trouve son sens non dans les objets eux-mêmes mais dans la figuration des liens qu'ils entretiennent entre eux. Pour illustrer ces liens, la méthode consiste en un calcul qui recouvre celui sur les quantités imaginaires mais qui n'en trouve nullement l'origine. Le traducteur français se rallie aux conceptions de l'Italien et défendra les véritables idées qui sous-tendent la théorie des équipollences face aux « imaginaristes ». Dans l'article « Équipollence » que Laisant consacre à cette méthode dans *La Grande Encyclopédie*, le mathématicien français abonde dans le sens de son maître italien :

> *Mais ce serait commettre une erreur profonde que de confondre l'interprétation géométrique des expressions imaginaires avec la méthode des équipollences, due au génie de Giusto Bellavitis* […]. *Au lieu d'interpréter artificiellement des expressions analytiques dépourvues de sens par elles-mêmes, Bellavitis, en créant la méthode des équipollences, a établi une notation et une doctrine s'appliquant à des faits géométriques d'une réalité et d'une clarté absolues. Puis, cherchant à combiner ces éléments géométriques, il s'est trouvé conduit à un calcul dont les règles sont identiques avec celles des quantités imaginaires de l'algèbre. Au lieu d'ajouter simplement à l'algèbre un chapitre ingénieux et intéressant, Bellavitis crée de toutes pièces un véritable système nouveau de géométrie analytique, et établit ainsi une liaison plus intime et plus étroite entre la science des grandeurs et celle de l'étendue. Sous une*

[362] Lettre datée du 29 juin 1873, [Alasia, 1906], p. 104. L'ouvrage semble écrit dans une étroite collaboration entre les deux hommes. Ainsi Laisant écrit : « Je manquerais à la reconnaissance si je ne remerciais ici l'illustre géomètre italien, pour les excellents conseils dont il a bien voulu m'aider, et pour sa gracieuse communication de la plupart de ses publications sur les Equipollences » ([Laisant, 1874a], p. XI).
[363] Sur les idées de Bellavitis concernant les imaginaires voir [Crowe, 1994], p. 54.

> *forme un peu concise, mais cependant exacte, on peut dire que le calcul des équipollences est l'algèbre naturelle des faits géométriques du plan.* [364]

Les points essentiels que souligne ici Laisant sont bien le caractère intrinsèquement géométrique de la méthode, sa construction particulière, semblable à celle de l'algèbre mais indépendante de celle-ci, et l'éclairage nouveau qu'elle apporte à la pratique de la géométrie.

Les conceptions « des imaginaristes » perdureront encore malgré les efforts de Laisant. Comme nous le verrons, Laquière se fera encore l'écho des équipollences comme simple interprétation des imaginaires lors d'un congrès de l'AFAS sept ans plus tard.[365].

« Une fidélité scrupuleuse »

Dans sa lettre datée du 27 décembre 1872, Bellavitis encourage C.-A. Laisant à continuer de travailler sur sa méthode, comme ce dernier le fait depuis que Hoüel lui a fournit les deux mémoires de l'Italien :

> *M. Hoüel est pour moi un ami très cher et vraiment affectionné: il a beaucoup fait pour les équipollences, mais toutefois il ne considère pas la chose à mon point de vue.* […]
> *MM. Bourget et Darboux, eux aussi, ont pour moi de la bienveillance, mais je ne saurais les importuner à ce propos : faites donc vous-même ce que vous pouvez et ce que vous trouvez de mieux. Si vous vouliez bien me favoriser de quelques notes sur les équipollences, je serais très heureux de les publier dans mes «* REVUES *» (comme je l'ai fait pour des solutions que m'a envoyées M. Emile Français) et cela fera du bien aux équipollences en Italie vis-à-vis des nombreux mathématiciens qui n'estiment que les choses étrangères. Vous pouvez publier aussi ces mêmes travaux, s'ils y sont accueillis, dans vos Revues, mais il faudra que vous vous donniez la peine d'expliquer en détail les principes de la méthode, car il ne faut pas espérer qu'on se rappelle le mémoire où M. Hoüel les exposait.*[366]

On ne trouve dans les *Nouvelles annales*, durant la période où Bourget en est le directeur (1868-1871), qu'une seule application des équipollences par Bellavitis. Il s'agit des réponses aux questions 955, 956 : le directeur y souligne que ces réponses sont de simplicité équivalente à celle de l'analyse ordinaire[367]. Nous n'avons pas trouvé un véritable soutien à la méthode des équipollences dans le *Bulletin* de Darboux.

Une remarque sur le prénom d'Émile Français qui paraît par ailleurs étonnant. Laisant lui-même souligne l'apport de Français ([Laisant, 1877a], p. VIII) dans la réflexion sur la représentation des imaginaires à travers ses articles comme « Philosophie mathématique.

---

[364] Laisant C.-A., "Equipollence", [Berthelot & al., 1885], t. 16, p. 153. Voir aussi l'article Laisant C.-A., "Directive", [Berthelot & al., 1885], t. 14, p. 651.
[365] À ce sujet, voir aussi [Laquière, 1881].
[366] [Alasia, 1906], p. 102.
[367] *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 9, 1870, p. 34-36.

Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires » ou des extraits de sa correspondance « Sur la théorie des imaginaires »[368] parus dans les *Annales de Gergonne* à partir de 1813. Cependant, il s'agit de Jacques Frédéric Français (1775-1833), professeur à l'École du génie de Metz, qui fut un des acteurs avec Argand et Servois du débat sur les quantités complexes dans les pages des *Annales de mathématiques pures et appliquées*. On peut penser à une erreur de la part d'Alasia, il reste que Laisant ne semble pas le premier mathématicien français à publier dans la revue de Bellavitis.

Encouragé par Bellavitis, C.-A. Laisant fournira, préalablement à sa traduction de 1874, quatre contributions au journal de l'Italien entre 1873 et 1876. La première application publiée dans les Rivista fera l'objet d'un ajout dans la traduction de 1874. Le traducteur y décrit par les équipollences comment « inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné. »[369] Ainsi commence la liste des nombreuses applications de la méthode des équipollences développées par Laisant, liste que nous parcourons un peu plus loin.

Avec l'*Exposition de la méthode des équipollences*[370], traduction de la *Sposizione del metodo delle equipollenze,* Laisant se veut être un diffuseur consciencieux de la méthode de son confrère italien, méthode qu'il présente ainsi :

> *On y considère les droites tracées sur un plan dans des directions quelconques ; puis, les représentant par des notations qui impliquent à la fois la grandeur et la direction, et cherchant à exprimer les relations géométriques qui lient entre elles les diverses parties des figures planes, on arrive à établir un calcul (Calcul des Équipollences) dont les règles sont les mêmes que celles du Calcul algébrique ordinaire.*[371]

La traduction de l'ouvrage du mathématicien se veut d'« une fidélité scrupuleuse » à l'original. Outre la structure de 195 paragraphes de l'œuvre originale, Laisant conserve également les douze règles originales (les « *canone* » de Bellavitis) de la première partie traitant des grands principes de la méthode, la disposition typographique étant juste modifiée (le nombre de figures est conservé mais ces dernières sont placées dans le texte). En

[368] Français, J. F, " Philosophie mathématique. Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. ", *Annales de Gergonne*, 4, 1813-1814, p. 61-71.
Français, J. F., " Philosophie mathématique. Sur la théorie des imaginaires. Extrait d'une lettre adressée au rédacteur des Annales.", *Annales de Gergonne*, 4, 1813-1814, p. 364-367.

[369] [Laisant, 1874a], addition au n° 89, p. 80-83.

[370] La traduction paraît tout d'abord dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques* (Sér. 2, 12, 1873, p. 97-113, p. 145-161, p. 193-207, p. 241-257, p. 297-315, p. 501-519, p. 529-561 et Sér. 2, 13, 1874, p. 58-59, p. 138-152, p. 189-198, p. 220-236, p. 257-265.

[371] [Laisant, 1874a], p. V.

particulier en ce qui concerne les notations, le jeune mathématicien considère en 1874 devoir conserver les signes caractéristiques de la méthode de Bellavitis : le signe d'équipollence tout d'abord (« $\triangleq$ ») pour marquer sa signification si différente du signe « = ». Ensuite, il traduit le terme « *ramuno* » de Bellavitis, contraction de « *radice di meno uno* »[372], par la locution « *ramun* » pour « *racine de moins un* »[373]. Le symbole correspondant (« $\surd$ »), véritable « coefficient de perpendicularité », possède « une signification absolument géométrique, [et] ne saurait être remplacé sans inconvénient par $\sqrt{-1}$ ou par *i*, bien qu'il soit soumis aux mêmes règles de calcul »[374]. Laisant, critique vis-à-vis des notations introduites par Mourey, reviendra sur ces notations quelques années plus tard au moment de livrer son propre traité sur le sujet [Laisant, 1887a]. Notons que Laisant reprend en général le lexique utilisé par Bellavitis, comme le mot barycentre « plus laconique et peut-être plus expressif que l'expression centre de gravité »[375]. Il introduit cependant celui d'accélération : « Nous traduisons par *accélération* le mot italien *turbazione*, peut-être plus expressif, en ce qu'il n'implique pas l'idée d'une augmentation de vitesse ; mais nous tenons à n'employer, autant que possible, que des expressions bien connues dans le langage mathématique en France. »[376] C'est une exception à la fidélité des termes originaux à laquelle est attaché le traducteur.

Les règles du calcul sur les équipollences

La première partie de l'exposition de la méthode des équipollences présente, on l'a vu, en douze règles le principe du calcul géométrique en question. La notion de droite est tout d'abord précisée puis celle d'égalité de droites, c'est-à-dire de droites équipollentes, substituables l'une à l'autre. Ce point est fondamental dans la théorie des équipollences puisqu'on n'y considère non pas des droites issues d'une origine O fixe, mais des droites quelconques du plan : c'est une des grandes différences avec le calcul d'Argand[377].

Bellavitis introduit ensuite la multiplication d'une droite par un nombre puis la somme géométrique ou « composée-équipollente » de deux droites que l'Italien relie plus loin à la composition de mouvements[378]. Il obtient alors une équipollence polynôme dont la signification peut d'ailleurs être reliée à la résultante de forces mécaniques. Il est immédiatement mentionné que cette définition de l'addition de droites équipollentes permet

[372] [Bellavitis, 1854], p. 23.
[373] [Laisant, 1874a], p. 40.
[374] [Laisant, 1874a], p. X.
[375] Note du Traducteur, op. cit., p. 91
[376] [Laisant, 1874a], p. 132 (et [Bellavitis, 1854], p. 67.)
[377] [Gérini, 2011]. Voir aussi Cartan E., "Nombres complexes", in [Molk, 1904-1916], t. I, vol. 1, p. 344-345.
[378] [Laisant, 1874a], p. 56.

de manipuler une équipollence polynôme comme on le ferait d'une équation. On retrouve ce principe sous l'appellation « *principe fondamental* »[379] (« *canone fondamentale* ») avec la particularité qu'une seule équipollence regroupe deux informations, à savoir la longueur et l'inclinaison de droites. La règle I affirme donc que :

$$AB + BC \triangleq AC.$$

Bellavitis insiste sur une conséquence de cette première règle : l'équipollence

$$MN \triangleq MZ - NZ,$$

constitue un véritable principe que Bellavitis utilise pour montrer par substitution qu'une équipollence est « identique », c'est-à-dire vérifiée, par la simple réécriture à l'aide d'un point Z. Cette utilisation systématique de ce procédé demeure une démarche visuelle dans le sens où c'est l'observation de l'écrit (pour faire apparaître un point supplémentaire dans l'équipollence et comparer les écritures obtenues) qui se substitue à celle de la figure[380]. Ceci rend la figure facultative comme Bellavitis l'affirme lui-même un peu plus loin :

> *La méthode des équipollences, outre les avantages résultant des artifices qui lui sont propres, présente aussi celui de déterminer les positions respectives des éléments d'une figure, sans donner lieu à aucune chance d'erreur, parce qu'il n'est nécessaire d'avoir aucune figure sous les yeux, et que tout s'exécute au moyen d'un algorithme connu et selon des règles fixes.*[381]

Notons néanmoins que Laisant n'exploite que rarement ce procédé.

L'introduction de la notion d'inclinaison d'une droite AB par rapport à une droite choisie comme origine des inclinaisons implique de restreindre les notions suivantes au plan, alors que Bellavitis affirme la généralité des premiers principes, valables dans le plan et dans l'espace. L'inclinaison d'une droite permet dès lors d'avoir :

$$\text{angle } BAC = \text{inc. } AC - \text{inc. } AB$$

et de définir produit et quotient de droites. Bellavitis montre sur un exemple comment obtenir une égalité d'inclinaisons en manipulant l'équipollence d'origine comme on le ferait par passage au logarithme.

L'auteur affirme dès lors le principe fondamental (« *canone fondamentale* ») suivant :

---

379 Op.cit., p.17.

380 Pour l'analyse du principe de cette vérification, voir [Barbin, 2001], p. 56-57, [Barbin, 2008], p. 16-20 et Guitart René, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, Paris, 1999. Ainsi que la communication d'Évelyne Barbin & René Guitart : *L'écriture des relations entre les droites selon leurs grandeurs et leurs directions : les équipollences de Bellavitis*, Actes du 17ème Colloque inter-IREM Épistémologie Nancy, 23-24 mai 2008, " La figure et la lettre ".

381 [Laisant, 1874a], p. 119 et [Bellavitis, 1854], p. 61.

> *On peut faire sur les équipollences relatives aux figures planes toutes les opérations et transformations qui sont légitimes pour les équations algébriques, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes.*[382]

Fondamentale, cette observation l'est effectivement puisqu'elle justifie la qualification de calcul géométrique pour la méthode du savant italien. On peut par exemple grouper tous les termes dans un membre de l'équipollence, ce qui traduit alors la possibilité de construire un polygone fermé dont les côtés sont équipollents à chaque terme de l'équipollence formée. La règle II, soulignée comme importante pour la résolution de problèmes, traite le cas d'une équipollence binôme dont les deux termes ont des inclinaisons différentes (elle est utilisée pour établir des équipollences impliquant les côtés d'un parallélogramme) alors que les règles III et IV sont relatives aux équipollences trinômes, introduites en précisant les précautions à prendre pour distinguer les triangles "directement ou indirectement semblables". En, 1878, Laisant reviendra sur ce distinguo entre figures semblables dans une lettre publiée dans la *Nouvelle correspondance mathématique* : il définira les figures directement/symétriquement égales ou semblables, définitions qu'il rapportera à la théorie des équipollences[383].

Le théorème général (« *teorema generalissimo* »[384]) est ensuite souligné par Bellavitis comme caractéristique de l'utilité de sa méthode pour établir rapidement un grand nombre de propriétés :

> *Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences*[385].

Ce principe induit les premières applications de la méthode proposées par Bellavitis. Nous ne présentons pas la première qui reprend la sixième proposition du second livre d'Euclide pour écrire une équipollence permettant d'obtenir dans un cas particulier le théorème de Pythagore et bien d'autres. Examinons à titre d'exemple la seconde, assez semblable et sans doute représentative de la pensée de Bellavitis. Depuis Euclide, on sait que la formule d'algèbre

$$bd + (b + d + i)i = (b + i)(i + d)$$

permet d'écrire une égalité concernant des droites formées par des points alignés. L'originalité de la démarche de Bellavitis est d'étendre cette interprétation au plan par l'équipollence suivante vraie pour tout quadrilatère ABID :

$$\mathrm{AB.ID} + \mathrm{AD.BI} + \mathrm{AI.DB} \mathrel{\underline{\Omega}} 0.$$

[382] [Laisant, 1874a], p 17.

[383] "Correspondance – Extrait d'une lettre de M. Laisant à propos de la rédaction de la question 279 « Sur la définition des figures directement ou symétriquement semblables » ", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 4, 1878, p. 58.

[384] [Bellavitis, 1854], p. 13.

[385] [Laisant, 1874a], p. 21.

Comme il a été dit précédemment, cela signifie qu'il est possible de construire un triangle dont les côtés soient équipollents respectivement à AB.ID, AD.BI et AI.DB. Cette équipollence générale permet d'écrire un grand nombre de corollaires, notamment suivant la nature du triangle obtenu et le choix de la règle utilisée. Par exemple, la règle III sur les équipollences trinômes permet d'affirmer que :

$$\text{Si inc. (AB.ID)} = \text{inc.(AD.BI), alors gr.(AB.ID)} + \text{gr.(AD.BI)} = \text{gr.(AI.DB)}.$$

La condition précédente peut s'écrire :

$$\text{inc. AD} - \text{inc. AB} = \text{inc. ID} - \text{inc. BI}$$

$$\text{inc. AD} - \text{inc. AB} = \text{inc. IB} - \text{inc. ID} + 180°$$

$$\text{angle BAD} + \text{angle DIB} = 180°.$$

Bellavitis a ainsi redémontré le théorème de Ptolémée : dans un quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires, donc inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des deux produits des côtés opposés[386].

Remarquons également la résolution du problème suivant : « Trouver le sommet commun de deux triangles directement semblables de bases données »[387]. Le point recherché étant I, les bases AD et BC étant données, Bellavitis insiste sur l'importance à donner à l'ordre des lettres dans l'équipollence traduisant les données du problème. Ici, on obtient :

$$\text{AD} : \text{BC} \bumpeq \text{AI} : \text{BI} \ (\bumpeq \text{DI} : \text{CI})$$

ou encore

$$\text{BC.AI} \bumpeq \text{AD.BI}.$$

Remarquant que

$$\text{BI} \bumpeq \text{AI} - \text{AB},$$

il ne reste plus qu'à isoler le terme AI, comme le permet le principe fondamental. Bellavitis écrit ainsi :

$$\text{BC.AI} \bumpeq \text{AD.AI} - \text{AD.AB},$$

puis

$$\text{AI.(AD} - \text{BC)} \bumpeq \text{AD.AB}$$

soit

$$\text{AI} \bumpeq \text{AD.AB} : (\text{AD} - \text{BC}).$$

En construisant L tel que

$$\text{AD} - \text{BC} \bumpeq \text{AL}^{388},$$

[386] L'Italien généralisera ce résultat toujours grâce à la méthode des équipollences ([Atzema, 2006]).

[387] [Laisant, 1874a], p. 31.

[388] Soit DL $\bumpeq$ CB.

le savant de Padoue obtient alors

$$\mathrm{AI} \bumpeq \mathrm{AD.AB} : \mathrm{AL},$$

ce qui permet de construire I en remarquant l'équivalence de cette dernière équipollence avec

$$\mathrm{AI} : \mathrm{AD} \bumpeq \mathrm{AB} : \mathrm{AL}.$$

Le lecteur est amené à construire le triangle ABI directement semblable à ALD.

Bellavitis, cherchant à varier les applications de son calcul, développe ensuite l'utilisation des équipollences pour les problèmes d'alignement. Son deuxième exemple à ce propos est celui du théorème de Desargues ainsi présenté : « si les sommets de deux triangles ABC, A'B'C' sont en ligne droite avec un point fixe S, les points de concours T, U, V de leurs côtés correspondants seront aussi en ligne droite »[389]. L'alignement des points est exprimé à l'aide de coefficient a, b, c, n et m par les relations :

$$\mathrm{SA'} \bumpeq a\mathrm{SA},\ \mathrm{SB'} \bumpeq b\mathrm{SB},\ \mathrm{SC'} \bumpeq c\mathrm{SC} \text{ et } \mathrm{AV} \bumpeq n\mathrm{AB}\ ;$$

si bien que

$$\mathrm{SV} - \mathrm{SA} \bumpeq n\mathrm{AB}$$

ou encore

$$(1) \qquad \mathrm{SV} \bumpeq (1-n)\mathrm{SA} + n\mathrm{SB}.$$

Comme V appartient également à (A'B'), Bellavitis obtient de manière analogue :

$$\mathrm{SV} \bumpeq (1-m)\mathrm{SA'} + m\mathrm{SB'}$$

ou encore :

$$\mathrm{SV} \bumpeq a(1-m)\mathrm{SA} + bm\mathrm{SB}.$$

Par comparaison des deux équipollences où apparaît SV (c'est une utilisation implicite de la règle II), il obtient deux relations permettant de déterminer m et n en fonction de a et b. Nous écrivons le résultat de Bellavitis sous la forme :

$$\mathrm{SV} \bumpeq k_1\mathrm{SA'} + k'_1\mathrm{SB'}$$

où k_1 et k'_1 sont des coefficients de a, b (et c). De même, il obtient des relations du type :

$$\mathrm{ST} \bumpeq k_2\mathrm{SB'} + k'_2\mathrm{SC'}$$

$$\mathrm{SU} \bumpeq k_3\mathrm{SC'} + k'_3\mathrm{SA'},$$

faisant apparaître des coefficients des variables a, b et c. Par combinaison des équipollences précédentes, il en déduit une relation de la forme :

$$(2) \qquad r\mathrm{SV} + q\mathrm{SU} + p\mathrm{ST} \bumpeq 0$$

[389] [Laisant, 1874a], p. 34.

avec $r + p + q = 0$, r, p et q étant des coefficients que nous posons pour plus de lisibilité. Cette relation n'apparait dans le traité de l'Italien que dans la remarque d'ordre général concluant cette partie. Sachant que

$$\mathrm{TV} \bumpeq \mathrm{SV} - \mathrm{ST} \text{ et } \mathrm{TU} \bumpeq \mathrm{SU} - \mathrm{SV},$$

Bellavitis aboutit finalement à l'équipollence dont il donne une forme générale un peu plus loin :

$$r\mathrm{TV} + q\mathrm{TU} \bumpeq 0,$$

si bien que T, U et V sont alignés, comme cela était annoncé. Le mathématicien italien insiste sur l'utilité des deux types d'équipollences utilisées (1) et (2), toutes deux traduisant l'alignement de trois points. Il affirme, au-delà des calculs qui peuvent apparaître, la fiabilité et, au-delà de difficultés techniques ponctuelles, la relative simplicité de la démarche.

La notion de conjuguée d'une droite, c'est-à-dire le changement de signe de l'inclinaison de celle-ci, marque la reprise de l'exposé général. La règle V permet de "passer" à l'équipollence conjuguée en conservant une relation véritable.

Toujours en ce qui concerne la modification de l'inclinaison d'une droite, et tout comme la multiplication par un coefficient réel modifie la longueur d'une droite, le ramun $\surd$ est introduit comme le signe d'écriture augmentant l'inclinaison de 90° dans le sens positif. Son utilisation comme coefficient n'est d'abord qu'un "jeu d'écriture" : dans ce que Bellavitis pose comme, dans une terminologie moderne, un repère direct (O, I, H), il note ainsi :

$$\mathrm{OI} \bumpeq \surd\mathrm{OH}.$$

Puisque l'application successive de deux ramuns revient à ajouter 180° à l'inclinaison, donc à changer le sens de la droite, nous pouvons écrire

$$\surd\surd\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{MO}$$

pour traduire les propos de Bellavitis qui écrit directement :

$$\surd^2\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{MO}$$

ou

$$\surd^2 \bumpeq -1,$$

si bien que : « $\surd$ *représente ce qui se désigne en Algèbre par* $\sqrt{-1}$ »[390]. Au signe ramun est adjoint le signe correspondant à une variation de l'inclinaison de u angle droit : $\surd^u$ également noté ε^u. Chacun de ces signes peut être utilisé de manière isolée : le nombre a seul représente une droite de longueur a parallèle à la droite choisie pour référence des inclinaisons, le signe

[390] Ibid., p. 40.

$\surd$ représente une droite de longueur unité perpendiculaire à cette même ligne de référence. Ainsi, nous pouvons lire dans l'*Exposition* l'équipollence :

$$\surd^4 \triangleq 1,$$

et Bellavitis explicite le sens à donner à l'expression $z\surd^u$. Les définitions géométriques des notions précédentes impliquent que

$$\surd^u \surd^v \triangleq \surd^{u+v},$$

si bien que la règle VI complète ce qui avait été annoncé au sujet du signe $\surd$, c'est-à-dire que le « *ramun se calcule précisément comme se calcule en Algèbre l'imaginaire* $\sqrt{-1}$ »[391]. Ce fait n'a été établi que par des considérations géométriques sur les rotations de droites, ce qui confirme les affirmations de Bellavitis sur la nature de son calcul.

Les règles suivantes précisent l'utilisation de ces notions : la règle VII reprend l'expression de la conjuguée de termes contenant un ramun ; les règles VIII, IX, X et XI concernent le produit, la division et la somme d'expressions conjuguées[392]. Bellavitis conclut cette première partie de l'*Exposition* qui pose les bases du calcul en donnant la règle XII sur l'aire du triangle ABC égale à :

$$\frac{\surd}{4}(\text{AB cj.AC} - \text{cj.AB AC})$$

(la présence du ramun assurant d'obtenir un "nombre réel") avec pour application une démonstration d'un théorème de Clairaut. Laisant dans son propre traité de 1887 donnera un "relief" tout différent à cette dernière règle, lui conférant un statut de conséquence primordiale de la théorie.

Un premier ajout éclairant aux applications de Bellavitis

Les trois parties suivantes proposent de nombreuses applications de la théorie des équipollences. Elles concernent pour commencer la « solution graphique » de problèmes (« *problema* ») de géométrie. Ceci est le propos de la partie II, découpée par les soins de Laisant en une partie « Procédés généraux » (paragraphes 61 à 68) et une partie « Problèmes divers » (constructions de triangles par exemple). Bellavitis y montre que son calcul supplée à toute considération géométrique et offre une solution courte mais non artificielle à de nombreux problèmes. Pour appuyer son propos, il énumère les principales équipollences auxquelles des configurations géométriques peuvent se ramener. Il reprend par exemple des

---

391 Ibid., p.41.

392 Par exemple, la règle IX pose :

$$z\surd^u : z\surd^{-u} \triangleq \surd^{2u}.$$

problèmes résolus par Lamé dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (1818) ou de Carnot dans sa *Géométrie de Position* ([Carnot, 1803]), soulignant tour à tour la simplicité des démonstrations par les équipollences ou leur rapidité alors que ces mêmes questions sont parfois connues pour leur difficulté. Laisant insiste sur ce dernier aspect lorsqu'il cite le commentaire de Lagrange au sujet du problème posé au paragraphe 84[393].

Le jeune mathématicien se permet trois additions personnelles, marchant toujours dans les pas de son maître. Il s'agit principalement d'autres solutions, plus simples, à des problèmes résolus par Bellavitis (addition au n° 69 ou 73). La démarche adoptée par Laisant n'y est guère différente de celle de l'Italien. L'addition au n° 89, plus longue, est sensiblement dans une autre optique. Bellavitis propose le problème suivant : « On donne trois circonférences ayant chacune un point commun I (fig. 25). Mener par ce point la droite IXZY, telle que les segments XZ, XY de cette droite, compris entre les circonférences, aient entre eux le rapport donné *m*. »[394]

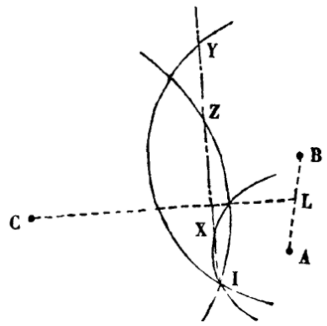


Figure proposée par Bellavitis au sujet du problème du paragraphe 88[395]

Il précise que la question a été résolue difficilement par Fergola en 1788, qui en déduira une solution à un problème dû à Newton : « Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné », problème résolu par Bellavitis en 1843 et par Laisant en 1873. Bellavitis adopte une démonstration analytique en posant *u* l'inclinaison de la droite recherchée et enchaîne les équipollences pour déterminer la valeur de *u*. Laisant, quant à lui, suit une démarche synthétique et pose $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trois perpendiculaires passant chacune par

393 Lorsque Lagrange s'est trouvé face à cette question liée aux cartes géographiques, il explique dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* que « ce problème me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée, soit pour ne pas trop m'écarter de mon sujet, soit aussi parce qu'il me semble qu'elle ne serait d'aucun usage, à moins qu'on ne pût la ramener ensuite à une construction aisée. » (Lagrange, *Mém. de l'Académie de Berlin*, 1779, p. 201). Voir [Laisant, 1874a], p. 73.
394 Op. cit., p. 77 et [Bellavitis, 1854], p. 40.
395 [Laisant, 1874a], p. 78.

les trois centres des cercles A, B et C. Se plaçant implicitement dans les triangles isocèles ainsi formés, il écrit alors :

$$IX = 2I\alpha,\ IY = 2I\beta,\ IZ = 2I\gamma$$

Puis:

$$XY = 2\alpha\beta,\ XZ = 2\alpha\gamma.$$

Il note enfin L l'intersection de AB avec $C\gamma$ et en déduit :

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AL} \text{ ou } \frac{XY}{XZ} = \frac{AB}{AL}.$$

En plaçant L sur AB dans le même rapport que Z sur XY, il obtient la droite CL perpendiculaire à la droite recherchée. Se privant d'écrire la moindre équipollence, écartant les cas particuliers qui peuvent se présenter, Laisant donne une démonstration qu'il généralise à l'espace (toujours sans équipollences) et au cas de quatre sphères ayant un point commun I, comme le suggérait d'ailleurs Bellavitis[396]. Il se livre pour conclure à une comparaison entre sa démarche et celle obtenue en suivant la méthode des équipollences :

> *On peut remarquer combien ces solutions sont simples et faciles, au moins en apparence. Mais il ne faudrait pas croire qu'il fût aisé de les découvrir a priori, par les seules considérations géométriques ordinaires. La méthode des équipollences nous conduit au contraire à ces résultats d'une façon tout à fait naturelle. Il est intéressant de voir combien cette Géométrie analytique nouvelle apporte un puissant concours à la Géométrie synthétique elle-même, en lui fournissant des solutions simples, auxquelles l'analogie permet de donner souvent une plus grande extension. C'est ce qui se présente ici pour le problème des trois cercles et celui des quatre sphères ; et c'est pourquoi nous avons tenu à en indiquer les solutions géométriques, qui montrent bien tout ce qu'on peut demander à la méthode si féconde des équipollences.*[397]

Le traducteur signale donc un des aspects séduisant de la méthode analytique[398] qu'il expose : elle facilite les recherches, guide la réflexion pas à pas et éclaire le mathématicien puisque « l'on y voit toujours le but proposé »[399], selon Lamé, comme en arithmétique. Si le caractère d'évidence est souvent lié à la synthèse, les démonstrations de ce type peuvent masquer la démarche effectuée. La méthode analytique de Bellavitis, véritable méthode de découverte, permet une solution claire et une généralisation naturelle du résultat.

---

396 [Bellavitis, 1854], p. 41.

397 [Laisant, 1874a], p. 80.

398 Sur le raisonnement analytique, nous renvoyons à [Gardiès, 2001], et Otte Panza, *Analysis and synthesis in mathematics*, 2001.

399 [Lamé, 1818], p. 7. Il poursuit « Mais c'est peut-être au peu de rigueur de l'Analyse en démontrant les découvertes primitives que nous devons l'invention de la Synthèse. On craignait de laisser subsister des doutes sur les premiers principes des sciences exactes, et l'on a mieux aimé essayer de détruire ces doutes nuisibles par la Synthèse que de laisser entrevoir par l'Analyse les traces des vérités qu'on voulait démontrer rigoureusement. » Voir aussi « le mouvement alternatif de l'analyse et de la synthèse » dans [Barbin, 2009].

Nous pouvons voir dans les idées de Bellavitis des points communs avec la « caractéristique » de Leibniz car ce dernier, souhaitait un procédé qui puisse « donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse » [400]. Cependant, voir dans la méthode des équipollences ou dans les travaux de Grassmann la réalisation du projet de Leibniz reviendrait à en restreindre l'étendue. Tout au plus, pouvons nous souligner, en ce qui concerne la géométrie, des souhaits communs que l'on retrouve également chez Laisant[401].

Diversités des applications possibles

Laisant divise la partie III du mémoire original en quatre subdivisions : « Formules trigonométriques », « Exercices sur le triangle », « Exercices sur les aires polygonales », « Exercices sur quelques questions de Géométrie supérieure ». Cette partie contient en outre deux additions de la part de Laisant. Nous proposons d'exposer la première, soulignant ainsi la façon dont Laisant s'appuie sur les travaux de Bellavitis. Ce dernier détermine dans le paragraphe 102 le point de concours des hauteurs d'un triangle en combinant habilement les équipollences relatives à ces hauteurs et leur conjuguée[402]. Laisant se propose quant à lui de démontrer l'existence de l'orthocentre H sans le déterminer. Si CH et BH sont les hauteurs relatives aux côtés AB et CA, il écrit, comme Bellavitis :

$$\sqrt{}\mathrm{CH} \triangleq n\mathrm{AB} \text{ et } \sqrt{}\mathrm{BH} \triangleq m\mathrm{CA},$$

expressions qu'il décompose en :

$$\sqrt{}(\mathrm{AH} - \mathrm{AB} - \mathrm{AC}) \triangleq n\mathrm{AB} \text{ et } \sqrt{}(\mathrm{AH} - \mathrm{AB}) \triangleq - m\mathrm{AB} - m\mathrm{BC}.$$

À partir de ces deux relations, il en déduit une expression de la forme

$$\sqrt{}\mathrm{AH} \triangleq l\,\mathrm{BC}$$

où l est un coefficient qui vérifie la relation :

$$lm + mn + nl = 1.$$

Cette dernière remarque est traduite en langage "usuel" : « La somme des produits des côtés des triangles HAB, HBC, HCA, pris séparément, est égale au produit des trois côtés du triangle ABC. » [403] Cette conclusion, plus délicate à énoncer avec la démarche de Bellavitis, marque le souhait du traducteur de rendre clairs par un énoncé concis les calculs de la démonstration.

[400] Cité dans [Flament, 2008b], p. 181.
[401] Voir [Flament, 2008b], p. 182. Voir aussi Nabonnand Philippe, "Quelques reprises de thématiques leibniziennes en géométrie au 19e siècle", in *Einheit in der Vielheit, Actes du VIII. Internationaler Leibniz-Kongress*, 2006, 677-683.
[402] [Bellavitis, 1854], p. 47 et [Laisant, 1874a], p. 92.
[403] [Laisant, 1874a], p. 94.

La deuxième addition consiste en cinq propriétés concernant les barycentres. Par exemple, le traducteur montre la propriété suivante : « soient ABC un triangle, O un point quelconque. Si l'on mène LL' $\bumpeq$ AO, MM' $\bumpeq$ BO, NN' $\bumpeq$ CO, et qu'on appelle G le barycentre du triangle ABC, G_1 celui du triangle LMN, G_1' celui du triangle L'M'N', la figure OG_1G_1' sera un parallélogramme. »[404] Cette propriété reçoit une extension à un système de points quelconques, une généralisation à l'espace étant juste mentionnée.

La partie IV traite de la théorie des courbes. Laisant la découpe en : « Préliminaires », « Parabole », « Ellipse », « Cycloïde » et autres « Problèmes généraux ». Outre plusieurs notes précisant certains passages, Laisant propose, dans l'addition au n° 152, une étude de l'hyperbole en « suivant pas à pas »[405] le modèle d'étude précédent et en la concluant par une interprétation mécanique. Ces dernières utilisations de la méthode des équipollences sont primordiales aux yeux de Laisant dans la mesure où une des richesses de l'écriture d'équipollences est la favorisation d'une approche cinématique qu'elle permet :

> *il me semble presque inutile d'insister sur l'élégance de la conception qui permet de représenter une courbe par une seule équipollence à paramètre variable OM $\bumpeq$ $\varphi(t)$, laquelle indique à la fois et la courbe elle-même et la manière dont elle est parcourue par un point mobile.*[406]

Cette dernière remarque fait écho à l'avis de Bellavitis : « La science du mouvement (cinématique d'Ampère) considérée comme un fait, sans se préoccuper des causes, tend toujours à s'associer de plus en plus à la science de l'étendue. »[407]

Les additions suivantes usent des équipollences au sujet d'un problème de contact du troisième ordre pour des courbes, de questions de trajectoires obliques d'un système de courbes planes ou de considérations sur la développante d'une courbe. Les questions de trajectoires sont une généralisation du problème 192 de Bellavitis sur les trajectoires obliques des ellipses concentriques et confocales, problème jugé difficile par Euler lui-même[408]. L'équipollence :

$$\mathrm{OM} \bumpeq f(pt)$$

correspond à un système de courbes indexées par le paramètre p. Laisant détermine une courbe qui coupe chaque courbe de la famille suivant un angle fonction de p. Il prend pour

[404] Ibid., p. 109.
[405] Ibid., p. 133.
[406] Ibid. p. X.
[407] [Bellavitis, 1854], p. 62 et [Laisant, 1874a], p. 121. Sur le débat de l'époque quant à l'origine de la cinématique, voir Liguine, "Note sur l'origine de l'idée de la cinématique", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 15, 1876, p. 499-501.
[408] [Bellavitis, 1854], p. 83.

exemple la courbe qui coupe une famille de droites concourantes sous un angle variant avec l'inclinaison de chacune d'entre elles.

Enfin, le mathématicien français a souhaité tirer des autres ouvrages de son confrère italien un certain nombre de résultats qui complètent la traduction de la *Sposizione* en formant un appendice final[409]. Sept problèmes y sont abordés. Ils concernent principalement la théorie des courbes (« Trouver la courbe dont la tangente en un point quelconque M a une inclinaison égale à celle du rayon vecteur OM », « Trouver le centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique supposé homogène », « Trouver la chaînette homogène ») ou la mécanique (« Trouver les formules fondamentales du mouvement d'un point M soumis à une force accélératrice de direction OM », « Trouver les formules du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant »)[410].

Soulignons pour finir un paragraphe tiré des *Annales des Sciences du royaume Lombardo-Vénitien* de 1837. Bellavitis y traite le cas des points fictifs d'une courbe, c'est-à-dire qu'il considère les points M de l'équipollence OM $\triangleq$ φ(*t*) où *t* peut prendre des valeurs imaginaires. Voilà ce qu'affirme Bellavitis :

> *Je crois que de l'étude des points fictifs des courbes peuvent résulter quelques applications utiles, exactement comme, en algèbre, l'emploi des quantités imaginaires offre beaucoup d'avantages ; et, entre les deux cas, il y a cette différence, qu'en algèbre on ne peut attribuer aucune idée précise aux quantités imaginaires, tandis que les points fictifs des courbes sont pleinement déterminés comme paires de points réels.*[411]

Laisant a choisi de mettre en valeur cette réflexion qui aura pu l'inspirer par la suite, comme nous le verrons, pour son « Extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires » ([Laisant, 1891b]).

---

[409] Voici la liste des ouvrages référencés par Laisant, notamment pour la construction de l'appendice à [Laisant, 1874a] : « Sur quelques applications d'une nouvelle méthode de Géometrie analytique » (*Polygraphe*, janvier 1833, XIII, p. 53 - 61), « Essai d'application d'une nouvelle méthode de Géométrie analytique (Calcul des equipollences) » (*Annales de Fusinieri,* 1835, t. V, p. 44 -269), « Mémoire sur la méthode des equipollences » *(Annales de Fusinieri,* 1837, t. VII), « Solutions graphiques de quelques problèmes de Géométrie, trouvées par la méthode des équipollences » *(Mémoires de l'Institut de Venise,* 1843, t. I, p. 225-267), « Calcul des Quaternions et sa relation avec la méthode des equipollences » *(Actes de I'Institut,* 1858, t. III, et *Mémoires de la Société italienne,* 1858, t. I), « Exposition des nouvelles méthodes de Géométrie analytique « *(Mémoires de l'Institut,* 1860) « Éléments de Géométrie, de Trigonométrie et de Géométrie analytique, avec adjonction de l'Exposition du Calcul des équipollences » (1862).

[410] [Laisant, 1874a], p. 174-178.

[411] Ibid., p. 179.

REMARQUE SUR LE CARACTERE EXCEPTIONNEL DE LA TRADUCTION DE 1874

Nous avons cherché des traces d'une autre traduction par Laisant. La seule autre entreprise de traduction que nous ayons référencée est l'article paru tardivement, en 1904, sur « Le pendule simple sans approximation » dans les pages des *Nouvelles annales.* Il s'agit cette fois de la traduction d'un travail de l'anglais Alfred George Greenhill (1847-1827). Professeur à la Royal Military Academy de Woolwich depuis 1876, le mathématicien anglais est spécialiste des fonctions elliptiques, théorie dont il cherche à montrer les applications concrètes à des problèmes précis. Ses travaux se caractérisent donc par l'application des fonctions elliptiques à la dynamique, l'hydrodynamique ou l'électrostatique (*The applications of elliptic functions*, 1892). L'objet pendule est d'ailleurs placé en tête de son traité de 1892, traduit en France trois ans plus tard[412]. Le futur président de la London Mathematical Society a également publié un article en français en 1902 sur « Le pendule simple sans approximations » dans les *Nouvelles annales de mathématiques* ([Greenhill, 1902]) : il y expose une recherche des limites entre lesquelles est comprise la période du pendule dans le cas de petites oscillations et ce sans avoir recours aux approximations habituellement utilisées. Laisant, qui, pour conclure sa première thèse en 1877, avait déjà présenté une étude du pendule de Foucault à l'aide de la méthode des quaternions[413], propose deux ans plus tard la traduction d'un article similaire qui reprend le précédent en assimilant les oscillations du pendule à un mouvement rectiligne d'un corps en vibration simple [Greenhill, 1904]. Les deux hommes sont en relation depuis plusieurs années puisque Greenhill fait partie de la *Société mathématique de France* depuis 1896[414] et est surtout membre du premier comité de patronage de *L'Enseignement mathématique* que Laisant fonde en 1899. L'intérêt de Greenhill pour les questions d'enseignement se concrétisera par ailleurs par son accès à la vice-présidence de l'ICMI lors de sa création au quatrième Congrès international des mathématiciens de Rome en 1908. Nous avons retrouvé la trace d'une lettre adressée à Laisant dans laquelle Greenhill apparaît satisfait de la traduction proposée par le français et lui demande dans quelle revue pourrait paraître un autre de ses articles, trop long pour les *NAM*.

L'œuvre de diffusion de Laisant n'est pas caractérisée par la traduction exhaustive de l'œuvre d'un mathématicien en particulier, ni dans la traduction d'ouvrages sur un thème

[412] Greenhill, Alfred-George, *Les fonctions elliptiques et leurs applications*, traduit de l'anglais par J. Griess, avec une préface de Paul Appell, Paris, Georges Carré, 1895.
[413] [Laisant, 1877a], p. 75-77.
[414] Vie de la société, *Bulletin de la SMF*, t. 24, 1896, p. 97-101.

donné. Les deux traductions précédentes montrent cependant l'intérêt de Laisant pour certains travaux spécifiques, méconnus selon lui, de confrères étrangers alors que ces mêmes travaux sont porteurs de théories importantes (les prémices de la géométrie vectorielle ou l'étude de la double périodicité des fonctions elliptiques). Laisant semble par ailleurs intéressé par les applications données aux théories correspondantes, applications à la théorie des courbes pour les équipollences par exemple ou à l'étude du pendule pour les fonctions elliptiques. Ce trait caractérise l'ensemble de l'œuvre de diffusion de Laisant. La multiplication des conséquences et applications d'une méthode dans un grand nombre de domaines variés est pour lui une preuve de la pertinence du point de vue adopté, de l'efficacité des théorèmes généraux énoncés, autant qu'un gage de la portée pédagogique d'une telle présentation.

II.1.2. De multiples applications de la méthode des équipollences

On l'a vu, la particularité de la présentation de C.-A. Laisant réside dans les nombreuses illustrations et applications que celui-ci fournit de la méthode de Bellavitis. Suite aux encouragements de ce dernier, nous l'avons remarqué, la première application de la méthode des équipollences par Laisant apparaît dans la revue *Rivista di Giornali* en 1873, revue dirigée par le savant de Padoue qui constitue le seul lieu de publication des travaux de Laisant sur les équipollences jusqu'en 1875. Laisant donne une nouvelle solution au problème suivant : « Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné »[415]. Cette question, ainsi que le problème similaire relatif à des triangles, avait été déjà traitée dans le premier livre des *Principia* de Newton (1687)[416], elle fait l'objet d'une addition à la traduction de 1874 que nous avons déjà signalée[417]. Dans la même revue, une correspondance de Laisant publiée la même année mentionne la résolution par la même méthode d'un autre problème de construction géométrique : « Un triangle CA_1B_1 tourne dans son plan autour du sommet C ; on demande le lieu du centre du cercle circonscrit à CAB, projection de CA_1B_1 sur un autre plan fixe mené par C. »[418] Toujours dans la revue de

[415] *Rivista di Giornali,* 1873, p. 28.
[416] C'est le sujet du lemme 27. Petersen Julius, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec applications à plus de 400 problèmes*, 1892, p. 90.
[417] [Laisant, 1874a], addition au n° 89, p. 80-83. La similitude entre les deux quadrilatères est exprimée par une équipollence double, le fait que le quadrilatère recherché soit inscrit entre quatre droites se traduit par quatre équipollences correspondant aux alignements de points avec les extrémités des quatre droites. La suite du raisonnement constite en de multiples manipulations de ces équipollences, éventuellement par conjugaison, et de celles provenant de l'adjonction de points intermédiaires.
[418] *Rivista di Giornali*, 1873, p. 31.

Bellavitis, Laisant propose en 1874 une correspondance sur l'étude générale des courbes podaires, puis traduit une propriété des progressions par quotient en termes de quantités géométriques. Enfin, en 1876, il expose brièvement les résultats énoncés l'année précédente au Congrès de l'AFAS de Nantes concernant l'étude générale sur les puissances de points qui s'appuie toujours sur la méthode des équipollences[419].

C'est en effet lors d'un congrès de l'AFAS que Laisant présente pour la première fois un exposé complet d'une notion, celle de puissance d'un point par rapport à un cercle, à l'aide de la méthode de Bellavitis. Mais l'utilisation de la méthode des équipollences est un thème qui traverse l'ensemble de son œuvre, pénétrant divers autres domaines mathématiques. Dans sa bibliographie de référence sur les méthodes vectorielles, MacFarlane compte ainsi une trentaine d'articles ou communications de Laisant sur le sujet[420], sans compter l'utilisation des équipollences pour la résolution de questions, dans les *Nouvelles annales* par exemple. On s'intéressera principalement ici à la période 1873-1887, même si on note quelques écrits significatifs après cette période, jusqu'en 1892, comme [Laisant, 1888c], [Laisant, 1890d], [Laisant, 1891d] (sur lequel nous reviendrons), [Laisant, 1892a]. Quoi qu'il en soit la période comprise entre la traduction de l'ouvrage de Bellavitis (1874) et la rédaction de la *Théorie et applications des équipollences* (1887) correspond effectivement à une importante production d'articles portant sur les équipollences, qui deviennent de manière très nette le sujet principal des travaux de Laisant. Nous choisissons d'en étudier quelques-uns, représentatifs de la volonté du mathématicien de mettre en valeur certains aspects de la théorie : utilisation de figures semblables, intérêt pour les questions de cinématique, pour les transformations du plan. Le corpus choisi souligne aussi l'existence de deux principaux supports de diffusion (et de débats) de la méthode de Bellavitis, à savoir les congrès de l'AFAS et les *Nouvelles annales de mathématiques*.

UN PREMIER MEMOIRE SUR LES PUISSANCES DE POINTS

Le quatrième congrès de l'AFAS se tient à Nantes en 1875. Nous choisissons d'étudier ici une des trois interventions de Laisant pour plusieurs raisons. Membre actif de la vie politique locale, Laisant vient d'être réélu au conseil général du premier canton de Nantes. On peut logiquement s'attendre à une certaine implication de sa part dans le congrès de l'AFAS

[419] "Extrait d'une lettre : « Sulle curve pedali »", *Rivista di Giornali*, 1874, p. 19. "Extrait d'une lettre : « alcune conseguenze geometriche di una identità algebrica »", *Rivista di Giornali*, 1874, p. 24. "Sulle potenze dei punti", *Rivista di Giornali*, 1876, p. 211.
[420] [Macfarlane, 1904], p. 48-50.

qui se tient dans sa région natale. Laisant ne fait pourtant pas parti du comité local d'organisation (ni A. Guépin d'ailleurs). Il a pu être encouragé par Lemoine, voire par Mannheim, tous deux membres du bureau des 1ère et 2ème sections, à participer pour la première fois au congrès de la société savante. Car cette intervention constitue la première de Laisant à ces assemblées, lui qui est appelé à devenir un « grand communiquant »[421] de l'AFAS. À côté d'interventions plus modestes (calculs trigonométriques [Laisant, 1875a], compas trisecteur [Laisant, 1875b], service météorologique [Laisant, 1875d]), le conseiller général propose, un an après sa traduction de l'ouvrage de Bellavitis, un exposé complet sur la puissance d'un point par rapport à un cercle, premier travail significatif de diffusion, explicitement présenté comme application de la méthode du savant italien en France. Comme nous allons le voir, c'est aussi avec cette communication que son auteur s'éloigne des diverses notations de Bellavitis, présentes dans la traduction *Exposition de la méthode des équipollences* un an plus tôt.

Dans ce « Mémoire sur les puissances de points, étude de géométrie plane » ([Laisant, 1875c]), Laisant étudie les diverses propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle donné par son diamètre. Mais le jeune mathématicien s'affranchit ici de la géométrie synthétique pour employer la méthode des équipollences. Il abandonne pour cela le signe d'équipollence pour le signe égal, le ramun pour la lettre *i*. Surtout, la droite dirigée OA est notée A et par extension « le point A » désigne l'extrémité de la droite A. Laisant semble suivre ici les conseils de Transon[422] et la notation, essentiellement symbolique, n'a ici qu'un rôle simplificateur pour alléger l'écriture des formules.

La puissance d'un point C par rapport à un cercle de diamètre AB est alors notée

$$\mathrm{P_C}(\textsc{a}, \textsc{b}),$$

la puissance de l'origine par rapport au même cercle étant directement notée P(A, B). La méthode des équipollences sert principalement à établir la formule suivante :

$$\mathrm{P}(\textsc{a}, \textsc{b}) = \frac{1}{2}(\textsc{a}.\mathrm{cj.}\ \textsc{b} + \mathrm{cj.}\ \textsc{a}.\textsc{b})$$

qui correspond à :

$$\mathrm{P}(\textsc{a}, \textsc{b}) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{OA.cj.\ OB + cj.\ OA.OB}).$$

---

[421] Selon l'expression d'H. Gispert, [Gispert, 2002].
[422] Transon écrit « Il y a un grand avantage à avoir impliqué dans une seule lettre la grandeur et la direction » dans sa lettre datée de 1868 et parue en 1892 (Transon, 1892], p. 104).

Mais l'opérateur de conjugaison, le signe de perpendicularité *i* et l'équipollence donnant l'aire d'un triangle apparaissent ponctuellement dans l'article, qui, de plus, est totalement dépourvu de figure.
Laisant ne produit pas une preuve de cette formule, en signalant juste qu'elle correspond à l'expression

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = ab \cos \mathrm{AOB}$$

où a et b désignent respectivement les longueurs OA et OB. Cette remarque apparaît peu dans l'ouvrage traduit de Bellavitis un an plus tôt, alors que la même formule est soulignée comme importante dans l'ouvrage de Laisant en 1887, comme application de l'expression de la projetection d'une droite sur une autre[423].

Laisant étudie essentiellement la puissance de l'origine par rapport à une circonférence donnée puisque par un changement de repère, il remarque que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{P}_{\mathrm{O}}(\mathrm{A} - \mathrm{C}, \mathrm{B} - \mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{C}, \mathrm{B} - \mathrm{C}).$$

L'utilisation de l'opérateur de conjugaison explique alors la bilinéarité de la forme

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Ainsi, pour tous réels m et n (positifs ou négatifs),

$$\mathrm{P}(m\mathrm{A}, n\mathrm{B}) = mn\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

et

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{D}) + \ldots = \mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} + \ldots).$$

D'où l'analogie formelle entre le calcul de la puissance $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots, \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots)$ et le produit de deux polynômes $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots$ et $\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots$. Cette observation sur ce jeu d'écriture sera fréquente chez Laisant qui souligne dès que cela est possible le rapprochement de deux propriétés de calcul visuellement comparables. Le cas particulier de la propriété précédente peut aussi évoquer l'intérêt de l'auteur pour les questions de produits d'expressions algébriques, comme il le prouvera quelques années plus tard, toujours à l'occasion d'un congrès de l'AFAS ([Laisant, 1881c]).

Cette remarque fondamentale est riche de conséquences : si L et M sont les points tels que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 2\mathrm{L}$ et $\mathrm{A} - \mathrm{B} = 2\mathrm{M}$, on retrouve l'expression classique :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{L}, \mathrm{L}) - \mathrm{P}(\mathrm{M}, \mathrm{M}) = l^2 - m^2$$

(où l et m désignent, on l'a vu, les longueurs OL et OM)[424]. Autre exemple d'utilisation de la bilinéarité : Laisant détermine la puissance de l'origine par rapport à la circonférence passant

[423] Voir [Laisant, 1887a], p. 43-45.
[424] L'auteur avait précédemment remarqué que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \mathrm{A}\mathrm{cj}.\,\mathrm{A} = \mathrm{gr}.\mathrm{A}^2 = a^2.$$

par trois points A, B et C et en notant A_1 le point diamétralement opposé à A et R le centre du cercle passant par A, B et C, il obtient comme première expression de la valeur recherchée :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}, 2\mathrm{R} - \mathrm{A}) = 2\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) - a^2.$$

Par combinaison de cette expression avec les deux autres expressions analogues obtenues pour les points B et C, il aboutit à la solution du problème :

$$\frac{2}{3}\mathrm{P}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}, \mathrm{R}) - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ou encore en appelant G le centre de gravité du triangle ABC[425]

$$2\mathrm{P}(\mathrm{G}, \mathrm{R}) - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

« théorème assez simple, facile à énoncer en langage ordinaire, et qu'on peut étendre à un polygone inscrit quelconque »[426]. Remarquons au passage que, dès 1875, on voit apparaître les critères de Laisant pour évaluer l'intérêt d'une propriété : elle doit être traduisible, communicable et généralisable.

C'est l'argument de bilinéarité, riche en conséquence, qui est donc utilisé dans la première partie de l'exposé. De nombreuses égalités sont prouvées (puissance de l'origine par rapport à n circonférences, produit des puissances de l'origine par rapport à deux circonférences), certaines donnent lieu à des interprétations géométriques directes comme la suivante :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}, \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}, \mathrm{A}) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}, \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{B}, \frac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{C}, \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right).$$

Ceci correspond au théorème suivant : « La somme des puissances d'un point quelconque par rapport aux circonférences décrites sur les trois côtés d'un triangle comme diamètres, est égale à la somme des puissances du même point par rapport aux circonférences décrites sur les trois médianes »[427].

Autre exemple de "verbalisation", Laisant écrit en développant et en regroupant les termes judicieusement :

$$\mathrm{P}_\mathrm{C}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{B}, \mathrm{C}) + \mathrm{P}_\mathrm{B}(\mathrm{C}, \mathrm{A}) = \frac{1}{2}[\mathrm{P}(\mathrm{A} - \mathrm{B}, \mathrm{A} - \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B} - \mathrm{C}, \mathrm{B} - \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{C} - \mathrm{A}, \mathrm{C} - \mathrm{A})]$$

[425] Tel que 3OG = OA +OB + OC.
[426] [Laisant, 1875c], p. 142. L'auteur propose ensuite une réécriture de cette expression en fonction de A, B et C uniquement puis de aire OCB, aire OAC, aire OBA et aire ABC.
[427] Ibid., p. 144. De tels exemples sont nombreux : signalons encore le théorème suivant : « la somme des puissances d'un point quelconque par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés d'un quadrilatère comme diamètres, est égale à quatre fois la puissance du même point par rapport à la circonférence ayant pour diamètre la droite joignant les milieux des diagonales » Ibid., p. 145.

$$= \frac{1}{2} [(\text{gr. AB})^2 + (\text{gr. BC})^2 + (\text{gr. CA})^2]$$

et traduit ceci par l'énoncé suivant: « la somme des puissances des trois côtés d'un triangle par rapport aux circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres est égale à la demi-somme des carrés des côtés »[428].

Outre les applications de géométrie pure, Laisant propose, comme il en prendra l'habitude dans ses travaux d'applications de la méthode des équipollences, certaines formules ayant trait à la mécanique. Les droites dirigées A_1, A_2, A_3, … désignent alors des forces appliquées aux points B_1, B_2, … de résultante R. La somme des puissances de l'origine par rapport aux cercles de diamètres A_iB_i est égale à la puissance de l'origine par rapport au cercle de diamètre RQ où Q est le point défini à partir d'une équipollence et que Bellavitis appelle « centre du système des forces »[429].

La deuxième partie du mémoire énonce, par généralisations successives, les formules relatives aux différentielles et dérivées de la forme $(A, B) \rightarrow P(A, B)$. Trois cas sont étudiés : le premier est celui de la puissance de l'origine par rapport au cercle de diamètre XY, où X et Y sont mobiles. Le deuxième cas correspond à la puissance d'un point X mobile par rapport à une circonférence de diamètre AB fixe. Enfin, le cas général traite de la puissance d'un point Z mobile par rapport à un cercle de diamètre XY variable. Pour chaque cas, Laisant propose une expression de la différentielle, puis de la dérivée (dans le cas où le déplacement des points est fonction du temps), la condition nécessaire pour obtenir les extrema de la dérivée précédente et enfin quelques applications dans le cas où la trajectoire des points est liée à une conique. Examinons brièvement le premier cas où la bilinéarité permet de conclure rapidement. Si XX' = ΔX et YY' = ΔY sont les déplacements respectifs des points X et Y :

$$P(X', Y') = P(X + \Delta X, Y + \Delta Y) = P(X, X) + P(\Delta X, Y) + P(X, \Delta Y) + P(\Delta X, \Delta Y).$$

D'où :

$$\Delta P(X, Y) = P(\Delta X, Y) + P(X, \Delta Y) + P(\Delta X, \Delta Y).$$

Pour de petits déplacements dX et dY, le dernier terme peut être négligé, si bien que Laisant conclut :

$$dP(X, Y) = P(dX, Y) + P(X, dY).$$

La dernière partie de l'exposé utilise ces résultats de calcul différentiel autour du thème des axes et centres radicaux. Généralisant la notion d'axe radical, Laisant cherche les

[428] Ibid., p. 145.
[429] [Laisant, 1874a], n° 120. Laisant étudie également le cas où ce sont les droites A_iB_i qui constituent le système de forces appliquées aux points A_i.

lieux des points X tels que la différence des puissances de X par rapport à deux circonférences données soit constante soit :

$$P_X(A_1, B_1) - P_X(A_2, B_2) = \Delta_3.$$

Par différentiation (voir le deuxième cas de la partie précédente), avec C_1 et C_2 les centres des circonférences données, il obtient :

$$P(DX, X - C_1) - P(DX, X - C_2) = 0 \text{ soit } P(DX, C_1 - C_2) = 0.$$

L'auteur en conclut que DX doit être orthogonal à $OC_1 - OC_2 = C_2C_1$[430]. Le lieu recherché est donc une droite perpendiculaire à la droite passant par les centres des cercles. Pour $\Delta_3 = 0$, on retrouve le résultat connu concernant l'axe radical. De manière analogue, toujours en procédant par généralisation, Laisant cherche le lieu des points où la somme des puissances par rapport à trois (ou *n*) circonférences est constante puis le lieu des points tels que la somme de leurs puissances croisse proportionnellement à l'arc de courbe parcouru. Enfin, un dernier calcul différentiel permet d'étudier les variations du centre radical correspondant à trois cercles.

Cette étude exhaustive de la puissance d'un point par rapport à un cercle ne trouve à notre connaissance pas d'autre développement spécifique dans les travaux postérieurs de Laisant, si ce n'est des solutions ponctuelles à des problèmes parus dans telle ou telle revue. C'est le cas de la question 54 de la *Nouvelle correspondance mathématique* posée et résolue par Laisant où il reprend les notations et le résultat de son exposé de 1875[431]. Peut-on aussi déceler une filiation entre le travail de 1875 et un autre article paru cette fois en 1890 sur le théorème de Carnot ? Il s'agit ici du théorème de 1806 qui concerne le cas d'une courbe de degré *n* qui coupe les côtés d'un triangle[432]. Vingt-cinq ans après sa première intervention dans un congrès de l'AFAS, Laisant introduit dans les pages des *NAM* la puissance non pas d'un point par rapport à une circonférence, mais la puissance $P_\Gamma(AB)$ d'un segment AB par rapport à une courbe Γ quelconque. Remarquons l'analogie des notations avec l'exposé de 1875 qui permet à l'auteur, comme il l'explique lui-même, de simplifier la démonstration du théorème : « [le théorème de Carnot] me semble pouvoir être démontré d'une façon simple, à

[430] C'est une remarque de la première partie de l'exposé où la condition P(A, B) = 0 signifie la perpendicularité des droites OA et OB.
[431] [Laisant, 1879d], "Solution des questions posées-question 54", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 209-211. La question 54 est « Trouver le lieu d'un point M tel, que la somme de ses puissances par rapport à *n* circonférences données, croisse proportionnellement : 1° aux accroissements des arcs de la courbe parcourue par M ; 2° aux accroissements des carrés des mêmes arcs. »
[432] Carnot Lazare Nicolas, *Essai sur la théorie des transversales*, Paris, 1806.

l'aide d'un petit nombre de remarques destinées à abréger le langage et l'écriture. »[433] De plus, la démarche de Laisant est généralisable à l'espace.

$P_\Gamma(AB)$ désigne le quotient de distances considérées en grandeurs et en signes :

$$\frac{P_1B.P_2B...P_nB}{P_1A.P_2A...P_nA}$$

où P_1, P_2, …, P_n sont les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite AB et de la courbe Γ.

Pour un polygone fermé ABCD…LA, il montre par généralisations successives que

$$P_\Gamma(AB)\ P_\Gamma(BC)\dots P_\Gamma(LA) = 1.$$

Toujours par le biais des notations introduites, Laisant généralise alors le théorème précédent de Carnot à l'espace, ce qui constitue la principale originalité de l'article. Dans ce cas, une surface algébrique d'ordre n joue le rôle de la courbe Γ précédente et l'auteur considère la puissance d'un segment AB par rapport à la section de cette surface et d'un plan quelconque contenant AB. La formule précédente reste valable et « le théorème de Carnot s'applique à un polygone fermé gauche et à une surface algébrique quelconque »[434]. Laisant s'applique enfin à exposer de nombreux corollaires des relations précédentes. Outre certaines configurations (hexagone de Pascal, de Brianchon..), il examine, aussi bien dans le plan que dans l'espace, les conditions de la réciproque du théorème de Carnot[435] et introduit la puissance $P_\Gamma(ACB)$ d'un angle ACB par rapport à une courbe plane Γ, puis la puissance d'un dièdre par rapport à une surface de classe n. Seulement précisons bien qu'aucune équipollence ne figure dans cet article, Laisant préférant ici utiliser principalement les coordonnées barycentriques ou tangentielles pour donner par exemple l'équation de la courbe Γ. De plus, à cette époque, les préoccupations de Laisant s'éloignent progressivement des découvertes de Bellavitis qui ont pourtant été à l'origine de nombreux autres travaux précédemment.

EQUIPOLLENCES ET TRIANGLES SEMBLABLES

Autre application de la méthode des équipollences, la construction de triangles semblables sur les côtés d'un polygone est un exemple de thème repris à plusieurs reprises par

[433] [Laisant, 1890g], p. 5. L'écriture permet par simple permutation de démontrer que :

$$P_\Gamma(A, B).\ P_\Gamma(B, A) = 1.$$

[434] [Laisant, 1890g], p. 8. Laisant ne montre cependant pas que l'opération est indépendante du plan contenant AB choisi. Sur le théorème de Carnot, voir [Chemla, 1998].

[435] Ceci semble un point remarqué par A. Tresse dans sa traduction de l'exposé de Schoenflies « Géométrie projective » dans *l'Encyclopédie des sciences mathématiques* [Molk, 1904-1916], t. III, vol. 2, p. 6.

Laisant dans la période qui nous intéresse ici. On trouve de multiples travaux relatifs à l'objet triangle. La réponse parue dans les *Nouvelles annales* en 1876 à la question 65, où il s'agit de déterminer une condition sur les coordonnées d'un point pour que celui-ci se trouve à l'intérieur d'un triangle, en est un exemple[436]. Laisant multiplie en effet les constructions autour du triangle et en démontre de nouvelles propriétés en s'appuyant sur le calcul des équipollences, et ce de manière régulière : nous renvoyons à l'article « Construction et formules relatives au triangle » paru dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, en 1892 ([Laisant, 1892h]). Ceci nous amènera à réfléchir aux rapports de son auteur à la nouvelle géométrie du triangle développée par ses amis Brocard et Lemoine.

Cependant, nous soulignons plus particulièrement l'adaptation de l'outil équipollence à la construction et la manipulation de triangles semblables. Dans son traité de 1887, le traducteur de la *Sposizione* insiste en effet sur l'intérêt de la méthode des équipollences pour traiter les questions relatives aux triangles semblables : « Ce procédé pour l'expression de la similitude de deux triangles est, nous le répétons, d'une importance capitale et d'une application constante dans la méthode des équipollences. »[437] Plus encore et de manière réciproque, l'objet "triangles semblables" devient central dans la théorie des équipollences selon Laisant. Cette idée capitale est abondamment utilisée dans le cadre de l'étude de figures formées à partir de polygones quelconques.

Centre de gravité et construction de triangles

Nous déroulons le fil de cette réflexion en commençant par l'article « Sur le centre de gravité d'un polygone » publié par Laisant dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques* en 1877 ([Laisant, 1877d]). Même si l'objectif de cette courte publication est sensiblement différent du thème qui nous occupe, on y trouve une utilisation pertinente des équipollences pour des questions de centres de gravité, auxquelles la méthode de Bellavitis semble si bien se prêter. Remarquons aussi que équipollences et recherche d'un centre de gravité sont souvent liées, si bien que Laisant consacre la même année un article similaire dans la *Nouvelle correspondance* (« Centre de gravité d'un arc de cercle », [Laisant, 1877e]),

[436] « Connaissant les coordonnées des trois sommets d'un triangle, quelles relations doivent exister entre ces coordonnées et celles d'un quatrième point, pour que celui-ci soit dans l'intérieur d'un triangle ? » ("Problèmes et théorèmes", *NAM*, Sér. 1, 2, 1843, p. 326) Laisant écrit alors que le quatrième point P est à l'intérieur de ABC si dans la relation

$$OP \triangleq \lambda_1 OA + \lambda_2 OB + \lambda_3 OC$$

où $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, on a

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$$

("Solutions de questions proposées dans les *Nouvelles annales*", *NAM*, Sér. 2, t. 15, 1876 p. 511-512).

[437] [Laisant, 1887a], p. 26.

quittant une configuration polygonale pour un arc de cercle. La méthode des équipollences sera ensuite relayée par l'emploi des quaternions pour des études dans l'espace à l'occasion de divers articles sur lesquels nous reviendrons. On observe enfin dans cet article les germes d'un processus de construction utilisé de manière récurrente chez l'auteur ultérieurement, i.e. la construction de triangles (ici non-semblables) sur les côtés d'un polygone donné.

Dans l'article de 1877 des *NAM*, Laisant recherche le centre de gravité G d'un polygone ABC…L par le biais de la construction de triangles OAB, OBC, …, OLA sur les côtés de ce polygone. Le point G s'obtient comme barycentre des centres de gravité de ces derniers triangles, affectés d'une masse proportionnelle au rapport de leur aire et de celle du polygone initiale (c'est ce que nous appellerions aujourd'hui la propriété d'associativité des barycentres). Laisant en déduit une équipollence équivalente à la suivante :

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}{3}.\frac{aire_{\mathrm{OAB}}}{aire_{\mathrm{ABC...L}}} + \frac{\mathrm{OB}+\mathrm{OC}}{3}.\frac{aire_{\mathrm{OBC}}}{aire_{\mathrm{ABC...L}}} + ... + \frac{\mathrm{OL}+\mathrm{OA}}{3}.\frac{aire_{\mathrm{OLA}}}{aire_{\mathrm{ABC...L}}}$$

(remarquons le retour ponctuel du signe équipollence dans cette publication). Se rappelant qu'une équipollence peut se traiter de la même manière qu'une équation algébrique, nous pouvons encore écrire :

$$\mathrm{OG} \bumpeq$$

$$\frac{1}{3.aire_{ABC...L}}\left[OA.(aire_{OLA}+aire_{OAB})+OB.(aire_{OAB}+aire_{OBC})+...+OL.(aire_{OKL}+aire_{OLA})\right]$$

ou, comme le suggère Laisant, :

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{1}{3.aire_{ABC...L}}\left[OA.aire_{OLAB}+OB.aire_{OABC}+...+OL.aire_{OKLA}\right].$$

Il introduit ensuite le point H centre de gravité des points A, B, …L affectés des masses égales aux aires des différents quadrilatères ce qui lui permet d'écrire :

$$\mathrm{OH}\ .\ (\mathrm{aire}_{\mathrm{OLAB}} + \ldots \mathrm{aire}_{\mathrm{OKLA}}) \bumpeq \mathrm{OA}\ .\ \mathrm{aire}_{\mathrm{OLAB}} + \mathrm{OB}\ .\ \mathrm{aire}_{\mathrm{OABC}} + \ldots + \mathrm{OL}\ .\ \mathrm{aire}_{\mathrm{OKLA}}.$$

Il remarque aussi que :

$$\mathrm{aire}_{\mathrm{ABC...L}} = \frac{1}{2}(\mathrm{aire}_{\mathrm{OLAB}} + \mathrm{aire}_{\mathrm{OABC}} + \ldots + \mathrm{aire}_{\mathrm{OKLA}}),$$

et conclut :

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{2}{3}\mathrm{OH},$$

équipollence que Laisant traduit comme de coutume par un énoncé sous la forme :

> *on joint un point fixe à tous les sommets d'un polygone ; à chaque sommet, on place une masse proportionnelle au quadrilatère formé par ce sommet, les deux sommets voisins et le point fixe. Le centre de gravité de ces masses, celui de l'aire*

> *du polygone et le point fixe sont en ligne droite ; et cette droite est divisée au tiers par le centre de gravité de l'aire du polygone*[438].

Nous décidons de nous attarder sur l'application originale proposée par Laisant. Il fixe O foyer d'une ellipse et les points A, B, C, …sur cette ellipse, infiniment proches tels que les triangles AOB, BOC, COD… soient « équivalents », selon ses propres termes. Le point H est alors le point limite du centre de gravité de la circonférence de l'ellipse, circonférence de l'ellipse dont la densité est donnée par la répartition des points A, B, C…. La relation précédente reste valable avec G centre de l'ellipse, ce qui montre que le point H est le milieu du segment joignant le centre de l'ellipse et le second foyer O'. Laisant indique ainsi qu'il a déterminé le centre de gravité de la trajectoire matérielle d'une planète après une révolution autour du soleil et qui « abandonne uniformément une quantité de matière qui se fixe sur sa trajectoire »[439], hypothèse qui est reliée à l'équivalence des triangles AOB, BOC, COD.

L'application de cette fin d'article pourrait être anodine si elle n'avait pas fait l'objet d'une des rares interventions de Laisant à l'Académie des sciences. Le cas des mouvements dus à une force centrale se retrouve tout au long de l'œuvre de Laisant, souvent en lien avec la méthode des équipollences (voir [Laisant, 1878h] et plus loin). Le 6 avril 1903, dans sa note de mécanique rationnelle intitulée « Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales » ([Laisant, 1903c]), note présentée par Appell, l'examinateur à l'École polytechnique y reprend donc le résultat précédent énoncé près de 26 ans plus tôt. Soulignant le caractère « absolument élémentaire » de la méthode de l'article de 1877, il y précise le contexte de l'application donnée alors : le problème avait précédemment été posé par Gauss[440] qui considérait la trajectoire d'une planète, « en supposant la densité proportionnelle en chaque point à l'inverse de la vitesse ». Il précise : « matériellement, cela peut se figurer en supposant que la planète dans sa course abandonne *uniformément* une certaine quantité de matière qui se fige sur la trajectoire et forme ainsi un fil sans fin, une fois la révolution accomplie ». Le centre de gravité d'une telle orbite est le milieu du segment joignant son centre et le second foyer. Grâce au résultat paru en 1877, le fait se généralise à toute planète décrivant une orbite fermée sous l'action d'une force centrale. Laisant énonce alors le résultat suivant :

> *Soient* (C) *la trajectoire fermée décrite par un point matériel sous l'action d'une force centrale ;* S *le centre des forces ;* O *le centre de gravité de l'aire de la*

438 [Laisant, 1877d], p. 408.
439 [Laisant, 1877d], p. 409.
440 Gauss, *Determinatio attractionis*, Œuvres complètes, t. III, p. 333.

> *courbe plane* (C) *;* G *le centre de gravité de la ligne* (C)*, en supposant que la densité soit en chaque point proportionnelle à l'inverse de la vitesse, on a*
>
> $\mathrm{SG} = \frac{3}{2}\mathrm{SO}$*, les trois points* S, O, G *étant en ligne droite.*[441].

La propriété est une nouvelle fois reprise par Laisant lors d'une communication à la SMF la même année (« Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales », [Laisant, 1903b]). Il y remarque que le même énoncé peut s'appliquer à un arc quelconque de l'orbite et affirme :

> *Soit* $\mathrm{M_0M}$ *un arc de la trajectoire d'un point matériel sollicité par une force centrale,* S *étant le centre des forces ; considérons le centre de gravité* G *de l'arc de courbe* $\mathrm{M_0M}$*, la densité de chaque point étant inversement proportionnelle à la vitesse ; soit en outre* O *le centre de gravité du secteur* $\mathrm{SM_0M}$ *; on a* $\mathrm{SG} = \frac{3}{2}\mathrm{SO}$*, les trois points* S, O, G *étant en ligne droite.*[442]

en donnant une démonstration qui, si elle reste « intuitive », repose cette fois-ci par intégration du vecteur SM suivant la variable de temps ou l'aire décrite par ce vecteur et en s'appuyant sur la loi des aires[443]. Si en 1903 il n'est plus question d'« équipollences » mais de « vecteurs » (26 ans ont passés), la démonstration de 1877 reste éclairante quant à la relation que Laisant tisse entre les questions de centre de gravité et de force centrale deux thèmes qui reviennent régulièrement, très souvent par l'intermédiaire de l'utilisation de la méthode de Bellavitis.

Équipollences et polygones

Revenons en 1877. Le jeune mathématicien propose dans une intervention au Congrès de l'AFAS du Havre une étude complète « Sur quelques propriétés des polygones » ([Laisant, 1877c]). Il y construit sur chacun des *n* côtés d'un polygone des triangles cette fois-ci semblables à un triangle donné. $A_1A_2 \ldots A_n$ étant le polygone de départ et PQR le triangle de base, on note $A_1A'_1A_2$, $A_2A'_2A_3$, ... les triangles construits sur les côtés A_1A_2, A_2A_3, … Le nouveau polygone est alors $A'_1A'_2A'_3 \ldots$: il compte autant de sommets que le premier et ces

---

[441] [Laisant, 1903c], p. 881

[442] [Laisant, 1903b], p. 156.

[443] [Laisant, 1903b], p. 156. Il ajoute « Quant à la démonstration, elle peut être présentée sous une forme qui la rend presque intuitive ». Pour cela, Laisant note M le vecteur variable SM à l'instant *t* et σ l'aire variable décrite par ce même vecteur. La preuve réside dans le fait que la loi des aires permet d'écrire $\sigma = kt$ et d'exprimer aisément l'intégrale

$$\mathrm{SO} = \frac{2}{3}\frac{\int \mathrm{M}d\sigma}{\sigma}$$

en fonction de l'intégrale

$$\mathrm{SG} = \frac{\int \mathrm{M}dt}{t}.$$

sommets A'_1, A'_2, …peuvent être à l'intérieur ou à l'extérieur du polygone initial. Notons que, comme pour l'exposé de 1875, aucune figure n'est proposée : l'auteur a toujours avancé cet avantage de la méthode de Bellavitis qu'elle permet de se passer de figures en s'attachant uniquement à la manipulation d'écritures.

En posant μ le rapport géométrique $\frac{RQ}{RP}$ et $\lambda = \frac{QR}{QP}$, Laisant obtient la relation :

$$\mu = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Du reste, les coefficients μ et λ doivent être remplacés par leur conjugué pour obtenir les propriétés correspondantes aux triangles "intérieurs" si les triangles étaient à l'extérieur du polygone. Les valeurs particulières de λ correspondent alors à des triangles PQR particuliers ($\lambda = i$ pour PQR rectangle isocèle en Q, $\lambda = \varepsilon^{\frac{2\pi}{p}}$ lorsque Q est le centre d'un polygone régulier à p côtés).

La similitude des triangles est facilement traduite par l'équipollence :

$$\frac{A_2A'_1}{A_2A_1} = \frac{RQ}{RP} = \mu .$$

Remarquons, comme en 1875, l'utilisation du signe égal et non du signe d'équipollence. L'argument avancé ici est d'ordre typographique, l'auteur affirmant conserver toute sa clarté à son exposé. Laisant justifie plus loin, pour les mêmes impératifs d'imprimerie, l'abandon du signe √ pour le symbole i. Les règles de calcul sur les équipollences lui permettent, après avoir introduit un point O quelconque, d'obtenir l'égalité :

$$OA'_1 = \mu OA_1 + (1 - \mu)OA_2$$

ou

$$OA'_1 = \mu(OA_1 - \lambda OA_2).$$

Cette dernière relation étant vraie pour chaque sommet du nouveau polygone et pour tout point O, il additionne membre à membre :

$$\Sigma\ OA' = \mu(1 - \lambda)\Sigma\ OA = \Sigma\ OA.$$

Les points A'_1, A'_2, … et A_1, A_2, … ont donc le même « centre des moyennes distances » (ce que nous appellerions isobarycentre). Ceci est une généralisation du théorème dit "de Napoléon" qui se limite à la construction de triangles équilatéraux sur les côtés d'un triangle quelconque. La remarque de Laisant trouvera une application dans l'étude des systèmes de courants alternatifs polyphasés et sera étudiée algébriquement par Jesse Douglas (1940) et B. H. Neumann (1941)[444].

Notons le cas où le "triangle-motif" PQR est plat : les points A'_1, A'_2, … coupent alors selon les mêmes proportions chacun des côtés du polygone. Ce cas se rapporte à une propriété énoncée par Pappus d'Alexandrie (300-360) dans son huitième volume des *Collections mathématiques* :

> *Si trois mobiles placés aux sommets d'un triangle partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles à ces côtés, leur centre de gravité restera immobile.*[445]

Le résultat est alors montré grâce au théorème de Ptolémée. Le même problème est repris et redémontré d'un point de vue mécanique par Montucla (1725-1799) dans les volumes des *Récréations mathématiques et physiques* que l'astronome de Louis XV publie en 1778 (une démonstration géométrique lui semblait trop délicate)[446].

En 1881, dans un article des *Nouvelles annales,* Henri Résal, figure que nous avons déjà évoquée au sujet du planimètre polaire, reprend ce théorème qu'il juge « tombé dans l'oubli malgré l'intérêt qu'il présente »[447]. Sans faire référence à la communication de Laisant, l'auteur, dont l'influence sur ce dernier sera examinée plus loin, étend le résultat à un polygone quelconque de l'espace ([Résal, 1881]) :

> *Soient $A_1A_2...A_nA_1$ un polygone formé de n côtés, plan ou gauche, m la masse de chacun des n points matériels, partant en même temps des sommets A_1, A_2, ..., A_n, et dans le même sens, avec des vitesses constantes V_1, V_2, ... V_n, proportionnelles aux côtés du polygone $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, ..., $a_n = A_nA_1$. Le centre de gravité des masses m reste fixe.*[448]

À la suite de l'article de Résal, Ernest Laquière se penche également sur la question un an plus tard dans la même revue ([Laquière, 1882]).

Toujours en 1882, dans la communication « Sur certaines propriétés des centres de gravité », cette fois lors d'une séance de la *Société mathématique de France*, Laisant, dont l'attention a été retenue par l'article de Résal, rappelle que ce résultat n'est autre que celui de 1877 et le reformule dans ces termes :

---

444 [Grünbaum, 2001], [Neumann, 1982].
445 [Résal, 1881], p. 337 et [Chasles, 1837], p. 44.
446 [Chasles, 1837], p. 44.
447 [Résal, 1881], p. 337. Et pourtant, dès 1837, Chasles, dans on *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, précise que « les géomètres modernes ont étendu ce théorème à un polygone quelconque, plan ou gauche » ([Chasles, 1837], p. 44).
448 [Résal, 1881], p. 337. Résal utilise ici les coordonnées rectangulaires et un calcul de moment.

> *Si l'on divise dans un même rapport les côtés successifs d'un polygone fermé, le centre de gravite des points de division (supposés de masses égales) est le même que le centre de gravite des sommets*[449],

avant de le démontrer cette fois dans l'espace à l'aide des quaternions comme nous le verrons ultérieurement.

Revenons à l'intervention initiale du congrès de l'AFAS de 1877. La précédente relation

$$OA'_1 = \mu(OA_1 - \lambda OA_2)$$

permet de résoudre le problème inverse : c'est-à-dire de retrouver les points A_1, A_2, …A_n, connaissant les points A'_1, A'_2, …, A'_n. Par combinaison linéaire (chaque relation donnant OA'_i étant multipliée par λ^{i-1}), Laisant obtient après simplification :

$$OA'_1 + \lambda OA'_2 + \ldots \lambda^{n-1}OA'_n = \mu(1 - \lambda^n)OA_1.$$

Cette dernière relation permet d'exprimer, lorsque $\lambda^n \neq 1$, OA_1 en fonction de OA'_1, OA'_2,…, OA'_n et d'obtenir la construction inverse grâce aux tracés successifs de triangles semblables. Dans le cas où $\lambda^n = 1$, c'est-à-dire si λ est une racine n-ième de l'unité[450], il y a « indétermination » : la construction nécessite alors la donnée d'au moins un des sommets du polygone initial. Laisant explique qu'on ne peut donc retrouver arbitrairement le polygone à partir des centres A'_1, A'_2 …de polygones réguliers à n côtés construits sur ses côtés.

Autre prolongement possible : le procédé peut être réitéré. La répétition de la construction permet d'obtenir un nouveau polygone à n sommets A''_1, A''_2 , … à partir des points A'_1, A'_2, … En réitérant plusieurs fois ce procédé jusqu'aux points $A_1^{(p)}$, $A_2^{(p)}$, …, on obtient à chaque étape des formules similaires à la formule

$$OA'_1 = \mu(OA_1 - \lambda OA_2)$$

et la souplesse du calcul des équipollences permet alors à l'auteur de proposer une écriture symbolique de l'équipollence générale :

$$OA_1^{(p)} = \mu^p[OA_1(1 - \lambda OA_1)^p]$$

où il convient de « traiter les indices comme des exposants, à l'intérieur des crochets, et de transformer les exposants de OA_1 en indices »[451].

Si nous suivons les instructions de Laisant, nous avons donc par exemple :

$$OA_1''' = OA_1^{(3)} = \mu^3[OA_1(1 - \lambda OA_1)^3]$$
$$= \mu^3[OA_1(1 - 3\lambda OA_1 + 3\lambda^2 OA_1{}^2 - \lambda^3 OA_1{}^3]$$

---

[449] [Laisant, 1882e], p. 41.
[450] Le triangle PQR permet de construire un polygone régulier à n côtés de centre Q.
[451] [Laisant, 1877c], p. 145.

$$= \mu^3[OA_1 - 3\lambda OA_1^2 + 3\lambda^2 OA_1^3 - \lambda^3 OA_1^4]$$
$$= \mu^3[OA_1 - 3\lambda OA_2 + 3\lambda^2 OA_3 - \lambda^3 OA_4].$$

L'écriture symbolique utilisée ici permet de produire une formule condensée et générale, comme les affectionne Laisant et montre tout le potentiel du calcul des équipollences dans la simplicité de sa pratique.

Le calcul des équipollences permet grâce à la formule « habituelle »[452] d'exprimer l'aire du triangle $OA'_1A'_2$ construit à l'extérieur du polygone en fonction de OA'_1, OA'_2 et leurs conjuguées. Les relations précédemment calculées permettent alors d'exprimer l'aire du même triangle à l'aide des points O, A_1, A_2, A_3. Cette dernière formule peut aussi s'appliquer au triangle $Oa'_1a'_2$ construit à l'intérieur du polygone par simple conjugaison sur les valeurs λ et μ. De là, on obtient une relation entre les aires des polygones $A_1A_2\ldots A_n$ et $A'_1A'_2\ldots A'_n$, ainsi que la somme et la différence des aires des polygones extérieurs et intérieurs $A'_1A'_2\ldots A'_n$ et $a'_1a'_2\ldots a'_n$.

Remarquons que la formule que Laisant qualifie d'« habituelle » permet les calculs d'aires qui sont à la base de ces développements. C'est elle que Laisant semble donc utiliser fréquemment dans la pratique et qu'il mettra en valeur dans son propre traité en la considérant, à la différence de Bellavitis, comme fondamentale. La production d'applications de la méthode des équipollences infléchit donc chez Laisant certains aspects du calcul de Bellavitis.

La suite de l'exposé est l'étude de cas particuliers pour le polygone de départ : principalement, le cas où ce polygone est lui-même un triangle (sont ensuite étudiés les cas d'un quadrilatère quelconque, de l'hexagone, de l'octogone). Nous proposons un exemple de constructions particulières afin de résumer les différents résultats évoqués précédemment et de reprendre le schéma d'exposition de Laisant qui se veut général et donc applicable à n'importe quel polygone de départ[453]. Remarquons que Laisant, par souci de symétrie dans les formules, apporte dans les notations précédentes une modification en notant le point A'_1, A'_3 (nous adoptons par la suite cette convention). Dans le cas où le polygone initial est un triangle et où les points A'_1, A'_2 et A'_3 sont les centres de triangles équilatéraux, c'est-à-dire si

$$\lambda = \varepsilon^{\frac{2\pi}{3}},$$

[452] [Laisant, 1877c], p. 146. Ici l'aire du triangle $OA'_1A'_2$ est

$$\frac{i}{4}(OA'_1 \mathrm{cj} OA_2 - \mathrm{cj} OA'_1 OA'_2).$$

Voir [Laisant, 1874a], p. 43.

[453] L'étude se poursuit par la construction de triangles rectangles isocèles ou de triangles équilatéraux sur les côtés d'un triangle, de triangles équilatéraux sur les côtés d'un quadrilatère, d'un hexagone, ou de triangles rectangles isocèles sur les côtés d'un octogone etc.

la construction inverse n'est pas possible mais la relation

$$OA'_3 + \lambda OA'_1 + \lambda^2 OA'_2 = 0$$

demeure pour tout point O. Si bien que, pour O placé en A'_3, on obtient :

$$A'_2A'_3 + \lambda\ A'_2A'_1 = 0.$$

On retrouve de manière simple le résultat classique affirmant que $A'_1A'_2A'_3$ est équilatéral, c'est-à-dire le théorème de Napoléon[454]. En outre, les puissances de λ sont ici

$$\lambda, -(\lambda + 1) \text{ et } 1,$$

ce qui permet à Laisant d'affirmer que les itérations du processus de construction ne produisent que deux triangles $A_1'A_2'A_3'$ et $A_1''A_2''A_3''$. Cette section se termine par des considérations sur les aires des triangles intérieurs et extérieurs, en applications des résultats généraux évoqués précédemment. Notons cependant l'utilisation du point O comme « celui d'où les trois côtés du triangle sont vus sous le même angle »[455], c'est-à-dire du premier point de Fermat (il est curieux que Laisant, admirateur du géomètre français, n'évoque pas cette grande figure des mathématiques ici). Cet intérêt pour les questions d'aspects d'une figure suivant le point d'observation rejoint notamment une réflexion du même type de l'auteur quelques années plus tard[456]. Laisant calcule donc la somme et la différence des aires des triangles intérieurs $a'_1a'_2a'_3$ et extérieurs $A'_1A'_2A'_3$ obtenant des « formules qui sont soumises, bien entendu, aux conventions habituelles sur les signes des aires, [et qui] correspondent à deux théorèmes facilement exprimable en langage ordinaire »[457]. Le premier résultat donne

$$A'_1A'_2A'_3 + a'_1a'_2a'_3 = A_1A_2A_3.$$

Ce que nous traduisons par

la somme des aires des triangles extérieurs et intérieurs est égale à l'aire du triangle initial.

Le deuxième correspond à une condition sur la différence de ces aires qui caractérise le point O introduit précédemment.

Laisant conclut :

> *Il est clair qu'on pourrait les multiplier autant qu'on le voudrait, et obtenir ainsi des propriétés nombreuses de figures, dont quelques-unes ne seraient sans doute pas faciles à établir par les procédés habituels ; tandis qu'elles sont ici des*

---

454 On peut alors en effet écrire que ou bien que le rapport $A'_2A'_3/A'_2A'_1$ est - λ soit $\varepsilon^{-\frac{\pi}{3}}$.

455 [Laisant, 1877c], p. 149.

456 [Laisant, 1881b], [Laisant, 1882f]. Sur le point de Fermat, on pourra consulter Sortais Yvonne et René, *La géométrie du triangle. Exercices résolus*, Collection formation des enseignants et formation continue, Éd. Hermann, Paris – 1987.

457 Ibid., p. 149.

> *conséquences toutes naturelles du calcul, et parfois même intuitive. Il nous semble que ceci est une preuve de plus de l'utilité et de la fécondité de la méthode des Équipollences.*[458]

L'ensemble de la communication ne comporte en effet aucune figure, comme si la manipulation des équipollences se substituait à toute observation d'un tracé, avec l'avantage que les équipollences elles-mêmes guident le lecteur dans le choix des transformations à opérer. De plus, la moitié de la douzaine de pages de cette communication constitue en des applications à des configurations particulières des quelques résultats généraux énoncés au début : Laisant s'évertue ici à multiplier en grand nombre les illustrations directes d'équipollences particulières pour mieux mettre en valeur le potentiel de généralité des résultats trouvés par la méthode des équipollences.

Prolongements à la communication de 1877 : Laisant et la nouvelle géométrie du triangle

La réflexion de Laisant sur la configuration obtenue par la construction de triangles semblables sur un polygone se poursuit dans la décennie suivant le congrès de 1877. Nous citons pour exemple la solution à la question 72 parue en 1879 dans la *Nouvelle correspondance mathématique* :

> *On a, sur un plan, n points mobiles X_1, X_2, .. X_n, respectivement animés des vitesses X_1V_1, X_2V_2, ... X_nV_n. Pour chacun d'eux, on construit le triangle OAY, directement semblable à OXV, OA étant une droite fixe, de longueur donnée. Pour un point Z, ayant la vitesse ZU, on construit aussi le triangle OAT, directement semblable à OZU. Comment le point Z doit-il être déduit des points X_1, X_2, ...X_n, pour que T soit, à chaque instant, le centre de gravité des points Y_1, Y_2, ...Y_n ?*[459]

Cette question, qui se trouve effectivement à la croisée de préoccupations sur les triangles semblables et la mécanique, trouvera également une réponse dans un article usant des équipollences en cinématique ([Laisant, 1878a]).

L'intervention de 1877 à l'AFAS trouve un autre écho dans la *Nouvelle correspondance mathématique* à l'occasion de la solution que propose Neuberg à la question 573 posée par Césaro ([Neuberg, 1880]). Neuberg en profite pour se remémorer le théorème de Pappus cité précédemment et redémontre, en le généralisant grâce aux coordonnées rectangulaires, le principal résultat de la communication de Laisant en 1877 (celui sur le

[458] [Laisant, 1877], p. 153.
[459] "Solution des questions posées-question 72", *Nouvelle correspondance mathématique*, 5, 1879, p. 211-212. La question est de Laisant lui –même : "Question proposée", *Nouvelle correspondance mathématique*, 2, 1876, p. 65.

centre de gravité du système A_1', A_2', …). Il ignore si le résultat est nouveau et procède de manière opposée à celle de Laisant, qui n'est pas cité[460].

C'est Lemoine qui dans une correspondance à la revue datée de la même année indique l'origine de ces généralisations ([Lemoine, 1880])[461]. Sa lettre reprend une note à un des *Exercices de mathématiques élémentaires* proposés par Neuberg[462]. Lemoine y traite par l'emploi des coordonnées rectangulaires un cas très particulier du problème inverse de l'exposé de 1877 (construction du polygone initial connaissant le polygone A_1'A_2'…). Lemoine reconnaît que le cas général nécessite suivant sa démarche « des calculs plus laborieux »[463] et signale la démonstration de Laisant au congrès de l'AFAS.

Neuberg prend note des remarques de Lemoine dès le premier tome de la revue *Mathesis* en 1881 ([Neuberg, 1881]). Ici, Neuberg explique aussi que Résal ne doit pas avoir connaissance de la généralisation du théorème de Pappus de 1877 (voir [Résal, 1881]). Laisant et Neuberg continuent d'explorer le sujet : le premier communiquera l'année suivante au second un résultat dans l'espace toujours lié au problème posé par Pappus (voir [Laisant, 1882d][464]). Une autre généralisation à l'espace du même théorème sera confiée par Laisant à Neuberg qui la publiera en 1887 ([Neuberg, 1887]). La même année, les travaux de Laisant seront reconnus par Émile Vigarié, autre acteur de la géométrie du triangle dans un article du *Journal de mathématiques élémentaires*[465].

Remarquons que les années 1883-1886 représentent une période plus pauvre en termes de productions mathématiques avec seulement une ou deux parutions par an. L'élection législative de 1885 peut expliquer cela : le député de Nantes se représente cette fois-ci dans la circonscription de la Seine. Parallèlement, ses interventions à l'Assemblée sont nombreuses au sujet des questions militaires particulièrement[466]. À ces responsabilités s'ajoute la direction du journal *La République radicale* qu'il a fondé en 1881 après son départ du *Petit parisien*[467]. L'hebdomadaire lui sert de tribune pour livrer une attaque en règle des différents ministères

[460] [Neuberg, 1880]. À ce sujet voir aussi les premières lignes de Vigarié Emile, "Sur quelques cercles remarquables", *Journal de mathématiques élémentaires*, 3ème série, t. 1, 1887, p. 193-196.
[461] [Lemoine, 1880], Lemoine Émile, "correspondance", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 509-512.
[462] Neuberg J.., "Exercices de mathématiques élémentaires", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 364-366.
[463] [Lemoine, 1880], p. 511.
[464] Voir *Mathesis*, tome 2, 1882, p. 59.
[465] Voir "Sur quelques cercles remarquables" (-2ème partie-, *Journal de mathématiques élémentaires*, 3ème série, t. 1, 1887, p. 193-196).
[466] [Robert, Cougny, 1889], t. III, p. 540-541.
[467] Voir "L'avenir de Lyon", n° 36, *Dernières dépêches*, dimanche 20 avril 1884. En 1888, Laisant relancera le journal *La Presse* avec d'autres députés boulangistes, Naquet en particulier, sous la direction de Laguerre et s'occupera ensuite de la direction de *La sentinelle de Montmartre* en 1889.

Ferry (23 septembre 1880-10 novembre 1881), Gambetta (14 novembre 1881-26 janvier 1882) et Freycinet (30 janvier 1882- 29 juillet 1882), à l'image de son article la « Chambre infâme », qui l'obligera à s'expliquer devant les membres de l'Assemblée dans un climat particulièrement tendu. Laisant occupera ce poste jusqu'en 1884 où il rejoint la direction du *Cri du peuple*.

Quoi qu'il en soit, les deux travaux parus en 1883 n'en prennent que plus d'importance et ce sont à nouveau deux interventions à l'AFAS, dont seule la première se rapporte à la méthode des équipollences. Le 20 août 1883, dans la communication « Sur un système de figures semblables dans un même plan »[468], Laisant reprend le problème posé par Neuberg dans les pages de la revue belge *Mathesis*.

La question est la suivante : ayant construit sur chacun des côtés d'un triangle deux systèmes de triangles semblables entre eux, on obtient deux nouveaux triangles $B_1B_2B_3$ et $C_1C_2C_3$: il est demandé de retrouver le triangle initial $A_1A_2A_3$. Le résultat de la communication de 1877 permet à Laisant de choisir pour origine O le centre de gravité commun des triangles $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ et $A_1A_2A_3$. Il construit ensuite à l'aide de trois équipollences simples un quatrième triangle $D_1D_2D_3$ dont les côtés sont équipollents à B_3C_3, B_1C_1 et B_2C_2 et qui admet aussi O pour centre de gravité. Remarquant que les quadrilatères $A_1A_2B_3C_3$, $A_2A_3B_1C_1$, $A_3A_1B_2C_2$ sont semblables, il écrit plusieurs équipollences, qui combinées d'après les règles du calcul de Bellavitis, le conduisent à la construction de deux triangles XB_3C_3 et YD_1D_2 respectivement directement semblables à OB_1C_1 et OD_2D_3. Laisant obtient la solution du problème en remarquant que les triangles OA_1D_1, OA_2D_2 et OA_3D_3 sont directement semblables à OXY. Si aucune figure n'est utilisée de nouveau, la solution s'opère bien par des constructions de triangles semblables qui sont au cœur du raisonnement de l'auteur.

Laisant se livre ensuite à une généralisation de ce problème en étudiant le cas où les deux systèmes de triangles semblables sont construits, non plus sur les côtés d'un triangle, mais sur une ligne polygonale quelconque $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$. Connaissant les sommets de ces triangles, il s'agit de retrouver ceux de la ligne polygonale d'origine. Grâce à la similitude de n quadrilatères, Laisant pose $2(n-1)$ équipollences pour $n+1$ inconnues (si la ligne n'est pas fermée) $OA_1 = \mathrm{A}_1$, $OA_2, = \mathrm{A}_2$, …, $OA_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1}$. Il en déduit que « le problème n'est pas généralement possible »[469] pour $n > 3$.

---

[468] L'article est de nouveau dépourvu de toute figure et aucune invitation à en tracer une n'apparaît.
[469] [Laisant, 1883a], p. 180.

Avec la communication de 1877, Laisant se fait remarquer de plusieurs contributeurs à la nouvelle géométrie du triangle : Neuberg, Lemoine, Vigarié[470]. Laisant est un des auteurs participant à ce mouvement ; il aborde souvent des problèmes dont l'esprit est proche de celui des débuts de la nouvelle géométrie du triangle. Il s'y intéresse par deux moyens. Le premier est celui des communications aux congrès de l'AFAS où la géométrie du triangle trouve un écho favorable. Citons la contribution de 1877 « Sur quelques propriétés des polygones » ([Laisant, 1877c]), celles de 1887 « Sur l'asymptote de Kiepert »[471] ([Laisant, 1887g]) usant de nouveau de la méthode des équipollences ainsi que « Sur l'inversion d'un système de *n* points; construction de deux points remarquables du plan du triangle »[472] ([Laisant, 1887h]) et enfin celle de 1890 « Propriétés du triangle. Orientation moyenne. Points équisegmentaires » ([Laisant, 1890c]) qui est l'occasion de déterminer l'« orientation moyenne d'un triangle »[473], puis par analogie avec une construction des points de Brocard, de démontrer l'existence de deux points particuliers du triangle appelés « points équisegmentaires »[474]. À ces principales contributions s'ajoutent des articles intitulés « Sur un problème de géométrie » ([Laisant, 18952a]) et « Propriété élémentaire du triangle » parus dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* ([Laisant, 1902a])[475], ou « Remarques sur les bissectrices d'un

[470] [Romera-Lebret, 2009].
[471] Ibid., p. 287-292. Voir aussi Laisant, C.-A., "Notes Mathématiques, Asymptote de l'hyperbole de Kiepert", *Mathesis*, 7, 1887, p. 245.
[472] À partir du problème suivant : « Étant donné sur un plan *n* points qu'on transforme par inversion par rapport à un pôle X, déterminer ce point X de telle sorte qu'il soit le barycentre des points transformés » (AFAS, 1877/1, p. 174). Dans le cas d'un triangle, les deux solutions sont les foyers de la conique inscrite ayant pour centre le barycentre du triangle ([Romera-Lebret, 2009], p. 243).
[473] Pour un triangle ABC, Laisant place le point A_c du segment [AB] et le point A_b du segment [AC] tel que

$$BA_c = CA_b = BC.$$

Il montre à l'aide de la méthode des équipollences que la direction de la droite (A_cA_b) est caractéristique du triangle, indépendante du côté BC choisi pour effectuer la construction. Il montre aussi que cette direction est perpendiculaire à la droite joignant les centres des cercles inscrit et circonscrit, qu'elle est parallèle à la droite dite de Jérabek.
[474] Laisant remarque que pour construire le point de Brocard d'un triangle ABC, on peut tracer les demi-droites AX, BY et CZ telles que les angles BAX, CBY, ACZ soient égaux et choisir la valeur commune de cet angle pour que les trois demi-droites soient concourantes. De la même manière, il se propose de placer trois points A', B', et C' respectivement sur [BC], [CA] et [AB] tels que BA' = CB' = AC' : il montre qu'il existe une valeur de cette mesure qui permet d'avoir les droites AA', BB' et CC' concourantes en un point qu'il appelle « point équisegmentaire » (les points de Brocard étaient appelés avant 1841 points segmentaires [Romera-Lebret, 2009], p. 52). En portant les points A', B' et C' respectivement sur [AC], [BA] et [CB], il obtient un deuxième point de ce type. À l'aide de coordonnées barycentriques, il montre que la droite passant par les deux points équisegmentaires est parallèle à la droite de Jérabek et donc à la direction moyenne du triangle.
[475] Dans un triangle ABC, en notant M le milieu de [BC], H le pied de la hauteur issue de A et A' l'intersection de la bissectrice issue de A avec le côté [BC], Laisant montre par des considérations géométriques que :

$$\frac{MH}{MA'} = k^2$$

avec $k = \frac{AB}{BA'} = \frac{AC}{A'C} = \frac{AB + AC}{BC}$. S'en suivent plusieurs constructions de triangles.
Cette remarque peut être rattachée à un problème que Laisant étudie lors de la séance du 7 avril 1906 (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, série 9, t. VIII, 1906, p. 65-66).

triangle », remarques à visées pédagogiques parues dans *L'Enseignement mathématique* en 1902 ([Laisant, 1902b])[476].

Le deuxième fait par lequel Laisant peut être rattaché à la géométrie du triangle est la place qu'occupe cette géométrie dans ses ouvrages ou ses manuels. Outre la traduction de l'ouvrage de Bellavitis où apparaissent plusieurs questions relatives aux triangles (paragraphes 100 à 112) avec une addition du traducteur, son ouvrage *Théorie et applications des équipollences* ([Laisant, 1887a]) contient un chapitre entier consacré au triangle[477], où l'on retrouve plusieurs objets de cette nouvelle géométrie traités par les barycentres, comme nous l'étudierons plus loin. À la manière de Brocard, une fois de plus, Laisant généralise par exemple la notion d'orthocentre en considérant les droites issues de chaque sommet et formant avec le côté opposé un angle donné θ. Les points d'intersection de ces droites entre-elles forment un triangle directement semblable au triangle initial ABC ; le centre de son cercle circonscrit est l'orthocentre du triangle ABC. Laisant consacre également un volume entier de son *Recueil de problèmes mathématiques* à la nouvelle géométrie du triangle. Le volume a pour titre *Géométrie du triangle à l'usage des classes de mathématiques spéciales* (1896) et participe à la volonté d'introduire des notions de la nouvelle géométrie du triangle dans l'enseignement[478].

Au vue de ces écrits, la participation de Laisant à la nouvelle géométrie du triangle est donc appuyée. Cependant, il convient de nuancer sa place dans la communauté des auteurs sur cette géométrie. Laisant ne renvoie à aucune autre contribution sur le sujet et semble en retrait du mouvement, malgré l'influence qu'a pu avoir Brocard sur certains de ses travaux. Son avis reste d'ailleurs réservé quant à la profusion de travaux portant sur le triangle. Il écrit par exemple en 1898 :

> *Peut-être serait-on en droit de reprocher à cette branche de la Géométrie de s'être un peu égarée à la poursuite des vérités de détails ; mais il est à espérer qu'un jour, prochain peut-être, une sorte de synthèse permettra de donner un corps plus solide à cette doctrine déjà si féconde, et lui apportera ainsi une force nouvelle, destinée à produire des résultats plus complets et plus importants encore.*[479]

La nouvelle géométrie du triangle est l'occasion de mettre à l'épreuve diverses méthodes géométriques parmi les plus récentes, dont celle des équipollences. Dans sa contribution de 1877, Laisant souhaite prouver la généralité, la simplicité et la fécondité du

[476] Voir aussi [Romera-Lebret, 2009], p. 328.
[477] [Romera-Lebret, 2009], p. 364-367.
[478] Nous renvoyons une fois encore à [Romera-Lebret, 2009].
[479] [Laisant, 1898], p. 103.

calcul géométrique. Plus que la figure du triangle, c'est sur la notion de similitude de figures que Laisant insiste en 1877.

IDENTITES ALGEBRIQUES ET PROPRIETES DANS LE PLAN

Laisant, directeur de la partie mathématique de *La Grande Encyclopédie* à partir de 1883, vante dans l'article « Équipollence », l'intérêt et l'élégance des nombreuses applications de cette méthode à la géométrie pure, à l'étude des courbes ou à la mécanique. Et si ces applications sont finalement possibles, c'est parfois grâce à ce principe qui résume l'esprit et la puissance de la méthode des équipollences : « À toute identité algébrique pouvant être considérée comme établissant une propriété d'un système de points en ligne droite correspond une propriété analogue d'un système de points sur un plan laquelle est exprimée par la même identité. »[480]

De cette remarque fondamentale, que Bellavitis qualifie dans sa *Sposizione*, on l'a vu, de « théorème général », Laisant en donne une illustration parfaite dans son intervention du 27 août 1878 au congrès de l'AFAS, « Sur la généralisation de la division harmonique » ([Laisant, 1878b]). Le traducteur de l'ouvrage de Bellavitis propose une généralisation de la division harmonique. Pour quatre points A, B, C, D d'une droite, C et D divisent harmoniquement AB lorsque le birapport est égale à – 1 ce que Laisant écrit en tenant compte de l'orientation des lignes :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}.$$

Cette égalité peut être considérée comme une équipollence qui définit la division harmonique plane pour quatre points quelconques du plan. Nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\text{inc. AC} - \text{inc. CB} = \text{inc. AD} - \text{inc. BD}$$

$$\text{inc. AC} - \text{inc. BC} \pm 180° = \text{angle BDA}$$

$$\text{angle BCA} \pm 180° = \text{angle BDA.}$$

Les angles ACB et ADB sont alors supplémentaires et les quatre points sont sur une même circonférence, C et D de chaque côté de la corde AB (Laisant complète cette propriété par la construction d'une telle configuration).

480 [Berthelot & al., 1885], t. 16, p. 153.

Les propriétés de cette division harmonique plane sont analogues à celle de la division harmonique rapportée à une droite : ainsi si C et D divisent harmoniquement A et B, alors A et B divisent harmoniquement C et D. On dispose également d'une équipollence généralisant la relation dite de Descartes :

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$$

où AB représente bien la moyenne harmonique de AC et AD.
Une fois la notion de division harmonique élargie à quatre points du plan, Laisant procède à une dernière généralisation pour définir la moyenne harmonique OH de n droites OA_1, OA_2, …, OA_n grâce à l'équipollence :

$$\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OA_2}+...+\frac{1}{OA_n}=\frac{n}{OH}$$

et conclut en affirmant que si les points O, A_1, A_2…, A_n sont placés sur un même cercle, le point H appartient également à ce cercle. Cette propriété « intuitive » sera énoncée dans l'ouvrage de 1887 pour des droites affectées de coefficients algébriques. La transformation par inversion (de pôle O) en permet la démonstration[481]. Il faudra d'ailleurs attendre le traité de 1887 pour que Laisant s'intéresse de nouveau à cette "géométrie nouvelle", d'un point de vue essentiellement analytique comme nous le verrons.

QUESTIONS DE CINEMATIQUE

Outre la communication précédente, Laisant expose au congrès de l'AFAS d'août 1878, une étude « sur la cinématique du plan » ([Laisant, 1878c]). La place primordiale accordée à l'Association pour l'avancement des sciences est une nouvelle fois confirmée. En novembre 1878, dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques*, l'article intitulé « Réflexion sur la cinématique du plan » ([Laisant, 1878h]) reprend la communication précédente (c'est à cet article que nous nous référons par la suite). Ce travail, basé sur l'application des équipollences à ce chapitre de la mécanique plane, est à remarquer à plus d'un titre.

Comme il l'a fait un an plus tôt pour ce qui est des quaternions dans sa thèse ([Laisant, 1877a]), Laisant souhaite prouver « l'intérêt qu'il y a lieu d'apporter à l'emploi des méthodes

[481] Chapitre 6 « Quelques questions de géométrie supérieure » ([Laisant, 1887a], p. 163).

dites nouvelles »[482] à ce chapitre de la mécanique rationnelle. Surtout, il poursuit et approfondit une réflexion sur la cinématique déjà très présente dans sa thèse, et qui se poursuivra jusqu'à l'écriture de sa *Mathématique, Philosophie, Enseignement* en 1898. Nous commentons brièvement ses idées sur la question à partir du préliminaire de l'article de 1878.

En 1878, Laisant place précisément la cinématique en premier lieu des chapitres de la mécanique rationnelle qu'il convient d'étudier : « Il est généralement admis désormais que la Cinématique est une branche spéciale de la Mécanique rationnelle, qui peut et doit être étudiée préalablement aux autres. »[483] Loin d'être détachée de la mathématique pure, la « Cinématique a tous les caractères de la Géométrie, avec l'addition de l'idée du temps ; et il se trouve bien souvent qu'elle peut rendre à la géométrie elle-même d'importants services »[484]. La cinématique peut donc étudier les déplacements indépendamment de leurs causes, c'est-à-dire des forces à l'œuvre. C'est la conception initiée par André-Marie Ampère[485] au début du siècle et qui rompt avec la vision de D'Alembert et Lagrange où mouvement et force sont étudiés conjointement[486]. Si Laisant se réfèrera explicitement en 1898 au mathématicien et physicien lyonnais[487], on peut voir dans cette introduction la marque d'un courant qui traverse le XIX^e^ siècle et qui précise les liens entre géométrie et mouvement comme l'explique Mannheim dans son cours à l'École polytechnique : « La Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces ; la Géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps »[488].

En 1898, dans sa *Mathématique, Philosophie, Enseignement*, Laisant replacera la cinématique hors de la mécanique ; plus précisément, exactement entre la géométrie et la mécanique rationnelle en tant qu'un « complément de la première et une préparation à la seconde »[489]. Laisant distinguera comme Mannheim la cinématique de la géométrie cinématique où l'idée de temps est absente : « La géométrie en elle-même exige en maintes circonstances qu'on fasse intervenir l'étude du déplacement d'une figure. [...] C'est principalement à M. Mannheim que revient l'honneur d'en avoir fait l'objet d'un chapitre à part, sous le nom de « Géométrie cinématique » »[490].

[482] [Laisant, 1878i], p. 482. Ou encore « l'intérêt qu'il peut y avoir à appliquer fort souvent aux questions de cinématique le calcul des quantités géométriques » ([Laisant, 1878c], p. 81).
[483] [Laisant, 1878i], p. 481.
[484] Ibid.
[485] [Ampère, 1834], Ampère André-Marie, *Essai sur la philosophie des sciences*, Bachelier, 1834 t. 1, p. 51.
[486] [Bkouche et Delattre, 1991].
[487] [Laisant, 1898a], p. 127.
[488] [Mannheim, 1880], leçons 13 et 14, p. 155-163. Voir aussi [Bkouche et Delattre, 1991], p. 140.
[489] [Laisant, 1898a], p. 128. Il voit en la cinématique « une introduction indispensable » à la mécanique ([Laisant, 1898], p. 127).
[490] [Laisant, 1898a], p. 101.

Pour le mémoire de 1878, l'auteur propose ensuite de scinder nettement cette cinématique entre cinématique plane et cinématique de l'espace : « Dès lors il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un certain intérêt à procéder en Cinématique, comme on le fait en Géométrie, en commençant par l'étude des mouvements qui s'accomplissent dans un seul plan, avant de s'appliquer à ceux qui s'effectuent dans l'espace »[491]. Dans un premier temps, l'étude plus simple des mouvements dans le plan, est suffisante, d'un point de vue empirique, pour le constructeur, le « praticien », confrontés à des mécanismes reposant sur des translations dans des plans parallèles ou des rotations suivants des axes parallèles. Mais c'est surtout la différence des procédés employés qui impose ce distinguo. L'emploi « des méthodes du calcul géométrique, dont l'application est si souvent féconde et élégante, et qui commencent à être employées dans divers pays étrangers, notamment en Angleterre et aux États-Unis » [492] mène à une telle distinction, bien plus que les inconvénients liés à la généralisation des théorèmes d'analyse du plan à l'espace. C'est que les quaternions sont essentiellement réservés à l'étude des mouvements de l'espace et la méthode des équipollences au traitement des mouvements plans. La première présente des difficultés propres (la non-commutativité) ; la seconde emploie des règles qui « sont identiquement les mêmes que celles de l'Algèbre. La classification de la cinématique en deux grandes branches, plan et espace, se trouve tout naturellement indiquée. » [493] Remarquons que, dans l'œuvre de Laisant, l'étude de la cinématique dans l'espace, i.e. la première partie de la thèse de 1877, précède celle de la cinématique du plan dans le présent article. Si cet écrit ne se veut pas être un traité, l'auteur de l'article "Mécanique" de *La Grande Encyclopédie*[494] veut cependant y montrer les bénéfices à tirer de l'utilisation de la méthode des équipollences, avec cette remarque que la méthode de Bellavitis y est prédominante mais pas exclusive :

> *les méthodes devant être, à mon avis, en Mathématiques, ce que sont les outils dans un atelier, l'outil doit varier suivant le travail qu'on se propose, si l'on veut que ce travail soit exécuté le mieux possible. L'ouvrier habile est celui qui non-seulement sait manier son outil, mais qui sait aussi le choisir avec discernement, au lieu d'employer constamment le même.* [495]

La méthode des équipollences permet ensuite à Laisant d'écrire de manière concise et complète le mouvement d'un point en fonction du temps. Nous allons voir qu'elle l'autorise également la manipulation de la notion d'accélérations d'ordre quelconque et qu'elle permet

[491] [Laisant, 1878i], p. 481. Dans son intervention à l'AFAS, Laisant ajoute « C'est ce qui se fait, du reste, dans plusieurs universités étrangères » ([Laisant, 1878c], p. 81).
[492] Op.cit., p. 482.
[493] Op.cit. Séparation sur laquelle ne semble pas revenir Laisant en 1898.
[494] [Berthelot & al., 1885], t. 23, p. 484-486.
[495] [Laisant, 1878i], p. 483.

de combiner cette notion à la caractérisation du mouvement en termes d'aires de différents triangles liés à ces accélérations (l'expression de ces aires s'obtient une nouvelle fois avec une équipollence simple). Cet article participe finalement à la réflexion sur la géométrisation du mouvement qui s'est développée au cours du XIX^{e} siècle, autour des travaux de Chasles ou de Poinsot[496]. Laisant s'approprie ainsi un résultat énoncé la même année par le mathématicien de premier plan Chasles sur le mouvement d'une figure ([Chasles, 1878]). La période est aussi marquée par la publication d'ouvrages traitant de cinématique[497] : ce travail trouve sa place entre celui de Résal (1862) et celui de Mannheim (1880), dont les influences sur l'œuvre mécanique de Laisant sont visibles[498].

Un mouvement plan d'un point X est décrit par l'équipollence OX = $f(t)$, que Laisant choisit d'écrire, selon les notations déjà présentes dans la communication de 1875 ([Laisant, 1875c]), $\mathrm{x} = f(t)$, où t est la variable du temps et f « une fonction géométrique ». La dérivée $f'(t)$ donne alors la vitesse ; la trajectoire plane du point V défini par OV = v est appelée hodographe du mouvement de X, conformément à la notion étudiée dans l'espace pour la thèse de 1877[499]. L'hodographe est de plus, comme nous le verrons, une notion fondamentale de la mécanique chez Laisant.

Comme application directe de la définition de vitesse, Laisant signale brièvement que la méthode des équipollences appliquée à la cinématique embrasse celle de Roberval[500] de tracé de tangentes car elle met en évidence que « le mouvement d'un point X résulte de la composition des mouvements de plusieurs autres points X_1, X_2, X_3, …, c'est-à-dire de l'addition géométrique de OX_1, OX_2, OX_3, … »[501]

Suite à la notion de vitesse, l'auteur propose la construction géométrique et la détermination par le calcul du mouvement du point solution du problème suivant : « Déterminer l'enveloppe de la droite qui joint à chaque instant deux points mobiles »[502].

496 Poinsot Louis, "Théorie nouvelle de la rotation des corps", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, 1851. Cité dans [Bkouche et Delattre, 1991].
497 [Bkouche, 1991].
498 Citons également Gabriel Koenigs, *Leçons de cinématique*, Hermann, paris, 1897.
499 [Laisant, 1877a], p. 8.
500 Gilles Personne de Roberval, "Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes", *Recueil de l'*Académie des sciences, t. VI, 1636.
501 [Laisant, 1879i], p. 484.
502 Op. cit., p. 485.

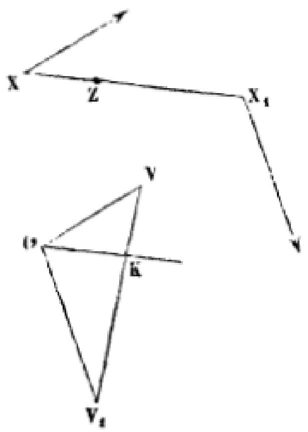


Figure correspondant au problème d'enveloppe[503]

Le point Z solution appartient à la droite XX_1 passant par les deux points en mouvement donc :

$$Z = kX + (1 - k)X_1$$

(caractérisation d'un alignement par les équipollences). Par différentiation,

$$\frac{dZ}{dt} = kV + (1 - k)V_1 + \frac{dk}{dt}(X - X_1).$$

Cette vitesse doit être dirigée suivant la ligne XX_1 car Z est sur l'enveloppe recherchée. Alors :

$$kV + (1 - k)V_1 \parallel X - X_1$$

Notons l'utilisation, très rare, du symbole $\parallel$ de parallélisme. Le point Z est placé sur XX_1 comme le point K, intersection de (VV_1) et de la parallèle à (XX_1), est placé sur (VV_1).

S'appuyant une nouvelle fois sur l'équipollence importante donnant l'aire d'un triangle ABC[504], Laisant détermine l'aire infiniment petite décrite par OX pendant un instant d*t*. En appelant X' la position du point X à l'instant $t + dt$, l'aire de OXX' est :

$$\frac{i}{4}(\text{OX cj. XX'} - \text{cj. OX'. XX'})$$

ou

$$\frac{i}{4}(\text{X.cj. }d\text{X} - \text{cj. X.}d\text{X}).$$

Laisant précise bien que cette aire est représentée « en grandeur *et en signe* »[505] (il souligne ici). Cette expression de l'aire algébrisée d'un triangle marque une réflexion déjà signalée que Laisant ne cessera de poursuivre sur la notion d'aire. Par analogie avec le discours de la partie

[503] [Laisant, 1879i], p. 485.
[504] [Laisant, 1874a], p. 45.
[505] [Laisant, 1879i], p. 485.

cinématique de sa thèse[506], Laisant divise l'expression précédente par *dt* et obtient finalement la vitesse aréolaire,

$$u = \frac{i}{4}\ (\text{X.cj. V} - \text{cj. X.V}).$$

Si Laisant ne donne aucune référence, l'expression est due à Jacques Binet. Jacques Philippe Marie Binet est né à Rennes en 1786. Polytechnicien (X 1804), ingénieur des ponts et chaussée, il devient répétiteur de géométrie descriptive (1808) puis professeur de mécanique en 1815 en remplacement de Poisson. Il participe à la publication de la *Mécanique Céleste* de Lagrange puis remplace Delambre en tant que professeur d'astronomie au Collège de France (1823). Outre ses travaux mécaniques que l'on peut rapprocher de ceux de Laisant, on lui doit également des travaux en théorie des nombres ou sur les fonctions eulériennes et sur ce qui deviendra l'algèbre des matrices. Élu à l'Académie des sciences en 1843, il en devient président l'année de sa mort en 1856.

La notion de vitesse aréolaire est précisée plus loin dans l'article. En notant X le point mobile, XH la vitesse et XK l'accélération, la vitesse aréolaire est l'aire du triangle OXH. Si σ est l'aire décrite par le rayon vecteur, Laisant montre en effet que :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{aire OXH} = \frac{i}{4}\ (\text{X.cj. V} - \text{cj. X.V}).$$

Il poursuit et calcule :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{i}{4}\ (\text{X.cj. W} - \text{cj. X.W}) = \text{aire OXK}.$$

La vitesse aréolaire est mesurée par l'aire du triangle OXH et sa dérivée (par rapport au temps), l'accélération aréolaire, par l'aire de OXK[507] . Cet intérêt pour la notion de vitesse aréolaire tire son origine dans la question 69 posée dans la *Nouvelle correspondance mathématique* par Laisant[508]. À la suite de cette question, le russe V. Liguine, dans une lettre parue dans la même revue[509], rappelle que ce résultat est une conséquence d'un théorème

[506] Voir [Laisant, 1877a], p. 11. Dans l'espace, cette vitesse est cette fois représentée, non plus en grandeur et signe, mais « en grandeur *et en direction* ».
[507] Dans le cas d'une accélération centrale (voir plus loin), cette accélération aréolaire est nulle : l'aire σ croît proportionnellement au temps.
[508] « Théorème. Soient : X un point mobile sur un plan ; XV, sa vitesse ; XJ son accélération ; O un point fixe du plan. L'aire du triangle OXJ mesure, à chaque instant, la dérivée, par rapport au temps, de l'aire du triangle OXV", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, 1876, p. 64.
[509] "Correspondance – Extrait d'une lettre de M. Liguine, professeur à l'université d'Odessa", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, 1876, p. 354-355. V. Liguine (?- 1900) est membre de la SMF depuis 1873, il participera au congrès de l'AFAS ([Décaillot, 2002b], p. 206) et sera un des membres du comité de patronage de *L'enseignement mathématique*.

d'Henri Résal paru dans son *Traité de cinématique pure*[510]. Le professeur à l'Université d'Odessa en profite pour rappeler comment Binet explique la notion de vitesse aréolaire et traduit la question posée par ce que lui nomme accélération aréolaire.

La figure d'Henry Résal (1828-1896) apparaît en effet en filigrane dans cet article, à travers surtout des références à son *Traité de cinématique pure*. Ce polytechnicien (X 1847) se fait remarquer par ses publications au *Journal de l'École polytechnique* dès 1850. Ingénieur des mines à Besançon (1853, il sera nommé plus tard Inspecteur général des Mines), sa thèse (1854) poursuit les travaux de Lamé (problème de l'équilibre élastique d'une enveloppe sphérique). Un an plus tard, il est nommé professeur à la Faculté de Besançon, puis publie son *Traité de cinématique pure* ([Résal, 1862]). Auteur d'un *Traité de mécanique céleste* (1865) et surtout d'un *Traité de mécanique générale* (1872), il devient professeur de mécanique rationnelle à l'École polytechnique en 1872 (après la mort de Delaunay) et succède à Dupin à l'Académie des sciences en 1873 (section mécanique). Soutenu par Lamé et Cauchy, il est, selon l'expression de Maurice Lévy, le « véritable continuateur de Poncelet » et ami de ce dernier.[511]

L'article de Laisant cite plusieurs résultats issus du *Traité* de Résal. La première référence montre que les équipollences permettent de prouver le théorème suivant : « Le demi-accroissement du carré de la vitesse relatif à l'élément de temps, est égal au produit de l'accélération par la projection sur l'accélération du chemin élémentaire »[512]. Laisant exploite également la notion de suraccélération, véritable « innovation » selon Maurice Lévy, présentée dans le même traité (voir plus loin).

L'accélération, « dérivée géométrique de la vitesse »[513], est traitée de manière identique. Remarquons le lien fait avec le rayon de courbure, une des premières notions sur laquelle Laisant a publié. Lorsque la vitesse est donnée par la relation

$$\mathrm{V} = v\varepsilon^{\varphi},$$

[510] [Résal, 1862], p. 77. L'accroissement du moment de la vitesse y est démontré égal à la somme des moments des accélérations résultantes, par rapport au même point et dans le même intervalle de temps (Résal renvoie également à Binet pour le terme de vitesse aréolaire).

[511] Lévy Maurice, "Discours prononcé à l'occasion de la mort de M. Aimé-Henry Résal", lu à l'Académie des sciences pendant la séance du 7 septembre 1896.

[512] [Laisant, 1879i], p. 493 et [Résal, 1862], p. 66.

La preuve de Laisant est la suivante : l'expression du carré de vitesse est :

$$v^2 = \mathrm{V.cj\ V},$$

si bien que par différentiation :

$$\mathrm{d}v^2 = \mathrm{dV.cj\ V + V.cj\ V = W.cj\ V\ d}t + \mathrm{Vd}t\mathrm{.cj\ W}$$

(par linéarité de l'opérateur de conjugaison)

d'où

$$\mathrm{d}v^2 = \mathrm{W.cj\ dX + dX.\ cj.\ W}.$$

L'application des formules relatives à la projection ([Laisant, 1887], p. 46) permet de conclure.

[513] Op.cit., p. 487.

l'accélération est

$$\mathrm{W} = \varepsilon^{\varphi}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho}i\right)$$

où ρ est le rayon de courbure.

Comme nous le verrons pour sa thèse, le cas des mouvements à force centrale fait l'objet d'un traitement particulier. Dans la section « accélérations centrales », l'accélération, en coordonnées polaires, prend la forme

$$\mathrm{W} = w\varepsilon^{\theta},$$

(l'origine étant fixée en l'origine des forces). Par identification avec l'expression générale de l'accélération calculée précédemment, Laisant obtient

$$\frac{d\left(\frac{r^2 d\theta}{dt}\right)}{dt} = 0$$

si bien que $\frac{r^2 d\theta}{dt}$, i.e. le double de la vitesse aréolaire, est constant.

En calculant la dérivée de W par rapport au temps, Laisant étudie le rayon de courbure de l'hodographe : il montre alors que ce « rayon de courbure est proportionnel au produit de l'accélération par le carré du rayon vecteur »[514]. Une conséquence importante est naturellement la loi de l'hodographe circulaire pour un mouvement plan ; loi déjà étudiée pour l'espace dans la thèse de 1877[515]. Ici, si l'accélération « est en raison inverse du carré du rayon vecteur »[516], l'hodographe est circulaire. Laisant mentionne Hamilton et signale que la réciproque est vraie (si, dans un mouvement à force centrale, l'hodographe est circulaire, alors l'accélération vérifie cette propriété). Il reprendra ce théorème en 1898 dans le *Bulletin* de la SMF[517], preuve que Laisant poursuit le travail amorcé en 1877 jusqu'à la fin de la période significative de sa production mathématique. Ici, Laisant remarque plus loin que, dans le cadre des mouvements à accélération centrale, si l'hodographe est circulaire, la trajectoire est une conique dont un des foyers est le centre des accélérations (il en déduit en outre la réciproque de la loi de l'hodographe circulaire).

L'article se poursuit avec l'étude des accélérations d'ordres supérieurs à commencer par la notion de « suraccélération », développée par Résal dans la préface de son *Traité de*

[514] Op.cit., p. 489.
[515] [Laisant, 1877a], p. 20.
[516] Op.cit.
[517] Plus précisément : « si la force est inversement proportionnelle au carré de la distance, l'hodographe est circulaire, et elle n'est circulaire que dans ce cas seulement » [Laisant, 1898d].

cinématique pure, pour étudier les déplacements du troisième ordre. Résal rappelle également que cette notion a été abordée par Transon d'un point de vue plus « métaphysique »[518]. Laisant note w_2 cette suraccélération, dérivée deuxième de la vitesse, et w_p l'accélération d'ordre p quelconque qu'il décompose selon la tangente et la normale à la trajectoire en un point (il établit une relation de récurrence entre les deux composantes des accélérations d'ordre p et $p + 1$). Afin de faciliter l'interprétation géométrique des formules obtenues, l'auteur fait également intervenir le rayon de courbure de la développée d'ordre p de la trajectoire. Ceci permet de substituer les dérivées successives des rayons de courbure dans les calculs qui, remarque-t-il, se compliquent rapidement. De manière similaire, la même décomposition de w_p est effectuée selon la direction du rayon vecteur et sa perpendiculaire. En conclusion de cette partie concernant les accélérations d'ordre quelconque, Laisant généralise les propriétés sur les vitesses et les accélérations aréolaires du début d'article et établit des relations entre les aires de triangles formés à partir de ces accélérations d'ordre quelconque. En notant X la position du point mobile, XU_p l'accélération d'ordre p, Laisant écrit :

$$\text{aire}(XU_nU_p) = \frac{i}{4}\ (w_n.\text{cj. } w_p - \text{cj. } w_n.w_p),$$

puis, dérivant par rapport au temps,

$$\mathscr{D}\text{aire}(XU_nU_p) = \text{aire}(XU_{n+1}\ U_p) + \text{aire}(XU_nU_{p+1}).$$

En particulier, pour $p = n + 1$,

$$\mathscr{D}\text{aire}(XU_nU_{n+1}) = \text{aire}(XU_n\, U_{n+2}),$$

ce qui correspond à la propriété « l'aire du triangle que forment deux accélérations d'ordres consécutifs a pour dérivée l'aire du triangle formé par la première de ces deux accélérations, avec celle qui la suit de deux rangs. »[519].

Terminons par l'analyse que donne Laisant du mouvement d'une figure dans le plan. En introduisant notamment le centre instantané de rotation et en décrivant le mouvement d'une figure par le glissement d'une courbe sur une autre, il reprend en partie un travail de Chasles présenté en août 1829 à la Société philomathique avec ses « Notes sur les propriétés générales du système de deux corps semblables placés d'une manière quelconque dans l'espace et sur le déplacement infiniment petit d'un corps solide libre ». Une partie de ces notes est reprise en 1879 dans les pages du *Bulletin de la Société mathématique de France* sous le titre : « Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes

[518] [Résal, 1862], p. IX.
[519] Op. cit., p. 498.

mécaniques »[520]. Les points communs entre les travaux de Chasles et de Laisant sont nombreux mais les approches sont cependant sensiblement différentes, comme nous allons le voir.

Une droite OX de la figure en mouvement étant amenée en O_1X_1, en choisissant O comme origine et posant $OO_1 = \mathrm{A}$, le fait que la figure subit une translation suivie d'une rotation autour de O_1 s'exprime par l'équipollence

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{A} + \mathrm{X}\varepsilon^{\alpha}.$$

Et le point Ω défini par :

$$\Omega = \frac{\mathrm{A}}{1-\varepsilon^{\alpha}}$$

reste immobile. Laisant en conclut, sans le prouver, que le mouvement revient à une rotation autour de ce point Ω, oubliant de préciser que la rotation doit être effective, c'est-à-dire $\alpha \neq 0$ [2π]. Pour établir cette propriété de façon complète, Chasles quant à lui s'appuie les propriétés des normales à une courbe ([Chasles, 1878], §3). Dans le cas d'un mouvement infiniment petit, Laisant nomme Ω « centre instantané de rotation », terme qui n'apparaît pas dans le mémoire de Chasles mais que ce dernier utilise en d'autres occasions. Il écrit alors :

$$\Omega = i\,\frac{d\mathrm{A}}{\alpha}$$

Laisant poursuit avec le mouvement continu d'une figure plane. À la différence de Chasles, il introduit la notion de temps dans son propos : à l'instant *t*, M est la position du point de la figure qui correspondait initialement avec O. Il établit l'équipollence donnant la courbe des lieux des centres instantanés en déduisant de la dernière expression de Ω que :

$$\mathrm{M}\Omega = \mathrm{i}\,\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda},$$

où λ est l'angle total de rotation de la figure à l'instant *t*. Il en déduit que :

$$\Omega = \mathrm{M} + \mathrm{i}\,\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}.$$

L'auteur étudie ensuite la courbe des lieux des centres instantanés liés à la figure, ramenée à l'origine. Enfin, Laisant prouve que ce mouvement est représenté par le roulement sans glissement de cette deuxième courbe sur la première, résultat également démontré par Chasles. Si les deux hommes considèrent pour cela des points du plan liés à la figure en mouvement et

[520] [Chasles, 1878] et [Bkouche et Delattre, 1991], p. 143-145. Voir aussi Michel Chasles, "Notes sur les propriétés générales du système de deux corps semblables placés d'une manière quelconque dans l'espace, et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre", *Correspondance mathématique et physique*, VII, 1830.

ceux liés au plan fixe, Chasles ne fait aucun usage de méthode analytique, au contraire de Laisant[521].

Toujours dans le cadre du même mouvement et avec les notations précédentes, C.-A. Laisant montre que le point X ayant X_0 pour position initiale et entraîné avec la figure sera placé à l'instant *t* en :

$$X = M + X_0\varepsilon^{\lambda}.$$

La différentiation de cette dernière équipollence permet d'obtenir les équipollences donnant la vitesse, puis l'accélération. En annulant cette dernière, Laisant vérifie enfin que « pour chaque position de la figure, il y a un point U (centre des accélérations) et un seul, dont l'accélération est nulle »[522]. D'autres propriétés suivent[523] où Laisant se réfère à Transon et à Résal.

Le procédé précédent est généralisable et il existe bien un centre des accélérations U_n relatif à l'accélération d'ordre *n* quelconque. Les différentiations successives de l'équipollence précédente donne :

$$\frac{d^n\mathrm{x}}{dt^n} = \frac{d^n\mathrm{M}}{dt^n} + \frac{d^n}{dt^n}\left(\mathrm{x}_0\varepsilon^{\lambda}\right),$$

> *l'accélération d'ordre quelconque d'un point X de la figure se compose de l'accélération du même ordre d'un point M quelconque et de l'accélération que prendrait le point X si la figure tournait effectivement autour du point M avec les vitesses et accélérations angulaires successives du mouvement véritable.*[524]

En choisissant dans chacune des expressions précédentes d'ordre *n*, le centre des accélérations U_n pour point M, Laisant obtient :

$$\frac{d^n\mathrm{x}}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}\left(\mathrm{x}_0\varepsilon^{\lambda}\right)$$

et voit en cela une démonstration simple d'un théorème énoncé de nouveau par Résal dans son *Traité de cinématique pure* :

> *l'accélération d'ordre quelconque n, en chaque point de la figure, est la même que si, la vitesse et les accélérations angulaires successives restant identiques, le mouvement se produisait effectivement autour du centre des accélérations du $n^{ième}$ ordre.*[525]

[521] [Chasles, 1878] (§56). Voir [Bkouche et Delattre, 1991].
[522] Op. cit., p. 502. Si la vitesse instantanée angulaire de rotation $d\lambda/dt$ est constante, on parle alors de *centre géométrique des accélérations*.
[523] Il s'agit notamment des intersections de la perpendiculaire à ΩU en U et des tangentes et normales communes aux courbes roulantes ; ou encore des intersections de la perpendiculaire à MU en U avec l'accélération en M et une perpendiculaire à cette accélération.
[524] [Laisant, 1878i], p. 505.
[525] Op. cit., p. 505. Voir [Résal, 1862], p. 314.

L'emploi de la méthode des équipollences pour l'étude du mouvement d'une figure se poursuit par la suite, comme par exemple en 1882 où le congrès de l'AFAS est l'occasion de présenter des « Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même » ([Laisant, 1882c]). Intéressons nous à cette communication qui mêle géométrie cinématique i.e. étude du mouvement géométrique d'une figure, sans intervention du temps, thème traité à plusieurs reprises par Laisant, et considérations purement cinématiques du même mouvement associé à la notion de temps.

Pour la première partie, ce sont principalement les expressions par des équipollences de l'alignement de points et de la similitude de deux triangles qui sont une nouvelle fois utilisées. C.-A. Laisant considère trois points de la figure X, Y et Z, ayant A, B et C pour positions initiales, qui forment lors de leur déplacement des triangles semblables entre eux : c'est la caractéristique du mouvement exprimée dans le titre de la communication. Il en déduit l'équipollence suivante :

$$\frac{\mathrm{XZ}}{\mathrm{XY}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$

ou celle-ci qui forme la base de l'article :

$$\mathrm{Z} = (1 - \lambda)\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y}$$

avec λ est une constante réelle. Par combinaison avec les équipollences de la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} + x\mathrm{L},$$

(où L est le segment unité dirigé selon la droite XA et x la longueur XA), il obtient une relation de la forme :

$$z\mathrm{N} = (1 - \lambda)x\mathrm{L} + \lambda y\mathrm{M}$$

ce qui implique que les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ soient constants. Ces rapports sont utilisés pour montrer la similitude de la figure XYZU formée à l'aide d'un quatrième point U de la figure, considéré comme barycentre des trois premiers X, Y et Z affectés de certaines masses. Ainsi, l'auteur démontre les deux premières propositions de son exposé :

> *I. - Lorsque trois points d'une figure plane, qui se déplace en restant semblable à elle-même, décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrit aussi une ligne droite.*
> *II. - Dans le mouvement que nous venons d'indiquer, les segments décrits sur les diverses lignes droites, par les divers points, sont proportionnels.*[526]

La notion de temps n'apparaît que pour la fin de l'exposé, proprement cinématique. La différentiation par rapport au temps à divers ordres de la relation exprimant Z donne une

[526] [Laisant, 1882c], p. 106.

nouvelle équipollence qui, combinée avec cette même relation, lui permet en effet d'obtenir la proposition suivante :

> *III. - Une figure plane qui reste semblable à elle-même étant mobile sur un plan, si l'on trace les vitesses (ou les accélérations de même ordre quelconque) des divers points qui la composent, les extrémités de ces vitesses (ou de ces accélérations) formeront une figure semblable à la première.*[527]

QUESTIONS DE TRANSFORMATIONS

On a vu l'intérêt de Laisant pour les transformations lors de ses travaux en géométrie infinitésimale sur les rayons de courbure : l'idée de méthode de recherche effective y apparaît essentielle. Or, les équipollences se prêtent à une expression simple de multiples transformations, comme il l'expliquera dans son ouvrage de 1887. C'est ce que nous nous proposons d'étudier ici en suivant quelques-uns des travaux de Laisant sur le sujet. Nous mettrons aussi en valeur l'intérêt que ce dernier porte à la propriété de conservation des angles par une transformation, alors dite *isogonale*, notion entre autre étudiée par Transon, de nouveau source d'inspiration pour Laisant.

Premier exemple : la transformation exponentielle

Si l'équipollence $\mathrm{x} = f(t)$ représente le mouvement du point X en fonction du temps t, une équipollence de la forme

$$\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$$

correspond à une transformation plane où l'image du point X (extrémité de OX = x) est le point Y. On retrouve cette remarque plusieurs fois dans l'œuvre de Laisant : la première occurrence, bien que moins explicite, correspond à une communication au congrès de l'AFAS en 1879 « Sur la transformation exponentielle » ([Laisant, 1879c]). Un point Z du plan est ici donné par ses coordonnées rectangulaires, ce qui est assez inhabituel, on l'a vu, dans les articles traitant des équipollences,

$$\mathrm{OZ} = z = x + \mathrm{i}y = r\varepsilon^{\theta}.$$

La communication de 1879 concerne alors le point Z' qui lui est associé par la relation :

$$z' = \mathrm{e}^{z}.$$

[527] Op.cit., p107.

Ainsi que l'explique Laisant, cette transformation conserve les angles, comme toutes les transformations du type $z' = f(z)$ où f est dérivable. On a en effet, selon ces notations, pour deux accroissements dz et δz de la variable z,

$$\mathrm{d}z' = f'(z)\mathrm{d}z \text{ et } \delta z' = f'(z)\delta z,$$

d'où

$$\frac{dz'}{\delta z'} = \frac{dz}{\delta z}$$

ce qui implique la conservation des angles [528] : l'opération est donc *isogonale*. Outre des relations reliant les valeurs x, y, x', y', r, θ, r' et θ', l'article pointe l'intérêt de garder à l'esprit que l'image d'une famille de points en progression arithmétique (alignés) par cette transformation est une famille de points en progression géométrique (placés sur une spirale logarithmique)[529]. Toute droite a pour image une spirale logarithmique que Laisant propose donc d'appeler « droite exponentielle » ; il nomme de la même manière « circonférence exponentielle » l'image d'un cercle par la transformation exponentielle et propose le terme de « figure exponentielle » dans le cas général. Ainsi, un point C' appartient à une spirale logarithmique passant par A' et B' si les points A, B, et C ("antécédents" de A', B' et C') sont alignés. Dans ce cas, Laisant écrit en effet l'équipollence "classique" exprimant l'alignement :

$$\mathrm{OC} = (1 - u)\mathrm{OA} + u\mathrm{OB}$$

et rappelle que

$$\mathrm{OA}' = \mathrm{e}^{\mathrm{OA}} \text{ etc.,}$$

si bien que

$$\mathrm{OC}' = \mathrm{OA}'^{1-u} \,.\, \mathrm{OB}^{u}$$

ou :

$$\frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}'} = \left(\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}'}\right)^{u}.$$

En ayant soin de découper le plan en bandes parallèles à l'axe des abscisses et de largeur 2π et de se limiter à une de ces bandes pour assurer l'univocité de l'application réciproque, Laisant peut affirmer qu'« à toute propriété d'une figure plane comprenant des points et des droites correspond une propriété analogue de la figure transformée, qui comprendra des points et des spirales logarithmiques ayant l'origine pour pôle. »[530] Il propose

[528] Il obtient de manière similaire une relation entre la vitesse Z'V' du point Z', image de Z par la transformation exponentielle et la vitesse de ce point, ZV.

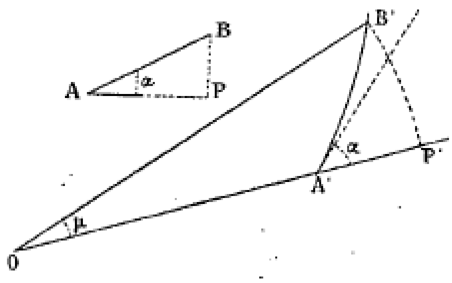
[529] Voir plus bas et [Laisant, 1887a], p. 51. Cette spirale logarithmique admet en outre l'origine pour pôle. Des exemples sont donnés : l'image d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est une droite passant par l'origine, l'image d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est un cercle de centre O etc.

[530] [Laisant, 1879c], p. 209.

donc sous forme de deux colonnes distinctes la traduction entre propriétés d'une figure et les propriétés de la figure exponentielle correspondante. Cette traduction des propriétés est simple dans le cas des propriétés « descriptives », en particulier celle concernant des angles (la transformation conserve les angles). Ainsi, la propriété d'intersection des médianes d'un triangle ABC devient :

> *Soit un triangle ABC formé par trois arcs de spirales logarithmiques de même pôle O. Soit OA_1 la bissectrice de BOC laquelle coupe l'arc BC en A_1 ; soient de même B_1, C_1, deux autres points analogues : les trois arcs de spirales AA_1, BB_1, CC_1 se rencontrent en un même point G.*[531].

La même traduction est plus délicate dans le cas des propriétés métriques, d'où l'introduction de la « grandeur logarithmique » d'un arc de spirale. Si A' et B' sont les images respectives de A et B, Laisant représente le rapport géométrique de deux droites OA' et OB' par l'arc de spirale logarithmique A'B' ayant O pour pôle.



La droite AB et sa transformée exponentielle A'B' [532]

Il pose alors :

$$\frac{\text{gr OB'}}{\text{gr OA'}} = m \text{ et angle A'OB'} = \mu$$

d'où :

$$\frac{\text{OB'}}{\text{OA'}} = m\varepsilon^{\mu}.$$

Mais comme

$$\text{OA'} = e^{\text{OA}} \text{ et OB'} = e^{\text{OB}},$$

il écrit

$$m\varepsilon^{\mu} = e^{\text{AB}}$$

et donc

$$\text{AB} = \ln m + \mu i.$$

---

[531] Ibid.., p. 210.
[532] [Laisant, 1879c], p. 208.

La grandeur logarithmique de l'arc A'B', notée grl A'B', est le module de cette dernière expression. Par la suite, le théorème de Pythagore, par exemple, trouve ainsi son strict équivalent à l'aide de cette grandeur logarithmique.

La communication que nous venons de présenter mêle les notations relatives aux nombres imaginaires et celles relevant de la théorie des équipollences. Ceci permet d'obtenir simplement les relations nécessaires à la mise en place d'outils d'exploitation du lien entre propriétés d'une figure et de son homologue exponentielle. L'idée d'une correspondance entre les propriétés se révèle donc plus nettement à la lecture des deux types de transcriptions, descriptive ou métrique. La présentation choisie par Laisant est significative.

1. — Les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés se rencontrent en un même point G, qui divise au tiers chacune des droites AA_1, BB_1, CC_1.	**1. — Soit un triangle ABC formé par trois arcs de spirales logarithmiques de même pôle O. Soit OA_1 la bissectrice de BOC, laquelle coupe l'arc BC en A_1 ; soient de même B_1, C_1, deux autres points analogues : Les trois arcs de spirales AA_1, BB_1, CC_1 se rencontrent en un même point G ; et OG divise au tiers chacun des angles A_1OA, B_1OB, C_1OC.**
2. — Soit ABC un triangle rectangle en A ; le carré de BC est égal à la somme des carrés de AB et AC.	**2. — Soit ABC un triangle formé par trois arcs de spirales (de même pôle) et rectangle en A ; le carré de la grandeur logarithmique de BC est égal à la somme des carrés des grandeurs logarithmiques de AB et AC.**

Exemple de présentation des propriétés liées à la transformation exponentielle par Laisant[533]

On retrouve la présentation qu'affectionne Gergonne. Comme ce dernier, Laisant fait apparaître une « sorte de géométrie en parties doubles »[534] et distingue propriétés descriptives et relations métriques des figures[535]. Grâce à la notion de grandeur logarithmique, les relations métriques trouvent leurs duals par transformation exponentielle. Les deux hommes ont le même souci de généralité de leur propos qu'offre le principe de dualité. Dualité et transformations de figures sont d'ailleurs intimement liées comme l'explique Chasles dans son *Aperçu historique* : « Mais toutes ces méthodes [ces modes particuliers de transformations] peuvent être remplacées, comme celle de déformation, dont nous avons parlé

533 [Laisant, 18979c], p. 210.

534 [Gergonne, 1826], p. 211. [Barbin, 2002], "Nouveaux problèmes et nouvelles méthodes sur les courbes au 19ème siècle : géométrie projective et système articulé", [Kline, 1990], p. 845. A. Tresse « Géométrie projective » in [Molk, 1904-1916], t.III, vol.2, p. 14-15.

535 [Gergonne, 1826], p. 209. [Chasles, 1837], p. 575-596.

ci-dessus, par un seul et unique principe, plus général et plus étendu que chacune d'elles. Ce principe, qui constitue une doctrine complète de transformations des figures, prend sa source dans un seul théorème de Géométrie, qui nous parait être la raison première de cette propriété inhérente aux formes de l'étendue, la dualité »[536]

Remarquons pour finir que la spirale logarithmique, pendant exponentielle de la droite, est ici mise en avant à plusieurs reprises. Cette position particulière de la spirale logarithmique au sein de la théorie des équipollences, comme celle des triangles semblables, sera nettement précisée dans le manuel que Laisant écrira en 1887[537].

Transformations isogonales

Tournons nous à présent vers deux articles de Laisant tirés du *Bulletin de la Société mathématique de France* de l'année 1887 ([Laisant, 1887b et c]). Ces deux travaux font référence, explicitement ou non, à deux publications de Transon dans les pages des *NAM*, toutes deux en 1869 ([Transon, 1869a et b]). Le point de vue de Transon est cependant sensiblement différent, puisqu'il conserve le cadre du calcul directif développé dans ses contributions aux *NAM* l'an passé ([Transon, 1868b et c]). Dans le premier article, « Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes » ([Transon, 1869a]), comme Laisant l'explique pour l'équipollence $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$, l'auteur interprète une équation comme l'expression d'une transformation d'une ligne dirigée en une autre. L'originalité de l'article de Transon tient en la recherche d'éléments du second d'ordre entre la figure et sa transformée, par l'utilisation des coordonnées rectangulaires (i.e. en écrivant $z = x + iy$)[538], résultats que reprendra donc Laisant 18 années plus tard. De la même manière, Transon, dans « De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes » ([Transon, 1869a]), s'attache à la propriété de conservation des angles lors d'une transformation. Il y explique que le terme d'« isogonale », qui s'applique lorsque l'angle entre deux courbes est égal à celui formé par leurs courbes transformées, est introduit par F. H. Siebeck dans son mémoire paru dans le *Journal* de Crelle en 1858 et remarqué en premier lieu par Hoüel ([Hoüel, 1869b]) puis par Laisant ([Laisant, 1877a]). Transon propose le terme d'« isologique » pour les autres transformations ne possédant pas une telle propriété, terme qui ne sera pas repris par Laisant dans le deuxième article qui nous intéresse ici.

---

[536] [Chasles, 1837], p. 228.
[537] [Laisant, 1887a], p. 203.
[538] « Mais je ne crois pas que jusqu'ici personne se soit appliqué à découvrir les lois relatives à la correspondance entre les éléments du second ordre, c'est-à-dire entre les rayons de courbure de la figure primitive et ceux de ses transformantes. Tel est l'objet de la présente Note. » ([Transon, 1869a], p. 114).

Dans l'article « Des rayons de courbure dans les transformations isogonales » ([Laisant, 1887b]), l'auteur retrouve le thème du calcul de rayons de courbure, abordé plus d'une dizaine d'années auparavant. Si l'approche reste analytique, l'usage de la méthode des équipollences modifie sensiblement la part des calculs analytiques tels que ceux présents dans l'article de 1874 ([Laisant, 1874c]). Ici, son objectif, comme chez Transon, est de rechercher les relations entre le rayon de courbure en un point X d'une courbe et celui au point Y correspondant de la courbe transformée. Il rappelle d'ailleurs que si $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$ ou, « plus généralement,

$$\mathrm{Y} = f(\mathrm{X}) + if_1(\mathrm{X})$$

les fonctions f, f_1 étant des fonctions analytiques dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire ayant pour chaque valeur de X une dérivée bien déterminée »[539] alors la transformation est isogonale. Une démonstration sensiblement différente de celle de la communication de 1879 [Laisant, 1879c] est même proposée, accompagnée d'une figure. En utilisant l'équipollence donnant le rayon de courbure[540], Laisant établit ensuite une relation entre le rayon de courbure ρ en un point X d'une courbe et celui ρ' en son point image Y de la courbe transformée ; cette relation est de la forme :

$$\frac{a}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \sin(\beta + \theta)\,.$$

Il généralise au final deux théorème énoncés par Abel Transon ([Transon, 1869a]), et prouve que :

> *si les centres de courbures R d'une série de courbes passant par un point X sont distribués sur une conique, les centres de courbures S des courbes transformées, passant par un point Y, seront aussi distribués sur une conique.*[541]

Reprenant la formule précédente de Laisant, D'Ocagne généralisera à son tour le résultat précédent dans le *Bulletin* de la SMF[542].

La communication « Sur les transformations non isogonales » ([Laisant, 1887c]) utilise à nouveau l'équipollence donnant l'aire d'un triangle. Elle participe surtout à la généralisation de l'équipollence habituelle décrivant une transformation plane. Dans le cas

---

539 [Laisant, 1887b], p. 39.

540 Pour une courbe (X) donnée, en posant

$$\frac{\mathscr{D}^2\,\mathrm{X}}{\mathscr{D}\mathrm{X}} = l + i\lambda,$$

le rayon de courbure est donné par

$$\frac{i}{\lambda}\mathscr{D}\mathrm{X}.$$

541 [Laisant, 1879c], p. 41. Voir [Transon, 1869a].

542 D'Ocagne Maurice, "Remarques sur les transformations isogonales", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 18,1890, p. 107-108.

général d'une « transformation *quelconque*, c'est-à-dire au moyen d'une construction géométrique bien définie, quelle que soit d'ailleurs cette construction »[543], les angles ne sont généralement pas conservés. Cependant « la nature des constructions indiquées »[544] permet de caractériser l'image d'un point par l'équipollence :

$$\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}, \text{cj. } \mathrm{X}).$$

Par différentiation de cette expression par rapport à X puis cj. X et par combinaison des équipollences ainsi déterminées et de leurs conjuguées, Laisant fait apparaître l'expression « habituelle » de l'aire d'un triangle. Il montre ainsi que pour des déplacements infiniment petits XX_1, XX_2,YY_1, YY_2 on a

$$\mathrm{aire}(YY_1Y_2) = k.\mathrm{aire}(XX_1X_2).$$

Il en conclut que « le rapport des aires infiniment petites autour d'un même point et du point correspondant est donc constant pour le point considéré »[545]. Laisant montre également que « si une ellipse quelconque infiniment petite est décrite autour de X comme centre, elle a pour correspondante une ellipse infiniment petite de centre Y » [546], et ce quelle que soit la transformation plane considérée. L'auteur y voit un lien avec la notion d'indicatrice de courbure d'une surface, qui a été introduite par Dupin, dans ses *Développements de géométrie* (1813)[547].

---

543 [Laisant, 1887c], p. 103.
544 Ibid.., p. 104. Aucune figure de construction particulière n'est fournie avec l'article.
545 [Laisant, 1887c], p. 104. Ce rapport k est égal à la constante algébrique :

$$p \text{ cj. } p - q \text{ cj. } q$$

où

$$p = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{dX} \text{ et } q = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{dcj.\ X}.$$

546 L'équipollence obtenue par différentiation de l'expression

$$\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}, \text{cj. } \mathrm{X})$$

est :

$$\mathrm{dY} = p\mathrm{dX} + q \text{ cj. } \mathrm{dX}.$$

Appliquée au cas particulier où, en notant $\mathrm{X} = r\varepsilon^\theta$,

$$\mathrm{dX} = \mathrm{d}r.\varepsilon^\theta,$$

on obtient tout calcul fait :

$$\mathrm{dY} = \mathrm{d}r\,(\frac{p+q}{2} \cos\theta + i\,\frac{p-q}{2} \sin\theta)$$

ou encore

$$\mathrm{dY} = \mathrm{d}r\,(XA \cos\theta + XB \sin\theta).$$

L'image d'une circonférence infiniment petite est une ellipse infiniment petite (avec correspondance entre rayons perpendiculaires et rayons conjugués).
547 Voir [Dieudonné, 1978], p. 362 et Gergonne, "Géométrie transcendante. Démonstration des principaux théorèmes de M. Dupin sur la courbure des surfaces", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 4, 1813-1814, p. 368-378 (paragraphe 2).
Pierre Charles François Dupin (1784-1873) est polytechnicien (X 1801) et ingénieur du génie maritime. Il entre à l'Académie des sciences dès 1818 et sera titulaire de la chaire de mécanique au Conservatoire des arts et métiers l'année suivante. Il sera successivement député, ministre de la marine (1833), puis sénateur. Influencé par Monge, on lui doit les notions de cyclides de Dupin, ou d'indicatrices en théorie des surfaces.

ÉQUIPOLLENCES VERSUS SYSTEMES DE COORDONNEES

La méthode des équipollences illustre parfois l'opposition vive durant le XIXe siècle entre géométrie synthétique et la géométrie analytique dans sa composante qui repose sur l'usage des coordonnées et donc des règles de l'algèbre et du calcul infinitésimal. Malgré les succès liés à ce calcul analytique, Laisant, comme d'autres, regrettent les calculs fastidieux qui découlent de cette méthode analytique, ainsi que les inconvénients liés au choix du repère utilisé. Il écrit dans son ouvrage de réflexion *La Mathématique. Philosophie-Enseignement* :

> **La Géométrie moderne. –** *Au cours du XIXe siècle, la Géométrie a été l'objet d'une sorte de renaissance dans laquelle notre pays tient une place particulièrement glorieuse. Chasles et Poncelet en sont peut-être les plus illustres représentants. Bien que l'œuvre de Chasles et de ses continuateurs ait eu pour objet principal d'affranchir la science de l'étendue, qui semblait être devenue simple tributaire du calcul, depuis l'invention de la Géométrie analytique et la découverte du calcul infinitésimal, il est permis de se demander si les belles découvertes faites dans cet ordre d'idées auraient pu se produire sans le besoin de généralisation que l'introduction du calcul avait provoqué. Ce n'en fut pas moins une réaction salutaire, une revanche de la raison contre le mécanisme des méthodes, de la clarté contre les procédés qui conduisent au but par des voies souvent obscures.*[548]

Si ses premiers travaux de l'auteur sur le calcul de rayon de courbure font la part belle au calcul infinitésimal, l'idée de transformation, très présente dans la nouvelle géométrie du XIXe siècle, est une caractéristique de l'approche adoptée. L'auteur de ces lignes semble donc favorable à une entraide plus profonde des deux pans de la géométrie. Bellavitis, à travers sa méthode, propose un entrelacement du calcul analytique et des outils de « la géométrie pure », abandonnant tout système de coordonnées particulier mais laissant la possibilité d'en faire usage le cas échéant. Monge ou Lamé proposeront également une fusion des deux approches possibles en géométrie[549].

La méthode des équipollences est fréquemment présentée par Laisant comme un outil analytique précieux pour la résolution de problèmes, non pas en raison de sa supériorité sur les systèmes de coordonnées existants, mais plutôt à cause de sa complémentarité avec ces systèmes. Par sa souplesse d'utilisation, elle permet naturellement une mise en équation fructueuse et indépendante d'un système de coordonnées choisi arbitrairement, comme nous l'avons signalé plus haut. Les deux applications que nous détaillons ci-dessous, placées à plusieurs années d'intervalle, illustrent cette idée omniprésente dans la pensée de Laisant.

548 [Laisant, 1898], p. 97.
549 [Barbin, 2009] et [Belhoste, 1998], [Laurentin, 2007].

Nous choisissons donc d'étudier l'article de 1879 « Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres »[550] dans la mesure où il éclaire les convictions de Laisant sur l'intérêt de la théorie des équipollences par rapport à l'usage inconsidéré des coordonnées cartésiennes, même si l'une ou l'autre des méthodes ne constitue pas une démarche absolue comme il l'affirme lui-même[551]. L'article met également explicitement en relation équipollences et quaternions, qui sont du point de vue de Laisant l'exact prolongement des idées de Bellavitis à l'espace.

Il s'agit du premier article de Laisant paru au sein du bulletin mensuel de la Société philomathique de Paris dont Laisant est membre depuis le 9 février 1878 (son implication dans cette Société est un des sujets du dernier chapitre de ce travail). Au cours de la séance du 14 décembre 1878, il propose son « Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres » ([Laisant, 1879e]). Une fois de plus, il s'agit d'une question de centre de gravité, sujet qui revient régulièrement dans son œuvre, particulièrement dans le cadre de la méthode des équipollences, mais pas uniquement. Par exemple, la communication de 1893 « Centres de gravité de certains systèmes de poids », toujours auprès de la Société philomathique, s'inscrira plutôt dans la géométrie de situation puisqu'il s'agira d'étudier la position du centre de gravité de poids placés sur les heures d'un cadran d'horloge. Ici, il s'agit de mécanique pure, le théorème est le suivant :

« *Soit un point mobile M_1, et*

$$x_1 = a_1 f(t)$$

$$y_1 = b_1\, \varphi(t)$$

$$z_1 = c_1\, \psi\,(t)$$

les équations de son mouvement par rapport à un certain système d'axes de coordonnées (obliques en général).

*Soient en outre M_2, M_3, …, M_p, d'autres points mobiles, dont les mouvements, rapportés à d'*AUTRES SYSTEMES D'AXES QUELCONQUES, *sont respectivement définis par les équations :*

$$x_2 = a_2 f(t)$$

$$y_2 = b_2\, \varphi(t)$$

$$z_2 = c_2\, \psi\,(t)$$

. . . . . .

[550] [Laisant, 1879e] "Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 3, 1879, p. 82-84.
[551] Voir par exemple dans l'article "Mécanique" de *La Grande Encyclopédie*.

$$x_p = a_p f(t)$$
$$y_p = b_p\ \varphi(t)$$
$$z_p = c_p\ \psi\ (t)$$

les fonctions f, φ, ψ, restant constamment les mêmes.

Le mouvement du centre de gravité des points M_1, M_2, ..., M_p, rapporté à un certain système d'axes de coordonnées O'X'Y'Z', sera définie par les équations de même forme :

$$x' = a' f(t)$$
$$y' = b'\ \varphi(t)$$
$$z' = c'\ \psi\ (t).$$ »[552]

Donnons les principaux arguments de la démonstration de Laisant : sur chacun des axes O_iX_i, O_iY_i, O_iZ_i, il choisit trois longueurs respectivement égales à a_i, b_i, c_i. Si bien que « Les mouvements des divers points seront définis par des équipollences (de l'espace) »[553] de la forme :

$$O_iM_i = O_iA_i f(t) + O_iB_i\varphi(t) + O_iC_i\psi(t).$$

Remarquons l'expression employée par Laisant : non seulement, il transforme la forme de l'énoncé en substituant au système de trois coordonnées une seule équipollence, chose que le traducteur de la *Spozitione* a toujours vu comme un bénéfice, mais il utilise naturellement la notion d'équipollence dans l'espace. Les règles d'addition et de multiplication par un réel y sont identiques à celles du plan, comme Bellavitis l'explique dans son ouvrage de 1854 avant d'introduire la multiplication de droites[554].

En multipliant chacune des lignes par la masse m_i correspondante, en remarquant que :

$$O_iM_i = OM_i - OO_i,\ O_iA_i = OA_i - OO_i, \text{ etc}\ldots$$

et en divisant par la somme des masses, Laisant obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{m_1OM_1 + \ldots + m_pOM_p}{\sum m} - \frac{m_1OO_1 + \ldots + m_pOO_p}{\sum m} \\
&= \left(\frac{m_1OA_1 + \ldots + m_pOA_p}{\sum m} - \frac{m_1OO_1 + \ldots + m_pOO_p}{\sum m}\right) f(t) \\
&+ \left(\frac{m_1OB_1 + \ldots + m_pOB_p}{\sum m} - \frac{m_1OO_1 + \ldots + m_pOO_p}{\sum m}\right) \varphi(t) \\
&+ \left(\frac{m_1OC_1 + \ldots + m_pOC_p}{\sum m} - \frac{m_1OO_1 + \ldots + m_pOO_p}{\sum m}\right) \Psi(t)
\end{aligned}$$

[552] [Laisant, 1879e], p. 82.
[553] Ibid.
[554] [Laisant, 1874a], p. 11. Voir aussi *Introduction à l'étude des quaternions* ([Laisant, 1881a]).

ce qu'il écrit par la suite :

$$OZ - OO' = (OA' - OO')f(t) + (OB' - OO')\varphi(t) + (OC' - OO')\psi(t)$$

en notant Z le centre de gravité des points M_i, O' le centre de gravité des points O_i affectés des masses m_i, A' celui de points A_i affectés des masses m_i etc.

Puis :

$$O'Z = O'A'f(t) + O'B'\varphi(t) + O'C'\psi(t)$$

ce qui démontre le résultat, tout en construisant le repère O'X'Y'Z' demandé. L'intégralité de la démonstration est donc dépourvue d'un usage quelconque de coordonnées, alors même que l'énoncé du problème y était rattaché. Laisant énonce pour finir sept corollaires ou applications directes de ce résultat dont nous donnons deux exemples : « Si plusieurs points décrivent des circonférences avec des vitesses angulaires égales, leur centre de gravité décrit une ellipse »[555] ou plus généralement « Si des points mobiles décrivent des courbes semblables, la trajectoire de leur centre de gravité aura, par rapport à un certain système d'axes, une équation de même forme que celle des trajectoires particulières. »[556]

La communication lors de la séance de la Société mathématique de France du 6 juillet 1892 au titre peu évocateur de « Sur un problème de Géométrie »[557] présente elle aussi un certain intérêt. L'ancien problème posé ici, dont Lemoine est à l'origine, permet une fois de plus à son auteur de soumettre la méthode des équipollences à un problème initialement formulé à l'aide d'un système particulier de coordonnées. Le problème est le suivant :

> *Trois points A_1, B_1, C_1 ont respectivement pour coordonnées x, y ; x', y' ; x'', y'' par rapport aux côtés AB, AC ; BC, BA ; CA, CB d'un triangle, pris pour axes de coordonnées.*
> *Connaissant A_1, B_1, C_1, et six valeurs x, y, x', y', x'', y'', trouver le triangle ABC.*[558]

Et la figure suivante est présentée[559] :

[555] [Laisant, 1879e], p. 83.
[556] [Laisant, 1879e], p. 84.
[557] [Laisant, 1892a], "Sur un problème de géométrie", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 65-67.
[558] [Laisant, 1892a], p. 65.
[559] Op.cit.

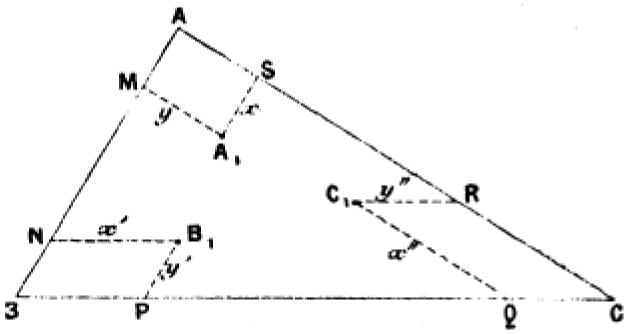


Figure représentative du problème suggéré par Lemoine[560].

Laisant prévient : il s'agit ici de donner une piste de résolution, aucune solution ne présente un caractère de simplicité suffisant, « et surtout en indiquer une transformation assez curieuse »[561]. Le calcul des équipollences et la notion d'inclinaison permettent en effet de s'affranchir des coordonnées. Laisant note α, β, γ les inclinaisons des côtés BC, CA et AB du triangle par rapport à une droite prise pour origine et MN = $w\varepsilon^{\gamma}$ où M et N sont les projetés de A_1 et B_1 sur l'axe AB. Sans le préciser, il traduit l'équipollence

$$A_1M + MN + NB_1 = A_1B_1$$

par

$$x'\varepsilon^{\alpha} + y\varepsilon^{\beta} + w\varepsilon^{\gamma} = A_1B_1$$

et de la même manière il dresse un système de trois équipollences à six inconnues (α, β, γ , *u*, *v*, *w*)[562]. Comme ce système correspond d'une manière condensée à six équations que Laisant précise être algébriques, le problème est déterminé. Cependant, l'auteur indique brièvement un procédé de résolution aboutissant à trois équations en *u*, *v*, *w* du sixième degré, ce qui explique la difficulté du problème. Même si les équipollences ont permis la mise en place d'une démarche de résolution effective, l'essentiel de la communication n'est pas là. En effet, Laisant réinterprète l'équipollence précédente : « le premier membre doit représenter une ligne brisée de trois tronçons partant de A_1 pour aboutir en B_1 ; le premier tronçon a pour longueur donnée *x*' ; un autre a pour longueur *y* ; et il faut que le tronçon qui complète la ligne brisée ait pour direction γ »[563].

[560] [Laisant, 1892a], p. 65.
[561] [Laisant, 1892a], p. 66.
[562] De même, il pose PQ = $u\varepsilon^{\alpha}$ et RS = $v\varepsilon^{\beta}$ et obtient finalement :

$$\begin{cases} x'\varepsilon^{\alpha} + y\varepsilon^{\beta} + w\varepsilon^{\gamma} = A_1B_1 \\ u\varepsilon^{\alpha} + x''\varepsilon^{\beta} + y'\varepsilon^{\gamma} = B_1C_1 \\ y''\varepsilon^{\alpha} + v\varepsilon^{\beta} + x\varepsilon^{\gamma} = C_1A_1 \end{cases}$$

[563] Ibid.

Procédant ainsi pour chaque équipollence du système, le problème s'écrit alors d'une tout autre façon :

> *Étant donnés sur un plan trois segments DE, FG, KH pouvant pivoter chacun autour d'un point fixe A_1, B_1, C_1, qui lui appartient, orienter ces segments de telle sorte que les droites GK, HD, EF soient parallèles à DE, FG, KH respectivement.*[564]

La figure adjointe à l'énoncé[565] montre l'ampleur de la transformation effectuée sur le problème initial de Lemoine :

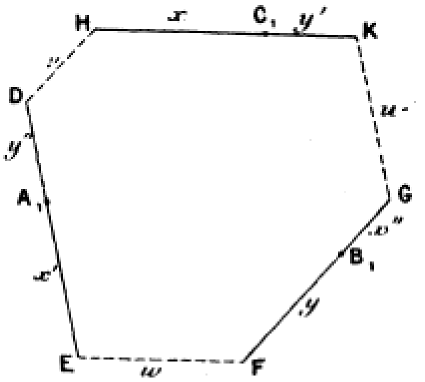


Figure correspondant au nouveau problème[566]

En contournant la contrainte du système de coordonnées de l'énoncé initial, l'auteur a établi une nouvelle formulation de la question originale et atteint son objectif en explicitant le passage d'un problème à un autre à l'aide des équipollences : « Cet énoncé nouveau ne conduirait pas à une solution plus simple, si ce n'est peut-être au point de vue graphique et par tâtonnements. Il est, en tout cas, d'apparence assez différent de la question primitive, bien que le problème soit identiquement le même. »[567]

On retrouve là une préoccupation de nombre des géomètres au cours du XIX^{e} siècle : celle de transformer les énoncés, d'en manipuler les termes pour obtenir des problèmes formulés différemment. On peut penser aux travaux de Poncelet mais surtout à ceux de Gergonne lorsque celui-ci se propose, en échangeant les termes d'un énoncé, de « passer d'un théorème à son corrélatif »[568].

Dans l'article « Divers énoncés d'une propriété unique », paru dans la revue belge *Mathesis* ([Laisant, 1887e]), Laisant explique la possibilité offerte par les équipollences de

---

564 [Laisant, 1892a], p. 67.
565 Ibid.
566 Ibid.
567 Op. cit.
568 [Gergonne, 1826], p. 210.

révéler toute la potentialité d'un énoncé en le traduisant de diverses manières. À chaque transformation, un énoncé différent et donc un point de vue particulier.

L'article ne comporte pas de calcul à proprement parlé puisque Laisant s'appuie sur un résultat de Laguerre, déjà paru dans cette même revue, pour reformuler, comme l'indique le titre, la propriété affirmant que la droite OU correspondant à :

$$u = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

décrit une circonférence pour z réel[569]. En notant :

β = OB, δ = OD, α = BA, γ = DC, u = OU, BA' = zBA et DC' = zDC,

l'expression précédente peut s'écrire :

$$\mathrm{OU} = \frac{\mathrm{BA'+OB}}{\mathrm{DC'+OD}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OC'}} \text{ ou } \frac{\mathrm{OU}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OC'}},$$

si OI est le segment unité. D'où le théorème suivant :

> *Soient BA, DC deux droites quelconques dans un plan, divisées proportionnellement en A', C' ; soit OI une droite fixe. Sur OI on construit le triangle OIU directement semblable à OC'A'. Quand les points A', C' se déplacent, le lieu décrit par le point U est aussi une circonférence.*[570]

De même, l'expression de départ peut s'écrire

$$u = \varepsilon \frac{z - \mu}{z - \nu}$$

ou encore

$$\mathrm{OU} = \mathrm{OE}\frac{\mathrm{OZ} - \mathrm{OM}}{\mathrm{OZ} - \mathrm{ON}}$$

soit, z étant toujours réel (Z parcourant donc la droite d'inclinaison nulle),

$$\frac{\mathrm{OU}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{ZM}}{\mathrm{ZN}}.$$

D'où le deuxième théorème suivant :

> *Soient M, N deux points fixes et OE une droite fixe dans un plan ; Z un point mobile qui parcourt une droite. On construit le triangle OEU directement semblable à ZNM. Le lieu du point U est une circonférence.*[571]

Les deux énoncés précédents, quoique d'aspects distincts, proviennent de la même expression, ce qui fait dire à Laisant : « Ce n'est peut-être pas l'un des moindres avantages du calcul des équipollences, que de permettre ainsi de voir très rapidement plusieurs aspects

---

569 Voir aussi *Mathesis*, t. I, p. 123 et 127.
570 [Laisant, 1887i], p. 65.
571 [Laisant, 1887i], p. 65.

géométriques d'une même question ; c'est une suite du lien continuel qui unit les figures aux opérations du calcul, le calcul n'étant ici que la traduction fidèle et précise des faits géométriques. »[572] C'est bien ce lien intime entre la figure et l'équipollence correspondante, lien non rompu par les diverses transformations autorisées, qui permet diverses expressions d'une même propriété.

DISCUSSIONS SUR LES EQUIPOLLENCES AUX CONGRES DE L'AFAS

Les différents travaux autour de la méthode des équipollences que nous venons de présenter appellent une première observation. Sur la question des choix opérés pour la diffusion de la méthode de Bellavitis, on s'aperçoit que l'AFAS joue un rôle primordial puisque c'est principalement à travers une demi-douzaine de communications à ces congrès que Laisant fait connaître le calcul géométrique. Et si plusieurs travaux tirent leurs origines ou sont complétés par des articles parus dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (autour des polygones, de la cinématique du plan), c'est bien à l'AFAS que l'essentiel des résultats est repris ou annoncé. Ceci concerne l'ensemble de la période qui nous intéresse ici et même au-delà car la communication de 1888 « Sur une propriété des tangentes aux coniques »[573] s'appuie elle-aussi sur les équipollences. Pendant la même période, le *Bulletin de la Société mathématique de France* ne recueille que tardivement, on l'a vu, deux articles où il est question d'équipollences et de transformations [Laisant, 1887b et c] et auxquels on peut adjoindre l'article de 1890 « Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation » ([Laisant, 1890e]).

Cela laisse à penser que les congrès de l'AFAS offrent une tribune plus propice à de tels développements et qu'il y existe, sinon une réflexion sur la méthode, du moins un échange au sujet des équipollences, voire sur les calculs géométriques. Les caractéristiques de l'Association peuvent donner plusieurs raisons à cela. L'entreprise de diffusion à laquelle elle s'est dévoué ne se limite ainsi pas aux seules recherches nationales. La volonté d'une communication internationale de résultats récents[574] et curieux, parfois délaissés par les institutions classiques, explique l'apparition du thème équipollence dans les comptes rendus.

[572] [Laisant, 1887i], p. 65. Laisant donne une troisième traduction de l'expression de départ (considérant le cas où *z* est un imaginaire quelconque) : « La figure inverse d'une droite est une circonférence. »

[573] [Laisant, 1888c]. L'auteur y calcule les équipollences correspondant aux deux tangentes PE et PE' menées par un point P quelconque à une ellipse, une hyperbole, une parabole de foyers F et F' ; puis en déduit des propriétés pour les angles EPF, F'PE' et les rapports de longueurs PF, PF'.

[574] C'est aussi une des préoccupations du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* dirigé par Darboux et Hoüel ([Décaillot, 2002], p. 205-206).

En outre, la possibilité pour les amateurs de mathématiques éloignés des milieux institutionnels de pouvoir s'exprimer par exemple sur les nouveaux calculs qui apparaissent à l'époque, la diversité des intervenants (et donc des points de vue) dans les congrès ont pu nourrir les discussions sur le même ordre d'idées que le calcul des équipollences. Enfin, à la différence des communications plus "conventionnelles" (et d'étendue plus limitée) de l'Académie des sciences par exemple[575], les mathématiques originales pratiquées au sein des sections 1&2 de l'AFAS peuvent laisser place au calcul de Bellavitis, qui se veut simple, accessible. De plus, les préoccupations de diffusion de Laisant à ce sujet cadrent bien avec le projet politique de l'AFAS.[576]

Les comptes rendus des congrès font notamment apparaître une intervention d'un ancien élève de l'École polytechnique, Ernest Laquière, au sujet de la méthode de Bellavitis. Outre la question des équipollences, nous allons voir que ce dernier partage avec Laisant plusieurs centres d'intérêts comme les échiquiers ou la géométrie des quinconces.

Ernest Laquière est né en 1840 à Mirande (Gers). L'emploi modeste de son père (contrôleur principal des contributions) explique le fait qu'on lui attribue une bourse lors de son entrée à l'École polytechnique en 1858, soit un an avant le Nantais (au 42ème rang). Il en sort en 1860 (79ème sur 90), devient capitaine d'artillerie à Rennes puis est nommé à Blidah en Algérie avant de s'établir comme ingénieur civil et administrateur à Sidi-Bel-Abbès (1881, comme Laisant quelques années plus tôt), à Alger (1884) puis Constantine (1887). Il devient membre de la SMF en 1875 et en démissionne en 1896. On lui doit surtout des travaux parus dans le *BSMF* en probabilité ou autour de l'échiquier ([Laquière, 1880]) ou de la géométrie des quinconces ([Laquière, 1879]) ainsi qu'une lettre déjà signalée parue dans les *NAM* sur le théorème de Pappus ([Laquière, 1882]). Outre cette lettre, il réagit à plusieurs contributions de Laisant autour de ce thème cinématique[577].

E. Laquière présente donc en 1881 ses « Observations sur l'origine naturelle et géométrique du calcul des équipollences » au congrès de l'AFAS de 1881[578]. Mais l'ingénieur semble faire fausse route quant à la nature de la méthode de Bellavitis :

> [ce calcul] *que M. Laisant a puissamment contribué à faire connaître en France, a pour avantage essentiel et précieux de fournir une représentation réelle*

[575] Nous n'avons retrouvé que cinq références au terme "équipollences" dans l'ensemble des CRAS sur la période 1834-1920, toutes étant de brèves références bibliographiques.
[576] Voir [Décaillot, 2002].
[577] Laquière E., "Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 10, 1882, p. 131-133. Laquière, "Sur un problème de Géométrie cinématique", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 17, 1889, p. 167-169.
[578] [Laquière, 1881], Laquière Ernest, "Observations sur l'origine naturelles et géométriques du calcul des équipollences", AFAS, 1881, p. 76-83.

> *parfaitement nette, nullement factice d'ailleurs, de la première imaginaire que l'on rencontre en algèbre. Il fournit en même temps au géomètre un instrument fécond, une géométrie analytique plus souple que l'emploi des coordonnées vulgaires, plus directement applicable à la solution des problèmes de géométrie de toute nature, qu'elle permet de dégager de la plupart des outils auxiliaires qu'exige, parfois au détriment de l'élégance, l'emploi de la méthode cartésienne. Les interprétations variées d'une même équipollence font véritablement de ce calcul une sorte de géométrie multiforme, chez laquelle chaque problème particulier trouvera fréquemment le système de coordonnées naturelles qui lui est propre.*[579]

Ainsi, l'auteur ne voit principalement dans l'œuvre de Bellavitis qu'une justification, certes habile et solide, des imaginaires. Malgré la description des avantages de la méthode, on est loin de l'esprit d'un véritable calcul géométrique que défendait l'Italien. Laquière juge que les bases du calcul sont de l'ordre de « l'analyse algébrique », alors qu'il conviendrait qu'elles soient exclusivement géométriques. S'appuyant sur les travaux de Mourey[580], il se propose donc de reprendre les fondements du calcul des équipollences. Ceci pointe aussi les tentations « nationaliste » de chercher les origines françaises au nouveau calcul des équipollences : Laquière insiste sur ces découvertes étrangères qui ont des racines dans l'hexagone.

Son introduction est clairement cinématique : d'un point parcourant dans un sens ou l'autre une courbe, il en déduit la notion de déplacement. La corde joignant le point de départ au point d'arrivée (appelée encore « résultante des chemins successifs ») est caractérisée par sa longueur ρ et sa direction φ. Une « droite géométrique » sera donc désignée par le symbole (ρ, φ) et sera équipollente à une autre dans le cas où ces deux déplacements constituent les deux côtés opposés d'un parallélogramme. La « somme géométrique » ou « composée équipollente » est alors assimilée à des déplacements successifs, plus précisément à la « résultante cinématique », c'est-à-dire au déplacement définitif du mobile. En remarquant qu'une droite est la composée équipollente de ses projections sur les axes, Laquière écrit alors :

$$(\rho, \varphi) \triangleq (x, 0) + (y, \frac{\pi}{2})$$

ou

$$(\rho, \varphi) \triangleq x + \surd y$$

et encore

$$(\rho, \varphi) \triangleq \rho(\cos \varphi + \surd \sin \varphi).$$

[579] [Laquière, 1881], p. 76.

[580] « on peut voir en substance, dans la représentation de l'imaginaire $\sqrt{-1}$ par Mourey, toute la géométrie nouvelle des équipollences. » (p. 77).

Il rapproche ainsi le calcul des équipollences aux observations de Mourey : le « ramun √ », « indice de perpendicularité », est équivalent à $\sqrt{-1}$ pour des raisons géométriques. Le produit de deux droites est ensuite justifié, d'après les observations de Mourey, par le fait qu'il doit être au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité, d'où :

$$(\rho, \varphi).(r, \omega) \mathrel{\underline{\Omega}} (\rho r, \varphi + \omega).$$

La multiplication permet de lier le signe « ramun » à une rotation d'un angle droit et souligne de nouveau la réalité indiscutable de ce signe. La formule

$$\rho\varepsilon^{\varphi} = \rho\, e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

parachève le lien fait avec la théorie de Mourey.

Laisant s'illustre dans la discussion suivant cet exposé pour « insister sur la nature essentiellement géométrique donnée par Bellavitis aux bases de sa théorie des équipollences »[581] et rajoute une observation sur l'inutilité de certaines notations particulières. La multiplicité des symboles pour désigner l'égalité entre deux objets suivant la nature de ces derniers peut être source de confusion. Le président de la section, Darboux, partage cet avis, tout en rappelant que Cauchy, pour des travaux proches de ceux de Bellavitis, n'a pas introduit de nouveaux signes. Ce rapprochement avec les travaux de Cauchy ne semble pas anodin : ainsi, Koenig écrira en 1897 : « l'emploi de la représentation de Cauchy offre, au langage près, la même méthode que le calcul des équipollences de Bellavitis »[582]. Les travaux du grand Cauchy semblent faire bien ombrage au calcul de l'Italien. Le compte rendu précise que Darboux « termine en émettant l'espoir que le calcul des équipollences s'implantera sous peu en France. Au point de vue des applications géométriques et mécaniques, il peut rendre de précieux services ; lui-même il a eu l'occasion d'en faire usage dans diverses études de cinématique »[583]. Nous n'avons pas trouvé de traces de tels travaux chez Darboux. Si la bibliographie de Macfarlane cite l'ouvrage de 1873 *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*, l'emploi de la méthode de Bellavitis n'y est pas évident. Darboux, intéressé par la théorie des équipollences, souhaite-t-il garder une certaine distance avec sa mise en forme ? Loin d'être hostile aux nouvelles méthodes vectorielles, il présidera le comité de réflexion pour la réforme de 1902 dans sa partie mathématique où sera introduit le terme de vecteur comme segment orienté (effaçant ses liens avec la précédente notion de rayon vecteur)[584].

581 "Discussion", *AFAS*, 1881, p. 83.
582 [Koenig, 1897], p. 328.
583 "Discussion", *AFAS*, 1881, p. 83.
584 [Ba, Dorier, 2006], p. 19.

Au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences de 1887, Charles Berdellé[585], quant à lui, poursuit la réflexion intitulée « Arithmétique des directions et des rotations » déjà entamée au congrès de l'AFAS l'année précédente[586]. Son exposé de 1887 est dédié explicitement à Laisant. À la suite de cette communication, ce dernier souligne la supériorité naturelle du système de Bellavitis pour ce qui est des conventions et des notations ou de celui d'Hamilton pour sa pertinence à représenter les faits géométriques de l'espace :

> *les tentatives faites dans cet ordre d'idées, pour représenter les faits géométriques de l'espace, soit par M. Berdellé, soit par ses prédécesseurs, resteront forcément au-dessous des grandes conceptions de Hamilton, parce que celles-ci reposent sur la nature même des choses, tandis que celles-là présentent toujours quelque chose d'artificiel*[587].

Malgré les bases « artificielles » de la présentation de Berdellé, le président des sections 1&2 souligne néanmoins l'originalité de cette démarche méritant d'apparaître dans les pages des comptes rendus. Le désaccord entre Berdellé et Laisant concerne, entre autre la non-réductibilité de $(a + b\mathrm{i})^{m + n\mathrm{i}}$ à la forme $p + q\mathrm{i}$ et sera maintenu l'année suivante où Berdellé poursuit sa réflexion (« Réponse à quelques objections contre l'arithmétique directive »).

De manière générale, Laisant ne manque pas de rappeler l'apport de Bellavitis. Toujours lors du congrès de 1887, après une communication intitulée « Nouvelle théorie des couples et de la composition des forces »[588], il rappelle que l'observation présentée était déjà connue de Bellavitis et apparaît dans la traduction de son *Exposition à la méthode des équipollences*.

Ces exemples tendent à montrer que les congrès de l'Association sont un espace favorable à la présentation et à la réflexion autour de nouvelles formes de géométrie qui n'ont pas encore intégré le débat institutionnel.

---

585 Charles Berdellé (1834-1917) est présenté comme ancien garde général des forêts à l'AFAS, membre de la SMF depuis 1875. Il est l'auteur d'une vingtaine d'interventions à l'AFAS, principalement en arithmétique (numération) et souvent dans une visée pédagogique. Ceci explique sa participation active à *L'enseignement mathématique*.

586 Berdellé Charles, "Arithmétique des directions et des rotations", AFAS, Nancy, 1886/2, p. 103-110 et Berdellé Charles, "Arithmétique des directions et des rotations", AFAS, 1887/2, p. 197-206.

587 AFAS, Toulouse, 1887/1, p. 169.

588 Mantel, "Nouvelle théorie des couples et de la composition des forces", *AFAS*, Nancy, 1887/2, p. 257-264. Le professeur de Delft (Hollande) auteur de cette communication, reprend ici un théorème énoncé par D'Ocagne dans les *NAM* en 1880.

Autre exemple de ce militantisme de Laisant : quand Laisant, dans son discours d'ouverture au congrès de l'AFAS de 1879, rappelle une communication « sur les accroissements géométriques » (AFAS 1876), il n'oublie pas de rappeler l'intérêt de telles recherches, en particulier, précise-t-il, si on prolonge les travaux de Bellavitis ou d'Hamilton ([Laisant, 1879a], p. 84).

Parallèlement à cela, la recherche des termes « équipollences » ou « Bellavitis » dans les pages du *Bulletin de la Société mathématique de France* entre 1872 et 1900 renvoie plusieurs références mais quasiment toutes dues à Laisant lui-même[589]. Quatre autres articles sont à signaler : Liguine, « Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes » (1873) ; Haag [590], « Propriétés générales des surfaces déduites de la méthode des équipollences » (1877) ; G. Fontené, « Sur un système de sept clefs » ([Fontené, 1899a]), ou encore une allusion aux équipollences dans l'article du capitaine de génie Gaston Combebiac , « Sur l'application du calcul des biquaternions à la géométrie plane » (1898). Et si parmi les articles du traducteur de l'*Exposition de la méthode des équipollences*, et certains suscitent des compléments de la part de Laquière ou de l'allemand Victor Schlegel[591], les méthodes utilisées par ces derniers, nous allons en voir un exemple, ne reprennent pas systématiquement les principes du savant de Padoue.

Ainsi l'article de 1882 « Sur certaines propriétés des centres de gravité » ([Laisant, 1882d]) est complété par deux interventions. Laquière reprend la solution de Laisant dans une optique plus mécanique « à la manière de Poinsot » mais en utilisant ponctuellement quelques équipollences[592]. Schlegel, au sujet des deux articles précédents utilisant respectivement quaternions ou équipollences, souligne les similarités dans les démonstrations dues au fait que les méthodes utilisées sont des cas particuliers de la théorie développée dans les *Ausdehnungslehre* de son mentor Grassmann, théorie particulièrement adaptée au problème de mécanique[593]. L'article de 1888 « Note sur un système de deux courbes planes » ([Laisant, 1888a]) est suivi d'une deuxième solution de la part de Laquière qui privilégie la géométrie infinitésimale[594].

---

[589] [Laisant, 1882e], [Laisant, 1887b], [Laisant, 1887c], [Laisant, 1888a], [Laisant, 1890e], [Laisant, 1891b] auxquels s'ajoutent [Laisant, 1880b], [Laisant, 1892b]. La théorie des quaternions n'a pas plus de succès avec cinq références sur la même période.

[590] Haag Paul (1843-1911) : Ancien élève de l'École polytechnique (X 1863), il est répétiteur puis professeur de géométrie descriptive à l'École polytechnique. Il occupa également le poste de professeur d'analyse et de mécanique à l'École nationale des ponts et chaussées. En 1884, il est nommé ingénieur en chef des ponts et chaussés, puis inspecteur générale en 1905. Membre de la SMF depuis 1873, on lui doit surtout des notes en analyse différentielle. Il est l'auteur d'un *Cours de calcul différentiel et intégral* (1893) et d'un *Cours de mécanique rationnelle* (1894).

[591] Victor Schlegel (1843-1905) est allemand, un des premiers diffuseurs des travaux de Grassmann (voir [Crowe, 1994], p. 92).

[592] Laquière, "Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 10, 1882, p. 131-133.

[593] Schlegel renvoie par exemple à Grassmann, "Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre", *Mathematische Annalen*, t. XIII, 1877, p. 222.

[594] Laquière, "Sur un problème de Géométrie cinématique", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 17, 1889, p. 167-169.

II.1.3 La méthode des équipollences selon Laisant ou « l'Algèbre des faits géométriques du plan »[595]

Treize ans après la traduction de l'ouvrage de Bellavitis, Charles-Ange Laisant livre en 1887 sa vision personnelle de la méthode du savant italien : sa *Théorie et applications des équipollences* ([Laisant, 1887a]). L'ouvrage a pour but de poursuivre la diffusion des fondements de la méthode de Bellavitis, mais il peut être également vu comme un hommage à ce dernier, mort sept ans auparavant.

Le député mathématicien propose, plutôt qu'une réédition de la traduction de 1874 qui est épuisée, une réécriture de la *Sposizione del metodo delle equipollenze* « mieux appropriée à nos habitudes françaises »[596]. L'expression est confuse : s'agit-il d'expliciter clairement certaines définitions (celle de segment orienté par exemple), de rattacher le calcul des équipollences aux travaux de prédécesseurs français comme principalement ceux d'Argand ? Quoi qu'il en soit, ce nouvel ouvrage prend appui sur les nombreux articles de Laisant utilisant les équipollences parus dans la période 1874–1887 (voir ce qui précède), travaux qui sont à l'origine des quelques modifications d'écriture, comme l'explique l'auteur.

Toujours convaincu de l'utilité de cette théorie, Laisant regrette qu'elle n'ait pas pénétré l'enseignement en France. Notons que ce regret ne semble pas partagé par tous ses confrères. Ainsi peut-on lire dans la bibliographique consacré à la *Théorie et applications des équipollences* dans les pages du *Bulletin* de Darboux l'avis de Jules Tannery : « ce n'est pas que, à mon avis, cette théorie tout entière, avec son appareil et ses détails, doive pénétrer dans l'enseignement classique »[597]. Alors que Laisant affirme ici : « comme en 1874, je suis persuadé que la méthode des Équipollences peut rendre de très grands services dans un très grand nombre de questions, et qu'elle mérite de passer dans l'enseignement »[598]. Dans une visée pédagogique, il abandonne donc, comme il l'avait fait au congrès de l'AFAS de 1875, deux notations particulières : le signe d'équipollence ≏ et celui du ramun √ (le signe de perpendicularité) respectivement au profit du signe « = » et du symbole « *i* » auquel il donne dorénavant « une signification géométrique par définition même »[599]. Ainsi, « il faut

[595] [Laisant, 1887a], p. 61. Cette expression fait sa première apparition dans la « Préface » de l'*Introduction à la méthode des quaternions* en 1881.
[596] [Laisant, 1887a], p. IV.
[597] "Bibliographie – théorie et application des équipollences", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques,* Sér. 2, 11, 1887, p. 217.
[598] [Laisant, 1887a], p. V.
[599] [Laisant, 1887a], p. VI.

reconnaître que la multiplicité des signes n'est pas sans quelque inconvénient pour celui qui aborde une étude nouvelle »[600].

Les deux premiers chapitres composent la partie théorique qui contient les notions essentielles de la méthode de Bellavitis. Mais, comme nous l'avons vu, les applications, qu'elles soient tirées le plus souvent des travaux de l'Italien ou de ceux de Laisant, sont primordiales pour celui-ci. Il affirme « j'ai surtout cherché à les varier, moins pour les solutions elles-mêmes qu'en vue de l'emploi du calcul de Bellavitis, afin d'en montrer les nombreuses ressources et d'en rendre le maniement familier » [601].

Remarquons la présentation que Laisant donne de la méthode des équipollences, treize ans après avoir traduit l'œuvre de Bellavitis :

> *La méthode des équipollences a pour objet la constitution d'un système de Géométrie analytique qui permette d'exprimer directement les propriétés d'une figure plane par des relations soumises aux règles du Calcul algébriques. Les transformations qu'on fera subir à ces relations donneront ensuite le moyen, soit de déterminer les constructions à effectuer pour obtenir la solution, soit d'énoncer une proposition géométrique en démonstration.*[602]

La différence avec la présentation donnée pour la traduction de 1874[603] est remarquable. Ici, l'auteur insiste sur la méthode elle-même, bien plus que sur les objets qu'elle crée ; sur la facilité avec laquelle une figure est "traduisible" en équipollences bien plus que sur les règles de calculs de ces équipollences. Cette méthode analytique est des plus éclairantes : elle donne le chemin à suivre par le géomètre pour trouver la construction ou la démonstration recherchées.

Ce calcul traite de « droites limitées » (segments de droites) ou de « quantités géométriques », donc de véritables entités et non pas de représentations d'une algèbre comme on a pu le croire. Notons que Laisant donne par rapport à Bellavitis une définition précise de la droite limitée AB : « Une droite limitée qui part de A pour aboutir au point B se désigne par la notation AB. Le point A est son *origine* et le point B son *extrémité.* »[604] Cette notation englobe en effet clairement sa longueur, sa direction et son sens. Ainsi « deux droites égales, parallèles et dirigées dans le même sens, sont dites GEOMETRIQUEMENT EGALES ou EQUIPOLLENTES »[605]. Laisant, pour traduire cette propriété, décide d'étendre la signification

[600] Ibid.
[601] [Laisant, 1887a], p. VI.
[602] [Laisant, 1887a], p. 1.
[603] [Laisant, 1874a], p. V.
[604] [Laisant, 1887a], p. 2.
[605] Op. cit., p. 2. Laisant précise la notion de « longueur » d'une droite (fig. 1). Le terme « module », héritage d'Argand, est aussi mentionné : la notation correspondante est identique à celle de Bellavitis qui utilisait quant à lui le terme « grandeur ».

du signe « = » au-delà de l'algèbre : il s'agira d'une égalité géométrique entre entités géométriques (sans référence aux objets algébriques que l'on peut leur assigner). Remarquons que pour Bellavitis une relation d'équipollence permettait essentiellement de « substituer » une droite à une autre, principalement dans les calculs. Laisant donne à cette notion une interprétation différente puisqu'alors « on pourra transporter une droite dans le plan, parallèlement à elle-même, sans altérer son expression géométrique. »[606] Avec l'idée de « transport », la notion de mouvement est ici plus présente, alors que la substitution dont parle Bellavitis semblait plutôt un moyen d'évacuer le déplacement virtuel d'une droite vers une droite qui lui est équipollente, un peu à la manière du principe d'égalité par superposition des *Éléments* d'Euclide (axiome 4)[607].

Laisant définit ensuite la « relation de parallélisme »[608] représentée par le nouveau symbole $\parallel$. Contrairement à l'ouvrage de 1854, ceci est fait avant d'introduire la multiplication d'une droite par un nombre positif a, c'est-à-dire afin d'expliciter la relation

$$\mathrm{AB} = a\mathrm{IJ}.$$

L'auteur pose la notion de droites opposées caractérisant les droites AB et BA (BA = − AB), relation qui était implicite dans le mémoire de Bellavitis. Laisant étend alors la multiplication à tout nombre a (positif ou négatif). Il précise rapidement que la relation de parallélisme

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{GH}$$

peut s'écrire

$$\mathrm{AB} = x\mathrm{GH}.$$

L'équipollence traduisant l'alignement d'un point M avec deux points A et B,

$$\mathrm{AM} = x\mathrm{AB},$$

est une première application de la multiplication par un nombre, application mise en avant dès les premières pages du traité. Laisant précise alors la notation, utilisée dans ses articles précédents dès 1875, consistant à désigner par un seul symbole une droite : la dernière équipollence s'écrit

$$\mathrm{M} = x\mathrm{B}.$$

Le principe de transport des droites permet alors de définir directement la notion de somme géométrique (fig. 2). Peu de différence avec Bellavitis ici (même référence à la

[606] Op. cit., p. 2. Cette remarque est renouvelée pour préciser le caractère immuable de conjugaison de deux droites transportées dans le plan.

[607] [Bkouche, 1991], p. 187.

[608] « Si deux droites AB, GH sont parallèles, c'est-à-dire si elles ont la même direction, quelles que soient leurs longueurs, cette relation s'exprimera par la notation AB $\parallel$ GH ». Cette notation nous semble apparaître une première fois dans une communication à l'AFAS intitulée « Simple remarque sur les podaires » [Laisant, 1882b].

résultante mécanique de forces), si ce n'est que la somme de plusieurs droites est construite à partir de l'origine de la première alors que l'Italien choisissait un point O quelconque. "La règle du parallélogramme" assure la commutativité de l'opération somme, et laisse entrevoir la possibilité d'une décomposition d'une droite comme somme de deux autres. Enfin, la soustraction de deux droites est définie, comme en arithmétique et en algèbre, à partir d'une somme géométrique nulle. En guise de première étape vers un principe plus général, Laisant en conclut, comme Bellavitis, que les opérations précédentes s'effectuent de manière similaire à celle de l'algèbre sur les équations algébriques. Ceci lui permet de reprendre la règle I du mémoire de 1874, puis de substituer à la droite MN, la différence

$$\mathrm{MO} - \mathrm{NO}$$

pour s'assurer de la véracité d'une équipollence. On retrouve le procédé de vérification énoncé par Bellavitis même si Laisant n'en fera, à notre connaissance, que guère usage[609]. Cette partie sur la somme géométrique s'achève par la remarque suivante, propre à l'ouvrage de 1887 : « La somme des droites équipollentes aux côtés d'un polygone fermé, parcouru dans un même sens, est identiquement nulle »[610]. Ici résonne l'intérêt pour les constructions autour de lignes polygonales (voir [Laisant, 1877c]).

Laisant décide ensuite de présenter immédiatement les équipollences traduisant l'alignement de trois points[611], pour montrer combien ces questions se traitent ici aisément. Par conséquent, le calcul des équipollences donne l'expression de la « moyenne arithmétique » de *n* droites[612] (parfois affectées de coefficients), c'est-à-dire permet de définir le centre des moyennes distances ou « barycentre » de *n* points. La place privilégiée accordée ici à cette dernière notion rejoint les préoccupations antérieures de Laisant, lors des congrès de l'AFAS par exemple[613].

Reprenant le plan de l'*Exposition de la méthode*, Laisant présente l'inclinaison d'une droite, notion restreignant le reste des calculs au plan. Il insiste sur le signe à donner à l'inclinaison de la droite OM, notée inc. OM, qui dépend du sens du mouvement de rotation amenant l'origine des inclinaisons OX sur la droite OM (dans le sens contraire ou non à celui des aiguilles d'une montre, à partir d'une direction pour obtenir l'autre). Sachant que :

---

[609] Il montre ici que AB − CD = CB + AD.

[610] [Laisant, 1887a], p. 8.

[611] Outre l'équipollence signalée plus haut, A, B et M sont alignés si :

$$\mathrm{OM} = (1-x)\mathrm{OA} + x\,\mathrm{OB}$$
$$\mathrm{OM} = u\mathrm{OA} + v\mathrm{OB} \text{ avec } u + v = 1$$
$$p\mathrm{OA} + q\mathrm{OB} + r\mathrm{OM} = 0 \text{ avec } p + q + r = 0.$$

[612] $\mathrm{OM} = \frac{1}{n}(\mathrm{OA}_1 + \mathrm{OA}_2 + \ldots + \mathrm{OA}_n)\cdot$

[613] Voir [Laisant, 1877c].

$$\text{ang. BAC} = \text{inc. AC} - \text{inc. AB},$$

il généralise cette notion d'angle à l'angle formée par deux droites quelconques AB et DE :

$$\text{ang.(AB, DE)} = \text{ang. BAC si DE} = \text{AC}[614].$$

Laisant rappelle ensuite ce qui correspond aux règles II, III et IV de l'ouvrage de 1874 (sur les équipollences binômes ou trinômes), sans que ces propriétés soient particularisées au sein de la théorie comme l'avait fait Bellavitis. Différence majeure avec la présentation de l'Italien, l'auteur conclut le premier chapitre par la notion de progression par différence d'une série de droites A_1, A_2, …A_n. Une suite de n droites forment une progression par différence lorsque la quantité géométrique $\mathrm{A}_{k+1} - \mathrm{A}_k$ (appelée « raison ») est constante. En ramenant les droites A_i à une même origine (i.e. en posant $\mathrm{A}_i = \mathrm{OA}_i$), Laisant remarque que toutes leurs extrémités A_1, A_2, … A_n sont sur une droite passant par l'origine et placées de manière équidistante. De plus, dans la mesure où les opérations nécessaires ici sont celles du premier chapitre (addition, soustraction, multiplication par un réel), les propriétés des suites numériques " arithmétiques" trouvent leurs pendants géométriques à travers des propositions facilement traduisibles. Dans le cas général où $\mathrm{A}_k = B_kC_k$ (les droites ne sont pas ramenées à une même origine), Laisant montre que les milieux de B_kC_{k+1} et C_kB_{k+1}, respectivement G_k et H_k, sont tels que

$$H_kG_k = \frac{1}{2}\mathrm{MN},$$

où MN est la raison de la suite ($\mathrm{MN} = \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1$). La notion de progression par différence parachève donc le chapitre 1. Elle permet d'illustrer les résultats concernant les opérations sur l'ensemble des droites (en terme moderne dans un R-espace vectoriel[615]), elle fournit un premier exemple de manipulation d'équipollences et trouvera dans la progression par quotient un prolongement logique conforme au schéma de présentation du traité.

Le second chapitre de l'ouvrage traite de la multiplication et de la division de droites. Il constitue la deuxième et dernière partie de la présentation théorique de la méthode de Bellavitis. Laisant y pose nettement la définition du produit de deux droites par produit de leur longueur et somme de leur inclinaison[616]. L'auteur donne une preuve de la commutativité et de la distributivité de l'opération. L'analogie entre le calcul des inclinaisons et celui des

---

[614] Et aussi :

$$\text{ang. (DE, AB)} = -\,\text{ang. (AB, DE)}$$

Les précautions d'usage quant aux choix des inclinaisons de droites sont nécessaires pour obtenir ce qu'on appelle "la mesure principale de l'angle".

[615] Cousquer Éliane, "Le calcul vectoriel", dans IREM, *La rigueur et le calcul,* Cedic, 1982.

[616] « Le produit de deux droites OA, OB est une droite OC dont la longueur est égale au produit des longueurs de OA et OB, et dont l'inclinaison est égale à la somme des inclinaisons de OA et OB. » op.cit., p. 21.

logarithmes est soulignée, comme l'avait fait Bellavitis. Rappelons que ce dernier présentait conjointement multiplication et division à travers un exemple d'équipollence traduite en deux égalités concernant les grandeurs et les inclinaisons[617]. De plus, la définition est ici justifiée par l'extension à la géométrie de la règle arithmétique affirmant que le produit OC doit être formé au moyen de la multiplicande OA comme le multiplicateur OB est formé au moyen de l'unité OI, OI est le segment de longueur 1, dirigé suivant l'origine des inclinaisons. Laisant retrouve ici une remarque de Laquière exposée au congrès de l'AFAS de 1881 lors de ses « Observations sur l'origine des équipollences » ([Laquière, 1881]), où est précisé que l'idée de cette justification du produit provient de Mourey.

Alors que Bellavitis ne justifiait pas plus les caractéristiques de la division de deux droites, Laisant, de manière classique, relie le quotient :

$$\mathrm{OC} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$$

à l'équipollence équivalente :

$$\mathrm{OB.OC} = \mathrm{OA}$$

et en déduit les conséquences pour la longueur et l'inclinaison du résultat, précisant que ce « rapport géométrique » de deux droites renferme « la double notion de grandeur et d'inclinaison »[618]. Il propose immédiatement « une interprétation géométrique d'un grand intérêt »[619] : l'égalité de rapports géométriques

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}$$

implique que les triangles OAB et OCD soient (directement) semblables. Cette propriété caractéristique (la réciproque est explicitée) est signalée une nouvelle fois comme « d'une importance capitale et d'une application constante dans la méthode des équipollences »[620], la notion triangle semblable est érigée en composante essentielle de la théorie, comme on l'avait déjà vu à travers les applications proposées par l'auteur les années précédentes.

Le rapport entre deux droites amène assez naturellement, comme en arithmétique, à la notion de « moyenne proportionnelle de deux droites », notion peu abordée dans le mémoire

---

[617] Pour comparaison avec la note ci-dessus, Bellavitis explique que l'équipollence.

$$\mathrm{GH} \bumpeq \frac{\mathrm{AB.CD}}{\mathrm{EF}}$$

équivaut à

$$\text{gr. GH} = \frac{\text{gr.ABgr.CD}}{\text{gr.EF}} \text{ et inc. GH} = \text{inc. AB} + \text{inc. CD} - \text{inc. EF}.$$

[618] [Laisant, 1887a], p. 24.

[619] Op. cit., p. 25.

[620] Op. cit., p. 26.

de 1874. Laisant explique qu'une droite OM est moyenne proportionnelle des droites OA et OB si :

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}}$$

(les triangles OAM et OMB sont semblables). Il décrit la construction des deux points solutions[621] et souligne le parallèle avec la situation décrite par l'égalité :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

L'énoncé du principe fondamental de 1874 sur la possibilité de manipuler les équipollences comme les équations algébriques est complété par cette remarque : « Il y a cependant, à l'avantage de la méthode des équipollences, une différence non pas véritable, mais apparente : c'est qu'on ne voit nulle part s'y introduire la notion d'imaginaire »[622]. Pour preuve, l'extraction de la racine *n*-ième d'une droite conduit à « *n* solutions distinctes, toutes aussi réelles les unes que les autres »[623].

Une fois établie « la concordance absolue entre les règles du calcul algébrique et celles du calcul des droites » [624], Laisant explique qu'une propriété concernant des points d'une droite exprimée par une égalité algébrique restera valable si les quantités algébriques sont remplacées par des segments de droites : on obtiendra ainsi une propriété valable pour des points du plan entier. Ce cheminement, implicite dans la traduction de 1874, nous amène au théorème général de Bellavitis exprimé de manière sensiblement différente chez Laisant :

> *À toute identité algébrique correspond un théorème de géométrie plane, par le seul changement de l'égalité en équipollence.* [625]

Ici Laisant explicite le passage de l'égalité algébrique à la propriété des points du plan. Le théorème fondamental original de Bellavitis permettait plutôt de généraliser une propriété des points d'une droite à des points quelconques du plan. Cette remarque est illustrée par le fait que l'égalité

$$\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} = \frac{b+c}{2} + \frac{d+a}{2}$$

se traduit pour des points alignés mais plus généralement pour un quadrilatère du plan (dont les milieux des côtés forment un parallélogramme).

---

[621] En effet,

gr. OM = ☆(gr. OA gr.OB) et inc. OM = (inc. OA +inc. OB)/2 + k.180°

d'où les deux solutions ayant des directions opposées.

[622] Op. cit., p. 29.

[623] Op. cit. p.29.

[624] Op. cit. p.31.

[625] Op. cit. , p. 32. À comparer avec le théorème général ([Laisant, 1874a], p. 21).

Laisant introduit la notion de « nombres géométriques » dans le cas où le résultat de calculs sur les droites n'est pas traduit en droites effectives. Ainsi le nombre géométrique $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$ peut avoir une certaine grandeur et une certaine inclinaison sans être vu autrement que le rapport de deux droites. C'est selon Laisant une application de la loi d'homogénéité, que nous rattachons à l'œuvre de Viète. C'est en tout cas une nouvelle volonté manifeste de justifier l'introduction de nombre géométrique[626].

Il est un nombre géométrique d'un usage fréquent : celui de grandeur 1 et d'inclinaison +90°, noté i. En choisissant quatre droites "effectives" OA, OB, OC, OD de longueur égale à l'unité et dirigées respectivement suivant les directions OX, OY, OX', OY', Laisant obtient :

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OD}} = i$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OB.OC}}{\mathrm{OA.OB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = i^2$$

mais comme OC = – OA, il vient

$$i^2 = -1.$$

Le symbole i obéit donc aux mêmes règles que $\sqrt{-1}$ (ce qui correspond à la règle VI du mémoire de 1874). Ce n'est qu'après cette propriété qu'apparaît l'usage du signe i pour appliquer la rotation d'un angle droit à une droite OM (par multiplication de cette droite par i), contrairement au mémoire de 1874. Ce procédé est généralisé au produit

$$\mathrm{OM} \times i^n,$$

où n est un entier naturel, puis où n est une mesure "en angle droit de l'angle α" de la rotation appliquée à OM. De là découle le sens à donner au symbole isolé i^p et à la représentation d'une droite OM de longueur r et d'inclinaison α égale à p angles droits :

$$\mathrm{OM} = r\mathrm{i}^p$$

ou, introduisant le nouveau symbole ε défini par l'équipollence

---

626 « Pour toutes les propriétés qui ne dépendant pas du choix de cette unité [de longueur], la loi d'homogénéité doit conserver toute son action, aussi bien ici que dans la Géométrie analytique ordinaire. », op. cit., p. 31. Ainsi OA^2 peut être vue comme une droite en écrivant :

$$\mathrm{OA}^2 = \frac{\mathrm{OA}^2}{\mathrm{OI}}.$$

Sur la loi d'homogénéité, Marie Maximilien, *Histoire des sciences mathématiques et physiques*, BiblioBazaar, 2009, p. 9-19. La volonté de justification tranche avec les affirmations de Bellavitis ([Laisant, 1874a], p. 41).

$$\varepsilon = i^{\frac{2}{\pi}},$$

$$OM = r\, i^{\frac{2}{\pi}\alpha} = r\varepsilon^{\alpha}.$$

On a là une démarche identique à celle suivie par Bellavitis à la différence près que Laisant n'hésite pas à relier ces considérations à la géométrie cartésienne ordinaire. En projetant un point M sur l'origine des inclinaisons en Q (fig. 11), il écrit les équipollences suivantes :

$$OQ = x \text{ et } QM = yi.$$

(x et y étant les coordonnées, positives ou négatives, du point M). Puis,

$$OM = OQ + QM = x + y\, i,$$

« sous cette forme apparaît l'identité entre les quantités géométriques, que nous étudions dans le présent calcul, et les quantités imaginaires de l'Algèbre »[627]. Le lien est donc fait avec les expressions complexes, tout en réaffirmant que les entités géométriques restent l'objet du calcul de Bellavitis puisque les principes géométriques précèdent l'établissement des règles de calcul. Absente chez Bellavitis en 1854, cette décomposition de la droite OM est présente chez Argand, sans l'écriture finale avec les coordonnées[628]. C'est finalement Wessel qui propose une formule similaire à celle de Laisant, ainsi que la formule suivante[629].

En effet, Laisant poursuit : comme

$$x = r\cos\alpha \text{ et } y = r\sin\alpha,$$

il obtient :

$$OM = r(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

et en déduit :

$$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

ce qui permet d'affirmer, par comparaison avec la formule d'Euler, que le symbole ε s'identifie à l'expression analytique e^{i}. [630]

Il reste ensuite l'opération de conjugaison à introduire, comme en 1874, par changement du signe de l'inclinaison. Avant même d'énoncer les règles de manipulation des équipollences correspondantes, elle donne l'occasion d'une application immédiate : l'expression de cos α et sin α en fonction de ε^{α} et $\varepsilon^{-\alpha}$ que l'auteur obtient par calcul de l'expression des conjuguées des équipollences obtenues à la section précédente. Ces mêmes

---

627 [Laisant, 1887a], p. 36.

628 [Argand, 1874], p. 19.

629 Caspar Wessel, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, éd. H. Valentiner et T. N. Thiele, trad. H. G. Zeuthen, 1897. L'ouvrage original date de 1799 mais reste méconnu jusqu'à cette traduction française en 1897. Voir [Crowe, 1994], p. 6-7 et [Brun, 1959].

630 « cette formule nous semble être une des plus remarquables conceptions de l'esprit analytique » ([Laisant, 1887a], p. 37).

équipollences permettent de démontrer les règles numérotées VII, V, VIII, IX, X et XI dans l'ouvrage de 1874, dans l'esprit de Bellavitis mais avec un schéma de démonstration "plus analytique" car reposant sur les égalités susdites. Comme il l'avait annoncé, Laisant étudie le cas des triangles « symétriquement (ou indirectement) semblables ». L'équipollence :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{cj.OA'}{cj.OB'}$$

étant donnée, il montre, par le calcul puis en s'appuyant sur une figure, que les côtés sont de longueurs proportionnelles mais les angles de signes contraires (fig.12). La définition de triangles « symétriquement semblables »[631], d'un usage fréquent dans la théorie des équipollences, est ainsi posée et l'attention à porter sur les figures directement ou symétriquement semblables, déjà formulée chez Bellavitis[632], est réaffirmée ici. Les termes et notions de symétriquement semblable ont-ils pénétré l'ensemble de la communauté mathématique de cette fin XIX^{e} ? La précision que Laisant avait été amené à apporter en 1878 à une question qu'il avait posée dans la *Nouvelle correspondance* apporte une première réponse. Dans une lettre publiée dans cette revue, Laisant précise les définitions de figures directement égales, symétriquement égales, directement semblables et surtout de figures symétriquement semblables. L'idée d'un retournement de la figure, donc d'un mouvement hors du plan, est utilisée pour les figures symétriquement semblables (ou pour celles symétriquement égales). Dans cette notion « empruntée à la méthode des équipollences […,] il y a là une définition simple, répondant à une idée géométrique précise, et qu'il ne semble pas inutile d'introduire dans le langage scientifique. »[633]

Les applications des triangles semblables sont immédiates : la première permet d'établir l'équipollence donnant la projection AP d'une droite AB sur une droite AC (fig. 13). En considérant le point B' symétrique de B par rapport à AC, l'auteur obtient deux triangles symétriques (donc symétriquement semblables) ABC et AB'C et donc une équipollence de la forme précédente. Comme P est le milieu de BB',

$$AP=\frac{1}{2}(AB+AB')=\frac{1}{2}(AB+AC\ \frac{cj.AB}{cj.AC}).$$

Il y a plus, puisqu'en posant :

$$AB = b\varepsilon^{\beta} \text{ et } AC = c\varepsilon^{\gamma},$$

il écrit

[631] Si les longueurs des côtés étaient égales, les triangles « ne seraient superposables qu'après avoir retourné l'un d'entre eux sans dessus dessous » (op. cit, p. 42).
[632] [Laisant, 1874a], p. 30.
[633] "Extrait d'une lettre de M. Laisant", *Nouvelle correspondance*, t. 4, 1878, p. 58.

$$AP = b\cos(\beta - \gamma)\, \varepsilon^{\gamma},$$

et en déduit que

$$\frac{1}{2}(AB.cj.\ AC + AC.cj.\ AB) = gr.AB\ gr.AC\ \cos(CAB).$$

On reconnaît dans le second membre l'expression de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Le premier membre en fournit une nouvelle forme utilisée comme base de la communication au congrès de l'AFAS de 1875 ([Laisant, 1875c]), étude à laquelle renvoie Laisant et qui contient un grand nombre d'énoncés pour les exercices de la fin du chapitre II.

Outre cette première application, l'expression de la projection orthogonale a pour corollaire la formule donnant l'aire d'un triangle : formule utilisée à plusieurs reprises et signalée comme fondamentale par Laisant. Car celui-ci poursuit : l'expression de AP permet de calculer

$$BP = AP - AB = \frac{1}{2}\,\frac{ACcj.AB - ABcj.AB}{cj.AC}.$$

Or le produit des longueurs de la hauteur BP et de la base AC (ou de sa conjuguée) est le double de l'aire s du triangle ABC. Nous pouvons écrire que cette aire est au signe près :

$$BP.cj.\ AC = \frac{1}{2}(AC\ cj.\ AB - AB\ cj.\ AC) = k\mathrm{i},$$

comme l'explique Laisant (k positif ou négatif, ancienne règle XI). En divisant par i le produit, on obtient

$$\pm\, 2s = \frac{i}{2}(AB\ cj.\ AC - AC\ cj.\ AB).$$

Il reste à supprimer le double signe, ce qui amène :

> *à considérer dans l'aire du triangle, non seulement la grandeur, mais le signe, ce qui n'offre que des avantages* […] *En général, l'aire d'un triangle est positive quand on énonce le périmètre en le parcourant dans le sens des rotations positives, c'est-à-dire en ayant l'intérieur du triangle à sa gauche (…) Cette précieuse convention sur les signes des aires est fort avantageuse, comme nous le verrons bientôt. Il est bon de montrer dès à présent qu'elle constitue une conséquence logique et directe des conventions sur les signes des angles.*[634]

Laisant obtient donc

$$s = \frac{i}{4}(ABcj.\ AC - AC\ cj.\ AB) = \frac{i}{4}\ (ABcj.\ BC - BC\ cj.\ AB)$$

[634] Op. cit. p. 46. On obtient donc s = (i/4)(ABcj. AC – AC cj. AB) = (i/4)(ABcj. BC – BC cj. AB) en remarquant que AC = AB + BC et plus loin la formule dite des sinus qui justifie la dernière remarque du passage cité.

(en remarquant que AC = AB + BC) et encore plus loin la formule dite des sinus qui justifie la dernière remarque du passage cité : il est naturel de considérer des aires négatives tout comme on évalue des angles négatifs.

Remarquons brièvement que cette convention sur les signes permet d'exprimer l'aire du polygone ABC…L connaissant ses sommets en remarquant que :

aire OAB + aire OBC + … + aire OLA.

Ce procédé a déjà été remarqué précédemment, il sera à la base d'un article important étudié plus loin sur l'aire des courbes gauches (AFAS, 1899). Plus généralement, l'auteur reviendra sur cette notion d'aire négative à plusieurs reprises notamment en 1895 dans la *Revue de mathématiques spéciales*. Nous retraçons le fil de cette réflexion importante un peu plus loin.

Comme à la fin du premier chapitre, C.-A. Laisant conclut l'exposition de la partie théorique par la présentation des propriétés des progressions par quotient, point d'orgue des notions introduites précédemment. Une suite de droites OA_1, OA_2, .., OA_n forme une progression par quotient si les quotients géométriques

$$\frac{OA_2}{OA_1}, \frac{OA_3}{OA_2}, \ldots, \frac{OA_n}{OA_{n-1}}$$

sont constants (égaux à une même quantité, la « raison »). Laisant remarque que les triangles OA_1A_2, OA_2A_3, …, $OA_{n-1}A_n$ sont alors directement semblables et leurs sommets sont placés sur une ligne brisée s'éloignant ou se rapprochant de l'origine suivant la grandeur de la raison. Les propriétés sur les suites "géométriques" vont pouvoir s'appliquer ici puisque les équipollences se traitent suivant les mêmes règles. Laisant étudie ainsi la somme de n termes,

$$OX = OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n = \frac{OA_n \dfrac{OA_2}{OA_1} - OA_1}{\dfrac{OA_2}{OA_1} - 1},$$

somme qu'il obtient en formant (fig. 15) les triangles OA_nA_{n+1} et OA_1X respectivement directement semblables à OA_1A_2 et à $A_1A_2A_{n+1}$ (il en déduit le barycentre G des points A_1, A_2, .., A_n). Le point limite X' des A_i lorsque la raison a une grandeur inférieure à 1 vérifie

$$OX' = OA_1 \frac{A_1O}{A_1A_2}$$

et est aussi obtenu par la construction du triangle OA_1X' directement semblable à A_1A_2O. Ici, Laisant utilise en fait trois fois le même procédé : une droite équipollente au produit d'une autre par un quotient peut se construire à l'aide de triangles semblables. C'est une nouvelle marque de l'intérêt des triangles semblables pour la transcription d'une équipollence.

Laisant montre enfin que les points A_i sont situés sur une spirale logarithmique. Il pose $OA_1 = a\varepsilon^{\alpha}$ et la raison égale à $l\varepsilon^{\lambda}$, on obtient l'expression d'un terme quelconque que nous notons OA_p :

$$al^p\varepsilon^{\alpha + p\lambda} = r\varepsilon^{\theta}$$ [635]

d'où

$$r = al^p \text{ et } \theta = \alpha + p\lambda$$

si bien que

$$r = al^{\frac{\theta-\alpha}{\lambda}}.$$

Il reconnaît l'équation d'une spirale logarithmique. Mais Laisant insiste : la connaissance *a priori* de cette équation n'est pas indispensable et toutes les propriétés de la spirale de Bernoulli peuvent être retrouvées à l'aide des équipollences. Pourquoi un tel intérêt pour la spirale logarithmique ? « La spirale logarithmique joue un rôle considérable dans la théorie des équipollences ; son importance est à peu près égale à celle du cercle, qui n'en est du reste qu'un cas particulier »[636]. Si la spirale logarithmique apparaît moins fréquemment dans les travaux de Laisant que les triangles semblables, nous avons déjà signalé son importance à ses yeux depuis la communication « Sur la transformation exponentielle » de 1879 ([Laisant, 1879c]).

La remarque faite au sujet de la spirale logarithmique est d'ordre plus général et sera la remarque finale concluant la partie théorie de l'ouvrage. La méthode des équipollences ne s'appuie finalement que sur les notions d'angle, de parallèle et de triangles semblables. Les autres notions géométriques (trigonométrie par exemple) ne sont utilisées ici que pour abréger l'exposé et pourraient être redémontrées à l'aide des équipollences. Les bases géométriques de la méthode sont telles que son emploi est sans contradiction logique avec toutes les questions de géométrie, y compris les plus avancées. Le parallèle entre le calcul des équipollences et le calcul algébrique, supposé préétabli, est une fois de plus réaffirmé[637].

Nous pouvons observer qu'aucune application d'importance n'a été encore présentée ici. L'auteur a plutôt insisté sur les objets, les relations ou les formules caractéristiques de la théorie qui vont pouvoir être utilisés pleinement dans les parties suivantes.

[635] La même formule permet à Laisant d'établir « l'expression de la somme de cosinus d'arc en progression par différence, respectivement multipliés par les termes d'une progression par quotient » (op. cit., p. 52). Cette remarque rejoint l'intérêt de Laisant pour de tels calculs comme le *Calcul du produit de tous les sinus du 1er quadrant de degré en degré* présenté à l'AFAS en 1875 ([Laisant, 1875b]), bien que cette dernière communication n'emploie aucunement la méthode utilisée dans l'ouvrage de 1887.

[636] Op. cit., p. 52.

[637] « l'esprit même de la théorie des équipollences consiste dans l'identité du calcul des droites avec le calcul algébrique, d'où résulte la possibilité d'une méthode analytique systématiquement applicable » (op.cit., p. 54).

DIFFUSER ENCORE ET TOUJOURS PAR LES APPLICATIONS

La plus grande partie de l'ouvrage de 1887 traite des applications de la théorie des équipollences. On l'a vu, c'est une volonté de Laisant, qui se distingue par là de Hoüel, de multiplier les exemples d'utilisation de ce calcul géométrique pour deux raisons principales : en faciliter l'acquisition par le lecteur et en montrer toute la généralité puisque les applications couvrent des domaines variés de la géométrie : géométrie "classique" autour de constructions particulières, dans le cadre du triangle ou d'un polygone par exemple, géométrie supérieure, théorie des courbes, études de transformations et questions de cinématique. Mais cette partie débute, comme dans la traduction de 1874, par un chapitre sur des considérations autour de l'application de la méthode elle-même.

Voulant donner à la méthode de Bellavitis la plus grande généralité, il est naturel d'esquisser la « marche à suivre pour la solution d'une question »[638] et Laisant le fait de façon plus nette que dans la partie « procédés généraux » de l'ouvrage de 1874. Il s'agit de donner à cette « Algèbre des faits géométriques du plan » la généralité de l'algèbre ordinaire. Pourtant l'auteur prévient : « Pas plus qu'en algèbre ordinaire, il n'est donc possible de donner un procédé constant pour obtenir la solution d'une question proposée »[639]. Cependant, pour démontrer une proposition d'ordre géométrique ou déterminer des éléments inconnus d'une configuration, une démarche générale apparaît (à laquelle seule peut-être la théorie des courbes échappe).

La première étape consiste à « mettre le problème en équipollence, en écrivant les relations que fournissent les données »[640]. Ensuite, les transformations opérées sur ces équipollences suivant les règles établies permettent d'obtenir la solution recherchée. Laisant remarque que : « Dans ce travail des transformations d'équipollences, […] les considérations géométriques ne jouent plus aucun rôle. Nous les introduisons au début dans les données ; nous aurons à les examiner dans les résultats, en interprétant ceux-ci ; mais, dans l'intervalle, elles disparaissent, et c'est là un des plus grands avantages de la méthode. »[641] On peut rapprocher cette démarche du traitement du monde réel par les mathématiques tel qu'il est exposé dans *La Mathématique* ([Laisant, 1898a]).

[638] Titre de la première section, chap. 1, partie II, ([Laisant, 1887a], p. 61).
[639] Ibid.
[640] Ibid., p. 61.
[641] Ibid., p. 62. On peut trouver dans cette phase de manipulation des équipollences, complètement détachée de toute représentation géométrique, le principe qui sous-tend l'application systématique de la substitution

$$AB = OB - OA$$

pour vérifier la validité d'une identité, comme le proposait surtout Bellavitis. Il permet de s'affranchir d'un tracé de figure devenu inutile.

Laisant explique que le calcul des équipollences obéit à « des règles de calcul fixes, invariables, qui dispensent l'esprit de toute étude spéciale des conditions de la question, ce qui n'a pas lieu en Géométrie »[642] et ce qui est en revanche le cas dans l'algèbre ordinaire. De plus, la généralité de ces règles permet d'affirmer : « les transformations de calcul se trouveront indépendantes de telle ou telle situation particulière des figures »[643] et le tracé de la figure devient facultatif. Si les figures sont plus présentes, par leur nombre, que dans la traduction de 1874, leur rôle est principalement d'illustrer sommairement les principes fondamentaux, ou d'exposer la configuration initiale d'une application ou encore la construction finale obtenue après calcul. Elles ne sont que rarement mentionnées au moment des transformations des équipollences pour justifier ces transformations. Lorsque Laisant invite le lecteur à voir un résultat, c'est le plus souvent à partir des équipollences formées, et non pas sur la base d'une figure à laquelle le lecteur serait renvoyé au cours du raisonnement.

Cette capacité à la généralité dont la géométrie est à la recherche pour concurrencer l'analyse est caractéristique des géomètres du début du XIX^e^ (Poncelet, Chasles). En particulier, cette remarque de Laisant est à rapprocher de la pensée de Lazare Carnot lorsqu'il ébauche sa théorie des transversales[644]. L'auteur de *Théorie et applications des équipollences* va donc plus loin que son prédécesseur qui reconnaissait essentiellement à sa méthode son aspect naturel, sa concision et son élégance par rapport à l'usage des coordonnées.

Une fois la méthode décrite ci-dessus appliquée, on obtient généralement, à partir de droites connues A, B, C, …, la solution X du problème sous la forme :

$$X = f(A, B, C, \ldots).$$

L'ensemble des opérations intervenant dans la fonction f suggère « le procédé graphique pour obtenir la solution désirée [… qui] le plus souvent, égalera ou même surpassera en simplicité et en élégance ceux que donnerait la Géométrie pure. »[645], d'où la clarté des solutions apportées par l'analyse constituant la méthode de Bellavitis. Il suffit de suivre pas à pas, comme ceci est précisé dans cette partie, cette méthode de découverte.

Dans la méthode exposée, on voit que les manipulations des équipollences occupent une place essentielle : ce sont elles qui "révèlent" la solution à partir des données. Laisant détaille donc les différentes transformations à effectuer sur les calculs : élimination (comme en algèbre ordinaire) lorsque plusieurs inconnues sont employées, utilisation de

---

[642] Ibid., p. 62.
[643] Ibid. p. 62. Laisant poursuit : « au contraire, dans les solutions purement géométriques, il faut particulariser, et […] l'extension au cas le plus général d'une solution trouvée avec une disposition particulière des figures nécessite souvent une discussion délicate et laborieuse ».
[644] [Chemla, 1998].
[645] [Laisant, 1887a], p. 62.

l'équipollence conjuguée lorsqu'on recherche une quantité algébrique ou encore décomposition d'une droite suivant deux directions distinctes (dans ce dernier cas, l'équipollence uAB + vCD = 0 implique $u = 0$ et $v = 0$.). Ces procédés sont mis en œuvre, comme en 1874, pour la résolution d'équipollences "usuelles"[646], puis dans la résolution des questions diverses du deuxième chapitre.

On trouve dans ce deuxième chapitre de la deuxième partie des problèmes d'intersection de droites (les médianes d'un triangle…), d'alignement (les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet). Il s'agit surtout de "demande" de construction de triangles mais Laisant ne reprend qu'une partie des nombreuses constructions présentes dans l'ouvrage de 1874 : citons pour exemple la construction de triangles directement semblables ayant même sommet et connaissant leurs bases ou celle d'un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets sont à distances données d'un point O[647]. Remarquons aussi le problème suivant : « construire le point X d'où l'on voit sous des angles donnés les côtés d'un triangle donné ABC »[648]. Si cette question peut être reliée aux coordonnées angulaires introduites par le Hollandais Schoute et utilisées dans la nouvelle géométrie du triangle[649], elle rejoint aussi les préoccupations d'aspects auxquelles s'intéresse Laisant ponctuellement ([Laisant, 1882e]). L'auteur traite également de la généralisation de l'égalité algébrique

$$b(d-c)+d(c-b)+c(b-d)=0$$

à un quadrilatère quelconque du plan suivant le principe énoncé dans le chapitre I.

Remarquons pour finir une nouvelle forme donnée par Laisant à la condition d'alignement de trois points A, B et C. L'auteur a déjà montré dans le premier chapitre qu'on doit avoir :

$$p\mathrm{A}+q\mathrm{B}+r\mathrm{C}=0$$

en notant comme lui OA = A etc. et avec

$$p+q+r=0.$$

[646] Il s'agit des mêmes équipollences que dans l'ouvrage de Bellavitis (les inconnues sont z, u, x et y)

$$z\varepsilon^{u}\mathrm{AB}=\mathrm{CD},$$
$$x\mathrm{AB}+y\mathrm{CD}=\mathrm{OH},$$
$$\varepsilon^{u}\mathrm{AB}+y\mathrm{CD}=\mathrm{OH}$$

etc. Seule la construction de la droite OX telle que

$$\mathrm{OX}^2+\mathrm{OP.OX}+\mathrm{OQ}^2=0.$$

est une addition personnelle de Laisant. Cette dernière résolution, similaire au calcul que l'on trouve en Algèbre, est accompagnée d'une généralisation des propriétés classiques des équations trinômes.

[647] [Laisant, 1887a], p. 81. Ce problème, comme il est noté en 1874 ([Laisant, 1874a], p. 61), a été précédemment traité par Carnot dans sa *Géométrie de position* (1803, paragraphe 328) et par Lamé dans son *Examens des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (1818, p. 81, il s'agit ici de triangles équilatéraux). Laisant donne de ce problème une solution sensiblement différente de celle de Bellavitis.

[648] [Laisant, 1887a], p. 82.

[649] [Romera-Lebret, 2009], p. 43.

mais alors

$$p \text{ cj. A} + q \text{ cj. B} + r \text{ cj. C} = 0,$$

et il explique que l'existence d'un tel triplet p, q, r nécessite que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{cj\,A} & \mathrm{cj\,B} & \mathrm{cj\,C} \end{vmatrix} = 0.$$

Laisant applique ce symbolisme à l'écriture d'une condition pour que trois droites AA', BB' et CC' soient concourantes et obtient :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A'} & \mathrm{B'} & \mathrm{C'} \\ \mathrm{cj\,A'} & \mathrm{cj\,B'} & \mathrm{cj\,C'} \\ \text{aire OAA'} & \text{aire OBB'} & \text{aire OCC'} \end{vmatrix} = 0$$ [650]

Cette utilisation du déterminant, d'un point de vue formaliste, est remarquable chez Laisant : elle rejoint le souci d'autres écritures symboliques que nous avons déjà rencontrées où les exposants doivent être traités comme des indices ([Laisant, 1877c]). Nous étudierons dans le quatrième chapitre les travaux sur les déterminants. Retenons que l'écriture présentée ici montre, une fois de plus, la souplesse du calcul des équipollences.

Dans cette deuxième partie « applications des équipollences », on trouve un troisième chapitre consacré au triangle[651]. Si Laisant commence par y exposer, à partir de l'équipollence

$$\mathrm{BC} + \mathrm{CA} + \mathrm{AB} = 0$$ [652],

les relations trigonométriques classiques permettant de résoudre un triangle, s'il reprend des exercices déjà présents dans la traduction de 1874 (sur le cercle d'Euler par exemple), c'est le point de vue barycentrique qui est choisi dans une grande partie de ce chapitre. L'auteur y étudie le point d'intersection des médianes, le centre du cercle circonscrit, le point d'intersection des hauteurs etc. : chacun de ces points est vu comme barycentre des sommets du triangle affectés de certains poids. L'auteur traite du centre du cercle circonscrit comme barycentre des centres des cercles inscrit et exinscrit, puis retrouve la relation entre les rayons

[650] Par opération sur ce déterminant, Laisant écrit finalement :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^{\alpha'} & \varepsilon^{\beta'} & \varepsilon^{\gamma'} \\ \varepsilon^{-\alpha'} & \varepsilon^{-\beta'} & \varepsilon^{-\gamma'} \\ \mathrm{asinA} & \mathrm{bsinB} & \mathrm{csinC} \end{vmatrix} = 0$$

(en notant α' l'inclinaison de la droite OA', a = gr OA et A = ang OAA' etc.)

[651] Cette partie a également été étudiée dans [Romera-Lebret, 2009], p. 364-367.

[652] Cette relation est un cas particulier de l'équipollence sur les polygones exposée dès le premier chapitre. Laisant l'écrit aussi :

$$a\varepsilon^{\alpha} + b\varepsilon^{\beta} + c\varepsilon^{\gamma} = 0$$

où a, b, c sont les longueurs des côtés et α, β, γ leur inclinaison.

des cercles inscrit et circonscrit. Laisant exprime un point I quelconque comme barycentre des points A, B et C puis comme barycentre des points A', B' et C', intersections des droites (AI), (BI) et (CI) avec les côtés du triangle (fig. 36). Remarquons le procédé suivant : si on considère les symétriques A'_1, B'_1 et C'_1 des points A', B' et C' par rapport aux milieux des côtés, les droites (AA'_1), (BB'_1) et (CC'_1) sont sécantes en un point I_1 que Laisant exprime encore comme barycentre de A, B et C avant d'expliquer : « les points I et I_1 sont ainsi associés l'un de l'autre, par une loi de réciprocité »[653]. Laisant exprime ainsi un point I quelconque comme barycentre des pieds des perpendiculaires abaissées de I sur les côtés d'un triangle et conclut en soulignant « l'intérêt que présente la détermination d'un point du plan, considéré comme barycentre de trois points placés aux sommets d'un triangle » [654], notamment en considérant les relations de réciprocité telles qu'elles ont été établies par l'auteur. Le point de Lemoine (associé de seconde espèce du barycentre du triangle), ceux de Brocard sont exprimés comme barycentres des sommets du triangle au sein d'un tableau qui conclut cette partie.

Finalement, si Laisant défend le calcul des équipollences dans sa pertinence à traiter les questions posées par Lemoine, Brocard ou Neuberg, il exprime les réserves que nous avons déjà soulignées quant à la profusion gênante des résultats possibles : « Le nombre des points remarquables du triangle et des propriétés plus ou moins particulières qu'on en peut déduire est en quelque sorte illimité. »[655]. Brocard commentera ainsi ce chapitre dans la bibliographie qu'il rédige pour la revue *Mathesis* : « Parmi les applications, celles qui sont relatives à la nouvelle géométrie du triangle auraient pu donner le sujet d'un volumineux travail. L'auteur s'est contenté avec raison d'en tracer le plan, mais il est ici permis de souhaiter qu'un géomètre les reprenne avec l'intention d'en exposer une étude systématique. »[656]

Remarquons que l'on trouve des traces de l'intérêt de Laisant pour les questions de barycentre jusqu'en 1901 et son article « Transformations des coordonnées barycentriques » paru dans *L'Enseignement mathématique* ([Laisant, 1901]). L'auteur y calcule les relations entre les coordonnées barycentriques (homogènes) x, y, z d'un point M par rapport à un triangle ABC et les coordonnées barycentriques x', y', z' du même point par rapport à un autre

[653] [Laisant, 1887a], p. 114. Les points I et I_1 sont plus selon lui « associés de première espèce ». Alors que si on remplace les droite (AA'), (BB') et (CC') par leur symétrique par rapport aux bissectrices du triangle, les droites obtenues sont concourantes en un point I_2 « associé de seconde espèce » au point I.

[654] Op.cit., p. 120.

[655] [Laisant, 1887a], p. 121.

[656] H. Bocard, "bibliographie, Théorie et application des équipollences", *Mathesis*, t. 7, 1887, p. 184-185. Laisant reprendra l'étude de relations dans les triangles à l'aide des équipollences, mais les longues expressions trouvées semblent éloignées des préoccupations des pères de la nouvelle géométrie du triangle ([Laisant, 1892h]).

triangle de référence $A_1A_2A_3$. Laisant précise les avantages d'utiliser « les vecteurs » par rapport aux coordonnées cartésiennes avant d'écrire :

$$M = xA + yB + zC$$

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C \text{ etc..}$$

il en déduit :

$$\begin{vmatrix} M & x & y & z \\ A & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ B & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ C & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Développant le déterminant suivant la première colonne, il obtient les nouvelles coordonnées barycentriques x', y', z', sous forme de déterminant. L'écriture sous forme de déterminant est à nouveau significative : elle permet de simplifier la manipulation des quatre équations de départ et une mise en forme simple de l'expression finale des coordonnées.

Revenons aux applications de la deuxième partie de l'ouvrage de 1887. Deux courts chapitres suivent. Le premier (chapitre IV) s'intéresse aux applications des équipollences aux polygones. Il y est encore question de barycentre (d'un quadrilatère, puis d'un polygone quelconque, question déjà abordée en 1877, [Laisant, 1877d]), mais surtout Laisant y reprend la quasi-intégralité de son intervention à l'AFAS en 1875 « Sur quelques propriétés des polygones » ([Laisant, 1877c]) avant de généraliser sa construction au cas où ce sont *n* triangles semblables à *n* triangles donnés qui sont construits sur les *n* côtés d'un polygone[657]. Si les polygones sont des configurations étudiées par l'auteur grâce aux équipollences, les questions d'aires occupent également chez lui une place importante : elles sont l'objet du chapitre V. Une nouvelle expression de l'aire d'un polygone y est donnée (voir plus haut). Laisant reprend un problème traité par Bellavitis mais dont la solution est parfois attribuée à Staudt ([Laisant, 1874a], p.105) : il s'agit d'exprimer le produit des aires de deux polygones en fonction des distances entre leurs sommets. En reprenant la notation symbolique introduite par l'Italien, Laisant complète le résultat de ce dernier et propose une formule générale pour deux polygones quelconques. Il reprend également plusieurs notions dues à Bellavitis : celles de « pseudo-centre d'un système de polygones »[658] ou de « multilatéral » (système de droites

[657] Ce chapitre se termine par deux constructions : la première est celle d'un polygone inscrit dans un cercle dont les côtés passent par des points donnés ou ont des longueurs données (problème déjà résolu par Bellavitis dans le mémoire traduit en 1874), la deuxième concerne un polygone qui circonscrit un cercle et dont les sommets sont sur des droites données ou dont les angles sont connus.

[658] « Pour tout polygone ou tout système de polygones situés dans un même plan, il existe un point qui est le barycentre de poids égaux aux aires des triangles distincts en lesquels ces polygones peuvent être décomposés,

quelconques dont la somme géométrique est nulle). Il poursuit l'étude d'un multilatéral, calculant son aire, le barycentre de ses sommets et complète l'interprétation mécanique de Bellavitis[659].

Laisant traite également dans le chapitre suivant (VI) de quelques questions de géométrie supérieure, mais de manière plus exhaustive que Bellavitis. Il avait d'ailleurs commencé à le faire, on l'a vu, en 1878 en généralisant la division harmonique à quatre points du plan ([Laisant, 1878b]). Après quelques emprunts à la communication précédente, on retrouve les principales notions de cette géométrie synthétique, comme celles de pôle et polaire, dont les propriétés ne sont pas développées même si elles « s'établiraient facilement au moyen de la méthode des équipollences »[660], donc d'une manière assez éloignée de celle de Poncelet[661]. Laisant étudie le rapport anharmonique de Chasles, plus précisément les liens entre tous les rapports anharmoniques que l'on peut obtenir par permutation de ses quatre points. Notant *m* le rapport anharmonique des points A, B, C fixes et du point M, Laisant reprend le résultat de Bellavitis sur les « rapports multiples » tout en précisant que « ces divers résultats sont à peu près identiques à ceux qu'on obtient en Géométrie supérieure pour des systèmes de points en ligne droite, et comportent cependant, comme on le voit, un degré de généralité beaucoup plus étendu. »[662]. La division homographique de droites[663] est aussi prolongée au plan pour deux systèmes de points quelconques : cette notion clarifie l'introduction des figures inverses par Laisant (par rapport à celle de Bellavitis)[664]. Suivant l'exposé de Chasles[665], mais se démarquant de Bellavitis, Laisant termine le chapitre par l'étude des involutions (points doubles, point central) : « Nous bornerons ici les applications de la méthode des équipollences à la Géométrie supérieure, notre seul but ayant été de

ces poids étant respectivement placés aux centres des cercles circonscrits correspondants. » ([Laisant, 1887a], p. 151 et [Laisant, 1874a], p. 105).

659 Il introduit le « centre du système des forces » ([Laisant, 1887a], p. 154) (voir aussi sa note de traduction [Laisant, 18a], p. 108). Une nouvelle condition de similitude de deux triangles conclut ce chapitre.

660 [Laisant, 1877a], p. 163.

661 Op. cit., p. 162.

662 [Laisant, 1887a], p. 168. Voir aussi [Laisant, 1874a], p. 112. Laisant reprend également le résultat donnant le rapport anharmonique de quatre points à l'aide d'un cinquième. Voir [Laisant, 1877a], p. 167 ; [Laisant, 1874a], p. 113 et [Chasles, 1852].

663 [Chasles, 1880], p. 64.

664 Laisant rejette à l'infini un point J du premier système et un deuxième I' du second et considère leurs points associés J' et I. Pour tout point M, et son correspondant M'

$$IM.J'M = \text{const.}$$

Laisant, en déplaçant par la pensée la seconde figure, introduit aussi la transformation par rayons vecteurs réciproques où

$$IM \text{ cj. } IM' = \text{const.}$$

Comme Bellavitis, après avoir étudié les points qui sont leur propre correspondant, il détermine entre autre les centres d'inversion.

665 [Chasles, 1880], p. 119.

montrer par quelques exemples combien cette méthode s'y adapte heureusement et quel degré de généralité elle donne à la plupart des théories. »[666]

Remarquons la rareté des articles traitant de cette branche des mathématiques dans l'œuvre de Laisant : en dehors de cette partie de son ouvrage de 1887, on trouve peu de références aux travaux de géométrie synthétique.

Ainsi l'article « Polaires arithmétiques et géométriques d'une conique »[667] qui paraîtra l'année suivante dans le *Journal de mathématiques spéciales* généralisera les notions de polaires avec un traitement essentiellement analytique. Laisant y reprend des résultats de Longchamps parus dans sa *Géométrie analytique à deux dimensions* (1884).

Normalien, agrégé de mathématiques en 1871, Gaston Gohierre de Longchamps (1842-1906) devient professeur de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne de Paris. Ces travaux portent sur la théorie des nombres (primalité de $2^n \pm 1$, nombres de Bernoulli), sur les courbes algébriques (trissectrice de Longchamps) ou sur la géométrie du triangle (cercle de Longchamps). Il fonde en 1880 le *Journal de mathématiques spéciales*[668] qui fusionnera en 1898 avec le *Journal de mathématiques élémentaires*[669] (dont il est également directeur). Ces deux journaux ont reçu une quinzaine de communications de Laisant entre 1885 et 1895. Membre de la SMF à partir de 1881, ami de Lucas, il est également proche de Laisant[670].

Dans son article de 1888, Laisant rappelle que, si une droite passant par un point P coupe une conique en deux points U et U', le lieu des points M tels que PM soit la moyenne harmonique des segments PU et PU' est une droite (la polaire harmonique). S'inspirant de cette construction, il cherche le lieu des milieux N du segment [UU'] (N est alors moyenne arithmétique des segments PU, PU'). Par un calcul implicite, il montre que ce lieu est une conique dont il détermine l'équation[671]. Le lieu des points Q tels que PQ soit le moyenne

[666] Op.cit., p. 177.
[667] [Laisant, 1888h].
[668] À l'usage des candidats aux écoles polytechnique, normale et centrale.
[669] À l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat es science.
[670] Voir les dernières lignes d'une lettre publié dans le *Journal de mathématiques spéciales* : « Je suis heureux, mon cher ami, de vous serrer la main de tout cœur et de vous renouveler l'expression de ma sincère amitié. » ("Correspondance", (3) II, 1888, p. 185-187) Des centres d'intérêt communs semblent évidents: MacMahon P.A., "Two applications of general theorems in combinatory analysis", *Proceedings of the London Mathematical Society,* s. 2-15, 1, 1917, p. 314-321. Voir aussi [Takacs, 1980].
[671] Si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la conique initiale, et (α, β, γ) les coordonnées du point P , l'équation de la polaire arithmétique est :

$$(x-\alpha)f'_x + (y-\beta)f'_y + (z-\gamma)f'_z = 0$$

proportionnelle des segments PU et PU' est la polaire géométrique de P dont l'équation est calculée. L'auteur tisse plusieurs liens entre les différentes polaires ainsi mises en évidence[672].

Pour illustrer l'approche de Laisant sur ces questions de géométrie supérieure, où souvent aucune figure n'est utilisée, nous nous proposons de reprendre un article de 1889 sur le thème du rapport anharmonique dans les pages du *Bulletin* de la SMF (« Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes » [Laisant, 1889a]). Cet article fait écho à une intervention sur le rapport harmonique généralisé au plan ([Laisant, 1878b]) et le calcul des équipollences y est largement utilisé[673]. Les trois points A, B et C sont fixes et Laisant pose le rapport anharmonique des points M, A, B et C :

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} : \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \lambda = r\varepsilon^{\theta}$$

d'où, si b = gr AC, c = gr AB et A = ang BAC

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} = r\frac{b}{c}\,\varepsilon^{\theta + \mathrm{A}}.$$

Pour θ constant, le lieu des points M est un cercle passant par B et C. Si r est seul constant, le lieu des points M est un cercle dont le centre est aligné avec B et C. Mais Laisant écrit aussi le rapport anharmonique sous la forme

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}} = \lambda\,\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \lambda\alpha$$

d'où

$$\mathrm{M} - \mathrm{C} = \lambda\alpha(\mathrm{M} - \mathrm{B}).$$

Pour un accroissement infiniment petit $d\lambda$, il écrit :

$$d\mathrm{M}(1 - \lambda\alpha) = \alpha d\lambda(\mathrm{M} - \mathrm{B}),$$

et pour un autre accroissement infiniment petit $\delta\lambda$:

$$\delta\mathrm{M}(1 - \lambda\alpha) = \alpha\delta\lambda(\mathrm{M} - \mathrm{B}).$$

Or si r est constant pour l'accroissement $d\lambda$, et si θ est constant pour l'accroissement $\delta\lambda$,

$$d\lambda = id\theta r\varepsilon^{\theta} \text{ et } \delta\lambda = dr\varepsilon^{\theta}$$

donc Laisant écrit :

$$\frac{d\mathrm{M}}{\delta\mathrm{M}} = i\,\frac{rd\theta}{dr} \parallel i.$$

[672] Par exemple, l'origine O est le pôle de la polaire harmonique par rapport à la polaire géométrique etc.

[673] [Laisant, 1889], "Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 17,1889, p. 169-171.

Les deux déplacements infinitésimaux de M sont orthogonaux et par suite, les deux circonférences précédentes aussi. Les équipollences permettent ici une formulation aisée de l'orthogonalité mais on est loin de l'esprit de la géométrie de Poncelet ou Steiner.

La géométrie analytique reste omniprésente dans les deux articles étudiés ici, et plus généralement tout au long de l'œuvre de Laisant qui ne s'interdit cependant pas d'étudier certaines notions fortes de la géométrie synthétique au travers des équipollences.

Nous n'aborderons pas les trois derniers chapitres de la partie applications. Ils concernent l'usage de la méthode des équipollences à la théorie des courbes, aux transformations du plan et à la cinématique et reprennent donc en bonne partie les articles déjà signalés sur ces sujets. On retrouve par exemple, pour le chapitre VII, les notions d'équipollence d'une courbe, de développées et de rayon de courbure et de spirale logarithmique, complétées par l'étude de la parabole, de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la cycloïde. Le chapitre sur les transformations (chapitre VIII) reprend, entre autre, les propriétés d'isogonalité, de relations entre les rayons de courbure et l'étude de la transformation exponentielle. Enfin, le dernier chapitre (IX) voit le retour des cas d'accélération centrale, de la notion d'accélération de divers ordres et de l'étude du mouvement d'une figure plane.

Avec cette deuxième partie, Laisant réorganise en partie des résultats déjà développés dans des écrits précédents. Il donne une cohérence aux diverses applications rencontrées et, en dressant un catalogue plus exhaustif de ces applications, montre la généralité de la méthode des équipollences en tant que calcul utile dans de nombreux domaines mathématiques.

REFLEXION SUR LE STATUT DES IMAGINAIRES

L'auteur de *Théorie et applications de la méthode des équipollences* est amené tout au long de son œuvre de diffusion à participer au débat qui agite encore la communauté mathématique dans le dernier quart du XIX^e siècle quant à la réalité de ces nombres imaginaires. Par plusieurs courts articles[674] s'appuyant souvent sur les notions et les notations exposées par Bellavitis, Laisant apporte ses observations au sujet de ces quantités complexes entourées parfois encore de défiance dans la communauté mathématique.

Ainsi, en 1876, Laisant adopte, dans l'article « Sur une question paradoxale » paru dans les pages de la *Nouvelle correspondance mathématique* ([Laisant, 1876f]), une

[674] Dans une moindre mesure, la communication « Théorème d'algèbre » à l'AFAS ([Laisant, 1882a]) illustre l'intérêt de Laisant pour les équations à coefficients complexes et leurs propriétés : il y généralise une remarque de Biehler et Laguerre parue dans les *NAM*.

perspective historique sur l'évolution de la perception des notions liées aux imaginaires. Cette réflexion prend pour point de départ la parution en 1847 de la question suivante dans les *Nouvelles annales de mathématiques* « si tang $a = \pm\sqrt{-1}$, on aura tang $(a + b) = \pm\sqrt{-1}$ quelque soit la valeur réel ou imaginaire de b »[675]. Cette question et la réponse s'y rapportant sont pour lui une illustration des « idées étranges, qu'on se faisait sur les imaginaires, à une époque pourtant fort rapprochée de nous. »[676]. Les erreurs qui entachent l'énoncé (en premier lieu, l'impossibilité d'avoir tang $a = \pm\sqrt{-1}$ ce qui reviendrait à avoir $\sin^2 a + \cos^2 a = 0$) est bien représentative de l'époque : « en 1847, on se croyait tout permis, du moment qu'on touchait à ces mystérieuses quantités imaginaires, auxquelles on prêtait les propriétés les plus fantastiques, sans la moindre hésitation, comme si imaginaire était synonyme d'absurde. »[677] Le danger d'une telle affirmation, notamment d'un point de vue pédagogique, est que l'aberration de la solution est dissimulée derrière la rigueur du calcul algébrique.

Outre l'opposition de Mansion[678] aux remarques de Laisant, c'est surtout face à la réaction de Catalan que le jeune mathématicien modère plus tard son propos en précisant, dans une lettre parue dans la même revue, sa vision de l'évolution des connaissances sur les nombres complexes depuis 30 ans : « Mais je crois qu'en 1847 on n'avait pas encore, d'une manière générale, profité de leurs enseignements. Aujourd'hui, la vulgarisation s'est faite ; nous en savons plus aujourd'hui qu'alors, précisément grâce à ces Anciens dont vous parlez »[679].

Dans une autre correspondance de la revue, Laisant revient de nouveau en 1880 sur « cette éternelle question philosophique des quantités négatives et des quantités imaginaires »[680]. Le mathématicien français souhaite expliquer comment le calcul sur les imaginaires peut se ramener au calcul sur les réels comme celui sur les quantités négatives peut lui-même se ramener à celui sur les quantités positives, et par là dissiper les controverses entourant encore ces deux types de nombres. Il s'interdit l'usage de la soustraction dans l'ensemble des nombres positifs et affecter au terme à soustraire[681] un coefficient symbolique i qui obéit à la convention nouvelle $i + 1 = 0$. Ainsi, toute quantité négative ($-a$) s'écrira ia. De la même manière, toute expression de la forme $\sqrt{-a^2}$ peut s'écrire ia où i est un coefficient

[675] "Question 158", *NAM*, Sér. 1, 6, 1847, p. 271. La réponse est donnée par un élève du collège de Versailles, Jules Moutier (voir *NAM*, Sér. 1, 6, 1847, p. 365-366).
[676] [Laisant, 1876f], p. 274.
[677] Ibid.
[678] "Sur de prétendues questions paradoxales", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 2, 1876, p. 369-276.
[679] "Extrait d'une lettre de M. Laisant", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 2, 1876, p. 353.
[680] [Laisant, 1880c], p. 119.
[681] C'est-à-dire à « porter une quantité en sens contraire du sens positif » (p. 120).

symbolique de même nature tel que $i^2 + 1 = 0$. Ainsi, « le calcul des quantités dites imaginaires se ramènera donc au calcul des quantités réelles, par une analogie complète avec la méthode ci-dessus, qui permet de ramener le calcul des quantités négatives à celui des quantités positives. »[682] Laisant ne l'écrit pas, mais adjoindre au réel a le coefficient symbolique i c'est porter une quantité dans une direction perpendiculaire à l'axe des réels : on retrouve le point de vue d'Argand.

Dans l'article « Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$ »[683], de 1880, il s'agit de clarifier les propriétés de la fonction exponentielle a^x dans le cas où a est négatif, afin de rendre très général son étude et de dépasser les observations ponctuelles se résumant à « la fonction est de forme bizarre »[684]. La difficulté réside ici dans le caractère multiforme de la fonction en question, comme nous allons le voir. En choisissant la bonne définition et en conservant « l'idée du passage, sans discontinuité, des valeurs réelles aux valeurs imaginaires »[685], on peut préciser les caractéristiques de la fonction exponentielle et rompre avec les imprécisions antérieures : « Tout cela ne laisse pas que d'être assez obscur. Il me semble pourtant qu'on pourrait sans trop de peine éclaircir ces notions et enlever à la fonction $(-a)^x$ le caractère un peu mystérieux qu'elle présente au premier abord, et montrer qu'elle est loin d'offrir la moindre discontinuité. »[686] C'est une des observations formulées par Euler dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* en 1797.

Remarquant que, pour $a > 0$,

$$a^x = a^x\,1^x,$$

toute ambiguïté est levée en écrivant suivant les notations de Bellavitis :

$$1 = \varepsilon^{2k\pi} \text{ d'où } 1^x = \varepsilon^{2k\pi x}.$$

On obtient pour la fonction 1^x une fonction « infinitiforme » dans la mesure où k est un entier quelconque à fixer. La quantité 1^x a une extrémité qui parcourt de manière continue le cercle de centre O et de rayon 1 lorsque x parcourt l'ensemble des réels (parmi ces valeurs de x, celles qui rendent $2kx$ entier permettent d'obtenir une image réelle). Dire que $1^x = 1$ pour tout x présuppose donc que l'on choisisse $k = 0$. Enfin, dans le cas de la fonction a^x, on retrouve une spirale logarithmique de pôle O (c'est l'axe polaire si $k = 0$).

Une démarche analogue peut alors s'appliquer au cas où la base est négative. Laisant écrit :

[682] Ibid., p. 120.
[683] [Laisant, 1880b], "Remarque sur les fonction 1^x et $(-1)^x$ ", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 8, 1880, p. 109-111.
[684] [Laisant, 1880b], p. 109.
[685] Ibid., p. 110.
[686] Ibid.

$$(-1)^x = \varepsilon^{(2k+1)\pi x}$$

avec $a > 0$ et donc :

$$y = (-a)^x = a^x\, \varepsilon^{(2k+1)\pi x}.$$

La courbe obtenue une fois la valeur de k fixée est de nouveau une spirale logarithmique, dont l'importance est encore signalée. Le choix d'une définition s'appuyant sur les notations issues des équipollences a donc permis de lever les approximations liés au caractère multiforme de la fonction exponentielle.

Ces réflexions sur le caractère multiforme des fonctions complexes sont à rapprocher d'un article paru plusieurs années plus tard (1892), toujours dans les pages du *Bulletin* de la SMF. Dans sa « Note relative au symbole i^i, et en général à l'opération p^q » ([Laisant, 1892b]), Laisant commente les idées présentées dans un ouvrage récent dû à un ancien ingénieur à la retraite[687]. Il critique l'interprétation géométrique du nombre i^i qui y est faite en vue de créer une « algèbre des faits de l'espace ». L'auteur y réfute en outre l'égalité

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

L'enjeu est ici de sauvegarder les règles habituelles de calculs sur les puissances, y compris lors de l'usage des fonctions exponentielle et logarithme[688]. S'attachant donc à respecter les règles sur les puissances, Laisant développe l'expression p^q et obtient :

$$p^q = a^{b\cos\beta} a^{ib\sin\beta}\, \mathrm{e}^{i\alpha b\cos\beta}\, \mathrm{e}^{-\alpha b\sin\beta}$$

où a et α (resp. b et β) sont le module et l'argument de p (resp. de q), argument dont la définition, et Laisant insiste, est à 2π près. En posant $a = \mathrm{e}^{la}$, le calcul précédent devient

$$p^q = \mathrm{e}^{b(la\cos\beta - \alpha\sin\beta)}\, e^{ib(la\sin\beta + \alpha\cos\beta)}$$

ce qui lui permet d'isoler module et argument de p^q. L'observation de ces expressions montre que la définition modulo 2π de α implique d'écrire l'argument de p^q :

$$b(la\sin\beta + (2k\pi + \alpha)\cos\beta)^{689}.$$

Et Laisant d'en conclure que « p^q représente non pas une quantité imaginaire, mais une infinité de quantités, dont les modules forment une progression par quotient, et les arguments une progression par différence »[690], de la même manière que l'on peut voir $\sqrt{1}$ comme représentant à la fois 1 et -1.

Dans le cas du symbole i^i, on obtient donc

---

[687] Evrard J., *Mémoire sur l'interprétation des symboles dits imaginaires ou Théorie des acceptions*, Librairie Polytechnique Baudry et Cie., 1891.

[688] Voir aussi [Verley, 2006], [Trompler, 2002].

[689] Le module étant le nombre positif dont le logarithme est b(la cos β − (2kπ + α)sin β).

[690] [Laisant, 1892b], p. 14.

$$i^i = e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

correspondant à une infinité de termes réels d'une suite géométrique de raison $e^{2\pi}$. Ces réflexions sont à rapprocher des travaux de Riemann sur les fonctions multiformes[691], sa thèse de 1849 ou sa théorie sur les fonctions abéliennes, diffusés en France grâce aux travaux de Cauchy mais aussi de Victor Puiseux.

En 1887, Laisant propose "sa" démonstration du théorème de D'Alembert dans les pages du *Bulletin de la SMF* ([Laisant, 1887f]). La même démonstration est décrite de manière plus complète dans le *Journal de mathématiques spéciales* deux ans plus tard (« Sur le théorème de d'Alembert » [Laisant, 1889c]) : nous adoptons ici les notations de cette deuxième présentation. Le but est double : il s'agit de proposer une démonstration simple « pour ainsi dire intuitive »[692], d'une proposition qui loin d'être triviale peut cependant être présentée aux élèves de mathématiques spéciales, comme les précédents programmes d'admission à l'École polytechnique le prévoyaient, tout ceci afin de dissiper en eux doutes et interrogations.

L'auteur choisit de baser son propos sur un argument de continuité[693] de la fonction :

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = y$$

et sur le lemme suivant : « Lorsque le point X décrit, autour de l'origine comme centre, une circonférence dont le rayon est suffisamment grand, le point Y décrit, autour de l'origine, une courbe fermée, aussi éloignée de l'origine qu'on le voudra, dans toutes les parties »[694]. Ce lemme s'obtient par la factorisation par x^m du polynôme et des considérations sur le module et l'argument des deux facteurs obtenus. Cette même expression factorisée permet de remarquer que le point Y associé au complexe y décrit une courbe fermée lorsque le point X associé à x décrit lui aussi une courbe fermée[695]. La démonstration du résultat principal s'obtient alors grâce à la continuité de la fonction f, continuité assurée par la formule de Taylor applicable à la fonction f. En effet, si X décrit une circonférence autour de l'origine, alors Y décrit une courbe fermée autour du point A_m défini par la relation $y_0 = a_m$ pour $x = 0$. Par dilatation de la

---

691 [Dieudonné, 1978], p. 141-145.

692 ([Laisant, 1887f], p. 42). Laisant se réfère, outre à la démonstration de Cauchy, à celle d'un professeur de mathématiques spéciales au lycée Condorcet, Félix Walecki (agrégé en 1873), démonstration « purement analytique » parue dans les *NAM* (Sér. 3, 2, 1884, p. 241-248) présentée à l'Académie des sciences en mars 1882 sous le titre « Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des équations algébriques ». Laisant lui concède un caractère « irréprochable » mais une trop grande complexité (Walecki s'appuie sur la notion de résultant de deux polynômes et le calcul de déterminants).

693 À ce sujet : Samuel Pierre, "Modèles booléiens et hypothèse du continu (résultats de Paul Cohen par la méthode de D. Scott et R. Solovay)", *Séminaire Bourbaki*, 10, 1966-1968, Exposé No. 317.

694 [Laisant, 1889f], p. 80.

695 À chaque inclinaison θ de la droite OX correspond, pour r assez grand, l'inclinaison $m\theta$ de la droite OY.

circonférence parcourue par X, la courbe décrite par Y s'étend de manière continue si bien que « à un certain instant, d'après le lemme du numéro précédent, elle sera aussi éloignée de O qu'on le voudra, dans toutes ses parties. »[696] L'origine O, d'abord extérieure au contour que parcourt Y, lui est donc alors intérieure : l'argument de continuité assure l'existence d'une courbe Y passant par O et donc d'une valeur de x permettant $y = 0$. À l'objection qui consiste à exhiber une courbe fermée qui présenterait « une sorte de détroit par lequel pourrait passer l'origine dans le mouvement de dilatation progressive de la courbe »[697], l'auteur montre que pour le module de x assez grand, si l'argument de x croît, celui de y aussi, ce qui annule la possibilité d'une telle courbe. Comme Laisant, remarquons la similitude voulue de son propos avec le cas du théorème de Rolle pour une fonction réelle et l'image de la dilatation, c'est-à-dire l'utilisation d'un vocabulaire figuratif pour rendre compte de la démonstration. « Le langage géométrique employé ci-dessus n'enlève donc rien à la rigueur analytique des raisonnements »[698], même si les conditions sur le module de x s'accumulent sans autre précision. Si la démarche de l'auteur peut être rapprochée de la deuxième démonstration de Cauchy parue dans le *Journal de l'École polytechnique* en 1837[699], le fait de présenter une démonstration particulièrement visuelle s'inscrit bien dans la pensée d'Argand[700], mais surtout dans les convictions de Laisant sur l'importance des représentations en mathématiques.

Remarquons enfin, lors des congrès de l'AFAS, les interventions de Laisant dans les discussions touchant à l'intrusion des quantités imaginaires en géométrie. Nous soulignons particulièrement le rôle de Gaston Tarry (1843-1913). Après des études au lycée Saint-Louis, cet Aveyronnais rejoint les Contributions diverses de l'administration des finances et est envoyé en Algérie où il demeurera pendant l'ensemble de sa carrière. S'il a travaillé sur la géométrie de triangle (point de Tarry), il est plus connu pour ses travaux en combinatoire (résolution du problème des officiers d'Euler) qui ont impressionné Lucas (d'où de multiples références à Tarry dans la *Théorie des Nombres*, les *Récréations Arithmétiques* ou *L'Arithmétique Amusante*). Il s'intéresse également aux carrés magiques et participe à la seconde édition de deux ouvrages de Gabriel Arnoux après que celui-ci ait travaillé avec Laisant. Nombre de ces participations à l'AFAS concernent la géométrie de situation (échiquier), la combinatoire ou les carrés magiques.

[696] [Laisant, 1889c], p. 81.
[697] Ibid., p. 82.
[698] Ibid., p. 83.
[699] Levasseur R., « les fonctions rationnelles » in [Molk, 1904-1916], vol. 2, t. I, p. 202.
[700] [Kouteynikoff, 2006], [Friedelmeyer, Volkert, 1991] et [Gilain, 1997], Ewing J.H., *Numbers*, Springers, 1991.

En 1887, au Congrès de Toulouse, Tarry propose son « Essai sur la géométrie des imaginaires dans le plan réel »[701]. Cette communication est la première d'une série qui composera sa *Géométrie générale*[702], présentée à l'AFAS entre 1887 et 1894. Tarry souhaite « établir la projectivité des formes imaginaires »[703]. Il remarque d'ailleurs que « sans l'algèbre, on n'aurait jamais songé à inventer les points imaginaires, et que tout mode de représentation géométrique du point imaginaire ne peut-être que la traduction d'un résultat fourni par l'analyse »[704]. Il y considère un point géométrique comme caractérisé par un point origine A et un point terme A' et noté A<u>A'</u>. Si les deux points sont confondus, le point est dit réel ; sinon, il est dit imaginaire. Tarry expliquera que cette géométrie lui a été inspirée par les travaux de Von Staudt[705]. Au Congrès d'Oran l'année suivante, Tarry prolonge son propos avec un « Nouvel Essai sur la géométrie des imaginaires ». Et, lorsqu'au congrès de 1890, Gaston Tarry poursuit l'exposition de sa « Géométrie générale », Laisant, tout en saluant « le très grand intérêt que présentent les recherches de M. Tarry au point de vue philosophique et pédagogique »[706], rappelle une nouvelle fois la portée très générale de l'œuvre de Bellavitis.

En 1887, Laisant, président des sections 1&2, juge que cette communication complète les travaux de l'ingénieur Augustin Mouchot (1823-1912). Mouchot et surtout Tarry seront donc les deux références citées par Laisant lorsque lui-même abordera l'extension de la géométrie cartésienne aux figures imaginaires[707].

Le 4 février 1891, Laisant présente en effet aux membres de la Société mathématique de France une communication intitulée « Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires » ([Laissant, 1891b]) où il présente ses propres tentatives pour étendre les coordonnées cartésiennes aux imaginaires via l'équipollence :

$$\mathrm{M} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\varepsilon^{\theta}$$

M étant le point à construire, X et Y des nombres complexes, et θ l'angle entre les axes de coordonnées. Le sociétaire s'était alors confronté au problème de la multiplicité des coordonnées possibles pour un même point. Depuis, les travaux de Mouchot et surtout ceux

701 Tarry Gaston, "Essai sur la géométrie des imaginaires dans le plan réel", *AFAS*, Toulouse, 1887/2, p.168.
702 « Essai sur la géométrie des figures imaginaires » (1887), « Nouvel essai sur la géométrie imaginaire » (1888), « Géométrie générale » (1889), « Géométrie générale. Le cercle et la trigonométrie » (1891), « Figuration des solutions imaginaires rencontrées en géométrie ordinaire » (1892), « Géométrie générale. Mesure des arcs de courbe, etc. » (1893), « Géométrie générale. Les droites et les plans » (1894).
703 [Tarry, 1887], p. 168.
704 Ibid., p. 170.
705 *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1856-1860. Voir aussi A. Tresse « Géométrie projective » in [Molk, 1904-1916], t. III, vol. 2, p. 102-107 et [Nabonnand, 2006], p. 150.
706 AFAS, Limoge, 1890/1, p. 150.
707 Mouchot Augustin, *La Réforme cartésienne étendue aux diverses branches des mathématiques pures*, Gauthier-Villars, 1876. (Mouchot est généralement connu pour ses travaux sur l'énergie solaire). Voir [Laisant, 1891a], p. 29.

de Tarry, exposés lors de congrès de l'AFAS, ont permis de préciser cette « Géométrie générale » selon l'expression de Tarry par la considération du point double (M, M')[708], notion que Bellavitis en son temps avait déjà abordée avec ses « points fictifs ». Laisant explique que M et M' sont définis par les deux équipollences :

$$\mathrm{M} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\varepsilon^{\theta} \text{ et } \mathrm{M}' = \mathrm{cj.}\ \mathrm{X} + \mathrm{cj.}\ \mathrm{Y}.\varepsilon^{\theta}$$

ou encore par l'équipollence double

$$(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = (\mathrm{X}, \mathrm{cj.}\ \mathrm{X}) + (\mathrm{Y}, \mathrm{cj.}\ \mathrm{Y})\varepsilon^{\theta}$$

qui permet de réaliser une relation biunivoque entre le point double et ces nouvelles coordonnées. Cette généralisation de la géométrie cartésienne avec l'extension des formules ordinaires permet de « donner en quelque sorte une réalité objective et une absolue clarté à des notions de géométrie imaginaire un peu obscures avec le langage habituel. Il est possible, sur ces données, d'établir un lien de plus entre l'Analyse et la Géométrie par le calcul des équipollences. »[709]

II.2. La méthode des équipollences prolongées à l'espace : les quaternions

Nous avons eu l'occasion d'évoquer une lettre d'Abel Transon datée de juin 1868 en réponse aux interrogations de Laisant lorsqu'il aborde ses travaux sur les quaternions. Cette lettre se conclut par un encouragement à poursuivre ses travaux sur les quaternions : « Ainsi, bien loin de vous détourner de cette étude, je ne crains pas d'exprimer la conviction que cette théorie pourra donner des résultats vraiment nouveaux »[710].

L'intérêt de Charles-Ange Laisant pour la théorie d'Hamilton semble en effet sensiblement postérieur à son initiation à la méthode de Bellavitis. Et même en 1874, six ans après la lettre de Transon, on peut lire dans la préface à l'*Exposition de la méthode des équipollences* : « Mon peu d'érudition ne m'a pas permis de me livrer, jusqu'à présent, à l'étude de ces divers travaux »[711]. Les travaux en question, i.e. *Leçons sur les quaternions*

[708] M est la composante positive du point double et M' sa composante négative : les deux composantes coïncident lorsque le point est réel.
[709] [Laisant, 1891b], p. 30
[710] [Transon, 1892], p.106.
[711] [Laisant, 1874a], p. XI.

([Hamilton, 1853]), *Éléments des quaternions* (1866) d'Hamilton[712], ainsi que le *Traité élémentaire des quaternions* de Tait (1867), forment la bibliographie de base, citée par Laisant en 1874, avec laquelle ce dernier aborde la théorie. Il semble naturel qu'il se soit penché sur « La Théorie des *Quaternions* [qui] présente aussi une grande ressemblance avec les Équipollences, tout en exigeant des règles spéciales de calcul, et [qui] peut être considérée comme une extension à l'espace des conceptions de M. Bellavitis. »[713]. Le mathématicien italien relie lui-même ses équipollences aux considérations d'Hamilton à partir de 1858 avec son ouvrage *Calcolo dei quaternioni di W.R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze*[714].

Trois ans plus tard, avec sa thèse sur les *Applications mécaniques du calcul des quaternions* ([Laisant, 1877a]), Laisant montre « une parfaite connaissance du sujet » comme l'indique le rapport de Darboux. Il consacrera d'ailleurs un ouvrage à la théorie des quaternions dès 1881 ([Laisant, 1881a]) avant même son traité personnel sur les équipollences ([Laisant, 1887a]). Comme pour les équipollences, il est l'auteur de plusieurs applications, certes moins nombreuses que celles de la méthode de Bellavitis, mais tout aussi représentatives d'une véritable volonté de diffuser la méthode de l'Irlandais. Si ses écrits sur la théorie d'Hamilton sont moins nombreux, ils bénéficient de canaux de diffusion plus prestigieux (l'Académie des sciences par exemple). C'est cette démarche que nous exposons maintenant à travers ses grandes étapes : la thèse de 1877, le traité de 1881 et les contributions parues dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* ou les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*.

II.2.1. Faire connaître les quaternions

La théorie des quaternions suscite chez C.-A. Laisant un intérêt comparable à celui que nous avons remarqué pour la méthode des équipollences. Il établit d'ailleurs une véritable

[712] Malgré les essais d'Argand et de Servois (1813) de prolonger au delà du plan les conceptions des grandeurs dirigées, les travaux de Wessel étant méconnus, c'est à Hamilton, dépassant l'obstacle lié à la commutativité, qu'on doit dès 1843 les principes du calcul des quaternions publiés l'année suivante. Remarquons que cette même année 1844 est marquée par la publication des *Die lineale Ausdehnunglehre* de Grassmann dont les principes intiment lié à ceux des travaux d'Hamilton remontent à 1840. (Smith E., *History of modern mathematics*, 4ème éd., 1906).

[713] Ibid.

[714] [Bellavitis, 1858] (voir *Memorie della Società Italiena delle scienze*, Sér. 2, t. 1) . Bellavitis poursuit le rapprochement entre sa théorie et celle d'Hamilton à travers plusieurs communications : Bellavitis G., "Sul calcolo dei quaternioni", *XI Rivista di Giornali. Atti Ist. Ven.* 2, 1871, p. 204 et Bellavitis G., "Sul calcolo dei quaternioni ossia teoria dei rapporti geometrici nello spazio", *XII Rivista di Giornali. Atti Ist. Ven.* 2, 1873, p. 69.

continuité entre les deux théories en insistant à plusieurs reprises sur l'extension à l'espace que constitue la première de la seconde. Ce point de vue renforce en retour chez lui l'idée que la méthode des équipollences présente un caractère de généralité hautement appréciable. Chasles lui-même attire l'attention sur ce critère de prolongement à l'espace des méthodes :

> *c'est une remarque qu'on peut faire souvent dans l'étude de la Géométrie, que les solutions de la Géométrie plane, qui ont leurs analogues dans l'espace, sont toujours les plus générales et les plus simples. Ce principe donne un moyen d'épreuve, une sorte de* criterium*, pour reconnaître si l'on est parvenu, dans une question, à toute la généralité et à toute la perfection dont elle est susceptible, ou en d'autres termes, si l'on a rencontré la méthode et la vraie route qui lui sont propres*[715].

DIFFUSION DE LA THEORIE DES QUATERNIONS

Dans une lettre datée d'avril 1861, Hamilton lui-même regrette que ses travaux restent longtemps méconnus en France :

> *France is very slow to accept any truly new idea, although she works it well, when she has once caught hold of it. Something like a century had passed before Newton was appreciated in France ; but the world moves now at a somewhat faster pace.* [716]

Pourtant, la première étude sur les quaternions qui ne soit pas l'œuvre de l'Irlandais est la thèse du français Alexandre Allégret en 1862 ([Allégret, 1862]) qui sera également le premier auteur du continent à publier un ouvrage exclusivement dédié à la théorie la même année. Parallèlement, on l'a signalé, Bellavitis s'intéresse dès 1858 aux quaternions, mais dans le but de les rattacher à son propre calcul. Et c'est également en Russie, avec l'apport de Bolzani de l'Université de Kazan, que les quaternions diffusent hors de l'espace anglo-saxon[717].

Les travaux d'Allégret

Revenons donc sur l'apport d'Alexandre Allégret (1830-1896) dans la diffusion de la méthode des quaternions en France. En 1862, il devient agrégé de mathématiques[718] et

[715] [Chasles, 1837], p. 45.
[716] [Graves, 1882], p. 129.
[717] Sur la diffusion des quaternions, [Crowe, 1994], p. 39, [Ortiz, 2005], Ortiz E., « Quaternions abroad : some remarks on their impact in France », *Acta Historiae Naturalium Necnon Technicarum*, 3, 1999, p. 295-302 et Dobrovolskij. W. « Développement de la théorie des vecteurs et des quaternions dans les travaux des mathématiciens russes du XIX^e siècle », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications,* t. 21, n°4, 1968, p. 345-349.
[718] Il sera professeur à la Faculté de Clermont-Ferrand de 1867 à 1877, puis à celle de Lyon et devient membre de la Société mathématique de France en 1873 et de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon en 1879 (voir [Gispert, 1987], p. 176).

soutient sa thèse le 4 août *Sur le calcul des quaternions de M. Hamilton* devant un jury composé de Chasles, Puiseux et Serret (sa seconde thèse concerne les inégalités de mouvement des satellites de Jupiter). Sur ce travail, Darboux écrit à Hoüel :

> *Avez-vous lu la thèse d'Allégret à ce sujet. Cela doit être mal fait étant donné l'esprit faux de votre collègue de Clermont. Les quaternions ne me paraissent pas attractifs je vous l'avouerai. Il serait bon qu'on les fit mieux connaître car en France ils ne sont guère appréciés.*[719]

La même année, son *Essai sur le calcul des quaternions de M. W. Hamilton* n'a guère plus de succès. Ce dernier ouvrage est l'unique occurrence française sur les quaternions référencée par Laisant dans les préliminaires de sa thèse de 1877 jusqu'à la participation de Hoüel à la diffusion de la méthode du mathématicien irlandais en 1874[720]. Prouhet écrit dans la bibliographie consacrée à l'ouvrage dans les *NAM* :

> *On peut regarder cette manière de procéder comme assez peu logique, ainsi que l'a remarquée M. Bellavitis; car inventer des expressions qui par elles-mêmes n'offrent aucun sens à l'esprit, et chercher ensuite à leur en donner un par ce que l'on appelle une interprétation géométrique, n'est-ce pas comme si, après avoir construit une belle phrase, on cherchait quelle pensée on pourrait bien y mettre ?*[721]

Voici comment Allégret présente le calcul des quaternions dans l'introduction à sa thèse de 1862 :

> *Le calcul des quaternions présente une belle et curieuse extension à l'étendue à trois dimensions d'une représentation géométrique des expressions imaginaires, par des droites situées dans un même plan, dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps. Mais on peut aussi le concevoir comme une application particulière d'un ordre plus général que j'appellerai le* calcul des symboles *et qui consiste à introduire dans l'analyse les symboles comme de véritables quantités, sous la condition de ne pas faire varier l'ordre dans lequel ils se présentent comme facteurs d'un produit.*[722]

C'est ce « calcul de symboles » qui heurte Prouhet. Pourtant, Laisant dans l'introduction à sa propre thèse, rejette la critique parue dans les *Nouvelles annales* :

> *Imaginer des symboles nouveaux pour représenter des faits géométriques très-réels, ce n'est pas faire une phrase pour se demander ensuite ce qu'elle pourrait bien signifier : c'est simplifier et perfectionner la langue parlée et la langue écrite, c'est gagner en concision et en force ; c'est par là même ouvrir la porte à des aperçus nouveaux, car on sait combien le langage réagit sur la pensée elle-même, en Mathématiques comme partout.*[723]

---

[719] [Gispert, 1987] p. 140 (lettre non datée).
[720] [Hoüel 1874b] voir [Laisant 1877], p. 4.
[721] Prouhet, "Bibliographie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 2, 1863, p. 333-334.
[722] [Allégret, 1862], p. VI. Voir aussi [Ortiz, 2005], p. 147-148.
[723] [Laisant, 1877a], p. 5.

Au contraire, Laisant verra rapidement dans le calcul des quaternions une « algèbre des faits géométriques de l'espace »[724]. Ainsi, l'utilisation de ce calcul vaut « peut-être mieux que de se jeter uniformément dans d'inextricables calculs, où le symbole représentatif masque trop souvent le fait représenté, comme on le fait par l'usage systématique et absolu des coordonnées »[725].

Si les héritiers britanniques de l'œuvre d'Hamilton, mort en 1865, sont nombreux (Tait, Kelland, Sylvester et McAulay), il en est tout autre sur le continent où la théorie peine effectivement à pénétrer malgré les travaux de Hankel (1867), Hoüel (1874) et Laisant (1877 et 1881). Une des difficultés rencontrées semble être la question des notations. C'est l'hypothèse avancée par David Eugène Smith (1860-1944) en 1896 [726] qui souligne parallèlement que la situation est différente en Amérique où Peirce en particulier (1870) mais aussi Hardy (1881), Hathaway et Macfarlane (1896) développent la théorie, le dernier tentant une approche globale de tous les résultats en géométrie analytique de l'espace. [727]

À ce sujet, notons le jugement sévère que porte Tait lui aussi sur la diffusion de la méthode des quaternions sur le continent, et particulièrement en France, dans la préface à la troisième édition de *An elementary treatise on quaternion* (1890).

> *It is disappointing to find how little progress has recently been made with the developpement of Quaternions. One cause, which has been specially active in France, is that workers at the subject have been more intent on modifying the notation, or the mode of presentation of the fundamental principles, than on extending the applications of the Calculus. The earliest offender of this class was the late M. Hoüel who, while availing himself of my permission to reproduce, in his* Théorie des Quantités Complexes*, large parts of this volume, made his pages absolutely repulsive by introducing fancied improvements in the notation. I should not now have referred to this matter (about which I had remonstrated with M. Hoüel) but for a remark made by his friend, M. Laisant, which preremptorily calls for answer. He says:-"M. Tait... trouve que M. Hoüel a altéré l'œuvre du maître. Perfectionner n'est pas détruire." This appears to be a parody of the saying attributed to Louis XIV:-"Pardonner n'est pas oublier":-but M. Laisant should have recollected the more important maxim "Le mieux est l'ennemi du bien." A line of Shakespeare might hlep him:-*
>
> *"...with taper-light*
>
> *To seek the beauteous eye of heaven to garnish,*

[724] Voir son article "Quaternion", [Berthelot & al., 1885], t. 27, p. 1119.
[725] Ibid., p. 1120.
[726] [Smith, 1906], p. 11 (la première édition date de 1896).
[727] Notons également avec Smith que les continuateurs de l'œuvre de Grassmann sont moins nombreux : principalement, Schlegel en Allemagne, Peano en Italie, Hyde aux États-Unis.

Is wasteful and ridiculousexcess. "[728]

Laisant, dans son article de *La Grande Encyclopédie*, avance une autre cause à la réticence à employer le calcul d'Hamilton : « On a vu quelque fois un vice fondamental dans cette absence de commutativité de la multiplication. C'est une erreur philosophique, car ce résultat n'est que la traduction de faits géométriques auxquels le calcul ne correspondrait plus, si la commutativité existait »[729]. L'auteur présente surtout sa vision de l'enseignement des méthodes vectorielles en France:

> *Malgré tant d'avantages, le calcul des quaternions n'a pas encore pénétré profondément en France. Un petit nombre d'esprit curieux l'ont étudié, et s'en servent heureusement; mais nulle part, à aucun degré, cette méthode n'a pris place dans l'enseignement. Il faut cependant mentionner une exception: depuis quelques années (et la méthode des quaternions remonte à un demi-siècle) le mot " vecteur " a pris à peu près droit de citer chez nous, mais le mot seulement; il y a lieu de s'en féliciter, car le progrès se fait toujours si lentement! Peut-être avant l'an 2000 la chose suivra-t-elle au mot, et finira-t-on par comprendre que trois ou quatre mois de travail peuvent économiser des années d'efforts stériles.*[730]

Laisant replace également la découverte d'Hamilton dans le contexte des progrès du XIX$^{\text{ème}}$ siècle: « Il est d'ailleurs certain que dans un enseignement supérieur bien ordonné, concurremment avec le calcul des quaternions, la méthode de Grassmann devrait aussi prendre place, et qu'il y aurait utilité à montrer le lien commun qui unit philosophiquement les découvertes de ces grands esprits »[731].

Une Association internationale pour diffuser les quaternions

Laisant, outre ses travaux mathématiques, prendra une part active dans la diffusion de la méthode des quaternions : notamment à travers l'action de L'Association internationale pour la propagation de l'étude des quaternions et des méthodes qui s'y rattachent[732]. L'idée d'une telle communauté revient dès 1895 à un mathématicien hollandais, Dr. Molenbroeck,

---

[728] [Tait, 1890], p. vi. Rappelons que la première édition date de 1867 et qu'une seconde est publié en 1873. Dans cette préface, les successeurs d'Hamilton Willard Gibbs (1881) est également critiqué et taxé de retarder la diffusion de la méthode des quaternions, à cause de son ouvrage *Vector Analysis* « a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann. ». Enfin, Tait s'en prend aux récentes études allemandes affirmant que dans l'œuvre de Grassmann, se trouve les germes de la théorie d'Hamilton. Il rappelle dans l'article *Quaternions* de l'*Encyclopeadia Britannica* que Hamilton a publié sa théorie un an avant les *Auslehnungslehre* et avait donné dix ans auparavant les principes des deux multiplications vectorielles.

[729] [Berthelot & al., 1885], t. 27, p. 1120. Voir [Ortiz, 2005], p. 151.

[730] Voir également l'avis du directeur de *L'enseignement mathématique* suite à l'article de Fontené, "Sur l'enseignement de la théorie des vecteurs", *L'enseignement mathématique*, vol.1, 1899, p. 50-52.

D'ailleurs en réponse à la question 957 parue dans *L'intermédiaire des mathématiciens* sur l'enseignement des quaternions dans les facultés en France, G. Maupin signale que Paul Morin, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté de Rennes, emploie les quantités dirigés et non les quaternions.

[731] [Berthelot & al., 1885], t. 27, p. 1120.

[732] Voir *L'Enseignement Mathématique*, vol. 1, n°2 et 3, mars - mai 1899, p. 137 et [Kennedy, 1979].

auteur de *Sur l'application des quaternions à la mécanique et à la physique* (1894)*,* appuyé par un Japonais, Shunkichi Kimura[733]. Laisant semble être dès le début en relation avec le Tokyote puisqu'il résume, lors de la séance du 6 mai 1896, une de ses notes aux membres de la SMF intitulée « Certaines applications du calcul des quaternions ». Y sont étudiés de manière plus simple grâce aux quaternions le mouvement d'un point sur une surface et l'épaisseur d'une couche comprise entre deux positions voisines d'une surface fermée[734].

L'idée d'une union des mathématiciens pour promouvoir la méthode d'Hamilton se concrétise lors du congrès de la British Association for the Advancement of science en 1897 : le projet s'étend alors aux autres calculs vectoriels en tenant compte des *Ausdehnungslehre* de Grassmann et en 1899 est créée l'International Association for Promoting the Study of quaternions and Allied Systems of Mathematics[735]. Si Tait est logiquement désigné comme premier président (poste qu'il refusera pour raison de santé), le membre le plus actif de cette association sera son secrétaire : l'écossais Macfarlane, né en 1851 et professeur exilé dans une université américaine puis au Canada, membre de la Royal Society of Edinburgh. Il sera surtout l'auteur d'une *Bibliography of Quaternions and allied Systems of Mathematics* ([Macfarlane, 1904]), regroupant un millier de références depuis les prémisses de la découverte d'Hamilton parfois attribués à Olinde Rodrigues en 1840.

L'Association regroupe donc les savants les plus renommés sur le sujet : on y retrouve Hathaway, Stockes, Tait, Peano, Joly … et Laisant parmi la soixantaine de mathématiciens membres (principalement des américaines et des britanniques). L'Association n'augmentera jamais son nombre d'adhérents initial : malgré les efforts des présidents successifs (comme Charles Jasper Joly, auteur d'un *Manual of Quaternions* en 1905) pour lui donner une envergure internationale et pour élargir le champ des activités du groupe à toute l'algèbre linéaire, malgré l'émergence de nouveaux pôles d'intérêt en Argentine, Russie , Japon, …, la dispersion géographique des membres freine les travaux. Le rapport annuel de la société, publié dès mars 1900, tente de combler cette dernière lacune et évolue progressivement vers la forme d'un vrai journal, complétant à partir de 1905 la bibliographie de Macfarlane et proposant des résumés d'articles parus sur le sujet. Mais le décès de Macfarlane en 1913 et les débuts de la première guerre mondiale ne 1914 signe la fin de l'Association.

---

[733] Molenbroek and Kimura, "To those interested in quaternions and allied systems of mathematics", *Science*, Vol. 2, 42, 1895, p. 524 – 525.

[734] « Vie de la société », *Bulletin de la SMF*, t. 24, 1896, p. 97.

[735] « Chronique, "Association internationale pour la propagation de l'étude des quaternions et des méthodes qui s'y rattachent" », *L'enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 216-217. Voir aussi vol. 10, 1908, p. 333-334, vol. 15, 1913, p. 515 ainsi que les travaux de L. Ortiz.

LA THESE DE 1877

C'est sa première thèse de 1877 qui marque le début des travaux de Laisant sur les quaternions et plus particulièrement sur leurs applications en mécanique. Laisant espère ainsi faire connaître la théorie d'Hamilton en France, démarche courante pour un jeune mathématicien de l'époque où les thèses en mathématiques appliquées représentent une forte proportion des travaux présentés[736].

Écrit majeur, inscrit dans une continuité

Grade nécessitant une licence depuis 1808 (avec les notions de statique, de calcul différentiel et intégral s'y rapportant pour la licence ès mathématiques[737]) et permettant le professorat en université (emploi que n'occupera jamais Laisant), la majorité des thèses se déroulent au sein de la Faculté des sciences de Paris. On assiste par ailleurs à une forte augmentation du nombre de thèses mathématiques dans les années 1870-1874 suivie d'une augmentation plus restreinte jusqu'en 1879, tout cela dans le cadre de l'explosion du nombre de thèses scientifiques dans les années 1870, une thèse comptant alors entre 50 et 100 pages depuis 1852 (les deux thèses de Laisant cumulent 133 pages)[738]. Laisant est âgé de 36 ans lorsqu'il soutient sa thèse, ce qui est sensiblement âgé puisque sur la période 1855-1889, 20% des thèses de mathématiques sont passées avant l'âge de 25 ans et 60% entre 25 et 35 ans. Les thèses en mathématiques comptent les plus jeunes doctorants parmi les thèses scientifiques et la majorité des thèses sont par la suite de plus en plus soutenues entre 25 et 30 ans.[739] Si le cas de Laisant n'est pas isolé, on peut penser que, comme pour G. Halphen, l'accès tardif au grade de docteur est un facteur limitant pour la carrière d'un mathématicien[740].

Le règlement de 1848 permet de ne soutenir qu'une seule thèse et explique que dans le cas où la thèse soutenue ne contient pas de découverte majeure, le sujet abordé pourra être comme à l'accoutumé un sujet d'analyse appliquée à la mécanique rationnelle ou à la

[736] C'est en tout cas l'analyse d'Hélène Gispert qui explique : « Pour un jeune Français, dans les années 1870-1880, les débuts dans la recherche mathématique passent obligatoirement, dans certains domaines, par l'appropriation de théories plus ou moins récentes développées à l'étranger et sinon, totalement inconnues, du moins non diffusées et non enseignées en France. » ([Gispert, 1991], p. 81). Voir également [Hulin, 1990].
[737] Voir le rapport de 1898 de Darboux. Laisant est licencié depuis 1861.
[738] [Hulin, 1990], p. 417.
[739] Ibid., p. 418-419. Remarquons que 20 % des thèses passées entre 1855 et 1869 sont soutenues par des ingénieurs (ils ne seront plus que 3% après 1891).
[740] C'est le point de vue de H. Gispert qui explique au sujet d'Halphen que « sa carrière marginale – il est lieutenant d'artillerie, thésard en 1878 seulement à l'âge de 34 ans, sans poste d'enseignement autre que répétiteur à l'École polytechnique de 1873 à sa mort [certes prématurée], bien qu'élu à l'Académie en 1886 - fait qu'il ne forme aucun élève. » ([Gispert, 1991], p. 102).

mécanique des corps célestes. Il est alors demandé au candidat de présenter un historique complet sur le sujet en question, recommandation généralement suivie par l'ensemble des postulants au grade (voir par exemple les préliminaires à la thèse de Laisant). Les rapports de jury précisent souvent les qualités d'enseignant entrevues chez un candidat (ce qui n'est pas le cas pour la thèse de 1877). Ferry précise les modalités d'évaluation en vigueur avant 1880 : trois lecteurs donnent chacun par écrit leur approbation ou leur désapprobation avant de cosigner le rapport d'ensemble soulignant les qualités de la thèse. Ce rapport est alors consulté par le recteur qui décide de son impression ou s'en réfère au ministre. La thèse est ensuite soutenue en public devant le jury initial ce qui donne lieu à un rapport de soutenance[741]. Pour Laisant, le jury sera constitué de Briot comme président, de Bonnet et Darboux comme examinateurs : la soutenance aura lieu le jeudi 29 novembre 1877.

L'introduction des travaux de 1877 est marquée par la reconnaissance de Laisant envers ses pairs : Hamilton, Bellavitis, Hoüel. Hamilton, père de la méthode depuis ses *Lectures on quaternions* (1853) et auteur de l'imposant *Elements of quaternions* (paru en 1866), est à l'origine d'un véritable mouvement "quaternioniste"[742] outre-manche comptant principalement Tait (*An elementary treatise on quaternion*, 1867) et Kelland (qui en collaboration avec Tait fournit de « nombreuses et intéressantes applications géométriques »[743] à la méthode dans leur *Introduction to quaternions*, 1873).

Bellavitis est présenté comme l'un des principaux continuateurs d'Hamilton en Europe (avec Hankel en Allemagne) depuis la parution de ses travaux en 1858 dans les *Mémoires de la Société italienne des sciences de Modène* ([Bellavitis, 1858]). L'affiliation à la méthode des équipollences est réaffirmée, même si l'équivalence avec les règles du calcul algébrique n'a pas lieu pour les quaternions. La théorie d'Hamilton n'en demeure pas moins « comme une sorte d'extension de sa méthode des équipollences »[744]. Le traducteur de l'*Exposition à la méthode des équipollences* reconnaît surtout des qualités de clarté aux écrits du géomètre italien. Son exposé permet en effet de réfuter les arguments de non-sens opposés aux quaternions à la suite de la présentation d'Allégret, tels que ceux que nous avons déjà signalés. La théorie des quaternions apparaît d'autant plus comme « conçue par Hamilton et exposée par M. Bellavitis. »[745]

---

741 [Hulin, 1990], p. 409.
742 L'expression apparaît par exemple chez Sylvester (voir *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, vol. 4, American Mathematical Soc., 2007, p. 183) « Depuis, en Angleterre et ailleurs, les savants ne dédaignèrent pas de s'occuper de ce nouveau calcul » ([Laisant, 1877a], p. 3).
743 Ibid., p. 4.
744 Ibid., p. 3.
745 [Laisant, 1877a], p. 4.

Hoüel, enfin, est présenté comme le véritable diffuseur de la théorie en France, alors que cette dernière « ne semble pas avoir pris faveur en France. »[746] Avec la dernière partie de sa *Théorie élémentaire des quantités complexes* ([Hoüel, 1867]), le professeur de Bordeaux, après avoir participé à la diffusion de la méthode des équipollences, propose un recueil complet sur les quaternions, avec les travaux des savants précédents (Hamilton, Tait, Hankel, Bellavitis). En outre il y « introduit les plus heureuses modifications aux notations anglaises »[747], ce qui constitue pour Laisant une réelle avancée, pourtant critiquée par Tait. En effet, « il est permis de croire que cette question des notations est pour quelque chose dans l'abandon où la plupart des géomètres français ont laissé les quaternions. »[748] Si bien que Laisant s'appuie sur l'ouvrage de Hoüel, non seulement pour ce qui est des principes supposés connus mais également des notations : « l'introduction des notations françaises, auxquelles je me suis constamment attaché, est de nature à ajouter beaucoup de clarté aux développements. »[749]

Laisant, avec sa thèse, souhaite compléter l'ouvrage de son ami[750] de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (qui s'est restreint quant à lui aux applications géométriques) et a trouvé « intéressant de prendre pour sujet d'étude quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique rationnelle auxquelles se prête heureusement la méthode d'Hamilton »[751]. Notons que Laisant relativise cependant la puissance du calcul des quaternions (« il serait inexact de prétendre que le calcul des quaternions doive détrôner toutes les méthodes précédentes et faire renoncer aux procédés employés jusqu'à présent »[752]). Il préfère y voir, comme il l'avait fait pour le calcul des équipollences, une nouvelle méthode présentant des avantages certains dans la concision des expressions qu'elle établie. Parmi les questions de mécanique traitées, toujours choisies parmi les plus générales, un grand nombre sont dues à Hamilton lui-même, Laisant insiste donc sur la nouveauté du mode d'exposition des trois grandes parties de son mémoire : cinématique, statique et dynamique, avec un point de vue essentiellement analytique : « J'ai cru devoir suivre une marche constamment

---

[746] Ibid., p. 5.
[747] Ibid., p. 5.
[748] Ibid., p. 5.
[749] Ibid.
[750] Ainsi Laisant conclut ces préliminaires :

> *Je ne saurais enfin me dispenser, sans manquer à l'amitié et à la reconnaissance, de payer ici un juste tribut de remerciements à M. Hoüel, dont les conseils affectueux et l'extrême bienveillance m'ont été d'un grand secours, sans parler de son Ouvrage, par lequel il a rendu un véritable service à tous ceux qui s'occupent de Mathématiques en France.*

[Laisant, 1877a], p. 6.
[751] Ibid., p. 5.
[752] Ibid., p. 6.

analytique, et n'appuyer aucun raisonnement sur des considérations géométriques, l'un des principaux mérites des quaternions étant précisément de fournir, à l'aide du calcul, des résultats dont l'interprétation concrète est ensuite immédiate. »[753] Ce point de vue sera pourtant complètement abandonné dans son ouvrage de 1881 où des considérations géométriques seront mieux à même d'exposer la théorie dans son ensemble.

L'intérêt des quaternions en cinématique

Nous traitons ici principalement la première partie de la thèse de 1877. Les notions de cinématique qui y sont proposées traversent l'ensemble de l'œuvre mécanique de son auteur et le travail de 1877 apparaît d'autant plus fondateur de réflexions qui usent également de la méthode des équipollences autour de thèmes récurrents (hodographes, vitesse aréolaire, mouvement à force centrale). Laisant continuera d'y voir le chapitre cinématique comme essentiel et l'objet vecteur comme fondamental pour son étude comme le montre le titre d'une des conférences qu'il donne à l'École polytechnique : *De l'emploi des vecteurs dans quelques questions de cinématique*[754].

La partie cinématique traite donc du cas d'un « vecteur variable »[755] (Laisant emploie le terme dès la première ligne) dépendant du temps. L'équation correspondante

$$\mathrm{X} = f(t)$$

est alors « l'équation la plus générale du mouvement d'un point mobile »[756], i.e. la courbe de l'espace « lieu géométrique de l'extrémité du vecteur X »[757]. Laisant précise qu'une telle équation peut être manipulée par les règles du calcul des quaternions mais également grâce les opérations de différentiation par rapport à la variable réelle t : on obtient alors la vitesse

$$\mathrm{X}'_t = \frac{d\mathrm{X}}{dt} = f'(t).$$

L'auteur introduit d'ailleurs la notion d'hodographe : c'est la trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur X' égal au vecteur vitesse mené à partir de l'origine fixe. Comme le remarque Laisant, le terme et le concept sont d'Hamilton (qui les utilise dans le cadre de la

[753] Ibid.
[754] Voir Léauté, *Cours de mécanique. École polytechnique: 2ème division: 1895-1896* [suivi de] *De l'emploi des vecteurs dans quelques questions de cinématique* [et de] *Un théorème général de mécanique: conférence*[s] *de M. C.-A. Laisant*, École polytechnique, Paris, 1896.
[755] [Laisant, 1877a], p. 7.
[756] Ibid.
[757] Ibid. Remarquons que l'ensemble de la thèse ne comporte aucune figure.

mécanique céleste)[758]. La définition précédente est très proche, bien que plus précise, de celle donnée par Hoüel dans sa *Théorie élémentaire des quantités complexes*[759]. La notion d'hodographe est cependant extrêmement présente dans l'œuvre mécanique de Laisant : particulièrement en 1878 avec son étude sur la cinématique du plan et jusqu'en 1898 dans les pages du *Bulletin* de la SMF.

Remarquons la différentiation par rapport à la longueur d'arc de la trajectoire s qui permet d'écrire

$$\mathrm{X}'_t = \mathrm{X}'_s \, \frac{ds}{dt}$$

et l'utilisation de notations propres à la théorie des quaternions, puisque le vecteur X'_s est un vecteur unitaire, la grandeur de la vitesse s'exprime par le tenseur (selon le terme d'Hamilton) ou la grandeur (selon celui de Bellavitis) :

$$\mathfrak{T}\mathrm{X}'_t = \frac{ds}{dt}\,.$$

De la même manière, la différentiation des relations précédentes permet à Laisant d'introduire les notions d'accélération, d'accélération tangentielle et normale, cette dernière appelant la notion de rayon de courbure.

Si la notion d'hodographe semble propre à Hamilton, Laisant s'appuie sur celle-ci et sur les travaux de Jacques Philippe Binet (176-1856) pour introduire la notion remarquable d'« hodographe aréolaire »[760].

Ici, Laisant considère le cône de sommet O dont chaque vecteur X est une génératrice et pour lequel la trajectoire représente donc une directrice. Le vecteur X décrit pendant un instant dt un triangle infiniment petit de sommet O et de côtés X et X + dX : ce triangle est un élément de surface du cône précédent (Laisant le présente aussi comme le triangle OXV où X est le point mobile et XV la vitesse). Le quotient de l'aire du triangle par dt est bien la vitesse aréolaire introduite par Binet, même si Laisant ne mentionne pas ce nom[761]. L'originalité de la démarche tient dans la représentation de cette vitesse « *en grandeur et en direction,* par une longueur mesurée par le même nombre et portée sur la perpendiculaire élevée en O sur le plan

[758] « *if from the sun, ore other point taken as origin, we draw a serie of vector α' to represent the heliocentric velocities, and give the name of* HODOGRAPH *to the curve which is the locus of thier extremities* »([Hamilton, 1853], p. 613).
[759] « la courbe qui a pour vecteur X' = $f'(t)$ du vecteur X est dite hodographe de l'orbite » ([Hoüel, 1867-1874], p. 572).
[760] [Laisant, 1877a], p. 11.
[761] Sur l'origine de la notion de vitesse aréolaire : voir [Résal, 1862], p. 77.

tangent correspondant »[762]. L'hodographe aréolaire du mouvement est la trajectoire correspondant au vecteur Y représentant cette vitesse en grandeur et en direction et exprimée par :

$$\mathrm{Y} = \mathfrak{V} \,.\, \mathrm{XX}'_t.$$

Laisant précise que lorsque les aires sont parcourues proportionnellement aux temps (vitesse aréolaire constante), l'hodographe aréolaire est une courbe décrite sur une sphère de centre O et que si le mouvement se restreint à un plan passant par O, l'hodographe aréolaire et une droite normale à ce plan.

L'idée de représenter une aire par un vecteur semble donc prendre son origine dans un cadre cinématique lors de cette thèse de 1877. Laisant se libérera du contexte mécanique de cette représentation pour fournir au congrès de l'AFAS de 1899 une réflexion sur l'algébrisation de l'aire d'une surface ([Laisant, 1899a]), comme nous le verrons à la fin de ce chapitre. La relation définissant le vecteur Y peut être différentiée par rapport au temps : on obtient l'accélération aréolaire en grandeur et en direction. Cette accélération aréolaire correspond, en notant XJ l'accélération, à l'aire du triangle OXJ qui n'est autre que la dérivée de l'aire du triangle OXV. Ces considérations seront reprises de manière analogue, on l'a vu, dans le cadre de la théorie des équipollences dans sa « Cinématique du plan » ([Laisant, 1878h]).

Laisant se dirige ensuite progressivement vers la mécanique céleste ou l'étude des mouvements planétaires, thème de prédilection d'Hamilton qui fut nommé de manière précoce astronome royal d'Irlande. Pour cela, il étudie dans un premier temps les caractéristiques cinématiques des mouvements plans[763] avant de s'intéresser au mouvement caractérisé par une accélération passant par un point fixe (accélération centrale) et proportionnelle à la distance entre ce point fixe et le point mobile[764]. Il est donc ensuite question du mouvement à accélération centrale dont la grandeur est inversement proportionnelle au carré de la distance du centre au point mobile (mouvement plan à vitesse aréolaire constante).

L'équation décrivant le mouvement est :

[762] [Laisant, 1877a], p. 11. C'est Laisant qui souligne ici.

[763] En choisissant les coordonnées polaires, il fait ainsi apparaître après dérivation la « vitesse de translation » suivant le rayon vecteur et la « vitesse de circulation » perpendiculaire à ce même rayon vecteur. L'emploi de coordonnées cartésiennes lui permet d'étudier le cas d'un mouvement à accélération constante, c'est à dire d'une trajectoire parabolique.

[764] Les trajectoires étant dans ce cas paraboliques ou hyperboliques. Laisant en déduit l'intérêt, du point de vue cinématique, de l'étude des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole sans pour autant se livrer à de telles études, hors de propos ici.

$$\mathrm{X}''_t = \frac{\mathrm{d}'\mathrm{X}}{\mathrm{d}t^2} = m\,\frac{\mathfrak{U}\mathrm{X}}{(\mathfrak{T}\mathrm{X})^2}$$

($\mathfrak{U}\mathrm{X}$ désignant le vecteur unitaire dirigé suivant le vecteur X, le signe de m dépendant de l'action attractive ou répulsive du point fixe). Laisant l'intègre suivant la méthode d'Hamilton pour aboutir à ce que l'écossais nomme la loi de l'hodographe circulaire[765]. Il obtient dans un premier temps l'hodographe du mouvement :

$$\mathrm{X}'_t = \mathrm{E}\mathrm{C}^{-1} - m\,.\,(\mathfrak{U}\mathrm{X})\mathrm{C}^{-1}$$

où C correspond au double de la vitesse aréolaire, constante dans ce type de mouvement et où E est une constante d'intégration perpendiculaire à C. Comme Hamilton, il montre ainsi que l'hodographe est une circonférence de centre l'extrémité du vecteur constant $\mathrm{E}\mathrm{C}^{-1}$ et de rayon le module constant du second terme du deuxième membre, soit $m/\mathfrak{T}\mathrm{C}$. La trajectoire est donnée ensuite par l'intersection d'un plan et d'une surface du second ordre d'axe E, dont on peut déterminer le foyer, l'excentricité et l'axe focal.

Laisant souligne l'intérêt de la généralisation opérée par Hamilton : c'est-à-dire l'étude du cas d'une accélération centrale quelconque. Le mouvement obéit alors à l'équation :

$$\mathrm{X}''_t = -\,\mathrm{R}\,.\,\mathfrak{U}\mathrm{X}$$

R étant une fonction de la distance r du mobile au point fixe. À l'aide de ce que Hamilton nomme vecteur de courbure (le vecteur X''_s), le calcul du rayon de courbure de l'hodographe permet d'énoncer la règle suivante : « dans tout mouvement dont l'accélération passe par un centre fixe, le rayon de courbure de l'hodographe a pour valeur le produit de l'accélération par le carré de la distance, divisé par le double de la vitesse aréolaire. »[766]. Ce théorème permet à son tour d'énoncer la réciproque de la loi sur l'hodographe circulaire, à savoir : « Pour tout mouvement d'accélération centrale, si l'hodographe du mouvement est un cercle, l'accélération est nécessairement en raison inverse du carré de la distance du centre fixe au point mobile. »[767]. Ces considérations sur les mouvements à force centrale se répètent jusqu'à la communication de Laisant à l'Académie des sciences reprise pour la Société mathématique de France en 1898 : il y reprend d'une manière simple un calcul de rayon de courbure et rappelle la loi de l'hodographe circulaire ([Laisant, 1898d]).

[765] Hamilton, « De la loi de l'*hodographe* circulaire ou d'un nouveau mode de conception géométrique et d'expression en langage symbolique de la loi newtonienne d'attraction », Dublin, 1846 (Extrait du *Bulletin de l'Académie d'Irlande*).
[766] [Laisant, 1877a], p. 20.
[767] Ibid., p. 20.

La partie cinématique se poursuit par l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe[768]. Cette partie est fondamentale comme le souligne Briot dans son rapport de président du jury de thèse. Le calcul des quaternions permet en effet, comme l'énonce Laisant, d'exprimer aisément la rotation d'un vecteur A autour d'un axe fixe pour arriver en A_1. On a alors en effet :

$$L^{-1}\mathrm{A}L = \mathrm{A}_1.$$

Laisant propose comme première application la démonstration du « célèbre théorème, énoncé par d'Alembert, en ce qui concerne un mouvement infiniment petit, et consistant en ce que *tout déplacement d'un solide dont un point est immobile équivaut à une rotation autour d'un certain axe* »[769] : cet axe est l'axe instantané de rotation. Il démontre l'existence d'un quaternion L satisfaisant les relations

$$L^{-1}\mathrm{A}L = \mathrm{A}_1 \text{ et } L^{-1}\mathrm{B}L = \mathrm{B}_1$$

pour A et B deux points du corps devenant A_1 et B_1, en précisant les parties réelle et symbolique du quaternion L, ce qui démontre la proposition.

Le théorème précédent permet d'envisager le mouvement global et continu d'un corps solide non déformable autour d'un point fixe. Laisant montre que la vitesse d'un point X du corps, perpendiculaire au plan défini par OX et l'axe instantané de rotation a pour grandeur le produit de la vitesse angulaire par sa distance à l'axe instantané de rotation[770].

S'intéressant au déplacement total subi par le corps, Laisant cherche ensuite à déterminer l'axe instantané de rotation connaissant ce déplacement total. Par comparaison des différentes expressions obtenues pour la vitesse d'un point X du corps, il obtient un vecteur Z dirigé suivant l'axe instantané de rotation et dont la grandeur est proportionnelle à la vitesse angulaire instantanée[771]. Il rapproche la courbe décrite par l'extrémité de ce vecteur Z de l'hodographe aréolaire utilisé pour le mouvement d'un point dans la mesure où cette courbe (Z) est un moyen de représenter le mouvement du corps.

Du théorème de Coriolis à l'Académie des sciences

La partie cinématique s'achève par des considérations sur les mouvements relatifs. En la présence de deux milieux (M) et (N), le premier supposé en repos absolu et le deuxième mobile, Laisant distingue pour un point X mobile le mouvement relatif de ce point, décrit par

[768] Voir à ce sujet [Sinègre, 1995].
[769] Ibid., p. 22.
[770] En effet, $\mathrm{X}' = \omega\mathfrak{V}.\mathrm{XT} = \omega x \sin(\mathrm{XT})\mathfrak{U}.\mathrm{XT}$.
[771] L'expression :

$$\mathrm{T}\omega = 2L^{-1}L = \mathrm{Z}$$

permet aussi d'exprimer ce vecteur en fonction du quaternion L lié à la rotation finie équivalente au déplacement.

un observateur emporté par ce milieu (N) et son mouvement absolu, rapporté au milieu (M). Le milieu (N) initialement confondu avec (M) subit jusqu'à sa position à l'instant t une translation puis une rotation. Laisant écrit donc le mouvement absolu du point X :

$$\mathrm{x} = \mathrm{s} + L^{-1}\mathrm{x}_r L$$

où s caractérise la translation, L la rotation et x_r est le vecteur correspondant au point X une fois que le milieu (N) a été ramené à sa position initiale. Cette expression sera également étudié par Tait dans *An Elementary Treatise on Quaternions* de 1890[772].

Dérivant la relation précédente[773], il obtient les deux composantes de la vitesse absolue x' : la vitesse relative et la vitesse d'entraînement (obtenue en considérant x_r constant). En dérivant une nouvelle fois[774], Laisant fait apparaître trois composantes pour l'accélération absolue : l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et la dérivée de $L^{-1}\mathrm{x}_r'L$ avec x_r' constant ; ce qui lui permet d'énoncer le théorème suivant :

> *L'accélération absolue s'obtient par la composition :*
> *1° De l'accélération relative ;*
> *2° De l'accélération d'entraînement ;*
> *3° Du double de la vitesse de l'extrémité de la vitesse relative, dans le mouvement de rotation instantanée, cette vitesse relative étant transportée parallèlement à elle-même de manière que son origine tombe en un point de l'axe instantané.*[775]

L'originalité de ce nouvel énoncé du théorème de Coriolis, démontré à l'aide des quaternions[776], permet d'après son auteur de lever toute ambiguïté sur la direction de l'accélération de Coriolis et d'en déterminer la grandeur.

Nous avons noté l'intérêt de Laisant pour proposer de nouvelles démonstrations à des résultats bien connus afin de diffuser les méthodes en question et en montrer leur efficacité et leur généralité ; ses démonstrations sont souvent accompagnées de généralisations et c'est le cas pour le théorème de Coriolis. Mettre à l'épreuve une nouvelle théorie sur des énoncés souvent célèbres ou remarquables afin d'obtenir une démonstration plus simple ou plus concise est le gage d'une bonne promotion au sein de la communauté mathématique.

La généralisation proposée par Laisant fait l'objet de la première des rares interventions de Laisant à l'Académie des sciences. Parmi ses quatre correspondances à l'Académie (1878, 1879, 1892, 1903), trois traitent effectivement de mécanique (théorème de

---

772 Voir [Girard, 1984], p. 27.

773 À savoir :

$$\mathrm{x}' = [L^{-1}\mathrm{x}_r'L] + [\mathrm{s}' + (L^{-1})'\mathrm{x}_r L + L^{-1}\mathrm{x}_r L']$$

774 $$\mathrm{x}'' = [L^{-1}\mathrm{x}_r''L] + [\mathrm{s}'' + (L^{-1})''\mathrm{x}_r L + L^{-1}\mathrm{x}_r L'' + 2(L^{-1})'\mathrm{x}_r L'] + 2[(L^{-1})'\mathrm{x}_r'L + L^{-1}\mathrm{x}_r'L']$$

775 Op. cit. , p. 29.

776 Pour Laisant, « Il semble difficile d'imaginer une démonstration analytique plus simple de ce théorème important » (op. cit., p. 30). L'expression déterminée précédemment pour la vitesse dans un mouvement global permettrait de déterminer d'une autre manière l'expression de cette accélération centrifuge composée.

Coriolis, mouvements relatifs, force centrale) : il semble bien que ce soit par le biais de la mécanique que Laisant pénètre "les mathématiques institutionnelles". Ceci peut être rapproché de l'affirmation, à la fin des années 1870, de l'analyse et dans une moindre mesure de la mécanique appliquée comme des thèmes importants au sein des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*[777], au détriment de la géométrie. Le 29 juillet 1878, sa « Note sur un théorème sur les mouvements relatifs », rapportée par Résal[778], reprend l'expression d'un mouvement relatif proposée dans sa thèse et traite des accélérations de divers ordres liées à ce mouvement. Ne tenant pas compte du vecteur de translation, Laisant écrit

$$\mathrm{Z} = L^{-1}\mathrm{X}L$$

et remarque que dériver *m* fois l'expression en considérant X constant puis à la suite *n* fois en considérant à son tour le quaternion L constant donne le même résultat que si les opérations avaient été opérées dans l'ordre inverse[779]. Cette remarque lui permet de généraliser[780] les expressions de la vitesse, de l'accélération et de la suraccélération à l'accélération d'ordre *n*, à l'aide d'une écriture symbolique afin de retrouver les coefficients adéquats correspondants aux coefficients du binôme $(1 + x)^n$. Ces calculs lui permettent de présenter l'exacte généralisation du théorème de Coriolis de sa thèse de 1877[781]. Il s'en suit une querelle de priorité sur le résultat annoncé qui oppose le jeune docteur en mathématiques à Maurice Lévy.

777 [Gispert, 1993].
778 [Laisant, 1878d], le fait que Résal soit le rapporteur de cette remarque semble ici significatif : on verra l'influence de Résal tout au long de l'œuvre mécanique de Laisant.
779 Il écrit :

$$D^{(m,n)}_{L^m,X^n}Z = D^{(n,m)}_{X^n,L^m}Z$$

780 Pour la vitesse, on retrouve $DZ = D_L Z + D_X Z$

Pour l'accélération, $D^2 Z = D^2_{L^2} Z + 2D^2_{L,X} Z + D^2_{X^2} Z$

Et de manière générale, à l'aide d'une écriture symbolique : $D^n Z = (D_L + D_X)^n Z$

781

> *Soit* O *un point quelconque de l'axe instantané du mouvement d'entraînement à un instant déterminé. Par ce point, soient menées les droites* OU_1, OU_2, …, OU_{n-1} *égales (en grandeurs, directions et sens) à la vitesse relative, ..., à l'accélération relative, à l'accélération relative d'ordre n –* 2. *Considérons maintenant dans le mouvement d'entraînement élémentaire, la rotation autour de l'axe instantané ; et dans ce mouvement de rotation appelons :*
>
> w_{n-1} *l'accélération d'ordre n –* 2 *du point* U_1 ;
>
> w_{n-2} *l'accélération d'ordre n –* 3 *du point* U_2 ;
>
> ……………………………………………….. ;
>
> w_2 *l'accélération du point* U_{n-2}
>
> w_1 *la vitesse du point* U_{n-1}
>
> *Soient enfin* w_n *l'accélération d'entrainement d'ordre n –* 1, et w_0 *l'accélération relative du même ordre.*
>
> *L'accélération absolue d'ordre n – 1 s'obtiendra en composant entres elles les droites*

Polytechnicien (X 1856) et ingénieur des ponts et chaussées, Maurice Lévy (1838-1910) dirige pendant la guerre la fabrication du nouveau matériel d'artillerie. Il est l'auteur d'un important *Traité de Statique graphique* en 1874 et fit progresser la théorie mathématique de l'élasticité, de l'équilibre des terres et de la résistance des matériaux, notamment au cours de sa carrière d'ingénieur. En 1867, sa thèse, suivie d'un essai sur le mouvement des liquides, porte sur les coordonnées curvilignes orthogonales. Joseph Bertrand, titulaire de la chaire de physique générale et mathématique, le choisit pour lui suppléer au Collège de France en 1874 avant qu'il ne devienne professeur de mécanique à l'École centrale des arts et manufacture[782].

Alors qu'il jouit d'une grande autorité, notamment grâce à ses réalisations en tant qu'ingénieur mais aussi grâce à ses recherches théoriques, Lévy rappelle donc, lors de la séance du 5 août 1878, qu'il est l'auteur du même théorème présenté à l'Académie le 9 avril dont une démonstration a été donnée par M. Ph. Gilbert, le 3 juin[783]. Tout ceci est confirmé par Laisant devant la même assemblée le 2 septembre 1878[784].

Statique et dynamique : forces et retour sur les équipollences

Revenons à la thèse de 1877. Avec la partie statique est introduite la notion de force que Laisant prend soin de distinguer de la notion de vecteur :

> *c'est que la position du vecteur* F *ne le modifie en rien du point de vue de ses propriétés analytiques ; il reste toujours égal à lui-même lorsqu'il se transporte ainsi parallèlement ; tandis que l'action de la force, au contraire, est essentiellement dépendante de sa position absolue dans l'espace, en même temps que de sa grandeur et de sa direction.*[785]

$$W_n, W_{n-1}, W_{n-2}, \ldots, W_1, W_0$$

après leur avoir respectivement appliqué les coefficients du développement de $(1+x)^n$, *c'est-à-dire*

$$1, n, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots, n, 1.$$

[Laisant, 1878d], p. 204.

[782] Il accèdera en 1883 à la chaire de mécanique analytique et de mécanique céleste. La même année, Levy sera élu membre de l'Académie des sciences dans la section mécanique. "Maurice Lévy (1838-1910)", *Génie civil*, 1910. « Discours prononcé aux obsèques de M. Lévy par Émile Picard », *CRAS*, 2ème semestre, t. 151, n°14, 1910, p. 603-606.

[783] Lévy Maurice, "Sur une note de M. Laisant intitulée : « Sur un théorème sur les mouvements relatifs »", *Compte-rendu hebdomadaire des séances de l'Académie des sciences*, t. 87, 2ème semestre n° 6, Paris, Gauthier-Villars, 1878, p. 259.

[784] « La réclamation de M. Maurice Lévy est absolument fondée. J'ignorais de la manière la plus complète l'existence de sa Communication et celle de M. Gilbert, et je n'en ai eu connaissance qu'après l'impression de ma note » *Compte-rendu hebdomadaire des séances de l'Académie des sciences*, t. 87, 2ème semestre n° 10, Paris, Gauthier-Villars, 1878, p. 377.

[785] [Laisant, 1877a], p. 30.

Si bien qu'une force appliquée en A sera exprimée par le vecteur F = AF mais accompagnée du vecteur A = OA donnant le point d'application. Les notations de la théorie des quaternions permettent d'obtenir facilement l'expression du moment de la force précédente par rapport à l'origine :

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{V}.\mathrm{AF},$$

ou par rapport à un point quelconque C donné par C = OC :

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{V}.\,(\mathrm{A} - \mathrm{C})\ \mathrm{F}.$$

La notion de couple découle naturellement[786] de ce qui précède et Laisant rend hommage à l'œuvre de Poinsot (1777-1859), proposant la notation

$$\mathrm{F}\begin{pmatrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{B}\end{pmatrix}$$

pour désigner le couple formé de la force F appliquée en A et –F appliquée en B. La manipulation des vecteurs entre parenthèses est aisée et la composition de couples est semblable à une simple addition de vecteurs.

La notion de centre de gravité est introduite concurremment avec celle de « centre de forces parallèles » de Monge[787]. Dans le cas de forces parallèles appliquées en divers points, le centre des forces parallèles est le centre de gravité de ces points affectés de la grandeur des forces appliquées en chacun d'entre eux. En prenant le moment de toutes ces forces par rapport à un axe quelconque, Laisant détermine ce centre de gravité, expression soulignée comme importante[788] mais il ne s'étend guère plus, l'illustrant seulement pour le cas du centre de gravité d'un arc d'hélice homogène et préférant renvoyer explicitement à une addition personnelle à la traduction de la *Méthode des équipollences* : « il est à remarquer que les conclusions trouvées à ce sujet dans le plan s'étendent immédiatement à l'espace, puisque les vecteurs ne sont ici combinés que par voie d'addition »[789]. Ce premier lien tissé entre la théorie des équipollences et celle des quaternions à travers les applications à la mécanique en annonce d'autres sur lesquelles nous reviendrons.

---

[786] « la notion de *couple* s'introduit ici comme d'elle-même, puisqu'on peut dire qu'un couple n'est qu'un certain moment donné en grandeur et en direction » ([Laisant, 1877a], p. 31). Le couple (AF, CF') formé d'une force F appliquée en A et de son opposé appliquée en C est :

$$\mathfrak{V}.\mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{C})$$

expression que Laisant note entre crochets pour la distinguer d'une force ($[\mathfrak{V}.\mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{C})]$).

[787] Monge G., *Traité élémentaire de statique à l'usage des écoles de marine*, Courcier, 1810, p. 25.

[788] $\mathrm{G} = \dfrac{\sum f\mathrm{A}}{\sum f}$, formule qu'il applique à un corps solide, de poids, volume et densité connus. Laisant montre également que ce centre de gravité est le point pour lequel le moment d'inertie polaire (produit de la force par le carré de la distance à un point fixe) est minimum.

[789] [Laisant, 1877a], p. 35. Voir l'addition au n° 120, [Laisant, 1874a], p. 108-110.

Laisant traduit ensuite les conditions d'équilibre d'un corps par le fait que la résultante *et* le couple produit par le transport de toutes les forces en un point quelconque est nul. Si l'une ou l'autre des conditions n'est pas vérifiée, le système tend à produire une translation ou bien une rotation. Si aucune des deux conditions n'est vérifiée, Laisant montre, en cherchant le point X tel que la force résultante transportée au point X soit perpendiculaire au plan du couple résultant transporté en X, qu'il existe une droite « autour de laquelle les forces tendent à faire tourner le solide, et suivant laquelle elles tendent à le transporter. »[790] Il nomme cette droite « l'axe central du système » : « c'est l'axe du mouvement de vis que tendent à produire les forces en question. »[791] Il nomme aussi K « centre du système » le centre de la sphère sur laquelle l'origine se déplace sans que la grandeur du moment complet du système ne varie. Dans le cas où les forces ne sont plus parallèles entre elles mais toutes dans le même plan (qui contient alors aussi K), Laisant retrouve le résultat énoncé par Bellavitis dans son mémoire de 1854, même si la détermination de ce point est différente suivant qu'on utilise « l'algorithme » des équipollences ou celui des quaternions[792]. Dans les deux cas, le point K apparaît comme « le centre de gravité d'un certain nombre de points situés dans un même plan et affectés de masses imaginaires. »[793] La conclusion de ce rapprochement entre les deux théories est éclairante quant aux liens établis par Laisant sur le symbolisme utilisé et la "réalité mécanique" qu'il recouvre :

> *Cette digression relative aux équipollences nous a semblé utile en ce qu'elle montre que les résultats que nous avons obtenus par les quaternions constituent une généralisation de ceux-ci ; de sorte qu'un langage qui paraît tout d'abord exclusivement symbolique prend au contraire une signification* réelle *et* physique *très nette, par le secours des nouvelles méthodes ; et qu'il s'étend même parfois (comme nous venons de le voir en passant des équipollences aux quaternions) sans rien perdre de sa réalité.*[794]

Les applications mécaniques présentées ici ou dans les « Réflexions sur la cinématique du plan » sont l'occasion d'allers-retours entre les théories de Bellavitis et d'Hamilton autour des thèmes de centre de gravité mais aussi, comme on l'a vu, de vitesse aréolaire. Ceci permet de montrer le lien qui unit ces théories en insistant sur la généralisation à l'espace qu'offrent les quaternions. De plus, cette démarche répond aux détracteurs des deux théories en proposant un sens mécanique à donner aux objets manipulés.

---

[790] [Laisant, 1874a], p. 38.
[791] Op. cit.
[792] [Laisant, 1874a], n° 120, p. 107.
[793] [Laisant, 1877a], p. 42
[794] Op. cit., p. 42.

La deuxième partie se conclut par des considérations sur le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe, considérations qui motivent l'introduction de la fonction vectorielle d'Hamilton □X et l'étude de l'ellipsoïde d'inertie[795].

La troisième partie traite de la dynamique. Laisant y établi en premier lieu l'équation générale de la dynamique :

$$\Sigma m\mathfrak{S}.\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}-\mathrm{J}\right)\delta\mathrm{M} = 0\text{[796]},$$

la somme s'étendant aux points matériels M de masse *m* repérés par le vecteur M et subissant une force F = *m*J. Le déplacement élémentaire δM peut se décomposer dans le cas d'un corps solide en une translation et une rotation ce qui permet de scinder en deux l'équation précédente. Laisant en tire de premières conséquences dans le cas d'un solide en mouvement autour d'un point fixe, mouvement qui se caractérise par l'équation :

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathfrak{V}\mathrm{XM}$$

où X est le vecteur que Laisant nomme « vecteur instantané de rotation », dirigé suivant l'axe instantané de rotation et de module égal à la vitesse instantanée de rotation à un instant donné. Cette dernière formule différentiée et combinée aux précédentes permet d'obtenir une expression du mouvement compatible avec le principe des forces vives (« vis viva ») de Leibniz[797]. Dans le cas d'une seule force passant par le point fixe, Laisant retrouve la description du mouvement par Poinsot comme un roulement sans glissement d'un ellipsoïde mobile (« ellipsoïdes des forces vives ») sur un plan fixe.

L'auteur applique également l'équation générale de la dynamique au mouvement d'un système de points matériels libres s'attirant réciproquement en raison inverse des carrés de leurs distances. Il reprend ici le résultat de deux mémoires d'Hamilton publiés dans les *Transactions philosophiques* (1834-1835) où le mathématicien irlandais souligne l'importance de deux fonctions fondamentales liées à ce type de mouvement (« fonction principale » F et « fonction caractéristique » V qui représente d'après Laisant la « force vive accumulée » du système) avant de les étudier en leur appliquant la théorie des quaternions. Le français souligne l'extension possible des propriétés de ces fonctions dans un cas autre que l'attraction planétaire et rappelle les travaux de Jacobi concernant la détermination de celles-

[795] En introduisant la notion d'ellipsoïde réciproque, Laisant redémontre et reformule un théorème de Binet.
[796] Op.cit., p. 50.
[797] Duchesneau François, *La dynamique de Leibniz*, Vrin, 1994, p. 133.

ci à partir d'équations aux dérivées partielles. Il applique la méthode des quaternions pour reprendre les travaux de Jacobi sur la fonction caractéristique[798].

L'étude se poursuit par l'analyse du « mouvement d'un point matériel libre sollicité par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance ». Il y retrouve plusieurs résultats démontrés dans la partie cinématique (loi de l'hodographe circulaire), établit l'équation de la trajectoire correspondante, et renvoie aux travaux d'Hamilton pour d'autres conséquences géométriques (théorème d'isochronisme hodographique par exemple)[799]. Laisant conclut par l'étude des fonctions principale et caractéristique de ce type de mouvement ; il y retrouve le théorème de Lambert par l'emploi exclusif du calcul des quaternions. Cette partie dynamique se termine par l'étude du pendule de Foucault : Laisant présente les équations du mouvement, non-intégrables de manière générale. En reprenant les hypothèses du pendule de Foucault (petites oscillations et assimilation de la terre à une sphère), il établit les équations du mouvement rapporté à un système d'axes mobiles autour de la verticale, ce qui lui permet de reconnaître le « mouvement elliptique d'un point sollicité par un centre fixe en raison directe de la distance »[800]. Ceci conclut cette première thèse, où on a vu des notions fortes se dégager (celle d'hodographe ou de mouvement à force centrale) qui seront réinvesties dans le plan comme dans l'espace.

Accueil de la thèse

Darboux, examinateur, juge ainsi la thèse de Laisant :

> *La première* [thèse] *traite des applications de la théorie des quaternions à la mécanique. Ce sujet n'a pas encore été traité en France. La Faculté a reçu une thèse de M. Allégret sur la théorie des quaternions. M. Hoüel a publié un ouvrage sur le même sujet ; mais les applications à la mécanique y sont à peine indiquées. M. Laisant a traité ses applications à la mécanique avec une parfaite connaissance du sujet. Il a ajouté sur quelques points plusieurs remarques nouvelles, mais en dehors de ces additions, le travail qu'il a dû faire pour s'assimiler une théorie aussi difficile, me paraît devoir lui être compté.*[801]

Le président du jury, Briot, complète cet avis dans son rapport de la soutenance du 30 novembre :

> *La méthode des quaternions, imaginée par le géomètre anglais Hamilton, est encore peu connue en France. […] La thèse sera utile aux jeunes géomètres qui*

[798] [Laisant, 1877a], p. 64.
[799] Ibid., p. 71.
[800] Ibid., p. 77.
[801] A.N. AJ16 5533 cité Dans [Gispert, 1991], p. 328.

> *voudront étudier la méthode des quaternions et comprendre les simplifications qu'elle apporte dans la solution des problèmes de mécanique.*[802]

Les deux hommes reconnaissent donc, si ce n'est l'originalité de ces travaux, du moins leur intérêt dans la mesure où la théorie des quaternions, surtout du point de vue de ses applications, leur semble insuffisamment répandue en France.

Après la publication in extenso de la première thèse de Laisant dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*[803], Brocard consacre une bibliographie aux deux thèses de Laisant dans les pages de la *Nouvelle correspondance mathématique.* Celui qui s'intéressera de près aux autres publications marquantes de Laisant[804], y souligne un peu plus nettement l'intérêt d'un tel travail de diffusion :

> *Il faut le considérer comme une importante contribution à la théorie des quaternions, attendu que la plupart des questions qu'il renferme n'ont pas été complètement traitées dans les ouvrages que nous avons cités* [ceux de Tait, Kelland, Allégret et Houël]. *Il est à souhaiter que, grâce à cet appoint aux travaux d'Hamilton, la théorie des quaternions finisse par prendre en France le rang qu'elle occupe en Angleterre.*[805]

Si une compétition semble engagée entre la France et la Grande-Bretagne, les travaux de Laisant ne peuvent que soutenir les efforts des "quaternionistes" français qui veulent rattraper leur retard face à leurs homologues britanniques[806]. Les efforts déployés par Laisant sont à la mesure de ce retard. Alexander Macfarlane, dans sa bibliographie de référence sur la théorie des quaternions (*Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics,* [Macfarlane, 1904]) dénombre 48 apports de Laisant à la diffusion de méthodes types équipollences ou quaternions, ces derniers travaux étant cependant en minorité.

D'autres mathématiciens français traiteront également des quaternions et de leurs applications en mécaniques. En particulier, trois ans après le doctorat de Laisant, le mathématicien Genty publie dans le *Journal de Liouville* un article intitulé « Applications mécaniques du Calcul des quaternions » ([Genty, 1881]).

L'auteur en question est probablement Paul Genty (X 1881, 1862-1933), ingénieur des mines, élu au sein de la SMF en 1892 grâce à Laisant, secrétaire français de l'Association

[802] A.N. F17 13213 à 13254 cité Dans [Gispert, 1991], p. 328.
[803] Laisant, "Applications mécaniques du Calcul des quaternions", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3ème série, t. 3, 1877, p. 325-400.
[804] Brocard sera l'auteur de trois comptes rendus bibliographiques (sur la thèse de 1877, sur *l'Introduction à la méthode des quaternions* et sur la *Théorie et applications des Equipollences*) dans trois revues différentes (respectivement *NCM*, *NAM*, *Mathesis*).
[805] [Brocard, 1877], p. 116.
[806] Crowe estime, sur l'ensemble de la période 1841-1900, que la production française traitant de la théorie des quaternions représente 9% de la production totale, la production britannique s'élève quant à elle à 60 % ([Crowe, 1994], p. 112-114).

internationale pour la promotion des quaternions[807]. Genty reprend l'étude de l'équilibre astatique effectuée par Darboux[808] en commençant par ses lignes :

> *Le calcul des quaternions commence à prendre faveur en France, grâce aux remarquables travaux de M. Laisant. Cependant il y a encore beaucoup à faire pour arriver à rendre familière aux géomètres français cette méthode si riche en applications, et qui, depuis longtemps déjà, est devenue classique en Angleterre et en Allemagne. Il m'a donc semblé utile et intéressant de prendre pour sujet d'étude, à la suite de M. Laisant, quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique auxquelles se prête d'une manière si heureuse la méthode d'Hamilton*[809]

II.2.2. La pratique de la théorie des quaternions par Laisant

Comme pour les équipollences, la promotion de la méthode d'Hamilton par Laisant repose sur un grand nombre d'applications, particulièrement en mécanique et donc dans le prolongement de sa thèse de 1877. Remarquons aussi la rapide rédaction d'un traité général sur les quaternions, quatre ans seulement après cette thèse. À titre de comparaison, il s'est écoulé treize années entre la traduction de l'ouvrage de Bellavitis sur les équipollences et la parution d'un traité par Laisant sur cette théorie.

APERÇU SUR LA THEORIE DES QUATERNIONS SELON C.-A. LAISANT

En 1881 paraît une œuvre majeure dans l'œuvre de Laisant : son *Introduction à la méthode des quaternions* ([Laisant, 1881a]). La *Notice sur les titres et travaux de C.-A. Laisant* précise les objectifs de l'ouvrage :

> *Cet Ouvrage a eu pour objet essentiel de répandre en France, dans le public mathématique, les notions élémentaires de la méthode des quaternions, en insistant sur les origines géométriques de cette méthode, et en s'efforçant de*

[807] *L'enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 217.

[808] Darboux G., "mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace", *Mémoire de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 2 et 3ème série t. 1, 1877. Cette étude ne semble pas utiliser le calcul des quaternions : Darboux n'est cité qu'une fois dans la bibliographie de Macfarlane pour son ouvrage de 1873 « Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires ».

[809] [Genty, 1881], p. 49. Nous écartons la possibilité que l'auteur soit Maxime Genty (X 1885; 1867-1902), ingénieur des ponts et chaussées à Oran et Sidi-bel-Abbès, membre de la SMF depuis 1872, auteur de nombreuses solutions dans les *NAM* et qui semble intéressé par les travaux de Laisant.

> *présenter la grande découverte de Hamilton sous une forme aussi simple et claire que possible.*[810]

Le titre fait immédiatement penser à l'ouvrage de référence de Kelland et Tait *Introduction to quaternions* paru en 1873. Dans sa préface, Laisant précise que le traité des deux Écossais lui a servi de « modèle »[811], en particulier pour les exercices proposés et ce malgré le désaccord profond qui sépare Tait et Laisant sur le choix des notations que nous avons évoqué. Rappelons que ce dernier a opté, depuis sa thèse de 1877, pour celles de son ami Hoüel qu'il considère comme un véritable perfectionnement de l'œuvre d'Hamilton.

Dans la préface de cette *Introduction*, Charles-Ange Laisant explique tout d'abord que l'idée d'un traité sur les quaternions remonte à l'époque de la thèse qu'il a soutenue quatre ans auparavant. Laisant déplore le peu de temps que ses « occupations nombreuses, multiples et fort étrangères aux mathématiques » [812] lui laissent et le retard pris par cette *Introduction* rédigée pendant « des instants de loisirs » de la période 1877-1881. Cette thèse, nous l'avons signalé, était uniquement centrée sur les applications en cinématique, statique et dynamique de la découverte d'Hamilton. Son auteur renvoyait à la *Théorie des quantités complexes* de Hoüel ([Hoüel, 1867]) pour les fondements de la théorie du mathématicien irlandais. L'ouvrage du bordelais est conséquent et « trop étendu pour être lu par tout le monde (j'entends tous ceux qui s'intéressent aux Sciences mathématiques et qui les cultivent) »[813]. Ici le but de Laisant est sans doute différent du projet de Hoüel : il s'agit de poursuivre, avec de multiples articles sur le sujet, l'œuvre de diffusion de la méthode des quaternions auprès d'un public plus large, amateur au sens le plus noble de mathématiques[814]. Avec cette remarque, se dessine également les contours d'une culture mathématique que défendra Laisant, notamment à travers *L'Enseignement mathématique*, et dont fait parti a priori le calcul des quaternions. L'auteur a donc conçu « sous une forme très élémentaire et très sommaire, un exposé simple des éléments essentiels de la méthode des quaternions. »[815] Il précise un peu plus loin le souci de diffusion qui l'anime :

> *Ceux qui connaissent le Calcul des quaternions ne doivent pas s'attendre ici à rien trouver de nouveau. Par contre, j'espère que les personnes étrangères à cette méthode et qui ont simplement une instruction mathématique ordinaire pourront*

[810] *Notice sur les titres et travaux de C.A. Laisant,* Gauthier-Villars, 1888, p. 22. Notice disponible dans le dossier « Laisant » des archives de l'Académie des sciences.
[811] [Laisant, 1881a], p. VI.
[812] Ibid., p. V.
[813] [Laisant, 1881a], p.V.
[814] Sur la notion d'amateur en mathématiques, voir [Romera-Lebret, 2009], p. 25-36.
[815] Ibid.

> *acquérir, par une lecture un peu attentive de cette* Introduction*, une connaissance suffisante du calcul en question.*[816]

Attentif à ces lecteurs, Laisant décide de dérouler le fil de l'histoire des idées menant aux vecteurs d'Hamilton. Ce récit détaillé, unique dans les écrits de Laisant, nous intéresse dans la mesure où il met en lumière les filiations que Laisant tissent entre les différents concepts qu'il cherche à vulgariser. Tout commence avec Descartes et le calcul sur les longueurs portées sur une droite en tenant compte de leur sens par l'adjonction des signes + et – : « le calcul de ces quantités [positives et négatives], en mettant de côté tout ce qui concerne les imaginaires, c'est le calcul des faits géométriques sur une droite »[817] qui exclut la manipulation de quantités complexes. L'interprétation géométrique des nombres imaginaires, comme celle de Cauchy, est soulignée mais c'est une fois de plus la seule méthode de Bellavitis qui est mise en lumière : « Le calcul des équipollences, c'est-à-dire le calcul des quantités imaginaires, c'est le calcul des faits géométriques dans un plan. »[818] Comme explique Laisant, les tentatives de généralisation à l'espace d'idées semblables à celles de l'Italien ont été nombreuses avant la découverte d'Hamilton : « On peut dire, en résumé, que le Calcul des quaternions, c'est l'Algèbre des faits géométriques de l'espace. »[819]

La présentation choisie ici est basée sur des considérations géométriques, Laisant soulignant « tout l'intérêt qu'il y a, dans une première initiation surtout, à ne pas séparer un seul instant les symboles des faits réels dont ils sont la représentation, et à ne pas laisser l'esprit du lecteur perdre de vue ces faits géométriques, qu'il s'agit d'exprimer et de combiner »[820]. Le choix entre une présentation géométrique ou analytique, i.e. "calculatoire", voire "symbolique", expliquerait donc selon l'auteur la défiance qu'a subie la théorie en France. « Ce procédé d'exposition trop exclusivement analytique est l'une des causes principales de la défaveur dans laquelle les quaternions sont restés si longtemps en France »[821] alors que la situation est tout autre en Angleterre ou aux États-Unis, comme nous l'avons déjà signalé. Laisant annonce cependant la parution imminente de la traduction du livre de Tait, *An elementary treatise on quaternion* par l'Alsacien Gustave Plarr (1819-1892). Deux volumes paraîtront effectivement en 1882 ([Tait, 1882]) et 1884.

---

816 Ibid., p. VI.
817 Ibid., p. VII.
818 Ibid. C'est la simplicité de manipulation des expressions obtenues qui est de nouveau soulignée.
819 Ibid.
820 [Laisant, 1881a], p. IX.
821 Ibid.

Ce calcul s'appuie sur la notion fondamentale de vecteur que Laisant expose dans cette préface par une analogie complète avec les droites équipollentes du plan, telles qu'elles seront présentées en 1887 dans sa *Théorie et applications des équipollences*:

> *Le premier élément à considérer, par analogie avec le plan, c'est la droite limitée qui, partant de l'origine, aboutit à un point quelconque, et que l'on représentera par un seul symbole. Comme deux droites, toujours par analogie, doivent être géométriquement égales (ou équipollentes) lorsqu'elles ont même longueur, même direction et même sens, on peut définir le symbole unique qui les représentera l'une ou l'autre par l'expression d'une translation. C'est à ce symbole qu'on donne le nom de* vecteur*, et les vecteurs sont la base fondamentale, l'élément essentiel et primordial de la méthode des quaternions*[822].

Le lien tissé entre le symbole vecteur et la translation qui lui est associée, ainsi que la notion d'équipollence de deux droites prolongée à l'espace apparaissent fondamentaux dans la présentation que donne Laisant de la méthode d'Hamilton, sans chercher à la fonder sur des considérations plus générales ou métaphysiques comme le fit l'Irlandais avec la notion de « Temps pur »[823].

Le prolongement des résultats de la méthode des équipollences ne trouve ses limites qu'au moment de la multiplication de deux vecteurs. Il est alors nécessaire de considérer le « rapport géométrique » de ces deux vecteurs, i.e. la notion de « biradiale », et de s'affranchir de la propriété de commutativité de la multiplication ce qui pour Laisant constitue non pas une réelle difficulté mais bien au contraire une caractéristique de cette algèbre des faits de l'espace : « Mais cet inconvénient résulte de la nature même des choses. Il représente la traduction exacte, formelle, d'un fait précis »[824]. Le calcul obtenu recèle au contraire bien d'autres avantages comme « les ressources que présente cette algèbre, la concision qu'elle permet d'introduire dans les calculs, le caractère intuitif qu'elle donne à certaines solutions, l'étendue et la variété des applications auxquelles elle se prête »[825].

Cet aspect de la méthode des quaternions n'est cependant pas exposé dans cette *Introduction* qui fait office d'*«* initiation *»* (c'est la première occurrence de ce terme chez Laisant bien avant son ouvrage de 1906). L'auteur s'est par contre attaché « à ne pas séparer un seul instant les symboles des faits réels dont ils sont la représentation, et à ne pas laisser l'esprit du lecteur perdre de vue ces faits géométriques, qu'il s'agit d'exprimer et de

[822] Ibid., p. VIII. La remarque précédente permettra aussi à Laisant de choisir deux vecteurs ayant même origine pour introduire la notion de biradiale.
[823] [Flament, 2008a] et [Flament, 2003], p. 352-362.
[824] [Laisant, 1881a], p. IX.
[825] Ibid.

combiner »[826], s'assurant d'éviter les reproches adressés à d'autres expositions comme celle d'Allégret « trop exclusivement analytique [s] »[827]. Quant aux notations, l'auteur reste fidèle aux conventions de son ami Hoüel déjà adoptées pour sa thèse en 1877 : utilisation de caractères gothiques pour les opérations propres aux quaternions et d'un style de caractère spécifique à la nature des objets désignés, l'abandon du signe □ concernant les fonctions vectorielles linéaires faisant exception.

La préface se conclut par les remerciements aux amis fidèles qui ont participé à l'écriture de l'ouvrage : Hoüel pour ses conseils et Lucas pour la relecture qu'il a faite, auxquels s'ajoute Genty, également intéressé par la méthode des quaternions. Elle est suivie d'une courte bibliographie chronologique où apparaissent principalement les ouvrages précédemment cités par Laisant ou d'autres contributions, celles d'Hamilton surtout, de Bellavitis, ou un grand nombre de communications de Tait ainsi que sa thèse de 1877.

Les grands principes de la théorie des quaternions sont traités principalement dans les deux premiers chapitres ainsi que le cinquième (différentiation des quaternions) ; les chapitres 3, 4, 6, 7, 8 proposent respectivement les études de la ligne droite et du plan, du cercle et de la sphère, de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, auxquelles s'ajoutent les formules du chapitre 9. On trouve notamment dans ce chapitre l'expression analytique de la rotation d'un vecteur ou d'une biradiale autour d'un axe, dont Laisant fera usage par la suite[828]. L'ouvrage se conclut par des considérations sur les équations du premier degré (chapitre 10) et une étude des surfaces du second ordre (chapitre 11). Nous limitons notre exposé aux deux premiers chapitres, pour mieux souligner l'usage particulier de la notion de biradiale dans cette *Introduction*.

L'exposé commence par l'élément fondamental que représente le vecteur comme l'a expliqué l'auteur dans sa préface. Il donne dès la première ligne de son *Introduction* de 1881 la définition géométrique de l'objet vecteur : « Un vecteur est l'expression d'une translation rectiligne »[829]. De l'égalité de deux translations découle donc l'égalité de vecteurs. Un vecteur est souvent désigné par une seule lettre, son extrémité, lorsque le vecteur a pour origine un point fixe de l'espace. Un même symbole peut ainsi désigner deux droites de l'espace ayant même longueur, direction et sens. Laisant adopte l'expression « toute naturelle de *grandeur »* pour désigner la longueur du vecteur, comme Bellavitis l'employait dans sa méthode des

[826] Op. cit.
[827] Op.cit.
[828] « C'est dans ce sens, d'une manière générale, que nous pouvons considérer l'opération $A^{-1}(\ )A$ comme représentant une rotation, quelle que soit l'expression géométrique qui figure dans les parenthèses. » ([Laisant, 1881a], p. 172). Voir [Waerden, 1985], p. 185.
[829] [Laisant, 1881a], p. 1.

équipollences, et délaisse le vocabulaire plus complexe d'Hamilton, c'est-à-dire le terme de « tenseur », ne conservant que la notation correspondante. Il écrit donc :

$$\text{gr OA} = \mathfrak{T}\text{OA} = \mathfrak{T}\text{A} = \text{a}$$

La notion de vecteurs opposés (de somme vectorielle nulle) et l'utilisation des signes + et − sont introduites en considérant une figure subissant une translation de vecteur AB puis de vecteur BA et qui donc « revient à sa position première, comme si elle avait gardé le repos »[830]. Laisant montre ensuite que les règles habituelles de l'algèbre s'appliquent aux sommes et différences de vecteurs ayant même direction ; il traite dans ce cas particulier la multiplication d'un vecteur par un nombre entier, puis fractionnaire puis incommensurable et le rapport de cette multiplication avec le parallélisme de deux vecteurs. Le vecteur $\mathfrak{U}\text{A}$ est le vecteur ayant même direction et même sens que le vecteur A mais dont la longueur est égale à l'unité si bien que :

$$\text{A} = \mathfrak{T}\text{A}.\mathfrak{U}\text{A} = a\,\mathfrak{U}\text{A}$$

L'addition et la soustraction de vecteurs sont étendues à des vecteurs de directions quelconques et Laisant démontre l'importante propriété de commutativité de l'addition de vecteurs, alors qu'il a détaillé les conséquences de la non-commutativité pour la multiplication dans sa préface. Les remarques qui suivent se réfèrent directement à la théorie des équipollences et plus précisément à l'*Exposition de la méthode des équipollences* que Laisant a traduite sept ans plus tôt. En effet, Laisant remarque qu'un vecteur AB peut s'écrire sous la forme XB − XA, ce qui lui permet de montrer que AC − BD = DB − CA. Si l'utilisation de la règle de Bellavitis est moins évidente ici, la filiation entre la théorie de l'Italien et le traité de Laisant est évidente[831].

Partant du fait que la somme des vecteurs représentés par les côtés d'un polygone (fermé) est nulle, Laisant donne ensuite l'égalité correspondant à la coplanarité de trois vecteurs (cas d'une "famille liée de trois vecteurs de l'espace") :

$$a\text{A} + b\text{B} + c\text{C} = 0$$

qui montre l'unicité des coefficients a, b et c (qui ne seront nuls que dans le cas de vecteurs non coplanaires). Laisant insiste sur l'ensemble de ces propriétés et remarque la possibilité de décomposer un vecteur X suivant les trois vecteurs A, B et C. Ces mêmes propriétés sont appliquées à l'alignement de trois points et à la coplanarité de quatre points. Ce premier

[830] Ibid., p. 3.
[831] Laisant remarque de la même façon que si $m\text{A} + n\text{B} = 0$, A et B étant deux vecteurs de directions différentes, alors $m = 0$ et $n = 0$, ce qui est à rapprocher de la deuxième règle du mémoire de 1854 de Bellavitis ([Laisant, 1874a], p. 17).

chapitre traitant de "propriétés linéaires" des vecteurs se conclut par la notion de « vecteur moyen », c'est-à-dire par celle de « centre des moyennes distances » ou « point moyen » d'un système de points auxquels sont assignés des poids égaux ou non.

Le deuxième chapitre qui traite de la multiplication et de la division de vecteurs débute par un avertissement. Si les règles du calcul algébrique s'appliquaient jusqu'alors comme cela a été signalé à de nombreuses reprises et comme Bellavitis l'avait déjà remarqué dans son traité de 1854, les notions suivantes dépendent de définitions et de conventions particulières. Ceci est un des points qui distingue le calcul des équipollences de la théorie des quaternions.

La présentation de C.-A. Laisant s'appuie sur la notion de « rapport géométrique » d'un « vecteur initial » OA et d'un « vecteur final » OB ayant même origine O. Ce rapport géométrique ou « biradiale » est noté $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ (c'est la notation algébrique, déjà présente chez Hoüel) ou AOB. Sans en donner immédiatement une définition précise, l'auteur indique que la notion de biradiale englobe quatre informations ou quantités algébriques correspondant à la grandeur de la biradiale (rapport des longueurs des vecteurs), à son angle (formé par les deux vecteurs) et enfin aux conditions caractérisant l'orientation du plan formé par les deux vecteurs. À l'orientation correspond l'axe de la biradiale (droite perpendiculaire au plan formé par OA et OB et passant par O). Cette définition est aussi celle que l'auteur présente dans l'article « Biradiale » de *La Grande Encyclopédie*[832]. Deux biradiales de même module, même angle et même axe seront donc dites égales.

Avec ces quatre éléments, Laisant prépare la notion de quaternion, comme Tait dans son *Traité*[833] à la différence que ce dernier n'utilise pas la notion de biradiale, pourtant présente chez Hamilton. Remarquons que l'approche de Hoüel dans sa *Théorie des quantités complexes* est sensiblement différente. Le savant bordelais introduit la notion de biradiale d'abord dans le plan formé par les deux vecteurs OM et ON comme l'opération consistant à "transformer" un vecteur OM en un vecteur ON (par dilatation et rotation).

Pour additionner deux biradiales AOB et COD, Laisant se ramène par dilatation de la deuxième biradiale et rotation de chacune d'entre elles (ce qui ne les altère pas) à la somme de deux biradiales AOB et AOD. Si OE est la somme des vecteurs OB et OD, « Nous dirons, par définition, que la biradiale AOE est la somme des deux biradiales primitives »[834]. On retrouve

[832] [Berthelot & al., 1885], t. 6, p. 903-904.
[833] [Tait, 1882], § 47, p. 47.
[834] [Laisant, 1881a], p. 31.

l'idée de l'avertissement de début de chapitre et, chose inhabituelle chez Laisant, une définition posée arbitrairement sans plus de justification géométrique. Il écrit :

$$AOB + AOD = AOE,$$

mais la notation algébrique d'une biradiale a cet avantage d'éclairer la définition :

$$\frac{OB}{OA} + \frac{OD}{OA} = \frac{OB + OD}{OA}.$$

La somme de deux biradiales permet également de définir une décomposition particulière d'une biradiale AOB. Dans le plan AOB, Laisant projette B sur la droite OA (respectivement sur la perpendiculaire à OA passant par O) en P (respectivement en Q) et peut alors écrire :

$$AOB = AOP + AOQ$$

(dans le sens de l'addition précédente) : la biradiale AOB se décompose en une « biradiale numérique » (AOP) et une « biradiale rectangle » (AOQ). Il montre que l'addition de deux biradiales peut s'opérer par somme distincte de leurs biradiales numériques et rectangles (figure 12), que la somme de deux biradiales rectangles est une biradiale rectangle (figure 13).

Il décide alors de représenter la biradiale rectangle AOB par un vecteur OB', perpendiculaire au plan AOB, dont la grandeur est le quotient de celle de OB par celle de OA et dont le sens est clairement défini à partir de l'orientation du plan AOB. La somme de deux biradiales rectangles revient alors à la somme des vecteurs les représentant, avec les propriétés qui en découlent (voir le premier chapitre). Finalement, Laisant s'achemine progressivement par diverses considérations géométriques à l'idée de quaternion puisque désormais une biradiale quelconque « se présentera sous la forme d'une quantité numérique, plus un vecteur »[835], correspondant respectivement à sa biradiale numérique et sa biradiale rectangle.

Laisant explique ensuite que la multiplication de deux biradiales quelconques peut se ramener au cas de la multiplication d'une biradiale AOB par la biradiale BOC et affirme comme précédemment : *«* Nous dirons, *par définition*, que le produit de la première par la seconde est égal à la biradiale AOC *»*[836]. Une fois encore, le caractère arbitraire de ce choix est souligné. L'écriture algébrique met cependant en évidence le procédé utilisé :

$$\frac{OB}{OA}\frac{OC}{OB} = \frac{OC}{OA}.$$

[835] Ibid., p. 34.
[836] Ibid., p. 35.

L'auteur montre immédiatement que cette multiplication n'est en générale pas commutative. Cette non-commutativité implique notamment une définition là encore arbitraire de la division de deux biradiales : le dividende devra être égal au produit du diviseur par le quotient. Laisant réalise dès ici le rapprochement entre biradiale et division de vecteurs dans le cas de vecteurs perpendiculaires OA et OB ; il écrit

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{OC},$$

d'après les conventions de représentation d'une biradiale par un vecteur mais approfondit ce point plus loin dans le chapitre. La notation algébrique adoptée par Laisant permet aussi de présenter la division de deux biradiales ayant même vecteur initial :

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} : \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}.$$

La multiplication et la division de biradiales, notamment de biradiales rectangles, ayant été définies et commentées, Laisant peut à présent introduire les célèbres formules inscrites par Hamilton sur le pont de Broom à Dublin. Dans un repère correctement orienté d'axes rectangulaires dirigés suivant trois vecteurs unitaires $\mathrm{OI}_1 = \mathrm{I}_1$, $\mathrm{OI}_2 = \mathrm{I}_2$, $\mathrm{OI}_3 = \mathrm{I}_3$, les considérations précédentes sur les biradiales et leurs représentations permettent à l'auteur d'affirmer :

$$\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1} = \mathrm{I}_3, \frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_2} = \mathrm{I}_1, \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_3} = \mathrm{I}_2,$$

et donc, d'après le paragraphe sur la division,

$$\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_2\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_3\mathrm{I}_2.$$

Par des considérations similaires sur les biradiales dites « conjuguées », Laisant retrouve l'ensemble des « relations fondamentales auxquelles satisfont les unités rectangulaires »[837] :

$$\begin{array}{llll} (1) & \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 = -\mathrm{I}_3 & \mathrm{I}_2\mathrm{I}_3 = -\mathrm{I}_1 & \mathrm{I}_3\mathrm{I}_1 = -\mathrm{I}_2 \\ (2) & \mathrm{I}_2\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_3 & \mathrm{I}_3\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1 & \mathrm{I}_1\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_2 \\ (3) & \mathrm{I}_1^2 = \mathrm{I}_2^2 = \mathrm{I}_3^2 = -1 & & \end{array}$$ [838]

Immédiatement, une interprétation géométrique est proposée : « la multiplication d'un vecteur unitaire A par un vecteur unitaire perpendiculaire B a pour effet d'imprimer au vecteur A une rotation d'un angle droit autour de B, et dans le sens positif »[839].

[837] Ibid., p. 40.
[838] Ibid.
[839] Ibid., p. 41.

Finalement, Laisant établit explicitement la définition d'un quaternion. Comme il l'a montré précédemment, une biradiale notée Q peut se décomposer en une partie algébrique (ou partie « réelle » ou « scalaire ») et une partie rectangulaire (ou partie « vectorielle » ou « symbolique »), elle-même représentée par un vecteur. Il écrit :

$$Q = \mathfrak{S}Q + \mathfrak{V}Q = Q_0 + Q_i,$$

ou encore, en introduisant les coordonnées du vecteur Q_i dans un repère convenable, :

$$Q = Q_0 + q_1 \mathrm{I}_1 + q_2 \mathrm{I}_2 + q_3 \mathrm{I}_3 :$$

> *C'est à ce symbole à quatre termes, dont un réel et trois symboliques, que l'on donne le nom de* QUATERNION.
> *Un quaternion est donc l'*expression analytique *d'une* biradiale.[840]

Remarquons qu'immédiatement Laisant définit un « quaternion unitaire » ou « verseur » dans le cas d'une biradiale où les vecteurs A et B sont de même module. En notant γ l'angle AOB et Q un vecteur unitaire perpendiculaire au plan AOB « tel que la rotation de OA vers OB soit positive par rapport à ce vecteur »[841] (Q est l'axe de la biradiale) :

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \cos\gamma + \mathrm{Q}\sin\gamma \ .$$

Il poursuit : à une biradiale quelconque correspond une biradiale unitaire ayant même plan et même angle, si bien qu'un quaternion peut s'exprimer comme le produit de son module et de son verseur. Laisant démontre ensuite que la multiplication de biradiales est distributive par rapport à l'addition en ce qui concerne le multiplicateur (i.e. à gauche) et le multiplicande (i.e. à droite). Cette dernière propriété permet de remplacer un quaternion quelconque par son expression analytique, ce qui montre l'associativité des quaternions puisque l'associativité de la multiplication des unités vectorielles rectangulaires I_1, I_2, I_3 a été démontrée précédemment. Cette propriété d'associativité est essentielle puisqu'elle souligne que la multiplication de deux quaternions possède toutes les propriétés habituelles sauf la commutativité : « Plusieurs démonstrations directes et purement géométriques ont été données ; mais presque toutes sont d'une assez grande complication, tandis que la marche que nous venons de suivre, et qui consiste à passer par la propriété distributive pour établir la propriété associative en général, nous semble aussi naturelle et beaucoup plus simple. »[842]

Laisant montre ensuite que le produit de deux vecteurs OA et OB est un quaternion dont la partie réelle est la puissance de l'origine par rapport au cercle de diamètre AB (au

---

[840] Ibid., p. 42.
[841] Op.cit., p. 43. Le terme verseur est justifié en considérant la rotation induite par la multiplication d'un vecteur par l'expression cos γ + Qsin γ.
[842] Ibid., p. 47.

signe près) et la partie symbolique est un vecteur dont le module est l'aire du parallélogramme construit sur OA et OB et dont la direction est perpendiculaire au plan AOB [843]. Sa démonstration est volontairement éloignée de toute considération sur les coordonnées, même si cette possibilité est évoquée. Le cas du quotient de deux vecteurs quelconques est traité immédiatement après, sachant que la biradiale AOB est précisément le quotient $\frac{B}{A}$.

La notion de biradiale est donc prépondérante dans cette *Introduction*, comme elle l'est aussi chez Hoüel, mais avec un point de vue différent. Par soucis de simplicité, la définition d'une biradiale reste allusive et la notation algébrique vient au secours de définitions a priori arbitraires. Les bases géométriques de l'ouvrage sont plutôt visibles dans les manipulations opérées sur les vecteurs, souvent accompagnées de figures et les énoncés des nombreux exercices qui accompagnent l'introduction de la notion de quaternion.

QUELQUES EXEMPLES D'ECRITS D'UN "QUATERNIONNISTE"

Réécriture de résultats à l'aide des quaternions

La théorie des quaternions, comme celle des équipollences, permet à Laisant de redémontrer certains résultats d'une manière qui lui semble plus rapide, simple, voire « intuitive ». Nous prenons comme nouvel exemple de cette démarche la communication du 31 juillet 1878 à la Société mathématique de France : « Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité » ([Laisant, 1878f]). L'auteur y redémontre deux théorèmes énoncés par Lagrange en 1783 et parus dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*[844]. Il explique ses motivations : « Sans être difficile, l'analyse de Lagrange présente encore des calculs développés. On peut arriver plus rapidement, par la méthode des quaternions, à établir la proposition »[845]. Laisant choisit de débuter par la démonstration du théorème II initial :

> THEOREME II - *La somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à un point quelconque donné est égale au produit de la somme des*

[843] L'auteur tient à signaler que $(AB)^2$ est différent de A^2B^2. Le cas du produit de plusieurs facteurs est traité plus loin. L'auteur propose notamment l'interprétation de la partie réelle du produit de trois vecteurs OA, OB, OC comme le volume au signe près du parallélépipédique construit sur les côtés OA, OB et OC, ou six fois le volume du tétraèdre OABC (le module de la partie symbolique est également exprimé entre autre en fonction des aires de OAB et OBC).

[844] Laisant renvoie à *Œuvres de Lagrange. Tome 5 / publiées par les soins de M. J.-A. Serret [et G. Darboux]*, Gauthier-Villars (Paris), 1867-1892, p. 535-54.

[845] [Laisant, 1878e], p. 193.

> *masses par le carré de la distance de ce point au centre de gravité de toutes ces masses, plus à la somme des produits des masses multipliées deux à deux entre elles, et par le carré de leur distance respectives, cette dernière somme étant divisée par la somme même des masses.*[846]

Nous conservons les notations de Laisant si bien que les vecteurs correspondant aux points affectés des masses m_p sont notés A_p (ce sont les extrémités des vecteurs ayant pour origine le point quelconque O du théorème).

Le vecteur G correspondant au centre de gravité vérifie :

$$\Sigma m\mathrm{A} = \Sigma m\mathrm{G}.$$

Laisant élève au carré :

$$\Sigma m^2\mathrm{A}^2 + 2\Sigma m_p m_q S\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q = (\Sigma m)^2\mathrm{G}^2$$

ou

$$\Sigma m^2\mathrm{A}^2 = (\Sigma m)^2\mathrm{G}^2 - 2\Sigma m_p m_q S\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q$$

la dernière somme portant sur tous les indices p et q distincts.

Or on vérifie que :

$$\Sigma m^2\mathrm{A}^2 + \Sigma m_p m_q(\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{A}_q^2) = (\Sigma m).\Sigma m\mathrm{A}^2.$$

Donc, ajoutant de part et d'autre $\Sigma m_p m_q(\mathrm{A}_p^2 + \mathrm{A}_q^2)$ et comme

$$(\mathrm{A}_p - \mathrm{A}_q)^2 = \mathrm{A}_p^2 - 2S\mathrm{A}_p\mathrm{A}_q + \mathrm{A}_q^2,$$

Laisant en déduit :

$$(\Sigma m).\Sigma m\mathrm{A}^2 = (\Sigma m)^2\mathrm{G}^2 + \Sigma m_p m_q(\mathrm{A}_p - \mathrm{A}_q)^2.$$

Divisant par Σm, il obtient la stricte traduction du théorème II :

$$\Sigma m\mathrm{A}^2 = \Sigma m.\mathrm{G}^2 + \frac{\Sigma m_p mq\left(\mathrm{A}_p - \mathrm{A}_q\right)}{\Sigma m}.$$

En choisissant pour origine le centre de gravité G des masses, le premier terme du deuxième membre s'évanouit et on obtient le théorème I de Lagrange que ce dernier avait choisi de montrer en premier. Cet article est remarqué notamment par Darboux qui propose une démonstration différente s'appuyant sur une remarque de Leibniz dans le volume suivant du même *Bulletin*[847].

Quaternions et rotations

Dans son *Introduction à la méthode des quaternions*, Laisant signale déjà l'intérêt de l'expression analytique d'une rotation dans le domaine de la mécanique (chapitre 9). Ce

---

[846] Ibid.

[847] [Darboux, 1879], Darboux Gaston, " Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité", *BSMF*, t. 7, 1879, p. 7-12.

résultat est réinvesti dans le cadre d'une généralisation de la communication faite au congrès de l'AFAS de 1877 ([Laisant, 1877c]). L'auteur de « Sur quelques propriétés des polygones » y étend aux polygones gauches les considérations précédentes, et ce à la suite de la lecture d'un article de Résal sur le même sujet ([Résal, 1881]). L'article « Sur certaines propriétés des centres de gravité » ([Laisant, 1882d]) paru dans le *Bulletin* de la SMF après la communication du 20 janvier 1882 est composé de quatre résultats s'enchaînant pour aboutir à une application physique. L'auteur considère un polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ de l'espace. Chacun des côtés A_iA_{i+1} tourne d'un angle donné autour d'axes parallèles passant respectivement par les sommets A_i, de telle manière que les points A_{i+1} se retrouvent en B_{i+1}.

Cette rotation est représentée par un quaternion Q et donc, s'appuyant sur un résultat paru dans son *Introduction*, Laisant obtient les n expressions dont nous donnons ici la forme générale

$$A_iB_{i+1} = Q^{-1}.\ A_iA_{i+1}.\ Q.$$

Il écrit ensuite :

$$A_1B_2 = B_2 - A_1$$

ce qui permet d'écrire, par linéarité de la multiplication par un quaternion :

$$B_{i+1} - A_i = Q^{-1}A_{i+1}Q - Q^{-1}\ A_i\ Q.$$

Par somme, il écrit finalement :

$$\Sigma B - \Sigma A = 0,$$

ce qui démontre que les points B_1, B_2, …, B_n et A_1, A_2, .. A_n ont le même centre de gravité.

De manière analogue, mais sans l'aide des quaternions, Laisant montre que si chaque segment A_iB_{i+1} est divisé dans le même rapport par des points C_{i+1}, « le centre de gravité des points de la division C sera encore le même que le centre de gravité de points A »[848].

Le premier résultat se généralise à un système de droites quelconques dans l'espace A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, les axes de rotations passant par les points A_i étant toujours parallèles, l'angle et le sens de rotation étant fixés. Les points B_i sont transportés en B'_i et à chaque point A_i, B_i, B'_i est attribuée une masse m_i. Laisant note G_a, G_b et $G_{b'}$ les centres de gravité des points A, B et B'. L'auteur peut annoncer que « le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b tournant autour d'un axe de rotation passant par G_a, parallèle aux premiers, et cela du même angle et dans le même sens. »[849]

848 [Laisant, 1882e], p. 42. Il considère les différentes formes de l'expression :

$$A_iC_{i+1} = k\ A_iB_{i+1} \text{ ou } C_{i+1} - A_i = k(B_{i+1} - A_i)$$

et additionne:

$$\Sigma C - \Sigma A = k(\Sigma B - \Sigma A) = 0.$$

849 Ibid.

La démonstration est analogue à la première si ce n'est que la somme finale est remplacée par une combinaison des différentes égalités, chacune d'entre elles étant multipliée par la masse m_i correspondante ce qui permet à Laisant de noter que :

$$\Sigma m\mathrm{B}' - \Sigma m\mathrm{A} = Q^{-1} . \Sigma m\mathrm{B} . Q - Q^{-1} \Sigma m\mathrm{A} . Q$$

puis de diviser par Σm

$$\mathrm{G}_{b'} - \mathrm{G}_a = Q^{-1} \mathrm{G}_b Q - Q^{-1} \mathrm{G}_a Q = Q^{-1} (\mathrm{G}_b - \mathrm{G}_a) Q$$

ou

$$\mathrm{G}_a\mathrm{G}_{b'} = Q^{-1} (\mathrm{G}_a \mathrm{G}_b) Q,$$

ce qui conclut la preuve.

De la même manière, sans en donner la démonstration, l'auteur énonce que si des points C_i divisent dans un même rapport chacune des droites $\mathrm{A}_i\mathrm{B}'_i$, leur centre de gravité G_c divisera dans ce rapport $\mathrm{G}_a\mathrm{G}_{b'}$. On retrouve, grâce au calcul des quaternions, les généralisations des différents résultats énoncés initialement dans le plan grâce à la méthode des équipollences.

L'article se conclut de manière originale par la retranscription sous « une forme physique »[850] des résultats précédents. Sous cette forme, l'auteur introduit la notion d'axe « moyen » de rotation pour des corps de même nature tournant de manière semblable autour d'axes parallèles. "L'aspect physique" de la question provient que ces corps sont plongés dans un milieu dont la température varie (ce qui entraîne leur dilatation ou leur contraction dans le même rapport)[851] : « Leur centre de gravité se meut comme s'ils appartenaient à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers, et avec la même vitesse angulaire. »[852]

Questions récurrentes autour des notions de vitesse aréolaire et d'hodographe

Si Laisant s'emploie à diffuser la théorie des quaternions en France durant les années 1880-1890, l'occasion lui est aussi donnée de présenter les vertus de la méthode aux lecteurs d'une revue mathématique portugaise créée par Francisco Gomes Teixeira.

Francisco Gomes Teixeira (1851-1933) a étudié à l'Université de Coimbra où il obtient son doctorat en 1875 - avec une thèse sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre[853] - et dont il devient membre en 1876. Il est l'auteur de nombreux articles en analyse d'abord, puis en géométrie dans les années 1890. Son œuvre principale,

[850] [Laisant 1882e], p. 44.
[851] Ces corps contiennent les droites $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ dont les longueurs varient avec la température du milieu.
[852] Ibid. C'est cet axe que Laisant nomme axe moyen de rotation.
[853] C'est également le sujet de trois articles parus dans le *BSMF*.

traduite en français en 1908-1909, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* a contribué à l'obtention du prix de l'Académie royale des sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid (1899). Par les nombreuses correspondances qu'il entretient ou la création en 1877 de la plus importante revue de mathématiques portugaises : le *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, il veut rompre l'isolement dans lequel se trouvent les sciences mathématiques au Portugal. Il contribua également aux recherches sur l'histoire mathématique de son pays avec son ouvrage de référence *History of mathematics in Portugal* (1934)[854]. Il est en outre membre du comité de patronage dès les débuts de *L'Enseignement mathématique* en 1899 pour lequel il écrira quatre articles entre 1904 et 1923[855].

En 1892, Laisant adresse donc au *Journal* de Teixeira un article intitulé « Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés » ([Laisant, 1892i])[856]. L'article se veut être un approfondissement des sujets déjà abordés à la SMF ou à la Société philomathique. On retrouve donc les notions de vitesse aréolaire et de représentation d'une aire en grandeur et en direction. Plus précisément, Laisant considère le déplacement de deux points M et M' dans l'espace dont un point O est fixé. Il décide de représenter l'aire du triangle OMM' en élevant une perpendiculaire au plan OMM' passant par O et en reportant sur cette droite une longueur OX proportionnelle à l'aire de OMM' dans un sens adéquat[857]. Après ces précisions, plutôt inhabituelles chez l'auteur, Laisant résume : « OX représentera à chaque instant l'aire du triangle OMM' en grandeur et orientation, suivant la même méthode qui fournit la représentation des moments et des couples. »[858] Le mouvement du point X consécutif à ceux des points M et M' est « appelé *composé-aréolaire* des deux mouvements considérés, par rapport au point O »[859] et c'est ce mouvement que Laisant se propose d'étudier dans cet article. Nous ne présentons ici qu'un seul des cas simples abordés : celui où le mouvement est dû à une force d'attraction de même centre O, proportionnelle à la distance, si bien que

$$OM = OA \cos t + OB \sin t$$

[854] [Dauben, Scriba, 2002].
[855] Notamment "Les mathématiques au Portugal", *L'enseignement mathématique*, t. 23, 1923, p. 138-142.
[856] [Laisant, 1892i], "Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés", *Journal des sciences mathématiques et astronomiques de M. Gomes Teixeira*, X, 1892, p. 97-102.
La même année, est publié dans une autre revue de la même ville, *L'Institut de Coïmbre*, un autre article de Laisant ("Propriété des paraboles du 3ème degré", *L'Institut de Coïmbre*, XL, 1892.). Même si cette dernière revue semble assez limitée (34 entrée pour le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* par exemple), l'année 1892 est marquée par le rapprochement de Laisant avec ses confrères portugais de Coïmbre et en particulier avec Teixeira (voir [Ortiz, 1996]).
[857] « de telle sorte que pour un observateur placé suivant OX, les pieds vers O, le sens de rotation de OM vers OM' soit direct » [Laisant, 1892h], p. 97.
[858] Ibid.
[859] Ibid.

$$OM' = OA' \cos t + OB' \sin t,$$

A, B, A' et B' étant des points fixes. Laisant écrit et développe :

$$X = \mathfrak{V}MM' = \mathfrak{V}\, AA' \cos^2 t + \mathfrak{V}(AB' + BA')\cos t \sin t + \mathfrak{V}\, BB'.\sin^2 t.$$

En linéarisant les expressions trigonométriques, il obtient :

$$X = L + P \cos 2t + Q \sin 2t$$

avec

$$L = \frac{1}{2}\mathfrak{V}(AA' + BB').$$

L'interprétation dans un cadre astronomique est immédiate : « Le mouvement composé-aréolaire est donc celui d'une planète fictive, qui accomplirait sa révolution dans un temps moitié moindre, mais autour d'un centre solaire différent du premier »[860]. La dernière égalité donne la position de ce nouveau centre. Laisant étudie pour conclure le cas d'un centre de répulsion de la même manière, si ce n'est qu'il s'agit de linéariser des expressions de trigonométrie hyperbolique.

Laisant réinvestit à plusieurs reprises la notion d'hodographe dans le cadre d'un mouvement respectant la loi des aires. Notamment lors de la communication « Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace »[861] faite le 19 décembre 1894 une nouvelle fois pour la Société mathématique de France, où il reprend un théorème démontré à la Société philomathique[862]. La démonstration précédente y est simplifiée « d'une façon qui rend pour ainsi dire le théorème intuitif et se prête à une intéressante généralisation. »[863] Le théorème est le suivant :

> *Si un point matériel M, animé de la vitesse MV, et soumis à la force MF, satisfait à la loi des aires par rapport à un point fixe O, c'est-à-dire si les aires décrites par OM sur la surface du cône de sommet O sont proportionnelles aux temps, les deux plans OMV, OMF sont constamment perpendiculaires.*[864]

La démonstration repose sur la notion d'« hodographe aréolaire » des mouvements, c'est-à-dire sur la courbe décrite par le point P extrémité du vecteur P défini par :

$$P = \mathfrak{V}\left(M\frac{dM}{dt}\right).$$

La vitesse de ce point est :

[860] [Laisant, 1892h], p. 100.
[861] [Laisant, 1894b], "Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 22, 1894, p. 217-220.
[862] [Laisant ; 1894a], "Sur le mouvement d'un point dans l'espace", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 6, 1894, p. 31-40.
[863] [Laisant, 1894b], p. 217.
[864] Op. cit.

$$\text{P'} = \mathfrak{V}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right) + \mathfrak{V}\left(M\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\right) = \mathfrak{V}\left(M\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\right).$$

D'après ce qui précède, l'angle entre P et P' est celui entre les axes des plans OMF et OMV, c'est aussi « celui que forme la vitesse sur l'hodographe aréolaire avec le rayon OP correspondant »[865]. Dans le cadre de la loi des aires, l'hodographe est une courbe sphérique, l'angle précédent est donc droit. Laisant en déduit enfin « un moyen graphique des plus simples pour avoir le plan osculateur à une courbe donnée (M) »[866], reprenant ainsi un des thèmes étudiés dans sa deuxième thèse de 1877[867].

Sur les mouvements à force centrale

Le cas des mouvements à force centrale se retrouve tout au long de l'œuvre de Laisant, si bien que le sujet fera l'objet très tardivement d'une de ses rares communications parues dans les pages des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Le 6 avril 1903, dans sa note de mécanique rationnelle intitulée « Une propriété des orbites fermées correspondants à des forces centrales »[868], note présentée par Appell, l'examinateur à l'École polytechnique y reprend un résultat énoncé près de 26 ans plus tôt en conclusion de son article « Sur le centre de gravité d'un polygone » paru dans les *Nouvelles annales* ([Laisant, 1877d]). Il y précise le contexte de l'application qu'il avait donnée alors : le problème avait précédemment été posé par Gauss [869] qui considérait la trajectoire d'une planète, « en supposant la densité proportionnelle en chaque point à l'inverse de la vitesse ». Il précise : « matériellement, cela peut se figurer en supposant que la planète dans sa course abandonne uniformément une certaine quantité de matière qui se fige sur la trajectoire et forme ainsi un fil sans fin, une fois la révolution accomplie ». Le centre de gravité d'une telle orbite est le milieu du segment joignant son centre et le second foyer. Grâce au résultat paru en 1877, le fait se généralise à toute planète décrivant une orbite fermée sous l'action d'une force centrale. Laisant énonce alors le résultat suivant :

> *Soient* (C) *la trajectoire fermée décrite par un point matériel sous l'action d'une force centrale ;* S *le centre des forces ;* O *le centre de gravité de l'aire de la*

---

[865] [Laisant, 1894b], p. 218.
[866] Ibid.
[867] Laisant considère la courbe parcourue par un point mobile de manière uniforme. En un point O fixe, il élève la perpendiculaire OP au plan OMV, la distance OP étant égale à la distance de O à la tangente MV. Il mène enfin un plan perpendiculaire en P à la tangente de la courbe (P) : l'intersection de ce plan avec le plan normal en M donne MF, la normale principale.
[868] [Laisant, 1903c], "Une propriété des orbites fermées correspondants à des forces centrales", *CRAS*, 1er semestre, t. CXXXVI, n° 14, 1903, p. 880-881.
[869] Gauss, *Determinatio attractionis*, *Œuvres complètes*, t. III, p. 333.

> *courbe plane* (C) *;* G *le centre de gravité de la ligne* (C)*, en supposant que la densité soit en chaque point proportionnelle à l'inverse de la vitesse, on a*
>
> $\mathrm{SG} = \frac{3}{2}\mathrm{SO}$*, les trois points* S, O, G *étant en ligne droite*[870].

La propriété est une nouvelle fois reprise par Laisant lors d'une communication à la SMF la même année[871]. Il y remarque que le même énoncé peut s'appliquer à un arc quelconque de l'orbite et affirme :

> *Soit* $\mathrm{M_0M}$ *un arc de la trajectoire d'un point matériel sollicité par une force centrale,* S *étant le centre des forces ; considérons le centre de gravité* G *de l'arc de courbe* $\mathrm{M_0M}$*, la densité de chaque point étant inversement proportionnelle à la vitesse ; soit en outre* O *le centre de gravité du secteur* $\mathrm{SM_0M}$ *; on a* $\mathrm{SG} = \frac{3}{2}\mathrm{SO}$*,*
>
> *les trois points* S, O, G *étant en ligne droite.*[872]

en donnant une démonstration qui, si elle reste « intuitive », repose cette fois-ci sur l'intégration du vecteur SM suivant la variable de temps et celle de l'aire décrite par ce vecteur ; en s'appuyant sur la loi des aires.

Ces exemples montrent le lien permanent que tisse l'auteur entre l'application du calcul des quaternions et la mécanique, notamment la mécanique céleste. Rattachée à certains thèmes récurrents, particulièrement la cinématique, la mécanique traverse l'intégralité de l'œuvre de Laisant.

II.2.3. Notions transversales aux théories des équipollences et des quaternions

VERS LA NOTION DE VECTEUR

La recherche d'un véritable langage de la géométrie vectorielle peut être rapprochée des réflexions que Leibniz expose à Huygens dans sa lettre du 18 septembre 1679. Leibniz utilise d'ailleurs le terme « équipollence » lors de l'élaboration de son « art caractéristique » dans un sens qui pourrait être rapproché de celui de Bellavitis. : « Quand on peut substituer l'un des caractères à l'autre sans que les lois du calcul en souffrent, on dit qu'il y a entre eux

---

870 [Laisant, 1903c], p. 881

871 [Laisant, 1903b], "Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale", *BSMF*, t. 31, 1903, p. 156.

872 [Laisant, 1903b], p. 156. Il ajoute « Quant à la démonstration, elle peut être présentée sous une forme qui la rend presque intuitive » (Ibid.). Pour cela, Laisant note M le vecteur variable SM à l'instant t et σ l'aire variable décrite par ce même vecteur. La preuve réside dans le fait que la loi des aires permet d'écrire $\sigma = kt$ et d'exprimer aisément l'intégrale $\mathrm{SO} = \frac{2}{3}\frac{\int \mathrm{M}d\sigma}{\sigma}$ en fonction de l'intégrale $\mathrm{SG} = \frac{\int \mathrm{M}dt}{t}$.

équipollence. »[873] La relation d'équipollence (entre deux lignes), implicite chez Argand tout comme chez Wessel est clairement développée et approfondie par Bellavitis durant les années 1835-1838[874]. Elle marque les débuts de la réflexion autour de l'objet vecteur (en tant que classe d'équivalence de bipoints). Cette réflexion, si on peut la faire remonter bien avant le XIX^{e} siècle[875], ne semble toujours pas achevée si on en croit le propos de Laisant dans son article « Qu'est-ce qu'un vecteur ? » paru dans *L'Enseignement mathématique* en 1912, soit près de 80 ans après les travaux de Bellavitis ([Laisant, 1912b]).

Voici comment il y résume les avantages de la géométrie vectorielle :

> *Le calcul des vecteurs offre de grandes ressources. Dans les applications géométriques ou mécaniques notamment, il permet d'obtenir d'importantes simplifications et une plus grande clarté. Non seulement les écritures sont sensiblement abrégées, mais l'instrument analytique qu'on emploie représente d'une façon directe les choses auxquelles il s'applique, et que l'usage des coordonnées fait trop souvent perdre de vue.*[876]

Mais ce court article n'a pas pour but de défendre les possibilités de l'emploi de vecteurs, puisque Laisant reconnaît que le terme de vecteur a finalement pris sa place en France que ce soit dans les programmes ou les traités, parfois même de manière superflue[877]. Il s'agit au contraire d'éclairer le concept même de vecteur que l'examinateur d'admission à l'École polytechnique juge, certes techniquement maîtrisé par les candidats, mais mal défini quelque soit l'ouvrage et donc peu compris par ces mêmes candidats.

Pour sortir de cette « sorte de pénombre mystérieuse »[878] dans laquelle se situe la chose, il distingue trois acceptations du symbole AB. Premièrement, le symbole est pensé en tant que segment géométrique d'origine A et d'extrémité B fixées. AB = CD si et seulement si C = A et D = B (soit six conditions). Ensuite, le vecteur AB est défini en tant que « force géométrique » selon les propres termes de l'auteur : dans ce cas, AB = CD si les segments AB et CD ont même longueur et même sens et s'ils sont portés tous deux par la droite AB (soit cinq conditions). C'est à cette acceptation que le concept de vecteur est d'après Laisant trop souvent assimilé. Enfin, un vecteur peut être défini par sa grandeur, sa direction, son sens :

---

873 Leibniz G. W., *Sämtliche Schriffen une Briefe*, herausg. von der Deutschen Akademie des Wissenschaften zu Berlin, Darmstadt et Berlin, 1923 et suiv., p. 920-921.
874 Voir Cartan E., *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1953, p. 344-345 cité dans [Gérini, 2011].
875 Voir les origines de la géométrie vectorielle dans [Crowe, 1994] et Dorier, Jean-Luc. « A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory », *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 227-261.
876 [Laisant, 1912b], p. 362. Voir également la critique d'Émile Dumont sur la confusion entre vecteur géométrique (grandeur géométrique) et vecteur numérique (opérateur des quaternions) dans les articles de Lévy et Langevin pour la version française de *L'Encyclopédie des sciences mathématiques* L'auteur préfère distinguer « vecteur-géométrique », « vecteur-quaternion », « vecteur-glisseur » (voir [Dumont, 1915], Dumont Émile, "Sur les bases de l'analyse vectorielle", *L'enseignement mathématique*, 17, 1915, p. 81-93).
877 Notamment depuis la réforme de 1902 : voir [Ba, Dorier, 2006], p. 19 et [Belhoste, 1990], p. 397.
878 [Laisant, 1912b], p. 362.

AB = CD si AB et CD sont parallèles, de même sens et de même longueur « que le point C soit d'ailleurs situé n'importe où »[879] (soit trois conditions).

Laisant poursuit : « Hamilton a dit que le vecteur est le symbole d'une *translation* ; Grassmann, que c'est la *différence* de deux points. Ces modes de langage sont également justes et représentant bien l'idée » [880]. Il met donc en parallèle les théories des deux mathématiciens avec leurs difficultés propres et conclut sur l'unification des notations en cours et la nécessité d'une refonte de la terminologie. Rappelons que la commission internationale pour l'étude de l'unification des notations vectorielles a été mise en place en 1908 au Congrès international des mathématiciens de Rome[881].

S'il a consacré une grande partie de son œuvre à la diffusion de la théorie des quaternions, Laisant semble se tourner tardivement vers travaux de Grassmann. Déjà en 1899, G. Fontené explique dans sa note « Sur l'enseignement de la théorie des vecteurs » ([Fontené, 1899b]) que la théorie géométrique des quaternions ne comprend pas celle sur les quantités complexes[882]. Pour contourner cet obstacle, Laisant se réfère au « calcul vectoriel basé sur la méthode de Grassmann »[883]. Il cite les œuvres de Grassmann qui paraissent à partir de 1894 (jusqu'en 1911)[884], ainsi que les travaux de Schlegel, Peano, Kraft, Burali-Forti[885].

Laisant serait-il un lecteur tardif de Grassmann ? Dans l'article de 1912, il propose après avoir lu Grassmann, comme lui-même l'explique, de préciser la notion de position d'un nombre. Il distingue par exemple le nombre 3 suivant qu'il est la différence de 0 à 3 ou de 1000 à 1003 (c'est donc le problème de l'« origine » d'un nombre qui est ici en jeu). Ainsi, « un nombre fixé en grandeur, direction et position se trouverait caractérisé par un système de deux vecteurs a, α, et pourrait s'écrire par exemple a_α, ces deux vecteurs ayant zéro, par convention, pour origine. »[886] On voit que le concept géométrique de vecteur se généralise chez Laisant d'autant plus naturellement que celui-ci insiste sur ses caractéristiques (longueur, sens et direction).

[879] Ibid., p. 363.
[880] Ibid.
[881] Voir *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 Aprile 1908)*, vol. I, p. 33.
[882] Une biradiale de deux vecteurs du plan est un vecteur du plan tandis qu'une biradiale de deux vecteurs de l'espace est un vecteur perpendiculaire au plan des deux vecteurs.
[883] Voir la note de la rédaction dans [Fontené, 1899b].
[884] *Hermann Grassmann gesammelte mathematische und physikalische werke*, Leipzig : B.G. Teubner, 1894-1911.
[885] W. Schlegkl. *System derHaumleltre* (1872-75); Peano. *Calcolo geometrica* (1888) ; Kraft, *Abriss des geometrischen Kalküls* (1893) ; Burali-Forti, *Introduction à la Géométrie différentielle* (1897).
[886] Op.cit., p. 164.

REFLEXION SUR LES ALGEBRES

Le XIX^e siècle est marqué par l'élaboration de divers calculs[887]. De nouveaux calculs géométriques, souvent liés à la représentation des imaginaires apparaissent : celui de Wessel, sur les « segments »[888] ; ceux de Français ou Argand sur les « lignes dirigées », de Warren sur les « lignes et grandeurs dirigées » ou Mourey sur les « nombres directifs ». À ces travaux s'ajoutent des réflexions plus générales comme celles de Grassmann bien sûr, Möbius (*Calcul barycentrique,* 1823-1827), Cauchy (notion de clefs algébriques, 1844-1853, qui suscite, on l'a vu, l'attention de Laisant) et donc Bellavitis et Hamilton[889]. Une profonde refonte de l'algèbre dans une démarche d'axiomatisation est également en cours durant cette période : citons les membres de l'école algébrique anglaise (Peacock, De Morgan et Boole) qui élaborent différentes algèbres (symbolique, logique, arithmétique)[890].

Laisant ne semble pas étranger à ce mouvement et son intérêt pour la création de calculs de toutes sortes est affirmé :

> *Mais ce n'est pas seulement aux faits géométriques que le calcul peut s'appliquer. Dès que des éléments d'une nature quelconque, mais comparables et mesurables, peuvent être représentés par des symboles spéciaux ; dès que les relations entre ces éléments peuvent être exprimées par des signes particuliers d'opérations sur ces symboles, on a par cela même créé une Algèbre nouvelle. Cette conception nous porte bien au-delà du domaine étroit de l'Algèbre ordinaire.*[891]

C'est en effet au cours du XIX^e siècle, que les mathématiciens comprennent qu'un "calcul" peut porter sur d'autres objets que les nombres réels ou imaginaires. Vecteurs, quaternions, matrices sont autant d'éléments qui donnent naissance à ces « Algèbres nouvelles », fort éloignées de l'algèbre centrée sur la résolution d'équation[892].

Et Laisant de citer dans son ouvrage de 1898 Les *Lois de la pensée* de Boole[893] et le *Calcul des opérations chimiques* de Brodie[894]. Il remarque également l'application des

---

[887] Corry, Leo, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures,* Basel, Boston: Birkhaüser Verlag, 1996. Itard, Jean. "La théorie des nombres et les origines de l'algèbre moderne". *Revue de Synthèse* 89 (1968), 165–184.

[888] Ainsi écrit-il dans son *Essai sur la représentation analytique des directions* (1897) « il y a d'autres quantités que les segments, qui sont susceptibles de relations que je viens d'indiquer. Il ne serait pas inutile d'expliquer ces relations d'une manière générale et d'en faire entrer la notion générale dans la définition des opérations » (p. 7) cité dans [Flament, 2008b], p. 208.

[889] [Flament, 2008a].

[890] [Flament, 2008b], p. 180. [Durand-Richard, 1996].

[891] [Laisant, 1898a], p. 60.

[892] [Kline, 1990], p. 1136. [Waerden, 1985], p. 137 et 202.

[893] Boole G., *An investigation into the Laws of thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, 1854. Boole explique effectivement dans la préface de cet ouvrage qu'il veut « étudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit, les exprimer dans le langage symbolique du calcul ; et sur cette base édifier la science de la logique ».

mathématiques à l'économie[895]. Le XIX^e^ siècle voit apparaître avec les travaux d'Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) les premières applications des mathématiques à l'économie. L'ancien recteur des académies de Grenoble et Dijon et inspecteur général de l'Instruction publique ouvre la voie à la mathématisation des phénomènes économiques (entre autre à travers ses travaux sur la théorie des jeux). On lui doit ses *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) suivi en 1863 de ses *Principes de la théorie des richesses*.

Enfin, Laisant signale principalement la *Logique Mathématique* de Peano[896], qu'il voit comme un héritier de Leibniz auquel il rend alors aussi hommage :

> *Cela porte à penser que ce grand esprit comprenait l'Algèbre autrement qu'on ne l'a fait souvent depuis. Il ne lui attribuait pas une puissance de création et de généralisation qu'elle ne peut avoir, mais il voyait dans les principes mêmes dont elle découle la possibilité d'édifier une langue écrite, pouvant exprimer rigoureusement et simplement les faits et les relations qu'ils ont entre eux, dans des ordres d'idées très divers.*[897]

Avec l'émergence au cours du XIX^e^ siècle de la notion d'algèbre telle que nous la connaissons aujourd'hui, c'est moins aux objets en eux-mêmes que l'on va s'intéresser qu'aux relations qu'ils tissent entre eux. Il est apparu que des éléments de natures distinctes pouvaient être associés suivant les mêmes lois (lois de composition interne par exemple). On pouvait donc s'intéresser à ces faits, quitter les objets particuliers pour s'élever au niveau de ces relations générales.[898]

Un calcul chimique

Revenons sur ce calcul chimique qui a séduit Laisant. B. C. Brodie (1817-1880) est professeur de chimie à l'Université d'Oxford. Il s'opposera au modèle atomiste et à la notion d'atome comme mesure de la quantité de matière. De cette position extrémiste naîtra la volonté de créer un langage totalement nouveau pour la chimie, grâce à un système de calcul original (il est également connu pour sa découverte de l'oxyde de graphite en 1859). En 1879, paraît *Le calcul des opérations chimiques soit une méthode pour la recherche, par le moyen*

[894] Brodie B. C., *Le calcul des opérations chimiques soit une méthode pour la recherche, par le moyen de symboles, des lois de la distribution du poids dans les transformations chimiques*, traduit de l'anglais par A. Naquet, Gauthier-Villars, 1879 (voir [Laisant, 1881d]).

[895] Sur l'intérêt de Laisant pour l'économie mathématisée, voir [Laisant, 1901c].

[896] Laisant précise que Peano est entouré de nombreux disciples en Italie. On peut citer Vailati, Pieri, Padoa, Vacca, Vivanti, Fano, Burali-Forti. Peano G., *Logique mathématique*, 1897.

[897] [Laisant, 1898a], p. 61.

[898] [Kline, 1990], p. 1136-1137.

de symboles, des lois de la distribution du poids dans les transformations chimiques, traduit par Alfred Naquet (1834-1916).

Le fait que ce soit Naquet qui traduise l'œuvre n'est peut-être pas étranger à l'intérêt de Laisant pour les travaux de Brodie. Naquet est en effet un proche de Laisant : né à Carpentras (Vaucluse), médecin puis professeur de chimie organique à la Faculté de médecine de Paris (*Principes de chimie fondés sur les théories modernes* – 1867-, *Cours de chimie pratique* -1869-), c'est à travers son action politique qu'il rejoint Laisant. Franc-maçon, républicain convaincu (*La République radicale* -1873-), il est élu député du Vaucluse en 1871 (avant d'en être sénateur en 1893) et siège à l'extrême gauche. Il réussira à faire voter sa loi sur le divorce en 1884, provoquant la colère du milieu traditionnaliste catholique, lui qui était déjà confronté, de par ses origines, à l'antisémitisme. Il sera, comme son ami député de la Seine, élu député boulangiste en 1889 et inquiété lors de l'affaire du canal de Panama, où tous deux seront acquittés. Proche des idées pédagogiques de Laisant. Il signera la préface de son ouvrage *L'éducation fondée sur la Science* ([Laisant, 1904a]).

En 1881, Laisant consacre un compte rendu à l'ouvrage de Brodie dans les pages du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* ([Laisant, 1811d])[899] (c'est d'ailleurs l'un de ses trois seuls apports à la revue de Darboux). 1881 est, nous le répétons, l'année de publication de son ouvrage sur les quaternions, c'est une année marquante pour sa réflexion sur les calculs liés aux méthodes vectorielles, le symbolisme et l'utilisation de l'algèbre. Remarquons que Laisant explique tout d'abord le manque d'intérêt pour la traduction de l'ouvrage du chimiste par le cloisonnement progressif des disciplines scientifiques qui marque selon lui son époque[900], première occurrence d'un thème sur lequel il reviendra fréquemment. Pour l'heure, c'est ce « calcul symbolique d'une espèce nouvelle, créé pour apporter une méthode rationnelle de représentation des faits chimiques, à la place des notations en vigueur »[901] qui intéresse Laisant. Cette théorie se veut bâtie en dehors de toute hypothèse a priori, notamment le modèle atomistique, et se base sur la notion de poids comme quantité de

---

[899] [Laisant, 1881e], "Comptes rendus et analyses", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, Sér. 2, 5 n° 1, 1881, p. 137-149.

[900]

> *Nous sommes embarrassés sans doute par l'excès même de nos richesses ; personne ne saurait s'assimiler la somme énorme des vérités scientifiques acquises ; pour produire, il faut se spécialiser, s'attacher, non pas à une même science, mais à une section particulière de telle ou telle science, ce qui conduit volontiers à négliger le reste. C'est là une tendance fâcheuse au point de vue de la coordination philosophique des connaissances humaines et qui finirait par amener dans l'avenir une certaine stérilité.*

([Laisant, 1881e], p. 137). Laisant signale donc l' « œuvre scientifique dans le sens le plus élevé du mot » (p. 138) qu'accomplit Naquet par la traduction de l'ouvrage en langue anglaise.

[901] Ibid., p. 138.

matière pondérable (l'absence de poids est marquée par le symbole 0). Ces poids résultent d'opérations chimiques notées x, y, ... s'accomplissant sur l'unité d'espace (représentée par le symbole 1) et qui peuvent être identiques (ce qui sera marqué par le signe =), additionnées ou soustraites. La multiplication chimique correspond à l'agrégation de plusieurs composants d'un poids et se note xy : elle jouit des mêmes propriétés que la multiplication algébrique. Laisant donne un exemple d'équation chimique fondamentale ($xy = x + y$ d'où $1 = 0$) et commente : « Ces conséquences peuvent paraître répugnantes et paradoxales à qui s'attache trop à la signification des symboles ordinaires ; mais elles n'en sont pas moins justifiées et se prêtent à la représentation des faits. »[902] La question du symbole est donc au cœur du problème de la figuration des phénomènes chimiques (tout comme des faits géométriques). L'arithmétique trouve son pendant dans la théorie de Brodie avec la notion de facteur premier (cas d'un poids simple) qui permet d'écrire un poids composé de la même manière que l'on décompose en facteur premier un entier. L'analyse indéterminée trouve aussi une application dans cette théorie pour la résolution d'équations chimiques reliant plusieurs symboles et traduisant un fait chimique[903] . La notion de congruence chimique est identique à celle de congruence numérique et adopte les mêmes notations. Le théorème de Taylor trouve même une application comme insiste Laisant : « l'auteur fait cette remarque, éminemment philosophique, que le théorème de Taylor, tout à fait indépendant de l'interprétation des symboles, s'appuie exclusivement au fond sur les lois commutative et distributive de la multiplication, $xy = yx$, $x(y + z) = xy + xz$, démontrées pour les symboles chimiques. »[904] Ce qui est donc essentiel, ce sont finalement les lois (nous dirions de "composition interne") qui régissent les opérations entre les objets.

Remarquons la conclusion de cet article sur cette volonté remarquable d'ériger « un ensemble de symboles et de règles de calcul pour représenter un ordre de faits scientifiques »[905]. Ce que souligne en effet Laisant, plus que le calcul chimique en lui-même et ses possibles (et hypothétiques) applications,

> *c'est que l'idée à laquelle obéit l'inventeur est de nature à placer sous son vrai jour l'interprétation philosophique de l'Algèbre, prise dans son acception la plus élevée et la plus étendue. Une Algèbre est une véritable langue écrite, dont les*

---

902 Ibid., p. 139.

903 Laisant note à ce sujet : « toute racine d'une équation chimique ne saurait être interprétée comme la cause d'un fait, pas plus que les racines d'une équation qui traduit un problème de Géométrie ou de Mécanique ne sont toutes nécessairement des solutions réelles de ce problème, susceptibles d'une interprétation concrète. » (op. cit., p. 144) La construction de ces équations peut d'ailleurs reposer sur une hypothèse et donc sur « des considérations d'ordre expérimentale ».

904 Ibid., p. 146.

905 Ibid., p. 148.

> *symboles et les règles dérivent des faits qu'il s'agit d'interpréter, et, lorsque l'on considère, dans l'Algèbre usuelle, les règles de calcul auxquelles on doit se conformer, ce serait une grave erreur de jugement, à notre avis, que de leur donner un caractère absolu, en ne se reportant pas aux faits qui ont imposé ces règles.*[906]

En s'éloignant des notions algébriques classiques, l'auteur tend vers un calcul plus général et vers l'idée de structures algébriques. La maturation de telles conceptions sera longue et l'émergence de l'algèbre comme langage des faits (et non des calculs) sera entre autre freinée par l'absence de notions ensemblistes clairement définies[907]. Et Laisant d'énumérer les différentes algèbres déjà construites :

> *L'Algèbre de la ligne droite, ou l'Algèbre ordinaire, est répandue partout ; l'Algèbre des figures planes, c'est-à-dire le Calcul des imaginaires ou des équipollences, est entré dans la science mathématique depuis un demi-siècle à peine ; l'Algèbre des figures dans l'espace, ou Calcul des quaternions, est bien peu cultivée jusqu'à présent, surtout en France. Tout au plus avons-nous vaguement entendu parler des tentatives faites pour créer un Algorithme spécial applicable aux lois de la logique. Enfin, en ce qui concerne la Chimie, nous ne croyons pas que M. Brodie compte de précurseurs.*[908]

Que ce soient les travaux de Bellavitis, d'Hamilton ou des logiciens anglais, à chaque algèbre, une nouvelle avancée par l'interprétation inédite de faits à l'aide d'une langue ayant sa propre grammaire. D'où parfois des invraisemblances entre les règles de ces différentes algèbres : « chaque innovation de ce genre donne lieu à une sorte de paradoxe apparent, qui épouvante et fait reculer tout d'abord les mathématiciens habitués à leurs conceptions anciennes et trop portés à leur donner un sens absolu qu'elles n'ont pas »[909]. Laisant cite les exemples de l'extraction de racine carrée d'un nombre négatif, la non-commutativité de la multiplication ou l'équation fondamentale $xy = x + y$ qui interviennent respectivement dans les théories des équipollences, des quaternions ou de Brodie.

Quelle réaction adopter face à de telles nouveautés déstabilisantes ? Laisant explique :

---

[906] Ibid. Laisant précise ensuite :

> *Pour que la théorie d'un système d'opérations quelconques ait une valeur rationnelle, il faut que ce système d'opérations ne soit que la conséquence d'une catégorie de faits dont les transformations se traduiront dans cette langue nouvelle, d'une merveilleuse concision, si précieuse par la suite pour offrir à l'esprit de recherches un point d'appui solide.*

[907] [Dahan-Dalmédico, Peiffer, 1986], p. 263.

[908] Ibid. Laisant, constatant le faible nombre de ces découvertes, souligne cependant, comme un écho à son début d'article, l'écueil que ce serait un trop grand nombre de types d'algèbre qui mènerait à ce qu'il nomme une « Babel scientifique ».

[909] Ibid., p. 149.

> *Avant de se révolter contre de tels paradoxes, il faut voir si ce sont bien des paradoxes, et pour cela chercher sous les symboles leur signification concrète. Il faut, en un mot, étudier pour pouvoir comprendre.*[910]

De telles précautions liées à la dimension linguistique de l'expression d'une théorie peuvent également se retrouver chez Leibniz. En effet, Dans l'élaboration de son *ars characteristica*, ce dernier souligne que les symboles, les mots utilisés nécessairement pour exprimer des idées et donc raisonner peuvent mener à une pensée stérile car leurs entrelacements nous coupent de l'accès direct à ce qui est symbolisé[911].

NOTION D'AIRE

La réflexion sur la notion d'aire d'une surface (plane ou gauche), son calcul, sa représentation, son signe est présente chez Laisant tout au long de son parcours. Elle trouve ses racines dans l'équipollence du mémoire de Bellavitis[912], expression signalé si importante dès ses premières applications ([Laisant, 1877c] par exemple). Elle se nourrit aussi de la notion de hodographe aréolaire qui fait suite à celle de l'hodographe d'Hamilton et de vitesse aréolaire de Binet. Elle s'appuie alors sur une représentation vectorielle utilisée, nous le verrons, à plusieurs reprises. Elle converge aussi vers certaines préoccupations pédagogiques de Laisant quand celui-ci milite pour l'introduction d'une aire signée dans l'enseignement. Enfin, nous pensons qu'elle culmine avec un résultat original présenté à l'AFAS en 1899 sur l'aire d'une surface gauche, résultat démontré de manière indépendante par Peano et Laisant et remarqué par de "grands mathématiciens" tels que Lebesgue ou Fréchet[913].

Sur le signe d'une aire

On peut attribuer à deux personnages la notion d'aire orientée, c'est-à-dire d'aire algébrique, positive ou négative. Il s'agit premièrement de Möbius qui introduit également la notion d'angle orienté de deux droites dans son ouvrage de 1827 (*Der barycentrische Calcul*, §17)[914]. Monge a également travaillé sur la notion d'aire orientée suivant le sens de parcours de son

[910] Ibid.
[911] Voir par exemple *Dissertatio de arte combinatoria* (1666) et Serfati Michel, *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, thèse, Université de Panthéon-Sorbonne, 1997.
[912] [Laisant, 1874], p. 44.
[913] [Gandon, Perrin, 2009], [Meyer, 2006].
[914] Möbius, August Ferdinand, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827, §17. C'est ainsi que l'explique Lévy, *L'Encyclopédie des sciences mathématiques*, t.II, 4, Paris, 1912, p. 20 (note 23).

contour[915]. Ses résultats sont parus en 1809 dans le *Journal de L'École polytechnique*[916]. Chasles dans son *Traité de Géométrie supérieure* de 1880, remarque cependant que « jusqu'à présent, on n'a point introduit, *d'une manière générale et systématique*, en Géométrie, le principe des signes, pour marquer la direction des segments ou des angles »[917].

Bellavitis, lorsqu'il démontre la formule permettant de calcul des aires algébriques à l'aide des équipollences précise l'avantage, selon lui, à considérer des aires tantôt positives, tantôt négatives :

> *Ce fait, loin d'être un inconvénient de la méthode, en constitue l'un des grands avantages ; il permet d'éviter les erreurs que l'on pourrait commettre dans l'addition des aires, si l'on ne considérait pas assez attentivement les diverses positions que peuvent prendre les éléments d'une figure.*[918]

Laisant intervient à deux reprises sur le sujet. En 1892 tout d'abord, dans les pages du *Journal de mathématiques spéciales*, où il explique la convention préférable pour définir une véritable aire algébrique d'un triangle, et même d'une figure quelconque :

> *Mieux vaudrait, ce me semble, définir tout d'abord les signes des aires par la convention suivante, conforme à celles de la trigonométrie et des coordonnées polaires sur les signes des angles : « L'aire du triangle ABC est positive, quand le sens de circulation de A à B, B à C, C à A, par rapport à un point intérieur quelconque est le sens positif des angles ou des arcs en trigonométrie. Il s'ensuit qu'un observateur parcourant le périmètre dans le sens ABC laisse constamment sur sa gauche l'intérieur de l'aire ; et cette convention s'étend à un périmètre fermé quelconque. »*[919]

La remarque suivante rejoint celle de Bellavitis citée plus haut. En effet, Laisant écrit que l'« on a alors *toujours* :

$$A_1A_2A_3 = DA_1A_2 + DA_2A_3 + DA_3A_1$$

en grandeur et en signe, quel que soit le point D. »[920] Peu satisfait du calcul de l'aire d'un triangle par le produit de la base par la hauteur, calcul qui introduit des radicaux, Laisant redémontre une autre formule pour l'aire d'un triangle. À partir de deux lemmes

---

[915] C'est le point de vu de René Taton qu'il défend à l'Académie des Sciences en 1951. Voir "Deux contributions de Monge à la création de la Géométrie moderne", *CRAS*, t. 232, vol.1, 1951, p. 198-200. Sur l'œuvre de Gaspard Monge, on pourra consulter Taton, René, *L'œuvre scientifique de Monge*, PUF, 1951.

[916] Monge, "Essai d'application de l'analyse à quelques parties de la géométrie élémentaire", *Journal de L'École polytechnique*, 15e cahier, 1809, p. 68-117.

[917] [Chasles, 1880]

[918] [Laisant, 1874a]. Sur les aires négatives voir aussi, Hamon Gérard, *Une histoire géométrique des imaginaires : nombres complexes à la recherche d'une image*, 1997.

[919] [Laisant, 1892j], "Sur la détermination analytique de l'aire d'un triangle", *Journal de mathématiques spéciales,* (4) I, 1892, p. 77. Il écrit ainsi :

$$A_1A_2A_3 = A_2A_3A_1 = A_3A_1A_2 = -A_3A_2A_1 = -A_1A_3A_2 = -A_2A_1A_3.$$

[920] Ibid.

correspondant au cas où un côté du triangle est parallèle à un axe de coordonnées, il calcule l'aire du triangle ABC ainsi :

$$\mathrm{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

(θ étant l'angle formé par les deux axes) ; « formule connue, qui ne donne prise à aucune ambiguïté, et représente *toujours* l'aire du triangle, en grandeur et en signe. »[921] Formule qui n'est pas sans rappeler l'utilisation du déterminant pour une mise en forme élégante et facilement mémorisable d'une formule (voir aussi [Laisant, 1887a]). Remarquons à nouveau le statut de la figure dans cet article : « Nous avons à dessein, dans la démonstration précédente, omis toute figure, pour montrer combien le raisonnement est facile dans toute sa généralité. Dans la pratique de l'enseignement, on pourra tracer des figures, mais en faisant observer qu'elles ne particularisent rien. » [922]

L'article est repris en 1895 dans la *Revue de mathématiques spéciales* que dirigent Humbert et Papelier. C'est l'une des deux seules contributions de Laisant à ce trimestriel fondé en 1890 par différents professeurs de lycée, ainsi que H. Vuibert (rédacteur du *Journal de mathématiques élémentaires*). Une lettre de Laisant (probablement à E. Humbert, normalien, professeur au lycée Saint Louis, directeur de la revue depuis 1894) précède cette « Note sur le principe des signes appliqués aux aires. Aire d'un triangle ou d'un polygone en fonction des coordonnées des sommets » ([Laisant, 1895b]). Dans cette correspondance, l'auteur revient sur son militantisme pour l'introduction d'aire signée « tout comme on en adopte une sur les signes des segments »[923] et sur les inconvénients de cette carence dans les démonstrations. Quant à l'affirmation posant une aire comme positive, il la qualifie de « véritable hérésie au point de vue de la géométrie moderne »[924] et poursuit : « Si je ne suis pas parvenu à modifier les habitudes prises, cela tient en partie, je le crois du moins à ce que je n'ai pas présenté la démonstration nouvelle que je proposais sous une forme suffisamment simple. » [925] Laisant propose donc ici des remarques plus simples sur les notions d'aires

[921] Ibid., p. 78.

[922] Ibid., p. 77. La seule figure de l'article donne, en complément, une démonstration purement géométrique par les aires (c'est-à-dire un découpage particulier du triangle ABC).

[923] « J'ai eu plusieurs fois l'occasion d'insister sur la nécessité qu'il y a en Géométrie analytique, à adopter une convention relative aux signes des aires » [Laisant, 1895d], p. 65.

[924] Ibid.

[925] Ibid. Une lectrice du *Journal de mathématiques spéciales* remarque les deux articles de Laisant cités ici : « M. Laisant propose d'introduire dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, la notion du signe des aires, admise depuis longtemps déjà, à l'occasion de la représentation géométrique des imaginaires ».

orientées, remarques qu'il espère voir progresser dans les méthodes d'enseignement. Il expose pour cela la convention sur le signe des aires pour une aire plane fermée quelconque, la reliant aux pratiques sur le signe des angles et des arcs, exactement comme il l'avait fait en 1892. Pour un polygone fermé ABC…L, Laisant généralise encore et écrit :

$$(ABC\ldots L) = (BC\ldots LA) = \ldots = -(L\ldots CBA) = \ldots = -(AL\ldots CB)$$

(les aires sont ici notées entre parenthèses). Ainsi, « l'aire d'un polygone plan quelconque ABC…L, prise dans le sens indiqué par les lettres, a toujours pour expression

(SAB) = (SBC) + …+ (SLA) »[926],

S étant un point quelconque du plan (intérieur ou extérieur au polygone).

Ayant calculé l'aire d'un triangle OA_1A_2 (O origine du repère), Laisant étend ce résultat à un triangle $A_1A_2A_3$ quelconque de deux manières. Nous présentons la deuxième, qui rappelle une construction classique de Laisant (voir [Laisant, 1877d], puis [Laisant, 1899a]) :

$$(A_1A_2A_3) = (OA_1A_2) + (OA_2A_3) + (OA_3A_1) = \frac{1}{2}\sin\theta\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right]$$

et qui lui permet d'étendre sa formule à un polygone quelconque :

$$(A_1A_2A_3\ldots A_n) = \frac{1}{2}\sin\theta\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right]$$

(Les sommets A_k ont pour coordonnées a_k, b_k et θ est l'angle formé par les axes).

Un résultat fondamental

Lors de la séance du 19 septembre 1899 du Congrès de l'AFAS de Boulogne-Sur-Mer, C.-A. Laisant présente une courte communication intitulée « Aire d'une courbe gauche fermée » ([Laisant, 1899a]). Ce travail peut apparaître comme l'aboutissement d'une réflexion sur la notion d'aire et ses caractéristiques (signe, représentation vectorielle, calcul d'aire d'un polygone, voire les liens avec des thèmes mécaniques étudiés postérieurement). L'idée essentielle est exprimée dès les premières lignes dans le cas d'une courbe plane fermée :

> *on peut imaginer l'aire de cette courbe ou de ce contour comme représentée par un vecteur perpendiculaire au plan de la figure et dirigé dans un sens ou dans le sens opposé, suivant le sens de circulation qui caractérise le signe de l'aire.*[927]

Elle justifie la proposition de Laisant d'une manière personnelle en considérant les changements de signes d'une fonction linéaire Ax + By + C et conclut : « On voit donc que la convention cartésienne sur l'emploi des signes + et –, pour indiquer les deux sens opposés d'un axe sur lequel des vecteurs sont comptés, contient encore la notion du signe à donner à une surface plane suivant le sens dans lequel on en décrit le contour. » (*Journal de mathématiques spéciales,* (4) IV, 1895, p. 97-98).

[926] Op. cit., p. 66.

Ainsi, Laisant note V_{AB} le produit (que nous appellerions vectoriel) de vecteurs V(OA.OB), AB étant un élément infiniment petit de la courbe plane et O un point quelconque du plan de la même courbe. Le résultat de ce produit est un vecteur infiniment petit qui représente, comme l'explique l'auteur, en grandeur et en direction l'aire OAB (le facteur multiplicatif $\frac{1}{2}$ est abandonné pour plus de simplicité). L'aire totale correspond à la somme vectorielle de tous ces éléments (tous orthogonaux au plan de la courbe) :

$$\int V_{AB}.$$

Laisant étend ces notions à une courbe gauche fermée quelconque, en commençant par le cas d'un polygone ABC…LA. Il montre que, dans ce cas, la somme

$$\Sigma\, V_{AB} = V_{AB} + V_{BC} + \ldots + V_{LA}$$

est indépendante du point O choisi si bien que cette expression représente l'aire totale du contour fermé polygonal. En effet, si un autre point O_1 (avec $O_1O = \text{K}$) est choisi,

$$V(O_1A.O_1B) = V((O_1O + OA).(O_1O + OB)) = V(\text{K} + \text{A})(\text{K} + \text{B}).$$

Et Laisant écrit :

$$\Sigma\, V(\text{K} + \text{A})(\text{K} + \text{B}) = \Sigma\, V_{\text{K}^2} + \Sigma\, V_{\text{KB}} + \Sigma\, V_{\text{KA}} + \Sigma\, V_{AB}$$

car l'expression V est bilinéaire. Comme $V_{AA} = 0$ et $V_{AB} = - V_{BA}$, l'expression précédente est identique à celle calculée en considérant le point O. Remarquons l'analogie de ce procédé avec une communication précédente à l'AFAS qui s'appuyait sur les équipollences ([Laisant, 1877c]).

La démarche précédente de sommation vectorielle peut s'appliquer naturellement à un contour quelconque vu comme limite d'un polygone dont les côtés sont « infiniment petits et infiniment nombreux »[928]. Laisant conclut donc :

> *Il suit de là qu'à une courbe gauche fermée (ou plus généralement à un contour fermé) sont attachés une grandeur qu'on peut appeler la grandeur de son aire, et une orientation de plan qu'on peut appeler l'orientation du plan moyen de la courbe en question.*[929]

Choisissons comme lui d'illustrer ceci dans le cas d'un quadrilatère gauche ABCD. L'aire totale est exprimée en choisissant A pour origine par :

$$V(AA.AB) + V(AB.AC) + V(AC.AD) + V(AD.AA)$$
$$= V(AB.AC) + V(AC.AD)$$
$$= V(AB.AC) - V(AD.AC)$$

---

927 [Laisant, 1899a], p. 135.

928 Ibid., p. 136. En note, Laisant écrit que l'aire totale est :

$$\int V\text{x}d\text{x}$$

et indépendante du point O choisi.

929 Ibid., p. 137.

$$= V(DB.AC).$$

L'aire de ce contour a donc une grandeur égale à la moitié du produit des diagonales et du sinus de l'angle qu'elles forment. Sa direction est perpendiculaire aux deux diagonales (l'orientation moyenne est un plan parallèle à ces deux diagonales).

Ces notions peuvent être précisées en choisissant de projeter la courbe sur les plans de bases d'un repère O*xyz*. Laisant explique que la grandeur de l'aire totale est :

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,,$$

Où X, Y Z sont les aires (en grandeur et signe) des projections sur les plans de bases[930]. Le vecteur OM de coordonnées (X ; Y ; Z) est aussi normal au plan moyen. Ces remarques amènent à certaines propriétés « intuitives » en se plaçant dans un repère où l'axe des cotes est porté par le vecteur OM. De plus, la projection (T_1) de la courbe gauche (T) sur le plan d'orientation moyenne « la représente, pour ainsi dire, complètement au point de vue des propriétés concernant les aires. »[931] (i.e. les projections de ces deux courbes sur un plan quelconque ont mêmes aires). Si le repère est choisi comme précédemment avec O centre de gravité de l'aire de la courbe plane (T_1), Laisant appelle « axe central de la courbe » l'axe des cotes. En considérant le point M de la courbe (T) de cote z et σ l'aire de la courbe (T_1), il écrit :

$$\int z d\sigma = \zeta\sigma$$

et définit le centre de l'aire de la courbe : c'est le point Ω de l'axe central de cote ζ. Si l'origine est placée en Ω, « le plan des *xy* est le véritable plan moyen de la courbe, au point de vue de l'aire, celui dont la courbe se rapproche le plus. »[932]

L'interprétation "mécaniste" des idées précédentes a été signalée à l'auteur par Paul Appell. Ce dernier suggère à Laisant que, dans le cas d'un polygone gauche fermé, une vision statique de la configuration permette d'arriver à la notion d'aire représentée vectoriellement. Chaque côté du polygone peut en effet représenter une force appliquée en un sommet : la résultant étant nulle, le système se réduit à un couple et « c'est précisément le vecteur de ce couple qui représente ce que nous avons considéré comme l'aire du polygone. »[933]

---

[930] Il avait rappelé au début de son exposé que « toutes les propriétés projectives des aires planes se traduiront par celles des vecteurs correspondants. » (p. 136).
[931] Ibid., p. 138.
[932] Ibid., p. 139.
[933] Ibid., p. 137.

Le résultat de Laisant est repris par Fréchet dans les *Nouvelles annales* en 1904 ([Fréchet, 1904]). Ce dernier précise que Laisant et Peano[934] ont séparément énoncé la même généralisation de la notion d'aire. À son tour, il reprend les résultats précédents en ajoutant la justification de cette extension par le calcul fonctionnel, justifications moins artificielle que l'interprétation mécaniste fournie par Laisant. Edwin Bidwell Wilson proposera ses idées sur la question, toujours pour les *Nouvelles annales*[935]. Son approche est sensiblement différente puisqu'elle s'appuie sur la notion de groupe de transformations laissant invariant l'aire d'une figure.

Lebesgue dans sa thèse *Intégrale, Longueur, Aire* soutenue à Paris en 1902 reviendra sur les difficultés soulevées par la définition de l'aire d'une surface gauche, sur l'erreur de Serret signalée au début des années 1890 par Schwarz et Peano[936], ainsi que les tentatives d'Hermite et de Peano, toujours insatisfaisante. Il insiste sur l'apport de Peano, fondé sur une approche géométrique mais omet d'en signaler les bases grassmanniennes. Dans son article de 1905 « À propos de quelques travaux mathématiques récents » paru seulement en 1971 dans *L'Enseignement mathématique* ([Lebesgue, 1971]), il signale les travaux de Laisant comme relevant de la même approche. Ainsi, la réflexion entamée de longue date par Laisant sur la notion d'aire algébrisée débouche sur un problème épineux du point de vue épistémologique auquel l'auteur ne fait pas référence mais sur lequel Lebesgue reviendra également dans les pages de *L'Enseignement mathématique* (« Sur la définition de l'aire des surfaces », [Lebesgue, 1908]). Ceci montre de nouveau la place active particulière de Laisant dans les mathématiques vivantes du début du XX^{e} siècle.

II. 3. Promouvoir la diffusion des sciences mathématiques : l'action politique du député Laisant

Analyser rigoureusement la carrière du député Laisant, longue de dix-sept ans, avec ses combats, ses alliances et ses affrontements sort du cadre de notre étude. Ce parcours, riche et tumultueux, s'inscrit dans la consolidation de la Troisième République et illustre crises et

[934] Peano Giuseppe, "Sulla definizione dell'area d'una superficie", *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 19 janvier 1890. L'Italien y utilise les notions développées par Grassmann.

[935] Bidwell Wilson, Edwin, "Sur le groupe qui laisse invariante l'aire gauche", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 5, 1905, p. 163-170. Il rappelle son résultat de 1903: « A generalised conception of area : applications to collineations in the plane », *Annals of Mathematica*, 1903, p. 19-45.

[936] Cette erreur est également étudiée d'un point de vue épistémologique par Bachelard dans son *Essai sur la connaissance approchée* (1927). Voir [Gandon, Perrin, 2009].

errements du régime (le déchirement des républicains, l'épisode boulangiste, la montée de l'anarchisme)[937]. Sa fonction de député est cependant indissociable du personnage Laisant, tant dans son aspect "romanesque" que scientifique. Nous choisissons donc d'en donner les grandes étapes et de souligner en quoi l'activisme du député prolonge ses idées de diffusion, de promotion des sciences mathématiques dans la société ou de modernisation de leur enseignement.

II.3.1. Un ardent républicain (1879-1881)

En 1875, la Troisième République se dote de nouvelles lois constitutionnelles qui instituent le Parlement en Chambre des députés et Sénat. Alors qu'il vient d'intégrer son poste à Sidi-Bel-Abbès depuis le 24 novembre, on propose à Laisant d'être candidat à la députation dans la 1ère circonscription de Nantes. Laisant démissionne de ses fonctions en Algérie[938] et s'engage dans cette nouvelle campagne sous l'étiquette républicaine en proclamant :

> *L'établissement de la République dans notre pays est le but que nous voulons tous atteindre* […]. *Par la République, et par elle seule, nous pourrons conquérir les libertés qui nous manquent, réaliser les réformes que la justice réclame.* […] *Perfectionner l'instruction publique à tous les degrés, la rendre accessible à tous ; et par elle, former les citoyens ; faire une armée puissante, nationale, organisée sur des bases vraiment démocratiques, telles doivent être nos deux préoccupations immédiates. Le relèvement de notre pays est à ce prix.*[939].

La campagne est menée par les républicains avec à leur tête Gambetta ; elle voit la progression des idées républicaines au sein de ce que Gambetta désigne par les « couches nouvelles » [940] : commerçants, fonctionnaires, petits entrepreneurs. Laisant est face au candidat conservateur, il est élu au premier tour (8 714 voix contre 5 870)[941]. Il siègera à gauche et sera inscrit au groupe de l'Union républicaine alors en minorité[942]. Il s'installe à Paris, 16 avenue de Villiers.

Il vote l'amnistie en faveur des condamnés de la Commune. En juin 1876, il dépose pour la première fois, sans succès, sa proposition de loi tendant à la réduction à trois ans du

---

937 Nous renvoyons à [Néant, 2000], [Caron, 1985], [Mayeur, 1973], [Rébérioux, 1975].

938 Laisant est un cas unique de polytechnicien élu qui abandonne sa carrière militaire pour s'engager pleinement en politique (voir Jean Marie Mayeur, Jean-Pierre Chaline, Alain Corbin, *Les parlementaires de la Troisième République*, Publications de la Sorbonne, 2003, p. 111)

939 [Sauvage, 1894], p. 67.

940 Voir le discours prononcé par Gambetta le 1er janvier 1874.

941 Laisant est alors domicilié à Versailles, peut-être pour pouvoir être présent aux côtés de sa femme Clara, internée après 1876 à la maison spéciale de Ville-Evrard (nord est de Paris) pour des problèmes psychiatriques. SHAT, dossier personnel Yc 28823.

942 [Jouve, 1895], [Robert, Cougny, 1889].

service militaire (la durée du service étant fixée à 5 ans pour les fils d'ouvriers et de fermiers) et à la suppression du volontariat d'un an[943]. Les questions militaires seront au cœur des différents mandats du député : la proposition de réduction du service militaire sera reprise en mars 1877 et 1878, mais ne sera adoptée qu'après de nombreuses modifications.

Après de vives tensions entre la Chambre des députés et la présidence, le Président de la République Mac-Mahon provoque la démission du gouvernement le 16 mai 1877. 363 députés, dont C.-A. Laisant, dénoncent la nomination du Duc de Broglie à la présidence du conseil et poussent Mac-Mahon à dissoudre la Chambre des députés. De nouvelles élections sont organisées en octobre 1877. C'est une nouvelle victoire républicaine et notamment pour Laisant le 14 octobre, réélu à une large majorité (9 695 voix contre 5 611 pour l'Amiral royaliste de Cornulier-Lucinière).

Les républicains se déchirent alors entre opportunistes, autour de Gambetta ou Ferry et radicaux qui, avec Clémenceau, désirent une action forte, anticléricale et anti-conservateurs. Laisant, siégeant à l'extrême gauche, défend, à travers la presse, les idées proches de celles des radicaux. Il défend un projet de déclaration d'utilité de certaines lignes de chemin de fer en mars 1877 et, en 1891, soutient une proposition de loi ayant pour objet le rachat du réseau de la compagnie des chemins de fer de l'Ouest par l'État.[944]

Le vote du budget de 1879 fournit un exemple d'opposition entre Gambetta et Laisant lorsque ce dernier propose de rajouter un chapitre au budget des travaux public. D'un montant de 500 000 francs, ce crédit permettrait de poursuivre les travaux d'agrandissement et de modernisation de l'École polytechnique, travaux engagés sur le budget 1878. Les nombreuses interruptions de la part de Gambetta et la conclusion du rapporteur de la commission du budget amèneront finalement l'ancien élève de l'École à retirer l'amendement[945].

La session parlementaire de 1880 offre un autre exemple de soutien à l'enseignement et à la diffusion scientifique. C.-A. Laisant y propose en effet un amendement concernant le traitement de vingt aides-naturalistes du Muséum national d'histoire naturelle[946]. Avec l'augmentation souhaitée de ces traitements, l'ensemble de l'enveloppe demandée s'élève à 105 000 francs. Suite au débat à l'Assemblée et aux propositions de la commission du budget, Laisant retirera de lui-même cet amendement, satisfait des principes posés lors de la

[943] [Carnoy, 1903], [Robert, Cougny, 1889] et [Sauvage, 1994].

[944] Voir *Journal officiel* du 14 au 16 mars 1877 et *Annales de la Chambre des députés*, 5e législature, session de 1891. Laisant signera la préface de *Les chemins de fer aux cheminots dans la société transformée* de F. Depré en 1910.

[945] *Annales du Sénat et de la Chambre des députés, session ordinaire de 1878*, t X, du 18 novembre au 5 décembre 1878, Paris, 1879, p. 170-171.

[946] À partir de 1862, l'établissement s'est concentré vers les sciences expérimentales sous la direction de Chevreul (1786-1889), concurrençant l'Université. En 1880, son directeur est E. Frémy

discussion (même si la commission ne propose qu'une augmentation moindre par naturaliste) et de la création récente de deux postes d'aides-naturalistes[947].

Le député de Loire-Inférieure attaquera le général de Cissey dans les colonnes du *Petit parisien*, journal dont il assume la direction de janvier 1879 à 1881[948]. L'année 1880 est marquée par les soupçons d'espionnage en faveur de l'Allemagne qui pèse sur l'ancien président du conseil (1874-1785) : le procès qui en découle disculpera le général mais révèlera la dilapidation des fonds secrets du ministère de la guerre. L'article de Laisant, farouche adversaire de Cissey, notamment depuis la répression de la Commune de Paris, accuse le ministre de la guerre d'espionnage et vaudra à son auteur une condamnation pour diffamation, assujettie d'une amende, que même un recours à la tribune de la Chambre des députés n'effacera.

De nouveau, sa proposition de loi sur la réduction de la durée du service militaire, bien que signée par 125 députés, est repoussée. Son mandat est également ponctué de duels contre les députés La Rochette d'abord, Maillé ensuite.

Les élections législatives de septembre 1881 s'annoncent délicates. Laisant a alors fondé et dirige *La République radicale* [949] où il relaie les vives oppositions formulées à la Chambre contre les opportunistes ou les modérés tels que Gambetta ou Ferry. Les républicains de l'ouest se déchirent suite à ces prises de positions[950]. Le 4 septembre, Laisant n'est donc réélu qu'au second tour après avoir fait face à un autre candidat républicain (proche de Guépin) et à un candidat monarchiste. La rupture avec le comité nantais radical est consommée dès lors qu'on refuse à Laisant de se présenter aux élections sénatoriales[951]. Désormais, le futur politique du député de Loire-Inférieure aura pour cadre la capitale.

Le jugement de Laisant sur la Chambre des députés se durcit. L'article « Chambre infâme » paru le 25 juillet 1883 dans *La République radicale* marque sa défiance face à plusieurs députés, corrompus selon lui par les grandes compagnies de chemin de fer[952], s'en suit une vive discussion à l'Assemblée.

---

[947] *Annales du Sénat et de la Chambre des députés*, session ordinaire de 1880, t. IX du 24 juin au 5 juillet 1880, imprimerie et librairie du Journal Officiel, Paris, 1881

[948] [Amaury, 1972].

[949] Laisant dirigera cette publication jusqu'en 1886.

[950] [Siegfried, 1975], p. 87.

[951] [Sauvage, 1994], p. 70.

[952] [Jouve, 1995].

II.3.2. La session parlementaire de 1882

Les sessions de 1881 et 1882 sont marquées par l'adoption des lois Ferry sur l'enseignement primaire. Voici le jugement porté sur ces réformes par Laisant en 1912 dans son ouvrage *La Barbarie moderne* : « il paraissait instituer l'instruction gratuite, obligatoire et laïque, céder à la pression de la Ligue de l'enseignement, dirigée alors par des hommes à l'esprit sincère et au cœur généreux. Mais en fait il s'arrangeait de manière à laisser toute latitude à l'enseignement congrégationiste, et à empêcher l'obligation de devenir réelle »[953]. L'anarchiste y juge les lois Ferry stériles et inopérantes, critique la prééminence de l'administration et le manque de libertés laissées aux instituteurs.

Nous proposons d'étudier ici deux autres débats parlementaires auxquels Laisant a pris part de manière significative : le projet de loi concernant la publication des œuvres de Fermat, et le débat sur la création d'une deuxième chaire de calcul infinitésimal à la Sorbonne. On commentera brièvement la discussion portant sur le budget alloué au Conservatoire des arts et métiers.

LA PUBLICATION DES ŒUVRES DE FERMAT

Le projet de la publication des œuvres complètes de Fermat avait déjà été évoqué par Laisant lors du discours d'ouverture qu'il prononce en 1879 en tant que président des sections 1 et 2 au Congrès de l'AFAS de Montpellier ([Laisant ; 1879b]). Dans sa notice historique, il déplore la place faite à l'enseignement de la science des nombres en France : les récentes découvertes de Lucas ne sont reconnues qu'en Allemagne et « le culte de Fermat lui-même, de cet illustre Français, immortel fondateur de l'arithmétique supérieure, est complètement délaissé en France »[954]. Il présente la volonté de son ami Lucas[955] et de Charles Henry de publier une édition complète des œuvres du mathématicien. Laisant souligne qu'une telle édition avait été envisagée en 1843, avec un budget voté de 25 000 francs mais resté inutilisé. Il souligne surtout qu'une réimpression des *Varia opera mathematica* a été effectuée, conformément à l'original (donc en français), par les libraires Friedländer à Berlin[956]. Dans le

[953] [Laisant, 1912a], p. 82. Laisant s'opposera également à la politique coloniale du cabinet Ferry.
[954] [Laisant, 1979b], p. 74.
[955] Laisant a soutenu dès 1876 la demande d'Édouard Lucas, titulaire d'une chaire de mathématiques spéciales au lycée de Moulins, pour un poste dans un lycée parisien : voir [Décaillot-Laulagnet, 1999] où on trouvera également des précisions sur la réédition des œuvres de Fermat, notamment sur le rôle d'É. Lucas.
[956] *Varia opera matematica D. Petri de Fermat*, R. Friedländer & Filius, 1861.

contexte consécutif à la défaite de Sedan imputée au retard de la science française, le député de Nantes affirme : « On voit quel service rendront à la science française MM. Lucas et Henry, s'ils arrivent à mettre à exécution le projet dont nous venons de parler plus haut »[957].

En 1880, Laisant n'assiste pas au congrès de l'AFAS qui se déroule à Reims. Le président des sections 1 & 2 n'est autre qu'Édouard Lucas (Henry est secrétaire des sections 1&2). Lors de l'assemblée générale du congrès, Lucas expose son projet de réédition des œuvres de Fermat dans un cadre plus global de promotion de la théorie des nombres en France en s'exprimant ainsi : « On a négligé Fermat, parce qu'on a négligé la théorie des nombres, non pas seulement à cause de son inutilité apparente, mais aussi par défaut d'initiation. Pendant qu'en Allemagne les cours d'arithmétique se comptent par centaines, la France possède, à de longs intervalles, quelques rares leçons d'arithmétique. C'est là une infériorité grave qu'il importait de signaler aux membres de l'Association française. Je pense que les géomètres de l'Association ne refuseront pas aux projets d'une édition définitive de Fermat et de la création d'une chaire d'arithmétique, l'autorité de leurs vœux et de leurs sympathies. »[958] Le vœu est alors adopté à l'unanimité.

Faut-il interpréter ce vœu comme l'image de la glorification excessive de mathématiciens nationaux ? D'autres vœux de la section 1 & 2 de l'AFAS portent également sur l'impression d'œuvres complètes (François Viète..) ou la célébration de grands noms de la science française dans telle ou telle ville à travers une rue ou une statue (S. Germain, Cauchy, Darboux …)[959]. On pourrait ainsi se demander si Laisant ne verse pas lui-même dans une nostalgie excessive et stérile à travers son admiration pour le génie de Fermat, Pascal ou Descartes. Il convient surtout de souligner le contexte entourant les vœux formulés à l'AFAS : il s'agit plus généralement de soutenir une discipline peu représentée en France, notamment dans l'enseignement supérieur, alors que cette même discipline connaît des développements importants à l'étranger et paradoxalement au congrès de l'AFAS[960].

C'est donc à la Chambre des députés pendant la session de 1882 que Laisant va pouvoir dans un premier temps défendre le projet de réédition des œuvres de Fermat. Il

---

957 [Laisant, 1979b], p. 75.

958 « Vœux émis par les 1re et 2ème sections », *AFAS, Compte rendu de la 9ème session*, Reims, 1880, Paris, au secrétariat de l'association, 1881, p. 263-264. Ce constat est partagé par d'autres, tel Ernest de Faulque de Jonquières en 1880, et peut être illustré par la part décroissante du nombre d'articles consacrés à la théorie des nombres à la fin du siècle (voir [Goldstein, 1999], p. 189-190).

959 Robert Belot analyse ainsi les vœux formulés par les deux premières sections de l'AFAS : « Mathématique, astronomie, géodésie, mécanique témoignent d'une sorte de repli disciplinaire et se révèlent comme étant les sections les plus internalistes, peut-être aussi les plus passéistes, à les voir se complaire à la glorification de quelques figures tutélaires » ([Belot, 2002], p. 292).

960 [Décaillot, 2007].

présente le 16 février une proposition de loi ayant pour objet la publication des œuvres de Fermat aux frais de l'État, en collaboration avec Hervé Mangon et Paul Bert[961]. Son intervention consiste tout d'abord en un rappel du projet de 1843, initié par le ministre de l'Instruction publique de l'époque, Villemain. Laisant reprend ensuite la notice biographique écrite par François Arago, rapporteur de la commission de la Chambre de députés chargé d'examiner le projet de loi de 1843, puis rappelle l'intérêt du travail déjà entrepris par Lucas et le soutien que l'AFAS lui a apporté lors du Congrès de Reims.

Laisant s'appuie sur le nationalisme scientifique en vigueur à la Chambre tout comme à l'AFAS : «dès 1861, des libraires de Berlin ont réimprimé un recueil, en langue française, des œuvres de notre illustre compatriote. Mais cette édition est loin d'être complète. Dans tous les cas, ne serait-il pas douloureux de voir la France abandonner aux nations étrangères le culte de ses grands hommes ? »[962] Il n'oublie pas de justifier l'importance d'une telle publication en rendant hommage à l'ampleur de l'œuvre de Fermat : « Analyse, géométrie, théorie des nombres surtout, il a abordé et fait progresser toutes les branches mathématiques »[963].

Enfin, le crédit nécessaire est fixé à 25 000 francs, soit 10 000 francs de plus que celui adopté en 1843. Ceci s'explique entre autre par l'ajout de nouvelles pièces à la publication, pièces qui nécessiteront des missions en Angleterre et en Italie. Le projet serait placé sous la tutelle du ministre de l'Instruction publique, par l'intermédiaire d'une commission où siégeraient notamment des membres de l'Académie des sciences.

Une première commission chargée d'examiner le projet de loi est nommée (Couturier en est le président et Viette le secrétaire). Lors de la séance du 6 mars 1882, le rapport fait au nom de cette commission d'initiative parlementaire est favorable au projet[964].

---

[961] Hervé Mangon (1821-1888) est un ancien élève de l'École polytechnique (X 1840). Ingénieur des ponts et chaussées et professeur au Conservatoire des arts et métiers de Paris, il publie divers ouvrages sur l'irrigation, le drainage, imagine plusieurs instruments météorologiques. Il crée le cours de génie rural à l'École des ponts et chaussées et au Conservatoire des arts et métiers. Depuis 1872, Mangon est membre de l'Académie des sciences (section science agronomique). Il sera, en 1885, ministre de l'agriculture dans le cabinet Brisson.

Paul Bert (1833 -1886) suit les cours à l'École polytechnique mais en sort sans diplôme. Il obtient ensuite un doctorat en droit en 1857 puis s'intéresse à la physiologie. Il devient docteur es sciences en 1866 et professeur de physiologie à la Sorbonne en 1869 et publiera plusieurs manuels scolaires. En 1882, il est membre de l'Académie des sciences. Député républicain anticlérical, il s'investit dans les grandes lois sur l'enseignement avant de devenir ministre de l'Instruction publique du gouvernement Gambetta du 14 novembre 1881 au 30 janvier 1882.

[962] *Annales de la Chambre de députés (nouvelle série), IV. Documents parlementaires. Session ordinaire de 1882*. t. I. du 14 janvier au 25 mars 1882, 2ème partie, Paris, 1882, p. 321 (annexe n° 437). Chasles dans son rapport de 1870 reprend également cet argument de la pauvreté éditoriale en ce qui concerne les mathématiques ([Gispert, 2002], p. 15).

[963] Ibid.

[964] *Annales de la Chambre des députés (nouvelle série). Documents parlementaires. Session ordinaire de 1882, du 4 mars au 25 mars 1882*, 2ème partie, 1882, Paris, annexe n° 548.

Laisant sera le rapporteur de la deuxième commission présidée par H. Mangon[965] et reviendra dans son rapport présenté lors de la séance du 4 mai sur l'historique de la question.

La réédition des œuvres du grand mathématicien du XVII^e siècle avait été débattue le 23 avril 1843 à la Chambre de députés. Le ministre de l'Instruction publique Villemain proposait d'ouvrir un crédit spécial de 15 000 francs pour l'occasion. En 1844, une commission fut nommée : en font parti Gugliemo Libri qui, cinq ans auparavant, avait découvert des écrits inédits de Fermat et qui sera chargé de l'édition, et un professeur de la Faculté des sciences de Toulouse, Despeyrous, qui sera envoyé en mission en 1845 dans le sud de l'Allemagne et à Vienne pour y découvrir une copie de la polémique entre Fermat et les cartésiens sur la réfraction[966]. En 1848, Libri fût face à un procès pour détournement de manuscrits et quitta la France pour Londres en emportant certaines pièces. Le mathématicien Gabriel Lamé, auteur de travaux sur le théorème de Fermat[967], le remplace au sein d'une nouvelle commission qui ne parviendra jamais à lancer la publication. Laisant explique cet échec par le fait qu'il manquait, pour une édition complète, l'ensemble des manuscrits de Fermat, notamment ceux emportés par Libri. Après le décès de Lamé, Despeyrous ne peut qu'offrir à la ville de Toulouse une statue représentant celui dont il ne pourra publier seul les œuvres complètes.

Laisant reprend de nouveau les arguments d'Arago et insiste ensuite sur les progrès récents en théorie des nombres et les applications nouvelles qui en découlent :

> *de profondes transformations ont été accomplies, et il se trouve que les théories si abstraites de Fermat ont rencontré des applications nombreuses dans la statistique, dans les assurances, dans l'industrie du tissage, etc.; tant il est vrai que la culture de la science n'est jamais inutile, si lointain peut paraître le bénéfice matériel qu'elle produira. Combien de gens utilisent chaque jour les travaux des nombreuses générations de savants qui nous ont précédés, sans s'en douter, sans même connaître les noms de ces illustres chercheurs du vrai !* [968]

On pense à l'application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers d'Édouard Lucas ou à l'intervention du même Lucas en 1876 sur les lois géométriques du tissage au congrès de l'AFAS[969]. Ce n'est pourtant pas un quelconque aspect utilitaire des découvertes du célèbre mathématicien qui motive une telle publication : « N'en fût-il pas ainsi

[965] Une troisième commission sera nommée par le Sénat et présentera son rapport le 24 juin par l'intermédiaire du Général Arnaudeau.
[966] Manuscrits confiés à la bibliothèque nationale. La révolution de 1848 annulera la mission prévue à Rome.
[967] [Goldstein, 2009].
[968] *Annales de la Chambre des députés*, *t. V, documents parlementaires, session ordinaire de 1882*, t II du 27 mars au 24 juin 1882, imprimerie et librairie du journal officiel, Paris, 1882. Annexe 779, p. 351-352.
[969] Lucas Édouard, *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*, Paris, Gustave Retaux, Libraire-Éditeur, 1867. Voir [Décaillot, 2002b].

pour Fermat, et n'y eût-il aucun lien entre ses découvertes et le développement intellectuel et matériel de notre temps, qu'il faudrait encore essayer de mettre en lumière ses admirables travaux. L'honneur scientifique de notre pays y est engagé. »[970]

La commission a demandé à Lucas et Henry, les deux initiateurs du projet, d'en préciser le contour. C.-A. Laisant peut alors en exposer le contenu probable : notice sur la méthode de *maximis* et *minimis*, un manifeste sur le *commercium epistolicum* de Wallis (1658), un opuscule sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites (1660), des lettres à Descartes, à Wallis auxquels il faut ajouter des œuvres posthumes ou inédites comme l'*inventul novum* (1670, contenant des annotations sur Diophante), les *Varia opera mathematica* (1679, contenant de nombreuses lettres) et certains fragments publiés par l'abbé Bossut (1779) ainsi que les documents découverts récemment[971].

Réaffirmant la pertinence du projet, Laisant justifie l'intérêt d'un fort tirage principalement par la nécessité d'une grande diffusion de l'œuvre :

> *des livres scientifiques de cette nature devraient être répandus le plus possible dans nos bibliothèques publiques. Ils rencontreront peu de lecteurs, c'est incontestable ; mais il suffit qu'il y ait, dans la plus modeste petite ville, un esprit curieux et chercheur, pour qu'on doive mettre à sa disposition des aliments à sa louable curiosité. Un livre qui séduit l'intelligence, bien souvent il n'en faut pas plus pour faire jaillir l'étincelle de la science dans un jeune esprit. Et si nous propageons les œuvres des savants du passé, n'oublions pas que c'est surtout pour préparer les savants de l'avenir.*[972]

Rappelant le soutient que la commission a reçu du ministre de l'Instruction publique Jules Ferry et reformulant la proposition initiale pour préciser certains détails budgétaires, Laisant soumet au vote l'unique article de la proposition de loi. Elle sera adoptée par la Chambre le 13 mai, puis par le Sénat le 24 juin. En juillet 1882, les trois académiciens Bertrand, Puiseux, Serret ainsi que Darboux, Lucas et Henry forment la première commission de publication. Lucas et Henry partent pour une mission en Italie avant de se quereller et de se séparer. C'est le début d'une longue série de complications dans ce projet qui feront écrire à Darboux : « Et la commission Fermat, voilà encore qui nous donne de l'ouvrage. Sans qu'on ait consulté qui que ce soit de compétent, sauf Laisant, on a chargé Lucas et Henry (Charles) de la publication de ces œuvres. »[973] Paul Tannery, contacté par Lucas, et Jordan intègreront

---

[970] Op.cit., p. 352.
[971] Op.cit., p. 352. Ce plan est sensiblement le même que celui exposé en 1880 dans la *Notice sur les titres et travaux de M. Lucas*. Voir [Décaillot-Laulagnet, 1999].
[972] Op.cit., p. 352. Ce souhait de susciter des vocations scientifiques partout en province fait également écho aux objectifs de l'AFAS et de ses congrès.
[973] Archives Académie des sciences, dossier personnel Darboux (correspondance) cité dans [Décaillot-Laulagnet, 1999].

en 1885 la commission suite aux décès de Puiseux et Serret. Devant le désengagement progressif de Lucas, on confie à Tannery ce projet marqué de nombreuses difficultés[974]. Finalement, les quatre volumes seront publiés de 1891 à 1892, grâce aux efforts de Tannery et Henry, et mentionnent les travaux de Lucas.

PREMIER DEBAT SUR UNE CHAIRE

Après avoir défendu la diffusion de la théorie des nombres en France, c'est l'enseignement du calcul différentiel que Laisant promeut sur les bancs de l'Assemblée pendant cette session parlementaire de 1882. De nouveau avec la participation de Bert et Mangon, le député propose le 2 décembre 1882 l'amendement suivant lors du débat sur le budget : « Rétablir le crédit de 12,000 fr. réclamé par le gouvernement pour la création d'une deuxième chaire de calcul infinitésimal à la Faculté des sciences de Paris. »[975] La commission du budget avait déjà repoussé une première fois la demande du gouvernement quant à ce crédit (Jules Duvaux est alors ministre de l'Instruction publique) et on reprochera à Laisant, membre de la commission du budget, d'avoir été absent au moment du vote.

Deux arguments soutiennent l'action du député de Loire-Inférieure pour cette nouvelle tentative : l'importance de la discipline concernée et surtout la comparaison avec la situation en Allemagne, à nouveau. En effet, « le calcul infinitésimal a dans notre enseignement supérieur une importance assez grande pour qu'on ne doive pas hésiter à faire en sa faveur les sacrifices qu'on n'hésite pas à faire pour beaucoup d'autres branches de l'enseignement scientifique. »[976] Et pourtant, l'enseignement mathématique à l'étranger semble plus moderne que celui dispensé en France :

> *Nous voyons dans les universités étrangères, en Allemagne particulièrement, l'enseignement des hautes sciences mathématiques prendre une importance qui croît de jour en jour; nous voyons qu'on y enseigne les méthodes dues aux nations étrangères ; au contraire, dans notre pays, malheureusement, et malgré la très-grande distinction et le très-grand talent des hommes appelés à enseigner les diverses branches des mathématiques, nous constatons une lacune considérable dans cette partie de l'enseignement supérieur.*[977]

[974] [Pineau, 2010], p. 271-326.
[975] *Annales de la Chambre de députés (nouvelle série), VI. Débats parlementaires. 3ème législature. Session extraordinaire de 1882*. t. III. du 9 novembre au 29 décembre 1882, imprimerie du journal officiel, Paris, 1883, p. 317-318.
[976] Ibid., p. 317.
[977] Ibid., p. 318. Sur un aspect du déclin supposé des sciences en France au cours du XIX^{e} siècle, [Waltraud, 1974].

Cette démarche du député peut être rapprochée du souhait de Chasles pour la création d'une chaire de « géométrie infinitésimale et analytique » et d'une autre d'« analyse transcendante », souhait formulé dans son *Rapport* de 1870[978]. Pour les deux hommes, les progrès de telle ou telle discipline mathématique sont assujettis à la création d'une chaire qui leur soit dédiée.

Lorsque le rapporteur de la commission du budget explique que le nombre d'auditeurs actuels ne justifie pas un tel dédoublement de la chaire de calcul infinitésimal, Laisant rejette cet argument, affirmant qu'il n'y a pas adéquation entre l'importance d'une chaire et l'étendu de son auditoire. On retrouve également dans l'argumentation du député la défiance vis-à-vis de toute visée utilitariste de la Science :

> *Prétendez-vous d'ailleurs mesurer l'utilité d'une science à ses résultats immédiats? Je crois que c'est là quelque chose de très difficile à admettre. Nous ne pouvons pas classer, hiérarchiser les sciences et dire que la botanique sera plus utile que le calcul infinitésimal ou la zoologie plus utile que l'analyse mathématique.* [979]

Il s'agit donc plutôt de moderniser l'enseignement français, suivant l'exemple d'autres universités à l'étranger :

> *Ce qui est certain, c'est que la France se doit à elle-même de donner à son enseignement supérieur toute l'extension possible dans toutes les branches des connaissances humaines. Eh bien, messieurs, je crois que ce n'est pas dépasser la limite des efforts que la France peut faire que de demander que la faculté des sciences de Paris soit mise au même niveau que les facultés scientifiques étrangères. Je sais bien que les grandes universités allemandes sont organisées dans des conditions différentes, mais elles permettent au moins d'arriver à ce résultat, qu'on n'ignore pas chez nos voisins ce qui se passe dans les pays étrangers, au point de vue scientifique. Eh bien, dans nos universités françaises, les méthodes étrangères ne sont pas enseignées en général : il y a là une lacune ; je persiste à demander qu'on la comble.*[980]

Le vote qui suit ne permet pas d'adopter l'amendement.

LA REACTION D'HERMITE

Dans une lettre adressée à Mittag-Leffler datée du 27 décembre 1882, Charles Hermite dévoile son ressentiment quant au récent débat à l'assemblée sur la création d'une chaire en calcul infinitésimal :

[978] [Chasles, 1870], p. 378. Cet état de fait peut être expliqué par la rigidité du système d'enseignement. Sur « l'affaiblissement de la recherche et de l'enseignement scientifique » (voir [Gispert, 1991], p. 15-17).
[979] *Annales de la Chambre de députés…*, p. 318.
[980] Ibid. L'isolement de la communauté française au début des années 1870 est souligné par H. Gispert ([Gispert, 1985], p. 393-394).

> *Je vous apprendrai qu'il a été question du calcul intégral à la Chambre des Députés, et que, de la tribune d'où part la foudre qui anéantit la tyrannie et les vieilles superstitions, l'assemblée émerveillée a entendu retentir les noms de Riemann et de Cauchy ! Le gouvernement demandait les fonds nécessaires à la création d'une seconde chaire de calcul infinitésimal à la faculté, et sa proposition a été appuyée par M. Laisant et M. Bischoffsheim, pour les mêmes motifs. Tous deux de leur science certaine et avec une compétence proclamée par le Président M. Brisson, ont déclaré qu'à la Sorbonne on n'enseignait point les méthodes analytiques de l'étranger, ni la théorie des fonctions elliptiques, ni les quaternions ! Leur éloquence n'a point prévalu et la Chambre a jugé la dépense inutile ; mais que pensez vous du jugement porté sur le cours de M. Bouquet et le mien ? M. Lipschitz m'a écrit qu'il avait lu, avec le plus vif étonnement, les débats du parlement français sur l'enseignement supérieur de l'Analyse, et pour me consoler m'a cité le passage suivant de Rückert : "Faites le bien et jetez le à la mer. Lorsque les poissons le dédaigneront, le Seigneur le verra." Si vous pouvez vous procurer le Journal officiel à Stockholm, c'est dans le numéro du dimanche 3 décembre que se trouve le compte-rendu de cette intéressante séance.*[981]

Le député Raphaël Bischoffsheim[982] présente en effet lors de la même séance que Laisant un amendement visant à « Élever de 100 000 fr. les fonds du chapitre 7 pour augmenter le nombre de maîtres de conférences dans les facultés départementales »[983]. Le député de Nice s'exprime alors sans détour : « Vous n'avez pas un cours où on enseigne l'analyse spectrale, ni les fonctions elliptiques, ni la théorie de la capillarité, ni la théorie mathématique de la chaleur, ni les méthodes de Riemann et de Cauchy »[984].

L'amertume d'Hermite semble tenace puisqu'il écrit encore à Mittag-Leffler le 11 janvier 1884 :

> *Je n'en finirais pas de vous conter d'autres affaires dans lesquelles j'ai été mis en avant et qui confinent à la politique. La commission du budget à la Chambre cherche chicane à la Faculté des Sciences, d'une part elle s'en prend à ceux qui cumulent deux traitements, et de l'autre, à ceux des professeurs dont le cours est d'un seul semestre, ce qui est mon cas. Le gouvernement prend notre défense, mais le doyen Mr Milne-Edwards me met en avant pour répondre à des attaques qui se sont produites à la tribune contre le cours d'Analyse. Il a été dit qu'on n'enseignait à la Sorbonne ni les méthodes de Cauchy, ni les travaux de Riemann,*

---

[981] Voir [Hermite 1984], p. 189. Nous précisons : Rückert, poète allemand du début du XIXe siècle.

[982] Fils de banquier, Raphaël Bischoffsheim (1823-1906) entre à l'École des arts et manufacture (1839) avant de reprendre la direction de la banque paternelle, puis d'être nommé ingénieur-inspecteur des chemins de fer de la Haute Italie. Son goût pour les sciences et en particulier par l'astronomie l'amène à subventionner plusieurs constructions d'appareils pour les observatoires de Paris, de Montsouris et du Pic du Midi et à fonder et financer l'observatoire de Nice. Il est élu en 1881 comme candidat républicain à la 2ème circonscription de Nice. Il soutiendra les gouvernements Ferry et Gambetta, sans se prononcer sur les questions religieuses, sera élu membre libre de l'Académie des sciences en 1890 et participera à la fondation de *La Grande Encyclopédie*. Voir *Dictionnaire des parlementaires français*, t. I, Bourloton, Paris, 1891, p. 321 et M. Fulconis, *Raphaël Bischoffsheim, l'homme qui a offert à la France le plus grand observatoire du Monde,* édition Regards du Monde, 2003.

[983] *Journal Officiel*, 3 décembre 1882, Chambre des députés, débats parlementaires, séance du samedi 2 décembre, p. 1837-1840 cité dans [Hermite 1984], p. 269.

[984] Ibid.

> *ni les fonctions elliptiques ! (Voir dans le Journal Officiel du 3 décembre 1882, la séance du 2, et les discours de Mr Laisant et de Mr Bischoffsheim). Mais j'ai hâte mon cher ami de vous envoyer pour les* Acta *une lettre de Mr Lipschitz, qui a dû vous écrire à ce sujet, et vous donner le titre sous lequel elle pourrait être publiée.*[985]

Les positions, tant mathématiques que politiques, de Laisant et Hermite sont aux antipodes. Le second est catholique et antirépublicain, hostile à la théorie des quaternions par exemple[986].

Cependant lorsqu'Hermite sera absent du Congrès international des mathématiciens de 1900 alors qu'il en est président d'honneur, Laisant proposera en séance de clôture l'envoi d'un télégramme amical à ce dernier[987]. Laisant rendra également hommage à l'illustre mathématicien dans les pages des *Nouvelles annales* lors de son décès en 1901 et insèrera une notice sur son œuvre, rédigée par Borel, dans les premières pages de son *Annuaires des mathématiciens*[988].

LE SOUTIEN AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET METIERS

Le député Laisant défend également l'enseignement des sciences appliquées lorsqu'il intervient, toujours lors de la même session parlementaire, au sujet du budget lié au ministère du commerce. Il propose le 6 décembre 1882 l'amendement suivant : « Augmenter le total du chapitre d'une somme de 50 000 fr., pour les achats de modèles nécessaires à l'enseignement du Conservatoire des arts et Métiers. »[989]

La discussion porte principalement sur l'inscription d'un chapitre supplémentaire permanent au budget, correspondant à une dépense annuelle régulière pour l'établissement dirigé par le colonel Laussedat, ancien professeur de géodésie du député à l'École polytechnique. Le député nantais souligne l'importance du conservatoire, à travers sa double fonction : musée et école où les cours « embrassent pour ainsi dire toutes les branches des

---

985 Voir [Hermite 1985], p. 79. Nous n'avons pas trouvé trace de cette lettre, ou d'un article correspondant dans les *Acta mathematica*.

986 Goldstein Catherine, « Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite », Prépublication. Voir aussi, au sujet de "mathématique et politique", [Zerner, 1991], p. 319-320.

987 « Le Congrès international des Mathématiques envoie l'expression de son admiration et de sa sympathie respectueuse au géomètre illustre qui honore son pays et le monde scientifique entier par son talent aussi bien que par son caractère. C'est unanimement que les Mathématiciens de toutes les nations forment pour M. Hermite les vœux les plus sincères de bonheur et de santé » ([Duporcq, 1902], p. 25).

988 "Une lettre de M. Hermite", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 1, 1901, p. 49-53 et [Laisant, 1901a]

989 *Annales de la Chambre des députés, nouvelle série, débats parlementaires, 3ème législature, session extraordinaire de 1882*, t III du 6 déc. au 29 déc. 1882, imprimerie et librairie du journal officiel, Paris, 1883. p. 399-404. Sur le Conservatoire, voir Tresse René, "Le Conservatoire des Arts et Métiers et la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale au début du XIXe siècle", *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, t. 5, n°3, 1952, p. 246-264.

sciences appliquées aux arts depuis la géométrie jusqu'au droit commercial »[990]. C'est en effet pour animer et rendre efficaces les cours que cette somme serait employée ; « pour que les cours soient donnés d'une façon fructueuse et utile, c'est-à-dire pour que le professeur ait à présenter sur sa table, au moment même où il a à faire sa leçon, les modèles qui lui sont nécessaires et des éléments de démonstration. »[991] L'exemple du cours de chimie appliquée à la teinture, à la céramique et à la verrerie montre que l'outillage actuel ne correspond ni à la réputation du Conservatoire, ni au rang de la France dans le domaine industriel et commercial[992]. Le manque de modèles ne permet pas un enseignement complet en chimie industrielle, pas plus qu'en constructions civiles.

L'intérêt de l'acquisition de pièces pour le musée n'est pourtant pas éludé. Provoquer la curiosité par la démonstration visuelle semble indispensable : « sans parler du musée et de l'utilité de donner à tous les visiteurs venus de tous les coins de l'Europe, et même de toutes les parties du monde, cet enseignement par les yeux qui est si fécond et qui a si souvent provoqué de nobles émulations et des découvertes utiles. »[993]

La demande du député Laisant se justifie surtout par le contexte économique de l'époque : « C'est justement dans la grande période de développement industriel que nous traversons, qu'il faut surveiller les progrès de l'industrie. »[994] La concurrence mondiale s'accentue et la situation de la France est dépeinte de manière peu flatteuse : « Quel moyen y a t'il de rétablir l'équilibre, de relever notre grandeur commerciale, sinon de développer encore cette industrie française si originale, de la développer avec plus de soin, avec une attention plus grande, avec plus d'efforts, pour arriver à produire des contremaîtres distingués, ces hommes éminents, ces artistes de l'industrie. »[995]

La discussion qui s'en suit concerne l'origine des fonds demandés pour l'exercice en préparation (les bénéfices de l'Exposition internationale d'électricité de 1881 semblent pouvoir être employés). Le caractère permanent de ce nouveau crédit est ensuite étudié sur fond de restrictions budgétaires. Pour comparaison, le budget des cultes est rappelé et

---

990 *Annales de la Chambre des députés…,* p. 400.

991 Ibid.

992 La Suisse et surtout l'Allemagne sont nettement avancées dans le domaine des colorants industriels en plein expansion depuis la création de la mauvéine (1856) avec des entreprises puissantes comme la BAS créée en 1869. Ces deux pays couvrent par exemple 50% du marché de l'aniline en 1873 et 90% en 1895. Hemptoz Gérard, *Histoire des techniques*, cours de DEA, Centre François Viète, Université de Nantes, 2006.

993 Ibid.

994 Ibid., p. 401.

995 Ibid.

vivement contesté par Clémenceau et Laisant[996]. Finalement, l'amendement mis aux voix n'est pas adopté.

II.3.3. Du boulangisme à l'anarchisme

Le 4 octobre 1885, Laisant est élu au second tour des élections législatives dans le 13e arrondissement de la Seine (par 284 291 voix au 2nd tour). Il demeure 84 bis puis 162 avenue Victor Hugo à Paris. Il s'opposera de nouveau à l'expédition du Tonkin impulsée par Jules Ferry en 1885. Il sera chargé par la commission de l'armée du rapport sur la loi de recrutement mais refusera en juillet 1887 de poursuivre ses travaux devant le refus de la Chambre de supprimer totalement les cas de dispense et d'exemption[997]. Il expose ses positions avec quatre conférences données en 1885[998] et devient membre de la Ligue des patriotes créée par Déroulède en 1882.

Un contemporain du nouveau député de la Seine donne une description de l'homme de combat Laisant dans son ouvrage sur les élus de la Seine publié à l'occasion des élections de 1885 :

> [Laisant] *répond avec beaucoup de rigueur et de sang-froid, ne provoquant rien mais ne cédant sur rien. Il a une sorte de talent d'acier ; froid, assez raide, jetant parfois de brusques éclairs, des dégagements meurtriers. Il conduit une question comme un siège. Il a ses tranchées, ses parallèles, sa mine et sa contre-mine ; au moment de faire feu, il ne redoute ni l'éclat, ni le recul de sa pièce. Il se tient là, impassible, rigoureux, surveillant tout et prêt à toute complication.*[999]

QUESTIONS AUTOUR D'UNE CHAIRE EN THEORIE DES NOMBRES

1er acte : défendre la position de la France

En 1882, C.-A. Laisant prolongeait à l'Assemblée le souhait qu'il avait formulé au congrès de l'AFAS de 1879 quant à la promotion de la théorie des nombres en France par la réédition des œuvres de Fermat. Le 25 janvier 1887, le député de la Seine est amené à

[996] Laisant dans une dernière invective au ministre de finances : « je regrette que M. le ministre des finances n'ait pas dépensé sa chaleureuse éloquence lorsqu'est venu en discussion le budget des cultes et lorsqu'on faisait voter à cette chambre une foule de dépenses qui n'étaient pas concordataires » (Ibid., p. 404).

[997] [Carnoy, 1903], p. 6.

[998] Laisant C.-A., *La politique radicale en 1885 : quatre conférences*, Messages, Paris, 1885, in-8°, 105 p.

[999] Pinard Alfred (membre de la Société des Gens de Lettres), *Les élus de la Seine*, Jules Lévy libraire-éditeur, Paris, 1885, p. 105-108. Plus loin, on apprend qu'avec Clémenceau et le député G. Périn, Laisant est à la tête des « mousquetaires d'élite » comme on les appelle à la Chambre.

défendre de nouveau ce projet à l'Assemblée nationale. La commission du budget accepte en effet l'amendement de Laisant qui porte à 509 000 fr. le chapitre 12 du budget concernant le Collège de France pour la création d'une chaire en théorie des nombres. S'engage alors une discussion entre Laisant et le député Germain Lefèvre-Pontalis[1000] qui demande à revenir à l'enveloppe initiale par l'amendement suivant : « Réduire le crédit de 10 000 fr. par la suppression d'une nouvelle chaire de la théorie des nombres dont la création est proposée par la commission du budget. »[1001]

Outre les impératifs budgétaires, plusieurs points sont exposés par le député du Nord : le double emploi apparent d'une chaire en théorie des nombres avec la chaire de mathématiques déjà existante, ou encore le fait qu'une 41ème chaire serait préjudiciable à la qualité de l'ensemble des cours (trois chaires relèvent en fait des mathématiques : celle de mathématiques alors occupée par Liouville, celle de physique générale et mathématiques avec Joseph Bertrand et enfin celle de mécanique céleste échue à Maurice Lévy). Surtout, l'assemblée des professeurs du Collège de France n'a pas été consultée comme cela est la tradition depuis sa création en 1530. Lefèvre-Pontalis rajoute au sujet de l'accroissement du budget voulue par Laisant : « Elle a été proposée par l'un des membres de la commission du budget, M. Laisant, dans la pensée de qui elle a probablement son destinataire, et, comme si l'affaire se passait en famille, la commission n'a pas cru pouvoir se dispenser de s'y montrer favorable »[1002]. On connaît en effet les liens unissant Laisant et Lucas depuis plusieurs années et leur volonté commune de promouvoir la théorie de nombres en France.

Laisant s'explique et reprend certain des arguments exploités lors du débat sur la réédition des œuvres de Fermat, à commencer par le culte voué à Fermat par lequel la théorie des nombres a été « portée à son plus haut degré de perfection »[1003]. Le député rappelle ensuite la longue tradition française de cette discipline : « depuis Fermat, presque tous ceux qui ont continué à cultiver cette branche de la science ont appartenu à la France, ou du moins

---

[1000] Germain Lefèvre-Pontalis (1830-1903) : Docteur en droit, député depuis 1869 de Seine-et-Oise, il soutient le gouvernement Thiers et se rapproche de la droite. Lefèvre-Pontalis est réélu en 1885 député du Nord sous l'étiquette conservatrice d'Union des Droites. En 1888, il est chargé du rapport sur le budget de la Chambre où il prône l'économie. Plus tard, il s'opposera aux poursuites contre des membres de la Ligue des patriotes ou contre le général Boulanger. Il est élu, le 2 juin 1888, à l'Académie des sciences morales et politiques.
Voir *Dictionnaire des parlementaires français*, t. IV, Bourloton, Paris, 1891, p. 54-55.

[1001] *Annales de la Chambre des députés, 4ème législature, session ordinaire de 1887*, t I du 11 janvier au 28 février 1887, imprimerie et librairie du journal officiel, Paris, 1887, p. 181.
Le député René Brice dépose un amendement dans le même sens. René Brice (1839-1921) est docteur en droit, puis avocat. Après avoir soutenu la politique de Jules Ferry lors de son précédent mandat, il devient député d'Ille-et-Vilaine en 1885 (liste opportuniste) et rejoint la réunion du centre gauche. Il votera pour les poursuites contre les membres de la Ligue des patriotes et celles contre le général Boulanger. Voir *Dictionnaire des parlementaires français*, t. I, Bourloton, Paris, 1891, p. 486-487.

[1002] Ibid., p. 182.

[1003] Ibid.

un très grand nombre d'entre eux : Pascal, Descartes, et, plus récemment, Legendre, Cauchy, Liouville, Lamé, Le Besgue, pour ne citer que quelques-uns, sont des noms qui, parmi les géomètres français, dans l'histoire de la science française, constituent une partie de la gloire de notre pays. »[1004] Mais, de nouveau, l'image du déclin scientifique de la France, notamment face à l'Allemagne, prime :

> *À une certaine époque la théorie des nombres a été une science éminemment française ; depuis un certain nombre d'années cette branche de la science a été cultivée chez les nations étrangères, par les Allemands surtout, avec un soin extraordinaire. Elle a fait, de leur part, l'objet de travaux considérables. En même temps, il faut le dire et il faut le constater à regret, la théorie des nombres était abandonnée en France. À l'heure où je parle, dans toutes les universités étrangères à peu près, en Russie, en Italie, en Allemagne, en Angleterre, des travaux importants et nombreux sont faits dans cette branche de la science ; des chaires existent dans ces pays, où on l'enseigne et où on l'apprend. A cette même heure, et depuis longtemps déjà, il n'y a pas une chaire en France, pas une seule où s'enseigne la théorie des nombres.*[1005]

Rappelant que des sociétés savantes, notamment l'AFAS, ont émis à plusieurs reprises le même vœu, Laisant précise l'importance de l'existence du candidat de valeur qu'est Lucas « qui a fait de cette branche de la science l'objet des études de toute sa vie, qui y a gagné une notoriété considérable et justement méritée »[1006]. L'absolue nécessité scientifique de la création d'une chaire en théorie des nombres ainsi que la possibilité d'y nommer une personne compétente prime donc sur la tradition d'organisation du Collège de France[1007] ou les questions d'économie. De cette dépense dépend, en effet, le rayonnement scientifique de la France à l'étranger et les bénéfices qu'elle en tirerait sont en jeu : « Croyez-vous qu'il n'y a pas beaucoup d'étudiants allemands, anglais, russes, par exemple, qui viennent suivre les cours de nos universités parce qu'ils trouvent l'enseignement qu'ils recherchent et qu'ils ne trouvent pas à un degré pareil dans leurs pays ? »[1008]

L'amendement du député Lefèvre-Pontalis est ensuite rejeté. La victoire est de courte durée pour Laisant : le Sénat se prononce contre le crédit de 10 000 fr. prévu pour la création d'une chaire en théorie des nombres. L'amendement précédent doit donc être de nouveau débattu à la Chambre de députés, un mois plus tard, le 26 février 1887.

[1004] Ibid. Sur cette histoire de la théorie des nombres, on pourra consulter [Goldstein, 1989].
[1005] Ibid.
[1006] Ibid.
[1007] Laisant : « je crois qu'il ne faut pas confondre le Collège de France avec nos facultés par exemple. Je crois qu'il n'est pas du tout destiné à atteindre le même but. » (Ibid.)
[1008] Ibid.

Parallèlement à Gaston Gohierre de Longchamps qui milite aussi en faveur du projet, Laisant rédige alors une pétition adressée au ministre de l'Instruction publique, Berthelot, où il s'exprime en ces termes :

> *Chambre des députés, Commission du budget* *Paris, le 26 février 1887.*
>
> *Monsieur le Ministre,*
>
> *Le Sénat a repoussé la création, votée par la Chambre, d'une chaire de théorie des nombres au Collège de France, création qui avait été introduite au budget de 1887. Nous attachons la plus grande importance à la création de cette chaire, pour les raisons qui ont été données à la tribune de la Chambre, et surtout afin de ne pas laisser notre pays dans un état d'infériorité regrettable vis-à-vis de toute l'Europe scientifique, en ce qui concerne cette branche des mathématiques.*
> *Dans les circonstances actuelles, nous ne voudrions pas entraver, pour cette seule cause, le vote définitif du budget, et le faire renvoyer au Sénat, ce qui entraînerait l'obligation d'un nouveau douzième provisoire. Afin de concilier ce désir avec celui que nous avons rappelé plus haut, nous venons vous demander de vouloir bien, à bref délai, déposer un projet de loi spécial, qui pourrait être discuté en temps utile par les deux Chambres, afin de permettre l'ouverture du nouveau cours lors de la rentrée de 1887*[1009]

Laisant défend donc de nouveau l'amendement à la Chambre, le 26 février 1887. Soulignant que le rapport de la commission des finances du Sénat ne contient pas d'argument décisif à opposer à l'amendement, il répond aux critiques élevées contre la nomination du titulaire de la chaire et souligne encore l'intérêt de connaître un candidat potentiel pour cette chaire en la personne de Lucas : « un homme éminent, un savant considérable par ses travaux qui, à mon avis, est tout à fait apte à remplir l'emploi dont il s'agit, et à s'acquitter admirablement de ses fonctions d'enseignement »[1010]. Le député réaffirme le rôle prépondérant du ministre de l'Instruction publique dans la nomination du titulaire, lui suggérant alors de s'entourer des meilleurs conseillers pour cette décision. Berthelot n'émet alors pas d'objection mais, vu la décision du Sénat, renvoie à la décision des députés.

Un premier vote sur le rétablissement du chiffre de 509 000 fr. est effectué, puis un second, de manière publique. L'amendement est rejeté (261 voix contre 239).

[1009] A. N. [F/17/13 554] cité dans [Décaillot-Laulagnet, 1999]. Le texte recevra 19 signatures des républicains opportunistes jusqu'à l'extrême gauche. Pour connaître quelques-uns des signataires, on pourra consulter le chapitre 14 de [Décaillot-Laulagnet, 1999].

[1010] *Annales de la Chambre des députés*, *4ème législature, session ordinaire de 1887*, t I du 11 janvier au 28 février 1887, imprimerie et librairie du journal officiel, Paris, 1887.

2ème acte : Laisant face à la décision de l'Académie des sciences ?

Laisant poursuit sa campagne en faveur de la création d'une chaire en théorie des nombres en septembre 1887. Il est alors président des sections 1 & 2 au Congrès de l'AFAS de Toulouse, comme en 1879. De nouveau, cette section reprend le vœu du Congrès de Reims de 1880 :

> *Les première et deuxième sections renouvellent à l'unanimité avec instance le vœu précédemment émis à Reims en 1880 et tendant à la création, dans l'un de nos grands établissements d'enseignement supérieur, d'une chaire de théorie des nombres, cette branche de la science mathématique se trouvant aujourd'hui dans un état de délaissement regrettable, relativement aux autres nations.*[1011]

Dans son intervention du 25 janvier 1887, le député Lefèvre-Pontalis proposait de reporter la discussion d'une année, pour que, lors du vote du budget de 1888, on ait eu le temps de consulter l'Assemblée du Collège de France, avant la création d'une nouvelle chaire.

Le ministre de l'Instruction publique qui succède à Berthelot en mai 1887, Spuller, consulte tout d'abord l'Académie des sciences. En octobre 1887, la section de géométrie de l'Académie émet un avis défavorable à la création d'une nouvelle chaire en théorie des nombres. Conformément au souhait de l'Académie, son secrétaire perpétuel, Joseph Bertrand[1012], rédige la réponse, également signée par Louis Pasteur, au ministre. Les extraits suivants proviennent de la réponse datée du 20 octobre 1887. On rappelle donc dans cette minute le caractère exhaustif de l'ensemble des enseignements au Collège de France, dont la devise est « *Docet omnia* » (Il enseigne tout). Chaque chaire embrasse donc la globalité de l'enseignement d'une discipline. Ainsi, scinder particulièrement l'unique chaire de mathématiques « serait à peu près – la comparaison n'est pas exagérée – comme si, voulant dédoubler la chaire d'histoire, on consacrait l'enseignement nouveau à l'étude, très intéressante assurément, de la République de Venise, en laissant au professeur actuel le soin d'étudier tous les autres peuples anciens et modernes »[1013]. La comparaison est sans appel, et la part dédiée à la théorie des nombres dans l'enseignement des titulaires de la chaire de mathématique (Liouville puis Jordan) est rappelée. Plus loin, les raisons du choix de l'Académie apparaissent comme tout autre : « Les mathématiques donnent le témoignage, tant en France qu'à l'étranger, d'une activité que l'Académie des sciences aurait pour devoir de seconder en sollicitant, dès que les circonstances le permettront, la création d'une seconde

[1011] « Vœu approuvé en séance générale le 29 septembre 1887 », *AFAS, Congrès de Paris. Compte rendu de la 16ème session. Première partie. Documents officiels et procès verbaux*, 1887, p. 163.
[1012] Sur l'influence de J. Bertrand, voir [Zerner, 1991].
[1013] A. N. [F/17/13 554] citée dans [Décaillot-Laulagnet 1999].

chaire de mathématiques consacrée au Calcul intégral »[1014]. Ainsi, le dédoublement d'une chaire n'apparaît pas comme le principal écueil de la proposition de Laisant ; c'est sur le choix de la matière que l'Académie semble réticente. Ironie du sort, on a vu précédemment que Laisant a lui-même défendu la création d'une chaire de calcul infinitésimal. Une dernière objection concerne la qualité du titulaire qui serait choisi. Par le passé, des chaires ont été créées dans des conditions similaires, mais celles-ci étaient confiées à des savants reconnus du monde scientifique (pour le Collège de France, l'exemple de Berthelot est cité). Cet honneur, dans le cas d'un savant comme Lucas, est-il justifié ?

Le 9 mars 1888, le débat revient au cœur de l'Assemblée, à l'occasion de la discussion du budget de l'exercice 1888. Au chapitre 12 du budget du ministère de l'Instruction publique, on lit qu'une somme de 499 000 francs est dévolue au Collège de France. Laisant porte un amendement demandant à augmenter cette somme de 10 000 francs pour créer une chaire en théorie des nombres, comme il en avait été question un an auparavant. Le député de la Seine rappelle que la proposition avait été adoptée par la commission du budget, puis par la Chambre avant d'être rejetée par le Sénat. Laisant explique enfin l'échec de sa proposition lors de son deuxième passage devant les députés par la volonté de ces derniers de ne pas s'opposer ouvertement au Sénat. Pourtant, le débat reste inchangé : « il s'agit de restituer à une branche des sciences la juste place qui lui appartient. »[1015] Laisant rappelle ensuite les objections du rapport Burdeau, établi au nom de la commission du budget : « La théorie des nombres n'est qu'un canton restreint dans le domaine des sciences mathématiques »[1016]. La commission suit en effet l'avis émis par l'Académie jusqu'à en reprendre l'image du cours sur la République de Venise.

La réponse de Laisant est cinglante :

> *Prétendre que la théorie des nombres, dans le domaine des sciences mathématiques, ne joue qu'un rôle secondaire, affirmer qu'elle est à l'ensemble de la science ce qu'est, par exemple, l'histoire de la république de Venise à l'étude générale de l'histoire du monde, c'est là une affirmation qui n'aurait pas pu se produire à l'académie des sciences, si l'académie des sciences comptait parmi ses membres les hommes qui s'appelaient, par exemple, Lamé et Liouville.*
>
> *Il y a vingt ans, l'académie des sciences n'aurait pu mettre en avant une pareille affirmation, parce que le monde scientifique tout entier aurait protesté. L'avis qu'elle donne actuellement est le résultat de la décadence même que je signalais, c'est le résultat du délaissement dans lequel se trouve cette partie de nos hautes*

[1014] Ibid.
[1015] *Annales de la Chambre des députés*, *4ème législature, débats parlementaires, session ordinaire de 1888*, t. II du 21 février au 4 avril 1888, imprimerie et librairie du journal officiel, Paris, 1888, p. 502.
[1016] Ibid., p. 502.

études, depuis quelques années, après la disparition des deux hommes dont je viens de citer les noms et de bien d'autres encore.[1017]

Après s'être attiré les foudres d'Hermite, Laisant s'en prend à l'Académie des sciences, ce qui peut expliquer en partie son échec pour en être élu membre en 1907. Comme en 1887, le député révèle la contradiction entre l'importance historique de la théorie des nombres en France et les lacunes de son enseignement actuel :

je répète ce que je disais l'année dernière, c'est qu'il n'y a pas en France une seule chaire où soit enseignée cette partie de la science ; il n'y a pas un livre où on puisse l'étudier. Et il y a cependant un grand nombre de jeunes géomètres - je puis vous l'affirmer - qui auraient le plus grand désir de suivre les progrès qui se sont produits dans cette science ; mais beaucoup d'entre eux ne connaissent pas les langues étrangères, et il leur faudrait lire des mémoires écrits dans toutes les langues de l'Europe. Ils ne peuvent s'instruire de cette science qui – je le répéterai dix fois plutôt qu'une - a compté parmi ses adeptes les hommes les plus illustres et dont notre pays s'honore à juste titre.[1018]

Pour cette observation, le député peut s'appuyer sur son expérience de congressiste à l'AFAS où il a pu mesurer la vivacité des questions portant sur la théorie des nombres[1019]. Vient ensuite la question du choix du candidat. En réaffirmant la nécessité de proposer le nom d'un savant compétent de concert avec son amendement, Laisant précise ses relations avec Lucas : « on n'a pas craint d'essayer de répandre le bruit qu'il y avait une question de favoritisme […] et cependant il n'y a aucun lien de parenté ni d'alliance entre l'auteur de la proposition et la personne en question ; s'il y a entre eux des liens d'amitié, cette amitié a pris sa source dans des relations scientifiques dont il y a plutôt lieu à s'honorer, bien loin de les répudier. »[1020] Laisant rappelle en outre la renommée d'Édouard Lucas en Europe pour ses travaux, ses qualités d'enseignant en mathématiques spéciales, son "patriotisme" lorsqu'on lui a proposé d'enseigner la théorie des nombres à l'étranger.

Le troisième point de l'intervention du député concerne la spécificité du collège de France :

Vouloir faire du Collège de France une sorte de doublure de la Sorbonne, passez-moi le mot ; vouloir comprendre le Collège de France comme une faculté à côté d'une autre faculté, c'est commettre la plus grave des erreurs, c'est méconnaître la nature des services que cet important établissement est appelé à rendre. Il ne devrait pas y avoir, au Collège de France, des chaires fixes à la vacance desquelles on pourvoirait toujours lorsque le titulaire viendrait à manquer. Le Collège de France est destiné à fournir des chaires aux hommes qui, dans toutes les branches des connaissances humaines, ont produit des travaux remarquables ;

[1017] Ibid.
[1018] Ibid.
[1019] [Décaillot, 2007].
[1020] *Annales de la Chambre des députés*, …, 1888, p. 502.

> *c'est précisément pour aider au développement de leurs travaux personnels, c'est pour faire connaître ces travaux, grâce à un enseignement restreint, parfois à un faible nombre d'auditeurs, - mais d'une importance très grande au point de vue scientifique - c'est pour cela que le Collège de France a été créé dans notre pays*[1021]

L'existence de telle ou telle chaire ne serait donc effectivement subordonnée qu'à la qualité de son titulaire, titulaire dont la nomination revient uniquement au ministre de l'Instruction publique, correctement conseillé. Conception originale, rompant avec la tradition, puisque l'avis du Collège de France lui-même quant à une nouvelle nomination y serait inutile : « les professeurs distingués qui sont chargés de matières étrangères à un enseignement déterminé sont hors de toute compétence pour se prononcer sur l'opportunité qu'il y aurait de créer une chaire ayant pour objet de répandre des connaissances qu'ils n'ont pas étudiées »[1022]

Enfin, le député de la Seine repousse toute opposition pour motifs financiers. Il rappelle qu'il a reçu pour son amendement le soutien de 88 députés et que l'AFAS s'est exprimée lors du congrès de septembre 1887. Laisant a su mobiliser ses soutiens : les appuis semblent venir de tous les horizons politiques, au sein ou en dehors de la Chambre.

Le rapporteur de la commission du budget prend la parole. Il invite les députés à repousser l'amendement sur le motif que la proposition n'émane pas d'une initiative gouvernementale. De plus, est présenté sur le même chapitre un autre amendement pour la création d'une autre chaire[1023]. L'exemple est malheureux : de telles initiatives parlementaires non contrôlées risqueraient, d'après la commission, de multiplier dangereusement les dépenses. La règle de la commission est ainsi de ne pas soutenir un tel amendement qui n'a pas été présenté par le gouvernement. Conforté par l'avis de l'Académie des sciences, le ministre de l'Instruction publique précise que la multiplicité des demandes de créations de chaires (en économie politique dans les facultés de droit par exemple, sur laquelle le gouvernement s'est prononcé défavorablement) présente un risque de déséquilibre budgétaire à venir. Une dernière invective de Laisant précise qu'il parle au nom d'un grand nombre de ses collègues qui souhaitent comme lui faire revivre un enseignement abandonné depuis des

[1021] Ibid., p. 503. Sur l'histoire du Collège de France et ses spécificités, on pourra consulter Tuilier, Fumaroli, *Histoire du Collège de France*, Fayard, 2006.
[1022] *Annales de la Chambre des députés*, …, 1888, p. 503.
[1023] Le député Jacquemart (1836-1894), professeur de philosophie et député des Ardennes et de la gauche radicale, présente effectivement l'amendement suivant : « chapitre 12 – Collège de France, 499 000 francs. Porter ce crédit à 501 000 fr. Sur ce chapitre ainsi amendé, il sera prélevé une somme de 2,500 fr. devant subvenir aux dépenses nécessitées par la création, à partir du 1er octobre prochain, d'une chaire nouvelle ayant pour objet l'histoire des grandes découvertes scientifiques, principalement au point de vue de leur influence morale et économique sur la civilisation moderne » (Ibid., p. 504).

années. Le scrutin demandé par Laisant est ouvert : l'amendement est rejeté par 305 voix contre 213.

Pourtant, la question reste ouverte. Laisant est nommé vice-président des sections 1 & 2 lors du congrès de l'AFAS qui se tient à Oran en 1888[1024]. À cette occasion, cette section formule de nouveau, le 3 avril 1888, un vœu similaire à celui adopté au Congrès de Reims, quant à l'intérêt de créer une chaire en théorie des nombres. Nous n'avons pas trouvé trace d'un troisième débat parlementaire à ce sujet mais l'intervention de Laisant a de nouveau fait grand bruit. De fait, ce dernier apparaît encore plus marginalisé vis-à-vis des grandes institutions comme le montre la lettre de Charles Hermite adressée à G. Mittag-Leffler datée du 18 mars 1889 : « Je n'ose vous parler de bien des misères qui nous arrivent par le fait de Mr Laisant qui a traité l'Académie des Sciences avec le plus profond mépris, à la tribune de la Chambre ; je crois que Mr Bertrand va pousser la Section de Géométrie à répondre aux attaques du député radical, par une lettre adressée au Ministre de l'Instruction Publique, mais de tout cela, encore que je me trouve un tant soit peu en cause, je ne me soucie guère, et, autant qu'il sera possible, j'éviterai de paraître. »[1025]

VERS DES POSITIONS EXTREMES

L'année 1887 aura finalement marqué un nouveau tournant dans les prises de position du député du XIII^{e} arrondissement de la Seine. Il combat les travers du parlementarisme dans *L'Anarchie bourgeoise*[1026] et se rapproche du Général Boulanger en devenant membre du comité républicain où il apparaît comme le « penseur » d'un groupe présidé par Boulanger où on retrouve Alfred Naquet comme vice-président parmi 17 membres républicains aux idées sociales avancées[1027]. Il s'explique dans l'article « Pourquoi et comment je suis devenu boulangiste » paru la même année.

Laisant avait auparavant été en relation étroite avec Boulanger lors de son passage au ministère de la guerre (voire pendant ses études au lycée de Nantes)[1028]. Il se retrouve dans le mouvement boulangiste, multiforme et populiste, séduit par les promesses d'une république forte et porté par la vague antiparlementariste plus que par l'esprit revanchard et nationaliste du général. Voulant s'opposer au régime de l'époque, il adopte le programme de Boulanger :

[1024] *Compte rendu du Congrès d'Oran*, AFAS, 1888, vol. 1, p. 156.
[1025] Voir [Hermite, 1985], p. 173.
[1026] Voir Zeev Sternhell, *Maurice Barrès et le nationalisme français*, Editions Complexe, 1972, p. 85.
[1027] [Garrigues, 1999], p. 150-151. Sternhell Zeev, *Maurice Barrès et le nationalisme français*, éditions complexe, 1972. Laisant intègre aussi la Ligue des patriotes de Déroulède ([Carnoy, 1903]).
[1028] [Jouve, 1995], [Barreau, Guiffan, Liters, 1992].

« dissolution de la chambre constituante, révision de la constitution ». Il défend la cause boulangiste à la Chambre, se prononçant le 11 février 1889 contre le scrutin d'arrondissement imposé par le gouvernement pour briser l'élan populaire qui porte Boulanger. Malgré la fuite du général Boulanger en Belgique en avril 1889, Laisant continue de soutenir son mouvement qui s'étiole [1029], notamment au travers de La ligue des Patriotes, ce qui lui vaut une condamnation lors du procès de mars 1889 initié par le ministre de l'Intérieur de l'époque, Ernest Constant, ou encore une arrestation en compagnie de Déroulède, fondateur de La Ligue.

Le 22 septembre 1889, Laisant est élu député sous l'étiquette boulangiste au second tour face au candidat socialiste, d'une courte avance (3 600 voix contre 3 214) alors qu'une large majorité est accordée au Républicains. Le nouveau député de la 1ère circonscription du XVIIIe arrondissement entame son dernier mandat.

Finalement, le député de la Seine ne se représente pas aux élections de 1893 et garde une grande amertume vis-à-vis de la politique. En 1909, Laisant exprime toutes ses désillusions dans *L'illusion parlementaire*[1030]. Au sujet du parlement, il écrit : « J'y était entré à l'époque de ma jeunesse, au lendemain de la guerre, avec toutes les illusions, et j'en suis sorti de mon plein gré après cette trop longue expérience. J'ai cherché à y faire quelques biens et je n'y ai pas réussi. […] J'ai en conscience tenté de remplir mon mandat, d'empêcher les iniquités, d'introduire dans nos institutions un peu d'humanité et de justice. La chose était impossible »[1031]. Les idées extrémistes qui marquent les vingt dernières années de sa vie ont remplacé toute confiance dans le régime : « le gouvernement effectif n'appartient et ne peut appartenir qu'à la bourgeoisie possédante, dirigeante, financière »[1032]. L'anarchiste Laisant conclut : « parlementarisme et réforme sont deux termes incompatibles »[1033].

L'ancien politique préfère s'investir, on le verra, dans l'enseignement, particulièrement celui des jeunes enfants, seul vecteur d'un progrès rationnel. Laisant reste néanmoins un militant actif : il soutient la cause dreyfusarde[1034], emboîtant le pas de la communauté mathématique et de quelques-uns de ses représentants comme Hadamard ou Painlevé[1035]. Mais, son passé de député le rattrape en 1897 au cours du second procès lié au scandale politico-financier de l'affaire du Panama où Laisant, comme cinq anciens membres de la Chambre, paraissent (ils seront tous acquittés).

[1029] Voir article de Laisant dans *La presse* du 25 juin 1889 où il expose la politique du parti nationale.
[1030] Laisant C.-A., *L'illusion parlementaire*, Paris, Asocio Paco-Libereco, 1909. Les douze pages de ces pensées seront rééditées en 1924 ([Laisant, 1924]).
[1031] [Laisant, 1924], p. 10.
[1032] Ibid., p. 10.
[1033] Ibid., p.7 et plus loin, « se refuser de voter, c'est un commencement de lutte efficace » (p. 11).
[1034] [Joly, 1960] (voir aussi *L'éducation fondée sur la science*, p. xxxii).
[1035] [Carnoy, 1903], [Rollet, 2001].

Entraîné par son fils Albert en contact avec l'anarchiste Sébastien Faure, Laisant devient libertaire. Il défend le syndicalisme à travers plusieurs articles parus dans la *Bataille syndicale*[1036].

La menace d'une guerre grandit. Raymond Poincaré est président de la République depuis janvier 1913 et fait voter en août une loi portant le service militaire de 2 à 3 ans. Laisant, qui avait défendu avec pugnacité son projet de réduction du service militaire, publie en 1893 *Contre la loi des trois ans*. Il signe par la suite « le manifeste des seize » avec ses compagnons anarchistes mais ne peut que faire preuve de résignation face à la guerre. Il écrira : « On a dû lutter contre l'invasion prussienne, comme on lutte contre un incendie ou une inondation. Cette lutte qui se poursuit est dure et cruelle, mais elle s'imposait »[1037].

Plus qu'un révolté, Laisant s'impose donc comme un homme à la foi républicaine inébranlable que les réalités du pouvoir ont fait basculé dans l'amertume et poussé vers l'anarchisme via l'influence de son fils. Avec ses travaux sur le service militaire, le personnage est devenu populaire. Il aura aussi, pendant ses cinq mandats de député, défendu l'enseignement mathématiques à travers la question centrale des chaires, mais ces prises de positions intransigeantes lui vaudront des inimitiés et une réputation sulfureuse. Déçu comme beaucoup d'autres par l'épisode boulangiste, il adopte les idées des libres-penseurs, ce qui ne sera pas sans conséquences pour ces écrits pédagogiques, comme nous le verrons.

Charles-Ange Laisant apparaît comme un mathématicien pour lequel la diffusion d'une théorie, comme celles des équipollences et des quaternions, ne peut se passer de nombreuses applications. Le mathématicien multiplie donc les utilisations des calculs géométriques dans divers contextes et ce faisant indique la simplicité des démarches rendues possibles, la fécondité des résultats obtenus, la maniabilité de ces nouveaux outils qui, s'ils ne remplacent pas les méthodes précédentes, enrichissent les procédés d'investigations du mathématicien en évitant par exemple les calculs fastidieux et artificiels. Surtout, il montre le caractère général des méthodes appliquées puisque c'est la mise en parallèle de la multiplication des situations proposées avec la cohérence, l'uniformité des réponses apportées qui est le principal argument pour l'universalité de la démarche.

[1036] [Sauvage, 1994], p. 72.
[1037] Lettre adressée à l'anarchiste Sébastien Faure en 1917 ([Sauvage, 1994], p. 73).

Si Laisant se montre d'ailleurs un diffuseur si enthousiaste, c'est probablement que l'idée d'un véritable calcul géométrique rejoint son intérêt pour les méthodes générales et éclairantes en géométrie. C'est cette conception qu'il défend dans ses écrits sur la théorie des équipollences, face à ceux qui n'y voient qu'une représentation habile des quantités imaginaires. C'est en suivant l'idée d'un tel calcul valable dans le plan comme dans l'espace qu'il s'intéresse naturellement aux quaternions via leurs utilisations en cinématique.

Laisant souligne à de nombreuses reprises la pertinence de ces calculs pour représenter, bien plus que les objets eux-mêmes, les faits géométriques du plan ou de l'espace, c'est-à-dire la relation qu'entretiennent ces objets entre eux. L'étude des « faits » par le symbolisme de l'algèbre appliquée à toutes sortes d'objets de la pensée annonce la naissance des structures algébriques dont Laisant semble attendre l'émergence.

Si le calcul d'Hamilton suscite l'intérêt de la communauté mathématique, bien plus que la méthode des équipollences de Bellavitis, Laisant se révèle relativement isolé en France dans la promotion de l'un ou l'autre de ces chapitres, Hoüel étant le seul mathématicien dont l'implication dans cette diffusion soit comparable. Si les pages des *Nouvelles annales* accueillent elles aussi quelques contributions sur la méthode des équipollences, la tribune offerte au moment des congrès de l'AFAS autorise des approches diverses et répétées, ainsi que des débats soutenus sur les fondements de telles méthodes géométriques. En comparaison le *Bulletin* de la SMF accueille nettement moins de travaux sur le sujet, les différences de statut et d'objectifs de ces deux groupements, leurs ouvertures différentes vers les mathématiques étrangères peuvent expliquer ce choix de Laisant. Soulignons aussi que *L'Enseignement mathématique* prolongera par la suite les discussions entamées sur l'objet vecteur. La question de leur pénétration dans l'enseignement est en effet omniprésente chez le fondateur de la revue.

Avec les idées de Bellavitis et d'Hamilton, le mathématicien aborde plusieurs autres questions annexes. Les conceptions sur les imaginaires se veulent être clarifiées, le symbolisme et son rapport avec l'objet lui-même sont réévalués, les conventions sur les signes en géométrie sont réaffirmées.

La diffusion des méthodes susdites modifie enfin la relation qu'entretient le mathématicien avec la figure. D'écartée au sein de la géométrie infinitésimale, elle devient, avec les équipollences, facultative car l'écriture de Bellavitis renferme elle-même les caractéristiques de la configuration à étudier. La figure dans les applications proposées par Laisant présente une situation initiale, conclut parfois un raisonnement par une construction mais elle ne guide pas le lecteur dans sa recherche. Ce que l'auteur donne à voir, ce sont les équipollences, les relations littérales écrites qui guident la démarche du géomètre. Le regard ne se porte donc plus sur la représentation graphique de l'objet en question mais sur l'écriture littérale susceptible de transformations éclairantes pour ses recherches. Les articles de Laisant sont ainsi peu souvent accompagnés de figures, l'essentiel du propos est condensé dans l'écriture par équipollences qu'il suffit d'observer pour en saisir la teneur. Les théories semblent éveiller chez Laisant l'intérêt pour ce regard du mathématicien, réflexion qu'il poursuivra par la suite dans le domaine de l'arithmétique et de la théorie des nombres en redonnant à la figure son rôle de support de l'intuition.

L'action politique du député pour défendre la théorie des nombres en France par la diffusion d'une œuvre de référence (celle de Fermat) ou la création d'une chaire spécifique (destinée à l'ami Lucas) est également révélatrice de sa motivation à transmettre, à faire connaître des mathématiques délaissées. Ce militantisme annonce l'intérêt du mathématicien pour les mathématiques discrètes, intérêt qui sera plus visible à la fin des années 1880. Le député n'hésite pas à s'attaquer aux institutions et à bousculer l'inertie de la science française de la deuxième moitié du XIX^{e} siècle. Malgré les inimitiés que ce volontarisme attise et la réputation qu'on lui attribue suite à ses choix politiques tranchés, C.-A. Laisant apparaît comme un acteur important et singulier, non seulement des mathématiques, mais aussi de la politique de son époque.

III. Visualisation et représentations dans les mathématiques discrètes (1881-1893)

Alors que durant les années 1870, C.-A. Laisant semble relativement isolé dans ses efforts pour diffuser en France les méthodes de Bellavitis ou d'Hamilton, les années 1880-1890, au contraire, sont marquées par de nombreuses collaborations autour de sujets centrés sur les travaux de combinatoire et de théorie des nombres. Durant cette période, il apparaît au même titre que Delannoy ou Lucas au centre d'une communauté de mathématiciens, principalement francophone. Il aborde des problèmes souvent liés à la géométrie de situation, et, ce qui est remarquable aux yeux du Nantais, permettant de multiples représentations graphiques. L'auteur de l'*Initiation mathématique* insiste à plusieurs reprises sur la pertinence des différentes représentations visuelles utilisées (géométrie des quinconces, échiquiers, tableaux de nombres), il sait le potentiel pédagogique de ces évocations graphiques.

Autour de personnages comme d'Ocagne, Halphen, Catalan[1038], Laquière, Arnoux, Delannoy[1039] et bien sûr Lucas (dont la *Théorie des nombres* paraît en 1891), Laisant participe à cette « communauté des mathématiques discrètes »[1040] entre 1870 et 1914. Éloignés des centres académiques classiques, les membres de ce groupe échangent à travers des sociétés savantes dans lesquelles Laisant est particulièrement actif, comme l'AFAS ou la SMF (voir partie suivante). Les récréations mathématiques destinées à un public beaucoup plus large[1041] trouvent également leur place dans les écrits considérés ici. Dans le même ordre d'idée, les liens que tisse Laisant avec des amateurs praticiens des mathématiques, comme G. Arnoux ou le colonel Moreau, sont également à signaler. Cette communauté aborde, à travers la géométrie de situation, des théories encore en gestation comme la topologie algébrique ou la théorie des graphes[1042]. Du plus, les membres du groupe utilisent fréquemment des outils spécifiques comme les échiquiers ou les réseaux. Remarquons pour finir que beaucoup de

[1038] Jongmans F., *Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans République*, Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française, Mons (Belgique), 1996.
[1039] [Schwer, Banderier, 2005].
[1040] Nous empruntons l'expression à E. Barbin, S.R. Schwer et C. Lavault.
[1041] Voir par exemple la revue *La Nature.*
[1042] Voir les travaux de Koenigs ([Wate Mizuno, 2010]). L'énumération de chemins est aussi reliée à la théorie naissante des probabilités et le problème du scrutin est quant à lui à l'origine de nombreuses publications à l'époque.

travaux présentés ici seront ignorés, particulièrement en France[1043] mais renaîtront dans le monde anglo-saxon : Lehmer reprend ainsi, non seulement le test de primalité de Lucas, mais également un résultat de Laisant sur la classification des permutations. Comment Laisant s'approprie-t-il les outils développés au sein de cette communauté ? Porte-t-il son attention vers d'autres dispositifs qui lui semblent pertinents ou originaux ?

Nous distinguons dans la décennie concernée deux grands types de travaux, correspondant à seize communications principalement. Tout d'abord, ceux qui concernent les permutations traitent de ces objets fondamentaux, propres en particulier à décrire une situation géométrique du plan, c'est-à-dire à transcrire une situation visuelle en soulignant régions et aspects d'une figure composée de droites sécantes du plan. Nous étudierons comment Laisant, à partir de ce problème, s'investit dans l'étude des permutations à travers une classification originale des permutations de n objets et leurs multiples applications, en particulier au problème des ménages. Les bases de numérations constituent un deuxième outil essentiel de cette période. Là aussi, les différents systèmes de numération permettent d'étudier plusieurs lois de groupe multiplicatif via des représentations frappantes par leur esthétisme. Ces mosaïques de Laisant offrent une solution visuelle à un problème posé par Catalan et correspondent aux canons d'une science utile voulue par l'AFAS, lieu de la communication en question.

Dans un deuxième temps, le questionnement sur la géométrie et la théorie des nombres trouve son aboutissement dans plusieurs travaux. La géométrie des quinconces, particulièrement développée par Lucas, est reprise par Laisant.

Les équipollences sont de nouveau utilisées pour représenter des nombres transcendantaux. D'autres représentations plus personnelles répondent à des critères de simplicité schématique. Il s'agit de la représentation de la décomposition d'un entier en facteurs premiers ou de la symbolisation graphique de nombres combinatoires (nombre de combinaisons, d'arrangements etc. sur un ensemble de n objets) que ce soit à travers le tétraèdre arithmétique ou les chemins dans un réseau plan. La collaboration de Laisant à l'arithmétique graphique de G. Arnoux apparaît dès lors l'apogée de cette démarche : y sont mêlées considérations arithmétiques évoluées et abaques comme supports de ces développements.

Les idées liées à la circulation du savoir dans la communauté mathématique constituent le second aspect de la période étudiée dans ce chapitre. Le choix des lieux de

[1043] Tout du moins avant les travaux de Foata, Schützenberger et Comtet.

communication, le soutien apporté à des mathématiciens éloignés des cercles académiques ou la valorisation de pratiques délaissées par les milieux institutionnels sont ici autant d'autres engagements de Laisant.

Au vu de ces deux aspects, les travaux présentés dans cette section sont importants dans l'œuvre mathématique globale de C.-A. Laisant. Reprenant l'intérêt de ses débuts pour les questions d'arithmétique et de théorie des nombres, il les expose d'une manière originale et prophétique pour la suite de ses écrits à visée pédagogique. Délaissant la diffusion du calcul géométrique, mais n'hésitant pas à le réinvestir pour les nouvelles questions posées, il participe à une recherche vivante sur des problèmes originaux.

Dans ce chapitre, nous étudierons tout d'abord l'intérêt de Laisant pour les permutations et les diverses communications qui y sont rattachées, à partir du problème d'Halphen sur les aspects. Nous traiterons ensuite de la communication de 1879 où Laisant introduit ses mosaïques, en lien avec les travaux de Sylvester. Avec la partie concernant la géométrie des quinconces, le réseau dans lequel s'insère Laisant sur ses questions se fait plus visible. Nous présenterons ensuite un certains nombre de représentations de divers nombres où les démarches à l'œuvre sont multiples. Enfin, dans une dernière partie, nous aborderons l'ensemble des travaux liés aux tableaux de nombres, notamment à ceux des tableaux de sommes et des espaces arithmétiques de G. Arnoux.

III.1. Aspects et permutations

III.1.1. Laisant et la géométrie de situation

En 1898, dans son ouvrage *La Mathématique*, Laisant présente ainsi la géométrie de situation, ou *analysis situs,* reprenant le terme utilisé de Leibniz jusqu'à Poincaré[1044] :

> *cette branche si intéressante de la Mathématique* […] *se rattache à la Géométrie par son titre, à l'analyse des combinaisons, et par conséquent à l'Algèbre, par une grande partie des objets qu'elle étudie, à l'Arithmologie par plusieurs de ses conséquences. Enfin, elle rend des services importants dans la Théorie des fonctions et dans les applications géométriques du Calcul infinitésimal.* […] *C'est une sorte de Protée affectant des formes diverses, suivant le but poursuivi.*[1045]

[1044] Voir par exemple Poincaré H., "Sur l'analysis situs", *CRAS*, 15, 1892, p. 633-636.
[1045] [Laisant, 1898a], p. 105.

On comprend qu'un chapitre aussi vaste et protéiforme ait pu le séduire. Il y fait figurer les « problèmes si nombreux et généralement si difficiles »[1046] sur les jeux d'échecs, de dominos, de labyrinthes ou de carrés magiques. Derrière ces questions se cachent généralement de délicates investigations mathématiques. C'est le cas par exemple du jeu icosien d'Hamilton : Laisant s'intéresse d'ailleurs à la théorie sous-jacente à ce jeu et résume pour le deuxième volume des *Récréations mathématiques* d'É. Lucas un travail d'Hamilton sur le sujet[1047]. Passionné par les quaternions, il est naturel que Laisant se soit intéressé à ce nouveau système non-commutatif des racines de l'unité et Guthrie Tait, grand militant de la théorie des quaternions, traitera également de géométrie de situation en cherchant le nombre de boucles et de points d'intersection que peut présenter une courbe plane avec elle-même.

Nous prenons pour exemple de l'intérêt que porte Laisant aux récréations ou jeux mathématiques[1048] une question qu'il pose dans le *Journal de mathématiques élémentaires* :

> *Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge, de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge ?*[1049]

La question sera reprise par d'Ocagne, personnalité que l'on croisera à plusieurs reprises dans cette partie, et Moret-Blanc en proposera une solution[1050]. Dans les *Nouvelles annales de mathématiques* ([Laisant, 1884]), Laisant montre que cette question revient à résoudre l'équation :

$$144x = x + m.12$$

qui admet 143 solutions (et non pas onze comme l'affirmait Moret-Blanc). Il explique que ces solutions se correspondent par paires, hormis celles désignant les heures de superpositions des aiguilles. Il en conclut que « La question de réciprocité que nous nous sommes proposée se ramène donc à un simple problème de rencontre. »[1051] et que le problème revient finalement à résoudre les équations de la forme :

$$x = f^2(x).$$

[1046] Ibid.

[1047] Voir Hamilton, "Memorandum respecting a New System of Roots of Unity", *The London, edinburg and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4ème série, vol. 12, déc. 1856, p. 446 et [Lucas, 1883], "Notes IV", p. 236 et "septième récréation : le jeu d'Hamilton", p. 201.

[1048] Voir André Sainte-Laguë, *Géométrie de situation et jeux*, *Avec des nombres et des lignes*, Gauthier-Villars, 1929.

[1049] Question 47, *Journal de Mathématique Elémentaire*, t. VI, 1882, p. 168.

[1050] Question 1468, *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 2, p. 384 (D'Ocagne nomme ce problème « le problème des positions inverses ») et réponse 1468, *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 2, p. 523, ainsi que "Rectifications", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 2, 1883, p. 566. Laisant précise à ce sujet que « Cette question n'a certainement pas, par elle-même, une importance qui puisse justifier une réclamation quelconque de priorité. » ([Laisant, 1884], p. 383).

[1051] [Laisant, 1884], p. 385. Il ajoute : « Ces questions se prêtent d'elles-mêmes à des solutions graphiques presque évidentes » (p. 386).

Les problèmes dits de rencontre éveillent donc la curiosité de Laisant sans que ce dernier ne développe plus le sujet. Il reprendra seulement le contexte du cadran d'une horloge dans l'article "Centres de gravité de certains systèmes de poids" paru en 1893 dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* [1052]. Lors de la séance du 24 décembre 1892, l'auteur s'intéresse au centre de gravité d'un système de poids placés sur les heures d'un cadran d'horloge et proportionnels à ces heures. Cette approche originale se généralise au centre de gravité d'un système de poids placés sur les points de division d'une circonférence partagée en $2n$ parties égales, n tendant in fine vers l'infini.

De la même manière qu'il s'implique dans une association internationale pour la diffusion des quaternions, Laisant sera un des promoteurs de la Société des sciences récréatives. Dans une lettre datée du 13 janvier 1893, il écrit en effet à Delannoy :

> *Je vous écris surtout pour vous annoncer l'envoi (par le même courrier) d'une épreuve de circulaire pour laquelle je vous demande de vous joindre à nous comme signataire. C'est avec A. de Rivière et Béligne que nous nous occupons de cette création d'une Société des sciences récréatives. C'est une façon de rendre hommage à la mémoire de notre pauvre ami Lucas, or je crois que nous arriverons à un bon résultat. Nous avons déjà, entre autres, les signatures de Gauthier Villars, du Colonel Laussedat et de Carvallo* *(et Lemoine)*[1053]

Le projet se concrétisera le 21 juin 1894, date à laquelle se tient l'assemblée constitutive de la Société qui « a pour objet l'application des sciences à toutes les questions relatives à la distraction de l'esprit ou aux exercices du corps [et qui] se donne en même temps pour but la propagation et la diffusion des diverses sciences dont elle étudie les applications. »[1054] Arnous de Rivière est président du bureau provisoire, Laisant en est le vice-président.

De la description précédente de la géométrie de situation par Laisant, nous retiendrons surtout l'énumération des chapitres auxquels elle se rattacherait selon lui. Cette énumération est à rapprocher des difficultés de mise en place de cette science en tant que domaine spécifique des mathématiques au XIX^e^ siècle ; son contenu n'est alors pas clairement délimité. Cette géométrie débute avec les recherches d'Euler sur le problème des ponts de Koenigsberg

[1052] [Laisant, 1893c], "Centres de gravité de certains systèmes de poids", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, (8) V, 1893, p. 61-63.
[1053] Lettre manuscrite conservée dans les archives de la Société des sciences naturelles et archéologiques de la Creuse, Charles-Ange Laisant, lettre adressée à Henri Delannoy, datée du 13 janvier 1893. Voir aussi [Schwer, Autebert, Décaillot, 2006]. Arnous de Rivière (1830-1905) est un célèbre joueur d'échec d'origine nantaise.
[1054] [Béligne, 1894], Béligne A., "Société des Sciences récréatives", *Tablettes du chercheur. Journal des jeux d'esprit et de combinaisons*, 5, 1894, p. 188-190.

en 1736[1055] et se poursuit surtout avec son théorème sur les polyèdres mais aussi avec ses travaux sur la marche du cavalier de 1759 : cette dernière question sera notamment de nouveau exposée en 1880 aux membres de la Société mathématique de France par Laquière, autre personnage que nous rencontrerons à de multiples reprises dans ce chapitre[1056].

Avant Euler, Leibniz avait exprimé, dans une lettre à Huygens son désir de voir émerger « une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'algèbre exprime *magnitudinem* »[1057]. « L'analysis situs » telle qu'elle a été définie par Leibniz se rapproche cependant plus de l'idée d'un calcul géométrique que de la géométrie de situation ou plus précisément de la topologie algébrique, comme le montrera par exemple Grassmann en 1847[1058]. Laisant, grand admirateur du mathématicien allemand, a pu être sensible au projet leibnizien. Nous rapprochons donc ces idées aux principes de la méthode des équipollences ou de la théorie des quaternions pour lesquelles Laisant a été, on l'a vu, un diffuseur enthousiaste.

En France, Carnot dans son introduction à sa *Géométrie de position* (1803) se défend en revanche de pratiquer cette géométrie de situation (qu'il préfèrera qualifier de « géométrie de transposition ») :

> *La géométrie de position traitée dans cet ouvrage n'est pas ce que plusieurs Savans ont appelé la géométrie de situation. On comprend ordinairement par la géométrie de situation, une certaine classe de questions qui, quoique du ressort de la géométrie, ne paroissent guère susceptibles d'être soumise à l'analyse algébrique ; tandis qu'au contraire, la géométrie de position, que je traite ici, n'est autre qu'un mode imaginé, pour rendre plus féconde l'application de l'algèbre à la géométrie ordinaire.*[1059]

Si Carnot souhaite mêler algèbre et géométrie, Poncelet en étudiant les propriétés d'une figure qui se conservent par projection dans son *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) distingue nettement les propriétés « métriques » des propriétés « de position » (ou propriétés « descriptives »), comme cela était généralement le cas au début du XIX^{e} siècle[1060]. Ainsi

---

[1055] Même s'il identifie les débuts de la topologie algébrique avec celle du théorème d'Euler et ce jusqu'en 1851, Jean-Claude Pont voit dans ce problème la première étude explicite et consciente d'un problème d'« analysis situs. » ([Pont, 1974], p. 14). Voir aussi [Epple, 1998].

[1056] Voir [Laquière, 1880] et Euler, *Mémoire de l'Académie de Berlin*, 1759. Vandermonde contribuera lui aussi à l'essor de la topologie algébrique à travers son étude de ce dernier problème d'Euler.

[1057] Voir la correspondance de Leibniz à Huygens datée du 8 septembre 1679 citée dans [Pont, 1874], p. 7.

[1058] C'est pourquoi Jean-Claude Pont place Leibniz parmi les « pseudo-précurseurs » de cette science à qui il a donné le nom mais pour laquelle les travaux d'Euler seront surtout décisifs ([Pont, 1874], p. 7-8).

[1059] [Carnot, 1803], p. xxxv. Il poursuit sur cette géométrie de transposition : « le mouvement ou la transposition des parties du système entre comme un élément essentiel dans toutes les questions de son ressort, et qu'elle est proprement, à la géométrie de position, ce qu'est le mouvement au repos ».

[1060] Tresse A., "Géométrie projective", in [Molk, 1904-1916], t. 3, vol. 2, p. 10.

Gergonne dans un article des ses *Annales* explique qu'à côté des théories bâties sur des relations métriques obtenues par des calculs :

> *D'autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la situation que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne ; et, bien que très-souvent on les déduise des proportions et du calcul, on peut toujours, en s'y prenant d'une manière convenable, les en dégager complètement.*[1061]

Malgré ces préoccupations pour ce genre de propriétés, la géométrie de situation trouve lentement sa place dans le paysage mathématique français du XIX^{e} siècle[1062]. Ce sont les travaux de Riemann, Poincaré ou Hadamard qui amèneront progressivement l'analysis situs vers la topologie algébrique en considérant par exemple le genre d'une courbe ou d'une surface, et en reliant cette notion à la théorie des fonctions de Cauchy[1063].

Nous verrons que Laisant se réfère aux idées de Poinsot, en citant ses *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* ([Poinsot, 1845]). Dans son *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, paru trente ans auparavant, Poinsot explique que cette géométrie « a pour objet l'ordre et les lieux dans l'espace, sans aucune considération de la grandeur ni de la continuité des figures » [1064]. Il explique que « cette espèce de géométrie, qui ne regarde que les lieux dans l'étendue, est à-peu-près, à la géométrie ordinaire, ce que la science des propriétés des nombres est à l'algèbre, qui est la science des grandeurs. »[1065] Dans les travaux de Laisant que nous nous proposons d'étudier, théorie des nombres et représentations graphiques des situations s'entremêlent en effet. Nous verrons que Lucas, avec sa *Théorie des nombres* parue en 1891, est un personnage important de cette période.

Édouard Lucas (1842-1891) est normalien et agrégé de mathématiques en 1864[1066]. Après des débuts comme astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, il devient, une fois la guerre de 1870 terminée, professeur de mathématiques spéciales à Moulins à partir de 1872, puis au Lycée Saint-Louis de 1879 à 1890 et enfin au Lycée Charlemagne.

1061 [Gergonne, 1826], p. 209. Gergonne indique un procédé pour établir ce genre de propriété : il suffit d'utiliser conjointement la géométrie plane et celle de l'espace, comme Monge. Il insiste ensuite sur le caractère dual de la plupart des propriétés ainsi établies.

1062 Et un siècle plus tard, Lebesgue écrit encore à Borel en 1912 : « peu de personnes s'intéressent à l'*Analysis situs*, malgré l'importance de cette doctrine » (lettre de Lebesgue à Borel du 1er janvier 1912, citée dans [Décaillot-Laulagnet, 1999]).

1063 [Pont, 1974].

1064 [Poinsot, 1810], p. 17. Le mémoire propose en outre un panorama tel que celui que nous venons d'esquisser. Discutant de la figure de Leibniz en se démarquant de l'article « situation » de d'Alembert dans l'*Encyclopédie*, Poinsot rappelle les apports d'Euler, de Vandermonde et distingue pour finir la « Géométrie de Position » de Carnot de l'analysis situs.

1065 Ibid., p.16.

1066 Sur la vie d'Édouard Lucas, nous renvoyons à [Décaillot, 1998], [Décaillot-Laulagnet, 1999].

Ses nombreux travaux portent principalement sur la théorie des nombres. Des suites de Lucas au test de primalité, de la réciproque du petit théorème de Fermat à la géométrie des quinconces ou plus généralement à l'arithmétique figurative, de ses récréations à sa participations à la réédition des œuvres de Fermat, il est surprenant de voir la proximité de ces thèmes et d'une grande partie de l'œuvre de Laisant dans les années 1880-1890.

Ce dernier rédige, pour le *Journal de mathématiques spéciales* et les *Nouvelles annales*[1067], deux bibliographies élogieuses du premier volume de la *Théorie des nombres* parue l'année de la mort de son auteur en 1891 à la suite d'un accident au congrès de l'AFAS. Rappelant le délaissement en France dont souffre la théorie des nombres, il souligne l'ampleur donnée à la discipline à travers l'ouvrage : en traitant « Toutes les questions qui reposent sur la discontinuité », Lucas procède à un « élargissement considérable de l'ancienne théorie des nombres » [1068]. Laisant défend le contenu hétéroclite de l'ouvrage en précisant que : « le livres est original, intéressant et de nature à provoquer sans cesse la curiosité du lecteur »[1069]. L'auteur, vulgarisateur reconnu, influence Laisant non seulement par la nature des questions qu'il aborde mais également par le traitement qu'il leur réserve. Signalons enfin que Laisant organise, au sein d'une commission nommée par la Société mathématique de France, avec Delannoy et Lemoine la publication à titre posthume des deux derniers volumes de ses *Récréations mathématiques* et un dernier ouvrage : *L'Arithmétique amusante*[1070].

III.1.2. Premières incursions en géométrie de situation : Régions et aspects

L'intérêt chez Laisant pour les questions de "régionnement" du plan (ou de l'espace) se manifeste dans deux articles que l'on retrouve dans les écrits des principales sociétés savantes dans lesquelles l'auteur est actif. Il s'agit d'une communication à l'AFAS intitulée « Régions d'un plan et de l'espace » ([Laisant, 1881b]) datée du 15 avril 1881 et de « Remarques sur la théorie des régions et des aspects » ([Laisant, 1882e]) lues le 3 février 1882 et parues dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* la même année.

[1067] "Bibliographie", *Nouvelles annales*, Sér. 3, 11, 1892, p. 37-41 et *JMS*, Sér. 3, t. 5, 1991, p. 278-280.
[1068] *JMS*, Sér. 3, t. 5, 1991, p. 279.
[1069] Ibid., p. 280.
[1070] Voir *NAM*, Sér. 3, 11, 1892, p. 37 et [Schwer, Décaillot, Autebert, 2003]. Cette entreprise est notamment l'objet de la question 177 dans *L'intermédiaire des mathématiciens*.

REGIONS D'UN PLAN ET DE L'ESPACE

Ce premier travail de 1881, s'il n'est pas totalement représentatif de préoccupations sur la géométrie de situation, marque le début d'une réflexion sur l'étude des relations d'objets géométriques suivant leurs dispositions, c'est pourquoi nous choisissons de l'analyser. Le plan étant considéré comme une seule région, chaque droite tracée sur ce plan le sépare en deux régions. Deux droites sécantes délimitent quatre régions du plan. La question étudiée ici porte sur le nombre r_n de régions formées par n droites tracées sur le plan. Laisant écarte pour commencer les cas où trois des n droites seraient concourantes ou si deux d'entre elles seraient parallèles. Il établit ensuite une relation de récurrence entre les nombres r_n et r_{n+1} en considérant que la $n + 1^{\text{ème}}$ droite coupe les n premières « à une distance suffisamment grande de leurs entre-croisements divers »[1071]. D'un côté de cette $n + 1^{\text{ème}}$ droite, sont conservées les r_n régions et de l'autre, $n + 1$ régions sont engendrées d'où la relation :

$$r_{n+1} = r_n + n + 1.$$

Remarquons que Laisant ne s'attarde pas à expliquer que toute situation peut se ramener à celle présentée ici (à condition de numéroter les droites habilement). Aucune figure ne vient éclairer son propos, mais l'auteur juge nécessaire de donner les différentes valeurs des nombres calculés dans un tableau récapitulatif. Il n'explique pas plus comment il obtient l'expression de r_n :

$$r_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$ [1072].

L'auteur s'intéresse ensuite au nombre de régions limitées l_n et de régions illimitées p_n qui composent le nombre total r_n de régions. Comme précédemment, il considère « toutes les droites à une assez grande distance de leurs entrecroisements [si bien qu'] elles forment là comme une roue à $2n$ rayons »[1073] et bordent donc $2n$ régions illimitées. D'où :

$$p_n = 2n$$

et

$$l_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Le raisonnement employé reste valable et général : il « montre que ces nombres ne dépendent en aucune façon des positions respectives des diverses droites, mais bien seulement

---

1071 [Laisant, 1881b], p. 72.

1072 Cette expression peut s'obtenir en additionnant membre à membre les n relations

$$r_{i+1} = r_i + i + 1$$

pour $i = 0, \ldots, n - 1$ et en regroupant judicieusement, comme semble le faire Laisant, les termes obtenus.

1073 Ibid., p. 72.

du nombre de ces droites. »[1074] Laisant revient sur les singularités écartées dès le début de son exposé. À chacune d'entre elles, correspond un nombre de régions à retrancher, et donc une correction des résultats généraux évoqués plus haut. Par exemple, si p des n droites sont concourantes, le nombre de régions limitées chute de l_p régions. De même, si p droites sont parallèles, on soustrait des calculs précédents l_{p+1} régions limitées.

L'étude des régions peut être motivée comme l'explique Laisant par celle de certaines courbes. Ainsi, en notant $\mathrm{A}_i = 0$ l'équation de la $i^{\text{ème}}$ droite du système[1075], l'ensemble des droites a pour équation

$$\mathrm{S} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_n = 0.$$

La fonction S est de signe constant sur chacune des régions considérées, auxquelles l'auteur affecte par conséquent les signes + ou –. L'équation $\mathrm{S} = +\,\varepsilon$ où ε est un nombre positif « très petit » est celle d'une « courbe serrant de très près la figure formée par le système des droites et exclusivement située dans des régions positives »[1076]. En faisant varier la quantité ε, Laisant explique qu'on obtient une courbe issue de la déformation du système de droites qui est astreinte à être incluse dans les régions positives du plan.

Nous ne nous attarderons pas à la généralisation de ces notions à l'espace. Un plan divisant l'espace en deux régions, Laisant étudie de la même manière que précédemment le nombre R_n de régions de l'espace délimitées par n plan. Un raisonnement similaire s'appuyant sur la possibilité de considérer un plan particulier "assez éloigné" des autres est utilisé. Le calcul du nombre de régions limitées L_n et illimitées P_n, est mené identiquement[1077] même si la discussion des cas où des singularités apparaissent est plus délicate que dans le plan[1078].

1074 Ibid., p. 72.

1075 Cette notation n'est pas sans rappeler la notation abrégée adopté par Gabriel Lamé. Cependant, nous ne retrouvons pas l'utilisation de cette notation dans l'œuvre de Laisant. Si cette écriture reste exceptionnelle chez Laisant, celui-ci semble conscient des possibilités qu'elle offre. Voir [Barbin, 2009], [Barbin, 2008], p. 8-16 et Gino Loria, « Perfectionnements, Evolution, Métamorphoses du concept de "coordonnées": Contribution à l'Histoire de la Géométrie Analytique », *Osiris,* Vol. 8, 1948, p. 218-288 ainsi que Évelyne Barbin, René Guitart, « Historique de la notation abrégée de Lamé à Salmon », *Séminaire Histoires de Géométries* 2010.

1076 Op.cit., p. 73.

1077 Laisant obtient les relations suivantes :

$$\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{R}_n + r_n$$

d'où

$$\mathrm{R}_n = n + 1 + \frac{n(n^2-1)}{6}$$

et

$$\mathrm{L}_{n+1} = \mathrm{L}_n + l_n \; ; \; \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n + p_n$$

d'où

$$\mathrm{L}_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \; ; \; \mathrm{P}_n = n(n-1) + 2$$

1078 Le nombre de cas de "singularités" est sensiblement supérieur à celles possibles dans le plan : si l'intersection de p plans en un point fait perdre L_p régions limitées ; l'intersection de k plans suivant une droite correspond à la perte de $(k-1)(k-2)(k+3)/6$ régions etc.

Laisant suggère d'autres généralisations, tel que le calcul des régions délimitées par des lignes tracées sur des surfaces quelconques, mais laisse le lecteur montrer que le nombre P_n est le nombre de régions déterminées sur une sphère par des arcs de grands cercles. Cette étude ne sera jamais opérée par Laisant lui-même, seul l'article du *Bulletin* de la SMF fait écho aux propos tenus à l'AFAS en cette année 1881. Les résultats présentés ici seront cependant repris par Lucas dans le paragraphe 63 du chapitre VII de sa *Théorie des nombres* ([Lucas, 1891a]). Dans ce chapitre « Géométrie de situation »[1079], l'ami de Laisant reprend le calcul du nombre de régions délimitées par n droites mais aussi le nombre de segments qu'on peut alors construire ou le nombre de leurs points d'intersection en soulignant, à la différence de ce que l'on a vu ici, l'aspect combinatoire des procédés et afin d'élargir son propos au théorème des quatre couleurs. Outre une référence à l'exposé de Laisant, on y trouve également des théorèmes et exercices proposés par le Suisse Jakob Steiner. Ce dernier est en effet l'auteur de résultats qui relèvent des interrogations de Laisant à la fin de son exposé à l'AFAS en 1881[1080] (ce dernier n'y fait cependant aucune mention des travaux du Suisse).

REGIONS, ASPECTS ET PERMUTATIONS

La deuxième communication rattachée à cette question reprend les travaux de Georges Henri Halphen sur la notion d'« aspects sous lesquels on peut voir un système de points distribués sur un plan »[1081]. Halphen, président de la SMF en 1882, adresse en effet aux membres de la Société une communication intitulée « Sur les aspects des paysages » lors de la séance du 20 janvier 1882[1082].

On a déjà souligné les similitudes entre les parcours de Georges Henri Halphen et de C.-A. Laisant. Tous deux provinciaux et polytechniciens puisque Halphen est né à Rouen et appartient à la promotion X 1861, ils se distinguent dans le conflit contre la Prusse : Halphen subit avec l'armée du Nord une lourde défaite mais accède au grade de capitaine d'artillerie. Ils seront d'ailleurs chacun décorés à cette occasion (Halphen par la croix de la Légion d'honneur). En 1882, les travaux de Halphen sont déjà reconnus. Répétiteur à l'École

[1079] Voir [Lucas, 1891a], p. 109-115. Il y traite du carré arithmétique de Pascal, de l'échiquier triangulaire, du pentagone et de l'hexagone arithmétique, tous trois de Delannoy, des réseaux (théorèmes d'Euler, Clausen, Trémaux et de Genty), des régions à travers le problème des quatre couleurs et les théorèmes de Guthrie et Descartes. Voir [Décaillot-Laulagnet, 1999], chap. 10.

[1080] Sous la plume d'O. Terquem (?) : [Anonyme, 1845], "Théorèmes de M. Steiner sur la division du plan par des droites et des cercles ; et sur la division de l'espace par des plans et des sphères", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 1, 4, 1845, p. 491-494.

[1081] [Laisant, 1882f], p. 52.

[1082] "Vie de la société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 10, 1882, p. 99.

polytechnique depuis dix ans (Laisant le sera en 1895), il se fait remarquer à travers sa théorie des caractéristiques en 1873, puis sa thèse sur les invariants différentiels (1878, soit un an après Laisant). Surtout en 1880, il remporte le grand prix de l'Académie des sciences pour son mémoire « Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables ». En cette année 1882, c'est l'Académie des sciences de Berlin qui le distingue pour son étude des courbes gauches algébriques qu'il avait entamée une douzaine d'années auparavant. Il deviendra examinateur d'admission à l'École polytechnique en 1884 et succédera à Bouquet à l'Académie des sciences (section Géométrie).[1083]

Dans son exposé du 20 janvier, Halphen semble associer à une position de l'observateur sur un plan une permutation représentant l'ordre dans lequel des points donnés lui apparaissent autour de lui. Cette question semble assez éloignée de ses sujets de prédilection mais l'auteur précise qu'elle se rattache à l'étude des discontinuités d'intégrales définies[1084]. Laisant souhaite préciser ce problème qu'il reconnaît explicitement relever de la géométrie de situation.

Remarquons ici la réactivité de Laisant suite à la communication de son confrère qui ne date que de la séance précédente de la Société mathématique de France. Il semble clair que le thème régions/aspects est dans l'esprit de Laisant depuis son intervention à l'AFAS l'année précédente : l'occasion lui est donnée de pouvoir relier le nombre d'aspects suivant lesquels on peut voir un système de points et le nombre de régions du plan délimitées par les droites passant par ces mêmes points. Et on a vu précédemment une problématique similaire dans quelques travaux sur les équipollences liés à la figure du triangle où il s'agissait de voir les trois côtés sous le même angle ([Laisant, 1877c]). Il profite donc de l'occasion offerte par Halphen pour compléter ses remarques à l'AFAS, c'est-à-dire fixer un majorant du nombre de régions d'aspects distincts, tout en utilisant un outil qui lui est familier : les permutations (nous y reviendrons).

Précisons le problème en parcourant le paragraphe introductif de l'article de Laisant. On donne n points sur le plan : le nombre d'aspects possibles a priori est de $(n-1)$! (autant que de permutations). Or, par ces n points, passent m droites avec

$$m = \frac{n(n-1)}{2},$$

[1083] Voir [Picard, 1890], Picard E., "Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen", *CRAS*, t, CX, 10 1[er] semestre, 1890, p. 489-497. Halphen meurt en 1889 en laissant son projet de grand traité sur les fonctions elliptiques inachevé.

[1084] Ainsi, sa communication lors de la séance du 17 mars 1882 est intitulée : « Sur le problème des aspects et ses rapports avec le calcul intégral » (*BSMF*, t. 10, 1882, p. 101). Voir aussi [Perrin R., 1882], p. 104.

et ces droites divisent le plan en un certain nombre de régions. Laisant remarque qu'un observateur contraint de rester dans une région donnée verra toujours le système de points sous le même aspect, c'est-à-dire que les points lui apparaîtront toujours dans le même ordre, ordre qu'Halphen représente par une permutation (on pourrait donc, mais c'est implicite chez Laisant, associer à chaque région une permutation). Le nombre de régions donne donc un majorant du nombre d'aspects possibles. Or ce nombre a déjà été calculé par ses soins au Congrès d'Alger de l'AFAS l'année précédente ([Laisant, 1881b]). À la différence près que le nombre r_m de régions y avait été calculé en fonction du nombre m de droites tracées sur le plan. Ici, Laisant souhaite l'exprimer en fonction du nombre n de points. Pour être plus précis, il est donc amené à déterminer les "singularités" qui se présentent, comme il l'a expliqué à la tribune de l'AFAS. Ici, en chacun des n points, il y a $n - 1$ droites concourantes (par construction), d'où la perte en chaque point de l_{n-1} régions limitées soit :

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Le total de régions à retrancher de r_m est donc :

$$\frac{n(n-2)(n-3)}{2}.$$

Laisant obtient donc un nombre total de région égal à

$$\frac{1}{8}(n-1)(n^3-5n^2+18n-8).$$

Ce nombre est donc la limite supérieure recherchée au nombre d'aspects possibles pour un système de n points.

À l'aide d'un tableau, Laisant montre le gain réalisé par ce résultat sur le nombre d'aspects possibles a priori qui est pour n points de $(n - 1)$!. Pour n supérieur à 5, ce gain est substantiel (l'auteur explique que pour $n = 15$, il permet de conserver un aspect sur 10 millions possibles).

Cependant, Laisant prévient que le problème général est difficile et que le nombre d'aspects effectivement possibles est loin du majorant proposé. À l'aide d'une figure, il montre que pour un système de quatre points, ce nombre peut se réduire à 9, dans le cas où les points ne forment pas un quadrilatère convexe, alors que le majorant obtenu précédemment était de 18. Remarquons que le rôle de la figure se borne à mettre en valeur la complexité du problème, aucune représentation n'ayant été jugée nécessaire pour étayer le raisonnement précédent.

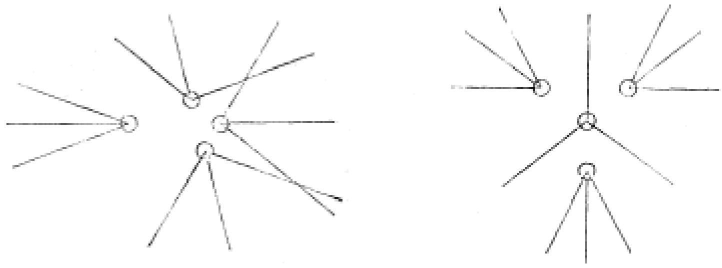


Figure utilisée par Laisant pour illuster la complexité du sujet

La conclusion finale est intéressante puisque Laisant relie la difficulté d'étudier le problème général d'un système de *n* points à celle « d'introduire une notation faisant ressortir leurs positions relatives »[1085], car c'est bien cela qui fait varier sensiblement le nombre d'aspects. Ici, le problème de géométrie de situation se heurte à la difficulté de mettre en place une écriture satisfaisante pour rendre compte de la situation. On touche effectivement là au cœur de ce qu'est la géométrie de situation, comme la conçoit Laisant :

> *Dans la géométrie de situation, ce n'est plus la mesure que l'on se propose ; on examine les figures ou les objets, au point de vue de leurs positions respectives ; ainsi, dans les surfaces, ce sont les ordres de connexion qui constituent l'étude essentielle.*[1086]

Le problème général est cependant repris rapidement et à plusieurs reprises par Raoul Perrin (1841-1910), condisciple de Laisant à l'X en 1859. Cet ingénieur puis inspecteur général des mines, membre de la SMF depuis 1873 sera, à l'instar de Laisant, président de cette Société en 1908 (ainsi que de la Société philomathique en 1909). Grand admirateur d'Halphen[1087], voici comment celui-ci présente les avancées d'Halphen et Laisant dans son article « Sur le problème des aspects »[1088] paru dans le *Bulletin* de la SMF, toujours en 1882, après plusieurs interventions sur le sujet :

> *Le problème des divers aspects sous lesquels on peut voir un système de n points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté, a fait l'objet, dans les séances précédentes de la Société mathématique, de deux intéressantes communications : l'une de M. Halphen, qui a formulé l'énoncé précis du problème, l'a traité dans les cas les plus simples, et a montré comment il se rattache à l'étude des discontinuités de certaines intégrales définies ; l'autre de M.*

[1085] [Laisant, 1882f], p. 54.
[1086] [Laisant, 1898a], p. 105.
[1087] Pour s'en convaincre, on pourra consulter deux articles dans le *BSMF* où le terme d'« halphénienne » est introduit en hommage à « l'éminent géomètre ». Perrin R., "Sur les halphéniennes ou expressions différentielles qu'annule l'opérateur caractéristique des covariants", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 38, 1910, p. 211-238 et p. 239-257. Voir aussi Nivoit, "Discours prononcé aux funérailles de M. Raoul Perrin, inspecteur général des mines", *Annales des mines*, Sér. 10, t. 17, 1910.
[1088] [Perrin R., 1882], R. Perrin, "Sur le problème des aspects", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 10, 1882, p. 103-127. Perrin intervient sur le problème des régions et des aspects lors des séances du 17 février et du 3 mars (voir [Perrin R., 1882]) ainsi que le 7 avril 1882.

Laisant, qui a donné l'expression, en fonction de n, d'une limite supérieure du nombre R des régions d'aspect constant, c'est-à-dire déterminées par la condition que l'observateur circulant à volonté dans l'une de ces régions ne cesse pas de voir le système des n points sous le même aspect (dans le même ordre circulaire), mais que l'aspect change dès qu'il passe dans l'une des régions contiguës.[1089]

Perrin prend pour point de départ la remarque finale de l'exposé de Laisant sur la difficulté du problème général suivant la disposition des points dans le plan. Afin de mieux décrire la situation, il introduit de nouvelles notions (comme par exemple celle de nœuds extérieurs, intérieurs ou mixtes) et il s'appuie sur les résultats d'Halphen en termes de discontinuités d'intégrales définies. Il arrive finalement à un résultat généralisable si on met en jeu la notion d'ordre de connexions et donc exprimable dans le cadre de la théorie des surfaces de Riemann[1090]. Outre le théorème de Descartes-Euler, il en déduit un nouveau majorant du nombre des régions d'aspect constant « sensiblement moindre que la limite supérieure ρ qu'avait calculée M. Laisant »[1091]. Distinguant les notions d'aspects imaginables et réalisables, il conclut lui aussi quant à la difficulté du problème : « Il y a là toute une série de questions dont la solution paraît assez difficile ; voici quelques propositions et remarques qui pourront servir de point de départ à ceux qui désireraient pousser plus loin l'étude du problème des aspects. »[1092]

Halphen, Laisant, Perrin, trois hommes qui, au sein de la SMF exclusivement (puisque ni Perrin, ni Halphen ne sont présents au congrès de l'AFAS à Alger où Laisant propose une partie de sa réflexion) et à un moment précis de leurs carrières, vont former un cercle de réflexion extrêmement restreint, autonome, éphémère et isolé sur un problème donné caractéristique de la géométrie de situation de la fin du XIX^e^ siècle.

III.1.3. Questions de permutations

Le dernier article étudié souligne également le goût de Laisant pour les questions liées aux permutations et plus généralement pour l'objet permutation lui-même, souvent associé à des questions de géométrie de situation.

En 1888, il publie un essai sur un nouveau système de numération qu'il applique aux permutations (« Sur la numération factorielle, application aux permutations », [Laisant,

[1089] [Perrin R., 1882], p. 103.
[1090] Sur la notion d'ordre de connexions, on pourra par exemple consulter [Hadamard, 1909] et Georges Valiron, *Cours d'analyse mathématique, Equations fonctionnelles, Applications*, Masson, 1945 (partie I, chap. II).
[1091] [Perrin R., 1882], p. 115. Ce majorant est en outre atteint dans le cas d'un polygone convexe.
[1092] Ibid., p. 118. Nous n'avons pas trouvé de traces de tels travaux par la suite.

1888e]). On retrouve donc ici deux thèmes familiers du mathématicien. Le premier est celui des systèmes de numérations qui sont utilisés à diverses reprises pour formuler de façon claire et précise un résultat, comme par exemple au congrès de l'AFAS de 1881 lors d'une intervention sur la détermination du signe des termes d'un développement ([Laisant, 1881c]). Dans une autre intervention à l'AFAS, plus tardive, on devinera l'importance des principes de la numération aux yeux de Laisant, ceux-ci englobant notamment ceux concernant les congruences :

> *la théorie des congruences n'est en réalité qu'un cas très particulier de la théorie de la numération : celui où l'on ne s'occupe exclusivement que du chiffre des unités. À notre avis, l'arithmétique est appelée surtout à faire des progrès du jour où elle abordera, dans la numération en général, l'étude des chiffres d'ordre supérieur. La question est certainement difficile ; mais c'est dans cette voie, croyons-nous, que les efforts deviendront féconds en résultats.*[1093]

Quant aux permutations, elles sont présentes à de multiples reprises, dans divers contextes comme celui des régions et des aspects, mais également lors de l'étude de problèmes de rencontres ou de placement de pièces sur un échiquier. Nous proposons d'étudier ici quelques-unes de ces questions de permutation, même si ces problèmes ne sont pas toujours rattachés à une volonté de représenter l'objet, mais plutôt à la mise en place d'outils de classement et d'étude.

UN SYSTEME DE NUMERATION PERTINENT

Dans sa communication intitulée « Sur la numération factorielle, application aux permutations » ([Laisant, 1888e]), Laisant bâtit un nouveau système de numération d'après la remarque suivante : « Un nombre entier quelconque étant donné, il tombe nécessairement entre deux factorielles consécutives »[1094].

Divisant un entier N tel que

$$n\,! \leq \mathrm{N} < (n+1)\,!,$$

par $n\,!$, il obtient

$$\mathrm{N} = \alpha_n\, n\,! + \mathrm{R},$$

où le quotient α_n de cette division est nécessairement plus petit que $n + 1$ (car $\mathrm{N} < (n + 1)\,!$). Il est possible alors de diviser le reste R (inférieur à $n\,!$) par $(n - 1)\,!$ (on obtient un quotient inférieur à n et un nouveau reste R_1) et ainsi de suite. Finalement, Laisant écrit :

[1093] [Laisant, Arnoux, 1900], p. 59. Voir aussi Arnoux Gabriel, "Les systèmes de numération à bases multiples", *les espaces arithmétiques hypermagiques*, 1894, p. 76.

[1094] [Laisant, 1888e], p. 176.

$$N = \alpha_n\, n\,! + \alpha_{n-1}\,(n-1)\,! + \ldots + \alpha_3\, 3\,! + \alpha_2\, 2\,! + \alpha_1.$$

Chacun des quotients α_i est un entier compris entre 0 et i. Pris comme chiffres, ces quotients permettent l'écriture symbolique de N sous la forme :

$$N = (\alpha_n\, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_3\, \alpha_2\, \alpha_1)\,;$$

« nous avons ainsi un système particulier de numération, que nous nommerons numération factorielle »[1095]. À l'aide de ce système Laisant démontre aisément l'égalité :

$$1.1! + 2.2\,! + \ldots n.\, n\,! = (n+1)\,! - 1.$$

Puis il précise les critères de parités, les modalités d'addition dans un tel système, ainsi que les méthodes pratiques et effectives de conversion avec le système décimal (la conversion d'un nombre écrit dans le système décimal se fait par exemple via les divisions successives par 2, 3, etc.., les restes constituant les différents chiffres recherchés).

Ce système de numération est un travail original de Laisant, bien que les systèmes de numération à base multiple aient déjà été étudiés par Cantor[1096]. Il montre, une fois de plus, l'intérêt de son auteur pour les questions d'écriture d'un nombre : la base choisie est reliée directement aux avantages qu'elle offre et qui sont généralement cachés par l'écriture décimale usuelle.

CLASSER LES PERMUTATIONS

Afin d'établir une hiérarchie parmi les n ! permutations de n objets, C.-A. Laisant étudie dans le même article les inversions présentes dans chacune d'entre elles. La notion d'inversion semble être introduite par Cramer en 1750 sous le terme « dérangement »[1097] ; cependant ni les travaux de Cramer, ni d'autres plus récents sur la question ne sont mentionnés par l'auteur. Nous reprenons son exemple sur les permutations de trois objets notés 1, 2, 3. Les permutations possibles sont :

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Laisant étudie successivement les permutations existantes entre les premiers objets et les suivants (c'est-à-dire le nombre d'objets qui sont situés initialement avant le premier et qui se

1095 Ibid., p.177. Laisant précise que si un des restes α_i est nul, les restes suivants α_{i-1}, ….α_2, α_1 le seront aussi par convention.

1096 [Cantor, 1869], Cantor, G., "Ueber die einfachen zahlensysteme ", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 14, 1869, p. 121-128. L'expression "factorial number system" est due à Knuth ([Knuth, 1997], p. 192). Voir aussi [Knuth, 1973], p. 12. Voir aussi sur les numérations à plusieurs bases [Borel, 1952], p. 58-59 et plus précisément sur la numération factorielle, [Borel, 1952], p. 59-69.

1097 La notion apparaît lors de la résolution d'un système de n équations à n inconnus. Cramer écrit : « Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un dérangement » [Cramer, 1750], p. 658. Voir aussi [Knuth, 1973], p. 12.

trouve, pour cette permutation, après ; ce nombre est 0, 1 ou 2) puis celles du deuxième objet et le troisième (0 ou 1 inversion). Il associe donc aux permutations précédentes ce qu'il appelle les « signes figuratifs » suivants

00, 01, 10, 11, 20, 21.

Or il remarque que ces signes correspondent respectivement dans la numération factorielle aux nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5. Il en conclut : « Si l'on écrit les permutations dans l'ordre que nous avons adopté plus haut, on voit donc que le rang de chacune d'elles sera (p) + 1, en désignant par (p) son signe figuratif, considéré comme représentant un nombre écrit dans le système factoriel »[1098]. Suivant le mode d'exposition déductif qui caractérise la plupart de ces exposés, Laisant généralise la notion à une permutation quelconque de n objets. La permutation 3412 sur les objets 1, 2, 3, 4 est figurée par le signe (220) qui s'écrit 16 dans le système décimal : cette permutation est donc la 17ème permutation de quatre objets. Le rapprochement entre le classement d'une permutation et l'écriture dans le système factoriel est d'ailleurs possible du fait que le nombre d'inversions pour un objet ne peut dépasser le nombre d'objets qui le suivent dans l'écriture de cette permutation, ce qui correspond à la propriété d'un nombre écrit dans le système de Laisant.

Laisant précise finalement ses intentions :

> *Pour que cette classification des permutations d'un nombre quelconque d'objets soit véritablement utile, il faut pouvoir résoudre facilement, et pour ainsi dire à vue, ou avec très peu de calculs, les deux problèmes suivants :*
>
> *Étant donnée une permutation de m objets, trouver le rang de cette permutation*
>
> *Étant donnée le rang d'une permutation, trouver cette permutation.* [1099]

Le terme « à vue » est significatif d'un grand nombre de ses articles sur les questions de numération. L'auteur souhaite y introduire un système lié à une écriture permettant une résolution instantanée par un simple algorithme de lecture (c'était déjà le cas lors de l'étude des fractions périodiques[1100]).

Il donne ainsi les moyens pratiques de répondre aux deux problèmes posés par diverses manipulations sur la permutation ou sur le rang proposé, que nous choisissons de ne pas détailler ici. L'écriture factorielle permet par une simple observation la résolution de l'un ou l'autre de ces problèmes. La transcription écrite de la notion de rang doit donc être naturelle et être de visu révélée par l'écriture factorielle. Une fois de plus, un peu comme pour

[1098] [Laisant, 1888e], p. 179.
[1099] Ibid., p. 180.
[1100] Voir [Laisant, Beaujeux, 1869].

les équipollences, c'est le regard porté sur l'écriture (d'un nombre, d'une équipollence) qui induit les caractéristiques de l'objet observé.

Si l'essai de classification des permutations par Laisant est notable et mentionné par exemple dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* [1101], Bourget, directeur des *Nouvelles annales de mathématiques*, a travaillé également sur le même sujet à travers deux articles parus dans cette même revue en 1871 et 1883 et d'un mémoire présenté à l'Académie des sciences par Camille Jordan en 1882[1102]. C'est en tout trois modes de classification que présente Bourget, le premier date de 1871, le second de 1881 et le dernier de 1882. Ces travaux semblent dans un esprit bien différent de ceux de Laisant ; il est peu probable que les deux hommes aient collaboré sur le sujet.

Toutes ces considérations se retrouveront dans l'élaboration du code Lehmer, attribué au mathématicien américain Derrick Lehmer (1905-1991), également auteur d'un test de primalité qui reprend les travaux d'É. Lucas[1103]. Le code Lehmer consiste à associer à une permutation σ de $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ une fonction f définie sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ par

$f(i)$ est le nombre d'indices j tel que $1 \leq j < i$ et $\sigma(j) < \sigma(i)$[1104]

ce qui revient à dénombrer les inversions comme le fait Laisant bien qu'il ne soit pas cité dans le travail de Lehmer. Notons que le code Lehmer trouve une application dans la résolution du problème des secrétaires[1105] (apparu au milieu du XXe siècle). Ce problème, inconnu de Laisant, aurait sans doute pu l'inspirer, lui qui s'attachera à résoudre le problème des couples mariés, problème encore en lien avec les permutations et que nous étudierons plus loin.

Les travaux de l'américain Marshall Hall sont aussi à noter : ce dernier montre en 1956 que le caractère bijectif de la relation entre une table d'inversion, recensant les inversions d'une permutation et cette même permutation.[1106]

L'originalité du travail de Laisant est cependant bien d'associer à ce comptage d'inversion un rang pour la permutation correspondante et d'obtenir un véritable classement

---

1101 Vogt N, *Analyse combinatoire et théorie des déterminants*, in [Molk, 1904-1916], t. 1, vol. 1, p. 63-132 (p. 67). Cette étude se réfère à un article de l'allemand E. Netto lui-même auteur de travaux sur la classification des permutations rectilignes : Netto, "Einige kombinatorische Probleme", *Arch. der Math. u. Phys*, (3) 5, 1903, p. 185-196.

1102 [Bourget, 1871, 1882 et 1883]. L'exposé de 1882 et l'article de 1883 sont très proches. Bourget signale lui-même un autre article de sa main sur le sujet dans le *Journal de mathématique élémentaire* en 1881.

1103 D.H. Lehmer, « *Teaching combinatorial tricks to a computer* », *Proc. Sympos. Appl. Math. Combinatorial Analysis, Amer. Math. Soc.*, vol. 10, 1960, p. 179-193 cité dans [Mantaci, Rakotondrajao, 2001], p. 101.
Voir aussi Don Knuth, *The art of computer programming: Sorting and Searching*, t. 3, Addison-Wesley, Reading, 1981, 2e éd., p. 12-13.

1104 [Mantaci, Rakotondrajao, 2001], p. 101.

1105 Thomas S. Ferguson, « Who Solved the Secretary Problem? », *Statistical Science*, vol. 4, no 3, août 1989, p. 282-289.

1106 « Proceeding of symposia in applied mathematics », 6, *American Mathematical Society*, 1956, p. 203. cité dans [Knuth, 1973], p. 12.

des permutations. C'est l'idée de classement qui le guide, comme souvent dans les travaux que nous commentons dans ce chapitre, et comme on le perçoit dans la conclusion de son exposé sur les mosaïques à l'AFAS en 1881 où « la notion de place ou de classification y domine la notion de grandeur ou de rapport »[1107].

APPLICATION AUX CALCULS DE DETERMINANTS

Le rang d'une permutation permet, par définition, d'obtenir le nombre total d'inversions à partir de la somme de ses chiffres figuratifs. Ainsi, Laisant en déduit que ce nombre est pair si le rang de la permutation est de la forme $4k$ ou $4k + 1$ et impair si le rang est de la forme $4k + 2$, $4k + 3$.

Or, il explique que le calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

s'effectue à l'aide des permutations

123, 132, 213, 231, 312, 321 [1108].

Ces permutations correspondent, d'après la classification de Laisant, aux signes

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad + \quad -$$

ce qui permet donc d'écrire ce déterminant

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

sans erreur sur le signe des différents membres, comme l'explique Laisant. Remarquons cet attrait pour les procédés de vérification de la validité d'une expression algébrique (notamment au niveau de la position des signes), attrait que l'on retrouve également dans l'exposé à l'AFAS mentionné plus haut ([Laisant, 1881c]).

UNE AUTRE CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PERMUTATIONS

Nous présentons dans le même ordre d'idée un autre travail important de Laisant concernant les permutations. Important dans la mesure où il constitue une des rares communications de Laisant à l'Académie des sciences, c'est-à-dire une communication jugée

[1107] [Laisant, 1881b], p. 108. Cette communication est étudiée plus loin dans ce chapitre.
[1108] Selon la formule que Cramer a établie en 1750 ([Cramer, 1750]).

digne d'intérêt par le milieu académique traditionnel [1109]. Important car Laisant juge nécessaire de revenir sur le sujet devant la Société mathématique de France moins d'un mois après[1110] pour en fournir une application originale, représentative de la géométrie de situation ou du moins de problèmes curieux et plaisants susceptibles d'éveiller l'intérêt du lecteur pour les sciences mathématiques, comme Laisant aime à l'expliquer. Important, enfin, car ce travail s'inscrit parmi beaucoup d'autres, en Allemagne surtout, portant simultanément sur les permutations et les déterminants.

C'est Sarreau qui présente cette communication de Laisant intitulée « Sur les permutations limitées »[1111] lors de la séance du 11 mai 1891. Laisant y détermine le nombre de permutations de n objets dont les premiers éléments sont nécessairement à choisir parmi un sous-ensemble de ces n objets. Dans les pages du *Bulletin* de la SMF, il écrira encore :

> *Trouver le nombre des permutations sans répétition que l'on peut former avec n objets différents a, b, c, ..., h, l, chacune des n places ne pouvant être occupée que par certains de ces objets.*[1112]

Plus précisément, il note les n objets a, b, c, …l et a_i, b_i, c_i… ceux qui sont susceptibles d'occuper la i ème place. Il forme alors le produit

$$(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)(a_2 + b_2 + c_2 + \ldots)\ldots(a_n + b_n + c_n + \ldots) = \mathrm{F}(a, b, c, \ldots l),$$

fonction homogène des lettres a, b, c, …l, et affirme que la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport successivement à a, b, c, ..., l fournit la solution au problème. Le développement du produit permet d'obtenir toutes les permutations demandées plus les "fausses permutations" où une même lettre se retrouve plusieurs fois. Donc en dérivant n fois successivement par rapport à a, b, c, …, l les termes correspondant aux permutations envisageables donnent 1 et ceux correspondant aux "fausses permutations" se dérivent en 0. Le nombre X de permutations demandées est donc

$$\mathrm{X} = \frac{d^n \mathrm{F}(a,b,c,\ldots l)}{da\, db\, dc \ldots dl}.$$

Pour l'Académie des sciences, il ajoute : « cette formule, très générale, n'a guère qu'un intérêt théorique, car elle permettrait rarement, dans la pratique, le calcul effectif des permutations pour chaque problème particulier. Elle peut cependant offrir une ressource précieuse pour vérifier des solutions obtenues »[1113]. Laisant explique qu'elle permet en outre

[1109] Voir [Gispert, 1993].
[1110] [Laisant, 1891m], "Sur deux problèmes de permutation", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 19, 1891, p. 105-109 (séance du 3 juin 1891).
[1111] [Laisant, 1891k], " Sur les permutations limitées ", *CRAS*, t. 112, Paris, 1891, p. 1047-1048.
[1112] [Laisant, 1891m], p. 105.
[1113] [Laisant, 1891m], p. 108.

de résoudre un problème posé par G. Longchamps[1114] dans lequel il s'agit de déterminer le nombre de termes du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ l_1 & l_2 & ... & c_n \end{vmatrix}$$

lorsque certains de ses éléments sont nuls[1115]. G. de Longchamps avait quant à lui dénombrer le nombre de termes non nuls du déterminant d'une matrice dont *m* éléments de la diagonale sont nuls. De tels problèmes liés à l'étude des permutations pour lesquelles certains éléments restent invariants ont été abordés par nombre de mathématiciens. L'ingénieur allemand Jakob Johan von Weyrauch (1845-1917) relia ce problème à celui du problème des rencontres datant de l'étude par Pierre Rémond de MontMort (1678-1719) du jeu de treize, étude reprise par N. Bernoulli, Euler ou Catalan[1116]. La question de Longchamps sera reprise quant à elle par Holtze ou E. Netto, sans référence à la contribution de Laisant[1117].

Ces deux questions proviennent donc d'un problème plus général, initié par Euler[1118]. Dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, Leonhard Euler a en effet étudié en 1779, pour une permutation de *n* éléments (distincts), le nombre $f(n)$ de permutations pour lesquelles aucun élément n'a conservé sa place initial. Plus généralement, on peut chercher le nombre $\mathrm{F}(n, m)$ de permutations de *n* éléments pour lesquelles *m* d'entre eux ne changent pas de places[1119]. De nombreux travaux peuvent être cités autour de ce thème : en Allemagne, ceux d'Öttinger (1837), Baur et M. Cantor (1857), Weyrauch (1872), Baltzer (1878), S Kantor (1883), mais aussi ceux de Cayley parus par exemple en 1875 dans les *Proceedings of*

[1114] De Longchamps G., "Sur les déterminants troués", *Journal de mathématiques spéciales*, Sér. 3, t. 5, 1891, p. 9-12, 29-32, 54-56, 85-87. Voir [Takács, 1980], p. 240.

[1115] Le nombre de termes s'évanouissant est

$$n\,! - \frac{d^n \mathrm{F}(a,b,c,...l)}{da\, db\, dc \ldots dl}$$

Vogt N., *Analyse combinatoire et théorie des déterminants*, t. 1, vol. 1, p. 63-132 in [Molk, 1904-1916], § 18, p. 92.

[1116] Weyrauch J. J., "Zur theorie der Determinanten", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74, 1872, p. 273-276. MontMort, P. R., *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Paris, 1708. [Catalan, 1837]. Pour d'autres travaux sur le problème des rencontres, voir [Takács, 1980], p. 241 et deux contributions dues à Lucas dans sa théorie des nombres ([Lucas, 1891a], p. 211-215 et p. 490-491).

[1117] [Holtze, 1892], Holtze A., "Einige Aufgaben aus der combinatorik", *Archiv der Mathematik und Physik*, 2, 11, 1892, p. 284-338. [Netto, 1901], E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901. Voir [Takács, 1980], p. 240.

[1118] Nous nous référons à l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, et plus précisément Vogt N, « Analyse combinatoire et théorie des déterminants », t. 1, vol. 1, p. 63-132 in [Molk, 1904-1916], § 8 et 18, p. 71 et 92.

[1119] On a

$$\mathrm{F}(n, 0) = f(n).$$

Vogt N., ..., p. 71.

the Royal Society of Edinburgh ou encore, en France, les contributions d'A. Coupy[1120], D. André[1121] ou É. Maillet[1122]. Cette dernière, présentée au congrès de l'AFAS, traite des carrés latins d'Euler mais en usant explicitement des abaques de G. Arnoux ou des systèmes de numérations développés dans l'ouvrage *Les espaces arithmétiques hypermagiques*, coécrit avec Laisant comme nous le verrons en fin de chapitre.

LE PROBLEME DES MENAGES, LA FORMULE DE RECURRENCE DE LAISANT

Venons-en aux deux applications des "permutations limitées" proposées par Laisant uniquement dans sa communication à la Société mathématique de France en juin de cette année 1891 ([Laisant, 1891m]), ces applications se rapportant spécifiquement à la géométrie de situation. La première concerne le problème dit « des ménages » que Laisant présente ainsi :

> PROBLEME I. – *n* groupes de deux personnes (mari et femme) devant s'asseoir autour d'une table, et les n femmes s'étant assises en laissant une place vide entre deux quelconques d'entre elles, de combien de manières leurs maris peuvent-ils occuper les places vides, sous la condition qu'un mari ne se trouve pas à côté de sa femme ? [1123]

Devant les membres de la SMF, Laisant rappelle la résolution de ce premier problème des ménages à l'aide d'une relation de récurrence. Le nombre X_n de possibilités pour *n* couples vérifie en effet :

$$X_{n+1} = \frac{n^2 - n + 1}{n-1}(X_n + X_{n-1}) + \frac{n}{n-1}X_{n-2}.$$

L'auteur présente aussi la relation, encore inédite, qui en a été déduite par le colonel d'artillerie C. Moreau :

$$(n-1)X_{n+1} - (n^2-1)X_n - (n+1)X_{n-1} = 4(-1)^n.$$

[1120] [Coupy, 1844], Coupy, Émile, "Solution de la question 85", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 3, 1844, p. 404-410. Le problème est ici de déterminer le nombre de permutation sur *n* éléments pour lesquelles au moins un élément est à sa place.

[1121] André, Désiré, "Terme général d'un série quelconque déterminée à la façon des séries récurrentes", *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Sér. 2, 7, 1878, p. 375-408.

[1122] [Maillet, 1894], Maillet Édouard, "Sur les carrés latins", AFAS, Caen, 1894/2, p. 244.

[1123] [Laisant, 1891m], p. 105. Voir aussi Lajos Takács, "On the problème des ménages", *Discrete Mathematics*, Volume 36, Issue 3, 1981, Pages 289-297. Lajos Takács, "On the Method of Inclusion and Exclusion", *Journal of the American Statistical association*, Vol. 62, N°. 317 (Mar., 1967), p. 102-113. Dutka, Jacques, "On the Problème des Ménages", *The Mathematical Intelligencer*, 1986, 18-25. Comtet, L. "The 'Problème des Ménages.' " §4.3 in *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*, D. Reidel Pub. Co., 1974, p. 183-185.

Cette formule, non publiée, est parfois appelée « formule de récurrence de Laisant »[1124]. L'anglais. H. M. Taylor proposera une autre solution en 1903[1125]. Une dernière solution peut être consultée dans l'ouvrage *Combinatory analysis* de Percy Alexander MacMahon[1126].

Le colonel en question est probablement Charles Paul Narcisse Moreau. Né à Paris en 1837, il entre à l'École polytechnique en 1857, soit deux ans avant Laisant, et intègre ensuite le corps du génie. Les quelques écrits dus au capitaine puis colonel Moreau, féru d'échecs, portent essentiellement sur l'arithmétique. On notera "Sur les permutations circulaires distinctes" (1872) ; "Propositions sur les nombres" (1875) et "Sur quelques théorèmes d'arithmétique" (1898)[1127]. Moreau, Laisant et Lucas ont pu se rencontrer à l'occasion des congrès donnés par l'AFAS[1128].

Plutôt que de donner une preuve de cette formule, Laisant renvoie à la *Théorie des nombres* de son ami Lucas parue la même année ([Lucas, 1891a]). L'ouvrage contient en effet, dans ses « notes et additions », la démonstration de la solution. Lucas assure que Laisant est le premier à avoir résolu le problème avant de lui communiquer la solution et que Moreau est arrivé de manière similaire mais indépendante à d'autres relations semblables[1129].

Laisant préfère fournir un moyen simple de calcul des valeurs à l'aide de deux changements de variables. Et c'est justement la fonction F introduite pour l'Académie des sciences qui lui a permis de vérifier jusqu'à n = 10 la validité des différentes formules de récurrence établies par ces changements de variables (la table des X_n pour n allant de 1 à 10 est d'ailleurs fournie).

Lucas a en fait proposé ce problème comme exemple d'application du calcul symbolique dans le treizième chapitre de sa *Théorie des nombres* [1130] où une section entière est consacrée au problème des rencontres. L'auteur y explique que le problème revient à chercher le nombre de permutations discordantes avec les deux permutations

$$(1\ 2\ 3\ \ldots\ n) \text{ et } (2, 3, \ldots, n, 1).$$

La notion de permutations discordantes n'est pas précisée par Lucas, cependant on trouve quelques lignes plus haut la notion d'arrangements discordants : deux arrangements étant

---

1124 [Dörrie, 1965] p. 27 et p.33, Sloane, N. J. A. Sequences A000903/M1761, A000166/M1937, and A000179/M2062 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences".

1125 "A problem on arrangements", *The messenger of mathematics*, 32, 1903. Solution reprise dans [Dörrie, 1965], p. 27-33.

1126 [MacMahon, 1915], p. 253.

1127 "Sur les permutations circulaires distinctes", *NAM*, 2, 11, 1872, p. 309-314 ; "Propositions sur les nombres", *NAM*, 2, 14, 1875, p. 274-275 et "Sur quelques théorèmes d'arithmétique", *NAM*, 3, 17, 1898, p. 293-307.

1128 Hypothèse envisagée dans [Schwer, Autebert, 2006], p. 33.

1129 [Lucas, 1891a], p. 491-495.

1130 [Lucas, 1891a], p. 215. C'est la première occurrence connue au problème des ménages : voir Walter William [Ball Coxeter, 1987], p. 50.

discordants lorsqu'aucun des éléments de l'un n'occupe la même place que dans l'autre. Laisant affirme immédiatement que ce problème est équivalent à un autre celui-ci exprimé à l'aide d'un échiquier. Ce dernier problème est également présenté par Laisant dans sa communication à la SMF de la manière suivante :

> [PROBLEME II. -] Sur un échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases 1, 2 dans la première colonne, 2, 3 dans la deuxième, …, $(n-1)$, n dans la $(n-1)^{\text{ième}}$ et n, 1 dans la $n^{\text{ième}}$, restent inoccupées ?[1131]

La question des déplacements sur un échiquier trouve en effet un écho particulier auprès d'une communauté d'auteurs, restreinte mais active, principalement dans le *Bulletin* de la Société mathématique de France. Lucas est emblématique de ce groupe qui s'éloigne progressivement des travaux de Minkowski pour donner les applications pratiques de ses travaux[1132].

La fonction F joue de nouveau le rôle d'outil de vérification des formules de récurrence avancées pour résoudre ce deuxième problème au sujet duquel Lucas affirmait : « Nous ne connaissons aucune solution simple de cette question »[1133] sur un tel placement de tours sur un échiquier.

Ce problème est de nouveau lié à des questions de permutations, plus précisément à la notion de permutations discordantes comme l'explique Lucas. J. Touchard quant à lui en donnera une solution générale[1134]. Il explique : « Deux permutations de n lettres sont discordantes, lorsqu'aucune lettre n'occupe dans l'une le rang qu'elle occupe dans l'autre. Le problème consistant à dénombrer les permutations P, discordantes avec deux permutations données A et B, n'a pas, à notre connaissance, été résolu d'une manière générale »[1135] Touchard cite les travaux de Cayley[1136], T. Muir, Laisant et Moreau pour le cas où

$$A = (1\ 2\ 3\ \ldots\ n) \text{ et } B = (2, 3, \ldots, n, 1).$$

[1131] C'est-à-dire « sous la condition que les cases des deux diagonales restent inoccupées » (p. 107) [Laisant, 1891m], p. 105. Laisant n'est en effet pas étranger aux travaux sur l'échiquier, surtout celui de son ami Lucas, si bien qu'il rédigera, on l'a vu, pour *La Grande Encyclopédie* un article sur l'objet échiquier principalement l'échiquier arithmétique.

[1132] [Goldstein, 1999], p. 206.

[1133] « dont l'énoncé donne lieu à l'étude du nombre des permutations discordantes et plus généralement, du nombre des permutations discordantes de deux permutations quelconques. » [Lucas, 1891a], p. 215.

[1134] [Touchard, 1934], Touchard, J. "Sur un problème de permutations." *CRAS*, 198, 1934, p. 631-633.

[1135] [Touchard, 1934], p. 631. Voir aussi Touchard, J. " Discordant permutations with two given permutations" *Scripta Math.,* 19, 108-119, 1953. Touchard J., "Remarques sur les probabilités totales et sur les problèmes des rencontres ", *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, A, 53, 1933, p. 126-134.

[1136] Cayley, A. "On a Problem of Arrangements." *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* 9, 338-342, 1878.
Cayley, A. "Note on Mr. Muir's Solution of a Problem of Arrangements." *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* 9, 388-391, 1878.

III.2. Les mosaïques de Laisant et la notion de "place"

La communication de Laisant au congrès de l'AFAS de 1881 est représentative de la manière dont Laisant appréhende la géométrie de situation. À partir d'un problème concis et a priori particulier, on voit tout d'abord à l'œuvre la notion de représentation dans toutes ses composantes (justification de la représentation d'une solution par des tableaux de nombres correctement agencés, dimension heuristique de cette représentation visuelle, construction algorithmique d'une telle représentation et finalement apparition de la notion de place comme essentielle). Laisant y introduit plusieurs applications en terme de classement (par exemple celui des diviseurs d'un nombre) où la notion d'ordre dans la succession apparente des composants prend le pas sur un ordre lié aux notions de rapport ou mesure (ordre dans l'ensemble des réels par exemple). Laisant souligne pour finir les aspects originaux et novateurs de ce nouveau chapitre des mathématiques encore en construction mais synthétisé dans son exposé et les distingue des schémas classiques de raisonnement valables en analyse ou en géométrie. Notons que ce genre d'intervention est aussi représentative des mathématiques voulues par l'AFAS (et Laisant) : curieuses, originales, attractives, y compris visuellement, pour attirer un public d'amateur toujours plus nombreux.[1137]

LE CADRE DE REFLEXION PROPOSE PAR L'AFAS

Dans son discours d'ouverture de la session de 1879, Laisant montre déjà que « plusieurs questions originales ont pris naissance dans l'Association française »[1138] et liste plusieurs interventions sur la figuration de telle ou telle propriété ou d'autres méthodes graphiques. L'auteur a visiblement été sensible à ces approches novatrices que la liberté laissée aux intervenants a permises. L'influence de Lucas et de Sylvester y est en outre patente, à travers la notion d'échiquier anallagmatique.

L'origine de cette question se trouve dans les travaux de Sylvester[1139] sur le nombre de racines réelles d'une équation algébrique. Le mathématicien anglais reprend un résultat d'Isaac Newton et considère les changements de signes dans la suite des coefficients de

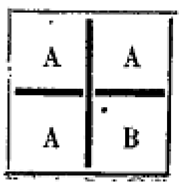
[1137] Voir à ce sujet [Décaillot, 2002] et [Décaillot, 2007].
[1138] [Laisant, 1879b], p. 63. Nous reviendrons sur le sujet dans la dernière partie de ce travail.
[1139] Sur la vie de Sylvester, on pourra consulter Karen Hunger Parshall, *James Joseph Sylvester: Jewish mathematician in a Victorian world,* JHU Press, 2006.

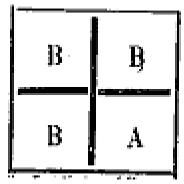
l'équation. Ceci lui permet d'en déduire une limite supérieure au nombre de racines réelles de l'équation. Pour étudier ces variations de signes, il utilise des matrices où sont placés les signes + et –. Il explique que, dans de telles matrices, auxquelles il donne le nom d'anallagmatiques, le nombre de changements de signes pour deux lignes ou deux colonnes quelconques est égal au nombre de permanences[1140].

Dans son discours de 1879, Laisant prolonge l'intervention de Lucas de 1877 « Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester »[1141]. Il propose un nouveau mode, « fort simple » car graphiquement aisé à mettre en œuvre, de construction d'échiquiers anallagmatiques de 2^n cases de côté. Rappelant que « L'échiquier anallagmatique est un carré formé de cases noires et blanches, en nombre égal ou inégal, de telle sorte que pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre de variations de couleurs est toujours égal au nombre des permanences » [1142], l'auteur considère les deux échiquiers « complémentaires » :

A =  et B = 

et forme les échiquiers



et


de quatre cases de côtés. Il obtient les échiquiers suivants :

[1140] [Décaillot, 2002], p.186-187.
[1141] [Lucas, 1877], " Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester ", AFAS, Havre, 1877, p. 213-214. [Laisant, 1879b], p. 70. Lucas y voit le lien avec la représentation des nombres s'écrivant comme produit de sommes de carrés en somme de carrés.
[1142] [Laisant, 1879b], p. 71. C'est en substance la définition donnée par Lucas en 1877.

Le procédé peut être itéré et fournit à chaque pas deux nouveaux échiquiers qui restent anallagmatiques lorsqu'on les modifie « 1° par la permutation des colonnes et des lignes ; 2° par le changement des couleurs des cases d'une ligne ou d'une colonne quelconque. »[1143]

LE PROBLEME INITIAL DE CATALAN

C'est en 1881 et logiquement à l'occasion d'un congrès de l'AFAS que Laisant s'empare véritablement de l'outil échiquier pour représenter la loi de développement d'un produit algébrique[1144]. La personne à l'origine de ce problème est Eugène Catalan.

Eugène Catalan est né à Bruges en 1814, période durant laquelle la ville fait encore partie de l'Empire français, d'où un attachement profond de Catalan à la France. Après des études en architecture à Paris, Catalan intègre l'École polytechnique en 1833 avant d'être renvoyé suite à ses positions républicaines tranchées. Il termine finalement ses études en 1835 et obtient une chaire au Collège de Châlons sur Marne. En 1838, il participe à la fondation de l'École préparatoire de Sainte-Barbe à Paris. Il y enseigne quelques temps avant de rejoindre l'École polytechnique pour y être répétiteur puis examinateur jusqu'en 1839. Les vicissitudes de sa carrière d'enseignant restent liées à ses positions politiques : il perd son poste au collège Charlemagne avec les évènements de 1848, et la fin de la Seconde République en 1851 est synonyme de son renvoi du lycée Saint Louis. À partir de 1857, il s'emploie à préparer les élèves de diverses institutions (Jaufret, Barbet..) au concours d'entrée de l'École polytechnique sans avoir de poste fixe. Cette situation prend fin en 1865 quand il rejoint l'Université de Liège pour une chaire qu'il occupera jusqu'en 1884. Césaro comptera parmi ses élèves et il continuera d'entretenir avec lui une correspondance abondante, comme avec Tchebychev et bien d'autres. Il est élu à l'Académie royale des sciences de Belgique en 1865. Ses travaux portent principalement sur la théorie des nombres et celle des surfaces algébriques. Son nom est associé à nombre de résultats : nombres de Catalan, conjecture de Catalan, surface minimale de Catalan. Parmi ses écrits, on peut citer *Éléments de géométrie* (1843), *Traité élémentaire de géométrie descriptive* (1852), *Traité élémentaire des séries* (1860) et *Cours d'analyse de l'Université de Liège* (1870) ainsi que de nombreux manuels. En 1874, il

[1143] Ibid. Dans les pages de *L'intermédiaire des mathématiciens*, Jacques Hadamard rappellera, en réponse à la question 151, qu'il a également traité la question dans son article « Résolution d'une équation relative aux déterminants » paru dans le *Bulletin des sciences mathématiques* en 1893.

[1144] [Laisant, 1881c], « Sur le développement de certains produits algébriques », AFAS, Alger, 1881, p. 84-108 (séance du 15 avril 1881).

crée la *Nouvelle correspondance mathématique* qui sera publiée jusqu'en 1881 et où Laisant publie plusieurs résultats comme on l'a vu dans le premier chapitre.

La question posée en 1880 par Eugène Catalan (1814-1894) dans la *Nouvelle correspondance mathématique* [1145] qui intéresse Laisant est la suivante : « Dans le développement du produit $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots$, à savoir :

$$1 - a - b + ab - c + ac + bc - abc - d + \ldots,$$

quel est le signe du n^{e} terme »[1146].

La question a déjà été résolue en 1880 par Ernest Césaro dans la même revue. Celui-ci isole dans un premier temps la plus grande puissance k de 2 contenue dans l'indice n en écrivant :

$$n = 2^k + n'$$

et montre que les termes de rang n et n' sont de signes contraires, ce qui lui permet par itération ($n' < n$) de déterminer celui de rang n[1147]. Il précise que si

$$n = 2^k m$$

le terme de rang n est du signe de $(-1)^k$ affecté du signe du $m^{\text{ième}}$ terme. E. Catalan précise la pensée de son ancien élève en expliquant que si

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{kp},$$

la suite $k_1, k_2, \ldots k_p$ est décroissante et le terme de rang n est du signe de $(-1)^{k_p+p}$.

Laisant reprend assez fidèlement cette solution dans un premier temps, en explicitant la démarche et d'un point de vue uniquement combinatoire. En remarquant que le dernier terme du développement de p facteurs, celui de rang 2^p, est positif ou négatif suivant la parité de p, il considère l'indice n qui « tombe entre deux puissance de 2, à savoir 2^p et 2^{p+1} »[1148]. En considérant le $i^{\text{ème}}$ terme α_i du développement uniquement du point de vue de son signe, le développement des p facteurs donne les termes :

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_{2^p}\,.$$

En multipliant par le facteur suivant $(1-h)$, il obtient les 2^{p+1} termes :

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_{2^p}$$

[1145] Catalan, "Question 542", *Nouvelle correspondance mathématique,* t. VI, 1880, p. 143. Sur Catalan, on pourra consulter : Jongmans François, *Eugène Catalan. Géomètre sans patrie, républicain sans république*, Liège, 1996.

[1146] [Laisant, 1881c], p. 84. Laisant précise immédiatement le principe de développement : chaque terme du multiplicande est multiplié par les termes successifs du multiplicateur : on obtient l'expression par itérations successives de ce principe.

[1147] [Césaro, 1880], Césaro E., "Question 542", *Nouvelle correspondance mathématique,* t. VI, 1880, p. 276. Une solution non publiée est également proposée par deux autres lecteurs (Leinekugel et Giron).

[1148] [Laisant, 1881c], p. 85.

$$-\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad \ldots \quad -\alpha_{2^p}$$

et en conclut que

$$\alpha_{2^p+k} = -\alpha_k = (-1)\alpha_k .$$

« En d'autres termes, toutes les fois qu'on retranche d'un rang la plus haute puissance de 2 qu'il renferme, on multiplie par (–1) le signe du terme correspondant »[1149], ce qui est le résultat de Césaro. L'auteur se démarque une première fois des auteurs de la *Nouvelle correspondance* grâce à l'utilisation pertinente des principes de numération dans une base quelconque : il explique que l'écriture de l'indice n dans la numération binaire permet d'obtenir une formule explicite :

$$\alpha_n = (-1)^{s+z-1}$$

où s est la somme de ses chiffres et z le nombre de zéros qui le terminent à droite. Il formalise ainsi la remarque de Catalan évoquée plus haut.

L'EMPREINTE DE LAISANT

Laisant décide ensuite de présenter la question sous une forme différente qui lui permet une généralisation, son objectif in fine. Les signes + et – sont remplacés par les lettres A et B, à partir desquelles Laisant forme les deux « permutations »

$$A_1 = AB \text{ et } B_1 = BA.$$

Le procédé peut être répété (nous écrivons $A_{i+1} = A_iB_i$ et $B_{i+1} = B_iA_i$) pour obtenir une permutation A_mB_m quelconque. Laisant donne l'exemple suivant :

$$A_3B_3 = A_2B_2B_2A_2 = A_1B_1B_1A_1B_1A_1A_1B_1 = ABBABAABBAABABBA$$

et observe que les règles de formation d'une permutation sont identiques aux règles de développement citées plus haut. Le problème posé précédemment revient alors à chercher la lettre occupant un rang donné n dans l'écriture d'une permutation à l'aide des lettres A et B[1150].

La deuxième présentation du problème est particulièrement intéressante puisque Laisant représente le développement sur un échiquier de 2^p cases de côté, lu ligne par ligne, de gauche à droite et de haut en bas, où le signe + est symbolisé par une case blanche et le

[1149] Ibid., p. 86.

[1150] Nous pouvons rapprocher ce questionnement de la combinatoire du monoïdes libre.
Voir [Frécon, 2002], Autebert J.-M. *Théorie des langages et des automates*, Masson, collection MIM, 1994. Duval. J.-P., *Sur la périodicité des mots,* Thèse, Faculté des sciences de L'Université de Rouen, 1978. Autebert J.-M., *Langages algébriques*, Masson, 1987.

signe – par une case noire. Nous précisons que cette démarche implique donc de considérer le développement précédent sur un nombre pair de facteurs. Le cas où les facteurs seraient en nombre impair semble volontairement, mais implicitement, écarté. Ce cas pourrait se traiter de manière analogue[1151] mais n'éclaire pas particulièrement la démarche générale voulue ici par Laisant qui préfère se restreindre à des échiquiers de 2, 4 et 8 cases de côté :

Fig.1

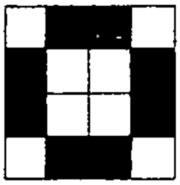


Fig.2

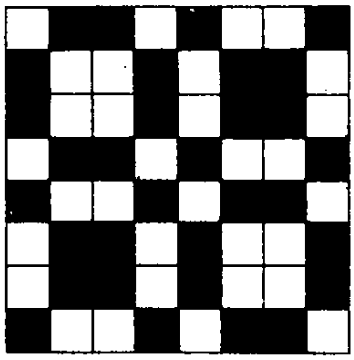


Fig 3

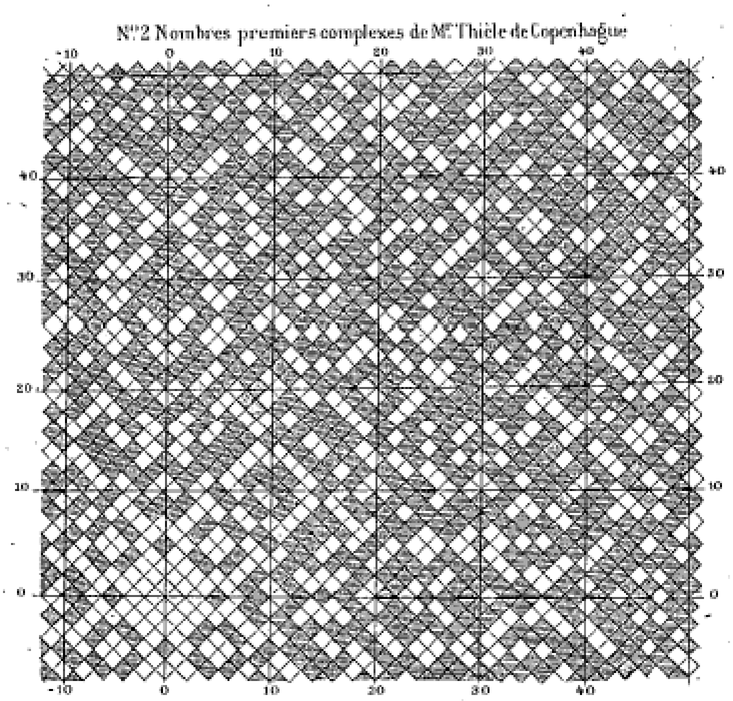
Figures proposées par Laisant [1152]

Laisant examine le résultat obtenu : « Cela donne lieu à des dessins mosaïques assez curieux et symétriques »[1153].

Les termes font directement écho au résumé que donne Laisant dans son « Discours d'ouverture » de 1879 de la communication du Danois Ole J. Broch (1838-1910) au congrès de 1874. Dans ce travail apparaissent des « tableaux qui présentent des dessins mosaïques fort curieux » [1154] (Laisant utilise le terme de mosaïque pour la première fois). Dans sa communication « Sur la représentation graphique des nombres complexes » [1155], Broch reprend les travaux de l'astronome danois Thorvald Thiele (1883-1910) : il s'intéresse aux complexes de la forme a + ib avec a et b entiers et représente ces nombres dans un quadrillage du plan où les cases sont coloriées pour faire apparaître telle ou telle propriété de ces nombres imaginaires. On peut ainsi colorier les cases correspondant à des nombres premiers ou des nombres pairs (c'est-à-dire divisible par 1 + i). Il explique : « M. Thiele, de Copenhague, jeune géomètre danois, a le premier montré qu'en marquant par différentes couleurs les

[1151] [Décaillot, 2002b], p. 182.
[1152] Compte-rendu AFAS, 1881, pl. III, fig. 1, 2, 3.
[1153] [Laisant, 1881c], p. 87.
[1154] [Laisant, 1879b], p. 65.
[1155] Broch, « Sur la représentation graphique des nombres complexes », AFAS, Lille, 1874, p. 1174-1176.

différentes qualités des nombres complexes, on en donnera une représentation graphique qui souvent frappe les yeux par la beauté du dessin en mosaïque qu'elle offre. »[1156]



Exemple de mosaïques de Thiele présenté par Broch[1157]

Dans sa communication de 1881, Laisant observe « l'analogie que présentent ces figures avec les échiquiers anallagmatiques de M. Sylvester »[1158], notamment au sujet d'une propriété de leur construction « en faisant une épreuve photographique négative »[1159] des précédents, comme il avait eu l'occasion de l'expliquer en 1879. La propriété essentielle pour la construction des mosaïques reste identique : si E est un échiquier de côté 2^p et E' son "jumeau négatif", l'échiquier de côté 2^{p+1} s'obtient en juxtaposant E et E' suivant le schéma donné par Laisant :

[1156] [Broch, 1874], p. 1175. Voir [Décaillot, 2002b], p. 173-178.
[1157] AFAS, Lille, 1874, planche XII.
[1158] [Laisant, 1881c], p. 89. Dans *La Grande Encyclopédie*, Laisant redéfinit au cours de l'article concernant les échiquiers les figures anallagmatiques de Sylvester :

> *c'est un carré formé de cases noires et blanches, de telle sorte que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques, le nombre total des variations de couleurs soit toujours égal au nombre des permanences*

([Berthelot & al., 1885], t. 15, p. 317). C'est la définition déjà proposée en 1879.
[1159] [Laisant, 1881c], p. 88.

E	E′
E′	E

Figure proposée par Laisant pour la construction de mosaïques[1160]

Chaque étape produit une nouvelle « table de multiplication »[1161]. Le terme apparaît subrepticement dans l'explication du procédé de construction, il est pourtant une importante interprétation de l'ensemble des mosaïques produites par Laisant dans sa communication. Si ce dernier est conscient de ce fait, il ne lui semble pas nécessaire d'y insister, préférant souligner les symétries et les méthodes de construction généralisable utilisées pour chaque dessin.

La propriété admise provisoirement par Laisant selon laquelle « on peut remplacer un certain nombre de facteurs par leur produit développé, sans altérer le résultat, même quant à l'ordre de ses termes »[1162] lui permet de préciser les propriétés de ses mosaïques. Pour effectuer le développement des 2^p facteurs, Laisant opère celui sur les p premiers, puis multiplie le résultat par le développement des p derniers qui lui est identique. Il obtient les 2^{2p} termes qu'il dispose dans son échiquier,

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1{}^2 & \alpha_1\alpha_2 & \dots & \alpha_1\alpha_{2^p} \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2{}^2 & & \\ \dots & & & \\ \alpha_1\alpha_{2^p} & & & \alpha_{2^p}{}^2 \end{array}$$

Il constate la symétrie des termes par rapport à la diagonale principale (qui est nécessairement blanche), que les éléments des diagonales sont de même couleur et que le principe des tables de Pythagore s'applique ici (une case est blanche si et seulement si les premières cases de sa ligne et de sa colonne sont de même couleur).

GENERALISATION DU PROBLEME

Nous avons vu que Laisant propose un parallèle entre le problème de développement de Catalan et celui de permutations sur un alphabet à deux lettres. Il s'appuie sur cette dernière présentation du problème pour le généraliser. Il considère en effet un alphabet à trois

[1160] Ibid.
[1161] Ibid.
[1162] Ibid., p. 87. C'est ce qu'il appelle « l'associativité » de l'opération sur les signes considérés ici.

lettres A, B, et C et les trois permutations circulaires qui leur sont associées et qui seront notées A_1 (ABC), B_1 (BCA) et C_1 (CAB). Il définit alors les « permutations » A_i, B_i et C_i comme précédemment : en suivant l'exemple de son intervention, nous pouvons écrire :

$$A_{i+1} = A_iB_iC_i\ ,\ B_{i+1} = B_iC_i\,A_i \text{ et } C_{i+1} = C_iA_iB_i.$$

Il s'agit désormais de savoir laquelle des lettres A, B, C occupe un rang donné dans le développement de $A_mB_mC_m$. Remarquons que la solution se cache dans le nombre représentant la position étudiée et donc implicitement dans son écriture dans une base de numération adéquate. « Il s'agit de déterminer, dans les nombres 18, 19, 20, … le caractère propre à faire retrouver la lettre correspondante »[1163].

Cette présentation n'est qu'un moyen original et pratique pour généraliser le problème de Catalan. En effet, Laisant s'intéresse désormais au développement d'expression de la forme :

$$(1+j+j_1)(1+j+j_1)(1+j+j_1)\ldots = (1+j+j_1)^m$$

où j et j_1 sont les « raisons cubiques imaginaires de l'unité »[1164]. Dans le développement de cette expression, les trois symboles $1, j$ et j_1 (c'est-à-dire j^2) se suivent de la même manière que les lettres A, B et C dans le "mot" développé $A_mB_mC_m$. Le développement du produit de p facteurs donne 3^p termes, chacun étant $1, j, j_1$

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_{3^p}\,.$$

D'une manière exactement analogue à celle du cas précédent que nous avons étudié, Laisant montre que :

$$\alpha_{3^p+k} = j\alpha_k$$

(en supposant $3^p < 3^p + k < 3^{p+1}$). Puis, par un raisonnement sur l'écriture de n dans un système de numération à base 3,

$$\alpha_n = j^{s+2z-1}$$

où s est la somme des chiffres de n dans ce système de numération et z le nombre de 0 à droite. En associant une couleur à chacun des trois symboles $1, j, j_1$, le résultat d'un développement de p facteurs peut se représenter par un échiquier de côté 3^p, toujours symétrique par rapport à sa diagonale principale, qui représente encore une table de multiplication (le principe d'associativité étant la base de ces résultats).

[1163] Ibid., p. 89.

[1164] Ibid., p. 90. Laisant précise :

$$j^2 = j_1 \text{ et } j\,j_1 = 1$$

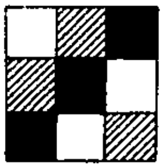


Fig. 4

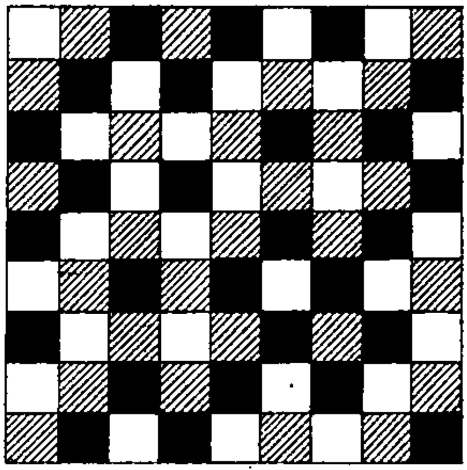


Fig. 5

Figures proposées par Laisant ($p = 2$ puis $p = 4$)[1165]

Son principe de construction est le suivant. À partir d'un tel échiquier E, on construit les deux autres E' et E'' par permutation des 3 groupes de lignes qui divisent E. Laisant affirme alors que l'échiquier de côté 3^{p+1} cases est donné par le schéma :

E	E′	E″
E′	E″	E
E″	E	E′

Laisant démontre également que le nombre et la somme des rangs occupés dans le développement par chaque signe est la même pour les trois signes.

L'étude précédente concernant trois signes se généralise naturellement (sans l'utilisation de lettres) à n signes via les racines $n^{\text{èmes}}$ imaginaires de l'unité j, j^2, ….. Laisant considère le polynôme

$$P = 1 + j + j^2 + \ldots + j^{n-1}$$

et le développement de P^p qui donnera n^p termes[1166]. Ce développement est lui-même multiplié par P et l'observation du tableau énumérant les termes obtenus (qui correspondent au développement de P^{p+1}) permet à Laisant d'affirmer que

$$\alpha_{n^p+k} = \alpha_k \, . \, j$$

(avec toujours $n^p < n^p + k < n^{p+1}$). En écrivant l'indice N en base n, il obtient :

[1165] Compte-rendu AFAS, 1881, pl. III, fig. 4, 5.

[1166] Le premier étant $\alpha_1 = 1$ et le dernier $\alpha_{n^p} = (j^{n-1})^p$

$$\alpha_N = j^{(n-1)z+s-1}$$

(où s est la somme des chiffres et z le nombre de zéros à droite). Laisant remarque également que, lors du développement d'un multiple de p facteurs, chaque symbole revient le même nombre de fois sur les n^p premiers termes et que la somme des rangs occupés par un symbole est constante, propriété démontrée dans le cas $n = 3$. Ainsi, le développement de

$$(1 + \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i})^4$$

se représente par un échiquier à 256 cases et l'auteur souligne la « symétrie particulière que présente ce dessin mosaïque par rapport aux diagonales »[1167].

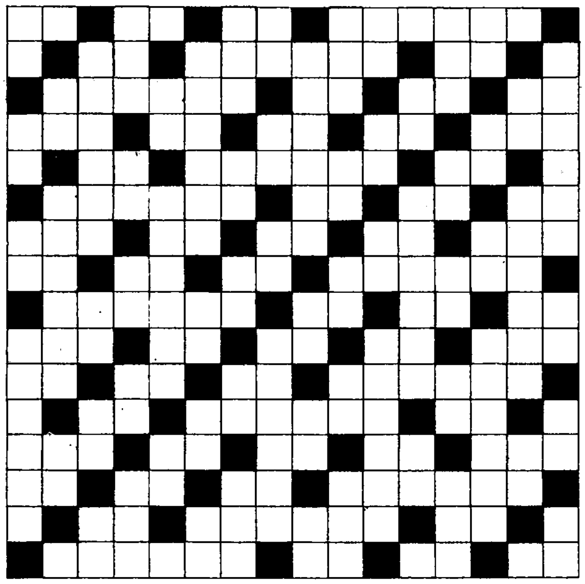


Fig. 6

Figure proposée par Laisant pour n = 3[1168]

DE NOUVELLES TABLES DE MULTIPLICATIONS

Le procédé précédent peut s'appliquer également, non plus à un polynôme de la forme $P = 1 + j + j^2 + \ldots + j^{n-1}$, mais à un polynôme à quatre termes que Laisant note

$$1 + I_1 + I_2 + I_3$$

où I_1, I_2, I_3 sont « les unités rectangulaires fondamentales de la méthode des quaternions »[1169].

Rappelons que c'est en cette même année 1881 que Laisant publie son propre traité sur

[1167] Ibid., p. 96.

[1168] Compte-rendu AFAS, 1881, pl. III, fig. 6 (les couleurs bleu et rouge correspondant respectivement aux termes i et $-i$ n'apparaissent pas dans cette planche des comptes rendus).

[1169] [Laisant, 1881c], p. 96. Il ajoute:

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -1$$
$$I_1 I_2, = - I_2 I_1 = - I_3 \text{ etc.}$$

les quaternions ([Laisant, 1881a]) et nous avons vu que ce sujet est très présent dans son œuvre depuis sa thèse de 1877. Les mosaïques qu'il propose au présent congrès de l'AFAS permettent donc une présentation originale, esthétique et "ludique" du symbolisme de cette théorie. Il n'est pas question ici, et c'est exceptionnel, de « l'algèbre des faits géométriques de l'espace », comme outil de représentation de configurations géométriques ou de conceptualisations mécaniques. En revanche, le calcul sur les quaternions offre de nouvelles possibilités de combinaisons de symboles qui tranchent avec les règles de l'algèbre ordinaire (de part leur non-commutativité) et généralisent progressivement les propos précédents, fournissant de nouvelles symétries dans les mosaïques. C'est d'ailleurs ce que l'auteur rappelle immédiatement au sujet de la non-commutativité de la multiplication, fait indissociable des quaternions à chaque fois qu'ils sont abordés dans l'œuvre de Laisant.

La question est désormais de savoir lequel des huit termes possibles

$$1,\ \mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2,\ \mathrm{I}_3,\ -1,\ -\mathrm{I}_1,\ -\mathrm{I}_2,\ -\mathrm{I}_3$$

apparaît au rang N du développement de

$$(1 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)^p.$$

La démarche est cependant similaire à ce qui a été vu précédemment. Le développement de ce polynôme donne 4^p termes (de 1 à $\mathrm{I}_3{}^p$). Si on le multiplie une fois de plus par lui-même, on obtient 4^{p+1} termes :

$$\begin{array}{cccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{4^p} \\
\alpha_1\mathrm{I}_1 & \alpha_2\,\mathrm{I}_1 & \ldots & \alpha_{4^p}\,\mathrm{I}_1 \\
\alpha_1\,\mathrm{I}_2 & \alpha_2\mathrm{I}_2 & \ldots & \alpha_{4^p}\,\mathrm{I}_2 \\
\alpha_1\mathrm{I}_3 & \alpha_2\mathrm{I}_3 & \ldots & \alpha_{4^p}\,\mathrm{I}_3
\end{array}$$

L'observation de ce tableau permet à Laisant d'établir des relations que nous résumons sous la forme :

$$\alpha_{i.4^p+q} = \alpha_q.\,\mathrm{I}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Le système de numération à base 4 est donc utilisé de nouveau mais d'une manière différente de celle employée lorsque les termes du développement étaient les racines quatrièmes de l'unité. En notant β le premier chiffre à gauche (1, 2, ou 3) dans l'écriture à base 4 de N et M le nombre obtenu en supprimant ce chiffre, Laisant écrit l'ensemble des relations précédentes par

$$\alpha_\mathrm{N} = \alpha_\mathrm{M}\mathrm{I}_\beta.$$

Réitérant le processus, il obtient finalement

$$\alpha_N = I_3^{\,z}\, I_{\theta-1}\, I_\varphi \ldots I_\delta I_\gamma I_\beta$$

(avec $I_0 = 1$), avec z le nombre de zéros à droite et θ, φ, …δ, γ, β les divers chiffres entrant dans l'écriture de l'indice N.

Les résultats peuvent être présentés sur un échiquier à huit couleurs de côté 4^{2k}. Laisant donne pour exemple un échiquier de côté 4² cases soit 256 cases au total et remarque, Il précise : « On reconnaîtra aussi que l'échiquier est une véritable table de multiplication, à condition de prendre pour premier facteur le symbole de la première ligne, et pour second facteur le symbole de la première colonne »[1170].

1	I_1	I_2	I_3	I_1	-1	I_3	$-I_2$	I_2	$-I_3$	-1	I_1	I_3	I_2	$-I_1$	-1
I_1	-1	I_3	$-I_2$	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_3	I_2	$-I_1$	-1	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$
I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_1	-1	I_3	$-I_2$
I_3	I_2	$-I_1$	-1	I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$
I_1	-1	I_3	$-I_2$	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_3	I_2	$-I_1$	-1	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$
-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1
I_3	I_2	$-I_1$	-1	I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$
$-I_2$	I_3	1	$-I_1$	I_3	I_2	$-I_1$	-1	1	I_1	I_2	I_3	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2
I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_1	-1	I_3	$-I_2$
$-I_3$	$-I_2$	I_1	1	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$	$-I_1$	-1	I_3	$-I_2$	1	I_1	I_2	I_3
-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1
I_1	-1	I_3	$-I_2$	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_3	I_2	$-I_1$	-1	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$
I_3	I_2	$-I_1$	-1	I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$
I_2	$-I_3$	-1	I_1	$-I_3$	$-I_2$	$-I_1$	1	-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	I_1	-1	I_3	$-I_2$
$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	1	I_1	I_2	I_3	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1	I_2	$-I_3$	-1	I_1
-1	$-I_1$	$-I_2$	$-I_3$	$-I_1$	1	$-I_3$	I_2	$-I_2$	I_3	1	$-I_1$	$-I_3$	$-I_2$	I_1	1

Échiquier donné comme exemple par Laisant

Voulant appliquer les propriétés précédentes sur le nombre et la somme des rangs occupés par un symbole déterminé, il adapte ces résultats « en confondant, les symboles représentés par la même lettre ou le même chiffre avec le signes + ou – »[1171]. L'auteur dresse ensuite un nouvel échiquier à partir du précédent (chacune des quatre couleurs correspondra respectivement à ±1, ± I_1, ± I_2, ± I_3) et ne manque pas de souligner « la grande symétrie du dessin mosaïque ainsi obtenu, soit par rapport aux médianes, soit par rapport aux diagonales »[1172].

[1170] Ibid., p. 100.
[1171] Ibid. Ainsi la somme des rangs occupés par les symboles + 1 ou – 1 est égal à la somme des rangs occupés par les symboles $+I_1$ ou - I_1 .
[1172] Ibid.

TX Pl. III.

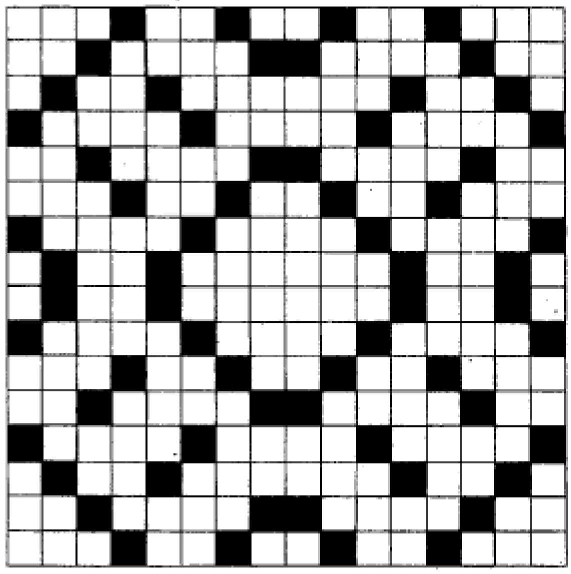


Fig 7

Figure proposée par Laisant (p = 2)[1173]

Un table de multiplication similaire, et particulièrement son mode de construction, sera réutilisée par Fontené en 1899 pour présenter son système de sept clefs à la Société mathématique de France, c'est-à-dire les octants « dernier terme du groupe « quantité complexe, quaternion, octant » »[1174]. Pour calculer les coefficients du produit de deux octants, il écrit le système correspondant et, se référant « au procédé de formation des mosaïques de M. Laisant »[1175], explique que les termes du calcul peuvent se retrouver par le même procédé présenté plus haut et l'utilisation de mosaïques et de ses mosaïques négatives.

De l'usage d'un nouveau systeme de numeration

Laisant en arrive finalement au terme de son exposé avec le problème général suivant : il considère q polynômes, P_i, chacun de degré n_i, dont le terme au rang[1176] r_i est noté k_i. Si on effectue soigneusement[1177] le produit $P_1P_2 \ldots P_q$, la question est de déterminer le rang R

[1173] Compte-rendu AFAS, 1881, pl. III, fig. 7.
[1174] [Fontené, 1899a], p. 171.
[1175] Ibid., p. 174.
[1176] Le rang d'un terme détermine la position de ce terme dans l'écriture du polynôme.
[1177] Par des multiplications à gauche, Laisant ne se plaçant pas nécessairement dans le cas d'une multiplication commutative.

qu'occupera un terme donné dans le développement et réciproquement, déterminer l'expression d'un terme de rang R donné.

Notons les difficultés de mise en forme de ce problème au niveau des indices, ce qui ne gêne pourtant pas la clarté du propos. Nous allons voir qu'une fois de plus la disposition du calcul (dans le développement du produit des polynômes) est déterminante dans la mesure où elle guide Laisant dans sa recherche d'une formule itérative solution. Mais surtout, l'intérêt de la résolution du problème réciproque est la mise en place d'un système de numération particulier qui montre une nouvelle fois, on l'a vu, l'intérêt de Laisant pour ces questions. C'est encore le choix du bon système de numération qui permet une résolution simple du problème, ainsi que l'ouverture sur d'autres applications possibles.

Laisant répond au problème direct dans un premier temps. Il dispose les termes du développement de deux polynômes P_1 et P_2 de degré n_1 et n_2 dans un tableau à n_1 colonnes et n_2 lignes. Cette présentation lui permet de trouver rapidement le rang du terme correspondant au produit k_1k_2 [1178]. Lors du développement du produit $P_1P_2P_3$, la recherche du rang du terme $k_1k_2k_3$ revient au problème précèdent car désormais le rang du terme k_1k_2 dans le polynôme P_1P_2 est connu. Un processus itératif se met donc en place et Laisant peut conclure quant au rang d'un terme quelconque $k_1k_2\ldots k_q$ dans le développement $P_1P_2\ldots P_q$

$$R = (r_q - 1)n_1n_2\ldots n_{q-1} + (r_{q-1} - 1)n_1n_2\ldots n_{q-2} + \ldots + (r_2 - 1)n_1 + r_1,$$

les r_i sont les rangs des termes k_i dans chacun des polynômes P_i de degré n_i.

La formule précédente va se révéler fondamentale pour la suite. Elle permet de résoudre le problème inverse en utilisant des arguments de numération. Laisant l'écrit :

$$R - 1 = (r_q - 1)n_1n_2\ldots n_{q-1} + (r_{q-1} - 1)n_1n_2\ldots n_{q-2} + \ldots + (r_2 - 1)n_1 + r_1 - 1$$

et l'interprète comme l'écriture du nombre R – 1 dans « un système de numération d'un genre particulier »[1179], c'est à nouveau un système de numération à base multiple, sujet dont il traitera également dans les ouvrages écrits en collaboration avec G. Arnoux. Les chiffres du nombre R – 1, soit

$$r_1 - 1, r_2 - 1, r_3 - 1, \ldots,$$

sont ainsi multipliés par

[1178] Ce rang est

$$(r_2 - 1)n_1 + r_1$$

où r_i est le rang des termes k_i dans le polynôme P_i.

[1179] [Laisant, 1881c], p. 103. Particulier dans le sens où « Les chiffres des unités successives des divers ordres doivent être multipliés non plus par les puissances successives

$$1, b, b^2, \ldots$$

d'un même nombre b, mais par des produits successifs

$$1, n_1, n_1n_2, \ldots$$

d'une suite de nombres généralement différents les uns des autres. »

$$1, n_1, n_1n_2, \ldots$$

Remarquons, comme Laisant, que si tous les polynômes du problème avait le même degré n, on obtiendrait un système de numération « ordinaire » à base n. Étant donné le rang R d'un terme à déterminer dans un développement, les restes des divisions successives par n_1, n_2 etc. permettent de déterminer le rang r_i de chacun des facteurs k_i composant ce terme dans leur polynôme respectif P_i. L'exemple de Laisant met en lumière l'efficience de son raisonnement : dans le développement du produit

$$(a + b + c)(d + e)(f + g + h + i)(j + k)(l + m + n + o + p)$$

qui compte 240 termes, le 118ème se trouve être *aeijn*[1180].

L'expression du rang R permet donc de répondre au problème réciproque posé par Laisant, mais également de démontrer un grand nombre de propriétés. Par considération des rangs des termes du développement, Laisant montre par exemple que le fait d'inverser l'ordre des termes dans chacun des polynômes P_i (sans changer l'ordre des polynômes entre eux) a pour effet d'inverser l'ordre des termes dans le développement final. Il étudie de même les conséquences d'une permutation circulaire des termes d'un seul polynôme ou au contraire de l'ordre globale de tous les polynômes.

Nous signalons l'intéressante application de cette dernière généralisation à l'étude des diviseurs d'un nombre. Soit la décomposition en facteurs premiers (rangés dans l'ordre croissant) d'un nombre M :

$$M = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}m^{\mu}.$$

Laisant s'intéresse alors au développement du produit

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \ldots + b^{\beta})\ldots(1 + m + m^2 + \ldots + m^{\mu})$$

qui « donnera non seulement la somme, mais en quelque sorte, un classement des diviseurs du nombre M, dont chacun aura un rang déterminé qui suffira pour le distinguer de tous les autres »[1181]. Il explique alors qu'on retrouve le problème précédent[1182] où « le système de numération à base multiple » permet de déterminer le rang d'un diviseur donné dans le classement induit par le développement du produit précédent.

[1180] R – 1 = 117 dont les divisions par 3, puis 2, 4 et 2 donne 0 1 3 0 2
d'où les rangs des symboles à choisir 1 2 4 1 3.

[1181] Op. cit., p. 107.

[1182] Ayant choisi un diviseur quelconque $a^{\alpha'}b^{\beta'}\ldots m^{\mu'}$, il convient de poser :

$$n_1 = \alpha + 1 \text{ etc. et } r_1 = \alpha' + 1 \text{ etc.}$$

Le rang R du diviseur vérifie alors :

$$R - 1 = \alpha' + \beta'(\alpha + 1) + \gamma'(\alpha + 1)(\beta + 1) + \ldots + \mu'(\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots(\lambda + 1).$$

Réciproquement, Laisant montre sur un exemple comment déterminer le 267e diviseur d'un nombre qui en compte 360 avant de souligner « l'utilité qu'elles [ces notions] seraient peut-être à même d'offrir, au point de vue de la théorie des nombres » (p. 108).

La conclusion de cette communication résume les idées qui sous-tendent les réflexions précédentes :

> *Il nous semble seulement utile, en terminant, de faire remarquer la nature particulière des questions que nous avons traitées dans cette étude et qui se distinguent de celles dont on s'occupe le plus souvent, en ce sens que la notion de* place *ou de* classification *y domine la notion de grandeur ou de rapport.*[1183]

Si Laisant ne relie pas cette communication à la géométrie de situation, les termes employés dans ces lignes sont clairs et renvoient explicitement à ce chapitre tel qu'il est envisagé au cours du XIX^e^ siècle. D'ailleurs, l'auteur cite pour conclure Poinsot dont les *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* semblent l'avoir guidé dans sa réflexion :

> *Les mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas uniquement en vue la proportion ou la* mesure *; il peut encore considérer les nombres en lui-même, l'*ordre *et la* situation *des choses, sans aucune idée de leurs rapports, ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent.*[1184]

La notion d'ordre, via, par exemple, les rangs d'un facteur dans une somme ou les systèmes de numération employés, a en effet été étroitement associée à une représentation visuelle dans le plan dépourvu de toute métrique. Dans ce sens, les règles de calculs ont été remplacées par des figures qui, tout en étant aussi explicites, synthétisent d'un regard les propriétés visées, dégagent des symétries dans la figure et donc dans les propriétés et présentent des caractéristiques harmonieuses propres à susciter l'intérêt du public des congrès de l'AFAS.

III.3. Géométrie des quinconces, « la peinture graphique de la théorie des nombres »

L'intérêt d'une petite communauté, dont fait partie Laisant, pour la géométrie dite « des quinconces » est à rapprocher des questions de réseaux constitués de points régulièrement disposés dans le plan ou l'espace qui se développent au cours du XIX^e^ siècle. Le thème trouve un écho particulier avec la cristallographie et la géométrie de tissage, notamment développée par Lucas. Eugène Catalan est une autre figure qui participera, comme l'ingénieur des mines A. Badoureau[1185], à ce mouvement lié au problème de pavages du plan.

[1183] [Laisant, 1881c], p. 108.
[1184] Poinsot, 1845], p. 3.
[1185] [Badoureau, 1881], Badoureau A., "Mémoire sur les figures isocèles", *Journal de l'École polytechnique*, 30, 1881, p. 47-172.

PREMIERE NOTE SUR LA GEOMETRIE DES QUINCONCES

Cette « Note sur la Géométrie des quinconces » est insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* au début de la carrière de Laisant (1878) et révèle tout l'intérêt que ce dernier porte rapidement à ces questions. La géométrie des quinconces est emblématique de ces travaux où arithmétique et figures du plan s'entremêlent ; elle est représentative "d'une forme d'analysis situs" que pratique Laisant sans référence explicite à la géométrie de situation. Elle est également représentative de l'influence d'Édouard Lucas sur Laisant : si les points de vue des deux hommes diffèrent (arithmétique pour Lucas et géométrique pour Laisant), l'objet d'étude demeure, celui des réseaux plans et de l'application possible de cet outil en théorie des nombres.

Dans cette « Note sur la Géométrie des quinconces » ([Laisant, 1878f]), Laisant reprend principalement le résultat suivant de Lucas, exposé également auprès de la SMF[1186] :

> *Les centres de trois cases d'un échiquier de grandeur quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier.*

Laisant montre en fait celui-ci :

> *Tout triangle, ayant pour sommets les centres de trois cases quelconques d'un échiquier de grandeur quelconque, présente trois angles dont les tangentes sont commensurables.*[1187]

Dans un repère dont les axes AX et AY sont parallèles aux côtés des cases, les coordonnées des sommets du triangle ABC placés au centre des cases sont des nombres entiers. À l'aide d'un calcul trigonométrique élémentaire (l'article est dépourvue de figure), il montre que la tangente de l'angle BAC est un nombre rationnel, en remarquant que

$$BAC = BAX + CAX$$

ou que

$$BAC = BAX - CAX$$

et que les tangentes des différents angles en question sont rationnelles.

Le raisonnement de Lucas s'appuyait au contraire sur un résultat de décomposition en somme de deux carrés. Ce dernier reconnaît d'ailleurs que la démonstration de son ami est « très élégante, beaucoup plus simple et plus générale, convenant à tous les polygones »[1188].

[1186] [Lucas, 1878a] voir aussi [Lucas, 1878c], Lucas, Édouard, "Théorème sur la géométrie des quinconces", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 17, 1878, p. 129-130.

[1187] [Laisant, 1878f], p. 157.

[1188] Observation extraite d'une contribution de 1880 à la revue turinoise l'*Ingeniere Civile* portant sur les principes fondamentaux de la géométrie des tissus et traduite en 1911 à l'occasion d'un congrès de l'AFAS [Lucas, 1911], p. 83.

Laisant en vient ensuite aux « figures inscriptibles » dans l'échiquier, c'est-à-dire à toute « figure composée de lignes droites passant chacune par deux centres de cases »[1189]. Il explique que les carrés des côtés et des diagonales d'un polygone inscriptible sont commensurables entre eux avant d'annoncer : « On pourrait sans doute établir encore de nombreuses propriétés de ces figures inscriptibles, et il est probable que quelques-unes d'entre elles seraient de nature à fournir des théorèmes sur les nombres. »[1190] Le but poursuivi par l'auteur ici, comme souvent dans ses travaux sur la géométrie des quinconces, est de reprendre des résultats d'un point de vue géométrique, de souligner la pertinence d'une représentation graphique dans une visée cognitive voire expérimentale, plus que justificative, et les liens que le dessin peut tisser avec une théorie concurremment à ses développements symboliques[1191].

Pour appuyer son propos, il souligne le lien entre la géométrie des quinconces et les nombres de la forme $x + yi$, ce qu'on appelle l'anneau des entiers de Gauss Z[i]. Ce lien est possible grâce au repère qu'il a établi quelques lignes plus haut. Il redémontre ainsi le théorème dû à Lucas : « le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés. » ([Lucas, 1878a]). Pour cela, il considère le triangle OBC directement semblable au triangle OIA où I est l'unité sur l'axe OX et affirme que si A et B sont au centre de cases, C l'est aussi[1192].

La réflexion de Laisant, cette volonté de rapprocher sans cesse des résultats « visibles » sur un réseau et des propriétés de la théorie des nombres, est quant à elle annonciatrice de travaux postérieurs sur la géométrie des quinconces et ses applications aux fractions périodiques, sujet qu'il avait eu l'occasion d'appréhender lors de sa collaboration avec É. Beaujeux ([Laisant et Beaujeux, 1868]). Inspiré par un problème de Lucas, il présentera, comme nous le verrons, une illustration « originale » de la décomposition d'une fraction périodique, près de dix ans plus tard au congrès de l'AFAS de 1887. L'objectif poursuivi est double : montrer que le réseau offre un support visuel de réflexion adapté aux investigations en théorie des nombres et illustrer le fait que cette transcription éclaire le sens des propriétés étudiées et permet de s'adresser à un public plus large.

1189 [Laisant, 1878f], p. 158.

1190 Ibid., p. 157 : « Les considérations relatives à cet ordre d'idées seraient peut-être d'un certain secours dans la théorie des nombres, et pourraient fournir la matière de recherches intéressantes ».

1191 [Mancosu, 2005], p. 13-15.

1192 Nous pouvons alors écrire que la similitude implique OC = OB.OA et donc $OC^2 = OB^2.OA^2$, le carré de chacune de ces longueurs étant la somme de deux entiers au carrés correspondants aux coordonnées des points considérés.

Laisant ou Lucas font parti de ce mouvement qui s'exprime en particulier dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* autour des questions de réseaux ou de pavages. Signalons à ce sujet l'avis d'Ernest Laquière, avis qui permet d'esquisser les contours d'une communauté, qui, à la SMF, vont participer à la réflexion sur ces questions de géométrie de quinconces :

> *Le Bulletin de 1878 contient divers articles fort intéressants de MM. Lucas, Laisant et de Polignac sur cette Géométrie, qui n'est autre, à proprement parler, que la peinture graphique de la théorie des nombres, à laquelle elle semble appelée à rendre les mêmes services que la Géométrie pure, ou le raisonnement sur les figures, rend à l'Algèbre ordinaire.*[1193]

Il est amusant de retrouver le personnage d'Ernest Laquière qui, une nouvelle fois, partage des centres d'intérêts proches de ceux de Laisant, des équipollences à la géométrie des quinconces. Autour de l'échiquier, on lui doit principalement, toujours pour la SMF, les « Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier »[1194].

Camille de Polignac, quant à lui, est l'auteur la même année d'une communication intitulée « Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$ » ([de Polignac, 1878]) dans laquelle il fait effectivement référence aux apports de Laisant et Lucas ([Lucas, 1878a] et ([Laisant, 1878e]). Camille Armand Jules de Polignac (1832-1913) s'est principalement illustré sur le champ de bataille lors de la guerre de Sécession mais cultive les mathématiques à son retour en France. Il est membre (perpétuel) de la SMF depuis 1872. Il est parfois difficile de discerner ses publications dans le *Bulletin* de la Société [1195] de celles d'Alphonse de Polignac, son demi-frère.

Alphonse de Polignac, né à Londres en 1826, a été, comme Laisant, élève de l'Institut Sainte-Barbe puis de l'École polytechnique (X 1849). Ce capitaine d'artillerie est l'auteur de *Recherches nouvelles sur les nombres premiers* (1851) et de plusieurs articles en théorie des nombres parus entre autre dans les *Nouvelles annales de mathématiques*[1196]. On lui doit la « conjecture de Polignac » : tout nombre pair est la différence de deux nombres premiers

[1193] [Laquière, 1879], p. 85.

[1194] *BSMF*, 8, 1880, p. 82-102 et p. 132-158. Signalons aussi "Note sur le nombre des marches rentrantes, que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total", *BSMF*, 9, 1881, p. 11-17.

[1195] Note sur les substitutions linéaires. 4 (1875-1876), p. 120-127 ; Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^n$, 3 (1875), p. 19-27 ; Recherches sur la divisibilité du nombre $1.2\ldots nx/((1.2\ldots x)^n$ par les puissances de la factorielle $1.2\ldots n.$, 32, 1904, p. 5-43.

[1196] "Note sur une propriété des nombres cubiques", *NAM*, Sér. 1, 8, 1849, p. 215.
"Six propositions arithmologiques déduites de crible d'Ératosthène", *NAM*, Sér. 1, 8, 1849, p. 423-429.
"Note sur une propriété des nombres cubiques", *NAM*, Sér. 1, 8, 1849, p. 215-215.
"Notice historique sur le crible d'Eratosthène", *NAM*, Sér. 1, 12, 1853, p. 429-432.

consécutifs et ce d'une infinité de façons[1197]. Cette conjecture a été établie à l'aide de la notion de suite diatomique à laquelle Laisant consacre un article dans *La Grande Encyclopédie*. Laisant y écrit au sujet de ces suites que « de là résultent de nombreuses et intéressantes conséquences (…) concernant cette théorie si difficile et encore peu avancée des nombres premiers »[1198], sujet auquel Laisant s'intéresse ponctuellement comme nous le verrons au sujet de sa vérification de la conjecture de Goldbach.

La peinture graphique présentée à la SMF traite donc principalement d'arithmétique diophantienne. La géométrie des quinconces offre l'avantage indéniable de fournir un support visuel au calcul algébrique. L'observation de la figure complète les manipulations d'égalités. Et ce, notamment dans le cas de la résolution d'équations, comme Laisant ne manquera pas de le souligner au public des congrès de l'AFAS.

FIGURES INSCRIPTIBLES ET GEOMETRIE DES QUINCONCES

Le congrès de l'AFAS en 1887 concrétise l'intérêt de Laisant pour la géométrie des quinconces. Il présente lors de la séance du 28 septembre ses « Quelques applications arithmétiques de la géométrie des quinconces » ([Laisant, 1887d]). Là encore, la figure d'É. Lucas est très présente puisqu'avec son article « Problème sur la géométrie des quinconces » paru en 1877 dans la *Nouvelle correspondance mathématique*[1199], ce dernier est à l'origine des recherches de Laisant sur les conditions pour qu'un parallélogramme inscrit dans un réseau soit un losange, un rectangle ou un carré. De plus, l'objectif poursuivi semble bien être de montrer, comme il l'écrit en conclusion de sa communication, que :

> *dans bien des cas l'emploi des échiquiers, de réseaux et des diagrammes dont nous avons indiqué les constructions peuvent être de nature à éviter de fastidieux calculs, aider à la recherche de propriétés nouvelles, et rendre notamment de réels services dans la théorie des résidus des puissances, et dans celle des racines primitives*[1200].

Nous rapprochons cette remarque de la conception de la géométrie des nombres par Hermann Minkowski. L'auteur de la *Geometrie der Zahlen* explique en 1893 que « dans la théorie des nombres, comme dans chacun des autres domaines de l'Analyse, la découverte a

[1197] *Compte rendu des séances de l'*Académie des sciences, Tome 29, p. 400 (Séance du lundi 15 octobre 1849). Voir aussi Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and Primality.* New York: Dover, 2005. Sa conjecture affirmant que tout nombre impair est égal à une puissance de deux plus un nombre premier s'est par contre révélée fausse malgré une vérification annoncée jusqu'à trois millions.

[1198] Article « diatomique », [Berthelot & al., 1885], t. 14, p. 456.

[1199] Lucas É., "Problème sur la géométrie des quinconces", *Nouvelle correspondance mathématique,* t. 33, 1877, p. 412-413.

[1200] [Laisant, 1887d], p. 235.

lieu fréquemment au moyen de considérations géométriques, tandis qu'ensuite les vérifications analytiques sont peut-être seules communiquées. »[1201] Ce qu'il entend par « considérations géométriques », c'est la géométrie en tant que représentation visuelle des phénomènes étudiés. Les idées de Laisant sur la géométrie des quinconces sont proches de l'« Anschauung » de Minkowsky, c'est-à-dire une valorisation de l'intuition, mais l'intuition du regard, l'intuition de l'espace[1202]. Avec la géométrie des quinconces, Laisant dispose, comme Minkowsky selon une expression de F. Klein, d'une « méthode intuitive »[1203] et simplificatrice par rapport aux notions abordées.

Ces travaux s'inscrivent également dans un mouvement propre à l'AFAS, notamment depuis le Congrès de Nancy de l'année précédente marqué par les travaux de Tarry[1204] ou de Delannoy[1205]. Lucas lui-même prolonge, dans sa communication « Géométrie des réseaux » [1206], les idées de Tarry et dénombre le nombre de tracés de figures que l'on peut réaliser en *n* traits au maximum. Delannoy, Tarry sont donc deux noms à ajouter à ceux de Laquière, de Polignac, de Laisant et de Lucas cités précédemment pour la communauté de la géométrie des quinconces. Remarquons que Lucas et Laisant sont les seuls à publier à la fois dans le *Bulletin* de la SMF que dans les *Comptes rendus* de l'AFAS. Gaston Tarry ne publie pas dans le *BSMF* (mais dans les *Nouvelles annales*) et Delannoy assez peu également ou uniquement sur des questions de probabilités, sans référence à la géométrie des quinconces[1207]. Réciproquement, Laquière et Camille de Polignac, s'ils sont bien présents à l'AFAS, n'abordent pas le sujet de la géométrie des quinconces lors des congrès de l'Association[1208]. Si les travaux de Laisant et de Lucas sur les réseaux apparaissent aussi bien dans le *Bulletin* de la SMF que dans les *Comptes rendus* de l'AFAS, c'est que les deux hommes visent à la

[1201] Voir sa conférence à l'exposition de Chicago en 1896 cité dans [Gauthier, 2007] et [Gauthier, 2009a].

[1202] [Gauthier, 2007], p. 135-137.

[1203] Ibid., p. 139. Voir Minkowski Hermann, "Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, pp.393 ‑ 403.

[1204] [Tarry, 1886], Tarry Gaston, "Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées", AFAS, Nancy, 1886/2, p. 49-53. Voir aussi Tarry, Gaston, "Le problème des labyrinthes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 14, 1895, p. 187-190 et [Berge, 1967], p. 66.

[1205] Delannoy, "Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques", AFAS, Nancy, 1886/2, p. 183.

[1206] Lucas É., "Géométrie des réseaux", AFAS, Toulouse, 1887/1, p. 173.

[1207] Exclusivement : « Sur la probabilité des événements composés » (*BSMF*, 26, 1898, p. 64-70), « Sur une question de probabilité traitée par d'Alembert » (*BSMF*, 23, 1895, p. 262-265, note transmise par Laisant) et « Sur la durée du jeu » (*BSMF,* 16, 1888, p. 124-128). Delannoy est membre de la Société depuis 1882, élu le 1er décembre après avoir été présenté conjointement par Lucas et Laisant.

[1208] Les communications présentées par exemple aux Congrès de Reims (1880) ou d'Alger (1881) traitent de récréations mathématiques, d'étude de courbes, de la pensée géométrique mais a priori pas de géométrie des quinconces.

fois les progrès de cette discipline et donc usent des canaux "professionnels" tout autant que sa diffusion auprès d'un public plus large.

Pour son exposé, Laisant s'appuie sur les progressions arithmétiques et prend pour point de départ la « figuration des résidus d'une progression par différence » de *p* termes :

$$a + r,\ a + 2r,\ \ldots,\ a + pr,$$

d'une manière similaire à son « Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques » ([Laisant, Beaujeux 1870]). Les considérations sur ces suites arithmétiques se prolongent jusqu'en 1909 où il présente « Une propriété des progressions par différence » ([Laisant, 1909a][1209]) aux membres de la Société philomathique de Paris.

Dans l'exposé au congrès de l'AFAS, Laisant construit un réseau en plaçant les points dont l'abscisse est le rang d'un terme de cette suite arithmétique de raison r et dont l'ordonnée est le reste de la division de ce terme par un nombre p choisi premier avec r. L'auteur choisit le premier terme égal à zéro et se ramène au cas $r < p$ (et même $r < p/2$) par symétrie du réseau. Chacun de ces restes prend une valeur parmi $0, 1, \ldots, p - 1$. Ainsi, « il est aisé de voir que ces points se trouvent placés en quinconces, aux sommets de parallélogrammes »[1210]. En appelant réseau p_r l'ensemble de ces points, il obtient un réseau illimité du plan, dont le motif inscrit dans le carré de côté p se reproduit dans les deux directions du plan. Ce motif est dès lors appelé « échiquier *p* »[1211] par Laisant. Cette possibilité de représenter tout un réseau dans une figure de dimension finie sera en outre soulignée comme essentielle : elle est la première étape d'une contraction d'un réseau plan entier à un contour borné, procédé qui s'achèvera comme nous allons le voir par la détermination du triangle type.

L'auteur explique de plus qu'un tel réseau peut être représenté « sous une forme assez saisissante »[1212] en plaçant les points de coordonnées entières sur la droite d'équation

$$y = rx$$

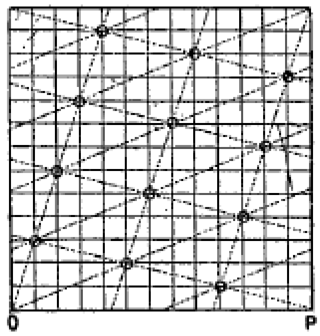
et en faisant glisser les r différents échiquier traversés par cette droite sur le premier. Nous proposons une version modifiée d'une figure proposée par Laisant dans le cas $p = 13$ et $r = 3$.

1209 En considérant la progression des nombres impairs et en formant des groupes successifs de un, deux, trois... termes, Laisant remarque que « la somme des termes du groupe de rang p qui contient p termes est égal à p^3. » Il généralise le problème à une progression par différence (suite arithmétique) quelconque dont les termes successifs sont rassemblés dans des groupes dont le cardinal est donné par une deuxième progression par différence quelconque. Il démontre alors la formule donnant le somme des termes d'un groupe de rang quelconque.

1210 [Laisant, 1887d], p. 219.

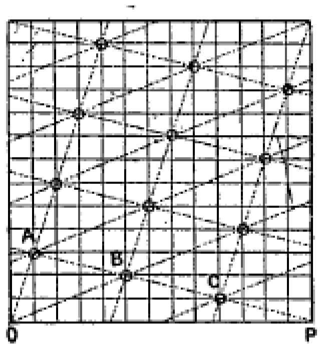
1211 Ibid., p. 220. Il « donne le type de réseau illimité facile à former, en partant de là, dans toute l'étendue du plan. » (p. 119). Les sommets du carrés sont par ailleurs des points du réseau.

1212 Ibid., p. 219.



Échiquier 13 pour le réseau 13_3

Plus que l'échiquier *p*, Laisant associe à un réseau un « triangle type ». Il peut s'agir du triangle OAB où A a pour coordonnées $(1 ; r)$ et $B(q + 1 ; r - \rho)$ où q et ρ sont respectivement le quotient et le reste de la division de p par r. B est ainsi le premier point de la droite $y = rx$ à sortir de l'échiquier d'origine avant d'être ramené dans celui-ci selon le principe de construction exposé plus haut. Le triangle OAB ne contient aucun point du réseau : il pourrait donc être utilisé pour répondre au problème initial qui, rappelons-le, est de chercher les conditions pour qu'un quadrilatère inscrit dans un réseau soit particulier.



Triangle type du réseau 13_3 proposé par Laisant[1213]

Ce procédé ne lui paraissant pas satisfaisant (les triangles types obtenus peuvent n'être pas naturellement représentatifs du réseau pour certaines valeurs de *p* et *r*), il le généralise à la recherche d'un triangle type OB_kB_{k+1} formé par l'origine et deux points de divisions successives (c'est-à-dire deux points successifs sur la droite AB) qui soit intégralement compris dans l'échiquier *p*.

Remarquons que, pour la résolution de ce problème, Laisant emploie à nouveau la méthode des équipollences « d'un emploi fort commode »[1214]. On a en effet

$$AB_k = kAB,$$

$$OA = 1 + ri$$

$$OB = q + 1 + (r - \rho)i.$$

[1213] Ibid., p. 221.
[1214] Ibid.

Laisant en déduit

$$\mathrm{AB} = q - \rho i$$

$$\mathrm{OB}_{k+1} = 1 + (k+1)q + (r - (k+1)\rho)i$$

et la condition pour que B_{k+1} reste dans l'échiquier p :

$$r - (k+1)\rho > 0$$

qui permet de trouver la valeur extrême de k possible. Le cas $k = 0$ revient à choisir pour triangle type le triangle OAB initial.

La même utilisation des équipollences, et plus précisément de la formule fondamentale sur l'aire d'un triangle, permet de montrer que l'aire du parallélogramme inscrit est précisément le module p. L'aire d'un parallélogramme est en effet le double de celle du triangle OAB soit

$$\frac{i}{2}(\mathrm{AB\ cj.\ OA} - \mathrm{OA\ cj.\ AB}) = rq + \rho = p.$$

L'obtention de ce triangle type permet de résoudre le problème initial (dans le cas où le parallélogramme considéré ne contient aucun point du réseau). Le réseau p_r sera ainsi constitué de losanges si le triangle type est isocèle : trois cas sont envisagés suivant que le triangle type est isocèle en O, B_k ou B_{k+1}, soit autant de conditions reliant r, q et ρ.

Pour que $\mathrm{OB}_k = \mathrm{OB}_{k+1}$, Laisant obtient, si OAB est le triangle type,

$$q(q+2) = \rho(2r - \rho)$$

et donne pour exemple la figure suivante :

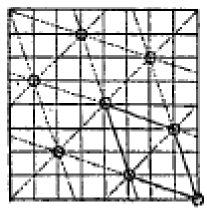


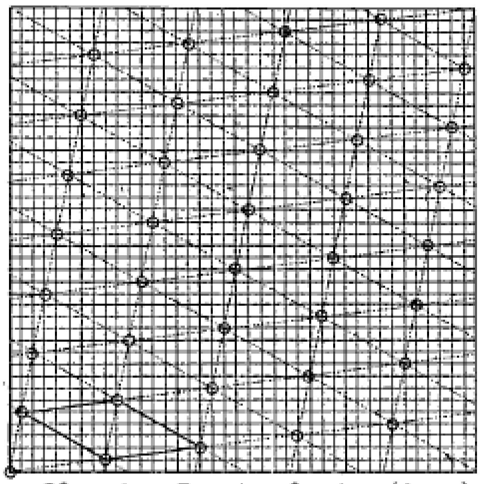
Figure proposée par Laisant p = 8, r = 3[1215].

Les deux autres possibilités aboutissent aux relations suivantes :

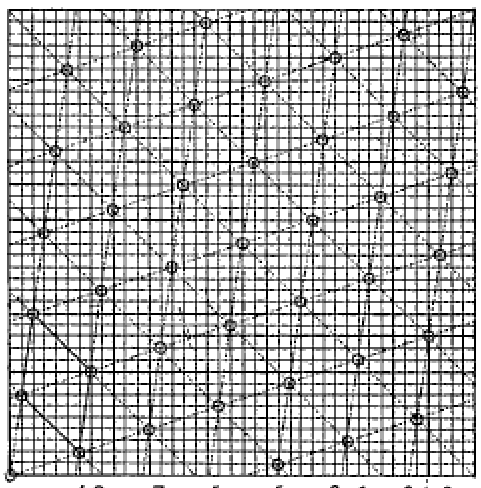
$$r^2 + 1 = q^2 + \rho^2,\ 2q + 1 = r(2\rho - r).$$

Laisant propose les exemples suivants[1216] :

[1215] Ibid., p. 223.
[1216] Ibid., p. 223.



$p=39,\ r=5,\ q=7,\ \rho=4,\quad 2q-1=r\,(2\rho-r)$

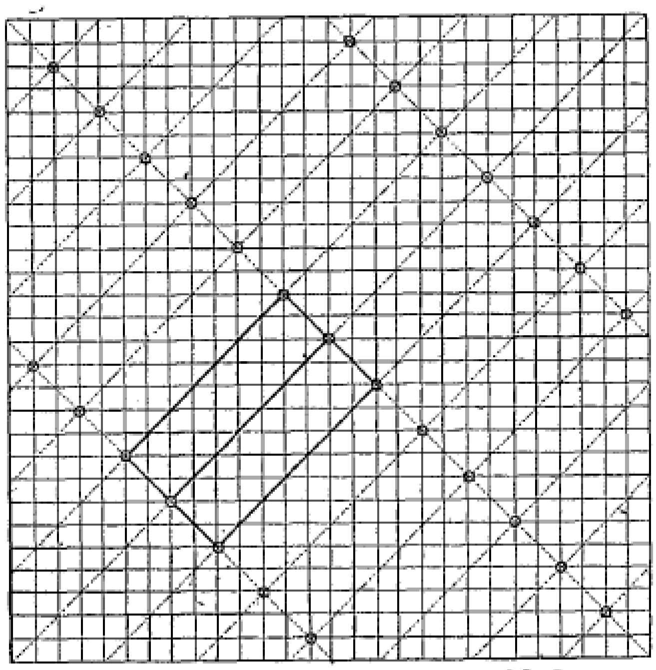


$p=40,\ r=7,\ q=5,\ \rho=5\quad r^2+1=q^2+\rho^2$

Pour savoir si le parallélogramme inscrit est un rectangle, une démarche analogue l'amène à envisager le cas où le triangle type est rectangle en B_k ou B_{k+1} (le cas où celui-ci l'est en O, bien que traité, est marginal). Il obtient essentiellement la relation suivante (cas de l'angle droit en B_k) :

$$\frac{r-k\rho}{1+kq}=\frac{q}{\rho}$$

et propose plusieurs exemples dont celui-ci[1217] :



$p=28,\ r=13,\ q=2,\ \rho=2,\ k=3,\quad k=\frac{r\rho-q}{\rho^2+q^2}$

[1217] Ibid., p. 224.

Le cas du carré est ensuite traité rapidement en s'affranchissant des contraintes imposées au triangle type OB_kB_{k+1} d'être entièrement dans l'échiquier p, ce qui permet l'économie de l'étude de cas particuliers.

LA FIGURATION DES FAITS ARITHMETIQUES

La question soulevée par Lucas étant à présent résolue, c'est l'utilité de ces réseaux « d'un grand secours dans bien des questions d'arithmétique »[1218] qui intéresse surtout Laisant. Pour une valeur de p raisonnable, la construction du réseau permet de déduire par lecture graphique les résidus calculés en début d'exposé mais bien plus encore.

Résolution de multiples équations diophantiennes

Ce même réseau une fois construit permet de déterminer « à vue pour ainsi dire »[1219] la résolution d'équation de la forme

$$rx - pz = a.$$

Chaque point du réseau a en effet pour coordonnées (x ; $rx - pz$). Laisant donne l'exemple de l'équation $7x - 40z = 3$. Sur la troisième figure associée à la recherche de losange, la solution est représentée par le point de coordonnées (29 ; 3) d'où

$$x = 3 \; ; y = 29 \text{ et } z = 5,$$

cette dernière valeur trouvant elle-même une interprétation sur l'échiquier. Si $p < a$, un changement de variable permet d'appliquer le même procédé. Si $a < 0$, la lecture de l'échiquier doit être modifiée et si $p < r$, c'est le réseau r_p qu'il faut alors construire.

Les équations de la forme $rx + pz = a$ nécessitent elles aussi un changement de variable. Remarquons que C. de Polignac a donné en 1878 un autre moyen de résolution de ce type d'équations à l'aide d'un échiquier ([de Polignac, 1878]), la particularité de Laisant étant l'exhaustivité des questions auxquelles son procédé peut s'appliquer. Enfin, chaque point du réseau fournit une solution aux équations $y - rx \equiv 0$ ou $qy + \rho x \equiv 0$ (mod. p). Et Laisant de conclure :

> *ce qu'il faut surtout retenir de cet emploi des échiquiers et des réseaux, c'est la figuration dans un espace limité de faits arithmétiques qui se reproduisent périodiquement dans l'étendue infini du plan.*[1220]

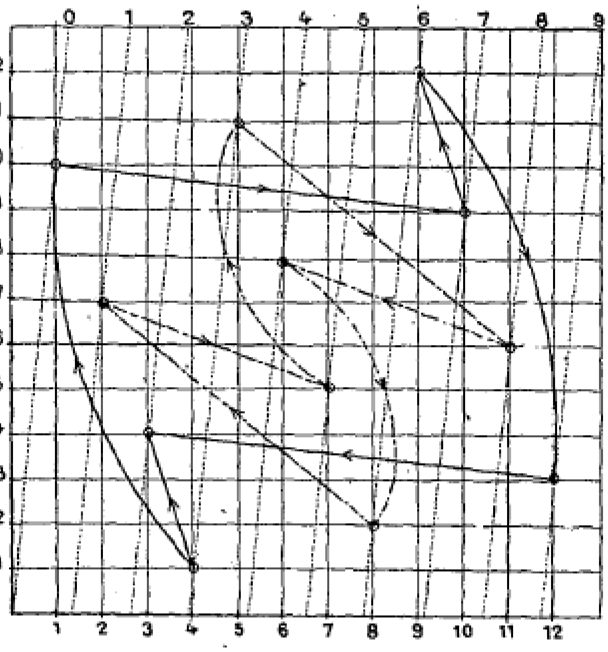
1218 Ibid.., p. 227. À ce sujet voir [Aubry, 1911].
1219 [Laisant, 1887d], p. 228. Voir aussi [Dickson, 1919], vol. II, p. 52.
1220 Ibid., p. 228.

C'est ce que nous avions signalé quant à l'importance de l'échiquier p : l'échiquier se révèle être la transcription visuelle d'un phénomène de congruence sur les résidus et le procédé de découpage de la droite $y = rx$ trouve ici tout son intérêt.

Une « représentation assez curieuse des fractions périodiques »[1221]

Dans cette dernière partie, aucun développement théorique n'est présenté. Une succession d'exemples suffit à une présentation généralisable de la méthode employée, ce qui est exceptionnel chez Laisant. Là encore, la volonté de se concentrer sur la figuration de la démarche, la visualisation de l'algorithme et l'adéquation au public des congrès de l'AFAS peuvent expliquer ce choix.

Le premier exemple fourni dans cette dernière partie est celui de l'écriture en base décimale des chiffres apparaissant de manière périodique dans l'écriture décimale de la fraction $\frac{1}{13}$. Pour cela, Laisant utilise le réseau 13_{10} : p doit être en effet le numérateur de la fraction et r la base du système de numération utilisé. La droite d'équation $y = 10x$ est segmentée ; chaque portion est numérotée et replacée dans l'échiquier 13 selon le principe expliqué en début d'exposé. Laisant semble compléter graphiquement la méthode arithmétique décrite dans un article de 1868 écrit en collaboration avec É. Beaujeux ([Laisant, Beaujeux, 1868]). Il obtient un cycle fermé de parcours des différents points de l'échiquier[1222] dont les abscisses correspondent aux chiffres demandés.



[1221] Ibid.

[1222] Op.cit., p. 229. Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 173.

Il écrit donc en suivant la ligne en trait plein :

$$\frac{1}{13} = 0,\underline{07692}307\ldots$$

De la même manière, il obtient en suivant la courbe en pointillé :

$$\frac{2}{13} = 0,153846\ldots$$

Laisant résume : « tout ceci est une conséquence simple de ce qui précède, et de la généralisation des fractions périodiques dans ce qu'elle a de plus élémentaire. »[1223] L'usage des réseaux, tels qu'ils sont présentés pour répondre au problème de Lucas, semble particulièrement bien adapté à la "peinture graphique" de propriétés des fractions périodiques étudiées vingt ans auparavant.

À travers ces exemples, C.-A. Laisant cherche bien à montrer, sans les théoriser, les avantages de telles représentations dans le domaine de l'arithmétique. Le regard du lecteur se laisse guider à travers le réseau réduit à un échiquier ; les résultats arithmétiques sont couchés sur le papier à l'aide d'une démarche graphique, rendant plus aisée leur mise en œuvre, voire leur généralisation. C'est aussi dans ce sens que Laisant rappelle pour finir les travaux de Delannoy et de Tarry (toujours pour l'AFAS) qui « dans un ordre d'idées tout à fait différent »[1224] participent néanmoins d'une même volonté de tirer avantage de divers supports visuels.

III.4. Diverses représentations de nombres

III.4.1. De l'usage des équipollences pour représenter un nombre

Deux articles reprennent l'utilisation des équipollences dans le cadre de la représentation de nombres particuliers. Une fois de plus, la souplesse d'utilisation du calcul de Bellavitis permet son réinvestissement dans certains thèmes récurrents chez Laisant (triangles semblables, coefficients binomiaux par exemple).

[1223] Op.cit., p. 229.
[1224] Ibid., 235.

REPRESENTATION ET TRIANGLE SEMBLABLE : LE RETOUR DES EQUIPOLLENCES

L'article « Construction graphique de nombres transcendants » ([Laisant, 1888g]) est paru dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* à l'occasion du centenaire de cette Société fondée en 1788, ce qui en souligne en partie son intérêt. Laisant en est membre depuis 1878 mais n'a fourni depuis qu'une contribution à son *Bulletin*[1225]. L'article en question peut marquer la volonté de son auteur de s'investir dans cette société, il deviendra par ailleurs président de cette « antichambre de l'Académie des sciences » l'année suivante en 1889 (nous aurons l'occasion de préciser l'activité du mathématicien au sein de cette Société dans la dernière partie de ce mémoire).

Nous étudions cette contribution dans la mesure où elle marque un intérêt toujours présent pour la méthode des équipollences, y compris dans ses relations avec les questions de représentations graphiques. Nous voyons surtout à travers sa conclusion une réflexion sur la précision à attendre d'une représentation graphique et sur le lien entre exactitude de la méthode utilisée et limite matérielle de son exécution. Laisant construit ici géométriquement les termes du développement :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Il porte pour cela sur un axe les quantités OA = 1, AB = z dans un sens et de l'autre les quantités qu'il note O1, 12, 23… puis construit les triangles ABC, BCD et CDE respectivement semblables à 1AB, 2AB, et 3AB. Il obtient donc une suite de droites OA, AB, BC, CD, DE dont le quotient de deux termes successifs u_n, u_{n+1} vaut

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z}{n}.$$

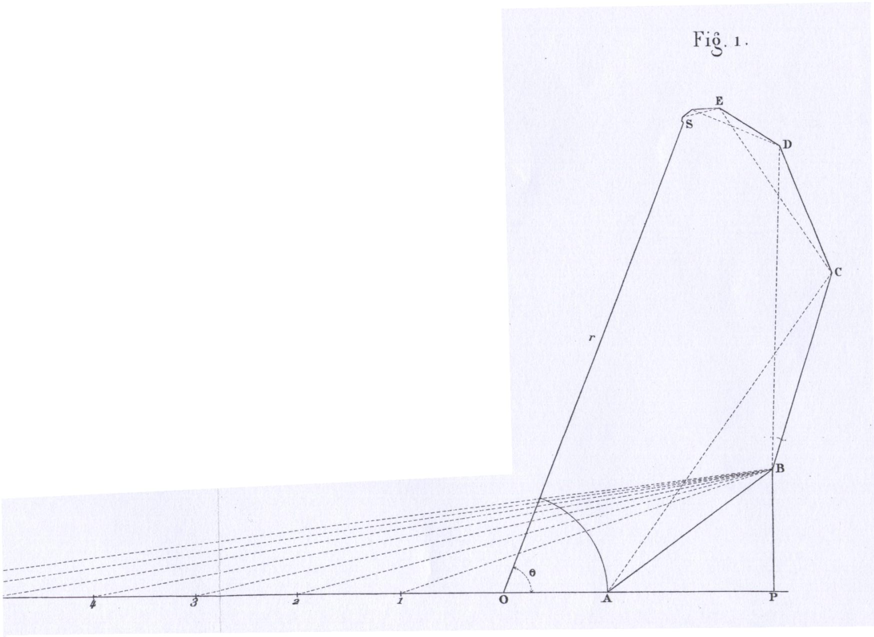
C'est la similitude des triangles qui autorise d'écrire aisément l'équipollence précédente et la théorie des équipollences permet de s'assurer que la somme des droites ainsi construites tend vers e^z. « Il est aisé de voir que les points C, D, E, …, obtenus de la sorte, convergent graphiquement d'une manière rapide vers une limite S, qui sera obtenue avec toute la précision que comportent les procédés du dessin géométrique, pourvu que l'on ait poussé la construction assez loin. »[1226]

[1225] [Laisant, 1879e], "Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 7, t. 3, Paris, 1879, p. 82-84.

[1226] [Laisant, 1888g], p. 63. En effet,

$$OS = e^z.$$

Laisant précise, en écrivant



Représentation de e^z par Laisant[1227]

Laisant « voit » la convergence ce qui lui évite de la prouver ; il reviendra en conclusion sur l'aspect de précision de sa construction. C'est en effet assez frappant sur la figure proposée par Laisant qui lui permet de construire la longueur $e^{1/2}$ et l'arc de longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Laisant construit graphiquement (figure 4 dans le texte) de manière similaire la série

$$-l(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

(avec $|z| \leq 1$). « La convergence graphique, bien que moins rapide qu'au numéro précédent, […] se manifestera néanmoins et permettra, avec toute l'approximation graphique possible, d'obtenir un point limite L. »[1228]

$$z = x + iy,\ \mathrm{OS} = e^x \varepsilon^y$$

et donc en appelant P le projeté de B sur la droite OA

$$\text{gr. OS} = e^{\mathrm{AP}} \text{ et angle SOA} = \mathrm{PB}.$$

Les deux problèmes suivants ont donc été résolus graphiquement :

> *1° Trouver une longueur égale à une puissance de e dont l'exposant est marqué par une longueur donnée ;*
>
> *2° Trouver un angle dont l'arc correspondant, dans un cercle de rayon 1, ait une longueur égale à celle d'une droite donnée.* (p. 64)

[1227] [Laisant, 1888g], planche V, fig. 1.

[1228] Op.cit., p. 65, Ceci lui permet de résoudre le problème réciproque de celui évoqué plus haut et donc d'obtenir « la détermination graphique :
1° du logarithme d'un nombre représenté par une longueur donnée ;
2° de la longueur d'un arc répondant à un angle donné » (p. 66)

La conclusion de Laisant vise à légitimer l'exactitude théorique de sa méthode et pointe la rigueur du procédé utilisé. Le tracé graphique est le pendant tout aussi rigoureux des calculs arithmétiques :

> *il nous paraît utile d'insister en terminant, sur le caractère particulier de ces déterminations, qui diffère essentiellement des procédés ordinaires d'approximation graphique, et notamment du tracé des courbes d'erreurs.*
> *Ici, nous donnons au procédé graphique une rigueur comparable à celle que présentent les séries lorsqu'on a recours au calcul [,…] le procédé est à la fois systématique et graphiquement rigoureux ; car les erreurs inhérentes au dessin lui-même, et qui dépendent de l'habileté de l'opérateur, de la perfection des instruments, et surtout de l'échelle, deviennent, à un certain moment, supérieures à l'erreur d'approximation résultant de la méthode.*[1229]

Cette affirmation est double : l'exactitude du procédé n'est limitée que par les conditions matérielles de son application, car aucune approximation n'intervient dans le principe même de la construction. Laisant expose ici un type de représentation sensiblement différent des autres travaux présentés dans ce chapitre. Le graphisme n'est pas ici le complément ou le support de la réflexion du lecteur. Il intervient en revanche en aval, pour finaliser l'usage de la méthode géométrique mise en œuvre, à savoir la méthode des équipollences, où, on l'a vu, le regard se porte plutôt sur les équipollences traduisant le fait géométrique que deux triangles soient semblables.

COEFFICIENTS BINOMIAUX ET EQUIPOLLENCES

Dans son article « Sur une classe de nombres remarquables » (1887), d'Ocagne, dont on appréciera plus loin les liens avec Laisant, explique :

> *Les nombres que nous avons en vue, comme les coefficients du binôme, comme les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler, jouent un rôle important dans maintes formules d'Analyse. Ils ont donc été rencontrés par plusieurs auteurs parmi lesquels nous citerons MM. Schlömilch, Catalan, Cesaro. Mais ils ont toujours été définis par ces auteurs au moyen d'une certaine formule d'analyse dans laquelle ils intervenaient.* […] *Aussi avons-nous pensé qu'en raison de l'importance de leur rôle, il y avait intérêt à en faire une étude directe, en partant d'une définition aussi simple que possible.*[1230]

Plusieurs travaux de C.-A. Laisant portent de la même manière sur les coefficients du binôme. Nous choisissons d'en étudier quelques-uns afin de souligner le véritable intérêt de leur auteur

[1229] Ibid., p. 67.
[1230] [D'Ocagne, 1887], p. 353. Voir également par exemple, Catalan, "Sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies", *AFAS*, t. 9, 1880, p. 73-78 et Schlömilch, "Recherches sur les coefficients des facultés analytiques", *Journal de Crelle*, t. 44, 1852, p. 344.

sur ces questions qui l'amèneront plus tardivement à redéfinir cette classe de nombres au sein d'échiquiers arithmétiques.

Calculs sur les coefficients binomiaux

La première référence aux coefficients binomiaux, « Note sur la somme des p premiers coefficients du développement de $(x + y)^n$ » ([Laisant, 1888b]), est une intervention au congrès de l'AFAS en 1888. Elle marque le début de plusieurs travaux sur le sujet, dans une période clairement déterminée (1888-1896), correspondant effectivement à l'intervalle de temps qui nous occupe dans ce chapitre. Elle trouvera son pendant dans une autre remarque très courte, cette fois pour le *Bulletin de Société mathématique de France*[1231], concernant le calcul du produit des coefficients binomiaux. Cette question sera reprise à l'AFAS en 1891 ([Laisant, 1891c-d-e]), en 1893 ([Laisant, 1893a]), puis une dernière fois pour la SMF en 1896 ([Laisant, 1896a]). L'énumération de ces communications sur le sujet suffit à montrer sa relative importance.

Dans la note de 1888, Laisant recherche la somme $u_{n,\,p}$ des p premiers coefficients binomiaux C_n^0 , C_n^1 , …, C_n^p (notés C_0, C_1, …C_n). Il exprime les coefficients du développement de $(x + y)^n$ à l'aide des p premiers coefficients du développement de $(x + y)^{n-1}$, et obtient la relation :

$$u_{n,p} = u_{n-1,p} + u_{n,p-1}.$$

La loi de formation des sommes recherchées est donc identique à celle des coefficients eux-mêmes avec $u_{n,0} = u_{0,p} = 1$. À cette démonstration calculatoire, Laisant ajoute : « c'est ce qu'il est facile de faire ressortir par la construction d'une sorte de triangle arithmétique, ou plutôt d'échiquier arithmétique, donnant les valeurs $u_{n,\,p}$, par comparaison avec celles du triangle arithmétique de Pascal »[1232].

[1231] [Laisant, 1890d], "Expression du produit des coefficients du binôme.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 18, 1890, p. 140- 141.
[1232] [Laisant, 1888b], p. 73.

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL

p =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n = 0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

ÉCHIQUIER DONNANT $u_{n,p}$

p =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	1	4	7	8	8	8	8	8	8	8	8
4	1	5	11	15	16	16	16	16	16	16	16
5	1	6	16	26	31	32	32	32	32	32	32
6	1	7	22	42	57	63	64	64	64	64	64
7	1	8	29	66	99	120	127	128	128	128	128
8	1	9	37	95	165	219	247	255	256	256	256
9	1	10	46	132	260	384	466	502	511	512	512
10	1	11	56	178	392	644	850	968	1013	1023	1024

Tableaux proposés par Laisant en 1888[1233].

Les deux tableaux se construisent d'ailleurs de manière similaire d'après ce qui précède. L'observation de cet échiquier permet de faire apparaître simplement plusieurs propriétés : « L'inspection seule de ce dernier échiquier permet de vérifier (chose d'ailleurs évidente) que $u_{n,p}$ est égale à 2^n chaque fois que p est égal ou supérieur à $n + 1$ »[1234]. Cette première utilisation d'échiquiers sera nettement approfondie, comme nous le verrons, par la suite. Elle marque cependant le début de la réflexion sur les échiquiers arithmétiques, c'est-à-dire les tableaux de nombres. Laisant invite le lecteur à poser un regard attentif sur le tableau pour y retrouver des propriétés facilement démontrables par le calcul.

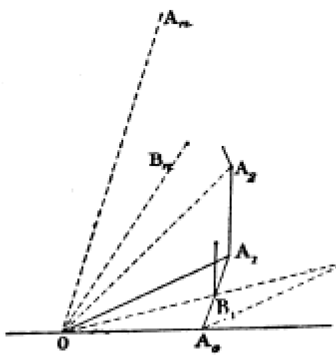
Pour conclure, il se ramène à un problème d'interpolation en considérant le nombre $u_{n,p}$ comme une fonction de la variable n. Il remarque que l'expression définissant $u_{n,p}$ montre que cette fonction est entière de degré $p - 1$ par rapport à n (donc complètement déterminée

[1233] Ibid., p. 72-73.
[1234] Ibid., p. 74.

par les p valeurs C_n^i) et que cette définition correspond à l'application de la formule d'interpolation de Newton. En employant celle de Lagrange, Laisant obtient une dernière expression de $u_{n,\ p}$. L'utilisation des méthodes d'interpolation en lien avec l'étude des coefficients du binôme $(x + y)^n$ se retrouvent dans un autre article paru dans la revue *Mathesis*[1235]. Laisant y recherche l'expression d'une fonction entière F prenant les valeurs C_0, C_1, C_2, …C_n aux points d'abscisses 0, 1, 2, …., n à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange.

Le problème du myosotis[1236] *par les équipollences*

Les coefficients du binôme refont leur apparition dans une application des équipollences, représentative des travaux que Laisant a pu produire précédemment en lien avec la théorie de Bellavitis. Dans « Propriété géométrique des coefficients du binôme » ([Laisant, 1891n]), l'une des nombreuses communications à la SMF durant l'année 1891, Laisant étudie la figure dite du « myosotis » composée de triangles semblables[1237] dont les sommets A_0, A_1, …, A_n sont pondérés par des masses proportionnelles aux coefficients du développement de $(1 + x)^n$ (C_0, C_1, …C_n). Il se propose d'étudier le barycentre de ce système.



Myosotis de Laisant[1238]

En posant OA_0 l'unité et OA_1 = A, la similitude des triangles permet d'écrire que

$$OA_i = \text{A}^i\ ;$$

[1235] [Laisant, 1893d], "Sur une fonction représentative des coefficients du binôme", *Mathesis*, t.13, 1893, p. 153-154.

[1236] On trouve une première référence au problème du myosotis dans le *Journal de mathématiques élémentaires* (*JME*) en 1877 : Dellac, "problème du myosotis", *JME*, t. 1, 1887, p. 40. La figure du myosotis y est décrite comme le « contour polygonal convexe dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante et font entre eux un angle constant » (p. 40). Le problème est repris par d'Ocagne dans la même revue en 1889 (d'Ocagne, "Note sur le problème du myosotis", Sér. 3, t. 3, 1889, p. 97).

[1237] « On sait qu'on appelle myosotis la figure formée par un série de triangles directement semblables OA_0A_1, OA_1A_2, … accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles OA_0A_1 base du myosotis » ([Laisant, 1891n], p. 4).

[1238] Ibid.

Le barycentre K recherché vérifie donc

$$\mathrm{OK} = \mathrm{K} = \frac{C_0 + C_1\mathrm{A} + \ldots + C_n\mathrm{A}^n}{C_0 + C_1 + \ldots + C_n} = \frac{(1+\mathrm{A})^n}{2^n} = \mathrm{OB_1}^n$$

où B_1 est le milieu de A_0A_1. K s'obtient donc par la construction du myosotis $OA_0B_1B_2\ldots B_n$ de base OA_0B_1. Un raisonnement similaire permet d'obtenir le centre des moyennes distances des points A_0, D_1, D_2, …, D_{n-1}, D_n où $OD_i = C_iOA_i$, ou encore le barycentre des points A_0, F_1, F_2, …F_n affectés des poids C_0, C_1^2, C_2^2, …, C_n^2 et où $OF_i = \dfrac{OA_i}{C_i}$.

Une nouvelle fois, le véritable « calcul géométrique » que constitue la théorie des équipollences permet une représentation aisée de cette question et de son principe de résolution. Équipollences et coefficients binomiaux se prêtent une mutuelle assistance autour de la figure habituelle chez Laisant des triangles semblables.

III.4.2. Représentation de nombres et de leurs propriétés

Nous abordons ici deux articles où sont proposées des représentations particulières de nombres entiers vus comme produit de facteurs premiers ou comme éléments de combinatoire. Les figures correspondantes ont pour rôle de faciliter la compréhension de telle ou telle propriété de ces nombres.

REPRESENTATIONS DE NOMBRES COMPOSES

C.-A. Laisant a déjà proposé, lors du congrès de l'AFAS de 1881 un classement des différents diviseurs d'un nombre à partir de sa décomposition en facteurs premiers ([Laisant, 1881c]). Lors de la séance du 6 juin 1888 de la Société mathématique de France, il expose ses « Remarques arithmétiques sur les nombres composés » ([Laisant, 1888f]) et poursuit son travail autour de l'idée de développement de facteurs (dénombrer les termes obtenus, les évaluer…) tout l'enrichissant d'une suggestion pour représenter visuellement un nombre dont on connaît la décomposition en facteurs premiers.

Nous présentons brièvement la première partie de ces « Remarques arithmétiques sur les nombres composés »[1239] que l'on peut donc rattacher à la communication de 1881 pour l'AFAS. Un nombre N décomposé en facteurs premiers qui s'écrit :

$$\mathrm{N} = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots . l^{\lambda}$$

possède D(N) diviseurs et donc D(N) décompositions en produit (en distinguant les produits PQ et QP) de deux facteurs. Laisant écrit donc

$$n_2(\mathrm{N}) = \mathrm{D}(\mathrm{N}) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots . (\lambda + 1).$$

Pour déterminer le nombre de décompositions en trois facteurs de N, $n_3(\mathrm{N})$, Laisant remarque que

$$n_3(\mathrm{N}) = \Sigma\, n_2(\delta) = \Sigma\, \mathrm{D}(\delta),$$

la somme s'étendant sur l'ensemble des diviseurs δ de N. Pour calculer cette somme, Laisant considère l'expression (que nous notons Π)

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \ldots + b^{\beta}) \ldots (1 + l + l^2 + \ldots + l^{\lambda})$$

dont le développement donne l'ensemble des diviseurs de N, comme il l'avait déjà expliqué en 1881 ([Laisant, 1881c]). D'après le premier calcul sur les diviseurs d'un nombre décomposé en éléments simples, la somme $n_3(\mathrm{N})$ s'obtient en remplaçant dans l'expression précédente chaque élément par son exposant augmenté d'une unité soit :

$$n_3(\mathrm{N}) = n_2(\mathrm{N})\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda}{2}\right).$$

Il reproduit ce raisonnement pour rechercher la décomposition de N en quatre facteurs, cette fois-ci en remplaçant dans le produit Π chaque élément élevé à la puissance p par

$$(1+p)\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

La réitération de ce procédé lui permet d'obtenir une formule de récurrence entre $n_k(\mathrm{N})$ et $n_{k-1}(\mathrm{N})$:

$$n_k(\mathrm{N}) = n_{k-1}(\mathrm{N})\left(1+\frac{\alpha}{k-1}\right)\left(1+\frac{\beta}{k-1}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda}{k-1}\right)$$

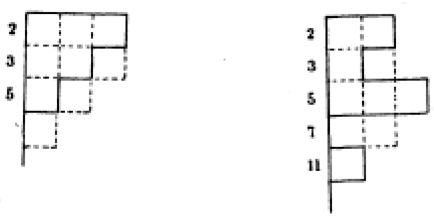
et donc une expression de $n_k(\mathrm{N})$. C'est véritablement l'emploi de l'expression Π qui permet de lister l'ensemble des diviseurs d'un nombre, comme en 1881, et offre la possibilité d'un dénombrement itératif des diviseurs.

Laisant consacre la deuxième partie de son exposé à « un mode de figuration fort simple »[1240] de la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Les bénéfices pédagogiques

[1239] Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 308.

d'une telle représentation sont explicitement mentionnés : « Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers. »[1241] À partir d'une ligne droite verticale, il numérote les bandes horizontales par les nombres premiers 2, 3, 5, 7… et affecte à chaque bande un nombre de cases égal à l'exposant où apparaît le facteur premier correspondant dans la décomposition de l'entier considéré : « L'ensemble de toutes les cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. »[1242]

Fig. 1. Fig. 2.



N = 360. N = 16500.

Exemples donnés par Laisant pour la figuration de la décomposition en facteurs premiers[1243]

Ici, c'est la dimension didactique d'une représentation graphique qui est soulignée. À la manière de l'*Initiation mathématique*, comme nous le verrons ultérieurement, l'auteur propose une visualisation d'une notion en vue de l'approcher simplement par le graphisme.

Laisant énumère ensuite les différents avantages d'une telle représentation et la diversité de ses applications. Il commence par rattacher cette figuration au problème traité en début d'exposé : « Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs »[1244] et donc la décomposition en produit de deux facteurs. Le Plus Grand Commun Diviseur est obtenu en conservant la partie commune aux deux figures représentant ces nombres ; le Plus Petit Commun Multiple par la considération du contour extérieur des deux figures superposées. En attribuant des couleurs à chaque figure, on peut généraliser ses observations à plusieurs nombres, pris deux à deux ou dans leur ensemble. « Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un

1240 [Laisant, 1888f], p. 152.
1241 Ibid.
1242 Ibid. Nous rapprochons cette figure de la représentation des valuations *p*-adiques associées au nombre N.
1243 Ibid.
1244 Ibid., p. 153. En effet, « le nombre de diviseurs est évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage. » (p. 153)

caractère intuitif »[1245] et c'est bien là le rôle de cette figuration : rendre visible et évidente les propriétés sur les nombres en évitant tout procédé calculatoire ou définition "sèche".

Si tout calcul est rejeté de cette représentation, il n'en reste pas moins qu'elle suggère un système de numération particulier que Laisant précise. Dans ce système, chaque chiffre est l'exposant du nombre premier correspondant au rang de ce chiffre. Ainsi, $360 = 2^3.3^2.5$ s'écrit 321 et 16 500 s'écrit 21301. L'auteur ne précise pas plus la construction de ce système de numération à base multiple et se contente par exemple de signaler que la multiplication correspond alors à l'addition des différents "chiffres" entrant dans l'écriture des facteurs. L'intérêt pour les systèmes de numération est une fois de plus visible et se confirme quelques mois plus tard, toujours pour la SMF, avec la communication sur la numération factorielle déjà évoquée ([Laisant, 1888e]).

REPRESENTATION ET COMBINATOIRE : L'INFLUENCE DE D'OCAGNE

Les définitions de nombres combinatoires trouvent elles aussi leurs pendants graphiques et, en 1893, Laisant propose au congrès de l'AFAS sa « figuration graphique de quelques nombres combinatoires » ([Laisant, 1893b]).

Disposant des points a_0, a_1, …, a_n en ligne droite et reliant a_{n-1} à a_n par n routes Laisant représente ainsi le nombre n ! d'itinéraires différents pour aller de a_0 à a_n.

FIG. 1.

Figure proposée par Laisant pour représenter n ![1246]

Nous voyons ainsi que 3 ! = 6 puisque 6 itinéraires sont possibles pour relier a_0 à a_3. En répartissant les points de droite à gauche et en numérotant les chemins reliant deux points consécutifs, il caractérise par une série de valeurs un itinéraire quelconque et trouve donc une représentation de la numération qu'il avait mise en place cinq ans auparavant pour la SMF ([Laisant, 1888e]).

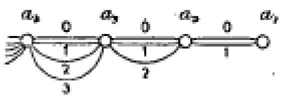


Figure proposée par Laisant pour représenter le système de numération de 1888[1247]

[1245] Ibid., p. 154. L'auteur remarque par exemple que si A et B sont premiers entre eux, les contours de leurs figures respectives n'ont aucune partie commune.

[1246] [Laisant, 1893b], p. 298.

Pour représenter les coefficients binomiaux, Laisant adopte un quadrillage sur lequel chaque point a pour coordonnées (n, p). Le nombre $u_{n,p}$ d'itinéraires permettant de rejoindre, à partir de l'origine, le point de coordonnées (n, p) en suivant les lignes du quadrillage dans le sens positif vérifie la relation

$$u_{n,p} = u_{n-1,p} + u_{n,p-1}.$$

Comme $u_{n,0} = 1$ et $u_{0,p} = 1$, on retrouve le procédé de formation du carré arithmétique de Fermat (auquel il a consacré plusieurs travaux) et donc l'expression des coefficients binomiaux : $u_{n,p} = C_{n+p}^{n}$.

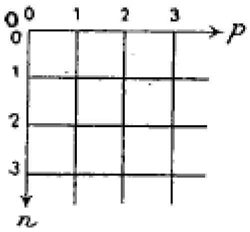


FIG. 3.

Quadrillage proposé par Laisant pour représenter les coefficients binomiaux[1248]

Remarquons également l'autre formulation que l'auteur donne du même problème sous un aspect emblématique de la géométrie de situation du XIX^e siècle, et des travaux de ses amis Lucas et Delannoy en particulier, : « Sous une autre forme, cette question est celle de la détermination des marches d'une tour pour se rendre d'une case à une autre sur un échiquier indéfini, sans jamais rétrograder. »[1249]

Si dans le quadrillage précédent, chaque ligne horizontale est identique à la première figure représentant n ! (fig.1), le nouveau nombre de trajets possibles pour atteindre le point de coordonnées (n, p) est :

$$v_{n,p} = v_{n-1,p} + p\, v_{n,p-1}$$

Laisant en conclut que $v_{n,p} = A_{n+p}^{n}$ et a ainsi représenté les arrangements de $n + p$ objets p à p.

[1247] Ibid. Il étend d'ailleurs le principe de cette classification aux arrangements en adaptant la notation précédente.
[1248] Ibid., p. 300.
[1249] Ibid.

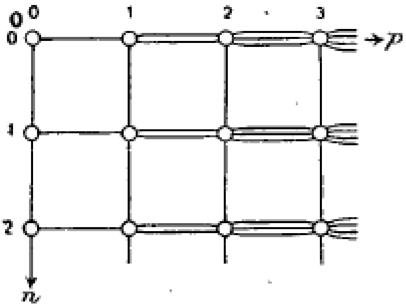


FIG. 4.

Figure proposée par Laisant pour représenter les arrangements [1250]

Ici, Laisant complète sa représentation graphique par un « tableau numérique » obtenu en remplaçant chaque point de coordonnées (n, p) par le nombre $v_{n,\,p}$. Avec cet échiquier arithmétique, il obtient une nouvelle relation entre les valeurs ainsi disposées en traçant des parallélogrammes ABCD dont les côtés AB et DC sont parallèles à l'axe des p. Il présente un dernier tableau de nombres obtenu en divisant chaque nombre $v_{n,p}$ par celui placé à sa gauche ($v_{n,p-1}$) et souligne la simplicité de ce dernier (chaque antidiagonale présente la même valeur).

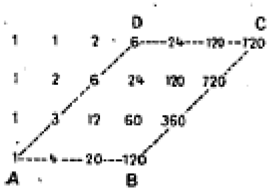


FIG. 5.

1	2	3	4	5	6	. . .	
2	3	4	5	6	. . .		
3	4	5	6	. . .			
4	5	6	. . .				
.	.	.	.	.			
.	.	.	.				
.	.	.					
.	.	.					
.							

FIG. 6.

Tableaux numériques issus de la représentation graphique des arrangements [1251]

Enfin, les nombres K_m^p étudiés par d'Ocagne en généralisant le triangle arithmétique de Pascal[1252] sont représentés si, à partir d'un quadrillage simple, ce sont les lignes verticales (parallèles à l'axe des n) qui sont modifiées suivant la première figure de l'exposé. Le nombre d'itinéraires reliant l'origine au point de coordonnées (n, p) est

$$w_{n,p} = (p+1)w_{n-1,p} + w_{n,p-1} = K_{n+p+1}^{k+1}.$$

[1250] Ibid.
[1251] Ibid., p. 301.
[1252] Voir [d'Ocagne, 1887] et [d'Ocagne, 1891], d'Ocagne Maurice, "Quelques propriétés des nombres K_m^p", *American Journal of Mathematics*, Vol. 13, 1891, p. 145-188. Voir aussi *L'Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. 1, vol. 1, p. 86.

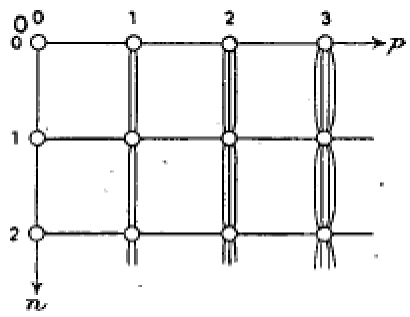


FIG. 7.

Figure proposée par Laisant pour représenter les nombres de d'Ocagne [1253]

Avec un tel quadrillage, Laisant retrouve les propriétés de ces nombres comme :

$$K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1}.$$

Il peut conclure :

> *Ces relations concordent identiquement avec celles qui caractérisent les nombres K_m^p étudiés par M. d'Ocagne dans plusieurs mémoires d'un haut intérêt. Nous avons donc ici une définition combinatoire nouvelle de ces nombres, par la figuration indiquée. C'est d'ailleurs la recherche de cette définition, effectuée par moi sur le désir que m'avait manifesté M. d'Ocagne, qui m'a conduit aux considérations diverses indiquées dans la présente Note.*[1254]

C.-A. Laisant s'était déjà en effet intéressé au nombre K_m^p l'année précédente dans une communication à la SMF intitulée « Transformation d'un polynôme entier »[1255] : il y reprend le problème traité par d'Ocagne en 1891 et obtient par conséquence une nouvelle expression des nombres K_m^p, similaire à celle proposée par d'Ocagne en 1887 ([d'Ocagne, 1887]). Ces préoccupations rejoignent également la question 124 posée dans *L'Intermédiaire des mathématiciens* par d'Ocagne qui demande une « définition *combinatoire* » des nombres K_m^p. Laisant répond à cette question, en se référant à son intervention à l'AFAS, mais également Picquet et Césaro[1256].

Le passage précédent éclaire les relations et la collaboration fructueuse entre les deux hommes. Le lien d'amitié qui les unit incite par exemple d'Ocagne à écrire à Laisant après son acquittement lors de l'affaire du Panama en 1897 qu'il « tient à ce que son collègue

---

[1253] [Laisant, 1893b], p. 300.

[1254] [Laisant, 1893b], p. 302. Voir le fonds Maurice d'Ocagne en phase de numérisation à la Bibliothèque de l'École polytechnique (Palaiseau).

[1255] « Vie de la société », *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 6-10

[1256] Césaro, E., "Dérivées des fonctions de fonctions", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 4, 1885, p. 41-55.

Laisant sache bien qu'il n'a jamais douté du dénouement qu'il vient de connaître et lui adresse à cette occasion l'expression de sa sympathie »[1257].

La personnalité de Maurice d'Ocagne semble à signaler à plus d'un titre parmi les différents mathématiciens qui ont pu appartenir à l'entourage (plutôt proche) de Laisant. Ce dernier lui consacre d'ailleurs un article dans *La Grande Encyclopédie*, ainsi qu'un long résumé de sa « Nomographie »[1258]. Les deux hommes ont en fait ponctuellement partagé des centres d'intérêts communs : que ce soit le calcul graphique (ou nomographie), l'étude de nombres combinatoires, ou la structuration des liens dans la communauté mathématique via le *Répertoire bibliographique*.[1259]

Né le 25 mars 1862 à Paris d'un père « homme de lettres »[1260] selon la fiche matricule de l'École polytechnique, Maurice d'Ocagne devient élève de cette même école en 1880, où il obtient le grade de sergent. Il en sort 28$^{\text{ème}}$ sur 205 élèves et intègre le corps des Ponts et Chaussées dont il deviendra plus tard Inspecteur général. Il est rapidement nommé répétiteur à l'École Polytechnique (1893) puis professeur de géométrie (il sera également enseignant à l'École des Ponts et Chaussées).

Il est l'auteur de nombreux articles dans les *NAM* ou dans le *Bulletin* de la SMF ; mais sa contribution principale concerne la nomographie, c'est-à-dire la science des abaques[1261], que Laisant explique aussi être « la représentation graphique des lois mathématiques à plusieurs variables » [1262]. Laisant signale ses travaux sur les suites récurrentes, sur la probabilité des erreurs, sur de nouveaux systèmes de coordonnées et sur la géométrie infinitésimale. D'Ocagne s'est également intéressé à la topométrie (il sera rattaché au Service du nivellement général de la France à partir de 1898), à la géométrie différentielle et projective ainsi qu'à leurs applications ou encore, plus tardivement, au calcul mécanique (en collaboration avec Louis Couffignal).

Après avoir remporté deux prix de l'Académie des sciences en 1892 (pour ses travaux sur la nomographie) et en 1894, il est élu à l'Académie des sciences le 30 janvier 1922 (en

---

[1257] Carte de visite datée du 31 décembre 1897.
[1258] "Ocagne", [Berthelot & al., 1885], t. 25, p. 198-199 et "Nomographie", [Berthelot & al., 1885], t. 24, p. 1192-1195.
[1259] La liste n'est évidemment pas exhaustive : lors de la séance du 2 décembre 1896 de la SMF, les deux hommes traitent de la description d'une courbe gauche dans l'espace (voir le *Bulletin de la SMF*, t. 24, 1896, p. 196).
[1260] Mortimer d'Ocagne est l'auteur de l'ouvrage intitulé *Les Grandes Écoles de France* portant sur l'organisation de l'enseignement supérieur.
[1261] "Ocagne", *La Grande Encyclopédie*, t. 25, p. 198. Voir [Tournès, 2000 et 2003] et aussi d'Ocagne, "Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables", *CRAS*, t. 117, 1893, p. 216. Il présente également ses résultats à plusieurs congrès de l'AFAS en 1891, 1892 et 1903.
[1262] [Tournès, 2000 et 2003].

remplacement de l'académicien libre J. Carpentier). Il sera président de la Société mathématique de France en 1901, Société dont il est membre depuis 1882. Il fera partie, avec Poincaré, Désiré André, Humbert, et Henry, de la commission permanente chargée de la rédaction du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* : c'est lui qui suggérera les fiches comme support du *Répertoire*[1263]. On sait que Laisant participera activement à cette entreprise, comme nous le verrons dans le dernier chapitre.

Pour conclure sur la figuration des nombres combinatoires par Laisant, revenons sur les dernières remarques de son exposé de 1893 qui laissent envisager les possibilités offertes par les représentations proposées. Ainsi si chaque segment horizontal placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne correspond à i itinéraires et pareillement pour les lignes verticales (fig. 9), Laisant obtient « la définition de nouveaux nombres combinatoires $z_{n,\,p}$ »[1264]. Le nombre d'itinéraires reliant l'origine au point de coordonnées (n, p) vérifie la relation

$$z_{n,p} = (p + 1)\, z_{n-1,p} + (n + 1)\, z_{n,p-1}$$

avec $z_{n,0} = z_{0,p} = 1$.

Si le tableau numérique des $z_{n,\,p}$ est d'ailleurs symétrique par rapport à la diagonale principale, Laisant ne fournit pas de formule générale donnant les nombres $z_{n,p}$ soulignant la difficulté de ce problème. L'objectif principal de sa communication est cependant atteint : il a montré la double potentialité d'une telle représentation : comprendre les notions déjà établies par le calcul ; les généraliser naturellement sur un graphique.

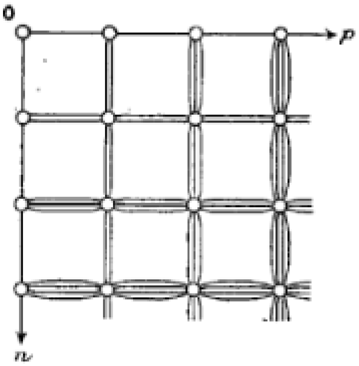


FIG. 9.

Figure proposée par Laisant pour de nouveaux nombres combinatoires [1265]

[1263] [Rollet, Nabonnand, 2002].
[1264] [Laisant, 1893b], p. 302.
[1265] Op.cit., p. 302.

III.5. Échiquiers arithmétiques et autres tableaux de nombres

Dans son article sur l'échiquier paru dans *La Grande Encyclopédie*, Laisant donne la définition suivante :

> *On donne le nom d'échiquiers arithmétiques à des tableaux numériques, habituellement de forme carrée ou rectangulaire, présentant des cases analogues à celles d'un papier quadrillé. Dans chacune de ces cases est inscrit un nombre qui se forme d'après une loi déterminée.*[1266]

Les travaux de Lucas, pour les démonstrations qu'il a proposées en s'appuyant sur de tels échiquiers[1267], et ceux de Delannoy, pour les nouvelles formes qu'il impose aux échiquiers, sont cités. Le triangle arithmétique de Pascal ou le carré arithmétique de Fermat sont deux exemples d'échiquiers arithmétiques auxquels Laisant adjoint, non seulement les questions de géométrie des quinconces, mais aussi celles se rapportant à l'échiquier anallagmatique de Sylvester.

Édouard Lucas et Henry Auguste Delannoy seront de nouveau deux très fortes influences de Laisant pour sa réflexion sur le traitement de relations numériques par l'utilisation de tableaux. L'intérêt pour ces questions apparaît dans les années 1890 et trouve son apogée avec la collaboration avec G. Arnoux. Qu'il se situe dans le cadre de la recherche de relations sur les coefficients binomiaux ou dans celui de travaux arithmétiques sur les congruences, ce cheminement de la pensée mathématique chez Laisant est encore marqué par l'exploitation de les notions de placement, de localisation d'un nombre par rapport à d'autres (que ce soit dans le plan ou l'espace). Nous choisissons donc à présent de développer ce thème dans la mesure où c'est bien la présentation visuelle d'un tableau de nombres, la mise en évidence sensible de relations par l'organisation spatiale de la trace écrite qui guident Laisant dans ce qui suit.

III.5.1. Tétraèdre arithmétique, tableaux de sommes

Après plusieurs travaux sur les coefficients binomiaux (voir plus haut), l'année 1891 est marquée par une généralisation du triangle de Pascal présentée parallèlement aux membres de la SMF et au Congrès de Marseille de l'AFAS. Ces travaux s'inscrivent également, comme

---

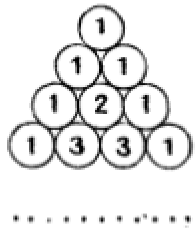
[1266] *La Grande Encyclopédie*, t. 15, p. 317.

[1267] Particulièrement, son étude de la décomposition d'un produit en somme de 2^n termes. Voir [Décaillot-Laulagnet, 1999].

Laisant l'expliquera lui-même en 1896 [1268], dans des recherches autour des échiquiers arithmétiques et plus particulièrement autour des tableaux de sommes ([Laisant, 1893a]). 1891 est également l'année de publication du premier volume des œuvres de Fermat par Henry et Tannery, projet pour lequel on a vu l'implication de Laisant à l'Assemblée. Dans ce premier volume, on retrouve les *Observations sur Diophante* et donc une étude des nombres figurés. On peut aussi citer la parution la même année de la *Théorie des nombres* de Lucas, bien sûr.

LE TETRAEDRE ARITHMETIQUE DE LAISANT

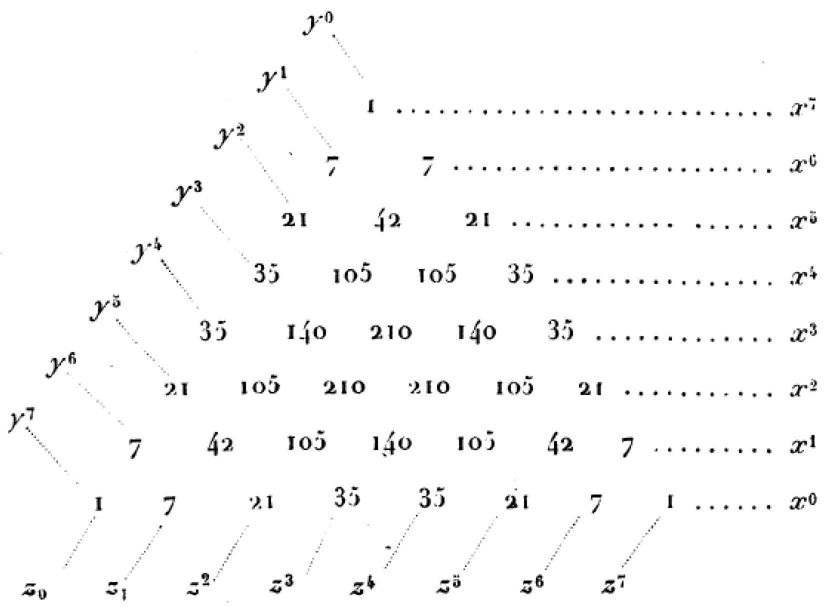
Laisant expose tout d'abord son tétraèdre arithmétique à la Société mathématique de France[1269]. Ce "solide arithmétique" généralise le triangle de Pascal, bien longtemps après le traité de Pascal sur la question (*Traité du triangle arithmétique*, 1654). Laisant présente le fameux triangle sous la forme de cercles identiques, tangents entre eux et placés sur n lignes avec i cercles sur la $i^{\text{ème}}$ ligne. Le coefficient inscrit dans chaque cercle est la somme des coefficients des cercles qui lui sont tangents.



Triangle de Pascal « sous une forme plus figurative »[1270]

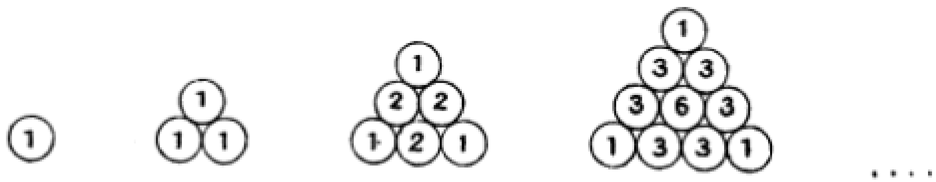
Laisant multiplie chaque élément de la ligne i par C_n^i et obtient l'ensemble des coefficients intervenant dans le développement du trinôme $(x + y + z)^n$. Plus précisément, la figure obtenue présente « une triple symétrie parfaite par rapport aux trois côtés »[1271] et il est possible de repérer le coefficient associé au terme $x^k y^l z^m$ (avec $k + l + m = n$). Voici l'exemple donné pour illustrer cette remarque, exemple qui donne les coefficients du développement de $(x + y + z)^7$:

[1268] Voir [Laisant, 1896a].
[1269] [Laisant, 1891c], "Tétraèdre arithmétique", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 18-23.
[1270] [Laisant, 1891c], p. 19
[1271] Ibid., p. 20.



Tétraèdre arithmétique proposé par Laisant[1272]

En poursuivant la représentation du triangle arithmétique évoquée plus haut, Laisant considère alors non plus des cercles mais des sphères identiques et tangentes entre elles. Il superpose les unes sur les autres des couches de sphères obtenues pour différentes valeurs de n et obtient « une pile de boulets triangulaires »[1273] à laquelle il donne le nom de tétraèdre arithmétique.



Les premières couches du tétraèdre arithmétique de Laisant[1274]

Cette représentation apparaît comme une généralisation originale et propre à Laisant du triangle de Pascal[1275] puisque le coefficient de chaque sphère est obtenu par somme des coefficients des sphères de la couche supérieure qui lui sont tangentes : les coefficients à sa base donne le développement de $(x + y + z)^n$.

Laisant énumère plusieurs propriétés pour cette base du tétraèdre (nombre, somme et produit de ses éléments). Il généralise un résultat proposé à la Société mathématique de

[1272] Ibid. Ainsi le coefficient de x^2yz^4 est obtenu par lecture graphique et vaut 105.
[1273] [Laisant, 1891c], p. 21.
[1274] Ibid., p. 20.
[1275] C'est ainsi qu'elle est présentée dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* : Vogt H., "Analyse combinatoire et théorie des déterminants", in [Molk, 1904-1916], t.1, vol. 1, p. 85.

France l'année précédente sur « L'expression du produit des coefficients du binôme »[1276] et exprime le résultat à l'aide des différents nombres triangulaires

$$t_p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Enfin, Laisant réitère le processus précédent : si on multiplie les éléments de chaque couche i de la pile de boulets par le coefficient C_n^i, on obtient un nouveau tétraèdre « dont les éléments offriront une entière symétrie par rapport aux quatre faces »[1277]. Les coefficients de ce nouveau tétraèdre correspondent au développement de l'expression : $(x + y + z + t)^n$. L'expression du produit de ces coefficients (en fonction de celui des coefficients intervenant dans le développement de $(x + y + z)^n$) s'obtient de manière similaire. Laisant résume ainsi la démarche suivie :

> *Les coefficients du développement de $(x + y)^n$ se disposent systématiquement suivant une ligne droite ;*
> *Ceux du développement de $(x + y + z)^n$ suivant un triangle arithmétique ;*
> *Ceux du développement de $(x + y + z + t)^n$ suivant un tétraèdre arithmétique*[1278].

La représentation concrète des coefficients recherchés se réalise dans l'espace à trois dimensions, on comprend que Laisant se limite graphiquement au tétraèdre bien que le procédé pourrait ainsi se poursuivre en dimension quelconque.

EXTENSIONS DES TRIANGLES ET CARRES ARITHMETIQUES

Deux communications de Laisant sont ensuite consacrées au triangle de Pascal et à sa généralisation au Congrès de l'AFAS de Marseille en septembre de la même année.

Dans la première, « Propriétés du triangle arithmétique » ([Laisant, 1891d]), Laisant étend le triangle de Pascal à des nombres négatifs. Plus précisément, il complète le quart de plan occupé par les coefficients habituels (avec pour première ligne 1 0 0 0 …) aux lignes placées au-dessus de ce tableau (région des x négatifs, l'axe des x étant vertical).

[1276] [Laisant, 1890d], "Expression du produit des coefficients du binôme", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 18, 1890, p. 140-141.
[1277] [Laisant, 1891c], p. 23.
[1278] Ibid., p. 23.

1	−9	+45	−165	+495					
1	−8	+36	−120	+330	−792				
1	−7	+28	− 84	+210	−462	+924			
1	−6	+21	− 56	+126	−252	+462	−792		
1	−5	+15	− 35	+ 70	−126	+210	−330	+495	−715
1	−4	+10	− 20	+ 35	− 56	+ 84	−120	+165	−220
1	−3	+ 6	− 10	+ 15	− 21	+ 28	− 36	+ 45	− 55
1	−2	+ 3	− 4	+ 5	− 6	+ 7	− 8	+ 9	− 10
1	−1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0 → y
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

↓
x

Fig. 1. — Triangle arithmétique de Pascal prolongé vers les x négatifs. La case de coordonnées x, y donne :

$$C_{x,y} = \frac{x!}{(x-y)!\,y!}.$$

Chaque ligne donne les coefficients du développement $(1+z)^x$ (x entier $\gtrless 0$).

Les diagonales ↘ de la partie négative sont identiques aux lignes de la partie positive, avec alternance des signes.

Première figure proposée par Laisant[1279]

Il retrouve sur chaque ligne les coefficients du développement de $(1 + z)^x$ pour un x quelconque, résultat connu depuis Euler. La case de coordonnées (x, y) où x et y sont positifs est ainsi occupée par le coefficient binomial $C_{x,\,y}$. Que se passe-t-il pour des x négatifs ? Laisant remarque que, pour tout x et tout y, le nombre $F_{x,\,y}$ placé dans la case de coordonnées x, y vérifie la relation :

$$F_{-x,\,y} = (-1)^y\,F_{x+y-1,\,y}.$$

Appliqué aux coefficients $C_{x,\,y}$ cela implique que l'expression

$$(-x)\ !\ (-1)^x(-(x+y))\ !$$

est constante alors même que « l'expression $(-x)$! isolément doit être considérée comme un symbole de l'infini »[1280].

Le décalage de i cases vers le haut de la colonne i (la ligne correspondant à $x = 0$ est constituée uniquement de 1) permet d'obtenir le carré de Fermat, y compris pour des valeurs de x négatives.

[1279] [Laisant, 1891d], p. 6.

[1280] Ibid., p. 3. En effet le carré arithmétique de Fermat généralisé montre que le rapport de $(x + y)$! par $(-x)$! est nul.

1	−8	+28	−56	+70	−56	+28	−8	+1	0			
1	−7	+21	−35	+35	−21	+ 7	−1	0	0			
1	−6	+15	−20	+15	− 6	+ 1	0	0	0			
1	−5	+10	−10	+ 5	− 1	0	0	0	0			
1	−4	+ 6	− 4	+ 1	0	0	0	0	0			
1	−3	+ 3	− 1	0	0	0	0	0	0			
1	−2	+ 1	0	0	0	0	0	0	0			
1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\to y$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715			
1	6	21	56	126	252	462	792					
1	7	28	84	210	462	924						
1	8	36	120	330	792							
1	9	45	165	495								
1	10	55	220	715								
$\downarrow$ x												

Fig. 2. — Carré arithmétique de Fermat prolongé vers les x négatifs. La case de coordonnées x, y donne :

$$C_{x+y,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}.$$

Chaque diagonale ↗ donne les coefficients du développement $(1+z)^x$, x étant l'abscisse de l'origine de la diagonale.

Les lignes de la partie négative sont identiques aux diagonales ↗ de la partie positive, avec alternance des signes.

Carré de Fermat généralisé par Laisant[1281]

Laisant rappelle à l'occasion plusieurs propriétés dues à Lucas[1282], valables d'ailleurs plus généralement pour les tableaux de somme comme il le montrera par la suite ([Laisant, 1893a]). En traçant un triangle rectangle isocèle sur l'échiquier arithmétique, il existe en effet de nombreuses relations entre les coefficients se trouvant sur les côtés de ce triangle.

L'auteur propose et démontre alors une propriété se rapportant au carré de Fermat qui rappelle la précédente : si on trace un rectangle ABCD dont les côtés sont parallèles aux axes, alors la somme des produits des coefficients situés sur AD par le carré de ceux situés sur la diagonales DB est égale au produit des coefficients placés en C et D. De ce théorème, Laisant déduit la somme des carrés des coefficients du binôme et bien d'autres formules sur les nombres combinatoires. Avec cette communication, Laisant s'inscrit dans la longue liste des mathématiciens s'étant intéressés aux multiples relations que l'on peut obtenir entre divers nombres combinatoires (citons, d'après l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, Lagrange,

[1281] Ibid., p. 6. La case de coordonnées x, y contient le coefficient binomial $C_{x+y,x}$.
[1282] Voir [Lucas, 1891a].

Euler, Vallès, Cauchy, Arndt, Rithe ou C. Kramp)[1283]. Dans ses *Éléments d'arithmétique universelle* (1808), Kramp (1760-1826) poursuit par exemple ces recherches sur la fonction factorielle généralisée.

Le carré arithmétique de Fermat sera une nouvelle fois généralisé, toujours pour l'AFAS, par Laisant en 1893, comme application de propriétés présentées au sujet des tableaux de sommes ([Laisant, 1893a]). En plaçant un 0 à l'origine, il est possible « d'étendre la construction à toute la surface du plan »[1284]. Cette modification ne modifie pas le carré arithmétique dans la zone des x et y positifs et les propriétés habituelles sont conservées.

					0	0	0	1	−4	6	−4	1	0	0	0	0	
				0	0	0	0	1	−3	3	−1	0	0	0	0	0	
			0	0	0	0	0	1	−2	1	0	0	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	→ y
1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	
15	10	6	3	1	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120			
−20	−10	−4	−1	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210				
15	5	1	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252					
−6	−1	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210						
1	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120							
							↓ x										

Nouvelle généralisation du carré arithmétique de Fermat[1285].

Toujours en 1891, Laisant enchaîne la communication « Propriétés du triangle arithmétique » avec une extension du carré de Fermat[1286]. De même qu'il a généralisé la construction du triangle arithmétique, il construit le cube arithmétique en disposant sur chacun des axes des x, y et z des cubes unitaires portant le coefficient 1 et en donnant au cube dont le centre a pour coordonnées x, y, z le coefficient $u_{x,y,z}$ défini par :

$$u_{x,y,z} = u_{x-1,y,z} + u_{x,y-1,z} + u_{x,y,z-1}$$ [1287],

[1283] [Berthelot & al., 1885], t. 1, vol. 1, p. 84.
[1284] [Laisant, 1893a], p. 212.
[1285] Op.cit., p. 212.
[1286] [Laisant, 1891e], "Sur le cube arithmétique", AFAS, Marseille, 1891/2, p. 8-10.
[1287] Pour le carré arithmétique, où la première ligne et la première colonne sont remplies de 1, on a la relation

$$u_{x,y} = u_{x-1,y} + u_{x,y-1}$$

La relation proposée par Laisant pour son cube généralise bien la précédente.

« Autrement dit, pour avoir le nombre affecté à un cube quelconque, on ajoutera les nombres affectés aux trois cubes placés : au-dessous, en arrière et à gauche du cube considéré. »[1288]

1re TRANCHE

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

2e TRANCHE

1	2	3	4	5	6
2	6	12	20	30	42
3	12	30	60	105	168
4	20	60	140	280	504
5	30	105	280	630	
6	42	168	504		

3e TRANCHE

1	3	6	10	15	21
3	12	30	60	105	168
6	30	90	210	420	756
10	60	210	560		
15	105	420			
21	168	756			

Premières tranches du cube arithmétique de Laisant.[1289]

Diverses symétries apparaissent dans le cube arithmétique, en particulier « la triple symétrie de l'ensemble autour de la droite formant des angles égaux avec les trois axes. » Tout plan d'équation $x + y + z = n$ (perpendiculaire à cette droite) contient les centres des cubes dont les coefficients correspondent au développement du trinôme $(x + y + z)^n$.

Le cube arithmétique n'est qu'un cas particulier d'un cube de sommes « par analogie avec les tableaux de sommes à deux dimensions »[1290]. Ces cubes de sommes sont construits suivant la même règle à la différence que les cubes placés sur les axes du repère ne contiennent pas nécessairement le chiffre 1. Les propriétés déjà signalées dans le cas des tableaux de sommes se généralisent. Si on mène du centre D d'un cube les côtés DA, DB et DC parallèles aux axes du repère avec sur chacun de ses côtés n cubes, la somme des produits des coefficients des cubes de la face ABC par les coefficients du développement de

$$(x + y + z)^n$$

est égale au coefficient placé en D.

[1288] [Laisant, 1891e], p. 9. Laisant obtient ainsi :

$$u_{x,y,z} = \frac{(x+y+z)!}{x!\,y!\,z!}$$

[1289] Ibid.

[1290] [Laisant, 1891e], p. 10.

ÉTUDE GENERALE DES TABLEAUX DE SOMMES

Ce n'est qu'au Congrès de Besançon en 1893 que Laisant étudie les tableaux de sommes de manière plus globale[1291]. Il appelle tableau de sommes tout échiquier arithmétique indéfini dont les termes $u_{x,y}$ vérifient la relation :

$$u_{x,y} = u_{x-1,y} + u_{x,y-1},$$ [1292]

les termes de la première colonne $u_{0,0}$, $u_{1,0}$, $u_{2,0}$ et ceux de la première ligne $u_{0,0}$, $u_{0,1}$ $u_{0,2}$ étant généralement donnés.

L'objet tableau de sommes est connu : Lucas y consacre une large partie du tout premier chapitre du premier volume de sa *Théorie des nombres* parue en 1891[1293]. Laisant souhaite proposer de nouvelles applications liées à cet objet et expliquera en conclusion :

> *Les indications rapides qui précèdent suffiront à faire comprendre les services que peuvent rendre les tableaux de sommes, soit pour la pratique du calcul, soit pour la recherche de certaines propriétés arithmétiques ou algébriques.*[1294]

À travers de multiples applications, Laisant aborde deux aspects du support visuel que constituent les tableaux de nombres. Il met à disposition un appui graphique à des algorithmes de calculs (voir le calcul de produits de polynômes ou celui de la somme des cubes des coefficients binomiaux). Un regard attentif des valeurs obtenues et de leur disposition permet également la recherche de nouvelles relations pour la suite de Fibonacci par exemple : les résultats de Lucas et l'écriture symbolique sont deux outils importants de cette utilisation, comme nous allons le voir.

Une première application du principe de construction d'un tableau de sommes est la manipulation de polynômes. En plaçant les coefficients d'un polynôme P(z) sur une diagonale portant les coefficients

$$u_{x,y}\ ,\ u_{x-1,y+1}\ , u_{x-2,y+2}\ \ldots$$

et en formant le tableau de sommes à partir de cette diagonale (et non à partir des premières ligne et colonne), on obtient par lecture des coefficients placés sur les diagonales inférieures le produit de ce polynôme par les puissances successives de (z + 1).

[1291] [Laisant, 1893a], "Sur les tableaux de sommes; Nouvelles applications", AFAS, Besançon, 1893/2, p. 206-216.

[1292] « chaque terme est [donc] la somme de celui qui est placé à sa gauche et de celui qui est placé immédiatement au-dessus. » [Laisant, 1893a], p. 206.

[1293] [Lucas, 1891a], p. 7-11.

[1294] [Laisant, 1893a], p. 215.

						0				
					1	1	1	1	1	1
				−2	−1	0	1	2	3	
			0	−2	−3	−3	−2	0		
		1	1	−1	−4	−7	−9			
	0	1	2	1	−3	−10				
0		1	3	4	1					
		1	4	8						
		1	5							
		1								

Tableau de somme utilisé pour calculer le produit de $z^3 - 2z + 1$ par $(z + 1)^5$ soit $z^8 + 5z^7 + 8z^6 + z^5 - 10z^4 - 9z^3 + 3z + 1$[1295]

Laisant insiste : « C'est même là le procédé de calcul le plus simple pour effectuer une telle multiplication, et, à ce titre, les tableaux de sommes mériteraient d'entrer dans l'enseignement, même élémentaire. »[1296] De la même manière, en plaçant les coefficients d'un polynôme en colonne, en complétant le début des colonnes adjacentes par le même coefficient de plus haut degré, le tableau de somme que l'on obtient donne les résultats des multiplications et des divisions successives par les puissances de $z - 1$.

Une propriété « triple » des tableaux de sommes est mise en avant par Laisant : elle est utilisée à plusieurs reprises et marque l'intérêt que Laisant porte aux travaux de Lucas, puisqu'il explique que ce dernier en est l'auteur. Cette propriété, déjà énoncée au congrès de 1891, affirme qu'étant tracé un triangle rectangle isocèle ABC sur le tableau arithmétique (A et C sur une même ligne, A et B sur une même colonne), il existe une relation entre les $n + 1$ coefficients α_i placés sur la ligne BC, les n coefficients β_i rencontrés « en marchant de A vers C »[1297] et les n coefficients γ_i placés sur AB. Laisant écrit ces relations sous forme symbolique et obtient trois égalités de la forme :

$$\beta_0 = \alpha_0[1 + \alpha]^{(n)}$$

« les exposants devant être transformés en indices »[1298]. Cette propriété est ensuite appliquée dans le cadre du carré de Fermat généralisé. C'est exactement la figure que l'auteur avait dressée au Congrès de Marseille en 1891 qui est réutilisée ici. En choisissant successivement $n - 1$ triangles ABC, il obtient les relations

[1295] [Laisant, 1893a], p. 208. La lecture des coefficients placés sur les diagonales supérieures s'interprète aussi comme le développement en série entière du quotient de P(z) par $(z + 1)$, $(z + 1)^2$, $(z + 1)^3$, …

[1296] Ibid, p. 207.

[1297] Ibid., p. 207.

[1298] Ibid., p. 207. Cette relation rappelled les écritures symboliques utilisées dans lecalcul des équipollences.

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p p^k c_p = 0$$

pour $k = 1, \ldots, n-1$. Ces relations subsistent si les coefficients p sont changés en des termes d'une suite arithmétique (α_p), et Laisant énonce le résultat suivant : dans le tableau rectangulaire à n lignes et $n + 1$ colonnes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_n \\ \ldots & & & \\ \alpha_0^{n-1} & \alpha_1^{n-1} & & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les termes d'une progression par différence), les déterminants obtenus en supprimant la $1^{\text{ère}}$, la $2^{\text{ème}}$, .. , la $(n + 1)^{\text{ème}}$ colonne sont proportionnels aux coefficients du développement de $(z + 1)^n$. Il reprend ici de manière plus générale une propriété qu'il avait exprimée (mais non démontrée) lors de sa communication à la SMF « Expression des coefficients du binôme par des déterminants »[1299] (le 15 mai 1893) lorsque la progression par différence est celle des entiers naturels 1, 2, 3, …, n + 1. Laisant précise : « Nous en avions trouvé une démonstration purement algébrique assez compliquée, tandis que celle qui précède est au fond d'une simplicité extrême, grâce à l'emploi du théorème du triangle rectangle »[1300]. Laisant reviendra une dernière fois sur cette propriété du déterminant de Vandermonde. Il reprendra une voie algébrique, mais cette fois-ci élémentaire[1301].

Parmi les nombreuses autres applications proposées, nous en signalerons seulement deux.

La somme des cubes des coefficients binomiaux

Le calcul de la somme des cubes des coefficients binomiaux $c_0, c_1, \ldots, c_n$ est « un problème qui paraît difficile, et que nous n'avons pas la prétention de résoudre »[1302]. Le triangle arithmétique rectangle formé à partir d'une diagonale $u_{x,y}$, $u_{x-1,y+1}$, $u_{x-2,y+2}$ … portant les carrés des coefficients binomiaux permet cependant un calcul pratique. Le résultat recherché est le coefficient placé à l'angle droit comme le montre l'expression précédente de β_0.

1299 "Vie de la société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 21, 1893, p. 66.
1300 Ibid., p. 211.
1301 [Laisant, 1896a], "Propriété des coefficients du binôme", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 24, 1896, p. 197-199.
1302 [Laisant, 1893a], p. 213.

				1
			16	17
		36	52	69
	16	52	104	173
1	17	69	173	346

Exemple donné pour le calcul de $1^3 + 4^3 + 6^3 + 4^3 + 1^3 = 346$[1303]

Ainsi, le support visuel du tableau de sommes, s'il ne permet pas de résoudre le problème, est un outil précieux de mise en place d'un algorithme. Remarquons que cette question continuera d'intéresser Laisant : on en trouve une trace dans *L'Intermédiaire des mathématiciens* en 1894 :

> **42[A1c] le problème suivant :* Trouver la somme des cubes des coefficients du développement de $(x + 1)^n$*, est resté jusqu'ici, paraît-il, sans solution ; un correspondant pourrait-il signaler des recherches publiées sur ce sujet ou s'y rattachant ?* [1304]

Ce problème sera résolu par J. Franel, professeur d'analyse puis directeur de l'École polytechnique fédérale de Zurich, dans la même revue en 1894[1305].

Une application à la suite de Fibonacci.

Une autre des applications des tableaux de somme est l'étude de la suite de Fibonacci. Même si son traitement ne s'appuie pas toujours sur une trace visuelle, nous proposons de nous arrêter sur cet objet des mathématiques discrètes, qui apparaît à plusieurs reprises chez Laisant. On peut sûrement voir dans les diverses études de la célèbre suite par Laisant l'influence de Lucas qui glorifie « la sainte trinité Fermat, Fibonacci, Pascal »[1306]. Mais cette influence ne se limite pas seulement à la suite de Fibonacci. Ainsi dans un article de 1881, « Sur les séries récurrentes dans leur rapport avec les équations »[1307], Laisant s'inspire de travaux de Lucas sur ses fonctions U_n et V_n[1308] : « l'auteur a ouvert là une voie nouvelle et fort

[1303] Ibid.
[1304] *L'intermédiaire des mathématiciens*, 1, 1894, p. 17.
[1305] Voir Franel J. "On a Question of Laisant." *L'intermédiaire des mathématiciens* 1, 1894, p. 45-47.
Franel J. "On a Question of J. Franel." *L'intermédiaire des mathématiciens* 2, 1895, p. 33-35.
[1306] Lettre de Lucas à E. Césaro datée du 4 octobre 1890 cité dans [Décaillot-Laulagnet, 1999].
[1307] [Laisant, 1881e], "Sur les série récurrentes dans leur rapport avec les équations", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques,* Sér. 2, 5, 1881, p. 218-250. Voir aussi [Dickson, 1919], vol. I, p. 408.
[1308] Lucas É., *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Bruxelles, 1878.
Voir [Barbin, Borowczyk, Chabert, Guillemot, Djebbar, Martzloff, Michel-Pajus, 1995], p. 290-295. Remarquons le traitement graphique que réserve Lucas au calcul de résidus à l'aide d'un échiquier dont les cases noircies représentent les unités des différents ordres du système binaire ici utilisé (Ibid., p. 293).

originale pour ceux qui s'occupent de la science des nombres »[1309]. Mais, dans le cadre que s'est fixé ici Laisant (équations à coefficients quelconques), le lecteur « ne trouvera donc pas dans ce qui va suivre une généralisation des travaux de M. Lucas, à proprement parler, mais plutôt une étude analogue au début et différente dans les développements »[1310].

Rappelons également les travaux de d'Ocagne sur le même sujet, travaux dont s'empare Laisant. Dans l'article de 1901 « Sur certaines suites récurrentes »[1311], l'auteur y reprend un cas particulier d'une étude de d'Ocagne parue dans le *Journal de l'École polytechnique*[1312] et s'attache à la détermination du terme général d'une suite u vérifiant une relation

$$u_{n+k} - a_1 u_{n+k-1} - \ldots - a_n u_k = h.$$

Quoi qu'il en soit, pour en revenir à la communication du congrès de l'AFAS de 1893, Laisant étudie la suite de Fibonacci « en prolongeant cette série dans les deux sens »[1313] :

13 -8 5 -3 2 -1 1 0 1 1 2 3 5 8.

En plaçant les termes dans un tableau de somme, il fait apparaître les termes de la suite de diverses manières (intégralement en colonne et dans les diagonales "ascendantes", de deux en deux suivant les lignes etc.).

1309 [Laisant, 1881d], p. 218.
1310 [Laisant, 1881c], p. 219.
1311 [Laisant, 1901b], "Sur certaines suites récurrentes", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 29, 1901, p. 145-149. Voir aussi [Dickson, 1919], vol. I, p. 408 et 410.
1312 D'Ocagne, "Mémoire sur les suites récurrentes", *Journal de l'École polytechnique*, 64ème cahier, 1894, p. 151. D'Ocagne y souligne la thèse de Désiré André sur le sujet. (Remarque : Laisant n'a apparemment jamais publié dans ce journal qui paraît de 1794 à 1939).
1313 [Laisant, 1893a], p. 213. Il remarque d'ailleurs que $u_{-p} = (-1)^{p+1} u_p$.

		89	34	13	5	2	1	1	2	5	13	
		−55	−21	−8	−3	−1	−0	1	3	8	21	
	89	34	13	5	2	1	1	2	5	13	34	
	−55	−21	−8	−3	−1	0	1	3	8	21	55	
89	34	13	5	2	1	1	2	5	13	34	89	
−55	−21	−8	−3	−1	0	1	3	8	21	55	144	$\rightarrow y$
34	13	5	2	1	1	2	5	13	34	89		
−21	−8	−3	−1	0	1	3	8	21	55			
13	5	2	1	1	2	5	13	34	89			
−8	−3	−1	0	1	3	8	21	55				
5	2	1	1	2	5	13	34	89				
−3	−1	0	1	3	8	21	55					
2	1	1	2	5	13	34	89					
−1	0	1	3	8	21	55						
1	1	2	5	13	34	89						
0	1	3	8	21	55							
					$\downarrow$							
					x							

Tableau de sommes utilisée pour l'étude de la suite de Fibonacci[1314].

Laisant explique que la case de coordonnées (x, y) contient le terme u_{x+2y} . Appliquant le théorème attribué à Lucas, il obtient des relations qu'il écrit sous forme symbolique, comme par exemple :

$$u_p = u_{p+n}\,[u-1]^{(n)}$$

(avec les conventions habituelles) et qu'il traduit en l'énoncé suivant : « En multipliant symboliquement un terme quelconque de la série de Fibonacci par $[u-1]^{(n)}$, on le fait reculer de n rangs. »[1315]

L'étude de la suite de Fibonacci demeure un sujet, certes marqué, mais extrêmement tardif dans l'œuvre de Laisant. On trouve des indices de l'intérêt pour cette question avec une communication à la Société mathématique de France « Sur quelques propriétés de la série de Fibonacci », le 22 novembre 1899[1316], ou encore la question 1652 parue dans *L'Intermédiaire des mathématiciens*[1317].

[D2b] « A-t-on déjà étudié la série

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$$

[1314] Ibid., p. 214.
[1315] Ibid., p. 215.
[1316] Voir "Vie de la société", *BSMF*, t. 27, 1999, p. 298.
[1317] *L'IM*, t. 6, nov. 1899, p. 242.

que forment les inverses des termes de Fibonacci, et qui est évidemment convergente ? »

Mais c'est à l'extrême crépuscule de sa vie que l'on trouve les principales contributions de Laisant sur le sujet. Dans l'article de 1919 « Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci » [1318], Laisant considère les côtés a, b, c d'un triangle rectangle dont les mesures sont entières. À partir de ces côtés, il retrouve quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci[1319]. Inversement, les triangles rectangles formés à partir de groupes successifs de quatre termes de la suite de Fibonacci ont des côtés dont le rapport de b sur a tend vers 2. En opérant des changements dans chacun des quatre groupes de termes (par permutation), Laisant obtient des séries de triangles ayant diverses propriétés (tels que $a - b$ soit toujours égal à l'unité par exemple), ce qu'il vérifie, tableau de valeurs à l'appui.

Enfin, l'article « Les deux suites fibonaciennes fondamentales (u_n) (v_n) »[1320] mérite qu'on s'y attarde. Il constitue l'un des derniers écrits de Laisant daté de janvier 1920 avec un autre article, de nouveau réservé à *L'Enseignement mathématique*, sur l'« Extension du problème des triangles héroniens »[1321], daté de mars 1920 : Laisant décède le 5 mai 1920[1322]. L'article constitue principalement en une table des 120 premiers termes des deux suites dites de Fibonacci, complétée par quelques remarques, dénuées de démonstration mais visibles dans ce tableau (comme par exemple u_{5n} est divisible par 5 ou $u_{2n} = u_n v_n$…)[1323]. Au sujet de cette table, Brocard explique qu'il semble qu'elle soit « le tableau le plus étendu publié à ce jour »[1324], alors qu'une liste des 45 premiers termes avait déjà été dressée par E. Catalan[1325] et

---

1318 [Laisant, 1919a], "Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 19, 1919, p. 391-397.
Voir aussi A. F. Horadam, "Fibonacci Number Triples", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 68, No. 8 (Oct., 1961), p. 751-753.

1319 Il s'agit des nombres M, N , P et Q tels que :

$$a = P^2 - N^2 \,;\, b = 2PN \,;\, c = P^2 + N^2 \,;\, M = P - N \text{ et } Q = P + N.$$

1320 [Laisant, 1920a], "Les deux suites fibonaciennes fondamentales (u_n) (v_n). Tables de leurs termes jusqu'à n = 120", *L'enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 52-56.
Voir aussi Morgan Ward, " The prime divisors of Fibonacci numbers", *Pacific J. Math*. Volume 11, n° 1, 1961, p. 379-386.

1321 [Laisant, 1920b], "Extension du problème des triangles héroniens", *L'enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 82-84.

1322 H. Fehr annonce le décès de Laisant la page suivant cet article et s'exprime ainsi : « Nous avons encore eu le privilège de le voir à son domicile à la fin du mois de mars ; sa santé était déjà ébranlée, mais, malgré son grand âge, il avait conservé toute l'ardeur de son intelligence. […] La Note qui précède, et qui est sans doute l'un de ses derniers travaux mathématiques, avait encore été corrigée de sa main, et la mise en page était déjà faite jusqu'à cette place. » Fehr H., "C.-A. Laisant", *L'enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 57.

1323 Laisant se serrait-il inspiré d'une préoccupation de certains mathématiciens matérialisée par la question 1541 de *L'intermédiaire des mathématiciens* : « Quel est le procédé le plus expéditifs pour calculer un terme éloigné dans la série de Fibonacci ? » (de Rocquigny, t. 6, juillet 1899, p. 148).

1324 [Brocard, 1920], Brocard H., "Mélanges et correspondance – A propos d'un article de M. Laisant sur la série de Fibonacci.", *L'enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 136.

que Moret-Blanc avait étudié les 60 premiers termes pour répondre à une question de Lucas sur la périodicité du chiffre des unités[1326].

LE SOUTIEN A L'ŒUVRE D'HENRI DELANNOY

L'intérêt que Laisant porte aux échiquiers arithmétiques est indissociable de sa volonté de faire connaître les travaux d'Henry Auguste Delannoy. Il consacre d'ailleurs un article résumant la vie de ce dernier pour *La Grande Encyclopédie*. On y apprend que celui qui a généralisé les échiquiers arithmétiques en y introduisant des formes triangulaire, pentagonale ou hexagonale est entré à l'École polytechnique en 1853 avant de devenir officier dans l'artillerie, puis intendant militaire. Laisant conclut en expliquant que l'œuvre de Delannoy sur les tableaux de nombres « lui a fourni des solutions simples, parfois immédiates, de problèmes qu'il serait souvent, sinon impossible, du moins très difficile d'aborder par les procédés ordinaires, surtout en ce qui concerne certaines questions de probabilités. »[1327]

Précisons le parcours de cet homme et ses relations avec Laisant[1328]. Henri Auguste Delannoy est né en Haute-Marne en 1833 mais une grande partie de sa vie (enfance, études secondaires, mariage, retraite militaire) se déroule dans la Creuse et plus particulièrement dans la ville de Guéret[1329]. H. A. Delannoy prépare cependant, comme Laisant, son entrée à l'École polytechnique au sein de l'Institution Sainte-Barbe. Il intègre la prestigieuse École en 1853 et en sort 67ème sur 94 en 1855 et rentre à l'École d'application de Metz en 1856 (il sera capitaine en 1863, puis sous-intendant à partir de 1867 jusqu'en 1888 où il démissionne et rejoint Guéret). Delannoy se lie rapidement d'amitié avec Lucas et lui propose son aide pour ses recherches à travers des solutions de problèmes rencontrés. Les deux hommes montrent le même intérêt pour les jeux mathématiques (le jeu du Taquin par exemple), ils côtoient Laisant bien sûr, mais aussi Genaille, Moreau … Delannoy établit une correspondance avec un grand nombre de mathématiciens français de l'époque. Laisant et Lucas présentent d'ailleurs à la

---

1325 "Note sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries", *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. 45, 1883 et "Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues", *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. 52, 1893 cité dans [Brocard, 1920].

1326 Moret-Blanc, "Questions nouvelles d'arithmétique supérieure proposées par M. Édouard Lucas", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 2, 20, 1881, p. 253-265 et Lucas, Édouard, "Questions nouvelles d'arithmétique supérieure", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 2, 15, 1876, p. 82-83.

1327 Laisant C.-A., « Delannoy », [Berthelot & al., 1885], t. 13, p. 1164.

1328 Nous renvoyons à [Schwer, Autebert, 2006], [Banderier, Schwer, 2005], [Schwer, Autebert, Décaillot, 2006].

1329 Il est rappelé dans l'article [Schwer, Autebert, 2006] que la franc-maçonnerie a tenu une place importante dans le département de la Creuse. Si les auteurs n'ont pas trouvé de traces d'appartenance de Delannoy à une loge, nous pouvons nous interroger avec eux sur les liens que ce contexte a pu favoriser, avec des francs-maçons réputés comme Laisant en particulier (et ce malgré les divergences sur le sujet religieux des deux hommes).

SMF lors de la séance du 17 novembre 1882 le nom de Delannoy qui sera élu membre la séance suivante, le 1er décembre 1882[1330].

Outre sa participation à *L'Intermédiaire des mathématiciens*, l'œuvre mathématique de celui qui deviendra président de la Société d'archéologie et des sciences naturelles de la Creuse se résume en une dizaine d'articles. Nous signalons surtout « Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques » ([Delannoy, 1886]) où l'auteur résout le problème suivant « De combien de manières peut-on disposer 2n nombres sur 2 rangées de n nombres, de telle sorte que les nombres croissent toujours de gauche à droite et de haut en bas »[1331] et « Formules relatives aux coefficients du binôme » ([Delannoy, 1890]) où il cherche une formule simple pour la somme des *q* premiers coefficients du binôme. On voit la proximité des recherches de Delannoy avec une partie de celles de Laisant. Mais ses travaux les plus importantes restent : « Sur la durée du jeu » (*BSMF*, 1888), « Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilités » (AFAS, 1889 : Laisant lui conseille pour cette communication de généraliser à la reine la marche de la tour sur un échiquier[1332]), ou encore « Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités » (AFAS, 1895).

Laisant soutient les travaux sur les tableaux de nombres tels que ceux de Delannoy (ou Lucas) à travers des notices dans *La Grande Encyclopédie* (article « Échiquier », « Delannoy ») mais aussi grâce à sa fonction de secrétaire de la commission du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, participation sur laquelle nous reviendrons plus loin. Nous pouvons cependant signaler ici que c'est Laisant, en tant que membre de la SMF, qui en 1898 maintient les sections Q4b et Q4c (respectivement intitulées « Problèmes sur les jeux d'échecs, de dominos, etc. ; α. Carrés magiques » et « Problèmes analogues divers ») au sein du chapitre Q (géométrie). Alors que, en 1908, ces thèmes seront relayés en dernière position dans la section X10 « jeux et récréations mathématiques »[1333].

III.5.2. Une collaboration fructueuse avec G. Arnoux

Si les travaux de Charles-Ange Laisant autour de la géométrie de situation sont marqués par les influences d'Halphen, d'Ocagne ou Lucas, ils sont également le sujet d'une

[1330] "Vie de la société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 11, 1883, p. 108. Rappelons que Laisant est membre de cette Société depuis 1874 (membre du conseil de depuis 1882) et Lucas depuis 1875.
[1331] [Delannoy, 18886], p. 183. Delannoy se réfère aux travaux de Tarry et à ceux de Lucas (AFAS, 1883).
[1332] [Schwer, Autebert, 2006], p. 22.
[1333] [R. Schwer, Autebert, 2006], p. 17.

forte collaboration avec Gabriel Arnoux autour des carrés hypermagiques et plus généralement de l'arithmétique graphique. Cette collaboration est tardive et intervient au moment où l'œuvre mathématique de Laisant est quasiment achevée mais où sa production pédagogique commence. Laisant serait-il une fois de plus séduit par le potentiel didactique qu'offrent des objets visuels comme les espaces hypermagiques ?

En 1894, Laisant présente à la Société mathématique de France les « Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques »[1334]. Les deux hommes sont en effet sur le point de publier *Arithmétique graphique ; les espaces arithmétiques hypermagiques*[1335], ouvrage reprenant les travaux que mène depuis longtemps l'ancien officier de la marine. Voici comment Laisant présente sa collaboration avec Gabriel Arnoux : « L'auteur, qui vit dans une petite commune des Basses-Alpes, en dehors du mouvement mathématique contemporain, a bien voulu faire appel à mon amitié pour me demander de l'aider dans la rédaction de ce volume ; et j'ai donc été conduit à étudier ses méthodes avant qu'elles n'aient été soumises au public. »[1336]

Gabriel Arnoux : l'ami amateur[1337] de sciences

Dans la nécrologie qu'il consacre à son ami pour *L'Enseignement mathématique*[1338], il retrace la carrière de cet ancien Enseigne de vaisseau dont la vie est effectivement rattachée à sa ville natale. Né aux Mées dans les Basses-Alpes en 1831, cet ancien élève de l'École Navale (il y fut admis en 1846) se retire dans ce même village (dont il deviendra maire) après 1858 et s'adonne, outre à la culture de vers à soie (voir sa collaboration avec Pasteur dont on trouve traces dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*[1339]), à des recherches

[1334] [Laisant, 1894d], "Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 22, 1894, p. 28-36. Voir aussi l'avis d'un autre ami de Laisant, H. Brocard dans "Arithmétique graphiques-Les espaces arithmétiques hypermagiques par M. G. Arnoult", *Mathesis*,s. 2, t. 4, 1894, p. 273.
[1335] Arnoux Gabriel, *Arithmétique graphique - Les espaces arithmétiques hypermagiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1894.
[1336] [Laisant, 1894d], p. 28. H. Brocard écrit dans la bibliographie concernant l'ouvrage en question : « Notre savant collègue, M. Laisant, a bien voulu collaborer à ce livre. Nous pensons que le seul fait de sa part de s'y être intéressé est la meilleure preuve que nous puissions donner de la grande portée philosophique d'un ouvrage que nous recommandons aux mathématiciens curieux de connaître *la raison des choses* », *Mathesis*, s. 2, t. 4, 1894, p. 280.
[1337] Sur ce terme, dont Arnoux semble une illustration pertinente, nous renvoyons de nouveau à [Romera-Lebret, 2009].
[1338] [Laisant, 1913c], "Nécrologie: Gabriel Arnoux", *L'Enseignement mathématiques,* 15, 1913, p. 337-339. Ces renseignements sont complétés par les recherches de Christian Boyer (www.multimagie.com).
[1339] *CRAS*, t. LXXI, p. 207.

mathématiques publiées notamment dans les *Comptes rendus de la Société scientifique des Basses-Alpes*.

Mais c'est surtout les congrès de l'AFAS qui vont recueillir la majeure partie des résultats d'Arnoux. En 1885, il est l'auteur d'une communication intitulée « Solution des carrés de magie diverse de tous les nombres entiers sans exception »[1340], où les multiples exemples proposés annoncent une méthode plus générale sur les espaces hypermagiques. Or, la même année, Lucas intervient sur le même sujet : il expose la méthode de Fermat pour la « construction de carrés magiques »[1341]. Il y critique vivement les travaux d'Arnoux : de là naîtra une profonde inimitié entre les deux hommes. Arnoux poursuit cependant ses recherches sur les espaces magiques et les fait connaître auprès de l'Académie des sciences (dont le président de l'époque a été son commandant dans la Marine). Il lancera un dernier défi à Lucas dans les pages de *La République française* en août 1899 toujours au sujet des méthodes de construction de carrés magiques[1342].

Arnoux est élu au sein de la SMF le 15 juin 1892 conjointement avec Élie Perrin : les deux hommes avait été parrainés par Laisant et d'Ocagne[1343]. Il ne publiera néanmoins qu'un seul article pour son *Bulletin*.

Il sera en revanche l'auteur en 1890 d'une *Algèbre graphique*[1344], mais surtout de quatre volumes publiés sous le titre *Essais de psychologie et de métaphysique positives ; arithmétiques graphiques* entre 1894 et 1911. On y trouve : *Arithmétique graphique*: *les espaces arithmétiques hypermagiques* (1894), *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* (1906), *Arithmétique graphique*: *les espaces arithmétiques, leurs transformations* (1908) et enfin un *Essai de Géométrie analytique modulaire à deux dimensions* (1911)[1345]. Laisant a participé activement à la rédaction de ces ouvrages, Gaston Tarry également pour ce qui concerne les deux derniers. Notons que Tarry propose à la SMF

[1340] Arnoux Gabriel, "Solution des carrés de magie diverse de tous les nombres entiers sans exception, AFAS, Grenoble, 1886/1, p. 94.

[1341] Lucas Édouard, "Construction des carrés magiques", AFAS, Grenoble, 1886/1, p. 93. Solution déjà publiée, entre autre, dans le *Journal de mathématiques élémentaires*. Sur Fermat, nous renvoyons à [Itard, 1949] et [Goldstein, 2004].

[1342] Il s'agit (en trois mois et pour 10 000 francs) de « produire, sur la question des *espaces magiques à un nombre quelconque de dimensions*, quelque chose d'aussi puissant, d'aussi simple et d'aussi clair que ce que j'obtiens par mes petits procédés métaphysiques ». Le défi n'a jamais été relevé. (source : C. Boyer)

[1343] SMF, "Vie de la société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 46.

[1344] Arnoux Gabriel, *L'Algèbre graphique*, Chaspoul-Constans-Barbaroux, Digne, 1890.

[1345] Arnoux Gabriel, *Arithmétique graphique - Les espaces arithmétiques hypermagiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1894. Arnoux Gabriel, *Arithmétique graphique - Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1906. Arnoux Gabriel, *Arithmétique graphique - Les espaces arithmétiques, leurs transformations*, Gauthier-Villars, Paris, 1908. Arnoux Gabriel, *Essai de géométrie analytique modulaire à deux dimensions*, Gauthier-Villars, Paris, 1911.

en 1911 une correspondance dédiée à la magie arithmétique et y rappelle que Poincaré lui-même est à l'origine de réflexion sur le sujet à l'Académie des sciences.[1346]

Le terme de métaphysique utilisé dans le titre illustre les objectifs de ce passionné de philosophie. Laisant explique : « Le terme de Métaphysique positive représentait à ses yeux une science des raisonnements, s'appuyant sur les observations et l'expérience, mais pouvant s'appliquer ensuite à toutes les recherches dont est capable l'humanité »[1347]. Il souligne que le premier ouvrage contient « peut-être pour la première fois, […] des considérations vraiment scientifiques sur les questions de magie arithmétique »[1348] et précise le mode de pensée de Arnoux, féru de géométrie : « La puissance d'invention d'Arnoux était prodigieuse ; mais il lui fallait pour ainsi dire concrétiser les objets de ses recherches pour en saisir les rapports. Il mettait une sorte de coquetterie à se déclarer exclusivement *visuel* et à proclamer son incapacité à comprendre le langage algébrique, pour lequel, disait-il, il éprouvait une sorte de phobie. »[1349] On comprend alors que les conceptions des deux hommes aient pu faciliter leur collaboration.

Dans la communication à la SMF de 1894, tout comme dans cette nécrologie, Laisant revient de manière très respectueuse sur le travail de cet homme isolé des cercles savants traditionnels. Il écrit : « il se sentait, à cause de son éloignement de l'analyse mathématique, en mauvaise situation pour présenter une exposition de ses idées ; et c'est ce qui le détermina à demander le concours de collaborateurs »[1350]. La nécrologie se termine par une mise en perspective de la potentialité que les travaux d'un amateur peuvent offrir : « En résumé, celui qui vient de nous être enlevé n'eut pas une grande notoriété de son vivant parmi les mathématiciens. Cela n'empêche pas que sa mémoire doit être pieusement conservée, et que parmi les jeunes, plus d'un pourra trouver profit à étudier ses œuvres, en essayant de creuser plus profondément les sillons qu'il a tracés »[1351]

1346 Tarry Gaston, "Correspondance - Sur la magie arithmétique", *BSMF*, 39, 1911, p. 523-526. Voir aussi la séance du 26 mars 1906 de l'Académie des sciences pour les travaux de Poincaré et d'autres travaux de Tarry : Tarry, Gaston, "Carrés magiques supérieurs". *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 19, 1900, p. 176-177 ; "Curiosité mathématique". *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 18, 1899, p. 156-156 ; "Les lignes arithmétiques". *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 18, 1899, p. 149-155.

1347 [Laisant, 1913c], p. 338. Cette remarque peut notamment être rapprochée de la conclusion d'une intervention commune Laisant-Arnoux à l'AFAS en 1900 (voir plus loin).

1348 Ibid.

1349 Ibid.

1350 Ibid.

1351 [Laisant, 1913c], p. 339.

LAISANT ENCOURAGE LES RECHERCHES D'ARNOUX

Gabriel Arnoux est ainsi l'auteur méconnu d'un article sur un procédé mécanique de recherche de la décomposition d'un polynôme (cela constitue, on l'a vu, sa seule participation au *Bulletin de la SMF*[1352]). Laisant fera d'ailleurs en sorte de faire connaître ce travail, dont on peut imaginer l'intérêt qu'il a pu susciter chez le promoteur d'autres instruments mathématiques comme le compas trisecteur[1353].

De manière générale, Laisant, visiblement impressionné par l'esprit d'invention d'Arnoux, souhaitera faire connaître encore en 1908 un de ses résultats sous le titre « Théorème d'Arnoux » dans l'article « Un nouveau théorème d'arithmétique » paru dans *L'Enseignement mathématique*[1354]. Cet article éclaire aussi les liens que tissent Laisant, Tarry[1355] et Arnoux autour des recherches de ce dernier :

> *A propos des tables de numération inverses, dans son* Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques *(p. 29-31) M. Gabriel Arnoux a en effet établi implicitement le théorème en question, par une constatation faite sur les figures, laquelle est une véritable démonstration. En examinant cette partie intéressante du livre dont il s'agit, M. Gaston Tarry, dont j'avais attiré l'attention sur ce point, a formulé l'énoncé, et en a déduit certaines applications qu'il m'a fait connaître, soit par correspondance, soit dans d'assez nombreuses conversations. Nous croyons, lui et moi, que le théorème mérite de devenir classique, qu'il fait ressortir les avantages de la méthode graphique en matière d'invention et qu'il est de toute équité de lui attribuer le nom du créateur de cette méthode.*[1356]

La propriété porte sur la relation que l'on peut établir entre les quotients d'un entier décomposable en produit de facteurs qui sont premiers entre eux deux à deux et chacun de ces facteurs. Elle est complétée par divers corollaires, études de cas particuliers ou d'applications proposées par Laisant (comme, étant donnée une fraction irréductible dont le dénominateur est $m_1m_2\ldots m_n$ avec m_1, m_2, … et m_n premiers entre eux deux à deux, écrire cette fraction

---

[1352] Arnoux Gabriel, "Technologie graphique ; appareil pour la décomposition d'un polynôme en facteurs", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 21, 1893, p. 87-92

[1353] Dans les *NAM*, on parle de la « bienveillante érudition de M. Laisant » qui a fait connaître les travaux d'Arnoux. Deny L., "Note sur la représentation géométrique des polynômes algébriques", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 4, t. 5, 1905, p. 193-211.

[1354] [Laisant, 1908a], "Un nouveau théorème d'arithmétique", *L'enseignement mathématique*, 10, 1908, p. 220-225. Laisant insiste sur le caractère inédit de la propriété énoncée : « Cette qualification de «nouveau», que nous donnons au théorème en question, paraît véritablement justifiée, à la suite de recherches assez attentives et multipliées faites par plusieurs personnes. » ([Laisant, 1908a], p. 220). Il se trouve que le résultat annoncé est connu de Gauss et se retrouve dans les mathématiques anciennes chinoises comme cela sera précisé à Laisant par un lecteur américain de *l'enseignement mathématique* (voir "Mélanges et correspondances-A propos d'un théorème de M. Arnoux, lettre adressée à M. Laisant", l'*EM*, 11, 1909, p. 302).

[1355] Laisant fera par exemple de la commission d'examen des papiers de Tarry à la mort de celui-ci (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, série X, t. VI et VII, 1914-1915, p. 20).

[1356] [Laisant, 1908a], p. 220.

comme la somme, à un entier près, de fractions dont les dénominateurs sont m_1, m_2, … et m_n)[1357].

Laisant profite de l'occasion pour proposer au lecteur un aperçu des tables de numérations inverses desquelles Arnoux a tiré le fameux théorème. Ces tables ont fait l'objet de l'ouvrage *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* de 1906. Elles permettent par exemple de trouver le nombre qui s'écrit m_1m_2 (où m_1, m_2 sont deux nombres entiers premiers entre eux) connaissant les restes des divisions de ce nombre par m_1 et m_2. En généralisant, des tables parallélépipédiques permettent la recherche d'un entier de la forme $m_1m_2m_3$ connaissant les restes des divisions de ce nombre par m_1, m_2 et m_3. Comme l'explique Laisant, la construction de telles tables est délicate pour le cas des dimensions supérieures à trois, mais de tels tableaux numériques offrent de véritables avantages, leur « considération est utile pour la recherche et l'étude de certaines propriétés arithmétiques »[1358].

Ayant obtenu la nationalité monégasque grâce à ses travaux mathématiques, G. Arnoux se retirera dans la principauté en 1910[1359] et y décèdera en 1913, la même année que G. Tarry. Il aura été en correspondance avec Laisant jusqu'en décembre 1912.

PRESENTATION DES TRAVAUX SUR LES ESPACES HYPERMAGIQUES

En 1894, la communication « Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques » ([Laisant, 1894d]) est la première pierre de la collaboration d'Arnoux avec Laisant. Ce dernier est loin en effet de minimiser le potentiel de la théorie développée par son ami :

> *Il y a en effet une telle originalité, une telle puissance d'invention dans les méthodes dont il s'agit, que je serais bien étonné si l'Arithmétique n'arrivait pas quelque jour à les utiliser, soit pour obtenir des démonstrations plus simples de vérités connues déjà, soit pour découvrir des vérités nouvelles.* […] *il importe de bien comprendre en effet que les constructions de carrés magiques, ou d'espaces magiques en général, auxquelles il* [Arnoux] *s'est appliqué, n'ont guère été pour*

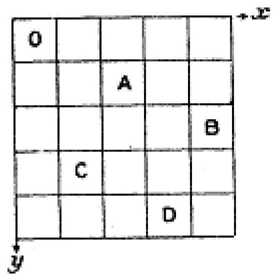
[1357] Voir aussi [Dickson, 1919], vol. II, p. 64.
[1358] [Laisant, 1908a], p. 225.
[1359] Dans une lettre datée du 14 mars 1910, Arnoux écrit à Laisant :

> *Me voilà Monégasque. Cela s'est passé d'une façon bien simple ; les lois de la principauté demandent pour la naturalisation, soit un séjour de dix ans, soit la faveur du Prince. N'ayant aucune haute protection, je me suis adressé au savant, en lui envoyant (hommage de l'auteur) un exemplaire de tous mes travaux mathématiques, et il m'a gracieusement accordé ma demande.*

(lettre citée par C. Boyer sur son site multimagie.com) *lui qu'une occasion d'utiliser des idées générales, ayant une bien autre portée qu'un simple amusement arithmétique.*[1360]

Les espaces hypermagiques dépassent la simple récréation mathématique. Ils permettent une illustration des propriétés de congruences, l'utilisation pertinente de la notion de système de numération et donc de multiples applications comme Laisant le montrera au congrès de l'AFAS en 1900. On retrouve ainsi dans le travail d'Arnoux une véritable « puissance d'invention », c'est-à-dire la capacité pour une théorie de faire émerger naturellement des résultats nouveaux et la généralité des méthodes utilisées pour cela. Nous choisissons d'en exposer brièvement les grandes caractéristiques, comme Laisant le fait auprès des membres de la SMF.

Arnoux appelle « espace arithmétique à une dimension de module m » une droite sur laquelle sont reproduits m objets de manière régulière et infinie dans les deux directions de la droite. On peut parcourir la liste ainsi formée suivant des « marches de pas différents ». Parmi celles-ci, une marche sera dite « magique » lorsqu'elle permet de rencontrer les m objets différents (par opposition aux « marches des identiques »)[1361]. Cette présentation permet d'envisager des espaces arithmétiques modulaires de dimensions quelconques, en privilégiant un module m premier. Laisant s'attache à étudier ceux de dimension deux, qui correspondent à m^2 objets placés dans un carré que l'on reproduit dans les deux directions du plan. Sur cet espace, on peut tracer une droite passant par le centre de deux cases et les objets alors rencontrés sur cette droite forment une « ligne arithmétique » (de direction donnée). L'ensemble des lignes arithmétiques de même direction est appelé par Arnoux « direction arithmétique » Une telle direction est notée $((m))(ax + by)$ par Arnoux, $((m))$ désignant un entier entre 0 et $m - 1$ et (a, b) étant les coordonnées de la première case rencontrée en partant de l'origine O (il y a donc $m + 1$ directions arithmétiques possibles).



Ligne arithmétique $((5))(2x + y)$ *dans l'espace arithmétique de module 5*[1362]

[1360] [Laisant, 1894d], p. 28.
[1361] « On comprend déjà toute l'analogie qui rattache ces considérations graphiques à la théorie des congruences » [Laisant, 1894d], p. 29.
[1362] Ibid., p. 30.

En considérant non plus m^2 objets mais les m^2 nombres 0, 1, …, $m^2 - 1$, la « somme magique » liée au module m est le quotient de la somme de ces entiers par m soit

$$\frac{m(m^2-1)}{2}.$$

Une direction est alors « magique » si la somme des éléments de chacune de ses lignes arithmétiques est égale à la somme magique du module m.

Un carré est magique au sens ordinaire si les deux directions principales sont magiques et si les lignes diagonales le sont aussi. Les « carrés diaboliques » d'Édouard Lucas présentent quatre directions magiques (les deux directions principales et les deux directions diagonales). Finalement, un espace est hypermagique si le nombre de directions magiques est maximal.

Si on dispose les m^2 nombres comme dans l'exemple ci-dessous, on obtient la position appelée par Arnoux « position fondamentale principale de module m »,

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Position fondamentale principale de module 5[1363]

Laisant montre que l'on obtient alors un carré hypermagique. Il expose pour cela la méthode dite des abaques, toujours due à Arnoux, qui consiste à écrit les nombres précédents en base m et à séparer pour chacun les deux chiffres obtenus dans deux tableaux, ou abaques, distincts.

$$(2)\left\{\begin{matrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\end{matrix}\right. \qquad \left.\begin{matrix}0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\end{matrix}\right\}(3)$$

Abaques correspondants à la position fondamentale principale de module 5[1364]

Dans ces abaques, toutes les directions sont magiques, sauf celle des x pour le premier et des y pour le second (directions d'« invariation ») : il en sera donc ainsi pour la position fondamentale et pour toutes les dispositions se déduisant par permutation des lignes ou des colonnes (puisque les deux abaques précédents sont invariants respectivement par permutations des lignes et des colonnes). Sur cette méthode, Laisant précise : « Pour la

[1363] Ibid., p. 32.
[1364] Ibid., p. 33.

construction d'un carré hypermagique, les abaques ne sont pas nécessaires […]. Mais pour l'analyse d'un carré déterminé, cette méthode est pour ainsi dire indispensable et fournit un précieux moyen d'investigation »[1365]. Les abaques imaginés par Arnoux offrent donc un outil de recherche sur des bases visuelles autant qu'un moyen effectif de démonstration s'appuyant sur la numération en base quelconque, sujet que Laisant a de multiples fois abordé dans des travaux antérieurs.

À partir de la position fondamentale, on peut construire d'autres carrés hypermagiques de « disposition habituelle ». Pour cela, on choisit deux directions distinctes dans l'espace arithmétique et on forme le nouveau carré en plaçant les nombres rencontrés sur le nouveau réseau formé par ces deux directions : « Cela donne lieu à un calcul des plus faciles, et cela correspond en somme à la formation d'une figure construite dans l'espace modulaire indéfini, en forme de quinconces, en partant des deux bases $ax + by$, $a'x + b'y$ »[1366]. Nous donnons ci-dessous la concrétisation des propos de Laisant sur cette « transformation en quinconces » :

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23

qui lui permet d'obtenir le nouveau carré magique :

0	7	14	16	23	$\rightarrow \xi$
11	18	20	2	9	
22	4	6	13	15	
8	10	17	24	1	
19	21	3	5	12	
$\downarrow$					
η					

comprenant seulement deux directions non magiques (qui sont les transformées des directions x et y d'origine). Les abaques précédentes correspondant à l'écriture en base m, auxquelles on peut faire subir la même transformation, peuvent permettre là encore de démontrer que l'on conserve un carré magique.

[1365] [Laisant, 1894d], p. 35.
[1366] Ibid., p. 34.

La position fondamentale principale est donc la base de construction de nouveaux carrés hypermagiques. Laisant s'étonne que l'étude de cette disposition simple n'ait pas déjà été entreprise et explique cela principalement par la profondeur de la méthode employée : « on a plutôt cherché jusqu'ici des procédés souvent très ingénieux qu'une méthode allant au fond des choses, comme celle de M. Arnoux ».[1367] Ce qui est proposé ici dépasse donc l'artifice de calcul mais plonge au cœur du nombre entier (à l'aide de la notion sous-jacente de congruence) pour mieux faire ressortir les "propriétés de situation" à utiliser.

Laisant évoque aussi l'intérêt de considérer les entiers de 0 à $m^2 - 1$ (au lieu de 1 à m^2) : « Ce simple changement dans le point de départ était de nature à masquer des propriétés qui deviennent très claires avec cette méthode, et qui amènent tout naturellement à l'emploi du système de numérotation de base m »[1368]. C'est effectivement la considération de l'écriture en base m des entiers du carré qui permet la construction des abaques. Si Laisant se restreint au cas où le module m est premier, le cas des modules composés, plus complexe, nécessite également l'utilisation d'un système de numération adéquat. Arnoux envisage pour cela un système de numération à « base multiple », mais différent que celui dont Laisant a déjà fait usage par le passé (voir [Laisant, 1881c] et [Laisant, 1888e]). Si m est le produit de deux facteurs premiers p et q, tout nombre N inférieur à m^2 peut se représenter, de manière unique à une permutation près, à l'aide de quatre chiffres q_1, p_1, p_2, q_2 (ces chiffres sont respectivement les restes de N par q, puis du quotient obtenu par p, puis du quotient précédent par p, le dernier chiffre étant le dernier quotient calculé précédemment)[1369].

Les grandes idées qui réunissent Arnoux et Laisant autour de l'arithmétique graphique peuvent être identifiées à la lecture de la communication commune que font les deux hommes au congrès de l'AFAS de 1900[1370], alors qu'ils sont à mi-chemin de l'élaboration complète de leur *Essais de psychologie et de métaphysique positives*. Après avoir rappelé la notion d'espace arithmétique, les auteurs présentent une première table de multiplication congruente c'est-à-dire le tableau des plus petits nombres congruents modulo un entier m aux produits des numéros de lignes et de colonnes. Ils étudient ensuite les tables de divisions congruentes qui présentent des cas d'indétermination ou d'impossibilité et remarquent le caractère multiforme de l'opération. L'exposé se poursuit par la construction et l'étude des propriétés des tables de puissances congruentes (le numéro de ligne correspond à l'exposant et celui de colonne au

[1367] [Laisant, 1894d], p. 35.
[1368] Ibid.
[1369] On a donc N = $q_2.p^2q + p_2.pq + p_1q + q_1$
[1370] [Laisant, Arnoux, 1900], Laisant et G. Arnoux, *Applications des principes de l'arithmétique graphique: congruence, propriétés diverses*, AFAS, Paris, 29, t. 2, 1900, p. 36-59.

nombre initial modulo *m*) et des tables des racines correspondantes (le numéro de ligne correspond cette fois à l'indice de la racine). La communication est ponctuée d'applications aux théorèmes de Fermat et de Wilson, et se conclut par diverses transcriptions de la définition des résidus quadratiques dans le cadre de l'arithmétique graphique où les auteurs signalent : « combien par leur diversité même, ne contribuent-elles pas, en *imageant* le sujet à décrire, à donner plus de clarté et de simplicité »[1371]. Avec cette remarque, nous retrouvons en effet les propos du préliminaire à leur exposé :

> *Dans beaucoup de questions, et particulièrement en mathématiques, la méthode graphique présente de grands avantages au point de vue de la clarté. Elle met en évidence la vérité qui n'apparaît que confusément sous les symboles, et quand on peut se contenter de dire : « Voyez », la démonstration approche de la perfection. On pourrait presque dire que l'art d'exposer est celui de faire des schémas.*[1372]

Laisant et Arnoux soulignent ici la fonction simplificatrice des tableaux qu'ils dressent[1373] et érigent cette capacité de rendre limpide le propos en qualité essentielle d'une méthode. En illustrant les notions de théorie des nombres par leurs tableaux, ils atteignent leur objectif de clarté dans leur présentation, dans la mesure où ces visualisations donnent sens et permettent, au delà du symbolisme, la compréhension profonde d'une notion. Avec cet outil précieux pour « l'art d'exposer », nous relevons également une dimension pédagogique à l'entreprise. Nous rapprochons également cette dimension au terme « Anschauung » (utilisé par Minkowski) dont la portée didactique est présente dès les réflexions de Johann Pestalozzi[1374], philosophe dont se réclamera Laisant dans ses travaux sur l'éducation des jeunes enfants, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Les auteurs donnent également une valeur heuristique à leur démarche :

> *Cette méthode est par excellence celle qui convient à l'expérimentation, si précieuse surtout dans la recherche ; et si la preuve complète d'une vérité entrevue par l'expérience n'est pas entièrement obtenue, c'est alors qu'il est temps d'appeler à son secours l'analyse et les méthodes symboliques. L'infirmité de l'esprit humain est trop grande pour qu'il nous soit permis de dédaigner aucun des moyens qui s'offrent à nous.*[1375]

[1371] Ibid., p. 59.

[1372] [Laisant, Arnoux, 1900], p. 36.

[1373] Sur la dimension de simplicité de la géométrie des nombres chez Minkowski, nous renvoyons à nouveau à [Gauthier, 2007], p. 139. L'avis sensiblement différent d'Hilbert y est présenté : ce dernier met en avant le caractère généralisable d'une méthode pour juger de sa valeur, ce qui correspond également à certaines idées de Laisant, en particulier sur le calcul géométrique.

[1374] [Gauthier, 2007], p. 140.

[1375] [Laisant, Arnoux, 1900], p. 36. Sur la méthode expérimentale, Laisant précise « qu'on ne doit pas [la] confondre avec l'empirisme. Elle a ses principes, ses règles, sa philosophie propre » (op.cit.) Cette remarque peut être vue comme le fruit de la réflexion exposée dans l'ouvrage de 1898 *La Mathématique, Philosophie, Enseignement*.

Comme pour la géométrie des quinconces[1376], l'arithmétique graphique permet, en favorisant l'intuition, de nouvelles découvertes. La démarche de recherche s'effectue par le regard : l'observation du tableau obtenu exerce la réflexion du mathématicien en l'affranchissant des contraintes d'un quelconque formalisme. Elle libère son esprit et son imagination avant que le calcul et l'écriture littérale ne reprennent leurs droits pour justifier un résultat, déjà bien éclairé par l'approche visuelle.

III.5.3. Deux derniers exemples de la valeur heuristique du visuel en mathématiques

L'utilisation des échiquiers dans le domaine de l'arithmétique ne peut faire l'impasse sur la recherche de grands nombres premiers et plus généralement sur l'étude de ces nombres.

Recherche "à vue" des diviseurs premiers d'un nombre

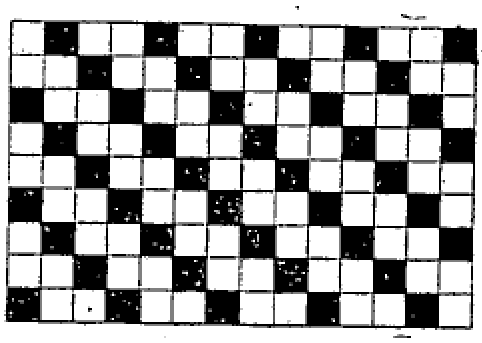
Au congrès de l'AFAS de 1891, Laisant s'exprime « Sur une méthode pour la construction d'une table de nombres premiers »[1377]. Faisant preuve d'un grand pragmatisme, il s'intéresse aux détails concrets de la mise en œuvre de son procédé[1378]. On retrouve avec cette communication ce souci de l'application tangible et matérielle de résultats mathématiques, même simples : tout cela renvoie à d'autres interventions sur le compas trisecteur, ou sur la mécanisation des réglettes multiplicatrices de Genaille. Il suggère un autre mode de publication de la liste des nombres premiers, ou plutôt de celle des plus petits diviseurs premiers de nombres entiers plus petits qu'un nombre N. Laisant propose ainsi une alternative aux grandes tables de nombres premiers publiées, et principalement celles de Lebesgue[1379]. La table proposée constitue en un quadrillage où chaque case laissée vierge correspond à un nombre donné (si chaque ligne comprend 100 cases, le numéro de la ligne donne les centaines et le numéro de la colonne le reste de la division par 100 de ce nombre). Laisant s'appuie sur un résultat de la géométrie des quinconces qu'il a lui-même exposé dans un précédent congrès

[1376] … et comme pour la géométrie des nombres voir [Gauthier, 2007], p. 142.

[1377] [Laisant, 1891f], « Sur une méthode pour la construction d'une table de nombres premiers », AFAS, Marseille, 1891/2, p. 165-168.
Voir [Dickson, 1919], vol. I, p. 354-355.

[1378] Sur cet exposé, l'auteur explique : « s'il présente un certain intérêt, c'est moins au point de vue purement scientifique qu'en ce qui touche le procédé pratique qu'on pourrait employer, et qui coûterait peu de travail et d'efforts. » [Laisant, 1891f], p. 166.

[1379] [Lebesgue, 1864], Victor-Amédée Lebesgue, *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers*, Gauthier-Villars, 1864 de l'AFAS, à Toulouse ([Laisant, 1887d]), pour observer que les multiples d'un nombre fixé correspondent à des cases disposées en quinconces qui forment des parallélogrammes donnés. Un tel quadrillage où l'on aurait percé les cases correspondant aux multiples de *p* est appelé réseau de *p* par Laisant.



Type de réseau pour le facteur premier 3

En appliquant successivement de tels réseaux sur le tableau initial, on met en évidence et on marque (par exemple à l'aide de deux caractères comme Lebesgue) les diviseurs des nombres représentés par le tableau[1380]. Laisant propose une table des facteurs premiers jusqu'à 100 millions et la mise en page correspondante et conclut sur les qualités de son système : « il semble difficile d'en imaginer un plus simple et qui donne prise à moins de chances d'erreurs »[1381].

La conjecture de Goldbach : établissement des liens entre Laisant et Cantor.

Quelques années plus tard, c'est à la conjecture de Goldbach que s'intéresse Laisant dans les pages du *Bulletin de la Société mathématique de France*[1382]. Il propose un procédé de vérification expérimentale de la célèbre conjecture née de la correspondance entre le mathématicien prussien avec Euler en 1742. Il s'appuie sur deux travaux concernant ce résultat empirique « dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles »[1383].

[1380] « l'opération se subdivise en deux parties distinctes : 1° établissement des réseaux, répondant aux facteurs premiers depuis 3 jusqu'à $\sqrt{N}$, N étant la limite supérieure de la table ; 2° pointage des nombres par l'application des réseaux. » [Laisant, 1891f], p. 167.
[1381] Ibid.
[1382] [Laisant, 1897a], "Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 25, 1897, p. 209-211. Pour l'ensemble de ces remarques, nous renvoyons au chapitre 5 de [Décaillot, 2008].
[1383] [Laisant, 1897a], p. 210.

Le plus important est la communication de Georg Cantor au congrès de l'AFAS de 1894 [1384]. Elle a lieu dans la période de préparation des Congrès internationaux des mathématiciens où se nouent des liens d'amitiés entre Laisant et son confrère allemand[1385]. Cet exposé s'inscrit dans une correspondance que l'Allemand entretient avec des mathématiciens français en particulier, et notamment avec Laisant sur le sujet : la conviction de G. Cantor sur la validité de l'énoncé y est affirmée à plusieurs reprises. On apprend d'ailleurs dans une lettre datée du 7 juillet 1894 que Cantor adresse à Lemoine que c'est sur l'invitation de Laisant que le professeur de Halle participe au congrès de l'AFAS de 1894. Cantor écrit :

> *j'accueille avec joie la proposition de Monsieur Laisant, qui consiste à présenter au Congrès de Caen, cette année, en août, la table confirmant complètement l'exactitude du théorème de Goldbach jusqu'à 1000, afin de la publier ensuite dans les comptes-rendus du Congrès.* [1386]

L'Intermédiaire des mathématiciens, créée par Laisant et Lemoine la même année, accueille également dès cette même année 1894, le questionnement de Catalan et Poincaré sur la fameuse conjecture[1387].

À côté des recherches de Cantor tendant à vérifier la conjecture de Goldbach, Laisant rappelle également la contribution d'Eugène Lionnet qui soutient la thèse adverse. Eugène Lionnet, professeur au lycée impérial Louis-le-Grand, fondateur de l'Association philotechnique en 1848, auteur d'*Éléments d'arithmétique* et de nombreux articles sur le sujet dans les *Nouvelles annales*[1388]. Ce travail est d'ailleurs cité par Laisant au cours de la discussion suivant la communication de Cantor au congrès de l'AFAS, tout « en faisant remarquer tout l'intérêt que présente la communication de M. G. Cantor. » [1389] Le

[1384] Pour une étude de la réflexion de Cantor au sujet de la conjecture de Goldbach, on pourra consulter [Décaillot, 2008], p. 121-155.

[1385] A.-M. Décaillot (dans [Gispert, 2002], p. 208) insiste sur l'importance de cette communication dans l'illustration de l'ouverture de l'AFAS aux contributions étrangères.

[1386] [Décaillot, 2008], p. 197. Voir [Cantor, 1894], Cantor Georg, "Vérification jusqu'à mille du théorème empirique de Goldbach", AFAS, Caen, 1894/2, p. 117-134.
L'ensemble des lettres que nous considérons ici sont conservées à la Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek de Göttinguen dans les cahiers de correspondance de Cantor n° 17 et 18. Voir [Décaillot, 2008], p. 287.

[1387] "Question 161", *L'intermédiaire des mathématiciens*, 1, 1894, p. 91.

[1388] Lionnet Eugène, "Note sur la question «Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers ?» ", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 2, 18, 1879, p. 356-360.

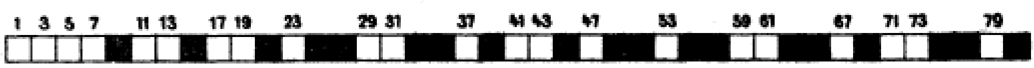
[1389] Séance du 10 août 1894, *AFAS,* 1894/1, p. 96.

mathématicien allemand propose une table de décomposition en deux nombres premiers des nombres pairs de 2 à 1000, et incite donc à penser que la conjecture est vraie[1390].

Les échanges entre Laisant et Cantor sur le sujet vont se poursuivre à travers leur correspondance et de manière indirecte dans les pages de *L'Intermédiaire*. En effet, dans la lettre adressée à Laisant datée du 25 avril 1895, Cantor souligne l'apparition de maxima locaux pour le nombre de décompositions en deux nombres premiers de 2N pour les N multiples de 3. Dans ses lettres datées du 22 septembre 1895, du 1[er] mars 1896 et celle du 19 du même mois (toujours adressées à Laisant), il poursuit ses réflexions sur les recherches françaises à propos de la conjecture, parallèlement aux discussions sur l'organisation de congrès internationaux. Il souligne également le rôle que peut jouer *L'Intermédiaire des mathématiciens* dans cette affaire via l'élargissement de la table proposée par Cantor en 1894 principalement. La revue française récolte en effet de nombreuses contributions à la question, probablement sous l'impulsion de Laisant : nouvelle question de Cantor en 1895 (question 574), extension de la table publiée par l'AFAS de la part de V. Aubry en 1896-1897, question 2411 de G. de Rocquigny en 1902, remarques d'Aubry et de L. Ripert (ancien polytechnicien, admis à l'École en 1869 comme Laisant et auteur de la question 2541) en 1903 avant que Cantor ne signale la même année les travaux de son compatriote Haussner.

La démarche de Laisant, si elle est également empirique[1391], est autre. Il expose « un procédé qui permettrait de faire sans calcul la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions »[1392]. Il dispose sur une réglette de $2n - 1$ cases correspondant à l'ensemble des nombres impairs et de noircir, grâce au crible d'Ératosthène, celles correspondant aux nombres non-premiers. (fig. 1)

Fig. 1.



Réglette de Laisant représentant les nombres impairs[1393]

[1390] Et même plus : « le nombre de décomposition de 2N croît indéfiniment avec N » (p. 117), ce qui va à l'opposé des suppositions de Lionnet ([Cantor, 1894]). Adolphe Desboves, normalien et professeur au lycée Condorcet de Paris, portera à 10 000 la limite de la vérification (en 2008, ce nombre atteindra 12×10^{17})

[1391] À ce sujet, on pourra lire Javier Echeverria, "Empirical methods in mathematics. A case study : Goldbach's conjecture", in Munevar G., ed., *Spanish Studies in the Philosophy of Science*, Dordrecht : Kluwer, 1996, p. 19-55.

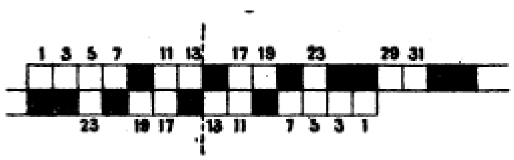
[1392] [Laisant, 1897a], p. 210.

[1393] Ibid.

En utilisant une deuxième réglette placée en dessous et en sens inverse de la première, on peut rapidement voir si le théorème de Goldbach est vérifié pour l'entier $2n$. En effet, dans ce cas, deux cases blanches (au moins) se retrouveront l'une en dessous de l'autre. Le décalage des deux réglettes permet de poursuivre la vérification pour d'autres valeurs de $2n$. Laisant prend pour exemple l'entier pair 28 qui s'écrit

$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$

d'après la configuration des deux réglettes ci-dessous :

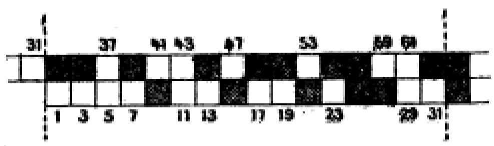


Vérification visuelle du théorème de Goldbach[1394]

Le même dispositif lui permet d'avancer une autre conjecture. En plaçant les deux réglettes dans le même sens, il annonce que

> *Tout nombre pair 2m est la différence de deux nombres premiers, dont le plus grand est inférieur à son double 4m.*[1395]

Sur la figure suivante,



Vérification visuelle de la proposition de Laisant[1396]

on remarque en effet avec Laisant que :

$$32 = 37 - 5 = 43 - 11 = 61 - 29.$$

Une telle conjecture n'est pas sans rappeler celle du polytechnicien Alphonse de Polignac, acteur de la géométrie des quinconces comme nous l'avons vu, et plus généralement auteur de plusieurs travaux sur la théorie des nombres à l'Académie des sciences en 1894. Il énonce en 1855 que tout nombre pair est différence de deux nombres premiers. Ces résultats, et d'autres, sont d'ailleurs regroupés sous le titre « Arithmologie. Résultats empiriques » dans un court article des *Nouvelles annales* de 1855[1397]. La valeur heuristique de ce procédé est donc mise en avant. Parce que la vérification de la propriété se fait simplement "à vue", elle

[1394] Ibid.
[1395] [Laisant, 1897a], p. 211.
[1396] Ibid.
[1397] *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, Sér. 1, 14, 1855, p. 118.

permet d'accompagner les recherches du mathématicien. Cette démarche correspond à des méthodes de recherches empiriques et une démarche inductive (comme celle de Cantor au congrès de 1894) caractéristique du milieu associatif de l'AFAS dans lequel Laisant est si actif[1398].

En une dizaine d'années, C.-A. Laisant aborde sous de multiples points de vue la question de la figuration de problèmes des mathématiques discrètes. Outre la dichotomie travaux combinatoire/théorie des nombres, nous répartissons les travaux de Laisant étudiés dans ce chapitre en deux grandes catégories. La première correspond aux représentations "picturales" dénuées de chiffres où le visuel, par le choix de couleurs dans un quadrillage ou de points sur un réseau, remplace intégralement les relations numériques de départ : c'est le cas des mosaïques, des échiquiers, de la géométrie des quinconces qui offrent une représentation condensée de la notion de congruence. S'ajoutent à cela la représentation de nombres combinatoires, comme les nombres de d'Ocagne, ou des outils de recherche sur les nombres premiers et leurs propriétés (recherche de diviseurs premiers, décomposition en nombres premiers, théorème de Goldbach).

La deuxième classe de visualisation utilisée par Laisant est celle des tableaux de nombres. La disposition des valeurs se substitue alors à la relation permettant le calcul de ces valeurs. L'agencement d'une suite de nombres sur un « échiquier arithmétique » met en valeur le processus de construction de cette suite C'est le cas dans les tableaux de sommes, mais également du tétraèdre arithmétique. Un trait remarquable de ce mode de traitement est la généralisation qu'il permet. Le procédé de construction du tableau peut être répété dans diverses directions du plan ou de l'espace (voir les différentes généralisations du carré de Fermat).

Ces deux types de visualisation obéissent à des règles communes : il s'agit de coucher sur le papier une autre trace des calculs opérés par le mathématicien que le symbolisme habituel. Avec les équipollences, le regard du mathématicien quittait la figure pour se porter sur des relations entre quantités géométriques. Ici, Laisant propose à ses lecteurs de quitter l'écriture symbolique de relations générales pour appuyer sa réflexion sur l'observation d'une visualisation dans son ensemble.

[1398] [Décaillot, 2008], p. 122.

Nous avons pu évoquer la principale raison à cela : ces visualisations sont le support privilégié pour inspirer le lecteur, pour le conduire vers l'intuition de l'idée représentée. En s'appuyant sur l'intuition développée par le regard, le mathématicien confirmé peut poursuivre ces investigations et généraliser une relation. L'élève, quant à lui, affranchi de la barrière de symboles abscons, atteint l'évidence de la notion par l'observation d'un regard de la globalité du procédé : c'est dans ce sens que Laisant peut affirmer que « l'art d'exposer est celui de faire des schémas » et c'est pour cette raison que l'*Initiation mathématique* regorge de telles schématisations, comme nous le verrons par la suite.

Ces représentations sont souvent liées à l'utilisation d'un outil particulier : il s'agit du choix d'un "bon" système de numération. Que ce soient la numération factorielle, la numération à base multiple, l'écriture décimale habituelle est dépassée au profit d'une écriture plus adaptée au problème traité. Derrière l'utilisation de ces diverses bases, on trouve souvent l'idée de classement : classement de permutations ou de diviseurs d'un nombre.

Se référant aux grandes figures du passé telles que Fermat ou Pascal mais particulièrement influencé par Édouard Lucas, Laisant se montre attentif aux travaux de Laquière, Delannoy ou Tarry et construit une collaboration durable avec des personnalités éloignées des milieux académiques comme Gabriel Arnoux, principalement à travers les congrès de l'AFAS dont il devient, pour les sections 1 et 2, un intervenant récurrent.

IV. *La Mathématique* selon C.-A. Laisant : réseaux, enseignement et réflexions (1893-1913)

La période que nous abordons maintenant est excessivement riche, non pas par la production mathématique observée, mais par les multiples engagements de Laisant qui rythment la dernière phase de sa vie scientifique. Les bornes que nous avons choisies, 1893-1913, correspondent tout d'abord à une carrière professionnelle : celle d'enseignant. École Monge, Collège Sainte-Barbe, École polytechnique sont autant d'établissements fréquentés par l'ancien député. Marqué finalement par l'obtention du poste d'examinateur à l'École polytechnique qui sonne comme le sommet de ce parcours professionnel, cet itinéraire est également synonyme de lieux où se tissent de futures collaborations. L'écriture d'ouvrages à visées pédagogiques coïncide avec ce nouveau statut professionnel et en constitue un accompagnement naturel. À travers les chapitres abordés et les classifications relatives à ces écrits, nous discernons les contours de l'activisme de Laisant à la veille de la grande réforme de 1902. Laisant prend part au débat qui annonce ces changements et entame une réflexion sur l'enseignement dans son ensemble, notamment sur ces fondements avec l'ouvrage de 1898 *La Mathématique. Philosophie-Enseignement*. Avec le titre de ce chapitre, nous avons choisi de particulariser cet ouvrage qui illustre à la fois l'aboutissement de l'œuvre du mathématicien, les réflexions issues d'une carrière avancée, et ses idées sur l'enseignement des mathématiques, idées que Laisant développe à la fin des années 1890, notamment à travers un cycle de conférences à l'Institut psycho-physiologique de Paris.

L'*Initiation mathématique* est la concrétisation de ses conceptions sur l'éducation des jeunes enfants. Avec l'étude de cet ouvrage nous répondons à quelques questions indissociables des écrits plus tardifs de Laisant : comment cette initiation s'appuie-t-elle sur les précédents travaux portant sur la représentation des objets mathématiques ? Quelles sont les principales influences de la pensée pédagogique de l'auteur ? Quelles sont les grandes caractéristiques du plan de formation qu'il y envisage ?

Nous avons aussi choisi de présenter ici ses différentes participations à des sociétés savantes nationales, dont Laisant est souvent membre depuis de longues années et où il accède à des responsabilités administratives de manière répetée. Pendant la période considérée, son engagement dans les structures de direction de ces différentes institutions se confirme et s'accentue. Nous relevons alors quelques aspects de ces prises de fonctions et les objectifs poursuivis.

Son engagement dans les journaux mathématiques est un autre point essentiel du parcours de Laisant, celui par lequel il a laissé une empreinte durable. Celui qui a beaucoup écrit dans la presse mathématique se dirige en effet vers la fonction de directeur, puis de fondateur de revue. Nous suivons ce basculement afin de déterminer les intentions du mathématicien vis-à-vis de la communauté dont il fait partie et des évolutions structurelles qu'il constate. Là encore, les liens avec les personnes qui l'entourent apparaissent cruciaux. Ces relations relèvent d'un attrait pour l'espéranto qui cristallise à lui seul l'appartenance à un réseau de savants engagés dans sa promotion.

Enfin, à travers notamment cette créativité dans le milieu de la presse, C.-A. Laisant s'adresse in fine à la communauté mathématique internationale. Nous soulignons les moyens qu'il met en œuvre pour, non seulement s'en rapprocher, mais pour la faire véritablement évoluer de manière pérenne.

Nous nous intéressons donc dans un premier temps à l'adhésion de Laisant aux grands lieux de socialisations de l'époque : Société mathématique de France (SMF), AFAS, Société philomathique de Paris (SPP) en distinguant les caractéristiques communes et les différences de chacun de ses passages dans ces cercles savants.

Avec la présentation de son parcours d'enseignant (établissements, écrits, réflexions), nous observons l'inflexion des préoccupations de Laisant vers l'initiation aux sciences mathématiques des plus jeunes, mouvement qui trouve là aussi un écho auprès de la communauté des pédagogues de l'époque.

Avec ses deux principales contributions, *L'Intermédiaire des mathématiciens* et *L'Enseignement mathématique*, et la question de la langue internationale espéranto, nous nous penchons sur les visées internationalistes de l'homme qui se concrétisent par une participation active aux Congrès internationaux des mathématiciens et dans la réalisation de projets ayant pour but de favoriser la communication entre mathématiciens.

IV.1. Laisant : « grand communiquant »[1399] et homme de réseaux

À travers les grands thèmes développés tout au long de son œuvre, nous avons vu que C.-A. Laisant tisse de nombreux liens avec ses contemporains. Mais il n'en demeure pas moins que ces relations sont possibles grâce à l'adhésion du Nantais à plusieurs cercles savants à l'échelle national. Ayant évoqué son appartenance à une société savante locale telle que la *Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, nous proposons de souligner ici le rôle souvent important qu'il joue dans diverses sociétés françaises traitant de mathématiques, lieux de socialisation fondamentaux dans le paysage scientifique sous la Troisième République[1400]. L'énumération des réseaux institutionnels auxquels il a participé, souvent activement, indique sa forte présence au sein du milieu scientifique français de la fin du XIX^{e} siècle.

	Membre	Vice-président	Président
SMF	1874	1880	1888
AFAS	1875	20 participations au bureau des sections 1&2	1904
SPP	1878		1889 et 1905

Tableau synthétique des appartenances de Laisant à plusieurs réseaux institutionnalisés

IV.1.1. Participations actives à de multiples sociétés savantes

LAISANT ET LA SOCIETE MATHEMATIQUE DE FRANCE

L'Académie des sciences et la Société philomathique de Paris forment jusqu'en 1872 les seuls lieux de réunions possibles pour les mathématiciens de l'époque[1401]. Mais à la fin de son *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Chasles regrette l'absence d'une société comparable à la London Mathematical Society créée cinq ans plus tôt :

[1399] Voir [Gispert, 2002].
[1400] Voir [Gispert, 1999].
[1401] Mais ces sociétés pluridisciplinaires demeurent élitistes et le nombre de leurs adhérents est limité comme le souligne H. Gispert dans [Gispert, 1991], p. 14.

Nous possédons dans notre société philomathique une section de mathématiques, d'un nombre de membres limité, dont les communications ne paraissent que de loin en loin avec d'autres matières dans un bulletin trimestriel fort restreint[1402].

La diffusion des travaux mathématiques pose donc problème. Cela peut apparaître comme un des signes d'un affaiblissement de la science française vis à vis de l'étranger (en Allemagne par exemple) que la défaite de 1870 confirme. Ainsi en 1872 deux sociétés sont créées dans la même perspective de relance du progrès scientifique dans l'hexagone. L'AFAS et la SMF partagent donc le même sentiment nationaliste de reconquête du champ scientifique par la France, même si la devise de la première (« Par la science, pour la Patrie ») est bien plus explicite que les statuts de la seconde. On peut lire dans l'article premier de ces statuts : « la Société Mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication de mémoires de ses membres. »[1403] Contrairement à la Société philomathique ou à l'Académie, la SMF traite exclusivement de mathématiques : le nombre croissant d'acteurs dans le champ mathématique et la spécialisation de ses diverses branches ont en effet contribué à la création d'une telle société spécialisée (à l'instar de la Société chimique de France créée en 1854). La SMF se veut plus ouverte que ces dernières : le nombre d'adhérents n'y est pas limité (même s'il ne dépassera pas 193 adhérents entre 1873 et 1914), on en devient membre en étant parrainé par deux de ses adhérents et en étant élu à la majorité la séance suivante. La Société se réunit deux fois par mois, entre novembre et juillet.[1404]

Nous avons déjà évoqué l'élection de Laisant comme membre de la Société mathématique de France le 19 février 1873[1405]. Il rejoint les 178 membres adhérents dénombrés en 1874, qui, pour plus de la moitié, sont comme lui polytechniciens[1406]. L'École polytechnique est en effet omniprésente au sein de la Société à ses débuts, ce qui reflète bien son rôle moteur dans la vie mathématique de l'époque. Un grand nombre de sociétaires sont ainsi ingénieurs (dont un tiers sont officiers)[1407] et parmi les enseignants beaucoup sont liés à l'École ou à une de ses écoles d'applications. L'administration de la SMF (bureau et conseil)

1402 [Chasles, 1870], p. 378.
1403 *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1, 1872-1873, p. 8.
1404 Sur la création de la SMF, on pourra consulter [Gispert, 1991], et Gispert H, Tobies R, "A comparative study of the French and German Mathematical societies before 1914", in Goldstein, Gray, Ritter, *L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités*, Editions MSH, 1996, p. 407-430. Karen Hunger Parshall, Adrian Clifford Rice, *Mathematics unbound: the evolution of an international mathematical research community*, 1800-1945, Volume 23 de History of mathematics, AMS Bookstore, 2002
1405 "Extrait des procès verbaux", *Bulletin de la SMF*, t.1, 1872-1873, p. 76-77. Pour devenir membre, une personne doit être présentée par deux membres, puis être élue à la majorité des suffrages aux séances suivantes.
1406 [Gispert, 2000], La création de la SMF et la fabrication d'une périphérie mathématique, *Gazette des Mathématiciens*, n°86, Octobre 2000, p. 81-88, p. 81.
1407 H. Gispert évalue à 46% la part d'ingénieur au sein de la SMF à ses débuts [Gispert, 2000], p. 82.

compte elle aussi 22 membres polytechniciens sur 27. L'École polytechnique est d'ailleurs également très présente chez les auteurs d'articles ou d'ouvrages[1408] qui constituent un quart des membres de la Société. C.-A Laisant semble assez représentatif de ce groupe dont les trois-quarts sont comme lui enseignants (en classe préparatoire par exemple).

Outre la présidence de la Société que Laisant assurera en 1888 - pour une année comme le prévoit le règlement-, le député de Nantes en sera l'un des quatre vice-présidents en 1880 et 1881 (le mandat de vice-président courant pour deux ans) et plus globalement membre du conseil de 1879 à 1892 (fin de mandat) de 1892 à 1895 (fin de mandat) de 1895 à 1898 (fin de mandat) de 1898 à 1901 (fin de mandat), de 1902 à 1905 (fin de mandat), de 1906 à 1909 (fin de mandat). Les douze membres du conseil sont en effet renouvelés au tiers chaque année. Il fait donc partie des hommes forts de la Société au même titre que Haton de la Goupillière, Fouret, Collignon, Mannheim, André, Jordan, Appel, Picard ou Poincaré durant les années 1880-1910.

Membre	*Membre du conseil*	*Vice-président*	*Président*
H. de la Goupillière	15	1	1
Fouret	15	5	1
Collignon	4	9	1
Mannheim	20		
André	20	5	1
Jordan	13		
Appell	16		1
Picard	12	2	2
Poincaré	6	7	2
Laisant	**23**	**2**	**1**

Les grands administrateurs de la SMF et les années passées dans quelques fonctions du bureau[1409].

De 1878 à 1904, on lui doit 29 communications ayant donné lieu à un article détaillé dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* avec des années particulièrement fastes : 1891 (avec 5 articles), 1887 (4 articles) qui encadrent une période de production plus soutenue, soit les années 1881-1887 qui correspondent dans leur ensemble à 17 articles. À ces

[1408] Ce groupe produisant des mathématiques de façon régulière est étudié par H. Gispert pour appréhender le milieu mathématique après 1872.
[1409] D'après un dépouillement des données du BSMF sur la période 1879-1907.

articles s'ajoutent les communications n'apparaissant que sous la forme de leur titre dans le *Bulletin* de la SMF.

Les travaux de Laisant à la SMF couvrent trois domaines principaux : théorie des courbes, mécanique, combinatoire (associée parfois à la géométrie de situation). D'autres thèmes sont plus spécifiques à sa participation au *Bulletin de la SMF* : l'utilisation de déterminants à plusieurs reprises par exemple[1410]. Dans une communication de 1889 en particulier ([Laisant, 1889b]), il écrit le polynôme

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

à l'aide du déterminant, parfois appelé « déterminant de Laisant » :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ -1 & x & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Une simple modification de ce dernier déterminant permet également d'écrire une forme binaire $f(x, y)$ quelconque. Chacune de ces écritures est également accompagnée d'une règle pratique pour déterminer les nombres dérivés à un ordre quelconque.

Quelques études liées à la théorie des fonctions sont aussi présentes en 1880 ([Laisant, 1880b]), aux séances du 22 janvier et du 7 mai 1890 (respectivement sur les fonctions hyperboliques, [Laisant, 1891a], et réciproques, [Laisant, 1891g]) ou en 1892 sur les fonctions homogènes[1411]. Dans cette dernière, s'inspirant du théorème d'Euler[1412] pour les fonctions homogènes à plusieurs variables, Laisant y démontre qu'une fonction f est décomposable en une somme de p fonctions homogènes si et seulement si il existe une relation linéaire entre ces fonctions, relation notée symboliquement

$$[x_1f'_{x1} + x_2f'_{x2} + \ldots.]^{(p)}.$$

Nous ajoutons à ces exposés celui du 18 novembre 1896 sur deux « identités relatives à des polynômes entiers »[1413]. Généralisant des égalités dues à un professeur de la Faculté de

[1410] « Sur une transformation des déterminants » (séance du 3 avril 1901), « Expression des coefficients du binôme par des déterminants » (15 mai 1893), [Laisant, 1889b], "sur un déterminant remarquable", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 17 1889, p. 104-107

[1411] "Vie de la Société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 117-121.

[1412] *Mechanica*, t. II, 1736.

[1413] "Vie de la Société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 24, 1896, p. 191-192.

Poitiers, Maillard, l'auteur y énonce deux égalités pour une fonction polynôme *f* de degré *m* et ses racines :

$$\sum f^{(m-3)}(a) + \frac{m^2(m-3)}{2} f^{(m-3)}(h) = 0$$
$$\sum f^{(m-2)}(a) + m(m-2) f^{(m-2)}(h) = 0$$

les sommes s'effectuant sur les racines du polynôme, *h* étant la moyenne arithmétique de ces racines. Notons également que les questions d'interpolation apparaissent de manière spécifique au sein du *Bulletin* de la SMF[1414].

À côté de ces travaux mathématiques, C.-A. Laisant expose à ses confrères de la SMF ses actions au sein de la communauté mathématique nationale ou internationale. Lors de la séance du 16 décembre 1896, il intervient « sur l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens», sujet qu'il reprend le 20 janvier 1897. Il signale la création de *L'Enseignement mathématique* en 1899[1415], présente l'*Annuaire des mathématiciens,* le 15 mai 1901 et l'enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens, le 3 novembre 1904.

Membres parrainés	Année	Membres parrainés	Année
Le Paige, Lebon	1879	Dumont, Cabreira, Bricard, Fontené, Duran-Loriga, Gerrans, Tarry H., Schou E.	1897
Wilson, Cheysson, Bere, Delannoy, le Pont, Dreyfus Ferdinand, Henry Ch., Paturet	1882	Pelletreau, Combebiac, Vassilief, Jarry, Montessus de Ballore, Ripert	1898
Trasbot	1884	Syrieix, Landau	1899
Wladimir de Maximovitch	1886	Renard, Firmin Comt, Z. de Galdeano	1900
Dillon, Mercier, Marquiset, Félix Lucas, Wickersheimer, Peigné, Canet, Mukhopâdhyây Asutosh, PapÉlier	1888	Davidoglou, van Emelen	1901
Genty	1891	Lucas de Peslouan, Pux	1902
Fehr, Arnoux, Élie Perrin	1892	Boutin, l'abbé Issaly, Walter Ford	1903
Buisson, Quintard, Hioux, Gaston Martin, Amédée Wagner, Lancelin	1893	K. Miwa	1904
G. Maupin, L. Desaint	1894	Phillippe, Gérardin	1906
Duporcq, Leméray	1895	W. Etzel	1907
Euverte, Courtin, Larose, Girardville	1896	Malaise	1913

Les parrainages de Laisant à la SMF[1416]

[1414] [Laisant, 1903d], [Laisant, 1891h], [Laisant, 1891i].
[1415] "Vie de la Société", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 27, 1899, p. 68.
[1416] D'après le dépouillement des *Bulletins*.

Il présentera 74 futurs membres de la Société de 1879 à 1913, dont la moitié après 1895, période pendant laquelle la Société connaît un renouvellement important de ses effectifs[1417].

Nombre de ces parrainages sont effectués avec un proche de Laisant : Lucas principalement (Lucas et Lemoine ont participé à 18 de ces présentations de membres). On voit ainsi apparaître en filigrane un "clan Laisant" : Delannoy[1418], Fehr, Arnoux, Élie Perrin, Maupin, Duporcq, Leméray, Fontené, Naud, Ripert dont la collaboration autour de questions d'enseignement (manuel, réflexion) ou de thèmes particuliers (arithmétique visuelle par exemple) s'opère justement dans les années 1890. En plus de ces noms, peuvent apparaitre d'autres moins méconnus comme Landau ou Vassilief.

Remarquons la part non négligeable de savants étrangers (14) "parrainés" par Laisant. Leur liste est représentative de l'évolution croissante du nombre de sociétaires d'origine étrangère en cette fin de XIX^e^ siècle (6 sur 147 en 1873 et 100 sur 278 en 1914)[1419]. Des liens sont entre autre tissés avec l'Université de Kazan (avec Wladimir de Maximovitch ou Vassilief), la Belgique, l'Espagne voire l'Asie (Japon ou Inde).

Au début du XX^e^ siècle, C.-A. Laisant semble représentatif d'une partie de l'ancienne génération des mathématiciens membres de la SMF. Souvent polytechniciens et enseignants de classe préparatoire ou du secondaire, ils se passionnent pour les questions de mécanique ou de géométrie (43% de la production au début de la SMF), publient dans des revues scolaires, les *Nouvelles annales de mathématiques* par exemple, ou de vulgarisation mais peu dans les revues de recherche. À partir des années 1890 (où le nombre de postes universitaires augmente considérablement), la vague de nouvelles adhésions à la Société illustre la part grandissante des normaliens qui supplantent en nombre les polytechniciens et abordent des sujets de pointe (la nouvelle analyse), notamment dans des revues de recherche.

De la même manière, entre 1870 et 1890, Laisant, administrateur important de la SMF, s'implique dans le fonctionnement de l'AFAS créée la même année. Les deux associations peuvent alors comprendre des réseaux d'hommes en commun[1420]. Ce ne sera plus le cas par la suite lorsque la rupture entre les congressistes amateurs de sciences et les professionnels de la SMF sera consommée.

1417 [Gispert, 1991], p. 114.

1418 Laisant avait fait cette proposition à Delannoy dans une lettre datée du 12 novembre 1882. Delannoy est présenté par Lucas et Laisant le 17 novembre de la même année (voir [Schwer, Autebert, 2006], p. 34).

1419 Tableau 2.2 dans [Gispert, 1991], p. 166.

1420 [Gispert, 2000], p. 87.

UN REGARD SUR L'AFAS PORTE PAR UN DE SES GRANDS ANIMATEURS

Laisant « grand communiquant » de l'AFAS

L'investissement de Laisant est notable à plusieurs égards. Il est un des membres les plus productifs des sections 1 et 2 qui traitent de mathématiques avec 48 communications à partir de 1875[1421]. Son nom apparaît plus de vingt-cinq fois dans des discussions diverses faisant suite à des communications (particulièrement bien sûr quand il s'agit de travaux liés à la méthode des équipollences).

Il est également élu 20 fois au bureau de la section mathématique, astronomie, géodésie et mécanique de l'Association[1422] : il est notamment président des sections 1 et 2 en 1879 et 1887, secrétaire de 1888 à 1890, délégué des sections au bureau de l'Association en 1891-1892, 1896-1897 et membre de la commission de publication en 1891-1892, 1894-1895, 1899-1900. Il est élu président de l'AFAS en 1904 au 33ème Congrès de Grenoble.

Cette grande activité, tant au point de vue scientifique qu'institutionnel, souligne l'adhésion de Laisant au projet politique de l'AFAS et à sa contribution au redressement national souhaité à travers le progrès scientifique. C'est pourquoi le regard qu'il porte sur les congrès lors de ses deux présidences qu'il assure est d'autant plus significatif : on y décèle les influences et les avancées de l'Association les plus marquantes aux yeux du mathématicien Nantais.

En 1879, Laisant, alors président des première et deuxième sections[1423], dresse à l'occasion de son discours d'ouverture un premier bilan de l'activité de l'Association dans le domaine mathématique. C'est cette notice que nous proposons d'étudier maintenant. L'idée d'une notice historique lui est propre et vise à servir d'exemple pour les futurs présidents. Avec un tel travail réitéré à intervalles réguliers (un ou deux ans), on pourrait obtenir une vision complète du chemin parcouru au sein des sections 1&2 ; un tel historique « pourra être consulté avec quelque fruit, et […] servira tout au moins à faciliter les recherches, lorsque l'on voudra étudier nos comptes rendus dans l'avenir. »[1424] Si l'œuvre entamée par Laisant n'a pas été poursuivie à notre connaissance, si ce n'est par lui-même en 1887 ([Laisant, 1887i]), elle

[1421] 44 d'après le recensement effectué dans [Gispert, 2002], p. 343.
[1422] [Gispert, 2002], p. 342.
[1423] Laisant commente ainsi cette nomination auprès des membres de l'AFAS : « j'ai vu surtout chez vous l'intention de récompenser en moi l'amour ardent et profond de la science, mérite que je me permets de m'attribuer sans la moindre modestie. » ([Laisant, 1879], p. 62)
[1424] [Laisant, 1879b], p. 62.

présente cependant comme l'auteur l'espérait, un matériel précieux et surtout le regard d'un membre important de l'Association, dont l'engagement se retrouve dans le bilan dressé.

L'auteur liste pour cela une grande partie des communications proposées dans le cadre des deux premières sections classées en sept grandes catégories[1425] et en les regroupant par année, puis par auteur. Il décrit ainsi 188 travaux à l'aide de précisions apportés par ses confrères de l'Association [1426], ou des comptes rendus de l'AFAS. Certains travaux n'apparaissant néanmoins pas dans les comptes rendus et quatorze communications se réduisant à leur titre dans les pages des comptes rendus n'ont pu être étudiées par Laisant par manque d'informations sur leur sujet.

L'esprit de l'AFAS

La notice historique ainsi dressée donne « une idée de l'importance croissante des communications mathématiques dans l'ensemble des travaux de l'Association française pour l'avancement des sciences. »[1427] Plus précisément, le tableau proposé par Laisant montre bien le fonctionnement de l'AFAS et l'esprit qui anime l'Association depuis ses origines. Le président des sections 1&2 souligne deux caractéristiques des travaux présentés :

> *La première, c'est que la contribution relative des sciences mathématiques aux travaux de 1'Association française n'a pas cessé de s'accroître d'année en année.*
> *En second lieu, il est à observer que depuis ces dernières années surtout, aucune des découvertes importantes, aucune des questions traitées dans les recueils spéciaux et agitées d'une manière un peu générale, soit en France, soit à l'étranger, n'est restée en dehors de nos études.*
> *Par contre, plusieurs questions originales ont pris naissance dans l'Association française et se sont ensuite développées et accrues en passant dans d'autres milieux.*
> *A tous ces points de vue, nous pouvons donc nous rendre cette justice, que nous avons contribué, pour notre part, à l'avancement des sciences, justifiant ainsi le titre de notre Association.* [1428]

[1425] I Analyse algébrique – Calcul des probabilités – Théorie des Nombres (36 communications) ; II Géométrie (72 communications) ; III Calcul infinitésimal et calcul des fonctions (13 communications) ; IV Mécanique rationnelle – Mécanique appliquée (24 communications) ; V Mécanique céleste et astronomie – Géodésie – Topographie – Arpentage (22 communications) ; VI Physique mathématique (2 communications) ; VII Questions diverses (19 communications). On trouve surtout dans cette section la présentation de divers appareils : machine arithmétique de Tchebichef (congrès de 1876), arithmomètre Thomas présenté par Lucas en 1878 ou une machine à calculer présentée par Genaille la même année « qui appelle quelques perfectionnements » (Ibid., p. 112).

[1426] Ainsi, Laisant adresse ses « remerciements à tous ceux de nos collègues qui ont bien voulu m'envoyer des notes, m'aider de leurs conseils, devenir enfin mes collaborateurs dans la tâche que j'avais entreprise » ([Laisant, 1879b], p. 115). L'auteur précise que les exposés des sections physiques, génie militaire ou civil ou navigation peuvent être jointes à la liste proposée comme applications directes des mathématiques.

[1427] Ibid., p. 115.

[1428] [Laisant, 1879b], p. 63.

La thèse d'Halphen[1429] par exemple se prolonge dans une communication à l'AFAS « Sur les invariants différentiels des courbes gauches » qui reprend la « théorie qui fait l'objet de ses travaux actuels, et qui, entre ses mains, est arrivée à un degré de perfection remarquable. »[1430]

Laisant explique les raisons de ce succès par la nature même de l'Association :

> *Il n'en pouvait être autrement. C'est que nos réunions ont toujours eu un caractère bien spécial qui nous distingue des autres Sociétés scientifiques, et qui est propre à favoriser les progrès de la science. A côte des illustrations mathématiques les plus élevées de la France et du monde entier, nous n'avons pas cessé de voir, grâce à notre organisation large et libérale, des savants obscurs ou modestes, des jeunes gens, parfois de simples élèves, venant tous au même titre, et heureux de s'instruire en écoutant leurs éminents collègues.*
> *Cette réunion amicale des jeunes et des hommes d'expérience, des élèves et des maîtres, des illustres et des ignorés, toujours cordiale et bienveillante d'un côté, respectueuse de l'autre, a quelque chose de touchant ; elle est de nature à provoquer de plus en plus une noble et productive émulation.*[1431]

La liberté accordée à la tribune de l'AFAS est un facteur de progrès, comme l'entend d'ailleurs Laisant dont les idées progressistes se retrouvent dans ce schéma. Les opinions les plus diverses peuvent donc être exprimées : si on prend l'exemple extrême d'une communication intitulée « l'Anti-Copernic » (1878), Laisant se contente d'écrire : « N'insistons pas. M. Sindico ne pourrait, ni nous convaincre, ni être convaincu »[1432].

Quant à l'importance des diverses branches au sein de l'ensemble des travaux, elle est variable d'un domaine à l'autre. Laisant ne commente pas le grand nombre de travaux relatifs au premier chapitre (Analyse algébrique – Calcul des probabilités – Théorie des nombres) et se contente de préciser que c'est « à partir du Congrès de Clermont-Ferrand que les communications sur l'analyse algébrique deviennent de plus en plus nombreuses »[1433] avec notamment les travaux de Lucas. La prédominance de cette branche au sein de l'Association par la présence de représentants importants (Catalan, Lucas, Sylvester, Tchebichef[1434]) n'en reste pas moins patente. Suivent les travaux de géométrie (pure, analytique ou infinitésimale), "spécialité française" d'après la notice. Ce domaine est présenté comme un fidèle miroir de cette tradition : « C'est toujours vers cette science des figures que se sont portées de

[1429] Intitulée « Sur les invariants différentiels », la thèse est soutenue le 20 juillet 1878. Hermite explique dans son rapport sur cette thèse qu'il y voit « la preuve de connaissances analytiques approfondies et d'un incontestable talent d'invention » ([Gispert, 1991], p. 329).
[1430] [Laisant, 1879b], p. 92.
[1431] Ibid.
[1432] [Laisant, 1879b], p. 110.
[1433] Ibid., p. 66
[1434] Voir Butzer, P. L., and F. Jongmans, P. L. "Chebyshev (1821-1894) and his contacts with Western European scientists", *Historia Math.,* 16, 1989, 46-68.

préférence les études des géomètres français, et l'examen attentif des travaux mathématiques de l'Association française confirme en tous points cette observation générale. »[1435]

À côté de ses deux chapitres importants, Laisant reconnaît devant ses confrères que « L'analyse infinitésimale pure tient dans nos travaux une place relativement restreinte »[1436], tout comme les apports dans le domaine de la physique mathématique, section en concurrence avec celle de physique (section 5).

Au fil de ces différents chapitres, on entrevoit des thèmes caractéristiques des travaux de l'AFAS et le rôle qu'a pu jouer l'Association pour promouvoir une science distincte des préoccupations du milieu "académique". Laisant rappelle, on l'a déjà souligné, la communication de Broch (1874) qui fait écho aux travaux du danois Thiele[1437]. Et Laisant de conclure :

> *Dans cette voie, il y aurait encore des recherches intéressantes à faire, et la théorie des nombres y trouverait sans doute des ressources précieuses. Il doit y avoir un lien, curieux à étudier, entre ces propriétés des nombres complexes et les lois de la géométrie des quinconces.*[1438]

De grands thèmes dans la tradition de l'AFAS

Le Congrès de Montpellier en 1874, et particulièrement l'exposé de son président d'honneur Sylvester sur les systèmes articulés[1439], marque le début de nombreux travaux sur la question des tiges articulées. Suivent en effet au congrès de 1875 les communications de Fouret sur le compas elliptique, de Saint-Loup sur les systèmes articulés, de Liguine sur le systèmes articulés à six tiges, de Bréguet sur l'appareil de Hart, auxquelles s'ajoutent la règle pour tracer des arcs circulaires de grand diamètre de Tchebichef en 1876 et l'étude de divers parallélogrammes articulés en 1878. Cette énumération montre « combien ces questions préoccupent à ce moment, et avec juste raison, l'esprit des mathématiciens »[1440], et celui de Laisant en particulier comme l'illustrent sa présentation du compas trissecteur ([Laisant, 1875b]) et la vulgarisation qu'il fait de l'emploi du planimètre polaire d'Amsler ([Laisant, 1876a]).

Laisant signale également à chaque fois que cela est possible l'utilisation de la méthode des équipollences dans les exposés de l'AFAS. Il s'autorise également à suggérer les

1435 [Laisant, 1879b], p. 76.
1436 Ibid., p. 93.
1437 Ibid., p. 65.
1438 Ibid., p. 65.
1439 Sylvester, « Des systèmes articulés ; instrument réciprocateur du colonel Peaucellier ; description des courbes et surfaces algébriques par le moyen des tiges articulées. »
1440 [Laisant, 1879b], p. 82.

bénéfices que l'on pourrait tirer de l'application du calcul géométrique que ce soient celles de Bellavitis ou d'Hamilton, comme par exemple pour la communication d'A. Lafon en 1876 « Sur les accroissements géométriques ».

Parmi les nombreux travaux de Lucas[1441] à partir de 1876, ceux autour de la géométrie du tissage (congrès de 1876) sont mis en perspective avec ceux de Broch, et de Tchebichef. Laisant, déjà auteur d'un article sur la question ([Laisant, 1878f]), propose alors « d'étudier une nouvelle théorie, pour la résistance des tissus formés avec des fils de même nature, et qui constituerait une nouvelle branche des mathématiques appliquées, sous le nom de *Résistance des tissus à fils rectilignes.* »[1442] Il rappelle l'existence de préoccupations analogues sur la géométrie des quinconces au sein de la Société mathématique de France et portées par le réseau Laisant-de Polignac-Laquière.

La notice historique permet également de traiter des sujets "d'actualité" qui sont débattus au sein de l'AFAS. Laisant milite pour la première fois en faveur d'un enseignement plus large de la théorie des nombres en France et soutient fermement les travaux de son ami Lucas :

> *Il nous sera permis, à cette occasion, de présenter ici quelques brèves observations sur la situation, en France, de la science des nombres et particulièrement sur les découvertes de M. Ed. Lucas. Celles-ci ont reçu l'approbation des hommes les plus éminents, de MM. Genocchi, Tchebichef, Bouniakowsky, Sylvester, par exemple ; elles sont professées dans plusieurs universités étrangères, en Allemagne surtout, mais elles semblent presque ignorées en France.*[1443]

Laisant est déjà intervenu en faveur de son ami Lucas durant l'été 1876 pour que celui-ci obtienne une chaire dans un lycée parisien, lui qui est isolé à Moulins depuis trop longtemps. L'arithméticien obtient gain de cause et sera professeur de mathématiques élémentaires puis spéciales au lycée Charlemagne en 1876. En cette année 1879, Laisant continue de promouvoir l'œuvre de son ami qui demande depuis son retour à Paris un poste au lycée Saint Louis, poste qu'il obtiendra finalement et qu'il occupera d'octobre 1879 à octobre 1890.[1444]

> *Comment s'en étonner, quand on songe que le culte de Fermat lui-même, de cet illustre Français, immortel fondateur de l'arithmétique supérieure, est complètement délaissé en France. En 1843, un crédit de 25 000 francs fut voté pour la publication des œuvres de Fermat ; mais ce crédit n'a jamais été employé; et tandis que les œuvres complètes de Fermat attendent encore, en France, leur*

1441 « le jeune géomètre déjà bien connu pour ses belles recherches sur la théorie des nombres » (p. 66).
1442 Ibid.., p. 85.
1443 Ibid., p. 74.
1444 [Décaillot-Laulagnet, 1999], chap. 5.

> *réimpression, des libraires de Berlin, MM. Friedländer, publiaient à leurs frais, en 1861, une réimpression d'une partie des œuvres de Fermat, les* Varia opera mathematica*, conforme à l'original, dont la plus grande partie est en français. On voit quel service rendront à la science française MM. Lucas et Henry, s'ils arrivent à mettre à exécution le projet dont nous venons de parler plus haut.*[1445]

Ce souhait rejoint les futurs débats sur les bancs de l'Assemblée nationale dont nous avons déjà rendu compte dans le deuxième chapitre.

La question du retard de la science française en Europe, particulièrement face à l'Allemagne est abordée. Laisant apporte l'exemple de la géodésie et cite la communication en 1872 du commandant Perrier, signalé comme grand contributeur au progrès de cette discipline dans l'hexagone, qui met en lumière « comment la France avait perdu le premier rang longtemps occupé par elle en Géodésie. […] Instruments et méthodes d'observation restent immuables pendant toute cette période. On reste stationnaire en France, tandis qu'à l'étranger tout se transforme […,] que les savants étrangers, après avoir été nos élèves, puis nos émules, étaient devenus nos maîtres. »[1446] Les contributions de l'AFAS sont décrites comme attentives aux progrès de la science à l'étranger, comme pour les travaux géodésiques, de nouveau, en Espagne ou en Italie (congrès de 1874) ou encore au sujet des études du sol lunaire menées en Allemagne ou en Italie.

Quelques personnalités de l'AFAS remarquées par Laisant

À partir de la notice de Laisant, nous pointons certains congressistes dont les travaux sont proches de ceux de l'auteur. Notre choix se base sur des remarques explicites, des observations particulièrement élogieuses ou sur les apparitions récurrentes de noms dans le discours prononcé devant les sections 1&2.

Lucas apparaît donc comme un premier acteur important de l'AFAS particulièrement à travers le regard que porte Laisant sur les travaux de l'Association. Le Nantais affirme que ses « considérations nouvelles sur la théorie des nombres premiers, et sur la division géométrique de la circonférence en parties égales » au congrès de 1877 (qui font suite aux remarques du congrès de l'année précédente) contiennent des résultats proches du théorème de Wilson, alors qu'il développera lui-même des applications de ce théorème deux ans plus tard[1447]. Réciproquement, Laisant reconnaît que sa communication intitulée « Formule relative à des

---

[1445] [Laisant, 1897b], p. 74.
[1446] Ibid., p. 104.
[1447] [Laisant, Beaujeux, 1879], C.-A. Laisant et Beaujeux, "Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879.

sommations algébriques » ([Laisant, 1878g]) « rentre un peu dans l'ordre d'idée des recherches de M. Lucas sur des sujets analogues »[1448].

D'autres noms apparaissent à plusieurs reprises : celui de Mannheim dont les communications sont soulignées, notamment celles qui portent sur la géométrie cinématique « branche de la géométrie dont on lui est redevable, pour ainsi dire, exclusivement »[1449]. Il est vrai que l'implication de Mannheim dans les travaux de la section 1 est manifeste, lui qui a été élu 31 fois au bureau de cette section[1450]. Les noms de Catalan et d'Halphen sont également mentionnés à plusieurs reprises, toujours en termes élogieux.

L'ingénieur parisien Marcel Deprez fait l'objet d'un traitement particulier. Ses quatorze communications sont traitées à part et réparties en six thèmes : appareils de calculs, influence des espaces libres dans les machines à vapeur, représentation graphique des lois du choc, appareil à tiges articulées, études de régulateurs et d'enregistreurs divers. Nous avons signalé, dans notre première partie, l'influence que cet ingénieur a pu avoir sur l'intérêt de Laisant pour les systèmes mécaniques. La liste proposée ici montre la place qui est accordée aux questions pratiques d'instrumentation et de constructions effectives d'appareils divers au sein des sections 1&2 de l'AFAS[1451] et dont l'importance est relevée par Laisant.

À ces noms s'ajoutent des savants étrangers renommés dont les participations prestigieuses aux premiers congrès de l'AFAS, à titre de présidents d'honneur, renforcent la qualité des travaux de l'Association et son ouverture vers l'étranger.

Un des tous premiers qui ait pu inspirer Laisant semble être Sylvester, dont les travaux sont notamment relayés par la communication de Lucas « Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester » au congrès de 1877. Laisant propose en effet, dans ce même discours, comme on l'a vu, un nouveau mode de construction graphique d'échiquiers anallagmatiques.

Tchebichef expose au congrès de 1876 une généralisation d'une formule de Catalan (dont les nombreuses contributions aux congrès sont rappelées) en remplaçant dans l'égalité étudiée les numérateurs par les termes d'une série quelconque. Laisant généralisera également la même égalité de Catalan quatre ans plus tard[1452], sans citer néanmoins le mathématicien russe.

[1448] [Laisant, 1879a], p. 75.

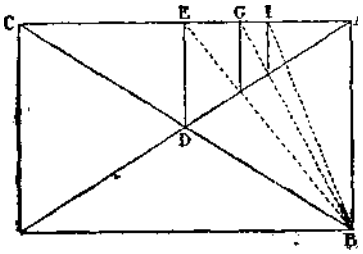
[1449] Ibid., p. 78. Par exemple, sa « Construction de la normale à la surface trajectoire d'un point d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. » (1878) est l'occasion d' « un ingénieux usage de propositions auxquelles on arrive simplement, en employant quelques théorèmes de géométrie cinématique. » (p. 89)

[1450] [Gispert, 2002], p. 342.

[1451] Voir [Décaillot, 2002a], p. 214.

[1452] [Laisant, 1880d], "Généralisation d'une formule de M. Catalan", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, mars 1880, p. 109-111.

Mais des mathématiciens plus modestes ont pu aussi influencer Laisant. Nous prenons comme exemple Baehr, dont la communication « Figuration des inverses des nombres entiers et des inverses des produits des deux nombres entiers consécutifs » au Congrès du Havre (1877), communication « très élémentaire mais très intéressante »[1453], peut rappeler certains travaux ultérieurs de Laisant sur la figuration des nombres composés ou des nombres transcendants.



La figuration de Baehr[1454]

On peut aussi penser à des interventions comme celle de Fouret en 1878 sur une « Méthode graphique pour résoudre un système de *n* équations du premier degré à *n* inconnues. » De telles communications ont pu nourrir la réflexion de Laisant jusqu'aux années 1880, même si peu des auteurs précédents sont cités explicitement dans ses travaux. La communication du colonel Parmentier en 1875 « Comparaison analytique des différentes méthodes d'approximation pour la quadrature des courbes planes, et formule nouvelle » qui contient « des considérations vraiment nouvelles »[1455] sera elle aussi réinvestie et réutilisée pour l'étude de la précision du planimètre polaire d'Amsler ([Laisant, 1879a]).

La deuxième notice historique de 1887

Laisant reprendra ce travail de notice historique lors du congrès de 1887 qui se déroule à Toulouse. Le président des sections 1&2 regrette que le projet proposé en 1879 n'ait pas été poursuivi par ses successeurs. Il continue de lui attribuer une véritable valeur scientifique : « cette revue générale d'une série bien remplie de travaux intéressants, touchant à peu près à toutes les branches des mathématiques, ne manque pas d'un certain attrait pour qui aime sincèrement la science »[1456]. Laisant remarque la vitalité de l'Association sur la période considérée (1879-1886) et la confirmation de la place des mathématiques en son sein : « L'élévation moyenne et le nombre des travaux présentés ont contribué à maintenir aux sciences mathématiques, dans notre association, l'importance qu'elles y ont prises dès le

1453 [Laisant, 1879b], p. 72.
1454 Ibid.
1455 Op.cit., p. 95.
1456 [Laisant, 1887j], p. 3.

début. »[1457] Cette importance reste cependant à relativiser au vu des productions d'autres sections, comme celle de sciences médicales par exemple. Remarquons que la période 1879-1886 correspond de plus à une relative stagnation du nombre de communications (et d'adhérents) à l'AFAS[1458].

Laisant reprendra la méthodologie de dépouillement et la classification adoptées en 1879. Il insère cependant un chapitre inexistant dans sa première notice : celui portant sur la « Géométrie de situation » car

> *il s'agit là de questions d'une nature spéciale, confinant à la fois à l'analyse combinatoire, à l'idée de classification et à des considérations géométriques. On ne saurait les faires rentrer absolument ni dans le domaine exclusif de l'algèbre, ni dans celui de la géométrie ; d'ailleurs, ces notions, si elles ne sont pas nouvelles, semblent à juste titre reprendre faveur en France depuis quelques années ; et il est légitime de croire que les questions, souvent si intéressantes et originales, soulevées dans les mémoires relatifs à la géométrie de situation, prendront une importance de plus en plus grande dans un avenir assez prochain.*[1459]

Avec le regroupement des travaux en questions à l'intérieur d'un véritable champ disciplinaire, Laisant poursuit la promotion de ce domaine, déjà souligné dans sa précédente notice historique. Les vingt-trois communications présentées dans ce deuxième chapitre sont principalement l'œuvre d'Édouard Lucas mais on trouve ponctuellement celles de Laquière, Arnoux ou Delannoy. Lucas est également très présent dans la première section proposée par Laisant « Analyse algébrique. Calcul des probabilités. Théorie des nombres » qui compte 40 communications. La section « Géométrie » recueille le plus d'interventions avec 69 titres, loin devant celle de « Calcul infinitésimal et calcul des fonctions » qui comptabilise 27 résumés ou celle de « Mécanique rationnelle-Mécanique appliquée » (25 communications).

Une telle répartition des travaux illustre de nouveau la spécificité de l'Association française pour l'avancement des sciences. Les mathématiques qui y sont développées s'éloignent de manière notoire des travaux d'institutions comme l'Académie des sciences, mais trouvent d'autant plus, à travers le chapitre de la géométrie de situation, l'adhésion de Laisant.

1457 Ibid.
1458 Varrin Philippe, "L'AFAS, c'est aussi une base de donnée", [Gispert, 2002], p.45-56.
1459 Ibid., p. 4.

LAISANT DEVIENT PHILOMATHE

Après son entrée à la Société mathématique de France et à l'AFAS, la Société philomathique de Paris (SPP) est le troisième cercle de savants qu'intègre Laisant en 1878. Les spécificités de cette institution scientifique et philosophique montrent que les projets du mathématicien y sembleraient sensiblement différents que ceux ayant motivé son accès à l'AFAS. En outre, ses diverses participations sont représentatives d'autres grands centres d'intérêts de leur auteur.

L'élection de Laisant à la Société parisienne

Le parcours de Laisant semble de nouveau lié aux appréciations de Gaston Darboux puisque lors de la Séance du 26 janvier 1878, ce dernier lit un rapport sur les travaux de MM Laisant et Tannery, candidats au poste de titulaire dans la 1ère section de la Société philomathique de Paris[1460]. Lors de la séance suivante, le 9 février 1978, Laisant, comme Tannery, est élu membre titulaire de la 1ère section.[1461]

Il rejoint les membres honoraires Liouville (élu en 1832), Bertrand (élu en 1843), Serret J-A (1846), Hermite (1847), Bonnet (1848), Briot (1852), Puiseux (1853), de la Goupillière (1860), Mannheim (1860), Laussedat (1860), Serret P. (1859), Laguerre (1867) et les titulaires : Bouquet (1857), Vallès (1870), Collignon, Darboux (1871), Jordan (1872), Halphen (1874), Leauté (1878). Appell et Picard seront élus le 9 mars 1878.

Rappelons que la Société philomathique de Paris, créée en 1788, a, selon ses statuts, « un objet purement scientifique »[1462]. Plus précisément, en se référant à son règlement primitif, « Le but de la Société n'est pas seulement de faire des découvertes […] mais encore de mettre ses Membres parfaitement au courant de celles qui ont été faites. » La devise de l'association, « Étude et Amitié », n'a pu que séduire Laisant, nous verrons comment il promeut cette conception du débat scientifique au sein du cercle philomathique.

[1460] Lors de cette séance sous la présidence de Milne-Edwards, on procède notamment à l'élection de Léauté comme membre de la SPP (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér.7, 2, Paris, 1878, p. 94).

[1461] *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s.7, t. 2, Paris, 1878, p.106. Sur les débuts de la société, on pourra consulter J. Mandelbaum, *La Société philomathique de Paris de 1788 à 1835. Essai d'histoire institutionnelle et de biographie collective d'une société scientifique parisienne*, thèse de 3e cycle, EHESS, Paris, 1980, André Thomas, *La Société philomathique de Paris et deux siècles d'histoire de la Science en France*, Presses universitaires de France, 1990 ainsi que [Berthelot, 1888].

[1462] "Statut de la société", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s.7, t. 3, Paris, 1879, p. 1. La cotisation annuelle s'élève à 50 francs, auquel s'ajoute une somme variable votée en Assemblée générale annuelle pour la reddition des comptes

Rappelons également que la Société est composée de trois sections (Sciences mathématiques, physiques et naturelles) avec vingt membres titulaires par section. La 1ère section comprend les mathématiques pures, la mécanique appliquée, l'astronomie, la géodésie, l'hydrographie et la navigation.

Être élu membre ne demande pas d'être parrainé par un ou plusieurs titulaires, comme pour la Société mathématique de France par exemple. Une fois un poste de titulaire vacant, une commission est nommée par les membres de la section pour présenter une liste de candidats, choisis « parmi les savants connus par quelques publications et qui auront manifesté le désir d'être admis dans la société »[1463]. La présentation de la liste des candidats et la discussion de leurs titres se font en comité secret. Le candidat est élu à la majorité absolue des voix (si la moitié des titulaires inscrits au moins est présente). Ce mode de recrutement rappelle donc celui de l'Académie des sciences : la Société philomathique se veut donc plus élitiste et peut être décrite comme l'antichambre de l'Académie. Ces élections étaient également marquées à l'origine par l'importance donnée à la sociabilité des postulants et par l'expression des relations d'amitié déjà établies entre ces derniers et les votants[1464]. Les noms prestigieux des titulaires cités plus haut, auxquels on pourrait ajouter des figures plus anciennes comme Cauchy, Monge ou Laplace et dont un bon nombre sont aussi académiciens, confirment ce jugement. Le rôle de substitution qu'a joué l'institution surtout pendant la fermeture de l'Académie des sciences par la Convention d'août 1793 à novembre 1795 explique aussi les origines historiques de ce statut particulier[1465].

Pourtant, la situation à la fin du XIXe siècle a bien changé. La spécialisation et la professionnalisation des carrières scientifiques au cours de ce siècle semblent s'opposer aux missions premières de la Société philomathique attachée à la pluridisciplinarité de ses rencontres et la création de sections n'y changera rien. Si on peut situer l'âge d'or de la Société autour des années 1820 où elle joue un rôle important dans la vie scientifique nationale, la création de sociétés elles aussi spécialisées mais aussi de nombreuses publications donnant l'actualité des diverses sciences mettent à mal le rôle de diffusion de son *Bulletin*, organe principal de l'Association qui avait pour but initial de faire connaître rapidement les découvertes de ses membres (la création en 1835 des *Comptes rendus de l'Académie des sciences* en est le principal exemple). Il s'en suit des difficultés financières multiples au cours du siècle que la Société privée aura du mal à surmonter.

[1463] Ibid., p. 7.
[1464] Pour ces dernières remarques, nous renvoyons à [Taton, 1990].
[1465] À l'origine, la Société proposait des cours publics, notamment après la suppression des universités, facultés et collèges par la Convention.

Malgré son déclin, nous pensons que la Société philomathique de Paris conserve néanmoins quelques attraits pour une personnalité comme Laisant [1466]. Son caractère relativement ouvert et la liberté des débats qui se déroulent en son sein, par comparaison avec ceux de l'Académie des sciences, ont pu séduire ce nouveau membre. La variété des thèmes qui y sont abordés correspond aux élans d'universalité dans la science souvent évoqués par Laisant. La possibilité de rencontrer d'autres savants, considérés comme des sages dans leur discipline respective, constitue un autre avantage. L'indépendance de cette Société privée et véritablement républicaine peut aussi être mentionnée. L'appartenance à cette Société ayant encore gardé un peu de son faste passé pour un jeune mathématicien constitue pour finir un titre non négligeable de plus pour celui qui ne briguera un siège à l'Académie des sciences que trente ans plus tard.

Les communications de Laisant dans les pages du Bulletin de la SPP

Depuis octobre 1792, la Société publie, malgré des interruptions multiples, un bulletin mensuel[1467]. On y dénombre dix-sept articles principaux de Laisant où la diversité des thèmes est conjointement à l'image des centres d'intérêt de Laisant et de la liberté accordé aux sociétaires. Curieusement, une seule communication est donnée entre 1879 et 1888. L'essentiel des écrits en question se concentre au début des années 1890.

Une part importante de l'activité de Laisant en tant que membre de la Société philomathique de Paris consiste en la diffusion de la méthode des équipollences à travers une demi-douzaine d'articles, depuis son « Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres » ([Laisant, 1879e]) jusqu'à « Sur le mouvement d'un point dans l'espace » ([Laisant, 1896b]). La cinématique est particulièrement développée grâce à la méthode de Bellavitis : nous signalons, lors de la séance du 11 novembre 1893, "Quelques propriétés du mouvement d'une figure plane" ([Laisant, 1893e]) ou plus tard l'article déjà mentionné "Sur le mouvement d'un point dans l'espace" ([Laisant, 1896b])[1468].

[1466] Pour les caractéristiques de la SPP encore prônée par ces membres, nous renvoyons à [Taton, 1990], [Thomas, 1990] et André Thomas, *La Société philomathique de Paris et deux siècles d'histoire de la Science en France*, Presses universitaires de France, 1990.

[1467] La septième série est distribuée en cahiers trimestriels et couvre en particulier les années 1876 à 1888. Le bulletin fusionnera en 1948 avec la *Revue générale des sciences pures et appliquées* ayant également reçu deux contributions de Laisant depuis de sa création en 1890 : [Laisant, 1901c] et [Laisant, Lemoine, 1894], *Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématiques*.

[1468] Nous rappelons que Laisant y démontre le résultat suivant : « Si un point matériel en mouvement M, ayant pour vitesse MV, et sollicité par une force MF, obéit à la loi des aires par rapport à un point fixe O, les plans OMV, OMF sont constamment perpendiculaires entre eux. » Les aires décrites à la surface du cône de sommet O par le rayon vecteur OM sont également proportionnelles au temps.

Nous avons vu que la méthode des équipollences peut également apparaître dans des questions de représentations de nombres particuliers, c'est le sujet de la communication « Construction graphique de nombres transcendants » ([Laisant, 1888g]). L'étude des coniques du plan est aussi facilitée par la même théorie dans les remarques sur « Quelques propriétés focales des coniques » ([Laisant, 1890f]). Les deux questions précédentes s'entremêlent dans l'article intitulé « Interprétation géométrique d'une identité » ([Laisant, 1891o]) où l'auteur traduit une égalité à l'aide des deux demi-diamètres conjugués et du foyer de l'ellipse.

D'autres articles, plus originaux, concernent la numération ou s'apparentent à des questions récréatives. Dès 1891, C.-A. Laisant propose quelques « Formules concernant les nombres polygones » ([Laisant, 1891p]). Nous avons aussi évoqué la communication du 27 février 1892, intitulée « Sur une curiosité arithmétique » ([Laisant, 1892c]) et le problème des « Centres de gravité de certains systèmes de poids » ([Laisant, 1893c]), la question posée par l'auteur étant indissociable du cadre concret d'une horloge sur laquelle des poids sont placés sur les heures et sont proportionnels à ces heures.

D'autres enfin illustrent les liens que tisse Laisant au sein de la communauté scientifique ainsi que les actions qu'il y porte. Son implication dans la Société philomathique le met en contact avec divers savants, d'horizons différents. Lors de la séance du 9 juillet 1892, il présente une notice sommaire sur la vie et les travaux de Louis-Philippe Gilbert (1832-1892) ([Laisant, 1892d]). Ce dernier est membre correspondant de la SPP depuis 1866 mais semble peu actif au sein de la Société. Professeur d'analyse et de mécanique appliquée à l'Université de Louvain depuis 1855, année où il devient docteur ès sciences mathématiques et ès sciences physiques à Paris, il est l'auteur d'ouvrages d'enseignement supérieur mais Laisant insiste également sur la diversité de ses autres publications. Gilbert est membre associé à l'Académie royale de Belgique (1867) et membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris (1890), fondateur de la Société scientifique de Bruxelles en 1869. Laisant insiste sur l'intérêt que peut présenter une de ses inventions : le barogyroscope « seul appareil classique qui puisse mettre véritablement en évidence le mouvement de rotation de la Terre »[1469]. Il est amusant de remarquer l'enthousiasme que suscite l'œuvre de Gilbert chez Laisant malgré leurs convictions radicalement opposées en matière de religion[1470].

[1469] [Laisant, 1892d], p. 139.

[1470] Laisant mentionne en effet « des travaux qui ne se rapportent pas exclusivement à des questions scientifiques, et où sont abordés des problèmes historiques ou philosophiques pouvant prêter à discussion. La foi catholique ardente de Gilbert devait en effet le pousser, à l'occasion, dans une voie polémique où il est permis de ne pas le

La Société philomathique offre aussi une tribune à Laisant pour défendre des projets qui lui sont chers. Lors de la séance du 9 février 1895, Laisant propose le programme d'une bibliothèque mathématique des travailleurs, « sorte de bibliothèque roulante » prêtant pour 14 jours et dirigée par le Dr Hulmann. Nous reviendrons plus loin sur deux autres idées auxquelles Laisant a contribué, à savoir le *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (voir [Laisant, 1896c]) et le projet de Congrès mathématique international ([Laisant, 1896d]).

Si certaines contributions semblent a priori plus anecdotiques, comme celle intitulée « L'utilité des observatoires souterrains » ([Laisant, 1903d] [1471]), elles montrent pourtant l'intérêt de leurs auteurs pour des questions diverses (d'ordre géologique par exemple) pour lesquelles la SPP offre un cadre idéal. Plus généralement, la liste énoncée ci-dessus, si elle est plus restreinte que le nombre de communications à l'AFAS par exemple, montre que les articles parus dans le *Bulletin* de la Société sont représentatifs de grands thèmes (équipollences, cinématique, numération, interpolation). La plupart de ces contributions étant publiées assez tardivement (après 1890), ce corpus montre la permanence de certaines réflexions de Laisant, particulièrement à la SPP, au delà des périodes que nous avons délimitées.

On peut ajouter deux articles concernant l'interpolation : « Observation sur l'interpolation » ([Laisant, 1907a]) et « Notes sur l'interpolation » ([Laisant, 1913b]). Le premier reprend quasi à l'identique l'article du *Bulletin* de la SMF de 1891 ([Laisant, 1891h]) pour deux raisons, comme l'explique l'auteur : « à mes yeux, le problème de l'interpolation est de la plus haute importance pour l'application de la méthode mathématique aux données fournies par l'expérience »[1472] alors même qu'on « l'a expulsé des programmes classiques, dans lesquels il avait longtemps figuré, sans qu'on puisse deviner les causes de cette expulsion. »[1473] Le deuxième, beaucoup plus long (35 pages), réunit de nombreuses propriétés et méthodes d'interpolations. L'introduction est un plaidoyer en faveur de ce chapitre des mathématiques qui allie utilité pratique et résolution graphique. Réaffirmant l'intérêt qu'il

suivre, mais où il apportait une sincérité digne de respect, aux yeux de ceux-là même qui sont les plus éloignés de partager ses croyances. » (Op.cit., p. 139).

[1471] La communication, présentée lors de la séance du 14 février 1903, fait l'objet d'un résumé dans le même bulletin (s. 9, t. V, 1902-1903, p. 14-15). Le sujet traité n'apparaît pourtant pas dénué d'intérêt puisqu'il avait déjà été abordé dans un article de l'hebdomadaire *La Raison* (8 juin 1902) et à travers la correspondance de la *Revue scientifique* du 7 février 1903 (série 4, t. 19, 1903, p. 185-186). *La raison* n'est parue que durant l'année 1902 : elle offrait une tribune aux libres penseurs de l'époque comme Laisant (voir [Lalouette, 1997]).

[1472] [Laisant, 1907a], p. 68.

[1473] Ibid., p. 69.

porte au domaine de l'interpolation[1474], Laisant y rappelle un certain nombre de méthodes (il y reprend en autre ses réflexion du congrès de l'AFAS de 1890) ; la plupart sont connues mais l'auteur insiste sur l'intérêt que présente le fait assez rare de les avoir réunies. La note est complétée de réflexions personnelles et s'attache pour une large part aux applications des différentes techniques présentées. Surtout, Laisant souhaite montrer « comment peuvent quelque fois s'aplanir de grandes difficultés algébriques, par l'emploi de méthodes graphiques »[1475] et dans quel mesure « des solutions, pratiquement impossibles à cause de la complication des calculs, s'obtiennent souvent ainsi avec une exactitude très satisfaisante et à beaucoup moins de frais. »[1476]

À ces articles, s'ajoutent également des communications dont seul le titre apparait dans les pages des *Bulletins*, et notamment celles plus tardives concernant les réflexions pédagogiques. Au cours de la séance du 10 mars 1906, il expose ainsi une manière d'enseigner certaines parties des mathématiques aux jeunes enfants : 1906 est en effet l'année de parution de son *Initiation mathématique* ([Laisant, 1906a]). De la même manière, lors de la séance du 15 avril 1905, Laisant adresse une communication intitulée « procédé pédagogique permettant la démonstration, sous forme sensible, de certaines formules algébriques relatives aux propriétés des nombres entiers ».

Deux présidences (1889 et 1905)

Laisant présidera la Société philomathique de Paris à deux reprises. Lors de la séance du 12 février 1889, il en est nommé président pour la première fois[1477] et il propose à la séance suivante (26 janvier) avec Filhol des modifications dans la publication du *Bulletin*. Il s'était déjà précédemment investi dans le fonctionnement de la Société. Au cours de la séance du 24 janvier 1891, il avait proposé de modifier le montant de la cotisation des membres[1478]. En 1889, les propositions de Filhol sont adoptées quant à l'impression d'un compte rendu sommaire des séances[1479]. Laisant propose également que « plusieurs de ses membres fussent

[1474] « Le problème de l'interpolation présente un réel intérêt au point de vue de la science, et une importance plus grande encore peut-être en ce qui touche les applications » ([Laisant, 1913b], p. 89).
[1475] [Laisant, 1913b], p. 89.
[1476] Ibid. D'autres travaux se rapportent dans une période bien précise de l'œuvre de Laisant à l'interpolation : « Note sur un problème d'interpolation », (BSMF, 1903), « Extensions de la formule d'interpolation de Lagrange » (*Journal de mathématiques spéciales,* 1891), « *Interpolation cinématique* » (AFAS, 1890), « *Nouvelles remarques sur le problème de l'interpolation* », (AFAS, 1891), « *Une remarque sur l'interpolation* » (AFAS, 1897).
[1477] *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 8, I, 1889, p. 2.
[1478] *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 7, 1890, p. 2.
[1479] *Bulletin de la Société philomathique de Paris compte rendu sommaire*, Sér. 8, I, 1889, p. 2.

chargés de rendre compte des travaux présentés dans diverses sociétés »[1480]. Il semble ainsi promouvoir la pluridisciplinarité des débats de la Société philomathique, voulant perpétuer les grands principes gouvernant l'association dès ses origines. La suite des évènements confirme cette ambition. Lors de la séance du 23 février 1889, le principe suivant, sur proposition de Laisant, est adopté :

> *Les membres de la Société philomathique, voulant rester fidèles à l'idée qui a présidé à sa fondation, c'est-à-dire à celle de s'associer, de se réunir pour s'entr'aider dans les études, se communiquer ce qu'ils pourraient apprendre et recueillir, par leurs lectures ou autrement, et s'exciter au travail, « en prenant pour objet d'émulation le spectacle des progrès de l'esprit humain, » désigneront certains de leurs collègues, membres d'autres Sociétés scientifiques, qui seront spécialement chargés de leur rendre compte des travaux qui auront été communiqués à ces compagnies. Ces comptes-rendus, faits à un point de vue général et très philosophique, auront lieu à la volonté des délégués spéciaux qui en seront chargés.*[1481]

Dix délégués sont ensuite désignés auprès, entre autres, de l'Académie de médecine, des Sociétés de biologie, botanique ou chimie. Le président de la SPP étant élu pour six mois et n'étant pas immédiatement rééligible, Bourgeois succède à C.-A. Laisant le 22 juin 1889.

Laisant devient membre honoraire lors de la séance du 11 janvier 1890[1482]. À la séance du 14 janvier 1905, il est élu vice-président[1483], Bouvier est président. Il est donc président en 1906[1484]. Lui succède Berthelot le 11 janvier 1907 et Laisant de « constater la vitalité persistante de la Société, et la permanence de ses traditions de courtoisie, de solidarité scientifique et d'amitié. »[1485] Berthelot dans son allocution soulignera les qualités de l'ouvrage l'*Initiation mathématique* paru il y a quelques mois :

> *Et je ne pouvais m'empêcher d'éprouver un sentiment de respect en songeant que c'est à cette même plume, à qui nous devons de si savantes considérations sur les quaternions, les équipollences ou les fonctions hyperboliques, qu'étaient dues ces remarques si simples et si volontairement humbles sur la meilleure manière d'enseigner l'A, B, C de l'arithmétique ou de la géométrie à des enfants.*[1486]

[1480] Voir aussi le suivi de l'affaire par Laisant *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 8, I, 1889, p. 4.
[1481] *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 8, 1, 1889, p. 9.
[1482] *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 8, 2, 1890.
[1483] *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 9, 7, n°1, 1905, p. 8.
[1484] Il présente cette année la candidature d'Ernest Lebon qui sera élu le 24 février. Ce professeur agrégé de mathématiques au lycée Charlemagne sera l'auteur d'une *Histoire abrégée de l'astronomie* (1899) et en 1913 d'une *Notice sur Henri Poincaré* dont Laisant fait l'analyse pour les *NAM* ("Bibliographie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 13, 1913, p. 235-237).
[1485] *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s. 9, t. IX, 1907, p. 8.
[1486] *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s. 9, t. IX, 1907, p. 9.

Échec à l'Academie des Sciences

Le 30 avril 1907, Laisant adresse au président de l'Académie des sciences sa candidature à la place d'académicien libre laissée vacante par le décès du Colonel Aimé Laussedat le 19 mars dernier[1487]. La commission chargée de présenter une liste de candidats à la succession de Laussedat avait été mise en place la veille même, le 29 avril : elle est composée de Darboux, Mascart, Carnot, D'Arsonval, Lannelongue, le Prince Roland Bonaparte, lui même récemment élu en février, soit deux académiciens de la section des sciences mathématiques, deux de la section de sciences physiques et deux autres de leurs confrères, auxquels s'ajoute le président Chauveau[1488].

La notice sur ses titres et travaux scientifiques qu'il confie à Carnot donne lieu à un rapport de la main de Darboux daté du 6 mai 1907, date du comité secret chargé d'étudier les différentes candidatures. L'examinateur de la thèse de 1877 écrit :

> *M. Laisant ancien élève de l'École Polytechnique, docteur es Science a publié une série de travaux sur les sciences mathématiques et leur enseignement. Parmi eux je signalerai particulièrement la traduction d'un traité italien de Bellavitis sur la méthode des équipollences, un essai sur les fonctions hyperboliques, une théorie des équipollences qui lui appartient en propre et diverses publications sur l'enseignement des mathématiques.*
> *Il est en ce moment un des directeurs des Nouvelles Annales de mathématiques, de la Revue intitulée l'Enseignement mathématique et il a participé avec M. Lemoine à la fondation de L'Intermédiaire des Mathématiciens.*
> *Dans l'un des travaux qu'il a présenté comme thèse à la Faculté des Sciences, il a traité des applications mécaniques de la théorie et du calcul des quaternions.*[1489]

À la suite de ce comité, au bout d'une heure de discussion, M. Jules Carpentier est présenté en première ligne par la commission, suivi de MM. Cornil et L. Teisserenc de Bort[1490]. Jules Carpentier (1851-1921) est un ancien polytechnicien (X 1871) et ingénieur de la Manufacture de l'État puis de la Compagnie du chemin de fer Paris-Lyon-Méditerranée. Il rachète les ateliers Ruhmkorff en 1878 pour en faire une grande entreprise de fabrication d'instruments

---

[1487] D'une écriture tremblante trahissant son état de santé, il écrit simplement :

> *Monsieur le président,*
> *j'ai l'honneur de prier l'Académie des Sciences de vouloir bien me comprendre parmi les candidats à la place d'académicien libre laissée vacante par la mort de M. le Colonel Laussedat.*

Archives de l'Académie des sciences, dossier Laisant.

[1488] *CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 882.

[1489] *Archives de l'*Académie des sciences, dossier Laisant.

[1490] Comité secret, *CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 1005. Carpentier avait déposé sa candidature le 29 avril, (*CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 882), après avoir échoué, comme Cornil et Teisserenc, en février 1907 face au prince Roland Bonaparte pour succéder à l'académicien libre Bischoffsheim (*CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 226 et 249) et à Brouardel (face à Jules Tannery). (*CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 538 et 554).

de mesures électriques et électromagnétiques, mais également des premiers périscopes et plus tard d'appareils photographiques tels que le cinématographe des frères Lumière dont il dépose le brevet. Membre du bureau des longitudes depuis 1897 et président de l'AFAS en 1902, il est finalement élu le 13 mai par 47 voix contre 22 pour Cornil et 2 pour Teisserenc[1491].

Laisant ne déposera aucune autre candidature pour accéder à la prestigieuse Académie et ne siégera donc jamais au côté de Poincaré, Jordan, Appell, Lévy ou Léauté. On lui a préféré un ingénieur auréolé du succès de son entreprise, célèbre pour ses innovations. Une unique tentative ne pouvait être couronnée de succès[1492] et on peut supposer que les discours sulfureux à l'Assemblée nationale que nous avons rapportés ont définitivement terni l'image du mathématicien, alors même que sa position dans la communauté nationale et internationale est déjà bien établie par la création ou la direction de revues par exemple.

AFAS, SMF, SPP …la liste des sociétés savantes auxquelles a appartenu Laisant n'est certainement pas exhaustive. Il faut en effet considérer son adhésion et son activité dans la Société astronomique de France de Flammarion. Nous signalons également son entrée en 1882 à la Société de statistique de Paris. Cette Société bâtie en 1860 sur les cendres de la Société de statistique universelle est fondée le 14 mai 1860 à l'initiative d'économistes, de sociologues, de statisticiens du Bureau de la Statistique de France, ainsi que de médecins. Son but est de « susciter dans les milieux les plus divers un intérêt pour les recherches statistiques, encourager ces recherches parmi ses membres et les faire connaître par ses publications ». Elle s'appuie pour cela sur des débats organisés tous les trois mois, sur la création d'un prix et surtout sur son *Journal de la Société de statistique de Paris*, créé dès sa fondation[1493]. On peut y lire lors du décès de Laisant : « Le 5 mai 1920, s'est éteint, sans souffrance, un de nos collègues que nous voyions rarement en raison d'un état de santé précaire, Charles-Ange Laisant. […] Il devint des nôtres en 1882, sous les auspices de notre ancien président Wilson. […] Ceux d'entre nous qui l'ont connu le regrettent, car c'était un homme foncièrement honnête et sincère et un ami parfaitement sûr. »[1494]

[1491] "Nominations", *CRAS*, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 1017. La nomination devient officielle après lecture par le ministre de l'Instruction publique du décret approuvant l'élection précédente, le 21 mai 1907 (CRAS, 1er semestre, t. CXLIV, n° 18, 1907, p. 1081).
[1492] Poincaré lui-même, pourtant rapidement auréolé d'une grande réputation, n'a-t-il pas dû postuler cinq fois avant d'être choisi en 1887 ([Rollet, 1994]).
[1493] F. Rosenfeld, « Histoire des Sociétés de Statistique en France », *51ème session de l'Institut International de Statistique*, Istanbul, 1997 (vol. 2, p. 527-530)
[1494] Barriol A., "Laisant (Charles-Ange)", *Journal de la Société de statistique de Paris*, 62ème année, Berger-Levrault, 1921, p. 28.

Nous n'évoquons que rapidement l'adhésion de Laisant à des sociétés savantes étrangères. En 1879, il devient membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Arts de Padoue et membre correspondant de l'Institut national genevois[1495].

En 1891, il est élu membre du Cercle mathématique de Palerme[1496]. Il y rejoint Poincaré, Picard (élu en 1891), Jordan (élu en 1890) (Appell est également membre correspondant après 1891). Fondé par le professeur d'université G. B. Guccia (1855-1914), également auteur de travaux sur les courbes et surfaces algébriques[1497], le Circolo di Palermo publie ses *Rendiconti* à partir de 1885 ce qui lui assure une renommée internationale. Laisant y publiera ses « Notes sur les invariants des polynômes entiers » en 1894, seule contribution que nous ayons recensée.

En 1892, C.-A. Laisant est élu membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne[1498]. Enfin, il est en 1894 membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Madrid et de l'Institut de Coimbra toujours au Portugal. Il publiera dans le *Journal des sciences mathématiques et astronomiques* de Gomes Teixeira, "Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés" ([Laisant, 1892i]), dans la revue publiée par l'Institut de Coimbra, "Propriété des paraboles du 3ème degré"[1499], et enfin dans le *Journal des sciences mathématiques, physiques et naturelles* (publié sous les auspices de l'Académie des sciences de Lisbonne) "Déterminant de quatre points d'un plan par rapport à un cinquième point. Propriété du nombre 123456789 et généralisation"[1500] et "Sur la correspondance d'une conique et d'une droite; et construction par points d'une conique passant par cinq points donnés"[1501].

[1495] Créée en 1852 par le politique Suisse James Fanzy, la société, ouverte et populaire, a pour but l'encouragement et le progrès des sciences, des sciences morales et politiques, des lettres, des beaux-arts, de l'économie. Basée sur le modèle de l'Institut de France, elle organise conférences et débats. Elle est dirigée entre 1857 et 1895 par un autre politique suisse, également zoologiste, Carl Vogt.
[1496] *Rendiconti del circolo matematico di palermo*, t. 5, 1891, p. 320. Voir à ce sujet [Brigaglia, Masotto, 1982].
[1497] "Nécrologie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 15, 1915, p. 115-116.
[1498] Adhésion certainement en rapport avec les rapports que noue Laisant avec le portugais Francisco Gomes Teixeiras (1851-1933), lui aussi membre correspondant de la même Société depuis 1876.
[1499] "Propriété des paraboles du 3ème degré", *L'Institut de Coïmbre*, XL, 1892.
[1500] "Déterminant de quatre points d'un plan par rapport à un cinquième point. Propriété du nombre 123456789 et généralisation", Lisboa Jorn. (2) 5, 1898.
[1501] "Sur la correspondance d'une conique et d'une droite; et construction par points d'une conique passant par cinq points donnés", Lisboa Jorn. da Ac. (2) 5, 1898.

IV.1.2. Les réseaux d'un rédacteur

Si la création de la revue *L'Intermédiaire des mathématiciens*, indissociable de la collaboration de Laisant avec Émile Lemoine, est antérieure à la prise de direction des *Nouvelles annales*, nous choisissons d'étudier tout d'abord cette dernière, représentative des fonctions d'enseignant occupées par Laisant au milieu des années 1890 et annonciatrice de la rédaction de ses manuels. *L'Intermédiaire des mathématiciens* sera alors évoqué dans la partie suivante de notre travail.

VINGT-QUATRE ANS A LA TETE DES *NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES*

Vingt-quatre ans de direction des *Nouvelles annales de mathématiques* font de Laisant le mathématicien qui est resté à la tête de la revue le plus longtemps après son créateur Gérono, c'est-à-dire aussi longtemps que son prédécesseur Charles Brissé. En gardant ce poste sur une longue période, Laisant a pu infléchir l'esprit de la revue, comme il l'annonçait dès sa prise de fonction en 1896.

Changement de direction

En 1896, C.-A. Laisant et X. Antomari prennent la direction des *NAM* à la suite de Ch. Brissé[1502] et E. Rouché, à la tête de la revue depuis 1872 pour le premier (qui débuta avec Gérono) et 1887 pour le second. Dans leur lettre aux abonnés, les nouveaux directeurs expliquent que le « changement intervenu dans l'état de la propriété des *Nouvelles Annales de mathématiques* »[1503] est à l'origine de ce bouleversement, malgré les « instances » que les deux anciens collaborateurs de Rouché et Brissé ont adressées aux directeurs pour conserver leurs fonctions, offre que les deux hommes ont déclinée.

La collaboration entre les deux nouveaux co-directeurs est également marquée cette année par la parution des *Questions de Mécanique* que nous traiterons ultérieurement. Corse d'origine (il est né en 1855 dans la Valle d'Orezza), Xavier Antomari entre à l'École normale de la rue d'Ulm en 1876. Il est reçu à l'agrégation trois ans plus tard. Comme Laisant, il est professeur au lycée Carnot, directeur des études et professeur de mathématiques spéciales à

[1502] Voir la nécrologie que lui consacre Laisant en tant que rédacteur des NAM: [Laisant, 1898c].
[1503] [Laisant, Antomari, 1896], "Aux abonnés des «Nouvelles annales» ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, p. V. Nous n'avons pas trouvé de tracer de ce fameux changement pourtant lourd de conséquences.

l'école Monge (Duporcq y sera successivement son élève puis son collègue). On doit à X. Antomari de 1892 à 1896 de nombreux manuels : *Leçons de cinématique et de dynamique suivies de la détermination des centres de gravité à l'usage des candidats à l'École polytechnique* (Nony, 1892), *Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr* (Nony, 1895), *Manuel du Baccalauréat mathématique de l'enseignement secondaire classique* (Nony, 1896), *Cours de géométrie descriptive*[1504] en collaboration avec E. Humbert, *Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale* (Nony, 1902). Outre une douzaine d'articles dans les *NAM* (principalement de mécanique), il est l'auteur pour l'Académie des sciences d'une note « Sur le produit de deux sommes de huit carrés »[1505].

Antomari devient docteur ès sciences en 1894 devant un jury composé de Darboux, Appell et Koenig, dont il est un grand admirateur[1506]. Il est élu le 17 décembre 1890 membre de la SMF grâce au parrainage d'André et Carvallo[1507].

Dans la nécrologie que rédige Laisant en 1902 à l'occasion du décès de son ami[1508], on devine les liens unissant les deux directeurs des *NAM* à partir de 1896 : « Lorsque, en 1896, j'ai été appelé à la direction des *Nouvelles Annales*, c'est moi qui ai fait appel au concours d'Antomari. Je pensais qu'il fallait assurer la continuité de la Rédaction, en y appelant l'un des plus éminents professeurs de la jeune génération. »[1509]

En 1896, les nouveaux directeurs des *NAM* procèdent à un changement sensible de la ligne éditoriale de la revue, explicite d'après le nouveau titre qui lui est conféré : *Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation*. Créée en 1842, elle s'adressait originellement aux candidats aux Écoles polytechnique et normale pour leur donner un outil supplémentaire à la préparation des concours ; d'autres revues créées depuis s'adressent au même public[1510]. Mais, en ce milieu des années 1890, Laisant constate une situation similaire à celle de 1842 pour les élèves préparant la licence et l'agrégation alors même que

[1504] À l'usage des candidats à l'École polytechnique, à l'École Normale supérieure, aux École centrales des arts et Manufactures, des ponts et Chaussées et des Mines de Paris et de Saint-Étienne.
[1505] *CRAS*, 1897, t. 104, p. 566.
[1506] Sa première thèse, soutenu le 18 janvier 1894 et dédiée à Appell et Koenig, s'intitule *Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées ; mouvement d'un corps assujetti à cinq condition* (la deuxième thèse lui sera proposée par l'université).
[1507] *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 24-39, p. 25. X. Antomari est par contre absent de l'AFAS.
[1508] [Laisant, 1902c], p. 239. Laisant écrit : « je perds un ami personnel dont j'ai pu apprécier la valeur morale, l'admirable conscience et les brillantes qualités intellectuelles. » (Ibid.)
[1509] [Laisant, Antomari, 1896], p. 239.
[1510] En 1864, sont crées les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* ; le *Journal de mathématiques élémentaires* qui deviendra *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* publié de 1877 à 1882. La *Revue de mathématiques spéciales* est créée en 1890 ; *Mathesis* à partir de 1881.

« l'élargissement des programmes a rendu peut-être moins nette la ligne de démarcation qui séparait jadis ces différentes branches de l'Enseignement. »[1511] Devant cet état de fait et la montée en puissance de l'enseignement supérieur au cours de la Troisième République[1512], la rédaction souhaite « créer un lien étroit entre l'Enseignement supérieur des Mathématiques et les Nouvelles Annales »[1513] et s'entoure pour cela de professeurs des facultés des sciences qui en tant que membres correspondants de la revue pourront leur adresser les sujets d'examens universitaires et leurs solutions[1514]. L'avertissement est explicite : tous les énoncés des concours d'agrégation ou de licence seront publiés ; leurs solutions, suivant leur intérêt, ne le seront pas nécessairement intégralement.

Il s'en suit également un recentrage sur les questions liées à la préparation de ces examens universitaires, les mémoires se faisant plus discrets. L'importance accordée aux questions publiées, d'un point de vue quantitatif[1515] autant que par leur place centrale dans le corps du journal, se veut être dans la continuité du travail initial de Gérono. La rédaction redonne leur importance à ces questions comme elles ont pu l'avoir par le passé (tout comme les questions bibliographiques ou d'histoire des mathématiques), malgré les difficultés qu'entraine la publication rapide des réponses correspondantes. Les questions destinées aux élèves de Mathématiques spéciales laissent place en priorité aux contributions d'« un ordre d'idées un peu élevé, pouvant intéresser à la fois les professeurs et l'élite des candidats à nos grandes Écoles scientifiques : l'École polytechnique et l'École Normale. »[1516] Cette importance accordée aux questions des *Nouvelles annales* sera caractéristique de la direction de Laisant : encore en 1915, les rédacteurs écrivent : « Les questions proposées ont toujours tenu dans ce Journal une place importante, depuis sa fondation. Elles ont été d'utiles exercices pour beaucoup de jeunes lecteurs ; elles ont suscité souvent d'intéressantes remarques nouvelles, et servi de point de départ à des travaux publiés soit ici même, soit ailleurs. »[1517] La

---

1511 Ibid., p. VI.

1512 Voir [Gispert, 1991]. « Au public un peu restreint qui s'occupait autrefois des choses mathématiques sont venus s'ajouter aujourd'hui bien des éléments nouveaux; les candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation deviennent de plus en plus nombreux ; comme conséquence, il en est de même pour les professeurs. » [Laisant, Antomari, 1896], p. VII)

1513 Ibid.

1514 « En nous attachant à la préparation aux examens de Licence et aux concours d'Agrégation, notre but essentiel est donc d'être utile aux candidats et aux professeurs. » (Ibid., p. V)

1515 « Nous sommes persuadés, comme l'était Gérono, qu'à tous les degrés de l'Enseignement mathématique, un cours n'est véritablement bien assimilé et ne devient profitable que par de très nombreuses applications et grâce à de continuels exercices. » (Ibid., p. VI).

1516 Ibid., p. VI.

1517 "À propos des questions des «Nouvelles annales» ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 15, 1915, p. 241-245.

rédaction aura à cœur de lister les questions non résolues en 1900[1518] d'abord, puis en 1915. Ces recensements sont possibles grâce au travail de Brocard[1519] et couvrent les années 1842 à 1910 soit 2168 questions dont environ 260 (12%) ne sont pas résolues (plusieurs de ces questions proviennent d'auteurs décédés : Bourlet, Cesaro, Dewulf, Duporcq, H. Faure, Laguerre).

À l'image de l'esprit de *L'intermédiaire des mathématiciens*, Laisant et Antomari souhaitent une collaboration fructueuse entre les acteurs des mathématiques de leur époque lecteurs des *NAM*, en particulier les professeurs. Ils expliquent: « nous avons le ferme espoir qu'entre eux [candidats à la licence, aux écoles spéciales, à l'agrégation] et nous [la direction] s'établira de plus en plus un courant de mutuelle sympathie et d'aide réciproque qui ne pourra que profiter au développement et au progrès de la Science mathématique. »[1520]

Si les *NAM* s'adressent désormais également aux élèves des universités, c'est que l'année 1896 est marquée par une importante réforme de la licence ès sciences par le décret du 22 janvier 1896 qui enterre la licence ès sciences mathématiques[1521]. Trois certificats d'études supérieures sont désormais nécessaires pour obtenir l'unique licence ès Sciences. Le contenu du certificat des sciences mathématiques varie, comme les autres, d'une université à une autre, comme le souligne la liste publiée par la rédaction.

[1518] Tableau de correspondance entre les questions posées et leurs solutions de l'année 1842 (fondation) à 1900 inclus p. 1-16 (supplément).
[1519] « Notre collaborateur dévoué, M. le Colonel Brocard, en a réuni les éléments principaux, et c'est grâce à lui que nous pouvons présenter cette Note, qui est en réalité son œuvre. » (Ibid., p. 241).
[1520] [Laisant, Antomari, 1896], p. VIII.
[1521] [Les rédacteurs, 1897], "Les certificats d'études supérieures des facultés des sciences", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 16, 1897, p. 487-491

Paris. - Calcul différentiel et Calcul intégral, - Mécanique rationnelle. - Astronomie. - Analyse supérieure. - Géométrie supérieure. - Mécanique céleste. -
Physique mathématique. - Mécanique physique et expérimentale.
Besançon. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie. - Chronométrie théorique et pratique. - Mécanique appliquée.
Bordeaux. - Mathématiques préparatoires aux enseignements de Mathématiques et de Physique (Calcul différentiel et intégral, Mécanique, Cosmographie). - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie.
Caen. - Eléments généraux de Mathématiques (Géométrie analytique, éléments de Calcul différentiel et intégral et de Mécanique, Trigonométrie sphérique et ses applications à l'Astronomie). - Analyse infinitésimale. - Mécanique.
Clermont. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique. - Astronomie.
Dijon. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie.
Grenoble. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie. - Analyse supérieure.
Lille. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Géométrie supérieure. - Astronomie. - Mécanique appliquée.
Lyon. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle et appliquée. - Astronomie.
Marseille. - Analyse infinitésimale. - Mécanique. - Astronomie.
Montpellier. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Algèbre supérieure ou Astronomie.
Nancy. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie. - Analyse supérieure. - Algèbre supérieure. - Géométrie supérieure.
Poitiers. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie.
Rennes. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Astronomie.
Toulouse. - Calcul différentiel et intégral. - Mécanique rationnelle. - Mécanique appliquée. — Astronomie ou Mécanique céleste. — Géométrie supérieure. — Algèbre et Analyse supérieure.

Les réseaux des facultés de sciences présentés dans les NAM et le contenu de leur certificat de mathématiques respectifs[1522].

C'est donc en partie sur ce réseau et les professeurs qui y sont rattachés que s'appuie la rédaction des *NAM*. La nouvelle diversité des sujets d'examens qui en résulte oblige les rédacteurs à opérer un tri dans l'ensemble des compositions que peuvent leur adresser leurs correspondants dans les diverses facultés mais ils réaffirment l'importance de la publication de certains de ces sujets et de leurs solutions même partielles :

> *Les* Nouvelles Annales *seront d'autant plus heureuses de continuer à apporter ainsi un concours continuel aux candidats des Facultés des Sciences, que ces derniers ne sauraient le trouver dans aucun autre Recueil périodique. Il y a en effet un grand nombre de journaux mathématiques destinés aux élèves de Mathématiques spéciales ; il y en a d'autres contenant des Mémoires importants de haute Mathématique. Mais aucun ne pouvait, sans sortir de son cadre, entreprendre la tâche que nous nous sommes imposée, en ce qui concerne l'enseignement des Facultés.*[1523]

Dès 1896, la rédaction[1524] lance également un concours annuel des *Nouvelles annales* : deux sujets par an sont publiés et pour chacun, l'auteur du meilleur mémoire reçoit 100 francs

[1522] Ibid., p. 487.
[1523] [Les rédacteurs, 1897], p. 490.
[1524] Les rédacteurs de 1896 s'annoncent « désireux d'établir une émulation bienfaisante parmi les personnes qui s'occupent des questions de Mathématiques de l'enseignement supérieur » ("Les concours des «Nouvelles annales» ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, p. 57-58).

en ouvrages à choisir dans le catalogue de Gauthier-Villars. D'abord réservé aux abonnés puis à tous les lecteurs, la formule semble satisfaire les rédacteurs qui sont néanmoins obligés à partir de 1901 de réduire le concours à un seul sujet par année pour réduire les délais d'impression[1525].

La revue pourra aussi offrir ponctuellement une tribune à Laisant pour défendre les thèmes qui lui tiennent à cœur. Nous prenons pour exemple la création de la Bibliothèque mathématique des travailleurs à laquelle le réacteur consacre un article[1526], toujours en 1896. Convaincu que « Les facilités matérielles données aux travailleurs contribuent puissamment aux progrès des Sciences »[1527], Laisant retrace ici l'histoire du projet. Proposé par Leméray au Congrès de l'AFAS de Caen en 1894, l'idée est unanimement saluée par les sections 1&2 de l'Association. C'est en fait le résultat d'une intervention de Laisant au même congrès intitulée : « Étude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange d'idées plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes »[1528]. Outre le soutien à la création de Congrès internationaux sur lequel nous reviendrons, les membres de l'Association « prennent en très sérieuse considération les réflexions présentées par M. Leméray sur la possibilité d'établir des bibliothèques mathématiques, ayant pour objet de mettre des livres à la disposition des travailleurs éloignés des centres scientifiques »[1529].

Les difficultés de la mise en place d'une telle bibliothèque coopérative amènent Laisant à relancer le projet à travers une question parue dans *L'Intermédiaire des mathématiciens*[1530]. C'est finalement une relation de Laisant, le docteur Hulmann, qui réussit à fonder en quelques mois la Bibliothèque des travailleurs courant 1895 à Paris. L'organisme permet de prêter des écrits mathématiques sous de multiples formes à ses abonnés (le premier catalogue recense 630 volumes dans le fond initial, provenant majoritairement de dons). Laisant se félicite de la réussite de cette « œuvre de désintéressement et de solidarité

1525 "Avis relatif aux concours des «Nouvelles annales». Concours de 1901", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 1, 1901, p. 145-146.
1526 [Laisant, 1896e], "Variétés- Bibliothèque mathématique des travailleurs ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, p. 142-145.
1527 Ibid., p. 142.
1528 AFAS, Caen, 1894/1, p. 106-107.
1529 Ibid., p. 107.
1530 « Très pénétré cependant de l'importance d'une telle fondation, et de sa grande utilité, je crus devoir faire connaître la proposition de M. Leméray par une question posée dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens*. » (Ibid., p. 143). Laisant interviendra également auprès de la Société philomathique de Paris pour faire connaître le programme de ce projet lors de la séance du 9 février 1895 : « C'est une sorte de bibliothèque roulante mettant à la disposition de ses abonnés les livres qui les intéressent pour une période de quatorze jours. Il n'est pas douteux que cette institution ne rende de nombreux services. » (*Bulletin de la SPP*, série 8, 7, 1894-1895).

scientifiques, exempte de toute pensée commerciale »[1531] et réaffirme la nécessité de soutenir une telle entreprise. Une telle structure favorise la circulation du savoir au sein de la communauté mathématique, conformément aux conceptions du directeur des *NAM* qui s'enthousiasme pour « ce nouveau foyer de diffusion des vérités mathématiques, qui s'appelle la *Bibliothèque mathématique des travailleurs*. »[1532]

Changements au début du XX^e^ siècle

Laisant est rédacteur des *Nouvelles annales* jusqu'à sa mort en 1920, sept ans avant l'arrêt de la revue. Il est épaulé par plusieurs co-directeurs, souvent des proches : Antomari, Duporcq arrivé en 1902, Bourlet à partir de 1903[1533] rejoint par Raoul Bricard après 1904. On peut également citer la contribution importante d'Henri Brocard à la publication[1534].

Dans la nécrologie qu'il écrit au décès de Duporcq, Laisant insiste sur les travaux géométriques de ce dernier : « La science mathématique, la Géométrie surtout, font en lui une perte irréparable. »[1535] On lui doit entre autre des travaux sur la courbe dite de Duporcq et une transformation généralisant celle de Lie (transformation de Duporcq, *BSMF* 1899). Il est aussi l'auteur de *Premiers principes de géométrie moderne à l'usage des élèves de Mathématiques Spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation* dont une deuxième édition est revue et augmentée par Raoul Bricard en 1912. Nous pouvons deviner l'influence qu'a pu avoir l'œuvre de son ancien maître Mannheim sur lui, tout comme sur Laisant, à la lecture de l'hommage qu'il lui adresse lors de sa prise de direction des *NAM*[1536].

L'expression d'un réseau espérantiste

Les scientifiques et particulièrement les mathématiciens jouent un rôle prépondérant dans le mouvement espérantiste, en France notamment. L'attrait d'une langue permettant aux mathématiciens de tous pays de communiquer et le fait que cette langue s'assoie sur des bases mathématiques expliquent la participation active de Bourlet, de Laisant et bien d'autres. Le rôle de ce dernier est notamment d'assurer le lien entre l'espérantisme scientifique et

[1531] Ibid., p. 144.
[1532] Ibid., p. 145.
[1533] [Bricard, 1913], Bricard Raoul, "Carlo Bourlet", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 13, 1913, p. 433-438.
[1534] Dans la nécrologie qu'il lui consacre, R. Bricard explique que « la Bibliographie le passionnait, et par l'étendue de ses connaissances en cette matière, il a rendu de nombreux services aux *Nouvelles annales* et à *L'intermédiaire des mathématiciens* » ([Bricard, 1922]).
[1535] [Laisant, 1903e], p. 98.
[1536] "Un hommage au colonel Mannheim", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 4, 2, 1902, p. 25-27.

l'espérantisme anarchiste[1537]. Il convient également de signaler le rôle joué par les revues mathématiques dans le mouvement espérantiste et surtout celles dirigées par Laisant : les *Nouvelles annales*, *L'Intermédiaire des mathématiciens* et plus tard *L'Enseignement mathématique* dans laquelle Méray se trouve être un collaborateur important. Laisant, comme Bourlet, sera également actif dans le principal organe de propagande de la langue internationale, la revue *Internacia scienca revuo* qui deviendra avec René de Saussure l'organe officiel de l'Association internationale pour l'espéranto[1538]. Même si des savants réputés comme Poincaré patronnent la langue espéranto, celle-ci est promue par des scientifiques plus éloignés du milieu institutionnel comme Bourlet ou Laisant.

Quant il rejoint l'équipe des *NAM*, après la mort de Duporcq, Carlo Bourlet est professeur au Lycée Saint-Louis. Né en 1866 à Strasbourg, reçu premier à l'École polytechnique et second à l'École Normale, il choisit en 1885 cette dernière et termine en tête du concours de l'Agrégation en 1888. Il soutient trois ans plus tard sa thèse *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues*. Il devient alors professeur au lycée Henri IV (jusqu'en 1897), puis au lycée Saint-Louis (jusqu'en 1906)[1539], avant de succéder à Eugène Rouché comme professeur au Conservatoire national des arts et métiers où il enseigne la mécanique. Sa carrière l'amène à devenir membre de la sous-commission française de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Ces travaux portent aussi, jusqu'au début du siècle, sur la théorie des fonctions et des équations intégrales. Parallèlement, il s'intéresse aux progrès de la bicyclette et publie un *Nouveau Traité des bicycles et bicyclettes* (prix Fourneyron de l'Académie en 1899). Fervent partisan de l'espéranto auquel il fut initié par Charles Méray vers 1900, il est président du Groupe espérantiste de Paris, l'une des deux plus importantes sociétés espérantistes avec celle de Saint-Pétersbourg, et défend cette langue à travers, par exemple, de multiples conférences[1540]. Il sera tout comme Laisant partisan d'une langue internationale pour les échanges entre mathématiciens de tous pays.

[1537] [Rasmussen, 1995], p. 563.
[1538] Ibid., p. 567-570.
[1539] Il est également professeur suppléant du cours d'analyse et de mécanique à la Sorbonne en 1899, professeur à l'École des Beaux-arts.
[1540] [Rasmussen, 1995], p. 563. Bricard, dans sa nécrologie d'où sont tirés ces renseignements, souligne le « dévouement passionné et désintéressé à la cause de la langue internationale Esperanto, à laquelle, pendant plus de 10 ans, il [Bourlet] a peut-être donné le meilleur de lui-même ». Bricard, Raoul, "Carlo Bourlet", Nouvelles annales de mathématiques, Sér. 4, 13 (1913), p. 433-438. Il sera secrétaire de l'*Association scientifique internationale espérantiste* (voir "Variétés. Association scientifique internationale espérantiste", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 7,1907, p. 399-401)

Raoul Bricard est quant à lui né le 23 mars 1870 dans le département de la Seine. Polytechnicien (X 1888), il intègre l'artillerie. On lui doit des ouvrages de géométrie descriptive, de cinématique, de calcul vectoriel et des travaux sur les systèmes articulés[1541]. Il obtiendra le prix Poncelet de l'Académie des Science en 1932. Il est professeur de Géométrie appliquée aux arts au Conservatoire national des arts et métiers[1542]. Il est membre de la SMF depuis 1897 grâce au soutien de Laisant et de Mannheim. Il fait également parti du mouvement espérantiste puisque, outre la rédaction d'ouvrages en espéranto, il conçoit en 1902, avec Hoffbauer, la première terminologie complète des termes mathématiques entièrement en langue espéranto ; les mathématiques se trouvent ainsi être la première discipline scientifique à posséder un tel répertoire[1543].

Les *NAM* continueront de s'adresser aux candidats des Écoles polytechnique et Centrale. La revue accompagnera les changements opérés dans la préparation à ces concours : c'est pourquoi les rédacteurs décident en 1904 de publier un rapport d'Appell sur l'enseignement dans la classe de mathématiques spéciales. Ce rapport fait suite à la mise en place d'une commission interministérielle, la commission des grandes écoles, chargée de proposer un programme applicable à toutes les classes de mathématiques spéciales[1544]. Il s'agit de rompre avec les habitudes consistant à définir les notions en fonction du programme d'admission du concours préparé, ce qui présentait de nombreux inconvénients pour les petits établissements de province dont les élèves multiplient les concours. Les *NAM* jugent que « cette réforme semble marquer une étape importante dans l'enseignement scientifique français »[1545] et publient en conséquence le programme en supplément, accompagné des remarques d'Appell.

Les convictions des nouveaux co-directeurs, Bourlet en particulier, apparaissent cependant au fil des tomes de la revue. Nous prenons l'exemple du militantisme espérantiste de ce dernier, qui a très certainement influencé Laisant qui deviendra à son tour, comme nous le verrons, espérantiste convaincu. Deux ans après la correspondance de Méray ([Méray,

---

[1541] R. Bricard, "Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 3, 1897, p. 113–150. Voir aussi H. Lebesgue, "Octaèdres articulés de Bricard", *L'enseignement mathématique*, Ser. 2, 13, No. 3, 175-185.
[1542] Laurent R., "Raoul Bricard, Professeur de Géométrie appliquée aux arts", in Fontanon C., Grelon A. (éds.), *Les professeurs du Conservatoire national des arts et métiers, dictionnaire biographique*, 1794-1955, INRP-CNAM, Paris 1994, vol. 1, p. 286-291.
[1543] Bricard est notamment l'auteur de l'ouvrage : *Matematika terminaro kaj krestomatio* (1905) (voir *NAM*, Sér. 4, 5, 1905, p. 310-327 et [Rasmussen, 1995], p. 564).
[1544] 1905 verra donc la naissance du premier véritable programme de mathématiques spéciales (voir [Itard, 2002]) et Itard Jean, *Essais d'histoire des mathématiques,* Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1984, p. 372.
[1545] "Rapport de M. Appell sur l'enseignement dans la classe de mathématiques spéciales", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 4, 1904, p. 385-399, p. 385.

1901]) sur les avantages que présente l'espéranto pour les mathématiciens, les rédacteurs renouvellent en 1903 leurs soutiens à ces idées. Constatant la croissance du nombre de cours, d'articles ou de correspondances dans cette langue, ils réaffirment que : « S'il est une catégorie de personnes que doit toucher l'idée de la langue internationale, c'est assurément celle des savants et en particulier des mathématiciens purs, dont les sujets d'étude sont internationaux par excellence. »[1546] Et si le nombre d'ouvrages mathématiques rédigés en espéranto est encore faible (quatre sont cités), c'est par manque d'un véritable dictionnaire des termes techniques mathématiques. La rédaction des *Nouvelles annales* projette donc de publier à partir de septembre 1903, en supplément de la revue, le lexique souhaité, rédigé par le polytechnicien Hoffbauer[1547]. Elle demande également aux lecteurs des *NAM* de se prononcer quant à la pertinence d'articles rédigés en espéranto et publie un premier texte dans cette langue pour preuve de sa compréhensibilité. De tels articles seront par la suite acceptés par les rédacteurs, défenseurs de la langue internationale, qui inscriront les *NAM* à l'Association scientifique internationale espérantiste[1548]. Les *NAM* défendront par la suite le projet d'une revue mathématique entièrement rédigé en espéranto[1549]. Jusqu'au bout, Laisant sera un fervent espérantiste : il proposera par exemple en février 1918 une conférence intitulée « La langue internationale "Espéranto". Ce qu'elle est. Son rôle indispensable dans la Société des Nations » en collaboration avec Jacques Camescasse[1550].

Les *Nouvelles annales* traversent ainsi la Première Guerre Mondiale avec des difficultés de publication mais en maintenant « la continuation régulière d'une Revue qui a pris une place importante dans l'enseignement mathématique de notre pays, et qui est connue et appréciée dans le monde entier. »[1551]

À la sortie de la Grande Guerre, les directeurs Laisant et Bricard vont procéder à une « véritable réorganisation »[1552] de la revue pour « apporter un concours plus efficace que par le passé à l'Enseignement, et plus particulièrement à l'Enseignement supérieur »[1553]. Les

---

[1546] "L'«Esperanto» et les mathématiques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 3 (1903), p. 337-339.

[1547] La rédaction se déclare « convaincue des services considérables que l'Esperanto peut rendre à la Science » (ibid., p. 338)

[1548] Bricard, R., "Variétés. Association scientifique internationale espérantiste", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 7, 1907, p. 170-173. Créée par René de Saussure, elle compte 200 sceintifiques comme membre en 1906 ([Rasmussen, 1995], p. 364).

[1549] "Variétés. Un journal mathématique en espéranto", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 7, 1907, p. 84-86.

[1550] (1869-1941) Espérantiste convaincu, franc-maçon et collaborateur de Laisant sur l'*Initiation mathématique*.

[1551] Plus loin, « Dans leur modeste sphère d'action, elles [les NAM] contribuent pour leur part au bon renom de la France en matière scientifique. » "À nos collaborateurs", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 14, 1914, p. 529-530.

[1552] "Avis", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 19, 1919,pp. 441-443.

[1553] Ibid., p. 441.

mémoires originaux sont choisis pour être accessibles aux lecteurs de « culture mathématique générale »[1554] c'est-à-dire en possession des connaissances générales du lycée ou de la faculté. Les travaux trop particuliers sont donc écartés, mais ceux participant à la diffusion en France de théories méconnues ou au perfectionnement de questions plus classiques restent dans l'esprit de la revue. Les sujets et les solutions des diverses licences mathématiques et des concours à l'agrégation ou ceux des grandes écoles ainsi que les questions variées constituent toujours les fondamentaux des *Nouvelles annales*. Les directeurs instituent de plus des chroniques du mouvement mathématique : il y sera rendu compte des nominations, distinctions etc. bref, de l'actualité du monde mathématique y compris des découvertes récentes (sans aucune volonté exhaustive néanmoins). En associant de nouveau les professeurs à leur entreprise, l'objectif affiché par les rédacteurs est « beaucoup moins de faire des *Nouvelles annales* un des périodiques où se crée la Science, que, plus modestement et non moins utilement, croyons-nous, de les mettre au service de la *Culture mathématique*. Il nous semble, en particulier, que notre journal peut servir de trait d'union entre les diverses facultés et faciliter leur collaboration »[1555].

Les *Nouvelles annales* se tournent donc vers l'enseignement universitaire, et vers le réseau des facultés de province que l'on a pu esquisser à la lumière d'une communication précédente. Rompant avec l'élitisme des concours pour les Écoles polytechnique ou normale, la revue s'adresse aussi (surtout ?) à présent aux établissements de l'enseignement supérieur en province. Il y a là une véritable évolution, si on compare à la situation lors de l'arrivée de Laisant à la direction, vingt ans plus tôt. Le terme de « Culture mathématique » illustre bien la volonté de démocratiser le contenu des *NAM* et de s'adresser à un public de plus en plus large.

IV.2. La carrière d'un enseignant, l'œuvre d'un pédagogue

IV.2.1. Plusieurs postes avant l'École polytechnique

Nous avons déjà évoqué le souci de l'aspect pédagogique dans un bon nombre de travaux de Charles-Ange Laisant, que ce soit dans son rôle de diffuseur ou à travers sa réflexion sur la représentation des objets mathématiques. Sa carrière d'enseignant ne

[1554] Ibid., p. 441.
[1555] Ibid., p. 443

commence pourtant qu'en 1893 lorsqu'il est nommé enseignant à l'école Monge[1556]. On peut penser que la fin de son mandat de député (puisque Laisant, désabusé, ne se représentera plus devant les électeurs) le libère de nombreuses obligations éloignées de l'activité mathématique (comme il l'a avoué lui-même dans la préface de son *Introduction à l'étude des quaternions*). On peut également supposer que progresse dans l'esprit de Laisant l'idée que c'est par l'éducation, et l'enseignement des sciences en particulier, plus que par les réformes politiciennes que des progrès pourront advenir dans la société.

PREMIERE NOMINATION A L'ÉCOLE MONGE

L'École a été créée en 1869 par un jeune polytechnicien de trente-deux ans, Aimé Godart (X 1857, 1837-1923). Ingénieur des ponts et chaussées, il a été professeur puis directeur du collège Sainte-Barbe[1557]. Saint-simonien convaincu, il souhaite ériger un établissement où l'enseignement sera résolument moderne et novateur. Il le baptise du nom du grand fondateur de l'École polytechnique et l'établit rue Chaptal, sur la plaine Monceau, récemment rattachée à la commune de Paris, endroit attirant les gens fortunés souhaitant s'installer auprès du grand boulevard nouvellement ouvert par Haussmann, le boulevard Malesherbes. Après 1877, les nouveaux bâtiments, construits selon les plans, entre autres, d'Eiffel, donnent directement sur le boulevard : 500 élèves sont accueillis dans des locaux flambant neufs, luxueux et résolument modernes pour l'époque, notamment du point de vue de l'hygiène. L'École comporte trois sections (élémentaire, secondaire et supérieure). L'enseignement qui y est proposé tranche aussi avec la tradition : on souhaite y développer l'observation, la réflexion et la confrontation des idées plutôt que la mémorisation. L'autonomie des élèves est encouragée comme l'explique Ferdinand Buisson dans son *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* : « on sait les efforts de l'école Monge pour laisser aux élèves le plus possible de liberté et, partant, de responsabilité personnelle »[1558]. L'éducation physique tient une grande place, tout comme l'usage d'un français correct. La notation sur 20 qui n'est pas encore adoptée par tous les lycées d'État, y

[1556] Voir aussi Jean Marie Mayeur, Arlette Schweitz, "Charles Ange Laisant", *Les parlementaires de la Seine sous la Troisième République*, Volume 1, Publications de la Sorbonne, 2001, p. 340.
[1557] Brochure du centenaire du Lycée Carnot 1995 : "De l'École Monge au lycée Carnot" par J.M. Mavre, professeur honoraire au Lycée Carnot. Ferdinand Buisson, "Monge (école)", *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1887.
[1558] Ferdinand Buisson, "Intuition et Méthode intuitive", *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, partie 1, t. 2, Hachette, 1887, p. 1374-1377.

est de rigueur. L'établissement attire les fils de bonnes familles[1559] car l'enseignement y reste coûteux. Ceci n'empêche pas le lycée de connaître des difficultés financières, notamment à cause de l'ouverture en 1892 du lycée public tout proche Janson de Sailly. Malgré les subventions publiques, ces difficultés s'aggravent et finalement l'établissement est vendu à l'État en 1894[1560]. Le nouveau lycée, rebaptisé Lycée Carnot, accueille, à sa première rentrée du 1er septembre 1895, 630 élèves et est destiné à répondre aux besoins de la population nouvelle installée sur la plaine Monceau. La classe préparatoire disparaît et ne sera recréée qu'en 1901.

Sans doute Laisant aura-t-il été séduit pas les méthodes novatrices et les principes libéraux qui gouvernent l'enseignement à l'École Monge. Il est possible qu'il ait été informé des pratiques en usage dans cet établissement dès 1875 puisque de Bagnaux et Godart (respectivement fondateur et directeur de l'établissement) présentent successivement à l'AFAS lors de la séance du 28 août 1875 du Congrès de Nantes les « méthodes en usage à l'école Monge »[1561]. L'institution privée correspond d'ailleurs au modèle « d'éducation libérale »[1562] développé lors des congrès de l'Association. Aimé Godart y interviendra à de nombreuses reprises et sera président de la nouvelle section pédagogie créée en 1881. Avec Ernest Callot, autre administrateur de l'École Monge, il est membre régulier du bureau de cette section. Laisant sera quant à lui président de la section pédagogie au congrès de 1900.

Nommé de 1893 jusqu'en 1895 à l'École Monge, Laisant a pu y rencontrer un collaborateur précieux avec qui il dirigera les *NAM* de 1896 à 1901 et rédigera *Questions de mécanique*[1563] : X. Antomari. En 1893, H. Léauté[1564] vient de quitter son poste de directeur des études de l'école (qu'il occupait depuis 1882) et Antomari lui succède jusqu'en 1895, puis deviendra professeur de mathématiques spéciales du nouveau Lycée Carnot voulu par l'État jusqu'à sa mort en 1901.

Ernest Duporcq (1872-1903) sera un des élèves de Laisant à l'École Monge. C'est ce qu'on peut en effet lire dans la nécrologie que l'ancien maître consacrera à son élève pour les *Nouvelles annales* ([Laisant, 1903e]). Visiblement affecté par la perte brutale de son ami[1565],

---

[1559] Et ce malgré les critiques à l'encontre de ses méthodes d'enseignement. Gaston Méry écrit à ce sujet : *L'école où l'on s'amuse* (Nouvelle Librairie, 1890).

[1560] Projet examiné à la Chambre le 20 novembre 1894 et décret signé le 29 décembre 1894.

[1561] AFAS, Nantes, 1875, p. 1328.

[1562] Nous empruntons l'expression ainsi que les informations qui suivent à R. d'Enfert. Voir Renaud D'Enfert, "un projet scolaire entre novation et tradition", in [Gispert, 2002], p. 301.

[1563] Laisant C.-A. et Antomari X., *Questions de mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales,* Nony, Paris, 1895.

[1564] Voir sa nécrologie par D'Ocagne, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 28, 1917, p. 1-3.

[1565] Laisant s'estime « véritablement atterré par cette nouvelle stupéfiante » (p. 97) intervenant un an après la mort du précédent directeur des *NAM* et autre ami de Laisant, X. Antomari. Plus loin, « j'appréciais ses qualités

Laisant explique : « je connaissais Duporcq depuis d'assez longues années ; je l'avais rencontré comme élève à l'école Monge, et j'avais été frappé par ses aptitudes géométriques exceptionnelles »[1566]. Après un passage à l'École polytechnique (X 1892), Duporcq intègre le corps du génie et devient ingénieur télégraphe. Laisant lui propose de devenir rédacteur des *NAM* en 1902, à la suite du décès d'Antomari[1567]. Laisant signale qu'il sera également secrétaire général du Congrès international des mathématiciens de 1900[1568].

L'École Monge apparaît comme un premier lieu de rencontre pour Laisant et ses futurs collaborateurs aux *Nouvelles annales*, qu'ils soient à l'époque professeur ou élève. L'École Sainte-Barbe et l'Institut agronomique sont deux autres lieux où Laisant enseigne et croise des proches.

PREPARER AUX CONCOURS

En 1895, Laisant devient professeur à l'École Sainte-Barbe[1569], quarante-trois ans après y avoir été lui-même élève, du temps où Justin Bourget (1822-1887), fondateur du *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, était directeur. Le fondateur des *NAM*, Gérono, a également été professeur à Sainte-Barbe et a probablement enseigné à Laisant. En effet, la nécrologie consacrée à Gérono dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques* précise que : « Laisant a prononcé sur sa tombe des paroles éloquentes qui ont ému toute l'assistance […] cette touchante improvisation, qui méritait d'être recueillie et qui reflétait si bien la reconnaissance de l'élève et la tendresse de l'ami. »[1570] Il enseigne durant quatre ans dans cette école avant de devenir examinateur d'admission à l'École polytechnique en 1899.

Parallèlement, il est nommé examinateur d'amission à l'Institut agronomique de 1895 à 1897[1571]. L'établissement est fondé en 1848, à Versailles, mais jugé trop coûteux, il est fermé en 1852. L'Institut national agronomique est recréé en 1876 dans les locaux du Conservatoire des arts et métiers (rue Réaumur), complété par la ferme de la Faisanderie à Vincennes. La

---

de cœur, sa droiture de caractère » ([Laisant, 1903e], p. 98). Voir aussi *Bulletin de la Société mathématique de France*, 31, 1903, p. 229.

1566 [Laisant, 1903e], p. 97.

1567 « C'est sur mes instances qu'il était devenu rédacteur de ce journal, où je considérais son entrée comme une bonne fortune » (p. 97). C'est Bourlet, accompagné l'année suivante de R. Bricard, qui prendra sa succession à la direction de la revue, toujours aux côtés de Laisant.

1568 *Compte-rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens*, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900.

1569 Édouard Nouvel, *Le Collège Sainte-Barbe: la vie d'un collège parisien de Charles VII à nos jours*, Le Collège Sainte-Barbe, 1948.

1570 Rouché Eugène, "Notice sur C. Gérono". *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 3, 11, 1892, p. 538.

1571 Carnoy (Henri), *Dictionnaire biographique international des écrivains et des artistes...,* Paris, 1903 direction est confiée à Tisserand, puis à Risler (1880). Le nombre d'élèves ne cessant d'augmenter et les locaux se révélant trop exigus, le décret du 23 décembre 1882 permet la construction de nouveaux locaux sur les terrains de l'École de Pharmacie à l'angle de la rue de l'Arbalète et de la rue Claude Bernard. L'École s'installe en 1890, cependant les constructions se poursuivent jusque dans les années 1930. Les élèves de cet établissement sont admis sur concours et destinés à devenir des agriculteurs ayant de fortes connaissances scientifiques, des professeurs, des administrateurs de forêts ou d'haras ou des chimistes dans le secteur industriel (sucreries, fabriques d'engrais...) après avoir obtenu leur diplôme d'ingénieur agronome. Pour cela, ils suivent une formation théorique de deux ans contenant principalement des notions de zoologie, botanique, géologie, microbiologie; mais également de mathématiques, de mécanique, de physique et de chimie. Cette formation est complétée par une partie plus pratique (démonstrations pratiques et exercices de dessins topographiques par exemple). L'École se veut alors pour les agriculteurs ce qu'est l'École polytechnique ou l'École centrale pour les ingénieurs[1572].

Alors qu'il est examinateur dans l'établissement, Laisant retrouve un condisciple de l'École polytechnique : Hermann Laurent qui est professeur de mathématiques à l'Institut Agronomique depuis 1889. Mathieu Paul Hermann Laurent est né en 1841 à Luxembourg. Il fait ses études à l'École polytechnique (X 1860) puis à l'École d'application de Metz (1864) d'où il sort lieutenant du génie. Il présente en 1865 sa thèse (« De la continuité des séries » et « Sur les lignes isothermes »). Après avoir pris part au conflit avec la Prusse, il démissione et est nommé répétiteur en 1866, puis examinateur d'admission (en 1883). Auteur de travaux sur l'élimination, sur les séries, sur les équations aux dérivées partielles, il a également écrit de nombreux traités et des ouvrages classiques en algèbre, en mécanique, en analyse ou sur les jeux de hasard[1573]. C'est avec lui que Laisant dirige la partie mathématique de *La Grande Encyclopédie* et c'est encore lui qui lui remet les insignes d'officier de la Légion d'honneur en 1902.

[1572] *Institut National Agronomique Paris-Grignon: Centenaire du centre de Paris. Cent cinquantenaire du centre de Grignon*, Institut National Agronomique Paris-Grignon, 1976. Voir aussi l'article correspondant dans *La Grande Encyclopédie.*

[1573] Sagnet (Léon), "Laurent", [Berthelot & al., 1885], t. 21, p. 1038.

RETOUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En avril 1895, Laisant brigue le poste alors vacant de répétiteur de mécanique à l'École polytechnique[1574], en remplacement de l'ingénieur hydrographe Pierre Paul Guieysse (X 1860 ; 1841-1914) qui occupe l'emploi entre 1874 et 1893. Dans une lettre datée du 24 janvier 1895 adressée à Laisant, Guyesse évoque « la question de principe qu'André veut d'abord faire toucher au Ministre, sur la situation d'un député répétiteur ». Le fait que Laisant soit un ancien député (rappelons qu'il ne se représenta pas en 1893) semble poser problème au général commandant de l'École Louis Joseph André qui est néanmoins soucieux de trouver un remplaçant. La position de l'ancien député comme enseignant d'État semble assez exceptionnelle[1575]. Laisant devient cependant répétiteur de mécanique en 1895[1576].

Le 18 mai 1899, Laisant envoie une lettre au général Toulza[1577], commandant de l'École polytechnique dans laquelle il postule pour le poste d'examinateur d'admission. Il y soulignera qu'il a procédé en 1898 aux examens du premier degré en qualité d'examinateur d'admission suppléant. Il sera alors choisi pour le poste d'examinateur jusqu'en 1913, où il quitte ses fonctions, radié au 1er avril « pour raison de santé »; Gabriel Koenigs prendra la suppléance[1578].

Le jugement que porte Laisant sur les programmes d'admission de l'époque, ces même programmes qu'il a lui même à appliquer, est sévère. Ses premières observations concernent les ruptures et les réaménagements conséquents qu'apporte le programme du 24 juillet 1896, alors qu'il n'est que répétiteur de mécanique. Le rédacteur des *Nouvelles annales*[1579] explique par exemple combien l'introduction de l'arithmétique et de la géométrie,

---

1574 Dossier personnel Laisant, archive de l'École polytechnique. Lettre adressée au Général commandant Louis Joseph André (X 1857 ; 1838-1913). Élève à l'École d'application de Metz, il intègre l'École de pyrotechnie pendant la guerre de 1870. Il est commandant de l'École polytechnique de 1894 à 1896 avant de devenir Ministre de la Guerre en 1990, poste duquel il démissionnera suite à l'affaire dite "des fiches". Outre ses travaux en balistiques, il s'intéresse à l'aviation (*De la navigation aérienne et de l'aviation*, 1865).

1575 Voir François Naud, *Les parlementaires de Loire-Inférieure sous la Troisième République*, Éditions régionales de l'Ouest, 2009.

1576 Henri Léauté est alors professeur de mécanique et ce jusqu'en 1904. Voir Léauté H., « "Cours de mécanique : École polytechnique : 2ème Division : 1895-1896" suivi de "De l'emploi des vecteurs dans quelques questions de cinématique" et de "Un théorème général de mécanique" : conférence[s] de M. C. A. Laisant », École polytechnique, 1896. Brisse est également répétiteur et Rouché examinateur à l'École.

1577 François Victor Toulza(X 1857 ; 1838-1906). Formé à l'École d'application de l'artillerie et du génie en 1859, il participe aux campagnes d'Algérie de 1866 à 1870, et d'Allemagne en 1870 (où il est fait prisonnier). Il sera nommé commandant de l'École polytechnique de 1896 à 1900.

1578 Dossier personnel Laisant, archive de l'École polytechnique. Dans une lettre datée du 13 mars 1913 que lui adresse le Ministre de la guerre, on peut lire : « Je regrette votre détermination et je ne puis vous laisser quitter des fonctions que vous avez si brillamment remplies pendant de longues années, sans vous exprimer, au nom du gouvernement de la République, mes remerciements pour les services que vous avez rendus ».

1579 "Variétés. Le nouveau programme d'admission à l'École polytechnique", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 3, 16 ; 1897, p. 40-45. Plus généralement, les programmes devraient être brossés à grands si elle paraît pertinente, n'est qu'incomplète dans la mesure où elle n'est pas accompagnée de notions élémentaires (sur les nombres premiers, la division harmonique, l'involution, l'homographie) [1580]. Parallèlement, la disparition de la décomposition d'une fraction rationnelle, de la formule d'interpolation de Lagrange et surtout celle de la notion d'infiniment petit et de l'emploi précieux de la notation différentielle provoque sa colère : « C'est un recul de plus de vingt ans qu'on fait subir d'un coup à l'enseignement des Mathématiques spéciales. »[1581] L'agencement des notions de géométrie analytique est aussi sanctionné : l'étude du cas particulier des courbes planes du second degré ne devrait pas devancer la théorie générale. Les chapitres de cinématique et de dynamique sont renvoyés maladroitement dans le programme de physique, en laissant en mathématique que celui de statique, plutôt succinct et qui devrait plutôt tenir d'une « Géométrie particulière ». L'unité nécessaire de l'enseignement de la mécanique s'en voit contrariée alors même que « La Mécanique est loin d'être une science facile à enseigner. On peut se demander très sérieusement s'il convient de l'exiger des candidats à L'École Polytechnique » [1582]. Les répercussions de ces choix inquiètent le répétiteur de mécanique : « de tels bouleversements réagissent d'une manière grave sur l'enseignement de la Mécanique à l'École Polytechnique elle-même. Suivant que les élèves sont ou non en possession des notions générales formant, en quelque sorte, une introduction à la Mécanique rationnelle, le rôle des professeurs est tout différent, et le nombre des leçons doit changer. Un peu d'unité et de continuité serait un bienfait de premier ordre. » [1583] Laisant conclut sur l'échec probable d'un tel programme, son nécessaire abandon pour un autre plus durable et stable, négociable à la marge (ce qui trancherait avec les habitudes prises depuis vingt ans). Les effets néfastes de celui proposé au niveau des études préparatoires, l'aléatoire qu'il engendrera au moment des examens devraient pousser rapidement à un tel changement, que l'auteur souhaite le plus rapide possible.

Ces critiques ne sont pourtant reprises et précisées que cinq ans plus tard dans les pages de *L'Enseignement mathématique*, à l'occasion de la publication datée du 15 octobre

traits, complétés par des observations pragmatiques. L'esprit devant se résumer à cette remarque : « il faut avoir confiance dans le jugement des examinateurs et dans celui des professeurs appelés à préparer les candidats. » (p. 40).

[1580] « les notions essentielles de Géométrie moderne qui peuvent être d'un secours si puissant dans l'étude des coniques. » (Ibid., p. 42).

[1581] Ibid., p. 42. C'est pourquoi les rédacteurs des NAM écrivent : « Nous les supplions surtout de rétablir la notation différentielle, dont on ne peut se passer et qui n'offre réellement pas plus de difficultés dans l'enseignement que la théorie des dérivées, qu'elle complète et qu'elle éclaire. » (p. 45).

[1582] Ibid., p. 44.

[1583] Ibid., p. 43.

1902 des nouveaux programmes d'admission de l'École, alors que Laisant est examinateur depuis trois ans :

> *Il ne faut pas exagérer l'importance des programmes en général ; nous en trouvons une preuve nouvelle dans l'expérience qui vient d'être faite depuis cinq ans. Les programmes en vigueur dans cette période ont certainement été les plus lamentables qui eussent été appliqués depuis plus d'un demi-siècle* […] *cela montre bien, nous y insistons, combien en matière pédagogique les programmes ont peu d'importance en regard des méthodes.* [1584]

Les programmes critiqués ici datent donc de 1897, ce sont eux que Laisant applique en tant qu'examinateur d'admission. Avec l'étude des « renseignements généraux » accompagnant les titres du nouveau programme, innovation empruntée au programme de l'École Centrale et saluée par Laisant, l'auteur y voit une « délivrance » apportée aux candidats et aux enseignants. L'examinateur salue la vision pratique et le recentrage sur les notions véritablement utiles à un ingénieur (en évitant les difficultés soulevées sur les questions de limite ou de continuité par exemple) [1585]. Pourtant, ont été sacrifiées l'arithmétique, la géométrie élémentaire et l'algèbre élémentaire. En égrainant le contenu du chapitre algèbre, Laisant reconnaît l'utilité de la règle à calcul, salue le retour des infiniment petits ou la retenue à observer quant à certains points (critères de convergence des séries, différentielles d'ordres supérieurs, extrema de fonctions de plusieurs variables). Il s'interroge sur la pertinence de la démonstration exigible du théorème affirmant que toute fonction dérivable sur un intervalle y est continue. Surtout, il regrette l'abandon de la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre : « Le théorème fondamental (dit de d'Alembert) reste toujours admis comme postulat (ce que nous persistons à trouver fâcheux ; car la démonstration en est tout à fait simple, quand on veut bien ne pas se perdre dans des subtilités). » [1586] C'est exactement ce qu'il avait déjà illustré en 1889 avec la démonstration du dit-théorème (voir III et [Laisant, 1889c]). L'auteur se félicite de l'approche de la méthode de Newton par des considérations géométriques (« excellentes indications » [1587]), mais il regrette l'absence des méthodes d'interpolation, autres chapitres plus tardifs mais important de son œuvre :

> *Nous regrettons de n'y rien voir figurer sur les différences ni sur l'interpolation. Mais il faut nous résigner; pour l'instant ce n'est pas à la mode ; et peut-être,*

[1584] [Laisant, 1903], p. 73. Plus loin, toujours au sujet de ce programme : « Il est mauvais, par cette raison qu'un programme n'est jamais et ne peut jamais être bon; mais nous l'approuvons quand même, parce qu'il représente, il faut le répéter, un immense progrès sur celui qui vient de disparaître » (p. 82).

[1585] « La scholastique et la métaphysique prématurées ne peuvent aboutir qu'à dégoûter à tout jamais les jeunes gens des mathématiques, en engendrant chez eux le scepticisme, et en leur en masquant l'utilité pratique. Pour de futurs ingénieurs surtout, c'est un véritable empoisonnement intellectuel. » (Ibid., p. 74).

[1586] [Laisant, 1903f], p. 80.

[1587] Ibid., p. 80.

avant un demi-siècle, se trouvera-t-il un homme de génie pour découvrir à nouveau ce qu'on savait il y a soixante-quinze ans, à savoir que ces théories sont non seulement utiles, mais indispensables dans les applications, et pour imposer sa conviction. Il faut savoir être patient, en présence du mouvement (parfois circulaire) qu'affecte le progrès pédagogique. Ne pas trop reculer, c'est déjà une notable satisfaction.[1588]

De la même manière, porté par son intérêt pour les questions de cinématique, l'auteur insiste sur la nouvelle notion de courbure ou le rejet persistant de celle de plan osculateur. La partie mécanique s'est en effet vu adjoindre un chapitre de cinématique et de dynamique du point « en éliminant tout ce qui pourrait donner matière à des chicanes sur les principes »[1589]. Ce souci « d'éviter les arguties raffinées, aussi bien que les théories sans application directe »[1590] semble louable : combiné en effet avec le désir de se recentrer sur les notions utiles à des futurs ingénieurs, il est une ligne directrice des nouveaux programmes.

Après l'étude rapide de ce programme, Laisant conclut en signalant l'écueil de directives trop précises : on risque « de juger les candidats d'après un petit nombre de connaissances acquises et bien répétées, plutôt que sur leur aptitude à en faire application, c'est-à-dire sur leur mémoire plus que sur leur intelligence. »[1591] C'est à l'usage trop fréquent des capacités de mimétisme et de mémorisation que s'attaque de nouveau Laisant, habitude combinée avec celle des examinateurs qui proposent automatiquement les mêmes exercices classiques et celle des professeurs des écoles préparatoires qui se basent sur ces mêmes exercices. Le tableau ainsi dressé des relations entres examinateurs et professeurs des classes préparatoires est plutôt sombre : « Les professeurs se plaignent des examinateurs; les examinateurs se tiennent sur leurs gardes vis-à-vis des professeurs ». Laisant ayant occupé successivement les deux postes, explique :

Je suis absolument à mon aise pour parler de ces questions, et cela pour deux motifs : le premier, c'est que je n'ai connu le programme nouveau qu'après sa publication, et que, par conséquent, je n'y ai pas la moindre parcelle de responsabilité ; le second, c'est que je ne prétends pas plus qu'un autre à l'infaillibilité dans les fonctions toujours délicates d'examinateur.
Le grand tort, c'est de ne pas produire tout haut les griefs qu'on articule tout bas, de ne pas considérer à la fois les professeurs, les examinateurs et les conseils de

[1588] Ibid., p. 81.
[1589] Ibid., p. 82. On remarque d'ailleurs au détour de ces lignes que l'autorité de Laisant s'installe peu à peu auprès de ses collègues : « Plusieurs professeurs, à ce sujet, m'ont confié leur embarras et demandé s'il serait interdit aux candidats d'employer des méthodes et des formules devenues classiques, et qui semblent éclairer et simplifier l'exposition, en ce qui concerne les coniques. J'espère que non, et je l'ai dit. » (p. 82).
[1590] Ibid., p. 83.
[1591] Ibid., p. 83.

> *l'École Polytechnique comme les collaborateurs d'une même œuvre; et de vivre dans une sorte de persistant malentendu.*[1592]

Une étroite collaboration entre les différents acteurs du système d'admission est donc la clé pour des examens partiaux et pertinents, évoluant d'années en années sur des accords communs. Et ce plaidoyer, Laisant le revendique justement en raison de ses fonctions au sein de l'École polytechnique, dont dépend l'enseignement en amont :

> *J'estime que ma situation d'examinateur, loin de m'imposer une réserve excessive et un silence absolu, me fait un devoir de signaler les imperfections où je les vois et les remèdes où il me semble les trouver. Mon seul but est de contribuer au progrès de l'enseignement de l'École polytechnique, à la meilleure organisation possible de cet enseignement, sur lequel les études préliminaires réagissent avec tant d'énergie.*[1593]

IV.2.2. Nombreux manuels issus de la pratique

Laisant a déjà écrit à ses débuts ce qui peut être considéré comme un manuel sur les fonctions hyperboliques[1594]. Son œuvre de diffusion des théories de Bellavitis ou d'Hamilton, c'est-à-dire les ouvrages de 1881 et 1887, peut également être considérée autant comme des ouvrages de recherches que des références pédagogiques, même si les notions abordées, on l'a vu, n'apparaissent pas explicitement dans les programmes officiels de l'enseignement secondaire ou supérieur français, au grand regret de Laisant. Surtout, l'entrée en fonction de Laisant en tant qu'enseignant coïncide avec le début d'une intense période de production de véritables manuels, souvent destinés au secondaire. Laisant participe ainsi au mouvement de production d'ouvrages scolaires, caractéristique de l'instruction sous la Troisième République[1595].

L'écriture de manuels donne lieu à plusieurs collaborations avec Élie Perrin (en 1892), Xavier Antomari ou Émile Lemoine (en 1895). Parallèlement, Laisant rédige seul son *Recueil de problèmes* entre 1893 et 1896 et signe les préfaces de quatre ouvrages par la suite. Dans chaque manuel de cet ensemble, des notions sont mises en avant, des notions visiblement peu présentes dans les programmes de l'enseignement secondaire alors même qu'elles

[1592] Ibid., p. 84.
[1593] Ibid., p. 84.
[1594] ([Laisant, 1874b]). C'est en tout cas l'avis de Bricard dans la nécrologie qu'il consacre à Laisant ([Bricard, 1920]).
[1595] Sur le thème des manuels scolaires, voir Choppin Alain, "L'Histoire des manuels scolaires : une approche globale", *Histoire de l'éducation*, n° 9, déc. 1980, p. 1-25. Du même auteur, "Le Cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. I. De la Révolution à 1939". *Histoire de l'éducation*, n° 29, janv. 1986, p. 21-58.

apparaissent capitales pour les auteurs. En parcourant ces manuels, nous devinons ainsi un réseau d'auteurs, autour de Laisant, qui milite pour l'instruction de nouveaux chapitres dans l'enseignement par le biais des manuels.

COLLABORATION AVEC ÉLIE PERRIN ET XAVIER ANTOMARI

Une première collaboration pour promouvoir des mathématiques visuelles

Le premier de ces ouvrages est publié en 1892 et intitulé *Premiers principes d'algèbre, à l'usage des classes de troisième et de seconde de l'enseignement secondaire moderne* ([Laisant, Perrin, 1892]). Il marque le début d'une fructueuse collaboration avec Élie Perrin durant la période 1892-1897 (à laquelle s'ajoute un dernier manuel en 1908).

La première collaboration de Laisant avec Élie Perrin correspond à l'année où ce dernier entre à la Société mathématique de France, parrainé justement par Laisant et d'Ocagne[1596]. Il est alors professeur de mathématiques à l'École municipale Jean-Baptiste Say de Paris[1597]. Les écoles primaires supérieures, fondées à travers toute la France par la Troisième République pour développer un enseignement scientifique et technologique adapté à des carrières scientifiques dans l'industrie ou le commerce, se présentent concurremment au lycée classique. Elles permettent notamment l'accès aux classes préparatoires des Arts et Métiers. Le but est de former des techniciens et des ingénieurs ayant une culture générale étendue en plus de l'enseignement classique[1598]. Comme pour l'École Monge, Laisant est, avec Perrin, en contact avec les établissements novateurs qui se développent sous la Troisième République.

Leur manuel de 1892 concerne l'enseignement secondaire moderne, tout récemment créé. L'enseignement classique, basé sur l'étude des langues anciennes, est en effet contesté par les pédagogues dans le dernier tiers du XIX^{e} siècle. Avec la création en 1891 de l'enseignement secondaire moderne, l'objectif est de fonder un enseignement s'appuyant sur les sciences, par une approche expérimentale et scientifique, et les langues vivantes[1599].

L'ouvrage est constitué de 34 leçons réparties sur trois chapitres traitant tour à tour de l'emploi des signes et du calcul littéral, de la résolution d'équations, de l'étude des progressions arithmétiques ou géométriques, et enfin de l'usage des logarithmes.

[1596] Élie Perrin et G. Arnoux sont élus membre de la SMF lors de la séance du 15 juin 1892. (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 46).
[1597] AFAS, Saint Étienne, 1897/2. Présent aux congrès de 1891, 1893, 1894, on doit à Perrin une communication intitulée « Préliminaires d'une géométrie du triangle » (AFAS, 1897).
[1598] *École municipale Jean-Baptiste-Say*, imprimerie de E. Douste, 1900.
[1599] [Belhoste, 1995], p. 376.

Remarquons que dès ce premier ouvrage, et à l'image de la traduction de *La Méthode des équipollences* ou de sa *Théorie des équipollences*, Laisant (et Perrin) ont souhaité laisser une large place aux exercices et aux applications (environ mille questions ou exercices - sans réponses -, auxquels s'ajoutent 235 questions tirées d'ouvrages ou de recueils sur les 345 pages de l'ouvrages). C'est également une caractéristique de la littérature et de la presse pédagogique de l'époque puisque nous lisons, dans une bibliographie consacrée à ce manuel :

> *La partie de ce livre destinée aux applications a reçu un développement exceptionnel. C'est là une qualité dont l'importance n'est pas à établir. Les Ouvrages de Mathématiques publiés en France ont avec raison suivi cette tradition dans laquelle nous avons été devancés par l'étranger, notamment par les Anglais*. […] *On a fini par comprendre que le problème est le moyen de faire sortir les Mathématiques du domaine spéculatif pour pénétrer dans la pratique qui est leur vraie justification. La règle la plus simple, la formule la plus élémentaire sont lettre morte pour quiconque ne s'est pas exercé à la résolution de problèmes. C'est donc avec infiniment de raison que les professeurs ont reconnu l'utilité d'y intéresser les élèves. C'est également le motif du succès des nombreux journaux mathématiques fondés depuis une cinquantaine d'années et dont la liste augmente encore, en France comme à l'étranger. Aussi le niveau moyen de l'instruction mathématique s'est-il rapidement relevé. Le problème est donc un élément pédagogique d'une efficacité immédiate ; il aiguise l'esprit, éveille l'intelligence, force l'attention, et accommode la difficulté aux efforts nécessaires à la vaincre.*[1600]

Cette bibliographie, rédigée dans les *Nouvelles annales,* souligne le souci de simplicité qui a présidé à l'élaboration de ce manuel, la « préoccupation aussi visible des auteurs de bien faire comprendre les premières notions avec autant de soin qu'il en est donné dans ce petit livre. »[1601] L'auteur de la bibliographie, probablement Brissé ou Rouché, voit en outre dans le manuel un outil précieux dans une pratique effective et utilitaire de l'enseignement : « Les *Premiers principes d'Algèbre*, par MM. Laisant et Perrin, nous semblent parfaitement adaptés au programme exclusivement utilitaire de l'enseignement classique moderne. »[1602] L'enseignement secondaire moderne est en effet construit sur les cendres de l'enseignement spécial voulu par Duruy en 1865 qui avait pour but de préparer en quatre ans aux carrières de l'industrie et du commerce. Il conserve le caractère utilitaire de ce dernier et surtout souffre de la comparaison avec l'enseignement classique qui reste la voie privilégiée.

De plus, on y enseigne l'algèbre, l'arithmétique et la trigonométrie, sujets du manuel de Laisant et Perrin, comme au tout début du XIX^e siècle, du temps des ouvrages de Lacroix. Les développements des mathématiques intervenus depuis ne sont pas intégrés aux

[1600] "Bibliographie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 11, 1892, p. 429.
[1601] Ibid., p. 431. Un peu plus loin : « Les auteurs ont apporté la plus grande attention à supprimer les difficultés qu'une exposition trop savante aurait pu faire naitre dans l'esprit des élèves » (p. 429).
[1602] Ibid., p. 431.

programmes[1603]. Laisant introduit ainsi des notions originales et novatrices, que l'on retrouve dans son œuvre, en réaction à cet archaïsme. La bibliographie signale : « comme plus particulièrement dignes d'attention, la représentation graphique des fonctions des 1er et 2e degrés, les éléments du triangle arithmétique de Pascal, les principes des formules de combinaisons et l'emploi de l'échiquier dans les questions d'Arithmétique et d'Algèbre. »[1604]

Quoi qu'il en soit, l'ouvrage marque le début d'une coopération entre les deux hommes entre 1892 et 1908 à travers quatre manuels, relatifs à l'enseignement primaire supérieur ou au secondaire[1605]. Ils semblent partager des points de vue communs sur l'enseignement, particulièrement sur l'enseignement secondaire. Tous deux soutiennent Méray dans ces critiques de l'enseignement de la géométrie : Perrin est par exemple l'auteur *La Méthode de M. Méray* (C Naud, 1904). Ensemble, ils publient successivement *Applications de l'algèbre* (1894) à destination des élèves de l'enseignement primaire supérieur, *Applications de l'algèbre élémentaire à la géométrie* ([Laisant et Perrin, 1897]) et enfin, après la réforme de 1902, un *Cours d'arithmétique* (1908)[1606].

L'ouvrage de 1897, *Applications de l'algèbre élémentaire à la géométrie, à l'usage des élèves de la classe de première scientifique de l'enseignement moderne*[1607] est leur second ouvrage relevant de l'enseignement secondaire moderne. L'idée de « méthode générale » y est développée, en réponse au manque de méthodes d'ensemble qui caractérise l'enseignement moderne où les cours semblent offrir un catalogue de propriétés à mémoriser, sans hiérarchie ou classement particulier[1608]. C'est d'ailleurs le titre de la première partie du manuel, complétée par une seconde partie : « Exercices et problèmes divers » au nombre de 770. À travers les sept chapitres de la première division, augmentés de cinq appendices[1609], Laisant définit la géométrie analytique :

[1603] [Belhoste, 1995], p. 380.
[1604] "Bibliographie", p. 430.
[1605] Perrin publiera un autre manuel en 1906 : *Trigonométrie, première C et D, mathématiques A et B, Écoles navale et de Saint-Cyr, Institut agronomique*, par Élie Perrin, Gaston Boucheny, H. Paulin, 1906.
[1606] Laisant C.-A. et Perrin É., *Applications de l'algèbre : problèmes de géométrie, recueil contenant un résumé du cours de géométrie, 80 questions résolues et plus de 300 problèmes à résoudre, à l'usage des élèves des écoles primaires supérieures, des écoles normales primaires et des candidats au brevet supérieur*, C. Delagrave, Paris, 1894. Laisant, C.-A. et Perrin Élie, *Cours d'arithmétique : classe de cinquième B*, H. Paulin, Paris, 1908.
[1607] [Laisant et Perrin, 1897], Laisant C.-A. et Perrin É., *Applications de l'algèbre élémentaire à la géométrie, à l'usage des élèves de la classe de première scientifique de l'enseignement moderne. Ouvrage contenant 770 énoncés de problèmes à résoudre*, C. Delagrave, Paris, 1897.
[1608] [Belhoste, 1995], p. 380.
[1609] 1. Mesure et variations des éléments géométriques 2. Représentation géométrique des fonctions 3. Premières notions sur les fonctions dérivées 4. Maxima et minima 5. Étude de certaines fonctions simples 6. Lieux géométriques et élimination 7. Considérations générales sur les problèmes de géométrie.
En appendice : I. Théorie de la division des polynômes II. Théorie de la racine carrée d'un polynôme III. Notions sur les limites IV. Propriétés des polynômes V. Comparaison des racines de deux équations à une inconnue dont le degré n'est pas supérieure au deuxième. VI. Résolutions de quelques problèmes

Une équation, entre deux variables x et y étant donnée, déterminer la ligne que cette équation représente; une ligne étant définie, trouver son équation; tels sont les deux problèmes généraux de la GEOMETRIE ANALYTIQUE. Cette science permet donc d'appliquer le calcul à la recherche des propriétés géométriques des figures. Elle fournit réciproquement à l'algèbre un instrument précieux, en permettant de figurer aux yeux, d'une manière saisissante, les circonstances de la marche d'une fonction et de se rendre compte des variations qu'elle subit quand on donne à la variable toutes les valeurs possibles[1610]

Une nouvelle fois, l'entrelacement entre le calcul et le graphique est souligné, le soutien mutuel que doivent se prêter algèbre et géométrie est réaffirmé et les propriétés sont mises en cohérence les unes avec les autres. Dans le dernier chapitre, ressurgit la notion de méthode, chère à Laisant. Il constate tout d'abord qu'un« grand nombre de problèmes géométriques paraissent au premier abord ne pouvoir se résoudre que par une habileté particulière, une sagacité, que développe évidemment la connaissance des propriétés des figures mais qui cependant ne constitueraient pas une méthode »[1611]. Avec l'application de l'algèbre à la géométrie présentée dans ce manuel, « on est nécessairement conduit à suivre des méthodes, et non pas à imaginer des procédés pour chaque problème spécial »[1612]. La généralité du propos, la globalité de l'approche représentent un souci toujours présent chez Laisant, tout comme il l'était quand il exposait la méthode des équipollences. Les auteurs souhaitent que ce souci pénètre l'enseignement scientifique de l'enseignement moderne.

La notion unificatrice de force dans les Questions de mécanique *d'Antomari et Laisant (1895)*

L'ouvrage *Questions de mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales* ([Laisant et Antomari, 1895]) date de 1895 ; les deux hommes s'apprêtent à prendre la direction des *Nouvelles annales* l'année suivante. Découpé en trois parties (cinématique, statique, dynamique), à l'image de la thèse de Laisant et des nouveaux programmes de l'École polytechnique applicables à partir de 1893, le manuel fait la part belle aux applications du calcul géométrique : équipollences et quaternions sont exposés dans des rappels en début de chaque chapitre ou au sein de solutions commentées. La patte de Laisant est à ce titre patente et l'auteur de la bibliographie consacrée à l'ouvrage note : « Le lecteur, en effet, le moins familiarisé avec la théorie des quantités géométriques dans le plan ou des équipollences et la théorie des quaternions qui en est l'extension dans l'espace à trois

[1610] [Laisant et Perrin, 1897], p. 74.

[1611] [Laisant et Perrin, 1897], p. 187. Les auteurs ajoutent que même ces géomètres brillants et habiles, capables de « donner aux solutions ce caractère d'élégance si justement apprécié en mathématiques » (p. 188), sont souvent plus analystes qu'ils ne le croient, « ils suivent une méthode, quelque fois sans le soupçonner » (p. 187).

[1612] Op.cit. À celui qui suit « cette voie lente, mais certaine […] il lui suffit pour cela de suivre une marche rationnelle et d'appliquer des règles invariables » (p. 188).

dimensions ne peut manquer, ce nous semble, d'être frappé de la corrélation philosophique de ces deux généralisations de la géométrie avec l'étude et la science du mouvement. »[1613]

Si le précédent ouvrage d'Antomari, *Leçons de cinématique et de dynamique*[1614], contient l'exposition de la composition et du produit géométrique de vecteurs dans son chapitre préliminaire, la notion unificatrice de force est ici présentée plus étroitement liée à celle de vecteurs, ce qui peut illustrer un véritable apport de Laisant : « L'importance de cette méthode pour l'étude de la Mécanique a été mise en lumière par M. Laisant dans les ouvrages depuis longtemps classiques qu'il a publiés pour la vulgariser »[1615].

Le manuel peut ainsi être vu comme un manifeste pour l'introduction de ces notions dans l'enseignement : « Par les simplifications qu'elle [La méthode vectorielle] procure, elle prend chaque jour plus de faveur dans l'enseignement mathématique. Son inscription définitive dans les programmes doit donc être demandée et souhaitée ; nul doute qu'elle n'y exerce une heureuse influence. »[1616]

LE RECUEIL DE PROBLEMES DE C.-A. LAISANT

L'unique ouvrage personnel de Laisant explicitement dédié aux élèves est un recueil de problèmes. Dans un autre recueil du même type (celui de Maupin en 1895), Laisant écrit : « Rien n'est plus banal en apparence qu'une collection de problèmes destinés aux élèves, et répondant à un programme déterminé. Rien n'est plus utile cependant »[1617]. Au delà du simple catalogue d'exercices, l'auteur souhaite en effet promouvoir certaines notions afin de les voir progressivement pénétrer les programmes officiels. En soulignant les récents sujets d'étude des mathématiciens, il veut contribuer à l'évolution du contenu de l'enseignement, en particulier de l'enseignement préparatoire, à travers une publication qu'il signale assez rare, celle du recueil de problèmes.

[1613] "Bibliographie Questions de mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales", *Mathesis*, série 2, t. 5, 1895, p. 47.

[1614] Antomari X., *Leçons de cinématique et de dynamique*, Nony, 1892. Voir "Bibliographie", 2ème série, t. 3, *Mathesis*, 1893, p. 39-40. Ces différents ouvrages font écho aux *Leçons de Statistiques* (1892) et au *Traité de Mécanique* (1893) d'Emmanuel Carvallo (1856–1945), polytechnicien (X 1877), capitaine du génie et membre de la SMF (1887). Après son doctorat sur l'optique théorique à la Sorbonne en 1890, il devient la même année, examinateur en mécanique à l'École polytechnique, puis directeur des études. Carvallo sera également professeur d'électricité à l'École pratique d'électricité industrielle.

[1615] "Bibliographie", *Mathesis*, série 2, t. 5, 1895, p. 47

[1616] Ibid.

[1617] Laisant C.-A., "Préface", in [Maupin, 1895], p. I.

Fort de ses contributions à de nombreux journaux, Laisant publie à partir de 1895 son *Recueil de problèmes mathématiques classés par divisions scientifiques*[1618]. Cette œuvre pour le moins conséquente est composée de six volumes (de 80 à 300 pages chacun environ) marque l'intérêt de Laisant pour les questions posées dans les revues auxquelles il a collaboré.

Le titre complet du recueil donne en effet son contenu précis :

> *Contenant les énoncés, avec renvoi aux solutions, de tous les problèmes posés depuis l'origine dans divers journaux : Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, Nouvelle Correspondance mathématique, Mathesis.*

Laisant reconnaît qu'il n'a effectué ici qu'un « travail de classification »[1619] des questions dispersées dans de multiples publications depuis la création des *Nouvelles annales* en 1842. Le résultat est une hiérarchisation en sept volumes publiés en deux temps : 1893 d'abord puis en 1895-1896. Nous n'avons en revanche pas trouvé de traces du dernier volume *Calcul infinitésimal et Calcul des fonctions. Mécanique. Astronomie à l'usage des candidats à la licence* : l'entreprise a-t-elle été trop ambitieuse pour pouvoir être conclue ? Après 1896, la prise de direction des *NAM*, et l'implication dans *L'Intermédiaire* puis l'*EM* peuvent expliquer que le projet reste inachevé.

Précisons à présent le titre de chaque volume publié :

(I) *Arithmétique. Algèbre élémentaire. Trigonométrie à l'usage des classes de mathématiques élémentaires* (publié en 1893)

(II) *Géométrie à deux dimensions. Géométrie à trois dimensions. Géométrie descriptive à l'usage des classes de mathématiques élémentaires* (publié en 1893)

(III) *Algèbre. Théorie des nombres. Probabilité. Géométrie de situation à l'usage des classes de mathématiques spéciales* (publié en 1895)

(IV) *Géométrie analytique à deux dimensions (et géométrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques spéciales* (publié en 1893)

(V) *Géométrie analytique à trois dimensions (et géométrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques spéciales* (publié en 1893)

(VI) *Géométrie du triangle à l'usage des classes de mathématiques spéciales* (publié en 1896).

L'observation des titres de chacun de ces volumes montre un ordre correspondant aux ordres des classes dans l'enseignement secondaire et préparatoire. La classe de mathématiques élémentaires (accessible à partir de la classe de rhétorique de la filière

[1618] [Laisant, 1893-1896], *Recueil de problèmes mathématiques, classés par divisions scientifiques*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1893-1896.

[1619] « Je n'ai eu d'autre mérite que d'en faire une classification, mais je crois par ce travail de patience avoir rendu un service réel aux professeurs et aux élèves. », "Avertissement", in [Laisant, 1893-1896], vol. III, p. V. Les solutions sont indiquées par un système de renvoi à la revue correspondante avec le nom de leur auteur et l'année de leur publication. L'avertissement se termine par de chaleureux remerciements à Brocard dont l'aide a dû être en effet précieuse : son rôle de bibliographe dans les *NAM* par exemple, particulièrement pour les tables de réponses non résolues, est souvent apprécié.

classique ou à la fin de la filière moderne) prépare au baccalauréat classique lettres-mathématiques et se poursuit par les classes de mathématiques supérieures et spéciales qui préparent aux grandes écoles comme on les appelle désormais à l'époque[1620]. Derrière l'entreprise de ce recueil, se cache un plan complet d'étude des sciences mathématiques où Laisant cherche à introduire certaines notions, à travers l'utilisation des questions posées dans les revues mathématiques.

L'utilisation de ces questions permet en effet de présenter des sujets récents et modernes, pour qu'ils trouvent leur place dans l'enseignement mais aussi qu'ils soient reconnus comme thème important par les mathématiciens de l'époque. Dans l'avertissement qui ouvre chacun de ces volumes, Laisant justifie l'utilité d'un tel recueil :

> *Ces problèmes représentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des Géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure.*[1621]

Ainsi, l'auteur choisit systématiquement la forme la plus générale des questions et marque « les questions non résolues qui, sans être très difficiles, paraissant présenter un intérêt particulier et méritent de nouvelles recherches. »[1622]

Signalons quelques particularités de tel ou tel volume à l'aide des observations spéciales qui accompagnent chacun d'entre eux.

Le premier volume à s'adresser aux élèves de mathématiques élémentaires s'intitule *Arithmétique. Algèbre élémentaire, trigonométrie* mais compte peu de questions d'arithmétique : celles-ci ont été regroupées, au vu de la difficulté des exercices, dans le volume trois sur la théorie des nombres. La partie algèbre comprend le calcul algébrique élémentaire, la résolution d'équations du premier ou second degré, les questions de progression et de logarithmes. Laisant ajoute : « Quelques questions, en petit nombre, exigent des connaissances sommaires sur le calcul de déterminants, introduits aujourd'hui dans beaucoup de cours de Mathématiques élémentaires. »[1623], mouvement dont l'amplification est donc souhaitée par l'auteur. Laisant insiste sur les bénéfices à tirer pour les « commençants » des exercices sur les calculs, les équations et les systèmes d'équations. L'ensemble des notions trigonométriques est abordé dans le dernier chapitre pour plus de cohérence :

[1620] [Belhoste, 1995], p. 375 et 378.
[1621] [Laisant, 1893-1896], vol. III, p. V.
[1622] Ibid., p. VI. Les questions non résolues à cause de la difficulté apparente qu'elles présentent sont en effet marquées d'un astérisque. Laisant se propose d'ailleurs de recueillir les premières solutions à ces problèmes et de les transmettre aux publications concernées.
[1623] [Laisant, 1893-1896], vol. I, p. IX. Voir l'ouvrage de Paul Mansion par exemple.

fonctions circulaires, trigonométrie plane et même trigonométrie sphérique, même si cette dernière reste plutôt dédiée aux élèves de mathématiques spéciales, si bine que « les professeurs et élèves d'élémentaires ne s'[y] arrêteront pas »[1624]. Seuls les exercices sur les fonctions circulaires nécessitant l'usage du calcul infinitésimal semblent naturellement reportés dans le volume sept destiné aux candidats à la licence dont nous n'avons pas retrouvé de trace.

Le volume *Algèbre. Théorie des nombres. Probabilité. Géométrie de situation* de l'ouvrage porte explicitement sur les programmes de mathématiques spéciales de l'époque, auxquels Laisant ajoute quelques questions d'algèbre supérieure (calcul infinitésimal exclu). On trouve donc des exercices sur le calcul algébrique (fractions continues, déterminants, analyse combinatoire), les dérivées, les séries et les limites, les équations de divers degrés, les fonctions et plusieurs sur diverses identités ou inégalités.

L'auteur fait le choix d'ajouter des problèmes en théorie des nombres : « La Théorie des nombres ne figure malheureusement aujourd'hui dans aucun des programmes de notre Enseignement. Les exercices qu'on trouvera ici, et qui touchent à cette branche si importante de la Science mathématique, sont de difficultés très diverses. Les uns confinent à l'Arithmétique élémentaire, d'autres sont pour ainsi dire inabordables dans l'état présent de la Science. »[1625] La difficulté d'ériger un corpus pour les élèves de mathématiques spéciales ne doit pas faire oublier l'intérêt de tels problèmes et l'intéressante ouverture sur ce domaine. L'ensemble occupe une centaine de pages sur les 260 du volume, de la numération décimale à l'analyse indéterminée et aux propriétés des nombres particuliers. De la même manière, les questions de probabilités, peu répandues dans les revues dépouillées par l'auteur, sont regroupées dans un chapitre d'une dizaine de pages seulement mais présentent un intérêt certain pour les élèves. Enfin, Laisant confirme son intérêt et son soutien à « cette branche si originale et si intéressante de l'Analyse combinatoire connue sous le nom de Géométrie de situation, et dont il semble qu'on doive faire remonter l'origine à Euler. »[1626] Ce chapitre clôt le manuel en abordant damiers et échiquiers, carrés magiques et autres figures analogues, soit autant de représentations que Laisant souhaite voir introduites dans l'enseignement.

Destinée au élèves de mathématiques spéciales (contrairement au deuxième volume réservé à ceux de mathématiques élémentaires), la *Géométrie analytique à deux dimensions (et géométrie supérieure)* du recueil rassemble des questions qui peuvent être traitées

[1624] Ibid.
[1625] [Laisant, 1893-1896], vol. III, p. IX.
[1626] [Laisant, 1893-1896], vol. III, p. X.

analytiquement ou par des considérations synthétiques. Les connaissances nécessaires en calcul infinitésimal sont les premiers principes récemment introduits dans le programme de mathématiques spéciales, nouveauté donc semble se satisfaire l'auteur. On trouve dans une première partie des exercices sur les figures rectilignes et circulaires, une importante deuxième partie dédiée aux coniques, suivie de questions sur les courbes algébriques ou transcendantes, les coordonnées polaires ou les transformations (partie 4), un nombre conséquent de questions sur les lieux géométriques (partie 5), les enveloppes (partie 6) et enfin une dernière partie sur les figures mobiles et les trajectoires.

Dans la continuité du précédent, le volume *Géométrie analytique à trois dimensions (et géométrie supérieure)* comporte, comme le constate l'auteur, un nombre restreint d'énoncés. Les questions, réparties sur quatre parties, traitent des figures rectilignes ou sphériques, des courbes et surfaces, des lieux géométriques et enfin des enveloppes. La place limitée de ce domaine dans l'enseignement de mathématiques spéciales et le fait que les sujets d'admission à l'École polytechnique portent exclusivement sur la géométrie à deux dimensions expliquent, selon Laisant, le faible nombre de questions s'y rapportant dans le dépouillement qu'il a effectué. Il souligne cependant l'intérêt de cette géométrie par la variété des problèmes y étant rattachés et les liens qu'elle tisse entre les divers chapitres du cours de mathématiques spéciales. Avec un tel volume, l'auteur semble souhaiter que ce chapitre ne soit pas négligé dans l'enseignement car il permet une diversification des exercices souvent jugés répétitifs dans les classes préparatoires et jette des ponts entre les notions, soulignant ainsi l'unité de « la mathématique ».

LAISANT PREFACIER

Laisant, auteur de plusieurs manuels, signe également trois préfaces d'ouvrages pédagogiques pour lesquels il semble représenter une véritable caution. Après ses propres publications (fin 1895) mais surtout à partir des années 1900, son statut de personnalité forte dans le monde des pédagogues de l'époque s'affirme progressivement. Ces préfaces nous renseignent d'une part sur les proches de Laisant participant également de l'essor des publications pédagogiques et d'autre part, sur certains thèmes que le préfacier n'a pas développés dans son œuvre mais qui suscitent son intérêt ou qu'il souhaite voir pénétrer l'enseignement.

Les Questions d'algèbres *de Georges Maupin (1895) et le « cauchemar des concours »*

La première préface que Laisant signe est celle des *Questions d'algèbre* de Georges. Maupin. En 1895, Georges Maupin est professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nantes[1627] où Laisant fut probablement élève cinquante ans plus tôt. Maupin fut quant à lui élève, puis maître auxiliaire en mathématiques au lycée de Rennes[1628]. Licencié ès Sciences mathématiques et physiques, il est membre de l'AFAS depuis 1902[1629] et de la SMF depuis son élection lors de la séance du 21 novembre 1894 où il est présenté par Laisant et Bioche[1630].

Laisant signe la préface de ces *Questions d'algèbre*, *à l'usage des élèves des classes spéciales et des candidats aux Écoles polytechnique, normale, centrale, etc.*, recueil de questions résolues (125) et de problèmes proposés (plus de 1300) qui fait suite aux *Exercices d'algèbre, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales* du même auteur parus en 1893[1631]. Si Laisant réaffirme l'utilité de tels manuels pour les progrès de l'enseignement, il souligne le rôle des concours aux grandes écoles dont les programmes déterminent l'ensemble du contenu de l'enseignement préparatoire : « chaque année, les examens d'admission à l'École Polytechnique ou à l'École Normale révèlent des questions nouvelles, qui contribuent sans cesse aux progrès de l'enseignement et c'est peut-être plus vrai peut-être pour l'Algèbre que pour les autres parties du programme»[1632]. C'est effectivement par le biais des sujets de concours qu'évolue cet enseignement[1633], l'apport de nouvelles questions est donc de nature à infléchir les orientations des programmes.

Le préfacier n'en demeure pas moins opposé à tout programme restrictif : « Il y a deux moyens de se préparer aux examens et aux concours. Le premier consiste à se confiner étroitement dans les limites du programme, à s'enquérir des questions particulières pour lesquelles les examinateurs manifestent à ce que l'on croit, quelques prédilections »[1634], c'est la tradition héritée de la préparation aux armes savantes au XVIII^{e} siècle. Il préconise une préparation plus émancipée des instructions officielles : ici, « on cherche à s'instruire, plutôt qu'à se préparer, et il se trouve qu'on est préparé précisément parce que l'on s'est

---

[1627] Il y sera ensuite surveillant général (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 27, 1899, p. x) avant de devenir professeur au collège de Saintes (*BSMF*, 33, 1905, p. xi).
[1628] Voir *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 6, 1887, p. 419-421 et Sér. 3, 9, 1890, p. 420-424.
[1629] Parmi ces communications, « Sur les jeux de hasard », (AFAS, Paris, 1902/1, p. 168) et « Sur la suppression éventuelle du postulat dit d'Euclide et son remplacement par les axiomes géométriques de M. Ch. de Freycinet », (AFAS, Angers, 1903/1, p. 111).
[1630] *Bulletin de la Société mathématique de France*, 22, 1894, p. 185.
[1631] Maupin, G., *Exercices d'algèbre, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, C. Noblet, 1893.
[1632] Laisant C.-A., "Préface", in [Maupin, 1895], p. II.
[1633] [Belhoste, 2001].
[1634] "Préface", p. II.

instruit »[1635], ce dont participe l'ouvrage de Maupin. Laisant salue ainsi les « promenades analytiques » [1636] proposées par Maupin qui sortent du programme officiel. Il confirme : « C'est en ne dédaignant pas de donner un coup d'œil à ces questions « d'à-côté » qu'on acquiert des idées générales ; et ce sont les idées générales qui permettent seules de comprendre les théories algébriques, de se les assimiler entièrement, et qui par cela même soulagent l'effort de la mémoire et sont ainsi un précieux moyen de préparation indirecte »[1637].

À l'opposé d'une préparation artificielle basée sur la répétition mécanique d'exercices, comme elle est souvent mise en œuvre au cours du XIXe siècle, Laisant propose aux élèves de se familiariser avec les notions du programme en adoptant un point de vue plus large et en fréquentant ces mêmes notions dans des cadres différents et variés. Il ne s'agit plus de valoriser les capacités de mémorisation mais d'adopter une vision globale et méthodique des contenus à étudier, c'est-à-dire de « tracer des sentiers nouveaux, en évitant des sinuosités inutiles, en ménageant çà et là quelques vues sur les horizons plus lointains. »[1638] Et Laisant loue justement l'inventivité déployée par Maupin et sa vision plus large de la question du « cauchemar des concours. »[1639]

Laisant souligne les avancées qu'apporterait l'introduction de tel ou tel chapitre dans l'enseignement. Maupin traite en effet de questions de probabilité, de fractions continues ou d'applications géométriques du calcul infinitésimal alors que ces notions sont étrangères aux programme d'admission des Écoles polytechnique, centrale ou navale, en y ajoutant parfois des renseignements historiques (tirés entre autre de *l'Histoire des Mathématiques* de Montucla).

Le soutien apporté à Maupin par Paul Humbert, Louis Messent, rédacteur du *Journal de mathématiques élémentaires*, J, Favro, répétiteur au lycée de Nantes où Maupin est professeur de mathématiques spéciales, et Laisant bien sûr [1640] montre que ce groupe d'hommes, par l'intermédiaire de ce recueil, constitue un groupe de réflexion pour la promotion de l'enseignement de nouvelles notions.

[1635] Ibid.
[1636] Ibid.
[1637] Ibid., p. II.
[1638] Ibid. p. III. Laisant complète ici une maxime qu'il attribue à Proclus : « il n'y a pas de routes royales en Géométrie ».
[1639] Ibid., p. IV.
[1640] Maupin lui adresse ces remerciements pour les renseignements fournis : son nom est donc cité à maintes reprises dans l'ouvrage.

Notions de mathématiques supérieures *de Charles Hémardinquer (1907) et la « peinture des fonctions »*

En 1907, Laisant signe la préface des *Notions de mathématiques supérieures (calcul intégral et différentiel), licence es sciences physiques, écoles techniques, constructeurs et praticiens* de Charles Hémardinquer ([Hémardinquer, 1907]).[1641] Dans sa préface, Laisant salue l'adaptation de l'ouvrage aux praticiens dont le nombre ne cesse de croître. Il remarque ainsi que la « nécessité de posséder quelques notions mathématiques concernant le calcul infinitésimal et ses applications devient chaque jour de plus en plus grande, et s'étend à un nombre de personnes qui s'accroît sans cesse »[1642], les applications en question étant la mécanique appliquée et surtout l'électricité. Par son étendue restreinte et le grand nombre d'applications proposées, l'ouvrage s'avère plus utile pour ce public que de volumineux traités. Surtout, il insiste sur le parti pris de l'exposition des notions dans l'ouvrage « Je ne saurais assez louer M. Hémardinquer de s'être appuyé solidement sur la méthode graphique. Il ne s'agit pas ici de subtilités doctrinales, mais de l'acquisition de notions précises, en vue de résultats effectifs ; et la peinture des fonctions, si je puis ainsi parler, est le meilleure des moyens à employer pour en rendre l'étude intéressante et utile »[1643]. La figuration de la notion de fonction prend, pour l'usage du praticien, tout son sens : elle permet d'en saisir l'essentiel rapidement par le regard posé sur le graphique. L'ouvrage se démarque donc à ses yeux par la simplicité de l'exposé et la pertinence des représentations visuelles.

Notions fondamentales de la théorie des probabilités *de 1909 et l'erreur d'A. Comte*

Si les probabilités sont un thème peu présent dans son œuvre, Laisant souligne leur importance dans sa préface aux *Notions fondamentales de la théorie des probabilités* de L.-Charles Lefebvre[1644]. Il s'oppose ici radicalement à la conception d'Auguste Comte : « Si jamais un grand esprit a commis une erreur fondamentale, c'est bien Auguste Comte, le jour où il prétendit exclure de la science positive le Calcul des Probabilités, lui refusant toute valeur d'application. Nulle branche des mathématiques n'est peut-être aujourd'hui d'un plus

[1641] Né dans le Val-de-Marne, fils d'industriel, Charles-Jérémie Hémardinquer (1868-1944) suit le cours gratuit de sciences physiques dispensé au laboratoire Bourbouze. Il est nommé maître auxiliaire au lycée Saint-Louis, puis préparateur à la Sorbonne. En 1895, Il fonde une société d'enseignement gratuit et populaire liée aux laboratoires Bourbouze dont il deviendra directeur. À l'opposé, il crée en 1909 un établissement prestigieux et élitiste : l'école technique Scientia (Lefebvre Thierry, "De Bourbouze à Scientia... en passant par Buchet [Q250, Bourbouze et la Pharmacie centrale de France]", *Revue d'histoire de la pharmacie*, 93e année, N. 346, 2005. p. 319-320).

[1642] Laisant C.-A., "Préface", in [Hémardinguer, 1907], p. V.

[1643] Ibid., p. VI.

[1644] [Lefebvre, 1909], L.-Charles Lefebvre, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, L. Dulac, Paris, 1909.

grand usage »[1645]. Le fondateur de la philosophie positive a en effet émis tout au long de sa carrière des critiques très virulentes sur « le prétendu calcul des chances » pourvu d'un « lourd verbiage algébrique »[1646]. Au contraire ici, Laisant félicite Lefebvre « de ne pas s'être égaré en de confuses dissertations philosophiques ou prétendues telles. Et ce n'est pas un mince mérite, à notre époque, et sur un tel sujet. » [1647]

L'auteur est un actuaire, ancien polytechnicien, membre de la Société de statistiques de Paris, dont fait également parti Laisant, et professeur à l'Institut des finances et des assurances. Dans ce manuel simple et concis qui s'adresse aux bacheliers ès sciences ou aux actuaires[1648], les applications sont nombreuses et tout dogmatisme est rejeté : « cette manière positive et relative d'envisager le Calcul des Probabilités est de nature à en accroître sans cesse l'importance et à étendre le champ de ses applications »[1649].

Géométrie rationnelle, traité élémentaire de la Science de l'espace *de 1911*

Nous ajoutons à ces préfaces de manuels une dernière datant de 1911 et concernant cette fois la traduction de l'ouvrage de Halsted, *Géométrie rationnelle, traité élémentaire de la science de l'espace*, par Paul Barbarin[1650]. Laisant remercie chaleureusement son ami P. Barbarin, agrégé, qui a été enseignant au Lycée de Nice, puis de Toulon avant d'être professeur au lycée Henri IV[1651]. Barbarin est également l'auteur en 1893 d'un *Recueil de calculs logarithmiques à l'usage des candidats aux baccalauréats d'ordre scientifique et aux diverses écoles du gouvernement* (Nony, 1893) et d'*Études de géométrie analytique non euclidienne* en 1900. Il écrira d'ailleurs *La géométrie non euclidienne* (Gauthier-Villars, 1928) en collaboration avec A. Buhl, autre proche de Laisant. George Bruce Halsted (1853-1922) est quant à lui américain. Élève de Sylvester, il est professeur à l'Université de Princeton, puis au sein de celle du Texas avant de démissionner et d'occuper des postes dans de multiples établissements. Spécialiste de la géométrie non-euclidienne, qu'il introduit aux États-Unis tant par ses traductions que par ses ouvrages personnels, il est également connu pour son implication dans la vie mathématiques aux USA et ses réflexions d'ordre pédagogique.

[1645] Notamment dans les implications au sein de la société. Laisant C.-A., "Préface", in [Lefebvre, 1909], p. I.
[1646] Citations extraites de la conférence d'E. Coumet [Coumet, 2003].
[1647] [Lefebvre, 1909], p. II.
[1648] Sur l'enseignement des probabilités, nous renvoyons à Meusnier Norbert, "Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques", in Barbin E., Lamarche J.-P., *Histoire de probabilités et de statistiques, Actes du 14e colloque, Orléans 2002,* Ellipse, 2004 p. 237-274.
[1649] Ibid., p. III.
[1650] [Halsted, 1911], Dr George Bruce Halsted, *Géométrie rationnelle, traité élémentaire de la science de l'espace,* traduction française par Paul Barbarin, Paris, Gauthier-Villars, 1911.
[1651] Son parcours a été reconstitué à partir de ces contributions aux *NAM* (particulièrement les volumes de 1881 et 1894).

Dans sa préface, Laisant indique la popularité du traité à l'étranger et souligne les qualités de diffuseur d'Halsted : « Ce remarquable Ouvrage, inspiré par les vues si profondes de M. Hilbert, est à peu près universellement répandu à l'étranger »[1652]. Il s'explique sur la contradiction apparente de ses idées sur la nature expérimentale des mathématiques, idées développées dans *La Mathématique* de 1898, et cette traduction, qui débute par l'introduction de trois sortes d'objets (points, droites, plans) établissant entre eux des relations mutuelles (être sur, entre, parallèle, congruent) selon des axiomes répartis en quatre groupes (associativité, ordre, etc.). Il écrit :

> *La Géométrie est expérimentale, dans ses premiers principes, parce que l'expérience et l'observation seules ont pu nous fournir les vérités fondamentales, les axiomes sur lesquels elle est fondée; une fois cette base établie, elle devient rationnelle. Et c'est précisément parce que l'ensemble des axiomes admis ne semblait pas au-dessus de toute atteinte, que l'esprit critique moderne ne s'est pas résigne à accepter ces axiomes comme des dogmes intangibles.*[1653]

Laisant invite, surtout les enseignants, à une réflexion sur la géométrie d'Euclide, si solidement installée depuis des siècles « s'ils estiment que leur mission ne doit pas consister exclusivement à répéter des mots et à tracer des figures, sans chercher même à comprendre au fond ce que ces mots signifient et ce que ces figures représentent, d'une façon précise et rigoureuse. »[1654] Il souligne en effet, pour conclure, l'impact que peuvent avoir de telles lectures sur l'enseignement futur.

IV.2.3. *La Mathématique. Philosophie-Enseignement*

L'ouvrage *La Mathématique. Philosophie-Enseignement* ([Laisant, 1898a]) résume à lui seul les principales positions épistémologiques de son auteur, tout comme il annonce ses idées sur la pédagogie de son époque. Il est le résultat d'une longue pratique des mathématiques depuis les premiers articles de 1868 et d'une carrière d'enseignant (notamment dans le secondaire ou à l'École polytechnique). On y retrouve l'essentiel des idées fortes que Laisant défendra par la suite et qu'il présente ici à un public intermédiaire. Ni adressé aux savants érudits, ni à ceux n'ayant aucune culture mathématique, l'ouvrage se veut utile et est destiné à ceux qui utilisent ou pratiquent les mathématiques quotidiennement (ingénieurs, professeurs, étudiants). Par son propos, l'auteur souhaite leur venir en aide face à

[1652] Laisant C.-A., "Préface", in [Halsted, 1911], p. I.
[1653] Ibid., p. II.
[1654] Ibid., p. I.

la multiplication des résultats, la sophistication tant du fond que de la forme, les sophismes et autres discours « nébuleux » qui les entourent. Par des réflexions simples, accessibles au plus grand nombre, soutenues par « le bon sens », il se propose de traiter de philosophie des mathématiques dans la tradition de Leibniz, Descartes, Pascal, d'Alembert, Diderot, Condorcet ou Comte puisqu'il reconnait « qu'il n'est pas nécessaire d'ignorer la Mathématique pour bien raisonner sur les idées générales, ni de mépriser les idées générales pour être un mathématicien. »[1655]. *La Philosophie positive* de Comte est dès le départ citée comme un ouvrage essentiel au sujet traité[1656].

La première grande idée défendue dès le titre de l'ouvrage est la profonde unité des sciences mathématiques, ou plutôt de « La Mathématique ». Laisant rapporte l'expression à Condorcet mais se refuse de donner une définition exacte de la mathématique, s'attachant plutôt à décrire son « esprit général » et son but. Il juge d'ailleurs incomplète la définition basée sur « la mesure indirecte des grandeurs »[1657] de Comte, « l'illustre fondateur de la Philosophie positive »[1658]. En réaction à la grande spécialisation des mathématiciens rendue nécessaire par l'augmentation globale de la production mathématique, Laisant proclame : « Au fond, il n'y a pas des sciences mathématiques : l'Algèbre, la Géométrie, etc. Toutes s'entr'aident, toutes s'appuient mutuellement et sur certains points se confondent. Il y a une vaste science, la Mathématique »[1659]. La classification néanmoins proposée, poreuse et mouvante, ordonne les connaissances mais surtout illustre les liens entre les différents chapitres de la discipline. Il n'est nulle part question d'une hiérarchisation car, par exemple : « La science du calcul et la Géométrie pure se prêtent un mutuel appui ; nulle des deux n'est supérieure ni inférieure à l'autre. »[1660]

[1655] [Laisant, 1898a], p. 5. Plus loin, il reprend la pensée de Leibniz : « Sans les mathématiques, on ne pénètre point au fond de la philosophie ; sans la philosophie, on ne pénètre point au fond des mathématiques ; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien » (p. 6) F. Huet dans ses *Eléments de philosophie pure et appliquée* l'attribue à Bordas –Demoulin.

[1656] « Il a été tellement écrit sur le sujet que je traite, depuis la tentative si remarquable d'Auguste Comte dans sa Philosophie positive, que l'on pourrait, avec quelques recherches patientes, et sans rien dire que d'utile, produire plusieurs gros volumes. « ([Laisant, 1898], p. 11) Voir aussi Vassilief, A., "Les idées d'Auguste Comte sur la philosophie des mathématiques", *L'enseignement mathématique*, Volume 2, 1900, p. 157-172. L'auteur y « montre que les trois grandes idées de Comte : 1) le caractère de la géométrie comme science naturelle, 2) la tendance de donner à l'analyse une unité parfaite et 3) le rapport entre l'abstrait et le concret – ont été vérifiées et démontrées par toute la marche de la science mathématique depuis 1830. » (Lettre de Vassilief à Laisant datée du 11 janvier 1900).

[1657] Voir « Considérations philosophiques sur l'ensemble de la science mathématique » dans la troisième leçon de son *Cours de Philosophie positive* (vol. 1).

[1658] [Laisant, 1898a], p. 17.

[1659] [Laisant, 1898a], p. 3.

[1660] [Laisant, 1898a], p. 99.

Cette mathématique unifiée est d'ailleurs promue comme la science de référence, par l'instrument prodigieux en lequel elle consiste. Si la vision utilitariste des mathématiques est combattue tout au long de l'ouvrage, la pertinence de ses applications est soulignée :

> *Sans son secours, aucune étude des faits où figurent des quantités n'est rationnelle ni complète ; c'est le plus merveilleux instrument créé par le génie de l'homme pour aider à la découverte de la vérité. Pourvu qu'on en fasse un emploi judicieux, pourvu qu'on ne lui demande pas d'autres services que ceux dont elle est capable, la Mathématique vient apporter son concours à toutes les autres sciences.*[1661]

Pour les nécessités de son exposé, Laisant se résout à proposer des subdivisons de la mathématique en bâtissant une progression logique. Outre le découpage mathématique pure/mathématique appliquée sur lequel nous reviendrons, Laisant partage la mathématique pure en trois parties : science du calcul, science de l'étendue, science du mouvement.

En effet, l'observation de collections d'objets supposés identiques par abstraction donne tout d'abord la notion de nombre et donc mène à l'arithmétique (ou calcul numérique). L'arithmétique étudie les nombres et les opérations sur les nombres, conformément à la définition de Comte. Mais Laisant ajoute une dimension supplémentaire à l'arithmétique en considérant les procédés de calculs d'une part et l'« Arithmétique scientifique » (principalement l'arithmologie ou théorie des nombres célébrée par Lucas dans l'ouvrage du même titre) d'autre part : ceci confère au chapitre une importance « à la fois d'ordre philosophique, d'ordre pédagogique et d'ordre pratique »[1662]. Par adjonction de symbole représentant les opérations, l'arithmétique conduit au chapitre de l'algèbre[1663]. La notion de fonction en émerge et se combine à celle de continuité qui se rapporte au chapitre de Calcul infinitésimal. Les récents progrès amènent à considèrer la théorie des fonctions comme une section à part entière.

« L'étude des positions et des formes dans l'espace »[1664] correspond à la géométrie, que suit la géométrie analytique, chapitre fondamental et dont la généralité s'explique par l'utilisation du calcul[1665]. La mécanique rationnelle conclut cette progression en offrant la possibilité d'étudier le mouvement des corps dans l'espace, la physique mathématique étant laissée volontairement hors propos. Laisant rappelle que les lignes de démarcations restent

[1661] [Laisant, 1898a], p. 26.
[1662] p. 29.
[1663] « sorte de langue universelle des opérations sur les grandeurs » (p. 23).
[1664] [Laisant, 1898a], p. 24.
[1665] « Cette étude [la géométrie] prend un caractère particulier de précision et de généralité par l'application systématique du calcul, application qui constitue la Géométrie analytique » op.cit. Plus loin, « La Géométrie analytique, au degré de généralité qu'elle a atteint, reçoit ainsi de toutes parts la contribution des autres branches de la Mathématique, et rend avec usure les bienfaits qu'elle a reçus » (p. 118).

changeantes et que cette classification brossée à grands traits ne laisse pas apparaître des chapitres importants tels que le calcul des probabilités, la géométrie de situation ou l'analyse combinatoire, ces deux derniers chapitres occupant effectivement une place de choix dans l'œuvre de l'auteur.

Toutes les sciences sont expérimentales

L'origine expérimentale des concepts mathématiques est très vite affirmée :

> Toutes les sciences sont expérimentales.
> *C'est, en somme, la reproduction de la formule célèbre : « Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens ». La Mathématique, pas plus qu'aucune autre science, n'échappe à la loi commune. J'estime que sans la présence du monde extérieur aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme.*[1666]

Les mathématiques en tant que science n'échappent donc pas à cette observation à la différence près que « Ce qui distingue la Mathématique des autres sciences, c'est qu'elle emprunte à l'expérience, au monde extérieur, un minimum de notions. Et, une fois cette première base établie, par la seule puissance de la logique, elle édifie sur ces fondations un monument d'une incomparable splendeur, et dont le couronnement ne sera jamais atteint. » [1667] Mais que ce soient la notion de surface (acquise par observation d'un cube), celle de nombre (surgissant par abstraction d'une identification d'entités au sein d'une collection d'objets) ou celle de fonction (liée aux variations continuellement présentes et observables dans la nature), les exemples établis par Laisant dans son ouvrage ne manquent pas.

Le caractère expérimental des mathématiques et particulièrement de la géométrie est une des grandes idées des réformes de 1902 et 1905, visible dans les instructions officielles que reproduit Carlo Bourlet dans son *Cours abrégé de géométrie*. Déjà, rompant avec la tradition platonicienne, Clairaut dans ses *Éléments de géométrie* avait abordé dès 1741 cet aspect, notamment pour des objectifs pédagogiques, ce qui n'est pas étranger aussi aux ambitions de Laisant. Et Hoüel reprendra également ce thème dans l'introduction à son *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (1867). L'œuvre de Charles Méray qui comme nous le verrons à fortement influencé Laisant, procède de la même présentation[1668].

[1666] [Laisant, 1898a], p. 14.
[1667] [Laisant, 1898a], p. 15. Seule la mécanique rationnelle par la particularité de ses principes fondamentaux fait exception à ce fait.
[1668] Pour un historique sur le caractère expérimental de la géométrie, nous renvoyons à [Bkouche, 1991].

Laisant rejette, on l'a vu, le modèle euclidien de l'élaboration du corpus géométrique : « Mais l'erreur fondamentale qu'ils [Les géomètres de l'antiquité] commirent, et qui est encore très généralement commise de nos jours, consistait dans la méconnaissance de l'élément expérimental qui est à la base de la Géométrie. Ils croyaient, comme beaucoup de savants n'ont cessé de le croire, que la science est d'autant plus pure qu'elle se rapproche plus complètement d'une suite d'opérations empruntées à la logique abstraite, sans aucune considération du monde extérieur. »[1669] Ainsi, les notions de plans, lignes droites ou points ne sont que des abstractions issue de l'observation d'objets réels (cube en marbre par exemple) rejoignant ainsi la position de Comte qui souligne l'erreur de ceux qui « définissent la surface, la ligne et le point, comme des choses toutes simples, qui ont une existence à part, au lieu de les présenter comme des parties d'un ensemble que l'imagination parvient peu à peu à le considérer isolément. Cette entrée en matière empêche beaucoup d'esprits justes d'entendre jamais sainement la géométrie »[1670]

Remarquons que pour ce qui concerne les géométries non euclidiennes, Laisant se range à l'avis de Poincaré qui écrit qu'il « n'y a pas de Géométries plus ou moins vraies ; il y a des Géométries plus ou moins commodes »[1671].

Différentiation abstrait/concret

La distinction entre objets abstraits et objets concrets qui découle des remarques précédentes et la méthode à employer pour naviguer entre ces deux mondes font immédiatement l'objet des réflexions de l'auteur.

Tout ce qui se mesure est susceptible d'entrer dans le domaine des sciences mathématiques, à condition d'adopter une démarche unique et invariante. Celui qui veut user des mathématiques pour l'étude du monde qui l'entoure doit tout d'abord procéder à un acte d'abstraction afin d'accéder aux être de la pensée que seule la mathématique manipule : « Par l'abstraction, nous faisons disparaître ces complications ; à la réalité des choses nous substituons des êtres de raison, créés par notre cerveau, sur lesquels les raisonnements et les procédés mathématiques pourront librement s'exercer. »[1672] Dans cette première étape, le rôle de l'hypothèse est essentiel. Ce passage du concret à l'abstrait souvent appelé « mise en équation » prépare les grandeurs étudiées au travail de résolution des équations. Cette

[1669] Ibid., p. 91.
[1670] Comte(1970) *Ecrits de jeunesse, Essais sur quelques points de philosophie des mathématiques*, Texte de janvier 1820, p. 529.
[1671] [Laisant, 1898a], p. 92. Citation de l'article remarquée par l'auteur : [Poincaré, 1891], "Sur les Géométries non euclidiennes", *Revue générale des sciences*, 2ème année, n° 23, 1891, p. 774.
[1672] [Laisant, 1898a], p. 19.

deuxième période porte sur des êtres dénués de réalité, mais elle permet de révéler des propriétés alors dissimulées : « Le calcul transforme, mais il ne rend jamais que ce qui lui a été confié ; c'est un fait inhérent à sa nature, et il n'en est pas moins précieux pour cela, car il permet de mettre en évidence des relations et des propriétés qui, sans son aide, seraient restées enveloppées d'une sorte de mystère. »[1673] La dernière étape qui conclut l'étude d'un phénomène par la mathématique est le retour de l'abstrait vers le concret. Les résultats obtenus sont discutés, leur utilité est évaluée ; ils peuvent être vérifiés par l'expérience à l'aide d'une science autre que les mathématiques :

> *Aucun résultat mathématique n'est vrai, à proprement parler, quand on l'applique au monde réel, puisqu'il porte sur d'autres objets que ceux du monde réel ; mais un tel résultat est un premier guide, et un guide très utile, parce qu'il indique toujours une approximation. Cette approximation est précieuse, surtout si l'on peut en connaître les limites. On peut et on doit corriger les erreurs par l'appel à l'expérience, les comparaisons avec ce qui a été fait précédemment dans des cas analogues, et aussi par l'intervention du bon sens et de la sagacité personnelle.*[1674]

Une réflexion sur les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

La dichotomie entre mathématiques pures et mathématiques appliquées, à mettre en place dès les premières années d'enseignement, est rendue nécessaire par les objets que traitent la mathématique pure, infaillible dans la mesure où : « elle opère sur des êtres de raison, créés par l'esprit de l'homme pour les besoins de la science elle-même, et parce que ses opérations sont liées et coordonnées entre elles d'une manière rigoureuse. »[1675] La comparaison des résultats ainsi obtenus avec leur pendant dans le monde réels met en lumière erreurs et approximations inévitables. La mathématique appliquée traite donc de cet écart avec la même rigueur que la partie pure : « La vérité, c'est que sans la Mathématique pure, l'application serait impossible ; et sans l'intervention de la Mathématique appliquée, la Mathématique pure ne peut donner de résultats exacts que dans le monde des abstractions. »[1676] La mathématique appliquée traite donc du retour de l'abstrait au concret, c'est la définition posée par l'auteur. La discussion des approximations opérées, discussion délicate aux confins d'autres sciences, y est un principe fondamental, une idée générale trop souvent dédaignée au goût de Laisant qui évite pourtant nombre d'erreurs et de désillusions

[1673] Ibid., p. 21.
[1674] Ibid., p. 145.
[1675] Ibid., p. 9.
[1676] Ibid., p. 10.

sur les mathématiques comme « science de l'absolu »[1677]. Les multiples branches de la mathématique appliquée sont le miroir des chapitres de la mathématique pure : statistique (comme branche des sciences économiques), géométrie des tissus de Lucas, machines à calculer, topographie, géodésie, statique graphique ou abaques de d'Ocagne, mécanique industrielle ou étude des machines (théorie de l'énergie, du rendement…). La mathématique appliquée s'adresse tout particulièrement à l'ingénieur, qui, de part ses fonctions et sa polyvalence, doit être le plus conscient des passages entre l'abstrait et le concret. Elle est liée aux nécessités de découvertes qui ont permis de bâtir l'édifice mathématique mais seulement, Laisant insiste, il convient de ne pas évaluer une science à son degré d'application : « La question « A quoi cela peut-il servir ?» est en matière de science la plus folle et la plus vaine qui se puisse poser (…) mesurer une science à son utilité est presque un crime intellectuel »[1678].

« Des idées générales sur les méthodes d'enseignement »

Les grands principes de la partie « Enseignement » de l'ouvrage seront abordés et précisés au fil des écrits postérieurs sur lesquels nous reviendrons. Signalons que, dès 1898, Laisant estime que :

> *1° Dans le milieu actuel, des notions mathématiques sont nécessaires à tous ;*
> *2° Chaque intelligence moyenne est apte à acquérir ces notions, restreintes à de certaines limites.*[1679]

Partant de là, il convient d'inculquer, quelques soient les capacités naturelles de l'individu, une culture mathématique à tous, mais suivant quelques principes simples qui découlent des remarques exposées dans la première partie. L'origine expérimentale des premières vérités mathématiques implique pour l'éducateur « de suivre une méthode rigoureusement expérimentale et de ne pas s'en départir ; de laisser l'enfant, en présence des réalités concrètes qu'il touche et qu'il voit, faire lui-même les abstractions »[1680]. Cette pédagogie ludique permet d'user de la curiosité naturelle de l'enfant.

Il convient aussi d'insister sur les propriétés les plus générales aux corollaires nombreux. L'usage de la mémoire est ainsi restreint alors que la pratique du raisonnement y est encouragée. Le symbolisme à outrance freine également un tel apprentissage. Prenant

[1677] « Une saine appréciation des approximations nous semble donc être la condition essentielle, fondamentale de toute branche de la Mathématique appliquée » (Ibid., p. 146).
[1678] Ibid., p. 141-142.
[1679] [Laisant, 1898a], p. 187.
[1680] Laisant C.-A., *La Mathématique, Philosophie - Enseignement*, Paris, G. Carré et C. Naud éditeurs, 1898, p. 203.

l'exemple de la notion de fraction (où ne devrait pas disparaître la notion de rapport à l'unité), Laisant écrit :

> *Cette préoccupation du symbolisme à outrance, qui se retrouve dans certaines manifestations littéraires ou philosophiques, et non pas seulement dans le domaine mathématique, répond en réalité à une sorte de sentiment de mépris pour les vérités que nous apporte la connaissance raisonnée du monde extérieur. Par une aberration pour ainsi dire incompréhensible, on en arrive à se figurer la science mathématique comme d'autant plus parfaite qu'elle emprunte moins à la connaissance extérieure des faits. On la regarderait volontiers comme idéale, si elle se passait totalement de cette connaissance, et se bornait à raisonner sur des abstractions. On oublie que l'abstraction elle-même suppose la notion préalable des choses, on obscurcit les propositions simples, on rend difficile ce qui est aisé, on jette le scepticisme dans les esprits en accumulant ainsi comme à plaisir les obstacles artificiels, on contredit enfin la nature elle-même.*[1681]

Il encourage le dégagement explicite d'un cadre général et du but d'une notion par « les leçons d'introduction » qui balise l'apprentissage et facilite la compréhension. Les applications doivent être continuelles pour éclairer l'apprenant : « En résumé, l'enseignement doit être aussi peu dogmatique que possible, mais en même temps foncièrement philosophique. Cette conciliation de la simplicité dans la forme avec la profondeur des idées constitue l'une des qualités de l'art difficile de l'enseignement. »[1682]

Laisant ne s'interdit aucunement de relever les obstacles concrets de la mise en place de ses réflexions (classes nombreuses et hétérogènes qui inhibent l'enseignement oral, programmes changeants, notamment ceux des concours, cours sous la dictée ou mauvais usage du manuel, discontinuité dans le temps de l'apprentissage). Il conclut par un bilan acerbe sur la structure de l'enseignement en France. Voyant dans le cursus enseignement primaire / secondaire / supérieur une consolidation des classes sociales masse/classe moyenne / aristocratie, fustigeant le baccalauréat et les subdivisons crées qui vont à l'encontre de l'unité des mathématiques, Laisant préfère se référer à l'unique problème :

> *Lorsque l'enfant abandonne à un instant quelconque le cours de ses études mathématiques pour rentrer dans la vie commune, il faut que l'ensemble des connaissances acquises représente pour lui une valeur utilisable.*[1683]

[1681] [Laisant, 1898], p. 35.
[1682] [Laisant, 1898], p. 195.
[1683] [Laisant, 1898], p. 265.

IV.3. L'*Initiation mathématique* : Laisant, ami de l'enfance

En 1906, Laisant publie son *Initiation mathématique*[1684]. L'ouvrage marque une préoccupation assez récente mais très marquée à partir du tout début du XX^{e} siècle pour le mathématicien : il s'agit de l'éducation scientifique de la jeunesse. Comme le précise son titre complet, il s'agit d'un « ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance », né de la conférence « Initiation mathématique » donnée le 9 février 1899.

Nous choisissons de développer la genèse et le contenu de cette *Initiation* pour plusieurs raisons. La première a été signalée : l'ouvrage marque l'apparition d'un centre d'intérêt majeur pour Laisant. Mais l'*Initiation* contient également des retranscriptions de la pensée visuelle des objets mathématiques que Laisant promeut : cette pensée trouve ici naturellement ses conséquences pédagogiques. L'ouvrage fait également suite aux réflexions épistémologiques et pédagogiques sur les mathématiques rassemblées dans *La Mathématique* de 1898. On y trouve donc la présence d'influences classiques dans toute l'œuvre de Laisant comme celles de Lucas ou Arnoux, et l'apparition de nouvelles relations dans le domaine pédagogique, celle de Jean Macé principalement.

IV.3.1. Les conférences de 1899-1903

L'origine de l'ouvrage se trouve dans une conférence éponyme donnée par Laisant en 1899 qui débute un cycle de quatre interventions données à l'Institut psycho-physiologique de Paris entre 1899 et 1903. La communication est reproduite dans la *Revue scientifique*[1685].

LA PREMIERE CONFERENCE DE 1899

En cette année 1899, Laisant explique que l'éducation mathématique de la jeunesse n'est qu'un « sujet des plus modestes, c'est une sorte d'introduction à l'éducation mathématique »[1686]. On sait que ce thème prendra une importance plus nette par la suite et que Laisant s'investira dans la défense de cette initiation. La réflexion de Laisant se base sur

[1684] [Laisant, 1906], *Initiation mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*, Hachette, Paris, 1906.
[1685] [Laisant, 1899b], "L'Initiation mathématique", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 11, 1899, p. 358-368 (parution le 25 mars 1899).
[1686] [Laisant, 1899b], p. 358.

un certain nombre d'axiomes qui deviendront fondamentaux dans sa pensée des mathématiques et de son enseignement par la suite.

Le premier de ces principes est donc la nécessité d'une telle initiation comme préparatoire aux enseignements futurs. Il exhorte donc les auditeurs « à ne pas reculer devant la première initiation ; à la seule condition qu'elle soit donnée d'une façon rationnelle »[1687]. Point de départ fondamental de l'enseignement scientifique, ce tout premier apprentissage est, comme nous l'avons remarqué dans l'ouvrage de 1898, indispensable à tous, quelles que soient les prédispositions ou les aptitudes décelées chez le sujet, tout comme l'est l'apprentissage de la lecture et de l'écriture. Pour les enfants appelés à devenir des hommes de sciences ou de lettres, « il y a à cela une nécessité d'éducation générale et une nécessité matérielle aussi »[1688]. Ainsi, l'institution d'une véritable initiation à des notions premières d'une culture scientifique fait suite aux transformations dans la société du XIX^e^ siècle. De cette question présentée comme modeste, Laisant voit en fin d'exposé une question capitale « au double point de vue du développement intellectuel de l'humanité et de l'avenir de notre nation »[1689].

Le deuxième principe concerne l'origine des concepts mathématiques. Comme il l'a déjà affirmé dans sa *Mathématique, Philosophie, Enseignement*, Laisant écrit : « je considère que toutes les sciences, sans exception, sont expérimentales, au moins dans une certaine mesure (…) il n'existe pas une notion, pas une idée qui pourrait pénétrer dans notre cerveau sans la contemplation préalable du monde extérieur et des faits que ce monde présente à notre observation. »[1690] Ce principe épistémologique entraîne des conséquences pédagogiques immédiates : « C'est à ce monde extérieur qu'il faut emprunter les premières notions mathématiques, auxquelles, plus tard, devra succéder une abstraction »[1691]. L'initiation mathématique est toute entière fondée sur la manipulation, l'expérience et l'empirisme ; le dogmatisme est évacué au profit de la sollicitation de la curiosité sous une unique forme : celle du jeu. Il s'agit « de faire entrer en premier lieu des images dans le cerveau de l'enfant en mettant des objets à la portée des sens. Il faudrait que l'enseignant fût absolument concret et ne s'appliquât qu'à la contemplation d'objets extérieurs, à la contemplation de ses

[1687] Ibid.
[1688] Ibid., p. 368. Cette ambition d'une initiation de l'ensemble de la société se teinte de sentiment nationaliste lorsque Laisant avertit que sans cela « notre génie national, malgré ses belles dispositions naturelles, subira un recul sensible. » (p. 368).
[1689] Ibid., p. 368.
[1690] Ibid., p. 358.
[1691] Ibid., p. 358.

objets »[1692]. La représentation mentale des notions abordées, leur visualisation, sont un prérequis indispensable à leur étude. La notion de nombre doit ainsi devancer son écriture, contrairement à ce qui se pratique ordinairement. À travers cet exemple, Laisant dénonce l'erreur « qui consiste presque toujours à mettre non seulement le symbole à côté de l'objet lui-même qu'il s'agit de représenter, mais à lui donner la prédominance sur cet objet »[1693]. L'usage et le maniement de collections d'objets concrets pour introduire la notion fondamentale de numération, du papier quadrillé[1694] et de tableaux pour les règles de calculs ou encore la prédominance du dessin dans cet apprentissage sont donc les fondamentaux de la méthode que Laisant applique successivement à l'arithmétique, la géométrie et l'algèbre. Il veille à ce que l'abstraction qui mène aux objets idéaux des mathématiques soit absente de cet enseignement, du moins en apparence, puisqu'elle doit être naturelle chez l'élève. Laisant explique que l'abstraction constitue une simplification des objets naturels qui mène à la notion de collection de nombres ou d'objets géométriques[1695]. Mais l'abstraction chez l'enfant doit rester instinctive et spontanée.

La curiosité de l'apprenant est le ressort principal du procédé : c'est pourquoi l'usage du jeu auprès de l'enfant ou d'autres subterfuges pédagogiques (y compris la présentation de paradoxes) permettent « de lui donner l'illusion, à tous les degrés de l'enseignement, que c'est lui-même qui découvre la vérité qu'il s'agit de faire entrer dans son cerveau. »[1696] Démonstrations et théorèmes sont donc proscrits dans cette première phase, ce qui n'empêche pas d'introduire le calcul de la somme de nombres entiers consécutifs, voire de leurs carrés à l'aide du papier quadrillé permettant une représentation visuelle sous forme de tableaux, à la manière des mosaïques évoquées précédemment. Quant à la théorie des quantités négatives, « en ayant soin de graduer les idées, cette théorie peut être rendue toute intuitive et accessible »[1697] par l'utilisation d'objets concrets, à savoir des tiges mises bout à bout dans un sens ou un autre.

[1692] Ibid., p. 360.
[1693] Ibid., p. 360.
[1694] « qui permet d'illustrer ces premières notions de la forme, de la grandeur et de la position, sans lesquelles l'initiation n'est qu'un leurre » (p. 365). Voir aussi la contribution de A. Sainte Laguë ([Sainte Laguë, 1910]).
[1695] « Nous savons très bien que rien de ce que nous appelons figures géométriques n'existe dans la nature, mais nous en avons la notion nette, précise, par le fait même de la contemplation des objets extérieurs qui par leurs formes se rapprochent des figures en question. » (p. 366).
[1696] Ibid., p. 362.
[1697] Ibid., p. 365.

INITIATION A LA PHYSIQUE

En 1901, Laisant consacre la deuxième conférence du cycle à « l'initiation à l'étude des sciences physiques »[1698]. Des idées sensiblement similaires à l'exposé précédent y sont développées. Il semble d'ailleurs satisfait de l'accueil fait à ses réflexions pédagogiques : « je me verrai conduit à replacer sous vos yeux les principes immuables de toute saine pédagogie, principes que l'on commence à proclamer, dont on n'ose plus désormais contester la justesse, mais dont, hélas ! dans la pratique, on se tient encore si souvent éloigné. »[1699] L'enseignement dogmatique et magistral, usant de la mémoire de l'apprenant est toujours fustigé car « ce qui est vicieux, c'est le plan général de l'organisation de l'enseignement scientifique, c'est la méconnaissance des facultés de l'enfant. » [1700] Là encore, l'auteur fait a contrario la promotion d'activités ludiques, s'appuyant sur la curiosité naturelle de l'enfant par l'utilisation parcimonieuse de paradoxes. Une telle démarche assimilable à une « suite ininterrompue de suggestions » [1701]. Il réaffirme : « toutes les sciences sont physiques, toutes les sciences sont expérimentales »[1702]. La classification menant aux frontières de la physique et de la chimie, sujets de l'intervention, n'est donc que superficielle, d'autant plus que « toutes les sciences s'entraident et se pénètrent. » [1703] La principale différence provient du rôle de l'expérimentation et du rôle de l'hypothèse. Pour la première, il faut apprendre à voir c'est-à-dire à isoler le phénomène principal pour arriver à l'énoncé d'une loi physique, résultat de la répétition d'expériences jugées identiques et d'une abstraction comparable à celle opérée en mathématiques. Pour la seconde, il convient de garder le caractère de suggestion d'un énoncé hypothétique. L'expérimentation à partir d'objets de la vie courante ou d'instruments simples et peu coûteux doit par conséquent être développée à l'image des idées formulées par Gaston Tissandier dans ses *Récréations scientifiques ; la physique sans*

[1698] [Laisant, 1901d], "L'Initiation à l'étude des sciences physiques", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 15, 1901, p. 289-294 (conférence donnée le 15 février 1901).
[1699] Ibid., p. 289. Remarquons ce souvenir de Laisant : « Je veux bien croire que les choses se sont un peu améliorées depuis les très longues années qui me séparent de l'époque où l'on m'enseigna les premières notions de Physique et de Chimie dans un lointain collège de province. Un vieux professeur à l'apparence bourrue nous dictait mot à mot son cours. Il fallait respecter jusqu'a la disposition calligraphique, mettre la ponctuation comme il l'indiquait, et représenter les cahiers à la leçon suivante. Les interrogations équivalaient, ou peu s'en faut, à une récitation. La moindre défaillance de mémoire, la plus légère inexactitude dans la tenue du cahier amenaient de sévères punitions. On allait en tremblant à la leçon de ce terrible homme. « (p. 291).
[1700] Ibid., p. 292.
[1701] Ibid., p. 290.
[1702] Ibid., p. 290.
[1703] Ibid., p. 290.

appareils et la chimie sans laboratoire[1704] ou *La Science amusante* rédigée par Tom Tit[1705]. Laisant cite le pédagogue allemand Frœbel (1782-1852)[1706] et Pestalozzi. Comme le dessin en mathématiques, avec l'expérimentation, « l'habileté de la main se formera, en même temps que l'attention se portera sur le sujet »[1707]. À côté de l'expérimentation, l'histoire des sciences est appelée à tenir une nouvelle place dans l'enseignement.

L'initiation, préalable nécessaire à une étude rationnelle des sciences physiques, doit être là encore « indispensable à chaque être humain d'instruction moyenne »[1708]. Laisant milite pour une certaine culture dans ce domaine aux applications quotidiennes de plus en plus présentes. Pour préparer l'enfant par son éducation aux exigences de sa vie future, il affirme qu' : « il y a une réforme profonde à faire, et préparons-la. C'est à cette tâche que je travaille dans la petite mesure de mes forces, et que je vous demande de travailler aussi. »[1709] Cette conclusion de l'exposé indique nettement l'implication de Laisant dans le désir de réforme dès 1898, sans pour autant annoncer un plan d'éducation précis.

IV.3.2. Pour libérer l'enfance : l'*Initiation mathématique*

Les mêmes idées sont reprises en 1904 dans *L'Éducation fondée sur la science*[1710], puis précisées encore dans l'*Initiation mathématique*[1711] deux ans plus tard. En 65 points, Laisant déroule ce qui ne forme « pas un tout didactique […mais] un guide remis entre les mains de l'éducateur, dont il pourra s'inspirer »[1712]. Les moyens éducatifs mis en œuvre restent inchangés : « nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique,

[1704] Gaston Tissandier (1843-1899) : Chimiste de formation (au CNAM), météorologiste, vulgarisateur reconnu, il participe également à de nombreuses expéditions aériennes avec son frère. Il fonde en 1873, la revue *la Nature* dans laquelle Laisant publiera un unique article : « Les conducteurs bimétalliques » ([Laisant, 1891q]). Tissandier publie en 1884 ses *Récréations scientifiques* (Paris, Masson, 1884) dont Laisant possède la sixième édition datée de 1893. L'ouvrage est récompensé par L'Académie française et non, comme le souligne Laisant, par l'Académie des sciences.

[1705] Tit T. (A. good). *La science amusante – 100 expériences*. Paris : Larousse, 1906. Laisant cite aussi un ouvrage conservé par ses soins depuis 1856 : *Almanach de la chimie* signé H. du M. dont il n'a pas trouvé trace.

[1706] Voir à ce sujet *Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée,* (Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation), vol. XXIII, n° 3-4, septembre-décembre 1993, p. 481-499.

[1707] [Laisant, 1901d], p. 292.

[1708] Ibid., p. 291.

[1709] Ibid., p. 292.

[1710] Laisant, *L'éducation fondée sur la science*, Félix Alcan Editeur, Paris, 1904.

[1711] [Laisant, 1906a], *Initiation mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*, Hachette, Paris, 1906. Nous avons compté 17 rééditions entre 1906 et 1920. Ce manuel lance de plus la collection des Initiations scientifiques.

[1712] p. 6. Nos références renvoient à la quatorzième édition : [Laisant, 1916], Laisant, *Initiation mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*, 15ème édition conforme à la 14ème avec note sur *l'Initiateur mathématique* de M. J. Camescasse, In-8°, Hachette, Paris, 1916.

pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles »[1713]. L'aversion de Laisant envers tout programme est encore flagrante : « Partout [en Europe], il faut se placer en dehors des programmes si on veut libérer l'enfance »[1714], les séquences (ou séances de jeu) proposées ici doivent être adaptée par l'éducateur en fonction de l'élève.

Dans ses conférences ou ses ouvrages *La Mathématique* ou l'*Initiation mathématique*, Laisant se réfère à plusieurs grandes figures de l'histoire de la pédagogie. Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1846) est la première d'entre elles. Les théories nouvelles sur l'éducation (inspirées de *l'Émile, ou De l'éducation*, de Rousseau) de ce pédagogue suisse auront un grand retentissement au XIXe siècle. Après l'échec de sa première entreprise agricole, il dirige plusieurs établissements (celui d'Yverdon-les-Bains en 1805). On retrouve dans ses grandes idées pédagogiques celles défendues par Laisant : par exemple, la prééminence du concret, l'abstraction progressive, la graduation de la difficulté[1715].

La Chalotais (1701-1785) est, quant à lui, procureur général au parlement de Rennes et partisan de la philosophie des lumières. Ses travaux sont cités par Laisant, alors qu'il est connu pour sa défense des privilèges des hommes de sa situation. Il écrit en 1763 son *Essai d'éducation nationale, ou Plan d'études pour la jeunesse*[1716] où il distingue, comme Laisant, deux périodes principales dans l'éducation (le basculement s'effectuant autour de 10 ans). C'est ce plan d'étude qui est, selon l'auteur de l'*Initiation*, fondamental pour l'éducation.

À la suite de la parution de l'*Initiation*, s'instaure aussi une collaboration entre Laisant et Léon Camescasse (1869-1941). Franc-maçon et fondateur de la loge "espéranto" en 1913, ce fervent espérantiste défend la langue internationale à l'occasion du Congrès de Paris. Il sera également le créateur d'un petit matériel nommé « Initiateur mathématique » dont Laisant propose l'utilisation dans son *Initiation*[1717]. Laisant lui écrit à ce sujet :

> *Mon cher Confrère,*
> *Comme vous, - et depuis plus longtemps puisque je suis de beaucoup votre aîné - j'ai constamment admiré* l'Arithmétique du Grand Papa*. Ce remarquable livre, et le souvenir de Jean Macé, dont j'étais l'ami, ont largement inspiré mon* Initiation

[1713] Ibid., p. 7. Sur cet usage des récréations mathématiques, voir [Barbin, 2007].
[1714] Ibid.
[1715] James Guillaume. «Pestalozzi» in [Buisson, 1911]. Michel Soëtard, *Johann Heinrich Pestalozzi*, Ed. Coeckelberghs, Lucerne et Lausanne, 1987.
Perspectives : revue trimestrielle d'éducation comparée (Paris, UNESCO : Bureau international d'éducation), vol. XXIV, n° 1-2, 1994, p. 307-320. Conférence de Simone Forster à l'occasion du 35e anniversaire de Math-École, Château d'Yverdon, 14 décembre 1996.
[1716] Louis-René de Caradeuc de La Chalotais, *Essai d'éducation nationale, ou Plan d'études pour la jeunesse*, Philibert, 1763. Voir Octave Gréard. "La Chalotais", in [Buisson, 1911] et Pocquet du Haut-Jussé B. A. "La Chalotais, essai de biographie psychologique", *Annales de Bretagne*. Tome 72, numéro 2, 1965. p. 263-298.
[1717] Sur l'importance du matériel en pédagogique, voir les positions de Maria Montessori (1870-1952).

> Mathématique*, dont vous parlez avec tant de bienveillance, et à laquelle les éducateurs de l'enfance ont fait un accueil si empressé.*
> *Cependant, depuis la première publication de mon «* Initiation *», je n'ai cessé d'être préoccupé par la nécessité d'un matériel correspondant aux méthodes concrètes que je préconise.* […] *Cette lacune, vous la comblez par votre «* Initiateur Mathématique *». Vos cubes, par leurs assemblages, c'est l' «* Initiation Mathématique *» mise entre les doigts des enfants.*[1718]

Laisant y explique comment, avec les cubes de Camescasse, on peut représenter la somme des *n* premiers carrés ou des *n* premiers cubes. La poursuite d'une concrétisation des procédés arithmétiques (même supérieurs) demeure donc une constante chez lui : au delà de la visualisation, c'est la matérialisation même des notions qu'il vise.

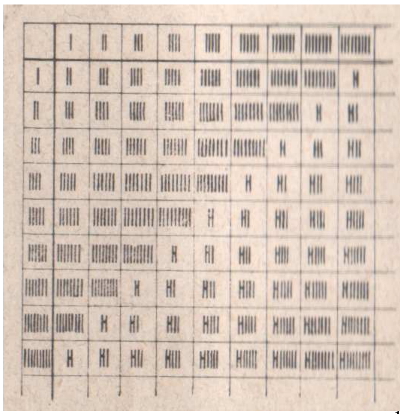
On sait Laisant proche de Jean Macé depuis ses débuts en politique, mais ce dernier a donc aussi influencé l'élaboration de l'*Initiation*. Jean Macé (1815-1894) est enseignant, auteur d'ouvrage de vulgarisation scientifique et il collabore à plusieurs revues pédagogiques. Parfois surnommé le « Pestalozzi français », rédacteur à *La République* à partir de 1848 et franc-maçon, la modernité de ses propositions en matière d'enseignement l'obligent à quitter Paris pour l'Alsace après le coup d'état du décembre 1851 avant un retour en grâce lors de l'avènement de la III^ème^ république (il devient sénateur en 1883). Il aura entre-temps écrit en 1861 *Histoire d'une bouchée de pain : l'Arithmétique du Grand-Papa,* fondé le *Magasin d'éducation et de récréation* (1864) et la *Ligue de l'enseignement* (1866) [1719].

Nous reviendrons enfin à travers quelques exemples sur l'inspiration que suscitent les travaux de Lucas chez Laisant au sujet de l'éducation de l'enfance.

LA PROGRESSION DANS L'*INITIATION*

On retrouve dans ces 65 leçons les thèmes chers à Laisant : l'apprentissage de la numération y tient une place prépondérante. La notion de nombre y est présentée de manière cohérente avec celle de nombre concret/abstrait développée dans sa *Mathématique, Philosophie-Enseignement*. L'utilisation d'objets concrets (bâtons, fagots, paquets puis jetons de couleurs) permet d'appréhender le vocabulaire de la numération décimale (critiqué par ailleurs), de construire concrètement la table d'addition, d'introduire les opérations de somme et de différence.

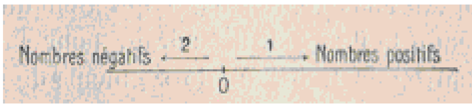
[1718] Lettre publiée dans *L'éducateur prolétarien*, n°1 : octobre 1932, p. 51.
[1719] Voir Arthur Dessoye, "Macé (Jean)", in [Buisson, 1911].



Figuration de la table d'addition[1720]

Lucas dans un discours souvent cité par Laisant ne proposait pas autre chose qu'une telle construction : « Il ne faut dans aucun cas que l'écolier apprenne du fait de mémoire des Tables d'addition ou de multiplication, ou des résultats quelconques, sans les avoir obtenus directement ; l'enfant doit les trouver lui-même, car son esprit est une force latente, à laquelle il suffît d'imprimer et de diriger le mouvement. »[1721]

Mais somme et différence peuvent se représenter par la disposition en ligne droite, dans un sens ou dans un autre, de tiges de longueurs variables (l'équivalent concret de segment). Ainsi « nous entrons dans l'Algèbre » (chapitre 14) avec l'introduction des "nombres orientés"



Disposition des nombres négatifs et positifs[1722]

et les exemples de la vie courante où l'usage des nombres négatifs est naturel. Les segments sont dès lors dotés d'une origine et d'une extrémité et leurs pendants concrets (les bâtonnets) également. La notion d'unité est immédiatement introduite ensuite, contrairement à la coutume :

> *Le nombre n'a de raison d'être que par la comparaison qu'il amène avec l'objet unique (grain de blé, jeton, etc.) sans lequel on ne pourrait le former, et cet objet unique est appelé* unité. *Cette comparaison est ce qu'on appelle un* rapport*, et cette idée de rapport conduit à dire qu'un nombre est simplement le rapport de la collection avec l'unité.*[1723]

L'idée d'unité est mise en pratique à partir du système métrique. Elle est indispensable à l'enseignement de l'opération de multiplication. L'auteur signale l'indispensable et très utile

[1720] [Laisant, 1916], p. 18.
[1721] Cité dans [Laisant, 1898a], p. 201.
[1722] [Laisant, 1916], p. 40.
[1723] [Laisant, 1916], p. 43.

table de multiplication ou « table de Pythagore » que l'enfant doit sans cesse manipuler pour l'appréhender, « la *voir* », avant qu'on ne le familiarise avec la notion de produit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Table de Pythagore[1724]

Laisant insiste sur l'intérêt de l'astuce de calcul qu'il nomme *méthode musulmane* pour la formation du produit de deux nombres :

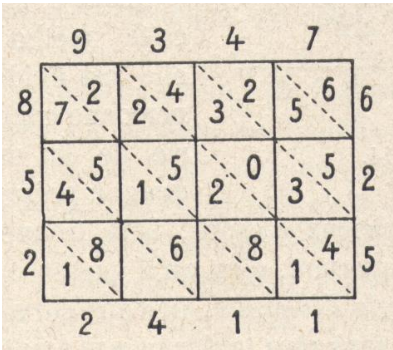


Illustration du produit 9347×258 = 2411526

La méthode musulmane de Laisant correspond en fait à la multiplication *par gelosia* (*par jalousie*), technique effectivement utilisée dans le monde arabo-musulman, mais également en Chine et en Europe entre le XIII^e^ et le XV^e^ siècle (on parle également de méthode par grillage ou par filet)[1725]. Elle rappelle aussi l'invention des bâtons de Neper (*multiplicationis et divisionis promptarium*, 1617)[1726], développée par la suite entre les mains d'Édouard Lucas et de l'ingénieur en chemin de fer à Tours Henri Genaille[1727]. Par la même, on retrouve un des sujets d'intérêts de Laisant : celui des machines à calculer. Alors que Genaille propose pour le congrès de l'AFAS une nouvelle machine à calculer[1728], Laisant, dans la discussion qui suit, suggère une mécanisation du processus de Genaille comme il est décrit dans le compte rendu du congrès :

1724 [Laisant, 1916], p. 45.
1725 Voir [Barbin, Borowczyk, Chabert, Guillemot, Djebbar, Martzloff, Michel-Pajus, 1995], [Poisard, 2005], p. 60.
1726 [Lucas, 1884], p. 138.
1727 Egalement auteur d'un piano arithmétique ([Décaillot, 1999]).
1728 AFAS, Paris 1878, p. 181. Voir aussi compte rendu de la 12e session, Rouen 1883, p. 177.

M. LAISANT fait remarquer que, tout en s'appliquant à la recherche d'un procédé de calcul, en dehors des machines arithmétiques, l'auteur a trouvé, en réalité, le principe d'une machine à multiplication, remarquable par sa grande simplicité. Il suffit, en effet, de remplacer les lignes tracées sur les planchettes par de petites cloisons matérielles, de placer les planchettes horizontalement, et dans un plan vertical, pour qu'une bille pesante suive nécessairement le chemin que doit suivre l'œil dans le procédé de l'inventeur. Une disposition facile à imaginer permettrait à cette bille de faire apparaitre, automatiquement, l'un des chiffres du produit. On aurait ainsi une machine fonctionnant sous l'action de la pesanteur et qui donnerait presque instantanément le produit d'un nombre quelconque, par un multiplicateur d'un seul chiffre. Cette observation présente beaucoup d'intérêt.

On trouve en effet dans la collection de machines à calculer et de jeux donnés par Édouard Lucas au CNAM un « Mécanisme de Laisant : réglettes multiplicatrices Genaille fonctionnant sous l'action de la pesanteur »[1729].

Une fois la multiplication acquise, des « Opérations curieuses » (chapitre 18) permettent de piquer la curiosité du jeune élève. Les « nombres premiers/composés » sont exposés et mis en évidence visuellement grâce au crible d'Ératosthène. Les quotients sont étudiés d'un point de vue calculatoire uniquement, seul point de point de vue pertinent durant la phase d'initiation. Suit la notion de fraction, introduite par la notion de partage d'objets concrets. Les opérations sur les fractions sont matérialisées elle-aussi dans le même esprit :

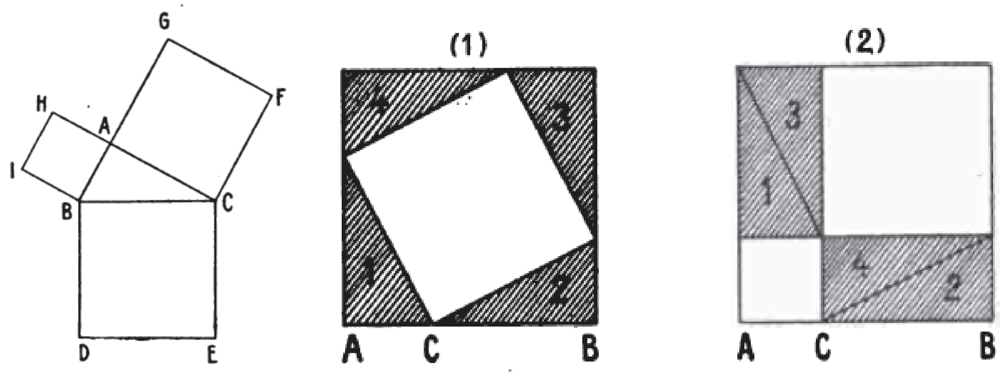
Soit avec du papier quadrillé, soit avec de petits rectangles (ou carrés) en bois, blancs sur une face, noirs sur la face opposée, toutes ces opérations peuvent être matériellement exécutées. Elles ont un caractère à la fois instructif et amusant, elles attirent l'attention de l'enfant, fixent dans son esprit des vérités importantes sans qu'il ait à faire des efforts de mémoire ; ces vérités, il les voit, il les compose pour ainsi dire de ses mains ; ce ne sont plus pour lui des phrases obscures répétées sans y attacher un sens précis, mais des réalités tangibles.[1730]

La géométrie fait alors son apparition. Celle du plan tout d'abord : la notion de droite avait été introduite (par analogie avec un cheveu tendu), celle de plan l'est de manière aussi concrète (étendu d'une surface d'eau tranquille). L'auteur suggère d'étudier les positions relatives de deux, puis trois droites (et donc la notion de triangle, puis de polygones). La pratique du dessin doit naturellement accompagner cette nomenclature.

La notion d'espace n'est pas présentée (comme dans la géométrie grecque)[1731] : l'initiation porte en revanche sur les objets de l'espace (prisme, pyramide…). La notion d'aire établie au chapitre 23 (où est soulignée l'importance de l'unité d'aire choisie) permet diverses

[1729] Inv. : 11300-0000-.
[1730] [Laisant, 1916], p. 65.
[1731] [Bkouche, 1991], p. 183.

démonstrations là encore très visuelle comme celle du théorème de Pythagore (chapitre 24 « le pont aux ânes ») :



Les différentes étapes de la démonstration du pont aux ânes[1732].

Cette démonstration tranche avec la rédaction obscure de celle d'Euclide, encore en vigueur et critiquée par Schopenhauer : « La démonstration boiteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au pourquoi, tandis que la simple figure [...] nous fait entrer du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au cœur même de la question »[1733].

LES INFLUENCES DE LAISANT DANS L'*INITIATION*

Dans le chapitre « divers casse-têtes ; macédoine mathématique », Laisant présente la démonstration des "identités remarquables" et insiste sur l'équivalence de leur formulation d'un point de vue arithmétique, géométrique ou algébrique : « voilà trois vérités dont on bourrera trois fois la mémoire des enfants non avertis, alors qu'elles n'en font qu'une, sautant aux yeux. Les apparences, les costumes sont distincts ; mais la personne est la même »[1734].

[1732] [Laisant, 1916], p. 80-81.
[1733] Schopenhauer, *Le monde comme volonté et comme représentation*, p. 106-110, cité dans [Barbin, 1997], p. 340, référence à laquelle nous renvoyons pour l'étude de la démonstration d'Euclide.
[1734] [Laisant, 1916], p. 82.

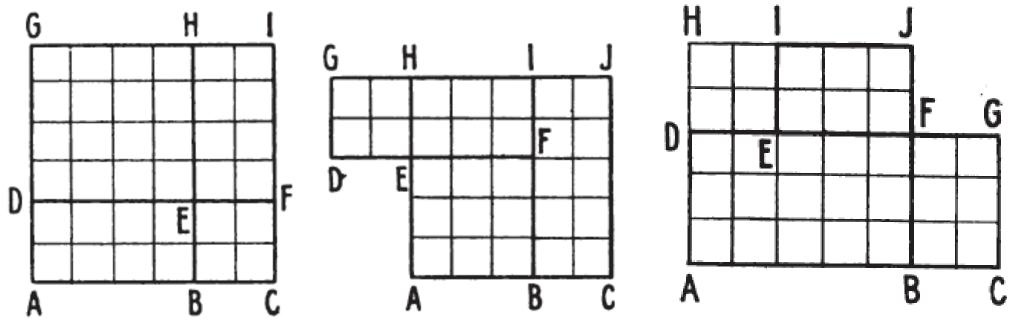


Figure support du développement de $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ *et* $(a + b)(a - b)$[1735]

Après ces derniers chapitres, les représentations graphiques se multiplient autour des nombres triangulaires (chapitre 27 : « les nombres triangulaires. Le vol des grues »), les nombres carrés (chapitre 28), la somme des cubes (chapitre 29) ou la progression par différence (chapitre 34). Le triangle arithmétique de Pascal et le carré arithmétique de Fermat sont aussi naturellement présentés (notamment comme solution du dénombrement du déplacement d'une tour d'un point à un autre d'un échiquier).

Laisant et Lucas partagent des points de vue proches quant à la méthode d'éducation des jeunes enfants. Nous avons déjà signalé un discours du second auquel se réfère souvent le premier. De plus, dans son *Arithmétique amusante*, Lucas propose aux parents de développer chez leurs enfants le goût du dessin, mais aussi de l'arithmétique en manipulant cubes, cailloux ou dominos sans recourir à la mémoire[1736].

Édouard Lucas donne également plusieurs conférences entre 1890 et 1891 au Conservatoire des arts et métiers, conférences dont Laisant se fait écho dans cet ouvrage. Voici que l'on peut en lire dans les pages d'un hebdomadaire de vulgarisation scientifique de l'époque à l'occasion du décès de Lucas : il « avait entrepris de répandre le goût de la science dans le grand public au moyen de conférences. Il traitait fréquemment, le dimanche, des questions de mathématiques amusantes dans le grand amphithéâtre du Conservatoire des Arts-et-Métiers, régulièrement trop petit pour contenir le public qui se présentait, M. Lucas faisait

[1735] Ibid., p. 82-83. L'idée est généralisée à l'étude de $(a + b)^3$ dans le chapitre 26 : « Le cube en huit morceaux ».

[1736] Voir plus haut et le paragraphe « les claques de polytechnique » tiré du discours prononcé au lycée Saint Louis pour la distribution des prix en 1885 (et [Lucas, 1895], p. 9). Discours dans lequel Lucas se réfère, comme Laisant, à La Chalotais (voir la Note I, p.193).

preuve, dans ces conférences, d'autant d'esprit que de savoir. A l'écouter, on s'instruisait en riant. »[1737].

Laisant se réfère à Lucas pour l'étude des nombres triangulaires (rappelant selon ce dernier le vol des grues). Il peut s'agir d'une conférence donnée pour l'AFAS en 1884 par Lucas (bien que Laisant fût absent à ce congrès) et intitulée « le calcul et les machines à calculer » ([Lucas, 1884]) où l'auteur des *Récréations* étudie les nombres triangulaires en lien avec les progressions arithmétiques. De la même manière, Laisant illustre le calcul de ces nombres triangulaires T_n (et donc celui de la somme de n entier consécutifs).

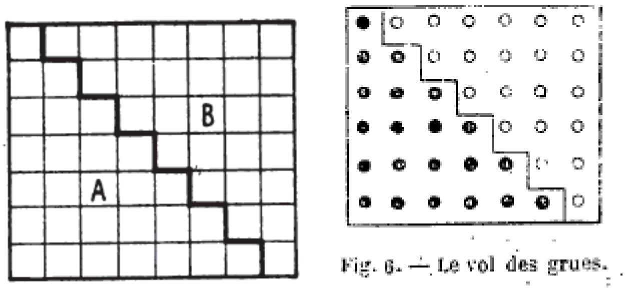


Figure de Laisant (chapitre 27) et le vol des grues de Lucas[1738]

Par généralisation de la figure précédente, Laisant obtient des formules dont par exemple :

$$2T_n - n = n^2 = T_n + T_{n-1},$$

« formules qui paraissent bien savantes et qui cependant n'exigent pas le moindre calcul, puisqu'on les lit sur les figures, puisqu'on les voit, puisqu'on peut les construire de ses mains »[1739]. La somme des termes d'une progression par différence quelconque est établie de manière similaire à la leçon 34 à l'aide de la figure suivante :

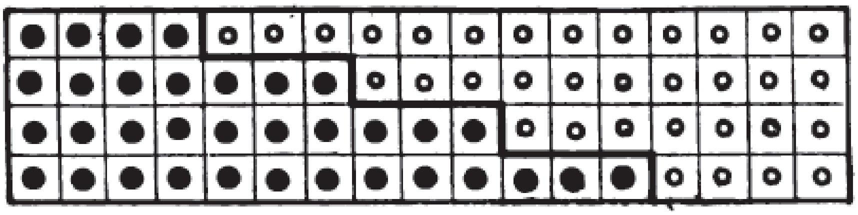


Illustration du calcul de la somme 4 + 7 + 10 + 13 [1740]

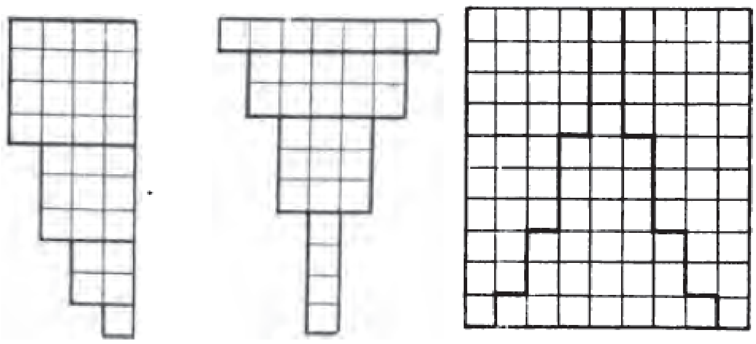
1737 E. Lamarque, *La Science illustrée*, n°206, 7 novembre 1891, p. 283. Remarquons que Lucas avait été membre de la commission des congrès et conférence de l'Exposition universelle de 1889. Voir par exemple ses conférences « Sur le diagrammomètre du colonel Kozloff » en juin 1890.

1738 [Laisant, 1916], p. 87 et [Lucas, 1884], p. 113.

1739 [Laisant, 1916], p. 88. De telles représentations peuvent être rapprochées des travaux d'Émile Fourrey (voir ses *Curiosités géométriques* (1907), édition augmentée d'une étude d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994) ou de André Sainte-Laguë (1882-1950) auteurs des ouvrages *Avec des nombres et des lignes*, *Géométrie de situation et jeux*, *L'utilisation pratique des mathématiques* par exemple.

1740 Ibid., p. 109. L'étude des progressions par quotient (leçon 35) ne bénéficie en revanche d'aucune illustration particulière. Elle permet cependant l'étude de problèmes curieux, dans la ligne des principes pédagogiques que s'est fixée l'auteur (36-Grains de blé sur un échiquier ; 37- Une maison à bon marché ; 38- Le placement du centime).

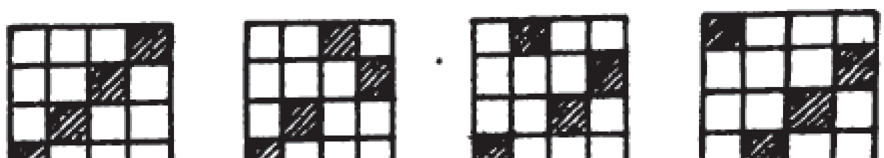
Un parallèle semblable peut être établi entre l'étude des nombres carrés par Lucas en 1884 (les « carrés de choux ») et par Laisant. La figuration de ces nombres permet à Laisant de déterminer, par des dispositions successives, la somme des carrés de *n* entiers consécutifs, question délicate même pour les candidats à l'École polytechnique remarque-t-il, et dont une application est la détermination du nombre de boulets dans une pile à base carrée :



Différentes illustrations utilisées par Laisant pour calculer $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$[1741]

Reprenant bâtons, paquets et fagots, Laisant introduit les numérations à bases quelconques dans le chapitre 32 avec quelques remarques sur la numération romaine rapportées au directeur de l'École Monge, Godard. Il introduit, dans l'édition à laquelle nous nous référons, une observation de Marcel Deprez[1742], dont les travaux ont suscité l'intérêt de Laisant, comme on l'a vu, dans son discours au congrès de l'AFAS de 1879. La numération binaire est traitée dans le chapitre suivant (33), se référant une nouvel fois à Lucas et à son *Arithmétique amusante* (sixième récréation « Éventail mystérieux »).

La leçon « Le dîner cérémonieux », à partir de la recherche du nombre de façon de placer douze personnes autour d'une table, aborde ensuite la notion de permutation et reflète encore l'influence de Lucas sur Laisant puisque celui-ci présente « l'idée géniale » des permutations figurées de son ami.



Permutations figurées abcd, abdc, adbc et dabc[1743]

L'introduction des progressions géométriques et des permutations permettent de piquer la curiosité du lecteur au sujet des grandes valeurs que peut prendre n !. Le nombre 9^{9^9} est « un [autre] assez grand nombre » (leçon 40) sur lequel s'étend Laisant car il défie

[1741] Ibid., p. 91. Un procédé graphique permet de calculer la somme des cubes.
[1742] Les premières éditions comportaient une « Note sur une question de pesées » en fin d'ouvrage.
[1743] [Laisant, 1916], p. 119.

l'imagination et suscite l'étonnement. Le nombre de chiffres de l'écriture décimale de ce nombre (j_9 = 69693100) est ici calculé pour la première fois : il s'agit du neuvième terme de la suite de Joyce (j_n) du nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n^{n^n} [1744]. L'accumulation de détails sur le temps d'écriture, la surface de papier nécessaire[1745], outre son aspect amusant, peut être rapprochée des questions de calculabilité et de complexité en temps et en espace d'une machine[1746].

La pratique du dessin s'instrumentalise par la suite avec l'usage du compas et du rapporteur et se poursuit avec l'étude du cercle, des lunules, des rosaces. Cette pratique s'inspire également du *Cours abrégé de géométrie* du collaborateur de Laisant à la direction des *Nouvelles annales,* C. Bourlet, ouvrage qui approche « la perfection pédagogique »[1747].

Les leçons suivantes (46 à 56) s'appuient sur la notion de graphique (leçon 46 : « Les graphiques ; algèbre sans calcul »). Présents dans un grand nombre de revues scientifiques, ces graphiques, si utiles en météorologie par exemple, « ont pour but de représenter aux yeux les fonctions [… et] ont en outre l'avantage de parler à l'esprit par l'intermédiaire des yeux, de figurer les choses elle-même. C'est là une qualité précieuse en matière de pédagogie. »[1748] Laisant multiplie les exemples : les déclinaisons du « problème des courriers », la « Balade de l'escargot rétrograde » tirée de *L'Arithmétique amusante* ou d'autres situations[1749] empruntées à Lucas utilisent ces représentations. Après avoir introduit des graphiques constitués de droites puis de paraboles ou de courbes quelconques, l'élève pourra s'initier à la géométrie analytique (leçon 57)[1750] et à l'étude de la représentation de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole qui sont autant d'occasions d'exercer sa main au dessin.

Les dernières leçons, plus originales, présentent brièvement les notions supérieures de division harmonique, de progression harmonique et de faisceau harmonique. Les curiosités

---

1744 Sloane, N. J. A. Sequences A002488/M5031 and A054382 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences".

1745 Notamment la remarque due à Ch.-E. Guillaume, futur collaborateurs de la collection des Initiations, parue dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*.

1746 Rey, J.-F. *Calculabilité, complexité et approximation*. Vuibert, 2004.

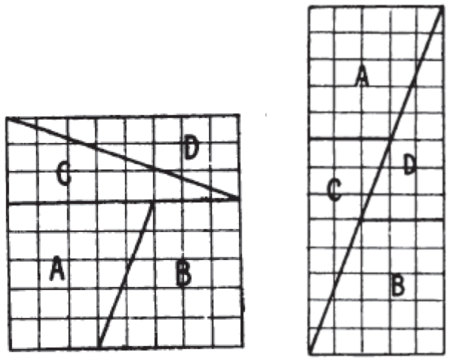
1747 [Laisant, 1916], p. 130. Notamment par l'étude de front de la géométrie plane avec celle de l'espace, entravée par les programmes en vigueur. [Bourlet, 1906], Bourlet C., *Cours abrégé de Géométrie ; Géométrie plane*, Hachette, 1906.

1748 Ibid., p. 134-135.

1749 47. Les deux marcheurs ; 48. De Paris à Marseille ; 49. Du Havre à New-York ; 50. Le temps qu'il fait ; 51. Deux cyclistes pour une bicyclette ; 52. La voiture insuffisante ; 53. Le chien et les deux voyageurs ; 54. La pierre qui tombe ; 55. La balle de bas en haut ; 56. Les trains du Métro.

1750 « Construire une ligne, et trouver ses propriétés, connaissant son équation ; Trouver l'équation d'une ligne, quand elle a été définie d'une manière bien précise par un moyen quelconque ; Tels sont les deux grands problèmes généraux dont s'occupe la Géométrie analytique. » ([Laisant, 1916], p. 157).

que propose l'utilisation délicate de paradoxe (leçon 63) ou la construction de carrés magiques (leçon 64), en référence aux travaux de Lucas et d'Arnoux, concluent l'*Initiation*.



Un paradoxe 64 = 65 [1751]

Ce rapide descriptif de l'ensemble des 65 leçons montre que Laisant souhaite, par des moyens simples et une progression adaptée, initier l'enfant à une véritable culture mathématique. Fuyant le discours traditionnel, il forme de manière ludique des images dans l'esprit de l'apprenant et lui fait côtoyer les éléments mathématiques, des plus fondamentaux aux plus élevés.

LAISANT AU SEIN D'UNE COMMUNAUTE DE PEDAGOGUES

Le « discours final » de l'*Initiation* résume en effet les intentions de l'auteur. L'enfant est désormais familiarisé aux concepts autant qu'à leurs représentations (comme pour les nombres négatifs ou les fractions par exemple). Il a senti les liens possibles entre la science du nombre et celle de l'étendue, a découvert l'existence de grands nombres. Il a approché les objets fondamentaux de la géométrie analytique. Sans effort apparent, il a acquis des habitudes salutaires pour la période d'étude, d'instruction qui s'ouvre devant lui ou le raisonnement personnel prolongera les jeux précédents. Les derniers mots de Laisant s'adressent aux éducateurs, aux familles principalement pour leur réaffirmer que : « l'initiation mathématique est indispensable à tout enfant, sans aucun distinction de fortune, de situation sociale, de sexe ; […] sans distinction, sans réserve, l'instruction mathématiques est également indispensable »[1752].

[1751] Ibid., p. 167.
[1752] [Laisant, 1916], p. 173.

Une « révélation » par C. Méray

Fustigeant l'enseignement primaire « passable » et le secondaire segmenté et « abrutissant », Laisant préfère se référer aux principes exposés par Charles Méray (1835-1911) dans ses *Nouveaux éléments de géométrie*[1753] parus en 1874 où l'expérimentation prévaut sur l'enseignement doctrinal. Dans les éditions suivantes, il saluera les progrès de cette dernière méthode au sein de l'enseignement primaire supérieur d'abord, secondaire ensuite.

Charles Méray (1835-1911) est normalien (reçu premier en 1854), professeur au lycée Saint Quentin (1857-1859), puis à l'Université de Lyon (1866) et enfin à celle de Dijon à partir de 1867. En 1869, il publie ses *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données,* mais son travail original et fondamental sur la construction des réels restera méconnu. En 1872, paraît son *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* mais ce sont bien ses *Nouveaux éléments de géométrie* en 1874 qui retiennent l'attention de Laisant notamment au travers d'un article de 1901, « Une exhumation géométrique » paru dans *L'Enseignement mathématique*[1754]. Laisant a fait connaissance de Méray lors des efforts de ce dernier pour propager l'espéranto[1755], ce qui lui valut « des relations assez directes avec lui, et il s'ensuivit, dans les derniers mois de l'année 1900, une correspondance assez assidue »[1756]. Le livre de 1874 sera une « véritable révélation »[1757] pour Laisant, notamment lorsqu'y est proposé un enseignement en parallèle de la géométrie du plan et de celle de l'espace, principal aspect développé dans l'article de l'*EM.* Son directeur avait d'ailleurs déjà écrit à ce sujet dans sa *Mathématique, philosophie, enseignement* : « il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une exposition doctrinale un peu complète de la géométrie analytique, à présenter l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans l'espace »[1758]. Laisant mentionne le développement du courant fusionniste en Italie[1759] et se réfère alors, pour la France, au

[1753] [Méray, 1874], Méray Charles, *Nouveaux éléments de géométrie*, F. Savy, 1874.
[1754] [Laisant, 1901e], "Une exhumation géométrique", *l'Enseignement mathématique,* 3, 1901, p. 98 – 105. Voir aussi [Auvinet, 2002]. Dans son *Éducation fondée sur la science*, Laisant se réfère également à d'autre innovations dans l'Yonne et la Côte-d'Or ayant elles aussi subies un échec ([Laisant, 1904a], p. 56).
[1755] Voir [Méray, 1901] et la rédaction, "L'«Esperanto» et les mathématiques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 3, 1903, p. 337-339.
[1756] [Laisant, 1901e], p. 98.
[1757] Ibid.
[1758] [Laisant, 1898a], p. 113.
[1759] À la suite de la publication des *Elementi di geometria Projettiva* de Cremona en 1873. Voir [Bkouche, 1991 et 2003].

mathématicien et mécanicien français, professeur à la Faculté de Lille, Gabriel Mahistre (1811-1860) et à son ouvrage *Les Analogies de la géométrie élémentaire*[1760].

Méray affirme également que « L'origine première des vérités géométriques est incontestablement expérimentale »[1761] ce qui lui permet de poser comme axiome nombre de propositions. Laisant omet cependant de citer des réflexions similaires mais antérieures, comme celles de J. Hoüel, exposées dans son *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*[1762]. Il souligne la rédaction novatrice de l'ouvrage, son plan résolument moderne avec lesquels « le lecteur devra mettre en œuvre son jugement plutôt que sa mémoire, et bientôt sera en possession de faits et non de mots »[1763]. L'utilisation des transformations (translations pour introduire le parallélisme, similitude et symétrie par la suite) est une autre grande qualité signalée par le directeur de l'*EM*[1764]. La méthode a été expérimentée de 1876 à 1879 à l'École primaire supérieure de Dijon mais s'est heurtée à une administration hostile à l'introduction du mouvement en géométrie. Méray écrit en effet à Laisant : « la notion de la superposition possible de deux figures implique celle d'un certain mouvement capable de la faire naître »[1765].

La presse mathématique ne relaiera pas les idées de Méray à l'époque. C'est pourquoi Laisant appelle, vingt ans plus tard, à abandonner la traditionnelle présentation euclidienne[1766] au profit d'une telle méthode, plus prompte à développer la réflexion et amener l'élève vers les nécessaires applications[1767]. Une réédition des *Nouveaux éléments de géométrie* de Méray s'impose pour mettre fin à « la résistance funeste dont sont responsables l'esprit de routine et la centralisation à outrance »[1768]. Ce sera chose faite en 1903[1769], après que le livre ait fortement influencé l'esprit de la réforme de 1902[1770].

1760 *Les Analogies de la géométrie élémentaire, ou la géometrie dans l'espace, ramenée à la géométrie plane* - Mahistre, Éditeur Hachette, 1844. Voir « Dicours prononcé le 24 juin 1860 aux funérailles de M. Mahistre, professeur de mathématiques par Jean Girardin », Faculté des sciences de Lille, 1860.

1761 [Laisant, 1901e], p. 99.

1762 [Houël, 1867b]. Voir Evelyne Barbin "Les principes de la géométrie élémentaire dans l'Essai critique de Jules Hoüel", *La géométrie au XIX*^e^ *siècle*, Centre F. Viète, Nantes, juin 2006.

1763 [Laisant, 1901e], p. 100.

1764 Déjà en 1898, Laisant écrivait : « L'idée générale de transformation doit être franchement introduite dans l'enseignement aussitôt que la chose est possible. » ([Laisant, 1898a], p. 226).

1765 [Laisant, 1901e], p. 101.

1766 Ou celle de Legendre dans ses *Éléments de géométrie* [Legendre, 1794].

1767 [Laisant, 1901e], p. 102.

1768 Ibid. p. 102. Laisant a déjà critiqué la rigidité du système français dans une lettre adressée à Fehr, comme nous le verrons plus loin. Voir aussi [Belhoste, 1990], p. 380.

1769 Voir "Bibliographie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 4, 1904, p. 211-219.

1770 Sur la réforme de 1902, nous renvoyons à [Gispert, Hulin, Robic, 2007], [Belhoste, 1990], Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin (dir.), *Les Sciences au lycée : Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris : Vuibert-INRP, 1996.

Les avis de Borel et Klein

En conclusion de l'*Initiation*, Laisant se range également à l'avis de Borel quand celui-ci affirme « une éducation mathématique à la fois théorique et pratique peut exercer la plus heureuse influence sur la formation de l'esprit »[1771]. Émile Borel propose en effet des laboratoires de mathématiques dans les lycées lors de sa conférence du 3 mars 1904 au Musée pédagogique. Avec d'autres conférenciers comme Poincaré, Hadamard ou Tannery, il y défend les orientations de la réforme de 1902[1772].

Laisant et Borel échangent sur le sujet. Nous retranscrivons partiellement une lettre datée du 8 février 1806 de Laisant à son confrère (l'écriture tremblante du premier ne permet pas d'assurer une lecture fidèle du message) :

> *Mon cher Monsieur Borel- J'attendais l'envoi annoncé pour vous remercier. Je reçois non seulement votre Géométrie, mais aussi : Arithmétique – Algèbre – Trigonométrie. Je lirais tous vos volumes avec un grand intérêt. Je suis tout à fait d'accord avec vous sur la nécessité de ne pas suivre servilement les premiers inventeurs ; ce serait de repenser à tout progrès. Mais je vois que vous partagez mon avis sur la nécessité de leur rendre justice. Vous l'avez fait en ce qui concerne Méray (dont les efforts datent de 1874). L'autorité administrative, qui à cette époque ne l'a pas fait, s'était acharné contre son œuvre, et en cela elle va en ??? montrant que vous avez ?? raisons.*
> *Merci de bien vouloir signaler mon Initiation aux lecteurs de la Revue du Mois.*
> *Bien cordialement à vous*
> *CA Laisant*
> *Puis-je être autorisé, le cas échéant, à faire part à Méray de vos observations ? Votre lettre étant personnelle, je ne voudrais pas le faire sans votre assentiment. Et si vous n'avez pas le temps de m'écrire, j'interpréterais qui ne dit mot ... ne consent pas.*[1773]

La méthode prônée par Laisant est aussi le sujet de réflexion de beaucoup de mathématiciens, pas seulement en France. Elle fait écho aux idées de Klein par exemple quand celui-ci écrit :

> *The teacher, so to speak, must be a diplomat. He must take account of the psychic process in order to grip the interest; and he will succeed only if he presents things in a form intuitively comprehensible. A more abstract presentation will be possible only in the upper classes. For example : The child cannot possibly understand if numbers are explained axiomatically as abstract things devoid of content, with which one can operate according to formal rules. On the contrary, he associates numbers with concrete images. They are numbers of nuts, apples,*

[1771] [Laisant, 1916], p. 177. Conférence donnée par E. Borel au Musée pédagogique, publié dans la *Revue générale des sciences*, 10, 1904, p. 431–440.

[1772] [Borel, 2002], E. Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire", *Gazette de la SMF*, n° 93, 2002.

[1773] M 168 Carte a. s., Paris, 8 février 1906, 2 p. du fond E. Borel 44J de l'Académie des sciences. La *Revue du mois* est fondée en 1906 par Émile Borel. Sa publication s'arrêta définitivement en 1926. Nous n'avons pas trouvé de référence à *l'Initiation* dans la revue dirigée par Borel.

> *and other good things, and in the beginning they can be and should be put before him only in such tangible form.*[1774]

Création d'une collection

Laisant avait souhaité dans l'avant propos de son *Initiation mathématique* que « pareilles tentatives puissent être faites pour les sciences physiques et pour les sciences naturelles »[1775]. L'ouvrage va donc être la première pierre d'une série baptisée « collection des Initiations scientifiques ». Les principes de la collection restent inchangés : valorisation de la curiosité, aspect ludique des activités, éviction de tout effort de mémoire. L'idéologie sous-jacente est réaffirmée : « Et nulle tâche n'est plus haute ; car l'enfance, c'est l'humanité de demain. »[1776].

Laisant demande à Camille Flammarion son aide : celui-ci écrira une *Initiation astronomique* en 1908 qui constituera le second volume de la collection. Il explique : « C'est avec le plus vif plaisir que j'ai reçu de mon savant ami M. Laisant l'invitation gracieuse d'écrire le second volume de l'utile collection qu'il vient de fonder et dont il a écrit lui-même le premier volume, consacré à l'*Initiation mathématique*. En m'exposant le plan de ce système d'éducation, il prêchait un converti. »[1777]

L'auteur de *l'astronomie populaire* (1880), pour laquelle il reçoit le prix Montyon de l'Académie française, est né en 1842 en Haute-Marne. Élève astronome à l'Observatoire de Paris sous les ordres d'Urbain Le Verrier, il participe par la suite à plusieurs revues scientifiques (comme *La Nature*, la *Revue scientifique*) et demeure un expérimentateur audacieux doublé d'un grand vulgarisateur de l'astronomie de son époque. Il fonde en 1887 la Société astronomique de France pour « diffuser les sciences de l'Univers et faire participer les amateurs à leurs progrès » et en 1881, la revue l'*Astronomie*[1778] qui coexiste avec le *Bulletin mensuel de la Société astronomique de France*[1779]. Entre 1904 et 1914, Flammarion organise à la Tour Eiffel la fête du soleil à chaque solstice d'été ; en 1905, Laisant y prononcera son

[1774] [Klein, 1908], Félix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, 1908, p. 3-4. Voir également les réflexions de Michel Delord sur l'ouvrage d'A. Chatelet, *J'apprends les nombres* (1934).
[1775] [Laisant, 1916], p. 7.
[1776] [Flammarion, 1908], Flammarion Camille, *Initiation astronomique*, Paris, Hachette, 1908, p. VI (l'ouvrage connaît une seconde édition la même année). C'est pourquoi Laisant explique : « Mes collaborateurs et moi, nous pouvons répéter encore : « C'est un sauvetage de l'enfance que nous convions les parents – mères de familles surtout – et éducateurs ». (p. VI).
[1777] Ibid., p. VIII.
[1778] Laisant y présente une méthode visuelle pour calculer le produit de deux entiers inférieurs à 10 sur un échiquier dont certaines cases ont été coloriées (*L'Astronomie*, vol. 28, 1914, p. 460).
[1779] Laisant y reprendra une de ses interventions à la Société philomathique sur les "Observatoires souterrains", (*Bulletin de la Société astronomique de France*, Vol. 20, 1906, p. 173-178) où il explique que cette question « a fait l'objet de mes préoccupations depuis quelques années, notamment depuis 1902, époque de la catastrophe de Saint-Pierre-Martinique » (p. 173).

« Discours sur la fête du soleil » en tant que membre de la SAF tenu en haute estime par Flammarion comme il l'écrit :

> *Il y a, à Paris, une Société astronomique dont le Bulletin mensuel tient ses lecteurs au courant des choses du ciel et des progrès de la science. Elle compte en ce moment 3.065 membres. […] La majeure partie des membres de la Société astronomique de France, à la tête de laquelle brillent les gloires de l'Institut et de la science française: MM. Janssen. Poincaré, Lippmann, Bouquet de la Grye, Caspari, Deslandres, Lallemand, Appell, le général Parmentier, le comte de la Baume, le prince d'Arenberg, le prince Roland Bonaparte, Loewy, Puiseux, Caillevet, Laussedat, Bischoffsheim, Laisant, Ch.-Ed. Guillaume, etc.; la majeure partie des sociétaires, dis-je, sont des étrangers*[1780]

Nous avons retrouvé une lettre datée du 8 janvier 1907 dans laquelle Flammarion écrit à Laisant : « l'initiation astronomique est en bonne marche, […] le 28 de ce mois il y aura juste vingt ans que j'ai fondé […] la Société Astronomique de France. Nous étions douze ; le lendemain vingt-quatre, aujourd'hui plus de trois mille. Or à cette occasion, nous aimerions ma femme et moi célébrer ce souvenir scientifique en réunissant à notre table, ce même jour 28, ceux qui restent de cette fondation, les anciens Présidents, et les principaux membres du bureau et du Conseil. C'est vous dire que nous comptons absolument sur vous. » Nous n'avons pas été en mesure de confirmer le poste de vice-président qu'aurait occupé Laisant mais son implication dans la Société astronomique de France est soulignée par les remarques précédentes de Flammarion. Laisant en démissionnera cependant lorsque C. Flammarion refuse d'exclure Alphonse XII de la Société, alors que celui-ci est impliqué dans le procès de F. Ferrer[1781].

En 1909, c'est au tour de l'*Initiation chimique* de paraître sous la plume de Georges Darzens (1867-1954)[1782]. La même année, le quatrième volume de la collection propose une *Initiation à la mécanique*, écrite par Charles Édouard Guillaume (1861-1938)[1783]. En 1910, s'ajoute l'*Initiation zoologique* d'Émile-Arthur Brucker, puis en 1911 une *Initiation botanique* du même auteur[1784]. En 1913, la collection se clôt avec l'*Initiation à la physique,*

1780 Flammarion C., "Le mystère de Cherbourg", *L'Illustration*, No. 3243, 22 Avril 1905.

1781 [Ferrer, 1962], p. 202-205.

1782 Georges Darzens, *Initiation chimique*, *ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance*, Paris, Hachette, 1909 (une cinquième édition est datée de 1919). D'origines russes, Georges Darzens devient, après une préparation à Sainte-Barbe, polytechnicien en 1886. Il sera professeur de chimie de l'École entre 1913 et 1937, après avoir été agrégé de physique (1895) et docteur en médecine (1889).

1783 Ch.-Éd. Guillaume, *Initiation à la mécanique…*, Paris, Hachette, 1909 (sera réédité six fois : la sixième édition datant de 1919). Formé à l'École polytechnique fédérale de Zurich, Charles Édouard Guillaume est un physicien suisse qui entrera au 1883 au Bureau international des poids et mesures à Paris, qu'il dirigera de 1915 à 1936. Il sera prix Nobel en 1921(*Nobel Lectures, Physics* 1901-1921, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1967).

1784 E. Brucker, *Initiation zoologique*..., Paris, Hachette, 1910 (quatrième édition en 1919). E. Brucker, *Initiation botanique…,* Paris, Hachette, 1911 (troisième édition en 1919).

ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance, rédigée par F. Carré[1785] qui rappelle dans sa préface les principes de *L'Éducation fondée sur la science* de Laisant et les « idées fécondes, dont il [Laisant] s'est fait, depuis longtemps déjà, le défenseur éloquent et le champion opiniâtre […,] les idées directrices que nous nous sommes constamment appliqués à suivre dans la rédaction de ce petit ouvrage ».[1786] Nous n'avons par contre trouvé aucune trace de l'*Initiation à la géologie et à la géographie physique* annoncée en préparation dans la quinzième édition de l'*Initiation mathématique*[1787].

L'EDUCATION DE DEMAIN D'UN LIBRE-PENSEUR

Parallèlement à la maturation des idées de l'*Initiation* et de celles développées dans la conférence de 1903 "Éducation scientifique et psychologie"[1788], les opinions libertaires de Laisant s'affirment depuis *L'Anarchie bourgeoise* ([Laisant, 1887j]). En 1906, Laisant propose avec *L'Éducation de demain* sa vision d'un système éducatif global et populaire et un plan général d'éducation[1789]. L'ouvrage connaît une seconde édition en 1913[1790], alors que éducation et transformation de la société sont de plus en plus liées à ses yeux : « Éducation veut dire libération ; l'éducation est le gage de la transformation sociale qui s'apprête. »[1791] L'éducation du peuple (principalement la lecture et l'écriture) porte en elle le germe de ces changements, plus que le suffrage universel par exemple. La question de l'instruction est donc posée en termes sociétaux : « Étant donné un être humain venu au monde, développer harmonieusement toutes ses facultés, de manière à porter au maximum son activité, dans une direction utile à lui-même et à ses semblables. »[1792] L'éducation proposée s'appuie sur la séparation de l'Église et de l'État (la loi a été votée en 1905) et est annonciatrice de bouleversements inéducables dans la société. L'éducation intégrale (physique, intellectuelle, morale, sociale) y est établie sur des choix rationnels « sur la raison, sur des données positives,

[1785] [Carré, 1913], F. Carré, *Initiation à la physique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance*, Paris, Hachette, 1913 (3ème édition en 1919).
[1786] [Carré, 1913], p. VIII.
[1787] L'ouvrage aurait du être rédigé par le géologue français Charles Vélain (1845-1925), collaborateur comme Laisant de *La Grande Encyclopédie*, prix de l'Académie des sciences en 1877 et fondateur de la géographie physique qu'il enseigne à partir de 1886 à la Faculté des sciences de Paris. Voir Grand E.-D, "Vélain", in *La Grande Encyclopédie.*
[1788] [Laisant, 1903g], "Éducation scientifique et psychologie", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 19, 1903, p. 257-263, 326-336.
[1789] Laisant C.-A., *L'Éducation de demain*. Aiglemont, Colonie communiste, 1906.
[1790] [Laisant, 1913d], *L'Éducation de demain,* deuxième édition, Paris, Les Temps nouveaux, 1913.
[1791] Préface à la deuxième édition in [Laisant, 1913d].
[1792] [Laisant, 1913d], p. 5.

sur le respect de la vérité scientifique » [1793]. Rejetant les divisions enseignement primaire/secondaire/supérieur[1794] assimilées à une hiérarchisation bourgeoise et révélatrice d'inégalités sociales, prônant la mixité des établissements, l'auteur propose une période d'initiation suivie, après l'âge de douze ans, d'une période d'étude d'une durée variable. Nous ne revenons pas sur l'initiation scientifique dont les principes ne varient plus depuis la conférence de 1899[1795]. Réfutant l'opposition entre sciences et lettres, Laisant y adjoint une initiation littéraire, artistique et morale incluant la pratique d'exercices simples (dénués de notions de grammaires), d'une langue étrangère et de l'espéranto. L'histoire (ou l'initiation à l'histoire des sociétés humaines) y tient une place importante et s'affirme comme un enseignement « anti-religieux ». L'instruction civique est aussi rejetée et remplacée par une initiation morale basée sur la voie expérimentale elle-aussi, prônant la notion de solidarité. L'initiation artistique permet quant à elle de développer les facultés sensorielles de l'enfant.

La formalisation des concepts apparaît avec la période de l'étude ayant pour objectif de fournir à l'élève « un bagage intellectuel effectif, utile, devant lui servir dans la vie. »[1796] L'observation individuelle de chaque enfant et une spécialisation progressive en sont les caractéristiques. La suppression du baccalauréat (« hideuse excroissance universitaire »[1797]) ne délimitera plus ce temps. À cette période succèdera en revanche l'ère de l'auto-éducation de chaque individu durant toute sa vie. Préparée naturellement par les phases antérieures, c'est elle qui permet le progrès de l'être humain dans sa globalité. Pourtant l'éducation populaire alors en place, à travers les universités populaires par exemple, ne trouve pas grâce aux yeux de Laisant, impliqué pourtant dans ce mouvement[1798]. Dénué de cohérence, éloigné des difficultés des travailleurs, cet enseignement apparait bien limité et ne fait que renforcer l'extrême importance des premières années.

[1793] Ibid., p. 6.

[1794] L'auteur s'appuie sur les remarques de l'universitaire Gaston Téry, et ne manque pas de souligner la crise visible que traverse l'enseignement secondaire en France à travers « des transformations multiples qui sont l'indice de son état de lamentable misère. » (p. 7), les humanités littéraires y forment « un fatras artificiel » au détriment des sciences. Sur la crise d'identité du secondaire (voir [Belhoste, 1990], p. 373).

[1795] Laisant remarque avec satisfaction que « Les correspondances reçues à l'occasion de cette publication de l'*Initiation mathématique* et la rapidité avec laquelle ont été enlevés les exemplaires mis en vente, m'ont montré quel écho j'avais rencontré, surtout dans le monde de l'enseignement primaire » (p. 11). L'ouvrage connaîtra en effet dix-sept rééditions jusqu'en 1920.

[1796] [Laisant, 1913], p. 18.

[1797] [Laisant, 1913], p. 26.

[1798] « j'ai un peu travaillé, comme beaucoup d'autres, à créer des universités populaires ; j'ai essayé d'y apporter un mince concours » (p. 24). Laisant avait pourtant placé beaucoup d'espoirs dans ce projet, comme il l'écrit à Delannoy dans une lettre datée du 8 mars 1895 : « je m'intéresse beaucoup à cette tentative, qui peut je le crois rendre de grand service ».
Voir à ce sujet, Lucien Mercier, *Les universités populaires : 1899-1914*, les éditions ouvrières, Paris, 1986.

Dans *L'Éducation de demain*, Laisant se montre un fervent soutien du corps enseignant, des instituteurs avec lesquels il tisse de nombreux liens. La publication en 1910, de *L'Enseignement du calcul ; conseils aux instituteurs*[1799] est une concrétisation de cette proximité entre l'auteur et les syndicats enseignants. Dans l'avant-propos de l'ouvrage reproduit dans les pages de *L'Enseignement mathématique*[1800], Laisant expose les motivations qui l'ont conduit à la rédaction de ce manuel. L'ouvrage procède des mêmes exigences que son *Initiation mathématique*, parue quelques années plus tôt, mais se veut être un outil concret de l'application de ses idées. Deux obstacles semblent en effet se dresser devant la mise en pratique de l'*Initiation* : l'ouvrage a été rédigé « « en dehors de tout programme » [alors que…] les instituteurs sont enserrés dans des programmes auxquels ils doivent se conformer dans une certaine mesure »[1801]. Le nombre d'élèves par classe est le deuxième frein à l'application des méthodes de Laisant[1802]. Alors même que Laisant exhorte à différencier la pédagogie suivant l'âge de l'apprenant, l'écart d'âge entre les élèves sous la responsabilité de l'enseignant est un fait allant de pair avec le constat précédent : « J'ai affirmé et je ne cesserai d'affirmer que le premier enseignement, s'appliquant aux tout jeunes enfants, jusqu'à la onzième ou douzième année, devrait être inspiré par un esprit très différent de celui qui suivra ; la première période serait celle de l'initiation, la suivante celle de « l'étude », et cela parce que la psychologie du petit enfant est très spéciale, notamment très rebelle aux formules dogmatiques. »[1803] Il s'agit bien d'éviter l'usage exagéré de la mémorisation[1804] et d'accompagner la découverte par des procédés simples et efficaces. Le souci de Laisant de proposer aux instituteurs un outil adapté à la curiosité des jeunes enfants traduit son désir de collaborer avec la profession dont les membres : « occupent le premier rang parmi ces « amis de l'enfance » auxquels j'ai dédié mon *Initiation mathématique*. »[1805]

[1799] *L'enseignement du calcul ; conseils aux instituteurs*, Hachette, Paris, 1910.
[1800] Voir "Bibliographie. L'enseignement du calcul ; conseils aux instituteurs ", *L'enseignement mathématique*, 12, 1910, p. 540-541.
[1801] Ibid., p. 540.
[1802] « j'ai combattu et je combattrai toujours le système des classes trop nombreuses » Ibid.
[1803] Ibid.
[1804] « c'est ainsi qu'ils formeront, non pas de petits perroquets, arrivant à réciter leurs leçons grâce à une véritable torture de leur mémoire, mais des enfants bien équilibrés ; ils ne seront pas bourrés de connaissances factices, ils comprendront ce qu'ils ont appris ; ils n'apprendront jamais sans comprendre. » (Ibid.) Le système de l'époque et plus particulièrement le certificat d'étude sont notamment pointés du doigt : « ils [les instituteurs] sont contraints de préparer des candidats à l'absurde certificat d'études, placé comme un obstacle à tout enseignement humain et rationnel. » (Ibid.)
[1805] Ibid., p. 541. La collaboration semble véritable car Laisant précise que « ce sont les nombreuses correspondances échangées avec les membres de l'enseignement primaire » (p. 541) qui l'ont décidé à publier l'ouvrage en question.

Avec *L'Éducation fondée sur la science* ([Laisant, 1904a]) puis *La Barbarie moderne*[1806], Laisant expose des arguments caractéristiques du monde libertaire dont il est proche[1807]. Le mouvement anarchiste, particulièrement vigoureux entre les années 1880 et la Première Guerre mondiale condamne l'école de Ferry, instrument de la bourgeoisie dominante. Selon les libres-penseurs, ce système ne tient pas compte du particularisme de chaque élève et consolide les inégalités sociales. Archaïque dans ses méthodes dogmatiques, liberticide pour l'enfant, il s'oppose aux convictions des compagnons. Ces derniers ont très tôt porté le thème de l'éducation de l'enfance, de l'instruction au cœur de la question sociale[1808]. Ils considèrent l'enfant comme individu à part entière, disposant d'aptitude propre, seulement guidé par l'éducateur adulte. L'enseignement promu est rationnel et intégral (manuel, physique, intellectuel et moral), fondé sur les sciences, ne négligeant pas l'hygiène et l'esthétisme. La mixité, l'apprentissage, le développement de l'orientation professionnelle y sont encouragés. Le milieu anarchiste veut se doter de manuels pour diffuser ces idées (*L'Éducation libertaire* lance en 1901 une enquête sur le sujet), en science particulièrement, au vu de la place que les mathématiques occupent dans le plan d'éducation libertaire et l'accession à l'indépendance de l'esprit. *L'Éducation fondée sur la Science* trouve toute sa place dans cette ambition et illustre les nombreux échanges de son auteur avec les écoles rationalistes créées par Francisco Ferrer. Remarquons que les manuels scolaires sont souvent hostiles aux règles académiques de l'orthographe et de la grammaire. Ce refus des conventions langagières est soutenu au tournant du siècle par une vague d'articles sur une réforme souhaitée de l'orthographe[1809] : *l'ortografie simplifiée* est de la même manière soutenue par Laisant et Lemoine, mais dénigrée par Borel. Les publications pour enfants participent du même élan : Laisant aurait participé notamment à la revue *Les Petits Bonhommes* de 1911 à 1914, au côté de syndicalistes ou d'instituteurs[1810]. D'autres actions militantes se mettent également en place à tous les niveaux de l'éducation, souvent sous l'œil observateur de Laisant (création de bibliothèque, cours du soir ou bourse du travail[1811]).

[1806] [Laisant, 1912a], *La Barbarie moderne*, Bataille syndicale, Paris, 1912.

[1807] Voir [Laisant M, 1970], Maurice Laisant, "De la députation à l'anarchie", *La Rue*, n°9 - 4e trimestre 1970. Les lignes qui suivent prennent leur source dans les réflexions de Nathalie Brémand sur "Les anarchistes et l'éducation sous Jules Ferry". Voir aussi Nathalie Brémand, *Les socialismes et l'enfance. Expérimentation et utopie (1830-1870)*, Rennes, PUR, 2008.

[1808] Voir les écrits de Proudhon ou Bakounine ou *La Liberté par l'enseignement : l'école libertaire*, Groupe d'initiative pour l'école libertaire, Paris, 1898 ou encore Elisée Reclus, *L'Évolution, la révolution et l'idéal anarchique*, Stock, Paris, 1897.

[1809] L'anarchiste Anna Mahé (1881-1960) est une figure de proue de ce mouvement.

[1810] Hervouet Élisabeth. *« Les Petits Bonhommes », un journal pour l'enfance ouvrière, 1911-1914*. Mémoire de maitrise. Dir. Antoine Prost, Jean-Louis Robert. Paris, 1983.

[1811] Créées par Fernand Pelloutier (1867-1901), elles ont pour devise « instruire pour révolter ».

Plus globalement, Laisant apparaît comme un acteur du mouvement appelé l'Éducation nouvelle[1812]. Multipliant les liens avec des personnes majeures du mouvement, notamment lors de la création de Ligue internationale pour l'éducation rationnelle de l'enfance par son ami Ferrer[1813], il y retrouve, par exemple, Sébastien Faure, créateur en 1904 d'une école libertaire, *La Ruche*. Mais c'est bien son amitié pour le pédagogue espagnol Francisco Ferrer qui illustre son engagement dans le mouvement.

Francisco Ferrer Guardia (1859-1909) est un pédagogue espagnol né près de Barcelone. Républicain et franc-maçon, il séjourne à Paris une première fois entre 1885 et 1901 après l'échec d'un coup d'État contre le roi. C'est lors de ce séjour qu'il se rapproche du Grand orient de France et débute ses réflexions de pédagogue[1814]. À son retour en Espagne, il fonde l'Escuola moderna. Soupçonné dans un attentat à la bombe en 1906, il est emprisonné un an. C.-A. Laisant prend sa défense à travers un courrier adressé (par lui et E. Carvallo) à l'Académie royale des Sciences de Madrid, dont il est membre correspondant[1815]. Ferrer libéré retourne en France de 1907 à 1909 : c'est lors de ce second séjour qu'il rencontre Laisant, son « meilleur conseiller et le guide le plus sûr »[1816]. Son École fermée, son activité se déroule principalement à Paris et notamment en collaboration avec Laisant. L'Espagnol crée *L'École rénovée* en 1908[1817] qui accueillera la participation de Laisant tout comme la revue qui lui succèdera en 1909, *L'École émancipée* [1818]. La fille de Ferrer publie dans l'ouvrage consacré à son père une lettre de Laisant datée du 11 décembre 1907 qui éclaire les relations entre les deux hommes :

> *Dans nos conversations récentes, vous m'avez entretenu de votre projet de publication d'une revue, « l'Ecole Rénovée », qui se fixerait pour tâche de faire connaître au grand public les principes d'une éducation rationnelle et libératrice. Ces principes, vous les avez mis en application en fondant l'Ecole Moderne de Barcelone ; la tâche entreprise a été interrompue ; il ne faut pas qu'elle reste inachevée.*
>
> *En échangeant nos idées sur ces questions, nous sommes arrivés à reconnaître combien serait désirable un vaste groupement, sous le titre de Ligue internationale pour l'éducation rationnelle de l'enfance, - ou tout autre exprimant mieux la même idée.*

1812 Voir Medici A., *L'Éducation nouvelle*, Paris, PUF, 1969. Cousinet R., *L'Éducation nouvelle*, Neuchâtel, Delachaux Niestlé, 1968.

1813 [Lamandé, 2010].

1814 [Ferrer, 1962], p. 58. Voir aussi [Lamandé, 2010].

1815 [Ferrer, 1962], p. 106-107.

1816 Ibid., p. 109.

1817 *L'École rénovée* revue d'élaboration d'un plan d'éducation moderne Extension internationale de l'École moderne de Barcelone. La revue paraître de 1908 à 1909 (mort de Ferrer).

1818 Thierry Flammant, *L'École émancipée, une contre-culture de la belle époque*, Paris, Les Monédières, 1984.

Aujourd'hui, vous m'annoncez que la revue projetée est sur le point de paraître. Vous me dites en outre que dès son premier numéro, elle proposera la constitution de la Ligue. C'est une double joie pour moi et je ne peux qu'applaudir à vos efforts et vous promettre mon concours dans la mesure où il pourra vous être utile. En tout cas, vous n'en trouverez pas de plus dévoué.

Après votre vie de dévouement et d'abnégation, après les iniquités dont vous avez été victime - et peut-être à cause de ces iniquités - il est impossible que vous ne parveniez pas à grouper autour de vous tous ceux qui veulent, comme vous, que l'éducation cesse d'être un dressage et un asservissement pour devenir l'œuvre par excellence celle qui demain préparera des êtres libres, forts et bons, capables de constituer la grande cité humaine, de fonder la civilisation dont nous n'avons jusqu'ici que les apparences.

Tous les hommes raisonnables, que l'intérêt n'égare pas, ne peuvent méconnaître la nécessité de donner à l'enfance une éducation conforme à son état psychologique, s'appuyant sur la science, et rationnelle dans le sens le plus large du mot, c'est-à-dire dégagée de tout dogme en toute matière. La question se pose sous la même forme, le problème à résoudre est le même partout. A votre appel doit répondre une acclamation formidable dans le monde entier. C'est à ce prix seulement que seront atténuées, sinon évitées, les convulsions douloureuses que l'avenir réserve à l'humanité.

Je vous remercie de m'avoir permis de vous envoyer, l'un des premiers, mes applaudissements et l'expression de mon espérance.

J'y joins l'assurance de la plus sincère et profonde amitié.

Signé : C. A. Laisant.[1819]

On remarque le concours immédiat du Français aux différents projets du pédagogue espagnol, leur même détermination à porter leurs réflexions sur le plan international à travers la Ligue et la foi qu'ils partagent quant au rôle que l'enseignement rationnel peut jouer pour la société.

Le retour en Espagne de Ferrer en 1909 coïncide avec les émeutes anarchistes de Barcelone. Il est de nouveau arrêté et injustement condamné. Les réactions à cette erreur, partout en Europe, et le soutien apporté par de nombreuses personnalités comme Anatole France ou Laisant[1820] n'empêcheront pas son exécution le 31 octobre 1909. Le combat de Laisant pour sauver Ferrer de la condamnation à mort aura été à la hauteur des liens qui unissaient les deux hommes.

[1819] [Ferrer, 1962], p. 121. Dans une lettre datée du 12 novembre 1907, Ferrer, quant à lui, loue les qualités de *L'anarchie bourgeoise* publiée par Laisant en 1887 et ses propos révolutionnaires ([Ferrer, 1962], p. 120).
[1820] Ibid., p. 155-157.

IV.4. De *L'Intermédiaire des mathématiciens* aux Congrès internationaux

IV.4.1. La création de *L'Intermédiaire*

Avec *L'Intermédiaire des mathématiciens*, Laisant et Lemoine vont créer une revue d'un nouveau genre qui prolonge leur réflexion commune sur l'évolution des sciences mathématiques et de leur communauté. Derrière cette publication, on devine le projet de coopération internationale dans lequel les deux hommes vont s'investir.

ÉMILE LEMOINE, CONDISCIPLE ET AMI

À la mort de son ami Émile Lemoine en 1912, C.-A. Laisant rédige pour *L'Enseignement mathématique* une nécrologie[1821] qui laisse deviner la proximité des deux hommes, condisciples à l'École polytechnique : « Depuis 1860, c'était l'un de mes plus intimes amis et sa disparition a été pour moi un vide cruel »[1822].

Nous nous appuyons sur cet écrit ainsi que sur l'article "Lemoine" de *La Grande Encyclopédie*, toujours rédigé par Laisant[1823], et enfin sur la biographie paru en 1896 d'Eugène Smith sur l'un des pères de la géométrie du triangle[1824] pour présenter la vie de celui qui, s'il est au côté de Laisant depuis de nombreuses années, apparaît comme un personnage clé à partir de 1894.

Né à Quimper le 22 novembre 1840 d'un père militaire, Lemoine fait ses études au Prytanée de La Flèche, puis à l'École polytechnique où il est admis en 1860 (année de la mort de son père), un an après Laisant. De cette époque datent les premières réunions de La Trompette, soirées de musique de chambre à l'origine mises en place pendant les récréations à l'École polytechnique. Le rendez-vous perdurera et deviendra hebdomadaire, novateur et reconnu.

[1821] [Laisant, 1912c], " Émile Lemoine (1840-1912)", *L'Enseignement Mathématique*, vol. 14, n°3, mai 1912, p.177 – 183. L'article parait en mai alors que Lemoine est décédé le 21 février.
[1822] [Laisant, 1912c], p. 177.
[1823] Laisant, "Lemoine", [Berthelot & al., 1885], t. 21, p. 1197.
[1824] [Smith, 1896], D.-E. Smith, "Emile-Michel-Hyacinthe Lemoine", *The American Mathematical Monthly*, Vol. III, n° 2, février 1896.

Le « mathématicien et dilettante français »[1825] donne ensuite quelques cours à Paris, suit les cours de l'École des mines et travaille dans les laboratoires de Würtz dont il est proche, devient préparateur à l'École d'architecture tout en fréquentant l'École de médecine. Ses idées républicaines et libérales écourtent rapidement les études de droit qu'il avait tout juste entamées sous le Second Empire. Lemoine voyage beaucoup, parfois en étant employé comme précepteur dans des familles aisées. Des difficultés de santé mettent un frein à sa carrière d'enseignant.

Après la guerre, pendant laquelle il ne sert que quelques mois, il se convertit en ingénieur pour le secteur privé et est nommé en 1886 chef du service de vérification du gaz à la ville de Paris. En 1905, l'Académie des sciences lui accorde le prix Francoeur pour l'ensemble de ses travaux. Un an plus tard, il est décoré de la légion d'honneur. Plus tard, après que Laisant ait rédigé un rapport sur ses travaux, il sera honoré du prix Lobatchevski par la Société physico-mathématique de Kazan.

Comme l'explique l'article de Smith ([Smith, 1896]), Lemoine est immédiatement reconnu principalement pour ses travaux sur la géométrie du triangle dont l'origine date d'une communication au Congrès de Lyon de l'Association française pour l'avancement des sciences en 1873 et qui se poursuivent avec un article paru dans les pages des *Nouvelles annales de mathématiques*, première revue où, comme Laisant, il publie[1826]. Dans l'article de *La Grande Encyclopédie*, son ami mentionne également la contribution de John Casey à ce chapitre des mathématiques : « On peut dire qu'avec John Casey, il est le fondateur de la géométrie du triangle. »[1827] Il est étonnant que Laisant ne cite pas un autre de ses proches en la personne de Brocard comme fondateur de la nouvelle géométrie du triangle : il semble que Laisant, ayant toujours manifesté un intérêt relatif à ce mouvement, se réfère uniquement à l'article de Smith pour ces références.

Laisant recueille les confidences de son ami sur l'autre grand chapitre de son travail, la géométrographie. Il explique en effet : « Je crois bien que c'est moi qui ait reçu ses premières confidences sur le sujet »[1828] en 1887 et c'est lui qui encourage Lemoine à communiquer ses résultats. Un an plus tard, la communication « De la simplicité dans les sciences mathématiques » au congrès de l'AFAS à Oran marque les premières considérations sur ce thème : il s'agit d'évaluer par un nombre la simplicité d'une construction à la règle et au

---

[1825] Selon l'expression de Smith.
[1826] « Sur une conique et son cercle directeur », *NAM*, 1858. Sur la géométrie du triangle, voir *NAM*, 1873.
[1827] *La Grande Encyclopédie*, t. 21, p. 1197. Il y rappelle également l'origine des points, droite, cercle ou ellipse de Lemoine en faisant référence aux travaux anglo-saxons ou allemands sur le même sujet. Sur la géométrie du triangle, nous renvoyons de nouveau à [Romera-Lebret, 2009].
[1828] [Laisant, 1912c], p. 5.

compas et de simplifier au maximum cette construction. S'en suivra une communication à l'Académie des sciences (« Sur la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques ») et un *Traité de géométrographie*[1829] : « Ses travaux sur ces questions [« l'art de la géométrie »] et sur beaucoup d'autres sont répandus dans un grand nombre de recueils mathématiques, en France où à l'étranger. »[1830]

Lemoine assiste Almeida pour la fondation de la Société de physique et de son *Journal*. Il fut parmi les fondateurs de la Société mathématique de France et de l'Association française pour l'avancement des sciences dont il fut ensuite « l'un des membres les plus assidus »[1831].

Malgré des parcours bien différents, des œuvres mathématiques éloignées, des carrières professionnelles quasiment aux antipodes, les deux hommes jouissent d'une véritable reconnaissance dans le milieu mathématique au début des années 1890 : ils sont connus par leurs travaux mais également par leur active participation aux réseaux qu'ils partagent tels ceux de l'AFAS, ou de la SMF.

LA CREATION DE "*L'INTERMATH*"

S'ils ont peu échangé sur tel ou tel chapitre mathématique, Laisant et Lemoine vont par contre collaborer autour d'une réflexion commune sur le thème du progrès et des problèmes rencontrés par les mathématiciens de l'époque. L'ambition de faire progresser la science en facilitant la communication au sein de la communauté scientifique les anime. *L'Intermédiaire des mathématiciens* sera leur levier d'action ; l'AFAS sera une première tribune pour présenter leurs motivations et leur projet. Nous exposons ici leurs intentions à partir de la communication « Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématique » où sont donnés les grands principes de la revue qu'ils créeront un an plus tard. Nous présenterons ensuite les débuts de *L'Intermédiaire,* le rôle de chacun et les visées communes des deux fondateurs en insistant sur l'aspect novateur de la revue et donc son originalité.

Le bilan dressé par les deux hommes

En 1893, Charles-Ange Laisant et Émile Lemoine interviennent conjointement au Congrès de l'AFAS de Besançon. Leur communication « Sur l'orientation actuelle de la

---

[1829] Dans la collection *Scientia*.
[1830] *La Grande Encyclopédie*, t. 21, p. 1197. Nous renvoyons à [Smith, 1896] pour une liste des travaux en question.
[1831] [Laisant, 1912c], p. 4.

science et de l'enseignement mathématique »[1832] est un constat sur les récents développements des sciences mathématiques. En particulier, les deux hommes dressent un portrait de la communauté mathématique telle qu'elle se présente en cette fin de XIX^e siècle. Ils abordent ses évolutions structurelles et les difficultés que ses membres rencontrent.

La communication est marquée par un double constat en ce qui concerne la discipline elle-même : celui de l'extension des connaissances qui va de pair avec celui d'une ramification extrême des contenus. Ce « prodigieux entassement de découvertes mathématiques »[1833] (le terme entassement est révélateur) tient dans les « efforts antérieurs, les grandes méthodes dues aux géomètres précédents »[1834]. Le nombre croissant de subdivisions créées et la spécificité des chapitres à étudier constituent l'effet pervers de cet accroissement anarchique des connaissances : « les vérités en question sont pour une bonne part des vérités de détails, plutôt curieuses que profitables au développement humain. De l'extrême spécialisation [… qu'ils constatent dans la communauté mathématique] résultent un défaut de généralisation, un rétrécissement des horizons scientifiques »[1835]. L'avancement d'une science ne se mesurant pas à la croissance du nombre de mémoires publiés, le recours à une « philosophie » (pour reprendre le titre de l'ouvrage de Laisant), une vision d'ensemble de la discipline est nécessaire. Une structuration des résultats et indispensable : « cet état de choses appelle une transformation […] et il s'agira alors de dresser tant bien que mal l'inventaire des vérités acquises, revenir à la culture des méthodes générales. »[1836] Dans ce sens, les auteurs saluent l'introduction d'éléments de géométrie moderne, de notions de théorie des fonctions ou de méthodes générales d'études des courbes dans l'enseignement. Ces nouvelles pratiques s'attachent à souligner les vérités générales qui peuvent s'habiller de différentes formes. Ainsi, est préservé chez les élèves le goût pour les mathématiques par un recours raisonné à la mémorisation, en même temps que des vues plus générales leur sont exposées.

Surtout, l'exposé traite des conséquences de ce mouvement pour la communauté mathématique, pour les hommes, savants illustres ou simples lecteurs cultivés, confrontés à cet état de fait. Concurremment à l'augmentation des connaissances, se développe une

[1832] Laisant C.-A. et Lemoine É., "Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématique", AFAS, Besançon, 1893/1, p. 171.
La communication a été publiée dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* (n°22 du 30 novembre 1893). Un tirage à part est effectué : [Laisant, Lemoine, 1893], Laisant C.-A. et Lemoine E., *Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématique*, G. Carré, Paris, 1893.
[1833] [Laisant, Lemoine, 1893], p. 1. Voir aussi [Rasmussen, 1996].
[1834] Ibid.
[1835] Ibid., p. 4.
[1836] Ibid., p. 5.

communauté élargie ; l'étude des mathématiques se démocratise : alors que « la culture mathématique [...] tendait à se généraliser; en même temps que le nombre de mathématiciens, celui des recueils périodiques s'accroissait de plus en plus »[1837]. Un des écueils de ce phénomène est celui de la langue adoptée pour les communications. Contrairement au passé, « aujourd'hui, aucun mathématicien, si polyglotte qu'il soit, ne saurait affirmer qu'il a une connaissance complète de ce qui se publie dans le monde »[1838]. On a vu combien Laisant a cru dans l'espéranto pour palier cette difficulté.

Là encore, une réaction salutaire est à l'œuvre : « on voit qu'il se fait un mouvement général, dans le monde mathématique [...] pour remédier, dans la mesure du possible, à l'ignorance forcée où restent souvent les mathématiciens, en ce qui concerne les travaux d'autrui »[1839]. L'idée d'un répertoire bibliographique recensant tous les articles et mémoires parus au cours du siècle partout dans le monde, idée lancée sous les auspices de la Société mathématique de France, est une concrétisation importante de cette réflexion. Cet outil comble « l'éparpillement de plus en plus grand des travaux mathématiques »[1840]. Les auteurs invitent d'ailleurs les congressistes de l'AFAS à employer la nomenclature de l'index et nous étudierons la participation de Laisant à ce projet colossal.

Les deux mathématiciens quant à eux soulignent le contraste entre l'existence de grands centres où les bibliothèques sont richement dotées et la solitude de travailleurs isolés, éloignés de ces mêmes centres. Pour palier aux difficultés de ces derniers, Laisant et Lemoine évoquent leur projet de *L'Intermédiaire des mathématiciens* déjà dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*. Ils défendent l'hétérogénéité des intervenants de cette nouvelle revue : « correspondance entre les personnes qui cultivent la mathématique dans une mesure quelconque. »[1841] La publication se veut internationale (l'appui de M. Cantor en est une preuve) et s'adresse à tous, « depuis les plus illustres jusqu'au plus modestes, les savants, les simples amateurs, les professeurs, ceux qui ont à se servir des mathématiques dans d'autres sciences et dans le domaine des applications industrielles »[1842]. De même, aucune restriction n'est annoncée quant aux domaines relatifs aux questions posées : pourront y être traitées « toutes les branches des Mathématiques, depuis les éléments jusqu'au sommet les plus

[1837] Ibid., p.1. L'idéal d'une culture mathématique accessible à tous car utile à tous est un aspect saisissant de l'œuvre de Laisant au tournant du siècle.
[1838] Ibid., p. 4.
[1839] Ibid., p. 8.
[1840] Ibid., p. 7. Voir [Rollet, Nabonnand, 2002].
[1841] Ibid., p. 9.
[1842] Ibid.

élevés »[1843]. Les questions pourront en outre énoncer les « grands desiderata » de la science et faire l'objet d'éventuelles thèses, tout comme elles pourront n'être que d'utilité personnelle.

Les deux collaborateurs se félicitent du nombre important de questions qu'ils ont reçues de leurs relations pour établir les premiers numéros de la revue. Ils y voient « une preuve que notre initiative répond réellement à une nécessité. »[1844] En août 1893, le projet est donc déjà bien avancé, il se concrétise dès janvier 1894.

L'Intermath', journal hors du commun

Dans sa nécrologie sur Lemoine, Laisant relativise la part qu'il a prise dans la création de *L'Intermédiaire des mathématiciens* : « Je dois me borner ici à répéter que Lemoine eut tout le mérite »[1845]. Mais il se souvient de son propre enthousiasme devant la proposition de Lemoine, car tous deux ont déjà le projet d'une réunion des mathématiciens de tous pays et une revue du type de *L'Intermédiaire* pourrait jouer un rôle non négligeable dans l'organisation de tels congrès. Voici comment Smith rapporte pour sa part et de manière amusante la création du journal :

> *The idea of the journal is purely M. Lemoine's, and for some time it had been in his mind, but unhappily with no thought of its realization, until the genial influence of a quiet dinner and some good cigars brought about its fruition. M. Laisant had long been a friend of Lemoine's, and it was no uncommon thing for the former to dine with the latter at his home in Rue Littré. On such an occasion, in March, 1893, as they were enjoying a quiet smoke after dinner, the talk ran as usual into mathematics, and Lemoine suggested the idea of the journal. Laisant at once saw the value of the scheme and urged his friend to join him in carrying it out. M. Lemoine replied that it seemed impossible both because he was much occupied with other matters, and because of ill health (from which, unhappily, he is still suffering). Nevertheless, M. Laisant was so persuasive and the influence of the dinner and the cigars so happy that before they separated the project had taken such form that the very next day it was laid before their friend Gauthier-Villars, the great mathematical publisher, and the journal was ushered into being. "Before dinner, nothing could have persuaded me," M. Lemoine writes, "that this idea which I had formed for others would ever be realized by me; after dinner, the journal was a possibility; the next day, it was an accomplished fact."*[1846]

Lemoine apparaît dans ces lignes comme la source du projet mais c'est l'enthousiasme de Laisant et sa capacité à impulser un tel projet, son expérience de directeur de publication aussi, qui permettent la naissance de *L'Intermath*, comme sera nommée plus tard la revue dans la correspondance de ses principaux collaborateurs. La publication apparaît aussi comme

[1843] Ibid., p. 11.
[1844] Ibid., p. 10.
[1845] [Laisant, 1912c], p. 7.
[1846] [Smith, 1896], p. 32.

la concrétisation de vues similaires des deux fondateurs sur leur discipline et l'expression, si ce n'est d'une complémentarité, au moins d'une véritable complicité.

L'entreprise débute donc en mars 1893 et aboutit en janvier 1894, après que les deux fondateurs aient fait jouer leurs performants réseaux personnels pour obtenir matière aux premières parutions. La revue se présente comme véritablement originale, tranchant avec les publications de l'époque. Dès les premières lignes de la préface de 1894[1847], les deux rédacteurs signalent le caractère innovant de la revue : « *L'Intermédiaire des Mathématiciens* n'a rien de commun avec les journaux mathématiques existant aujourd'hui en France et à l'étranger. Nous croyons même qu'il ne se rapproche d'aucune publication antérieure »[1848]. Tout au plus son titre est-il une évocation de *L'Intermédiaire des chercheurs et des curieux*, revue créée en 1864 par Charles André Read sur le modèle de la revue anglaise *Notes and queries* où les passionnés d'histoire, de littérature ou de géographie pouvaient poser leurs questions à loisir.

Certes, le principe de questions/réponses est déjà acté dans beaucoup de revues existantes mais il ne s'agit pas ici de relever comme par le passé un défi, ni de s'exercer à la pratique des mathématiques, comme dans les *Nouvelles annales* par exemple. Il ne s'agit pas non plus d'approfondir telle ou telle notion par la résolution d'un problème dont la solution préexiste, à la manière des *Recueils de problèmes*. « Dans presque tous les journaux mathématiques, on trouve des questions proposées ; habituellement, celui qui les pose en possède une solution. Ici, l'ordre d'idée est tout à fait différent. En général, celui qui posera une question ne la posera précisément que parce que la solution lui manque, et dans le but d'obtenir, soit cette solution, soit des indications [… ou] d'avoir rapidement un résultat qu'on ne saurait obtenir soi-même sans un long travail »[1849]. Ceci est une grande spécificité de la revue.

Les principes évoqués au congrès de l'AFAS l'année précédente sont par ailleurs confirmés. L'ouverture à toute la communauté tout d'abord :

> *Notre but est de fournir aux personnes qui cultivent habituellement les Mathématiques, ou qui s'y intéressent, des renseignements sur des sujets se rapportant à leurs études, des solutions à des questions posées, ou des indications bibliographiques.*[1850]

[1847] [Laisant, Lemoine, 1894], C.-A. Laisant et E. Lemoine, "préface", *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 1, n°1, janv. 1894, p. V-VIII.
[1848] [Laisant, Lemoine, 1894], p. V.
[1849] Ibid., p. VI.
[1850] Ibid., p. V.

Les rédacteurs rappellent d'une part l'expansion de ce public, mathématiciens « par profession ou par goût », auquel s'adresse *L'Intermédiaire* et d'autre part, l'accroissement des connaissances mathématiques, et la multiplication des chapitres. La revue établira donc une communication rapide entre le lecteur qui s'interroge sur tel ou tel point simple ou ardu (bibliographie, histoire, simples calculs) et un autre, plus spécialisé dans le domaine correspondant, permettant ainsi un gain de temps et de labeur appréciable pour le premier. Mais cette démarche générale est aussi synonyme d'avancées pour l'ensemble des mathématiques : « mettre en rapport les deux personnes dont il s'agit, c'est donc rendre service à la science et contribuer à ses progrès en économisant des efforts inutiles »[1851].

L'effort de communication entre mathématiciens que facilite *L'Intermédiaire des mathématciens* semble de plus relever d'une marche inéluctable du progrès de la science, un fait inscrit dans une histoire en mouvement :

> *Au XVIIème siècle, les savants s'adressaient des défis et se cachaient mutuellement leurs méthodes; la Science a également profité de cette émulation. Aujourd'hui, les conditions ont changées : la Science s'est répandue ; les découvertes de chacun sont divulguées sur l'heure par la volonté des inventeurs eux-mêmes ; une sorte d'effort collectif s'est substitué avec avantage à l'effort individuel de nos pères, et c'est cet effort collectif que nous voulons développer encore*[1852]

Concrètement, ce but à atteindre oblige les rédacteurs à une restriction du contenu de la publication : pas d'article, pas de mémoire, pas de note sur des questions qui n'auraient pas été posées... uniquement des questions en première partie et des réponses dans une deuxième partie (parfois des compléments ou de simples indications si la question est susceptible de fournir un sujet de thèse, par exemple). Ce fonctionnement repose en outre, comme le soulignent les rédacteurs, sur la collaboration active des lecteurs de la revue, quels que soient leur statut ou leur origine : « Professeurs, élèves studieux, simples amateurs de Mathématiques seront heureux de faire appel à *L'Intermédiaire des mathématiciens*, et nous pensons que les savants, soit pour obtenir un renseignement, soit pour en donner un, trouveront avantage et plaisir à devenir nos collaborateurs »[1853].

La question de la langue est évoquée de nouveau : le français sera l'unique langue de rédaction (les articles en anglais, allemands, italien, espagnol, portugais ou latin étant traduits par les soins de la rédaction).

[1851] Ibid., p. VI.
[1852] Ibid., p. VI.
[1853] Ibid., p. VIII.

Enfin *L'Intermédiaire* concrétise les vœux d'un internationalisme pacificateur, un quart de siècle après le conflit de 1870. L'idée d'une science en marche, vecteur de progrès et de paix entre les peuples, trouve ici toute son expression :

> *Si le public comprend les services qu'il peut tirer de cette modeste publication, nous aurons par cela même atteint, d'une façon indirecte, un autre but, non moins important que le précédent ; car il arrivera, par la force des choses, que des correspondances et des relations personnelles s'établiront entres les Mathématiciens qui poursuivent des recherches analogues sans même se connaître. Ces échanges de vues, ces communications réciproques sont à nos yeux un grand bienfait. La Science est la grande pacificatrice, l'agent de civilisation le plus noble et le plus puissant ; les études mathématiques surtout, si attrayantes et si passionnantes pour qui s'y consacre sont de nature à rapprocher dans une commune entente des hommes animés d'une ardeur égale pour la recherche de la vérité*[1854].

Un succès immédiat

Dès les premières années de *L'Intermédiaire des mathématiciens,* l'inventivité de Lemoine et de Laisant est saluée. Une telle revue apparaît véritablement novatrice. Ainsi, Jules Tannery dans le *Bulletin de Darboux* présente ainsi la nouvelle revue et ses fondateurs : « Les fondateurs de ce nouveau journal sont bien connus des lecteurs du *Bulletin* : ce sont des esprits curieux, toujours en éveil et qui n'ont pas peur des nouveautés. C'est bien à eux que pouvait venir l'idée de cet *Intermédiaire* pour lequel il semble que les souhaits de bienvenue soient inutiles, tant il a été bien accueilli partout »[1855]. Il souligne : « le nouveau et original service qu'ils rendent à la Science en publiant *L'Intermédiaire des mathématiciens*. »[1856]

C'est sans doute cette originalité et l'utilité profonde de la revue dont ont toujours été persuadés ses pères qui expliquent sa réussite. Un an après son lancement, Lemoine et Laisant, reconnaissants envers leurs lecteurs, se félicitent de cette victoire : « Grâce à eux, la tentative scientifique que nous avons faite est dès maintenant assurée d'un succès qui dépasse certainement nos premières espérances »[1857]. Ils s'enthousiasment devant la variété des sujets abordés (Science pure, enseignement, histoire, bibliographie[1858], applications, sujets de recherche). La table des auteurs[1859] se veut être une preuve des divers horizons d'où proviennent les collaborations. Mais les fondateurs désirent ouvrir encore plus largement les

[1854] Ibid., p. VIII.
[1855] Tannery, "Compte rendu et analyse", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1897, p. 97.
[1856] Ibid.
[1857] [Laisant, Lemoine, 1895a], p. V.
[1858] La deuxième année de *L'intermédiaire des mathématiciens* inaugure également l'ajout d'une rubrique de bibliographie propre à la revue.
[1859] Pour l'étude des auteurs, nous renvoyons à [Pineau, 2006].

pages de *L'Intermédiaire* à l'ensemble des praticiens des mathématiques, notamment ceux qui traitent de leurs applications.

Parallèlement, la revue s'est retrouvée littéralement victime de son succès dès la première année. L'affluence de questions ou de réponses ayant retardé leurs publications a nui à son aspect pratique, qualité vivement désirée par Laisant et Lemoine, autant que son prix bon marché[1860]. Le délai d'obtention des réponses est une donnée cruciale pour le bon fonctionnement de la revue. Pour palier à ces difficultés, Laisant et Lemoine se proposent de transmettre personnellement une réponse qui ne peut être imprimée faute de place ; ceci ne manque pas, à coup sûr, d'étendre une correspondance déjà conséquente. En augmentant le nombre de pages ponctuellement au cours de la première année puis de manière définitive ensuite, en adaptant la typographie, et avec l'aide soulignée de Brocard, les rédacteurs atteindront « l'état de régime » de la publication pour sa troisième année[1861].

Les rédacteurs concluent en qualifiant la tonalité des échanges dans les pages de *L'Intermath* : « De cette collaboration multiple, de cette promiscuité bienfaisante, sans hiérarchie, sans lutte d'amour-propre, de ces renseignements donnés obligeamment par des maîtres à des inconnus, est sorti déjà un résultat utile »[1862]. La spécificité de la revue, ni de vulgarisation, ni de communications académiques mais s'approchant de ces deux aspects à la fois est donc sinon un gage de succès, au moins une de ses raisons d'exister.

Au fil des années, on devinera un sentiment de fierté chez les rédacteurs. Fierté de la variété des sujets traités dans la revue dont « l'éclectisme l'a bien servi et lui a permis d'exercer une action réelle et utile »[1863]. Fierté des progrès et des recherches suscités : « des questions ont été posées et ont reçu des réponses soit dans le journal, soit ailleurs. Plusieurs ont été le point de départ de travaux fort intéressants, publiés dans des recueils académiques ou les journaux scientifiques, en France et à l'étranger »[1864]. Fierté enfin d'avoir véritablement établi des liens entre les membres de la communauté mathématique : « les questions de Bibliographie et d'histoire, fort nombreuses, ont été souvent résolues et nous ont conduit fréquemment à mettre nos correspondants en rapport personnel direct les uns avec les autres »[1865]. *L'Intermédiaire* se trouve être finalement un des catalyseurs de la démocratisation d'une culture mathématique à laquelle Laisant et Lemoine faisaient référence

[1860] Les rédacteurs ayant toujours souhaité faire de *L'Intermédiaire* un « journal de renseignements scientifiques à bon marché » (*L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 7, n°1, janv. 1900).
[1861] [Laisant, Lemoine, 1896], C.-A. Laisant, E. Lemoine, "A nos lecteurs", *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 3, n°1, janv. 1896, p 5-6.
[1862] [Laisant, Lemoine, 1895a], p. VIII.
[1863] *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 7, n°1, janv. 1900.
[1864] Ibid.
[1865] Ibid.

dès leur communication à l'AFAS en 1893. Le journal permet en effet d'établir un « lien entre les mathématiciens de divers ordres ; que ceux-ci diffèrent par leur force ou leur spécialité, il peut contribuer à leur inspirer le goût d'études plus difficiles ou d'une autre nature »[1866]. Rappelons enfin qu'avec les *Nouvelles annales*, *L'Intermédaire des mathématiciens* s'insère dans le réseau espérantiste dont Laisant fait parti. Les contributions rédigées dans la langue espéranto ne seront accueillies qu'à partir de 1900 mais les rédacteurs expliquent alors que « cette langue internationale auxiliaire, d'une compréhension si facile, au moins pour toutes les nations européennes, peut être une précieuse ressource pour quelques correspondants »[1867].

AUTRE COLLABORATION : LE *TRAITE D'ARITHMETIQUE*

Ayant évoqué la collaboration entre les deux directeurs de *L'Intermédiaire des mathématiciens*, nous souhaitons signaler l'ouvrage que les deux hommes rédigent en collaboration, un an après le lancement de leur revue. Le *Traité d'arithmétique* de Laisant et Lemoine [1868] a pour but de présenter de façon simple les notions élémentaires de l'arithmétique. Il s'agit d'éclaircir les définitions des premiers éléments de calcul sur les nombres entiers (numération, opérations usuelles), celles des notions portant sur les fractions (définition, opérations et nombres décimaux). On y trouve aussi une présentation du système métrique des poids et des mesures, un aperçu élémentaire de la théorie des nombres (pgcd, nombre premier, décomposition en facteur premier, simplification de fractions, fractions périodiques, etc.), une approche des incommensurables, des racines carrées et enfin des notions sur les rapports et les proportions (avec des règles d'application comme celles sur les intérêts composés). La patte de Laisant est indéniable dans l'élaboration de ce traité : Lemoine a peu publié sur les questions d'enseignement et le plan présenté ci-dessus rappelle à plus d'un titre certains chapitres de l'*Initiation* qui paraîtra seulement plus de dix ans plus tard.

La volonté de clarifier les premiers enseignements tout en conservant une exigence de rigueur est un des aspects affirmés de l'ouvrage : « il n'est pas impossible de raisonner juste en enseignant les principes des Sciences, et […] il vaut toujours mieux dire aux enfants les raisons exactes des choses, que de leur cacher ou de leur dissimuler ce qu'on est convenu

---

[1866] C.-A. Laisant, E; Lemoine, "observations importantes", *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 8, n°1, janv. 1901. Pour l'étude du contenu de la revue, voir [Pineau, 2006].

[1867] *L'intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 8, 1901, p. 7.

[1868] [Laisant, Lemoine, 1895b], Laisant C.-A. et Lemoine E., *Traité d'arithmétique* suivi de N*otes sur L'ortografie simplifiée (par M. Malvezin*), Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1895. Un extrait est publié dans *Mathesis*, Sér. 2, t. 6, 1896, p. 85.

d'appeler des difficultés »[1869]. L'ouvrage entend également procurer une vision large et globale de l'enseignement de l'arithmétique : les auteurs rappellent l'intérêt d'une « étude suffisamment approfondie de la filosofie de la Science ». Là encore, on retrouve certains aspects d'un livre de réflexion de Laisant à venir, *La Mathématique* de 1898. Remarquons enfin que l'ouvrage est rédigé avec l'orthographe simplifiée, un projet de Pierre Malvezin, membre de la Société philologique. Avec ce parti pris, également adopté pour certains articles de *L'Intermédiaire* malgré les critiques qu'il suscite, comme celle de Borel, le traité se veut être un « progrès à la fois pour le fond et pour la forme ».[1870]

Au sujet de la teneur des définitions avancées, nous évoquons les premières notions exposées dans l'ouvrage. La définition habituelle de quantité comme « tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution » y est qualifiée de « très défectueuse »[1871]. Laisant et Lemoine préfèrent s'appuyer sur les notions d'ajouter et égaler avant de fournir une définition du terme quantité : « toutes les choses à propos desquèles on peut concevoir ou définir les mots égaler, ajouter »[1872].

De cette définition viennent naturellement celles de quantités de même espèce et de nombre. Un nombre n'est pas une "collection d'unités" mais « une locution et un signe qui servent à désigner avec précision une quantité et toutes cèles qui lui sont égales, de manières à les distinguer nètement de toutes cèles qui sont plus grande ou plus petite »[1873]. Cette définition que Laisant adoptera en 1898 pour sa *Mathématique* est en fait due, comme il l'explique lui-même, à H. Laurent. Elle sera vivement critiquée par J. Tannery dans le compte rendu qu'il dresse de l'ouvrage de Laisant pour le *Bulletin* de Darboux[1874]. Hermann Laurent répond aux observations de Tannery dans un article des *Nouvelles annales*[1875]. Remarquons une note de Laisant qui, si il considère la pensée de Laurent « excellente » et signale les désaccords qu'il partage avec les opinons de Tannery en général, refuse de donner aux *NAM* dont il est directeur « un caractère de polémique »[1876] quelconque. Pourtant, dans cet article, Laurent reprend point par point les critiques de Tannery : il y expose en détail les notions

[1869] "Préface", [Laisant, Lemoine, 1895b], p. I.
[1870] Ibid., p. VII. Nous conservons l'orthographe originale par la suite.
[1871] Ibid., p. I.
[1872] Ibid., p. 2.
[1873] Ibid.
[1874] Tannery, "Compte rendu et analyse", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1895, p. 8-9. La critique porte sur l'utilité de la définition de la notion de nombre et l'évincement de celle de quantité par Laisant.
[1875] [Laurent, 1898], Laurent H., "A propos de la définition du nombre", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 3, 27, 1898. p. 277-280.
[1876] [Laurent, 1898], p. 278.

d'objets identiques, égaux, sommes ou nuls qui permettent de présenter celle de quantité de même espèce. Laurent conclut :

> *Si M. Tannery veut se donner la peine de lire le tout petit Traité d'Arithmétique de MM. Laisant et Lemoine, il verra que cette bonne définition du nombre permet de faire la théorie des nombres incommensurables d'une façon claire et lumineuse, en quelques lignes, et en s'appuyant sur ce simple* postulatum.[1877]

Laisant et Lemoine proposent en effet, après avoir clarifié de la même manière les définitions de multiplication[1878] et de division communément admises, une définition simple des nombres réels :

> *Une quantité qui croît sans devenir plus grande que A jouit de cette propriété qu'il existe une quantité a dont elle finit par différer d'aussi peu que l'on veut ; et a est, ou A, ou une quantité plus petite que A.*[1879]

IV.4.2. Les Congrès internationaux

Dès 1891, Laisant est l'auteur d'un « projet d'association universelle internationale des mathématiciens »[1880]. Le projet manuscrit ne retiendra pourtant pas l'attention alors que deux ans plus tard, au Congrès de Chicago, Félix Klein milite lui aussi pour une telle réunion des mathématiciens de tous pays[1881]. En 1894, Laisant et Lemoine fondent *L'Intermédiaire des mathématiciens* qui va jouer un rôle déterminant dans la préparation du premier Congrès international des mathématiciens. Si l'idée d'un congrès réunissant les mathématiciens de tous pays leur est initialement proposée par Georg Cantor, comme Laisant le reconnaît lui-même, les deux fondateurs vont s'appuyer sur la revue nouvellement créée pour contourner les difficultés liées à la mise en place du projet.

[1877] [Laurent, 1898], p. 280. Laurent s'en prend tout au long de l'article aux travaux allemands sur les fondements de l'arithmétique, réflexion « nébuleuse » qui oppose à la clarté de la tradition française.

[1878] La définition usitée cache selon les auteurs de multiples difficultés quant à la façon de former le produit à partir d'un multiplicande et du multiplicateur : voir l'extrait publiée dans *Mathesis*, s. 2, t. 6, 1896, p. 85.

[1879] Cité dans [Laurent, 1898], p. 280. Sur la construction des nombres réels, voir Dhombres Jean, *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Cedic Nathan, 1978, Cousquer Éliane, *La fabuleuse histoire des nombres*, Diderot, 1998, Boniface Jacqueline, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Ellipses, 2002.

[1880] [Brigaglia, 1984], p. 46. Le manuscrit est actuellement conservé dans les archives du Circolo Matematico de Palerme. On en trouve un extrait dans [Brigaglia, 1982], p. 83.

[1881] [Letho, 1998], p. 5

ITINERAIRE DE LA QUESTION 212

Une question résume à elle seule les efforts de Laisant et de Lemoine pour organiser le premier Congrès international de mathématiciens. C'est la question 212 parue dans *L'Intermédiaire des mathématiciens* en 1894, année de création de la revue. Nous nous proposons de suivre l'évolution du débat autour de cette question à travers les cinq premières années de la revue L'histoire des congrès est reprise également par F. Rudio dans le compte rendu du Congrès de Zurich ([Rudio, 1898]) : on y voit que les publications de *L'Intermédiaire* retracent assez fidèlement le processus de mise en place des tous premiers ICM. Plutôt qu'un article ou une monographie particulière, Laisant et Lemoine choisissent de garder la forme d'expression par questions-réponses caractéristique de *L'IM*, et ce peut-être afin de laisser la place à divers échanges et de s'appuyer clairement sur les lecteurs de la revue. Nous allons examiner comment la revue offre une tribune de choix pour la propagation de leurs idées sur le sujet, en "brouillant les pistes" sur son origine et en attribuant à d'autres les principes que les rédacteurs souhaitent voir adoptés. La question initialement posée par la rédaction elle-même est la suivante :

> 212. **[V]** *Plusieurs de nos correspondants, soit en France, soit à l'étranger, et certainement sans s'être conciliés, nous ont spontanément soumis l'idée d'une organisation de grands* Congrès internationaux mathématiques. *Ils pourraient avoir lieu à des intervalles de quelques années, tantôt dans un lieu, tantôt dans un autre, et auraient pour but exclusif l'établissement d'une sorte d'inventaire des progrès réalisés en Mathématiques dans l'intervalle d'un Congrès au Congrès suivant. Nous croyons devoir communiquer cette idée à nos lecteurs, en déclarant qu'elle nous paraît excellente, mais sans rien préjuger de l'organisation future. Il nous semble seulement que, pour arriver au résultat désiré, il importerait de conserver à cette organisation un caractère rigoureusement international, et d'avoir le concours du plus grand nombre possible de celles des sociétés savantes qui s'intéressent à la Mathématique.*
> *Nous recevrons avec plaisir les adhésions* de principe *que nos lecteurs voudraient bien nous adresser.*[1882]

Le projet illustre l'internationalisme ambiant qui règne chez les savants de l'époque[1883]. Les grandes idées présentées à travers cette question se limitent à des principes généraux : visée globale du projet par rapport au corpus grandissant des connaissances mathématiques, congrès réguliers, itinérants et foncièrement plurinationaux sans restriction d'aucune sorte. Si *L'Intermédiaire* est prêt à apporter son soutien, la revue ne sera qu'un des

[1882] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. I, 1894, p. 113. La question appartient à la section V du *Répertoire des bibliographique des sciences mathématiques* : « Philosophie et Histoire des sciences mathématiques. Biographies de mathématiciens ».
[1883] [Rasmussen, 1995].

lieux de mise en place de la réunion constituante. Le rôle des nouvelles sociétés mathématiques nationales créées dans le dernier quart du XIX^{e} siècle est particulier : pour conserver le caractère international au projet, leur implication doit être relative, afin d'éviter toute tentation nationaliste, et ce sont d'abord les lecteurs de *L'Intermédiaire* qui doivent soutenir le projet. Cependant, c'est au sein de cette communauté que Laisant sera le premier promoteur du projet afin d'obtenir leur adhésion.

Le projet semble avancer à grands pas. Dans le même tome paraît la réponse suivante de la rédaction :

> *212. (La rédaction). – Le projet de Congrès internationaux périodiques dont nous avons donné communication à nos correspondants semble entrer dans une voie de réalisation effective prochaine. Nous renvoyons pour plus de détails à la Note qui se joint à ce numéro et qui va, par les soins de MM. Gauthier-Villars et fils, recevoir une assez grande publicité dans le monde mathématique.*[1884]

Il faut aussi en effet remarquer que Laisant ne ménage pas ses efforts pour faire progresser l'idée d'un congrès international dans la communauté française, et ce à l'intérieur des différents cercles savants auxquels il appartient.

Au Congrès de l'AFAS de Caen en août 1894, Laisant, président des sections 1 et 2, invite Cantor (c'est la seule intervention allemande avant 1914) et est l'auteur de la question suivante : « Étude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange d'idées plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes ». Laisant résume au passage la correspondance qu'il a reçue à ce sujet de MM. Vassilief, Lampe, Mansion, J. Boyer, Hermite, Poincaré, Peano, Maurice Cantor. S'en suivra une adhésion complète de l'AFAS au projet. Les deux premières sections « donnent en principe l'adhésion la plus complète au projet de création de Congrès mathématiques internationaux et se déclarent dès à présent disposées à apporter tout leur concours aux efforts qui sont ou seront faits dans cet ordre d'idée. »[1885]

Laisant poursuit sa campagne en faveur du projet à la Société philomathique de Paris. Lors de la séance du 12 janvier 1895, il rappelle l'aspect novateur de l'entreprise et les soutiens reçus de toute part : l'AFAS au Congrès de Caen et la Deutscher mathematiker Vereinigung de Cantor, à son Congrès de Vienne. Il signale également que Vassilief propose

[1884] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. 1, 1894, p. 257.

[1885] AFAS, Caen, 1894/1, p. 106. Remarquons que les mêmes sections « estiment que la publication de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, depuis le commencement de 1894, a rendu et est appelée à rendre encore de très grands services en ce qui concerne les rapports des mathématiciens entre eux ; expriment leur reconnaissance aux fondateurs, MM. Laisant et Lemoine, et se félicitent de voir que cette initiative est due à deux des membres de l'Association française pour l'avancement des sciences. » (p. 107).

de réunir, dès 1896, un certain nombre de mathématiciens à Kazan pour « jeter les bases d'une organisation définitive des Congrès internationaux. » [1886] Après la lecture par Bioche du rapport sur le « Projet de Congrès mathématique international » [1887] lors de la séance du 11 mai 1895, la Société met en place, sur proposition de Laisant, une commission composée d'André, Bioche, Humbert et Laisant. Bioche souligne que les principes d'un tel congrès « sont de nature à intéresser particulièrement la Société philomathique » et explique :

> *Les Congrès projetés ne seraient pas consacrés, comme la plupart des Congrès scientifiques, à l'exposé de résultats de détails obtenus dans des recherches spéciales, mais à une sorte d'inventaire des progrès de la science, dans l'intervalle d'un Congrès à l'autre. Les Congrès mathématiques internationaux auraient pour objet* […] *de provoquer des discussions qui ne pourraient manquer d'être intéressantes ; car ces discussions fourniraient l'occasion de faire ressortir des idées générales et de signaler les desiderata de la science.* [1888]

Après « la sympathie toute particulière à des projets de cette nature » témoignée par les membres de la SPP, Laisant demande « une adhésion de principe ». Il propose la résolution suivante, adoptée à l'unanimité : « La Société philomathique de Paris approuve le principe de l'organisation de Congrès internationaux, destinés à établir périodiquement un inventaire des progrès de la science, et appuiera cette organisation dans la mesure compatible avec ses statuts. »[1889]

L'idée de Vassilief est quant à elle reprise par le congrès de l'AFAS en 1895, à partir de la question posée par Laisant un an plus tôt. Ce dernier rappelle l'adhésion de Poincaré et d'Hermite à la suggestion du Russe et propose à l'Association de se prononcer. Les sections 1 et 2 réaffirment leurs positions de l'année précédente et « donnent dès à présent mandat à ceux de leurs membres qui pourraient se rendre à Kazan, en 1896, d'appuyer l'idée de tous leurs efforts ; se félicitent des précieuses adhésions obtenues depuis une année ; expriment particulièrement leur reconnaissance à M. le professeur Vassilief, pour les efforts qu'il a faits et qu'il ne cesse de poursuivre en vue de cette institution si utile; décident qu'elles prendront

[1886] *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, Sér. 8, 7, 1895-1896, p. 20.
[1887] "Projet de Congrès mathématique international", *Bulletin de la Société philomathique de Paris, compte rendu sommaire*, (8) VII, 1895-1896, p. 43-44.
[1888] Ibid. Il ajoute « Déjà, à l'occasion de l'Exposition universelle de 1867, des rapports relatifs aux progrès des diverses sciences ont été rédigés dans cet ordre d'idées, et la plupart d'entre eux constituent des œuvres extrêmement importantes au point de vue scientifique et philosophique, d'autres monographies analogues ont paru depuis. » Sur ces rapports voir Evelyne Barbin (dir), Jean-Luc Godet (dir.), Gerhardt Stenger (dir.), *1867, l'année de tous les Rapports : Les lettres et les sciences à la fin du Second Empire*, éditions du Temps, 2009.
[1889] Ibid., p. 44.

aux futurs Congrès la plus large part. »[1890] Laisant et Lemoine, on l'a vu, seront parmi les participants à la réunion de Kazan où progresse l'idée d'une collaboration internationale[1891].

Laisant saisit enfin le conseil de la Société mathématique de France sur la question alors que, comme on l'a vu, l'Association française pour l'avancement des Sciences, la Deutsche Mathematiker Vereinigung, la Société mathématique de New-York, la Société philomathique de Paris ont émis des vœux favorables. Dans le rapport que Bioche livre à la Société lors de la séance du 17 juillet 1895, ce dernier rappelle le programme avancé par Vassilief à Kazan et explique qu' « il a semblé au Conseil que la Société mathématique, après avoir prêté son concours à l'organisation du Répertoire, ne pouvait manquer d'aider aussi à celle des Congrès internationaux. » [1892] L'adhésion de principe et l'engagement d'une participation de la SMF sont adoptés à l'unanimité.

Laisant profite donc de sa position au sein des principales sociétés mathématiques françaises afin de mener une véritable campagne pour les congrès, mais il faut cependant attendre 1896 pour que la « réalisation effective » n'entre dans sa phase finale. On peut alors lire dans *L'Intermédiaire*, toujours de la part de la rédaction au sujet de la question 212 :

> *212. (La Rédaction)* – Projet de Congrès mathématiques internationaux. – *Nous sommes heureux de faire connaître à nos lecteurs que les négociations engagées depuis deux années viennent d'aboutir à un résultat important. Le principe d'un Congrès préparatoire, devant se tenir à Zurich en 1897, a été admis ; et les mathématiciens de Zurich, de leur côté, ont donné la plus cordiale adhésion à cette proposition. Beaucoup de savants et de Sociétés scientifiques ont adhéré déjà, et, en France, la Société mathématiques poursuit la réalisation du projet. Il n'est donc pas douteux que les Congrès mathématiques internationaux seront constitués, et l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, fidèle à son titre, se félicite d'y avoir contribué, tout simplement en faisant connaître au public mathématique les excellentes idées qui lui avaient été transmises à ce sujet.*[1893]

Dans le même tome, on peut aussi deviner les efforts entrepris Outre-Rhin par Cantor, parallèlement à ceux de Laisant en France :

> *212. (La Rédaction)* – Projet de Congrès mathématiques internationaux. – *pour continuer à mettre nos lecteurs au courant de l'état de la question, nous citerons ici un passage de la circulaire envoyée par leur bureau aux membres de la Société des mathématiciens allemands (Deutsche Mathematiker-Vereinigung), à propos du Congrès annuel qui aura lieu à Francfort-sur-le-Mein du 20 au 26 septembre prochain.*
> *« ... la séance, consacrée à l'étude des affaires, aura un intérêt particulier parce que, en réponse à des souhaits précédemment exprimés par la Société, nous*

[1890] AFAS, Bordeaux, 1895/1, p. 186.
[1891] Sur le rôle des commémorations dans une perspective internationaliste, voir [Rasmussen, 1995].
[1892] "Vie de la société", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 23, 1897, p. 197.
[1893] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. III, 1896, p. 161.

> *recevrons, de Zurich, l'invitation officielle à un Congrès international de Mathématiciens qui se tiendra dans cette ville en 1897, invitation que M. le professeur Dr Rudio (de Zurich) nous remettra en personne.*[1894]

L'année suivante, la rédaction publie la constitution du comité local d'organisation du Congrès international des Mathématiques des 9, 10 et 11 août 1897[1895]. Ce comité, auquel s'ajoutent de nombreuses personnalités scientifiques, dont le rapprochement avec le futur comité de patronage de *L'Enseignement mathématique* est frappant[1896], adresse l'appel suivant aux mathématiciens, appel publié dans les pages de *L'IM* :

> *M.*
>
> *Vous n'ignorez pas que l'idée d'un Congrès international des mathématiques a été, dans ces derniers temps surtout, l'objet de nombreuses délibérations de la part des savants intéressés à sa réalisation. Il leur a paru, en raison des excellents résultats obtenus dans d'autres domaines scientifiques, par une entente internationale, qu'il y aurait de très sérieux avantages à assurer l'exécution de ce projet.*
>
> *A la suite d'un échange de vues très actif, on tomba d'accord sur un premier point. C'est que la Suisse, par sa situation géographique centrale, par ses traditions et son expérience des Congrès internationaux, paraissait toute désignée pour tenter un premier essai de réunion des mathématiciens. On voulut bien ensuite choisir Zurich comme siège du Congrès.*
>
> *Les mathématiciens de Zurich ne se font aucune illusion sur les difficultés qu'ils auront à surmonter. Mais, dans l'intérêt même de cette entreprise, ils ont pensé ne pouvoir décliner les ouvertures si honorables qui leur ont été faites de tous côtés. Ils se décidèrent donc à prendre toutes les mesures préparatoires pour le futur Congrès et à contribuer à sa réussite dans la mesure de leurs forces. Ainsi, se constitua, avec le concours de mathématiciens d'autres nations, le comité d'organisation soussigné, chargé de REUNIR A ZÜRICH, EN 1897, LES MATHEMATICIENS DU MONDE ENTIER.*
>
> *Le congrès, auquel vous êtes cordialement priés d'assister, aura lieu à Zurich, les 9, 10 et 11 août 1897, dans les salles de l'École polytechnique fédérale. Le comité de manquera pas de vous communiquer, en temps opportun, le texte du programme arrêté en vous priant de lui envoyer vos adhésions. Mais, dès à présent, il est permis d'observer que les travaux scientifiques et les questions d'ordre administratif porteront sur des sujets d'intérêt général ou d'importance reconnue.*
>
> *Les Congrès scientifiques ont aussi ce précieux avantage de favoriser et d'entretenir les relations personnelles. Le Comité local ne manquera pas d'accorder toute sa sollicitude à cette partie de sa tâche et, dans ce but, il élaborera un modeste programme de fêtes et de réunions intimes.*
>
> *Puissent les espérances fondées sur ce premier Congrès se réaliser pleinement ! Puissent de nombreux participants contribuer par leur présence à*

[1894] Ibid., p. 203.

[1895] Outre F. Rudio et H. Minkowsky (alors professeur à l'École polytechnique de Zürich), on trouve Bleuler, Burkhardt, G. Dumas, J. Franel, G.-F. Geiser, A. Herzog, A. Hurwitz, J. Rebstein, F.-H. Weber.

[1896] Sont nommés L. Cremona (Rome), A.-C. Greenhill (Woolwich), G. - W. Hill (USA), F. Klein (Göttingen), A. Markoff (St- Petersburg), F. Mertens (Vienne), G. Mittag-Leffler (Stockholm), G. Oltramare (Genève), H. Poincaré (Paris) et K. Vondermühll (Bâle).

créer, entre collègues, non seulement des rapports scientifiques suivis, mais encore des relations cordiales basées sur une connaissance personnelle ! Puisse enfin notre Congrès servir à l'avancement et au progrès des Sciences mathématiques ![1897]

L'appel insiste donc sur les véritables relations que tisserait une telle réunion et souligne l'intérêt de cette nouvelle proximité entre les savants, s'éloignant ainsi de « l'inventaire des progrès » proposé dans la première occurrence de la question 212[1898]. L'invitation précédente est envoyée à de nombreux mathématiciens de divers pays, malgré les possibles omissions dont prévient le comité d'organisation, toujours par la voie de *L'Intermédiaire*[1899]. S'il ne fait pas parti des signataires de l'appel[1900], Laisant est signalé dans le compte rendu du Congrès de Zurich comme un des diffuseurs de cet appel[1901] .

Une fois le congrès achevé et son succès avéré. Lemoine peut revenir sur les fondements du projet et briser le secret qui régnait sur les correspondances Laisant-Lemoine-Cantor[1902] sur le sujet et préciser enfin le rôle joué par *L'IM* dans le projet. Ces réflexions font l'objet d'une note dans cette revue, dont nous avons conservé « L'ortografie simplifiée » :

*Après le succès complet qui a couronné, à la Réunion des 9,10 et 11 août de cête année, le premier essai de Congrès internationaus de Matématiciens à Zurich, la Rédaction de l'*Intermédiaire *considère come un devoir de faire savoir à ses lecteurs combien èle a de raisons personnèles de s'en réjouir puisque leur fondation se trouve être une conséquence de la création du Journal, lequel sera fier de cète importante démonstration de son utilité ; je veus donc, en quelques mots, raconter ici la façon dont ils sont nés. En 1893, mon ami Laisant et moi avions décidé de fonder l'*Intermédiaire des Mathématiciens *et de le faire paraitre à partir de janvier 1894. La nature même de la publication nous forçait à préparer les choses longtemps d'avance pour avoir dès le commencement, en questions et en réponses, de quoi l'alimenter et faire connaitre son esprit. Il fut entendu que je serais le rédacteur de service pendant le temps de préparation, c'est-à-dire que je centralisais tout ce qui se rapportait au prochain journal. Nous nous adressâmes d'abord à nos amis personnels en France et à l'étranger. Les premiers Géomètres qui s'intéressèrent à notre idée nous mirent en rapport avec d'autres et j'eus bientôt une correspondance active un peu de tous les côtés de l'Europe.*

M. G. Cantor m'écrivit à ce moment une lètre où il aprouvait notre essai en insistant sur l'intérêt qu'il y aurait à voir les raports des matématiciens des divers

---

[1897] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 33. Dans une circulaire de février 1897, le comité local traitera de l'ordre du jour des deux séances plénières et des questions d'ordre plus institutionnel (bibliographie, terminologie, organisation etc.) pour lesquelles il est demandé opinions et possibles rapporteurs ([Rudio, 1898], p. 11).

[1898] Sur l'idée de promouvoir la communication entre mathématiciens, caractéristique de la réunion de Zurich, voir [Letho, 1997], p. 10.

[1899] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 151.

[1900] On retrouve là encore parmi ces signataires des acteurs importants de *L'enseignement mathématique* : Cremona, Greenhill, Klein, Mittag-Leffler, Oltramare, Poincaré.

[1901] [Rudio, 1898], p. 8.

[1902] [Décaillot, 2008], p. 32-40.

pays se multiplier et indiquant particulièrement pour cela l'importance qu'auraient des Congrès internationaus à période de trois ou quatre ans, tenus, à tour de rôle, dans les principales capitales scientifiques du monde civilisé. Il développait un plan général de leur organisation en faisant remarquer que seule peut-être des différentes branches des Sciences, des Lètres, de l'Industrie et des arts, la Matématique n'avait point de tèles assises.

L'idée me sembla excellente, j'en parlai immédiatement à mon collègue Laisant qui y était tout gagné puisqu'èle avait, me dit-il, déjà germé autrefois dans son esprit. Je répondis donc à M. Cantor que le futur Journal serait tout disposé à aider au succès de l'entreprise et que ses rédacteurs lui étaient personnèlement acquis quand èle viendrait au jour, seulement que la jeunesse du Journal lui donnerait peu de poids en l'espèce et que de plus nous n'avions pas, nous, la haute autorité qui serait nécessaire pour être les protagonistes d'une chose aussi importante. En y réfléchissant cependant, nous aperçûmes rapidement la véritable difficulté qui risquait de retarder indéfiniment la réalisation de tels Congrès internationaus, malgré leur utilité ; c'est que, d'un côté, il faudrait qu'ils fussent proposés par une autorité incontestable du monde matématique ; de l'autre, que leur caractère international rendait si délicate l'initiative, qu'il était presque certain que persone parmi les matématiciens illustres n'en prendrait la responsabilité. Nous eûmes alors l'idée de créer un mouvement dont le moteur fût anonime et de profiter de la création du Journal pour l'obtenir en ajoutant à nos correspondances, en disant de tous côtés : « On *parle, dans le monde matématique de la réunion de Congrès internationaus, etc., etc. »* On*, ce fut d'abord* nous seuls*. Certainement le projet venait à son heure, car ceus auxquels nous en parlions en répandirent rapidement l'idée, s'en occupèrent de leur côté, restèrent avec nous en correspondance et, en 1894, nous eûmes déjà la satisfaction de voir presque en même temps la* Deutsche mathematiker Vereinigung*, à Vienne, charger son bureau de s'occuper de la question et la Section de Matématiques, à* l'Association française pour l'Avancement des Sciences*, à Caen, émètre un vœu y étant relatif. C'était la naissance ; je m'y arête puisque je n'ai pas à faire ici l'historique de la succession des éforts multipliés en tous pays et des bones volontés qui ont abouti au premier Congrès à Zurich, et ce que je viens de dire sufit au but de cète Note.*[1903]

LAISANT S'ENGAGE POUR LA PERENNITE DES CONGRES

Examinons à présent l'engagement de Laisant lors du premier congrès de 1897, engagement remarqué tout au long de la mise en place des grands sujets à traiter au congrès. Le compte rendu du congrès note qu'à côté des apports de Klein, G. Eneström, A. Gutzmer, Vassilief ou Weber : « Herr Laisant hatte sogar die große Freundlichkeit gehabt, einen ausführlichen, bis ins einzelne gehenden Organisationsplan zu entwerfen und dem Komite zur

[1903] "Note", *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 197-198. Note présentée comme réponse à la question 212 (*L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 200). Lemoine emploie ici quelques règles de l'ortografie simplifiée déjà utilisée pour la rédaction avec Laisant de leur traité d'arithmétique en 1895.

Verfugung zu stellen. »[1904]. Laisant bénéficie, comme Brioschi, Vassilief ou Weber, d'une invitation "spéciale" lui permettant de retrouver une grande partie du comité local la veille du début du congrès, dimanche 8 août, pour débattre une dernière fois de l'ordre du jour du congrès[1905]. Laisant est nommé vice-président de la section V : histoire et bibliographie (Cantor en est le président ; Schoute le secrétaire)[1906].

Les six « Résolutions votées le mercredi 11 août 1897 à l'assemblée générale du Congrès international des Mathématiciens siégeant à Zurich »[1907] sont quant à elles publiées en octobre dans l'IM. Ces décisions, prises lors de la dernière séance générale, concernent la périodicité des congrès et le choix de leur siège (résolution I), les débuts des travaux de préparation du prochain congrès (résolution II, III), la nomination de commissions permanentes spécifiques (résolution IV)[1908], le rendez-vous pris pour le congrès de 1900 à Paris (résolution V), l'institution d'une commission permanente chargée de préparer le prochain congrès (résolution VI).

Laisant explique pour *L'IM* la genèse de ces six résolutions et particulièrement de la dernière[1909]. Il rappelle que les cinq premières sont l'œuvre de F. Rudio et proviennent de son rapport « sur le but et l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens » rédigé au nom du comité d'organisation[1910]. Quel est alors l'origine de la sixième proposition ? Laisant explique « plusieurs membres du Congrès, notamment MM. Georg Cantor, Oltramare, Wassilief et moi, pensèrent que l'œuvre serait utilement complétée par la discussion des trois propositions ci-après, qui recueillirent en quelques heures de très nombreuses signatures »[1911]. C'est durant la discussion faisant suite à la communication de Eneström sur la question des données bibliographiques que Laisant intervient non seulement sur la classification adoptée par le répertoire mais discute également des trois propositions en question[1912].

[1904] [Rudio, 1898], p. 11.
[1905] [Rudio, 1898], p. 13.
[1906] [Rudio, 1898], p. 49.
[1907] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 223, présentée comme réponse à la question 212 (*L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 224).
[1908] Leur but est de traiter « certaines questions de nature internationale » et leur mandat court d'un congrès à l'autre.
[1909] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 245. Il renvoie également à l'article « remarquable » de Borel paru dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* du 15 octobre 1897 [Borel, 1897] pour la description du congrès passé.
[1910] « étude très sérieuse et très importante que l'on sera heureux de retrouver plus tard dans le Compte rendu officiel du Congrès ». (*L'IM*, t. IV, 1897, p. 245 et [Rudio, 198], p. 17 et 38-42). Cette étude est présentée aux congressistes à la première assemblée générale le 9 août.
[1911] Op.cit. 245. Sont signataires : A. Vassilief, CA. Laisant, G. Cantor, G. Oltramare, M. Cantor, P. H., Schoute, S. Dickstein, S. Günther, J. Cardinaal, J. H. Graf, D. Seliwanoff, J. S. Mackay ([Rudio, 1898], p. 52).
[1912] [Rudio, 1898], p. 49-51.

La première proposition suggère la mise ne place d'une « Commission préparatoire des rapports généraux » dont les cinq membres se chargeront du rapport sur les progrès des mathématiques dans divers pays (c'est-à-dire l'application du paragraphe *b* de l'article I du règlement du congrès).

La deuxième proposition concerne la commission permanente de bibliographie et de terminologie : « Elle aura pour mission de préparer pour le Congrès de 1900 un rapport général sur la Bibliographie mathématique, et sur toutes les tentatives qui pourraient être faites en vue de rendre la terminologie plus rationnelle, plus simple et plus uniforme »[1913].

La troisième proposition est formulée comme suit : « le Congrès émet le vœu qu'une Commission soit nommée en vue d'étudier les moyens de donner à l'institution des Congrès internationaux un caractère tout à fait permanent : d'avoir, par exemple, des archives, une bibliothèque, un bureau de correspondance, de préparer des éditions ou des réimpressions d'œuvres importantes, etc… »

Seule la deuxième proposition est débattue explicitement ce mardi 10 août par la section V où intervient Laisant, les deux autres devant être rédigées en français et en allemand puis être soumises au vote en assemblée générale[1914].

Laisant, tout comme Cantor ou Vassilief, se montre soucieux de donner aux nouveaux congrès une pérennité à la hauteur des difficultés rencontrées pour mettre en place la réunion de Zurich. Dernière cette dernière proposition se dessine les contours d'une véritable organisation internationale, stable et durable[1915].

Les trois propositions fusionnent et sont débattues à la séance plénière du 11 août[1916]. Une suspension de séance permet une discussion rapide : « C'est alors qu'un accord complet intervint entre le Bureau et MM. Cantor, Oltramare, Wassilief et moi »[1917]. Le bureau du Congrès de Zurich se meut en la commission permanente tant désirée[1918] : c'est l'aboutissement de la sixième résolution « d'une importance capitale, car elle assure un caractère de continuité féconde à ces assises périodiques de la Science mathématique »[1919].

1913 *L'IM*, t. IV, 1897, p. 246.
1914 [Rudio, 1898], p. 52.
1915 [Lehto, 1998], p. 10.
1916 [Rudio, 1898], p. 56.
1917 *L'IM*, t. IV, 1897, p. 246.
1918 Ibid. Curieusement et sous prétexte d'une manque de temps dédié au congrès de 1897. Il est laissé à la SMF le soin de nommer les futurs membres de cette commission. Laisser cette commission entre les mains des mathématiciens français, même s'ils organisent le congrès de 1900, c'est prendre le risque de froisser certaines susceptibilités et d'exacerber les tensions nationalistes.
1919 Ibid.

Cette commission est d'ailleurs immédiatement saisie par Laisant lui-même pour l'étude des propositions citées plus haut :

On vous a distribué le texte imprimé de trois propositions; elles ont été rédigées par MM. Vassilief, G. Cantor, Oltramare et par moi.

Nous avons, M. Vassilief et moi, eu l'honneur, d'être appelés tout à l'heure par le bureau, et nous nous sommes empressés d'adhérer cordialement à la résolution que vous venez de voter, et qui évitait toute discussion.

En conséquence, nous nous bornons à déposer officiellement entre les mains du bureau, transformé en commission permanente, le texte des propositions dont il s'agit. Ces propositions seront ainsi étudiées avec toute la maturité et tous les soins nécessaires.[1920]

Laisant prend une dernière fois la parole au Congrès de Zurich. Remerciant le comité d'organisation, il souligne le succès de cette rencontre et ajoute :

J'ai le droit aujourd'hui non pas de me glorifier mais de me féliciter d'avoir été, avec mon ami M. Emile Lemoine, l'un des ouvriers les plus modestes, dès la première heure, de cette œuvre qui sera utile et féconde, à la condition de conserver le caractère franchement international qu'elle doit avoir et qu'elle a eu à Zurich.

Tous ici, quelle que soit la branche de la science mathématique que nous cultivons de préférence, quelle que soit notre nationalité, nous avons créé entre nous des liens de sympathie d'autant plus solides qu'ils ont pour raison d'être la recherche de la vérité, et que la science doit surtout en profiter. [1921]

Le congrès passé, fier de ce résultat et confiant dans l'avenir, Laisant savoure finalement ce qu'il estime être un succès, toujours dans les pages de *L'Intermédiaire* :

je considère, du reste, avec tous ceux qui ont assisté au Congrès de Zurich, que ce premier essai, malgré sa trop courte durée, doit être regardé comme un véritable triomphe. Grâce au zèle du Comité d'organisation, grâce à l'esprit de bonne entente qui n'a cessé d'animer tous les membres du Congrès, ce dernier a conservé jusqu'au bout le caractère international et impersonnel qu'il devait avoir. On connait désormais le terrain sur lequel on opère, et ce terrain est admirablement préparé ; sans être prophète, il est permis d'affirmer que le Congrès de Paris, en 1900, aura un éclatant succès, et c'est à la Réunion de Zurich que ce succès sera dû pour la meilleure part.[1922]

Lemoine partage ces sentiments. À l'annonce de la parution des comptes rendus du premier congrès des mathématiciens, il écrit en 1898 dans la même revue : « *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, l'ouvrier de la première heure de l'édifice, très fier du succès acquis,

[1920] [Rudio, 1898], p. 58.

[1921] [Rudio, 1898], p. 59. Il ajoute « Veuillez m'excuser de m'être fait spontanément l'interprète des mathématiciens français. Ce rôle appartenait de droit à un autre, ayant pour cela l'autorité nécessaire, à mon ami M. Picard, membre de l'Institut. Mais M. Picard doit prendre un peu plus tard, au banquet final, la parole au nom de tous ses compatriotes, et l'on ne sera pas privé du plaisir de l'entendre. » Laisant dépose d'ailleurs une note rédigée par lui-même et Lemoine (absent à Zürich) sur les congrès internationaux et sur *L'Intermédiaire*. Sur l'optimisme de Picard quant à la poursuite du projet, voir [Letho, 1998], p. 10.

[1922] *L'IM*, t. IV, 1897, p. 246.

done rendez-vous à ceux de ses correspondants qu'il ne connaît pas encore personèlement et avec lesquels il serait heureus d'entrer en raports directs au Congrès de 1900, à Paris »[1923].

L'ESPRANTO AU CONGRES DE PARIS

La Société mathématique de France prend le relai pour l'organisation du congrès de Paris de 1900. Sont créées une commission des travaux présidée par Poincaré et une commission administrative présidée par Darboux[1924]. Ces deux commissions forment le comité d'organisation du congrès dont le bureau est celui de la SMF.

Le congrès est présidé par Poincaré, Hermite étant président d'honneur[1925]. Hermite absent, Laisant proposera en séance de clôture l'envoi d'un télégramme amical à ce dernier[1926]. À titre personnel, Laisant est secrétaire de la sixième section présidée par Cantor[1927]. En l'absence du prince Roland de Bonaparte, président de la section V, les sections V et VI fusionnent finalement pour traiter de « bibliographie et histoire. Enseignement et méthodes. » La présidence de l'ensemble est assurée par Cantor et le secrétariat est confié à d'Ocagne et Laisant. Hilbert ouvre les débats avec sa célèbre conférence « sur les problèmes futurs des Mathématiques » mais c'est au sujet de l'adoption d'une langue universelle que Laisant va principalement prendre part aux discussions. Le débat est en effet lancé dès la première session par Léau et sa « proposition d'un vœu pour l'adoption d'une langue scientifique universelle » qui propose de reconnaître la nécessité « d'adopter une langue scientifique et commerciale universelle »[1928] et de nommer cinq membres pour saisir les académies officielles à ce sujet. Pour sa part et outre une communication sur le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*[1929], Laisant présente dans le même ordre d'idée le premier fascicule d'un vocabulaire mathématique

[1923] *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. V, 1898, p. 175. Nous avons conservé l'orthographe originale (simplifiée) qui semble plus utilisée par Lemoine.
[1924] Appell et Picard sont vice-présidents de la première ; Haton de la Goupillière et Vicaire de la seconde. *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. V, 1898, p. 81.
[1925] Remarquons la sollicitude que porte Poincaré pour la revue *L'enseignement mathématique* nouvellement « créée par M. Laisant et qui commence à être bien connue du monde savant » ([Duporcq, 1902], p. 124) dans sa communication « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques ». Poincaré est épisodiquement l'auteur de 14 articles dans la revue (en 1899, 1904 et 1908), dont pour le premier numéro : « La logique et l'intuition dans la science mathématique et l'enseignement » (vol. 1, p. 157-162).
[1926] « Le congrès international des Mathématiques envoie l'expression de son admiration et de sa sympathie respectueuse au géomètre illustre qui honore son pays et le monde scientifique entier par son talent aussi bien que par son caractère. C'est unanimement que les Mathématiciens de toutes les nations forment pour M. Hermite les vœux les plus sincères de bonheur et de santé » ([Duporcq, 1902], p. 25).
[1927] [Duporcq, 1902], p. 2.
[1928] [Duporcq, 1902], p. 21.
[1929] Ibid. Laisant, "Sur l'état d'avancement des travaux du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques", *Bibliotheca Mathematica*, 1 , 3ème série, p. 246-249.

français-allemand et allemand-français rédigé par le mathématicien et historien des mathématiques allemand Félix Müller (1843-1923).

La question de l'arbitrage sur la langue internationale, en particulier d'un arbitrage savant, c'est-à-dire par des experts est le sujet de nombreuses communications dans les multiples congrès qui se tiennent à Paris à l'occasion de l'Exposition universelle. Léau propose en effet une brochure *La langue universelle est-elle possible* ?, véritable feuille de route pour l'adoption d'une langue auxiliaire partout dans le monde[1930].

Deux jours plus tard, le débat se poursuit. Après avoir lu la note de Ch. Méray « sur la langue internationale de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom de « Esperanto » », Laisant participe avec Vassilief, Couturat, Schroeder et Leau à la discussion sur les vœux formulés par ce dernier. Vassilief, convaincu par les préoccupations exprimées, n'est néanmoins pas optimiste quant à l'utilité d'une langue artificielle et préfère signaler le développement des traductions, des résumés rédigés dans une langue répandue et des initiatives telles que celle de F. Müller. Suite à la proposition du mathématicien russe, les congressistes adoptent le vœu suivant : « que les Académies et Sociétés savantes de tous les pays étudient les moyens propres à remédier aux maux qui proviennent de la variété croissante des langues employées dans la littérature scientifique »[1931]. La communication d'É. Maillet « sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en Mathématiques » est également commentée par Laisant.

Apparaissant dans la liste des membres du congrès suivant[1932], Laisant sera absent du Congrès d'Heidelberg en août 1904. Fehr souligne notamment cette absence lorsqu'il fait la promotion à cette occasion d'une enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens, organisée par la rédaction de *L'Enseignement mathématique*[1933]. Dans une volonté de partage des méthodes qui a présidé à la création de *L'IM* et de *L'EM*, cette enquête permettra de faire surgir « un certain nombre de renseignements et de conseils qui seront profitables non seulement aux jeunes mathématiciens, mais à l'enseignement mathématique d'une manière générale »[1934] et d'apporter une contribution à « la pédagogie scientifique ou expérimentale,

[1930] [Rasmussen, 1995], p. 588. L'ensemble de cette réflexion aboutira sur la création d'une Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale (Ibid., p. 588-592).
[1931] [Duporcq, 1902], p. 23.
[1932] [Krazer, 1905], p. 16.
[1933] « Je regrette que mon collègue et vénéré ami M. Laisant, l'un de ceux qui ont pris l'initiative de nos congrès, n'ait pu venir prendre part à nos séances ; il vous aurait exposé mieux que je ne puis le faire, les grandes lignes du travail auquel nous vous invitons à collaborer ». H. Fehr, "L'enquête de " *L'Enseignement mathématique* " sur la méthode de travail des mathématiciens", in [Krazer, 1905], p. 603-607.
[1934] [Krazer, 1905], p. 603.

telle qu'elle résulte des progrès récents de la psychologie expérimentale »[1935], dont *L'EM* s'est fait l'écho[1936].

LES QUESTIONS D'EDUCATION AU CONGRES DE ROME

En 1908, le Congrès international des mathématiciens se tient à Rome. Laisant fait de nouveau partie de la liste des participants[1937]. Il ne semble pas intervenir, mais les conférenciers célèbrent son *Initiation mathématique*. Décrivant la méthode intuitive utilisée en Suisse au cours du premier cycle de l'enseignement secondaire, Fehr reconnaît : « Une nouvelle impulsion vient d'être donnée à cet enseignement d'initiation, tout au moins dans les milieux où il n'avait pas encore obtenu son plein développement par M. Laisant, l'un des fondateurs de nos Congrès, grâce à son récent livre sur l'*Initiation mathématique* »[1938]

L'italien A. Conti s'exprime aussi sur le même ouvrage : « 'Il vaut bien mieux s'adresser à un élève ne sachant rien qu'à celui qui, ayant été mal enseigné, a pu être ainsi détourné de l'enseignement qu'il s'agit de lui donner' Così l'illustre Laisant fin dal 1899 nella sua interessantissima conferenza mai abbastanza apprezzata e i cui principi, con ottimo pensiero ed in forma magistrale, furono poi svolti dal Laisant stesso in quell'aureo libretto: Initiation Mathématique, che già meritò la fortuna e l'onore di due edizioni in francese e di una traduzione in italiano e che ebbe il plauso e l'incoraggiamento universale. »[1939]

Toujours au Congrès de Rome, la résolution suivante proposée par la section Philosophie, Histoire et Enseignement, sur l'initiative de D.E. Smith, est adoptée : « Le Congrès ayant reconnu l'importance d'un examen comparé des méthodes et des plans d'études de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations, confie à MM. Klein, Greenhill et Fehr, le mandat de constituer une Commission internationale qui étudiera ces questions et présentera un rapport d'ensemble au prochain Congrès. »[1940] Cette résolution reprend un débat initié au congrès de 1905 et prolongé dans les pages de

1935 Ibid., p. 607.

1936 Binet A., "La pédagogie scientifique", *L'Enseignement mathématique*, vol. 1, n°1, janv. 1899, p. 29-38. À ce sujet voir Mialaret Gaston, *La Pédagogie expérimentale*, PUF, 1984.

1937 [Castelnuoavo, 1909], Vol. 1, p. 15.

1938 Fehr, "Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse", in [Castelnuoavo, 1909], vol. III, p. 500-509. On y apprend que la 4ème édition de l'ouvrage en 1908 a été traduite la même année en allemand par Schicht, et en italien par G. Lazzeri. Il est aussi mentionné une traduction polonaise.

1939 A. Conti, " Sull'iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri elementari in italia", in [Castelnuoavo, 1909], vol. III, p. 519- 528.

1940 Voir Fehr H., "La commission internationale de l'enseignement mathématique de 1908 à 1912" in [Hobson, Love, 1913], vol. II, p. 591. Ce vœu fait suite à plusieurs rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays (Smith est l'auteur du rapport concernant les Etats-Unis). Voir l'enquête sur les réformes à accomplir, *L'enseignement mathématique*, 6, 1905, p. 469.

L'Enseignement mathématique au sujet des « Réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques »[1941]. Initialement centrée autour de l'enseignement supérieur, la réflexion s'élargit à l'enseignement secondaire suite aux interventions de Borel, Loria ou Smith dans la même revue en 1905[1942].

Après le congrès de 1908, le comité central présidé par Klein avec Greenhill pour vice-président et Fehr pour secrétaire général rédige un rapport préliminaire en septembre 1908 à Cologne où est détaillée l'organisation de la commission. Les délégués la constituant proviennent de pays ayant envoyé en moyenne deux de leurs mathématiciens à au moins deux congrès internationaux. Certains pays (Allemagne, Italie, Suisse, France…) peuvent compter une délégation de deux émissaires, mais chaque pays ne détient qu'une seule voix (en plus de ces pays participants[1943], le comité interpelle des pays associés[1944] pouvant être représentés par un délégué, sans droit de vote). Pendant la période 1908-1912, on trouve ainsi pour la France : A. de Saint-Germain, Laisant et Bourlet. Ces délégués mettent en place des sous-commissions nationales pour la rédaction de rapports sur l'état de l'enseignement mathématique de leur pays respectifs, travail préalable aux possibles améliorations sur lesquelles se penchera la commission[1945].

En 1912, le congrès de tient à Cambridge sous l'égide de la London Mathematical Society et Laisant en est de nouveau membre[1946]. D. E. Smith y présente l'enquête menée par une sous-commission de l'International Commission on Mathematical Instruction : « In the year 1911 the Central Committee appointed a subcommittee known as " Subcommittee A " charged with the duty of investigating the role of intuition in the teaching of secondary mathematics. »[1947] Smith présente le rapport relatif au questionnaire envoyé aux professeurs d'Autriche, d'Angleterre, de France[1948], d'Allemagne, de Suisse et des USA pour débuter l'étude du sujet. Il est cependant conscient de l'intérêt qu'aurait une étude similaire pour les écoles « primaires » des différents pays et explique : « intuition and experience play a very important part in the first stages of a child's education in general, and with respect to

[1941] *L'enseignement des mathématiques*, 7, 1905, p. 382-383.
[1942] [Furinghetti, 2003], p. 37-39 et Coray, Hopdgson, "Introduction", [Corray, 2003], p. 12.
[1943] Allemagne (3 délégués), Iles britanniques (3), Autriche (3), Italie (3), Belgique (1), Japon (1), Danemark (1), Norvège (1), Espagne (1), Portugal (1), États-Unis d'Amérique (3), Roumanie (1), France (3), Russie (3), Grèce (1), Suède (1), Hollande (1), Suisse (3) et Hongrie (3).
[1944] Argentine (Rép.), Chili, Mexique, Australie, Chine, Pérou, Brésil, Colonie du Cap, Serbie, Bulgarie, Egypte, Turquie, Canada, Indes anglaises.
[1945] Fulvia Furinghetti, "Mathematics education and ICMI in the proceedings of the international congress of mathematicians", *Revista Brasileira de História da Matemática*, Especial no 1 dezembro 2007.
[1946] Une adresse de résidence durant le congrès lui est assignée ([Hobson, Love, 1913], vol. I, p. 19).
[1947] Smith D. E.., "Intuition and experiment in mathematical teachnig" in [Hobson, Love, 1913], vol. II, p. 611-627.
[1948] Bioche pour la France et Fehr pour la Suisse pour ne citer qu'eux.

mathematics in particular. M. Laisant has brought this important question to the attention of his countrymen, and Lietz and other well-known educators have done the same in other countries. »[1949]

Au cours de la discussion qui suit, Laisant regrette en effet que l'enquête ne porte que sur l'enseignement « moyen » et non sur l'étape d'initiation : « la question me semble mal posée, ou pour mieux dire posée d'une façon incomplète, ce qui, par cela même, la rend insoluble. Le rôle de l'intuition et de l'expérience dans l'éducation en général, dans l'enseignement mathématique notamment, est l'un des problèmes capitaux de la pédagogie. »[1950] Il explique que, suivant que l'enfant ait reçu ou non une initiation basée sur l'expérimentation et le développement de l'intuition, l'introduction de cette méthode plus tardivement peut apparaître soit naturelle ou bien totalement secondaire, voire néfaste[1951].

L'*ANNUAIRE DES MATHEMATICIENS* : « QU'EST-CE QU'UN MATHEMATICIEN ? »

C.-A. Laisant présente l'*Annuaire des mathématiciens* comme « le complément logique et nécessaire de l'œuvre générale qui se poursuit depuis plusieurs années sous des formes diverses, et dont les manifestations s'appellent : le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques ; L'Intermédiaire des Mathématiciens ; L'Enseignement Mathématique* ; les *Congrès internationaux de mathématiciens ;* la *Revue semestrielle des publications mathématiques*, *l'Encyclopédie des sciences mathématiques* pour nous en tenir à quelques exemples. »[1952] En effet, face à l'accroissement vertigineux de la production mathématique au cours de la deuxième moitié du XIX^{e} siècle[1953], la question de la bibliographie et des relations à établir entre mathématiciens est devenue cruciale, « la correspondance entre mathématiciens est maintenant chose essentielle. »[1954]

Parmi les différentes expressions du mouvement signalé par Laisant et dont lui-même est un acteur important, nous avons choisi de préciser l'élaboration de l'annuaire en question. Parce qu'il est le personnage central de cette entreprise qui finalement reste un projet isolé et partiellement abandonné, parce que le projet illustre certaines questions quant à la

---

1949 Op.cit., p. 612.
1950 Op.cit., p. 628.
1951 « Si chez cet enfant, depuis le début, on a fait appel à l'intuition et à l'expérience, la continuation sera toute naturelle » (Ibid.).
1952 [Laisant, 1901], p. III. Sur l'*Encyclopédie* de Klein, on pourra consulter Hélène Gispert, "Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Félix Klein et Jules Molk", *Historia Mathematica*, Volume 26, Issue 4, 1999, p.344-360.
1953 Voir [Rollet, Nabonnand, 2002], p. 11-12.
1954 Ibid.

composition de la communauté mathématique, il nous a semblé intéressant de nous attarder sur ce plan pharaonique de lister tous les mathématiciens de la planète.

Remarques sur la participation de Laisant au Répertoire bibliographique

Pour faire face à l'augmentation vertigineuse de la production mathématique, la Société mathématique de France, par le biais d'une lettre circulaire, lance un « projet de répertoire bibliographique » en 1885. Le recensement des travaux débute et en 1889 est publié *l'Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*. L'Exposition universelle de Paris de la même année donne l'occasion d'organiser le premier Congrès international de bibliographie mathématique. Il est alors décidé que le projet quitte le giron de la SMF et soit piloté par une commission permanente présidée par Poincaré. Laisant est absent de cette première commission où l'on retrouve notamment Humbert, d'Ocagne ou Henry parmi les membres français. Cependant, il évoque les avantages de cette « sorte d'inventaire général des travaux mathématiques »[1955] dans sa communication de 1893 avec Lemoine. Il est l'auteur avec George Humbert d'une communication en mars 1894 « sur l'état d'avancement des travaux du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques »[1956] au 32^{e} Congrès des sociétés savantes. Il constate que « plus la science mathématique étend ses conquêtes, et plus il devient indispensable de créer entre les travailleurs des différents pays des moyens d'entente et de correspondance » et souligne la nécessité d'adopter un « point de vue scientifique élevé, dominant de beaucoup toutes les questions d'amour propre individuel et national »[1957]. Quelques mois plus tard, il prolonge son propos avec l'« Exposé de l'état d'avancement des travaux du répertoire bibliographique de sciences mathématiques » pour l'AFAS[1958]. Si Laisant y souligne les participations de Brocard, de Mackay, de Guccia, d'Ocagne uant à lui « rend hommage à l'activité déployée par M. Laisant à propos de la publication de l'ouvrage. »[1959] Laisant prend en effet la succession de d'Ocagne comme secrétaire de la commission permanente et fournira en 1900 un rapport « Sur l'état

[1955] [Laisant, Lemoine, 1893].
[1956] Laisant C.-A., Humbert G., « Sur l'état d'avancement des travaux du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques », Extrait du *Journal officiel* du 31 mars 1894, imprimerie des journaux officiels, Paris, 1894. Marie Georges Humbert (1859-1921) est admis à l'École normale et à l'École polytechnique et choisi en 1877 cette dernière. Inspecteur général des mines, il sera répétiteur auxiliaire (1884) puis professeur d'analyse dans ce même établissement en 1895, date à laquelle Laisant y devient répétiteur. En 1912 il est nommé professeur au Collège de France et est élu à l'Académie des sciences en 1901.
[1957] Ibid.
[1958] AFAS, Caen, 1894/1, p. 95.
[1959] Ibid.

d'avancement du répertoire bibliographique des sciences mathématiques »[1960]. Lors du Congrès international des mathématiciens de 1900, il présente également lors de la seconde séance du jeudi 9 août, les avancées du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*[1961].

*L'*Annuaire *comme preuve de l'entente scientifique internationale*

L'idée d'un annuaire regroupant des données sur l'ensemble des mathématiciens dans le monde est reprise par Rudio à l'occasion du premier Congrès international des mathématiciens en 1897. Dans son rapport « Sur le but et l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens »[1962], il avance que « certaines questions auxquelles, faute d'accord, on n'a pas encore songé à s'attaquer, pourraient être résolues à la suite d'une entente internationale [...] je me contenterais de citer, sans prendre position : la publication, si possible annuelle, d'un livre d'adresses des mathématiciens du monde entier avec l'indication des branches qu'ils cultivent spécialement »[1963] Le projet semble piétiner lorsque Laisant intervient deux ans plus tard. En 1899, il vient de lancer avec H. Fehr sa revue *L'Enseignement mathématique*, éditée en France chez Carré et Naud. Avec ces derniers, il voit dans le futur Congrès de Paris une bonne occasion de concrétiser le projet. L'éditeur envoie les circulaires pour recueillir les renseignements nécessaires et Laisant confectionne le plan général de l'œuvre. Il s'adjoint les services d'un jeune mathématicien, Adolphe Buhl, ayant l'année même obtenu son doctorat et qui remplira les fonctions de secrétaire de l'annuaire.

Né en 1878 à Paris d'un père typographe, la maladie qui accable Adolphe Buhl (1878-1949) à ses quatorze ans l'oblige à un parcours d'autodidacte[1964]. Soutenu par Appell, Laisant, Lévy et Mannheim, il obtient les deux premiers certificats de la licence en 1899, le certificat de mécanique céleste en 1900 et soutient sa thèse « sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe »[1965] en 1901 (la seconde thèse porte sur « La théorie de Delaunay sur le mouvement de la lune »). C'est l'occasion pour Laisant de

[1960] "Sur l'état d'avancement du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques", *Bibliothèque mathématique*, (3), 1, 1900, p. 246-249. Sur le contenu de ce rapport, nous renvoyons à [Rollet, Nabonnand, 2002].
[1961] *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, Gauthier-Villars, Paris, 1902, p. 22.
[1962] [Rudio, 1898], p. 38-42.
[1963] Ibid., p. 40.
[1964] Fehr H., "nécrologie", *L'enseignement mathématique*, 39, 1942-1950, p. 7-8.
[1965] Le jury est composé d'Appel, Darboux et Poincaré. Dans son rapport, Appell note que « le travail de M. Bühl fait faire un progrès important à la théorie des équations différentielles ordinaires » (cité dans [Gispert, 1991], p. 381).

souligner les qualités de Buhl dans les pages de *L'enseignement mathématique* : « La possession profonde du sujet dont parlait le candidat, sa lucidité, ses vues ingénieuses et sa puissance d'invention ont vivement impressionné l'assistance »[1966]. Remarquant les encouragements que le candidat a reçus de Darboux, Laisant est impressionné par le parcours de Buhl : « La science française est en droit d'attendre de lui de beaux travaux, qu'il ne manquera pas de produire. De son côté, elle se doit à elle-même de le placer dans une situation qui lui permette de donner essor à ses étonnantes aptitudes scientifiques, sans en être détourné par les difficultés et les obstacles de la lutte pour l'existence. »[1967] Ses travaux portent sur l'analyse, la théorie des fonctions ou l'étude des surfaces à travers un grand nombre de publications (une trentaine dans les pages du *Bulletin* de la SMF entre 1910 et 1932 par exemple), et des ouvrages comme ses *Nouveaux éléments d'analyse*[1968]*,* ses *Structures analytiques et théories physiques* (1932), ses *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis* (1938), *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie* (1911) écrit en collaboration avec H. Laurent, ou *La géométrie non euclidienne* (1928) avec Paul Barbarin, ces deux derniers collaborateurs ayant également travaillé avec Laisant. En 1903, il enseigne à l'Université de Montpellier puis à celle de Toulouse où il obtient la chaire de mécanique rationnelle (1909) puis celle de calcul différentiel et intégral qu'il occupe jusqu'à sa mort. À partir de l'année 1903, il est le collaborateur officiel de la rédaction de *L'enseignement mathématique* dont il prend la direction au côté de Fehr à la mort de Laisant en 1920 (il est également secrétaire de publication auprès des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*).

L'Enseignement mathématique tout juste créé sert par ailleurs de support à l'opération. En novembre 1899, Laisant présente le projet à ses lecteurs[1969]. Les demandes de renseignements trouvent de nombreuses réponses venant de pays divers, à l'exception notable de la Grande-Bretagne et de la France. Le directeur de la revue ne manque pas de regretter ce silence

> *Il est assez singulier de constater qu'une œuvre modeste, mais utile, entreprise par des éditeurs français, qui doit être publiée en langue française, rencontre une sorte d'indifférence dans le pays où elle devrait trouver le plus d'adhésions. Il faut peut-être chercher le secret de cette torpeur dans l'extrême centralisation de*

[1966] Voir Laisant, "Chronique. Chapitre : thèse de doctorat. M. Buhl", *L'enseignement mathématique*, vol.3, 1901, p. 298-299.
[1967] Ibid.
[1968] *Nouveaux éléments d'analyse*, Gauthiers-Villars, 1937-1943.
[1969] "L'annuaire des mathématiciens", *L'enseignement mathématique*, vol. 1, n°6, 15 nov. 1899, p. 463-464. Une chronique parue en 1901 (Volume 3, p. 56) annonce elle aussi « la publication projetée d'un Annuaire des mathématiciens, si désirée par les savants du monde entier », publié par les soins de l'*EM.*

> *l'enseignement français. Consciencieux et distingués, les professeurs ont trop souvent une tendance à se réduire au rôle de fonctionnaires, et à perdre la notion de leur valeur individuelle. Combien de fois n'avons-nous pas entendu quelques-uns d'entre eux, et non des moindres, dire : Je ne suis qu'un simple professeur; je ne suis pas un mathématicien.*[1970]

Car si le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* pose, avec sa classification méthodique, la question de la représentation de la science mathématique par ses propres acteurs[1971], l'*Annuaire* soulève le problème du statut du mathématicien comme l'explique Laisant : « Une difficulté consistait dans la définition du terme « mathématicien » ; il a semblé qu'il y avait lieu de lui donner une acception aussi large que possible »[1972]. Dans sa préface à l'ouvrage, il reprend : « Une première difficulté se présentait. Nous nous proposions de donner une liste de mathématiciens ; qu'est-ce qu'un mathématicien ? Où arrêter une telle liste, qui pourrait au besoin s'étendre du plus illustre de nos savants jusqu'à l'enfant qui balbutie à l'école les premiers éléments de la science ? »[1973] La réponse donnée par Laisant illustre son idée de la communauté mathématique (internationale). Il donne au terme une acception très large, incluant professionnels et amateurs[1974], savants renommés et passionnés méconnus, chercheurs ou simples enseignants. Cette conception ouverte et libérale de la communauté mathématique, que l'on retrouve également dans les congrès de l'AFAS, est une nouvelle fois défendue par Laisant et elle peut être rapprochée de sa volonté de promouvoir une véritable culture mathématique, comme nous l'avons déjà souligné.

L'*Annuaire* vise finalement au recensement des membres de sociétés mathématiques et plus généralement des hommes traitant de mathématiques (y compris d'astronomie) au sein d'une société scientifique, les auteurs de travaux au sein d'ouvrages ou de recueils et enfin les personnes qui enseignent spécialement les mathématiques ou une de ses branches, à tout niveau de l'enseignement.

Le résultat est une liste de 6000 mathématiciens accompagnés de leurs adresses, leurs qualifications les plus importantes et les principales sociétés auquel ils appartiennent, résultat dont se satisfait Laisant mais qui appelle naturellement des améliorations quantitatives et qualitatives sur la précision des renseignements. Remarquons que l'idée d'une communauté véritablement internationale est illustrée par le fait que les noms soient classés par ordre alphabétique, sans distinction de nationalité.

[1970] Ibid., p. 464.
[1971] Voir [Rollet, Nabonnand, 2002].
[1972] "L'annuaire des mathématiciens", *L'enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 464.
[1973] [Laisant, 1901], *L'annuaire des mathématiciens*, C. Naud, Paris, 1901-1902, p. IV.
[1974] Nous renvoyons de nouveau au travail de P. Romera sur ce terme ([Romera-Lebret, 2009]).

La deuxième partie de l'ouvrage recense les sociétés de mathématiques ou, plus généralement, où l'on traite de mathématiques. La troisième dresse de la même manière la liste des périodiques mathématiques. La liste (arbitraire) des mathématiciens décédés en 1900 et 1901 constitue la quatrième partie. L'ouvrage est complété des notices scientifiques voulues par Laisant et rédigées sur des sujets très divers par Appell, G. Loria, Hilbert, Klein, Méray, Petersen, Schoute ou Greenhill parmi lesquelles nous soulignons celle de Méray, « La langue internationale Esperanto et la littérature scientifique », comme une nouvelle preuve de la ferveur espérantiste des deux hommes.

D. E. Smith rappelle, dans une chronique consacrée à l'*Annuaire des Mathématiciens,* l'origine du projet et la contribution décisive de Laisant. Smith loue l'esprit dans lequel a été rédigé l'ouvrage[1975] : « Such a publication puts scientific workers more closely in touch with one another, and makes the mathematical world seem more real. It places at the student's hand a mass of information that it has heretofore been exceedingly difficult to reach, information especially welcome to those having editorial duties to perform. »[1976] Mais il regrette cependant les nombreuses erreurs, les inexactitudes ou les lacunes présentes dans la première édition de l'*Annuaire* et reste très critique tant sur la précision du contenu, qu'il juge avoir été édifié trop à la hâte, que sur la pertinence des notices qui l'accompagnent.

L'entreprise semble effectivement être un échec, alors que Laisant prévoit plusieurs volumes réactualisés fréquemment et invite les mathématiciens à se manifester pour permettre la poursuite du projet par lui-même ou d'autres.

IV.4.3. *L'Enseignement mathématique*

En janvier 1898, Henri Fehr soumet l'idée d'un journal sur l'enseignement mathématique à Laisant qui lui répond favorablement. Ainsi sera fondé en 1899 *L'Enseignement mathématique*, seule revue mathématique de l'époque à caractère explicitement international. Cet organe de réflexion d'importance de par les origines, le nombre de ses intervenants, sera le futur support d'une communauté internationale autour de la pédagogie des mathématiques et il constitue une publication toujours active plus d'un siècle après sa création.

[1975] Que l'on peut considérer comme précurseur du *World Directory of mathematicians* publié en 1985 et 1995 par l'ICHM (international commission of history of mathematics).
[1976] David Eugène Smith, "Shorter Notices, l'*Annuaire des Mathématiciens*", *Bulletin of the American Mathematical Society*, janv. 1903, p. 218-219.

Les fondateurs de *L'Enseignement mathématique* (*EM*) partagent nombre de points communs, à commencer par leur intérêt pour la théorie naissante des vecteurs et leur participation active dans divers réseaux de leurs pays respectifs. Leur participation personnelle à *L'EM* souligne une forme de complémentarité. Fehr participe à la réflexion pédagogique et didactique du journal. Laisant, présent également dans ce mouvement, apporte des articles de mathématique pure aux contenus variés mais sans volonté d'y rattacher systématiquement leurs enseignements. Cette différence peut s'expliquer par les parcours progressivement divergents des deux hommes.

Henri Fehr est né à Zurich le 2 février 1870. Après des études en Suisse, puis en France, il obtient le grade de docteur pour ses travaux sur l'application à la géométrie différentielle de la théorie vectorielle de Grassmann. Il participera à la création en 1910 de la Société mathématique suisse[1977] dont il sera président, de la Fondation pour l'avancement des sciences mathématiques et d'une publication : le *Commentarii mathematici helvetici* (1929). Nous avons déjà évoqué son rôle dans la fondation, puis la gestion de l'ICMI depuis le congrès de 1908, implication continue jusqu'à son rôle de président honoraire du comité exécutif de la "seconde" ICMI avant qu'il ne meure à Genève en 1954.[1978]

En accord avec la ligne éditoriale du journal créé, Fehr sera l'auteur dans *L'Enseignement mathématique* d'articles traitant d'innovations dans les programmes d'instruction des mathématiques, des interconnexions entre mathématiques pures et appliquées d'un point de vue pédagogique, de questions sur la formation des enseignants et plus globalement des innovations en enseignement des mathématiques.

Charles-Ange Laisant participe quant à lui à *L'Enseignement mathématique* par des articles aux thèmes sensiblement différents. Le fondateur français est à l'origine de 26 articles principaux, de 17 bibliographies et enfin de 13 chroniques, ou articles de la rubrique "Mélange". Il est important de remarquer la teneur de la première catégorie d'écrit. Les articles de C.-A. Laisant parus dans *L'EM* sont essentiellement dédiés aux mathématiques par leurs contenus. Il y traite de mécanique rationnelle et appliquée, de terminologie, de transformation des coordonnées barycentriques, d'interprétation géométrique des dérivées partielles, de somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique, de bissectrices d'un angle, de système de deux triangles ou de deux tétraèdres, d'arithmétique, de vecteur, des suites fibonaciennes ou encore de triangles héroniens. Les autres articles sont

---

[1977] *L'Enseignement mathématique*, 12, 1911, p. 522-528

[1978] [Furinghetti, 2003], p. 25-26. Voir "Henri Fehr (1870-1954). Sa vie son œuvre", *L'Enseignement mathématique*, 2ème série, vol. 1, 1955, p. 4-10.

consacrés à des réflexions sur les instructions officielles et les mutations dans l'enseignement (« Le choix des sujets de composition », « Réflexion sur le premier enseignement de la géométrie », « Une exhumation géométrique », « À propos d'un discours », « Les nouveaux programmes de l'École polytechnique de Paris »). L'article « Qu'est-ce qu'un vecteur ? » offre une synthèse des réflexions de son auteur sur la géométrie vectorielle d'Hamilton ou de Grassmann. L'article remarquable « Le rôle social de la science » se particularise par la teneur philosophique et revendicatrice de son propos dans la ligne d'autres écrits de l'auteur comme *L'Éducation de demain*. Enfin, Laisant publie plusieurs hommages à ses proches : Mannheim, Méray, Lemoine, Arnoux mais aussi Alfred Cornu.

LES DEBUTS DE *L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE* A TRAVERS LA CORRESPONDANCE DE LAISANT A FEHR[1979]

Dans une lettre datée du 20 janvier 1898 portant l'en-tête de *L'Intermédiaire des mathématiciens*, Laisant répond à Fehr qui lui a écrit au sujet de son ouvrage récemment paru *La Mathématique. Philosophie-Enseignement* dont la troisième partie traite de questions d'enseignement des mathématiques. Laisant s'y montre réservé vis-à-vis d'une revue qui se limiterait à la France et plaide pour une audience internationale. Il est conscient cependant de l'actualité des questions de l'enseignement des mathématiques dans plusieurs pays. Il propose donc de collaborer au projet, brosse les grands traits de cette revue (exclusivité des mathématiques, limitation du propos à l'enseignement secondaire, périodicité) et il appelle son ami Fehr à établir les relations nécessaires avec des mathématiciens des différents pays, en accord avec le caractère international de la question.

Mon cher ami,

> *je vous remercie cordialement pour tout ce que vous me dites d'aimable au sujet de mon modeste bouquin. Mais le but de ma lettre est surtout de répondre au passage de la vôtre sous lequel vous indiquiez un projet qui est fort intéressant, mais bien difficile à mettre en exécution en France. Une Revue de l'enseignement mathématique rendrait les plus grands services ; mais, en essayant de la publier, on se heurterait à un obstacle formidable, et voici pourquoi ; les professeurs en général sont soumis à cette sorte de discipline intellectuel que nous vaut la*

[1979] Correspondance conservée à la bibliothèque municipale de Genève. Le fond Fehr n'a pas encore été inventorié. Les papiers conservés sont des documents biographiques (documents scolaires et militaires, passeports, diplômes, actes de famille etc.), des agendas, des correspondances professionnelles, relatives notamment à la revue *L'enseignement mathématique*, des lettres d'amis, des faire-part de mariages et naissances, des récits de courses à la montagne, des dossiers sur un voyage au Canada, des albums concernant Le Genepi (amis de la montagne), des photos de groupes, deux médailles de l'Université, des documents francs-maçons, de la documentation biographique et un lot de ses publications. Ces documents représentent deux mètres linéaires. Ils sont conservés dans huit cartons d'archives, un classeur, deux grands albums, deux petites liasses, un lot d'enveloppes et de dossiers.

centralisation excessive, et empêchés de toute initiative. Beaucoup d'entre eux, en apportant leur concours à la Revue dont il s'agit, risqueraient de se compromettre ; et on ne peut raisonnablement demander aux hommes de sacrifier leur situation à leurs idées. Si bien que chez nous, c'est l'excès même du mal qui nous interdit d'appliquer le remède.

Il faut dire aussi que la question de la réforme de l'enseignement n'est pas exclusive à la France comme vous le faites justement remarquer, et qu'il importe d'en suivre attentivement les manifestations partout où elles se produisent.

Il résulte de tout cela que la publication périodique dont il s'agit impossible ou très difficile en France, serait facile ailleurs ; que si au lieu d'être française, elle était internationale, son succès serait certain, même en France. Et voici où j'en viens.

Il n'y a pas une ville internationale mieux placée que Genève pour la rédaction d'un tel programme. Et si vous voulez la prendre en mains, je vous seconderai pour ma part de toutes mes forces. Pensez y donc ; parlez de la question à M. Oltramare, à Cailler ; mettez vous en rapport avec les éditeurs de Genève ; et établissez une correspondance pour vous assurer le concours, au moins moral, d'un certain nombre de mathématiciens et de professeurs dans les divers pays. Dans cet ordre d'idées, je vous laisse (?) dès à présent mon nom, et je vous apporterai ma collaboration dans la limite du possible, et le concours d'une active propagande.

A mon avis, il faudrait :

1° S'en tenir à l'enseignement mathématique, qui suffit bien, et laisser de côté les sciences physiques et naturelles ;

2° Se borner à l'enseignement primaire et à l'enseignement secondaire (ou moyen) et toucher très rarement à l'enseignement supérieur, où il n'y a pour ainsi dire pas de règles pédagogiques possibles, la seule initiative du professeur pouvant s'exercer lorsqu'il s'agit de faire progresser les parties élevées de la Science ;

3° Ne pas annoncer d'avance une périodicité par le mot "mensuel" si par exemple, le succès arrivant, il y aurait lieu de paraître deux fois par mois, il ne faudrait pas se lier les mains.

Une fois ces préliminaires accomplis, vous enverriez une circulaire, indiquant le programme général de la publication, à la plupart des professeurs, directeurs d'écoles et mathématiciens des divers pays, et ma conviction est que vous trouveriez rapidement le nombre d'abonnés utile pour faire vivre largement le nouveau périodique.

J'ai parlé de votre idée à quelques amis dans le monde de l'enseignement, et je suis un peu leur interprète. Mais si je n'ai pas eu l'occasion d'en entretenir M. Gauthier-Villars. Je le ferai un de ces jours. Peut-être accepterait-il de se faire l'éditeur d'une telle revue internationale, ou au moins de joindre son nom à celui de votre éditeur de Genève. Tout cela pourra s'étudier ultérieurement.

Pensez à mes propositions. Vous êtes jeune, et mieux à même que personne (et surtout que moi) de les mener à bien.

Je vous serre la main de tout cœur, en vous priant de vouloir bien être mon interprète auprès de nos amis de Genève.

Bien à vous

C.A. Laisant

Ci-joint un type de titre (voir le Bulletin de Darboux par exemple). Il faudrait consacre l'année 98 à la préparation et partir au 1er janvier 1899

Revue Internationale

de l'enseignement Mathématique
(paraissant le 1^er^ de chaque mois)
dirigée par mm.
Oltramare, ……
Cailler, ………… Fehr, …………………..
Avec la collaboration de mm.
……………………………
C.A. Laisant (Paris)……….
…………………………

Comme pour *L'Intermath*, Laisant, si il n'est pas à l'origine du projet, sait, de part son expérience, mobiliser, mettre en place un plan, mener une campagne pour ce genre de publication. S'il paraît sceptique au début de sa lettre, il ne s'interdit pas de souhaiter un possible succès et insiste sur les liens internationaux à tisser pour une telle entreprise. Remarquons que, dans cette lettre, il ne se place que dans la future liste des collaborateurs. Le calendrier exige un an de préparation, il sera respecté et la revue (qui restera mensuelle) paraîtra dès 1899.

Fehr rajoute dans la marge la date de sa réponse dont le contenu nous est inconnu : le 1er février. Quoi qu'il en soit, les positions de Laisant semblent évoluer ; ses réserves diminuent et son implication se précise, comme nous le devinons dans la lettre datée du 24 février 1898,

Mon cher ami,
J'ai eu l'occasion de causer ces jours derniers de votre projet avec m. Olivier, directeur de la revue Gle des sciences qui vous connaît et vous apprécie beaucoup. L'idée lui a paru très séduisante : mais il croit qu'une revue internationale comme celle que nous projetons devrait pour réussir avoir une double direction : à Genève et à Paris avec le concours de deux éditeurs, m. Georg par exemple, et un autre à Paris. Il en a parlé à mm Carré et Naud, que l'idée paraît séduire aussi. Parlez en de votre côté à m. Georg ; je sais qu'il est en rapport avec mm. Carré et Naud, et si ces MM. pouvaient d'accord avec vous et moi entamer entre eux des pourparlers, cela ferait avancer la question.
Sur l'un des points importants dont vous me parliez, m. Olivier a une opinion très nette ; il estime que la Revue doit être publiée en français, se fondant sur ce fait que tous les mathématiciens étrangers lisent le français même quand ils ne le parlent pas, tandis que beaucoup de Français ignorent absolument les uns l'allemand, d'autres l'anglais, et quelques uns toute langue étrangère.
Réfléchissez de votre côté, et faites moi part de vos réflexions et de vos démarches. Commencez à grouper dès maintenant les titres des recueils périodiques des diverses nations poursuivant un but analogue. Je vous signale dès maintenant le Bolletino della associazione "mathesis" fra gl'insergnanti di matematica sulle scuale medie[1980]. Président du comité : M. R. Bettazzi, Corss. S. Martino, Turin.

1980 Sur cette association italienne, voir une chronique dans le volume 1 de *l'EM*.

Enfin, suivez le programme sur lequel nous sommes tombés d'accord. Si vous étiez de l'avis de m. Olivier, et si vous consentiez à être directeur à Genève, je ne demanderais pas mieux que de l'être à Paris, malgré mes occupations. Nous arriverions bien à nous entendre. Une question importante serait celle de la périodicité ; faudrait-elle paraître tous les 15 jours, tous les mois, ou tous les deux mois ? Il y a du pour et du contre à chaque solution. La période de 2 mois ne serait peut-être pas mauvaise, surtout à cause des vacances. Ce serait un petit volume de 96 ou 112 pages que les abonnés recevraient chaque fois ;

Je vous recommande en terminant quelques noms dont il serait bon d'avoir le patronage, comme comité de direction si l'affaire peut être mise sur pied.

Un possible comité de patronage :
Suisse - MM Oltramare
France - Poincaré, Picard
Allemagne - G. Cantor, Klein
Angleterre - Greenhill, major Mac-Mahon
Italie – Cremona
Danemark - Petersen ou Zeuthen
Suède - Mittag-Leffler
Grèce - Stephanos
Russie - Vassiliev.

Donnez moi vos idées et tenez moi au courant.

Je vous serre la main de tout cœur.

C.A. Laisant

Est ajouté un type possible de la publication format gr in 8°

L'Enseignement mathématique
Revue Internationale
paraissant ……………………………
publiée sous le patronage de
MM. Cremona ……………………………………
………………………………………..
……………………………….. Zeuthen
et rédigée par mm
H. Fehr
……………………………..
et
C.A. Laisant
……………………………..[1981]

La question de la langue semble donc être également tranchée même si *L'EM* accueillera des articles en espéranto, la visée internationale de la revue allant de pair, particulièrement pour Laisant, avec le projet de langue auxiliaire dont il est, on l'a vu, un grand défenseur.

Au fil de la correspondance (Fehr répond à la dernière lettre le 11 mars), on devine les efforts de Laisant pour constituer ce comité, où la grande majorité des noms précédemment cités se rallieront au projet. Dans la lettre datée du 27 avril 1898, Laisant soumet à Fehr un

[1981] Sont ajoutés au crayon, probablement par Fehr, Autriche, Belgique Mansion, Hollande, Amérique.

projet de circulaire à envoyer aux possibles membres du futur comité de patronage. Il précise qu'il a obtenu l'accord de Picard pour la France et Vassilief pour la Russie. Il compte également s'adresser à Liguine ou Bougaiev et rajoute « Pour la France, je tacherais d'avoir Poincaré ». La question des éditeurs est abordée « MM. Carré et Naud prennent l'affaire très au sérieux », un accord doit être trouvé avec Gauthiers-Villars. De plus, les éditeurs « tiennent absolument à imprimer la Revue en France. Cela ne fera certainement pas de difficulté, car M. Georg ne leur a jamais écrit à ce sujet et semble y avoir mis assez peu d'empressement. »[1982] La question financière fixe un objectif de 500 abonnés pour assurer la pérennité du périodique. L'indemnité versée (en plus d'une partie des bénéfices, frais déduits) par Carré et Naud s'annonce déjà « très modique » mais Laisant ajoute « ni vous, ni moi ne voulons en faire une question de spéculation, mais cela me semble très équitable et acceptable ainsi. »

La lettre se termine par la demande d'une étroite collaboration entre les deux hommes : « Tenez vous en correspondance un peu suivie avec moi, pour que je sois assuré que nous marchons toujours bien d'accord. De mon côté, je vous tiendrai exactement au courant des choses. » Laisant joint également « un aperçu du comité de patronage désirable ».

France - Picard , Poincaré
Suisse - MM Oltramare
Allemagne - G. Cantor, Klein
Russie – Vassilief, Liguine
Italie – Cremona
Grande Bretagne - Major Mac-Mahon,
Portugal – Gomes Teixeira
Danemark – J. Petersen
Suède ou Norvège- Mittag-Leffler
Etats-Unis – Newcomb
Belgique – Mansion
Hollande – Schoute

Il ajoute : « il me semble que cela pourrait presque suffire. En Espagne, il y a bien aussi Galdéano mais sa notoriété n'est peut-être pas assez large. En dehors de lui, il n'y guère de mathématiciens qualifiés ». La quasi-totalité des mathématiciens cités, y compris de Galdéano, seront effectivement membres du comité de patronage, à l'exception de Mac-Mahon et Newcomb car ce sont Greenhill et Alexander Ziwet qui représentent respectivement la Grande-Bretagne et les États-Unis. Laisant joint le projet de lettre circulaire pour former ce comité de patronage :

Monsieur et honoré Maître,
Permettez-nous de venir solliciter votre gracieux concours en faveur d'une œuvre dont vous apprécierez la haute utilité scientifique.

[1982] Georg est l'éditeur de la revue à Genève. Sur les particularités de cette ville et la création de *L'EM*, voir Coray, Hopdgson, "Introduction", [Coray, 2003], p. 9-10.

L'enseignement mathématique prend une place de plus en plus importante dans tous les pays civilisés ; il subit des modifications, se perfectionne graduellement, mais ces modifications et ces perfectionnements se font en quelque sorte au hasard, suivant de loin les progrès de la science et sous l'impulsion de l'empirisme. L'une des principales causes de cet état de choses regrettable, c'est l'ignorance où l'on reste généralement, dans chaque pays, de ce qui se fait dans les autres ; c'est aussi l'absence des idées générales, que les membres de l'enseignement, entrainés par leurs devoirs et leurs obligations de chaque jour, sont trop souvent contraints de délaisser.

Il nous a paru, dans ces conditions, qu'une publication périodique internationale, s'occupant spécialement de la question de l'enseignement mathématique, présenterait un réel intérêt. Nous nous proposons de la faire paraître à partir de Janvier 1899, sous le titre "L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, REVUE INTERNATIONALE".

Elle aura pour préoccupation essentielle l'enseignement moyen ou secondaire, sans négliger cependant les autres branches. Mais pour qu'une publication de cette nature puisse rendre les services qu'on doit en attendre, une condition indispensable s'impose avant tout : c'est qu'elle ait pour elle les sympathies du monde savant. Nous avons donc résolu de faire paraître sous les auspices d'un Comité de patronage et nous nous adressons dans ce but à un certain nombre de sommités mathématiques dans les divers pays.

Vous nous honoreriez au plus haut point et vous rendriez un grand service à la cause de l'enseignement en nous accordant l'autorisation de faire figurer votre nom parmi ceux qui composent ce Comité de patronage. Nous nous hâtons d'ajouter que cela ne saurait engager en rien votre responsabilité, sous aucune forme, la Revue comptant laisser s'exprimer de la façon la plus libérale et la plus large les diverses opinions. Votre haute collaboration serait accueillie par nous avec la plus grande reconnaissance, mais nous ne la réclamons même pas comme condition.

Un renseignement complémentaire pour terminer :

La Revue dont il s'agit paraîtra sous une double direction à Genève et à Paris. Bien que complètement internationale, elle sera publiée en langue française, l'emploi de plusieurs langues différentes donnant lieu à de nombreuses difficultés de toute nature, et la langue française étant répandue plus généralement que les autres dans le domaine scientifique.

Nous avons confiance, Monsieur et honoré Maître, que nous ne vous aurons pas adressé en vain notre appel et nous vous présentons l'assurance de nos sentiments respectueux et dévoués.

Si de nouvelles indications vous semblaient nécessaires nous serions heureux de répondre aux demandes complémentaires qu'il vous conviendrait d'adresser à l'un ou à l'autre de nous.

Dans la lettre datée du 14 juin 1898, on apprend que des adhésions de principes sont déjà enregistrées : il s'agit de celles d'Appell, Picard et finalement Poincaré ainsi que Vassilief, comme exprimé lors du courrier précédent. D'autres noms sont marqués également au crayon peut-être par Fehr lui-même, probablement bien postérieurement. Il s'agit d'Oltramare[1983], Cantor, Klein, Liguine, Mansion, Schoute, J. Petersen, Mittag-Leffler, de Galdéano, Gomes-Teixieras, Stéphanos. Laisant conclut : « Maintenant, nous n'avons qu'à laisser courir jusqu'à la rentrée. » Les examens d'admission à l'École polytechnique se déroulent du 24 juin au 15 septembre et occuperont pleinement Laisant (« D'ici là, je ne pourrais m'occuper de rien autre chose »). L'envoi des 1500 à 2000 circulaires aux collaborateurs est donc prévu pour mi-septembre.

Malgré les examens de l'École polytechnique, Laisant rassemble dans la lettre datée du 2 juillet 1898, les adhésions reçues par Naud. Elles sont au nombre de douze : Appel, Picard, Poincaré, F. Klein, Maurice Cantor, Vassilief, De Galdeano, Gomes Teixieras, Schoute, Mansion, Petersen, Stephanos, dernière adhésion reçue. Laisant se languit également de la réponse d'Oltramare.

Dans la lettre datée du 11 août 1898, mis au courant de la présence de Fehr en France par son fils, Laisant essaie de convenir d'un rendez-vous avec son ami. Le nombre d'adhésions s'élève à 25, celle de Liguine ayant été enregistrée la veille[1984]. Laisant se réjouit de ce ralliement : « la lettre de Liguine est particulièrement enthousiaste ; je crois qu'en Russie il nous servira beaucoup, à cause de sa haute situation dans l'enseignement. » Des rappels sont envoyés, car dans l'optique d'une publication véritablement internationale, certains pays ne sont toujours pas représentés (Italie, Grande-Bretagne, États-Unis, Autriche). Cremona, Greenhill entre autres restent muets.

LA REALISATION DE *L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE*

Les premiers mots des directeurs dans le numéro de janvier 1899 inscrivent résolument *L'Enseignement mathématique* dans le contexte international de coopération entre savants et plus particulièrement au cœur de la réflexion déjà entamée dans plusieurs pays sur les progrès envisageables dans l'éducation mathématique. Ainsi, un grand nombre d'enseignants dans divers pays « sont venus à comprendre qu'il y a, dans les moyens pédagogiques employés, des perfections possibles »[1985]. De plus, l'évolution de la matière elle-même n'est pas étrangère aux questionnements de ces mêmes acteurs du milieu éducatif : « à l'heure où la science a tant progressé, certaines simplifications peuvent être désirables, les programmes des diverses branches de l'enseignement appellent à des réformes plus ou moins

[1983] Laisant demande d'ailleurs à Fehr de transmettre à nouveau ses salutations à Oltramare, ainsi qu'à Cailler.
[1984] « Cela commence à bien faire » remarque satisfait Laisant.
[1985] [Laisant, Fehr, 1899], "Préface", *L'Enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 1.

complètes »[1986]. *L'EM* se propose d'être le support au débat préalable à de tels changements désirables, mais non nécessairement le vecteur d'un tel bouleversement si on s'en tient au discours des fondateurs. On trouvera ainsi par la suite le descriptif des systèmes éducatifs dans plusieurs pays[1987]. La spécificité de la revue est véritable comme le constateront les rédacteurs au bout de la première année : elle « devait répondre à un besoin réel [et elle] n'a pas de similaire nulle part »[1988].

La revue est donc portée par ce « grand mouvement de solidarité scientifique » [1989] loué par les rédacteurs et effectivement observable à l'époque. Elle a ainsi pour but de « renverser les obstacles qui s'opposent à ces communications réciproques et de créer une sorte de correspondance mutuelle continue, entre les hommes qui ont consacré leur vie à cette noble mission: l'éducation mathématique de la jeunesse »[1990] i.e. de briser l'ignorance des professeurs sur le mode de fonctionnement de l'instruction à l'étranger.

Ce dernier point sera notamment abordé dans les articles généraux dont un certain nombre auront pour objectif de présenter la situation de l'enseignement mathématique dans le pays de leur auteur[1991]. Mais les articles souhaités par les rédacteurs pourront également porter sur « des examens un peu synthétiques des idées générales […,] descendre des vues d'ensemble aux choses de détail […ou] avoir une portée philosophique et concerner tout une branche de la science mathématique [...] sans se rapporter à l'enseignement de manière directe »[1992]. Un peu à la manière du propos de *La Mathématique*, Laisant souhaite donner au contenu de la nouvelle revue une portée générale, structurante pour la science et la pédagogie, éclairante au delà des aspects techniques spécifiques. Des points plus précis pourront être abordés via les études pédagogiques rédigées par les enseignants[1993]. La géométrie est le sujet de prédilection des auteurs, notamment à travers ses applications qui sont très présentes dans les établissements techniques ou de questions autour de la rigueur dans l'enseignement des

[1986] Ibid.
[1987] Z-G. De Galdeano, *Les mathématiques en Espagne* -n°1, janv. 1899. V.-V Bobynin, *Enseignement mathématique en Russie: aperçu historique* -n°2, mars 1899. S. Günther, *Le développement historique de l'enseignement en Allemagne* (n°4, juillet 1900). J. Cardinal: *L'enseignement mathématique en Hollande* (n°5, 15 sept. 1900) pour n'en citer que quelques-uns.
[1988] "Préface: aux lecteurs de « L'Enseignement mathématique»", *L'EM*, vol. 2, 1900, p. 1.
[1989] [Laisant, Fehr, 1899], p. 2. Les rédacteurs remarquent en effet que « les congrès internationaux, si brillamment inaugurés à Zurich en 1897 et dont le principe est désormais acquis » n'ont pas permis de répondre aux attentes des mathématiciens soucieux de pédagogie dans de multiples pays (Ibid.).
[1990] Ibid.
[1991] « les modes d'organisation de l'enseignement mathématique, [...], programmes, [...], moyens de sanctions des études ». Sur l'étude statistique du contenu des articles généraux voir [Furinghetti, 2003], p. 31.
[1992] Ibid., p. 4.
[1993] « s'appliquant soit à une théorie d'ensemble, soit à une démonstration particulière, soit à l'examen critique de tel ou tel point particulier (programmes, examens, concours, mécanismes des procédés d'enseignement) » (Ibid.).

mathématiques. Plus généralement, les liens entre les mathématiques et l'enseignement de leurs applications est récurrent. Sur les 212 auteurs de la période 1899-1914, la France et la Suisse sont logiquement largement représentées mais la diversité des pays d'origine des contributeurs est un signe du caractère véritablement international acquis par la revue[1994].

Les échanges de points de vue pourront s'effectuer à travers la correspondance publiée par la revue. La liberté de ton et l'ouverture sur les réflexions de tous ordres sont les grands principes de cette discussion. Avec l'ouverture de cette « tribune ouverte à tous », les directeurs soulignent « l'intérêt du 1er ordre, selon nous, à ce que toutes les idées puissent se produire au grand jour ou être soumises à la discussion des hommes de science. »[1995] Outre la structure souple et mouvante du journal, l'amélioration souhaitée de la communication entre mathématiciens et enseignants invite en effet les rédacteurs à ne pas donner aux articles généraux une importance supérieure à la correspondance ou aux chroniques qui suivent[1996].

Un an plus tard, les rédacteurs, encourageant leurs lecteurs à participer intensément à cette rubrique, écriront « L'enseignement mathématique, rédigé dans un esprit d'éclectisme indépendant, appartient à tous les chercheurs, à tous les travailleurs, à tous les esprits avides de vérités et de progrès »[1997]. La rédaction ne s'interdit pas de participer à ces échanges, notamment à partir de chroniques. Avec cette rubrique, « la Revue aura ses idées propres et sa doctrine »[1998]. Remarquons enfin que la publication se dote d'une section bibliographique, dans laquelle Laisant sera particulièrement actif.

Pour une revue explicitement internationale, le choix de la langue est crucial. Comme nous l'avons vu dans la correspondance entre Laisant et Fehr, c'est le Français qui est choisi, au détriment d'un plurilinguisme qui correspondrait a priori à ce même objectif d'internationalisme mais desservirait la compréhension du contenu. Les rédacteurs se veulent à ce sujet rassurants : « cela n'empêchera pas notre recueil d'être sincèrement et profondément international et nous comptons sur la collaboration active des professeurs de mathématiques de tous pays. »[1999]

Arrivés au terme de cette introduction, Les rédacteurs dévoilent leur motivation profonde, en parfait adéquation avec les convictions de Laisant.

L'avenir de la civilisation dépend en grande partie de la direction d'esprit que recevront les jeunes générations en matière scientifique ; et dans cette éducation

[1994] [Furinghetti, 2003], p. 32.
[1995] [Laisant, Fehr, 1899], p. 4.
[1996] Ibid., p. 27-28.
[1997] *L'Enseignement mathématique*, vol. 2, n°1, 15 janvier 1900, p. 2.
[1998] [Laisant, Fehr, 1899], p. 4.
[1999] Ibid., p. 3.

> *scientifique l'élément mathématique occupe une place prépondérante. Soit au point de vue de la science pure, soit à celui des applications.*[2000]

L'esprit des conférences de Laisant sur l'initiation mathématique, sa conviction des bienfaits d'un enseignement scientifique rationnel non seulement pour l'individu mais pour la société toute entière se retrouve pleinement dans ces quelques lignes, bien avant que le rédacteur ne publie *L'Éducation de demain* par exemple.

Le succès semble au rendez-vous et la satisfaction des rédacteurs est visible dès la deuxième année : « Jusqu'ici les résultats ont surpassé nos espérances premières : les études si variées, si différentes dans le fond et dans la forme, mais toujours fortement documentées qui ont été publiées au cours de l'année 1899 ont été profondément instructives pour un grand nombre de lecteurs, comme l'atteste une volumineuse correspondance [… *L'Enseignement mathématique*] a permis de présenter au public des travaux d'un haut intérêt, sur des questions de philosophie scientifique, de doctrine, d'histoire ou de pédagogie »[2001]. Nous restreignant aux premières années, nous trouvons en particulier de nombreux articles qui font écho aux réflexions que se livrent les géomètres sur leur discipline et ses fondements[2002]. Signalons aussi l'article de Poincaré « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement » (n°3, mai 1899) ou encore la transcription de la conférence de Hilbert sur ses « Problèmes mathématiques » (n°5, sept. 1900) ou enfin l'article de Méray sur l'espéranto (n°4, juill. 1900).

Parmi les succès enregistrés par *L'Enseignement mathématique*, Laisant signale « la grande enquête sur l'enseignement qui a provoqué tant de travaux utiles, dont il sera rendu compte à Cambridge cette année même, et qui seront vraisemblablement poursuivis quelques années encore, jusqu'au Congrès de Stockholm »[2003]. À la suite du Congrès de Rome (1908) et sous l'impulsion de Klein, Greenhill, Fehr (tous membres du comité de patronage de *L'Enseignement mathématique*), est organisé, nous l'avons souligné, un Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (Milan, septembre 1911). Y est créée l'ICMI, dont *L'Enseignement mathématique* sera l'organe de diffusion officiel. Fehr assurera la fonction de directeur jusqu'à sa mort en 1954, tout au long des 40 volumes de la première série. En 1955, l'ICMI est reconstituée comme une commission au sein de l'IMU.

[2000] Ibid., p. 5.
[2001] *L'Enseignement mathématique*, vol. 2, n°1, 15 janvier 1900, p. 1.
[2002] V. Schlegel, « Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions » ; J. Andrade, « L'enseignement de la géométrie et les géométries non-euclidiennes »; L. Ripert, « Sur L'utilité de la notion d'infini dans l'enseignement de la géométrie élémentaire »; G. Fontené, « Question de langage géométrique »; M. Frolov, « Considérations nouvelles sur la géométrie euclidienne » pour ne citer que ces quelques exemples.
[2003] *L'enseignement mathématiques*, vol. 14, 1912, p. 183.

La revue est également à l'origine d'une étude sur les méthodes de travail des mathématiciens présentée lors du troisième Congrès de Heidelberg en août 1904. Cette enquête fait suite à une idée d'Édouard Maillet [2004] et il s'agit de « consulter les mathématiciens sur des questions relatives à leur méthode de travail et de dégager de l'ensemble des réponses un certain nombre de renseignements et de conseils qui seront profitables non seulement aux jeunes mathématiciens, mais à l'enseignement mathématique d'une manière générale ». À partir de trente questions, les lecteurs sont invités à faire connaître leur travail, leur "mode de fonctionnement mathématique", ou autres habitudes[2005]. Fehr insiste donc sur l'utilité de communiquer ses méthodes : la circulation des idées est une nouvelle fois promue, pour le progrès de la société savante tout entière : « En apportant sa collaboration sous forme de réponses chacun accomplira donc un travail utile à la fois à la science et à l'enseignement ».

Cette étude relève également des récents progrès de la pédagogie scientifique ou pédagogie expérimentale, présentée par A. Binet pour *L'EM*[2006]. A. Binet est l'auteur des *Idées modernes sur les enfants* (1909) et codirecteur du Laboratoire de psychologie créé à la Sorbonne en 1892 avant de le quitter en 1899. À son article, les rédacteurs rajouteront une note précisant que

> l'Enseignement mathématique [...] *est intéressé au perfectionnement des méthodes pédagogiques dont le but final est d'arriver à un maximum de résultats, avec un minimum de fatigue. L'esprit mathématique peut être appelé à apporter le plus utile concours aux progrès des méthodes en question; d'une collaboration mutuelle pourront résulter de grands avantages pour les progrès de l'enseignement et de la science*[2007].

L'enquête illustre surtout les liens nouveaux que tisse la revue entre des disciplines auparavant éloignées comme les mathématiques et la psychologie et qui trouvent écho dans les écrits de Mannheim ou Poincaré[2008]. La revue remplit par la même ses fonctions de catalyseur d'idées novatrices déjà présentes au sein de la communauté. En portant le débat et en favorisant le questionnement autour de thèmes novateurs, elle accompagne les mathématiciens de tous pays dans les changements qui s'opèrent au début du XX^{e} siècle.

[2004] "Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens", *L'enseignement mathématique*, 1904, p. 376, 395, 401.

[2005] Les 30 questions portent entre autre sur l'origine du goût pour les mathématiques, le processus de découverte en mathématique (rôle du hasard, des rêves, lecture et rédaction), les habitudes de travail (position de travail, mode de fonctionnement visuel ou auditif ; périodicité des séances de travail etc.) et plus globalement sur le mode de vie du mathématicien.

[2006] Binet A., "La pédagogie scientifique", *L'enseignement mathématique*, vol. 1, n°1, janv. 1899.
Voir aussi Mialaret Gaston, *La pédagogie expérimentale*, PUF, 1984.

[2007] Binet A., "La pédagogie scientifique", *L'enseignement mathématique*, vol. 1, n°1, janv. 1899

[2008] [Furinghetti, 2003], pp.33-37.

CONCLUSION : POUR LA CIRCULATION DES IDEES DANS UNE COMMUNAUTE MATHEMATIQUE INTERNATIONALE

L'appartenance à plusieurs sociétés savantes nationales (SMF, AFAS, SPP, Société de statistique) ou internationales (nous pensons plus particulièrement au Circolo matematico di Palermo) permet à Laisant de rejoindre des réseaux structurés dans lesquels il prend progressivement de multiples responsabilités. Dans cet ordre d'idée, nous pouvons aussi rappeler son adhésion aux associations internationales visant à la promotion de tel ou tel "champ disciplinaire" (quaternions, récréations mathématiques). La diversité des types de sociétés concernées est remarquable : d'une société voulue par les mathématiciens professionnels pour ces mêmes professionnels comme la SMF, d'une association scientifique ouverte à tous (AFAS) à une institution historique et élitiste (SPP), Laisant parcourt l'ensemble des principaux lieux de socialisation de l'époque pour un mathématicien et y promeut les échanges scientifiques sous toutes ses formes.

Avec sa carrière d'enseignant et ses fonctions de directeur des *Nouvelles annales*, C.-A. Laisant intègre d'autres réseaux. Certains se recoupent comme ceux des Écoles Monge et Sainte-Barbe d'une part et celui d'autres directeurs des *NAM* d'autre part : on y retrouve de Gérono à Laisant, Duporcq, Antomari. Le directeur de 1896 accompagne les changements dans l'enseignement supérieur ; il voit dans le soutien des liens entre universités et les échanges entre professeurs une conséquence naturelle du développement des études universitaires et l'émergence d'une « culture mathématique ». Avec l'écriture d'ouvrages pédagogiques, une nouvelle chaîne se dessine dont font parti Laisant et Antomari mais aussi Élie Perrin, Lemoine, Maupin entre autre. Souvent à rapprocher de sa fonction d'examinateur à l'École polytechnique, cette phase illustre les réflexions de l'auteur sur la modernisation (et la stabilisation) des différents programmes, ainsi que leur mise en cohérence à l'aide de notions fortes, comme celle de vecteurs. Mais parallèlement, le polytechnicien se convainc de l'importance des premiers enseignements, particulièrement dans une optique de progrès de l'individu et de la société. Il développe alors une réflexion où sont réinvesties les considérations antérieures sur les relations entre représentation et symbolisme en mathématique. Inspiré par les idées de Pestalozzi, il rejoint un réseau d'éducateurs soucieux de moderniser l'enseignement, et se rapproche de la figure emblématique de Ferrer.

L'Intermédiaire des mathématiciens est la revue qui concrétise l'idée d'interconnexions entre les mathématiciens. La direction qui voit se succéder Laisant, Lemoine, É. Maillet, A. Grévy, P. Fatou, A. Maluski (sans oublier le rôle joué par H. Brocard) perpétue l'idée originelle d'un rapprochement des différents membres de la communauté mathématique, quels que soient leurs statuts ou leurs origines. Un réseau essentiel que nous avons pu signaler est celui qui se développe autour du réseau espéranto : Bourlet, Méray, Laisant, Camescasse. Structuré autour de la Société espérantiste de Paris, transversal à tous les autres, réseau secondaire mais en même temps porteur d'une véritable idée de la communication internationale, il est visible à de multiples occasions.

Enfin, Lemoine, Laisant, Cantor, mais aussi Vassilief, forment au milieu des années 1890 une communauté voyant dans la réalisation et la perpétuation des réunions internationales de mathématiciens, un élément indissociable du progrès mathématique, ainsi qu'un véritable agent pacificateur. *L'Enseignement mathématique*, dont le caractère explicitement international est revendiqué, illustre la volonté de ses fondateurs d'adapter la presse scientifique aux nouveaux problèmes que se posent les acteurs de la communauté scientifique.

Fort de ces multiples relations, Laisant aborde beaucoup de questions posées en ce début de siècle : l'évolution des méthodes pédagogiques, le développement de nouveaux champs disciplinaires, la structuration de l'espace communautaire international face à l'inflation des moyens de communications, les connections entre les mathématiques et d'autres sciences humaines pour n'en citer que certaines. L'activisme de Laisant cristallise les réflexions des mathématiciens sur l'objet de leur science, leurs pratiques, la transmission et la mise en cohérence de leur savoir. Face à ces interrogations, il propose la nécessaire collaboration des mathématiciens dans des formes durables comme les congrès internationaux ou *L'Enseignement mathématique*. Confiant dans les avancées possibles, il montre une détermination sans faille à promouvoir un modèle de circulation et de mise en perspective des connaissances, s'appuyant sur chacun des membres d'une communauté mathématique élargie.

Conclusion

Le parcours de Charles-Ange Laisant que nous avons retracé sur plus de cinquante années, les plus représentatives de son œuvre, est remarquable dans sa longévité et sa diversité. Il apparaît comme un mathématicien impliqué dans de multiples domaines, et investi tant sur le plan des connaissances que sur le plan institutionnel. Nous avons tour à tour étudié ses parcours de militaire, de politique, de traducteur et de diffuseur, plus généralement de mathématicien bien sûr, de président de sociétés ou d'associations scientifiques, d'enseignant, de directeur et de fondateur de publications, de pédagogue, de penseur et libre penseur ou enfin de congressiste. À ces multiples carrières, s'ajoute le pluralisme des centres d'intérêts du mathématicien exprimé ponctuellement, de la météorologie à l'astronomie en passant par la chimie.

Comme nous l'annoncions, il paraît déraisonnable de scinder ses travaux mathématiques de son militantisme au sein des communautés qu'il participe à créer. Citons quelques exemples. Les types de travaux qu'il aborde (équipollence ou arithmétique graphique) s'insèrent dans le projet de l'Association française pour l'avancement des sciences et contribuent à faire de lui un des grands communicants de l'AFAS. Sa volonté de diffuser la théorie des quaternions l'incite à adhérer à une association internationale pour la promotion de leur étude. La correspondance qu'il entretient avec Cantor au sujet du théorème de Goldbach est indissociable de leurs échanges sur les Congrès internationaux. La création de *L'Enseignement mathématique* lui permet de prolonger sa réflexion sur l'objet vecteur débutée vingt-cinq ans plus tôt.

D'un siècle à l'autre

Issu du modèle polytechnicien dans un siècle qui connaîtra sur sa fin l'affirmation de deux autres institutions, l'École normale et les universités, Laisant reste lié à la sphère polytechnicienne par son passage à l'École Sainte-Barbe, ses fonctions d'examinateur et le regard qu'il porte sur les programmes d'admission. Nous avons indiqué, dans la dernière partie de notre travail, de nouveaux "nœuds" dans les réseaux de mathématiciens, comme cette École Sainte-Barbe. Remarquons enfin l'intérêt de Laisant pour les questions de mécanique et plus spécialement de cinématique. C'est d'ailleurs en tant que répétiteur de mécanique qu'il rejoint l'École polytechnique. Sous l'impulsion de Mannheim, la cinématique porte ses réflexions sur les notions de mouvement et de temps au sein de la géométrie.

Sur des sujets déjà étudiés et établis au XIX^{e} siècle qu'il reprend principalement au début de sa carrière, il apparaît comme un habile compilateur de résultats (voir par exemple son *Essai sur les fonctions hyperboliques*), soucieux de donner cohérence à un ensemble de propriétés (voir ses travaux sur les fractions périodiques et sa collaboration avec Beaujeux). Plus généralement, cette recherche de cohérence est visible par l'utilisation d'outils jugés performants tels que les différents types de numérations, le calcul géométrique, les tableaux de nombres, les permutations, l'utilisation du barycentre en géométrie du triangle.

C.-A. Laisant s'éloigne des préoccupations de la science institutionnelle pour s'intéresser aux méthodes des équipollences, à la géométrie de situation ou aux échiquiers, autant de thèmes délaissés par l'Académie des sciences par exemple. Il est remarquable de constater que les quelques communications pour l'Académie concernent principalement la mécanique et la théorie établie par un mathématicien renommé tel qu'Hamilton. Luttant contre un conservatisme stérile, il multiplie les communications sur des objets nouveaux qui donneront naissance à des disciplines essentielles au XX^{e} siècle (géométrie vectorielle, topologie algébrique, structures algébriques).

La diffusion de la méthode des équipollences occupe une large place dans l'œuvre du mathématicien et elle illustre son désir d'accéder à un symbolisme satisfaisant pour les « faits géométriques » du plan et de l'espace. L'établissement d'un tel calcul est le garant d'un lien plus étroit entre l'écriture et la relation symbolisée.

Laisant participe avec ses écrits sur les mathématiques discrètes à une réflexion d'une petite communauté sur l'utilisation de supports visuels (échiquiers, tableaux de nombres) liés à la combinatoire et à la théorie des nombres. Sa réflexion sur la visualisation en mathématique peut être rapprochée de son adhésion aux principes de pédagogues tels que Pestalozzi. Elle participe à la réflexion sur de nouveaux outils, de nouveaux instruments d'investigation et de compréhension des processus mathématiques qui prendront leur essor avec l'outil informatique au XX^{e} siècle. Avec le souci de développer diverses représentations pour les mathématiques discrètes ou l'enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens menée par *L'Enseignement mathématique*, Laisant participe aux réflexions de nombre de mathématiciens, à commencer par Poincaré[2009], sur l'intuition en mathématique, cette faculté à laquelle Laisant accorde une grande valeur. Il note à plusieurs reprises le caractère intuitif

[2009] [Poincaré, 1899], Poincaré Henri, "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement", *L'enseignement mathématique*, 1, 1899, p. 157-162.

de telle ou telle propriété ; il conçoit la présence naturelle de cette intuition chez l'enfant sur laquelle il convient de baser leur « initiation mathématique ».

Hommes et réseaux

Attentif aux mathématiques étrangères, C.-A. Laisant participe, dès les années 1860, à la diffusion du planimètre polaire, de la méthode des équipollences, de la théorie des quaternions, des échiquiers anallagmatiques de Sylvester. Rompant avec l'isolationnisme dont souffre la science française au milieu du XIX^e^ siècle, il s'engage via de multiples canaux dans la diffusion de savoirs nouveaux et établit progressivement des réseaux internationaux d'échanges. Sa position au sein de l'AFAS lui permet d'inviter l'Allemand Cantor au congrès de 1894, ce qui signe une véritable volonté de rapprochement entre les mathématiciens européens après le traumatisme de la guerre de 1870, à laquelle pourtant il participe vaillamment.

Laisant apparaît également au fil de notre analyse comme un directeur de publication confirmé. Son expérience débute avec la presse politique et la direction du journal *Le Petit Parisien* puis la fondation de *La République radicale*. Sa longévité à la tête des *Nouvelles annales* lui confère un statut reconnu d'homme de presse. Ses liens avec les éditeurs Gauthier-Villars et Carré et Naud lui permettent de mettre rapidement en place des plans d'édition de journaux novateurs : *L'Intermédiaire des mathématiciens* et *L'Enseignement mathématique*. Ces deux revues, si elles possèdent des lignes éditoriales différentes, s'adressent aux mathématiciens de tous pays et encouragent explicitement la communication entre savants, facilitant des débats directs sur l'enseignement et impulsant une communauté mathématique internationale du XX^e^ siècle.

En suivant ses adhésions aux sociétés françaises et étrangères de mathématiques, le cas de Laisant offre un nouveau regard sur les lieux de socialisation des mathématiciens alternatifs aux grandes institutions que sont les Académies. On assiste avec lui à la naissance de nombreuses associations ou sociétés de cette fin du XIX^e^ siècle. On y voit se développer des mathématiques originales et souvent délaissées (théorie des nombres, probabilités).

Ses implications dans les administrations de sociétés savantes sont caractérisées par une conception large de la communauté scientifique, c'est le cas particulièrement à l'AFAS. Lors de la présidence de la Société philomathique de Paris, il rappelle la devise « étude et amitié » des débuts de la Société et souhaite une communication accrue entre les cercles savants. Tout individu pratiquant à un degré quelconque les mathématiques ou tout autre discipline scientifique est appelé à concourir au progrès des connaissances. Les spécialisations de chacun ne doivent pas être un obstacle à ces échanges : la profonde unité de la science implique une nécessaire coopération entre les différents champs du savoir. Dépassant la ramification des connaissances et la spécialisation des acteurs, l'entraide et l'entrelacement des domaines sont les garants d'une stimulation collective des échanges, comme cela sera formulé dans les objectifs de *L'Intermédiaire des mathématiciens*.

À la croisée du politique et du scientifique : le progrès par l'enseignement

Dans chacun des itinéraires tracés et analysés, le mathématicien s'avère être bien plus qu'un observateur avisé. Il développe des engagements affirmés s'articulant autour d'une réflexion s'élargissant avec les années où les références à l'enseignement se multiplient.

Développant l'idée d'une culture mathématique et scientifique accessible à tous et utile à chacun, et donc à la société, il prône un enseignement rationnel, méthodique et soutenu par des connaissances complémentaires en mathématiques et en psychologie de l'enfance. Avec l'auteur du discours « Le rôle social de la Science »[2010], les mathématiques et plus généralement la science tiennent un rôle prépondérant dans les progrès de la société. Leur faculté fédératrice et éclairante s'accorde avec la pensée progressiste de Laisant. Les congrès internationaux sont l'expression vivante de l'entente internationale initiée par la science, de la solidarité exprimée par ces rencontres.

Au tournant du siècle, Laisant voit derrière la crise des fondements une nouvelle ère s'ouvrir et l'expression naturelle du progrès de la connaissance :

> *Il semble qu'on voit autour de soi s'amonceler les ruines, qu'on soit condamné au doute, au scepticisme, à l'abandon des hypothèses qui nous séduisaient le plus, des principes qui nous paraissaient à tout jamais indestructibles. Mais ce doute est fécond, mais cette démolition est la préface indispensable de la reconstruction future et prochaine ; mais ce sceptique est un fervent ; et sa tâche bienfaisante est réellement celle d'un apôtre de la science et de la vérité.*[2011]

Tirant le bilan d'un siècle de progrès industriels et scientifiques fulgurants, d'une large diffusion des découvertes et de démocratisation de leurs accès que l'avancement social ou moral n'a pu suivre, Laisant porte son regard sur le XX^e^ siècle qui s'ouvre devant lui. La science est appelée à y jouer un grand rôle :

> *c'est la science, la science seule qui sera la grande libératrice, c'est d'elle qu'on doit tout attendre. Elle jettera de plus en plus dans le monde les germes de vérité,*

[2010] [Laisant, 1904b], "Le rôle social de la science", *L'Enseignement mathématique,* 6, 1904, p. 337-362.
[2011] [Laisant, 1904b], p. 344-345.

de bonté, de fraternité humaine qui fructifieront dans un avenir plus ou moins proche.[2012]

C.-A. Laisant milite pour la modernisation des méthodes d'enseignement, l'émergence d'une véritable recherche en pédagogie sur le plan international rompant avec les habitudes dogmatiques du XIX[e] siècle et il contribue à établir ce qui seront les bases d'un vaste chantier pour le siècle à venir. Les fondations de l'ICMI sont ainsi posées à l'initiative de réflexions développées dans *L'Enseignement mathématique*.

Perspectives

Dans le cas d'un scientifique, d'un politique, il est clair que la possession d'une correspondance permettrait d'approfondir les traits que nous avons déjà mis à jour.

Au cours de nos recherches, nous avons également noté le manque de travaux sur certains contemporains de Laisant, à commencer par Hoüel, Darboux, Duhamel, autant de figures importantes pour le parcours de Laisant et la vie mathématique nationale sur la période considérée. La compréhension de la multiplicité des acteurs et des réseaux reste en partie tributaire de monographies détaillées.

[2012] [Laisant, 1904b], p. 356.

Bibliographie

1. Sources primaires

1.1 Écrits de Laisant

[Laisant, 1867] "Note sur la somme des *n* premiers produits de *p* nombres entiers consécutifs", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 6, 1867, p. 366-367.

[Laisant, 1868a], "Sur la question 803", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 318-330.
[Laisant, 1868b], "Note sur le plan tangent en un point d'une surface", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 116-120
[Laisant, Beaujeux, 1868], Laisant C.-A., Beaujeux Étienne, "De quelques propriétés des fractions périodiques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 289-304.

[Laisant, Beaujeux, 1869], Laisant C.-A., Beaujeux Étienne, "Moyen de trouver la période d'une fraction périodique sans faire de division", *Les Mondes*, XIX, 1869, p. 331-333.

[Laisant, Beaujeux 1870], Laisant C.- A. et Beaujeux Etienne, " Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 9, 1870, p. 221-229, p. 271-281, 302-307, 354-360.

[Laisant, 1874a], *Exposition de la méthode des équipollences*, traduit de l'italien de l'ouvrage de G. Bellavitis, Gauthier-Villars, 1874.
[Laisant, 1874b], *Essai sur les fonctions hyperboliques*, Gauthier-Villars, Paris, 1874.[2013]
[Laisant, 1874c], "Sur les rayons de courbure des courbes planes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 13, 1874, p. 367-380.
[Laisant, 1874d], "Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque", *Nouvelles annales de mathématiques*, (2) 13, 1874, p.573-575.
[Laisant, 1874e], "Note sur l'enveloppe d'un système de courbes planes", *Nouvelles annales de mathématiques*, (2) 13, 1874, p. 571 - 573

[Laisant, 1875a], "Calcul du produit de tous les sinus du 1er quadrant de degré en degré", AFAS, Nantes, impr. de Forest et Grimaud, 1875, p. 159-161.
[Laisant, 1875b], "Note sur un compas trisecteur", *AFAS, Nantes*, 1875, p. 161-163.
[Laisant, 1875c], "Mémoire sur les puissances de points, étude de géométrie plane", *AFAS, Nantes*, 1875, p. 139-153.
[Laisant, 1875d], "Service météorologique en Algérie", *AFAS, Nantes*, 1975, p. 387.

[Laisant, 1876a], " Note sur le planimètre polaire de M. Amsler", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, I, 1876, pp 385-398.

[2013] Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2ème cahier.

[Laisant, 1876b],"Remarque sur un théorème d'arithmétique", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 2, 1876, p. 341-342.
[Laisant, 1876c], "Théorèmes sur les nombres premiers ", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 399
[Laisant, 1876d]"Théorème sur les nombres", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 400-402.
[Laisant, 1876e]"Sur un problème d'arithmétique", *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2ème série, t. 1, 3ème cahier, 1876, p. 403-411.
[Laisant, 1876f], "Sur une question paradoxale", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 2, 1876, p. 274-176.
[Laisant, 1876g], "Sur un problème relatives aux courbes planes", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 2, 1876, p. 23-24.

[Laisant, 1877a], *Applications mécaniques du calcul des quaternions*, Thèse, Faculté des sciences de Paris, 1877.
[Laisant, 1877b], *Sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces*, Thèse, Faculté des sciences de Paris, Gauthier - Villars, 1877.
[Laisant, 1877c], "Sur quelques propriétés des polygones", AFAS, Le Havre, 1877, p. 142-144.
[Laisant, 1877d], "Sur le centre de gravité d'un polygone", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 16, 1877, p. 407- 409.
[Laisant, 1877e], "Centre de gravité d'un arc de cercle", *Nouvelle correspondance mathématique*, 3, 1877, p. 347-348.

[Laisant, 1878a], "Remarque sur les fractions périodiques", *Mémoires de la Société scientifique de Bordeaux*, 2ème série, t. 3, 2ème cahier, 1878, p. 213-235.
[Laisant, 1878b], "Sur la généralisation de la division harmonique", *AFAS, Paris*, 1878, p. 135-136.
[Laisant, 1878c], "*Sur la cinématique du plan* (extrait) ", *AFAS, Paris*, 1878, p. 81-86.
[Laisant, 1878d], "Généralisation du théorème de Coriolis sur l'accélération dans un mouvement relatif", *CRAS*, 87, 1878, p. 204-206.
[Laisant, 1878e], "Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 6, 1878, p. 193-194.
[Laisant, 1878f], "Note sur la géométrie des quinconces", *Bulletin de la Société mathématiques de France*, t. 6, 1878, p. 156-158.
[Laisant, 1878g], "Formule relative à des sommations algébriques", *AFAS, Paris*, 1878, p. 179-180.
[Laisant, 1878h], "Réflexions sur la cinématique du plan", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 17, 1878, p. 481-507.

[Laisant, 1879a], *Sur le planimètre polaire de M. Amsler*, F. Haez, Bruxelles, 1879.[2014]
[Laisant, 1879b], "Discours d'ouverture et notice sur les travaux historiques de l'association de 1872 à 1878", *AFAS, Montpellier*, 1879. p. 61-116.
[Laisant, 1879c], "Sur la transformation exponentielle", AFAS, Montpellier, 1879, p. 206-211.
[Laisant, 1879d], "Solution des questions posées-question 54", *Nouvelle correspondance mathématique*, 5, 1879, p. 209-211.
[Laisant, 1879e], "Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points libres", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s.7, t. 3, Paris, 1879, p. 82-84.

[2014] Extrait de la *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, février, mars et avril 1879, p. 39-44, 71-76, 117-121.

[Laisant, Beaujeux 1879], Laisant C.-A., Beaujeux Étienne, "Quelques conséquences des théorèmes de Fermat et de Wilson", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 156-160, 177-182.

[Laisant, 1880a], "Giusto Bellavitis", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, Sér. 2, t. 4 n°1, 1880, p. 343-348.
[Laisant, 1880b], "Remarque sur les fonction 1^x et $(-1)^x$", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 8, 1880, p. 109-111.
[Laisant, 1880c] "Extrait d'une lettre : « Sur les quantités négatives et imaginaires »", *Nouvelle correspondance Mathématique*, 6, 1880, p. 119-120.
[Laisant, 1880d], "Généralisation d'une formule de M. Catalan", *Nouvelle correspondance mathématique*, 6, 1880, p. 109-111.

[Laisant, 1881a], *Introduction à la méthode des quaternions*, Gauthier-Villars, Paris, 1881.
[Laisant, 1881b], "Régions d'un plan et de l'espace", AFAS, Alger, 1881, p. 71-76.
[Laisant, 1881c], "Sur le développement de certains produits algébriques", *AFAS*, Alger, 1881, p. 84-108.
[Laisant, 1881d], "Comptes rendus et analyses", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, Sér. 2, 5 n° 1, 1881, p. 137-149.
[Laisant, 1881e], "Sur les série récurrentes dans leur rapport avec les équations", *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques,* Sér. 2, 5, 1881, p. 218-250.

[Laisant, 1882a], *Théorème d'algèbre*, AFAS, Congrès de La Rochelle, 1882, p. 102-103.
[Laisant, 1882b], "Simple remarque sur les podaires", AFAS, La Rochelle, 1882, p. 104-106.
[Laisant, 1882c], "Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même", AFAS, La Rochelle, 1882, p. 106-108.
[Laisant, 1882d], "Sur certaines propriétés des centres de gravité", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1882, p. 40-44.
[Laisant, 1882e], "Remarques sur la théorie des régions et des aspects", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 10, 1882, p. 52-55.

[Laisant, 1883], "Sur un système de figures semblables dans un même plan", AFAS, Rouen, 1883, p. 178-181.

[Laisant, 1884], "Remarque sur certaines questions de réciprocité", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 3, 3, 1884, p. 383-386

[Laisant, 1886], "Remarque sur les puissances de 2", *Journal de mathématiques élémentaires*, Sér. 2, t. 5, 1886, p. 238.

[Laisant, 1887a], *Théorie et applications des équipollences*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.
[Laisant, 1887b], "Des rayons de courbure dans les transformations isogonales.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15, 1887, p. 39-41.
[Laisant, 1887c], "Sur les transformations non isogonales", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15, 1887, p. 103-106.
[Laisant, 1887d], "Quelques applications arithmétiques de la géométrie des quinconces", *AFAS*, 1887/2, p. 218-235.
[Laisant, 1887e], "Divers énoncés d'une propriété unique", *Mathesis*, t. 7, 1887, p. 64-65.

[Laisant, 1887f], "Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1887, p. 42-44.
[Laisant, 1887g], " Sur les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert ", *AFAS*, Toulouse, 1887/2, p. 113-114.
[Laisant, 1887h], "Sur l'inversion d'un système de *n* points; construction de deux points remarquables du plan du triangle", AFAS, Toulouse, 1887/2, p. 282-285.
[Laisant, 1887i], *Notice historiques sur les travaux de la 1ère et 2e section de 1879 à 1886 inclusivement*, AFAS, Congrès de Toulouse, 1887.
[Laisant, 1887j], *L'Anarchie bourgeoise,* C. Marpon et E. Flammarion, Paris, 1887.

[Laisant, 1888a], "Note sur un système de deux courbes planes", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 16, 1888, p. 172-175.
[Laisant, 1888b], "*Note sur la somme des p premiers coefficients du développement de* $(x + y)^n$", AFAS, Oran, 1889/2, p. 72-75.
[Laisant, 1888c], "Sur une propriété des tangentes aux coniques", AFAS, Oran, 1888/2, p. 113-118.
[Laisant, 1888e], " Sur la numération factorielle, application aux permutations", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 16, 1888, p. 176-183.
[Laisant, 1888f], "Remarques arithmétiques sur les nombres composés.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 16, 1888, p. 150-155.
[Laisant, 1888g], "Construction graphique de nombres transcendants", *Bulletin de la Société philomathique de Paris, volume du centenaire*, 1888, p.63-68.
[Laisant, 1888h], "Polaires arithmétiques et géométriques d'une conique", *Journal de mathématiques spéciales* (3) II, 1888, p. 265-269.

[Laisant, 1889a], "Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 17,1889, p. 169-171.
[Laisant, 1889b], "Sur un déterminant remarquable.", *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. 17 1889, p. 104-107.
[Laisant, 1889c], "Sur le théorème de d'Alembert", *Journal de mathématiques spéciales,* Sér.3, 3, 1889, p. 77-83.

[Laisant, 1890a], "Propriété des surfaces algébriques.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 18, 1890, p. 141-144.
[Laisant, 1890b], "De deux genres remarquables de courbes planes", AFAS, Limoges, 1890/2, p. 74-78.
[Laisant, 1890c], "Propriétés du triangle; orientation moyenne; points équisegmentaires", AFAS, Limoges 1890/2, p. 23-29.
[Laisant, 1890d], "Expression du produit des coefficients du binôme", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 18, 1890, p. 140-141.
[Laisant, 1890e], "Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 18, 1890, p. 123-131
[Laisant, 1890f], "Quelques propriétés focales des coniques", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 2, 1890, p. 182-191.
[Laisant, 1890g], "Remarque au sujet du théorème de Carnot", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, t. 9, 1890, p. 5-20.
[Laisant, 1890h], "Limite de l'expression $[(p_1a_1^{1/m} + p_2a_2^{1/m} + \ldots p_na_n^{1/m})/(p_1 + p_2 \ldots.+ p_n)]^m$ lorsque *m* croît indéfiniment", *Journal de mathématiques spéciales* (3) IV, 1890, p. 4-6.

[Laisant, 1891a], "Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 19, 1891, p. 52-54.
[Laisant, 1891b], "Sur l'extension de la géométrie cartésienne aux figures imaginaires", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 29-30.
[Laisant, 1891c], "Tétraèdre arithmétique", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 18-23.
[Laisant, 1891d], "Propriétés du triangle arithmétique", AFAS, Marseille, 1891/2, p. 1-7.
[Laisant, 1891e], "Sur le cube arithmétique", AFAS, Marseille, 1891/2, p. 8-10.
[Laisant, 1891f], « Sur une méthode pour la construction d'une table de nombres premiers », compte rendu AFAS, Congrès de Marseille, AFAS, Marseille, 1891/2, p. 165-168.
[Laisant, 1891g], "Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 142-144.
[Laisant, 1891h], "Remarque sur l'interpolation", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 44-46.
[Laisant, 1891i], "Note sur l'interpolation successive", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 19, 1891, p. 121-123.
[Laisant, 1891k], " Sur les permutations limitées", *CRAS*, t. 112, Paris, 1891, p. 1047-1048.
[Laisant, 1891m], "Sur deux problèmes de permutation", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 19, 1891, p. 105-109.
[Laisant, 1891n], "Propriété géométrique des coefficients du binôme.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t.19, 1891, p. 4 - 5.
[Laisant, 1891o], "Interprétation géométrique d'une identité", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 3, 1891, p. 51
[Laisant, 1891p], "Formules concernant les nombres polygones", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 3, 1891, p. 29-30.
[Laisant, 1891q], "Les conducteurs bimétalliques", *La Nature*, t.19, n° 921, 24 janvier 1891, p. 106-107.

[Laisant, 1892a], "Sur un problème de géométrie", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 65-67.
[Laisant, 1892b], "Note relative au symbole i^i et en général à l'opération p^q", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 20, 1892, p. 12-15.
[Laisant, 1892c], "Sur une curiosité arithmétique", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, t. 4, 1892, p. 77-78.
[Laisant, 1892d], "Louis-Philippe Gilbert; notice sommaire sur sa vie et ses travaux", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, (8) IV, 1892, p. 138-146.
[Laisant, 1892h], "Construction et formules relatives au triangle", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 9, 1892, p. 209-212.
[Laisant, 1892i], "Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés", *Journal des sciences mathématiques et astronomiques de M. Gomes Teixeira*, X, 1892, p. 97-102.
[Laisant, 1892j] "Sur la détermination analytique de l'aire d'un triangle", *Journal de mathématiques spéciales,* Sér. 4, 1, 1892, p. 77-79.

[Laisant, Perrin, 1892], Laisant C.-A. et Perrin E., *Premiers principes d'algèbre, à l'usage des classes de troisième et de seconde de l'enseignement secondaire moderne*, C. Delagrave, Paris, 1892.

[Laisant, 1893a], "Sur les tableaux de sommes; Nouvelles applications", AFAS, Besançon, 1893/2, p. 206-216.

[Laisant, 1893b], "Figuration graphique de quelques nombres combinatoires", AFAS, Besançon, 1893/2, p. 298-303.
[Laisant, 1893c], "Centres de gravité de certains systèmes de poids", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, (8) V, 1893, p. 61-63.
[Laisant, 1893d], "Sur une fonction représentative des coefficients du binôme", *Mathesis*, t.13, 1893, p. 153-154.
[Laisant, 1893e], "Quelques propriétés du mouvement d'une figure plane", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, (8) VI, 1894, p. 31-40
[Laisant, Lemoine, 1893], Laisant C.-A. et Lemoine E., *Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématique*, G. Carré, Paris, 1893.
[Laisant, 1893-1896], *Recueil de problèmes mathématiques, classés par divisions scientifiques*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1893-1896.

[Laisant ; 1894a], "Sur le mouvement d'un point dans l'espace", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 6, 1894, p. 31-40.
[Laisant, 1894b], "Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 22, 1894, p. 217-220.
[Laisant, 1894c], Extension de l'expression de la dérivée logarithmique d'un polynôme entier, *AFAS,* Caen, 1894/2, p. 208-211.
[Laisant, 1894d], "Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques.", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 22, 1894, p. 28-36.
[Laisant, Lemoine, 1894], C.-A. Laisant et E. Lemoine, "préface", *L'Intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 1, n°1, janv. 1894, p. V-VIII.

[Laisant, 1895a], "A propos des asymptotes et des cercles de courbure", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 23, 1895, p. 95-97.
[Laisant, 1895b], " Note sur le principe des signes appliques aux aires. Aire d'un triangle ou d'un polygone en fonction des coordonnées des sommets", *Revue de mathématiques spéciales*, vol. 5, t. 3, n°5, février 1895, p. 65-66.
[Laisant, 1895c], " Un futur Congrès mathématique", *Journal de mathématiques spéciales,* Sér. 4, 4, 1895, p. 70-71.
[Laisant et Antomari, 1895], Laisant C.-A. et Antomari X., *Questions de mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales*, Nony, Paris, 1895.
[Laisant, Lemoine, 1895a], C.-A. Laisant, É. Lemoine, "A nos lecteurs", *L'Intermédiaire des mathématiciens*, Vol. 2, n°1, janv. 1895, p V-VIII.
[Laisant, Lemoine, 1895b], Laisant C.-A. et Lemoine E., *Traité d'arithmétique* suivi de N*otes sur L'ortografie simplifiée (par M. Malvezin*), Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1895.

[Laisant, 1896a], "Propriété des coefficients du binôme", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 24, 1896, p. 197-199.
[Laisant, 1896b], "Sur le mouvement d'un point dans l'espace", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 7, 1895-1896, p. 12
[Laisant, 1896c], "Sur le Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 7, 1895-1896, p. 8-9.
[Laisant, 1896d], "Projet de Congrès mathématique international", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 8, 7, 1895-1896, p. 43-44.
[Laisant, 1896e], "Variétés- Bibliothèque mathématique des travailleurs ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, p. 142-145.

[Laisant, Antomari, 1896], Laisant C.-A., Antomari Xavier, "Aux abonnés des «Nouvelles annales» ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 15, 1896, p. I-VIII.

[Laisant, 1897a], "Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 25, 1897, p. 209-211.
[Laisant et Perrin, 1897], Laisant C.-A. et Perrin E., *Applications de l'algèbre élémentaire à la géométrie, à l'usage des élèves de la classe de première scientifique de l'enseignement moderne. Ouvrage contenant 770 énoncés de problèmes à résoudre*, C. Delagrave, Paris, 1897.

[Laisant, 1898a], *La Mathématique. Philosophie-Enseignement*, G. Carré et Naud, Paris, 1898.
[Laisant, 1898d],"Loi de l'hodographe circulaire dans les mouvements dus à une force centrale ", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 26, 1898, p. 82.
[Laisant, 1898c], "Nécrologie. M. Charles Brissé", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 17, 1898, p. 533-533.

[Laisant, 1899a], "Aire d'une courbe gauche fermée", AFAS, Boulogne, 1899/2, p. 135-140.
[Laisant, 1899b], "L'Initiation mathématique", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 11, 1899, p. 358-368.

[Laisant, Arnoux, 1900], Laisant et G. Arnoux, *Applications des principes de l'arithmétique graphique: congruence, propriétés diverses*, AFAS, Paris, 1900/2, p. 36-59.

[Laisant, 1901a], *Annuaire des mathématiciens*, C. Naud, Paris, 1901-1902.
[Laisant, 1901b], "Sur certaines suites récurrentes", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 29, 1901, p. 145-149.
[Laisant, 1901c], "Review of Walras's éléments d'économie politique pure", *Revue générale des sciences pures et appliquées*, t. 12, 1901, p.1082.
[Laisant, 1901d], "L'Initiation à l'étude des sciences physiques", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 15, 1901, p. 289-294
[Laisant, 1901e], "Une exhumation géométrique", *L'enseignement mathématique,* 3, 1901, p. 98 – 105.

[Laisant, 1902a], "Propriété élémentaire du triangle", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 9, t. IV, 1902, p. 121-122.
[Laisant, 1902b], "Remarques sur les bissectrices d'un angle", *L'Enseignement mathématique*, 4, 1902, p. 284-287.
[Laisant, 1902c], "Nécrologie. Xavier Antomari", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 2, 1902, p. 239-240.

[Laisant, 1903a], "Rayon de courbure d'une courbe plane", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 3, 1903, p. 8-13.
[Laisant, 1903b], "Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 31, 1903, p. 156.
[Laisant, 1903c], "Une propriété des orbites fermées correspondants à des forces centrales", *CRAS*, 1er semestre, t. CXXXVI, n° 14, 1903, p. 880-881.
[Laisant, 1903d], "Note sur un problème d'interpolation", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 31, 1903, p. 66-68.
[Laisant, 1903e], "Nécrologie. Ernest Duporcq", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 4, 3, 1903, p. 97-98.

[Laisant, 1903f], "Les nouveaux programmes de L'École Polytechnique", *L'Enseignement mathématique*, 5, 1903, p. 75-84, p. 73.
[Laisant, 1903g], "Éducation scientifique et psychologie", *Revue scientifique*, 4ème série, t. 19, 1903, p. 257-263, 326-336.
[Laisant, 1903h], "L'utilité des observatoires souterrains", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, s. 9, t. V, 1902-1903, p. 19-24.

[Laisant, 1904a], *L'éducation fondée sur la science*, Félix Alcan Editeur, Paris, 1904.
[Laisant, 1904b], "Le rôle social de la Science", *L'Enseignement mathématique*, 6, 1904, p. 337-362.

[Laisant, 1906], *Initiation Mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*, Hachette, Paris, 1906.

[Laisant, 1907a], "Observation sur l'interpolation", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 9, 9, 1907, p. 68-69.
[Laisant, 1907b], "La vie et les travaux d'Amédée Mannheim", *L'Enseignement mathématique*, t. IX, 1907, p. 169-178.

[Laisant, 1908a], "Un nouveau théorème d'arithmétique", *L'Enseignement mathématique*, 10, 1908, p. 220-225.

[Laisant, 1909a], "Une propriété des progressions par différence", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, Sér. 10, t. 1,1909, p. 70-71.

[Laisant, 1912a], *La Barbarie moderne*, Bataille syndicaliste, Paris, 1912.
[Laisant, 1912b], "Qu'est-ce qu'un vecteur ?", *L'Enseignement mathématiques*, vol. 14, 1912, p. 362-365.
[Laisant, 1912c], " Émile Lemoine (1840-1912)", *L'Enseignement mathématique*, vol. 14, n°3, mai 1912, p.177-183

[Laisant, 1913a], *La Barbarie moderne*, Bataille Syndicaliste, Paris, 1912.
[Laisant, 1913b], "Notes sur l'interpolation", *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, série X, t. V, 1913, p. 89-123.
[Laisant, 1913c], "Nécrologie: Gabriel Arnoux", *L'Enseignement mathématiques,* 15, 1913, p. 337-339.
[Laisant, 1913d], *L'éducation de demain,* deuxième édition, Paris, Les Temps nouveaux, 1913.

[Laisant, 1916], Laisant, *Initiation Mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance*, 15ème édition conforme à la 14ème avec note sur *l'Initiateur mathématique* de M. J. Camescasse, In-8°, Hachette, Paris, 1916.

[Laisant, 1919a], "Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 19, 1919, p. 391-397.

[Laisant, 1920a], "Les deux suites fibonaciennes fondamentales (u_n) (v_n). Tables de leurs termes jusqu'à $n = 120$", *L'Enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 52-56.
[Laisant, 1920b], "Extension du problème des triangles héroniens", *L'Enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 82-84.

[Laisant, 1924], "L'illusion parlementaire", *La brochure mensuelle*, n° 17A, mai 1924.

1.2 Autres sources primaires

[Allégret, 1862], Allégret Alexandre, *Sur le calcul des quaternions de M. Hamilton*, Thèse, Faculté des sciences de Paris, 1862.

[Ampère, 1834], Ampère André-Marie, *Essai sur la philosophie des sciences*, Bachelier, 1834

[Anonyme, 1845], "Théorèmes de M. Steiner sur la division du plan par des droites et des cercles ; et sur la division de l'espace par des plans et des sphères", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 1, 4, 1845, p. 491-494.
[Anonyme, 1888], *Notice sur les titres et travaux de C.-A. Laisant,* Gauthier-Villars, 1888.

[Argand, 1874], Argand Robert, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 2ème édition, précédée d'une préface de M. J. Hoüel, Gauthier-Villars, Paris, 1874.

[Badoureau, 1881], Badoureau A., "Mémoire sur les figures isocèles", *Journal de l'École polytechnique*, 30, 1881, p. 47-172.

[Béligne, 1894], Béligne A., "Société des Sciences récréatives", *Tablettes du chercheur. Journal des jeux d'esprit et de combinaisons*, 5, 1894, p. 188-190.

[Bellavitis, 1854], Bellavitis Giusto, "Sposizione del metodo delle equipollenze", *Mémoire de la Société italienne des sciences*, t. XXV, partie II, Modène, 1854.
[Bellavitis, 1855], Bellavitis Giusto, "Sur la méthode des équipollences", *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques. Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 14, 1855, p. 60-63.
[Bellavitis, 1858], Bellavitis Giusto, *Calcolo dei quaternioni di W.R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze*, Modène, 1858.

[Berthelot & al., 1885], Berthelot Marcelin et al., *La Grande Encyclopédie*, 31 vols., Paris, Lamirault, 1885-1902.
[Berthelot, 1888], Berthelot Marcelin, "Notice sur les origines et l'histoire de la Société philomathique", *Mémoires publiés par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation*, 1888.

[Borel, 1952], Borel Émile, *Les nombres inaccessibles*, Gauthier-Villars, 1952.
[Borel, 1897], Congrès international des mathématiciens, *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, t. 8, 1897, p. 783-789.
[Borel, 2002], E. Borel, "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire", *Gazette de la SMF*, n° 93, 2002.

[Bourget, 1871], Bourget J., "Des permutations", *Nouvelles annales de mathématiques*, Série 2, 10, 1871, p. 254-268.
[Bourget, 1882], Bourget J., "Sur la permutation de n objets et leurs classements", *CRAS*, t. 95, 1882, p. 508-511.
[Bourget, 1883], Bourget J., "Note sur les permutations de *n* objets et sur leur classement", *Nouvelles annales de mathématiques*, Série 3, 2, 1883, p. 433-450.

[Bourlet, 1906], Bourlet, C., "Sur un déterminant remarquable", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 16, 1897, p. 369-373.
[Bourlet, 1906], Bourlet Carlos, *Cours abrégé de Géométrie ; Géométrie plane*, Hachette, 1906.

[Bricard, 1913], Bricard Raoul, "Carlo Bourlet", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 13, 1913, p. 433-438.
[Bricard, 1920], Bricard Raoul, "Charles-Ange Laisant (1841-1920) ", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 20, 1920, p. 449-454.
[Bricard, 1922], Bricard Raoul, "Nécrologie. Henri Brocard", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 5, 1, 1922, p. 357-358

[Brocard, 1875], Brocard Henri, "Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 3, 1875, p. 47-48.
[Brocard, 1877], Brocard Henri, "Bibliographie-Thèses de doctorat", *Nouvelle correspondance mathématique*, vol. 4, 1877, p. 115-116.
[Brocard, 1920], Brocard H., "Mélanges et correspondance – A propos d'un article de M. Laisant sur la série de Fibonacci.", *L'Enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 136.

[Broch, 1874], Broch Ole J., « Sur la représentation graphique des nombres complexes », AFAS, Lille, 1874, p. 1174-1176.

[Brunel, 1888], Brunel G., "Notice sur l'influence scientifique de Guillaume Jules Hoüel", *Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux*, t. 4, 1888, p. 1-78.

[Cantor, 1869], Cantor, G., "Ueber die einfachen zahlensysteme ", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 14, 1869, p. 121-128.
[Cantor, 1894], Cantor Georg, "Vérification jusqu'à mille du théorème empirique de Goldbach", AFAS, Caen, 1894/2, p. 117-134.

[Carnot, 1801], Carnot Lazare, *De la corrélation des figures de géométrie*, Duprat, 1801.
[Carnot, 1803], Carno L. N. M., *Géométrie de position*, Paris, 1803.

[Carré, 1913], F. Carré, *Initiation à la physique. Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance*, Paris, Hachette, 1913.

[Castelnuoavo, 1909], Castelnuoavo G., *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 Aprile 1908)*, Roma, 1909.

[Catalan, 1837], Catalan Eugène, "Solution d'un problème de probabilité, relatif au jeu de rencontres", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2, 1837, p. 469-482.
[Catalan, 1842], Catalan, Eugène, "Sur les fractions décimales périodiques", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 1, 1842, p. 457-470
[Catalan, 1874], Catalan Eugène, "Avertissement", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. 1, n° 1, 1874, p. 5-6.
[Catalan, 1886], Catalan Eugène, "Savin Réalis", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 5, 1886, p. 200-203.

[Césaro, 1880], Césaro E., "Question 542", *Nouvelle correspondance mathématique,* t. VI, 1880, p. 276.

[Chasles, 1837], Chasles Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Haez, Bruxelles, 1837.
[Chasles, 1870], Chasles Michel, *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris, Imprimerie Nationale, 1870.
[Chasles, 1878], Chasles Michel, "Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 6, 1878, p. 208-250.
[Chasles, 1880], Chasles Michel, *Traité de géométrie supérieure*, 2nd édition, Gauthier-Villars, Paris, 1880.

[Cherest, 1863], Cherest E., "Rapport, présenté au nom du comité de mécanique, sur le planimètre polaire de M. Amsler", *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*, 33, 1863, p. 194-213.

[Coupy, 1844], Coupy, Émile, "Solution de la question 85", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 1, 3, 1844, p. 404-410.

[Cramer, 1750], Cramer Gabriel, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750.

[Darboux, 1879], Darboux Gaston, " Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité", BSMF, t. 7, 1879, p. 7-12.

[Delannoy, 1886], Delannoy Henri, « Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques » AFAS, Nancy, 1886/2, p. 183-189.
[Delannoy, 1890], Delannoy Henri, « Formules relatives aux coefficients du binôme » AFAS, Limoge, 1890/2, p. 35-37.

[Dumont, 1915], Dumont Émile, "Sur les bases de l'analyse vectorielle", *L'enseignement mathématique*, 17, 1915, p. 81-93.

[Duporcq, 1902], Duporcq Ernest, *Compte Rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, Paris, Gauthier-Villars, 1902

[Farre, 1875], Farre Jean-Joseph, "Notice sur le service météorologique du Gouvernement général d'Algérie", *AFAS, Nantes*, 1875, p. 388-392.

[Flammarion, 1908], Flammarion, Camille *Initiation astronomique*, Paris, Hachette, 1908.

[Fontené, 1899a], Fontené G., "Sur un système de sept clefs", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 27, 1899, p. 171-180.
[Fontené, 1899b], Fontené G., "Sur l'enseignement de la théorie des vecteurs", *L'Enseignement mathématique*, 1, 1899, p. 50-52.

[Fréchet, 1904], Fréchet Maurice, "Sur une généralisation de notion d'aire et de plan", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 4, 1904, p. 241-248.

[Genty, 1881], Genty, "Applications mécaniques du Calcul des quaternions", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. 7, 1881, p. 49-70.

[Gergonne, 1826], Gergonne, "Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue", *Annales de Gergonne*, 16, 1825-1826, p. 209-231

[Gérono; Prouhet, 1863], Gérono Camille ; Prouhet Eugène, "Avertissement des rédacteurs", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 2, 1863, p. 1-2

[Gohierre de Longchamps, 1893], Gohierre de Longchamps Gaston, "Sur un trisecteur", *AFAS, Besançon*, 1893/2, p. 190 - 200.

[Hadamard, 1909], Hadamard Jacques, "Notions élémentaires sur la géométrie de situation", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 9 (1909), p. 193-235

[Halsted, 1911], Dr George Bruce Halsted, *Géométrie rationnelle, traité élémentaire de la science de l'espace,* traduction française par Paul Barbarin, Paris, Gauthier-Villars, 1911.

[Hamilton, 1853], Sir William Rowan Hamilton, *Lectures on quaternions*, Hodges and Smith, 1853.

[Hémardinquer, 1907], Hémardinquer Charles, *Notions de mathématiques supérieures (calcul intégral et différentiel), licence es sciences physiques, écoles techniques, constructeurs et praticiens*, Henry Paulin et C^ie^, Paris, 1907.

[Hermite, 1984], « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883) », Dugac P. (éd.), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des mathématiques*, vol. 5, 1984, p. 49-285.
[Hermite, 1985], « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884-1891) », Dugac P. (éd.), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des mathématiques*, vol. 6, 1985, p. 79-217.

[Hobson, Love, 1913], Hoson E. W., Love A. E. H., *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge, 22-28 August 1912)*, Cambridge, 1913.

[Holtze, 1892], Holtze A., "Einige Aufgaben aus der combinatorik", *Archiv der Mathematik und Physik*, 2, 11, 1892, p. 284-338.

[Hoüel, 1864], Hoüel Jules, "Notices sur les fonctions hyperboliques et sur quelques tables de ces fonctions", *Nouvelle annales de mathématiques*, Sér. 2, t. 3, 1864, p. 416-432.
[Hoüel, 1867-1874], Hoüel Jules, *Théorie élémentaire des quantités complexes*, Gauthier-Villars, Paris, 1867.
[Houël, 1867b], Hoüel, Jules, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide*, Gauthier-Villars, Paris, 1867.
[Hoüel, 1868], Hoüel Jules, "Correspondance", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 421-423.
[Hoüel, 1869a], Hoüel Jules, "Sur la méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis", *Nouvelle annales de mathématiques*, Sér. 2, 8,1869, p. 289-312 et 337-357.
[Hoüel, 1869b], Hoüel Jules, *Sur le Calcul des équipollences : méthodes d'analyse géométrique de M. Bellavitis*, Gauthier-Villars, Paris, 1869.

[Hoüel, 1874], Hoüel Jules, "Avertissement", in R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1874.

[Iaggi, 1901], Iaggi E., "Sur une représentation géometrique des fonctions sin x, sin (x + k) et leur analogie avec les fonctions circulaires", *NAM*, Sér. 4, 1, 1901, p. 241-281.

[Klein, 1908], Félix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, 1908.

[Kœnigs, 1897], Kœnigs Gabriel, *Leçons de cinématique professée à la Sorbonne*, Paris, A. Hermann, 1897.

[Krazer, 1905], Krazer A., *Verhandlungen des dritten internationalen mathematiker kongresses in Heidelberg vom 8 bis 13 august 1904*, Leipzig, 1905, p. 603-607.

[Lamé, 1818], Lamé Gabriel, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Mme. Ve. Courcier, 1818.

[Laquière, 1879], Laquière Ernest, "Note sur la géométrie des quinconces", *BSMF*, t. 7, 1879, p. 85-92.

[Laquière, 1880], "Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 8, 1880, p. 82-102 et p. 132-158.

[Laquière, 1881], Laquière, "Observation sur l'origine naturelle et géométrique du calcul des équipollences", *AFAS*, 1881, p. 76 (séance du 15 avril 1881).

[Laquière, 1882], Laquière Ernest, "Sur un théorème de Pappus (voir 2e série, t. XX, p. 337)", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 1, 1882, p. 110

[Laurent, 1898], Laurent H., "A propos de la définition du nombre", *Nouvelles annales de mathématiques,* Sér. 3, 27, 1898. p. 277-280.

[Lebesgue, 1908], Lebesgue Henri, « Sur la définition de l'aire des surfaces », *L'enseignement mathématique*, 10, 1908, p. 1-48.

[Lebesgue, 1971], Lebesgue Henri, « À propos de quelques travaux mathématiques récents », *L'enseignement mathématique*, 17, 1971, p. 1-48.

[Lebesgue V., 1864], Victor-Amédée Lebesgue, *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers*, Gauthier-Villars, 1864.

[Lefebvre, 1909], L.-Charles Lefebvre, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, L. Dulac, Paris, 1909.

[Legendre, 1794], Legendre, Adrien-Marie, *Éléments de géométrie*, Paris : F. Didot, an II-1794.

[Lemoine, 1880], Lemoine Émile, "correspondance", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 509-512.

[Liouville, 1839], Liouville Joseph, "Sur le principe fondamental de la théorie des Équations algébriques", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Sér. 1, 4, 1839, p. 501-509.

[Lucas, 1877], Lucas Édouard, "Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester ", AFAS, Havre, 1877, p. 213-214.
[Lucas, 1878a], Lucas Édouard, "Théorème sur la géométrie des quinconces", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1ère série, t. 6, 1878, p. 9-10.
[Lucas, 1878b], Lucas Édouard, "Théorème sur la géométrie des quinconces", *Nouvelles annales de mathématiques*, 2ème série, t. 17, 1878, p. 129-130.
[Lucas, 1878c], Lucas, Édouard, "Théorème sur la géométrie des quinconces", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 17, 1878, p. 129-130.
[Lucas, 1882], Lucas Édouard, *Récréations Mathématiques*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1882.
[Lucas, 1883], Lucas Édouard, *Récréations Mathématiques*, vol. 2, Gauthier-Villars, 1883.
[Lucas, 1884], Lucas Édouard, « Le calcul et les machines à calculer », AFAS, Blois, 1884/1, p. 111-141.
[Lucas, 1891a], Lucas Édouard, *Théorie des nombres*, vol. 1, Gauthier-Villars, 1891.
[Lucas, 1895], Lucas Édouard, *L'Arithmétique amusante*, Gauthier Villars, paris, 1895.
[Lucas, 1911], Lucas Édouard, "Les principes fondamentaux de la géométrie des tissus", AFAS, Marseille, 1911/1, p. 72-88 (extrait et traduit de l'*Ingeniere Civile*, Turin, 1880).

[Maillet, 1894], Maillet Édouard, "Sur les carrés latins", AFAS, Caen, 1894/2, p. 244.

[Mannheim, 1880], Mannheim Amédée, *Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris, 1880.

[Maupin, 1895], G. Maupin, *Questions d'algèbre, à l'usage des élèves des classes spéciales et des candidats aux Écoles polytechnique, normale, centrale, etc.*., Nony, Paris, 1895.

[Méray, 1874], Méray Charles, *Nouveaux éléments de Géométrie*, F. Savy, 1874.
[Méray, 1901], Méray, Charles, " Correspondance", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 1, 1901, p. 34-43.

[Mourey, 1861] Mourey C.V., *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires: Dédié aux amis de l'évidence*, 2ère édition, Mallet-Bachelier, Paris, 1861.

[Netto, 1901], E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901.

[Neuberg, 1880], Neuberg Jospeh, "solution à la question 573", *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 473 et 512.
[Neuberg, 1881], Neuberg Joseph, "Note- Question 55", *Mathesis*, t. 1, 1881, p. 166-167.
[Neuberg, 1887], Neuberg J., "Théorème sur le centre de gravité", *Mathesis*, 1ère série t. 7, 1887, p. 271.

[d'Ocagne, 1887], d'Ocagne Maurice, "Sur une classe de nombres remarquables", *American Journal of Mathematics*, Vol. 9, No. 4 (Jun., 1887), p. 353-380.
[d'Ocagne, 1891], d'Ocagne Maurice, "Quelques propriétés des nombres K_m^p ", *American Journal of Mathematics*, Vol. 13, 1891, p. 145-188.

[Peaucellier, 1864], Peaucellier Charles, "Correspondance", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 3, 1864, p. 414-415.
[Peaucellier, 1873], Peaucellier Charles, "Note sur une question de géométrie de compas", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 12, 1873, p. 71-78.

[Peaucellier, 1874], Peaucellier Charles, " Considérations sur l'emploie du planimètre polaire de M. Amsler pour la mesure des surfaces", CRAS, tome LXXVIII, 1874, p. 336.

[Perrin R., 1875], Perrin R., "Note sur la division mécanique de l'angle", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 4, 1875, p. 85-87.
[Perrin R., 1882], R. Perrin, "Sur le problème des aspects", *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 10, 1882, p. 103-127.

[Picard, 1890], Picard E., "Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen", *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. CX, 10 1er semestre, 1890, p. 489-497.

[Poincaré, 1891], "Sur les Géométries non euclidiennes", *Revue générale des sciences*, 2ème année, n° 23, 1891, p. 769-774.
[Poincaré, 1899], Poincaré Henri, "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement", *L'enseignement mathématique*, 1, 1899, p. 157-162.

[Poinsot, 1810], Poinsot Louis, "Mémoire sur les polygones et les polyèdres", *Journal de l'École Impériale polytechnique*, 4, 1810, p. 16-48.
[Poinsot, 1845], Poinsot Louis, *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Bachelier, 1845.

[de Polignac, 1878], de Polignac Camille, "Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 6, 1878, p. 158-163.

[Poncelet, 1822], Poncelet Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, 1822

[Réalis, 1867], "Note sur le nombre e", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 6, 1867, p. 541-551, Sér. 2, 7, 1868, p. 16-25 et p. 158-171.

[Résal, 1862], Résal Henri, *Traité de Cinématique pure*, Mallet-Bachelier, Paris, 1862.
[Résal, 1873], Résal Henri, "Note sur le planimètre polaire", *CRAS*, t. 77, 1873, p. 509-511.
[Résal, 1874], Résal Henri, " Considérations sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler pour la mesure des surfaces ", *CRAS*, t. 78, 1874, p. 336.
[Résal, 1881], Résal Henri, "Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 20, 1881, p. 337-338.

[Rudio, 1898], Rudio Ferdinand, *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, Druk und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1898.

[Sainte-Claire Deville, 1874], Sainte-Claire Deville Charles, "Le réseau météorologique algérien", *CRAS*, tome LXXIX, 1874, p. 191-196.

[Sainte Laguë, 1910], Sainte Laguë André, "Note sur les usages du papier quadrillé", *L'enseignement mathématique*, 12, 1910, p. 5-17.

[Smith, 1896], D.-E. Smith, "Emile-Michel-Hyacinthe Lemoine", *The American Mathematical Monthly*, Vol. III, n° 2, février 1896.

[Tait, 1882], Tait Peter Guthrie, *Traité élémentaire des quaternions, traduit sur la seconde édition anglaise par Gustave Plarr, Première partie. Théorie- Applications géométriques*, Gauthier-Villars, 1882.
[Tait, 1890], Tait Peter Guthrie, *An elementary treatise on quaternion*, 3ème éd., Cambridge at the university press, 1890.

[Tarry, 1886], Tarry Gaston, "Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées", AFAS, Nancy, 1886/2, p. 49-53.
[Tarry, 1887], Tarry Gaston, " Essai sur la géométrie des imaginaires dans le plan réel ", AFAS, Montpellier, 1887/2, p. 168-189.

[Touchard, 1934], Touchard, J. "Sur un problème de permutations." *CRAS*, 198, 1934, p. 631-633.

[Transon, 1868a], Transon Abel, "De la séparation des racines", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 25-36 et 37-57
[Transon, 1868b], Transon Abel, "Démonstration de deux théorèmes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 97-110
[Transon, 1868c], Transon Abel, "Application de l'algèbre directive à la géométrie", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 145-157, 193-208 et 241-264.
[Transon, 1868d], Transon Abel, "Correspondance - Extrait d'une lettre de M. Abel Transon à M. Gérono", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 7, 1868, p. 419-421
[Transon, 1869a], Transon Abel, "Lois de la courbure dans certaines transformations des courbes planes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 8, 1869, p. 114-121.
[Transon, 1869b], Transon Abel, "De la transformation isogonale et de la transformation isologique des figures planes", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 2, 8, 1869, p. 222-230.
[Transon, 1892], Transon Abel, "Une lettre", *Bulletin de la SMF*, 20, 1892, p. 104-106.

[Vallès, 1869], Vallès François, *Des formes imaginaires en algèbre: leurs interprétation en abstrait et en concret*, Gauthier-Villars, 1869.

2. Sources secondaires

[Abdeljaouad, 2001], Abdeljaouad Mahdi, "Les triangles semblables … ces mal aimés ! ", *Revue de l'ATSM : Miftah al hissab*, n° 99 2001.

[Alasia, 1906], Alasia C., "Giusto Bellavitis. Sa correspondance scientifique", *L'Enseignement mathématique*, t. 8, Carré et Naud éditeur, 1906, p. 97-117.

[Amaury, 1972], Amaury Francine, *Histoire du plus grand quotidien de la IIIe République. Le Petit Parisien (1876-1944).* Tome Ier : *«La Société du Petit Parisien», entreprise de presse, d'éditions et de messageries* Tome II : *« Le Petit Parisien », instrument de propagande au service du régime,* Presses universitaires de France, 1972.

[Atzema, 2006], Atzema, Eissio J., "A theorem by Giusto Bellavitis on a Class of Quadrilaterals", *Forum Geometricorum*, vol. 6, 2006, p. 181-185.

[Aubry, 1911], Aubry A, "Les principes de la géométrie des quinconces", *L'Enseignement mathématique*, 13, 1911, p. 187-203.

[Aymès, 1988], Aymès Jean, *La trisection de l'angle. Ces Problèmes qui font les mathématiques*, publication de l'APMEP, Paris, 1988.

[Ba, Dorier, 2006], Ba Cissé, Dorier Jean-Luc, "Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXe siècle", *L'Ouvert*, 113, 2006.

[Bair, Henry, 2010], Bair J., Henry V, "Le dilemme de Cournot", *Tangente*, 135, 2010, p. 34-36.

[Ball Coxeter, 1987], Rouse Ball, Harold Scott Macdonald Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, 13ème édition, Dover, 1987.

[Barbin, Borowczyk, Chabert, Guillemot, Djebbar, Martzloff, Michel-Pajus, 1995], Barbin Évelyne, Borowczyk Jacques ; Chabert Jean-Luc ; Guillemot Michel ; Djebbar Ahmed ; Martzloff Jean-Claude ; Michel-Pajus Anne, *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce.*, Belin, Pour la Science Paris, 1995.

[Barbin, 1997], Barbin Évelyne, "Démonstration grecque et démonstration chinoise : une opposition entre le discursif et le visuel", Dominique Tournès (éd.), *L'océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Actes du colloque de novembre 1997, Saint-Denis de la Réunion : IUFM de la Réunion, 1997, p. 329-347.

[Barbin, 2000], Barbin Évelyne, "The Historicity of the Notion of what is Obvious in geometry", in Victor J. Katz, *Using history to teach mathematics: an international perspective* (Volume 51 de MAA notes, Mathematical Association of America), Cambridge University Press, 2000 p. 89-98.

[Barbin, 2001], Barbin Évelyne, "La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel", in Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques, *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses Paris, 2001.

[Barbin, 2002], Barbin Évelyne, *Histoire des mathématiques : les courbes, Cours de DEA*, Centre F. Viète, Université de Nantes, 2002.

[Barbin, 2007], "Les Récréations : des mathématiques à la marge", *Pour la science*, n°30, février 2007, pp.22-25.

[Barbin, 2008], Barbin Évelyne, "Voir des figures, des raisonnements et des équations : une approche sémiotique de la démonstration", in [Barbin, Lombard, 2008], p. 1-23.

[Barbin, Lombard, 2008], Barbin Évelyne, Lomblard P., *La Figure et la Lettre - Actes du 17ème Colloque organisé les 23 et 24 mai 2008*, Presses Universitaires Nancy, 2011.

[Barbin, 2009], Barbin Évelyne, « L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 21 mai 2011, consulté le 21 août 2011. URL : http://sabix.revues.org/644

[Barreau, Guiffan, Liters, 1992], Barreau Joël, Guiffan Jean, Liters Jean Louis, *Un grand lycée de Province : le lycée Clémenceau de Nantes dans l'Histoire et la littérature depuis le 1er empire*, l'Albaron, 1992.

[Bennett, 1909], Bennett Elizabeth R. "Periodic decimal fractions", *The American Mathematical Monthly*, vol. 16, n° 5, 1909, p. 79-82.

[Belhoste, 1989], Belhoste Bruno, « Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique de la fin de l'ancien régime à la Première Guerre mondiale », *Histoire de l'éducation*, n°41, 1989, p. 3-45.
[Belhoste, 1990], Belhoste Bruno, « L'enseignement scientifique au tournant des XIX^{e} et XX^{e} siècles », *Revue d'histoire des sciences*, XLIIII/4, 1990, p. 371-400.
[Belhoste, 1995], Belhoste Bruno, *Les sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiel, tome 1 : 1789-1914*, Institut national de recherche pédagogique, Economica, Paris, 1995.
[Belhoste, 1998], Belhoste Bruno, "De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet.", *Bulletin de la Sabix*, n° 19, juin, 1998.
[Belhoste, 2001], Belhoste Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIX^{e} siècle : Etablissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, n° 90, mai 2001, p. 101-130.
[Belhoste, 2002], Belhoste Bruno, « Anatomie d'un concours », *Histoire de l'éducation* [En ligne], 94 | 2002, mis en ligne le 09 janvier 2009, Consulté le 14 septembre 2011. URL : http://histoire-education.revues.org/index827.html
[Belhoste, 2003], Belhoste Bruno, *La Formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003.
[Belhoste, Dahan-Dalmedico, Picon, 1994], Belhoste Bruno, Dahan-Dalmedico Amy, Picon Antoine, *La Formation polytechnicienne, 1794-1994*, Dunod, 1994.
[Belhoste, Picon, 1996], Belhoste Bruno, Picon Antoine, *L'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870). Enseignement et recherches, actes de la journée d'études du 2 novembre 1995*, Musée des Plans-reliefs, 1996.

[Belot, 2002], Belot Robert, « *L'aveu idéologique des vœux* », in [Gispert, 2002], p. 287-296.

[Berge, 1967], Berge Claude, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1967.

[Bkouche, 1991], Bkouche Rudolf, "autour de la réforme de 1902/1905", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 34, 1991, p. 181-213.
[Bkouche et Delattre, 1991], Bkouche Rudolf et Delattre Joëlle, "Quand mouvement et géométrie se retrouvent ", in IREM, *Histoires de Problèmes - Histoire des Mathématiques*, Ellipses, 1997, p. 140-154.
[Bkouche, 2003], Bkouche Rudolf, "La géométrie dans les premières années de la revue *L'Enseignement Mathématique*", in [Coray, 2003], p. 95-112.

[Blay, Nicolaïdis, 2001] Blay Michel, Nicolaïdis Efthymios (dir.), *L'Europe des sciences, constitution d'un espace scientifique*, Paris, Le Seuil, 2001.

[Boi, Flament, Salanskis, 1992], Boi L., Flament D., Salanskis J.-M. (dir.), *1830-1930 : A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, Springer Verlag, 1992.

[Boucault, 1984], Boucault Gaston, *Basse-Indre au début du XX^{e} siècle*, Boucault, 1984.

[Boyé, 2005], Boyé Anne, « Le combat des deux géométries », in *Les génies de la science*, Revue de l'histoire des sciences, n° 21, novembre 2004 - février 2005, p. 100-105.

[Boyé, 2009], Boyé Anne, « Gabriel Lamé et l'enseignement des mathématiques : reflet d'une génération de polytechniciens ? », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 22 mai 2011, consulté le 11 août 2011. URL : http://sabix.revues.org/689

[Bricard, 1920], Bricard Raoul, "Charles-Ange Laisant", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 4, 20, 1920, p. 449-454.

[Brigaglia, Masotto, 1982], Brigaglia Aldo, Masotto Guido, *Il circolo matematico di Palermo*, Dedalo, 1982.
[Brigaglia, 1894], Brigaglia, Aldo, "Sur les relations des mathématiciens français et italiens au début du XXe siècle", *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 5, 1984, p. 21-48.

[Brun, 1959] Brun Viggo, "Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes", *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 12, n°1, 1959, p. 19-24.

[Buhl, 1921], Buhl, Alexander, "Charles-Ange Laisant", *L'enseignement mathématique*, 21, 1920-1921, p. 73-80.

[Canepa, 1991], Canepa G., "Le carte di Bellavitis" *Le Scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento. Atti del terzo seminario delle scienze e delle tecniche nell'Ottocento veneto. Venezia, 22 e 23 novembre 1991,* pp.49–59.

[Carnoy, 1903] Carnoy Henry (dir.), *Dictionnaire biographique international des écrivains, des artistes, des membres des sociétés savantes,* chez l'auteur, t. II, Paris, 1903, p. 5-7.

[Caron, 1985], Caron François, *La France des patriotes*, Histoire de France, Fayard, 1985.

[Chaline, 1995], Chaline Jean-Pierre, *Sociabilité et érudition: les sociétés savantes en France XIX*e*-XX*e *siècles*, Editions du C.T.H.S., 1995.

[Charnay, Albert, 1990], Charnay Jean Paul, Albert, Claude, *Lazare Carnot, ou, Le Savant citoyen*, Presses Paris Sorbonne, 1990.

[Châtelet, 1992], Châtelet G., "Dimension et Puissance Selon l'Ausdehnung de Grassmann (1844)", in [Boi, Flament, Salanskis, 1992], p. 222-244.

[Chemla, 1998], Chemla Karine, "Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaüs", *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 1998, p. 163-190.
[Chemla, 1990], Chemla Karine, « Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot » in [Charnay, Albert, 1990], p. 525-541.

[Coray et al., 2003], Coray Daniel, *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique. Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century,* Geneva: L'Enseignement Mathématique, 2003.

[Coumet, 2003], Coumet Ernest, "Auguste Comte. Le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique", *Mathematics and Social Sciences*, 41e année, n° 162, 2003, p. 9-17.

[Crowe, 1994], Crowe Michael J, *A history of vector analysis, the evolution of the idea of a vectorial system*, 2ème édition, Dover publication, Inc, New York, 1994.

[Dahan-Dalmédico, 1986], Dahan-Dalmédico Amy, “Un texte de philosophie mathématique de Gergonne”, *Rev. Hist. Sci.* ,39, 1986, p. 97-126.
[Dahan-Dalmédico, Peiffer, 1986], Dahan-Dalmédico Amy, Peiffer Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, éditions du seuil, 1986.
[Dahan-Dalmédico, 1997], Dahan Dalmédico, "L'étoile imaginaire a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'œuvre de Cauchy", in [Flament, 1997], p. 29-50.

[Dauben, Scriba, 2002], Dauben, Joseph W., Scriba, Christoph J., "Writing the history of mathematics: its historical development", *Science networks*, 27, Birkhäuser, 2002, p. 539-540.

[Décaillot, 1998], "L'arithméticien Edouard Lucas (1842 1891) : théorie et instrumentation", *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 1998, p. 191-236.
[Décaillot-Laulagnet, 1999] Décaillot-Laulagnet Anne-Marie, *Edouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié di XIXe siècle*, thèse de doctorat, Science de la vie et de la matière, Université René Descartes – Paris V, 1999.
[Décaillot, 2002a] Décaillot Anne-Marie, « L'originalité d'une démarche mathématique », in [Gispert, 2002], p. 205-214.
[Décaillot, 2002b] Décaillot Anne-Marie, « Géométrie des tissus. Mosaïques. Échiquiers. Mathématiques curieuses et utiles », *Revue d'histoire des mathématiques*, 8, 2002, p. 145{206.
[Décaillot, 2007] Décaillot Anne-Marie, « Number Theory at the Association française pour l'avancement des sciences », in [Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], p. 411-428.
[Décaillot, 2008] Décaillot Anne-Marie, *Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les Français à la fin du XIX^e siècle*, éditions Kimé, 2008.

[Dickson, 1919], Dickson, Leonard Eugene, *History of the theory of numbers,* (3 vol.) Carnegie institution, Washington, 1919-1923.

[Dieudonné, 1978], Dieudonné Jean, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Ed. Hermann, 1978. (Édition de 1986).

[Dorier, 1997a], Dorier Jean-Luc, "L'*Ausdehnungslehre* de Grassmann : une étape clef dans la théorisation du linéaire ", in [Flament, 1997], p. 163-192.
[Dorier, 1997b], Dorier Jean-Luc, "Hermann Grassmann et la théorie de l'extension", repères-IREM, n° 26, 1997.

[Dörrie, 1965], Dörrie, H. 100 *Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solutions*, New York: Dover, 1965.

[Dosse, 2004], Dosse Françoise, *Le pari biographique : Ecrire une vie*, Editions La Découverte, 2004.

[Durand-Richard, 1996], Durand-Richard, Marie-José, « L'´ecole algébrique anglaise et les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance", in [Goldstein, Gray, Ritter, 1996], p. 447-477.

[Durand-Richard, 2005], Durand-Richard, Marie-José, « Des machines pour résoudre des équations différentielles », *Actes de l'université d'été « Le calcul sous toutes ses formes »*, Saint-Flour, 22-27 août 2005.

[Epple, 1998], Epple M., "Topology, matter, and space I : topological notions in 19th-century natural philosophy", *Archives for History of exact sciences*, 52, 1998, p. 297-392.

[Ferrer, 1962], Ferrer Sol, La vie et l'œuvre de Francisco Ferrer. Un martyr au XX^e siècle, Paris, Librairie Fischbacher, 1962.

[Flament, 1992], Flament Dominique, "La " *Lineale Ausdehnungslehre*" (1844) de Hermann Günther Grassmann", in [Boi, Flament, Salanskis, 1992], p. 205-221.
[Flament, 1997], Flament Dominique (dir.), *Le nombre, une hydre à n visages : entre nombres complexes et vecteurs*, Paris, Éd. de la Maison des sciences de l'homme, 1997.
[Flament, 2003], Flament Dominique, *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS, 2003.
[Flament, 2008a], Flament D., "W. R. Hamilton : fonder l'algèbre comme science dans l'intuition du temps pur", *Revista Brasileira de História de Ciência, Rio de Janeiro*, v. 1, n. 1, 2008, p. 71-93.
[Flament, 2008b], Flament Dominique, "Théorie des formes et avènement, d'une nouvelle discipline des mathématiques pures, selon Hermann Günther Grassmann (1809-1877)", *Revista Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro, v. 1, n. 2, 2008, p. 178-210.

[Fourcy, 1987], Fourcy A., *Histoire de l'École polytechnique*, introduction et annexe par Jean Dhombres, Belin, 1987.

[Frecon, 2002], Frecon Louis, *Éléments de mathématiques discrètes*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2002.

[Freguglia, 1992] Freguglia Paolo, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, QuattroVenti, Urbino, 1992.

[Friedelmeyer, Volkert, 1991] Friedelmeyer Jean-Pierre ; Volkert Klaus, " Quelle réalité pour les imaginaires ?", in *Histoires de problèmes. Histoire des mathématiques*, Ellipses, IREM, 1993, p. 327-354.

[Furinghetti, 2003], "Mathematical instruction in an international perspective: the contribution of the journal *l'Enseignement mathématique*", in [Coray, 2003], p. 21-46.

[Gandon, Perrin, 2009], Gandon S. et Perrin Y., "Le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche: Peano et Lebesgue. ", *Archive for History of Exact sciences*, vol. 63, n° 6, Springer Berlin, Heidelberg, nov. 2009, p. 665-704.

[Gardiès, 2001], Gardiès J.-L., *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ?*, Vrin, paris, 2001.

[Garrigues, 1999], Garrigues Jean, *Le général Boulanger*, Perrin, 1999.

[Gauthier, 2007], Gauthier Sébastien, *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 2007.

[Gauthier, 2009a], Gauthier Sébastien, « La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de discipline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport », *Revue d'histoire des mathématiques* 15-2, 2009, 183-230.
[Gauthier, 2009b], Gauthier Sébastien, « Hermann Minkowski : des formes quadratiques à la géométrie des nombres » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : http://images.math.cnrs.fr/Hermann-Minkowski-des-formes,476.html.

[Gérini, 2011] Gérini Christian, "La représentation des nombres imaginaires par Argand", in Moatti (dir), *Regards sur les textes fondateurs de la science – Volume 1, de l'écriture au calcul – théorie des nombres,* Editions Cassini, 2011

[Gilain, 1991], Gilain Christian, "Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral", *Archive for History of Exact Sciences*, 42, 1991, p. 91-136.
[Gilain, 1997], Gilain Christian, "Le théorème fondamental de l'Algèbre et la théorie géométrique des nombres complexes au XIX siècle", in [Flament, 1997], p. 51-74.

[Girard, 1984], Girard P. R., "The quaternion group and modern physics", *European Journal of Physics*, t. 5, 1984, p. 25-32.

[Girault de Saint-Fargeau, 1829], Girault de Saint-Fargeau, *Histoire nationale et dictionnaire géographique de toutes les communes du département de la Loire-Inférieure*, Baudouin frères, 1829.

[Gispert, 1984], Gispert Hélène, "*Image des mathématiques italiennes en 1870 dans le Bulletin* des. Sciences Mathématiques", Rivista di Storia delle Scienze. 1(7), 1984, pp.
[Gispert, 1983], Gispert Hélène, "Sur les fondements de l'analyse en France", *Archive for History of Exact sciences*, 28, 1983, p. 36-106.
[Gispert, 1985], Gispert Hélène, "Sur la production mathématique française en 1870 dans le *dans le Bulletin* des. Sciences Mathématiques" *Archives internationales d'histoire des sciences,* 114-115, vol. 35 1985, p. 380-399.
[Gispert, 1987] Gispert Hélène, "La correspondance de G. Darboux avec J. Hoüel. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871)", *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 8, 1987, p. 67-202.
[Gispert, 1990], Gispert Hélène, "Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880): textes et contextes", *Revue d'Histoire des Sciences.* 43, 2-3, 1990, p. 181-220.
[Gispert, 1991] Gispert Hélène, "La France mathématique. La société mathématique de France (1872-1914)", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, Société française d'histoire des sciences et techniques et Société mathématique de France, n°34, 1991.
[Gispert, 1999], Gispert Hélène, "Réseaux mathématiques en France dans les débuts de la troisième république", *Archives internationales d'histoire des sciences*, n°142, 1999, p. 122-149.
[Gispert, 1993] Gispert Hélène, "Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe de 1870 à 1914", in E. Ausejo et M. Hormigón (dir.), *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*, Madrid, siglo XXI de España Editores, 1993, p. 131-158.
[Gispert, 1999], Gispert Hélène, "Réseaux mathématiques en France dans les débuts de la Troisième République", *Archives internationales d'histoire des sciences*, 49, 1999, p. 122-149.
[Gispert, 2001] Gispert Hélène, "Les journaux scientifiques en Europe", in [Blay, Nicolaïdis, 2001], p. 191-211.

[Gispert, 2002] Gispert Hélène (dir.), *« Par la science, pour la patrie ». L'association française pour l'avancement des sciences (1872-1914) : un projet politique pour une Société savante*, Presses Universitaires de Rennes, 2002.
[Gispert, Hulin, Robic, 2007], Gispert Hélène ; Hulin Nicole & Robic Marie-Claire (dir.). *Science et enseignement : l'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX^e^ siècle*. Paris : Vuibert ; Lyon : INRP, 2007.

[Goldstein, 1989], Goldstein Catherine, « Le métier des nombres aux 17^e^ et 19^e^ siècles », in *Éléments d'Histoire des Sciences*, sous la dir. de M. Serres, Bordas, Paris, 1989, p. 274-295.
[Goldstein, Gray, Ritter, 1996], Goldstein Catherine, Gray Jérémy, Ritter Jim, *L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités*, Editions MSH, 1996.
[Goldstein, 1999], Goldstein C, "Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) ", *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, New series 3, 28, 1999, p. 187-214.
[Goldstein, 2004], Goldstein Catherine, « l'arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne : une approche microsociale», *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, Sér. 6, 18 no. S2, 2009, p. 25-57.
[Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], Goldstein Catherine, Schappacher Norbert, Schwermer Joachim, *The shaping of arithmetic: after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, 2007.
[Goldstein, 2008], Goldstein Catherine, 2008, « Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite » in Flament Dominique et Nabonnand Philippe (eds), *La justification en mathématiques,* Paris : Maison des sciences de l'homme. Preprint.
[Goldstein, 2009], Goldstein Catherine, « Gabriel Lamé et la théorie des nombres : « une passion malheureuse » ? », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 44 | 2009, mis en ligne le 26 mai 2011, consulté le 23 août 2011. URL : http://sabix.revues.org/690

[Graves, 1882], Graves, Robert Perceval, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3, Dublin Hodges, Figgis, 1882.

[Grünbaum, 2001], Grünbaum Branko, "A relative of "Napoleon's theorem"", *Geombinatorics*, 10, 2001, p. 116-121.

[Guengant, 2008], Guengant Jean-Yves, *Brest et la franc-maçonnerie : les Amis de Sully*, *des origines à nos jours*, Armeline, 2008.

[Hamon, 2003], Hamon Gérard, "De la torture mentale aux images fractales", *Bulletin de l'APMEP*, 448, 2003, p. 627-663.

[Hesse, 1994], Philippe Hesse, "In scientia, spes. Portrait d'Ange Guépin" in Dhombres Jean (dir.), *La Bretagne des savants et des ingénieurs*, 1824-1900, Éditions Ouest-France, 1994, Rennes, p. 371-378.

[Hulin, 1982], Hulin Nicole, "À propos de l'enseignement scientifique : une réforme de l'enseignement secondaire sous le Second Empire, la "bifurcation" (1852-1864)", *Revue d'histoire des sciences,* XXV/3, juillet 1982, p. 217-245.
[Hulin, 1989] Jung-Hulin Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences : la voie ouverte par le second empire*, Comité des travaux historiques et scientifiques, Paris, 1989.
[Hulin, 1990], Hulin Nicole, "Les doctorats dans les disciplines scientifiques au XIX^e^ siècle", *Revue d'histoire des sciences*, vol. 43, n° 4, 1990, p. 401-426.

[Hulin, 2007], *L'Enseignement secondaire scientifique en France d'un siècle à l'autre (1802-1980), Évolution, permanences et décalages,* préface d'Hélène Gispert et postface de Jean-Pierre Kahane, Lyon, INRP, 2007.

[IREM, 1998], IREM, *Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, ellipses, 1998.

[Itard, 1949], Itard, Jean, "Les Méthodes utilisées par Fermat en théorie des nombres", *Revue d'histoire des sciences,* 3, 1949, p. 21–28.
[Itard, 2002], Itard, Jean, "L'évolution de l'enseignement des mathématiques en France de 1872 à 1972", *Bulletin APMEP*, 438, 2002, p. 29-35.

[Joly, 1960], Joly Jean, *Dictionnaire des parlementaires français; notices biographiques sur les ministres, députés et sénateurs français de 1889 à 1940*, PUF, 1960.

[Jongmans, 1996], Jongmans F., *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Républicain sans république*, Société belge des professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 1996.

[Jouve, 1895], Jouve Henri, *Dictionnaire biographique de la Loire-Inférieure*, Paris, 1895.

[Kaeser, 2003], Kaeser Marc-Antoine, La science vécue. Les potentialités de la biographie en histoire des sciences, *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, n° 8, 2003/1, p. 139-160.

[Kennedy, 1979], Kennedy Hubert, "James Mills Pierce and the cult of quaternions", *Historia Mathematica*, 6, 1979, p. 423-429.

[Kerviler, Du Boisrouvray, Le Masne de Chermont, Rouzeau, 1985], Du Boisrouvray Xavier, Le Masne de Chermont Hélène, Rouzeau Léon, *Répertoire de bio-bibliographies bretonnes par René Kerviler*, t. X, Mayenne, J. Floch, 1978-1985, p. 31-34.

[Kline, 1990], Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* New York: Oxford University Press, 1990.

[Knuth, 1973], Knuth, D. E., "Volume 3: Sorting and Searching", *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, 1973.
[Knuth, 1997], Knuth, D. E., "Volume 2: Seminumerical Algorithms", *The Art of Computer Programming* (3rd ed.), Addison-Wesley, 1997.

[Kouteynikoff, 2006] Kouteynikoff Odile, "La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre", Bulletin de l'APMEP. n° 462, 2006, p. 122-137.

[Lalouette, 1997], J. Lalouette, *La libre-pensée en France 1848-1940*, Albin Michel, 1997.

[La direction, 1920], La Direction, "Nécrologie- Charles-Ange Laisant (1841-1920)", *L'Intermédiaire des mathématiciens*, XVII, juillet-août 1920, p. 81-83.

[Laisant M., 1970], Laisant Maurice, "De la députation à l'anarchie", *La rue*, n°9, 1970, p. 70-87.

[Lamandé, 2010], Lamandé Pierre, "Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle: Charles Ange Laisant (1841–1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science", *Paedagogica Historica*, 2010, p. 1-19.

[Laurentin, 2000], Laurentin Jérôme, *Fidélités et reconstructions, l'exemple de l'école géométrique française de Gaspard Monge (1771-1816)*, thèse, École des hautes études en sciences sociales, Paris, 2000

[Laurentin, 2007], Laurentin Jérôme, « Regards sur l'école de Monge », *Bulletin de la Sabix* [Online], 41 | 2007, Online since 07 août 2009, connection on 17 août 2011. URL : http://sabix.revues.org/110.

[Les rédacteurs, 1897], "Les certificats d'études supérieures des facultés des sciences", *Nouvelles annales de mathématiques*, Sér. 3, 16, 1897, p. 487-491.

[Letho, 1998], Lehto Olli, *Mathematics without borders: a history of the International Mathematical Union*, Springer, 1998.

[Lewis, 1997], Lewis Albert C., "Grassmann's *n*-Dimensional Vector Concept", in [Flament, 1997], p. 119-138.

[Librec, 1949], Librec Henri, *La franc-maçonnerie dans la Loire-Inférieure 1744-1948*, Nantes : Imprimerie du Commerce, 1949.

[Macfarlane, 1904], Alexander Macfarlane, *Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics,* Dublin: University Press, 1904.

[MacMahon, 1915], Percy Alexander MacMahon, *Combinatory analysis*, volume 1, Cambridge, The University press, 1915-1916, p. 253.

[Maitron, 1964], Maitron Jean (dir.), *Dictionnaire biographique du mouvement ouvrier français*, éditions ouvrières, Paris, 1964.

[Mancosu, 2005], Mancosu Paolo, *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Synthese Library, Volume 327, Part 1, 2005, pp.13-30.

[Mantaci, Rakotondrajao, 2001], Roberto Mantaci et Fanja Rakotondrajao, « A permutation representation that knows what "Eulerian" means », *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, n° 4, 2001, p. 101–108.

[Mayeur, 1973], Mayeur Jean-Marie, *Les Débuts de la III^e^ République*, 1871-1899, Nouvelle histoire de la France contemporaine, t. 10, Seuil, 1973.

[Meyer, 2006] Meyer, Yves, "Comment mesurer les surfaces ?", *Gazette de la Société mathématique de France*, 109, 2006, p. 23–36.

[Molk, 1904-1916], Molk Jules (dir.), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, édition française*, réédition, J. Gamblay, 1992.

[Moussard, 2006], Moussard Guillaume, *Problèmes de géométrie et méthodes de résolution. Trois recueils de problèmes de la deuxième moitié du XIX^e^ siècle en France*, mémoire de DEA, Université de Nantes, 2006.

[Nabonnand, 2003], Nabonnand Philippe, "Les débats autour des applications des mathématiques dans les réformes de l'enseignement secondaire au début du vingtième siècle", in [Coray et al.], p. 229-250.
[Nabonnand, 2006], Nabonnand Philippe, *Contribution à l'histoire de la géométrie projective au 19^e^ siècle*, 2006.
[Nabonnand 2010], Nabonnand Philippe, « L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles », *Les Prépublications de la MSH Lorraine*, n°6, 2010.
[Nabonnand, 2011], Nabonnand Philippe, "Une géométrie sans figure? ", in [Barbin, Lombard, 2008], p. 99-120.
[Nabonnand, 2011], Nabonnand Philippe, "Deux droites coplanaires sont sécantes", in Bioesmat-Martagon Lise (dir.), *Éléments d'une biographie de l'espace projectif,* Presses universitaires de Nancy, 2011.

[Néant, 2000], Néant Hubert, *La politique en France XIX^e^-XX^e^ siècle. Régimes, institutions, élections, courants, partis, groupes de pression, médias*, carré histoire, Hachette, 2000.

[Neumann, 1982], Neumnn B. H., "Plane Polygons revisited", *Journal of Applied Probability*, Vol. 19, Essays in Statistical Science (1982), p. 113-122.

[Novy, 1993], Novy Lubos, "Le journal tchèque des mathématiques et de la physique", in E. Ausejo et M. Hermigon (dir.), *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*, Madrid, siglo XXI de España Editores, 1993, p. 219-234.

[Ortiz, 1996], Ortiz Eduardo, "The nineteenth-century international mathematical community and its connections with those on the Iberain periphery", in [Goldstein, Gray, Ritter, 1996], p. 321-346.
[Ortiz, 2005], Ortiz Eduardo, "After Rodrigues : from rotation to Quaternions", in Altmann S. L., Ortiz E, *Mathematics and social utopias in France: Olinde Rodrigues and his times, American Mathematical Soc.*, 2005, p. 141-162.

[Pageot, 1911], Pageot A, *Notes sur la franc-maçonnerie dans la Loire-Inférieure (1744-1911)*, Ancenis, imprimerie A. Allard, 1911.

[Pascal, 1983], Pascal Jean, *Les députés bretons de 1789 à 1983*, Paris, PUF, 1983.

[Pijolet, 2002], Pijolet Michel, "La théorie des systèmes d'équations linéaires numériques dans les manuels d'enseignement supérieur : un exemple de transmission des savoirs dans le second XIXe siècle (1860-1914)", Mémoire de DEA, Université de Nantes, 2002.

[Pineau, 2006], Pineau François, *L'Intermédiaire des Mathématiciens : un forum de mathématiciens au XIX^e^ siècle*, mémoire de DEA, Épistémologie et histoire des sciences et des techniques, Université de Nantes, 2004.
[Pineau, 2010], *Historiographie de Paul Tannery et réceptions de son œuvre : sur l'invention du métier d'historien des sciences*, thèse de doctorat sous la direction d'É. Barbin, Université de Nantes, 2010.

[Pinet, 1887], Pinet G., *Histoire de l'École polytechnique*, Librairie polytechnique Baudry et C[ie], Paris, 1887.

[Poisard, 2005], Poisard, C. , *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer.* Université de Provence, Aix-Marseille I. 2005.

[Pont, 1874], Pont Jean-Claude, *La topologie algébrique, des origines à Poincaré*, Paris, PUF, 1974.

[Rebérioux, 1975], Rebérioux Madeleine, *La République radicale ? 1898-1914*, Nouvelle histoire de la France contemporaine, t. 11, Seuil, 1975

[Rasmussen, 1995], Rasmussen Anne, *L'Internationale scientifique (1890-1914)*. Thèse de doctorat d'histoire, École des hautes études des Sciences sociales, 1995.
[Rasmussen, 1996], Rasmussen Anne, "Critique du progrès, « crise de la science » : débats et représentations du tournant du siècle", *Mil neuf cent*, N°14, 1996. p. 89-113.

[Robert, Cougny, 1889], Robert Adolphe, Cougny Gaston, *Dictionnaire des parlementaires français de 1789 à 1889*, t. III, Paris, Bourloton, 1889, p. 540-541.

[Rollet, 2001], *L'identité professionnelle d'un mathématicien : Henri Poincaré*, Rollet Laurent, Congrès SFHST, Lille 2001.
[Rollet, Nabonnand, 2002], Rollet Laurent, Nabonnand Philippe, "Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques", *Gazette des mathématiciens,* 92, 2002, p. 11-26.
[Rollet, 1994], Rollet Laurent, Henri Poincaré et la vulgarisation scientifique, Mémoire de DEA, Centre d'Etudes et de Recherche Henri-Poincaré, Université de Nancy 2, 1994.

[Romera, 2004], Romera Pauline, *La géométrie du triangle d'Henri Brocard et d'Emile Lemoine, une mathématique d'amateurs à la fin du XIX*[e] *siècle*, mémoire de DEA, Épistémologie et histoire des sciences et des techniques, Université de Nantes, 2004.
[Romera-Lebret, 2009], Romera-Lebret Pauline, *La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929)*, Thèse de doctorat sous la direction d'É. Barbin, Épistémologie et histoire des sciences et des techniques, Université de Nantes, 2009.

[Roth, 2005], Roth François, *La guerre de 1870*, Hachette, 2005.

[Rouse Ball, 1987], W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, 13[e] éd., 1987.

[Sakarovitch, 1998], Sakarovitch Joël, *Épures d'architecture: de la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVI*[e]*-XIX*[e] *siècles*, Birkhäuser, 1998.

[Sauvage, 1994] Sauvage Jean-Pierre, "Charles-Ange Laisant, député et mathématicien", *Histoire, mémoires locales, départementales, régionales*, n°2, automne 1994, p. 63-80.

[Sauzereau, 2000] Sauzereau Olivier, *Nantes au temps de ses observatoires*, éditeur Coiffard, Nantes, 2000.

[Savoysky, 2002], Savoysky Serge," Les planimètres", *Arts mécaniques*, 23, octobre 2002

[Schwer, Autebert, 2006], Schwer Sylviane R., Autebert Jean-Michel, "Henri-Auguste Delannoy, une biographie", *Mathematical Social Sciences*, 43, n° 174, 2006, p. 25-67.
[Schwer, Banderier, 2005], Banderier Cyril, Schwer Sylviane R., "Why Delannoy numbers ?", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 135, 2005, p. 40-54.
[Schwer, Autebert, Décaillot, 2006], Schwer Sylviane R., Autebert Jean-Michel, Décaillot Anne-Marie, "Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes de Lucas", *Gazette des mathématiciens*, janvier 2003, n° 95 p. 51--62.

[Shinn, 1980] Shinn Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique 1794-1914*, Presses de la fondation nationale des sciences politiques, 1980.

[Siegfried, 1975], Siegfried André, *Tableau politique de la France de l'ouest sous la Troisième République*, Ayer Publishing, 1975.

[Sinègre, 1995], Sinègre, Luc, "Les quaternions et le mouvement du solide autour d'un point fixe chez Hamilton", *Revue d'histoire des mathématiques,* 1, 1995, p. 83-109.
[Sinègre, 1997], Sinègre Luc, " Quelques essais pour multiplier les vecteurs au XIX[e] siècle", in [Flament, 1997], p. 119-138.

[Smith, 1906], Smith David Eugène, *History of modern mathematics*, 4ème éd., 1906.

[Takács, 1980], Takács Lajos, "The Problem of coincidences", *Archive for History of exact Sciences*, vol. 21, 1980, p. 229-244.

[Taton, 1990], Taton René, "La Société philomathique de Paris et les sciences exactes", *Actes du Colloque du Bicentenaire*, Société philomathique de Paris, 1990, p. 37-54.

[Thomas, 1990], Thomas J.-André, "La Société philomathique de Paris", *Actes du Colloque du Bicentenaire*, Société philomathique de Paris, 1990, p. 1-8.

[Tournès, 2000], Tournès Dominique, "Pour une histoire du calcul graphique", *Revue d'Histoire des mathématiques*, 6, 2000, p. 127-161.
[Tournès, 2003], Tournès Dominique, "Du compas aux intégraphes : les instruments du calcul graphique", *Repères-IREM*, 50, janvier 2003, p. 63-84.
[Tournès, 2005], Tournès Dominique, "Les intégrateurs mécaniques", *Pour la science*, 333, juillet 2005, p. 10-14.

[Trompler, 2002]. Trompler Simone, « L'histoire des logarithmes », *Les cahiers du CeDoP*, UREM, Université libre de Bruxelles, 2002, p. 2-33.

[Verdier, 2009], Verdier Norbert, « Les journaux **de** mathématiques **du** XIXème siècle **en** France **et en** Europe » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : http://images.math.cnrs.fr/Les-journaux-de-mathematiques-du.html

[Verley, 2006], Verley Jean-Luc, "La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires", in Barbin E., (dir.), *Histoire des logarithmes*, Ellipses, 2006.

[Waerden, 1985], van der Waerden B. L., *A history of algebra, From Al-Khwarizmi to Emmy Nother*, Springer-Verlag, 1985

[Waltraud, 1974], Waltraud Paul Harry, "La science française de la seconde partie du XIXe siècle vue par les auteurs anglais et américains", *Revue d'histoire des sciences*, Tome 27 n°2, 1974, p. 147-163.

[Wate Mizuno, 2010], Wate Mitzuno Mitsuko, *Les œuvres de Konig Dénes (1884–1944) dans le domaine des récréations mathématiques et son traitement de problèmes récréatifs dans ses travaux de théorie des graphes*, Thèse, Université Paris Diderot (Paris 7), 2010.

[Wright, Anceau, 2007], Wright Vincent, Anceau Éric., *Les préfets de Gambetta*, Presses Paris Sorbonne, 2007, p. 239-244.

[Yates, 1941], Yates Robert Carl, "The trisection problem", *National Mathematics Magazine*, Vol. 15, 6, 1941, p. 278-293.

[Zerner, 1991], Zerner Martin, "Le règne de Joseph Bertrand (1874-1900)", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 34, 1991, p. 298-322.

Annexes

[2015] Basé sur la table des matières de l'ouvrage :

Annexe A : Notes obtenues par C.-A. Laisant lors de sa formation à l'École polytechnique

Classement général de fin d'année[2016]
École Impériale Polytechnique
2ème division 1859-1860

Analyse (Coeff.: 65)	Composition	15.25
	Interrogation particulière	14.17
	Interrogation générale	13.17
	Examen final	11.70
Mécanique (Coeff.: 64)	Composition	14.40
	Travaux graphiques	11.83
	Interrogation particulière	15.50
	Interrogation générale	15.50
	Examen final	14.50
Géométrie descriptive (Coeff.: 55)	Travaux graphique	11.50
	Interrogation particulière	14.50
	Interrogation générale	15.50
	Examen final	11.50
Physique (Coeff.: 45)	Interrogation particulière	15.17
	Interrogation générale	14.17
	Manipulation	16.50
	Examen final	11.50
Chimie (Coeff.: 45)	Interrogation particulière	13.46
	Interrogation générale	13.46
	Manipulation	12.33
	Examen final	6.33
Géodésie (Coeff.: 45)	Interrogation particulière	13.60
	Interrogation générale	13.6
	Composition et Travaux graphiques	6.40
	Examen final	9.40
Littérature française (Coeff.: 12)	Composition	10.25
Langue allemande (Coeff.: 10)	Interrogation particulière	13.5
	Examen final	7
Dessin (Coeff.: 12)		11.26
Latin (Coeff.: 4)		7.75

[2016] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 22

Résumé du classement général de fin d'année[2017]
(suivent uniquement les notes obtenues aux examens finals)
École Impériale Polytechnique
1ère division 1860-1861

Analyse (Coeff.: 25)	11
Mécanique (Coeff.: 30)	15
Stéréotomie (Coeff.: 20)	16
Physique (Coeff.: 20)	9
Chimie (Coeff.: 20)	12
Art militaire et topographie (Coeff.: 8)	14
Langue allemande	14

[2017] SHAT, dossier personnel Yc 28823, dossier 3, pièce 23

Annexe B : Etat de services de Charles-Ange Laisant [2018]

Désignation des différents corps *Motifs des interruptions*	*Grades*	*Époques*
École polytechnique	Elève	1859
Etudes antérieures (4 ans)		
Écoles d'application à Metz	Sous-lieutenant élève	1er octobre 1861
	Lieutenant en second	1er octobre 1863
En congé		25 novembre 1863
Au 3ème régiment du génie de Metz		1er février 1864
A Montpellier		8 novembre 1864
	Lieutenant en 1er	26 décembre 1864
Etat-major particulier du génie	Capitaine en second	21 décembre 1866
A Brest		16 février 1867
A Nantes		24 décembre 1869
3ème régiment du génie à Paris		
Aux travaux de défense (Fort d'Issy)	3 septembre 1870	
Etat-major particulier à Nantes		27 mars 1871
En congé et prolongation		23 octobre 1871
A Bourges		n'a pas rejoint
A Tours		29 octobre 1872
	Capitaine en 1er	
A Bastia		27 octobre 1873
Embarqué pour l'Algérie		12 février 1873
En chef à Clemcen		14 février 1875
En chef à Sidi Bel-abbès		24 novembre 1875
Démissionnaire		11 janvier 1876
Corps territorial du Génie. Etat-major	Capitaine	10 août 1876
	Chef de bataillon	10 janvier 1883
Révoqué de son grade de l'armée territoriale pour faute grave contre la discipline		1889
Chevalier de la Légion d'Honneur		18 janvier 1871

[2018] SHAT, dossier personnel de C.-A. , A.M. Yc 28823

Annexe C : Liste dressée par Macfarlane des articles de C.-A Laisant relatifs à la méthode des équipollences et à la théorie des quaternions[2019]

CHARLES ANGE LAISANT.

1873–4 Exposition de la méthode des Equipollences, par G. Bellavitis. Traduction française. Nouv. Ann., (2), **12** and **13**.

1874 The same. Paris : Gauthier-Villars. 24 + 183 pp. 8°.

1875 Mémoire sur les puissances des points ; étude de Géometrie plane. Assoc. Franç., 139–153.

1877 Applications mécaniques du calcul des quaternions. Thèse. Paris : Gauthier-Villars. 77 pp. 4°. Also Journ. de Math., **3**, 325–400.

1877 Sur le centre de gravité d'un polygone. Nouv. Ann., (2), **16**, 407.

1877 Sur quelques propriétés des polygohes. Assoc. Franç., 142—

1877 Centre de gravité d'un arc de circle. Nouv. Corresp. Math., p. 347.

1878 Note sur un théorème sur les mouvements relatifs. C. R., **87**, 294–206.

1878 Réflexions sur la cinématique du plan. Nouv. Ann., (2), **17**, 481–507.

1878 Sur la cinématique du plan. Assoc. Franç., 81–86.

1878 Sur une généralisation de la division harmonique. Assoc. Franç., p. 135.

1878 Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur la centre de gravité. S. M. F. Bull., **6**, 193–194.

1879 Sur la transformation exponentielle. Assoc. Franç., 206–211.

1879 Théorème sur le mouvement du centre de gravité d'un système de points mobiles. Soc. Philom. Bull., p. 82.

1880 Giusto Bellavitis. Darboux Bull. (2), **4**, 343–348.

1880 Extrait d'une lettre "Sur les quantités négatives et imaginaires." Nouv. Corr. Math., p. 119.

1881 Introduction à la méthode des quaternions. Paris : Gauthier-Villars. 22 + 242 pp. 8°.

1881 Sur les développements de certains produits algébriques. Assoc. Franç., 84–108.

1882 Simple remarque sur les podaires. Assoc. Franç., 104–106.

1882 Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. Assoc. Franç., 106–108.

1882 Sur certaines propriétés des centres de gravité. S. M. F. Bull., **10**, 40–44.

1883 Sur un système de figures semblables dans un même plan. Assoc. Franç. 178–180.

[2019] [Macfarlane, 1904], p. 48-50.

1887 Des rayons de courbure dans les transformations isogonales. S. M. F. Bull., **15**, 39–41.

1887 Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des equations. S. M. F. Bull., **15**, 42–44.

1887 Sur l'inversion d'un système de n points ; construction de deux points remarquables du plan du triangle. Assoc. Franç., 4 pages.

1887 Théorie et applications des équipollences. Paris : Gauthier-Villars. 16 + 299 pp. 8°.

1888 Solution des questions, 237 et 238. Journ. de Math. Spec., (3), **2**, 23–24 and 66–68.

1889 Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes. S. M. F. Bull., **17**, 169–171.

1889 Sur le théorème de d'Alembert. J. de Math. spec. (3), **3**, 77–83.

1890 Propriétés du triangle ; orientation moyenne ; points equisegmentaires. Assoc. Franç., 7 pages.

1890 Interpolation cinématique. Assoc. Franç., 5 pages.

1890 Sur deux genres remarquables de courbes planes. Assoc. Franç., 6 pages.

1890 Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation. S. M. F. Bull., **18**, 123–131.

1890 Quelques propriétés focales des coniques. Soc. Philom. Bull. (8), **2**, 182–191.

1891 Sur l'extension de la géométrie cartésienne aux figures imaginaires. S. M. F. Bull., **19**, 29–30.

1892 Quelques propriétés cinématiques d'un système de deux mouvements simultanés. Teixeira, J., 97–102.

1892 Note relative au symbole i^i et en général à l'opération, p^q. S. M. F. Bull., **20**, 12–15.

1892 Constructions et formules relatives au triangle. Nouv. Ann., (3), **11**, 209–212.

1892 Solution de la composition de mathématiques. Nouv. Ann., (3), **11**, 262–265.

1892 Quelques remarques sur les courbes unicursales. Assoc. Franç., 25–26.

1893 Communication d'une lettre d'Abel Transon datée 29. Juin 1868. S. M. F. Bull., **20**, 104–106.

1893 Centres de gravité de certain systèmes de poids. Soc. Philom. Bull.

1894 Quelques propriétés du mouvement d'une figure plane. Soc. Philom. Bull.

1895 Note sur le principe des signes appliqués aux aires. Revue de Math. Spec., **5**, 65–66.

1896 Sur la courbure des courbes planes. Kasan Ges. (2), **6**, 4 pages.

1899. Aire d'une courbe gauche fermée. Assoc. Franç., 135–140.

1901. Transformations des coordonneés barycentriques. Ens. Math. **3**.

Annexe D : Table des matières de *Théorie et applications de la méthode des équipollences*[2020]

PREMIERE PARTIE. THÉORIE DES ÉQUIPOLLENCES

CHAPITRE I. - Addition et soustraction des droites

CHAPITRE II. – Multiplication et division des droites

DEUXIEME PARTIE. APPLICATIONS DES ÉQUIPOLLENCES.

CHAPITRE I. — Procédés généraux.

[2020] [Laisant, 1887a]

CHAPITRE II. – Exercices divers

CHAPITRE III. – Applications au triangle

CHAPITRE IV - Applications aux polygones.

CHAPITRE V. - Aires des figures planes.

CHAPITRE VI. — Quelques questions de Géométrie supérieure.

CHAPITRE VII. Applications à la théorie des courbes

Annexe E : articles de Laisant dans *La Grande Encyclopédie*.

La Grande Encyclopédie, inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts par une Société de savants et de gens de lettres ([Berthelot & al., 1885]) est publiée de 1885 à 1901 notamment sous la direction Berthelot (1827-1907) (chimiste, membre de l'Institut et sénateur). Laisant dirige, en compagnie de H. Laurent, la partie mathématique de cette encyclopédie qui se réclame dès la préface de l'esprit de *l'Encyclopédie* de Diderot. Laisant et Laurent sont les intermédiaires entre le secrétariat général et les auteurs en transmettant les articles de ces derniers au premier.

Cette liste est établie par un dépouillement manuel des 31 volumes de *La Grande Encyclopédie*, assisté par une recherche par reconnaissance d'écriture dans les volumes numérisés. Ce recensement de 75 articles apparaît donc très lacunaire. Les termes qui apparaissent donnent cependant une idée juste de quelques uns des thèmes récurrents dans l'œuvre de Laisant.

t. 3, p.230 : «Antiparallèle »

t. 6, p.904: « biradiale »

t. 12, p. 353 : « condition »

t. 13, p.47 : « Problème des quatre couleurs », p.1164 : « Delannoy »

t.14, p.456 : « diatomique », p.651 : « directive », p.1026 : « douteux »

t. 15, p.317 : « échiquier »

t. 16, p.153 : « équipollence »

t. 19, p. 1159 : « Gohierre de Longchamps »

t. 20, p.167 : « hodographe », p.921 : « inversion »

t. 21, p.1197 : « Lemoine »

t. 24, p. 63 : « sphère de Monge », p. 514 : « mouvement », p.516 : « mouvement perpétuel », p.551 : « multiplication », p. 978 : « Neuberg », p.981 : « neuf », p.1195 : « nonante », p. 1192 : « nomographie »

t. 25, p.129 : « nul », p. 131 : « numération », p. 182 : « oblique », p. 198 : « Ocagne (d') », p.237 : « octaèdre », p.359 : « Oltramare », p.399 : « onze », p.412 : « opération », p.502 : « ordonnée », p.618 : « orthogonal », p.620 : « orthologie », p.687 : « Oughtred », p.808 : « pair », p.1001 : « parabole », p.1010 : « paradoxe »

t. 26, p.383 : « périmètre », p. 928 : « pile », p.1026 : « plan »

t. 27, p.162 : « polyèdre », p165 : « polygone », p.258 : « pont aux ânes », p.402 : « positif », p.630 : « preuve », p.670 : « prisme », p. 738 : « produit », p.752 : « progression » et « prohessien », p.758 : « projection », p769 : « proportion », p.1005 : « pyramide », p.1094 : « quadriplannaires », p. 1094 : « quadrique », p.1102 : « quart », p. 1119 : « quaternion », p.1162 : « quinconce »

t. 28, p.155 : « rapport », p.156 : « rapporteur », p.225 : « réciprocité », p. 1022 : « roulement »

t. 29, p.857 : « sécant », p.864 : « secteur », p.877 : « segment », p.957 : « semi-droite », p. 1008 : « sens »

t. 30, p. 14 : « signe », p. 230 : « solide », p. 261 : « sommet », p. 343 : « sous-multiple » et « sous-normale », p. 346 : « soustraction », p. 724 : « surface », p. 1196 : « théorème »

t. 31, p. 368 : « triangle », p. 672 : « valeur », p. 763 : « vecteur »

Annexe F : les 65 leçons de l'*Initiation mathématique*

1. Les bâtons.
2. De un à dix
3. Les allumettes, ou bâtonnets; paquets et fagots
4. De un à cent
5. La table d'addition
6. Les sommes
7. Les différences
8. Les mille et les millions
9. Les jetons de couleur
10. Les chiffres
11. Les bâtons bout à bout
12. La ligne droite
13.. Les différences par bâtonnets
14 Nous entrons dans l'Algèbre
15. Comptes; mesures; rapports
16. La table de multiplication
17. Les produits
18. Opérations curieuses
19. Les nombres premiers
20. Les quotients
21. Le gâteau partagé; les fractions
22. Nous devenons géomètres
23. Les aires
24. Le pont aux ânes
25. Divers casse-têtes; macédoine mathématique
26. Le cube en huit morceaux
27. Les nombres triangulaires : le vol des grues
28. Les nombres carrés
29. La somme des cubes
30. Les puissances de 11
31. Triangle et carré arithmétiques
3'2. Les numérations diverses
33. La numération binaire
34. Les progressions par différence
35. Les progressions par quotient
36. Les grains de blé sur l'échiquier
37. Une maison à bon marché
38. Le placement du centime
39. Le dîner cérémonieux
40. Un assez grand nombre
41. Compas et rapporteur
42. Le cercle
43. L'aire du cercle
44. Lunules et Rosaces
45. Quelques volumes
46. Les graphiques ; Algèbre sans calcul
47. Les deux marcheurs
48. De Paris à Marseille

49. Du Havre à New-York
50. Le temps qu'il fait
51. Deux cyclistes pour une bicyclette
52. La voiture insuffisante
53. Le chien et les deux voyageurs
54. La pierre qui tombe
55. La balle de bas en haut
56. Les trains du Métro
57. Géométrie analytique
58. La parabole
59. L'ellipse 9
60. L'hyperbole
61. Le segment partagé 2
62. Do, mi, sol; harmonies géométriques
63. Un paradoxe : 64 = 65
64. Carrés magiques
65. Discours final

Annexe G : le classement[2021] adopté par Laisant dans *La Mathématique* pour la mathématique pure

Chapitre 1 - L'Arithmétique et l'Arithmologie
Caractère général de l'Arithmétique
Le nombre
Rapport
Numération
Opérations élémentaires
Divisibilité
Les fractions
L'infini en Arithmétique
Les incommensurables
Proportions
Système des mesures
Calculs arithmétiques d'ordre supérieur
Arithmologie

Chapitre 2 - L'Algèbre
Les fonctions
Langage algébrique
Classification des fonctions
Équations algébriques
Classification des équations
Théories algébriques
Extension des idées et du langage algébriques

Chapitre 3 - Le Calcul infinitésimal.
Importance historique
Analyse transcendante
Caractère général du Calcul infinitésimal
Divisions du Calcul différentiel
Formation des équations différentielles
Calcul intégral
Intégrales définies
Calcul des variations

Chapitre 4 - La Théorie des fonctions.
Explication préliminaire
Origine de la Théorie des fonctions
Classification des fonctions
Etude des fonctions
L'interpolation

Chapitre 5 - La Géométrie.
Origine des notions géométriques
Les axiomes et les diverses géométries
Divisions de la Géométrie

[2021] Basé sur la table des matières de l'ouvrage.

Annexe H : questions-réponses de Laisant dans les *Nouvelles annales de mathématiques*

Deuxième série, tome deuxième, 1863
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 634, p. 107.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 644, p. 418.
Réponse 680, p. 235, à la question de Vannson : « Soient O un cercle fixe, O’ un cercle mobile dont le centre se meut sur un autre cercle fixe O’’ : l’axe radical des deux premiers a pour enveloppe une conique », p. 390.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 702, p. 390.

Deuxième série, tome cinquième, 1866
Remarque sur la résolution par Laisant des questions 737 et 738, p. 172.
Réponse 675, p. 461-465.
Réponse 766, p. 466-469.
Remarque sur la résolution par Laisant des questions 775, 776, 777, p. 525.
Question 789, p. 528 : « On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le sommet de cette parabole. Chaque point de la circonférence de ce cercle étant pris comme pôle, on trace la polaire correspondante. Déterminer l'enveloppe de toutes ces droites. »

Deuxième série, tome sixième, 1867
Réponse 780, p. 34-35.
Réponse 781, p. 35-37[2022].
Réponse 673, p. 124-126[2023].
Réponse 683, p. 473-475.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 784, p. 84.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 790[2024], p. 141
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 765, p. 183.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 792, p. 186.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 769-770, p. 231.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 771, p. 285.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 799-800, p. 383.
Remarque sur la résolution par Laisant de la question 813, p. 384.

Deuxième série, tome septième, 1868
« Solution de la question 803 », p. 318-330[2025].
« Solution de la question 866 », p. 545[2026].
Réponse 769-770, p. 88-91.
Réponse 844, p. 187-188.
Réponse 840, p. 448[2027].
Réponse 827, p. 132[2028].

[2022] Propriétés d’équations à termes alternativement positifs et négatifs. Démonstration et rectification d’une erreur dont était entaché l’un des énoncés.
[2023] Généralisation de la question, donnant la solution du problème suivant : « Inscrire dans une courbe un triangle semblable à un triangle donné, et tel que l’un des sommets soit situé en un point donné sur la courbe. »
[2024] L’auteur généralise avec le cas d'une courbe quelconque roulant sur une courbe lui étant égale.
[2025] Question proposée par Haton de la Goupillière sur la recherche des transformations des courbes planes qui conservent certains éléments.
[2026] Concernant l’enveloppe des courbes décrites par les différents points d’une courbe plane mobile.
[2027] « Soit C un cercle, et O un point fixe de C. Soit OM une corde sur laquelle on porte OP tel que $OP^2 = OM^2 + Cste$. Par P, on mène une perpendiculaire à OP. Trouver l’enveloppe de cette perpendiculaire. »

Deuxième série, tome huitième, 1869
Réponse 902, p. 315-317.
Question 951, p. 336[2029] : « Montrer que

$$1/x - 1/(\tan x) = (1/2)\tan(x/2) + (1/2)^2\tan(x/2^2) + (1/2^3)\tan(x/2^3) + \ldots$$ »

Question 952, p. 336.
Question 953, p. 336.
Question 943, p. 276 : « Une courbe plane c roule sur une courbe fixe C, située dans le même plan, en entraînant un point mobile qui décrit alors une courbe b. À un instant donné, les deux courbes se touchent en A, et le point mobile étant en M, la courbe c s'arrête brusquement et la courbe C commence au contraire à rouler sur la première en entraînant le point M sur une courbe B. Démontrer que les centres de courbures des deux courbes b et B, au point commun M, divisent harmoniquement la longueur MA. »
Question 952, p 336: « Démontrer la formule $\sin x/x = \cos(x/2)\cos(x/2^2)\cos(x/2^3)\ldots$ »

Deuxième série, tome neuvième, 1870
Question 987, p. 144 : « Trouver la somme de la série

$$\cos^3\varphi - (1/3)\cos^3(3\varphi) + (1/3^2)\cos^3(3^2\varphi) - (1/3)^3\cos^3(3^3\varphi)\ \ldots$$ »

Deuxième série, tome treizième, 1874
Réponse 1134, p. 395-397.
Question 1143, p. 303: « construire une parabole connaissant le sommet, une tangente et un point. »

Deuxième série, tome quatorzième, 1875
Question 1171, p. 240 : « Soient M, A et B trois points d'une circonférence : trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en A, B aux droites MA, MB, lorsque le point M se déplace sur la circonférence. »
Question 1178, p. 336 : Soient P un point pris sur l'axe d'une conique à centre et MN une tangente quelconque limité aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe : démontrer que la puissance du point P, par rapport à la circonférence de diamètre MN, est constante.[2030]
Question 1179, p. 336 : Soient MN une tangente quelconque à une parabole, limitée en M à la tangente au sommet et en N à une perpendiculaire fixe quelconque, élevée sur l'axe de la courbe ; P un point fixe quelconque pris sur cet axe : démontrer que la puissance de point M, par rapport à la circonférence de diamètre N¨P est constante.[2031]

Deuxième série, tome quinzième, 1876
Réponse 65, p. 511-512.
Question 1202, p. 191: « La somme des puissances d'un point quelconque, par rapport aux circonférences décrites sur les quatre cotés d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale à 4 fois la puissance du même point par rapport à la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les milieux des diagonales. »

[2028] Déterminer géométriquement les trajectoires orthogonales :
1° de toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens.
2° de toutes les paraboles ayant même sommet et même axe.
[2029] Montrer que $1/x - 1/(\tan x) = (1/2)\tan(x/2) + (1/2)^2\tan(x/2^2) + (1/2^3)\tan(x/2^3) + \ldots$
[2030] S1178, NAM, t. 14, 1875, p. 464 par P. Sondat.
[2031] S1179, NAM, t. 14, 1875, p. 464 par P. Sondat.

Question 1211, p. 288: « On donne sur un plan un point fixe P, un cercle O et un point A sur la circonférence de ce cercle. Une seconde circonférence O' variable passe constamment par le point A, et son centre est situé sur la circonférence O. Déterminer l'enveloppe des polaires du point P, par rapport à O'. »

Deuxième série, tome seizième, 1877

Question 1224 : « Soit une famille de courbes planes représentées par l'équation f(x, y, α) = 0, α étant un paramètre variable ; trouver :
1° Le lieu des points où la tangente est parallèle à une droite donnée.
2° Le lieu des points où le rayon de courbure a une grandeur donnée.
Application aux paraboles de même axe et de même sommet, aux ellipses ayant un axe commun », p. 191.
Solution 1220, p. 234-235.
Correspondance : autre solution de la question 1226 : « Il s'agit, on le sait, de rendre sin x = (sin a + sin b)/(1 + sin a × sin b) calculable par des logarithmes. Si l'on pose sin a = tang α, sin b = tang β, il vient sin x = sin(α + β)/cos(α – β) » p. 376

Deuxième série, tome dix-septième, 1878

Remarque sur la résolution par Laisant des questions 1230[2032], p. 48.
Question 1265 : « Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O', trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe p, par rapport à O », p. 240.
Question 1276 : « Soient ABC un triangle, et O un point quelconque du plan ; démontrer que la puissance de O, par rapport au cercle circonscrit au triangle, a pour expression

$$\frac{a^2.\mathrm{OCB} + b^2.\mathrm{OAC} + c^2.\mathrm{OBA}}{\mathrm{ABC}},$$

a, b, c étant les longueurs des trois droites OA, OB, OC et les aires OCB… recevant des signes convenables, suivant le sens dans lequel elles sont parcourues », p. 336.
Question 1288 : « Une parabole P, de paramètre constant, se meut dans son plan parallèlement à elle-même, de façon que chacun de ses points décrive une parabole P' de paramètre donné, dont l'axe soit parallèle à celui de la parabole mobile. Trouver l'enveloppe des podaires d'un point fixe donnée, par rapport à la parabole P.
Même question en supposant la parabole P' remplacée par une droite de direction quelconque. » p. 479.
Question 1292 : « Démontrer qu'il est impossible de résoudre, en nombre entiers, aucune de ces trois équations indéterminées :
(1) $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 + x_6^6 + x_7^6 = 9x_8 + 8$, (2) $x^3 + y^6 = 9^z + 7$, (3) $x^3 + y^6 = 7^z + 5$. » p. 480.
Question 1293 : « Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube »[2033].
Question 1308 : « Soient O un point fixe dans un plan, M un point qui se meut dans ce plan, MV la vitesse à un instant quelconque, MU l'accélération. Démontrer que l'aire du triangle OMU mesure la dérivée de l'aire variable du triangle OMV par rapport au temps. », p. 563.

Deuxième série, tome dix-huitième, 1879

Réponse à la question 1294, p. 330.

[2032] « Soient O un point fixe dans le plan PQR et OPQ une sécante sur laquelle on prend un point S, de manière que OS = λOP + μOQ (λ et μ étant des constantes) ; démontrer que l'enveloppe d'une perpendiculaire à PQ, menée par le point S, est une conique. » Laisant utilise ici les équipollences.
[2033] Ces nombres ont parfois appelés nombres de Laisant : 1, 8, 17, 18, 26, 27.

Question 1320 : « Soit une série de cercles concentriques ; dans chacun d'eux on trace un rayon OM qui détache un secteur AOM d'aire donnée, à partir d'une droite fixe AOX passant par le centre O : trouver le lieu du point M. », p. 383.
Question 1333 : « Etant donné une spirale logarithmique, on trace la polaire du pôle de cette spirale par rapport au cercle osculateur à la courbe : trouver l'enveloppe de toutes les polaires ainsi obtenues. », p. 479.

Deuxième série, tome vingtième, 1881
Question 1370 : « Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA1 et BB1 ; par l'un des sommets réels A passe une sécante AMM', et les tangentes en M et M' se rencontrent en T : on demande de construire les deux courbes connaissant les points A, M et T. », p. 383.

Troisième série, tome quatrième, 1885 non publié
Remarque sur la résolution par Laisant des questions 1520[2034] de d'Ocagne, p. 56.
Remarque sur la résolution par Laisant des questions 1521[2035] de d'Ocagne, p. 389

Troisième série, tome onzième, 1892
"Solution de la composition de mathématiques données au concours d'admission de l'École polytechnique en 1892", p. 262 - 265.

Troisième série, tome quinzième, 1896
Question 1712 : « On considère une série d'hyperboles équilatères homothétiques par rapport à leur centre commun O, et dont l'axe transverse commun est OX. Dans chacune d'elles, on trace un rayon OM qui détache un secteur d'aire donnée à partir de OX. Trouver le lieu du point M. », p. 103.

Troisième série, tome seizième, 1897
Question 1712: « on considère une série d'hyperboles équilatères homothétiques par rapport à leur centre commun O, et dont l'axe transverse commun est OX; dans chacune d'elles, on trace un rayon OM qui détache un secteur d'aire donnée à partir de OX. Trouver le lieu du point M. », p. 49

Troisième série, tome dix-septième, 1898
Solution 176, p. 181.
Solution 243, p. 187.
Solution 341, p. 188.
Question 1786, p. 99.
Réponse 176, p. 181-182
Réponse 199, 243, 341 p.186-190

Troisième série, tome dix-huitième, 1899
Question 1815 : « Démontrer que l'expression $1 – a^2 + a^4 – … + a^{4^p} = (a^{4p+2} + 1)/(a^2 + 1)$ peut toujours être mises sous la forme de la somme de deux carrés, et que, si a est un nombre entier, les deux carrés en questions sont aussi des carrés », p. 148.

[2034] « Si du point O on voit le coté BC du triangle ABC sous un angle égal à A augmenté de 90°, on a entre les côtes a, b, c du triangle et les distances α, β, γ du point O aux sommets A, B, C la relation $a^2\alpha^2 = b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$ ».
[2035] « le point M étant pris d'une manière quelconque sur le coté BC du triangle ABC, on projette orthogonalement en B', C' les sommets B, C sur AM : démontrer que l'on a la relation : BC.AM = MB.AC' + MC.AB' »

Troisième série, tome dix-neuvième, 1900
Question 1856 : « des poids 1, 1, 2, 3, 5, …, u_n, mesurés par les nombres qui forment la suite de Fibonnacci, sont respectivement appliqués en des points d'une droite qui ont pour abscisses 1, 2, 3, ..., n. On demande de déterminer la position du barycentre de ce système. », p. 382.
Question 1877 : « On donne un triangle CAB. Sur AB et sur AC, comme demi diamètres conjugués, on construit une ellipse (E); sur AB, BC on construit pareillement une seconde ellipse (E'). Etudier les intersections des deux ellipses. », p. 571.
Question 1898 : « Soient ABCD un quadrilatère. A', B', C', D' les centres des cercles inscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC respectivement. α, β, γ, δ les périmètres de ces triangles. Démontrer que le centre de gravité des poids α, β, γ, δ placés en A, B, C, D est le même que celui des mêmes poids placés en A', B', C', D' respectivement. », p. 575.

Quatrième série, tome cinquième, 1905
Solution 2013 (question de Mannheim), p. 522.

Quatrième série, tome quinzième, 1915
Solution 1856 : question de LAISANT, p. 374-375.

Annexe I : Contributions de C.-A. Laisant à *L'Enseignement mathématique*

<u>Tome premier, 1899</u>
« Bibliographie - calcul de généralisation par G. Oltramare », p. 72-73.
« Le choix des sujets de composition », p. 120-123
« La mécanique rationnelle et la mécanique appliquée », p.238-246
« Réflexion sur le premier enseignement de la géométrie », p. 339-343
« Chronique - L'annuaire des mathématiciens », p. 463-464
« Chronique - Une proposition personnelle », p. 465.

<u>Tome deuxième, 1900</u>
« Les questions de terminologie », p. 22-28
« Chronique – M. Rebière », p. 144.
« Bibliographie – Leçons sur les fonctions entières par E. Borel », p. 146
« Bibliographie – Manuale di Trigonometrie Piana par G. Lazzeri », p. 147
« Bibliographie – Pour la Géométrie euclidienne par Cl. Vidal », p. 151

<u>Tome troisième, 1901</u>
« Bibliographie – Compendio di Aritmetica razionale par G.-M. Testi », p. 67
« Une exhumation géométrique », p. 98 - 105
« Bibliographie – Exercices d'arithmétique par J. Fitz Patrick et G. Chevrel », p. 145
« Transformation des coordonnées barycentriques », p. 208-210
« Chronique – La correspondance de G. Bellavitis », p. 297-298
« Bibliographie – Sur une série servant à définir le nombre π, rapport de la circonférence au diamètre par E. Estanave », p. 306
« Interprétation géométrique des dérivées partielles dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques », p. 406 - 422
« Chronique – L'amiral de Jonquières », p. 447-448

<u>Tome quatrième, 1902</u>
« A propos d'un discours », p. 6-9
« Bibliographie – Annuaire des mathématiciens 1901-1902 – Annuaire du bureau des longitudes pour 1902 – Revue décennale des thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris », p. 61-63
« Bibliographie – Elements of quaternions par W. R. Hamilton », p. 144-147
« Sur la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébriques », p. 201-204
« Remarques sur les bissectrices d'un angle », p. 284-287
Laisant et Fehr, « A. Cornu », p. 212-215.

<u>Tome cinquième, 1903</u>
« Bibliographie – Snyder et Hutchinson: Differential and integral calculus », p. 69-70
« Les nouveaux programmes de l'École polytechnique de Paris », p.77-84
« Bibliographie – E. Estanave : essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques », p. 147.
« Bibliographie - E. Pascal : Lezioni di calcolo infinitesimale », p. 150
« Bibliographie – Edouard Cannwell : La rotation de la terre démontrée par le pendule de Foucault; appareils des écoles », p. 229-230.
« Bibliographie – C. Alasia : I complementi di geometrica elementare », p. 230

Tome sixième, 1904
« Les programmes d'admission à l'École polytechnique de France, un rapport de M. Liard », p. 133-139
« Mélange – Procédés peu pédagogiques », p. 143
« Le rôle social de la science », p. 337- 362.
« Note sur le rapport de M. Liard », p. 137-139.

Tome septième, 1905
« Bibliographie – E. Carvallo : leçons d'électricité », p. 158-160.
« Mélange et Correspondance – Un calendrier perpétuel automatique », p. 233-234
« La fête du Soleil », p. 338-343

Tome huitième, 1906
« Philosophie et histoire des mathématiques – Sur l'évolution de la matière », p. 26
« D'Ocagne et Laisant, Mélange – Règle mnémotechnique pour retenir les analogies de M. Delambre », p. 226

Tome neuvième, 1907
« Lettre à M. Félix Le Dantec », p. 58-60
« La vie et les travaux d'Amédée Mannheim », p. 169 – 178.
« Mélange et correspondance – le lieu de naissance de Legendre », p. 218-219.

Tome dixième, 1908
« Propriété d'un système de deux triangles ou de deux tétraèdres », p. 50-55.
« Bibliographie – J. Neuberg : Cours d'Algèbre supérieure », p. 85-86
« Un nouveau théorème d'arithmétique », p. 220-225.

Tome treizième, 1911
« Charles Méray (1835-1911) », p. 181-186.

Tome quatorzième, 1912
« Émile Lemoine (1840-1912) », p.177 - 183
« Qu'est-ce qu'un vecteur ? », p. 362-365.

Tome quinzième, 1913
« Chronique – Gabriel Arnoux », p. 337-339.

Tome vingtième, 1918
« Bibliographie – G. Bouligand : Cours de géométrie analytique », p. 390-391.

Tome vingt-et-unième, 1920-1921
« Les deux suites fibonaciennes fondamentales (u_n) (v_n) tables de leur termes jusqu'à n = 120 », p. 52–56.
« Extension du problème des triangles héroniens », p. 82-84.

Charles-Ange Laisant.
Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)

Charles-Ange Laisant (1841-1920) est une figure, restée longtemps méconnue, des mathématiques de la fin du XIX^{e} et du début du XX^{e} siècle. La vie de ce polytechnicien d'origine nantaise présente de multiples et riches facettes. Ses carrières de militaire et d'homme politique s'entremêlent avec son parcours de mathématicien. À la suite de Jules Hoüel, il se montre un diffuseur actif de la méthode des équipollences de Giusto Bellavitis et de la théorie des quaternions en multipliant les applications de ces notions. Ami d'Édouard Lucas, Laisant produit également des résultats originaux sur la représentation de notions issues des mathématiques discrètes. Homme de réseaux, il est membre de multiples sociétés savantes en France (SMF, AFAS, Société philomathique de Paris). Persuadé que le progrès mathématique impose une plus grande communication entre ses acteurs, il fonde *L'Intermédiaire des mathématiciens* avec son ami Émile Lemoine et *L'Enseignement mathématique* avec le Suisse Henri Fehr. Après avoir été enseignant, son intérêt pour les questions d'éducation apparaissent ensuite plus présentes à la fin de sa carrière où s'installe également une réflexion plus large sur sa discipline. Notre travail s'efforce de discerner les différents itinéraires empruntés, de souligner les engagements inhérents à chacun d'entre eux afin de situer les travaux de Laisant dans la période considérée (1860-1914) et d'étudier la place particulière du personnage dans la communauté mathématique de son époque.

Charles-Ange Laisant.
Itineraries and involvements of a mathematician, from a century to an another (1841-1920)

Charles-Ange Laisant (1841-1920), associated to the period going from the end of the XIXth to the beginning of XXth century, is a mathematician who remained underestimated for a long time. The life of this graduate of the École Polytechnique presents various and rich aspects. His careers as both serviceman and politician interconnect his mathematical works. As Jules Hoüel, he is deeply involved in communication about the method of the equipollences from Giusto Bellavitis and the theory of quaternions. As Édouard Lucas's friend, he also produces original results on representations of notions originating in discrete mathematics. He is a member of various scientific french societies (SMF, AFAS, Société philomathique de Paris). In order to improve communication between mathematicians, he creates two reviews: *L'Intermédiaire des mathématiciens* with his close friend Émile Lemoine and *L'Enseignement mathématique* with the Swiss Henri Fehr. This work tries to discern the different itineraries taken by Laisant, to underline his involvements into each of them and to study his particular place in the mathematical community of his time.

Mots clés :
C.-A. Laisant, XIXe siècle, équipollences et vecteurs, quaternions, visualisation en mathématiques, géométrie combinatoire, communauté mathématique, Congrès internationaux des mathématiciens.

Discipline : Épistémologie et Histoire des sciences et des techniques

N° :
(attribué par la bibliothèque)